

**Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2011**

**Concours Biologie
Correction de l'Epreuve de Mathématiques**

Exercice

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé donné.

**

$V = (X, Y)^t$, un vecteur aléatoire de loi gaussienne, $\mathcal{N}_2(0, \Gamma)$, centré et de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ c'est à dire } \text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 3 \text{ et } \text{Cov}(X, Y) = -1.$$

1. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X) = -1 \neq 0$, d'où, $E(XY) \neq E(X)E(Y)$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

2. $P_{\Gamma}(X) = \det(\Gamma - X.Id) = (4 - X)(2 - X) = 0 \iff X = 4 \text{ ou } X = 2$, donc Γ admet $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 2$, comme valeurs propres, distinctes en dim 2 Γ est diagonalisable et il existe une base orthonormée de Vecteurs propres.

3. $\text{Ker}(\Gamma - 4.Id)$ est le s.e.v. engendré par $u_1 = (1; -1)^t$ donc $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; -1)^t$ est un vecteur de base normé.

$\text{Ker}(\Gamma - 2.Id)$ est le s.e.v. engendré par $v_1 = (1, 1)^t$, donc $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 1)^t$ et la base orthonormée est $B = (u, v)$.

4. (a) Soient les v.a. $T = \frac{1}{2} \prec V, u \succ$, et $Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \prec V, v \succ$, avec $V = (X, Y)^t$

$T = \frac{X-Y}{2\sqrt{2}}$ et $Z = \frac{X+Y}{2}$ suivent la loi gaussienne réduite centrée $\mathcal{N}(0, 1)$ car transformés linéaires de v.a. gaussiennes.

(b) $\text{var}(T) = \frac{1}{8} [\text{var}X + \text{var}Y - 2\text{cov}(X, Y)] = 1$ (d'après la matrice Γ)

$\text{var}(Z) = \frac{1}{4} [\text{var}X + \text{var}Y + 2\text{cov}(X, Y)] = 1$, $E(T) = E(Z) = 0$ donc $\text{Cov}(T, Z) = E(TZ)$,

$$E(TZ) = E \left[\left(\frac{X-Y}{2\sqrt{2}} \right) \left(\frac{X+Y}{2} \right) \right] = \frac{1}{4\sqrt{2}} (\text{var}X - \text{var}Y) = 0$$

Donc la matrice $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} = Id_2$ est la matrice de variance-covariance du vecteur $W = (T, Z)^t$,

(c) $W = (T, Z)^t$ est transformé linéaire du vecteur V par la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

donc la loi de W est gaussienne, centrée réduite de \mathbb{R}^2 .

(d) La densité de probabilité du couple (T, Z) est donnée par:

$$f_{(T,Z)}(t, z) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det(\Lambda)}} \exp \left[-\frac{1}{2} (t, z) \cdot \Lambda \cdot (t, z)^t \right] = \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{t^2 + z^2}{2} \right) = f_T(t) \cdot f_Z(z).$$

Donc T et Z sont des v.a. indépendantes, et de lois normale réduite centrée $\mathcal{N}(0, 1)$, chacune.

Problème

Partie I

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc le rayon de convergence $R = +\infty$, et la série

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est une série entière convergente sur tout \mathbb{R} , et sa limite est la fonction $h(x)$:

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

2. $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, donc $\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}$, et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n n!}{2^{n+1} (n+1)!} = \frac{1}{2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc le rayon de convergence est $+\infty$.

À

3. (a) par récurrence facile, car $2^{n+1} \cdot (n+1) \leq (2n+2)!$
 (b) autre méthode : le produit de tous les nombres pairs jusqu'à $2n \leq$ au produit de tous les nombres jusqu'à $2n$

4. $\cosh(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \cdot n!}$, comme $\forall n \geq 0, 2^n n! \leq (2n)!$, alors on obtient

$$\frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{t^{2n}}{2^n \cdot n!}, \text{ et } \cosh(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

5. (a) $x \mapsto \exp(x)$ est une fonction de classe C^∞ , sur \mathbb{R} , de dérivée seconde positive strictement sur \mathbb{R} , elle y est donc convexe.

(b) la convexité de la fonction \exp implique que pour tout $x \in [-1, 1]$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\exp(tx) \leq \frac{1}{2}(1-x)\exp(-t) + \frac{1}{2}(1+x)\exp(t)$$

6. (a) X v.a.r., bornée par 1 et telle que $E(X) = 0$, implique que la v.a.r. $\exp(tX)$ est aussi bornée p.s. et admet une moyenne finie, l'inégalité de la question précédente s'applique d'où le a).

(b) $E[\exp(tX)] \leq \frac{1}{2}E(1-X)\exp(-t) + \frac{1}{2}E(1+X)\exp(t) \leq \frac{\exp(-t) + \exp(t)}{2} = \cosh(t) = \cosh(t)$.

(c) l'inégalité $\cosh(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et b) impliquent :

$$E(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

7. $E[\exp(t.S_n)] = E[\exp(t.\sum_{i=1}^n X_i)] = E\left[\prod_{i=1}^n \exp(tX_i)\right] \stackrel{\text{par indépendance}}{=} \prod_{i=1}^n E[\exp(tX_i)]$

$$\leq \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Donc $E[\exp(t.S_n)] \leq \exp\left(\frac{n.t^2}{2}\right)$. (car les X_i ont même loi que X).

8. (a) $\varepsilon > 0, t > 0$, la fonction $x \mapsto \exp(t.x)$ étant croissante, on a
 $(S_n > \varepsilon) \subset (\exp(t.S_n) > \exp(t\varepsilon))$ implique, $P(S_n > \varepsilon) \leq P(\exp(t.S_n) > \exp(t\varepsilon))$.

(b) L'inégalité de Markov implique: $P(S_n > \varepsilon) \leq \frac{E[\exp(t.S_n)]}{\exp(t\varepsilon)} \leq \frac{\exp(n.\frac{t^2}{2})}{\exp(t\varepsilon)}$.

(c) $g(t) = n\frac{t^2}{2} - t\varepsilon$; sa dérivée est $g'(t) = n.t - \varepsilon = 0 \iff t = \frac{\varepsilon}{n} > 0$, et $g\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) = \frac{-\varepsilon^2}{2n}$ et la courbe de g admet un minimum pour $t = \frac{\varepsilon}{n}$, qui vaut $\frac{-\varepsilon^2}{2n}$.

(d) pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t > 0$, la fonction \exp étant croissante, on a :

$$P(S_n \geq \varepsilon) \leq \exp \left\{ \min_{t>0} \left(n \cdot \frac{t^2}{2} - t \cdot \varepsilon \right) \right\} = \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2n} \right). \text{ d'où (3).}$$

9. On a :

(a) $(|T| > \varepsilon) = (T > \varepsilon) \cup (T < -\varepsilon) = (T > \varepsilon) \cup (-T > \varepsilon)$, implique
 $P(|T| > \varepsilon) \leq P(T > \varepsilon) + P(-T > \varepsilon)$.

(b) Appliquant l'inégalité (2) aux v.a $-T$ et T , on obtient:

$$P(-T > \varepsilon) \leq \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2n} \right) \implies P(|T| > \varepsilon) \leq 2 \cdot \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2n} \right). \text{ d'où (4).}$$

Corrigé de la partie II

1. La v.a.r $U \in [0, 1]$, donc $0 \leq \sqrt{1+U^4} \leq \sqrt{2}$. On en déduit que $0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+U^4} \leq 1$.

D'où $|X| \leq 1$.

2. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{1+u^4} du = \frac{I}{\sqrt{2}} \\ \mathbb{E}(\bar{X}_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1) = \frac{I}{\sqrt{2}} \\ \mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1+u^4) du = \left[u + \frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \\ \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) \\ &\leq \mathbb{E}(X^2) - \frac{1}{2}, \quad \text{car } I \geq 1 \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{10} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}\end{aligned}$$

3. (a) En vertu de l'inégalité de Markov, on a :

$$\mathbb{P} \left(|(X - \mathbb{E}(X))^2| > \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \leq 2 \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Il s'ensuit que :

$$\mathbb{P} \left(\left| X - \frac{I}{\sqrt{2}} \right| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right) \leq 2 \frac{1}{10\varepsilon^2} = \frac{1}{5\varepsilon^2}.$$

(b) On a :

$$\mathbb{P} \left(\left| \bar{X}_n - \frac{I}{\sqrt{2}} \right| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right) \leq 2 \frac{\mathbb{V}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}.$$

Or, $\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \mathbb{V}(X) \leq \frac{1}{10n}$. Il vient alors :

$$\mathbb{P} \left(\left| \bar{X}_n - \frac{I}{\sqrt{2}} \right| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right) \leq \frac{1}{5n\varepsilon^2}.$$

Par conséquent :

$$1 - \mathbb{P} \left(\left| \bar{X}_n - \frac{I}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right) \leq \frac{1}{5n\varepsilon^2},$$

soit,

$$\mathbb{P} \left(\left| \bar{X}_n - \frac{I}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right) \geq 1 - \frac{1}{5n\varepsilon^2}.$$

4

On en déduit que $\left| \bar{X}_n - \frac{I}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - \frac{1}{5n\varepsilon^2}$. C'est-à-dire

$$I \in \left[\sqrt{2}\bar{X}_n - \varepsilon, \sqrt{2}\bar{X}_n + \varepsilon \right]$$

avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - \frac{1}{5n\varepsilon^2}$.

(c) Pour que la Relation (5) soit vérifiée, il suffit que $1 - \frac{1}{5n\varepsilon^2} \geq 1 - \alpha$. Or

$$1 - \frac{1}{5n\varepsilon^2} \geq 1 - \alpha \Rightarrow \frac{1}{5n\varepsilon^2} \leq \alpha \Rightarrow n \geq \frac{1}{5\alpha\varepsilon^2} = n_1^*.$$

(d) En appliquant l'inégalité (4) aux v.a.r. $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$, on obtient :

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| > \varepsilon \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2n} \right).$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P} \left(\frac{2}{n} \left| \sum_{i=1}^n Y_i \right| > \frac{2\varepsilon}{n} \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2n} \right),$$

soit,

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{I}{\sqrt{2}} \right| > \frac{2\varepsilon}{n} \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2n} \right).$$

Soit ε' un réel positif tel que $\frac{\varepsilon'}{\sqrt{2}} = \frac{2\varepsilon}{n}$. Alors l'inégalité ci-dessus se réécrit en fonction de ε' :

$$\mathbb{P} \left(\left| \bar{X}_n - \frac{I}{\sqrt{2}} \right| > \frac{\varepsilon'}{\sqrt{2}} \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{n\varepsilon'^2}{16} \right).$$

On en déduit, après avoir passé à l'évènement complémentaire, que :

$$\forall \varepsilon' > 0, \quad \mathbb{P} \left(\left| \bar{X}_n - \frac{I}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{\varepsilon'}{\sqrt{2}} \right) \geq 1 - 2 \exp \left(-\frac{n\varepsilon'^2}{16} \right).$$

Enfin, il suffit de remplacer ε'^2 par ε .

(e) Pour que la Relation (5) soit vérifiée, il suffit que

$$1 - 2 \exp \left(-\frac{n\varepsilon}{16} \right) \geq 1 - \alpha.$$

Or,

$$1 - 2 \exp \left(-\frac{n\varepsilon}{16} \right) \geq 1 - \alpha \Rightarrow \exp \left(-\frac{n\varepsilon}{16} \right) \leq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow n \geq -\frac{16}{\varepsilon^2} \ln \left(\frac{\alpha}{2} \right) = n_2^*.$$

4. On trouve $n_1^* = 2.000 10^6$ et $n_2^* = 1.216 10^6$.