Correction du Sujet de Maths (Biologie et Géologie) : Session 2004

Exercice 1. Soit la série $\sum_{n\geq 1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, où x est une variable réelle.

1) Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. On a :

1

$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \Rightarrow$ la série $\sum_{n\geq 1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

---

2) a) La fonction $x \mapsto S(x)$ est de classe C^∞ sur $]-1\ ,\ 1[$ et $\forall x \in]-1\ ,\ 1[$, on a :

2,5

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \text{ et } S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{1-x}.$$

---

b) D'après a) , on a pour tout $x \in]-1\ ,\ 1[$

2,5

$\cdot\ S'(x) = S'(0) + \int_0^x S''(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -Log(1-x)$. Ce qui donne pour $x \in]-1\ ,\ 1[$, $S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)dt = -\int_0^x Log(1-t)dt$

Une intégation par parties donne :

2,5

$$S(x) = x + (1-x)Log(1-x)\ ,\ \forall x \in]-1\ ,\ 1[.$$

---

3) $\cdot$ Pour $x = \frac{1}{2}$, on a :

$$S(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Log\frac{1}{2}.$$

2,5

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n(n+1)} = 1 - Log2.$$

$\cdot$ Pour $x = -\frac{1}{2}$, on a :

2,5

$$S(\frac{-1}{2}) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n n(n+1)} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}Log\frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n(n+1)} = 3Log\frac{3}{2} - 1.$$

· Pour $x = \dfrac{2}{3}$, on a :

$$S'(\frac{2}{3}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(\frac{2}{3})^n = -Log\frac{1}{3} = Log3.$$

2,5

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(\frac{2}{3})^n = Log3.$$

---

4) *a*) Pour $|x| = 1$, on a : $\left|\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right| = \dfrac{1}{n(n+1)} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Comme la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann) , il en résulte que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est absolument convergente et par suite elle est convergente pour $|x| = 1$.

1,5

---

b) On a : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n \geq 1$.

$$\Rightarrow \forall N \geq 1 , \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

2,5

D'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

<u>Exercice 2.</u> Soit l'équation différentielle

$$(*) \quad \begin{cases} xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1) Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-\rho , \rho[$, avec $\rho > 0$. Alors on a :

$\forall x \in]-\rho\ ,\ \rho[\ ,\ y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

Il s'ensuit que si $y(x)$ vérifie $(*)$ sur $]-\rho\ ,\ \rho[$, alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

Ce qui donne pour $x \in]-\rho\ ,\ \rho[$:

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}) x^n = 0.$$

D'où :

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \text{et} \\ a_{n+1} = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+1)^2};\ \forall n \geq 1. \end{cases}$$

7,5

Comme $y(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$

On déduit alors que :

$$\begin{cases} a_0 = 1\ ;\ a_1 = 0 \\ \text{et} \\ a_{n+1} = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+1)^2};\ \forall n \geq 1. \end{cases}$$

---

2) · On a : $\forall n \geq 0$, $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}$.

5

D'où pour $x \in]-\rho\ ,\ \rho[\ ,\ y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

2,5

· On a $\lim_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{2(n+1)}}{a_{2n}} \right| = 0 \Longrightarrow$ la série $y(x)$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Exercice 3.

1) *a)* Soit $g(x) = Arc\sin\sqrt{x}$, pour $0 \leq x \leq 1$.

1

· $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\ ,1[$ et $t \longmapsto Arc\sin t$ est dérivable sur $]-1\ ,1[$, donc la fonction g est dérivable sur $]0\ ,1[$.

2,5

· De plus pour tout $x \in]0\ ,1[\ ,\ g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

1,5 $b)$ On a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = 2\int_0^1 g'(x)dx$

$$= 2(g(1)-g(0)) = 2Arc\sin 1 = \pi.$$

$c)$ · Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$. Posons $x = \sin^2\theta$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow dx = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$.

Alors on a :

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta\sin\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2,5 $\Rightarrow \boxed{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \frac{\pi}{2}.}$

· Soit $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x}}dx$. Alors on a (avec $x = \sin^2\theta$)

$$\begin{aligned} J &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta(1-\cos^2\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 t dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

2,5 $\Rightarrow \boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x}}dx = \frac{3\pi}{8}.}$

---

2) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On pose pour $x \in]0\,,1[$,

$f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ et on considère une variable aléatoire

$X : \Omega \to]0\,,1[$, de densité f.

$a)$ D'après **1**-$b)$, f est bien une densité de probabilité sur $]0\,,1[$.

1 $\cdot\ E(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \frac{1}{2}.$

$\cdot\ V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$

2,5 Or , $E(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x}}dx = \frac{3}{8}.$

D'où $V(X) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$$b)\ F(t) = P(X < t) = \begin{cases} 0 & ;\text{ si } t \leq 0 \\ \int_0^t f(x)dx = \frac{2}{\pi}g(t) & ;\text{ si } 0 < t < 1 \\ 1 & ;\text{ si } t \geq 1. \end{cases}$$

C'est à dire

3
$$F(t) = \begin{cases} 0 & ;\text{ si } t \leq 0 \\ \frac{2}{\pi}Arc\sin\sqrt{t} & ;\text{ si } 0 < t < 1 \\ 1 & ;\text{ si } t \geq 1. \end{cases}$$

---

c) Si $t \leq 0$ (resp. $t \geq 1$) , alors $1-t \geq 1$ (resp. $1-t \leq 0$).

Ce qui donne : $F(t) + F(1-t) = 1$ si $t \leq 0$ ou $t \geq 1$.

Maintenant si $0 < t < 1$, alors $0 < 1-t < 1$ et on a :

$$F(1-t) = \int_0^{1-t} f(x)dx \overset{(x=1-\xi)}{=} \int_t^1 f(\xi)d\xi$$

3 D'où si $0 < t < 1$,

$$F(t) + F(1-t) = \int_0^t f(\xi)d\xi + \int_t^1 f(\xi)d\xi = \int_0^1 f(\xi)d\xi = 1.$$

On en déduit alors que $\forall t \in \mathbb{R}$, $F(t) + F(1-t) = 1.$

---

1 d) $P(X < \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ (d'après c)).

$$\mathbf{3)}\ a)\cdot F_{\sqrt{X}}(t) = P(\sqrt{X} < t) = \begin{cases} 0 & ;\text{ si } t \leq 0 \\ F(t^2) & ;\text{ si } t > 0 \end{cases}$$

C'est à dire

2,5
$$F_{\sqrt{X}}(t) = \begin{cases} 0 & ;\text{ si } t \leq 0 \\ \frac{2}{\pi}Arc\sin t & ;\text{ si } 0 < t < 1 \\ 1 & ;\text{ si } t \geq 1. \end{cases}$$

$\cdot\ F_{g(X)}(t) = P(g(X) < t) = P(Arc\sin\sqrt{X} < t)$

$$= \begin{cases} 0 & ;\ \text{si } t \leq 0 \\ P(X < \sin^2 t) & ;\ \text{si } 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & ;\ \text{si } t \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

4

$$F_{g(X)}(t) = \begin{cases} 0 & ;\ \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{2}{\pi} Arc\sin\sqrt{\sin^2 t} & ;\ \text{si } 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & ;\ \text{si } t \geq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

C'est à dire

$$F_{g(X)}(t) = \begin{cases} 0 & ;\ \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{2}{\pi} t & ;\ \text{si } 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & ;\ \text{si } t \geq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$b)$ · La variable aléatoite $\sqrt{X}$ a pour densité $h(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $x \in]0\ ,1[$.

1,5 ($\sqrt{X} : \Omega \to]0, 1[$)

· La variable aléatoite $g(X)$ a pour densité $\lambda(x) = \dfrac{2}{\pi}$ pour $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

1,5 ($g(X) : \Omega \to]0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}[$)

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $p \in]0\ ,\frac{1}{2}[$.

1) On a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_{n+1}/A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}/B_n)P(B_n) \\ &\quad + P(A_{n+1}/C_n)P(C_n) + P(A_{n+1}/D_n)P(D_n). \end{aligned}$$

Or , $P(A_{n+1}/A_n) = 0$, $P(A_{n+1}/B_n) = P(A_{n+1}/D_n) = p$ et $P(A_{n+1}/C_n) = 1 - 2p$.

D'où $a_{n+1} = 0.a_n + pb_n + (1-2p)c_n + pd_n$

De même , en écrivant les trois autres équations des probabilités totales , on déduit que :

8

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & 1\text{-}2p & p \\ p & 0 & p & 1\text{-}2p \\ 1\text{-}2p & p & 0 & p \\ p & 1\text{-}2p & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

C'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

---

2)

a) · On peut montrer que si $\alpha u_1+\beta u_2+\lambda u_3+\mu u_4 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \lambda = \mu = 0$, c'est à dire $(u_1 \ , u_2 \ , u_3 \ , u_4)$ est une partie libre de $\mathbb{R}^4$ et par suite c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

Ou encore

$$\cdot\ rg(u_1 \ , u_2 \ , u_3 \ , u_4) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Par suite, $\mathcal{B}' = (u_1 \ , u_2 \ , u_3 \ , u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

· On a aussi :

$$d\acute{e}t(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

$\Rightarrow \mathcal{B}' = (u_1 \ , u_2 \ , u_3 \ , u_4)$ est une partie libre de $\mathbb{R}^4$ et par suite c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

2,5

b) Immédiate.

---

3) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ soit M.

2,5

a) On a : $D = Mat(f\ ,\ \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1\text{-}4p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p\text{-}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p\text{-}1 \end{pmatrix}$ (d'après **2**-*b*).

2,5

b) On a : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = QDQ^{-1}$.

2,5

c) On a : $Q^2 = 4I$

2,5

$\Rightarrow Q^{-1} = \dfrac{1}{4}Q$.

---

4) *a*) On a pour tout $n \geq 1$: $X_n = M^n X_0 = QD^nQ^{-1}X_0$

2,5

$\Rightarrow X_n = \dfrac{1}{4}QD^nQX_0\ ,\ \forall n \geq 1$.

---

b) Puisque à l'instant zéro , le pion est en A , alors on a :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ D'où } QX_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1.$$

$$\Rightarrow D^nQX_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1-4p)^n \\ (2p-1)^n \\ (2p-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ (1-4p)^n \\ (2p-1)^n \\ (2p-1)^n \end{pmatrix}$$

C'est à dire : $\forall n \geq 0$, on a :

5

$$\left\{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4}(1 + (1-4p)^n + 2(2p-1)^n) \\ b_n &= \frac{1}{4}(1 - (1-4p)^n) \\ c_n &= \frac{1}{4}(1 + (1-4p)^n - 2(2p-1)^n) \\ d_n &= \frac{1}{4}(1 - (1-4p)^n) \end{aligned}\right.$$

---

c) Comme $|2p-1| < 1$ et $|1-4p| < 1$, alors

4

$$\lim_{n\to+\infty}(1-4p)^n = \lim_{n\to+\infty}(2p-1)^n = 0.$$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \dfrac{1}{4}$.