REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de La Recherche Scientifique et de La Technologie
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2008

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي والتكنولوجيا
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2008

Concours Biologie et Géologie
Epreuve de Mathématiques

Durée: 3 heures Date: 02 Juin 2008 Heure: 8H Nbre de page : 4
Barème: Problème I : 10 points Problème II : 10 points

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Problème I

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

1. a) Calculer le polynôme caractéristique de M et donner ses valeurs propres, en précisant l'ordre de multiplicité.

b) Déterminer les sous-espaces propres. En déduire que M est diagonalisable.

c) On note D la matrice diagonale associée à M dont les termes (éventuellement égaux) de la diagonale descendante sont placés de gauche à droite dans l'ordre croissant.
Donner une matrice inversible Q telle que $M = QDQ^{-1}$. Calculer Q^{-1}.

d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de M^n en fonction de n.

2. Une expérience consiste à soumettre une particule à une suite d'impulsions électromagnétiques susceptibles de la déstabiliser. La particule évolue aléatoirement entre trois positions d'équilibre instable A, B et C. Lorsque la particule située dans une position d'équilibre subit une impulsion, elle a une probabilité $\frac{3}{4}$ de rester là où elle est; elle peut aussi se déplacer dans l'une ou l'autre des deux autres positions avec la même probabilité $\frac{1}{8}$.

Pour tout entier naturel k, on note :
A_k l'événement "la particule est en A après la $k^{\text{ème}}$ impulsion"
B_k l'événement "la particule est en B après la $k^{\text{ème}}$ impulsion"
C_k l'événement "la particule est en C après la $k^{\text{ème}}$ impulsion".
$P(A_k)$ la probabilité de l'événement A_k.
$P(B_k)$ la probabilité de l'événement B_k.
$P(C_k)$ la probabilité de l'événement C_k.
On pose $X_k = \begin{pmatrix} P(A_k) \\ P(B_k) \\ P(C_k) \end{pmatrix}, \quad k \geq 0.$
On suppose de plus que la particule soit en A au début de l'expérience de sorte que
$X_0 = \begin{pmatrix} P(A_0) \\ P(B_0) \\ P(C_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

a) Exprimer $P(A_{k+1})$ en fonction de $P(A_k), P(B_k)$ et $P(C_k)$.
Faire de même pour $P(B_{k+1})$ et $P(C_{k+1})$.
b) En déduire l'expression du vecteur X_{k+1} à l'aide de la matrice M et du vecteur X_k.
c) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, exprimer X_k en fonction de X_0.
d) En s'aidant du résultat du 1. d), exprimer $P(A_k), P(B_k)$ et $P(C_k)$ en fonction de k.
e) Ces probabilités ont-elles une limite lorsque k tend vers $+\infty$?
3. Soit T_1 la variable aléatoire égale au nombre d'impultions pour que la particule soit en C pour la première fois.
a) Montrer que T_1 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{8}$ de sorte que

$$\forall n \geq 1, \; P(T_1 = n) = \frac{1}{8}(\frac{7}{8})^{n-1}.$$

b) Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice g de T_1.
c) Montrer que $\forall z \in]-R, R[$

$$g(z) = \frac{z}{8-7z}.$$

d) En déduire les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)P(T_1 = n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 P(T_1 = n)$.
e) Montrer que la variable aléatoire T_1 vérifie la relation

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad P(T_1 > n + m / T_1 > n) = P(T_1 > m).$$

4. On considère une deuxième particule de même évolution et T_2 le nombre d'impultions pour qu'elle soit en C. T_2 indépendante de T_1, on pose

$$U = min(T_1, T_2) \quad \text{et} \quad V = max(T_1, T_2)$$

a) Calculer $P(U \geq s)$ et $P(V \leq t)$ pour $s \geq 1$ et $t \geq 1$.
b) En déduire les lois de U et V puis $E(V)$. Préciser la loi de U.
c) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Partie 1

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n de la variable réelle x par :

$$f_n(x) = x^n e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

1. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.
2. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

a) Vérifier que pour tout réel $A > 0$

$$\int_0^A f_{n+2}(x)dx = -A^{n+1}e^{-\frac{A^2}{2}} + (n+1)\int_0^A f_n(x)dx$$

et en déduire que pour tout entier naturel n : $I_{n+2} = (n+1)I_n$.

b) Justifier que : $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. (On rappelle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$).

c) Donner la valeur de I_1.

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = 2^n n!$$

Partie 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant pour densités respectives f_X et f_Y, la fonction h définie par $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$ est une densité de la variable aléatoire $X + Y$.

Soit f la fonction définie pour tout réel x par:

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x) & \text{si } x \geq 0, \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1.a) Démontrer que f est une densité de probabilité.

b) Soit M une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité de probabilité.
Montrer que la variable aléatoire M^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
Donner la valeur de l'espérance et la variance, ainsi que le moment d'ordre n de M^2.

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi que M^2.

a) Déterminer la loi de $X = X_1 + X_2$.

b) Soit Y une variable aléatoire réelle telle que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est la loi uniforme $\mathcal{U}([0, x])$. Déterminer la densité de probabilité du couple (X, Y) et la loi marginale de Y.

c) Calculer la densité conditionnelle de X sachant Y.

d) En déduire l'espérance de X sachant Y $E[X/Y]$ et $E[X^n Y^m]$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

Partie 3

1. a) Soit a un réel strictement positif et b et c deux réels quelconques, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{(\frac{b^2-4ac}{4a})}.$$

b) Soient G et G' deux variables aléatoires normales centrées, indépendantes et de variances respectives σ^2 et σ'^2.
Calculer la densité de la loi de $G+G'$. En déduire que $G+G'$ est une variable normale dont on donnera l'espérance et la variance.
c) Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi normale centrée réduite $N(0,1)$.
On pose $S_n = Z_1 + ... + Z_n$, quelle est la loi de $\dfrac{S_n}{n}$?
2. Soit un réel $\alpha > 0$
a) Montrer que

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big| \geq \alpha\Big) = 2P\Big(\frac{S_n}{n} \geq \alpha\Big).$$

b) En posant $u = n(t-\alpha)$, montrer que

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big| \geq \alpha\Big) = \sqrt{\frac{2}{n\pi}}e^{-\frac{n\alpha^2}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2n}-u\alpha}du.$$

3. a) Montrer que pour tout $x \geq 0$

$$0 \leq 1 - e^{-x} \leq x.$$

b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-u\alpha}du$ converge et la calculer.
c) Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} e^{-u\alpha}du - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2n}-u\alpha}du\Big).$$

d) En déduire, lorsque n tend vers l'infini un équivalent de $P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big| \geq \alpha\Big)$.