Correction du Sujet de Maths (Biologie et Géologie) :

Session 2005

Exercice 1.

4

1) On a pour tout $t \in]-1\ ,\ 1[$, $\frac{1}{1+t} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^p$. Ce qui donne pour tout $x \in]-1\ ,\ 1[$,

$Log(1+x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} x^{p+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$

2,5

2) a) Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$. Alors on a : $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$. Donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} a_n x^{n+2}$ vaut 1.

2,5

b) Si $|x| = 1$, alors $\left| a_n x^{n+2} \right| = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$ $(n \to +\infty)$ et comme la série de *Riemann* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge, il en résulte que la série $\sum_{n\geq 1} a_n x^{n+2}$ converge pour $|x| = 1$.

2,5

3) a) Il est facile de vérifier que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{(n+1)}$.

b) Soit $N \geq 1$, alors on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1} x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)} = \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N+2} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + x \sum_{n=2}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \qquad (*)$$

5

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient pour $x \in]-1\ ,\ 1[$

$S(x) = \frac{x^2}{2} Log(x+1) + \frac{1}{2}(Log(x+1) - x + \frac{x^2}{2}) + x(Log(x+1) - x)$, c'est à dire

$$S(x) = \frac{(x+1)^2}{2} Log(x+1) - \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{4}, \text{ pour } x \in]-1,1[.$$

---

4) Pour $x = \frac{1}{2}$, ona : $S(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)2^n} = \frac{9}{8} Log\frac{3}{2} - \frac{7}{16}$.

D'où

2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)2^n} = \frac{9}{2} Log\frac{3}{2} - \frac{7}{4}.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, on a :

$$S'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n(n+1)} = [(x+1)Log(x+1) - x]_{x=\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} Log\frac{3}{2} - \frac{1}{2}.$$

D'où

2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n(n+1)} = 3Log\frac{3}{2} - 1$$

Prenons $x = -1$ dans la relation $(*)$, alors on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2(N+2)} - \frac{1}{2}$$

Il s'ensuit que

2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

Remarquons que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = -\lim_{x\to(-1)^+} S(x)$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3)$ soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) *a)* Le polynôme caractéristique de A est :

4

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 \\ -2 & 1-X & 2 \\ -2 & -1 & 4-X \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)(3-X).$$

•Les valeurs propres de A sont 1, 2 et 3.

2,5

b) Les valeurs propres de A sont simples , donc A est diagonalisable.

---

2) On a : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.
Soit $E_k = \ker(A - kI)$, $k \in \{1, 2, 3\}$.

On a $(x,y,z) \in E_k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= kx \\ -2x + y + 2z &= ky \\ -2x - y + 4z &= kz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-k)x - y + z &= 0 \\ -2x + (1-k)y + 2z &= 0 \\ -2x - y + (4-k)z &= 0 \end{cases}$$

1,5

• $(x,y,z) \in E_1 \Leftrightarrow x = y = z$. Donc $E_1 = Vect(1,1,1)$.

• $(x,y,z) \in E_2 \Leftrightarrow x = z$ et $y = 0$. D'où $E_2 = Vect(1,0,1)$.

• $(x,y,z) \in E_3 \Leftrightarrow x = 0$ et $y = z$. D'où $E_3 = Vect(0,1,1)$.

2,5

3) *a)* On a : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3,5 $b)$ on a : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2,5 **4)** $a)$ On a par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

$b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1-2^n & 2^n-1 \\ 1-3^n & 1 & 3^n-1 \\ 1-3^n & 1-2^n & 3^n+2^n-1 \end{pmatrix}.$$

$c)$ On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Ce qui donne par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n-1 \\ 3^n-1 \\ 3^n+2^n-1 \end{pmatrix}$. C'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

3

$$x_n = 2^n - 1 \quad , \quad y_n = 3^n - 1 \quad , \quad z_n = 3^n + 2^n - 1$$

---

5) $a)$ Soit M une matrice carrée réelle d'ordre 3 et $N = P^{-1}MP$.

3 $AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \Leftrightarrow DN = ND.$

$b)$ Soit $N = \begin{pmatrix} a & y & \gamma \\ x & b & z \\ \alpha & \beta & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors on a :

2 $DN = \begin{pmatrix} a & y & \gamma \\ 2x & 2b & 2z \\ 3\alpha & 3\beta & 3c \end{pmatrix}$ et $ND = \begin{pmatrix} a & 2y & 3\gamma \\ x & 2b & 3z \\ \alpha & 2\beta & 3c \end{pmatrix}$

Ce qui donne $DN = ND \Leftrightarrow y = \gamma = x = z = \alpha = \beta = 0$.

C'est à dire

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

---

c) Les matrices M qui commutent avec A (c'est à dire $MA = AM$) sont de la forme :

2

$$M = PNP^{-1} = \begin{pmatrix} a & a-b & b-a \\ a-c & a & -a \\ a-c & a-b & b-a \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

. **Exercice 3.**

2

1) a) On a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda \exp(-\lambda x)dx = 1$. Donc pour tout $\lambda > 0$, f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$, alors

3

$$F_{-X}(t) = P(-X < t) = P(X > -t) = \int_{\max(-t\,,\,0)}^{+\infty} \lambda \exp(-\lambda x)dx = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ \exp(\lambda t) & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

La variable aléatoire $(-X)$ a pour densité de probabilité la fonction:

2

$$\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \lambda \exp(\lambda x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

---

2) a) La variable aléatoire $(X - Y)$ a pour densité de probabilité la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(t)\varphi_\lambda(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(t) f_\lambda(t-x)dt.$$

Or, $f_\lambda(t)f_\lambda(t-x) \neq 0 \Leftrightarrow t > 0$ et $t - x > 0$, c'est à dire $t > \max(x\,,\,0)$.

Donc si $x \leq 0$, on a :

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda t} e^{-\lambda(t-x)}dt = \frac{\lambda}{2}\exp(\lambda x)$$

3

et si $x > 0$, on a :

$$h(x) = \int_x^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda t} e^{-\lambda(t-x)}dt = \frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda x).$$

Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|x|).$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$, alors on a : $P(|X-Y|<t) = 0$ si $t \leq 0$ et pour $t > 0$,

$$P(|X-Y|<t) = P(-t < X-Y < t) = \int_{-t}^{t} \frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|x|)dx = \int_{0}^{t} \lambda\exp(-\lambda x)dx = 1-\exp(-\lambda t).$$

3 Ainsi on a : $F_{|X-Y|}(t) = P(|X-Y|<t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ 1-\exp(-\lambda t) \text{ si } t > 0. \end{cases}$

2 Il s'ensuit que la densité de la variable aléatoire $|X-Y|$ est la fonction f_λ.

---

3) a) C sort le dernier de la poste si et seulement si $\max(X_A , X_B) < \min(X_A , X_B) + X_C$, c'est à dire

3
$$\max(X_A , X_B) - \min(X_A , X_B) = |X_A - X_B| < X_C.$$

Ainsi C sort le dernier de la poste si et seulement si l'événement $(|X_A - X_B| < X_C)$ est réalisé.

3 **b)** Les variables X_A , X_B , X_C sont indépendantes, donc les variables $|X_A - X_B|$ et X_C sont indépendantes et de même densité f_λ (d'aprés **2.b)**).Il en résulte d'aprés **2.a)** que la variable aléatoire $|X_A - X_B| - X_C$ admet la fonction h pour densité de probabilité.

La probabilité pour que C sorte le dernier est

2 $P(|X_A - X_B| < X_C) = P(|X_A - X_B| - X_C < 0) = \int_{-\infty}^{0} h(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|x|)dx = \frac{1}{2}$

---

4) La variable aléatoire $Z+T$ a pour densité $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t)f_\beta(x-t)dx$.

Or, $f_\alpha(t)f_\beta(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow t > 0$ et $x-t > 0$, c'est à dire $0 < t < x$.

Donc si $x \leq 0$, $g(x) = 0$ et si $x > 0$, on a :

$g(x) = \alpha\beta\int_{0}^{x} \exp(-\alpha t).\exp(-\beta(x-t))dx = \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\exp(-\beta x).[\exp(\beta-\alpha)x) - 1]$

C'est à dire

3
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\exp(-\alpha x) - \exp(-\beta x)] & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

---

5) Soit $M = \min(X_A , X_B)$ et $t \in \mathbb{R}$.

a) Si a et b sont deux nombres réels,alors $\min(a, b) \geq t$ ssi $a \geq t$ et $b \geq t$.

3 Donc $(M \geq t) = (X_A \geq t) \cap (X_B \geq t)$.

b) Puisque les variables X_A , X_B sont indépendantes et de même loi , alors on a :

$P(M \geq t) = P((X_A \geq t) \cap (X_B \geq t)) = (P(X_A \geq t))^2$, c'est à dire

3
$$P(M \geq t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ \exp(-2\lambda t) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

2 Il s'ensuit que la variable aléatoire M a pour densité la fonction $f_{2\lambda}$.

2 **6) a)** On a $T_C = \min(X_A , X_B) + X_C = M + X_C$.
Les variables aléatoires M et X_C sont indépendantes et de densités respectives $f_{2\lambda}$ et f_λ , donc d'aprés **4)** , la variable aléatoire T_C a pour densité la fonction :

2 $$\varphi(x) = \begin{cases} 2\lambda[\exp(-\lambda x) - \exp(-2\lambda x)] & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

3 **b)** Soit $n \in \mathbb{N}$, alors on a : $E((T_C)^n) = 2\lambda\left[\int_0^{+\infty} x^n \exp(-\lambda x)dx - \int_0^{+\infty} x^n \exp(-2\lambda x)dx\right]$.

Posons $u = \lambda x$ (resp. $u = 2\lambda x$) , nous obtenons $E((T_C)^n) = \frac{n!}{\lambda^n}(2 - \frac{1}{2^n})$.

2 + 2 On déduit que $E(T_C) = \frac{3}{2\lambda}$ et $V(T_C) = E((T_C)^2) - (E(T_C))^2 = \frac{5}{4\lambda^2}$.

♣♣♣