REPUBLIQUE TUNISIENNE
***
Ministère de L'Enseignement
Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session de Juin 2002

Concours en Biologie et Géologie
Epreuve de Mathématiques

Durée: 3H	Date: 3 Juin 2002	Heure: 8H	Nb pages: 4
Barême: Exercice 1: 8pts	Exercice 2: 6pts	Exercice 3: 6pts	

L'usage des calculatrices est strictement interdit.
Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice 1

On rappelle que la fonction cosinus hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$cht = \frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right).$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{(cht)^{n+1}}$ est convergente, on note par a_n sa valeur.
2) Calculer a_0 et a_1.
3) Vérifier que la suite (a_n) est décroissante.

4)a) Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$1+\frac{t^2}{2} \leq cht \leq e^t$$

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$ on a:

$$1+\frac{(n+1)}{2}t^2 \leq (cht)^{n+1} \leq e^{(n+1)t}.$$

c) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}.$$

d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

5)a) En intégrant par parties la fonction $\frac{1}{(chx)^{n+3}}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}a_n.$$

b) En déduire l'expression de a_n.

6)a) Vérifier que la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R = 1$.

b) Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ aux points 1 et -1.

7) On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, pour $x \in \left]-1,1\right[$.

a) Montrer que f vérifie

$$\begin{cases} (1-x^2)\,f'(x) - xf(x) = 1 & \text{,si } |x| < 1 \\ f(0) = a_0. \end{cases}$$

b) En déduire que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2} + Arcsinx\right), \forall x \in \left]-1,1\right[.$$

8) Pour $x \in]-1, 1[$, on pose

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$

a) Calculer $\int_0^x h(t)dt$, pour $x \in]-1, 1[$.

b) En déduire un développement en série entière de la fonction $(Arcsinx)^2$.

Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On pose pour $\lambda > 0$,

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1)a) Vérifier que φ_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

b) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur Ω, de densité de probabilité φ_λ. Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.

c) Déterminer la fonction de répartition F de X.

2) Soit θ un élément de l'intervalle $[0, 1]$. Montrer que la série de terme général $u_n = F(n+\theta) - F(n), n \geq 0$, est convergente et calculer sa somme S.

3) Soit Y la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur Ω par:

$$(Y = n) = (n \leq X < n+1).$$

Calculer la loi et l'espérance de Y.

4) Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes de même densité de probabilité φ_λ.

On pose $U = \max(X_1, X_2)$ et $V = \min(X_1, X_2)$.

a) Vérifier l'égalité des évènements:

$$(U < t) = (X_1 < t) \cap (X_2 < t)$$

et

$$(V \geq t) = (X_1 \geq t) \cap (X_2 \geq t).$$

b) Calculer $P(U < t)$ et $P(V \geq t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

c) En déduire les lois de U et V.

Exercice 3

On considére $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base B par sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que f n'est pas bijective.
2) Déterminer le noyau $kerf$ et l'image Imf de l'endomorphisme f et donner une base pour chacun d'eux.
3) Déterminer les valeurs propres de A classées dans l'ordre croissant $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ et en déduire que A est diagonalisable.
4) Déterminer une base $B' = (u_1, u_2, u_3)$ formée par des vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
5) Déterminer la matrice de passage P de la base B à la base $B' = (u_1, u_2, u_3)$ et calculer P^{-1}.
6) Calculer $A^n, n \in \mathbb{N}$.
7) On se propose de chercher les fonctions x, y et z solutions du système différentiel suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 5y(t) + 3z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - 4y(t) - 2z(t), \end{cases}$$

qui vérifient $x(0) = z(0) = 0$ et $y(0) = -1$.
Dans la suite, on pose $X(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3$.

a) Calculer les composantes $(u(t), v(t), w(t))$ du vecteur $U(t) = P^{-1}X(t)$ dans la base B'.

b) Montrer que les fonctions u, v, w sont solutions du système différentiel

$$\begin{cases} u'(t) = 0 \\ v'(t) = v(t) \\ w'(t) = 2w(t) \end{cases}$$

et vérifient $u(0) = 2, v(0) = -1$ et $w(0) = -2$.

c) En déduire l'expression des fonctions x, y, z.