République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université de Carthage
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Bizerte

Devoir surveillé (Semestre 1)

Filère : GI-GM
Niveau : Première année
Matière : Mathématique de l'ingénieur
Enseignant : M^r H. HAMMAMI

Date : 12 / 11 / 2012
Durée : 1 H 30
Documents : non autorisés
Calculatrice : non atorisée

Exercice 1 (6 pts)

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n=1}^{+\infty} 8^n z^{3n}$.
2. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n=1}^{+\infty} 5^n z^{n^2}$.
3. *Soit* R_1 *le rayon de convergence d'une série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *et* R_2 *le rayon de convergence d'une série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. *Soit alors* R_3 *le rayon de convergence de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$. *Prouver que* $R_3 \geq \inf(R_1, R_2)$ *et donner un exemple avec l'inégalité stricte.*

Exercice 2 (6 pts) *Soit* $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2}$.

1. *Déterminer les développements de* f *en série de Laurent :*
   (a) $0 < |z| < 1$,
   (b) $1 < |z| < 2$,
   (c) *et pour* $|z| > 2$.
2. *Soit* C *le cercle de centre* $-\frac{2}{3}$ *et de rayon* 1. *Déterminer les singularités et les résidus de* f *à l'intérieur de* C *et déduire la valeur de* $\int_C f(z)dz$.

Exercice 3 (8 pts)

1. *Déterminer les singularités et les résidus dans* $\mathbb{C}$ *de* $f(z) = \frac{1}{(z^2-2z+2)(z^2+1)}$.
   Soit γ_R *le contour* $[-R, R] \cup C_R$, *parcouru dans le sens direct, avec* C_R *le demi-cercle de rayon* $R > 3$, *de centre* 0, *dans le demi-plan supérieur.*
2. *Montrer que* $\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(z)dz = 0$.
3. *Calculer à l'aide du théorème des résidus :* $\int_{\gamma_R} f(z)dz$.
4. *Pour calculer l'intégrale suivante* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^2+2x+2}dx$,
   (a) *Déterminer la fonction* $g(z)$ *à intégrer dans* $\mathbb{C}$.
   (b) *Déterminer le contour* δ_r.
   (c) *Calculer la valeur de* I *à l'aide du théorème des résidus.*

Toutes les réponses doivent être justifiées