Concours Biologie
Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 31 Mai 2010	**Heure: 8 H**	**Durée: 3 H**	**Nbre pages: 4**
Barème : Parti I: 7 pts, Partie II: 7 pts, Partie III: 6 pts			

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Notations et rappels:
les notations suivantes sont considérées au cours de ce texte:

- $\mathbb{R}$: le corps des nombres réels.
- $\mathbb{R}^3$ est l'espace vectoriels des vecteurs $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ à coefficients réels.
- On suppose que $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique $< \cdot, \cdot >$ défini par
$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$
- $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrée d'ordre 3 à coefficients réels.
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé donné.
- Les variables aléatoires notées v.a. sont à valeurs réelles et définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.
- f_X: la densité de probabilité d'une v.a. continue X.
- F_X: la fonction de répartition d'une v.a. X.
- $E(X)$ est l' espérance mathématique de la v.a. X.
- $Var(X)$ est la variance de la v.a. X.
- $Cov(X_1, X_2)$ est la covariance de X_1 et X_2.
- On notera par $\aleph(\mu, \sigma^2)$ la loi normale de paramètres d'espérence μ et de variance σ^2.

Problème

Soit la fonction f indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = {x_1}^2 - x_1 x_2 + {x_2}^2 + \frac{{x_3}^2}{2} - x_3, \quad \forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Partie I

1. Vérifier qu'on peut écrire f sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >, \quad \forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et b est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ de f pour $i = 1, 2, 3$.

3. Soit le système défini par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Montrer que ce système peut se mettre sous la forme $Ax = b$.

4. Trouver les valeurs propres de la matrice A et les vecteurs propres associés.

5. La matrice A est -elle diagonalisable?

6. Montrer que la matrice A est inversible.

7. En déduire le système $Ax = b$ admet une solution unique x^*.

8. Calculer Ab. Que remarque-t-on?

9. Vérifier $< Ax, y > = < x, Ay >$ pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^3$.

10. Montrer que $f(b) = -\frac{1}{2} < Ab, b >$.

11. Montrer que
$$< A(x-b), x-b > = (x_1 - \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3}{4}(x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_3-1)^2$$

12. Montrer que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, $f(x) - f(b) = \frac{1}{2} < Ax - b, x - b >$.

13. En déduire que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, on a $f(x) \geq f(b)$.

14. Que représente le vecteur b pour la fonction f?

Partie II

Dans cette partie, (X_1, X_2) désigne un couple de variables aléatoires réelles de densité conjointe f_{X_1,X_2} définie, pour tout couple (x_1, x_2) de réels, par :

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \alpha e^{-\frac{2}{3}f(x)} = \alpha e^{-\frac{2}{3}(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. Dans cette question, a désigne un réel strictement positif et b un réel. En utilisant les propriétés des lois normales, montrer que
   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}a^2(x+b)^2}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a}$.
   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}a^2(x+b)^2}dx = -b\frac{\sqrt{2\pi}}{a}$.
   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\frac{1}{2}a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^3}$.
2. Déterminer α pour que f_{X_1,X_2} soit une densité de probabilité.
   (Indication: On pourra pour cela remarquer l'identité:
   $$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3}{4}x_2^2$$
   et utiliser la question précédente).
3. Déterminer les densités marginales de X_1 et de X_2.
4. Reconnaître les lois de X_1 et de X_2.
5. Calculer $P(X_1 > 0)$ et $P(X_2 < 0)$.
6. Calculer $E(2X_1 + 3X_2)$.
7. Calculer $Var(2X_1)$ et $Var(-3X_2)$.
8. Calculer $E((X_1 + X_2)^2)$.
9. Déduire $Cov(X_1, X_2)$ puis $Var(X_1 + X_2)$.
10. X_1 et X_2 sont-elle indépendantes?

Partie III

Soient les variables aléatoires Z_1 et Z_2 indépendantes et identiquement distribuées de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On rappelle que la densité d'une v.a. normale Z centrée et réduite est donnée par

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{z^2}{2}), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

On considère les variables aléatoires T, U, V et W définies par

$$\begin{cases} U = Z_1, \\ V = Z_1 + Z_2, \\ T = Z_1^2, \\ W = \sqrt{T}. \end{cases}$$

1. Déterminer la densité de W en fonction de celle de T.
2. Déterminer la densité f_T de T.
3. Calculer $E(T)$, $E(W)$, $Var(T)$ et $Var(W)$.
4. Calculer $E(V)$, $E(V^2)$ et $Cov(U,V)$.
5. Déterminer la loi du couple (Z_1, Z_2) ainsi que sa densitée f_{Z_1,Z_2} définie sur $\mathbb{R}^2$.
6. On considère la fonction
$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & (u, v) \end{array}$$
telle que
$$\begin{cases} u = x_1, \\ v = x_1 + x_2. \end{cases}$$
   (a) Exprimer x_1 et x_2 en fonction de u et v.
   (b) Calculer la matrice Jacobienne de Φ.
   (c) En déduire que la loi du couple (U, V) admet la densité $f_{U,V}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par:
$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2 + (v-u)^2)\right\}.$$
7. Déterminer la densité marginale de V: f_V.
8. U et V sont-elles indépendantes?

Fin de l'épreuve