Correction du sujet de Maths (Biologie et Géologie) Session 2008

Problème I

1. a) $P_\lambda(M) = det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 6-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2(8-\lambda)$

Les valeurs propres de M sont 5 double et 8 simple.

b) Le sous-espace propre correspondant a $\lambda = 8$ est engendré par (1,1,1). Le sous-espace propre correspondant à $\lambda = 5$ est de dimension 2 et a pour base (-1,1,0) et (-1,0,1). La somme des dimensions des 2 sous-espaces propres est 3 donc M est diagonalisable.

c) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d. $M^n = QD^nQ^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2.5^n+8^n & -5^n+8^n & -5^n+8^n \\ -5^n+8^n & 2.5^n+8^n & -5^n+8^n \\ -5^n+8^n & -5^n+8^n & 2.5^n+8^n \end{pmatrix}$

2.

a) Par hypothèse, $P(A_{k+1}|A_k) = 3/4$ et $P(A_{k+1}|B_k) = 1/8$ et $P(A_{k+1}|C_k) = 1/8$.
$A_{k+1} \Leftrightarrow$ (A_{k+1} et A_k) ou (A_{k+1} et B_k) ou (A_{k+1} et C_k) donc
$P(A_{k+1}) = P(A_{k+1}|A_k)P(A_k) + P(A_{k+1}|B_k)P(B_k) + P(A_{k+1}|C_k)P(C_k)$
$P(A_{k+1}) = (3/4)P(A_k) + (1/8)P(B_k) + (1/8)P(C_k)$. De même,
$P(B_{k+1}|Bk) = 3/4$ et $P(B_{k+1}|A_k) = 1/8$ et$P(B_{k+1}|C_k) = 1/8$.
$P(B_{k+1}) = P(B_{k+1}|A_k)P(A_k) + P(B_{k+1}|B_k)P(B_k) + P(B_{k+1}|C_k)P(C_k)$
$P(B_{k+1}) = (1/8)P(A_k) + (3/4)P(B_k) + (1/8)P(C_k)$. De même,
$P(C_{k+1}|C_k) = 3/4$ *et* $P(C_{k+1}|A_k) = 1/8$ *et* $P(C_{k+1}|B_k) = 1/8$.
$P(C_{k+1}) = P(C_{k+1}|A_k)P(A_k) + P(C_{k+1}|B_k)P(B_k) + P(C_{k+1}|C_k)P(C_k)$
$P(C_{k+1}) = (1/8)P(A_k) + (1/8)P(B_k) + (3/4)P(C_k)$.

b)

$$X_{k+1} = N.X_k, \text{ où } N = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}M.$$

c) $X_k = \frac{1}{8}MX_{k-1}$ par recurrence $X_k = (\frac{1}{8})^k M^k X_0$.

d) $X_k = \frac{1}{3.8^k}\begin{pmatrix} 2.5^k+8^k & -5^k+8^k & -5^k+8^k \\ -5^k+8^k & 2.5^k+8^k & -5^k+8^k \\ -5^k+8^k & -5^k+8^k & 2.5^k+8^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2.5^k+8^k)/(3.8^k) \\ (-5^k+8^k)/(3.8^k) \\ (-5^k+8^k)/(3.8^k) \end{pmatrix}$,
donc $P(A_k) = (2.5^k+8^k)/(3.8^k)$, $P(B_k) = (-5^k+8^k)/(3.8^k)$ et
$P(C_k) = (-5^k+8^k)/(3.8^k)$.
e) $\lim_{k\to+\infty} P(A_k) = \lim_{k\to+\infty} P(B_k) = \lim_{k\to+\infty} P(C_k) = 1/3$.
3. a) $T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, T_1 est l'attente pour que la première fois la particule soit en C, la probabilité pour qu'elle soit en C est $\frac{1}{8}$ donc T_1 suit une loi géometrique de paramètre $\frac{1}{8}$.
b) On a

$$g(z) = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{7}{8})^{n-1}z^n$$

d'où $R = \frac{8}{7}$
c) Pour tout $|z| < \frac{8}{7}$, $g(z) = \frac{z}{8-7z}$.
d)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)P(T_1=n) = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(\frac{7}{8})^{n-1} = g''(1) = 112.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2P(T_1=n) = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(\frac{7}{8})^{n-1} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(\frac{7}{8})^{n-1}+\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{7}{8})^{n-1} = g''(1)+g'(1) = 104.$$

e)

$$P(T_1 > n+m/T_1 > n) = \frac{P(T_1 > n+m \text{ et } T_1 > n)}{P(T_1 > n)} = \frac{P(T_1 > n+m)}{P(T_1 > n)},$$

or $P(T_1 > n) = 1 - P(T_1 \le n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(T_1 = k) = 1 - \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}(\frac{7}{8})^{k-1} = \left(\frac{7}{8}\right)^n$
d'où $P(T_1 > n+m/T_1 > n) = \left(\frac{7}{8}\right)^m = P(T_1 > m)$
4. a)
• Pour $s \ge 1$, on a
$P(U \ge s) = P(T_1 \ge s \text{ et } T_2 \ge s) = P(T_1 \ge s)P(T_2 \ge s)$, or
$P(T_1 \ge s) = 1-P(T_1 \le s-1) = 1-\sum_{n=1}^{s-1} P(T_1 = n) = 1-\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{s-1}(\frac{7}{8})^{n-1} = \left(\frac{7}{8}\right)^{s-1}$,
$P(U \ge s) = \left(\frac{7}{8}\right)^{2s-2}$
• Pour $t \ge 1$, on a
$P(V \le t) = P(T_1 \le t \text{ et } T_2 \le t) = P(T_1 \le t)P(T_2 \le t) = \left(1 - (\frac{7}{8})^t\right)^2$.
b)
• $\forall s \in \mathbb{N}^*$, on a $P(U = s) = P(U \ge s) - P(U \ge s+1) = \left(\frac{7}{8}\right)^{2s-2} - \left(\frac{7}{8}\right)^{2s} = \frac{25}{64}\left(\frac{7}{8}\right)^{2s-2}$ U suit la loi géométrique de paramètre $\frac{25}{64}$.

• $\forall t \in \mathbb{N}^*$, on a $P(V=t) = P(V \leq t) - P(V \leq t-1) = \left(1-(\frac{7}{8})^t\right)^2 - \left(1-(\frac{7}{8})^{t-1}\right)^2 = \frac{1}{4}(\frac{7}{8})^{t-1} - \frac{25}{64}(\frac{7}{8})^{2t-2}$.
$E(V) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(V=n) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{7}{8})^{n-1} - \frac{25}{64}\sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{7}{8})^{2n-2} = \frac{1}{4}\frac{1}{(1-\frac{7}{8})^2} - \frac{25}{64}\frac{1}{(1-\frac{49}{64})^2} = \frac{336}{25}$.
c) U et V ne pas sont indépendantes.

Problème II

Partie 1

1. On a $f_n(x) = o(\frac{1}{x^2})$ lorsque x tend vers l'infini, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ est convergente.

2. a)

$$\int_0^A x^{n+2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -A^{n+1}e^{-\frac{A^2}{2}} + (n+1)\int_0^A x^n e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

On fait tendre A vers l'infini, on obtient $I_{n+2} = (n+1)I_n$.
b) On a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi} = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, d'où $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
c) $I_1 = \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1$.
d) Pour le cas pair

$$\begin{gathered} I_{2n} = (2n-1)I_{2n-2} \\ I_{2n-2} = (2n-3)I_{2n-4} \\ \ldots \\ I_2 = I_0 \end{gathered}$$

$I_{2n} = (2n-1)(2n-3)(2n-5)...5\times 3\times 1 I_0$, on multiplie et on divise par $2n(2n-2)(2n-4)...4\times 2$, On aura $I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!}$
Pour le cas impair

$$\begin{gathered} I_{2n+1} = (2n)I_{2n-1} \\ I_{2n-1} = (2n-2)I_{2n-3} \\ \ldots \\ I_3 = 2I_1 \end{gathered}$$

$I_{2n+1} = 2n(2n-2)(2n-4)...4\times 2 = 2^n n!$

Partie 2

1. a) On a $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1$.
Donc f est une densité de probabilité.
b) La densité de M^2 est donnée par

$$f_{M^2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}}(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

d'où M^2 suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. $E(M^2) = 2$ et $V(M^2) = 4$

$$\mathcal{M}_{M^2}(n) = E(M^{2n}) = \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = I_{2n+1} = 2^n n!.$$

2. a) $X = X_1 + X_2$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x-y) f_{X_2}(y) dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} f_{X_1}(x-y) dy$$

on pose $t = x - y$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{-\frac{x-t}{2}} f_{X_1}(t) dt$$

- Si $x \leq 0, \quad f_X(x) = 0.$
- Si $x > 0, \quad f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{4} e^{-\frac{x-t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} dt = \int_0^x \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} dt = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}.$

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

b) On a $f_{Y/X=x} = \mathcal{U}([0, x])$

$$f_{Y/X=x}(y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } y \in [0, x] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{Y/X=x}(y) f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La loi marginale de Y,
$\forall \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$
- Si $y \leq 0, \quad f_Y(y) = 0.$
- Si $y > 0, \quad f_Y(y) = \int_y^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}$

Y suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.
c) la densité conditionnelle de X sachant Y:

$$\forall y > 0 \quad f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{y}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d)

$$E(X/Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X/Y=y}(x) dx = e^{\frac{y}{2}} \int_y^{+\infty} \frac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}} dx = e^{\frac{y}{2}} [-x e^{-\frac{x}{2}}]_y^{+\infty} + e^{\frac{y}{2}} \int_y^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = y + 2$$

$$E(X^n Y^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^m f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x}{2}} \left(\int_0^x y^m dy \right) dx =$$
$$\frac{1}{m+1} \int_0^{+\infty} x^{n+m+1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{2^{n+m+2}(n+m+1)!}{m+1}.$$

Partie 3

1. a) On a : $ax^2+bx+c=(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}})^2-\frac{b^2}{4a}+c$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}dx = e^{(\frac{b^2-4ac}{4a})}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}})^2}dx$$

on pose $t=\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}dx = e^{(\frac{b^2-4ac}{4a})}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t)^2}\frac{dt}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{(\frac{b^2-4ac}{4a})}.$$

b) $G=N(0,\sigma)$ et $G=N(0,\sigma')$ sont indépendantes, on a

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad f_{G+G'}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_G(t-x)f_{G'}(x)dx = \frac{1}{\sigma\sigma' 2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma'^2}}dx =$$

$$\frac{1}{\sigma\sigma' 2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\sigma^2+\sigma'^2}{\sigma^2\sigma'^2}x^2-\frac{2t}{\sigma^2}x+\frac{t^2}{\sigma^2})}dx = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2(\sigma^2+\sigma'^2)}}$$

$$G+G'=N(0,\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}).$$

c) $\frac{S_n}{n}=N(0,\frac{1}{\sqrt{n}})$.

2. a)

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big|\geq\alpha\Big)=P\Big(\frac{S_n}{n}\leq-\alpha\Big)+P\Big(\frac{S_n}{n}\geq\alpha\Big)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\alpha}e^{-\frac{nx^2}{2}}dx+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{+\infty}e^{-\frac{nx^2}{2}}dx.$$

On pose dans la première integrale $t=-x$ on obtient le résultat.

b) évident

3. a) évident

b) $\int_0^{+\infty}e^{-u\alpha}du=1$

c)

$$\int_0^{+\infty}e^{-u\alpha}du-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2n}-u\alpha}du=\int_0^{+\infty}e^{-u\alpha}(1-e^{-\frac{u^2}{2n}})du\leq\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{2n}e^{-u\alpha}du=\frac{1}{n\alpha^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_0^{+\infty}e^{-u\alpha}du-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2n}-u\alpha}du\Big)=0$$

d) Lorsque n tend vers l'infini, on a

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big|\geq\alpha\Big)\sim\sqrt{\frac{2}{n\pi}}e^{-\frac{n\alpha^2}{2}}.$$