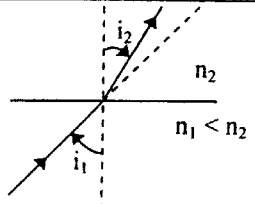
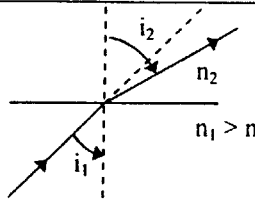
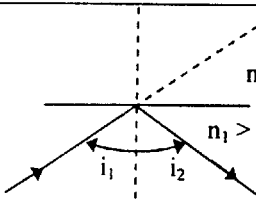
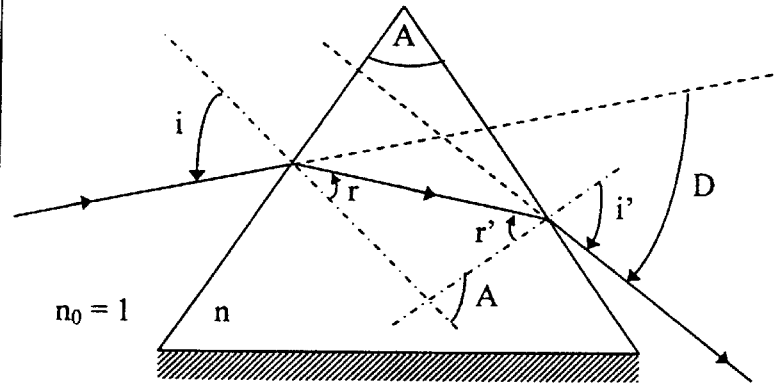
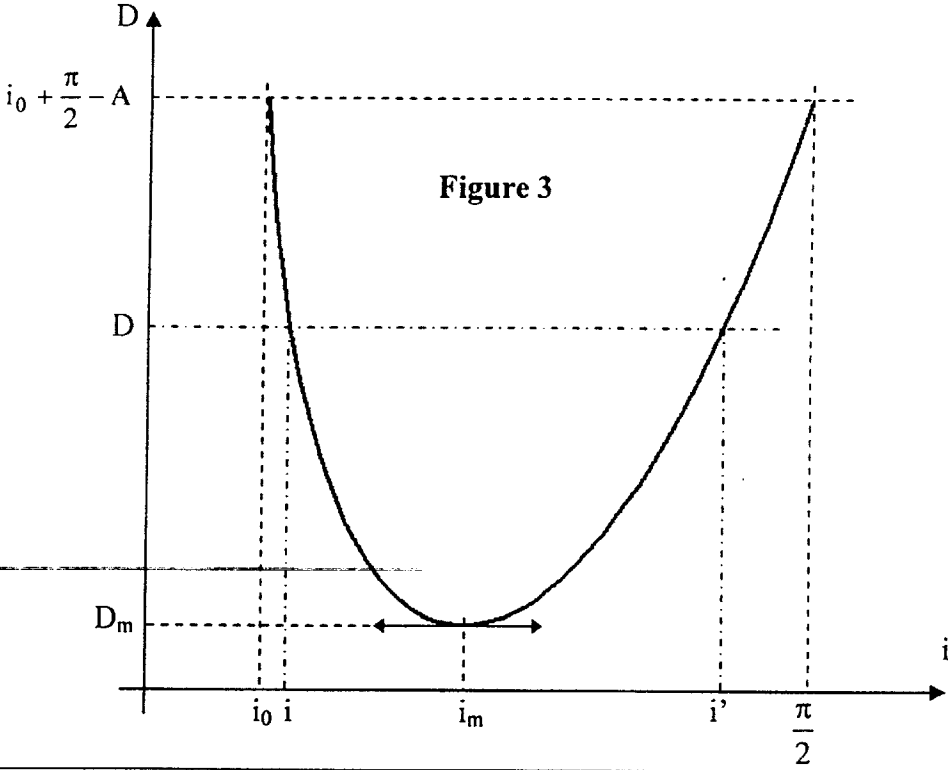


**Problème n°1 :**

Question	Première partie : optique géométrique et dispersion	Barème
1-	<p>Lois de Descartes :</p> <p>* Lois de la réflexion :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ le rayon réfléchi est contenu dans le plan d'incidence</li> <li>➤ l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence</li> </ul> <p>* Lois de la réfraction :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ le rayon réfracté est contenu dans le plan d'incidence</li> <li>➤ l'angle de réfraction et l'angle d'incidence vérifient la relation : <math>n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r)</math></li> </ul>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
2-	<p>* Réflexion : <math>D = \pi - 2i</math></p> <p>* Réfraction : <math>D = i - r</math> (sans tenir compte des orientations des angles), on accepte la réponse <math>D = r - i</math></p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
3-	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;">  <p>Le rayon réfracté existe pour toute incidence</p> <p><b>Figure 1</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Le rayon réfracté n'existe que si <math>i_1 &lt; i_c</math> telle que : <math>\sin(i_c) = \frac{n_2}{n_1}</math></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Le rayon réfracté n'existe pas si <math>i_1 &gt; i_c</math>, il y a réflexion totale</p> </div> </div>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
4-1-	 <p align="right"><b>Figure 2</b></p>	1
4-2-	<p>les quatre relations du prisme s'écrivent :</p> <div style="display: flex; justify-content: center; gap: 20px;"> <div> <math>\sin(i) = n \sin(r)</math> (1) </div> <div> <math>n \sin(r') = \sin(i')</math> (2) </div> <div> <math>A = r + r'</math> (3) </div> <div> <math>D = i + i' - A</math> (4) </div> </div>	<p>0,5 pour (1) + (2)</p> <p>1,5 pour (3) + (4)</p>
4-3-	<p>Conditions d'émergence : le rayon émergent n'existe que lorsque l'angle <math>r'</math> reste inférieure à l'angle limite de réfraction définie par :</p>	

	$\Lambda = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ , ce qui donne $i \geq i_0$ tel que $i_0 = \arcsin(n \sin(A - \Lambda))$ $\Lambda \leq A \leq 2\Lambda$ <i>Application numérique</i> : $\Lambda = 40^\circ 08'$ ; $i_0 = 29^\circ 26'$ On voit que la condition $\Lambda \leq A \leq 2\Lambda$ est bien vérifiée. Pour qu'un rayon incident émerge du prisme, il faut que son angle d'incidence vérifie la condition : $i \in \left[i_0, \frac{\pi}{2}\right]$ .	1,5 0,5 + 0,5
4-4-1-		1
4-4-2-	<p>D'après la figure 3, à toute déviation D correspond deux angles i et i'. A l'angle d'incidence i, correspond l'angle d'émergence i' et inversement (principe de retour inverse de la lumière). Au minimum de déviation, le prisme est symétrique car à D<sub>m</sub> correspond une seule valeur i<sub>m</sub>. donc i = i' = i<sub>m</sub> ⇒ r<sub>m</sub> = r'<sub>m</sub> = <math>\frac{A}{2}</math>.</p> <p>Dans ce cas, on aura : D<sub>m</sub> = 2i<sub>m</sub> - A, soit i<sub>m</sub> = <math>\frac{A + D_m}{2}</math></p> <p>Loi de Descartes <math>\sin(i_m) = n \sin(r_m)</math> donne <math>n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}</math></p> <p>Connaissant l'angle A du prisme, une mesure expérimentale de D<sub>m</sub> permet la détermination de n.</p> <p>i<sub>m</sub> = 49° 28' ; D<sub>m</sub> = 38° 56'</p>	1 0,5 0,5
4-5-	L'angle de déviation D est une fonction de l'angle d'incidence et de la longueur d'onde de la radiation utilisée. En lumière polychromatique, chaque radiation va subir sa propre déviation : c'est le phénomène de dispersion.	1

	Dans le domaine visible, la radiation bleue est plus déviée que la radiation rouge.	
4-6-	<p>Différentiant les quatre relations du prisme, dans le cas d'une incidence fixe <math>i = \text{constante}</math>.</p> $0 = dn \sin r + n \cos r dr$ $\cos i' di' = dn \sin r' + n \cos r' dr'$ $0 = dr + dr'$ $dD = di'$ $\frac{dD}{d\lambda} = \frac{dD}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\sin(A)}{\cos i' \cos r} \frac{dn}{d\lambda} ; \text{ avec } \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2b}{\lambda^3}$ <p>Au minimum de déviation, on aura : <math>\left(\frac{dD}{d\lambda}\right)_{i_m} = \frac{2 \sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos(i_m)} \frac{dn}{d\lambda}</math></p> <p>Application numérique :</p> $\frac{dn}{d\lambda} = 10^{-1} \mu\text{m}^{-1} = 10^5 \text{ m}^{-1} ; \left(\frac{dD}{d\lambda}\right)_{i_m} = 1,539 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$	<p>1,5</p> <p>0,5</p>
5-	<p>Sur l'écran placé au plan focal image de la lentille de focale <math>f_2 = 40 \text{ cm}</math>, on peut écrire :</p> $\Delta x \approx f_2 \Delta D \Rightarrow \Delta x \approx f_2 \left(\frac{dD}{d\lambda}\right)_{i_m} \Delta \lambda , \text{ ce qui donne } \Delta \lambda = \frac{\Delta x}{f_2 \left(\frac{dD}{d\lambda}\right)_{i_m}}$ <p>Application numérique : <math>\Delta \lambda = 30,9 \cdot 10^{-9} \text{ m} ; \lambda_2 = 577 \text{ nm}</math></p>	<p>1,5</p> <p>0,5</p>
6-1-	Condition de guidage dans le cœur de la fibre : le rayon doit subir des réflexions totales à chaque fois qu'il rencontre le dioptré de séparation cœur – gaine. Ceci n'est possible que si les indices de réfraction vérifient la condition $n_1 > n_2$ .	0,5
6-2-	<p>La figure 4 illustre l'exemple d'un rayon guidé sans que sa trajectoire soit située dans un même plan.</p> <div data-bbox="175 1265 598 1691" data-label="Image"> </div> <p><b>Figure 4</b></p> <p>Coupe transversale montrant la trajectoire d'un rayon lumineux incident dans un plan non méridien</p> <p>Pour que le trajet du rayon guidé le long de la fibre soit plan, il faut que le plan d'incidence à l'entrée de la fibre contienne l'axe de celle-ci : plan méridien.</p>	0,5

6-3-

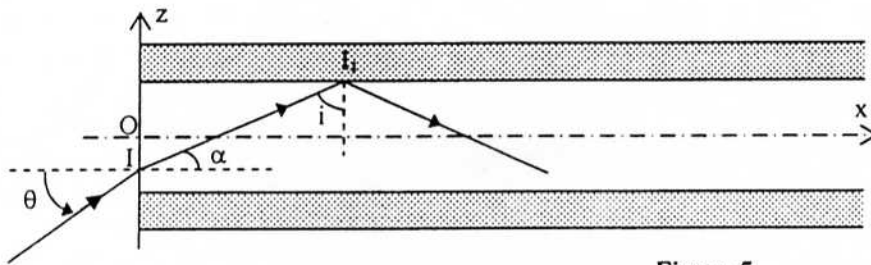


Figure 5

Réflexion totale au point  $I_1$  si :

$$\sin i \geq \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \cos \alpha \geq \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow 1 - \sin^2 \alpha \geq \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2, \text{ en utilisant la loi de}$$

Descartes  $n_0 \sin \theta = n_1 \sin \alpha$ , la relation précédente s'écrit :

$$1 - \frac{n_0^2}{n_1^2} \sin^2 \theta \geq \frac{n_2^2}{n_1^2}, \text{ soit } n_0 \sin \theta \leq n_1 \sqrt{2\Delta}$$

La valeur maximale est  $n_0 \sin \theta_a = n_1 \sqrt{2\Delta}$

2

6-4-

Ouverture numérique :  $ON = n_1 \sqrt{2\Delta}$

Application numérique :  $ON = 0,21$  et  $\theta_a = 12^\circ 14'$

0,5

0,5

6-5-1-

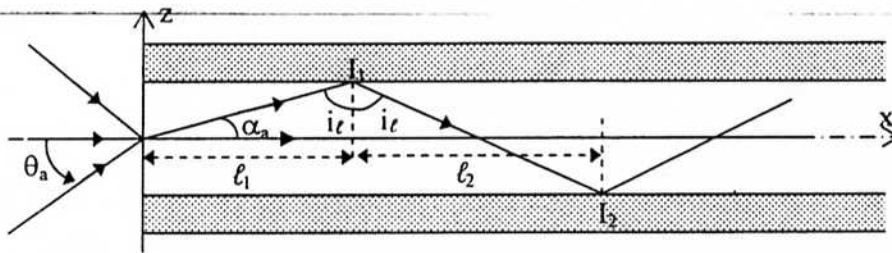


Figure 6

Le rayon qui arrive au point O avec une incidence normale à la face d'entrée met le temps minimal  $t_{\min} = \frac{n_1 \ell}{c}$  pour parcourir la distance  $\ell$ .

Celui qui arrive avec l'incidence  $\theta_a$  met le temps maximal.

$$t_{\max} = \frac{n_1 OI_1}{c} + \frac{n_1 I_1 I_2}{c} + \dots = \frac{n_1 \ell}{c \sin i_e}$$

or  $\sin i_e = \cos \alpha_a = \sqrt{1 - 2\Delta}$ , l'expression de  $t_{\max}$  devient :

$$t_{\max} = \frac{n_1 \ell}{c \sqrt{1 - 2\Delta}}$$

$$\text{d'où } \delta t = \frac{n_1 \ell}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 2\Delta}} - 1 \right)$$

En utilisant le fait que  $\Delta \ll 1$ , on peut écrire :  $\delta t \approx \frac{n_1 \ell \Delta}{c}$

Application numérique :  $\delta t = 10^{-7} \text{ s} = 0,1 \mu\text{s}$

0,5

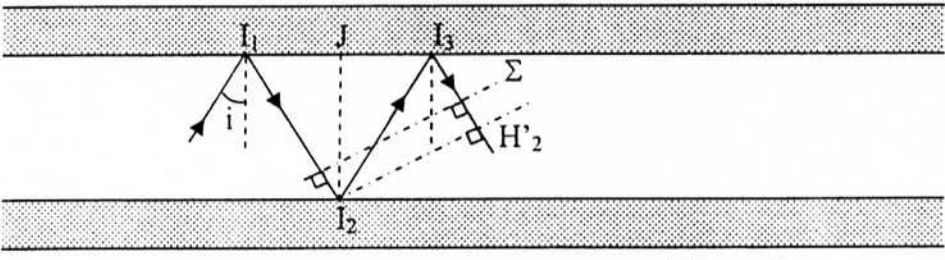
0,5

0,5

0,5

0,5



6-5-2-	La durée qui doit séparer deux impulsions successives pour qu'elles ne se superposent pas à la sortie de la fibre est $T \geq \delta t$ . Au minimum $T = \delta t = 10^{-7} \text{ s}$ . Le débit maximal de la ligne constituée par cette fibre est $Db_{\max} = 10^7 \text{ bits/seconde} = 10 \text{ Mb.s}^{-1}$ .	0,5 0,5 0,5
<b>Deuxième Partie : Dispersion intermodale dans une fibre optique :</b>		
7-1-	 <p style="text-align: center;"><b>Figure 8</b></p> <p>La différence de marche demandée peut être calculée en considérant le plan d'onde parallèle à <math>(\Sigma)</math> et passant par <math>I_2</math> (Figure 8).  <math>\delta = n_1(I_2 I_3 + I_3 H'_2) \Rightarrow \delta = n_1 I_2 I_3 (1 + \cos 2i)</math>.  Or <math>I_2 I_3 = \frac{d_1}{\cos i} \Rightarrow \delta = 2 n_1 d_1 \cos i</math></p>	0,5  1,5
7-2-	$H_1$ et $H_2$ appartiennent à la même surface d'onde $\Rightarrow \delta = p \lambda$ , où $p$ est un entier $\Rightarrow 2 n_1 d_1 \cos i = p \lambda \Rightarrow n_0 \sin \theta = p \frac{\lambda}{2 d_1}$	1
7-3-	7-3- Le mode correspondant à $p = 0$ est toujours possible. Les modes possibles : $\sin \theta \leq \sin \theta_a \Rightarrow p \leq \frac{2 n_1 d_1}{\lambda} \sqrt{2 \Delta}$ Le nombre de modes guidés est, $N_g = 1 + E\left(\frac{2 n_1 d_1}{\lambda} \sqrt{2 \Delta}\right)$ où $E$ : la partie entière du terme entre parenthèses.	0,5 1 1
7-4-1-	Fibre monomode si $\frac{2 n_1 d_1}{\lambda} \sqrt{2 \Delta} < 1 \Rightarrow d_1 < \frac{\lambda}{2 n_1 \sqrt{2 \Delta}}$ Application numérique : $d_1 < 3,65 \mu\text{m}$	0,5 0,5
7-4-2-	$d_1 = 30 \mu\text{m}$ , $N_g = 9$ modes. Modes possibles : $p \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	1
7-5-	Mode le plus rapide $t_1 = \frac{n_1 \ell}{c}$ . Mode le plus $t_2 \leq \frac{n_1 \ell}{c \sin i_c}$ . La différence $\delta t'$ vérifie l'inéquation $\delta t' \leq \frac{n_1 \ell}{c} \Delta$ . On déduit que $\delta t' \approx \frac{n_1 \ell}{c} \Delta$	0,5 0,5 0,5
7-6-	On trouve $\delta t' = \delta t$ . L'étalement temporel de l'impulsion lumineuse est un phénomène de dispersion. Dans le cas d'une fibre multimode, le temps de parcours dans la fibre dépend du mode considéré. Il s'agit du phénomène de dispersion intermodale.	0,5 0,5
<b>Troisième Partie : Dispersion et atténuation des ondes électromagnétiques</b>		
8-	$\tau$ : durée de relaxation, s'exprime en seconde. Les pertes d'énergie sont dues essentiellement au rayonnement de l'énergie par l'électron accéléré.	0,5 0,5

9-	Relation fondamentale de la dynamique : $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}$	1,5
10-	Régime forcé $\vec{r} = \frac{-\frac{e}{m} \vec{E}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega}{\tau}} e^{j\omega t}$	1,5
11-	Le moment dipolaire associé à l'électron s'écrit $\vec{p} = -e\vec{r} = \frac{\frac{e^2}{m} \vec{E}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega}{\tau}} e^{j\omega t}$ <p>Le vecteur polarisation est donné par</p> $\vec{P} = N\vec{p} = \frac{\frac{Ne^2}{m} \vec{E}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega}{\tau}} e^{j\omega t} = \frac{\epsilon_0 \Omega^2 \vec{E}_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega}{\tau}} e^{j\omega t}$	1  1
12-1-	Equations de Maxwell : $\text{div} \vec{D} = \rho_{lib} = 0 \quad \text{div} \vec{B} = 0$ $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{lib} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ <p>Avec <math>\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}</math> et <math>\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}</math>.</p>	1
12-2-	En appliquant le rotationnel à l'équation de Maxwell Faraday et en tenant compte du fait que $\text{div} \vec{D} = 0$ , on démontre facilement l'équation demandée : $\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad}(\text{div} \vec{P})$	1
12-3-	Equation de dispersion : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}} \right)$	1
12-4-	$\underline{n}^2(\omega) = 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}}$	0,5
12-5-	$\underline{n}(\omega) = n'(\omega) - jn''(\omega)$ $n'(\omega)$ : Indice de réfraction, lié à la vitesse de phase (milieu transparent). $n''(\omega)$ : Indice d'extinction qui rend compte de l'absorption (milieu absorbant) <p>Le champ électrique de l'onde s'écrit <math>\vec{E} = E_0 e^{-\frac{\omega n''}{c} x} e^{j\left(\omega t - \frac{\omega n'}{c} x\right)} \vec{u}_z</math>  L'amplitude du champ décroît d'une façon exponentielle au cours de la propagation.  La phase de l'onde se propage à la vitesse <math>v_\phi = \frac{c}{n'}</math></p>	0,5  0,5  0,5

12-6-	<p>Atténuation la plus faible : domaine de pulsation où <math>n''(\omega)</math> est négligeable. C'est les domaines <math>\omega \ll \omega_0</math> et <math>\omega \gg \omega_0</math>.</p> <p>Dans le domaine du rouge et du proche infrarouge, la longueur d'onde <math>\lambda \approx 1\mu\text{m}</math>, ce qui correspond à une pulsation <math>\omega \approx 2.10^{15} \text{ rad.s}^{-1} \ll \omega_0 = 10^{17} \text{ rad.s}^{-1}</math>. L'atténuation est donc négligeable. Les fréquences utilisées restent élevées, ce qui permet d'avoir un débit élevé pour la transmission des informations.</p>	0,5  1
12-7-1-	<p>Dans le domaine visible, la condition <math>\omega \ll \omega_0</math> est vérifiée.</p> <p>Un développement limité à l'ordre un en <math>\frac{\omega}{\omega_0}</math> donne,</p> $n^2(\omega) \approx n'^2(\omega) = 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\Omega^2 \omega^2}{\omega_0^4} =$ $n_0^2 + \frac{B}{\lambda^2} = n_0^2 \left(1 + \frac{B}{n_0^2 \lambda^2}\right)$ $n(\omega) \approx n_0 \left(1 + \frac{B}{2n_0^2 \lambda^2}\right) = n_0 + \frac{B}{2n_0} \frac{1}{\lambda^2} = a + \frac{b}{\lambda^2},$ $a = \sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}, \quad b = \frac{4\pi^2 \Omega^2}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}}$ <p>Dans le domaine visible, le verre est un milieu transparent, d'indice de réfraction supérieur à l'unité et dispersif. Ceci justifie son utilisation pour tailler des prismes performants dans l'analyse de la lumière visible (dispersion sans absorption) et qui sont utilisés dans les spectroscopes.</p>	0,5          1  1
12-7-2-	<p>La vitesse de phase est donnée par <math>v_\phi = \frac{c}{n'} = \frac{c}{a + \frac{b}{\lambda^2}}</math></p> <p>La vitesse de groupe est définie par <math>v_g = \frac{d\omega}{dk}</math>. En différentiant l'équation reliant <math>k</math> et <math>\omega</math>, on trouve <math>v_g = \frac{v_\phi}{1 + \frac{\omega}{n} \left(\frac{dn}{d\omega}\right)} = \frac{v_\phi}{1 - \frac{\lambda}{n} \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)}</math></p>	0,5       1