REPUBLIQUE TUNISIENNE

Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2007

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي والتكنولوجيا
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2007

Concours en Biologie et Géologie
Epreuve de mathématiques

Durée: 3 heures   Date: 04 Juin 2007   Heure: 8H   Nbre de page : 03
Barème: Exercice: 6 points   Problème: 14 points

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte paut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique (e_1, e_2, e_3) et on considère l'endomorphisme f de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini dans la base canonique, par sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a) Montrer que 1 et 2 sont les deux valeurs propres de A. Préciser leurs multiplicités.
   b) Montrer que A est diagonalisable.
2. a) Déterminer une base de vecteurs propres (v_1, v_2, v_3) de f, telle que la troisième compososante de chacun des vecteurs soit égale à 1.
   b) En déduire une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale.
   c) Calculer P^{-1}.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Soit x_0, y_0, z_0 des réels. On considère les suites réelles $(x_n), (y_n), (z_n)$ de premiers termes respectifs x_0, y_0, z_0 et telles que

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \frac{1}{3}(2x_n + y_n - z_n), \\ y_{n+1} &= \frac{1}{3}(x_n + 2y_n - z_n), \\ z_{n+1} &= \frac{1}{3}(x_n + y_n). \end{cases}$$

Exprimer x_n, y_n, z_n en fonction de n et de x_0, y_0, z_0.

5. Soit X, Y, Z trois variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que

$$P(X = n) = x_n \quad P(Y = n) = y_n \quad P(Z = n) = z_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

a) Déterminer x_0, y_0, z_0.

b) Déterminer la loi de $X + 1$ ainsi que son espérance.

c) Calculer l'esperance de $\frac{1}{(X+1)}$.

Problème

Partie 1

On rappelle que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1. En faisant un changement de variable, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}.$$

2. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \text{pour tout } a > 0.$$

Partie 2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant comme densité la fonction $f_{(X,Y)}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y(1+x^2)}{2}} & \text{si } y \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité marginale de X.
2. a) Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = \dfrac{2}{\pi} Arctg(X)$.

   b) Déduire que Z suit une loi uniforme sur $]-1, 1[$.
3. Soit Z_1, Z_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes, de même densité de probabilité que la variable aléatoire Z.
   Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z_1 + Z_2$.
4. a) Montrer que pour tout $t \in]0, 1[$, $0 \leq \min(t, 1-t) \leq \frac{1}{2}$.

   b) Donner la loi de la variable aléatoire $L = |Z|$.

   c) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $\min(L, 1-L)$.
   En déduire la loi de $\min(L, 1-L)$.

N et telles que

$n \in \mathbb{N}$

0.

densité la fonction f

$Z = \frac{2}{\pi} Arctg(X)$.

e même densité de

$Z_1 + Z_2$.

oire $\min(L, 1 - L)$.

Partie 3

a) Déterminer la loi marginale de Y.

b) Préciser la loi de X sachant que $Y = y$, avec $y > 0$.

Calculer la fonction de répartition de Y à l'aide de la fonction de répartition ϕ de la loi normale centrée réduite.

Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $\sqrt{Y}$.

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de même densité de probabilité que la variable aléatoire $\sqrt{Y}$.

a) Montrer que la variable aléatoire $T = U^2 + V^2$ suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

b) Déterminer la fonction génératrice de moments Φ_T de T.

c) Effectuer le développement en série entière de Φ_T sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

d) En déduire le moment d'ordre n de T.

e) Donner la valeur de $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

On considère la suite $(T_n)_n$ de variables aléatoires indépendantes, de même densité de probabilité que la variable aléatoire T.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$, $\quad n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\left(\frac{S_n - 2n}{2\sqrt{n}}\right)_n$ converge vers une loi qu'on précisera.

b) Que vaut $\lim_{n \to +\infty} P(S_n > 2n)$?

c) Soit λ un réel strictement positif. En utilisant l'inégalité de Tchébychev, montrer que pour tout entier naturel n, il existe $A(n)$ tel que

$$P(|S_n - 2n| \leq n\lambda) \geq A(n).$$

d) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} P(|S_n - 2n| \leq n\lambda) = 1$.