REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session de Juin 2003

Concours en Biologie Géologie
Epreuve de Mathématiques

Durée : 3 H　　Date : 6 Juin 2003　　Heure : 8 H　　Nb pages : 4
Barème : Exercice : 5 points　　Problème : 15 points (3.5 - 6.5 - 5)

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

EXERCICE

On se propose de déterminer les suites réelles u_n, v_n et w_n définies pour tout $n \in \mathbf{N}$ par la relation suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = u_n - 2v_n \end{cases}$$

avec $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et $w_0 = 1$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. (a) Montrer qu'on a $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice qu'on précisera.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = A^n X_0$
2. Déterminer les valeurs propres de A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

4. Déterminer les sous-espaces propres de A.
   (On classera les valeurs propres par ordre croissant $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et on choisira la dernière composante égale à 1 pour les vecteurs propres associés)
5. (a) Déterminer une matrice inversible P telle que :
   $$A = PDP^{-1}$$
   où
   $$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$
   (b) Calculer P^{-1}
6. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $$A^n = PD^nP^{-1}$$
   (b) Calculer A^n pour $n \geq 1$.
   (c) Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

PROBLÈME

Soient X et Y deux variables aléatoires de densité conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \alpha\, e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x)} & \text{si } (x,y) \in \mathbf{R} \times]-1,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie 1

1. Trouver α pour que $f_{X,Y}(.,.)$ soit une densité de probabilité.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X.Y)$.
3. Calculer les densités marginales de X et Y.
4. Préciser les lois de X et Y.
5. X et Y sont-elles indépendantes ?

Partie 2

Soit U la variable aléatoire définie par : $U = \mid Y \mid$.

1. Donner la fonction de répartition de U.
2. Déduire la densité de U en précisant sa loi.

3. Calculer la fonction génératrice de moments $\Phi_U(t) = E(e^{tU})$ de la variable aléatoire U.
4. Donner un développement limité à l'ordre 2 de $\Phi_U(t)$.
5. Déduire l'espérance $E(U)$ et la variance $Var(U)$.
6. Soit Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \max(U, 1 - 2U)$$

   (a) Montrer que pour $\forall\, x \in]0, 1[$ on a

$$\frac{1}{3} \leq \max(x, 1 - 2x) < 1$$

   (b) En déduire que

$$P(\frac{1}{3} < Z < 1) = 1$$

   (c) Calculer la fonction de répartition de Z

   (d) Montrer que cette variable aléatoire admet une densité. En donner l'expression et préciser la loi associée.

7. Soit maintenant L une variable aléatoire réelle de densité

$$f_L(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   On suppose que L est indépendante de Y.

   (a) Calculer la fonction génératrice de moments de la variable aléatoire LY.

   (b) En déduire la moyenne et la variance de LY.

   (c) Soit U_n une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que LY. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} U_k$$

   Montrer que $\frac{\sqrt{6}S_n}{\sqrt{n}}$ converge vers une loi qu'on précisera.

   (d) Que vaut $\lim_{n\to\infty} P(S_n > 0)$?

Partie 3

Soit Φ la fonction de répartition d'une variable normale centrée réduite.

1. Ecrire la fonction de répartition de la variable aléatoire X en fonction de Φ.

2. Montrer
$$P(1 < X < 2) = \Phi(1) - \frac{1}{2}$$

3. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'intégrale
$$\int_1^2 e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x)}dx$$
(On donne $\Phi(1) = 0.8413$, $\sqrt{2\pi} = 2.5066$ et $e^2 = 7.3891$)

4. Soit M une variable aléatoire normale centrée réduite et soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi que celle de M.

   Calculer la densité de la variable aléatoire M^2.

5. On rappelle que la densité de la somme de deux variables indépendantes, admettant la même densité f est donnée par :
$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(t-x)dx$$
   (a) En faisant le changement de variables $x = \frac{t}{2}(1+u)$ dans la formule intégrale ci-dessus, montrer que $\forall t > 0$,
$$g(t) = \frac{t}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{t}{2}(1+u))f(\frac{t}{2}(1-u))du$$
   (b) Déduire alors la densité de la variable aléatoire ${X_1}^2 + {X_2}^2$ et préciser la loi associée.

6. Soient $a > 0$ et $D(0, \sqrt{a})$ le disque fermé de $\mathbf{R}^2$ de centre 0 et de rayon $\sqrt{a}$. Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire $X_1^2 + X_2^2$.
   (a) Montrer que pour tout $a > 0$;
$$F(a) = P\left((X_1, X_2) \in D(0, \sqrt{a})\right)$$
   (b) Calculer $F(a)$ et retrouver la densité de ${X_1}^2 + {X_2}^2$.