

I-1 - Torseurs cinématiques

- $\{V_{1/0}\}_A = \{ \vec{\omega}_{1/0} | \vec{v}_{A/R_0} \}$  avec  $\vec{\omega}_{1/0} = -\dot{\theta} \vec{z}_0$ ,  $\vec{v}_{A/R_0} = \vec{0}$
- $\{V_{2/0}\}_C = \{ \vec{\omega}_{2/0} | \vec{v}_{C/R_0} \}$  avec  $\vec{\omega}_{2/0} = -\dot{\varphi} \vec{z}_0$ ,  $\vec{v}_{C/R_0} = \vec{0}$

I-2 Vitesses de B

2-a.  $\vec{v}_{B/R_0} = \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{AB} = -\dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge a \vec{y}_1 = a \dot{\theta} \vec{x}_1$

$\vec{v}_{B/R_0} = a \dot{\theta} (\omega \vec{x}_0 - \sin \theta \vec{y}_0)$

2-b  $\vec{v}_{B/R_0} = \frac{d\vec{CB}}{dt} / R_0 = \dot{\lambda} \vec{x}_2 - \lambda \dot{\varphi} \vec{y}_2 + b \dot{\varphi} \vec{x}_2$

$\vec{v}_{B/R_0} = (\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) (\omega \cos \varphi \vec{x}_0 - \sin \varphi \vec{y}_0) - \lambda \dot{\varphi} (\sin \varphi \vec{x}_0 + \omega \cos \varphi \vec{y}_0)$   
 $= [(\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) \omega \cos \varphi - \lambda \dot{\varphi} \sin \varphi] \vec{x}_0 - [(\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) \sin \varphi + \lambda \dot{\varphi} \omega \cos \varphi] \vec{y}_0$

3 Relations entre paramètres

$a \dot{\theta} \cos \theta = (\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) \cos \varphi - \lambda \dot{\varphi} \sin \varphi$

$a \dot{\theta} \sin \theta = (\dot{\lambda} + b \dot{\varphi}) \sin \varphi + \lambda \dot{\varphi} \cos \varphi$

I-4.  $\dot{\lambda}$  en fonction de  $\theta$ .

(1)  $\omega \varphi + (2) \sin \varphi \Rightarrow$

$a \dot{\theta} (\omega \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) = \dot{\lambda} + b \dot{\varphi}$

$a \dot{\theta} \omega (\theta - \varphi) = \dot{\lambda} + b \dot{\varphi}$

(1)  $\sin \varphi - \omega \cos \varphi$

$a \dot{\theta} (\omega \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi) = -\lambda \dot{\varphi}$

$a \dot{\theta} \sin(\varphi - \theta) = -\lambda \dot{\varphi}$

$a \dot{\theta} \sin(\theta - \varphi) = \lambda \dot{\varphi}$

$a \dot{\theta} \omega (\theta - \varphi) = \dot{\lambda} + \frac{b}{\lambda} a \dot{\theta} \sin(\theta - \varphi)$

$\dot{\lambda} = a \dot{\theta} \left[ \omega (\theta - \varphi) - \frac{b}{\lambda} \sin(\theta - \varphi) \right]$

I-5. Roulement sans glissement en I

$\vec{v}_{I \in R_1 / R_4} = \vec{v}_{I \in R_1 / R_2} - \vec{v}_{I \in R_4 / R_2} = \vec{0}$   
 $= \dot{\theta} \vec{x}_2 \wedge R_5 \vec{y}_2 - \dot{\varphi} \vec{x}_2 \wedge (-R_4 \vec{y}_2)$

$R_4 \dot{\varphi} + R_5 \dot{\beta} = 0 \Rightarrow$

$\dot{\varphi} = - \frac{R_5}{R_4} \dot{\beta}$

I-6 Torseur cinématique de (3) par rapport à (4) au point D

$\{V_{3/4}\}_D = \{ \vec{\omega}_{3/4} | \vec{v}_{D \in 3/4} \}$

$\vec{\omega}_{3/4} = \vec{\omega}_{3/2} + \vec{\omega}_{2/4} = \vec{\omega}_{2/4} = -\vec{\omega}_{4/2} = -\dot{\varphi} \vec{x}_2$

$\vec{v}_{D \in 3/4} = \vec{v}_{D \in 3/2} + \vec{v}_{D \in 2/4}$   
 $= \vec{v}_{D \in 3/2} - \vec{v}_{D \in 4/2}$   
 $= \dot{\lambda} \vec{x}_2$

$\{V_{3/4}\}_D = \{ -\dot{\varphi} \vec{x}_2 | \dot{\lambda} \vec{x}_2 \}$

I-7 Relation entre  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\varphi}$

$\dot{\lambda} = \frac{P_4}{2\pi} \dot{\varphi}$  (liaison hélicoïdale)

$\dot{\lambda} = - \frac{P_4 R_5}{2\pi R_4} \dot{\beta} \Rightarrow \lambda = - \frac{P_4 R_5}{2\pi R_4} \beta + \text{cte}$

I-8. loi entrée - sortie.

$\dot{\lambda} = a \dot{\theta} \left[ \omega (\theta - \varphi) - \frac{b}{\lambda} \sin(\theta - \varphi) \right]$

$-\frac{P_4 R_5}{2\pi R_4} \dot{\beta} = a \dot{\theta} \left[ \omega (\theta - \varphi) - \frac{b}{\lambda} \sin(\theta - \varphi) \right]$

$\frac{\dot{\theta}}{\dot{\beta}} = \frac{2\pi R_4}{P_4 R_5} \left[ \frac{2b \pi R_4}{P_4 R_5} \sin(\theta - \varphi) - \omega (\theta - \varphi) \right]$

II. ENERGETIQUE

II-1. Actions extérieures appliquées à (Σ)

- poids de 1 en G.

$\vec{P}_1 = -M \vec{g} = \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \vec{e}_3 \\ \text{terre}/\Sigma \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -Mg \sin \alpha & | & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & \lambda \end{matrix} \right\}$

• bâti (0) sur (1) 1 (2)

$$\{E_{0/1}\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{array} \right\} (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \text{ ou } (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$$

• bâti sur (2)

$$\{E_{0/2}\}_C = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{02} & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & 0 \end{array} \right\} (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \text{ ou } (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$$

## II.2 Actions intérieures

• Moteur sur piston (5)

$$\{E_{4/5}\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & H_{45} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$$

• corps de vérin sur moteur

$$\{E_{2/4}\}_F = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{24} & L_{24} \\ Y_{24} & M_{24} \\ Z_{24} & N_{24} \end{array} \right\} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0) \text{ ou } (\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$$

• corps de vérin sur (5)

$$\{E_{2/5}\}_F = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{25} & H_{25} \\ Y_{25} & N_{25} \\ Z_{25} & 0 \end{array} \right\} (\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$$

• corps de vérin sur (4)

$$\{E_{2/4}\}_H = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{24} & 0 \\ Y_{24} & M_{24} \\ Z_{24} & N_{24} \end{array} \right\} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$$

• corps de vérin sur (3)

$$\{E_{3/4}\}_B = \left\{ \begin{array}{c|c} Y_{23} & H_{23} \\ Z_{23} & N_{23} \end{array} \right\} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$$

• (4) sur (3)

$$\{E_{4/3}\}_D = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{43} & L_{43} \\ Y_{43} & M_{43} \\ Z_{43} & N_{43} \end{array} \right\} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$$

• (4) sur (3) en I

$$\{E_{4/3}\}_I = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{43} & 0 \\ Z_{43} & 0 \end{array} \right\} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$$

(3) sur (1) au point B

$$\{E_{3/1}\}_B = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{31} & L_{31} \\ Y_{31} & M_{31} \\ Z_{31} & 0 \end{array} \right\} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0) \text{ ou } (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$$

## II.3 Puissance développée par les forces extérieures

$$P_{ext} = P_{ext} = C_m \dot{\theta}$$

$$P_{R_0} (terre \rightarrow 1) = P \cdot \vec{V}_0/R_0$$

$$\vec{V}_0/R_0 = -\dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge a_0 \vec{x}_1 = -a_0 \dot{\theta} \vec{y}_1$$

$$= -a_0 \dot{\theta} [\cos \alpha \vec{y}_0 + \sin \alpha \vec{z}_0]$$

$$P_{R_0} (terre \rightarrow 1) = \dot{\theta} H g a_0 \sin \alpha \sin \theta$$

$$P_{R_0} (terre \rightarrow 1) = H g a_0 \dot{\theta} \sin \alpha \sin \theta$$

$$P_{R_0} (0 \rightarrow 1) = \left\{ \vec{V}_{2/0} \right\} \cdot \left\{ E_{0/1} \right\} = 0$$

$$P_{L_0} (0 \rightarrow 2) = \left\{ \vec{V}_{2/0} \right\} \cdot \left\{ E_{0/2} \right\} = 0$$

## II.4 Puissance des forces intérieures

$$P (moteur \rightarrow 5) = C_m \dot{\theta}$$

$$P (moteur \rightarrow 2) = 0$$

$$P (3 \leftrightarrow 1) = 0$$

$$P (4 \leftrightarrow 3) = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{43} & L_{43} \\ Y_{43} & M_{43} \\ Z_{43} & N_{43} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} -\dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$= -\dot{\psi} L_{43} + \dot{\lambda} X_{43}$$

## II.5 - Energie cinétique

$$E_k(1/0) = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \vec{I}_{G/1/0} \wedge [\vec{\Pi}_G(1)] \cdot \vec{\omega}_{1/0}$$

$$= \frac{1}{2} (m a_0^2 + C_1) \dot{\theta}^2$$

## II.6 - Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dE}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

$$(m a_0^2 + C_1) \dot{\theta} \ddot{\theta} = H g a_0 \dot{\theta} \sin \alpha \sin \theta + C_m \dot{\theta} + \dot{\psi} L_{43} + \dot{\lambda} X_{43}$$

# CORRECTION

## Partie C : Automatique

### Partie C-1 : Modélisation

I.1 A partir des équations mécaniques, on déduit :

$$C_m - nC_r = J_e \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f_e \omega_m(t)$$

En effet, à partir des équations :

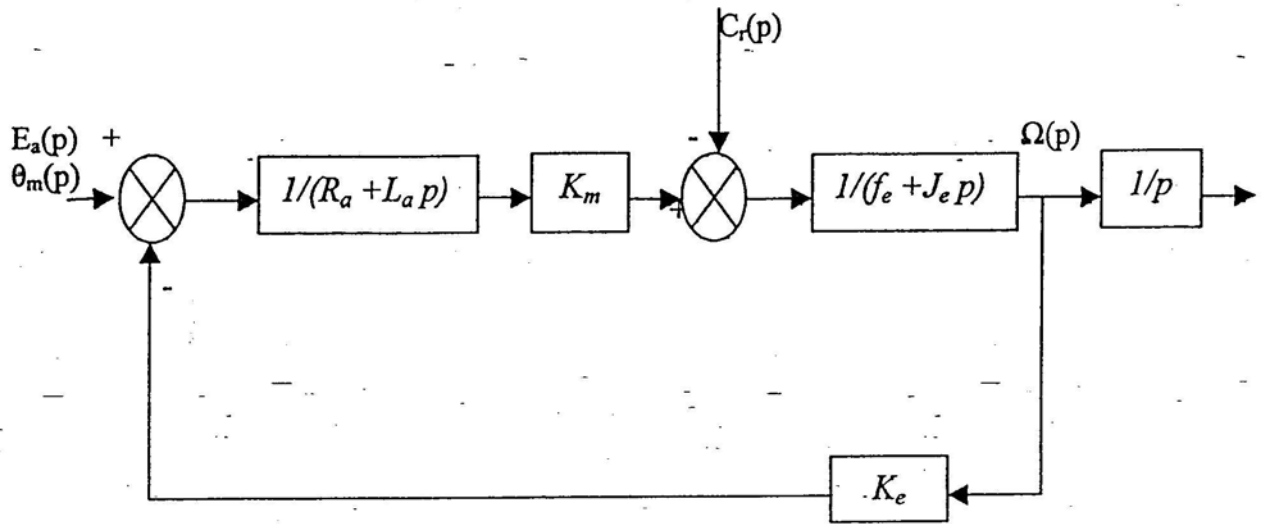
$$\left\{ \begin{array}{l} C_m - C_1 = J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f_m \omega_m \\ n = \frac{\omega_c}{\omega_m} = \frac{C_1}{C_2} \\ C_2 - C_1 = J_c \frac{d\omega_c(t)}{dt} + f_c \omega_c \end{array} \right.$$

on peut écrire :

$$C_m - nC_r = (J_m + n^2 J_c) \frac{d\omega_m(t)}{dt} + (f_m + n^2 f_c) \omega_m$$

I-2. En appliquant la transformée de Laplace aux équations électriques et mécaniques et en considérant que les conditions initiales sont nulles, le schéma fonctionnel du système est :

(1)



3 d'où l'expression de  $T_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{E_a(p)} = \frac{k_m}{(R_a + L_a p)(f_e + J_e p) + k_e k_m}$

L'expression de  $T_2(p)$  est donnée par l'expression suivante :

$$T_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = \frac{n(R_a + L_a p)}{(R_a + L_a p)(f_e + J_e p) + k_e k_m}$$

et  $T_3(p) = 1/p$

I-4. Les expressions de :

Gain statique  $K_s$  :

$$K_s = \frac{k_e}{\sqrt{J_e L_a (k_e k_m + R_a f_e)}}$$

Le coefficient d'amortissement  $m$  :

$$m = \frac{L_a f_e + R_a f_e}{2\sqrt{J_e L_a (k_e k_m + R_a f_e)}}$$

La pulsation propre non amortie :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k_e k_m + R_a f_e}{J_e L_a}}$$

Application Numérique :

$m = 2.5662$  -  $\omega_o = 77.9744$  rd/s -  $K_s = 256.4946$

(2)