Correction de l'épreuve de physique
Filière : Physique - Chimie
Session : Juin 2006

Partie I	Barème 32
1- $P_1(x,t) \ll P_0$; $\rho_1(x,t) \ll \rho_0$ et $v(x,t) \ll c$. donc ρ_1, P_1 et $\vec{v}$ sont des infiniments petit du premier ordre.	1,5
-1- $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho(x,t)\,\vec{v}(x,t)\right) = 0$ $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0+\rho_1) + \mathrm{div}\left((\rho_0+\rho_1)\vec{v}\right) = 0$ le terme $\rho_1 \vec{v}$ est infiniment petit d'ordre 2 qui sera négligé ; $\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} = -\rho_0\, \mathrm{div}\, \vec{v}(x,t)$ d'où : $\boxed{\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)}$ 1	1
-2- Le signe (−) traduit la diminution de la masse dans un volume de contrôle lorsqu'il s'agit d'un flux de masse sortant du même volume.	0,5
-1- Equation d'Euler : $\rho(x,t) \cdot \frac{D\vec{v}(x,t)}{Dt} = \rho(x,t)\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(x,t) + (\vec{v}(x,t)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}(x,t)\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p(x,t)$. avec $\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$ et $p(x,t) = p_0 + p_1(x,t)$.	0,5
-2- Le terme $(\vec{v}(x,t)\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}).\vec{v}(x,t)$ est un terme infiniment petit d'ordre 2 qu'on néglige.	

$$\left(\rho_0+\rho_1(x,t)\right)\cdot\frac{\partial\vec{v}(x,t)}{\partial t}\simeq\rho_0\,\frac{\partial\vec{v}(x,t)}{\partial t}=-\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_1(x,t).$$

enfin :
$$\rho_0\,\frac{\partial\vec{v}(x,t)}{\partial t}=-\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_1(x,t).$$ (1,...)

$$\Rightarrow\ \boxed{\rho_0\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}}\quad (2)$$

4- $$\chi_s=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial p(x,t)}\right)_s\simeq\frac{1}{\rho_0}\,\frac{\rho_1(x,t)}{p_1(x,t)}.$$ (1,5)

$$\Rightarrow\ \boxed{\rho_1(x,t)=\chi_s\,\rho_0\,p_1(x,t)}\quad (3)$$

5- (3) dans (1) $\Rightarrow$ $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\chi_s\,\rho_0\,p_1(x,t)\right)=-\rho_0\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

$$\begin{cases}\chi_s\,\dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial t}=-\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} & \times\,\dfrac{\partial}{\partial t}\\[2mm] \rho_0\,\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}=-\dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} & \times\,\dfrac{\partial}{\partial x}.\end{cases}$$ (1,5)

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial x^2}-\chi_s\rho_0\,\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2}=0.}$$

$\chi_s\rho_0$ est homogène à l'inverse d'une célérité au carrée

Equation en $v(x,t)$

$$\begin{cases}\chi_s\,\dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial t}=-\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x} & \times\,\dfrac{\partial}{\partial x}\\[2mm] \rho_0\,\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}=-\dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} & \times\,\dfrac{\partial}{\partial t}.\end{cases}$$ (1)

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}-\rho_0\,\chi_s\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}=0}$$

-1-	En Comparant les équations obtenues à l'équation de propagation D'Alembert, on trouve $C^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_s}$ $\Rightarrow C = \sqrt{\frac{1}{\chi_s \rho_0}}$ exprimée en m/s	1
-2-	$C = \sqrt{\frac{1}{\chi_s \rho_0}}$ pour un gaz parfait $\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}$ $\chi_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \simeq \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1(x,t)}{p_1(x,t)}$. En présence d'une onde acoustique, un gaz parfait subit une évolution adiabatique et réversible donc isentropique. On ~~peut~~ appliquer la loi de Laplace: $pV^\gamma = cte$ ou $p\rho^{-\gamma} = cte \Rightarrow \frac{dp}{\rho^\gamma} - \gamma p \frac{d\rho}{\rho^{\gamma+1}} = 0$ $\Rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$. $\chi_s = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{\rho} \frac{\rho}{\gamma p} = \frac{1}{\gamma p} = \frac{1}{\gamma} \frac{M}{\rho RT} \simeq \frac{1}{\gamma} \frac{M}{\rho_0 RT}$ $C = \sqrt{\frac{1}{\chi_s \rho_0}} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{\gamma \rho_0 RT}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ $\boxed{C = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \text{ en m/s}}$	1,5
-	A.N $C = \sqrt{\frac{1{,}4 \times 8{,}314 \times 298}{29\ 10^{-3}}} = 345{,}8 \text{ m/s}$	0,5

7-1-	$p_1(x,t)$ traduit une onde acoustique plane progressive harmonique se propageant suivant les x croissants à la célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\chi_s \rho_0}}$ Le caractère progressif de l'onde se traduit par la dépendance des variables spatiale et temporelle $\left(t - \frac{x}{c}\right)$ de la fonction d'onde.	(1)
7-2-	$p_1(x,t)$ présente une double periodicité : spatiale et temporelle λ est la distance traversée par l'onde sinusoïdale pendant la période T lors de la propagation. $\lambda = cT = \frac{c}{f}$ • Ultrason : $f = 4\ 10^4\ Hz$ à $T = 298 K$ $c = 345{,}8\ m/s \Rightarrow \underline{\lambda = 0{,}865\ cm}$. • Son audible $f = 400\ Hz$ $c = 345{,}8\ m/s \Rightarrow \underline{\lambda = 0{,}865\ m}$.	(0,[illegible]) (0,5) (0,5)
8-1-	$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \Rightarrow v(x,t) = \frac{1}{\rho_0 c} p_1(x,t)$ $p_1(x,t) = p_m \cos(\omega t - kx)$ $\Rightarrow v(x,t) = \frac{1}{\rho_0 c} p_m \cos(\omega t - kx) = v_m \cos(\omega t - kx)$ $\Rightarrow v_m = \frac{p_m}{\rho_0 c}$	(1,5)

.2- $p_m = 8 \cdot 10^{-2}\,\text{Pa}$; $c_{air} = \sqrt{\dfrac{\gamma R T}{M}} = 345{,}8\ \text{m/s}$.

$$V_m = \frac{1}{\rho_0 C} = \frac{1}{1{,}3 \times 345{,}8} = 0{,}18\ 10^{-3}\ \text{m/s}$$ (0,5)

$$P_{1max} = p_m = 8\ 10^{-2}\,\text{Pa} << P_0 = 10^5\,\text{Pa}.$$

$$V_m = 0{,}18\ 10^{-3}\ \text{m/s} << C = 345{,}8\ \text{m/s}$$

et $\rho_{1max} = \rho_m = \chi_s \rho_0 p_m = \dfrac{1}{C^2} p_m << \rho_0$ (1,5)

$$\rho_m = 6{,}7\ 10^{-7}\ \text{kg/m}^3 << \rho_0 = 1{,}3\ \text{kg/m}^3.$$

Les approximations acoustiques sont vérifiées.

.1- Par définition $\underline{Z} = \dfrac{\underline{P_1}(x,t)}{\underline{V}(x,t)} = \dfrac{P_m}{V_m} = \rho_0 C$

l'impédance acoustique ne dépend que des caractéristiques du milieu ρ_0 et $C = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$ (1)

En électricité, $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{i}}$ est le rapport de la tension appliquée à un dipole (excitation) par le courant qui en résulte (réponse).

A partir d'une analogie électrique - mécanique, l'impédance acoustique est définie par le rapport de l'effort de la pression par la vitesse du fluide. (1)

$$\boxed{\underline{Z} = Z_c = \rho_0 C}$$

.2- $Z(\text{air}) = \rho_0 C = 1{,}3 \times 345{,}8 = 449{,}5\ \text{kg}\,\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$

$Z(\text{eau}) = \rho_0 C = \rho_0 \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}} = \sqrt{\dfrac{\rho_0}{\chi_s}} = 1{,}49 \cdot 10^6\ \text{kg}\,\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$ (0,5)

On remarque que : $Z(\text{air}) << Z(\text{eau})$.

10-1- $dE_c = \frac{1}{2} dm\, V^2(x,t)$

c'est l'énergie cinétique relative à une masse élémentaire contenue dans le volume $d\tau$ et animée de la vitesse $V(x,t)$; $dm = \rho(x,t)\, d\tau$. (1,5)

$dE_c = \frac{1}{2} \rho(x,t)\, V^2(x,t)\, d\tau = e_c\, d\tau$.

$e_c = \frac{1}{2} \rho(x,t)\, V^2(x,t) \simeq \frac{1}{2} \rho_0\, V^2(x,t)$.

l'énergie cinétique volumique $\boxed{e_c = \frac{1}{2} \rho_0\, V^2(x,t)}$

10-2- $e_p = \frac{1}{2} \chi_s\, p_1^2(x,t)$ avec $p_1 = \rho_0 c\, V$

$e_p = \frac{1}{2} \chi_s\, \rho_0^2 c^2\, V^2(x,t) = \frac{1}{2} \rho_0\, V^2(x,t)$ (1,5)

l'énergie mécanique volumique : $e = e_c + e_p$.

$e = \frac{1}{2} \chi_s\, p_1^2 + \frac{1}{2} \rho_0\, V^2 = \rho_0\, V^2(x,t)$ en $J\, m^{-3}$

11-1- $e(x,t) = \rho_0\, V_m^2 \cos(\omega t - kx)$ (1)

$\langle e(x,t) \rangle_t = \frac{1}{2} \rho_0\, V_m^2 = \frac{1}{2} \chi_s\, p_m^2$

11-2- L'énergie acoustique relative à une onde traversant une surface $S \perp$ à la direction de propagation pendant la durée dt est contenue dans un volume, de ~~sed~~ surface de base S et de hauteur $c\,dt$: $dE = e\, d\tau = e.S.c.dt$ (1)

$\mathcal{P} = \frac{dE}{dt} = e.S.c$: puissance acoustique.

$\langle \mathcal{P} \rangle = S.c \langle e \rangle = S.c\, \frac{1}{2} \rho_0\, V_m^2 = \frac{1}{2} \frac{S}{\rho_0 c}\, p_m^2$

$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \frac{S}{\rho_0 c}\, p_m^2}$ en Watts (1)

1-3-	$I = \frac{\langle P \rangle}{S} = \frac{1}{S}\frac{\langle dE \rangle}{dt} = \frac{1}{2}\rho_0 V_m^2 C \; ; V_m^2 = \frac{1}{\rho_0^2 C^2} p_m^2$	
	$\boxed{I = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho_0 C}}$ en Watts/m^2	1
	à $T = 298K$; $C = 345,8$ m/s	
	$I = \frac{1}{2}\frac{64.(10^{-4})^2}{1,3 \times 345,8} = 7,12\ 10^{-10}\ W\,m^{-2}$.	1
2-1-	$I_0 = 10^{-12}\ W\,m^{-2}$ est l'intensité acoustique de référence. Elle correspond au seuil auditif limite pour une fréquence 1000Hz.	1
	A.N: $p_m = 8\ 10^{-4}\ Pa$ et $C = 345,8$ m/s à $T = 298K$	
	$I = 7,12\ 10^{-10}\ W\,m^{-2}$	1
	$N(dB) = 10 \log_{10}\frac{7,12\ 10^{-10}}{10^{-12}} = 28,5$ dB.	
-2-	$N = 120\ dB = 10\log_{10}\frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow \log_{10}\frac{I}{10^{-12}} = 12$	
	$\Rightarrow I = 1 = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho_0 C} \Rightarrow p_m = \sqrt{2\rho_0 C} = 30\ Pa$	1
	PARTIE II	12 pts
3-1-	$\cdot\ p_{1i}(x,t) = p_m \cos(\omega t - k_i x)$; $\vec{k}_i = \frac{\omega}{C_a}\vec{e}_x$	
	$\cdot\ p_{1r}(x,t) = p_{mr}\cos(\omega t - k_r x)$; $\vec{k}_r = k_r\vec{e}_x = -\frac{\omega}{C_a}\vec{e}_x$	1
	$= p_{mr}\cos(\omega t + \frac{\omega}{C_a}x)$	
	$\cdot\ p_{1t}(x,t) = p_{mt}\cos(\omega t - k_t x)$; $\vec{k}_t = \frac{\omega}{C_b}\vec{e}_x$	1
	$= p_{mt}\cos(\omega t - \frac{\omega}{C_b}x)$	

13-2- Pour une onde harmonique, on a:

$$\rho_{0a}\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p_{1i}(x,t)}{\partial x} \rightarrow v_i(x,t) = \frac{1}{\rho_{0a}C_a} p_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{C_a}x\right)$$ (1)

$$\rho_{0a}\frac{\partial v_r(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p_{1r}(x,t)}{\partial x} \Rightarrow v_r(x,t) = \frac{-1}{\rho_{0a}C_a} p_{mr} \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{C_a}x\right)$$ (1)

$$\rho_{0b}\frac{\partial v_t(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p_{1t}(x,t)}{\partial x} \Rightarrow v_t(x,t) = \frac{1}{\rho_{0b}C_b} p_{mt} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{C_b}x\right).$$ (1)

14-1- • Conservation du débit volumique à travers l'interface S située en $x = 0$.

$$q_{V_a}(x=0,t) = q_{V_b}(x=0,t) \Leftrightarrow v_a(x=0,t)S = v_b(x=0,t)S \ (*)$$

$$v_a(x=0,t) = v_i(x=0,t) + v_r(x=0,t)$$

$$v_b(x=0,t) = v_t(x=0,t)$$

$$(*) \Rightarrow v_i(x=0,t) + v_r(x=0,t) = v_t(x=0,t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_m}{\rho_{0a}C_a} - \frac{p_{mr}}{\rho_{0a}C_a} = \frac{p_{mt}}{\rho_{0b}C_b} \Rightarrow p_m - p_{mr} = \frac{\rho_{0a}C_a}{\rho_{0b}\cdot C_b}\, p_{mt}$$

$$Z_a = \rho_{0a}C_a \text{ et } Z_b = \rho_{0b}\cdot C_b$$

$$\rightarrow \boxed{p_m - p_{mr} = \frac{Z_a}{Z_b} p_{mt}} \ \text{I}$$ (1)

• Continuité de la surpression à l'interface

$$p_{1a}(x=0,t) = p_{1b}(x=0,t)$$

$$\Rightarrow p_{1r}(x=0,t) + p_{1i}(x=0,t) = p_{1t}(x=0,t)$$

$$\rightarrow \boxed{p_m + p_{mr} = p_{mt}} \ \text{II}$$ (1)

$$\text{I} + \text{II} \Rightarrow 2p_m = \left(1 + \frac{Z_a}{Z_b}\right)p_{mt} \Rightarrow \boxed{p_{mt} = \frac{2Z_a}{Z_a+Z_b}p_m.}$$

$$p_{mr} = p_{mt} - p_m = \left(\frac{2Z_a}{Z_a+Z_b} - 1\right) p_m$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{mr} = \frac{Z_b - Z_a}{Z_b + Z_a}}$$

$$r = \frac{p_{1r}(x=0,t)}{p_{1i}(x=0,t)} = \frac{p_{mr}}{p_m} = \frac{Z_b - Z_a}{Z_b + Z_a}$$ (0,5)

r: Coefficient de réflexion en amplitude de la surpression.

$$t = \frac{p_{1t}(x=0,t)}{p_{1i}(x=0,t)} = \frac{p_{mt}}{p_m} = \frac{2Z_b}{Z_a+Z_b}$$ (0,5)

t: Coefficient de transmission en amplitude de la surpression

4-2- D'après la question 1-3, $I = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho_0 C}$

d'où; $I_i = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho_{0a}C_a}$; $I_r = \frac{1}{2} p_{mr}^2/\rho_{0a}C_a = \frac{1}{2}\frac{r^2 p_m^2}{\rho_{0a}C_a}$ (1)

$$I_t = \frac{1}{2}\frac{p_{mt}^2}{\rho_{0b}C_b} = \frac{1}{2} t^2 \frac{p_m^2}{\rho_{0b}C_b}$$

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\frac{1}{2} r^2 p_m^2/\rho_{0a}C_a}{\frac{1}{2} p_m^2/\rho_{0a}C_a} = r^2 \Rightarrow R = \frac{(Z_b - Z_a)^2}{(Z_b + Z_a)^2}$$ (0,5)

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\frac{1}{2} t^2 p_m^2/\rho_{0b}\cdot C_b}{\frac{1}{2} p_m^2/\rho_{0a}C_a} = \frac{Z_a}{Z_b} t^2 \Rightarrow T = \frac{4Z_aZ_b}{(Z_a+Z_b)^2}$$ (0,5)

On montre que $R + T = 1$

Cette relation traduit la conservation de l'énergie à l'interface séparant les deux milieux. (0,5)

14-3	• Si $Z_a << Z_b$ Cas d'interface air-eau. $R \longrightarrow 1$ et $T \longrightarrow 0$ l'onde incidence subit une réflexion totale. • Si $Z_a >> Z_b$ $R \longrightarrow 1$ et $T \longrightarrow 0$ de même on a une réflexion totale. • Si $Z_a \simeq Z_b$ $R \longrightarrow 0$ et $T \longrightarrow 0$ transmission totale ; c'est le cas d'un même milieu	1 1
	PARTIE III	12 p
15-1	On évalue les masses qui traversent les sections $S(x)$ et $S(x+dx)$ entre les instants t et $t+dt$. $\delta^2 m_e$: masse rentrante dans $d\tau$ pendant dt. $\delta^2 m_e = \rho(x,t)\, d\tau = \rho(x,t).S(x)\, v(x,t)\, dt = (\rho_0 + \rho_1(x,t)) S(x) v(x,t) dt$ $= (\rho_0 + \rho_1(x,t)) S(x)\, v(x,t)\, dt \simeq \rho_0\, S(x) \cdot v(x,t)\, dt$ $\delta^2 m_s$: masse sortante de $d\tau$ pendant dt. $\delta^2 m_s = \rho(x+dx,t)\, S(x+dx).v(x+dx,t)\, dt$ $\simeq \rho_0\, S(x+dx).v(x+dx,t)\, dt$ A l'ordre 1 en dx, le volume $d\tau$ est assimilé à un cylindre de hauteur dx et de section $S(x)$ La masse contenue dans $d\tau$ vaut : $dm = \rho(x,t).S(x)\, dx = (\rho_0 + \rho_1(x,t))\, S(x)\, dx$ Pendant la durée dt, cette masse varie de : $\frac{d^2 m}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho(x,t).S(x)\, dx) = \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}.S(x)\, dx$	0,5 0,5

$$d^2m = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 + \rho_1(x,t)\right) S(x)\, dx\, dt = \frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} S(x)\, dx\, dt$$

Le bilan de la matière dans $d\tau$ s'écrit :

$$d^2m = -\left(\delta^2 m_s - \delta^2 m_e\right).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} S(x)\, dx . dt = \rho_0 S(x)\, v(x,t)\, dt - \rho_0 S(x+dx)\, v(x+dx,t)\, dt$$

$$= -\rho_0\, dt \left(v(x+dx,t)\, S(x+dx) - v(x,t)\, S(x)\right)$$

$$\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} S(x) . dx\, dt = -\rho_0\, dt\, \frac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\, v(x,t)\right) dx.$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} S(x) = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\, v(x,t)\right)} \quad (1)'$$ (1)

avec $S(x) = S_0 \exp(\beta x)$

15.2 χ_s est le coefficient de compressibilité d'un fluide en évolution isentropique. (0,5)

$$\chi_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \simeq \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1(x,t)}{p_1(x,t)} \Longrightarrow \rho_1(x,t) = \chi_s \rho_0\, p_1(x,t).$$

$$\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} = \chi_s \rho_0 \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t}$$

$$(1)' \Longrightarrow \frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} S(x) = \frac{1}{C^2} \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} S(x) = -\rho \frac{\partial}{\partial t}\left(S(x) . v(x,t)\right)$$ (1)

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} = -\frac{\rho_0 C^2}{S(x)} \frac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\, v(x,t)\right).} \quad (2)'$$

16- On applique le P.F.D à une tranche de fluide contenue dans le pavillon d'épaisseur dx : $\sum \vec{F}_{ext} = dm \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \vec{e}_x$

On néglige la dérivée convective de la vitesse $(\vec{V}.\overrightarrow{grad})\vec{V}$ puisqu'il est infiniment d'ordre 2.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{pression}(x,t) + \vec{F}_{pression}(x+dx,t) + \vec{F}_{pression}(S.\text{laterale})$$

- $\vec{F}_p(x,t) = p(x,t).S(x)\vec{e}_x$: force de pression exercée sur la section $S(x)$. (1)
- $\vec{F}_p(x+dx,t) = -p(x+dx,t).S(x+dx)\vec{e}_x$ force de pression exercée à la section $S(x+dx)$
- $\vec{F}_p(\text{laterale}) \simeq p(x,t)\left(S(x+dx) - S(x)\right)\vec{e}_x$: force de pression exercée sur la surface latérale de la tranche

$$dm\,\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\vec{e}_x = \rho(x,t)S(x)\,dx\,.\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\vec{e}_x$$
$$\simeq \rho_0\,S(x)\,dx\,\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\vec{e}_x$$

$$\rho_0.S(x)\,dx\,.\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\vec{e}_x = p(x,t)\,S(x)\,\vec{e}_x - p(x+dx)S(x+dx)\vec{e}_x + p(x,t)\left(S(x+dx) - S(x)\right)\vec{e}_x$$

En se limitant à l'ordre 1 en dx

$$\rho_0\,S(x)\,\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\,dx \simeq \left(p(x,t) - p(x+dx,t)\right).S(x) = \left(p_1(x,t) - p_1(x+dx,t)\right)dx$$
$$= -\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}.S(x)\,dx.$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_0\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}}\quad (3)'$$ (1)

$$(2)' \text{ et } (3)' \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} = -\rho_0\dfrac{c^2}{S(x)}.\dfrac{\partial}{\partial x}\left(S(x).V(x,t)\right) & \times\dfrac{\partial}{\partial t} \\ \rho_0\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} & \times\dfrac{\partial}{\partial x}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{dS(x)}{dx}\frac{1}{S(x)}.\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = 0.}$$ (1)

17.1 $p_1(x,t) = p_m \exp j(\omega t - \underline{k}\, x)$; $\frac{dS(x)}{dx} = \beta\, S(x)$.

$\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 p_1(x,t)$; $\frac{\partial p_1}{\partial x} = -jk\, p_1(x,t)$; $\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 p_1(x,t)$

En remplaçant dans l'équation différentielle établie à la question 16/., on obtient :

$-k^2\, p_1(x,t) + (-jk)\beta\, p_1(x,t) - \frac{1}{c^2}\left(-\omega^2 p_1(x,t)\right) = 0$

d'où la relation de dispersion : (1,5)

$$\boxed{k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} - j\beta k}.$$

On cherche à écrire $k(\omega) = k_1 - jk_2$.

17.2 $k^2 - j\beta k - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$

$\Delta = -\beta^2 + 4\frac{\omega^2}{c^2} = 4\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$.

- Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\frac{\omega^2}{c^2} > \beta^2 \Rightarrow k(\omega) = -j\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{4\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2}$

$k(\omega) = k_1(\omega) - j\,k_2(\omega) \Rightarrow k_1(\omega) = \pm\sqrt{4\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2}$ et $k_2(\omega) = \frac{\beta}{2}$

Le signe (+) traduit une propagation suivant les x croissants. (2)

- Si $\Delta < 0 \Rightarrow \beta^2 > 4\frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \Delta = -\left(\beta^2 - 4\frac{\omega^2}{c^2}\right)$
$= j^2\left(\beta^2 - 4\frac{\omega^2}{c^2}\right)$

$k(\omega) = -j\frac{\beta}{2} \pm j\sqrt{\beta^2 - 4\frac{\omega^2}{c^2}}$ imaginaire pure.

Il s'agit d'une onde acoustique évanescente.

17-3- L'onde acoustique dans le pavillon est progressive avec atténuation si $k_1(\omega) \neq$ et $k_2(\omega) \neq 0$

c. à d $\Delta > 0 \Rightarrow \frac{4\omega^2}{c^2} - \beta^2 > 0 \Rightarrow 4\omega^2 > \beta^2 c^2$

$\Rightarrow \omega > \frac{1}{2}\beta c = \omega_c$ $\boxed{\omega_c = \frac{1}{2}\beta c}$ (1)

c'est la pulsation de coupure

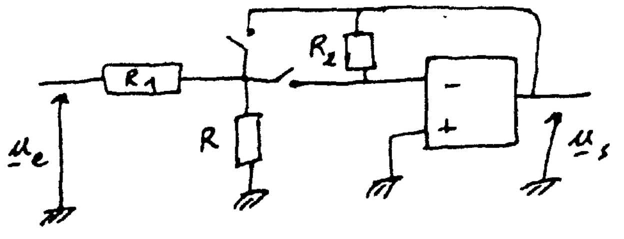
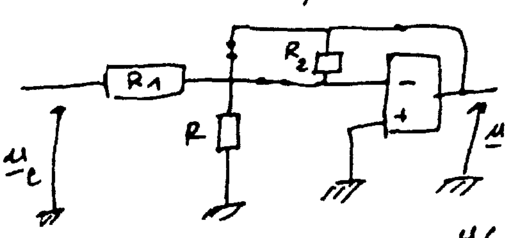
On se place dans le cas où $\omega > \omega_c$

$\Rightarrow$ On a une onde progressive à la vitesse de phase $V_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{4}\beta^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$

$$\Rightarrow V_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}} = f(\omega).$$

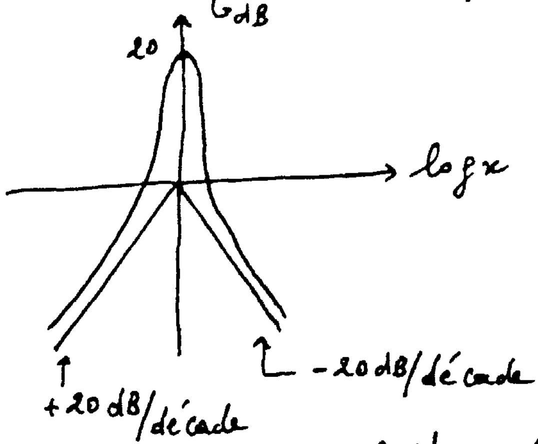
et $p_1(x,t) = p_m \exp f\, k''(\omega)\, x)\, \cos(\omega t - k'(\omega)\, x)$ (1)

La propagation de l'onde acoustique est réalisée dans un milieu (air + pavillon) dispersif et atténuateur (absorbant)

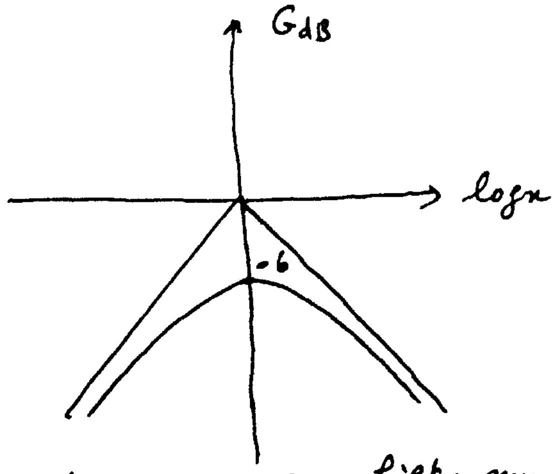
Q	Partie IV	
18-	"L'injection" d'une partie du signal de sortie à la borne inverseuse de l'A.O. permet de stabiliser le montage et d'avoir un fonctionnement linéaire de l'A.O.	0,5
19-	En **BF** : $Z_c \to \infty$ Le montage est équivalent à :  $\underline{u}_s = 0 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = 0$ En **HF** : $Z_c \to 0$ Le montage est équivalent à :  $\underline{u}_s = V_{\ominus} = V_{\oplus} = 0 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = 0$ $H = 0$ lorsque $\omega \to 0$ $H = 0$ lorsque $\omega \to \infty$ $H \neq 0$ pour $\omega \in]0, \infty[$ $\Rightarrow$ A priori, c'est un filtre passe-bande.	0,5 + 0,5 + 0,5
20-1-	$\underline{u}_A = \dfrac{\underline{u}_s / R_2 + \underline{u}_B\, jC\omega}{1/R_2 + jC\omega}$; $\underline{u}_B = \dfrac{jC\omega\, \underline{u}_A + jC\omega\, \underline{u}_s + \underline{u}_e / R_1}{2jC\omega + \frac{1}{R_1} + 1/R}$	1 + 1
20-2-	En combinant les deux équations précédentes, on trouve : $\underline{H}(jx) = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \dfrac{H_0}{1 + jQ(x - 1/x)}$; $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ $H_0 = -\dfrac{R_2}{2R_1}$; $\omega_0 = \dfrac{1}{C}\sqrt{\dfrac{R_1 + R}{R_1 R_2 R}}$; $Q = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{R_2(R_1 + R)}{R_1 R}}$	1,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5
20-3-	$\lvert H_0 \rvert$: gain maximal (pour $x = 1$) ; Q : facteur de qualité du circuit ; ω_0 : pulsation caractéristique ou propre du circuit.	0,5 + 0,25 + 0,25
21-	$\lvert \underline{H} \rvert = \dfrac{\lvert H_0 \rvert}{\sqrt{1 + Q^2 (x - 1/x)^2}}$; $\varphi = \pi - \arctan\left[Q(x - 1/x)\right]$	0,5 + 0,5
22-1-	$G_{dB} = 20 \log \lvert H_0 \rvert - 10 \log\left[1 + Q^2 (x - 1/x)^2\right]$ • $x \to 0$ ($x \ll 1$) ; $G_{dB} \to 20 \log \dfrac{\lvert H_0 \rvert}{Q} + 20 \log x$: pente de 20 dB/décade • $x \to \infty$ ($x \gg 1$) ; $G_{dB} \to 20 \log \dfrac{\lvert H_0 \rvert}{Q} - 20 \log x$: pente de -20 dB/décade • $x = 1$; $G_{dB} = 20 \log \lvert H_0 \rvert = G_{dB\,max}$	1,5
	Les deux asymptotes se coupent sur l'axe des ordonnées en $x = 1$ ($\log x = 0$) et $G_{dB\,asy} = 20 \log \lvert H_0 \rvert / Q = G_{dB\,max} - 20 \log Q$.	0,5

si $Q > 1 \leadsto G_{dB\,asy} < G_{dB\,max} \Rightarrow$ filtre sélectif.

si $Q < 1 \leadsto G_{dB\,asy} > G_{dB\,max} \Rightarrow$ filtre non sélectif.



$|H_0| = Q = 10 \leadsto$ filtre sélectif



$|H_0| = Q = 0{,}5 \leadsto$ filtre non sélectif. 0,5 + 0,

22-2- Il s'agit d'un filtre passe-bande de fréquence centrale $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ et de bande passante $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ 0,5

23-1- $H_0 = -10$; $Q = 5{,}48$; $\omega_0 = 5216 \text{ rad s}^{-1}$; $f_0 = 830 \text{ Hz}$ 1

23-2- bande passante : $|\underline{H}(\omega)| = \frac{|\underline{H}|_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{dB}(\omega) = G_{dB\,max} - 3\text{ dB}$

$$\Rightarrow Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$$

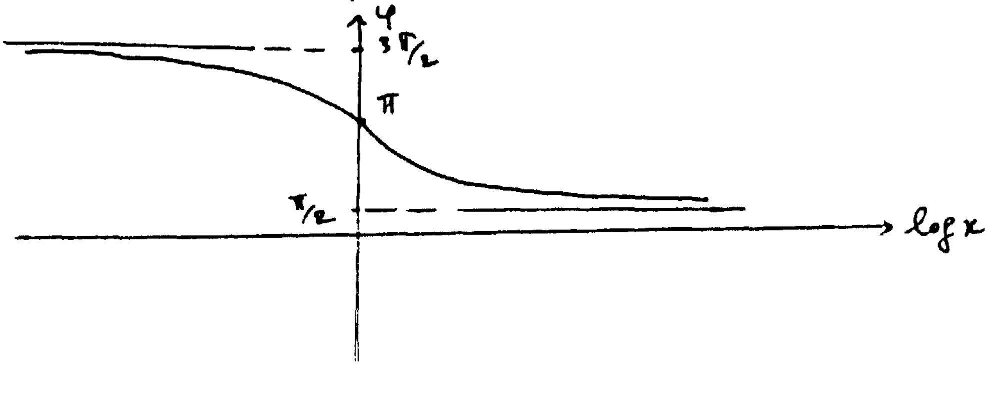
d'où $f_1 = \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}\right] f_0$; $f_2 = \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}\right] f_0$ 1,5

A.N $f_1 = 758 \text{ Hz}$ $f_2 = 909 \text{ Hz}$

$\Delta f = f_2 - f_1 = 151 \text{ Hz} \leadsto$ Il s'agit d'un filtre sélectif.

24- $\varphi = \pi - \arctan\left[Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]$

- $x \to 0$ $(x \ll 1) \leadsto \varphi \to \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$
- $x \to \infty$ $(x \gg 1) \leadsto \varphi \to \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ 1,5 + 0,5
- $x = 1 \longrightarrow \varphi = \pi$



?5-1. $u_e(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right]$

$u_e(t)$ est une fonction impaire $\Rightarrow$ les $a_n = 0$; $a_0 = 0$ car $\langle u_e(t) \rangle = 0$ 0,5 + 1,5

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_e(t) \sin(n\omega t)\, dt = \frac{2V_0}{n\pi} \left[1 - \cos(n\pi) \right]$$

si $n = 2p \rightsquigarrow b_{2p} = 0$

si $n = 2p+1 \longrightarrow b_{2p+1} = \frac{4V_0}{(2p+1)\pi}$

$$\Rightarrow u_e(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4V_0}{\pi} \frac{\sin[(2p+1)\omega t]}{(2p+1)}$$

?5-2-

harmonique	amplitude de u_e	$x = \frac{f}{f_0}$	$\lvert \underline{H} \rvert$	amplitude u_s
1	$1,27\, V_0$	1	10	$12,7\, V_0$
3	$0,42\, V_0$	3	0,68	$0,28\, V_0$
5	$0,25\, V_0$	5	0,38	$0,09\, V_0$

1,5 + 0,5

d'où $u_s(t) \simeq \frac{4V_0}{\pi} \left| \underline{H}(\omega = \omega_0) \right| \cdot \sin(\omega_0 t + \pi)$

$\Rightarrow u_s(t) = -\frac{40}{\pi} V_0 \sin(\omega t)$. Les harmoniques d'ordre > 1 sont fortement atténués. Leurs fréquences se trouvent en dehors de la bande passante.

5-3-1 il faut que $f_0 = 3f \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi \cdot 3f} \sqrt{\frac{R_1 + R}{R_1 R_2 R}}$ 0,5 + 0,5

A.N. $C = 7\, nF$.

5-3-2-

harmonique	amplitude u_e	$x = f/f_0$	$\lvert \underline{H} \rvert$	amplitude u_s
1	$1,27\, V_0$	$1/3$	0,68	$0,86\, V_0$
3	$0,42\, V_0$	1	10	$4,2\, V_0$
5	$0,25\, V_0$	$5/3$	1,68	$0,42\, V_0$

1 + 0,5

d'où $u_s(t) \simeq -\frac{8V_0}{\pi} \sin(3\omega t)$

%