

✓

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation  
d'Ingénieurs  
Session de Juin 2003

Concours en Biologie Géologie  
Corrigé de l'Epreuve de Mathématiques

---

**EXERCICE**

1. (a) On a :  $X_{n+1} = AX_n$  où

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (b) On a par récurrence,  $X_n = A^n X_0$

2. Les valeurs propres de  $A$  sont  $-1$ ,  $1$  et  $2$ .  
3. La matrice  $A$  est diagonalisable sur  
4. (a) On a :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (b) et

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. (a) Par récurrence  
(b) On a :

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} + 2 & (-1)^n - 1 & (-1)^n - 1 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2 - 2^n & (-1)^n - 1 & (-1)^n - 1 + 2^n \end{bmatrix}$$

- (c) On obtient  $u_n = 2((-1)^n - 1)$ ,  $v_n = 2(-1)^n - 2^n$   
et  $w_n = 2^n + 2((-1)^n - 1)$

## PROBLÈME

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de densité conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \alpha e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x)} & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R} \times ]-1,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Partie 1

1. On a :  $\alpha = \frac{1}{2e^2\sqrt{2\pi}}$
2.  $E(X.Y) = 0$ .
3. Les densités marginales de  $X$  et  $Y$  sont :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y \in ]-1,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.  $X$  est une va normale de moyenne 2 et de variance 1 et  $Y$  est uniforme sur  $(-1,1)$ .
5.  $X$  et  $Y$  sont indépendantes car

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

### Partie 2

Soit  $U$  la variable aléatoire définie par :  $U = |Y|$ .

1. La fonction de répartition de  $U$  est

$$F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } t \in ]0,1[, \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

2. La densité de  $U$  est :

$$f_U(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in ]0,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et donc  $U$  est uniforme sur  $(0,1)$ .

3. La fonction génératrice de moments

$$\Phi_U(t) = E(e^{tU}) = \begin{cases} \frac{(e^t-1)}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

4. On a donc  $\Phi_U(t) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + o(t^2)$ .

5. D'où  $E(U) = \frac{1}{2}$  et la variance  $Var(U) = \frac{1}{12}$ .

6. Soit  $Z$  la variable aléatoire définie par

$$Z = \max(U, 1 - 2U)$$

(a) On a pour  $\forall x \in ]0, 1[$

$$\max(x, 1 - 2x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ x & \text{si } \frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$

donc on en déduit que

$$\frac{1}{3} \leq \max(x, 1 - 2x) < 1$$

(b) Comme  $U$  est uniforme sur  $(0, 1)$  alors  $Z = \max(U, 1 - 2U)$  prend ses valeurs dans  $[\frac{1}{3}, 1[$ . Par suite  $P(\frac{1}{3} < Z < 1) = 1$

(c) La fonction de répartition de  $Z$  est

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3t-1}{2} & \text{si } t \in ]\frac{1}{3}, 1[ \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

(d) La densité de  $Z$  est :

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{si } z \in ]\frac{1}{3}, 1[ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et donc  $Z$  est uniforme sur  $]\frac{1}{3}, 1[$ .

7. (a) La fonction génératrice de moments de la va  $LY$  est donnée par

$$\Phi_{LY}(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t} + e^t - 2}{t^2} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

(b) La moyenne  $E(LY) = 0$  et la variance  $Var(LY) = \frac{1}{6}$ .

(c) On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} U_k$$

On a par le théorème de la limite centrale  $\frac{\sqrt{6}S_n}{\sqrt{n}}$  converge vers une loi normale centrée réduite.

(d) Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n > 0) = \frac{1}{2}$

### Partie 3

Soit  $\Phi$  la fonction de répartition d'une variable normale centrée réduite.

1. La fonction de répartition  $F_X$  de la va  $X$  est donnée en fonction de  $\Phi$  par

$$F_X(a) = \Phi(a - 2)$$

2. On a évidemment

$$P(1 < X < 2) = F_X(2) - F_X(1) = \Phi(1) - \frac{1}{2}$$

3. La valeur approchée l'intégrale est

$$\int_1^2 e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x)} dx = 6.321$$

4. La densité de la variable aléatoire  $M^2$  est

$$f_{M^2}(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi t}} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. (a) En posant  $x = \frac{t}{2}(1+u)$ , il est facile de voir que

$$g(t) = \frac{t}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{2}(1+u)\right) f\left(\frac{t}{2}(1-u)\right) du$$

(b) Donc la densité  $X_1^2 + X_2^2$  s'écrit par

$$g(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où  $X_1^2 + X_2^2$  est une va exponentielle de paramètre  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

6. (a) On a pour tout  $a > 0$ ;

$$F(a) = P(X_1^2 + X_2^2 \leq a) = P((X_1, X_2) \in D(0, \sqrt{a}))$$

(b) Donc

$$F(a) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{a}{2}} & \text{si } a > 0, \\ 0 & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

Il s'en suit en dérivant que la densité de  $X_1^2 + X_2^2$  est

$$g(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$