

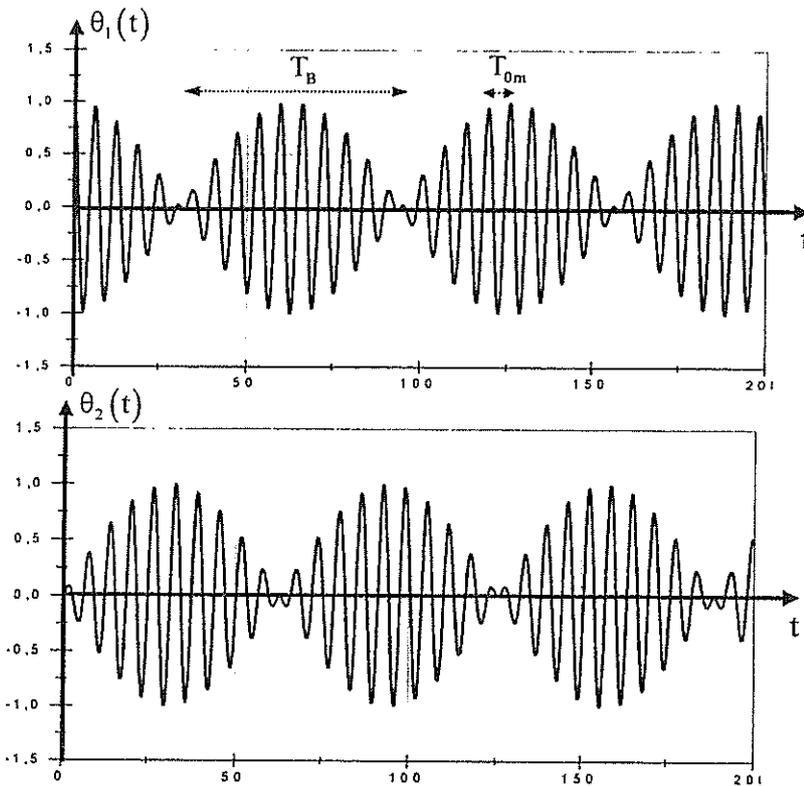
**Correction de l'épreuve de physique**  
**Concours Physique et Chimie**  
**Session Juin 2012**

**Exercice : Deux oscillateurs couplés (25/100)**

Q	Réponses	Barèmes
1-	<p>Le théorème de moment cinétique est appliqué aux points <math>O_1</math> et <math>O_2</math> ;</p> $* \frac{d\vec{L}_{/O_1}}{dt} = \sum \vec{M}_{/O_1, \vec{F}_{ext}} = \vec{M}_{/O_1, \vec{P}} + \vec{M}_{/O_1, \vec{T}_1} + \vec{M}_{/O_1, \vec{F}_1} ;$ $\vec{M}_{/O_1, \vec{P}} = \vec{O_1 M_1} \wedge m \vec{g} = -m g \ell \sin \theta_1 \vec{e}_y \approx -m g \ell \theta_1 \vec{e}_y ,$ $\vec{M}_{/O_1, \vec{T}_1} = \vec{O_1 M_1} \wedge \vec{T}_1 = -k \ell \cos \theta_1 (x_1 - x_2) \vec{e}_y \approx -k \ell (x_1 - x_2) \vec{e}_y = -k \ell^2 (\theta_1 - \theta_2) \vec{e}_y \text{ et}$ $\vec{M}_{/O_1, \vec{F}_1} = \vec{O_1 M_1} \wedge \vec{F}_1 = \vec{0} ; \text{ la force qu'exerce la tige est orientée vers l'axe de rotation}$ $\frac{d\vec{L}_{/O_1}}{dt} = \vec{O_1 M_1} \wedge m \vec{v}(M_1) = m \dot{\theta}_1 \ell^2 \vec{e}_y = -m g \ell \theta_1 \vec{e}_y - k \ell^2 (\theta_1 - \theta_2) \vec{e}_y$ <p>Projection suivant <math>O_1 y</math>, on obtient l'équation différentielle couplée :</p> $m \ddot{\theta}_1 \ell^2 = -m g \ell \theta_1 - k \ell^2 (\theta_1 - \theta_2) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{\ell} \theta_1 + \frac{k}{m} (\theta_1 - \theta_2) = 0$ $\Rightarrow \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 + \Omega^2 (\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (I)$ <p>* De même, pour le deuxième pendule, le théorème de moment cinétique</p> $\frac{d\vec{L}_{/O_2}}{dt} = \sum \vec{M}_{/O_2, \vec{F}_{ext}} = \vec{M}_{/O_2, \vec{P}_2} + \vec{M}_{/O_2, \vec{T}_2} + \vec{M}_{/O_2, \vec{F}_2}$ <p>amène à la deuxième équation différentielle couplée : <math>\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{\ell} \theta_2 + \frac{k}{m} (\theta_2 - \theta_1) = 0</math></p> $\Rightarrow \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2 \theta_2 + \Omega^2 (\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (II) .$	<p style="text-align: center;">1</p> <p style="text-align: center;">1</p> <p style="text-align: center;">1</p>
2-1-	$(I) + (II) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2 (\theta_1 + \theta_2) = 0 \Rightarrow \ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0, \text{ on pose } \omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ $\Rightarrow u(t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1)$ $(I) - (II) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2 (\theta_1 - \theta_2) + 2\Omega^2 (\theta_1 - \theta_2) = 0 \Rightarrow \ddot{v}(t) + (\omega_0^2 + 2\Omega^2) v(t) = 0$ <p>on pose <math>\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2</math> et <math>\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \Rightarrow v(t) = A_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2)</math></p>	<p style="text-align: center;">1</p> <p style="text-align: center;">1</p>
2-2-	$\theta_1(t) = \frac{u(t) + v(t)}{2} = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$ $\theta_2(t) = \frac{u(t) - v(t)}{2} = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) - \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$	<p style="text-align: center;">1</p>
3-1-	<p>Un mode propre d'un système d'oscillateurs couplés est représenté par une solution</p>	

	des équations du mouvement où tous les oscillateurs vibrent d'une façon harmonique de pulsation $\omega$ . Elle constitue la pulsation propre du mode propre considéré. Si le système couplé est excité initialement dans l'un de ses modes propre, il y reste par la suite	1,5
3-2-	Un système de N oscillateurs couplés possède N modes propres auquel on associe N pulsations propres seulement. La solution générale est une superposition des modes propres. Mode 1 : $\theta_1(t) = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) = \theta_2(t)$ les deux pendules se déplacent selon les mêmes lois sinusoïdales à la pulsation $\omega_1 = \omega_0$ . Le ressort effectue un mouvement de translation sans déformation : mode symétrique. Mode 2 : $\theta_1(t) = \frac{A_2}{2} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) = -\theta_2(t)$ Les pendules se déplacent sinusoïdalement à la pulsation $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2}$ suivant des sens opposés. Il s'agit du mode anti-symétrique.	1  1
3-3-	Un choix convenable des conditions initiales imposées au système couplé permet de sélectionner un mode propre parmi les deux.	1
4-1-	Avec les conditions initiales indiquées, on trouve : $A_1 = -\theta_0$ , $\varphi_1 = 0$ , $A_2 = -\theta_0$ et $\varphi_2 = 0$ . $\theta_1(t) = -\frac{\theta_0}{2} \cos(\omega_1 t) - \frac{\theta_0}{2} \cos(\omega_2 t)$ $\theta_2(t) = -\frac{\theta_0}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{\theta_0}{2} \cos(\omega_2 t)$ Les mouvements des pendules sont constitués d'une combinaison des lois sinusoïdales.	1  1  0,5
4-2-	$\theta_1(t) = -\frac{\theta_0}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = -\theta_0 \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$ $\theta_1(t) = -\theta_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos(\omega_{0m} t)$ $\theta_2(t) = -\frac{\theta_0}{2} (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) = \theta_0 \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$ $\theta_2(t) = \theta_0 \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \sin(\omega_{0m} t)$	0,5   0,5
5-1-	$\omega_1 = \omega_0$ $\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + 2\alpha^2} = \omega_0 (1 + 2\alpha^2)^{1/2} \approx \omega_0 (1 + \alpha^2)$ puisque le couplage est faible * $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx \omega_0 (1 + \alpha^2) - \omega_0 = \omega_0 \alpha^2$ * $\omega_{0m} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \approx \frac{\omega_0 (1 + \alpha^2) + \omega_0}{2} \Rightarrow \omega_{0m} = \omega_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)$	1  1

5-2-



1,5

Les graphiques font apparaître deux durées caractéristiques  $T_{0m} = \frac{2\pi}{\omega_{0m}}$  et  $T_B$ ; les masses oscillent avec la période  $T_{0m}$ . Les amplitudes de leurs oscillations varient lentement suivant la période  $T_B$

1

Il s'agit du phénomène de battements et  $T_B$  est appelée période de battements.

0,5

$$T_B = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \alpha^2}$$

5-3- A l'instant initial, l'énergie mécanique est sous forme énergie potentielle  $E_0 = mg\ell(1 - \cos\theta_0) = \frac{\ell}{2}mg\theta_0^2$  puisque  $\theta_0$  est faible. En tenant compte des conditions initiales, cette énergie mécanique est appropriée au premier pendule.

$$E_1(0) = E_0 = \frac{\ell}{2}mg\theta_0^2 \text{ et } E_2(0) = 0$$

0,5

A l'instant t, les énergies mécaniques relatives aux deux pendules s'écrivent :

$$E_1(t) = \frac{\ell}{2}mg\theta_1^2(t) = \frac{\ell}{2}mg\theta_0^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos^2(\omega_{0m}t)$$

$$\Rightarrow E_1(t) = \frac{\ell}{2}mg\theta_0^2 \cos^2\left(\frac{\omega_0 \alpha^2}{2}t\right) \cos^2\left(\omega_0\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)t\right)$$

1

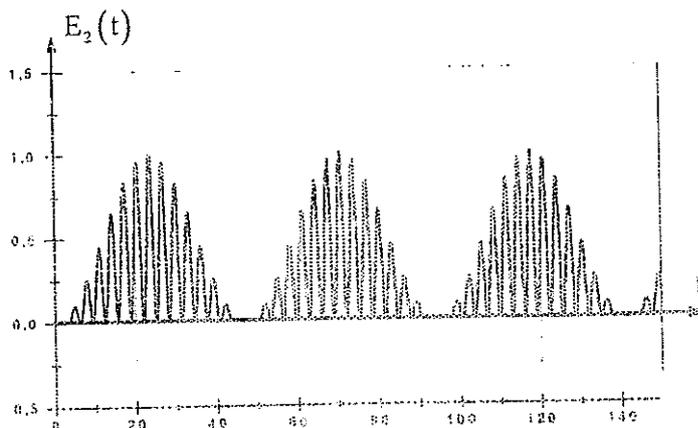
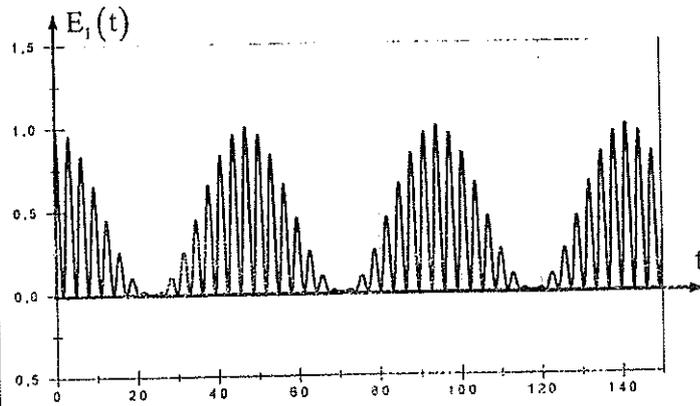
$$\text{et } E_2(t) = \frac{\ell}{2}mg\theta_2^2(t) = \frac{\ell}{2}mg\theta_0^2 \sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin^2(\omega_{0m}t)$$

$$\Rightarrow E_2(t) = \frac{\ell}{2}mg\theta_0^2 \sin^2\left(\frac{\omega_0 \alpha^2}{2}t\right) \sin^2\left(\omega_0\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)t\right)$$

1

On choisit l'instant t où l'énergie mécanique est sous forme énergie potentielle.

5-4-



L'énergie mécanique du système couplé est conservative. Au cours du temps, il y a un transfert continu et périodique ( $T_B$ ) de l'énergie mécanique relative à chaque pendule vers l'autre.

1,5

0,5

5-5-

Lorsque le premier pendule cède totalement son énergie au deuxième  $t = \frac{T_B}{2} = n T_{0m}$

$$\frac{T_B}{2} = \frac{\pi}{\omega_0 \alpha^2} \text{ et } T_{0m} = \frac{2\pi}{\omega_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)} \Rightarrow n = \frac{T_B}{T_{0m}} = \frac{\pi}{\omega_0 \alpha^2} \frac{\omega_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)}{2\pi} = \frac{\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)}{2\alpha^2}$$

$$\text{Pour } \alpha = 0,05 \Rightarrow n \approx \frac{1}{2\alpha^2} = 200$$

Après 200 oscillations, l'énergie mécanique est transférée vers l'autre pendule.

1,5

### Problème I (40 /100)

#### I- Action d'un champ électrique : Modèle classique

1-	Dans le modèle classique de Drude, un électron mobile est soumis aux forces : $\vec{F}_e = -e\vec{E}, \vec{F}_r = -\frac{m}{\tau} \vec{v}.$	0,5
	L'application du principe fondamental de la dynamique amène à l'équation du mouvement d'un électron : $m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}.$ Equation différentielle de premier ordre en $\vec{v}(t)$ .	1,5

2-	<p>Solution sans second membre : <math>\vec{v}_1(t) = \vec{K} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)</math></p> <p>solution particulière : <math>\vec{v}_p = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0 = -\frac{e\tau}{m} E_0 \vec{e}_z</math></p> <p>la solution globale, en tenant compte de la condition initiale, s'écrit :</p> $\vec{v}(t) = -\frac{e\tau}{m} E_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \vec{e}_z.$ <p><math>\tau</math> est homogène à une durée caractérisant le régime transitoire et lié à l'effet de frottement.</p>	<p>1</p> <p>1</p> <p>0,5</p>
3-	<p>Lorsque <math>t</math> vaut quelques <math>\tau \Rightarrow \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow 0</math>, on atteint le régime permanent :</p> $\vec{v}(t) \rightarrow \vec{v}_\ell = -\frac{e\tau}{m} E_0 \vec{e}_z = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0$ <p>La densité de courant de charge <math>\vec{J} = n_e (-e) \vec{v}_\ell = \frac{n_e e^2 \tau}{m} \vec{E}_0 = \gamma_0 \vec{E}_0</math> loi d'Ohm locale</p> $\gamma_0 = \frac{n_e e^2 \tau}{m} \text{ en } \text{Sm}^{-1}$ <p>A.N : <math>\tau = \frac{m \gamma_0}{n_e e^2} = 2,457 10^{-14} \text{ s}</math> très faible</p> <p><math>\Rightarrow</math> l'établissement du régime continu est considéré immédiat</p>	<p>1</p> <p>1</p> <p>1</p>
4-1-	<p>Le champ exciteur est sinusoïdal : <math>\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)</math></p> $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E},$ la solution particulière est dominante. Elle suit le champ exciteur $\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 \exp(-i\omega t), \quad \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = i\omega \vec{v}$ $\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right) \vec{v}(t) = -\frac{e}{m} \vec{E}(t) \Rightarrow \vec{v}(t) = -\frac{e}{m} \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)} \vec{E}(t).$	<p>2</p>
4-2-	<p>La densité de courant s'écrit : <math>\vec{J}(t) = n_e (-e) \vec{v}(t) = \frac{n_e e^2}{m} \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)} \vec{E}(t)</math></p> $\vec{J}(t) = \frac{n_e e^2 \tau}{m} \frac{1}{(1 + i\tau\omega)} \vec{E}(t) = \frac{\gamma_0}{(1 + i\tau\omega)} \vec{E}(t) = \underline{\gamma} \vec{E}(t) \Rightarrow \underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{(1 + i\tau\omega)}$ <p><math>\underline{\gamma}</math> est complexe. Il existe un déphasage entre <math>\vec{J}</math> et <math>\vec{E}</math></p> <p>En régime continu où <math>\omega = 0</math>, <math>\underline{\gamma}</math> s'identifie avec <math>\gamma_0</math>.</p> $ \underline{\gamma}  = \frac{\gamma_0}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} = 0,99 \gamma_0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} = 0,99 \Rightarrow \omega = \frac{0,1424}{\tau} = 5,8 10^{12} \text{ rds}^{-1}$ <p>Pour que <math> \underline{\gamma}  \geq 0,99 \gamma_0 \Rightarrow \omega \leq \omega_\ell = 5,8 10^{12} \text{ rds}^{-1}</math></p>	<p>1</p> <p>1</p> <p>1</p>

## II- Propagation des ondes électromagnétiques dans les conducteurs

5-	<p>Equations de Maxwell</p> <p>* <math>\text{div} \vec{E}(M, t) = 0</math> ; le milieu est globalement neutre, il y a conservation de flux de <math>\vec{E}</math>.</p>	0,5
----	---	-----

	<p>* <math>\text{div } \vec{B}(M, t) = 0</math> ; le flux de <math>\vec{B}</math> est conservé, coexistence des pôles magnétiques.</p> <p>* <math>\overline{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}</math> ; la variation temporelle de <math>\vec{B}</math> constitue une source de <math>\vec{E}</math>.</p> <p>* <math>\overline{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \left( \vec{J}(M, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right)</math> ; <math>\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}</math> homogène à un courant représente une source supplémentaire de <math>\vec{B}</math>.</p>	0,5
		0,5
		0,5
6-	<p>Dans l'hypothèse <math>\omega \leq \omega_c \Rightarrow  \underline{\gamma}  = \gamma \approx \gamma_0</math> (cas du cuivre)</p> <p>Pour comparer les densités des courants, on évalue le rapport <math>\frac{ \underline{J}_D }{ \underline{J}_C } = \frac{\epsilon_0 \omega  \underline{E} }{\sigma_0  \underline{E} } = \frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma_0}</math>. Il prend une valeur maximale pour <math>\omega = \omega_c</math>. <math>\frac{ \underline{J}_D }{ \underline{J}_C } = \frac{\epsilon_0 \omega_c}{\sigma_0} = 8,85 \cdot 10^{-7} \ll 1 \Rightarrow  \underline{J}_D  \ll  \underline{J}_C </math>.</p> <p>Dans ce domaine de pulsation, le courant de conduction est dominant.</p>	1
		0,5
7-	<p><math>\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{E}) = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\overline{\text{rot}} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\text{rot}} \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \vec{J}) = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \Delta \vec{E}(M, t) - \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} = \vec{0}</math> (*).</p> <p>Elle est différente de celle D'Alembert traduisant la propagation dans le vide dépourvu de charge et de courant. Sa solution décrit une pseudo onde plane dont le nombre d'onde est a priori complexe.</p>	1
		1
8-	<p>En notation complexe, on a : <math>\underline{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp(i\omega t - kz)</math></p> <p><math>\Delta \underline{E}(M, t) = -k^2 \underline{E}(M, t)</math> et <math>\frac{\partial \underline{E}(M, t)}{\partial t} = i\omega \underline{E}(M, t)</math></p> <p>(*) <math>\Rightarrow -k^2 \underline{E}(M, t) - \mu_0 \gamma_0 i \omega \underline{E}(M, t) = \vec{0}</math>, puisque <math>\underline{E}(M, t) \neq 0 \Rightarrow k^2 = -i\mu_0 \gamma_0 \omega</math>.</p> <p><math>k^2 = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) \mu_0 \gamma_0 \omega \Rightarrow k(\omega) = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} = (1-i) \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}} = k_1 - ik_2</math></p> <p><math>k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}}</math>.</p>	1,5
		1,5
9-	<p>On définit l'indice complexe du milieu conducteur par :</p> <p><math>\underline{n} = \frac{k(\omega)}{k_0} = \frac{c}{\omega} (1-i) \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}} = (1-i) \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\epsilon_0 \omega}} = (n_1 - in_2) \Rightarrow n_1 = n_2 = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\epsilon_0 \omega}}</math></p>	1
10-	<p><math>\underline{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp(i\omega t - \underline{k}z) = \vec{E}_0 \exp(i\omega t - (k_1 - ik_2)z)</math></p> <p><math>\Rightarrow \underline{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp(-k_2 z) \exp(i\omega t - k_1 z)</math></p> <p><math>\Rightarrow \vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp(-k_2 z) \cos(\omega t - k_1 z)</math></p> <p>La pseudo onde est plane</p> <p><math>\underline{B}(M, t) = \frac{\underline{k} \wedge \underline{E}(M, t)}{\omega} = \frac{(k_1 - ik_2) \vec{e}_z \wedge \vec{E}_0 \exp(-k_2 z) \exp(i\omega t - k_1 z)}{\omega}</math></p>	0,5

	$\vec{B}(M, t) = \frac{k_1}{\omega} (\vec{e}_z \wedge \vec{E}_0) \exp(-k_2 z) (\exp(i(\omega t - k_1 z)) - i \exp(i(\omega t - k_1 z)))$ $\vec{B}(M, t) = \frac{k_1}{\omega} (\vec{e}_z \wedge \vec{E}_0) \exp(-k_2 z) (\cos(\omega t - k_1 z) + \sin(\omega t - k_1 z))$ <p>L'amplitude du champ électromagnétique subit une décroissance lors de la propagation dans le milieu conducteur.</p> <p>La propagation de l'onde est dispersive puisque <math>v_\phi = \frac{\omega}{k_1} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}}</math> fonction de <math>\omega</math></p> <p>Les champs <math>\vec{E}</math> et <math>\vec{B}</math> ne sont pas en phase.</p>	1 1 0,5
11-	<p>Puissance volumique cédée au conducteur :</p> $\mathcal{P}_v(z, t) = \vec{j}(z, t) \cdot \vec{E}(z, t) = \gamma_0 E^2(z, t) = \gamma_0 \vec{E}(M, t) = \gamma_0 E_0^2 \exp(-2k_2 z) \cos^2(\omega t - k_1 z)$ $\langle \mathcal{P}_v \rangle_t = \frac{1}{2} \gamma_0 E_0^2 \exp(-2k_2 z)$ elle décroît exponentiellement lors de la propagation. <p>La diminution du flux d'énergie s'explique par l'interaction entre les charges du métal avec l'onde électromagnétique.</p>	1,5 1

### III- Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique sur un conducteur réel

12-	$\vec{k}_i = k_0 \vec{e}_z = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z ;$ $\vec{k}_r = -\frac{\omega}{c} \vec{e}_z ;$ $\vec{k} = (k_1 - ik_2) \vec{e}_z = \frac{\omega}{c} \underline{n} \vec{e}_z .$	0,5 0,5 0,5
13-	$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x E_{0i} \exp(i(\omega t - k_0 z))}{\omega} = \frac{E_{0i}}{c} \exp(i(\omega t - k_0 z)) \vec{e}_y$ $\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{(-\vec{e}_z) \wedge \vec{e}_x \underline{r} E_{0i} \exp(i(\omega t + k_0 z))}{\omega} = -\frac{1}{c} \underline{r} E_{0i} \exp(i(\omega t - k_0 z)) \vec{e}_y$ $\vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} = \frac{\left(\frac{\underline{n} \omega}{c} \vec{e}_z\right) \wedge \vec{e}_x \underline{t} E_{0i} \exp(-k_2 z) \exp(i(\omega t - k_1 z))}{\omega}$ $\vec{B}_t = \frac{\underline{n}}{c} \underline{t} E_{0i} \exp(-k_2 z) \exp(i(\omega t - k_1 z)) \vec{e}_y .$	1 1 1
14-	<p>* Continuité de la composante tangentielle de du champ électrique.</p> $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2(z=0, t) - \vec{E}_1(z=0, t)) = \vec{0} ; \vec{n}_{12} \equiv \vec{e}_z$ $\vec{E}_1(z, t) = \vec{E}_i(z, t) + \vec{E}_r(z, t) ; \vec{E}_2(z, t) = \vec{E}_t(z, t)$ $\vec{e}_z \wedge \left[ \underline{t} E_{0i} \exp(i\omega t) - (E_{0i} \exp(i\omega t) + \underline{r} E_{0i} \exp(i\omega t)) \right] \vec{e}_x = \vec{0}$ $\Rightarrow 1 + \underline{r} = \underline{t}$ <p>* Continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à cause de l'absence du courant surfacique à l'interface <math>z = 0</math>.</p> $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2(z=0, t) - \vec{B}_1(z=0, t)) = \vec{0}$ $\vec{e}_z \left[ \frac{\underline{n}}{c} \underline{t} E_{0i} \exp(i\omega t) - \left( \frac{E_{0i}}{c} \exp(i\omega t) - \frac{1}{c} \underline{r} E_{0i} \exp(i\omega t) \right) \right] \vec{e}_y = 0$ $\Rightarrow 1 - \underline{r} = \underline{n} \underline{t}$	0,5 1 0,5 1

15-	$\begin{cases} 1+r=t \\ 1-r=n t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{E_{oi}}{E_{oi}} = \frac{2}{1+n} ; n = n_1 - i n_2 \Rightarrow t = \frac{2}{1+n_1 - i n_2}$ <p>avec <math>n_1 = n_2 = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\epsilon_0 \omega}}</math></p> <p>et <math>r = t - 1 = \frac{2 - (1+n)}{1+n} \Rightarrow r = \frac{E_{or}}{E_{oi}} = \frac{1-n}{1+n} \Rightarrow r = \frac{(1-n_1) + i n_2}{(n_1+1) - i n_2}</math></p>	1  1
16-	<p>Dans le cas d'un métal parfait, <math>\gamma_0 \rightarrow +\infty \Rightarrow n_1 = n_2 = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\epsilon_0 \omega}} \rightarrow +\infty</math>.</p> <p><math>\Rightarrow t \rightarrow 0</math> et <math>r = \frac{E_{oi}}{E_{oi}} \rightarrow -1 \Rightarrow E_{or} = -E_{oi}</math>, l'onde réfléchiée est en opposition de phase avec l'onde incidente.</p> <p>L'épaisseur de peau <math>\delta = \frac{1}{k_2} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}</math> tend vers 0, la densité volumique de courant est partout nulle sauf au voisinage de l'interface. Elle est modélisée par une densité superficielle de courant <math>\vec{j}_s</math>.</p>	0,5  1,5  0,5

## Problème 2 (35/100)

### I- Propulsion d'une fusée

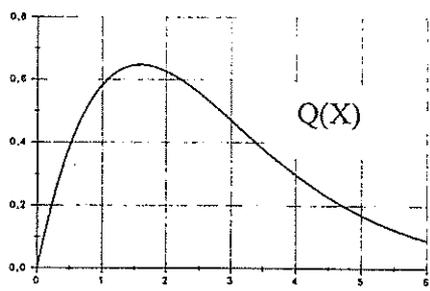
1-	<p>A l'instant <math>t</math>, la masse du système fermé s'identifie avec celle du système ouvert :</p> $m^*(t) = m(t)$ <p>A l'instant <math>t + dt</math>, <math>m^*(t + dt) = m(t + dt) + \delta m</math></p> $m^*(t + dt) - m^*(t) = m(t + dt) - m(t) + \delta m \Rightarrow dm^*(t) = dm(t) + \delta m = 0$ <p>puisque la masse est une grandeur conservative : <math>\frac{dm^*}{dt} = \frac{Dm}{Dt} = 0</math></p> $\Rightarrow \frac{dm(t)}{dt} = -\frac{\delta m}{dt} = -\frac{\delta m_{\text{sortante}}}{dt} = -q_m < 0$	1,5  1
2-	<p>Considérons le système constitué à l'instant <math>t</math> par la fusée de masse <math>m</math> et de vitesse <math>\vec{V}</math></p> <p>A l'instant <math>t + dt</math> la fusée de masse <math>m(t + dt) = m(t) + dm = m(t) - q_m dt</math> et de vitesse <math>\vec{V} + d\vec{V}</math> et des gaz éjectés pendant <math>dt</math> sont de masse <math>-dm = q_m dt</math> et de vitesse <math>\vec{V} + \vec{u}</math>.</p> <p>A l'instant <math>t</math>, la quantité de mouvement du système fermé <math>\Sigma^*(t)</math> est :</p> $\vec{p}^*(t) = \vec{p}(t) = m(t) \vec{V}(t)$ <p>A l'instant <math>t + dt</math>, la quantité de mouvement du système fermé <math>\Sigma^*(t + dt)</math> s'écrit :</p> $\begin{aligned} \vec{p}^*(t + dt) &= \vec{p}(t + dt) - dm(\vec{u} + \vec{V}(t + dt)) \\ &= m(t + dt) \vec{V}(t + dt) - dm(\vec{u} + \vec{V}(t + dt)) \end{aligned}$ <p>et <math>\vec{V}(t + dt) = \vec{V}(t) + d\vec{V}</math></p> $\begin{aligned} \vec{p}^*(t + dt) - \vec{p}^*(t) &= \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) \\ &= m(t + dt) \vec{V}(t + dt) - dm(\vec{u} + \vec{V}(t + dt)) - m(t) \vec{V}(t) \end{aligned}$	1  1  1

	<p>A la surface de la terre, on peut assimiler la force du poids à celle de gravitation :</p> $m g_0 \approx \frac{\mathcal{G} m M_T}{R_T^2} \Rightarrow \mathcal{G} M_T \approx g_0 R_T^2 \text{ et on a : } v_0 = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r}} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + z}} \text{ en ms}^{-1}$ <p>AN : <math>v_0 = 6,37 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{10}{(6,37 + 0,832) \cdot 10^6}} = 7,50 \text{ km s}^{-1}</math></p>	0,5
14-	<p>Il s'agit d'un système soumis à une force conservative, son énergie mécanique se conserve. <math>E_m = C^{te} = E_c + E_p</math>.</p>	1
15-1-	<p>Le satellite n'est soumis qu'à la force conservative de gravitation, elle dérive d'une énergie potentielle <math>\vec{F} = -\overline{\text{grad}} E_p \Rightarrow -\frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{e}_r</math> ; <math>E_p(P) = E_p(r)</math></p> $\vec{F} d\vec{r} = -\overline{\text{grad}} d\vec{r} = -dE_p \Rightarrow dE_p = \frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} dr \Rightarrow \int_r^{+\infty} dE_p = \int_r^{+\infty} \frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} dr$ $E_p(+\infty) - E_p(r) = \frac{\mathcal{G} m M_T}{r}, \text{ enfin } E_p(r) = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{r}$	0,5  1,5
15-2-	$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{\mathcal{G} M_T}{r} \text{ et } E_p(r) = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{r} \Rightarrow E_m = -\frac{1}{2} m \frac{\mathcal{G} M_T}{r}$ <p>Remarque :</p> <p>Lorsqu'il s'exercent des forces de frottements sur le satellite, le théorème d'énergie mécanique s'écrit : <math>\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}_{n.c}) = \vec{f}_{n.c} \cdot \vec{v}_{/R_g} &lt; 0</math>.</p> <p>Au cours du temps, l'énergie mécanique diminue ; le rayon de la trajectoire devient plus faible.</p>	2
16-	<p>Lorsque le satellite est immobile à une position de la surface de la Terre de latitude <math>\lambda</math>, son énergie mécanique dans le référentiel géocentrique <math>R_g</math> se compose de :</p> <p>* l'énergie cinétique d'un point matériel P en rotation autour de l'axe de la Terre suivant un rayon <math>\rho = R_T \cos \lambda</math> à la vitesse angulaire <math>\omega_T = \frac{2\pi}{T}</math> : <math>E_c = \frac{1}{2} m v_{/R_g}^2(P)</math> ;</p> $\vec{v}_{/R_g}(P) = \vec{\omega}_T \wedge \vec{OP} = \omega_T R_T \cos \lambda \vec{e}_\phi \Rightarrow$ $E_c = \frac{1}{2} m (\omega_T R_T \cos \lambda)^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{2\pi}{T} R_T \cos \lambda \right)^2$ <p>* l'énergie potentielle gravitationnelle inversement proportionnelle à la distance entre le satellite et le centre de la force (<math>r = OP = R_T</math>) : <math>E_p = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{R_T}</math>.</p> $D'où : E_m = C^{te} = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{R_T} + \frac{1}{2} m \left( \frac{2\pi}{T} R_T \cos \lambda \right)^2$ <p>On constate que cette énergie mécanique est maximale lorsque <math>\lambda = 0</math>, c'est-à-dire sur l'équateur. Puisque l'énergie potentielle ne dépend pas de latitude, l'énergie mécanique préférée correspond à une énergie cinétique maximale dans le référentiel géocentrique due à la rotation de la Terre : <math>E_{c \text{ max}} = \frac{1}{2} m \left( \frac{2\pi}{T} R_T \right)^2</math>.</p> <p>Pour lancer un satellite, on exploite l'énergie cinétique de rotation de la Terre qui est maximale au niveau de l'équateur.</p> <p>Pour bénéficier de cette énergie cinétique maximale, il faut envoyer le satellite dans le sens de rotation de la Terre c'est-à-dire vers l'est.</p>	1          1

	$z(t) = \int V(t) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + ut \ln(m(0)) - u \int \ln(m) dt$ $\int \ln(m) dt = -\frac{1}{q_m} \int \ln(m) dm = -\frac{1}{q_m} [m \ln(m) - m]_{m(0)}^{m(0)-q_m t}$ $= -\frac{1}{q_m} [(m(0) - q_m t) \ln(m(0) - q_m t) - m(0) \ln(m(0)) - q_m t]$ $\int \ln(m) dt = -\frac{m(0)}{q_m} \ln \left[ 1 - \frac{q_m t}{m(0)} \right] + t [1 + \ln(m(0) - q_m t)]$ $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + ut \left[ 1 - \ln \left( \frac{1 - q_m t}{m(0)} \right) \right] + u \frac{m(0)}{q_m} \ln \left( \frac{1 - q_m t}{m(0)} \right)$ $\Rightarrow z(t) = ut - \frac{1}{2}gt^2 + u \left[ \frac{m(0)}{q_m} - t \right] \ln \left( 1 - \frac{q_m t}{m(0)} \right)$	1
8-	$dE_p = m g(r) dr = \frac{m g_0 R_T^2}{r^2} dr.$ $\Rightarrow \frac{E_p(r)}{m} = -\frac{g_0 R_T^2}{r} \Rightarrow \frac{E_p(r = R_T)}{m} = -g_0 R_T = 6,4 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$	0,5 1,5
9-	L'énergie nécessaire est le triple de l'énergie massique produite par un combustible. Comme en outre le rendement Q est inférieur à 1, il faut une quantité de combustible très supérieure à la masse qu'on veut faire échapper au champ gravitationnel terrestre.	1,5

## II- Mouvement d'un satellite

10-	Il faut que la durée de l'expérience soit faible par rapport à la période de révolution de la Terre pour puisse considérer que l'origine est animée d'un mouvement rectiligne uniforme	1
11-	la trajectoire est circulaire $r = R_T + z = C^{te}$ ; $\overline{OP} = r \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v}(P) = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ $\Rightarrow \vec{a}(P) = \frac{d\vec{v}(P)}{dt} = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta = -\frac{v^2}{R_T + z} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta.$	0,5 1,5
12-	Le théorème du moment cinétique par rapport au point O $\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} / R_g = \sum \vec{M}_{O, \vec{F}_{ext}} = \overline{OP} \wedge \vec{F} = r \vec{e}_r \wedge -\frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} \vec{e}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_{/O} = \overline{OP} \wedge m \vec{v}_{/R}(P) = \vec{C}^{te}$ $\Rightarrow$ le moment cinétique reste toujours orthogonal au plan formé par les vecteurs $\overline{OP}$ et $\vec{v}_{/R}(P)$ , constituant ainsi le plan de mouvement du satellite autour de la Terre.	1,5 0,5
13-	Principe fondamental de la dynamique : $m \vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \sum \vec{F}_{ext} = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} \vec{e}_r$ $\Rightarrow m \left( -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta \right) = -\frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} \vec{e}_r$ en projetant suivant les directions normale et tangentielle, on obtient : $\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0 \\ \frac{m v^2}{r} = \frac{\mathcal{G} m M_T}{r^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = C^{te} = v_0 \\ v = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{r}} \end{cases}$ $\Rightarrow v = v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{r}}$ ; le satellite est animé d'un mouvement circulaire uniforme.	0,5 1 1

3-	<p>Le théorème de la quantité de mouvement appliqué au système fermé <math>\Sigma'</math> s'écrit :</p> $\frac{d\bar{p}^f}{dt} = \frac{D\bar{p}}{Dt} = \frac{(m(t) + dm)(\bar{V}(t) + d\bar{V}) - dm(\bar{V}(t) + \bar{u}) - m(t)\bar{V}(t)}{dt} = \sum \bar{F}_{ext} = m(t)\bar{g}$ <p>En simplifiant et en supprimant le terme quadratique par rapport aux différentielles, qui correspond à un terme négligeable devant les termes linéaires par rapport aux différentielles, on obtient :</p> $\frac{d\bar{p}^f}{dt} = m(t) \frac{d\bar{V}}{dt} - \frac{dm}{dt} \bar{u} = m(t) \frac{d\bar{V}}{dt} + q_m \bar{u} = m(t)\bar{g}$ <p>Lorsque la fusée est traitée comme système ouvert, le théorème de la quantité de mouvement écrit :</p> $m(t) \frac{d\bar{V}}{dt} = m(t)\bar{g} + \bar{T} \text{ où } \bar{T} = \frac{dm}{dt} \bar{u} = -q_m \bar{u}$	<p>1,5</p> <p>1</p>
4-	$m(t) \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{u} \frac{dm}{dt} \Rightarrow d\bar{V}(t) = \bar{u} \frac{dm}{m}$ $\Rightarrow \bar{V}_f - \bar{V}_i = \bar{u} \int_{m_i}^{m_f} \frac{1}{m} dm = \bar{u} \ln\left(\frac{m_f}{m_i}\right)$	<p>0,5</p> <p>1</p>
5-	<p>Par définition, on a : <math>Q = \frac{\frac{1}{2} m_f V_f^2}{\frac{1}{2} m_e u^2}</math></p> $V_f = u \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) \Rightarrow m_e = m_i - m_f = m_f \left[ \exp\left(\frac{V_f}{u}\right) - 1 \right]$ $Q = \frac{x^2}{\exp(x) - 1} \text{ où } x = \frac{V_f}{u}$ <p><math>Q(x)</math> est une fonction positive de la variable <math>x</math> positive ;  si <math>x \rightarrow 0</math>, <math>Q(x) \approx x \rightarrow 0</math> ;  si <math>x \rightarrow \infty</math>, <math>Q(x) \rightarrow 0</math> ; donc <math>Q(x)</math> présente un maximum pour une valeur de <math>x</math> strictement positive.</p>  <p>La courbe représentée montre que <math>Q(x)</math> est toujours inférieur à 1 et qu'il passe par un maximum pour <math>x = 1,5936</math>, ce qui traduit que, quand <math>x</math> est de l'ordre de 1, il y a moins d'énergie cinétique perdue.</p>	<p>0,5</p> <p>1</p> <p>1</p>
6-	$T \approx 2m g = q_m u \Rightarrow q_m = \frac{2 \times 2.10^6 \times 10}{4.10^3} = 10^4 \text{ kg/s,}$ <p>ce qui représente un débit considérable.</p>	<p>1</p> <p>0,5</p>
7-	<p>Sous réserve que le débit des gaz soit constant et suffisant pour que la poussée soit supérieure au poids :</p> $\frac{dm}{dt} = -q_m \Rightarrow m(t) = m(0) - q_m t$ $m \frac{dV}{dt} = -mg - u \frac{dm}{dt} \Rightarrow dV = -g dt - u \frac{dm}{m}$ $V(t) = -gt - u \ln\left[\frac{m(t)}{m(0)}\right] = -gt - u \ln\left[1 - \frac{q_m t}{m(0)}\right]$	<p>0,5</p> <p>1,5</p>

