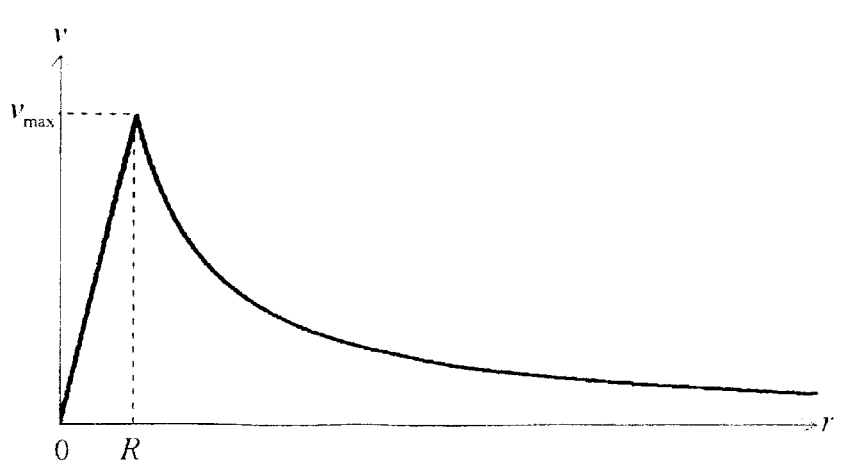


Problème I (45/100)
TOURBILLONS DANS UN FLUIDE PARFAIT

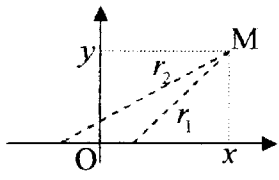
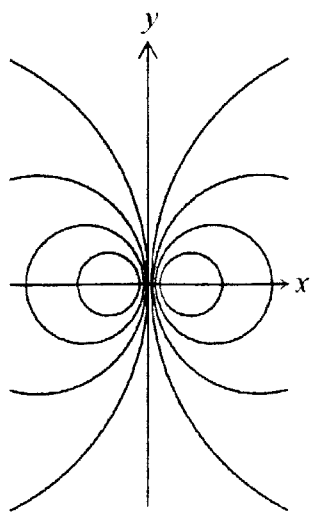
I- Etude d'un tourbillon

Q	Réponse	Barème
1-a)	$\overline{rot}\vec{v} = 2 \overline{\Omega}$ et $div\vec{v} = 0$ (puisque l'écoulement est incompressible)	0,5
	Equations vérifiées par le champ de magnétostatique : $\overline{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et $div\vec{B} = 0$	0,5
	Il y a une analogie formelle entre $\vec{v} \leftrightarrow \vec{B}$ et $2 \overline{\Omega} \leftrightarrow \mu_0 \vec{j}$	
1-b)	L'analogie au modèle de tourbillon en magnétostatique est un fil infini de rayon R et parcouru par un courant uniforme de densité \vec{j} .	0,5
	Par analogie formelle \vec{v} a les mêmes propriétés de symétrie que \vec{B} , celui-ci étant un pseudo-vecteur.	
	$\overline{\Omega} = \overline{C^{te}}$ et le cylindre est infini donc la « distribution » est invariante par translation le long de (Oz) et par rotation autour de (Oz) donc \vec{v} ne dépend que de r .	0,5
	Soit un point M quelconque de l'espace, le plan $(M, (Oz)) \equiv (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour la « distribution » donc $\vec{v} \perp (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ $\Rightarrow \vec{v}(M) = v(r) \vec{u}_\theta$	0,5
2-	L'analogie du théorème d'Ampère est : $\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S(\Gamma)} 2 \overline{\Omega} \cdot d\vec{S}$	0,5
	On choisit comme contour fermé et orienté Γ un cercle de rayon r centré sur (Oz)	
	$\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} v(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = r v(r) 2\pi$	
	$r < R \quad \iint_{S(\Gamma)} 2 \overline{\Omega} \cdot d\vec{S} = 2 \Omega \pi r^2 \Rightarrow \vec{v}(r < R) = \Omega r \vec{u}_\theta$	1
	$r > R \quad \iint_{S(\Gamma)} 2 \overline{\Omega} \cdot d\vec{S} = 2 \Omega \pi R^2 \Rightarrow \vec{v}(r > R) = \Omega R^2 \frac{1}{r} \vec{u}_\theta$	1
	 <p>The graph shows the velocity profile $v(r)$ of a vortex. The horizontal axis is the radius r and the vertical axis is the velocity v. The curve is linear from $r=0$ to $r=R$, reaching a maximum velocity v_{max} at $r=R$. For $r > R$, the velocity decreases as $1/r$.</p>	1
	$v_{max} = v(r=R) = \Omega R$	0,5

3-a)	<p>Appliquons le principe fondamentale de la dynamique dans un référentiel galiléen à une particule fluide de masse dm : $dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{F} \Rightarrow \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f}_m$ avec \vec{f}_m la résultante des forces massiques que subit la particule fluide. Le fluide est soumis aux forces de pression et au champ de pesanteur $\Rightarrow \vec{f}_m = -\frac{\overrightarrow{grad} p}{\rho} + \vec{g}$.</p> <p>L'équation d'Euler s'écrit : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{rot \vec{v}} \wedge \vec{v} - \frac{\overrightarrow{grad} p}{\rho} + \vec{g}$</p>	1
3-b)	<p>On a $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$; $\vec{g} = -g \vec{u}_z$; $p(r, z) \Rightarrow \overrightarrow{grad} p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z$ et $\overrightarrow{rot \vec{v}} = 2\vec{\Omega} = 2\Omega \vec{u}_z$</p> <p>• Pour $r > R$ on $\vec{\Omega} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Omega^2 R^4}{2} \frac{1}{r^2} \right) \vec{u}_r = -\Omega^2 R^4 \frac{1}{r^3} \vec{u}_r$</p> <p>Projection de l'équation d'Euler sur \vec{u}_r : $-\Omega^2 R^4 \frac{1}{r^3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$</p> <p>Projection de l'équation d'Euler sur \vec{u}_z : $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$</p> $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \Omega^2 R^4 \frac{1}{r^3} \Rightarrow p(r, z) = -\frac{\rho \Omega^2 R^4}{2} \frac{1}{r^2} + f(z) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{df}{dz} = -\rho g \Rightarrow f(z) = -\rho g z + C^{te}$ <p>$p_0 = \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ z \rightarrow 0}} p(r, z) \Rightarrow p(r > R, z) = p_0 - \rho g z - \frac{\Omega^2 \rho R^4}{2} \frac{1}{r^2}$</p>	2,5
	<p>• Pour $r < R$ on a $\overrightarrow{rot \vec{v}} \wedge \vec{v} = -2\Omega^2 r \vec{u}_r$ et $\overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Omega^2 r^2}{2} \right) \vec{u}_r = \Omega^2 r \vec{u}_r$</p> <p>Projection de l'équation d'Euler sur \vec{u}_r : $\Omega^2 r - 2\Omega^2 r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$</p> <p>Projection de l'équation d'Euler sur \vec{u}_z : $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$</p> $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} = \Omega^2 \rho r \Rightarrow p(r, z) = \frac{\Omega^2 \rho}{2} r^2 + f(z) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{df}{dz} = -\rho g \Rightarrow f(z) = -\rho g z + C^{te}$ <p>$\Rightarrow p(r < R, z) = \frac{\Omega^2 \rho}{2} r^2 - \rho g z + C^{te}$</p> <p>Continuité de la pression en $r = R$</p> $\frac{\Omega^2 \rho}{2} R^2 - \rho g z + C^{te} = p_0 - \rho g z - \frac{\Omega^2 \rho R^4}{2} \frac{1}{R^2} \Rightarrow C^{te} = p_0 - \Omega^2 \rho R^2$ <p>$\Rightarrow p(r < R, z) = p_0 - \rho g z + \frac{\Omega^2 \rho}{2} (r^2 - 2R^2)$</p>	2,5

6-e)	Pour $r > R$ on a $dA = -v(r) dr = -\Omega R^2 \frac{dr}{r} \Rightarrow A(r) = -\Omega R^2 Lnr + K$ $A(r) = -\frac{I}{2\pi} Lnr + K \Rightarrow I = 2\pi \Omega R^2$	1,5
------	---	-----

II- Interaction entre deux tourbillons

Q	Réponse	Barème
7-	$A_1(r_1) = -\frac{I_1}{2\pi} Lnr_1 + K_1 = -\frac{I}{2\pi} Lnr_1 + K_1$ $A_2(r_2) = -\frac{I_2}{2\pi} Lnr_2 + K_2 = \frac{I}{2\pi} Lnr_2 + K_2$	0,5 0,5
8-	$A(r_1, r_2) = A_1(r_1) + A_2(r_2) = \frac{I}{2\pi} Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + K'$ $r_1^2 = (x-d)^2 + y^2$ et $r_2^2 = (x+d)^2 + y^2$ $A(x, y) = \frac{I}{4\pi} Ln\left(\frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2}\right) + K'$	 0,5 1,5
9-	Sur une ligne de courant on a : $A = C^{te} \Rightarrow \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} = C > 0 \Rightarrow (x+d)^2 + y^2 = C(x-d)^2 + C y^2 \Rightarrow$ $y^2(C-1) + x^2(C-1) - 2dx(C+1) + d^2(C-1) = 0 \Rightarrow y^2 + x^2 - 2dx \frac{C+1}{C-1} + d^2 = 0 \Rightarrow$ $y^2 + \left(x - d \frac{C+1}{C-1}\right)^2 - d^2 \left(\frac{C+1}{C-1}\right)^2 + d^2 = 0 \Rightarrow y^2 + \left(x - d \frac{C+1}{C-1}\right)^2 = \frac{4Cd^2}{(C-1)^2} > 0$ car $C > 0$ Les lignes de courants sont des cercles de centre $\left(d \frac{C+1}{C-1}, 0\right) \in$ à l'axe (O,x) et de rayon $\frac{2d\sqrt{C}}{ C-1 }$	1 1 1
		2

10-	$\vec{v} = \overrightarrow{rot \vec{A}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x, y) \quad \vec{u}_z = -\frac{\partial A}{\partial x} \vec{u}_y + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{u}_x \quad \text{avec}$ $A(x, y) = \frac{I}{4\pi} \left[\ln((x+d)^2 + y^2) - \ln((x-d)^2 + y^2) \right] + K'$ $\vec{v} = -\frac{I}{4\pi} \left[\frac{2(x+d)}{(x+d)^2 + y^2} - \frac{2(x-d)}{(x-d)^2 + y^2} \right] \vec{u}_y + \frac{I}{4\pi} \left[\frac{2y}{(x+d)^2 + y^2} - \frac{2y}{(x-d)^2 + y^2} \right] \vec{u}_x$	1
	$\vec{v}(x=0) = -\frac{I}{4\pi} \left[\frac{2d}{d^2 + y^2} + \frac{2d}{d^2 + y^2} \right] \vec{u}_y + \frac{I}{4\pi} \left[\frac{2y}{d^2 + y^2} - \frac{2y}{d^2 + y^2} \right] \vec{u}_x = -\frac{I d}{\pi (d^2 + y^2)} \vec{u}_y$	0,5
11-a)	<p>L'écoulement produit, dans le demi-espace $x > 0$, par le tourbillon 1 et son image hydrodynamique (tourbillon 2), est identique à celui engendré par le tourbillon 1 en présence du mur solide dans le plan $x = 0$. En effet la ligne $x = 0$ sépare l'écoulement précédent en deux régions indépendantes donc on peut placer une paroi solide dans le plan $x = 0$ sans modifier le champ de vitesse dans le demi-espace $x > 0$ ni les conditions aux limites en effet $\vec{v}(x=0)$ est tangent au plan donc la continuité de la composante normale de \vec{v} en $x=0$ est vérifiée.</p>	1,5
11-b)	<p>Appliquons la relation de Bernoulli pour deux points situés à la même altitude, l'un est situé à l'infini tel que $(p_\infty = p_0, \vec{v}_\infty = \vec{0})$ et l'autre appartenant au plan $x = 0$ tel que $(p(x=0), \vec{v}(x=0))$:</p> $\frac{p_0}{\rho} = \frac{p(x=0)}{\rho} + \frac{I^2 d^2}{2\pi^2 (d^2 + y^2)^2} \Rightarrow p(x=0) = p_0 - \frac{\rho I^2 d^2}{2\pi^2 (d^2 + y^2)^2}$	2
11-c)	$\vec{F} = \iint [p_0 - p(x=0)] dy dz \vec{u}_x = \int_0^1 dz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho I^2 d^2}{2\pi^2 (d^2 + y^2)^2} dy \vec{u}_x, \text{ on pose } u = \frac{y}{d}$ $\vec{F} = \frac{\rho I^2 d^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{d^4 \left(1 + \frac{y^2}{d^2}\right)^2} \vec{u}_x = \frac{\rho I^2 d^2}{2\pi^2 d^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^2} \vec{u}_x = \frac{\rho I^2}{4\pi d} \vec{u}_x$ <p>Le mur est attiré vers le tourbillon et ceci d'autant plus qu'ils sont proches l'un de l'autre et que l'intensité du tourbillon est grande.</p>	2
		1

Problème II (60/100)
CARACTERISATION OPTIQUE D'UN OTC :
OXYDE TRANSPARENT CONDUCTEUR

I- Propagation d'une onde électromagnétique dans un OTC

1-	$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}_t &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{E}_t &= \frac{\partial E_{t_x}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho = 0$	0,5
2-a)	$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = -e \vec{E}_t - e \vec{v} \wedge \vec{B}_t$	0,5
	$\left. \begin{aligned} \frac{\ \vec{F}_m\ }{\ \vec{F}_e\ } &= \frac{v \ \vec{B}\ }{v_\phi \ \vec{E}\ } = \frac{v}{v_\phi} \\ \ \vec{S}\ &\ll \lambda \Rightarrow v \ll v_\phi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ \vec{F}_m\ \ll \ \vec{F}_e\ $	0,5
2-b)	$\ \vec{S}\ \ll \lambda : \text{c'est l'approximation des régimes quasi-stationnaire c.à.d. on néglige le retard dû à la propagation d'où } \vec{E}_t \text{ est uniforme à l'échelle du déplacement de l'électron.}$	0,5
3-a)	$m \frac{d^2 \vec{S}}{dt^2} = -m \omega_0^2 \vec{S} - e \vec{E}_t$	0,5
3-b)	<p>En régime sinusoïdal forcé et en notation complexe on a :</p> $-m \omega^2 \vec{S} + m \omega_0^2 \vec{S} = -e \vec{E}_t \Rightarrow \vec{S} = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}_t$ $\left. \begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{-i \omega e/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}_t \\ \vec{j} &= -N e \vec{v} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{j} = i \frac{N e^2 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}_t = i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}_t \text{ avec } \omega_p = \sqrt{\frac{N e^2}{m \epsilon_0}}$	2
4-	$\operatorname{div} \vec{E}_t = 0, \operatorname{div} \vec{B}_t = 0, \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}_t = -\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t} \text{ et } \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}_t = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$	1
	$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}_t &= -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}_t = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial t^2} = -i \frac{\omega_p^2 \omega}{c^2 (\omega_0^2 - \omega^2)} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial t^2} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}_t &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}_t - \Delta \vec{E}_t = -\Delta \vec{E}_t \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ $\Delta \vec{E}_t - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial t^2} = i \frac{\omega_p^2 \omega}{c^2 (\omega_0^2 - \omega^2)} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$	1,5
	<p>Cette équation n'est pas vérifiée par le champ électrique en notation réelle car</p> $\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} \neq \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$	1
5-a)	$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{\omega_p^2 \omega^2}{c^2 (\omega_0^2 - \omega^2)} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$	2

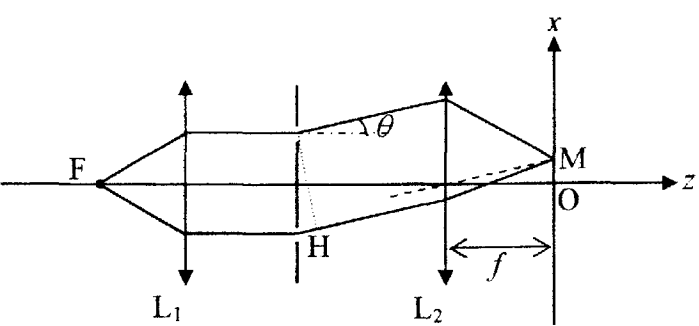
5-b)		2
5-c)	Si $\omega < \omega_0 \Rightarrow k^2 > 0 \Rightarrow k$ est réel : l'onde qui se propage dans l'OTC est une OPPM.	1,5
	Si $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2} \Rightarrow k^2 < 0 \Rightarrow k$ est imaginaire : pas de propagation dans le milieu OTC l'onde est évanescente	1,5
	Si $\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2} \Rightarrow k^2 > 0 \Rightarrow k$ est réel : l'onde qui se propage dans l'OTC est une OPPM.	1,5
6-	$\langle P_j \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E}_t \rangle = \frac{1}{2} \text{Reel} \left(i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}_t \cdot \vec{E}_t^* \right) = \frac{1}{2} \text{Reel} \left(i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}_t ^2 \right) = 0$	1
	Le milieu OTC est non absorbant	1
7-	Si $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ l'onde ne se propage pas dans l'OTC donc elle est totalement réfléchie	1
8-a)	<p>Le milieu est transparent lorsque k est réel donc $k^2 > 0 \Rightarrow$</p> $k = \frac{\omega}{c} \left(\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^{1/2} \left\{ \Rightarrow n = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} \right.$ $k = n \frac{\omega}{c}$	1
8-b)	Si $\omega < \omega_0 \Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 > 0 \Rightarrow \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} > 1 \Rightarrow n > 1$	1,5
	Si $\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2} \Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 < -\omega_p^2 < 0 \Rightarrow \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} < 0 \Rightarrow 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} < 1 \Rightarrow n < 1$	1,5
8-c)	<p>D'après la loi de Descartes de la réfraction : $\sin i = n \sin r$</p> <p>Si $\omega < \omega_0 \Rightarrow n > 1 \Rightarrow \sin i > \sin r \Rightarrow i > r \Rightarrow \forall i$ il y a propagation à l'intérieur de l'OTC</p> <p>Si $\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2} \Rightarrow n < 1 \Rightarrow \sin i < \sin r \Rightarrow i < r \Rightarrow$</p> <p>Si $i < i_t = \arcsin(n)$: il y a propagation à l'intérieur de l'OTC</p> <p>Si $i > i_t = \arcsin(n)$: pas de propagation à l'intérieur de l'OTC donc il y a réflexion totale</p>	<p>1</p> <p>1,5</p> <p>1,5</p>

II- Réflexion et transmission sur l'OTC

9-	$\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{u}_y ; \vec{B}_r = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = -\frac{E_{0r}}{c} e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{u}_y$ $\vec{B}_t = n \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_t}{c} = n \frac{E_{0t}}{c} e^{i(\omega t - k z)} \vec{u}_y$	1,5
10-a)	$\vec{E}_t(z=0, t) - (\vec{E}_i(z=0, t) + \vec{E}_r(z=0, t)) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$ $\vec{B}_t(z=0, t) - (\vec{B}_i(z=0, t) + \vec{B}_r(z=0, t)) = 0$	0,5 0,5
10-b)	<p>Projection de la première relation sur $\vec{u}_x : \underline{E}_{0t} = E_{0i} + E_{0r} \Rightarrow \underline{t} = 1 + \underline{r}$</p> $n \frac{E_{0t}}{c} = \frac{E_{0i}}{c} - \frac{E_{0r}}{c} \Rightarrow n \underline{t} = 1 - \underline{r} \text{ donc } \underline{t} = \frac{2}{1+n} \text{ et } \underline{r} = \frac{1-n}{1+n}$	1
11-a)	$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{\langle \vec{E}_i \wedge \vec{B}_i \rangle}{\mu_0} = \frac{(E_{0i})^2}{2\mu_0 c} ; \langle \vec{\Pi}_r \rangle = \frac{\langle \vec{E}_r \wedge \vec{B}_r \rangle}{\mu_0} = \frac{ E_{0r} ^2}{2\mu_0 c} \text{ et } \langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{\langle \vec{E}_t \wedge \vec{B}_t \rangle}{\mu_0} = n \frac{ E_{0t} ^2}{2\mu_0 c}$	1,5
11-b)	<p>La conservation de l'énergie s'écrit en $z=0$:</p> $\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \langle \vec{\Pi}_r \rangle + \langle \vec{\Pi}_t \rangle \Rightarrow \frac{\langle \vec{\Pi}_i \rangle}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle} = \frac{\langle \vec{\Pi}_r \rangle}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle} + \frac{\langle \vec{\Pi}_t \rangle}{\langle \vec{\Pi}_i \rangle} \Rightarrow 1 = R + T$	1
11-c)	$R = \frac{ E_{0r} ^2}{(E_{0i})^2} = r ^2 = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} - \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}} \right)^2 \Rightarrow$ $R = \frac{2\omega_0^2 - 2\omega^2 + \omega_p^2 - 2\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2)}}{2\omega_0^2 - 2\omega^2 + \omega_p^2 + 2\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2)}}$	1
11-d)	Si $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ l'onde est totalement réfléchie donc $T = 0 \Rightarrow R = 1$.	0,5

III- Détermination des caractéristiques d'un OTC

12-	$\omega^2 < \omega_0^2 < \omega_0^2 + \omega_p^2 \Rightarrow n = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} = \sqrt{\frac{(\omega_0^2 + \omega_p^2) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + \omega_p^2}\right)}{\omega_0^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}}$ $n = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + \omega_p^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1/2}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + \omega_p^2}\right) \left(1 + \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}\right)}$ $n = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{2(\omega_0^2 + \omega_p^2)}\right)} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2}} + \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{\omega^2 \omega_p^2}{2\omega_0^2(\omega_0^2 + \omega_p^2)}}$ $n = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}}{\omega_0} + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^3 \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}} \omega^2 \Rightarrow n = A + \frac{B}{\lambda^2} \text{ où } A = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}}{\omega_0} \text{ et } B = \frac{2\pi^2 c^2 \omega_p^2}{\omega_0^3 \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}}$ <p>Dans le vide $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$</p>	2
-----	---	---

13-a)		2
	$\delta(M) = (FF_2 M_\infty) - (FF_1 M_\infty) = (F_2 H) = F_2 H = a \sin \theta$ $\tan \theta = \frac{x}{f} \quad \Rightarrow \delta(M) = \frac{ax}{f}$ <p>Dans les conditions de Gauss on a : $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$</p>	1,5
13-b)	Les lignes d'égales intensité sont définies par $\delta(M) = C^{te} \Rightarrow x = C^{te}$ donc les franges d'interférences, observées sur l'écran, sont des droites parallèles à Oy.	1
	$p_0 = \frac{\delta(x=0)}{\lambda_m} = 0$	0,5
14-a)	$\delta'(M) = (FF_2 M_\infty) - (FF_1 M_\infty) = ne + (F_2 H) - e = e(n-1) + F_2 H = e(n-1) + \frac{ax}{f}$	1,5
	$p'_0 = \frac{\delta'(x=0)}{\lambda_m} = \frac{e(n-1)}{\lambda_m}$	1
	Pour $\omega < \omega_0$ on a $\langle n \rangle_{\omega} = 1$ donc $p'_0 > 0$: les franges d'interférence se traduisent vers $x < 0$	1
14-b)	Le nombre de franges défilées est :	
	$nb = p'_0 - p_0 = \frac{e(n-1)}{\lambda_m} \Rightarrow n = \frac{nb \lambda_m}{e} + 1 = \frac{35 \cdot 600 \cdot 10^{-9}}{20 \cdot 10^{-6}} + 1 = 2,05$	1,5
15-a)	En lumière blanche $p'_0 = \frac{e(n(\lambda)-1)}{\lambda}$ dépend de la longueur d'onde donc p'_0 n'est pas entier pour toutes les radiations du visible d'où la frange au centre n'est pas blanche.	1
15-b)	$p'(M) = \frac{\delta'(M)}{\lambda} = \frac{ax}{\lambda f} + \frac{e(n-1)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{ax}{f} + e(A-1) + \frac{eB}{\lambda^2} \right)$ $\left(\frac{\partial p'}{\partial \lambda} \right)_{x_a} = -\frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{ax}{f} + e(A-1) + \frac{eB}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{2eB}{\lambda^3} \right) = 0 \Rightarrow -\frac{ax_{ac}}{f} - e(A-1) - \frac{3eB}{\lambda_m^2} = 0$ $\Rightarrow x_{ac} = -\frac{fe}{a} \left(A-1 + \frac{3B}{\lambda_m^2} \right) = -\frac{fe}{a} \left(n-1 + \frac{2B}{\lambda_m^2} \right)$	2
15-c)	$B = \frac{\lambda_m^2}{2} \left(1-n - \frac{ax_{ac}}{fe} \right) = \frac{36 \cdot 10^{-14}}{2} \left(1-2,05 + \frac{0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 4,5 \cdot 10^{-2}}{0,4 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} \right) = 1,35 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$	1,5
	$A = n - \frac{B}{\lambda_m^2} = 2,05 - \frac{1,35 \cdot 10^{-14}}{36 \cdot 10^{-14}} = 2,0125$	1,5

16-

A partir des relations obtenues à la question 12- on déduit les valeurs de ω_0 , ω_p et N en effet on a :

$$A = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}}{\omega_0} \Rightarrow \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2} = A \omega_0 \text{ et } \omega_p^2 = \omega_0^2 (A^2 - 1) \Rightarrow B = \frac{2 \pi^2 c^2 \omega_p^2}{\omega_0^3 \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}} = \frac{2 \pi^2 c^2 (A^2 - 1)}{A \omega_0^2}$$

2

$$\omega_0 = \pi c \sqrt{\frac{2(A^2 - 1)}{AB}}, \omega_p = \omega_0 \sqrt{A^2 - 1} \text{ et } N = \frac{\omega_p^2 m \varepsilon_0}{e^2}$$