

Nathalie Caspard
Bruno Leclerc
Bernard Monjardet

Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages



MATHÉMATIQUES
&
APPLICATIONS

Directeurs de la collection :
G. Allaire et M. Benaïm

60

MATHÉMATIQUES & APPLICATIONS

Comité de Lecture / Editorial Board

GRÉGOIRE ALLAIRE
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau
allaire@cmaph.polytechnique.fr

MICHEL BENAÏM
Mathématiques, Univ. de Neuchâtel
michel.benaïm@unine.ch

THIERRY COLIN
Mathématiques, Univ. de Bordeaux 1
colin@math.u-bordeaux1.fr

MARIE-CHRISTINE COSTA
CEDRIC, CNAM, Paris
costa@cnam.fr

GÉRARD DEGREGZ
Inst. Von Karman, Louvain
degrez@vki.ac.be

JEAN DELLA-DORA
LMC, IMAG, Grenoble
jean.della-dora@imag.fr

JACQUES DEMONGEOT
TIMC, IMAG, Grenoble
jacques.demongeot@imag.fr

FRÉDÉRIC DIAS
CMLA, ENS Cachan
dias@cmla.ens-cachan.fr

NICOLE EL KAROUI
CMAP, École Polytechniques Palaiseau
elkaroui@cmaph.polytechnique.fr

MARC HALLIN
Stat. & R.O., Univ. libre de Bruxelles
mhallin@ulb.ac.be

LAURENT MICLO
LATP, Univ. de Provence
laurent : miclo@latp.univ-mrs.fr

HUYEN PHAM
Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 7
pham@math.jussieu.fr

VALÉRIE PERRIER
LMC, IMAG, Grenoble
valerie.perrier@imag.fr

DOMINIQUE PICARD
Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 7
picard@math.jussieu.fr

ROBERT ROUSSARIE
Topologie, Univ. de Bourgogne, Dijon
roussari@u-bourgogne.fr

CLAUDE SAMSON
INRIA Sophia-Antipolis
claude.samson@sophia.inria.fr

BERNARD SARAMITO
Mathématiques, Université de Clermont 2
Bernard.Saramito@math.univ-bpclermont.fr

ANNICK SARTENAER
Mathématique, Univ. de Namur
annick.sartenaer@fundp.ac.be

ZHAN SHI
Probabilités, Univ. Paris 6
zhan@proba.jussieu.fr

SYLVAIN SORIN
Equipe Comb. et Opt., Univ. Paris 6
sorin@math.jussieu.fr

JEAN-MARIE THOMAS
Maths Appl., Univ. de Pau
Jean-Marie.Thomas@univ-pau.fr

ALAIN TROUVÉ
CMLA, ENS Cachan
trouve@cmla.ens-cachan.fr

JEAN-PHILIPPE VIAL
HEC, Univ. de Genève
jean-philippe.vial@hec.unige.ch

BERNARD YCART
LMC, IMAG, Grenoble
bernard.ycart@imag.fr

ENRIQUE ZUAZUA
Matemáticas, Univ. Autónoma de Madrid
enrique.zuazua@uam.es

Directeurs de la collection :
G. ALLAIRE et M. BENAÏM

Instructions aux auteurs :

Les textes ou projets peuvent être soumis directement à l'un des membres du comité de lecture avec copie à G. ALLAIRE OU M. BENAÏM. Les manuscrits devront être remis à l'Éditeur sous format $\text{\LaTeX}2\epsilon$.

Nathalie Caspard
Bruno Leclerc
Bernard Monjardet

Ensembles
ordonnés finis :
concepts, résultats
et usages

 Springer

Nathalie Caspard
Laboratoire d'Algorithmique, Complexité et Logique
Département d'Informatique - Bâtiment P2
Université Paris 12
61, avenue du Général de Gaulle
94010 Creteil cedex
France
courriel: caspard@univ-paris12.fr

Bruno Leclerc
Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales
Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales
54, bd Raspail
75270 Paris cedex 06
France
courriel: leclerc@ehess.fr

Bernard Monjardet
Centre d'Economie de la Sorbonne
CNRS - UMR 8174
Maison des Sciences Economiques
Université Paris 1 Panthéon - Sorbonne
106-112, bd de l'Hôpital
75634 Paris cedex 13
France
courriel: Bernard.Monjardet@univ-paris1.fr

Library Congress Control Number: 2007931192

Mathematics Subject Classification (2000): 06A, 68R, 68T30, 90B, 91

ISSN 1154-483X
ISBN-10 3-540-73755-3 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-73755-1 Springer Berlin Heidelberg New York

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 interdit les copies ou les reproductions destinées à une utilisation collective.
Toute représentation, reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Springer est membre du Springer Science+Business Media
©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007
springer.com
WMXDesign GmbH

Imprimé sur papier non acide 3100/SPI - 5 4 3 2 1 0 -

Table des matières

Avant-propos	XIII
1 Concepts et exemples	1
1.1 Ensembles ordonnés	1
1.1.1 Ordres et ordres stricts	2
1.1.2 Graphes associés à un ensemble ordonné	5
1.1.3 Diagramme d'un ensemble ordonné	7
1.1.4 Isomorphisme et dualité	8
1.2 Exemples d'usages	10
1.2.1 Mathématiques	11
1.2.2 Biologie	12
1.2.3 Informatique	13
1.2.4 Sciences sociales	14
1.2.5 Recherche opérationnelle	16
1.3 Sous-ensembles ordonnés et extensions	17
1.3.1 Sous-ensembles ordonnés	18
1.3.2 Chaînes, antichaînes et paramètres fondamentaux	19
1.3.3 Extensions	21
1.4 Éléments et sous-ensembles particuliers	24
1.4.1 Infimums, supremums, éléments irréductibles	24
1.4.2 Parties commençantes, parties finissantes	27
1.5 Opérations entre ensembles ordonnés	28
1.5.1 Substitution, sommes cardinale et ordinale, produit lexicographique	29
1.5.2 Produit direct	32
1.6 Compléments et références	33
1.7 Exercices	38

2	Classes particulières d'ensembles ordonnés	43
2.1	Ensembles ordonnés rangés, semi-modulaires et bipartis	44
2.2	Ensembles ordonnés définis par configurations exclues	50
2.3	Ensembles ordonnés latticiels : demi-treillis et treillis	52
2.4	Ensembles totalement ordonnés et tournois	58
2.5	Compléments et références	62
2.6	Exercices	67
3	Morphismes d'ensembles ordonnés	71
3.1	Applications isotones et antitones : exponentiation	73
3.2	Parties sup-génératrices et inf-génératrices	74
3.3	Fermetures et ouvertures	80
3.4	Applications résiduées, résiduelles, galoisiennes	84
3.5	Correspondance de Galois associée à une relation	90
3.5.1	Treillis de Galois	91
3.5.2	Table d'un ensemble ordonné	93
3.5.3	Complété d'un ensemble ordonné	96
3.6	Compléments et références	99
3.7	Exercices	103
4	Chaînes et antichaînes	109
4.1	Le théorème de Dilworth	110
4.2	Couplages et transversales dans un ensemble ordonné biparti	114
4.3	La propriété de Sperner	118
4.4	Produits directs de chaînes	122
4.5	Compléments et références	127
4.6	Exercices	130
5	Ensembles ordonnés et treillis distributifs	133
5.1	Treillis distributifs	134
5.2	Treillis distributif associé à un ensemble ordonné	138
5.3	Représentations d'un treillis distributif	141
5.4	Dualités entre préordres et topologies et entre ensembles ordonnés et treillis distributifs	147
5.5	Dualité entre ordres et fuseaux d'ordres totaux	154
5.6	Compléments et références	159
5.7	Exercices	163
6	Codages et dimensions des ordres	169
6.1	Codages booléens et dimension booléenne d'un ensemble ordonné	171
6.2	Dimension d'un ensemble ordonné	176

6.3	Ensembles ordonnés de dimension 2	185
6.4	k -dimension d'un ensemble ordonné	188
6.5	Compléments et références	193
6.6	Exercices	198
7	Quelques usages	201
7.1	Modélisation des préférences	201
7.2	Agrégation des préférences : théorèmes Arrowiens pour ordres	214
7.3	Les rôles des ordres en classification	224
7.4	Analyse galoisienne des données : fermetures et implications	238
7.5	Ordonnancements	251
7.5.1	Problème d'ordonnement à 1 machine	251
7.5.2	Problème d'ordonnement à m machines	252
7.5.3	Problème d'ordonnement à 2 étapes (et 2 machines)	255
7.6	Compléments et références	259
7.6.1	Modélisation des préférences	259
7.6.2	Agrégation des préférences : théorèmes arrowiens pour ordres	261
7.6.3	Les rôles des ordres en classification	264
7.6.4	Analyse galoisienne des données : fermetures et implications	266
7.6.5	Ordonnements	268
7.7	Exercices	269
7.7.1	Modélisation des préférences	269
7.7.2	Agrégation des préférences : théorèmes arrowiens pour ordres	272
7.7.3	Les rôles des ordres en classification	274
7.7.4	Analyse galoisienne des données : fermetures et implications	276
7.7.5	Ordonnements	277
A	Questions de complexité	279
A.1	Théorie de la complexité	280
A.2	Résultats de complexité	285
A.2.1	Problèmes faciles (algorithmes polynomiaux)	286
A.2.2	Problèmes difficiles (algorithmes exponentiels)	290
A.2.3	Problèmes difficiles et classes particulières d'ordres	292
B	Les 58 types d'ordres connexes à au plus 5 éléments	295
C	Nombres d'ordres et de types d'ordres	297

D Repères documentaires	299
D.1 Internet et l'incontournable Google	299
D.2 Livres	300
D.3 Journaux	301
D.4 Textes de synthèse et comptes-rendus de conférences	301
D.5 Logiciels	303
Bibliographie	305
Liste des symboles	331
Index	335

Contents

Foreword	XIII
1 Concepts and examples	1
1.1 Ordered sets	1
1.1.1 Reflexive and irreflexive orders	2
1.1.2 Graphs associated to an ordered set	5
1.1.3 Diagram of an ordered set	7
1.1.4 Isomorphism and duality	8
1.2 Examples of uses	10
1.2.1 Mathematics	11
1.2.2 Biology	12
1.2.3 Computer science	13
1.2.4 Social sciences	14
1.2.5 Operations research	16
1.3 Ordered subsets and extensions	17
1.3.1 Ordered subsets	18
1.3.2 Chains, antichains and associated parameters	19
1.3.3 Extensions	21
1.4 Special elements and subsets	24
1.4.1 Meets, joins and irreducible elements	24
1.4.2 Downsets and upsets	27
1.5 Operations between ordered sets	28
1.5.1 Lexicographical, cardinal and ordinal sums, lexicographical product	29
1.5.2 Direct product	32
1.6 Further topics	33
1.7 Exercices	38

2	Particular classes of ordered sets	43
2.1	Ranked, semimodular and bipartite ordered sets	44
2.2	Ordered sets with forbidden substructures	50
2.3	Semilattices and lattices	52
2.4	Linearly ordered sets and tournaments	58
2.5	Further topics	62
2.6	Exercises	67
3	Morphisms of ordered sets	71
3.1	Isotone and antitone maps: exponentiation	73
3.2	Join- and meet-generating subsets	74
3.3	Closure and dual closure operators	80
3.4	Residuated, residual and Galois maps	84
3.5	The Galois connection associated to a binary relation	90
3.5.1	Galois lattice	91
3.5.2	Table of an ordered set	93
3.5.3	Completion of an ordered set	96
3.6	Further topics	99
3.7	Exercises	103
4	Chains and antichains	109
4.1	Dilworth's theorem	110
4.2	Matchings and transversals in a bipartite ordered set	114
4.3	Sperner's property	118
4.4	Direct products of chains	122
4.5	Further topics	127
4.6	Exercises	130
5	Ordered sets and distributive lattices	133
5.1	Distributive lattices	134
5.2	Distributive lattice associated to an ordered set	138
5.3	Representations of a distributive lattice	141
5.4	Dualities between preorders and topologies and between ordered sets and distributive lattices	147
5.5	Duality between orders and spindles of linear orders	154
5.6	Further topics	159
5.7	Exercises	163
6	Codings and dimensions of orders	169
6.1	Boolean codings and Boolean dimension of an ordered set	171
6.2	Dimension of an ordered set	176

6.3	Two-dimensional ordered sets	185
6.4	k -dimension of an ordered set	188
6.5	Further topics	193
6.6	Exercises	198
7	Some uses	201
7.1	Models of preferences	201
7.2	Aggregation of preferences: Arrowian theorems for orders	214
7.3	The roles of orders in cluster analysis	224
7.4	Galois data analysis: closure and implicational systems	238
7.5	Orders in scheduling	251
7.5.1	One-machine scheduling problems	251
7.5.2	Multi-machine scheduling problems	252
7.5.3	Two-machine two-stage scheduling problems	255
7.6	Further topics	259
7.6.1	Models of preferences	259
7.6.2	Aggregation of preferences: Arrowian theorems for orders	261
7.6.3	The roles of orders in cluster analysis	264
7.6.4	Galois data analysis: closure and implicational systems	266
7.6.5	Orders in scheduling	268
7.7	Exercises	269
7.7.1	Models of preferences	269
7.7.2	Aggregation of preferences: Arrowian theorems for orders	272
7.7.3	The roles of orders in cluster analysis	274
7.7.4	Galois data analysis: closure and implicational systems	276
7.7.5	Orders in scheduling	277
A	About algorithmic complexity	279
A.1	Complexity theory	280
A.2	Complexity results	285
A.2.1	Easy problems (polynomial algorithms)	286
A.2.2	Difficult problems (exponential problems)	290
A.2.3	Difficult problems and particular classes of orders	292
B	The 58 non-isomorphic connected ordered sets with at most 5 elements	295
C	Numbers of ordered sets and of non-isomorphic ordered sets	297

D Documentation marks	299
D.1 Internet and the inescapable Google	299
D.2 Books	300
D.3 Journals	301
D.4 Reviews and proceedings	301
D.5 Softwares	303
References	305
List of symbols	331
Index	335

Avant-propos

Les notions d'ordre, de classement, de rangement sont présentes dans de multiples activités ou situations humaines : hiérarchies administratives ou sociales, organigrammes, ordonnancements de tournois sportifs, ordres de présence, de succession ou de préférences, motions d'ordre, ordres du jour, classements scolaires ou audiovisuels, ordre alphabétique, lexicographique, etc., on n'en finirait pas d'énumérer toutes les situations où interviennent des ordres.

Il n'est donc pas étonnant, compte tenu du développement de l'utilisation des mathématiques dans la modélisation de multiples phénomènes, de trouver de nombreux domaines où les mathématiques de l'ordre sont présentes. Toutefois, celles-ci sont relativement récentes. Certes, en mathématiques, la notion d'ordre des grandeurs est connue depuis longtemps et c'est au seizième siècle qu'apparaissent pour la première fois les symboles $>$ et $<$ pour désigner « plus grand que » et « plus petit que »¹. Mais la notion abstraite d'ordre défini comme un type particulier de relation transitive n'a été élaborée qu'entre les années 1880 et 1914 par des mathématiciens et/ou logiciens comme Peirce, Peano, Schröder, Cantor, Dedekind, Russel, Huntington, Scheffer et Hausdorff, dans le contexte de la formalisation de l'« algèbre de la logique » (i.e. de l'algèbre de Boole) et celui de la création de la théorie des ensembles (avec l'étude des « types d'ordre »). Les ordres particuliers, car définissables algébriquement, que sont les treillis, avaient été aussi considérés dès la fin du dix-neuvième siècle par Schröder et Dedekind, puis étaient tombés dans l'oubli avant de renaître dans les années trente du siècle dernier grâce à Birkhoff, Öre et une pléiade d'autres mathématiciens. Ce furent longtemps les principaux ordres étudiés, et la théorie des treillis ainsi que l'« algèbre universelle », qui en est son prolongement naturel, sont toujours extrêmement actives. Ainsi, le résultat sans doute le plus fondamental dans la théorie des ordres finis, à savoir le théorème de Dilworth, n'a été montré qu'en 1950 et d'ailleurs à l'occasion d'un problème posé sur les treillis. Cependant,

¹ Dans une oeuvre, l'« Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas », du mathématicien Thomas Harriot.

depuis les années soixante-dix du siècle dernier, la situation a considérablement évolué. Les travaux sur les structures d'ordres se sont multipliés pour répondre aussi bien à des motivations internes de « mathématiques pures » qu'aux problèmes soulevés à l'occasion de l'usage de ces structures par des « mathématiques appliquées » (dans des domaines comme la recherche opérationnelle, la microéconomie, l'analyse et la fouille des données, la biologie, la robotique, l'informatique théorique, l'algorithmique, etc.)². Aujourd'hui, il faudrait un traité d'au moins 1000 pages pour présenter seulement une synthèse des résultats obtenus.

Ce n'est évidemment pas ce que vise cet ouvrage qui se limite à certains aspects et à trois buts principaux dont nous discutons après leur énoncé :

- Donner les concepts et résultats fondamentaux sur les ensembles ordonnés finis,
- Présenter leurs usages dans des domaines variés,
- Signaler un certain nombre de résultats et de recherches en cours.

Le fait de se limiter aux ensembles ordonnés finis n'est pas simplement justifié par le souci de garder une taille raisonnable à cet ouvrage. Il le situe dans le champ des « mathématiques discrètes », dont l'importance n'est plus à démontrer de nos jours. Dans ce cadre, déjà très large, nous avons privilégié les notions et résultats qui nous paraissent essentiels, notamment du fait de leurs usages dans de très nombreuses modélisations : extensions linéaires d'un ordre, isotopies, fermetures et familles de Moore, applications résiduelles et correspondances de Galois, chaînes et antichaînes avec les théorèmes de Dilworth et de Sperner, dualité entre ensembles ordonnés et treillis distributifs, codages et dimensions d'un ordre, ordres d'intervalles et ordres quasi-forts, résultats Arrowiens sur les ordres, etc. En effet, dans tous les chapitres de ce livre, le lecteur trouvera des exemples d'utilisation des structures d'ordre dans des domaines variés. Le dernier et plus long chapitre développe quelques-uns de ces usages dans des contextes souvent interdisciplinaires, comme celui de la modélisation des préférences.

Enfin pour pallier le fait de ne présenter que les résultats les plus fondamentaux, chaque chapitre comprend une section intitulée « Compléments et références », où l'on signale de nombreux thèmes qui n'ont pu être évoqués dans le corps du chapitre et où l'on donne éventuellement quelques éléments d'ordre historique, jamais inutiles pour la compréhension d'un sujet.

Ajoutons une motivation plus générale pour l'écriture de cet ouvrage. On a mentionné l'important développement de la théorie des treillis sur laquelle il existe actuellement plusieurs dizaines de volumes. Au contraire, les livres portant sur les ensembles ordonnés quelconques sont très rares, et ne portent le plus souvent que sur des aspects particuliers (voir l'annexe D documentaire). Une conséquence de cette situation (ainsi, du moins dans certains pays, que du peu de place consacré à l'enseignement des structures d'ordres dans les

² Un autre signe de ce développement est la création en 1985 du journal *Order* par Ivan Rival

cursus universitaires) est que des résultats sont trop souvent inutilisés ou redécouverts, ce qui va à l'encontre du bon usage de ces mathématiques.

Nous continuons cet avant-propos par une description du contenu des chapitres et annexes.

Le but du chapitre 1 est d'abord de donner et d'illustrer les notions fondamentales utilisées pour décrire, étudier, raisonner sur les ensembles ordonnés, notions qui seront utilisées et/ou développées dans les autres chapitres. En conséquence, ce chapitre contient peu d'énoncés de résultats et ne comporte aucune démonstration. On y trouvera aussi un florilège d'usages d'ensembles ordonnés dans des domaines allant des mathématiques à la recherche opérationnelle en passant par la biologie, l'informatique ou les sciences sociales.

Si les ordres sont des relations binaires vérifiant des propriétés fortes, il n'en reste pas moins qu'il existe assez peu de résultats portant sur des ordres quelconques. En fait, comme dans d'autres théories mathématiques, on s'intéresse souvent à des classes d'ordres définies par des propriétés particulières. Le chapitre 2 décrit les classes d'ensembles ordonnés les plus importantes : ensembles ordonnés rangés, semimodulaires et bipartis, ensembles ordonnés définis par des configurations exclues, demi-treillis et treillis, ensembles totalement ordonnés.

Le chapitre 3 est consacré à l'importante question des morphismes entre ensembles ordonnés, c'est-à-dire des applications entre deux ensembles ordonnés conservant ou inversant leur ordre. Parmi ces morphismes, on trouve les codages, les fermetures et les ouvertures, les applications résiduées, résiduelles ou galoisiennes. Ces dernières sont les composantes des correspondances de Galois, outil fondamental permettant d'établir la dualité entre deux ensembles ordonnés et en particulier de définir un treillis de Galois dont l'usage va de la recherche d'« échelles de Guttman » (en analyse des questionnaires) à la génération de « concepts » (en analyse de données ou en intelligence artificielle). C'est aussi dans ce chapitre que sont approfondies les importantes notions d'éléments irréductibles d'un ensemble ordonné et de relations flèches entre ces éléments.

Le théorème de Dilworth (1950) établit l'égalité pour un ensemble ordonné quelconque du nombre maximum d'éléments incomparables de cet ensemble ordonné et du nombre minimum de chaînes en lesquelles on peut partitionner l'ensemble de ses éléments. C'est un résultat central car, d'une part, il porte sur un ensemble ordonné arbitraire et permet d'y résoudre un problème rencontré dans des situations variées (par exemple, en recherche opérationnelle, informatique ou géométrie du plan) et, d'autre part, il est relié (en fait, souvent équivalent) à beaucoup d'autres résultats célèbres de la combinatoire (comme les théorèmes de König–Hall, de Menger et de Ford et Fulkerson). Le chapitre 4 est consacré à ce théorème de Dilworth, ainsi qu'à la descendance d'un autre résultat fameux dû à Sperner, résultat donnant le nombre maximum de parties incomparables (pour l'inclusion) d'un ensemble. Les ordres de Sperner étudiés dans ce chapitre sont ceux pour lesquels le nombre maximum

d'éléments incomparables de l'ordre s'obtient à partir de la considération de ses niveaux.

Le théorème de représentation des treillis distributifs dû à Birkhoff fournit une représentation ensembliste d'un treillis distributif au moyen de ses éléments irréductibles. On en déduit une dualité fondamentale entre la classe des treillis distributifs et celle des ensembles ordonnés, qui implique que tout résultat sur un treillis distributif peut se traduire en un résultat sur un ensemble ordonné, et inversement. Cette dualité est étudiée au chapitre 5, où l'on montre qu'elle est la conséquence d'une correspondance de Galois entre relations binaires et familles de parties. On y présente aussi une autre dualité entre ordres et fuseaux d'ordres totaux, notion introduite à l'occasion de problèmes d'analyse des préférences.

Un résultat déjà ancien de Szpilrajn (1930) permet de montrer que tout ordre peut être étendu en un ordre total (dit extension linéaire de l'ordre) et qu'il est l'intersection de toutes ses extensions linéaires. La dimension d'un ordre est alors le nombre minimum de ses extensions linéaires dont il est l'intersection. Ce paramètre de dimension a été intensivement étudié pour des raisons théoriques, mais aussi parce qu'il a servi dans certaines modélisations. C'est ainsi qu'on a pu l'utiliser comme modèle explicatif d'une relation de préférence, l'ordre partiel de préférence d'un agent économique (par exemple) sur un ensemble de biens étant interprété comme résultant de la prise en compte de plusieurs critères pour chacun desquels sa préférence est un ordre total. De plus, rechercher la dimension d'un ordre revient aussi à rechercher le nombre minimum d'ordres totaux dans le produit desquels il peut être codé (c'est-à-dire dans lequel on peut en trouver une image isomorphe). Plus généralement, on peut chercher à coder un ordre dans un produit de chaînes de longueur donnée. Si ces chaînes sont de longueur deux, ceci revient à coder l'ordre par des parties d'un ensemble (i.e. par des suites de 0 et de 1), et on parle alors de codage et de dimension booléens, ces notions ayant été introduites et étant très étudiées en informatique. Le chapitre 6 donne les résultats fondamentaux sur ces codages et dimensions.

Les chapitres précédents contiennent tous des exemples d'utilisations d'ensembles ordonnés dans des contextes variés. Notre dernier chapitre développe certains de ces usages. Les deux premières sections du chapitre 7 portent sur le thème des préférences dont on sait qu'il concerne, entre autres, les sciences cognitives, la microéconomie, la recherche opérationnelle, l'intelligence artificielle ou encore les bases de données (pour définir des langages de requêtes performants). On traite d'abord la modélisation d'une relation de préférence, par exemple, celle d'un agent économique, lorsqu'on ne fait plus l'hypothèse forte que la relation d'indifférence est transitive ; les modèles adéquats sont alors ceux des ordres d'intervalles et des ordres quasi-forts. On considère ensuite le problème d'agréger plusieurs relations de préférence en une relation de préférence globale qui soit un ordre et on établit quelques théorèmes « Arrowiens » montrant la difficulté d'obtenir une solution satisfaisante. On continue par la présentation des modèles ordonnés utilisés en

taxonomie mathématique : hiérarchies, hiérarchies indicées, demi-treillis à médianes, treillis des partitions. La section suivante est consacrée à l'utilisation des treillis de Galois en analyse de données relationnelles. On y montre comment, à partir d'un tel treillis ou de la fermeture qui lui est associée, on peut déduire un système d'implications permettant de répondre à des questions du type : les sujets ayant telles caractéristiques ont-ils – ou n'ont-ils pas – telles autres caractéristiques ? La cinquième section expose la problématique de l'ordonnancement et quelques outils ordinaux utilisés pour la traiter.

Suite à sa section « Compléments et références », chacun des sept chapitres du livre contient pour dernière section une liste d'exercices, qui illustrent les notions présentées dans le chapitre et dont il est indispensable de chercher la solution si l'on veut arriver à une pratique réelle de la mathématique des ensembles ordonnés. Pour la plupart de ces exercices, les solutions seront trouvées facilement à partir des résultats donnés dans le chapitre. Pour les autres, des indications ou des références seront donnés.

L'utilisation en pratique des notions et résultats présentés dans ce livre nécessite de pouvoir répondre à des questions posées sur un ensemble ordonné modélisant telle ou telle situation, ce qui passera en général par le recours à un programme informatique implémentant un algorithme de résolution. Notre première et plus longue annexe donne quelques notions de base sur la théorie de la complexité algorithmique, et de nombreux résultats de complexité pour l'algorithmique des ordres. Les deux annexes suivantes portent sur les petits ordres et le dénombrement des ordres. La dernière annexe fournit des repères documentaires variés, tandis que la liste de références permettra au lecteur de pouvoir accéder aux résultats mentionnés dans les compléments des chapitres. Comme il se doit, une liste de notations et symboles et un index terminent l'ouvrage.

Les définitions, théorèmes, propositions, corollaires, lemmes, exemples et remarques de chaque chapitre sont numérotés $n.p$ où n est le numéro du chapitre et p le numéro d'apparition dans le chapitre. Par exemple, la définition 4.14 est le 14ème item numéroté du chapitre 4.

Les figures (respectivement, les tableaux) de chaque chapitre sont numérotées FIG. $n.p$ (respectivement, TABLEAU $n.p$) où n est le numéro du chapitre et p le numéro d'apparition dans le chapitre. Par exemple, FIG. 3.6 est la 6ème figure du chapitre 3 et le TABLEAU 7.3 est le 3ème tableau du chapitre 7.

Concepts et exemples

Ce premier chapitre présente les notions de base de la théorie des ensembles ordonnés finis et donne une idée de la variété des domaines où on les rencontre. Il n'est pas destiné à une lecture suivie, mais à servir de texte de référence pour la définition et l'illustration de notions utilisées dans les autres chapitres. En particulier, il ne contient pas les démonstrations des quelques résultats qui y sont énoncés (on trouvera ces démonstrations dans d'autres chapitres et/ou dans des exercices). Dans la première section nous donnons les concepts et le vocabulaire permettant de définir, représenter et décrire un ensemble ordonné, et nous introduisons plusieurs graphes – de comparabilité, d'incomparabilité, de couverture et de voisinage – qui lui sont naturellement associés. La seconde section présente des ensembles ordonnés apparus dans divers champs disciplinaires, des mathématiques elles-mêmes aux sciences sociales en passant par la biologie et l'informatique. Nous définissons les notions de sous-ensemble ordonné, de chaîne, d'antichaîne et d'extension d'un ensemble ordonné dans la section 1.3 et les notions de supremum, d'infimum, d'éléments irréductibles et de parties commençantes ou finissantes dans la section 1.4. La section 1.5 décrit des procédés fondamentaux de construction (substitution, produit direct, etc.) qui, à deux ou plusieurs ensembles ordonnés, en associent un nouveau.

1.1 Ensembles ordonnés

Au tout début était l'ordre... ou l'ordre strict ! Cette section commence donc par la définition de ces deux notions d'ordre et du vocabulaire de base qui leur est associé. On présente ensuite différents graphes (de comparabilité, d'incomparabilité, de couverture, de voisinage) associés à un ensemble ordonné. La section 1.1.1 suivante est consacrée à une représentation extrêmement utile d'un ensemble ordonné, appelée son diagramme. Enfin, on termine cette section par la notion (traditionnelle en mathématiques) d'isomorphisme de structures d'ordres à laquelle s'ajoute dans ce cas la notion tout aussi importante d'anti-isomorphisme (ou de dualité).

1.1.1 Ordres et ordres stricts

Qu'est-ce qu'un ordre? Cette question posée par Russel en 1903 a reçu essentiellement deux réponses qui portent (le plus souvent) les noms d'*ordre* et d'*ordre strict* (cf. les compléments de la section 1.6 pour l'histoire de ces notions). D'autre part, les notations et termes utilisés pour désigner les mêmes notions ordinales ont été et sont toujours très variées. Toutefois l'influence de Bourbaki [73] (1956) a permis qu'en français existe un relatif accord sur la terminologie de certaines notions de base (cf. à ce sujet la fin de la section 2.6). Dans cet ouvrage nous ne nous priverons pas d'utiliser plusieurs termes pour désigner la même notion ; l'expérience montre en effet que se contraindre à utiliser un système unique de notations dans des situations extrêmement diverses a plus d'inconvénients que d'avantages. Toutefois et pour pallier les incontestables inconvénients de notations multiples, nous détaillons dans cette section de façon précise – et donc quelque peu fastidieuse – les deux notions fondamentales d'ordre avec les différents systèmes et conventions de notations que nous utiliserons.

Une *relation binaire* sur un ensemble X est une partie R de l'ensemble X^2 des couples de X . La notation $(x, y) \in R$ (ou xRy) signifie que le couple (x, y) appartient à la relation R . On écrit $(x, y) \notin R$ (ou $xR^c y$) dans le cas contraire.

Définition 1.1 Une relation binaire O sur un ensemble X est un ordre sur X si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. *Réflexivité* : pour tout $x \in X$, xOx ,
2. *Antisymétrie* : pour tous $x, y \in X$, $(xOy$ et $yOx)$ impliquent $x = y$,
3. *Transitivité* : pour tous $x, y, z \in X$, $(xOy$ et $yOz)$ impliquent xOz .

L'ordre O est dit *total* s'il est tel que, pour tous $x, y \in X$, $xO^c y$ implique yOx .

Un ensemble ordonné est un couple $P = (X, O)$ où X est un ensemble et O un ordre sur X (dans certains cas et pour éviter toute ambiguïté, il pourra être utile de noter O_P l'ordre de l'ensemble ordonné P). Si O est un ordre total, $P = (X, O)$ est alors appelé un ensemble totalement ordonné (ou ensemble linéairement ordonné ou chaîne). Les symboles C_n et \underline{n} désigneront une chaîne à n éléments.

Exemple 1.2 Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $P = (X, O)$ l'ensemble ordonné où O est l'ordre suivant sur X :

$$O = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$$

On peut représenter l'ensemble ordonné P par un « réseau » dans le plan dont les points correspondent aux éléments de X et les arcs fléchés aux couples de O , les boucles représentant les couples de la forme (x, x) (cf. la figure 1.1). On peut aussi le représenter au moyen de tables (cf. le tableau 1.1 ci-dessous). Cependant nous verrons à la section 1.1.3 une manière beaucoup plus économique de représenter un ensemble ordonné : le *diagramme (de Hasse)*.

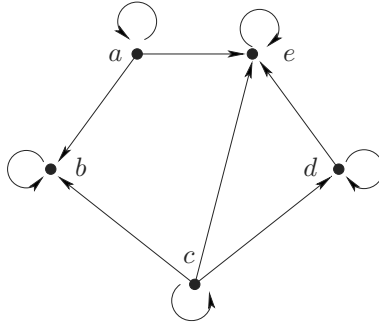


FIG. 1.1. Un ensemble ordonné P représenté par un réseau dans le plan.

TABLEAU 1.1. Deux sortes de tables pour l'ensemble ordonné P de l'exemple 1.2.

	a	b	c	d	e
a	×	×			×
b		×			
c		×	×	×	×
d				×	×
e					×

	a	b	c	d	e
a	1	1	0	0	1
b	0	1	0	0	0
c	0	1	1	1	1
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	1

Définition 1.3 Soit O une relation sur un ensemble X .

- O est un ordre strict si elle est irreflexive (pour tout $x \in X$, $xO^c x$) et transitive. Un ensemble strictement ordonné est un couple $P = (X, O)$ où X est un ensemble et O un ordre strict sur X .
- L'ordre strict O est dit strictement total s'il est tel que $x \neq y$ et $xO^c y$ impliquent yOx . On dit alors que P est un ensemble strictement totalement ordonné. Si $|X| = n$, P ou l'ordre strict correspondant pourra être noté \underline{n}_s .

N.B. Un ordre strict O sur X est également une relation *asymétrique*, c'est-à-dire telle que $yO^c x$ pour tous $x, y \in X$ vérifiant xOy (le démontrer).

Puisqu'il existe une bijection évidente entre l'ensemble des ordres et l'ensemble des ordres stricts définis sur X (laquelle?), on a deux manières équivalentes de formaliser la notion d'ordre (cf. la section 1.6 des compléments et références). Il s'ensuit qu'à toute classe particulière d'ordres correspond une classe particulière d'ordres stricts (par exemple les ordres strictement totaux correspondent aux ordres totaux). Afin de ne pas alourdir le vocabulaire, il sera parfois préférable d'utiliser les mêmes termes pour désigner les ordres de ces deux classes. Ainsi, au chapitre 7 où l'on considérera différents modèles ordinaux de la préférence stricte, le qualificatif « strict » sera systématiquement omis.

Nous avons utilisé la notation O pour désigner un ordre mais, dans un grand nombre de situations, cette notation est avantageusement remplacée par le symbole « \leq », qui se lit « inférieur ou égal ». On utilise ainsi pour un ordre quelconque le symbole traditionnel de l'ordre entre les nombres. Un ensemble ordonné est alors noté $P = (X, \leq_P)$ ou, plus simplement, $P = (X, \leq)$.

De la même manière, un ordre strict sera fréquemment symbolisé par « $<$ » qui se lit « inférieur » ou « strictement inférieur », et les notations $P = (X, <_P)$ ou, plus simplement, $P = (X, <)$ seront utilisées pour désigner un ensemble strictement ordonné.

Pour un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ (ou $P = (X, O)$), l'expression « x appartient à P » signifiera $x \in X$, et on notera indifféremment $x \in X$ ou $x \in P$. Le nombre d'éléments de X sera indifféremment noté $|P|$, $|X|$, ou simplement n selon le contexte. Enfin le fait que (x, y) appartient à l'ordre de P s'écrit, suivant les notations utilisées pour P , $x \leq_P y$, $x \leq y$, $xO_P y$ ou simplement xOy . Le nombre de ces couples se note $|O|$, $m(P)$ ou simplement m .

Soient x, y deux éléments d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$.

– Si $x \leq y$, on dit que x est *inférieur ou égal* à y , ou que y est *supérieur ou égal* à x . On dit aussi que x est un *minorant* de y et que y est un *majorant* de x . L'ensemble $\{t \in P : t \leq x\}$ des minorants de x se note $[x]$ ou Px . L'ensemble $\{t \in P : x \leq t\}$ des majorants de x se note $[x)$ ou xP .

– Si $x \leq y$ n'est pas vérifié, on dit que x n'est pas *inférieur ou égal* à y , ce qu'on note $x \not\leq y$. La relation ainsi définie est aussi notée \leq^c (puisque c'est la relation complémentaire de la relation \leq).

– Si $x \leq y$ et $x \neq y$, on dit que x est *inférieur* à y , ou que y est *supérieur* à x , ce qu'on note $x < y$. On dit aussi que x est un *minorant strict* de y et que y est un *majorant strict* de x . La relation $<$ est la relation d'ordre strict associée à la relation \leq . L'ensemble des minorants (respectivement, majorants) stricts de x se note $(x[$ (respectivement, $]x)$.

– Si $x \leq y$ ou $y \leq x$, on dit que x et y sont *comparables*. Dans le cas contraire, i.e. si $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$, on dit que x et y sont *incomparables*, ce que l'on note $x||y$.

Dans l'exemple 1.2, a et b sont comparables alors que a et c sont incomparables.

On remarquera que $y \not\leq x$ est équivalent à $(x < y$ ou $x||y)$. Il résulte des définitions précédentes qu'une chaîne est un ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques sont toujours comparables. A l'inverse, on définit la notion d'antichaîne comme suit :

Définition 1.4 *On appelle antichaîne tout ensemble ordonné dans lequel deux éléments (distincts) sont toujours incomparables. Le symbole A_n désignera une antichaîne à n éléments.*

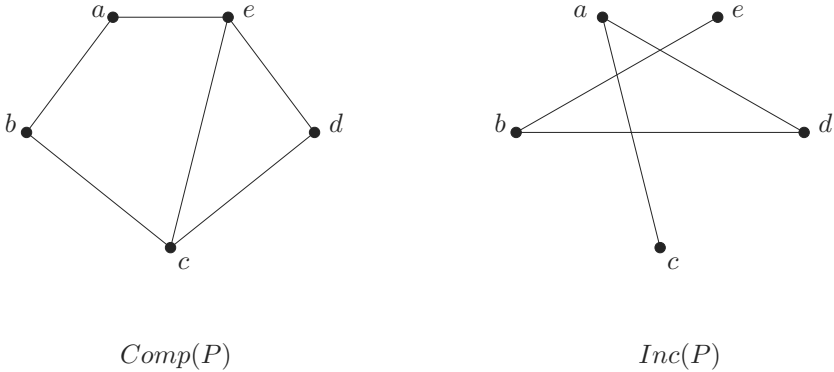


FIG. 1.2. Les graphes de comparabilité et d'incomparabilité de l'ensemble ordonné de l'exemple 1.2.

1.1.2 Graphes associés à un ensemble ordonné

A un ensemble ordonné sont naturellement associés différents graphes¹, tels notamment les graphes de comparabilité, d'incomparabilité, de couverture et de voisinage. Chacun de ces graphes correspond à des aspects particuliers de l'ensemble ordonné et intervient dans l'étude de celui-ci. Nous définissons et illustrons ci-dessous ces graphes.

Définition 1.5 Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné. On appelle graphe de comparabilité de P le graphe non orienté $Comp(P) = (X, Comp_P)$ dont les sommets sont les éléments de P , et les arêtes les paires $\{x, y\}$ d'éléments comparables dans P . Si $\{x, y\}$ est une arête de ce graphe, on note $xy \in Comp_P$ ou $xComp_Py$ (ou, plus simplement, $xy \in Comp$ ou $xCompy$), et $Comp_P$ est appelée la relation de comparabilité de P .

Le graphe $Inc(P) = (X, Inc_P)$ d'incomparabilité de P est défini de manière semblable, ses arêtes étant les paires $\{x, y\}$ d'éléments incomparables dans P . On note alors $xy \in Inc_P$ ou $xInc_Py$ (ou, plus simplement, $xy \in Inc$ ou $xIncy$) et Inc_P est appelée la relation d'incomparabilité de P .

La figure 1.2 représente les graphes de comparabilité et d'incomparabilité de l'ensemble ordonné de l'exemple 1.2.

Les graphes $Comp(P)$ et $Inc(P)$ étant évidemment complémentaires (au sens où la paire $\{x, y\}$ est une arête de l'un si et seulement si elle n'est pas une arête de l'autre), l'étude de l'un se ramène à celle de l'autre.

¹ Un *graphe non orienté* est un couple $G = (X, E)$ où X est un ensemble et E un ensemble de paires d'éléments distincts de X , appelées les *arêtes* de G ; un *graphe orienté* est un couple $G = (X, A)$ où X est un ensemble et A un ensemble de couples de X , appelés les *arcs* de G .

Nous définissons à présent la relation de couverture associée à un ensemble ordonné. Cette relation qui, en général, n'est pas un ordre, est en revanche la manière la plus économique (en nombre de couples) de se donner un ordre. Elle sera constamment utilisée tout au long de l'ouvrage.

Définition 1.6 La relation de couverture d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$, notée \prec_P ou simplement \prec , est définie par $x \prec y$ si $(x < y$ et $x \leq z < y)$ impliquent $x = z$. On dit alors que x est couvert par y ou que y couvre x . On pose $xP^+ = \{t \in P : x \prec t\}$ et $P^-x = \{t \in P : t \prec x\}$.

Le graphe $Couv(P) = (X, \prec)$ associé à la relation de couverture s'appelle le graphe de couverture de P .

Autrement dit, x est couvert par y dans P si $x < y$ et il n'existe pas dans P d'élément z supérieur à x et inférieur à y .

L'ensemble ordonné P de l'exemple 1.2 (page 2) a cinq couples de couverture : $a \prec b, a \prec e, c \prec b, c \prec d$ et $d \prec e$.

La relation de couverture d'une chaîne sur un ensemble à n éléments s'écrit $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_n$, ce que l'on notera plus simplement $x_1 x_2 \dots x_n$. Cette écriture particulièrement économique des ordres totaux sera souvent utilisée. Inversement, toute suite de n éléments distincts (ou, de façon équivalente, toute permutation de ces éléments) peut être considérée comme définissant un ordre total sur ces éléments, à savoir l'ordre d'occurrence dans la suite. Il s'ensuit que le nombre d'ordres totaux sur un ensemble à n éléments est égal à $n!$.

À la relation de couverture de P est également associé un graphe non orienté, son *graphe de voisinage*, noté $Vois(P) = (X, V)$, où la paire $\{x, y\} \in V$ si $(x \prec y$ ou $y \prec x)$. Dans ce cas, on note $xy \in V$ ou xVy . Pour l'ensemble ordonné de l'exemple 1.2, ce graphe est donné par la figure 1.3.

Certaines notions sur les ensembles ordonnés peuvent être définies par l'intermédiaire du graphe de voisinage. Il en est ainsi de la notion de connexité :

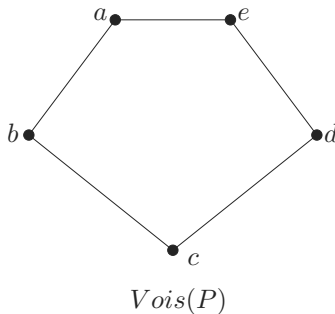


FIG. 1.3. Le graphe de voisinage de l'ensemble ordonné P de l'exemple 1.2.

Définition 1.7 *Un ensemble ordonné P est connexe si son graphe de voisinage est un graphe connexe i.e. si, pour toute paire de sommets distincts $\{x, y\}$ de P , il existe une suite de sommets $x = x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p = y$ vérifiant $x_i V x_{i+1}$, pour tout $i = 0, \dots, p - 1$.*

Un ensemble ordonné non connexe est partitionné en sous-ensembles ordonnés (définition 1.26) connexes maximaux appelés ses *composantes connexes*. Un problème sur un ensemble ordonné non connexe se ramenant le plus souvent à des problèmes sur ses composantes connexes, il suffit en général de considérer des ensembles ordonnés connexes pour traiter ce problème.

1.1.3 Diagramme d'un ensemble ordonné

On a vu au début de ce chapitre qu'on pouvait se donner un ensemble ordonné par un réseau, qui en est une représentation « géométrique » (cf. la figure 1.1). Toutefois, dès que l'on considère un ensemble ordonné un peu grand, ce réseau risque d'être passablement inextricable. Peut-on faire mieux ? La notion de diagramme d'un ensemble ordonné répond positivement à cette question et en permet une représentation beaucoup plus économique. On remarque d'abord que se donner les couples de couverture de $P = (X, \leq)$ permet de « retrouver » tous les couples de l'ordre \leq : on a $x < y$ si et seulement si il existe une suite $x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p$ d'éléments de X tels que $x = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_p = y$. On peut donc représenter un ensemble ordonné à l'aide de ses seuls couples de couverture, ce que l'on fait au moyen d'un graphique appelé traditionnellement diagramme (de Hasse).

Définition 1.8 *Le diagramme (ou diagramme de Hasse) d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est une représentation de son graphe de couverture dans laquelle les éléments x de P sont représentés par des points $p(x)$ du plan, de telle sorte que les deux règles suivantes soient respectées :*

1. *Si $x < y$, (l'horizontale passant par) $p(x)$ est au dessous de (l'horizontale passant par) $p(y)$,*
2. *$p(x)$ et $p(y)$ sont joints par un segment de droite si et seulement si $x < y$.*

Evidemment, il existe une infinité de diagrammes possibles du même ensemble ordonné (cependant nous parlerons généralement, comme dans la définition ci-dessus, « du » diagramme d'un ensemble ordonné P au lieu de préciser « l'un des diagrammes » de P). Le choix de la position des points permet d'obtenir certains diagrammes d'un ensemble ordonné plus « lisibles » que d'autres. La figure 1.4 représente deux diagrammes possibles pour l'ensemble ordonné de l'exemple 1.2, et la figure 1.5 donne des diagrammes de la chaîne C_4 , de l'antichaîne A_4 et du « cube » B_3 (la lettre « B » signifiant « booléen », cf. l'exemple 1.12 donné plus loin).

Dans la suite, les figures représentant un ensemble ordonné seront toujours celles d'un diagramme d'icelui. On remarquera que, puisque le diagramme

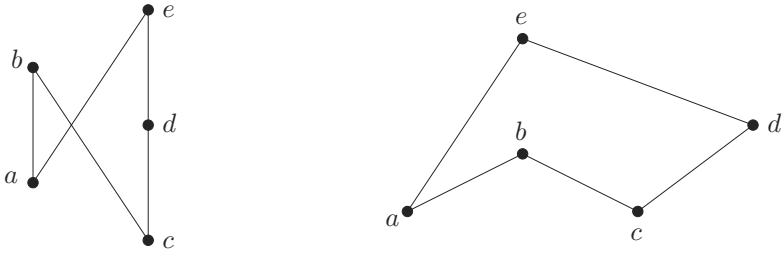


FIG. 1.4. Deux diagrammes de l'ensemble ordonné de l'exemple 1.2.

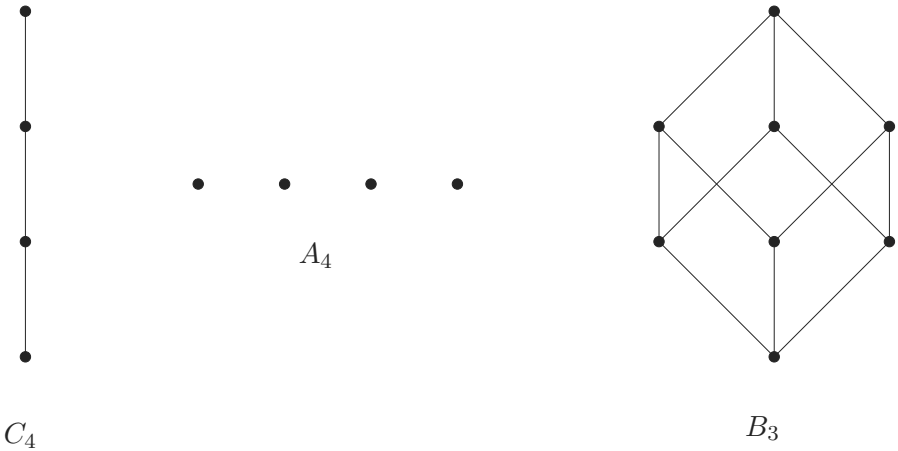


FIG. 1.5. Les diagrammes de la chaîne C_4 , de l'antichaine A_4 et du cube B_3 .

d'un ensemble ordonné ne représente pas les couples de réflexivité, il peut tout aussi bien représenter l'ensemble strictement ordonné correspondant.

1.1.4 Isomorphisme et dualité

En mathématiques la notion d'*isomorphisme* entre deux structures est fondamentale. Elle permet de montrer que deux ensembles d'objets de nature totalement différente peuvent vérifier les mêmes propriétés. Dans le cas de structures d'ordre, s'y ajoute la notion d'*anti-isomorphisme* (ou de *dualité*) tout aussi importante.

Définition 1.9 Deux ensembles ordonnés $P = (X, \leq_P)$ et $Q = (Y, \leq_Q)$ sont dits isomorphes (ou de même type) s'il existe une bijection f de X sur Y vérifiant :

$$x \leq_P y \iff f(x) \leq_Q f(y)$$

La bijection f est appelée un isomorphisme (d'ordre) entre P et Q et on écrit $P \cong Q$ (dans le cas où $P = Q$, on dit que f est un automorphisme de P).

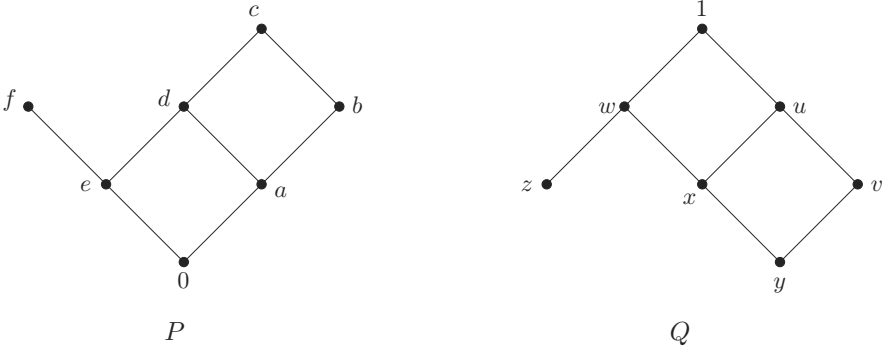


FIG. 1.6. Deux ensembles ordonnés P et Q duaux.

En d’autres termes, deux ensembles ordonnés sont isomorphes s’ils sont identiques à la dénomination près de leurs éléments. Ainsi, on obtient un ensemble ordonné isomorphe à celui de l’exemple 1.2 en remplaçant a, b, c, d, e par $1, 2, 3, 4$ et 5 .

La relation d’isomorphisme entre ensembles ordonnés est une relation d’équivalence dont les classes, conformément à la définition 1.9, s’appellent les types d’ensembles ordonnés. Deux ensembles ordonnés isomorphes sont dits de même type. Pour illustrer la distinction entre ordre et type d’ordre, on peut noter qu’il y a 130 023 ordres distincts sur un ensemble à six éléments contre seulement 318 types d’ordres différents sur un tel ensemble² (pour des dénombrements simples, voir l’exercice 1.1). L’annexe B permet d’obtenir les diagrammes des 58 types d’ordres connexes à au plus cinq éléments.

Définition 1.10 *Deux ensembles ordonnés $P = (X, \leq_P)$ et $Q = (Y, \leq_Q)$ sont dits anti-isomorphes (ou duaux) s’il existe une bijection f de X sur Y vérifiant, pour tous $x, y \in X$:*

$$x \leq_P y \iff f(x) \geq_Q f(y)$$

La bijection f est appelée un anti-isomorphisme (d’ordre) entre P et Q et on écrit $P \equiv_d Q$.

Un cas particulièrement intéressant d’anti-isomorphisme est obtenu en considérant l’ensemble ordonné $P^d = (X, \leq^d)$ dual d’un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ et défini par :

$$x \leq^d y \iff y \leq x$$

² D’une manière générale, dénombrer tous les ordres (respectivement, tous les types d’ordres) sur un ensemble à n éléments est très difficile et la réponse n’est actuellement connue que pour n allant jusqu’à 18 (respectivement, jusqu’à 16). Ces nombres croissent très vite (cf. l’annexe C).

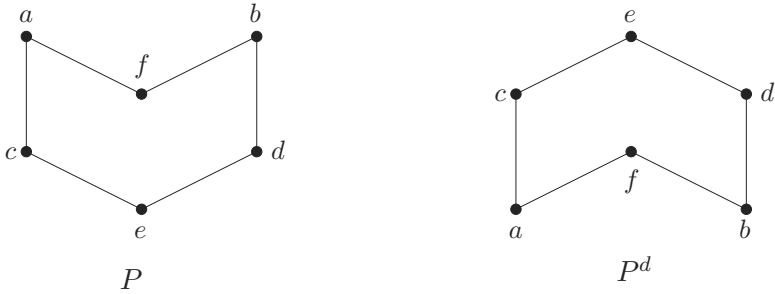


FIG. 1.7. Un ensemble ordonné P et son ensemble ordonné dual P^d .

(Le lecteur vérifiera que \leq^d est bien un ordre et que P et P^d sont anti-isomorphes). L'ordre \leq^d est appelé l'ordre *dual* (parfois l'ordre *opposé*, *réci-proque*, *inverse*) de l'ordre \leq , et on le note aussi \geq . Un diagramme de P^d s'obtient en « renversant » un diagramme de P (figure 1.7).

On remarquera que, dans le cas d'un ensemble totalement ordonné L qui s'écrit $L = x_1x_2\dots x_n$, l'ensemble totalement ordonné L^d s'écrit $L^d = x_n\dots x_2x_1$.

De l'existence de l'ordre dual pour tout ordre découle ce qu'on appelle le *principe de dualité* pour les ensembles ordonnés, qui s'énonce comme suit :

Si une propriété faisant intervenir les symboles \leq et \geq est vraie dans tous les ensembles ordonnés, la propriété duale obtenue en échangeant ces symboles l'est également.

Par exemple, dans tout ensemble ordonné, tout élément est inférieur ou égal à au moins un élément maximal (voir page 24). Dualement, dans tout ensemble ordonné, tout élément est supérieur ou égal à au moins un élément minimal (voir même page).

Plus généralement, la *classe duale* \mathcal{E}^d d'une classe \mathcal{E} d'ensembles ordonnés est formée de tous les ensembles ordonnés P^d avec $P \in \mathcal{E}$. Si une propriété est vraie dans tout ensemble ordonné de \mathcal{E} , sa propriété duale l'est dans tout ensemble ordonné de \mathcal{E}^d .

Une classe \mathcal{E} d'ensembles ordonnés est dite *ipsoduale* (ou *auto-duale*) si tout ensemble ordonné de \mathcal{E} a son dual dans \mathcal{E} , i.e. si $\mathcal{E} = \mathcal{E}^d$ (la classe des ensembles totalement ordonnés d'une part, et celle de tous les ensembles ordonnés d'autre part, sont deux exemples de classes ipsoduales). Pour une telle classe, le principe de dualité s'énonce alors :

Si une propriété est vraie pour tout ensemble ordonné d'une classe ipsoduale d'ensembles ordonnés, la propriété duale l'est également.

1.2 Exemples d'usages

Les activités de classement et de hiérarchisation étant consubstantielles à l'activité cognitive, il n'est pas surprenant que le modèle mathématique

de l'ordre soit présent dans de très nombreux domaines, des mathématiques elles-mêmes aux sciences sociales, en passant par exemple par la biologie et l'informatique. Nous présentons dans cette section un échantillon d'ordres apparaissant dans ces domaines. Le chapitre 7 développera certains de ces usages.

1.2.1 Mathématiques

Exemple 1.11 La notation \leq utilisée pour un ordre quelconque est la notation classique de l'ordre sur l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels.

Un autre ordre sur \mathbb{N}^* joue un rôle important en théorie des nombres, celui de *divisibilité* entre entiers, noté $|$ et défini par : $a|b$ si a divise b (le lecteur vérifiera que cette relation est bien un ordre). Tout ensemble d'entiers est un ensemble ordonné pour cet ordre de divisibilité (voir l'exercice 1.9 de la section 1.7).

Exemple 1.12 On note $P(E)$ l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E . Pour désigner l'ensemble $(P(E), \subseteq)$ des parties de E ordonnées par l'inclusion, la notation $\underline{2}^E$ sera souvent utilisée³. Si $|E| = n$, ce même ensemble ordonné pourra aussi être noté B_n (« B » pour *booléen*, voir la figure 1.5 et la définition 2.18 du chapitre 2) ou $\underline{2}^n$ (voir la note de bas de page). Il n'est totalement ordonné que pour $n = 1$.

Lorsque E est égal à l'ensemble X^2 de tous les couples d'un ensemble X , on obtient l'ensemble ordonné $(P(X^2), \subseteq)$, donc également noté $\underline{2}^{X^2}$, de toutes les relations binaires sur X . Pour $R, S \in P(X^2)$ avec $R \subseteq S$, on dit aussi que la relation R *implique* la relation S (ou que S est *compatible* avec R).

Lorsque E est égal à l'ensemble $P(X)$ de toutes les parties de X , on obtient l'ensemble ordonné $(P(P(X)), \subseteq)$, également noté $(P^2(X), \subseteq)$ ou $\underline{2}^{P(X)}$. Ses éléments, qui sont donc les sous-ensembles de $P(X)$, seront appelés les *familles de parties de X* (une famille est donc dans cet ouvrage un ensemble). Une correspondance fondamentale entre les deux ensembles ordonnés $\underline{2}^{X^2}$ et $\underline{2}^{P(X)}$ sera étudiée au chapitre 5.

Exemple 1.13 On note \mathcal{O}_E (ou \mathcal{O}_n) l'ensemble de tous les ordres définis sur un ensemble E à n éléments. Pour deux ordres \leq et \leq' de \mathcal{O}_E , on dit que \leq *implique* \leq' si, pour tous $x, y \in E$, $x \leq y$ implique $x \leq' y$. Cette relation – qui n'est autre que la relation d'inclusion entre ordres – est un ordre. On notera aussi \mathcal{O}_E l'ensemble ainsi ordonné de tous les ordres sur E (il sera considéré au chapitre 5).

³ Cette notation est classique : il est bien connu que l'ensemble ordonné $(P(E), \subseteq)$ est isomorphe à l'ensemble ordonné des applications isotones de E dans $\underline{2}$, ensemble ordonné noté $\underline{2}^E$ (cf. la définition 3.4 et son commentaire).

1.2.2 Biologie

Exemple 1.14 Une *partition* $\mathbf{P} = \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$ d'un ensemble E est un ensemble de parties non vides de E , appelées *classes*, deux à deux disjointes et dont l'union est E . Sur l'ensemble \mathcal{P}_E des partitions de E , la relation définie par $\mathbf{P} \leq \mathbf{P}'$ si toute classe de \mathbf{P} est incluse dans une classe de \mathbf{P}' est un ordre (total pour $|E| < 3$) et l'on dit que « \mathbf{P} est plus fine que \mathbf{P}' ». Cet ordre est appelé *ordre de finesse* entre partitions. La recherche d'un partitionnement d'un ensemble en classes apparaît dans de multiples domaines, notamment dans des problèmes de discrimination. Par exemple, la reconnaissance de plusieurs souches microbiennes liées à une maladie infectieuse (aux voies de contamination de laquelle on s'intéresse) va conduire à l'étude du rattachement de l'agent infectieux trouvé sur chaque malade à l'une de ces souches, d'où un partitionnement de l'ensemble de ces observations. Une nouvelle distinction entre des souches jusque-là identifiées correspondra à une partition plus fine des données.

Exemple 1.15 Une famille \mathcal{H} de parties d'un ensemble E est un *arbre de parties* si $E \in \mathcal{H}$ et si $A, B \in \mathcal{H}$ implique $A \cap B \in \{\emptyset, A, B\}$. Un arbre \mathcal{H} de parties est une *hiérarchie* sur E si, de plus, $\{e\} \in \mathcal{H}$ pour tout $e \in E$. Si \mathcal{H} est une famille de parties de E ordonnée par l'inclusion ensembliste, alors \mathcal{H} est un arbre de parties si et seulement si $E \in \mathcal{H}$ et, pour tout $A \in \mathcal{H}$, l'ensemble des éléments de \mathcal{H} contenant A est une chaîne (on dit que \mathcal{H} est un *ensemble ordonné arborescent*, voir la définition 2.12). \mathcal{H} est une hiérarchie si et seulement si $E \in \mathcal{H}$ et si, pour tout $A \in \mathcal{H}$ ayant au moins deux éléments, l'ensemble des parties couvertes par A (dans l'ordre d'inclusion) constitue une partition de A . Les hiérarchies sont le modèle de base des arbres de classification considérés en phylogénie (et, plus généralement, en analyse de données). Par exemple, si E est un ensemble d'espèces actuelles, un élément A de \mathcal{H} qui est une partie de E à au moins deux éléments correspond à un ensemble d'espèces de E admettant un ancêtre commun et représente alors cet ancêtre hypothétique. La hiérarchie \mathcal{H} représente donc un ensemble d'espèces, actuelles ou hypothétiques, muni d'un ordre de filiation (dual de l'inclusion). L'ensemble des ancêtres d'une espèce donnée est totalement ordonné par filiation. Les hiérarchies ainsi que d'autres modèles classificatoires ordinaux seront étudiés au chapitre 7, section 7.3.

Exemple 1.16 On sait reconnaître la présence de gènes homologues sur les ADN correspondant à deux espèces suffisamment voisines. Toutefois ces gènes communs se présentent souvent dans un ordre différent. Une hypothèse couramment admise est que la transformation élémentaire faisant passer d'un ADN à un autre est le retournement d'un intervalle de cet ordre. Pour évaluer la « distance » entre les deux ADN, on cherche donc le nombre minimum de transformations élémentaires, donc de retournements d'intervalles, nécessaires pour passer d'un ordre total à un autre sur le même ensemble X de gènes

(on parle de *reversal distance*; notons que l'on retrouve les commutations de l'exemple 1.17 suivant si l'on se restreint aux intervalles à deux éléments). Evidemment, la situation biologique est bien plus complexe. Tout élément de X est affecté d'un signe $+$ ou $-$ selon le brin sur lequel il est situé (rappelons que l'ADN se présente comme une double hélice) et l'inversion d'un intervalle s'accompagne du changement de signe de ses éléments. En revanche, la complexité algorithmique de ce dernier problème « signé » le situe comme tout à fait traitable (linéaire), alors que le problème « non signé » est \mathcal{NP} -difficile (cf. l'annexe A).

1.2.3 Informatique

Exemple 1.17 On note Σ_n l'ensemble des $n!$ permutations de $\{1, \dots, i, \dots, n\}$. On dit qu'on opère une *inversion* (ou encore une *commutation montante*) sur la permutation $s = s_1 \dots s_i \dots s_n$ de Σ_n si l'on échange deux éléments consécutifs s_i et s_{i+1} de s vérifiant $s_i < s_{i+1}$ (avec $i < n$). On pose $s < s'$ si la permutation s' peut être obtenue à partir de s par une suite d'inversions. On obtient ainsi un ordre (total pour $n < 3$) sur Σ_n , appelé *ordre permutoèdre* ou *ordre (faible) de Bruhat*, défini à partir de la notion d'inversion. Cette notion sert naturellement pour mesurer le degré d'ordre ou de désordre d'une suite d'éléments constituant une information à trier. De nombreux algorithmes de tri sont ainsi intrinsèquement liés au nombre d'inversions présentes dans cette information, souvent représentable sous forme d'une permutation d'éléments (voir Knuth [250] (1973) pour l'étude de telles méthodes). La notation $(\Sigma_n, <)$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, Σ_n , désignera l'ensemble des permutations sur $\{1, \dots, i, \dots, n\}$ muni de l'ordre permutoèdre défini ci-dessus. On a déjà remarqué à la section 1.1.1 qu'il existe une bijection entre permutations et ordre total aux définissur un même ensemble. Cette bijection induit sur l'ensemble de ces ordres totaux un ordre isomorphe à l'ordre permutoèdre. Des propriétés de cet ordre sont données dans le chapitre 5 (sections 5.5 et 5.6) et à la toute fin de la section 6.5.

Exemple 1.18 Dans les langages de programmation orientés objets avec héritage multiple, on dispose d'une hiérarchie de types qui est un ensemble ordonné. Notons T l'ensemble des types et \leq l'ordre d'inclusion entre types. Pour implémenter efficacement cette hiérarchie de types, on utilise un « codage » de l'ensemble ordonné (T, \leq) dans l'ensemble ordonné des parties d'un ensemble S . Un type est représenté par une partie de S et est inclus dans un autre si et seulement si la partie de S codant le premier type est contenue dans la partie de S codant le second; autrement dit, les parties images des types constituent un sous-ensemble ordonné de 2^S (ensemble des parties de S ordonné par l'inclusion) isomorphe à (T, \leq) . Un tel codage s'appelle un codage *booléen*, puisque (T, \leq) est codé dans 2^S (cf. l'exemple 1.12). On cherche d'autre part à obtenir un codage booléen « optimal » au sens où la cardinalité de l'ensemble S est minimum. Cette cardinalité minimum s'appelle la *2-dimension* de (T, \leq) . Plus généralement, on définit la *2-dimension d'un*

ensemble ordonné (P, \leq) comme le cardinal minimum d'un ensemble S tel qu'on puisse coder P dans $\underline{2}^S$, notion qui sera étudiée au chapitre 6.

Exemple 1.19 Certains systèmes d'exploitation multiprogrammés tiennent à jour un graphe dynamique appelé *graphe d'allocation des ressources*, qui décrit l'état d'utilisation des ressources du système (processeur(s), mémoires, périphériques, sémaphores, etc) par les processus et détecte l'apparition éventuelle de situations « bloquantes ». Dans ces systèmes où les processus se trouvent en concurrence sur toutes les ressources non partageables (i.e. ne pouvant être utilisées à un instant donné que par un processus au plus) et où le système n'est pas censé réquisitionner une ressource utilisée par un processus, on dit qu'un ensemble de processus est en *interblocage* si chacun d'eux utilise à l'instant courant certaines ressources et est bloqué dans son exécution en attendant d'une autre ressource, elle-même utilisée par un processus de cet ensemble (l'exemple le plus simple est illustré par le cas de deux processus P_0 et P_1 tels que P_i utilise (et donc détient) la ressource R_i et attend R_{1-i} pour continuer son exécution, pour $i = 0, 1$).

Le graphe G d'allocation des ressources du système sert à repérer une telle situation. Ses sommets sont de deux types : un sommet de G est soit un processus P soit une *classe de ressources* R du système (c'est-à-dire un ensemble de ressources « équivalentes » pour les processus, e.g. la classe des imprimantes, celle des bandes magnétiques, etc). Les arcs de G sont de deux types : un arc de *requête* $P \rightarrow R$ apparaît dans G dès que l'exécution de P nécessite une instance de la ressource de classe R et cet arc est transformé en un arc d'*affectation* $R \rightarrow P$ dès que cette requête est satisfaite par le système. L'arc d'affectation disparaît quand R est « libérée » par P après utilisation.

Régulièrement, un programme du système s'assure que la *fermeture réflexo-transitive* de G – cf. l'exemple 1.20 suivant – est un ordre, en y vérifiant l'absence de tout *circuit* (voir à ce sujet le théorème 2.22). Si tel n'est pas le cas, les processus impliqués dans le circuit sont en interblocage et le système lance alors son programme associé de correction.

1.2.4 Sciences sociales

Exemple 1.20 On appelle *préordre sur* X toute relation transitive et réflexive définie sur un ensemble X . Le lecteur montrera que, si R est un préordre sur X , la relation O définie sur X par $(x, y) \in O$ si $[(x, y) \in R$ et $(y, x) \notin R]$ est un ordre strict, et que la relation I sur X définie par $(x, y) \in I$ si $[(x, y) \in R$ et $(y, x) \in R]$ est une relation d'équivalence. Par définition, les *classes du préordre* R sont les classes de l'équivalence I associée. Pour deux classes C et C' de R , on pose $C \leq_R C'$ s'il existe $x \in C$ et $y \in C'$ tels que $(x, y) \in O$. Le lecteur montrera que \leq_R est une relation d'ordre sur l'ensemble des classes (en montrant d'abord que l'on a $C \leq_R C'$ si et seulement si, pour

tout $x \in C$ et tout $y \in C'$, $(x, y) \in O$). L'ordre \leq_R s'appelle l'*ordre quotient* du préordre R . Lorsque ce préordre est total, l'ordre quotient ordonne totalement ses classes.

La construction d'un ordre quotient à partir d'un préordre est extrêmement fréquente. En particulier, si U est une relation binaire quelconque, on lui associe un préordre R en posant xRy si $x = y$ ou s'il existe un *chemin* de x à y dans U , c'est-à-dire une suite x_0, x_1, \dots, x_p d'éléments *distincts* de X tels que $x = x_0$, $y = x_p$ et $x_0Ux_1, x_1Ux_2, \dots, x_{p-1}Ux_p$. (X, R) est la *fermeture réflexo-transitive* du graphe orienté $G = (X, U)$. Un couple (x, y) est un arc de cette fermeture si $x = y$ ou s'il existe un chemin de x à y dans G . Les classes du préordre R s'appellent les *classes fortement connexes* du graphe G . Ces classes sont donc ordonnées par l'ordre quotient associé. Cette construction est utilisée, par exemple, dans l'étude d'un réseau social modélisé par un graphe. Elle permet de décomposer l'ensemble des individus du réseau en un ensemble de classes d'équivalence muni d'une structure ordinale. Si, par exemple, le graphe (X, U) représente une relation de « domination » entre individus, une classe d'équivalence est alors supérieure à une autre si tout individu de cette classe domine – directement (par la relation U) ou indirectement (par la relation R) – tout individu de l'autre classe (la réciproque n'étant jamais vraie).

Exemple 1.21 Dans l'exemple précédent, on a vu qu'à tout préordre était associé un ordre strict. L'ordre strict O associé à un préordre total R s'appelle un *ordre (strict) fort*. Cette catégorie d'ordres apparaît dans de nombreuses situations. En effet, toute fonction numérique f définie sur X induit un ordre fort O sur X défini par xOy si $f(x) < f(y)$. Ainsi en microéconomie, la *préférence* d'un agent économique sur un ensemble de biens est généralement décrite au moyen d'une fonction d'utilité numérique u : le bien y est préféré au bien x si $u(x) < u(y)$. La préférence de l'agent est alors un ordre fort, et sa relation d'*indifférence* (qui n'est autre que la relation d'incomparabilité de l'ordre fort) est une relation d'équivalence. Cette modélisation implique que la relation d'indifférence de l'agent est transitive, ce qui, en réalité, n'est pas nécessairement vérifié. On verra à la section 7.1 du chapitre 7 des modélisations ordinales de la préférence n'impliquant pas que la relation d'indifférence est transitive (cf. aussi l'exemple 1.22 ci-après) et on reviendra dans ce contexte sur les ordres forts.

Exemple 1.22 On considère un ensemble fini d'intervalles sur \mathbb{R} . On pose $[i_1, i_2] < [j_1, j_2]$ si $i_2 < j_1$. Le lecteur vérifiera qu'on obtient une relation d'ordre strict sur l'ensemble des intervalles considérés. Les ordres qu'on peut définir ainsi et qui sont appelés *ordres d'intervalles* sont apparus dans des contextes extrêmement variés (estimation statistique, psychophysique, théorie de l'utilité, décision multicritère, sériation, ordonnancement, logique temporelle, combinatoire, entre autres). Leur origine remonte à un article de Wiener de 1914 [425], où il introduit (sous un autre nom) les ordres d'intervalles pour répondre à une question de Russel sur la possibilité de définir la notion

d'*instant temporel* à partir de la notion d'*intervalle temporel*. Ils ont été redécouverts dans les années 1950 à propos des problèmes de modélisation des préférences évoqués dans l'exemple précédent. On les retrouvera sous une autre forme au chapitre 2 (cf. la définition 2.12) et ils seront étudiés dans la première section du chapitre 7 dans le contexte de la modélisation des préférences.

1.2.5 Recherche opérationnelle

Exemple 1.23 On considère une situation où une collectivité dispose d'un budget pour des investissements pris dans un ensemble $X = \{1, \dots, i, \dots, n\}$ d'investissements possibles. Chaque investissement i présente un coût c_i et une utilité potentielle p_i . La collectivité recherche un ensemble A d'investissements dont le coût ($\sum c_i, i \in A$) ne dépasse pas la capacité totale C d'investissement et qui maximise l'utilité ($\sum p_i, i \in A$). Ce problème d'optimisation n'est autre que le fameux problème du *sac à dos*, dont on sait qu'il est très difficile à résoudre (il est \mathcal{NP} -difficile, cf. l'annexe A). Si, de plus, on est dans une situation où certains investissements ne peuvent être faits que si d'autres l'ont déjà été (par exemple, aides à l'installation d'entreprises après l'aménagement d'une zone industrielle), on a un ordre de précedence $<$ sur les n investissements. L'ensemble A doit alors vérifier la contrainte : $i \in A, j \in X$ et $j < i$ impliquent $j \in A$. Un tel ensemble A est ce que nous appellerons une partie commençante de l'ensemble ordonné $(X, <)$ (cf. la définition 1.42). Le problème d'optimisation devient alors le problème du *sac à dos ordonné*, en général aussi difficile que le problème sans contraintes d'ordre. Toutefois, pour certaines classes d'ensembles ordonnés tels ceux de dimension 2 (cf. la section 6.3) ou les bipartis (définition 2.6), on peut trouver de bonnes procédures d'approximation ou même d'obtention de la solution⁴. Ce problème a aussi des liens avec les problèmes d'ordonnements tels que ceux évoqués dans l'exemple 1.25 ci-dessous.

Exemple 1.24 Le projet de budget d'une collectivité territoriale est généralement préparé par un comité composé de représentants des différentes communes. Pour une liste de n projets possibles à budgétiser, chaque représentant a son ordre de priorité pour la réalisation de ces projets. L'ordre de priorité finalement proposé va donc devoir réaliser un consensus entre ces différents ordres. On peut supposer (à plus ou moins juste titre) que chaque représentant est capable de donner un ordre total de priorité sur les projets. Pour obtenir l'ordre consensus, une procédure possible consisterait à rechercher un ordre total L (dit *médian*) qui maximise la somme des « accords » entre L et les différents ordres des représentants ; le couple (y, x) constitue un accord entre l'ordre L et l'ordre d'un représentant si le projet x est préféré au projet y dans ces deux ordres. Ce problème d'optimisation, facile à poser et qui,

⁴ Cf. Kolliopoulos et Steiner [253] (2002).

dans un contexte différent, a été cru facile à résoudre, est en fait très difficile (\mathcal{NP} -difficile au sens de l'annexe A) dans le cas général où les ordres des représentants peuvent être quelconques. Il peut toutefois se ramener à l'application de la *règle majoritaire* d'agrégation et donc devenir facile, si les ordres à agréger respectent une certaine structure, ce qui peut être le cas dans l'exemple considéré. Nous reviendrons sur ces problèmes de consensus d'ordres et sur les *procédures majoritaire* et *médiane* dans les sections 7.2 et 7.3⁵.

Exemple 1.25 On considère un ensemble de tâches pouvant être effectuées sur plusieurs machines fonctionnant en parallèle et identiques, c'est-à-dire telles que chacune consacre le même temps à l'accomplissement de la même tâche. D'autre part, il existe un ordre de précedence entre les tâches, résultant de ce que certaines ne peuvent être effectuées qu'après que d'autres l'ont été. Un *ordonnement* de ces tâches consiste à les affecter aux différentes machines en respectant les contraintes de précedence. On cherche un *ordonnement optimal*, c'est-à-dire un ordonnement qui va minimiser la durée totale d'exécution des tâches. On verra à la section 7.5.2 comment la modélisation ordinale de ce problème permet de trouver un algorithme efficace pour résoudre certaines de ses instances.

1.3 Sous-ensembles ordonnés et extensions

Trois types de problèmes se posent fréquemment lorsqu'un ensemble ordonné modélise une certaine situation.

On peut d'abord rechercher une partie de cet ensemble vérifiant certaines conditions. Soit, par exemple, un ensemble ordonné représentant un ensemble de projets de création d'entreprise ordonné selon plusieurs critères, ce qui définit un ordre, généralement non total, sur ces projets. On est amené à rechercher un ensemble de projets deux à deux incomparables, séparant les projets « positifs » (i.e. jugés acceptables par un organisme de crédits) des projets « négatifs » (jugés non acceptables).

Dans d'autres situations, on cherchera au contraire dans un ensemble ordonné un ensemble d'éléments deux à deux comparables (donc une chaîne) et de cardinalité maximum.

⁵ Le problème de recherche d'ordres médians est un cas particulier du problème connu dans la littérature anglo-saxonne sous le nom de « linear ordering problem ». Ce dernier est équivalent au problème classique d'optimisation combinatoire consistant à rechercher dans un graphe orienté pondéré un sous-graphe sans circuit de poids maximum. Ces problèmes sont apparus sous des formes diverses et dans des domaines variés, par exemple, en économie dans le problème dit de la « triangularisation des tableaux d'échanges inter-industries » (matrices input-output). Le livre de Reinelt [355] (1985) est une référence de base sur ces problèmes.

On peut aussi, dans de nombreux problèmes d'ordonnement de tâches, rechercher un ordre total sur les tâches, compatible avec les contraintes d'ordre temporel données initialement sur ces dernières : telle tâche doit être achevée avant que telle autre puisse commencer (par exemple, tel fichier doit être compilé avant tel autre). Nous aborderons certains aspects de ces problèmes dans la section 7.5.

Dans cette section, nous précisons les notions permettant de modéliser ces types de problèmes.

1.3.1 Sous-ensembles ordonnés

Définition 1.26 Soient $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné et Y une partie de X . La restriction de l'ordre \leq à la partie Y est un ordre, noté \leq_Y et appelé un sous-ordre de \leq . On dit alors que $Q = (Y, \leq_Y)$ est un sous-ensemble ordonné de P , noté $Q \sqsubseteq P$.

Si, de plus, $x \prec y$ dans Q implique $x \prec y$ dans P , on dit que Q est un sous-ensemble ordonné couvrant de P .

Le sous-ensemble ordonné restreint à la partie $X \setminus x$ (respectivement, $X \setminus A$) de X est noté $P \setminus x$ (respectivement, $P \setminus A$).

Dans la section 1.3.2, nous définissons deux types importants de sous-ensembles ordonnés d'un ensemble ordonné, ses *chaînes* et ses *antichaînes*. D'autres exemples également importants sont ses *intervalles* et ses *parties convexes*.

Soient x et y deux éléments de l'ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ avec $x \leq y$. On pose :

$$[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$$

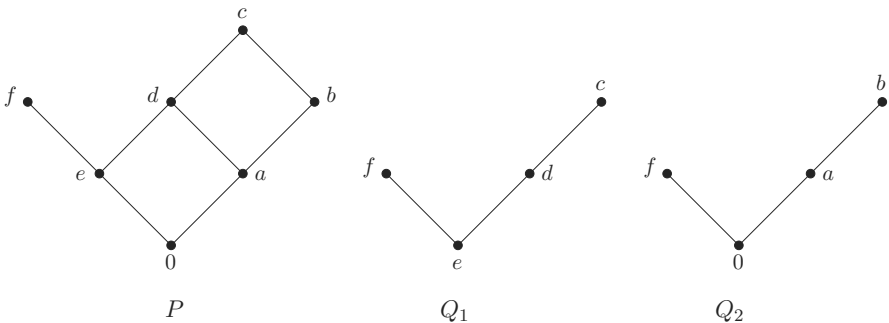


FIG. 1.8. Q_1 est un sous-ensemble ordonné couvrant de P et Q_2 en est un sous-ensemble ordonné non couvrant.

Cet ensemble – ou le sous-ensemble ordonné correspondant – est appelé l'*intervalle entre x et y (dans P)*. Un élément z de cet intervalle est dit *intermédiaire* entre x et y . Une partie Y de P est dite *convexe* si elle contient l'intervalle $[x, y]$ dès qu'elle contient x et y tels que $x \leq y$.

1.3.2 Chaînes, antichaînes et paramètres fondamentaux

Définition 1.27 Soit Q un sous-ensemble ordonné d'un ensemble ordonné P . Si Q est totalement ordonné, on dit que Q est une chaîne de P . On note $x_0 < x_1 < \dots < x_p$ une chaîne de P ou, simplement, $x_0 x_1 \dots x_p$. L'élément x_0 est l'origine de la chaîne, x_p son extrémité, et sa longueur vaut le nombre de ses éléments moins un (donc p pour la chaîne $x_0 < x_1 < \dots < x_p$).

Une chaîne $Q = x_0 x_1 \dots x_p$ de P est dite :

- couvrante si elle vérifie $x_0 \prec x_1 \prec \dots \prec x_p$ (où \prec est la relation de couverture de P) avec $p \geq 1$,
- maximale si elle n'est contenue (strictement) dans aucune autre chaîne de P ,
- étendue si elle contient un élément minimal et un élément maximal de P (cf. la définition 1.38).

Remarque 1.28 On observera que dans la terminologie utilisée, le mot chaîne peut désigner soit un ensemble totalement ordonné (la chaîne \underline{n} de la définition 1.1) soit, comme ci-dessus, un sous-ensemble totalement ordonné d'un ensemble ordonné. Le contexte permet de distinguer ces deux acceptions, d'ailleurs non contradictoires (un ensemble étant un sous-ensemble de lui-même). La même remarque s'applique au terme antichaîne (définitions 1.4 et 1.29).

Une chaîne maximale est couvrante mais l'inverse n'est pas vrai en général. Toutefois, si Q est une chaîne étendue d'un ensemble ordonné P , Q est maximale si et seulement si elle est couvrante.

Ces notions s'appliquent à tout sous-ensemble ordonné de P . Ainsi dans le cas d'un intervalle $[x, y]$ de P , une chaîne de x à y est maximale (pour le sous-ensemble ordonné $[x, y]$) si et seulement si elle est couvrante. L'ensemble ordonné de l'exemple 1.2 admet quatre chaînes maximales, ab , ae , cb , cde (les trois premières étant de longueur 1 et la dernière de longueur 2) et huit chaînes non maximales dont deux couvrantes (le vérifier). Les chaînes $0acf1$, $0bf1$ et 01 sont trois chaînes étendues de l'ensemble ordonné T représenté à la figure 1.10.

Définition 1.29 Soit Q un sous-ensemble ordonné d'un ensemble ordonné P . Si les éléments de Q sont deux à deux incomparables, on dit que Q est une antichaîne de P .

Une antichaîne de P est *maximale* si elle n'est contenue dans aucune autre antichaîne de P . L'ensemble ordonné de l'exemple 1.2 contient quatre antichaînes maximales (dont $\{a, d\}$) et cinq autres antichaînes.

On remarquera que les seuls sous-ensembles ordonnés de P qui sont à la fois chaîne et antichaîne de P sont les singletons de P . D'autre part, les antichaînes de P sont évidemment convexes (qu'en est-il de ses chaînes?).

Aux notions de chaîne et d'antichaîne d'un ensemble ordonné P sont associés quatre paramètres fondamentaux :

Définition 1.30 Soit P un ensemble ordonné. Le nombre maximum d'éléments d'une antichaîne de P s'appelle la largeur de P et est noté $\alpha(P)$. L'étendue $\kappa(P)$ de P est le nombre maximum d'éléments d'une chaîne de P . Par ailleurs, on note $\gamma(P)$ le nombre minimum d'antichaînes dans une partition de P en antichaînes et $\theta(P)$ le nombre minimum de chaînes dans une partition de P en chaînes.

N.B. Dans les définitions de $\theta(P)$ et $\gamma(P)$, on entend par « partition de P en chaînes » (respectivement, en antichaînes) une partition de l'ensemble des éléments de P en chaînes (respectivement, en antichaînes).

Au lieu de l'étendue de P , on considère aussi sa *longueur* $\lambda(P) = \kappa(P) - 1$. Ce paramètre est donc la longueur maximum d'une chaîne de P .

Dans l'exemple 1.2 (page 2), $\{ae, cb, d\}$ constitue une partition en trois chaînes et $\{ac, d, be\}$ une partition en trois antichaînes de P (on rappelle qu'ici, pour alléger l'écriture, ae (par exemple) désigne l'ensemble $\{a, e\}$). Le lecteur vérifiera que dans cet exemple, $\kappa(P) = \gamma(P) = 3$ et que $\theta(P) = \alpha(P) = 2$.

Les égalités obtenues dans cet exemple ne sont pas fortuites. On montre en effet que tout ensemble ordonné P vérifie :

- $\gamma(P) = \kappa(P)$,
- $\theta(P) = \alpha(P)$.

La première de ces égalités est facile à démontrer. L'obtention de la seconde est l'objet du plus fameux théorème de la théorie des ensembles ordonnés, le théorème de Dilworth [120] (1950). Celui-ci admet de nombreuses applications et sera démontré au chapitre 4 (théorème 4.2). On peut cependant noter dès maintenant que les inégalités $\kappa(P) \leq \gamma(P)$ et $\alpha(P) \leq \theta(P)$ sont évidentes (pourquoi?).

N.B. Il est immédiat de remarquer que les chaînes (respectivement, les antichaînes) de P correspondent aux *cliques* (respectivement, aux *stables*) du graphe de comparabilité de P . Les paramètres $\kappa(P)$, $\alpha(P)$, $\theta(P)$ et $\gamma(P)$ définis ci-dessus coïncident donc avec quatre paramètres fondamentaux du graphe de comparabilité de P . Par exemple, $\gamma(P)$ est le *nombre chromatique* de ce graphe. Puisque $\kappa(P)$, $\alpha(P)$, $\theta(P)$ et $\gamma(P)$ ne dépendent que de $Comp(P)$, on dit que ce sont des *invariants de comparabilité*. On verra ultérieurement d'autres exemples, beaucoup moins évidents, de tels invariants (cf. les compléments de ce chapitre en section 1.6).

1.3.3 Extensions

Nous allons dans cette partie considérer les possibilités d'extension d'un ordre O en un ordre O' (nous utilisons les notations littérales O et O' pour des raisons de commodité).

Définition 1.31 Soient O et O' deux ordres sur un même ensemble X . On dit que O' est une extension de O si $O \subseteq O'$ (en d'autres termes, pour tous $x, y \in X$, xOy implique $xO'y$).

Une extension O' de O est dite linéaire si O' est un ordre total.

Lorsque O' est une extension (respectivement, extension linéaire) de O , on dira aussi que l'ensemble ordonné $Q = (X, O')$ est une extension (respectivement, extension linéaire) de l'ensemble ordonné $P = (X, O)$. Par abus de langage, on dira parfois aussi que O' est une extension de P . Les couples de P sont des couples de l'extension Q , ce que l'on repère par la notation $P \subseteq Q$ (qui est à bien distinguer de la notation $P \sqsubseteq Q$ qui, elle, signifie que P est un sous-ensemble ordonné de Q).

On montrera au chapitre suivant (théorème 2.29) que tout ordre admet au moins une extension linéaire (le lecteur pourra s'en assurer par lui-même au moyen de l'exercice 1.6). La recherche d'extensions linéaires quelconques ou vérifiant des propriétés particulières intervient dans de multiples situations et notamment dans des problèmes d'ordonnement (cf. la section 7.5 du chapitre 7). On note $\mathcal{L}(O)$ (respectivement, $\mathcal{L}(P)$) l'ensemble de toutes les extensions linéaires de l'ordre O (respectivement, de l'ensemble ordonné $P = (X, O)$). La détermination de cet ensemble n'est généralement pas simple (cf. l'annexe A).

Une extension linéaire de l'ensemble ordonné de l'exemple 1.2 (page 2) est $acbde$ (i.e. $a < c < b < d < e$). Le lecteur vérifiera qu'il y en a sept autres.

Définition 1.32 Soit $L = x_1x_2 \dots x_n$ une extension linéaire d'un ensemble ordonné P à n éléments. On dit que le couple (x_i, x_{i+1}) est un saut de L si x_i et x_{i+1} sont incomparables dans P . On note $s(P, L)$ le nombre de sauts de L et on appelle nombre de sauts de P l'entier $s(P) = \min\{s(P, L), L \text{ extension linéaire de } P\}$.

On peut aussi considérer le nombre $o(P, L)$ de couvertures de L , c'est-à-dire le nombre de couples (x_i, x_{i+1}) de L tels que x_iPx_{i+1} , et appeler nombre de couvertures de P l'entier $o(P) = \max\{o(P, L), L \text{ extension linéaire de } P\}$. Il est clair que $s(P, L) + o(P, L) = n - 1$ et donc que $s(P) + o(P) = n - 1$. En utilisant le fait que $\alpha(P) = \theta(P)$ (cf. la section 1.3.2 précédente), le lecteur montrera qu'on a toujours $s(P) \geq \alpha(P) - 1$. Il pourra vérifier cette inégalité pour l'ensemble ordonné de la figure 1.4.

Dans un problème d'ordonnement d'un ensemble de tâches muni d'un ordre (partiel) d'antériorité, il peut être intéressant de trouver une extension linéaire de cet ordre minimisant le nombre de sauts, lorsque ces sauts ont un

coût. On reviendra sur ces problèmes d'ordonnement à la section 7.5 du chapitre 7.

Il sera montré au chapitre 8 (théorème 2.29) qu'un ordre O est l'intersection de toutes ses extensions linéaires, c'est-à-dire que l'on a : pour tous $x, y \in X$, xOy si et seulement si xLy pour tout $L \in \mathcal{L}(O)$. Ceci se note :

$$O = \bigcap \{L : L \in \mathcal{L}(O)\}$$

Pour $P = (X, O)$, on écrit aussi que $P = \bigcap \{L : L \in \mathcal{L}(P)\}$.

Définition 1.33 Soit $P = (X, O)$ un ensemble ordonné. Tout ensemble d'ordres totaux sur X dont l'intersection est l'ordre O s'appelle une réalisation de O (ou de P). On appelle dimension de O (ou de P) le nombre minimum d'ordres totaux dont l'intersection est O (ou P). Ce nombre est noté $\dim P$. Une réalisation de P formée de $\dim P$ ordres totaux s'appelle une base de P .

La dimension d'un ensemble ordonné est un paramètre qui a été intensivement étudié. Le chapitre 6 lui est en grande partie consacré.

Le lecteur montrera que, pour l'exemple 1.2 (page 2), les deux extensions linéaires $acbde$ et $cdaeb$ constituent l'unique base de P et qu'on a donc $\dim P = 2$. Il montrera aussi que l'ensemble ordonné B_3 donné à la figure 1.5 est de dimension 3 (on a plus généralement $\dim B_n = n$, cf. le chapitre 6).

Toute extension linéaire d'un ordre O est une extension maximale (en termes de nombre de couples ajoutés). Dans l'optique de présenter la notion symétrique d'*extension minimale* d'un ordre (en un ordre), nous définissons la notion de couple critique :

Définition 1.34 Soit $P = (X, O)$ un ensemble ordonné et $x, y \in X$. Le couple (x, y) est dit P -critique (ou O -critique, ou simplement critique) si $(x, y) \notin P$ et $P + (x, y)$ est encore un ensemble ordonné.

Autrement dit, un couple (x, y) est P -critique si $P + (x, y)$ est une extension minimale de P (puisque l'on ajoute un unique couple à P). Des résultats simples montrent que tout ensemble ordonné différent d'une chaîne admet au moins un couple critique ; ces résultats utilisent les notions supplémentaires de *relation de forçage* et de *relations flèches*.

Définition 1.35 Soit $P = (X, O)$ un ensemble ordonné. La relation de forçage associée à P est la relation binaire F_P définie sur les couples d'éléments incomparables de P par $(x, y)F_P(z, t)$ si zOx et yOt .

Autrement dit, on a $(x, y)F_P(z, t)$ si (z, t) appartient à la fermeture transitive de $P + (x, y)$.

Il est immédiat de constater que la relation de forçage associée à un ensemble ordonné est toujours un ordre, ce qui implique notamment qu'elle

admet toujours des éléments maximaux (cf. la définition 1.38 pour les notions d'éléments maximaux et minimaux).

Rappelons que P^-x (respectivement, yP^+) désigne l'ensemble des éléments couverts par x (respectivement, couvrant y) dans P , et Px (respectivement, xP) celui des minorants (respectivement, majorants) de x .

Définition 1.36 Soient x, y deux éléments d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$. On dit que :

- x et y sont en relation flèche inférieure, ce qui est noté $x \downarrow y$, si x est minimal parmi les éléments z de P tels que $z \not\leq y$. De manière équivalente, on a $x \downarrow y$ si et seulement si ($x \not\leq y$ et $P^-x \subseteq Py$).
- x et y sont en relation flèche supérieure, ce qui est noté $x \uparrow y$, si y est maximal parmi les éléments z de P tels que $x \not\leq z$. De manière équivalente, on a $x \uparrow y$ si et seulement si ($x \not\leq y$ et $xP \subseteq yP^+$).
- x et y sont en relation double flèche, ce qui est noté $x \updownarrow y$, si $x \downarrow y$ et $x \uparrow y$.

Exemple 1.37 Dans l'ensemble ordonné donné à la figure 1.9, $\{a, d, e, g, h, i, j\}$ est l'ensemble des éléments qui ne minorent pas f . Comme a et g sont les éléments minimaux de cet ensemble, on trouve $a \downarrow f$ et $g \downarrow f$. L'ensemble des éléments qui ne majorent pas a est $\{b, c, f, g\}$ et f et g sont maximaux dans cet ensemble, d'où $a \uparrow f$ et $a \uparrow g$. On obtient par conséquent $a \updownarrow f$. Des relations flèches de cet ensemble ordonné sont données dans le tableau 3.3 présentée dans le chapitre 3 (page 100).

Le fait – mentionné plus haut – qu'il existe toujours un couple P -critique pour P différent d'une chaîne, résulte du fait suivant, dont nous laissons au lecteur la vérification : un couple (x, y) est P -critique si et seulement si $(x, y) \in MaxF_P$, si et seulement si $x \updownarrow y$. Ces deux équivalences s'inscrivent dans un ensemble plus large de conditions équivalentes, qui font l'objet de l'exercice 1.2. Quant aux relations flèches, elles s'avèrent un outil particulièrement utile que nous retrouverons intensivement tout au long du chapitre 3.

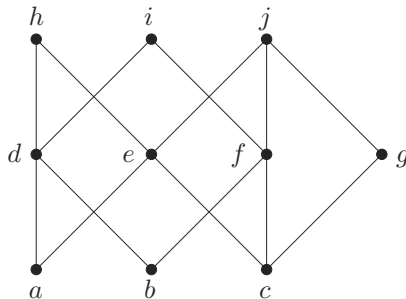


FIG. 1.9. Exemple 1.37.

1.4 Éléments et sous-ensembles particuliers

Soit un ensemble ordonné P modélisant, par exemple, la structure hiérarchique observée dans une certaine société animale, une tribu, une entreprise, etc. Existe-t-il un ou plusieurs chefs? Plus généralement, si deux individus se trouvent à un même niveau hiérarchique, existe-il des supérieurs communs et, dans ce cas, en existe-t-il un unique « plus proche » pour trancher leurs éventuels différends? Répondre à ces questions nous amène à considérer des éléments particuliers de l'ensemble ordonné P . Cette section définit un certain nombre de tels éléments ainsi que certaines parties d'un ensemble ordonné, comme ses parties commençantes ou finissantes, qu'on retrouvera constamment dans la suite.

1.4.1 Infimums, supremums, éléments irréductibles

Définition 1.38 Un élément x d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est :

- le minimum de P si $x \leq y$ pour tout $y \in P$,
- le maximum de P si $y \leq x$ pour tout $y \in P$,
- un élément minimal de P s'il n'existe pas $y \in P$ avec $y < x$,
- un élément maximal de P s'il n'existe pas $y \in P$ avec $x < y$.

Au lieu du minimum (respectivement, maximum), on parle aussi du *plus petit élément* (respectivement, *du plus grand élément*) de P . Ces éléments, nécessairement uniques lorsqu'ils existent, sont souvent notés respectivement 0_P et 1_P (ou simplement 0 et 1) et on dit alors que P est *borné*.

L'ensemble des éléments minimaux (respectivement, maximaux) de P est noté $MinP$ (respectivement, $MaxP$).

Ces définitions s'étendent à n'importe quel sous-ensemble ordonné Q de P . Par exemple, $x \in Q$ est un élément minimal de Q s'il n'existe pas $y \in Q$ avec $y < x$. Si Q admet un minimum (respectivement, un maximum), il pourra être noté 0_Q (respectivement, 1_Q).

L'ensemble ordonné de l'exemple 1.2 (page 2) a deux éléments minimaux, a et c , et deux éléments maximaux, b et e . Le sous-ensemble ordonné défini par $\{a, c, e\}$ a un plus grand élément, e , mais pas de minimum. L'ensemble ordonné B_3 de la figure 1.5 admet un minimum et un maximum.

Si Y est une partie de $P = (X, \leq)$, un *minorant* (respectivement, un *majorant*) de Y est un élément m de P tel que $m \leq x$ (respectivement, $m \geq x$) pour tout $x \in Y$. La partie Y est dite *minorée* (respectivement, *majorée*) si elle admet au moins un minorant (respectivement, un majorant).

Etant donnée une partie Y de P , on note $MinOY$ l'ensemble des minorants de Y et $MaxOY$ celui de ses majorants.

Les notions suivantes permettent de définir d'importantes classes d'ensembles ordonnés :

Définition 1.39 Soit Y une partie d'un ensemble ordonné P . On dit que $r \in P$ est l'infimum de Y (ou sa borne inférieure) si Y est minorée et si l'ensemble de ses minorants admet r pour maximum. On le note $\inf Y$ ou $\bigwedge Y$. De même, Y a un supremum (ou une borne supérieure) t si Y est majorée et si l'ensemble de ses majorants admet t pour minimum. On le note $\sup Y$ ou $\bigvee Y$.

Ainsi, par exemple, on a $r = \bigwedge Y$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $r \leq z$ pour tout $z \in Y$,
- si x vérifie $x \leq z$ pour tout $z \in Y$, alors $x \leq r$.

Si $Y = \{x, y\}$, on note $x \wedge y$ (respectivement, $x \vee y$) son infimum (respectivement, son supremum).

L'infimum et le supremum d'une partie quelconque Y d'un ensemble ordonné P n'existent pas toujours (par exemple, quand l'ensemble des minorants de Y admet plusieurs éléments maximaux, Y n'a pas d'infimum). Lorsque Y a un infimum $\bigwedge Y$ (respectivement, un supremum $\bigvee Y$), on dit qu'elle est *bornée inférieurement* (respectivement, *bornée supérieurement*). Y est *bornée* si elle est bornée inférieurement et supérieurement. Lorsque toute partie Y de P est bornée inférieurement (respectivement, supérieurement), P est appelé un *inf-demi-treillis* (respectivement, un *sup-demi-treillis*). Un *treillis* est un ensemble ordonné qui est à la fois inf- et sup-demi-treillis.

On peut montrer que $\bigvee \emptyset$ existe dans un ensemble ordonné P si et seulement si P a un minimum 0 . On a alors $\bigvee \emptyset = 0$. De même, $\bigwedge \emptyset$ existe dans P si et seulement si P a un maximum 1 et on a dans ce cas $\bigwedge \emptyset = 1$ (voir la preuve de ces résultats donnée au chapitre 3, exemple 3.2).

Exemple 1.40 Tout ensemble totalement ordonné est un treillis. D'autre part, pour tout ensemble E , l'ensemble ordonné 2^E de ses parties est un treillis avec l'infimum égal à l'intersection et le supremum égal à l'union. Un tel treillis appartient à la classe des treillis dits *booléens* (voir le chapitre 2, définition 2.18).

La classe des (demi-)treillis est présentée à la section 2.3 du chapitre 2. Le cas particulier très important des treillis dits *distributifs* est présenté dans cette même section et est ensuite développé au chapitre 5 dans le contexte d'un théorème fondamental établissant une bijection entre les ensembles ordonnés et les treillis distributifs (voir au chapitre 5 le corollaire 5.29 et les commentaires de la section 5.6).

Toutes les définitions précédentes s'étendent d'une manière évidente au cas où un même élément peut apparaître plusieurs fois dans Y .

Il résulte de ces définitions que si Y admet un minimum 0_Y (respectivement, un maximum 1_Y), on a $\bigwedge Y = 0_Y$ (respectivement, $\bigvee Y = 1_Y$). En particulier :

$$x = y \iff x \wedge y = x \vee y = x \qquad x \leq y \iff x \wedge y = x \iff x \vee y = y$$

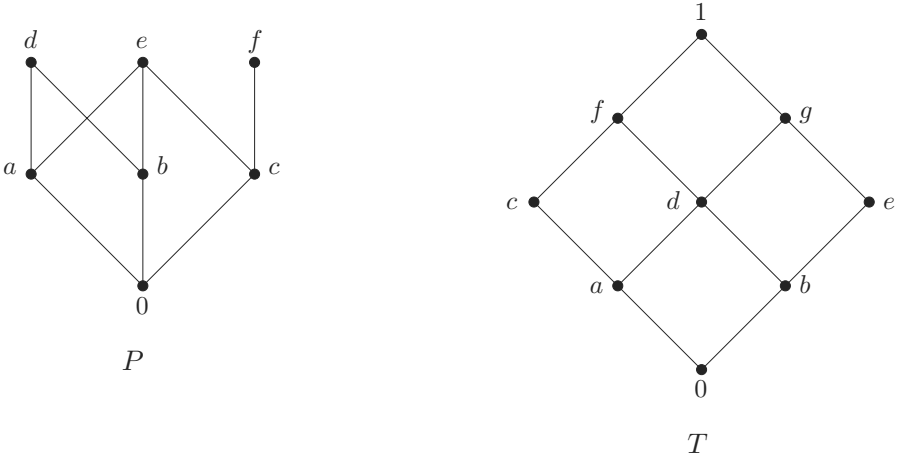


FIG. 1.10. P est un ensemble ordonné non treillis; T est un treillis.

Une partie Y de P est dite *inf-fermée* (respectivement, *sup-fermée*) si, pour toute partie B de Y admettant un infimum (respectivement, un supremum), celui-ci appartient à Y .

Dans l'ensemble ordonné P de la figure 1.10, on a $e \wedge f = c$, $d \wedge f = 0 = \bigwedge\{d, c, f\}$. En revanche, $e \wedge d$ n'existe pas (pourquoi?), ni $d \vee e$ ou $a \vee b$. Par ailleurs, $b \vee c = e = \bigvee\{a, b, c\}$. Les parties $\{d, e\}$ et $\{0, c, d, e, f\}$ sont inf-fermées, mais non la partie $\{d, f\}$.

Définition 1.41 Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné.

1. $x \in P$ est sup-irréductible s'il n'est supremum d'aucune partie ne le contenant pas. De manière équivalente, x est sup-irréductible s'il n'est pas supremum de la partie $(x]$.
2. $x \in P$ est inf-irréductible s'il n'est infimum d'aucune partie ne le contenant pas. De manière équivalente, x est inf-irréductible s'il n'est pas infimum de la partie $[x)$.
3. $x \in P$ est dit irréductible s'il est sup- ou inf-irréductible; il est dit doublement irréductible s'il est sup- et inf-irréductible.

Tout élément non sup-irréductible de P est donc le supremum d'une partie de P ne le contenant pas. Il est alors dit *sup-réductible*. De même, si un élément est infimum d'une partie de P ne le contenant pas, on le dit *inf-réductible*. On notera que si P admet un minimum, celui-ci est sup-réductible car on montre qu'il est supremum de la partie vide (cf. la preuve donnée à l'exemple 3.2 page 73). De la même manière, si P a un maximum, ce dernier est inf-réductible en tant qu'infimum de \emptyset .

Pour l'ensemble ordonné P de la figure 1.10, tous les éléments sauf 0 et e sont sup-irréductibles tandis que 0 et c sont les seuls inf-réductibles. Pour l'ensemble ordonné T de cette même figure, les sup-irréductibles sont a, b, c, e , les inf-irréductibles sont c, e, f, g et les doublement irréductibles sont c et e . L'exemple de l'élément d de P montre qu'un élément sup-irréductible peut couvrir plusieurs éléments. En revanche, un élément x couvrant un seul élément, noté alors x^- , est nécessairement sup-irréductible (pourquoi?). De même, si x est couvert par un seul élément, noté alors x^+ , il est nécessairement inf-irréductible.

Les éléments irréductibles peuvent également être caractérisés par les relations flèches (cf. la définition 1.36 et les propositions 3.8 et 3.17 du chapitre 3).

On notera respectivement S_P ou $S(P)$, I_P ou $I(P)$, IR_P ou $IR(P)$ et DIR_P ou $DIR(P)$ l'ensemble des éléments sup-irréductibles, inf-irréductibles, irréductibles et doublement irréductibles d'un ensemble ordonné P .

En notant S_x l'ensemble des sup-irréductibles inférieurs ou égaux à x et I^x l'ensemble des éléments inf-irréductibles supérieurs ou égaux à x , on montre que tout élément x de P vérifie $x = \bigvee S_x = \bigwedge I^x$ (voir la proposition 3.11 du chapitre 3 pour la preuve).

On dit qu'une partie Y de P est *sup-génératrice* si tout élément de P est supremum d'un sous-ensemble de Y . Puisqu'il est clair qu'une telle partie doit contenir tous les sup-irréductibles de P , on obtient qu'une partie de P est sup-génératrice si et seulement si elle contient tous les éléments sup-irréductibles de P . Dualelement une partie Y de P est *inf-génératrice* si tout élément de P est infimum d'éléments de Y ou, de manière équivalente, si elle contient tous les inf-irréductibles de P . Ces notions seront largement étudiées dans le chapitre 3.

1.4.2 Parties commençantes, parties finissantes

Les parties d'un ensemble ordonné que nous présentons ici jouent un rôle fondamental, explicité notamment au chapitre 5.

Définition 1.42 Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné. Une partie C de P est une partie commençante si, pour tous $t \in P$ et $y \in C$, $t \leq y$ implique $t \in C$. Une partie F de P est une partie finissante si, pour tous $t \in P$ et $y \in F$, $y \leq t$ implique $t \in F$.

On note $\mathcal{C}(P)$ (respectivement, $\mathcal{F}(P)$) l'ensemble des parties commençantes (respectivement, finissantes) de P (le lecteur cherchera quelles sont les seules parties à la fois commençantes et finissantes d'un ensemble ordonné P). Une partie commençante (respectivement, finissante) de P et différente de \emptyset ou de P est appelée une *partie commençante* (respectivement, *finissante propre*).

La *section commençante de base x* est la partie commençante $[x]$ formée des minorants de x . Dualelement, la *section finissante de base x* est la partie finissante $\lceil x$ formée des majorants de x .

Les parties commençantes et finissantes sont évidemment convexes. D'autre part, les parties convexes d'un ensemble ordonné P sont les intersections d'une partie commençante et d'une partie finissante de P (pourquoi?).

Bien que faciles à montrer (ce dont le lecteur s'assurera), les propriétés suivantes sont importantes :

- l'union et l'intersection de parties commençantes (respectivement, finissantes) sont des parties commençantes (respectivement, finissantes),
- toute partie commençante (respectivement, finissante) est union de sections commençantes (respectivement, finissantes),
- le complémentaire dans un ensemble ordonné P d'une partie commençante (respectivement, finissante) est une partie finissante (respectivement, commençante).

Le lecteur pourra utiliser ces propriétés pour montrer que l'ensemble ordonné de l'exemple 1.2 (page 2) admet dix parties commençantes (par exemple, $\{a, c, d\}$ est une telle partie) et autant de parties finissantes (mais il se gardera de croire que la détermination de ces parties soit toujours aisée pour un ensemble ordonné quelconque).

N.B. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, la terminologie des ensembles ordonnés est loin d'être fixée. Ainsi, comme synonyme de *partie commençante* (respectivement, *partie finissante*), on trouve souvent *idéal* (respectivement, *filtre*) mais aussi *idéal d'ordre*, *segment* (ou *partie*) *initial(e)*, *partie cohérentaire* (respectivement, *filtre d'ordre*, *segment* (ou *partie*) *final(e)*, *partie héréditaire*), etc.

De même, pour le terme *section commençante* (respectivement, *finissante*) de base x , on trouve parmi les synonymes *section initiale* (respectivement, *finale*), ou *idéal* (respectivement, *filtre*) *principal* de base x , etc.

1.5 Opérations entre ensembles ordonnés

Si $P = (X, O)$ et $Q = (X, O')$ sont deux ensembles ordonnés sur le même ensemble X , on notera $P \cap Q$ l'ensemble X muni de la relation $O \cap O'$. Le lecteur vérifiera que $O \cap O'$ est une relation d'ordre, et donc que $P \cap Q$ est un ensemble ordonné. Il n'en est évidemment pas de même pour l'union de P et de Q dès que $|X| \geq 2$ (le lecteur pourra s'en assurer).

Nous allons dans cette section considérer des cas plus généraux d'ensembles ordonnés construits à partir d'autres, n'ayant pas nécessairement les mêmes éléments. En fait, ces opérations servent fréquemment à résoudre le problème inverse de *décomposition* : comment ramener un ensemble ordonné complexe à des composantes qui sont des ensembles ordonnés plus simples (ce qui permet d'y résoudre certains problèmes, cf. la section 1.6).

Toutes les opérations définies ci-dessous sont illustrées dans la figure 1.11 en fin de section.

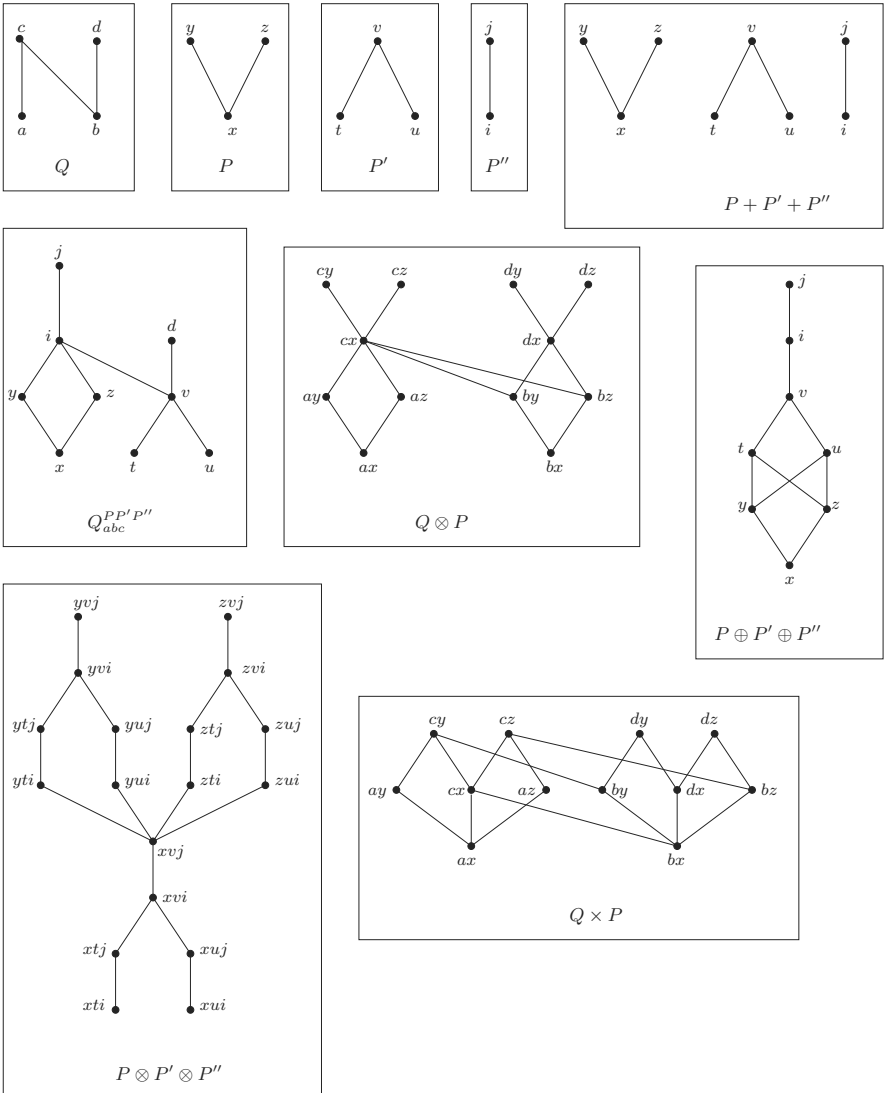


FIG. 1.11. Exemples d'opérations sur quatre ensembles ordonnés Q, P, P' et P'' .

1.5.1 Substitution, sommes cardinale et ordinale, produit lexicographique

Nous considérons d'abord l'opération fondamentale appelée *substitution* et dont des cas particuliers sont les opérations de *somme cardinale*, de *somme ordinale* et de *produit lexicographique*. Soit $Q = (Y, \leq_Q)$ un ensemble ordonné et considérons h ensembles ordonnés $P_i = (X_i, \leq_i)$ (avec $i = 1, \dots, h \leq |Y|$)

tels que les ensembles Y, X_1, \dots, X_h soient mutuellement disjoints. Etant donnés h éléments y_1, \dots, y_h distincts de Y , on note :

$$P = Q_{y_1 \dots y_h}^{P_1 \dots P_h}$$

l'ensemble ordonné obtenu en « substituant » à chaque élément y_i de Y l'ensemble ordonné P_i . De façon précise, en posant $P = (X, \leq_P)$ on a :

$$X = (Y \setminus \{y_1, \dots, y_h\}) \cup \left(\bigcup_{1 \leq i \leq h} X_i \right)$$

et

$$a \leq_P b \iff \begin{cases} a, b \in Y \setminus \{y_1, \dots, y_h\} \text{ et } a \leq_Q b, \text{ ou} \\ \exists i : a \in X_i, b \in Y \setminus \{y_1, \dots, y_h\} \text{ et } y_i <_Q b, \text{ ou} \\ \exists i : a \in Y \setminus \{y_1, \dots, y_h\}, b \in X_i \text{ et } a <_Q y_i, \text{ ou} \\ \exists i : a, b \in X_i \text{ et } a \leq_i b, \text{ ou} \\ \exists i \neq j : a \in X_i, b \in X_j \text{ et } y_i <_Q y_j \end{cases}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que \leq_P est bien un ordre sur X .

Cette opération de substitution est aussi parfois appelée *X-joint*, *somme lexicographique*, etc. Le diagramme de P s'obtient de la manière suivante : pour $i = 1, \dots, h$, on substitue au point représentatif de y_i le diagramme de P_i . Si y_j est couvert par y_i dans Q , les (points représentatifs des) éléments maximaux de X_j sont reliés aux (points représentatifs des) éléments minimaux de X_i dans P . De même, si $y \in Y \setminus \{y_1, \dots, y_h\}$ est couvert par y_i dans Q , y est relié aux éléments minimaux de X_i dans P . On opère dualement si y_i est couvert par y .

Un premier cas particulier de l'opération de substitution est obtenu en supposant que Q est l'antichaîne A_h à h éléments. On dit alors que l'ensemble ordonné P est la *somme cardinale* (ou la *somme parallèle*) des h ensembles ordonnés P_i , ce que l'on note :

$$P = \sum_{1 \leq i \leq h} P_i$$

(ou, plus simplement, $P = \sum_h P_i$).

En posant $P = (X, \leq_P)$, on a donc :

$$X = \bigcup_{1 \leq i \leq h} X_i$$

et

$$a \leq_P b \iff \exists i \text{ tel que } a, b \in X_i \text{ et } a \leq_i b$$

Le diagramme de P est obtenu simplement en « juxtaposant » ceux des P_i .

On remarque que, si les P_i sont connexes, ils forment les composantes connexes de P et, qu'inversement, tout ensemble ordonné est somme cardinale de ses composantes connexes. La somme cardinale des deux ensembles ordonnés P_1 et P_2 est notée $P_1 + P_2$. La notation $\sum_h R$ désigne la somme cardinale de h ensembles ordonnés isomorphes à l'ensemble ordonné R .

Supposons maintenant que Q soit la chaîne $C_h = y_1 < \dots < y_h$ à h éléments. On dit alors que P est la *somme ordinale* (ou la *somme en série*) des P_i , ce que l'on note :

$$P = \bigoplus_{1 \leq i \leq h} P_i$$

soit, avec $P = (X, \leq_P)$:

$$X = \bigcup_{1 \leq i \leq h} X_i$$

et

$$a \leq_P b \iff \begin{cases} a \in X_i, b \in X_j \text{ et } a \leq_i b & \text{si } i = j, \\ a \in X_i, b \in X_j \text{ et } y_i <_Q y_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

Au niveau des diagrammes, la somme ordinale revient à mettre les diagrammes des P_i les uns au-dessus des autres dans l'ordre de Q , en reliant, pour tout $i < h$, chaque élément maximal de P_i à chaque élément minimal de P_{i+1} .

La somme ordinale de P_1 et P_2 est notée $P_1 \oplus P_2$, tandis que la notation $\bigoplus_h R$ désigne la somme ordinale de h ensembles ordonnés isomorphes à l'ensemble ordonné R .

Remarque 1.43 Lorsque P_1 a un maximum u_1 et P_2 a un minimum 0_2 , on utilise aussi la variante suivante, appelée *somme ordinale fusionnée*, de la somme ordinale : $P_1 \oplus' P_2$ désigne l'ensemble ordonné obtenu à partir de $P_1 \oplus P_2$ en identifiant les éléments u_1 et 0_2 .

Nous définissons à présent l'opération de substitution particulière construisant le produit lexicographique de plusieurs ensembles ordonnés. Nous commençons par le cas de deux ensembles ordonnés $Q = (Y, \leq_Q)$ et $R = (Z, \leq_R)$. Le *produit lexicographique de Q par R* est l'ensemble ordonné $P = (X, \leq_P)$, que l'on note :

$$P = Q \otimes R$$

et défini par :

$$X = Y \times Z$$

et

$$(y, z) \leq_P (y', z') \iff [y <_Q y' \text{ ou } (y = y' \text{ et } z \leq_R z')]$$

Ceci est bien une opération de substitution ; en effet, si $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, construire $Q \otimes R$ revient, à l'isomorphisme près, à opérer la substitution $Q_{y_1, \dots, y_n}^{R, \dots, R}$ où l'on substitue une copie de R à chaque élément y_i de Y .

Nous définissons à présent ce produit dans le cas général d'un nombre quelconque d'ensembles ordonnés. Le produit lexicographique de h ensembles ordonnés $P_1 = (X_1, \leq_1), \dots, P_h = (X_h, \leq_h)$ est l'ensemble ordonné $P = (X, \leq_P)$, que l'on note :

$$P = \otimes_{1 \leq i \leq h} P_i$$

et défini par :

$$X = \prod_{1 \leq i \leq h} X_i$$

et

$$(x_1, \dots, x_i, \dots, x_h) \leq_P (x'_1, \dots, x'_i, \dots, x'_h)$$

si et seulement si

$$(x_1 < x'_1 \text{ ou il existe } i \in \{1, \dots, h\} \text{ tel que } x_1 = x'_1, \dots, x_{i-1} = x'_{i-1} \text{ et } x_i \leq_i x'_i).$$

évidemment, puisque $P = (\otimes_{1 \leq i \leq h-1} P_i) \otimes P_h$, ce produit peut être défini – récursivement – à partir de l'opération de substitution.

1.5.2 Produit direct

Nous définissons maintenant un autre produit qui, contrairement au précédent, n'est pas dérivé de l'opération de substitution. Pour des ensembles ordonnés $P_1 = (X_1, \leq_{P_1}), \dots, P_h = (X_h, \leq_{P_h})$, on appelle *produit direct* des P_i et l'on note

$$P = \prod_{1 \leq i \leq h} P_i$$

l'ensemble ordonné $P = (X, \leq_P)$ défini par :

$$X = \prod_{1 \leq i \leq h} X_i$$

et

$$(x_1, \dots, x_i, \dots, x_h) \leq_P (x'_1, \dots, x'_i, \dots, x'_h) \iff \forall i = 1, \dots, h, x_i \leq_{P_i} x'_i$$

Là encore, le lecteur vérifiera que \leq_P est bien un ordre sur X . Le produit direct de P_1 et P_2 est noté $P_1 \times P_2$. On a $(x_1, x_2) \prec_P (x'_1, x'_2)$ si et seulement si $x_1 = x'_1$ et $x_2 \prec x'_2$ ou $x_1 \prec x'_1$ et $x_2 = x'_2$. Le diagramme de $P_1 \times P_2$ s'obtient donc en remplaçant chaque élément x_1 de P_1 par $\{x_1\} \times P_2$ et en reliant les couples (x_1, x_2) aux couples (x'_1, x_2) avec $x_1 \prec x'_1$. Le lecteur généralisera cette construction au cas d'un nombre quelconque d'ensembles ordonnés. Le produit direct de n fois l'ensemble ordonné P est noté P^n .

La notion d'ordre produit direct est utile dans de multiples situations. Considérons, par exemple, le cas d'« objets » de nature quelconque repérés

par un ensemble de descripteurs (par exemple, les notes obtenues à différents examens par des étudiants). Dès que chacun de ces descripteurs induit un ordre sur les objets (par exemple, dès qu'il leur attribue des valeurs numériques), ceux-ci sont naturellement ordonnés par l'ordre produit direct de ces différents ordres. C'est ainsi que, dans une étude pour classer 65 insecticides d'après leur degré de dangerosité pour l'homme ou la nature (Carlsen [86], 1984), ceux-ci ont été d'abord partiellement ordonnés par l'ordre produit de plusieurs descripteurs (comme leur durée de vie ou leur toxicité). Pour obtenir un rangement (i.e. un préordre total) des insecticides, l'auteur a ensuite considéré les extensions linéaires de cet ordre produit direct et utilisé une formule (approximative) donnant la moyenne des rangs (définition 2.1) obtenus dans ces extensions linéaires par chaque insecticide.

Remarque 1.44 1. Une autre opération importante entre ensembles ordonnés, appelée l'« exponentiation », sera considérée à la section 3.1 du chapitre 3 (définition 3.4).

2. Les opérations définies dans cette section l'ont été en termes d'opérations entre des ensembles ordonnés, munis d'un ordre réflexif. Il va de soi qu'on pourrait les définir en termes d'ensembles ordonnés munis d'un ordre strict, et nous les utiliserons parfois dans ce cas. D'autre part, s'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra parler, par exemple, du produit direct de deux ordres plutôt que de celui de deux ensembles ordonnés.

1.6 Compléments et références

A la question « qu'est-ce qu'un ordre ? » posée par Russel en 1903, nous avons apporté deux réponses. La première, celle de la vulgate bourbakiste (anticipée par Peirce [338] en 1880) veut qu'un ordre soit une relation transitive, antisymétrique et réflexive. La seconde veut qu'un ordre soit une relation transitive et irreflexive (donc asymétrique) appelée alors généralement ordre strict. Cette deuxième conception apparaît d'abord dans le cas d'un ordre strictement total chez Russel et Huntington qui, sous le nom de « série » ou d'« ordre simple », la dégagent au début du vingtième siècle des travaux de différents auteurs (tels Cantor, de Morgan, Peano, etc.). Elle est ensuite étendue au cas général par Hausdorff [219] (1914), souvent considéré comme le premier auteur à avoir défini une notion abstraite d'ensemble ordonné, qu'il dénomme « teilweise geordnete Menge⁶ ». En fait, si la réflexivité de l'ordre peut être commode (par exemple, pour considérer ordres et équivalences comme deux cas particuliers des préordres), elle est souvent inutile. D'autre part, et contrairement à ce que l'on pourrait croire, les deux notions d'ordre et d'ordre strict

⁶ Une histoire de l'origine des notions d'ordre et, plus généralement, des notions de la théorie des ensembles, peut être trouvée dans un article de Cegielski [91] (1987).

ne sont pas tout à fait équivalentes. Certes, il suffit d'ajouter (respectivement, de retrancher) la réflexivité à un ordre strict (respectivement, à un ordre) pour en faire un ordre (respectivement, un ordre strict). Mais le cas des ordres stricts d'intervalles, étudiés à la section 7.1 du chapitre 7, montre que certaines caractérisations simples de ces ordres ne subsistent pas dans le cas des ordres (non stricts) d'intervalles.

Historiquement, l'étude des ensembles ordonnés a commencé par celle des treillis, d'abord à la fin du dix-neuvième siècle puis à partir des années trente du siècle dernier (cf. la section 2.5 du chapitre 2). Ce n'est que vers le début des années soixante que la théorie des ensembles ordonnés, notamment finis, commence à se développer considérablement sous des impulsions diverses : liens avec la combinatoire et les mathématiques discrètes, relations avec l'algorithmique et l'informatique théorique, applications variées notamment en recherche opérationnelle et en sciences sociales (cf. par exemple, Barbut et Monjardet [33], 1970). On trouvera les témoignages de ce développement dans les comptes-rendus des nombreuses conférences consacrées aux ensembles ordonnés depuis 1980 : *Ordered Sets* (Rival [362], ed. 1982), *Orders : Descriptions and Roles* (Pouzet et Richard [344], ed. 1984), *Graphs and Orders* (Rival [363], ed. 1985), *Combinatorics and Ordered Sets* (Rival [364], ed. 1986), *Algorithms and Orders* (Rival [365], ed. 1989), *Combinatorics of ordered sets* (Aigner et Wille [4], ed. 1991), ainsi que, depuis 1984, dans la revue spécialisée *Order*.

En ce qui concerne les liens avec les mathématiques discrètes, on notera d'abord que certaines propriétés ou certains outils d'étude des ensembles ordonnés peuvent être valables sur des structures plus générales. C'est ainsi que certaines propriétés des graphes de comparabilité résultent de ce qu'ils sont des « graphes parfaits » (cf. la section 4.5), et que l'opération de substitution de la section 1.5 peut être définie pour de nombreuses autres structures discrètes. On notera aussi que des propriétés d'ensembles ordonnés peuvent faciliter l'étude de certains graphes. C'est, par exemple, le cas pour les « graphes d'intervalles », qui sont les graphes d'incomparabilité des ordres d'intervalles (cf. le chapitre 7, sections 7.1 et 7.6). Et on remarquera enfin que de nombreux ensembles de structures combinatoires d'un type donné (par exemple, les partitions d'un ensemble ou les partages d'un entier) sont naturellement munis d'un ordre qui peut jouer un rôle important dans leur étude, ce point de vue étant excellemment présenté dans l'ouvrage *Combinatorial Theory* d'Aigner [3] (1979).

Il est naturel de chercher le nombre de structures finies d'un genre prescrit. L'exercice 1.1 propose de dénombrer les types d'ordres sur un ensemble de cardinal n au plus égal à 4. Mais, pour n croissant, ces dénombrements deviennent de plus en plus difficiles. On trouvera dans l'annexe C les tables donnant les nombres actuellement connus d'ordres et de types d'ordre, ainsi que des bornes asymptotiques pour le nombre d'ordres à n éléments. Ce dernier problème est un cas particulier du problème du calcul du nombre $|\mathcal{L}(P)|$ des extensions linéaires d'un ensemble ordonné P (ici l'antichaîne A_n), problème généralement

difficile (cf. Rival [359], 1984 et Brightwell et Winkler [79], 1991). Il peut toutefois être résolu pour certains ordres particuliers (cf. Atkinson [17], 1989). Dans certains cas, le problème est équivalent à d'autres problèmes classiques de dénombrements combinatoires. Ainsi, lorsque P est une partie commengante de (\mathbb{N}^2, \leq) , son nombre d'extensions linéaires est le nombre de tableaux de Young standards associés ; on consultera à ce sujet le chapitre 3 du livre d'Aigner [3] (1979) ou le livre de Stanley [388] (1986), ces deux ouvrages étant des références de base pour tout ce qui concerne l'utilisation des ensembles ordonnés (notamment la théorie des fonctions de Möbius) dans les problèmes de dénombrements. Les problèmes d'énumérations d'ordres particuliers sont présentés dans Quackenbush [348] (1982).

Un problème classique de tri consiste à déterminer un ordre total inconnu sur un ensemble d'éléments en posant une série de questions du type « l'élément x est-il inférieur à l'élément y » ? Ce problème et d'autres similaires ont conduit à de nombreux travaux sur la proportion d'extensions linéaires contenant un (ou des) couple(s) d'incomparabilité(s) d'un ensemble ordonné ; on trouvera sur ce thème des exposés généraux et des conjectures dans Graham [191] (1982), Saks [368] (1985), Winkler [429] (1986) et Atkinson [17] (1989).

Aux sections 1.1.2 et 1.1.3 nous avons défini plusieurs graphes associés à un ensemble ordonné. L'exercice 1.5 fournit une caractérisation du graphe orienté de couverture d'un ordre. Mais il n'existe pas de caractérisation des graphes de voisinage d'un ensemble ordonné, c'est-à-dire des graphes non orientés qu'on peut orienter de façon à ce qu'ils deviennent des graphes de couverture d'un ensemble ordonné. La condition nécessaire évidente d'être sans triangles est loin d'être suffisante, comme le montre l'exemple de la figure 1.12 ci-dessous, qui est le plus petit graphe sans triangles qui n'est pas un graphe de voisinage. Ce problème de caractérisation reste donc ouvert (cf. Rival [360], 1985).

On appelle *graphe de comparabilité* un graphe (non orienté et sans boucles) dont on peut orienter les arêtes de façon à ce que l'ensemble des arcs ainsi définis soit l'ensemble des couples d'une relation d'ordre (strict). Une telle orientation des arêtes s'appelle une *orientation transitive* du graphe. Par exemple, les graphes complets et les graphes bipartis sont des graphes de comparabilité (pourquoi ?), de même que tout graphe à moins de 5 sommets. Les graphes de comparabilité ont été caractérisés par Ghouila-Houri [182] (1962) et Gilmore

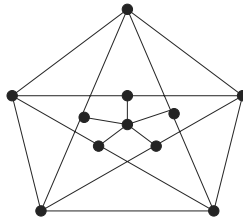


FIG. 1.12. Le plus petit graphe sans triangles qui n'est pas un graphe de voisinage.

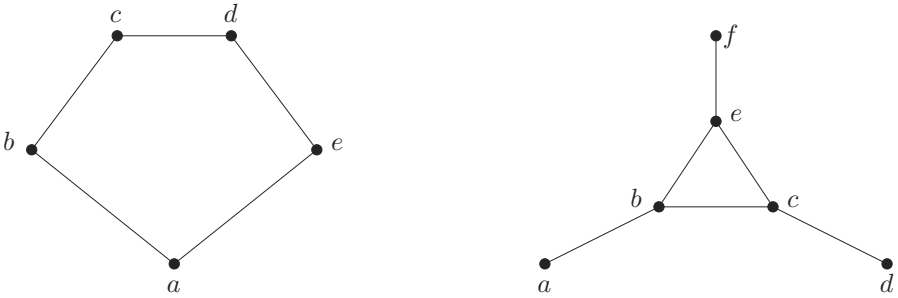


FIG. 1.13. Deux graphes qui ne sont pas de comparabilité.

et Hoffman [183] (1964) ; une suite de sommets $x_0, \dots, x_i, \dots, x_p = x_0$ d'un graphe G non orienté où deux sommets consécutifs x_i et x_{i+1} forment une arête de G est un *pseudo-cycle* de longueur p de G , dit impair si p est impair ; une *corde triangulaire* de ce pseudo-cycle est une arête de la forme $x_i x_{i+2}$ (l'addition d'indices se faisant modulo p). Les auteurs mentionnés précédemment ont montré qu'un graphe G non orienté est un graphe de comparabilité si et seulement si tout pseudo-cycle impair de G admet une corde triangulaire. La figure 1.13 montre deux exemples de graphes ne vérifiant pas cette condition (dans le second, le pseudo-cycle sans corde triangulaire est $abcdcefeba$, de longueur 9).

Une autre caractérisation des graphes de comparabilité, par sous-graphes exclus, a été donnée par Gallai [176] (1967). Les liens entre ces caractérisations ou d'autres, ainsi que les problèmes de reconnaissance de ces graphes, sont traités dans l'ouvrage de Golombic [186] (1980) – cf. aussi Golombic, Rotem et Urrutia [187] (1983) et les exposés de Kelly [240] (1985) et de Möhring [300] (1984).

Étant donné un graphe de comparabilité, on peut se poser la question de caractériser les ensembles ordonnés correspondant à ses orientations transitives. La réponse est fournie au moyen de l'opération de substitution définie à la section 1.5. On a en effet le résultat suivant (Dreesen, Poguntke et Winkler [128], 1985, Kelly [241], 1986), conséquence des résultats de Gallai [176] (1967) sur la décomposition par substitution des graphes de comparabilité : deux ensembles ordonnés P et Q ont même graphe de comparabilité si et seulement si Q peut être obtenu par une suite finie de transformations de P dont chacune consiste à substituer à un sous-ensemble ordonné homogène H de P son dual H^d . Un tel sous-ensemble ordonné est celui défini par une partie *P -homogène*, i.e. par un sous-ensemble H d'éléments de P ayant même « comportement » par rapport à tout élément extérieur (formellement, pour tous $x, y \in H$ et tout $z \notin H$, z est inférieur (respectivement, supérieur, incomparable) à x si et seulement si z est inférieur (respectivement, supérieur, incomparable) à y). Dire que l'on substitue H^d à H signifie que l'on inverse dans P toutes les

relations d'ordre entre éléments de H et que l'on conserve toutes les autres relations d'ordre de P . Une conséquence de ce résultat est que le graphe de comparabilité de P n'admet que deux orientations transitives (correspondant à P et à son dual P^d) si et seulement si P n'admet comme sous-ensembles ordonnés homogènes que lui-même et des antichaînes.

On peut formuler autrement le résultat précédent de caractérisation des ensembles ordonnés ayant même graphe de comparabilité. Appelons *paramètre d'ensemble ordonné* une application π définie sur la classe de tous les types d'ensembles ordonnés, et *propriété* un paramètre qui prend ses valeurs dans l'ensemble {vrai, faux}. En généralisant quelque peu la définition donnée à la page 20, on dit qu'un tel paramètre est un *invariant de comparabilité* si sa valeur ne dépend que du (type du) graphe de comparabilité $Comp(P)$ de l'ensemble ordonné P . Autrement dit, si $Comp(P)$ est isomorphe à $Comp(Q)$, on a $\pi(P) = \pi(Q)$. Le résultat précédent devient alors : un paramètre π d'ensemble ordonné est un invariant de comparabilité si et seulement si pour tout couple (P, R) d'ensembles ordonnés et pour tout élément x de P , on a $\pi(P_x^R) = \pi(P_x^{R^d})$ (où P_x^R est l'ensemble ordonné obtenu en substituant l'ensemble ordonné R à l'élément x de P).

En utilisant ce résultat, on montre sans difficulté que la dimension et le nombre d'extensions linéaires d'un ensemble ordonné sont des invariants de comparabilité (résultats dûs respectivement à Arditti [12], 1978 et Trotter, Moore et Sumner [411], 1976, Habib [208], 1984 et Stanley), de même que les propriétés d'être un ensemble ordonné série-parallèle, sans N couvrant ou d'intervalles (cf. la définition 2.12, chapitre 2), ainsi que la propriété de point fixe définie à l'exercice 3.2 (Dreesen, Poguntke et Winkler [128], 1985, Kelly [241], 1986).

A chacune des opérations sur les ensembles ordonnés définies à la section 1.5 correspond une notion de décomposabilité. Nous décrivons la plus importante, liée à la substitution et souvent appelée *décomposition modulaire*. Un ensemble ordonné P est dit *décomposable* (pour la substitution, ou modulairement) s'il existe $h + 1$ ensembles ordonnés Q, P_1, \dots, P_h , avec $|Q| > 1$ et $|P_i| > 1$ pour au moins un i , et des éléments y_1, \dots, y_h de Q , tels que : $P = Q_{y_1 \dots y_h}^{P_1 \dots P_h}$ (dans ce cas, Q est appelé un *quotient* de P). Sinon, P est dit *indécomposable* ou *premier* (par exemple, A_2 est premier mais non C_2).

On montre que, si P est décomposable, on a l'un (et l'un seul) des trois cas suivants :

1. Q est une antichaîne, ce qui revient à dire que P est la somme cardinale des P_i ,
2. Q est une chaîne, ce qui revient à dire que P est la somme ordinale des P_i ,
3. Q est un ensemble ordonné premier (uniquement déterminé) : P est dit « de type premier » et Q est appelé l'ensemble ordonné premier associé à P .

En réitérant l'opération de décomposition sur ceux des P_i obtenus qui sont décomposables, tout en prenant les quotients Q de taille maximum s'ils sont des chaînes ou des antichaînes, on obtient finalement un *arbre canonique de décomposition*. La racine de cet arbre (qui est en fait une arborescence), correspond à P et ses sommets terminaux aux éléments de P . Le nombre maximum de sommets couverts par un sommet de cet arbre est appelé le *diamètre de décomposition* de P . Pour certaines classes d'ensembles ordonnés, notamment celle des ensembles ordonnés dont le diamètre de décomposition est borné, l'utilisation de cet arbre canonique de décomposition permet de résoudre efficacement plusieurs problèmes de nature algorithmique (voir sur ces points les excellentes synthèses de Möhring [300] (1984) et [301] (1989), ainsi que l'annexe A, section A.2.3).

L'opération de substitution, définie ici pour des ensembles ordonnés, peut se définir pour de nombreuses structures discrètes et conduit donc à une théorie de la décomposition de ces structures qui a notamment d'importantes applications algorithmiques. Une théorie plus générale de la décomposition des structures discrètes a été introduite par Cunningham et Edmonds [109] (la « split décomposition ») en 1980 et appliquée aux ensembles ordonnés par Wagner [419] (1990).

Les possibilités de simplification pour les opérations sur les ensembles ordonnés ont fait l'objet de nombreux travaux. On a ainsi montré les résultats suivants :

- $P \times Q \equiv P \times R$ implique $Q \equiv R$,
- P non antichaîne et $P^Q \equiv P^R$ impliquent $Q \equiv R$,
- P et Q connexes tels que $P^P \equiv Q^Q$ ou $P^Q \equiv Q^P$ impliquent $P \equiv Q$,
- $P^R \equiv Q^R$ implique $P \equiv Q$,

(cf. les articles de synthèse de Jónsson [231], 1982, Jónsson et McKenzie [232], 1982, Davey et Duffus [111], 1982, Duffus [131], 1984, ainsi que l'article de McKenzie [293], 2000).

Signalons pour finir que, si les opérations étudiées dans la section 1.5 conduisent toujours à un ordre, la réunion ensembliste d'ordres peut conduire à une relation quelconque. Fishburn et Spencer [164] (1971) ont étudié le nombre minimum d'ordres (stricts) dont la réunion est une relation (irréflexive) donnée ainsi que le maximum de ce nombre pour les relations définies sur un ensemble à n éléments.

1.7 Exercices

Exercice 1.1 [DÉNOMBREMENT DE PETITS ORDRES] Dénombrer en les représentant par des diagrammes tous les types d'ordres à 1, 2, 3, 4 éléments (l'annexe B permettra au lecteur de trouver la réponse).

Montrer que deux ensembles totalement ordonnés à n éléments sont isomorphes.

Montrer qu'il existe 5 (respectivement, 16) types d'ensembles ordonnés à 3 (respectivement, 4) éléments non isomorphes.

Exercice 1.2 [COUPLES P -CRITIQUES] Soient x, y deux éléments incomparables d'un ensemble ordonné P et F l'ordre de forçage associé à P (cf. la définition 1.35). Montrer l'équivalence des points suivants :

- (x, y) est P -critique,
- $(x, y) \in \text{Max}F$,
- $(y, x) \in \text{Min}F$,
- $(x[\subset (y[\text{ et }]y) \subset]x)$ (i.e. $x \uparrow y$),
- $P^-x \subset (y[\text{ et } yP^+ \subset]x)$.

En notant $\text{Crit}(P)$ l'ensemble des couples P -critiques de P , en déduire les inclusions suivantes : $(\text{Max}P \times \text{Min}P) \cap \text{Inc}_P \subseteq \text{Crit}(P) \subseteq (I(P) \times S(P)) \cap \text{Inc}_P$.

Montrer que dans l'ensemble \mathcal{O}_n de tous les ordres à n éléments, ordonné par l'inclusion (cf. l'exemple 1.13), P est couvert par Q si et seulement si $|Q| = |P| + 1$.

Montrer enfin que, sauf si P est totalement ordonné, il existe au moins deux ensembles ordonnés le couvrant.

N.B. Ce dernier point revient à montrer que, dans ce cas, P admet au moins deux couples P -critiques.

Exercice 1.3 [ORDRES SUR LES MOTS] Soit (V, \leq) un ensemble totalement ordonné. Un *mot* (de longueur p) sur V est une suite $a_1 a_2 \dots a_p$ de p éléments de V . On note V^* l'ensemble des mots sur V et l'on définit une relation \leq_1 sur V^* en posant $a_1 a_2 \dots a_p \leq_1 b_1 b_2 \dots b_q$ s'il existe i avec $0 \leq i \leq p$ tel que $a_1 = b_1, \dots, a_i = b_i$ et tel que ($i = p \leq q$ ou ($i < p$ et $a_{i+1} < b_{i+1}$)). Montrer que \leq_1 est un ordre total – appelé *ordre lexicographique* – sur l'ensemble des mots (c'est l'ordre usuel des dictionnaires).

On définit une seconde relation \leq_2 sur les mots en posant $a_1 a_2 \dots a_p \leq_2 b_1 b_2 \dots b_q$ si $p < q$ ou si ($p = q$ et $a_1 a_2 \dots a_p \leq_1 b_1 b_2 \dots b_q$). Montrer que \leq_2 est un ordre total (c'est l'ordre des dictionnaires de mots croisés).

On définit une troisième relation \leq_3 sur les mots en posant $a_1 a_2 \dots a_p \leq_3 b_1 b_2 \dots b_q$ si $p \leq q$ et si, pour $j = q - p + 1$, on a $a_1 a_2 \dots a_p = b_j b_{j+1} \dots b_{j+p-1}$. Montrer que \leq_3 est un ordre, appelé *ordre facteur droit* sur V^* . Comment définirait-on un ordre facteur gauche sur V^* ? Même question pour un ordre facteur.

On pose $V = \{a < b\}$ et $V_3^* = \{\text{mots de } V^* \text{ de longueur au plus égale à } 3\}$. Représenter les diagrammes de V_3^* muni de chacun des ordres précédents.

Exercice 1.4 [ORDRES SUR LES PARTAGES, Aigner [3]] Un *partage* de l'entier n est une suite décroissante de n entiers $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_n \geq 0$, appelés les *parts du partage*, tels que leur somme égale n . Montrer que les trois relations suivantes définissent trois ordres sur l'ensemble des partages de n . Soient $\mu = (m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n)$ et $\nu = (n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_n)$ deux partages de n .

- μ est *lexicographiquement inférieur ou égal* à ν si $\mu = \nu$ ou si, pour $i = 1, 2, \dots, k$ ($k < n$), $m_i = n_i$, et $m_{k+1} < n_{k+1}$.
- μ est *plus fin* que ν s'il existe une partition des parts de μ telle que les sommes des entiers dans les classes de cette partition soient les parts de ν .
- μ est *dominé* par ν si, pour $i = 1, 2, \dots, n$, on a $m_1 + m_2 + \dots + m_i \leq n_1 + n_2 + \dots + n_i$ (ce dernier ordre, appelé *ordre de dominance* ou aussi *ordre de majoration*, est important en combinatoire et dans bien d'autres domaines, comme la théorie des inégalités).

Représenter les diagrammes de ces ordres pour l'ensemble des partages des entiers 5, 6 et 7.

Exercice 1.5 [GRAPHE DE COUVERTURE] Dans un graphe orienté irréflexif G , le chemin $x_0x_1 \dots x_p$ (avec $p \geq 2$) est un *circuit* s'il vérifie $x_0 = x_p$; c'est un *quasi-circuit* si c'est un chemin tel que x_0x_p est un arc de G (il suffit donc d'inverser cet arc pour obtenir un circuit). Montrer qu'un graphe orienté G est le graphe de couverture d'un ordre si et seulement si G ne contient ni circuit, ni quasi-circuit tel que $p \geq 2$.

Exercice 1.6 [FERMETURE RÉFLEXO-TRANSITIVE] Montrer que la fermeture réflexo-transitive d'un graphe orienté $G = (X, U)$ (voir la définition à l'exemple 1.20) est le plus petit graphe de préordre (X, R) « contenant » G (i.e. tel que xUy implique xRy).

Montrer que, si G est sans circuit, sa fermeture réflexo-transitive est un ensemble ordonné. Montrer que le graphe de couverture d'un ensemble ordonné P est le plus petit graphe orienté dont la fermeture réflexo-transitive est égale à P .

Soient x, y deux éléments incomparables d'un ensemble ordonné P . Montrer que la fermeture réflexo-transitive du graphe de $P + (x, y)$ est un ensemble ordonné extension de P . En déduire qu'il existe une extension linéaire de P contenant le couple (x, y) et que l'intersection de toutes les extensions linéaires de P est P (cf. le théorème 2.29).

Exercice 1.7 [PARTIES COMMENÇANTES ET FINISSANTES] Représenter l'ensemble ordonné par inclusion des parties commençantes de l'ensemble ordonné de la figure 1.4, des trois ensembles ordonnés de la figure 1.5 et de P dans la figure 1.7 (les nombres de ces parties commençantes sont respectivement 10, 5, 16, 20 et 15).

Même exercice en remplaçant « partie commençante » par « partie finissante ». Que remarquez-vous ?

Montrer qu'il existe une bijection entre parties commençantes et parties finissantes d'un ensemble ordonné. Définir une bijection entre les parties commençantes et les antichaînes d'un ensemble ordonné. En déduire une relation d'ordre entre antichaînes d'un ensemble ordonné.

Exercice 1.8 [CONSTRUCTION D'UNE EXTENSION LINÉAIRE D'UN ORDRE] Montrer que tout ensemble ordonné a (au moins) un élément minimal. On définit un ordre total $x_1x_2\dots x_n$ sur l'ensemble ordonné (X, \leq) à n éléments en prenant pour x_1 un élément minimal de $X_1 = X$ et, pour tout x_i (avec $1 < i \leq n$), un élément minimal de $X_i = X_{i-1} \setminus \{x_{i-1}\}$. Montrer que cet ordre total est une extension linéaire de l'ordre \leq et que toute extension linéaire de (X, \leq) peut s'obtenir de cette manière.

Exercice 1.9 [ORDRE DE DIVISIBILITÉ ENTRE ENTIERS] Montrer que la relation de divisibilité définie sur l'ensemble des entiers positifs est une relation d'ordre.

Tracer les diagrammes des ensembles d'entiers suivants ordonnés par l'ordre de divisibilité ($i \leq j$ si i est un diviseur de j) :

- {Entiers de 1 à 10},
- {Entiers diviseurs de 16},
- {Entiers diviseurs de 30},
- {Entiers diviseurs de 36}.

Quels sont parmi ces ensembles ordonnés ceux qui sont produits directs de chaînes ? Généraliser ce résultat.

Exercice 1.10 [PRÉORDRES DES SECTIONS] Soit R une relation binaire sur un ensemble X et x un élément de X . On pose $xR = \{z \in X : xRz\}$ et $Rx = \{z \in X : zRx\}$, ces deux ensembles étant respectivement appelés *section finissante* et *section commençante de base x* . On définit trois préordres sur X , appelés respectivement *trace à droite*, *trace à gauche* et *trace*, en posant $xT_d y$ si $xR \supseteq yR$, $xT_g y$ si $Rx \subseteq Ry$, et $T = T_d \cap T_g$.

Une relation binaire R sur X est un *tournoi* si elle est totale et antisymétrique (définition 2.24). Montrer que, pour un tournoi R , les deux préordres T_d et T_g sont deux ordres identiques contenus dans R . Montrer que x est un élément maximal de l'ensemble ordonné (X, T) si et seulement si, pour tout $y \in X$, il existe $z \in X$ tel que $(x, z) \in R$ et $(z, y) \in R$ (z s'appelle alors un *centre* du tournoi). Que deviennent ces résultats si R est un tournoi transitif ?

Classes particulières d'ensembles ordonnés

Ce livre contient des résultats, comme les théorèmes de Dilworth (au chapitre 4) ou d'Hiraguchi (au chapitre 6), valables pour tout ensemble ordonné. Toutefois ce type de résultat est assez rare. La notion d'ordre, bien que fort restrictive relativement à celle de relation quelconque, reste en effet très générale comme en témoigne l'immensité du nombre d'ordres différents que l'on peut obtenir sur un ensemble de cardinal peu élevé (plus de deux millions de types d'ordres sur un ensemble à 10 éléments ! Voir l'annexe C). Mais, en pratique, les ordres apparaissant dans la « nature » appartiennent le plus souvent à une classe particulière d'ordres. Ces classes peuvent être définies de très nombreuses manières. Elles s'obtiennent, par exemple, en fixant la valeur d'un paramètre (comme les ordres de dimension 2 étudiés à la section 6.3), en interdisant la présence de certaines configurations (comme les ordres d'intervalles de l'exemple 1.22 et de la section 2.2), en construisant la classe par itération de certaines opérations sur une famille d'ordres initiaux (les ordres *séries-parallèles* définis à la section 2.2). Nous donnons ci-dessous quelques-unes des classes d'ordres les plus courantes et que l'on retrouvera constamment dans cet ouvrage. Bien que nous ne les définissions ici que d'une seule manière, on verra dans les exercices ou ultérieurement que ces classes ont souvent plusieurs définitions alternatives, ce qui explique qu'elles aient pu apparaître indépendamment dans des contextes variés et renforce leur intérêt.

La première section développe le cas des ensembles ordonnés rangés et, en particulier, ceux des ensembles ordonnés semi-modulaires et des ensembles ordonnés bipartis. Dans la section 2.2, nous présentons un certain nombre d'ensembles ordonnés définis par configurations exclues, c'est-à-dire tels que leur ordre – ou un graphe associé – ne contient pas une certaine sous-structure déterminée. La section 2.3 consiste en une introduction aux treillis et demi-treillis, appelés aussi ensembles ordonnés « latticiels ». Nous y donnons les définitions de base mais également certains résultats issus du caractère ip-sodual de la classe des treillis. Au sein de cette classe, la sous-classe des treillis distributifs s'avère particulièrement importante (cf. le chapitre 5) et nous en présentons rapidement certains aspects. La section suivante présente

les liens existant entre les ensembles totalement ordonnés et les relations dites de « tournois » (appelées ainsi car elles modélisent les résultats de certains tournois sportifs comme le tournoi de rugby des 6 nations).

2.1 Ensembles ordonnés rangés, semi-modulaires et bipartis

Définition 2.1 *Un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est rangé (ou gradué) s'il admet un rang (on dit aussi une graduation), i.e. une application r de X dans l'ensemble ordonné des entiers (\mathbb{N}, \leq) conservant la relation de couverture :*

$$x < y \implies r(y) = r(x) + 1$$

Autrement dit, si y couvre x , son rang est supérieur d'une unité à celui de x .

Tout ensemble ordonné rangé admet une infinité de rangs, puisque l'addition d'une constante entière à un rang détermine encore un rang. Le rang de P est dit *normé* si $r(x) = 0$ pour au moins un élément minimal de P , i.e. si la plus petite valeur possible du rang est atteinte. On peut montrer que, si P est connexe, le rang normé est unique. En particulier, si P est rangé et a un minimum 0_P , P admet un rang normé unique, celui-ci vérifiant $r(0_P) = 0$. Dans le cas d'un ensemble ordonné P rangé admettant un unique rang normé, noté r , on pose :

$$r(P) = \max_{x \in P} r(x)$$

$r(P)$ s'appelle alors le *rang* de P .

N.B. Le terme « rang de P » peut désigner tantôt le paramètre $r(P)$ tantôt l'application rang définie sur P , le contexte permettant de déterminer son sens.

La figure 2.1 donne les rangs normés de trois ensembles ordonnés rangés. Le lecteur vérifiera par ailleurs que l'ensemble ordonné de la figure 1.4 (page 8) n'est pas rangé.

Désormais et sauf mention contraire, on assimilera « rang » et « rang normé ».

On remarque que, si P est rangé, son rang n'est pas toujours égal à sa longueur – c'est-à-dire à la longueur maximum de ses chaînes (trouver un exemple).

Les ensembles ordonnés 2^E , \mathcal{O}_n , Σ_n et \mathcal{P}_E (exemples 1.12, 1.13, 1.17 et 1.14) présentés au chapitre 1 sont rangés, leurs (applications) rangs normés étant, respectivement, le cardinal d'une partie de E , le nombre de couples (x, y) avec $x \neq y$ d'un ordre, le nombre de commutations montantes opérées pour passer de la permutation d'origine (i.e. la plus petite relativement à l'ordre permutaoèdre sur les permutations) à une permutation s , le cardinal de l'ensemble E diminué du nombre de classes d'une partition de E . Les treillis

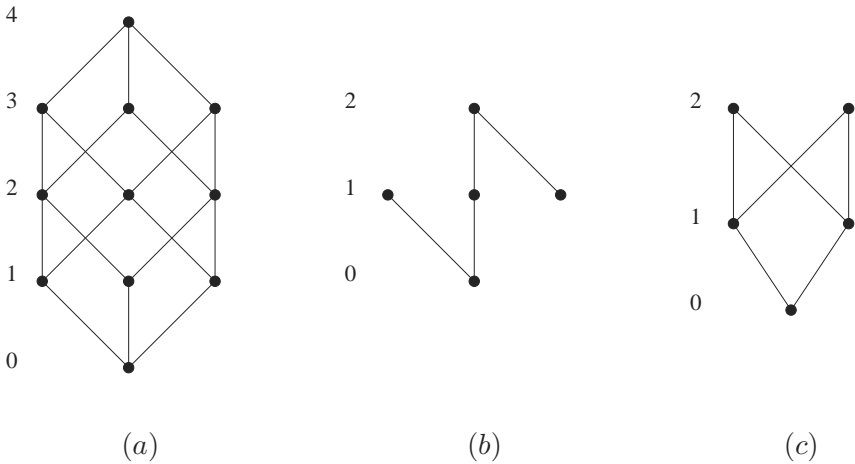


FIG. 2.1. Trois ensembles ordonnés rangés avec indication de leur rang normé.

distributifs présentés à la section 2.3 sont également rangés (on trouvera une expression de ce rang à la proposition 5.13 du chapitre 5).

Si P est rangé et k est un entier positif ou nul, on pose $N_k = \{x \in P : r(x) = k\}$. Les N_k non vides s'appellent les *niveaux* (de rang k) de P . On remarque qu'ils forment une partition en antichaînes de P (pourquoi?). On pose, pour tout ensemble ordonné P rangé :

$$\nu(P) = \max_{k \leq r(P)} |N_k|$$

$\nu(P)$ est donc le nombre maximum d'éléments d'un niveau de P et puisque ces niveaux sont des antichaînes, on a (en rappelant que $\alpha(P)$ est la largeur de P , voir la définition 1.30) :

$$\nu(P) \leq \alpha(P)$$

Remarque 2.2 Un ensemble ordonné P rangé est dit *de Sperner* s'il vérifie $\nu(P) = \alpha(P)$. Ce terme sera justifié au chapitre 4, dont une grande partie est consacrée à l'étude de ces ensembles ordonnés.

Pour tout élément x d'un ensemble ordonné P , on définit la *hauteur* de x , notée $h(x)$, comme la longueur maximum d'une chaîne d'extrémité x . L'application hauteur ainsi définie de P dans \mathbb{N} vérifie :

$$x \prec y \implies h(y) \geq h(x) + 1$$

(pourquoi?), mais h n'est pas en général un rang, même si P est rangé (cf. la figure 2.1(b)). On remarquera que l'entier $h(P) = \max_{x \in P} h(x)$ est égal à ce que nous avons appelé la *longueur de P* au chapitre 1 (page 20).

La définition et le résultat suivants vont permettre d'obtenir une classe d'ensembles ordonnés où la hauteur est un rang.

Définition 2.3 *Un ensemble ordonné P vérifie (la propriété de) Jordan–Dedekind si, pour tous $x, y \in P$ avec $x < y$, toutes les chaînes maximales de x à y ont même longueur (dépendante uniquement de x et y).*

Théorème 2.4 *Soit P un ensemble ordonné. Chacune des conditions ci-dessous implique la suivante :*

1. *La hauteur h définie sur P est un rang,*
2. *P est rangé,*
3. *P vérifie Jordan–Dedekind.*

Si de plus, P a un minimum, les trois conditions sont équivalentes.

Preuve. L'implication de (2) par (1) est immédiate. Montrons que (2) entraîne (3). Soient x et y deux éléments comparables de P rangé (avec $x < y$) et soit $x = x_0 < x_1 < \dots < x_p = y$ une chaîne maximale de x à y . La longueur p de cette chaîne est égale à $r(y) - r(x)$ et est donc indépendante de la chaîne considérée (puisque'elle ne dépend que des rangs de x et de y). Il en résulte que toutes les chaînes maximales de x à y ont cette même longueur. Ceci étant vrai pour toute paire d'éléments comparables, on obtient la propriété de Jordan–Dedekind.

Supposons à présent que P possède un minimum 0_P . On montre qu'alors (3) implique (1). Soient x et y deux éléments de P avec $x < y$. D'après Jordan–Dedekind, toutes les chaînes maximales entre 0_P et x ont même longueur, qui est donc égale à la hauteur $h(x)$ de x . Une chaîne maximale particulière entre 0_P et y est constituée d'une chaîne maximale entre 0_P et x prolongée de l'arc de couverture (x, y) . Or, cette chaîne maximale entre 0_P et y a pour longueur $h(x) + 1$ ce qui, toujours par Jordan–Dedekind, implique $h(y) = h(x) + 1$, et h est bien un rang de P . \square

Remarque 2.5 1. Les implications inverses de ce théorème ne sont généralement pas vérifiées, comme l'illustrent les ensembles ordonnés P et P' de la figure 2.2 ci-dessous. En effet, l'ensemble ordonné P (qui n'est autre que celui de l'exemple 1.2) vérifie « trivialement » Jordan–Dedekind (entre toute paire d'éléments comparables, il n'existe qu'une chaîne maximale) mais n'est pas rangé. Quant à P' , il est rangé mais sa hauteur n'est pas un rang.

2. Le théorème 2.4 admet une version duale où, dans son premier point, on remplace la hauteur par la fonction f de P dans \mathbb{N} définie par $f(x) = |P| - p(x)$ (avec $p(x)$ la *profondeur* de x , définie comme la longueur maximum d'une chaîne d'origine x) et où l'on remplace « minimum » par « maximum ».

3. Enfin, le lecteur pourra démontrer que la hauteur h d'un ensemble ordonné P est un rang de P si et seulement si tous les éléments minimaux de P ont même rang (donc égal à 0).

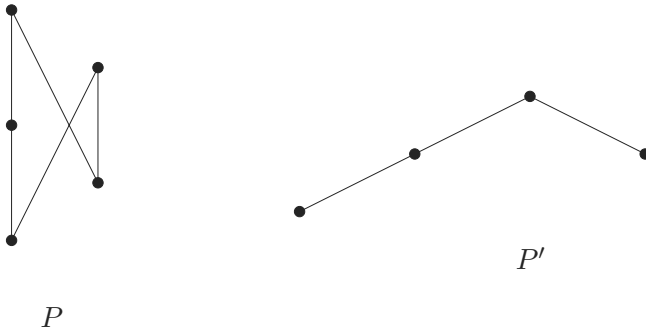


FIG. 2.2. Contre-exemples aux réciproques du théorème 2.4.

Dans les ensembles ordonnés rangés, on trouve des sous-classes particulières dont, parmi les plus importantes, la classe des ensembles ordonnés *bipartis* et celle des ensembles ordonnés *semi-modulaires*, que nous définissons ci-dessous. Alors qu'il est évident que les ensembles ordonnés bipartis sont rangés, le fait que les ensembles ordonnés semi-modulaires le sont aussi (théorème 2.10) est la conséquence de deux lemmes non triviaux.

Définition 2.6 *Un ensemble ordonné P est biparti si l'étendue $\kappa(P)$ de P est égale à 2, c'est-à-dire si P est de longueur 1.*

Un tel ensemble ordonné est évidemment rangé, l'ensemble A de ses éléments minimaux et l'ensemble B de ses éléments maximaux constituant ses deux niveaux, respectivement, de rang 0 et de rang 1. Un tel ensemble ordonné sera généralement noté $(A + B, \leq)$. La figure 2.3 donne trois exemples d'ensembles ordonnés bipartis. Le premier est l'ensemble ordonné biparti complet $K_{4,3}$ – plus généralement, on note $K_{p,q}$ l'ensemble ordonné biparti où chacun des p éléments minimaux est inférieur à chacun des q éléments maximaux. Le second exemple est la couronne CR_4 – plus généralement, on appelle couronne CR_p l'ensemble ordonné formé de p éléments minimaux a_1, \dots, a_p et de p éléments maximaux b_1, \dots, b_p vérifiant $a_i \prec b_{i-1}, b_i$ pour tout $1 < i \leq p$ et $a_1 \prec b_p, b_1$. Le dernier exemple est un cas particulier d'ensemble ordonné *chaînes-alternées* dont la classe constitue une autre classe importante d'ensembles ordonnés bipartis (voir, par exemple, le début de la section 3.6 du chapitre 3).

Définition 2.7 *Un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est semi-modulaire supérieurement (SMS) si, pour tous $x, y, z \in P$ avec $z \prec x$ et $z \prec y$, il existe $t \in X$ tel que $x \prec t$ et $y \prec t$. De la même manière, P est semi-modulaire inférieurement (SMI) si le dual de P est semi-modulaire supérieurement, i.e. si, pour tous $x, y, z \in P$ avec $x \prec z$ et $y \prec z$, il existe $t \in X$ tel que $t \prec x$*

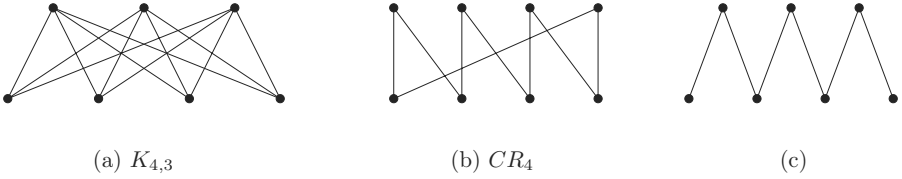


FIG. 2.3. (a) $K_{4,3}$, (b) CR_4 et (c) un ensemble ordonné chaînes-alternées.

et $t \prec y$. Enfin, P est modulaire si P est semi-modulaire inférieurement et supérieurement.

L'ensemble ordonné de la figure 2.1(c) est semi-modulaire inférieurement mais pas supérieurement.

Afin d'établir le théorème 2.10 sur les ensembles ordonnés SMS , nous commençons par démontrer les deux lemmes suivants :

Lemme 2.8 Soit P un ensemble ordonné semi-modulaire supérieurement. Si P est connexe, alors P admet un maximum 1_P .

Preuve. Soit P SMS et connexe. Supposons que P possède deux éléments maximaux distincts x et y . P étant connexe, il existe une suite $x = x_0, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k = y$ d'éléments de P tels que, pour tout $i < k$, on a soit $x_i \prec x_{i+1}$ soit $x_{i+1} \prec x_i$. De plus, puisque x et y sont maximaux dans P (donc incomparables), il existe au moins un entier $0 < i < k$ pour lequel $x_i \prec x_{i+1}$ (sinon, on aurait $y < x$). Si i_0 est le plus petit entier vérifiant cette propriété, on a $x_{i_0} \prec x_{i_0-1}$ et $x_{i_0} \prec x_{i_0+1}$ ce qui entraîne (car P est SMS) l'existence d'un élément z_1 de P couvrant x_{i_0-1} et x_{i_0+1} . On ne peut avoir $x_{i_0-1} = x$ car x est maximal dans P , donc il existe – toujours par semi-modularité supérieure – un élément z_2 de P couvrant les éléments x_{i_0-2} et z_1 . A nouveau, on doit avoir $x_{i_0-2} \neq x$. En itérant ce raisonnement, on aboutit à l'existence d'un élément z de P couvrant x , ce qui contredit la maximalité de x dans P . Finalement, P a bien un maximum 1_P . \square

Lemme 2.9 Soit P un ensemble ordonné semi-modulaire supérieurement. Si P est connexe, alors il est rangé.

Preuve. Nous démontrons que P vérifie Jordan–Dedekind ce qui, d'après le lemme 2.8 et la version duale du théorème 2.4 (cf. le point (2) de la remarque 2.5), entraînera que P est rangé. Dans un premier temps, on prouve par récurrence Jordan–Dedekind sur tout intervalle $[x, 1_P]$ de P . Pour ce faire, considérons, pour tout $m > 0$, la propriété $P(m)$ suivante :

Pour tout $x \neq 1_P$ de P , s'il existe une chaîne maximale de longueur m entre x et 1_P , alors toutes les chaînes maximales entre x et 1_P ont pour longueur m .

$P(1)$ est clairement satisfaite (puisque s'il existe une chaîne maximale C de longueur 1 entre un élément x et 1_P , c'est que x est couvert par 1_P et C est alors l'unique chaîne reliant x à 1_P). Supposons maintenant $P(m)$ vraie pour $m > 1$ et soit $x \in P$ tel qu'il existe une chaîne maximale $C = x \prec x_1 \prec \dots \prec x_m \prec 1_P$ de longueur $m + 1$ entre x et 1_P . Trois cas peuvent se produire : (a) si C est l'unique chaîne maximale entre x et 1_P , $P(m + 1)$ est vraie pour x ; (b) Si toutes les chaînes maximales entre x et 1_P passent par l'élément x_1 , elles sont alors constituées de l'arc de couverture (x, x_1) prolongé d'une chaîne maximale entre x_1 et 1_P , de longueur m par application de $P(m)$. Toutes les chaînes maximales entre x et 1_P sont ainsi de longueur $m + 1$. (c) S'il existe au moins une autre chaîne maximale entre x et 1_P , qui ne contienne pas x_1 , notons $C' = x \prec x'_1 \prec \dots \prec x'_q \prec 1_P$ cette chaîne, dont la longueur vaut $q + 1$ et montrons que $q = m$. Puisque P est SMS et que $x \prec x_1, x'_1$, il existe $y \in P$ avec $x_1, x'_1 \prec y$. Notons C_y une chaîne maximale entre y et 1_P . La partie de C entre x_1 et 1_P est une chaîne maximale entre x_1 et 1_P de longueur m donc, par hypothèse de récurrence, toutes les chaînes maximales entre x_1 et 1_P ont cette longueur. La chaîne maximale constituée du couple de couverture (x_1, y) prolongé de C_y est ainsi de longueur m , impliquant que la longueur de C_y est $m - 1$. Par conséquent, la chaîne maximale entre x'_1 et 1_P constituée du couple de couverture (x'_1, y) prolongé de C_y est de longueur m et, à nouveau par hypothèse de récurrence, la partie de C' entre x'_1 et 1_P est de longueur m . Finalement, la longueur de C' est bien $m + 1$ et $P(m + 1)$ est satisfaite.

Nous pouvons alors conclure que Jordan–Dedekind est satisfaite sur P . En effet, soient deux éléments x et y de P avec $x < y$. Toutes les chaînes maximales entre x et 1_P ont même longueur – égale à la profondeur de x (voir page 46). Il en va de même pour les chaînes maximales entre y et 1_P – dont la longueur égale la profondeur de y . Toute chaîne maximale entre x et y a ainsi pour longueur la différence de ces deux profondeurs, qui ne dépend que de x et de y . \square

Le théorème suivant est obtenu comme corollaire direct du lemme 2.9 et en observant qu'un ensemble ordonné est rangé (respectivement, SMS) si et seulement si toutes ses composantes connexes le sont.

Théorème 2.10 *Tout ensemble ordonné P semi-modulaire supérieurement est rangé.*

Remarque 2.11 1. Les lemmes 2.8 et 2.9 et le théorème 2.10 admettent des résultats duaux obtenus en remplaçant « semi-modulaire supérieurement » par « semi-modulaire inférieurement » et « maximum » par « minimum ».

2. On verra au chapitre 5 que les treillis distributifs sont semi-modulaires supérieurement (et inférieurement), et qu'ils sont donc également rangés. De plus, comme ils ont un minimum, la hauteur y est un rang.

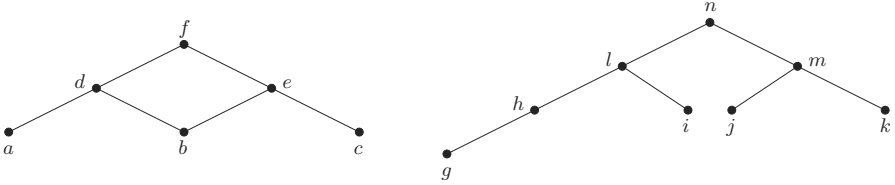


FIG. 2.4. Un ensemble ordonné semi-modulaire supérieurement à 2 composantes connexes.

2.2 Ensembles ordonnés définis par configurations exclues

Il existe d'importantes classes d'ensembles ordonnés définies par le fait que leur ordre (ou un de leurs graphes associés) ne contient pas un sous-ordre (ou un sous-graphe) d'un type donné.

La figure 2.5 contient les 7 types d'ensembles ordonnés à 2 ou 3 éléments (C_2 , A_2 , C_3 , A_3 , $A_2 \oplus A_1$, $A_1 \oplus A_2$ et $C_1 + C_2$) ainsi que 3 types particuliers d'ensembles ordonnés à 4 éléments ($C_1 + C_3$, $C_2 + C_2$ et N_4). On dira qu'un ensemble ordonné *ne contient pas l'un de ces types* s'il n'admet aucun sous-ensemble ordonné de ce type.

Il est immédiat de constater qu'un ensemble ordonné P ne contient pas C_2 (respectivement, A_2) si et seulement si P est une antichaîne (respectivement, une chaîne). De même, P ne contient pas C_3 si et seulement si P est une antichaîne ou est biparti.

Les classes d'ensembles ordonnés que nous considérons à présent sont définies par configurations exclues au moyen des ensembles ordonnés précisés dans la figure 2.5.

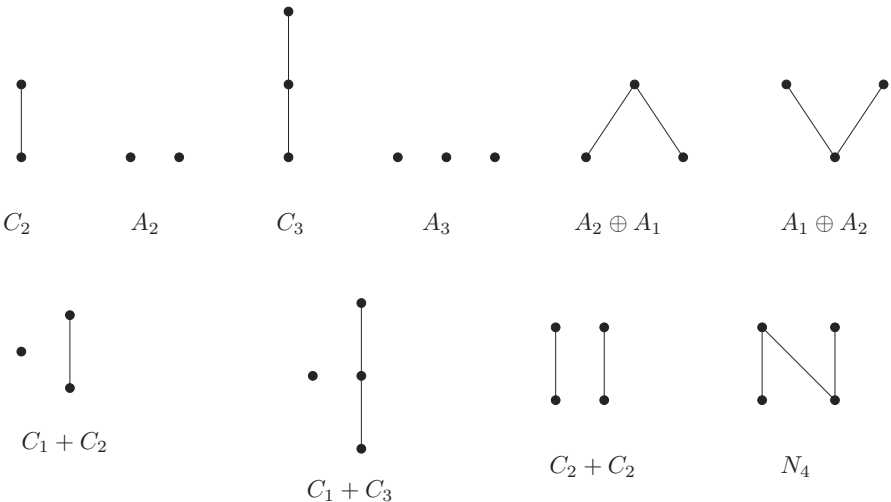


FIG. 2.5. 10 types particuliers d'ensembles ordonnés à 2, 3 ou 4 éléments.

Définition 2.12 Soit P un ensemble ordonné.

1. P est une bichaîne si P ne contient pas A_3 et n'est pas une chaîne.
2. P est dit multi-arborescent si P ne contient pas $A_1 \oplus A_2$ ou ne contient pas $A_2 \oplus A_1$. Si, de plus, il est connexe, P est dit arborescent (et dans ce cas, il contient nécessairement un minimum ou un maximum).
3. P est un ensemble fortement ordonné si P ne contient pas $C_1 + C_2$.
4. P est un ensemble ordonné d'intervalles si P ne contient pas $C_2 + C_2$.
5. P est un ensemble quasi-fortement ordonné (on dit aussi semi-ordonné) s'il ne contient ni $C_1 + C_3$ ni $C_2 + C_2$.
6. P est dit sans N s'il ne contient pas de N_4 .
7. P est dit sans N couvrant (SNC) s'il ne contient pas N_4 comme sous-ensemble ordonné couvrant.

La figure 1.4 du chapitre 1, l'ensemble ordonné P' dans la figure 2.2 et les figures 2.3(a), 1.4, 2.1(b), 2.3(a) et 2.1(b) fournissent respectivement, des exemples de bichaîne, d'ensemble ordonné arborescent, fortement ordonné, d'intervalles, quasi-fortement ordonné, sans N , et sans N couvrant.

P est un ensemble ordonné *forestier* si son graphe de voisinage ne contient pas de cycle (les figures 2.1(b), 2.3(c), et tout ensemble ordonné de la figure 2.5 en donnent des exemples). Si, de plus, P est connexe, on l'appelle un *ensemble ordonné arboré* (en théorie des graphes, un graphe sans cycles s'appelle une forêt et un arbre s'il est de plus connexe).

Les appellations de ces ensembles ordonnés sont justifiées par certaines de leurs propriétés qui seront étudiées dans les exercices, ainsi que dans des chapitres ultérieurs. Ces ensembles sont munis d'ordres réflexifs auxquels correspondent des ordres stricts (irréflexifs) ; par exemple, un ordre (strict) d'intervalles est un ordre strict ne contenant pas $\underline{2}_s + \underline{2}_s$ (cf. la définition 1.3). L'ordre strict dit ordre fort (respectivement, dit ordre d'intervalles), correspondant à un ensemble fortement ordonné (respectivement, à un ensemble ordonné d'intervalles) a déjà été introduit à l'exemple 1.21 (respectivement, l'exemple 1.22) sous une autre forme. Le chapitre 7 développera des applications des ordres (stricts) d'intervalles et des ordres (stricts) forts ou quasi-forts pour la modélisation des préférences.

Notons en outre les faits suivants, dont certains sont évidents et où les autres seront démontrés ultérieurement ou proposés en exercice :

1. Une bichaîne est un ensemble ordonné de largeur 2.
2. Un ensemble ordonné est fortement ordonné si et seulement si c'est une somme ordinale d'antichaînes.
3. On définit la classe \mathcal{SP} des ensembles ordonnés *série-parallèle* de la manière suivante :
 - L'ensemble ordonné à 1 élément est dans \mathcal{SP} ,
 - Si P_1 et P_2 sont dans \mathcal{SP} , $P_1 + P_2$ et $P_1 \oplus P_2$ le sont aussi.

La classe \mathcal{SP} est ainsi obtenue à partir des deux opérations particulières de substitution que sont les sommes cardinale et ordinale.

On peut alors montrer qu'un ensemble ordonné est sans N si et seulement si il est série-parallèle.

4. Les classes suivantes d'ensembles ordonnés satisfont les inclusions indiquées (le lecteur montrera par des exemples que ces inclusions sont bien strictes) : $\{\text{chaînes}\} \subset \{\text{ensembles fortement ordonnés}\} \subset \{\text{ensembles quasi-fortement ordonnés}\} \subset \{\text{ensembles ordonnés d'intervalles}\}$ et, par ailleurs, $\{\text{chaînes}\} \subset \{\text{ensembles fortement ordonnés}\} \subset \{\text{ensembles ordonnés série-parallèles}\} \subset \{\text{ensembles ordonnés sans } N \text{ couvrant}\}$.
5. Notons aussi qu'un ensemble ordonné arborescent avec un maximum (respectivement, un minimum) est semi-modulaire supérieurement (respectivement, inférieurement) et série-parallèle (pourquoi?).

2.3 Ensembles ordonnés latticiels : demi-treillis et treillis

Ces ensembles ordonnés ont déjà été évoqués au chapitre précédent, après la définition 1.39 des notions d'infimum et de supremum.

Définition 2.13 *Un ensemble ordonné P est un inf-demi-treillis si toute paire $\{x, y\}$ de ses éléments admet un infimum $x \wedge y$. C'est un sup-demi-treillis si toute paire $\{x, y\}$ de ses éléments admet un supremum $x \vee y$. C'est un treillis si toute paire de ses éléments admet un infimum et un supremum, donc s'il est à la fois inf- et sup-demi-treillis.*

Un treillis sera souvent noté $T = (X, \leq, \wedge, \vee)$ et le terme « demi-treillis » pourra désigner un inf-demi-treillis ou un sup-demi-treillis selon le contexte.

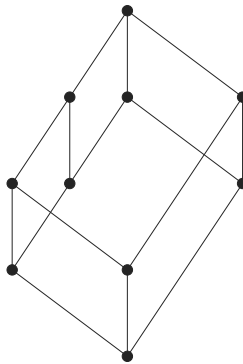


FIG. 2.6. Un treillis.

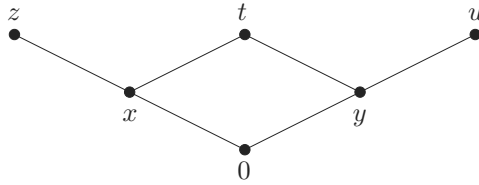


FIG. 2.7. Un inf-demi-treillis.

Les ensembles ordonnés des figures 2.1 et 2.3 ne sont pas des demi-treillis (seul le cas de la figure 2.1(a) n'est pas évident). Chacune des composantes connexes de l'ensemble ordonné de la figure 2.4 est un sup-demi-treillis et l'ensemble ordonné de la figure 2.6 est un treillis (notons que ce dernier n'est pas rangé).

Définition 2.14 Soit $D = (X, \leq, \wedge)$ un inf-demi-treillis. Une partie A de X est un sous-inf-demi-treillis de D si elle est inf-fermée, c'est-à-dire si $x, y \in A$ implique $x \wedge y \in A$.

Considérons l'inf-demi-treillis D de la figure 2.7. Sa restriction à $\{x, z, t\}$ est un sous-inf-demi-treillis de D . On remarque par ailleurs que sa restriction à $\{0, z, t\}$, qui n'est pas un sous-inf-demi-treillis de D , est cependant un inf-demi-treillis (avec $z \wedge t = 0$ alors que dans D , $z \wedge t = x$). Les deux notions « sous-inf-demi-treillis de D » et « sous-ensemble ordonné de D qui est un inf-demi-treillis pour l'ordre de D » ne coïncident donc pas.

On définit de même la notion de *sous-sup-demi-treillis* d'un sup-demi-treillis D comme une partie de D stable pour l'opération supremum de D , donc comme une partie sup-fermée dans D . Un *sous-treillis* d'un treillis T est une partie de T stable pour les opérations infimum et supremum de T .

On a déjà vu dans l'exemple 1.40 que l'ensemble ordonné $\underline{2}^E = (P(E), \subseteq)$ des parties d'un ensemble E ordonnées par inclusion, est un treillis, puisqu'il est clair que, si A et B sont deux parties de E , on a :

$$A \wedge B = A \cap B$$

$$A \vee B = A \cup B$$

Il n'est pas toujours aussi simple de montrer qu'un ensemble ordonné est un treillis. Le lecteur pourra notamment comparer les cas de l'ordre sur les permutations (exemple 1.17), de l'ordre de finesse entre partitions (exemple 1.14 et section 7.3) et des ordres de dominance et de finesse entre partages (exercice 1.4) qui définissent tous des treillis. Toutefois un résultat général sur les demi-treillis permet de caractériser ceux d'entre eux qui sont des treillis. On obtient ainsi le résultat important du théorème 2.16, dont la démonstration résulte immédiatement de la proposition suivante :

Proposition 2.15 Soit A une partie d'un inf-demi-treillis. A a un supremum si et seulement si elle est majorée.

Preuve. Le supremum d'une partie A d'un inf-demi-treillis étant – lorsqu'il existe – un majorant particulier de A , la condition nécessaire est immédiate (ceci est vrai plus généralement dans tout ensemble ordonné P).

Inversement, soit A une partie majorée d'un inf-demi-treillis T . Si A ne possède pas de supremum, l'ensemble non vide des majorants de A n'a donc pas de minimum. Il existe ainsi deux majorants distincts t_1 et t_2 de A , minimaux parmi les majorants de A . T étant un inf-demi-treillis, $t_1 \wedge t_2$ existe et, t_1 et t_2 étant incomparables, $t_1 \wedge t_2$ leur est strictement inférieur. Or, $t_1 \wedge t_2$ est un majorant de A (en effet, tout x de A minore t_1 et t_2). Ainsi $t_1 \wedge t_2$ est un majorant de A , strictement inférieur à t_1 et t_2 , ce qui contredit la minimalité supposée de t_1 et t_2 parmi les majorants de A . D'où l'on déduit que A possède un supremum dès lors qu'elle est majorée. \square

Théorème 2.16 *Un inf-demi-treillis ayant un maximum est un treillis.*

Preuve. Soit T un inf-demi-treillis de maximum 1_T . Toute partie de T étant majorée par 1_T , on déduit de la proposition 2.15 que toute partie de T a un supremum. T est par conséquent un sup-demi-treillis et donc un treillis. \square

Remarque 2.17 La proposition 2.15 et le théorème 2.16 admettent des versions duales, à savoir :

- Une partie d'un sup-demi-treillis a un infimum si et seulement si elle est minorée.
- Tout sup-demi-treillis admettant un minimum est un treillis.

Comme l'illustre cette remarque, la classe des sup-demi-treillis est duale de celle des inf-demi-treillis. En effet, si $P = (X, \leq, \wedge)$ est un inf-demi-treillis, alors $P^d = (X, \geq, \vee^d)$ est un sup-demi-treillis avec $\vee^d = \wedge$. Il en résulte qu'on peut appliquer le principe de dualité entre ces deux classes (section 1.1.4) : si une propriété faisant intervenir les symboles \leq , \geq et \wedge est vraie pour tous les inf-demi-treillis, la propriété obtenue en remplaçant \leq par \geq , \geq par \leq et \wedge par \vee est vraie dans tous les sup-demi-treillis. Autrement dit, on peut se contenter d'étudier les propriétés de l'une de ces classes d'ensembles ordonnés et l'on déduit alors celles de l'autre classe par dualité. Ce principe de dualité s'applique aux treillis – qui forment une classe ipsoduale – où il s'énonce comme suit :

Si une propriété est vraie dans tout treillis, la propriété obtenue par échange des symboles \leq et \geq d'une part, et \wedge et \vee d'autre part, est aussi vraie dans tout treillis.

Par exemple, dans tout treillis T , $x \leq y$ implique $x \wedge z \leq y \wedge z$ pour tout $z \in T$ (pourquoi?). Par dualité, on en déduit que $x \geq y$ implique $x \vee z \geq y \vee z$ pour tout $z \in T$.

Soit A un sous-ensemble à 3 éléments d'un inf-demi-treillis (X, \leq, \wedge) . Il est facile de vérifier que $\bigwedge A$ existe et est égal, pour un élément quelconque t

de A , à $(\bigwedge(A \setminus t)) \wedge t$. En itérant ce procédé, on en déduit que toute partie A (non vide) de X admet un infimum – en particulier X admet un plus petit élément (égal à $\bigwedge X$). D'autre part, si $A = \{x, y, z\}$, on peut écrire :

$$\bigwedge \{x, y, z\} = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

Ainsi l'opération qui, à deux éléments d'un inf-demi-treillis, associe leur infimum est associative. Elle est également commutative ($x \wedge y = y \wedge x$) et idempotente ($x \wedge x = x$). Il est facile de voir qu'inversement, tout ensemble X muni d'une opération \perp associative, commutative et idempotente peut être muni d'un ordre \leq pour lequel il est un inf-demi-treillis, avec $x \wedge y = x \perp y$ (exercice 2.6). Les inf-demi-treillis peuvent donc être définis comme des structures algébriques particulières, ce qui permet de les étudier avec les méthodes de l'algèbre. Tous ces résultats s'étendent aux sup-demi-treillis par dualité, puis aux treillis. Ainsi, un treillis admet un minimum et un maximum et possède une définition algébrique faisant intervenir deux opérations (exercice 2.7).

Soient $p + q$ éléments x_1, x_2, \dots, x_p et y_1, y_2, \dots, y_q d'un treillis T , tels que, pour tous $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, on ait $x_i \leq y_j$. On a alors $\bigvee_{1 \leq i \leq p} x_i \leq \bigwedge_{1 \leq j \leq q} y_j$ (pourquoi?). On en déduit que trois éléments x, y, z quelconques d'un treillis vérifient toujours les inégalités suivantes :

1. $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,
2. $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$,
3. $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.

Le résultat suivant, dont on trouvera la démonstration à la section 5.1 du chapitre 5, est particulièrement important :

Dans un treillis, l'inégalité (1) est toujours une égalité si et seulement si l'inégalité (2) est toujours une égalité, et si et seulement si l'inégalité (3) est toujours une égalité.

Définition 2.18 Soit T un treillis de minimum 0_T et de maximum 1_T .

- T est distributif si tout triplet (x, y, z) de T vérifie $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,
- T est complémenté si tout $x \in T$ admet au moins un complément, i.e. un élément $x' \in T$ vérifiant $x \wedge x' = 0_T$ et $x \vee x' = 1_T$,
- T est booléen s'il est distributif et complémenté.

D'après ce qui précède, un treillis est donc distributif si l'une des inégalités (1), (2) ou (3) (et donc les trois) est toujours une égalité. La dénomination de ces treillis s'explique aisément par le fait qu'en leur sein, chaque opération est distributive par rapport à l'autre :

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \qquad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Dans le cas d'un treillis distributif, l'identité $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$ indique que l'élément obtenu en prenant le supremum

des infimums deux à deux des trois éléments est le même que celui obtenu en prenant l'infimum de leurs supremum deux à deux. Cet élément particulier est appelé la *médiane des trois éléments* x, y, z , appellation qui sera justifiée à la section 7.3 du chapitre 7, où l'on étudiera plus généralement les médianes d'un nombre quelconque d'éléments d'un « inf-demi-treillis à médianes ».

L'étude des ensembles ordonnés ne peut être séparée de celle des treillis distributifs du fait de l'existence d'une correspondance bijective entre ces deux classes de structures. Cette correspondance sera présentée au chapitre 5 avec de nombreuses propriétés des treillis distributifs. Nous en donnons ici simplement quelques propriétés assez évidentes.

On vérifie sans peine qu'une chaîne \underline{k} est un treillis distributif. D'autre part le lecteur montrera aisément la propriété suivante :

Proposition 2.19 *Le produit direct de treillis distributifs est un treillis distributif.*

Tout produit direct de chaînes est donc un treillis distributif ; il en est en particulier ainsi du produit direct \underline{k}^n de n chaînes toutes isomorphes à la chaîne \underline{k} , produit dans lequel on codera un ensemble ordonné quelconque au chapitre 6 (le treillis T de la figure 1.10 représente le diagramme de $\underline{2}^2$). Si $k = 2$, on obtient $\underline{2}^n$ et on retrouve ainsi la notation de l'ensemble ordonné $\underline{2}^E = (P(E), \subseteq)$ des parties d'un ensemble E à n éléments (cet ensemble ordonné étant isomorphe au produit direct de n chaînes à 2 éléments). De plus, $\underline{2}^E$ est naturellement complété (par l'application qui associe à tout $A \subseteq E$ la partie $E \setminus A$ de E), ce qui en fait un treillis booléen (cf. également l'exercice 5.13 du chapitre 5).

Le fait que $\underline{2}^n$ soit distributif se traduit par la distributivité bien connue des opérations d'union et d'intersection ensemblistes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Les identités de distributivité restant valables dans tout sous-treillis d'un treillis distributif, le résultat suivant est immédiat :

Proposition 2.20 *Tout sous-treillis d'un treillis distributif est un treillis distributif.*

En particulier, tout sous-treillis de $\underline{2}^E$, c'est-à-dire tout ensemble \mathcal{F} de parties de E telles que, si A et B sont dans \mathcal{F} , $A \cap B$ et $A \cup B$ le sont aussi, constitue un treillis distributif. Un tel ensemble \mathcal{F} de parties de E est appelé une *famille distributive de parties (de E)*. Si, de plus, les parties \emptyset et E appartiennent à \mathcal{F} , on dit que \mathcal{F} est une *topologie*. A la section 1.4.2, nous avons remarqué que l'intersection ou la réunion de parties commençantes d'un ensemble ordonné P est une partie commençante ; il en résulte que l'ensemble $\mathcal{C}(P)$ de ces parties commençantes est une topologie (il en est de même pour l'ensemble $\mathcal{F}(P)$ des parties finissantes de P). Au chapitre 5, le résultat de

représentation de Birkhoff (théorème 5.9) montrera que tout treillis distributif est isomorphe à une topologie.

On définit d'autres classes de demi-treillis (ou de treillis) en imposant des propriétés supplémentaires déjà considérées plus haut pour des ensembles ordonnés quelconques. Dans certains cas, les définitions résultantes se simplifient : ainsi, puisqu'un inf-demi-treillis a un plus petit élément, il est rangé si et seulement si $x \prec y$ implique $h(y) = h(x) + 1$, ou si et seulement si, pour tout $x < y$, les chaînes maximales de x à y ont même longueur.

L'expression de la semi-modularité se simplifie également dans le cas latticiel : un inf-demi-treillis est semi-modulaire inférieurement si et seulement si, pour tous x, y tels que $x \vee y$ existe, $x \prec x \vee y$ et $y \prec x \vee y$ impliquent $x \wedge y \prec x$ et $x \wedge y \prec y$. De même, un treillis est modulaire (i.e. semi-modulaire inférieurement et supérieurement) si et seulement si ($x \prec x \vee y$ et $y \prec x \vee y$) est équivalent à ($x \wedge y \prec x$ et $x \wedge y \prec y$).

Diverses caractérisations des demi-treillis et treillis semi-modulaires ou modulaires sont données aux exercices 2.9 et 2.10. En particulier, un treillis modulaire T peut être défini par le fait que, pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de T , $x \leq z$ implique $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Il en résulte alors immédiatement que tout treillis distributif est modulaire. Une autre caractérisation des treillis modulaires (donnée à l'exercice 2.9) s'obtient par « exclusion » du treillis N_5 représenté à la figure 2.8. Si l'on y ajoute l'« exclusion » du treillis M_3 représenté à la même figure, on obtient une caractérisation classique des treillis distributifs (mais plus difficile à montrer ; cf. par exemple Barbut et Monjardet [33], 1970). On peut donner une forme typique à ces caractérisations par exclusion, en remarquant (ce que le lecteur vérifiera) que M_3 est le plus petit treillis (pour le nombre d'éléments) modulaire non distributif et que, de même, N_5 est le plus petit treillis non modulaire. Quant au treillis de la figure 2.8(c), c'est le plus petit treillis semi-modulaire inférieurement et non modulaire. On remarque qu'il contient un sous-treillis du type N_5 , donc non semi-modulaire inférieurement, ce qui montre que cette propriété n'est pas conservée par passage au sous-treillis.

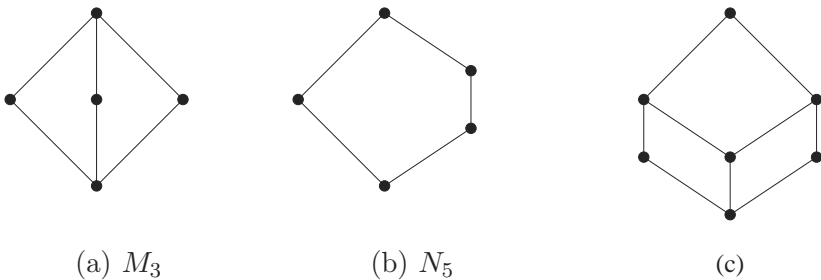


FIG. 2.8. Trois treillis particuliers.

2.4 Ensembles totalement ordonnés et tournois

Dans cette section, nous nous concentrons sur les ensembles totalement ordonnés définis sur un ensemble X , et nous étudions leurs liens avec les relations binaires dites de *tournoi*.

On rappelle que, pour une relation R définie sur X , un élément $x \in X$ est maximal pour R s'il n'existe aucun $y \in X$ distinct de x et tel que xRy . On rappelle également qu'un chemin de x_1 à x_p de R est une suite (x_1, \dots, x_p) d'éléments distincts (sauf éventuellement x_1 et x_p) de X tels que $x_1Rx_2, \dots, x_iRx_{i+1}, \dots, x_{p-1}Rx_p$, et qu'un circuit de R est un chemin (x_1, \dots, x_p) de R avec $x_1 = x_p$. Un chemin (respectivement, un circuit) de R est dit *hamiltonien* si tout élément de X apparaît une fois et une seule dans ce chemin (respectivement, à l'exception de son origine et de son extrémité qui sont identiques). Le lemme ci-dessous s'obtient sans difficulté en invoquant l'antisymétrie et la transitivité des ordres.

Lemme 2.21 *Si O est un ordre sur un ensemble X , O n'a aucun circuit.*

Le théorème suivant est d'importance et intervient, en outre, dans la démonstration du théorème 2.26, qui caractérise les ordres totaux parmi les tournois.

Théorème 2.22 *Soit R une relation binaire sur un ensemble X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. R est sans circuit,
2. la fermeture réflexo-transitive de R est un ordre,
3. R est contenue dans un ordre total sur X ,
4. pour toute partie Y de X , l'ensemble des éléments maximaux de $R|_Y$ est non vide.

Preuve. (1) \implies (2) : on montre que si la fermeture réflexo-transitive $\pi(R)$ de R n'est pas un ordre, alors R a un circuit. Si $\pi(R)$ n'est pas un ordre, elle n'est pas antisymétrique. Il existe donc un couple (x, y) d'éléments distincts de X vérifiant conjointement $x(\pi(R))y$ et $y(\pi(R))x$. On a alors :

- (a) Soit xRy et yRx ,
- (b) Soit xRy et $y(\pi(R) \setminus R)x$,
- (c) Soit yRx et $x(\pi(R) \setminus R)y$,
- (d) Soit enfin $x(\pi(R) \setminus R)y$ et $y(\pi(R) \setminus R)x$.

Dans le cas (a), la suite (x, y, x) est un circuit de R . Dans le cas (b), $y(\pi(R) \setminus R)x$ entraîne l'existence d'un chemin (y, t_1, \dots, t_p, x) dans R qui forme avec le couple (x, y) un circuit de R . Le cas (c) est symétrique à (b). Enfin, le cas (d) entraîne l'existence de deux chemins (x, t_1, \dots, t_p, y) et $(y, t'_1, \dots, t'_q, x)$ de R qui, concaténés, forment un circuit dans R .

(2) \implies (3) : notons $O = \pi(R)$ la fermeture réflexo-transitive de R , qui est supposée être un ordre. Si O est un ordre total, l'implication est immédiate. Sinon, il existe deux éléments x et y incomparables dans O . Soit $O' = \pi(O + (x, y))$ la fermeture réflexo-transitive de $O + (x, y)$. Nous allons montrer que $O + (x, y)$ est sans circuit, ce qui, d'après ce qui précède, permet de montrer que O' est un ordre contenant O ; le résultat s'obtiendra alors en itérant le raisonnement. S'il existe un circuit C dans $O + (x, y)$, C contient nécessairement le couple (x, y) et, donc, aussi un chemin de y à x dans O . Par transitivité de O , on obtient yOx , une contradiction avec l'incomparabilité de x et y pour O .

(3) \implies (1) : l'absence de circuit étant une propriété stable par passage à une sous-relation de R , cette implication est immédiate au regard du lemme 2.21.

(1) \implies (4) : d'après l'argument invoqué pour le point précédent, il nous suffit ici de montrer que si R n'a pas de circuit, l'ensemble de ses éléments maximaux est non vide. Soit $x_1 \in X$. Si x_1 n'est pas maximal dans R , il existe $x_2 \in X$, distinct de x_1 et tel que x_1Rx_2 . En itérant le raisonnement, soit on trouve un élément de X maximal pour R , soit on obtient que, pour tout $i < n$ (avec $|X| = n$), il existe $x_{i+1} \in X$, distinct de x_i et tel que x_iRx_{i+1} , ce qui implique nécessairement l'existence d'un circuit (par finitude de X), une contradiction avec l'hypothèse.

(4) \implies (1) : si R a un circuit (x_1, \dots, x_k, x_1) alors la restriction de R à la partie $\{x_1, \dots, x_k\}$ n'a aucun élément maximal. \square

Remarque 2.23 Ce théorème a de nombreuses applications. Par exemple, en informatique, un *tri topologique* sur un ensemble X muni d'une relation binaire R sans circuit est une numérotation (bijective) f des éléments de X telle que xRy implique $f(x) < f(y)$. Autrement dit, un tel tri topologique définit un ordre total sur X contenant R . En micro-économie, la théorie des fonctions de choix « rationalisables » utilise l'équivalence des conditions (1) et (4) du théorème 2.22 (voir à ce sujet la section 2.5 page 66).

Définition 2.24 Une relation binaire R sur un ensemble X est un tournoi sur X si elle est totale (i.e. si, pour tous $x, y \in X$, $xR^c y$ implique yRx) et antisymétrique. On définit sur tout tournoi T sur X l'application rang r_T par $r_T(x) = |\{y \in X : y \neq x \text{ et } yTx\}|$.

Le terme « tournoi » utilisé pour désigner une telle relation provient de ce qu'elle peut modéliser les résultats d'un tournoi sportif, où toute équipe rencontre toute autre équipe une fois et une seule sans qu'il y ait de match nul (c'est souvent le cas du tournoi de rugby des 6 nations). Si, dans une telle situation, yTx signifie que l'équipe y a été battue par l'équipe x , on voit que le rang $r_T(x)$ de x apparaît comme le nombre d'équipes qu'elle a battues (et, dans le graphe orienté $G = (X, T)$ associé au tournoi, $r_T(x)$ vaut donc le degré intérieur $d_G^-(x)$ de x).

Il est également judicieux de noter que cette application de rang définie sur un tournoi T se confond avec celle donnée à la définition 2.1 si et seulement si T est un ordre (total). Nous allons donner au théorème 2.26 des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi. Le lemme suivant servira dans la preuve de ce théorème.

Lemme 2.25 *Le nombre de 3-circuits (i.e. de circuits à trois éléments) d'un tournoi T défini sur un ensemble X de cardinalité n est égal à :*

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{12} - \frac{1}{2} \sum (r_T(x))^2$$

Preuve. Notons $c_3(T)$ le nombre de 3-circuits de T , c'est-à-dire le nombre de triplets (x, y, z) vérifiant xTy , yTz et zTx . En notant $\overline{c_3(T)}$ le nombre des triplets transitifs de T (c'est-à-dire le nombre de triplets (x, y, z) d'éléments distincts vérifiant yTx et zTx), on a donc :

$$c_3(T) + \overline{c_3(T)} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Or, pour un élément x fixé, le nombre de triplets transitifs avec yTx et zTx étant égal à

$$\frac{(r_T(x))(r_T(x)-1)}{2} \text{ (pourquoi ?),}$$

on a :

$$\overline{c_3(T)} = \sum_{x \in X} \frac{[(r_T(x))(r_T(x)-1)]}{2} = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} (r_T(x))^2 - \frac{1}{2} \sum_{x \in X} r_T(x)$$

On a d'autre part : $\sum_{x \in X} r_T(x) = \frac{n(n-1)}{2}$ (pourquoi ?)

Donc :

$$\overline{c_3(T)} = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} (r_T(x))^2 - \frac{n(n-1)}{4}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} c_3(T) &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{4} - \frac{1}{2} \sum_{x \in X} (r_T(x))^2 \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} - \frac{1}{2} \sum_{x \in X} (r_T(x))^2 \end{aligned}$$

□

Théorème 2.26 *Soit T un tournoi sur un ensemble X de cardinalité n . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. T est un ordre total sur X ,
2. T n'a aucun 3-circuit,
3. T n'a aucun circuit,

4. T admet un unique chemin hamiltonien,
5. les rangs des n éléments de X sont les entiers de 0 à $n - 1$.

Preuve. (1) \implies (2) : immédiat par le lemme 2.21.

(2) \implies (1) : immédiat puisque xTy et yTz impliquent $zT^c x$ et donc xTz .

(2) \implies (3) : supposons que T ait un circuit, mais aucun 3-circuit. T étant par définition antisymétrique, ce circuit est au moins de longueur 4. Soit $C = (x_1, x_2, \dots, x_p, x_1)$ un circuit de T de longueur minimum (donc $p \geq 4$). T étant totale, on a – par exemple pour x_1 et x_3 – soit x_3Tx_1 , soit x_1Tx_3 . Si x_3Tx_1 , (x_1, x_2, x_3, x_1) est un 3-circuit de T , une contradiction. Sinon, $C' = (x_1, x_3, x_4, \dots, x_p, x_1)$ est un circuit de T de longueur $p - 1$. En itérant ce raisonnement autant de fois que nécessaire, on obtient un 3-circuit de T , ce qui contredit à nouveau l'hypothèse.

(3) \implies (1) : si le tournoi T n'est pas un ordre total, il possède nécessairement un triplet (x, y, z) non transitif, donc tel que xTy , yTz et $xT^c z$. La totalité de T implique alors zTx et T a un circuit.

(3) \implies (4) : par récurrence sur n . La condition (3) est vraie pour $n = 1, 2$. Supposons la condition vérifiée pour tout tournoi de cardinalité $n - 1$. Soit maintenant $n \geq 3$ et T un tournoi à n éléments ne possédant aucun circuit. D'après le théorème 2.22, T a au moins un élément maximal. De plus, il ne peut en avoir qu'un puisque T est total. Si l'on note x_1 cet élément, on a x_1Ty pour tout $y \in T$ (totalité de T). Or, $T \setminus x_1$ étant un tournoi sans circuit de cardinalité $n - 1$, il possède par hypothèse de récurrence un unique chemin hamiltonien, que l'on note (x_2, \dots, x_n) . La suite (x_1, x_2, \dots, x_n) est donc un chemin hamiltonien de T . Son unicité vient de ce que tout chemin hamiltonien de T commence nécessairement par x_1 et que, s'il existait plusieurs chemins hamiltoniens dans T , il en existerait autant dans $T \setminus x_1$.

(4) \implies (5) : par récurrence sur n . L'implication (4) est vraie pour $n = 1, 2$. Supposons la condition vérifiée pour tout tournoi de cardinalité $n - 1$. Soit maintenant $n \geq 3$ et T un tournoi à n éléments, admettant un unique chemin hamiltonien (x_1, x_2, \dots, x_n) . Il nous suffit de montrer que x_jTx_n pour tout $j \leq n$ et d'appliquer alors l'hypothèse de récurrence sur $T \setminus x_n$ car alors, les rangs des éléments x_1, \dots, x_{n-1} sont les entiers de 0 à $n - 2$ et, puisque x_jTx_n pour tout $j \leq n$, le rang de x_n dans T est $n - 1$. Or, x_1Tx_n (sans quoi $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1)$ serait un circuit hamiltonien de T , qui aurait ainsi plusieurs chemins hamiltoniens). De même, x_2Tx_n (car, sinon $(x_1, x_n, x_2, \dots, x_{n-1})$ serait un second chemin hamiltonien de T). Cet argument appliqué de proche en proche nous permet de déduire que T vérifie x_jTx_n pour tout $j \leq n$.

(5) \implies (2) : si les rangs pour T des n éléments de X sont les entiers de 0 à $n - 1$ alors le lemme 2.25 donne

$$c_3(T) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = 0.$$

□

Remarque 2.27 A la section 1.1.2 du chapitre 1, nous avons introduit la notation $x_1x_2\dots x_n$ pour représenter un ordre total sur un ensemble à n éléments où, pour tout $i < n$, x_i est couvert par x_{i+1} . On voit que ceci revient à écrire le chemin hamiltonien de l'ordre total. D'autre part, ceci revient également à écrire les éléments de X dans l'ordre croissant de leurs rangs, en utilisant comme indice d'un élément son rang normé augmenté d'une unité (le rang normé de x_1 est 0!), ce qui est généralement plus naturel et plus pratique.

Les définitions de rang données aux définitions 2.1 pour un ensemble ordonné rangé P et 2.24 pour un tournoi T se confondent lorsque $P = T$ est un ensemble totalement ordonné par l'ordre total L et l'on a alors le résultat suivant :

Corollaire 2.28 *Si L est un ordre total sur X , alors on a xLy si et seulement si $r_L(x) \leq r_L(y)$.*

Nous terminons cette section par un théorème important, puisque le point (1) de ce théorème (déjà énoncé au chapitre 1) conduit au concept de dimension d'un ensemble ordonné (cf. la définition 1.33 et le chapitre 6). Nous le démontrons en utilisant une partie de la preuve du théorème 2.22 :

Théorème 2.29 1. *Tout ordre admet une extension linéaire et est l'intersection de toutes ses extensions linéaires.*

2. *Si un préordre total contient un ordre, il en contient une extension linéaire.*

Preuve. (1) La première assertion de ce point s'obtient grâce à l'implication de (3) par (2) dans le théorème 2.22. La preuve de cette même implication entraîne en outre que lorsque x et y sont incomparables pour l'ordre O , il existe une extension linéaire de O contenant le couple (x, y) et une extension linéaire contenant le couple (y, x) . On en déduit immédiatement que O est intersection de toutes ses extensions linéaires.

(2) Soit R un préordre total contenant l'ordre O et x, y deux éléments incomparables pour cet ordre. Puisque R est totale, on a xRy ou yRx . Si, par exemple, xRy , on considère alors la fermeture réflexo-transitive $\pi(O + (x, y))$ de $O + (x, y)$, qui est un ordre (toujours par la preuve de l'implication de (3) par (2) dans le théorème 2.22). Il suffit ainsi de montrer que cet ordre est lui aussi dans R , puis d'itérer le raisonnement. Or (z, t) appartient à $\pi(O + (x, y)) \setminus (O + (x, y))$ si et seulement si on a zOx et yOt . Mais alors on a aussi zRx , xRy et yRt et, par transitivité de R , zRt . \square

2.5 Compléments et références

Les classes d'ensembles ordonnés présentées dans ce chapitre sont très souvent apparues dans des contextes et sous des appellations différentes, ceci provenant notamment des nombreuses définitions équivalentes qu'on peut en

donner. Il en est par exemple, ainsi des ordres série-parallèles (voir page 51) et de la sous-classe de ces ordres constituée des ordres à seuil ; un *ordre à seuil* est défini par la propriété suivante : il existe $n = |P|$ nombres réels p_1, p_2, \dots, p_n et un nombre réel s tel que A est une antichaîne maximale de P si et seulement si $\sum_{i \in A} p_i \leq s$. Les ordres à seuil sont aussi des ordres d'intervalles et leurs graphes de comparabilité sont les « graphes à seuil » intensivement étudiés en théorie des graphes (cf. Mahadev et Peled [284], 1995). Les ordres série-parallèles et, en particulier les ordres à seuil, ont été notamment utilisés pour l'étude de circuits électriques, dans des problèmes d'ordonnancement, ou dans des modélisations en parallélisme (cf. par exemple Lawler [262], 1978, Faigle, Lovász, Schrader et Turán [147], 1986 ou Möhring [301], 1989). De même, les ordres forts, quasi-forts, ou d'intervalles, sont apparus dans de multiples contextes et sous différentes formes ; leur usage dans la modélisation des préférences sera étudié au chapitre 7 (section 7.1) mais on trouvera dans les compléments en section 7.6.1 d'autres situations où on les rencontre. Un autre cas intéressant est celui des ordres sans N couvrant. Plusieurs définitions équivalentes en sont données à l'exercice 2.3, dont celle (« toute chaîne maximale rencontre toute antichaîne maximale ») qui les avait fait appeler initialement « Chain-Antichain-Complete » par Grillet [202] (1969). Mais on les obtient aussi par une construction généralisant celle des ordres série-parallèles, d'où le nom d'ordres « quasi-série-parallèles » (Habib et Möhring [211], 1987). Ces ordres sont utiles aussi bien dans des techniques d'analyse de tâches à l'aide de réseaux PERT (cf. par exemple, Syslo [396], 1984 ou Radermacher [353], 1986) que dans des problèmes de représentations planaires de graphes (de Fraysseix et de Mendez [170], 1997).

Outre les classes d'ensembles ordonnés présentées dans ce chapitre, il en existe bien d'autres intéressantes et nous allons en évoquer quelques-unes ci-dessous, avant de revenir sur celle des treillis.

Ainsi, le souci d'obtenir une représentation géométrique « parlante » du diagramme d'un ordre a notamment conduit à définir la classe des ensembles ordonnés planaires et celle des ensembles ordonnés démantelables (ainsi que d'autres classes pour lesquelles on pourra consulter Rival [361], 1989). Un diagramme d'un ensemble ordonné est planaire si ses lignes ne peuvent se rencontrer qu'en les points du plan représentant les éléments de l'ensemble. Un ensemble ordonné est dit *planaire* s'il admet un diagramme planaire. C'est le cas de celui de l'exemple 1.2 du chapitre 1 dont deux diagrammes, l'un planaire, l'autre non, sont représentés à la figure 1.4. L'ensemble ordonné P de la figure 2.9 est planaire (pourquoi ?) mais ne l'est plus si on lui adjoint un élément maximum.

L'ensemble ordonné biparti complet $K_{3,3}$ n'est pas planaire mais le devient si on lui enlève un couple (chercher un diagramme planaire pour cet ensemble ordonné). La première observation faite sur ces ensembles ordonnés (Birkhoff [50], 1940) est qu'un ensemble ordonné planaire ayant un minimum et un maximum est nécessairement un treillis. Tout treillis n'est évidemment pas planaire et ceux qui le sont ont été caractérisés par l'absence de certains

sous-treillis (Kelly et Rival [243], 1975). On a une caractérisation analogue pour les treillis modulaires planaires (Wille [427], 1974, Kelly [238], 1980) et de multiples caractérisations pour les treillis distributifs planaires (Monjardet [305], 1976). Les treillis planaires forment une sous-classe des *treillis démantelables*. Ces derniers peuvent être définis par le fait qu'on peut passer d'un tel treillis au treillis à un seul élément en supprimant à chaque étape un élément doublement irréductible du treillis précédemment obtenu. On peut aussi les caractériser par l'absence de couronne CR_n , pour $n \geq 2$ (Kelly et Rival [242], 1974). Un *ensemble ordonné démantelable* est défini de la même façon que pour un treillis, en remplaçant les éléments doublement irréductibles par ceux qui sont couverts par un seul élément ou n'en couvrent qu'un seul. Les ensembles ordonnés sans couronne sont démantelables, mais la réciproque est fautive (Duffus et Rival [132], 1976).

Comme on l'a déjà mentionné à l'exemple 1.12, toute famille de parties d'un ensemble, ordonnée par inclusion ensembliste, constitue un ensemble ordonné. Celui-ci peut être quelconque. En effet, en utilisant la bijection qui, à tout élément d'un ensemble ordonné, associe sa section commençante, on voit que n'importe quel ensemble ordonné est représentable par (i.e. isomorphe à) une telle famille. Différentes motivations, et notamment l'essor de la géométrie algorithmique, ont amené à étudier les ensembles ordonnés représentables par différentes familles d'ensembles géométriques : intervalles de la droite réelle ou, plus généralement, pavés de \mathbb{R}^n , polygones convexes quelconques ou réguliers du plan, disques ou angles du plan, sphères de \mathbb{R}^n , etc. Si tous les ordres sont représentables par des polygones convexes et si ceux représentables par des pavés de \mathbb{R}^n sont les ordres de dimension $2n$ (cf. la définition 1.33), les autres familles conduisent à de nouvelles classes d'ordres telles que celles des ordres « circulaires », « angulaires » ou « sphériques ». Le lecteur trouvera un

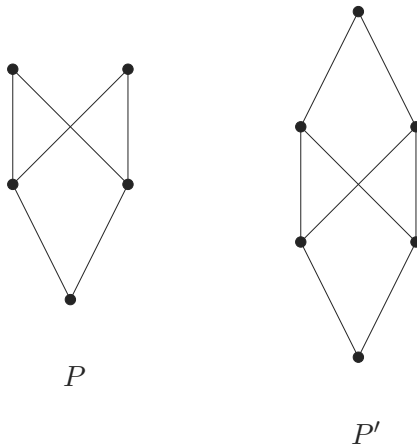


FIG. 2.9. P est planaire, mais P' ne l'est pas.

panorama sur ces ordres « géométriques » dans Urrutia [414] (1989) et dans Fishburn et Trotter [165] (1999). Toujours dans le champ de la géométrie algorithmique, on s'est aussi intéressé aux ordres « directionnels » engendrés par la relation « d'obstruction » entre objets plans (cf. la présentation de Rival [361], 1989 et, par exemple, Bouchitté, Jégou et Rampon [71], 1993). Finalement, avec le développement récent de l'algorithmique des ensembles ordonnés, l'attention a été portée vers ceux pour lesquels on dispose d'algorithmes « efficaces » (cf. l'annexe A) de reconnaissance et/ou d'obtention de certains paramètres, ce qui est le cas de tous les ensembles ordonnés que nous avons définis par configurations exclues à la section 2.2. Cette préoccupation a conduit à considérer, entre autres, les classes d'ordres suivantes : *ordres de dimension 2* (cf. la section 6.3), *ordres de largeur bornée* (i.e. tels que $\alpha(P) \leq k$, pour un certain entier k), *ordres de Dilworth* (i.e. pour lesquels le nombre de sauts $s(P)$ est égal à $\alpha(P) - 1$), *ordres sans W couvrant* (i.e. dont la relation de couverture ne contient pas l'ordre sur 5 éléments dont le diagramme peut être représenté par la lettre W), *ordres sans cycles alternés* (un exemple de tel cycle est donné par CR_4 à la figure 2.3), *ordres gloutons* (cf. la section 6.5). Toutes ces classes d'ensembles ordonnés sont présentées de manière détaillée dans Möhring [301] (1989) et Bouchitté et Habib [69] (1989). Signalons aussi qu'on dispose pour certaines d'entre elles de résultats d'énumérations (cf. notamment El Zahar [142], 1989).

La troisième section de ce chapitre a été consacrée aux demi-treillis et treillis. En fait, l'étude des ensembles ordonnés a pendant longtemps été presque exclusivement celle des treillis, c'est-à-dire de ces ensembles ordonnés qui ont la particularité – avantageuse – d'être aussi des structures algébriques « fortes ». La notion de treillis définie par Schröder et Dedekind à la fin du dix-neuvième siècle, puis pratiquement oubliée, connut à partir des années 1930 du siècle dernier une renaissance due à de nombreux mathématiciens dont particulièrement Birkhoff, Öre et Klein. On s'aperçut en effet que des treillis étaient présents dans de nombreux – nouveaux ou anciens – champs mathématiques (topologie, algèbre générale, théorie de la mesure, géométrie, combinatoire, etc.) aussi bien qu'en logique mathématique ou en physique théorique (mécanique quantique et ondulatoire). Dès lors, la théorie des treillis a connu un développement considérable et qui n'a pas cessé, d'autant plus qu'elle s'est prolongée dans la théorie dite « algèbre universelle ». Les références de base sur la théorie des treillis sont les ouvrages de Birkhoff [50] (1940) et Grätzer [195] (1998), tandis que ceux de Szasz ([397], 1971 pour la version française) et de Davey et Priestley [112] (2001) sont d'excellentes introductions. Même si le présent ouvrage n'est pas consacré aux treillis, il faut noter que ceux-ci y apparaissent maintes fois. Il existe, en effet, de nombreux liens entre ensembles ordonnés quelconques et treillis. D'abord, la dualité entre ensembles ordonnés et treillis distributifs qui sera étudiée au chapitre 5. Ensuite, le passage d'un ensemble ordonné au treillis appelé sa « complétion de MacNeille » (cf. la section 3.5.3) et, inversement, le passage d'un treillis à l'ensemble ordonné biparti de ses éléments irréductibles (cf. la table d'un treillis

dans la section 3.5.2) Cette dualité et ces passages permettent de traduire des propriétés d'ensembles ordonnés en des propriétés de treillis et inversement.

Ce chapitre se termine par la caractérisation des ordres totaux parmi les relations de tournois et contient à ce sujet la formule donnant le nombre de 3-circuits d'un tournoi (lemme 2.25). Cette formule a été obtenue par Kendall et Babington Smith [245] (1940) à propos de la méthode dite des *comparaisons par paires* utilisée en psychosociologie. On demande à un sujet d'exprimer ses préférences entre diverses modalités (par exemple, à un enfant entre les métiers qu'il voudrait exercer) en lui demandant pour chaque paire de modalités celle des deux qu'il préfère. Si le choix est « forcé » (pas d'ex-aequo et de non choix), le résultat de toutes les comparaisons par paires est un tournoi sur l'ensemble des modalités. On constate que, dans un nombre non négligeable de cas, le tournoi T obtenu n'est pas un ordre total, c'est-à-dire qu'il contient des 3-circuits. Pour évaluer son degré d'intransitivité, Kendall et Babington Smith [245] ont alors proposé l'indice d'intransitivité suivant : nombre $c_3(T)/Maxc_3$, où $c_3(T)$ est le nombre de 3-circuits du tournoi T et $Maxc_3$ le nombre maximum de 3-circuits sur tous les tournois de même cardinalité que T . Comme on dispose de formules simples donnant la valeur de ce maximum, cet indice est facilement calculable. Toutefois, il peut prendre une valeur relativement importante pour un tournoi dans lequel il suffit d'inverser un arc pour obtenir un ordre total. D'où la proposition par Slater [379] (1961) d'un autre indice d'intransitivité : le nombre minimum d'arcs à inverser dans le tournoi T pour le rendre transitif rapporté au nombre maximum de ce minimum sur tous les tournois de même cardinalité que T . Ces nombres sont toutefois difficiles à calculer de même que les ordres totaux, dits « ordres de Slater », (ou, parfois, à tort « ordres médians ») obtenus en effectuant un nombre minimum d'inversions (cf. à ce sujet Bermond [42], 1972, Charon-Fournier, Germa et Hudry [95], 1992).

En microéconomie, le choix effectué par un agent économique sur un ensemble X de biens est décrit par sa fonction de choix. Celle-ci associe à toute partie Y de X le choix $c(Y)$, avec $\emptyset \subset c(Y) \subseteq Y$. Dans la théorie classique des fonctions de choix, le choix de l'agent est dit *rationalisable* si l'agent a une relation R de préférence sur X « expliquant » son choix au sens suivant : pour toute partie Y de X , le choix $c(Y)$ est constitué de l'ensemble des éléments maximaux de la relation R restreinte à Y . Le théorème 2.22 montre donc que la relation R de préférence de l'agent doit être sans circuits. Les fonctions de choix rationalisables par une relation (sans circuits), ou par divers types de relations d'ordres, peuvent être caractérisées axiomatiquement (cf. par exemple Aleskerov, Bouyssou et Monjardet [7], 2007, où est aussi considéré le cas où le choix peut être vide).

Nous terminons ces compléments par une remarque terminologique. L'influence de Bourbaki a permis d'avoir un vocabulaire français unifié pour les notions de préordre, de préordre total, d'ordre et d'ordre total. Il n'en est plus nécessairement de même pour des classes particulières d'ordres. Par exemple, pour ce que nous avons appelé ordre fort (respectivement, ordre

quasi-fort) on peut trouver le terme d'ordre total affaibli (respectivement, de semiordre). En anglais, la diversité des termes utilisés pour désigner la même notion d'ordre est beaucoup plus grande. Par exemple, un ordre total peut être appelé « simple order », « complete order », « strong ordering », « chain », « linear order » ou encore « total order ». De plus, le même terme peut être utilisé dans des sens différents suivant les auteurs. C'est ainsi que le terme « weak order » peut désigner aussi bien un préordre total que ce que nous avons appelé un ordre fort (c'est-à-dire la partie asymétrique d'un préordre total). Cet échange, apparemment étrange, qui fait passer de fort en français à faible en anglais s'explique en fait parce que, contrairement au terme français ordre, le terme anglais « order » désigne souvent un ordre total.

2.6 Exercices

Exercice 2.1 Montrer que si l'ensemble ordonné P a au plus 4 éléments, il est rangé. Montrer qu'il existe deux types d'ensembles ordonnés à 5 éléments, non rangés et qui sont des ensembles quasi-fortement ordonnés.

Exercice 2.2 [RANG, SOMMES ET PRODUITS] Montrer que si les ensembles ordonnés P et Q sont rangés, il en est de même de leur somme cardinale $P+Q$ et de leur produit direct $P \times Q$. Qu'en est-il de leur produit lexicographique $P \otimes Q$ et de leur somme ordinale $P \oplus Q$ (cf. les définitions données en section 1.5 du chapitre 1) ?

Exercice 2.3 [SANS N -COUVRANTS] Montrer qu'un ensemble ordonné P sans N couvrant peut être défini par chacune des conditions équivalentes suivantes :

1. P ne contient pas de sous-ensemble ordonné $\{a, b, c, d\}$ avec $a < b$, $c < b$, $c < d$ et $a \parallel d$,
2. toute chaîne maximale de P rencontre toute antichaîne maximale de P ,
3. $P^-x \cap P^-y \neq \emptyset$ implique $P^-x = P^-y$ (où $P^-x = \{z \in X : z < x\}$),
4. $xP^+ \cap yP^+ \neq \emptyset$ implique $xP^+ = yP^+$ (où $xP^+ = \{z \in X : x < z\}$).

Exercice 2.4 [SANS N -COUVRANTS RANGÉS, Leclerc et Monjardet [273]] Montrer qu'un ensemble ordonné P est *SNC* (sans N couvrant) rangé si et seulement si tout sous-ensemble ordonné de P défini par deux niveaux consécutifs est somme cardinale de bipartis complets.

Montrer que la classe des ensembles ordonnés *SNC* rangés et connexes contient les ensembles fortement ordonnés et les ensembles ordonnés arborescents. Caractériser les treillis *SNC* rangés. Quand sont-ils distributifs ? Donner des exemples de treillis *SNC* non semi-modulaires.

Exercice 2.5 [ARBORESCENTS] Soit P un ensemble ordonné admettant un minimum 0. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. P est arborescent,
2. tout élément différent de 0 est sup-irréductible,
3. pour tout x de P , l'intervalle $[0, x]$ est une chaîne,
4. pour toute partie $\{x, y\}$ majorée de P , x et y sont comparables,
5. pour tous x, y de P comparables, il existe une chaîne unique entre ces deux éléments.

Montrer qu'un tel ensemble ordonné est un inf-demi-treillis.

Montrer qu'un inf-demi-treillis P est arborescent si et seulement si, pour tous éléments x, y, z de P , on a $|\{x \wedge y, y \wedge z, z \wedge x\}| < 3$.

Montrer que les ordres facteurs gauche et droit entre mots définis à l'exercice 1.3 sont des inf-demi-treillis arborescents.

Exercice 2.6 [ALGÈBRE DE DEMI-TREILLIS, Davey et Priestley [112]] Soit X un ensemble sur lequel est défini une opération \perp associative, commutative et idempotente. Montrer que si l'on pose $x \leq y \iff x \perp y = x$ (respectivement, $x \leq y \iff x \perp y = y$), alors (X, \leq) est un inf-demi-treillis avec $x \wedge y = x \perp y$ (respectivement, un sup-demi-treillis avec $x \vee y = x \perp y$).

Exercice 2.7 [ALGÈBRE DE TREILLIS] Montrer que dans un treillis T , on a toujours $x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y)$ (*lois d'absorption*).

Montrer que si un ensemble X est muni de deux opérations \perp et \top , associatives, commutatives et idempotentes et telles que, pour tous x, y , $x \perp (x \top y) = x \top (x \perp y)$, on peut le munir d'un ordre de treillis avec $x \perp y = x \wedge y$ et $x \top y = x \vee y$.

Exercice 2.8 [FILTRANTS INFÉRIEUREMENT] Un ensemble ordonné P est *filtrant inférieurement* si pour tous $x, y \in P$, l'ensemble des minorants communs à x et y est non vide. Montrer que cette condition équivaut à l'existence d'un minimum dans P .

Montrer que P est un inf-demi-treillis si et seulement si il est filtrant inférieurement et n'admet pas de sous-ensemble ordonné de type $A_2 + A_2$ (i.e. la *couronne* CR_2).

Exercice 2.9 [DEMI-TREILLIS SEMI-MODULAIRES, Birkhoff [50]] Soit T un inf-demi-treillis rangé tel que, pour tous x, y, z avec z majorant de x et y , $r(x) + r(y) \leq r(x \wedge y) + r(z)$. Montrer que T est semi-modulaire inférieurement.

Montrer réciproquement que, si T est semi-modulaire inférieurement (donc, s'il est rangé, cf. le théorème 2.10), son rang vérifie l'inégalité ci-dessus (ce qui revient à dire que la longueur de l'intervalle $[x \wedge y, y]$ est inférieure ou égale à celle de l'intervalle $[y, z]$, et se montre en considérant l'image d'une chaîne maximale $y \prec t_1 \prec \dots \prec z$ par l'application $t_i \mapsto t_i \wedge x$).

Énoncer le résultat dual caractérisant les sup-demi-treillis semi-modulaires supérieurement.

Montrer qu'un treillis est semi-modulaire inférieurement (respectivement, supérieurement) si et seulement si il est rangé, le rang vérifiant pour tous x, y , $r(x)+r(y) \leq r(x \wedge y)+r(x \vee y)$ (respectivement, $r(x)+r(y) \geq r(x \wedge y)+r(x \vee y)$).

En déduire qu'un treillis est semi-modulaire inférieurement (respectivement, supérieurement) si et seulement si, pour tous x, y tels que $x \prec x \vee y$, on a $x \wedge y \prec x$ (respectivement, pour tous x, y tels que $x \wedge y \prec x$, on a $x \prec x \vee y$).

Exercice 2.10 [TREILLIS MODULAIRES, Birkhoff [50]] Montrer que si x, y, z sont trois éléments d'un treillis avec $x \leq z$, on a $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$. Montrer que, pour tout treillis T , les conditions suivantes sont équivalentes :

1. T est modulaire,
2. T est rangé avec, pour tous $x, y \in T$, $r(x) + r(y) = r(x \wedge y) + r(x \vee y)$,
3. pour tous x, y, z de T avec $x \leq y$, on a $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$,
4. pour tous $x, y \in T$, les applications $t \mapsto x \vee t$ et $s \mapsto s \wedge y$ définissent deux isomorphismes inverses de $[x \wedge y, y]$ dans $[x, x \vee y]$,
5. T ne contient pas de sous-treillis de type N_5 .

(Indication : montrer (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1) et utiliser les résultats de l'exercice 2.9).

Montrer qu'un treillis distributif est modulaire.

Morphismes d'ensembles ordonnés

Soit P un ensemble ordonné modélisant, par exemple, un problème d'ordonnement (cf. la section 7.5 du chapitre 7). Le calcul de caractéristiques de l'ensemble ordonné lié au problème, par exemple celui d'extensions linéaires de P , nécessite l'implémentation d'un algorithme où P sera représenté par une structure appropriée de données. En particulier, on peut utiliser une représentation des éléments de P par des suites composées de r symboles 0 et 1. Il faut pour ceci que, si (et seulement si) x et y sont deux éléments de P vérifiant $x < y$ et que $c(x)$ et $c(y)$ sont les r -suites représentant ces éléments, on ait $c(x) < c(y)$, où $<$ est l'ordre du produit direct $\underline{2}^r$. L'application c de P dans ce produit direct doit donc conserver l'ordre de P . On a ainsi un exemple parmi bien d'autres où l'on est amené à considérer les applications d'un premier ensemble ordonné dans un second, conservant ou inversant l'ordre du premier. Ce chapitre est consacré à l'étude de telles applications, appelées *morphismes*¹. On en définit différents types fondamentaux, comme les *codages* (ou *plongements*), les *fermetures* et les *ouvertures*, les applications *résiduelles*, *résiduées* et *galosiennes*. On s'intéresse aux liens entre ces divers types d'applications, à des exemples canoniques, ainsi qu'à des développements naturels.

On définit à la section 3.1 différents types de morphismes entre ensembles ordonnés, à savoir les applications *isotones* (ou *strictement isotones*), les applications *antitones* et les *codages*, qui font apparaître dans l'ensemble d'arrivée une copie de l'ensemble de départ. De telles applications apparaîtront fréquemment dans le reste de l'ouvrage. Ainsi le chapitre 6 est consacré aux codages des ensembles ordonnés dans des produits directs de chaînes, ce qui conduit aux importantes notions de *dimensions* d'un ordre.

Un codage canonique, et particulièrement opérationnel, de tout ensemble ordonné P dans un treillis booléen est fourni par la représentation par sup-irréductibles des éléments de P , présenté en section 3.2. Dans beaucoup de situations où P est un ensemble d'objets à étudier, les éléments sup-irréductibles

¹ Pour certains auteurs, le terme de morphisme doit être réservé aux applications isotones.

sont les objets « élémentaires » et on dispose alors d'un outil puissant pour réduire tout élément de P à un ensemble de tels objets. Dans cette même section, on établit diverses propriétés et caractérisations des éléments irréductibles, l'utilisation des relations flèches permettant d'en donner des démonstrations particulièrement simples.

La section 3.3 est consacrée aux fermetures (et aux ouvertures). Les théories et les modèles mathématiques faisant appel à des fermetures sont nombreux : fermetures logiques, inductives, topologiques, algébriques, convexes, de Kleene, fermeture transitive sur des relations binaires, etc. En étudiant les fermetures dans des ensembles ordonnés quelconques, on les situe dans leur cadre le plus général et l'on montre ce qu'elles ont en commun. Toutefois, le cas particulier des fermetures dans le treillis des parties d'un ensemble est le plus fréquemment rencontré. On leur associe les *familles de Moore*, qui sont leurs treillis de fermés. On y reviendra à la section 7.4 en les liant aux relations d'implication qui correspondent aux règles d'association que l'on cherche à mettre en évidence dans des domaines comme l'intelligence artificielle ou les bases de données.

Les applications résiduées se définissent de diverses manières, par exemple, par le renforcement d'une propriété liée à l'isotonie. L'existence d'une résiduée (ou d'une résiduelle) entre deux ensembles ordonnés P et Q entraîne celle d'un sous-ensemble ordonné « commun » (en fait, deux sous-ensembles ordonnés isomorphes) à P et à Q . Cette structure commune s'obtient comme image d'une fermeture sur P aussi bien que d'une ouverture sur Q . Dans de nombreux contextes, et notamment ceux de la représentation des connaissances ou de l'analyse des données, une dualité d'ordre fait apparaître ces applications sous la forme équivalente (et fondamentale) d'une *correspondance de Galois*. Divers aspects des applications résiduées, résiduelles et galoisiennes font l'objet de la section 3.4. Un usage direct et inattendu des applications résiduelles en classification sera présenté à la section 7.3.

Les correspondances de Galois associées aux relations binaires, et les *treillis de Galois* (ou *de concepts*) qui en résultent, ont été particulièrement popularisés. Ceci provient du fait que ces treillis apparaissent dans les domaines extrêmement variés où des objets sont décrits par des attributs binaires (ou rendus binaires). Ils se sont révélés particulièrement riches en applications. La section 3.5, organisée en trois sous-parties, est consacrée à ce type essentiel de correspondances. On y utilise des notions issues de chacune des sections précédentes. La section 3.5.1 présente le treillis de Galois d'une relation binaire. La section 3.5.2 établit que tout treillis T s'obtient, à l'isomorphisme près, comme le treillis de Galois d'une relation entre ses sup- et inf-irréductibles, appelée la *table du treillis* T ; les relations flèches complètent cette dernière en une *table fléchée*. Enfin, la section 3.5.3 expose le procédé de *complétion* d'un ensemble ordonné en un treillis, qui est précisément un codage canonique de tout ensemble ordonné dans un treillis.

3.1 Applications isotones et antitones : exponentiation

Nous considérons d'abord plusieurs types d'applications entre ensembles ordonnés, compatibles à des degrés divers avec ces structures ordonnées.

Définition 3.1 Soient $P = (X, \leq_P)$ et $Q = (Y, \leq_Q)$ deux ensembles ordonnés et f une application de P dans Q . L'application f est dite :

1. isotone si elle vérifie : pour tous $x, x' \in P$, $x \leq_P x' \implies f(x) \leq_Q f(x')$,
2. strictement isotone si elle vérifie : pour tous $x, x' \in P$, $x <_P x' \implies f(x) <_Q f(x')$,
3. un codage de P dans Q si elle vérifie : pour tous $x, x' \in P$, $x \leq_P x' \iff f(x) \leq_Q f(x')$.

Au lieu d'application isotone, on parle aussi d'application *croissante*. La propriété (2) ci-dessus implique la propriété (1). Elle est notamment vérifiée lorsque f est isotone et injective. Si f est un codage (on dit aussi un *plongement* ou une *représentation*), elle est strictement isotone, donc (3) implique (2). Si f est un codage bijectif de P dans Q , on retrouve la notion d'*isomorphisme d'ordre* du chapitre 1 (définition 1.9). En fait, un codage f est un isomorphisme entre P et le sous-ensemble ordonné de Q induit par $f(X)$.

Le cas du codage « booléen », c'est-à-dire du codage de P dans le treillis des parties d'un ensemble, a été illustré dans le cas d'une hiérarchie de types à l'exemple 1.18. Plus généralement, les codages d'un ensemble ordonné dans un produit direct de chaînes seront étudiés au chapitre 6.

En reprenant les conditions précédentes pour les applications de P dans le dual Q^d de Q , on obtient des définitions duales. Par exemple, une application f de P dans Q est *antitone* (ou *décroissante*) si elle est isotone de P dans Q^d , c'est-à-dire telle que $x \leq_P x'$ implique $f(x) \geq_Q f(x')$. Une application f de P dans Q est dite *monotone* si elle est isotone ou antitone. Les anti-isomorphismes introduits au chapitre 1 (définition 1.10) sont des applications antitones particulières.

Par la suite, on omettra en général les indices de référence à un ensemble ordonné particulier, en écrivant simplement \leq au lieu de, par exemple, \leq_P .

Exemple 3.2 Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné. Pour toute partie Y de X , notons $MajoY$ l'ensemble des majorants de Y dans P . Il est clair que l'ensemble $MajoX$ des majorants de X est réduit au plus grand élément de P , s'il existe, et est vide sinon. A l'opposé, observons que, pour la partie vide, on a $Majo\emptyset = X$ car, sinon, il existerait $x \in P$ et $y \in \emptyset$ avec $y \not\leq x$ (évidemment, un tel y ne peut exister!). Avec cette précision, on vérifie que $Y \subseteq Y'$ entraîne $MajoY' \subseteq MajoY$, pour tous $Y, Y' \subseteq X$, et donc que $Majo$ est une application antitone sur $\underline{2}^X$. Une seconde application antitone $Mino$ sur $\underline{2}^X$ associe à toute partie Y de X l'ensemble $MinoY$ des minorants de Y dans P , avec des propriétés analogues. On déduit de ce qui précède que le

supremum $\bigvee \emptyset$ existe dans P si et seulement si P a un minimum 0_P , auquel cas on a $\bigvee \emptyset = 0_P$. De même, $\bigwedge \emptyset$ existe dans P si et seulement si P a un maximum 1_P , et on a alors $\bigwedge \emptyset = 1_P$. A la section 3.5.3, les applications *Majo* et *Mino* seront utilisées pour définir le treillis « complété » d'un ensemble ordonné P .

Le lecteur vérifiera que les types d'applications dont les définitions suivent sont isotones, donc des morphismes d'ordre. Mais il n'est pas vrai qu'une application isotone entre deux treillis soit toujours un morphisme de treillis ou de demi-treillis (chercher un exemple).

Définition 3.3 Soient P et Q deux ensembles ordonnés et f une application de P dans Q .

1. Si P et Q sont des inf-demi-treillis, f est un inf-morphisme si elle préserve l'infimum, i.e. si, pour tous $x, x' \in P$, $f(x \wedge x') = f(x) \wedge f(x')$.
Si de plus, f est injective, c'est un inf-codage de P dans Q .
2. Si P et Q sont des sup-demi-treillis, f est un sup-morphisme si elle préserve le supremum, i.e. si, pour tous $x, x' \in P$, $f(x \vee x') = f(x) \vee f(x')$.
Si de plus, f est injective, c'est un sup-codage de P dans Q .
3. Si P et Q sont des treillis, f est un morphisme de treillis si elle est à la fois un inf- et un sup-morphisme.

Définition 3.4 On appelle exponentiation l'opération qui associe à un couple (P, Q) d'ensembles ordonnés l'ensemble de toutes les applications isotones de P dans Q , ordonné par l'ordre usuel \leq sur les applications, à savoir :

$$f \leq g \iff \forall x \in P, f(x) \leq g(x)$$

Cet ensemble ordonné sera noté Q^P , et son ordre sera appelé ordre d'exponentiation.

Nous réservons donc dans cet ouvrage la notation Q^P à l'ensemble de toutes les applications isotones d'un ensemble ordonné P dans un ensemble ordonné Q . Nous nous écartons donc là de l'usage le plus courant où cette notation correspond à l'ensemble de toutes les applications de P dans Q . On remarque que, si P est une antichaîne ($x \leq x'$ si et seulement si $x = x'$), Q^P est alors égal à l'ensemble de toutes les applications de P dans Q .

L'exercice 3.3 consiste à montrer que, si Q est un inf-demi-treillis (respectivement, un sup-demi-treillis, un treillis), Q^P est également un inf-demi-treillis (respectivement, un sup-demi-treillis, un treillis).

3.2 Parties sup-génératrices et inf-génératrices

La recherche de « bons » codages d'ensembles ordonnés dans d'autres appartenant à un type connu est un problème classique et nous rencontrons dans cet ouvrage un certain nombre de résultats de cette nature. Dans

l'immédiat et pour illustrer ce type de problème, considérons le codage d'un ensemble ordonné P quelconque dans un treillis booléen 2^E (cf. l'exemple 1.18 du chapitre 1), E étant un ensemble fini à déterminer. A cette fin, nous commençons par définir les parties sup-génératrices de P et, en dualité, ses parties inf-génératrices. Dans le cas d'un treillis, la notion plus générale de *partie génératrice* apparaîtra au chapitre 5 (définition 5.16).

Définition 3.5 Une partie G d'un ensemble ordonné P est dite sup-génératrice si tout élément de P est supremum d'une partie de G , et elle est inf-génératrice si tout élément de P est infimum d'une partie de G .

Dans la suite, nous développons principalement le cas d'une partie sup-génératrice. Nous montrons d'abord qu'à une telle partie est associé un codage de l'ensemble ordonné conservant les infimums existants (proposition 3.6). Le résultat principal de cette section est alors que l'ensemble des sup-irréductibles de P est la seule partie sup-génératrice minimale de P (proposition 3.11 et corollaire 3.12). Il est établi à partir de résultats préliminaires sur les éléments sup-irréductibles et la relation flèche inférieure \downarrow (proposition 3.8 et lemme 3.10), auxquels s'ajoutent des résultats supplémentaires dans le cas d'un inf-demi-treillis (proposition 3.15). La section se termine par l'énoncé des résultats d'auxiliaires pour les parties inf-génératrices et les éléments inf-irréductibles.

Si G est une partie sup-génératrice de P , toute partie G' de P contenant G en est aussi une partie sup-génératrice. Tout ensemble ordonné P a au moins une partie sup-génératrice, à savoir P lui-même, car on a toujours $x = \bigvee(x]$. Pour une partie G de P , notons G_x l'ensemble des éléments de G majorés par x .

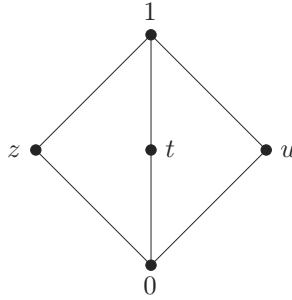
Proposition 3.6 Soit G une partie sup-génératrice d'un ensemble ordonné P . Pour tous $x, y \in P$, on a :

1. $x = \bigvee G_x$,
2. $x \leq y$ si et seulement si $G_x \subseteq G_y$,
3. si x et y ont un infimum $x \wedge y$, alors $G_{x \wedge y} = G_x \cap G_y$.

Preuve. (1) Puisque G est une partie sup-génératrice, il existe $A \subseteq G_x$ tel que $x = \bigvee A$. Tout majorant de G_x est aussi un majorant de A . Alors, le fait que l'élément x est le plus petit majorant de A entraîne qu'il est aussi le plus petit majorant de G_x , c'est-à-dire $x = \bigvee G_x$.

Pour la propriété (2), $G_x \subseteq G_y$ implique $\text{Majo}G_y \subseteq \text{Majo}G_x$, qui implique à son tour $y \in \text{Majo}G_x$ et finalement, $x \leq y$. La réciproque est immédiate.

La propriété (3) est également immédiate car, pour tout $g \in G$, on a $g \in G_{x \wedge y}$ si et seulement si $g \leq x \wedge y$, si et seulement si ($g \leq x$ et $g \leq y$), si et seulement si $g \in G_x \cap G_y$. \square

FIG. 3.1. Le treillis M_3 .

Remarque 3.7 Lorsque le supremum $x \vee y$ de x et y existe, l'égalité $G_x \cup G_y = G_{x \vee y}$ n'est pas vraie en général. Dans le treillis T , de type M_3 et dont le diagramme est donné par la figure 3.1, on a, en prenant comme partie génératrice $G = T$, $G_{z \vee t} = G$, avec $G_z = \{0, z\}$ et $G_t = \{0, t\}$:

A toute partie sup-génératrice G d'un ensemble ordonné P correspond donc, d'après la propriété (2) de la proposition 3.6 ci-dessus, un codage $x \mapsto G_x$ de P dans $\underline{2}^G$. De plus, d'après la troisième propriété de cette même proposition, ce codage préserve tous les infimums existant dans P . En particulier, pour un inf-demi-treillis, il s'agit d'un inf-codage de P dans $\underline{2}^G$. Pour trouver des codages « économiques » de ce type, il convient d'identifier les parties génératrices minimales. Remarquons d'abord qu'une partie sup-génératrice de P contient nécessairement l'ensemble S_P des sup-irréductibles de P (chapitre 1, définition 1.41), puisque ceux-ci ne s'obtiennent pas comme supremums d'autres éléments. Nous allons montrer qu'en fait, S_P est lui-même une partie sup-génératrice (proposition 3.11), donc la plus réduite possible. Nous commençons par donner deux caractérisations des sup-irréductibles d'un ensemble ordonné. L'une d'elles est fondée sur les très importantes *relations flèches*, définies au chapitre 1, définition 1.36 (rappelons que P^-x désigne l'ensemble des éléments couverts par x dans P) :

Proposition 3.8 Soient P un ensemble ordonné et $s \in P$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. s est un élément sup-irréductible de P ,
2. s n'est pas le supremum de P^-s ,
3. il existe un élément y de P tel que $s \downarrow y$.

Preuve. (1) \implies (2) : évident.

(2) \implies (3) : si s est un élément minimal de P , on a $P^-s = \emptyset$. Si s était minimal unique, c'est-à-dire minimum, on aurait $s = \bigvee \emptyset = \bigvee (P^-s)$ (cf. l'exemple 3.2), ce qui contredirait (2). Donc P a un autre élément minimal y et on a clairement $s \downarrow y$. Si s couvre un élément unique y , il vérifie bien

(2) avec $P^-s = \{y\}$, et l'on a $s \downarrow y$. Enfin, si s couvre au moins deux éléments et vérifie (2), il n'est pas le seul majorant minimal de P^-s . Il existe donc un tel majorant y de P^-s incomparable à s et on trouve encore $s \downarrow y$.

(3) \implies (1) : si s est minimal, il n'est pas minimum, puisqu'il n'est pas majoré par y . Alors la partie vide n'a pas de supremum et $\{s\}$ est la seule partie A de P vérifiant $s = \bigvee A$, ce qui entraîne que s est sup-irréductible. Autrement, si l'on a $s = \bigvee A$ avec A non vide et ne contenant pas s , tous les éléments de A sont strictement inférieurs à s et, comme y est par hypothèse un majorant de A , donc de s , ceci contredit l'hypothèse $s \downarrow y$. \square

Remarque 3.9 Dans la démonstration précédente, on a fait apparaître une classification des éléments sup-irréductibles d'un ensemble ordonné P en trois types. Pour $s \in S_P$, on a :

1. soit $|P^-s| = 0$, avec s minimal non minimum de P ,
2. soit $|P^-s| = 1$; dans ce cas, s couvre un unique élément, noté s^- ,
3. soit $|P^-s| \geq 2$, avec P^-s qui n'admet pas de supremum.

Les sup-irréductibles appartenant aux deux premiers types sont immédiatement repérables dans le diagramme de P , tandis que la reconnaissance de ceux du troisième type est moins immédiate, nécessitant par exemple la recherche des majorants minimaux de P^-s . Dans l'ensemble ordonné de la figure 3.2, a, b et c sont sup-irréductibles parce que minimaux, g parce qu'il couvre un élément unique, d, e et f parce que, pour $s \in \{d, e, f\}$, l'ensemble des majorants de P^-s a deux éléments minimaux (par exemple, d et j sont les éléments minimaux majorant $P^-d = \{a, b\}$). Les éléments h, i et j ne sont pas sup-irréductibles.

La proposition 3.11 ci-après est un résultat essentiel, qui implique que l'ensemble S_P des sup-irréductibles de tout ensemble ordonné P constitue une partie sup-génératrice de P . Sa démonstration simple va s'appuyer sur le lemme 3.10 suivant. On rappelle que $S_x = \{s \in S_P : s \leq x\}$.

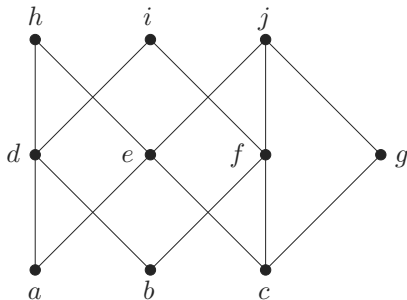


FIG. 3.2. Un ensemble ordonné à 7 éléments sup-irréductibles.

Lemme 3.10 *Soit P un ensemble ordonné. Pour tous $x, y \in P$ tels que $x \not\leq y$, il existe $s \in S_P$ tel que $s \leq x$ et $s \downarrow y$.*

Preuve. Supposons $x \not\leq y$ et considérons l'ensemble $A = \{z \in P : z \leq x \text{ et } z \not\leq y\}$. Celui-ci est non vide car il contient au moins x . Un élément minimal s de A est aussi minimal dans $\{z \in P : z \not\leq y\}$ car $z < s$ entraîne $z < x$ donc, avec $z \notin A$, $z \leq y$. On a ainsi $s \downarrow y$ d'où, d'après la proposition 3.8, $s \in S_P$. \square

Proposition 3.11 *Pour tout élément x d'un ensemble ordonné P , on a $x = \bigvee S_x$.* \square

Preuve. Si x est sup-irréductible, il est le maximum de S_x et la propriété est vraie. Sinon, il est clair que x est un majorant de S_x . Supposons qu'il existe un autre majorant y de S_x , avec $x \not\leq y$. D'après le lemme précédent, il existe $s \in S_P$ tel que $s \leq x$ et $s \downarrow y$. Donc $s \in S_x$ et $s \not\leq y$, ce qui contredit le fait que y majore S_x . Finalement, x est le plus petit majorant – donc le supremum – de S_x . \square

De la proposition précédente et de la proposition 3.6, on déduit aisément le corollaire suivant :

Corollaire 3.12 *Soit P un ensemble ordonné.*

1. *Une partie G de P est sup-génératrice si et seulement si elle contient l'ensemble S_P des sup-irréductibles de P .*
2. *Si P est un treillis, l'application $x \mapsto S_x$ de P dans le treillis des parties de S_P est un inf-codage.*

Définition 3.13 *Lorsque l'ensemble ordonné P a un minimum 0_P , on appelle atome tout élément couvrant ce minimum. L'ensemble ordonné P est dit atomistique si tout sup-irréductible de P est un atome.*

Un atome a est en effet toujours un élément sup-irréductible (avec $P^{-}a = \{0_P\}$, cf. la remarque 3.9) et, d'après la proposition et le corollaire précédents, un ensemble ordonné est atomistique si et seulement si tout élément y est supremum d'atomes.

Exemple 3.14 Soit $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ une famille de parties d'un ensemble E telle que, pour tout $e \in E$, on a $\{e\} \in \mathcal{F}$. A partir de l'égalité $F = \bigcup \{\{e\} : e \in F\}$, vérifiée par tout $F \in \mathcal{F}$, on voit que les parties de E réduites à un élément sont les sup-irréductibles de l'ensemble ordonné (\mathcal{F}, \subseteq) , et que celui-ci est atomistique si et seulement si il contient la partie vide. Ainsi, dans le cas particulier où E est l'ensemble des couples d'un ensemble I , et \mathcal{F} l'ensemble \mathcal{O}_I^s des ordres stricts sur I , on voit que l'ensemble ordonné $(\mathcal{O}_I^s, \subseteq)$, est atomistique et que ses atomes sont les ordres stricts sur I contenant un unique couple d'éléments distincts.

De même, pour la famille $\mathcal{F}' = \{F \cup K : F \in \mathcal{F}\}$, où K est une partie fixée de E , les sup-irréductibles sont les éléments de la forme $\{e\} \cup K$, avec $e \notin K$. Dans le cas où \mathcal{F}' est l'ensemble \mathcal{O}_I des ordres sur I (la partie K étant la diagonale $D = \{(i, i), i \in I\}$), les sup-irréductibles sont donc les ordres sur I contenant un unique couple d'éléments distincts. Ce sont tous des atomes de l'ensemble ordonné $(\mathcal{O}_I, \subseteq)$, qui est atomistique.

Dans un inf-demi-treillis T , où, donc, toute partie majorée admet un supremum (chapitre 2, proposition 2.15), on a une caractérisation très simple des sup-irréductibles à partir de la relation de couverture, car les sup-irréductibles sont tous du type (2) de la remarque 3.9. Il en découle aussi une caractérisation simple de la relation flèche inférieure.

Proposition 3.15 *Un élément s d'un inf-demi-treillis T est sup-irréductible si et seulement si il couvre un élément unique, noté s^- , de T . De plus, pour tout $x \in T$, on a $s \downarrow x$ si et seulement si $s \wedge x = s^-$.*

Preuve. Soit s un sup-irréductible d'un inf-demi-treillis T . Ce dernier a un minimum qui, on l'a vu, n'est pas sup-irréductible, et donc $|T^-s| \geq 1$. Supposons $|T^-s| \geq 2$. Comme T^-s est une partie majorée par s , elle a un supremum y , avec $y \leq s$. On a alors, pour tout $x \in T^-s$, $x \leq y \leq s$. Puisque $x \prec s$ (i.e. x est couvert par s), on a soit $x = y$, soit $y = s$, mais la première égalité est exclue dès lors qu'il existe un élément autre que x et nécessairement inférieur à y dans T^-s . Donc $s = y = \bigvee T^-s$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle s est un sup-irréductible. On a donc bien $|T^-s| = 1$. L'implication inverse est le point (2) de la remarque 3.9.

Soit $x \in T$ vérifiant $s \downarrow x$. Par définition, on a $s^- \leq x$ et, clairement, tout minorant commun de s et de x est majoré par s^- , d'où $s \wedge x = s^-$. Réciproquement, si $s \wedge x = s^-$, alors on a $s \not\prec x$, tandis que tout minorant de s^- est un minorant de x , d'où $s \downarrow x$. □

En appliquant le principe de dualité aux parties inf-génératrices (définition 3.5) et aux éléments inf-irréductibles (définition 1.41), on obtient les propriétés et notions suivantes, duales de celles présentées de la proposition 3.6 à la proposition 3.15 (on note H^x l'ensemble des majorants de x dans H) :

Proposition 3.16 *Si H est une partie inf-génératrice d'un ensemble ordonné P , on a, pour tous $x, y \in P$:*

1. $x = \bigwedge H^x$,
2. $x \leq y$ si et seulement si $H^y \subseteq H^x$,
3. si x et y ont un supremum $x \vee y$, alors $H^{x \vee y} = H^x \cap H^y$.

Soit I_P l'ensemble des éléments inf-irréductibles de P , I^x l'ensemble des éléments de I_P supérieurs ou égaux à x (et rappelons que xP^+ est l'ensemble des éléments couvrant x dans P).

Proposition 3.17 *Soient P un ensemble ordonné et $i \in P$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. i est un élément inf-irréductible de P ,
2. i n'est pas l'infimum de iP^+ ,
3. il existe un élément x de P vérifiant $x \uparrow i$.

Lemme 3.18 *Soit P un ensemble ordonné. Pour tous $x, y \in P$ avec $x \not\leq y$, il existe $i \in I_P$ tel que $y \leq i$ et $x \uparrow i$.*

Proposition 3.19 *Pour tout élément x d'un ensemble ordonné P , on a $x = \bigwedge I^x$.*

Nous obtenons alors qu'une partie H de P est inf-génératrice si et seulement si elle contient l'ensemble I_P des inf-irréductibles de P (nous laissons au lecteur le soin moins évident de dualiser le point (2) du corollaire 3.12). Finalement, la remarque 3.9 se dualise comme suit : un élément i de P est inf-irréductible s'il est maximal mais non maximum, ou bien couvert par un élément unique, alors noté i^+ , ou encore si, avec $|iP^+| \geq 2$, il n'est pas le seul majorant minimal de iP^+ .

Définition 3.20 *Lorsque l'ensemble ordonné P a un maximum, on appelle coatome tout élément couvert par ce maximum. L'ensemble ordonné P est dit coatomistique si tous ses inf-irréductibles sont des coatomes (et dans ce cas, tout élément de P est infimum de coatomes).*

Proposition 3.21 *Un élément i d'un sup-demi-treillis T est inf-irréductible si et seulement si il est couvert par un élément unique i^+ de T . De plus, pour tout $x \in T$, on a $x \uparrow i$ si et seulement si $x \vee i = i^+$.*

3.3 Fermetures et ouvertures

Comme il a été dit dans l'introduction, les applications fermetures et ouvertures définies sur un ensemble ordonné sont partout présentes en mathématiques (pures ou appliquées). Ces deux notions étant duales, nous étudions ici les fermetures, laissant au lecteur le soin de dualiser les résultats. Ceux-ci portent sur l'équivalence entre fermetures et « réseaux de fermeture » et sur la caractérisation de ces derniers (propositions 3.24 et 3.25). Cette caractérisation est ensuite particularisée dans le cas d'un treillis (proposition 3.26), puis dans le cas du treillis des parties d'un ensemble où elle conduit à l'importante notion de famille de Moore (définition 3.27).

Soient P, Q et V trois ensembles ordonnés. On note gf la composition de deux applications $f : P \rightarrow Q$ et $g : Q \rightarrow V$. Ainsi, pour tout $x \in P$, $gf(x) = g(f(x))$; si $P = Q = V$, f^2 désigne ff , f^3 désigne f^2f , etc. Une

application φ sur P (i.e. une application de P dans P) est dite *idempotente* si $\varphi^2 = \varphi$, c'est-à-dire si $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$ pour tout $x \in P$; dans ce cas l'image $\varphi(P)$ de P par φ est l'ensemble des points fixes de φ , éléments de P tels que $\varphi(x) = x$. En notant id_P l'application identité sur P , l'application φ est dite *extensive* si $id_P \leq \varphi$, c'est-à-dire si $x \leq \varphi(x)$ pour tout $x \in P$. A l'inverse, elle est dite *contractante* si $\varphi \leq id_P$.

Définition 3.22 Une application φ sur un ensemble ordonné P est une rétraction si elle est isotone et idempotente. Une rétraction φ sur P est une fermeture si elle est extensive. Les points fixes d'une fermeture φ , c'est-à-dire les éléments $\varphi(y)$ pour $y \in P$, sont appelés les fermés de φ . La rétraction φ est une ouverture si elle est contractante. Les points fixes d'une ouverture φ sont appelés les ouverts de φ .

Exemple 3.23 On vérifie que l'application φ définie sur l'ensemble ordonné P dont le diagramme est donné par la figure 3.3 est une fermeture : $\varphi(a) = \varphi(c) = c$, $\varphi(b) = b$, $\varphi(d) = \varphi(f) = f$ et $\varphi(e) = \varphi(1) = 1$.

Dans la suite, nous établissons des propriétés des fermetures et les propriétés duales s'appliquant aux ouvertures. Notons Φ_φ (ou simplement Φ) l'ensemble des fermés d'une fermeture φ définie sur un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$. Un *réseau de fermeture* – ou *partie de Moore* – de P est un sous-ensemble Φ de P tel que, pour tout $x \in P$, l'ensemble $\{h \in \Phi : x \leq h\}$ a un minimum, noté $\varphi_\Phi(x)$. A un réseau Φ de fermeture est donc associé une application φ_Φ .

Notons \mathbb{F} l'ensemble des réseaux de fermeture de $P = (X, \leq)$ et \mathbb{G} l'ensemble des fermetures sur P . Munissons \mathbb{F} de l'ordre d'inclusion (\mathbb{F} est alors un sous-ensemble ordonné de $\underline{2}^{P(X)}$) et – puisque les fermetures sont isotones – munissons \mathbb{G} de la restriction de l'ordre d'exponentiation P^P défini sur de telles applications (définition 3.4). La proposition suivante montre que l'on obtient un anti-isomorphisme entre ces deux ensembles ordonnés. Autrement dit, les notions de fermeture et de réseau de fermeture sont en fait équivalentes :

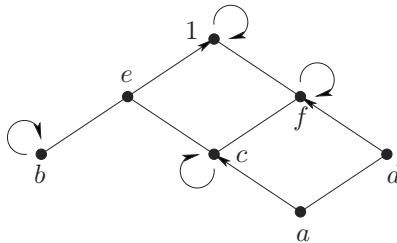


FIG. 3.3. Une fermeture sur un ensemble ordonné P .

Proposition 3.24 *Les applications $\varphi \mapsto \Phi_\varphi$ et $\Phi \mapsto \varphi_\Phi$ sont des anti-isomorphismes entre l'ensemble \mathbb{G} des fermetures sur P et l'ensemble \mathbb{F} des réseaux de fermeture de P .*

Preuve. Soit φ une fermeture sur P . Pour tous $x \in P$, $h \in \Phi_\varphi$, on a $x \leq h$ implique $x \leq \varphi(x) \leq \varphi(h) = h$, donc $\varphi(x)$ est le minimum du sous-ensemble $\{h \in \Phi_\varphi : x \leq h\}$ de P , et Φ_φ est un réseau de fermeture de P . Réciproquement, si Φ est un réseau de fermeture de P , l'application φ_Φ définie ci-dessus est une fermeture : elle est extensive et idempotente par définition, et aussi isotone car, pour tous $x \leq y$, le minimum $\varphi_\Phi(y)$ de $\{h \in \Phi : y \leq h\}$ appartient à l'ensemble $\{h \in \Phi : x \leq h\}$. Enfin, partant d'un réseau de fermeture Φ de P , on vérifie que l'on retrouve bien celui-ci comme ensemble des fermés associés à la fermeture φ_Φ .

Soient φ et φ' deux fermetures sur P et montrons que $\varphi \leq \varphi'$ implique $\Phi_{\varphi'} \subseteq \Phi_\varphi$. Soit $h' \in \Phi_{\varphi'}$ un fermé de φ' . On a par hypothèse $\varphi(h') \leq \varphi'(h') = h'$, et aussi $h' \leq \varphi(h')$ puisque la fermeture φ est extensive. On a donc $h' = \varphi(h')$, et tout fermé h' de φ' est un fermé de φ , d'où $\Phi_{\varphi'} \subseteq \Phi_\varphi$.

Soient Φ et Φ' deux réseaux de fermeture de P et montrons que $\Phi \subseteq \Phi'$ implique $\varphi_{\Phi'} \leq \varphi_\Phi$. Pour tout $x \in P$, $\Phi \subseteq \Phi'$ implique $\{h \in \Phi : x \leq h\} \subseteq \{h' \in \Phi' : x \leq h'\}$, d'où $\varphi_{\Phi'}(x) = \min\{h' \in \Phi' : x \leq h'\} \leq \varphi_\Phi(x) = \min\{h \in \Phi : x \leq h\}$. On a donc bien $\varphi_{\Phi'} \leq \varphi_\Phi$ pour l'ordre d'exponentiation. \square

On vérifie aussi que, pour tout $x \in P$, $\varphi(x)$ est le maximum de l'ensemble $\{x' \in P : \varphi(x') = \varphi(x)\}$. Rappelons (voir la section 1.4.1) qu'une partie Q de P est dite *inf-fermée* si $h \wedge h' \in Q$ chaque fois que h et h' sont des éléments de Q et ont un infimum $h \wedge h'$ dans P . Un réseau de fermeture Φ possède les propriétés suivantes :

Proposition 3.25 *Si Φ est un réseau de fermeture d'un ensemble ordonné P , alors Φ est une partie inf-fermée de P contenant tout élément maximal de P .*

Preuve. Soient h et h' deux éléments d'un réseau de fermeture Φ . Si $h \wedge h'$ existe, alors, par isotonie de la fermeture φ associée à Φ , on a $\varphi(h \wedge h') \leq \varphi(h) = h$; de même, $\varphi(h \wedge h') \leq h'$. Par conséquent, $\varphi(h \wedge h')$ est un minorant de $\{h, h'\}$, d'où $\varphi(h \wedge h') \leq h \wedge h'$, ce qui, par extensivité de φ , donne $\varphi(h \wedge h') = h \wedge h'$, i.e. $h \wedge h' \in \Phi$. La seconde partie est évidente : $h \leq \varphi(h)$ avec h maximal implique $h = \varphi(h)$. \square

Le lecteur s'interrogera sur la validité de la réciproque de ce résultat.

On définit dualement la notion de *réseau d'ouverture* de $P = (X, \leq)$ (sous-ensemble Ψ de P tel que, pour tout $x \in P$, l'ensemble des minorants de x appartenant à Ψ a un maximum), équivalente à celle d'ouverture sur P .

La proposition 3.25 entraîne qu'un réseau de fermeture Φ d'un treillis T est un sous-inf-demi-treillis de T et contient le plus grand élément 1_T de T . Réciproquement, si Φ est une partie de T vérifiant ces conditions, alors, pour

tout $x \in T$, l'ensemble $\{h \in \Phi : x \leq h\}$ est non vide, minoré par x et a un minimum. En utilisant le théorème 2.16 du chapitre 2, on obtient alors :

Proposition 3.26 *Une partie Φ d'un treillis T est un réseau de fermeture si et seulement si elle est inf-fermée et contient le maximum de T . Alors, Φ est un treillis, sous-inf-demi-treillis de T .*

L'opération infimum du treillis Φ est simplement la restriction à Φ de celle de T mais, en général, le supremum (dans T) $h \vee h'$ de deux fermés h et h' n'est pas un élément de Φ . En notant ∇ l'opération de supremum du treillis Φ , on a $h \nabla h' = \bigwedge \{x \in \Phi : h \vee h' \leq x\} = \varphi_\Phi(h \vee h')$.

Cette caractérisation des réseaux de fermeture correspond, quand T est le treillis $\underline{2}^E$ des parties d'un ensemble E , à une classe importante de familles de parties, celle des familles de Moore :

Définition 3.27 *Une famille de Moore sur un ensemble E est un sous-ensemble \mathcal{F} de $\underline{2}^E$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

- $E \in \mathcal{F}$,
- $F, F' \in \mathcal{F}$ implique $F \cap F' \in \mathcal{F}$.

Si \mathcal{F} est une famille de Moore sur E , on lui associe la fermeture $\varphi = \varphi_{\mathcal{F}}$ sur $\underline{2}^E$, définie par $A \mapsto \varphi(A) = \bigcap \{F \in \mathcal{F} : A \subseteq F\}$.

Une famille de Moore est un treillis pour l'ordre d'inclusion avec, pour tous $A, B \subseteq E$, $A \wedge B = A \cap B$ et $A \vee B = \varphi(A \cup B)$. Dualelement, les ouvertures sur $\underline{2}^E$ correspondent aux familles de parties stables pour l'union et contenant la partie vide.

Exemple 3.28 Soit T un treillis et G une partie sup-génératrice de T . On considère la famille de parties $\mathcal{G} = \{G_x, x \in T\}$ (avec $G_x = G \cap \{x\}$). D'après la propriété (3) de la proposition 3.6, la famille \mathcal{G} est stable pour l'intersection ; de plus, pour le maximum 1_T de T , on a $G_{1_T} = G$. La famille \mathcal{G} est donc une famille de Moore sur G et il est immédiat que les treillis (\mathcal{G}, \subseteq) et T sont isomorphes. On a donc montré que tout treillis s'obtient, à l'isomorphisme près, comme un treillis de fermés, qui en constitue donc une représentation ensembliste. La fermeture φ associée à \mathcal{G} est donnée, pour tout $H \subseteq G$, par $\varphi(H) = \{g \in G : g \leq \bigvee H\}$.

En particulier, on a intérêt à prendre pour une telle représentation ensembliste d'un treillis T celle utilisant sa plus petite partie sup-génératrice, i.e. l'ensemble S_T de ses sup-irréductibles. On retrouvera la famille de fermés ainsi obtenue et la fermeture correspondante au théorème 3.49.

Exemple 3.29 Soient E un ensemble fini et \mathcal{D} une famille quelconque de parties de E . On déduit de \mathcal{D} une famille $\mathcal{F} = \{\bigcap \mathcal{B} : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}\}$, que l'on note $\mathbf{m}(\mathcal{D})$. Cette dernière est une famille de Moore car elle est clairement stable pour l'intersection et elle contient E (prendre $\mathcal{B} = \emptyset$). Comme \mathcal{D} est une partie inf-génératrice du treillis \mathcal{F} , elle contient tous ses inf-irréductibles.

On constate alors que restreindre \mathcal{D} à l'ensemble de ces inf-irréductibles ne change pas la famille de Moore \mathcal{F} obtenue.

Exemple 3.30 Si $P = (X, \leq)$ est un ensemble ordonné et Y une partie de P , on pose, par extension de notations, $(Y] = \{x \in P : \text{il existe } y \in Y \text{ tel que } x \leq y\}$ et $[Y) = \{x \in P : \text{il existe } y \in Y \text{ tel que } y \leq x\}$. On vérifie que les applications $Y \mapsto (Y]$ et $Y \mapsto [Y)$ sont des fermetures sur $\underline{2}^X$, dont les fermés sont respectivement les parties commençantes et les parties finissantes de P . On les appellera la *fermeture commençante* et la *fermeture finissante* de P (ces fermetures seront obtenues d'une autre manière dans l'exercice 3.13).

3.4 Applications résiduées, résiduelles, galoisiennes

Chacun des trois types d'applications entre deux ensemble ordonnés que nous étudions dans cette section peut servir à définir les deux autres (cf. la définition 3.32 basée sur les résultats du théorème 3.33). Ces applications sont tout aussi importantes que les fermetures ou les ouvertures, que d'ailleurs elles induisent (proposition 3.34). En particulier, elles sont consubstantielles à la notion – fondamentale – de correspondance de Galois (la définition 3.37). Après avoir étudié leurs propriétés dans le cas d'ensembles ordonnés quelconques, on se consacre au cas des treillis (proposition 3.39 et corollaire 3.40), cas qui, particularisé à la section suivante, conduira à la notion de treillis de Galois d'une relation.

Soient P et Q deux ensembles ordonnés, et f une application de P dans Q . Pour toute partie Y de Q , l'image inverse de Y par f est la partie $f^{-1}(Y) = \{x \in P : f(x) \in Y\}$. Les applications isotones se caractérisent bien en termes d'images inverses ; la démonstration du résultat suivant est très simple et nous la laissons au lecteur :

Proposition 3.31 *Soit f une application d'un ensemble ordonné P dans un ensemble ordonné Q . Alors f est isotone si et seulement si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. *l'image inverse $f^{-1}(A)$ de toute partie commençante A de Q est une partie commençante de P ,*
2. *l'image inverse $f^{-1}((y])$ de toute section commençante $(y]$ de Q est une partie commençante de P ,*
3. *l'image inverse $f^{-1}(A)$ de toute partie finissante A de Q est une partie finissante de P ,*
4. *l'image inverse $f^{-1}([y))$ de toute section finissante $[y)$ de Q est une partie finissante de P .*

Il est alors naturel pour une application de P dans Q d'introduire la condition (1) du théorème ci-dessous, plus restrictive que la condition (2) de la

proposition précédente. En la dualisant ou en considérant le dual de Q , on définit ainsi trois classes particulièrement intéressantes d'applications.

Définition 3.32 Une application f d'un ensemble ordonné P dans un ensemble ordonné Q est dite :

1. résiduée si, pour tout $y \in Q$, l'image inverse $f^{-1}((y])$ de toute section commençante $(y]$ de Q est une section commençante de P ,
2. résiduelle si, pour tout $x \in P$, l'image inverse $g^{-1}([x))$ de toute section finissante $[x)$ de P est une section finissante de Q ,
3. galoisienne si elle est une application résiduée de P dans le dual Q^d de Q .

Théorème 3.33 Soit f une application d'un ensemble ordonné P dans un ensemble ordonné Q . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est résiduée,
2. il existe une application g de Q dans P telle que, pour tous $x \in P$ et $y \in Q$, on a $x \leq g(y)$ si et seulement si $f(x) \leq y$,
3. l'application f est isotone et il existe une application isotone g de Q dans P telle que l'application $\varphi = gf$ est extensive et l'application $\psi = fg$ est contractante.

Preuve. (1) \implies (2) : en définissant g par $g(y) = \max f^{-1}((y])$ pour tout $y \in Q$, on obtient immédiatement (2).

(2) \implies (1) : si (2) est vraie, on a, pour tout $y \in Q$, $f^{-1}((y]) = (g(y)]$, c'est-à-dire (1).

(1) \implies (3) : Si f vérifie (1), donc (2), elle est isotone d'après le point (2) de la proposition 3.31, tandis que, pour g , on a $g^{-1}([x)) = [f(x))$ pour tout $x \in P$, et g est isotone d'après le dernier point de la proposition 3.31. On obtient alors le reste du point (3) en prenant successivement $y = f(x)$ et $x = g(y)$ dans l'implication double de (2).

(3) \implies (1) : supposons que f vérifie (3), et soient $y \in Q$ et $x \in f^{-1}((y])$, donc vérifiant $f(x) \leq y$. Comme gf est extensive et g isotone, on a $x \leq gf(x) \leq g(y)$, d'où $f^{-1}((y]) \subseteq (g(y)]$. Pour tout $x' \in P$ tel que $x' \leq g(y)$, on a $f(x') \leq fg(y) \leq y$, donc $(g(y)] \subseteq f^{-1}((y])$, ce qui complète la preuve. \square

L'application g de Q dans P , associée à f par les conditions (2) et (3) précédentes vérifie la condition (1') suivante, duale du point (1) dans le théorème 3.33 et restriction de la condition (4) de la proposition 3.31, ainsi que les conditions équivalentes (2') et (3'), analogues à (2) et à (3) dans le théorème 3.33 :

- 1'. g est résiduelle,
- 2'. il existe une application f de P dans Q telle que, pour tous $x \in P$ et $y \in Q$, on a l'équivalence $x \leq g(y)$ si et seulement si $f(x) \leq y$,

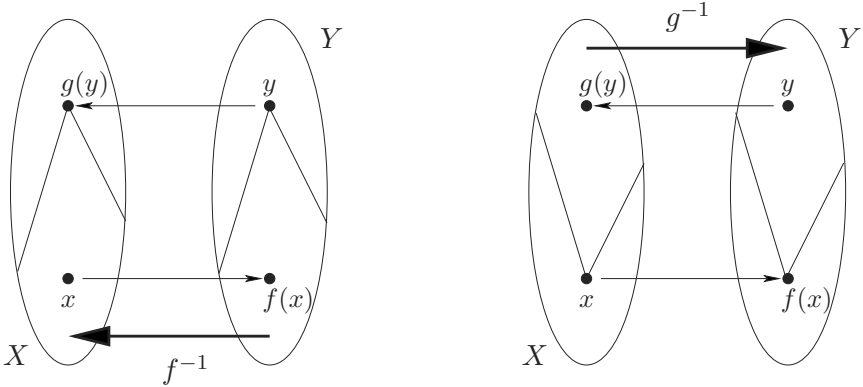


FIG. 3.4. f est résiduée et g est résiduelle.

3'. *l'application g est isotone et il existe une application isotone f de P dans Q telle que l'application $\varphi = gf$ est extensive et l'application $\psi = fg$ est contractante.*

En utilisant les conditions du théorème 3.33, on peut maintenant montrer que la composée d'une application résiduée et de sa résiduelle associée est une fermeture tandis que la composée de cette résiduelle et de la résiduée est une ouverture.

Proposition 3.34 *Soient P et Q deux ensembles ordonnés, f une application résiduée de P dans Q et g l'application résiduelle associée. Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. $fgf = f$ et $gfg = g$,
2. *l'application composée $\varphi = gf$ est une fermeture sur P et l'application composée $\psi = fg$ est une ouverture sur Q ,*
3. *le sous-ensemble ordonné $\Phi = \varphi(P)$ des fermés de φ dans P est égal à $g(Q)$ et le sous-ensemble ordonné $\Psi = \psi(Q)$ des ouverts de ψ dans Q est égal à $f(P)$. Φ et Ψ sont isomorphes par les restrictions de f et de g à, respectivement, Φ et Ψ .*

Preuve. (1) Si f est une application résiduée et g l'application résiduelle associée, on a les inégalités suivantes : $gf(g(y)) \geq g(y)$ puisque gf est extensive, $fg(y) \leq y$ puisque fg est contractante, et $g(fg(y)) \leq g(y)$ puisque g est isotone. Donc, $gfg = g$ et, de même, $fgf = f$.

(2) L'application $\varphi = gf$ est isotone, comme composée de deux applications isotones, extensive et idempotente, car, d'après le point (1) précédent, $\varphi^2 = fgfgf = gf = \varphi$; c'est donc une fermeture sur P . De même, $\psi = fg$, qui est isotone, contractante et idempotente, est une ouverture sur Q .

(3) D'après le point (1), pour tout $x \in P$, $\psi(f(x)) = f(x)$ et donc $f(P) \subseteq \Psi$; puisque tout ouvert h' de Ψ vérifie $h' = \psi(h') = fg(h')$, on a $\Psi \subseteq f(P)$,

d'où $\Psi = f(P)$. De même, $g(Q) = \Phi$. Les égalités $h = gf(h)$ et $h' = fg(h')$ pour tous $h \in \Phi, h' \in \Psi$ entraînent que les restrictions de f à Φ et de g à Ψ sont des bijections inverses. \square

Exemple 3.35 On donne dans la figure 3.5 ci-dessous deux ensembles ordonnés P et Q ainsi qu'un couple (f, g) d'applications, où f est résiduée de P dans Q et g est la résiduelle correspondante de Q dans P (les tableaux 3.1 décrivent ces applications). On y indique également la fermeture $\varphi = gf$ sur P , l'ouverture $\psi = fg$ sur Q , ainsi que l'isomorphisme entre $\varphi(P)$ et $\psi(Q)$. La fermeture d'un élément de P est représentée en fléchant l'arc de couverture si cette fermeture couvre l'élément, ou par un arc fléché d'origine cet élément et d'extrémité sa fermeture sinon. Il en va de même pour l'ouverture d'un élément de Q . Les flèches en pointillés correspondent à l'isomorphisme entre $\varphi(P)$ et $\psi(Q)$. Les fermés de P , comme les ouverts de Q , sont repérés par des boucles et des points noirs.

D'après la définition 3.32, une application f de P dans Q est *galoisienne* si l'image inverse par f de toute section finissante de Q est une section commençante de P . Le théorème 3.33 se reformule alors comme suit :

Théorème 3.36 Soient P et Q deux ensembles ordonnés et f une application de P dans Q . Alors f est galoisienne si et seulement si elle vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

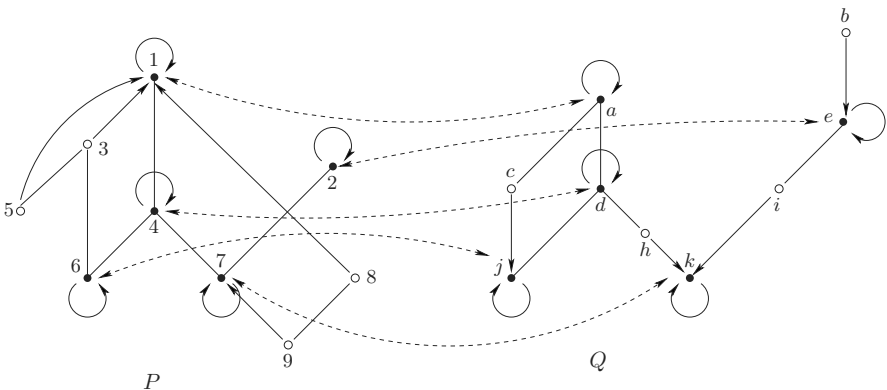


FIG. 3.5. La fermeture gf sur P et l'ouverture fg sur Q .

TABLEAU 3.1. Les tables des applications f et g .

$x \in P$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	a	e	a	d	a	j	k	a	k
$y \in Q$	a	b	c	d	e	h	i	j	k
$g(y)$	1	2	6	4	2	7	7	6	7

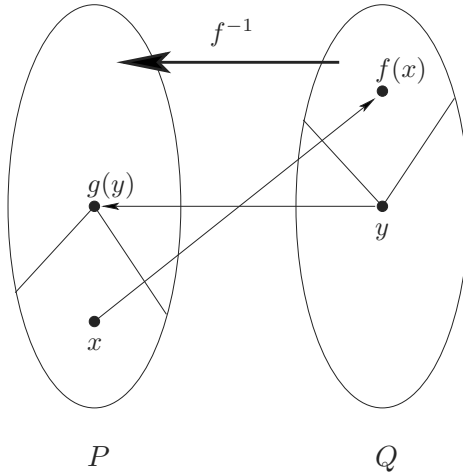


FIG. 3.6. f est galoisienne.

1. pour tout $y \in Q$, l'image inverse $f^{-1}(\{y\})$ de toute section finissante de Q est une section commençante de P ,
2. il existe une application g de Q dans P telle que, pour tous $x \in P$ et $y \in Q$, $x \leq g(y)$ si et seulement si $y \leq f(x)$,
3. l'application f est antitone et il existe une application antitone g de Q dans P telle que les applications $\varphi = gf$ et $\psi = fg$ sont extensives.

L'équivalence formulée dans la condition (2) ci-dessus est appelée *relation de Pickert*. Elle met en évidence le fait que les applications f et g ont des rôles symétriques. L'application g du théorème 3.36 est donc également galoisienne, et on dit que c'est l'application galoisienne *associée* à f . Dans ce cas, f est de même l'application galoisienne associée à g .

Définition 3.37 Une correspondance de Galois entre deux ensembles ordonnés P et Q est un couple (f, g) , où f est une application antitone de P dans Q , g une application antitone de Q dans P et où les composées gf et fg sont extensives.

D'après le point (3) du théorème 3.36, une correspondance de Galois est caractérisée par le fait que f est une application galoisienne de P dans Q ; g est alors l'application galoisienne de Q dans P associée à f (c'est aussi la résiduelle de Q^d dans P associée à la résiduée f de P dans Q^d). La proposition 3.34 (et, dans le cas des treillis, la proposition 3.26) permet alors d'énoncer :

Théorème 3.38 Soit (f, g) une correspondance de Galois entre deux ensembles ordonnés P et Q . Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $fgf = f$ et $g = gfg$,
2. les applications composées $\varphi = gf$ et $\psi = fg$ sont des fermetures, respectivement sur P et sur Q ,
3. les réseaux de fermeture $\varphi(P)$ et $\psi(Q)$ sont deux ensembles ordonnés anti-isomorphes par les restrictions à ces sous-ensembles ordonnés de f et de g . Si, de plus, P et Q sont deux treillis, $\varphi(P)$ et $\psi(Q)$ sont deux treillis duaux.

Il ressort de ce qui précède que les notions d'application résiduelle, résiduée, galoisienne et de correspondance de Galois entre deux ensembles ordonnés sont équivalentes. Il est plus commode d'employer l'une ou l'autre d'icelles suivant les situations, très fréquentes, où on les rencontre. Par exemple, il est facile de voir que la composée de deux applications résiduées (respectivement, résiduelles) est encore une application résiduée (respectivement, résiduelle) – cf. l'exercice 3.8 –, alors qu'il n'y a pas de propriété analogue pour les applications galoisiennes. D'un autre côté, dans une correspondance de Galois, les deux applications ont un rôle symétrique. On verra plus loin que ces correspondances ont un rôle majeur pour la mise en évidence de classes d'objets induites par des propriétés communes.

On peut se demander s'il existe toujours des applications de l'un des types décrits ci-dessus entre deux ensembles ordonnés P et Q quelconques. La réponse est négative : si, par exemple, Q a un plus grand élément 1_Q , on a $(1_Q) = Q$ et, pour toute application f de P dans Q , $f^{-1}(Q) = P$. Alors, si P a plus d'un élément maximal, la partie (1) de la définition 3.32 ne peut être vérifiée et il n'y a pas d'application résiduée de P dans Q . Nous allons voir que la situation est différente si P et Q sont des treillis.

Proposition 3.39 *Soient T et T' deux treillis, et f une application de T dans T' . Alors f est résiduée si et seulement si elle est un sup-morphisme vérifiant $f(0_T) = 0_{T'}$.*

Preuve. Supposons f résiduée. Le minimum 0_T de T appartient à $f^{-1}((0_{T'}]) = f^{-1}(0_{T'})$, d'où $f(0_T) = 0_{T'}$. Soient $x, x' \in T$ et $y = f(x) \vee f(x')$; l'isotonie de f donne $f(x) \leq f(x \vee x')$ ainsi que $f(x') \leq f(x \vee x')$, d'où $y \leq f(x \vee x')$. Montrons maintenant $f(x \vee x') \leq y$. Par l'isotonie de l'application résiduelle g associée à f et l'extensivité de gf , $f(x) \leq y$ entraîne $x \leq gf(x) \leq g(y)$, et de même pour x' , d'où $x \vee x' \leq g(y)$. Ainsi, par isotonie de f et puisque fg est contractante, $f(x \vee x') \leq fg(y) \leq y$. On a donc bien l'égalité $f(x \vee x') = f(x) \vee f(x')$.

Réciproquement, supposons que l'application f est un sup-morphisme vérifiant $f(0_T) = 0_{T'}$. Elle est alors isotone car $x \leq x'$ entraîne $f(x \vee x') = f(x') = f(x) \vee f(x')$, d'où $f(x) \leq f(x')$. Soit $y \in T'$, et posons $g(y) = \bigvee \{x \in T : f(x) \leq y\} = \bigvee f^{-1}((y])$. On a, par définition, $f^{-1}((y]) \subseteq (g(y)]$. Comme f est un sup-morphisme, on a aussi $fg(y) = \bigvee \{f(x) : x \in T, f(x) \leq y\} \leq y$. L'ensemble $\{x \in T, f(x) \leq y\}$ n'est jamais vide car, par hypothèse, il contient au moins l'élément 0_T . D'où $g(y) \in f^{-1}((y])$ et, par isotonie de f ,

$(g(y)) \subseteq f^{-1}((y))$. Finalement, $(g(y)) = f^{-1}((y))$ pour tout $y \in T'$, et f vérifie la propriété (1) du théorème 3.33. \square

Corollaire 3.40 *Soient T et T' deux treillis et f une application de T dans T' . Alors f est :*

- résiduelle si et seulement si elle est un inf-morphisme vérifiant $f(1_T) = 1_{T'}$,
- galoisienne si et seulement si $(f(0_T) = 1_{T'})$ et, pour tous $x, x' \in T$, $f(x \vee x') = f(x) \wedge f(x')$.

A partir du théorème 3.38, on voit qu'une correspondance de Galois (f, g) entre deux treillis T et T' définit deux treillis duaux de fermés $f(T) = fg(T') \subseteq T'$ et $g(T') = gf(T) \subseteq T$. En notant ∇ et ∇' les opérations de supremum dans ces deux treillis, et \wedge et \wedge' les opérations d'infimum dans T et T' , on a, pour tous fermés h, k de T :

$$f(h \wedge k) = f(h)\nabla' f(k) \quad \text{et} \quad f(h\nabla k) = f(h) \wedge' f(k)$$

Exemple 3.41 Soient E et E' deux ensembles et une relation $R \subseteq E \times E'$ (et R^c la relation complémentaire de R). On définit une application $f_0 : \underline{2}^E \mapsto \underline{2}^{E'}$ par $f_0(A) = \{b \in E' : aRb \text{ pour au moins un élément } a \text{ de } A\}$, pour toute partie A de E . On a $f_0(\emptyset) = \emptyset$ et on vérifie que $f_0(A \cup A') = f_0(A) \cup f_0(A')$, pour tous $A, A' \subseteq E$. D'après la proposition 3.39, f_0 est donc une application résiduée de $\underline{2}^E$ dans $\underline{2}^{E'}$. L'application résiduelle g_0 associée à f_0 est définie par $g_0(B) = \{a \in E : aR \subseteq B\}$, pour toute partie B de E' (avec $aR = \{b \in E' : aRb\}$). Pour un usage de ces applications, cf. la section 3.6 des compléments et références.

Remarque 3.42 L'application constante qui envoie tout élément du treillis T sur le plus petit élément $0_{T'}$ du treillis T' est clairement résiduée. Plus généralement, l'exercice 3.12 propose de montrer que l'ensemble ordonné (sous-ensemble de T'^T) des applications résiduées de T dans T' est isomorphe à l'ensemble ordonné T'^{S_T} , où S_T est l'ensemble ordonné des sup-irréductibles de T .

3.5 Correspondance de Galois associée à une relation

On vient de voir qu'une grande vertu d'une correspondance de Galois est de mettre en évidence des sous-structures duales au sein de deux ensembles ordonnés différents. Lorsque, de plus, ces deux ensembles ordonnés sont des treillis, on obtient de nombreuses propriétés supplémentaires. Nous traitons dans cette section du cas particulier où ces treillis sont les treillis de parties de deux ensembles. Ce cas conduit, d'une part, à de nombreuses applications et, d'autre part, à des résultats généraux sur la représentation des treillis. Il permet également de montrer l'existence d'un codage canonique d'un ensemble ordonné dans un treillis par le procédé de complétion.

3.5.1 Treillis de Galois

Dans l'exemple 3.41, on a associé à une relation R entre deux ensembles E et E' une application résiduée et sa résiduelle, et donc une correspondance de Galois. Mais la correspondance de Galois (f_R, g_R) classiquement associée à une telle relation R est définie de façon différente. Posons d'abord, pour tous $e \in E, e' \in E', eR = \{e' \in E' : eRe'\}$ et $Re' = \{e \in E : eRe'\}$ puis, pour tous $A \subseteq E, B \subseteq E'$:

$$f_R(A) = \{b \in E' : aRb \text{ pour tout } a \in A\} = \bigcap \{eR : e \in A\},$$

$$g_R(B) = \{a \in E : aRb \text{ pour tout } b \in B\} = \bigcap \{Re' : e' \in B\}.$$

On vérifie aisément que f_R et g_R sont antitones et que l'on a toujours $A \subseteq g_R f_R(A)$ et $B \subseteq f_R g_R(B)$. Le couple (f_R, g_R) vérifie donc la propriété (3) du théorème 3.36 et constitue par conséquent une correspondance de Galois entre les treillis $\underline{2}^E$ et $\underline{2}^{E'}$.

Soient $\varphi_R = g_R f_R$ et $\psi_R = f_R g_R$ les fermetures, respectivement sur $\underline{2}^E$ et sur $\underline{2}^{E'}$, associées à cette correspondance (en général, on écrira simplement f, g, φ et ψ pour f_R, g_R, φ_R et ψ_R).

Proposition 3.43 *Soit $R \subseteq E \times E'$ une relation entre deux ensembles E et E' , F une partie de E et H une partie de E' . Avec les notations ci-dessus, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

1. F est un fermé de φ et $H = f(F)$,
2. H est un fermé de ψ et $F = g(H)$,
3. $H = f(F)$ et $F = g(H)$,
4. $F \times H \subseteq R$, avec F et H maximaux pour cette propriété.

Preuve. L'équivalence des points (1), (2) et (3) découle des propriétés des correspondances de Galois. Si F et H vérifient (3), on a, par définition, aRb pour tout couple $(a, b) \in F \times H$. De plus, si on prend, par exemple, $b' \in E' \setminus H$, il existe au moins un élément a de F tel que $aR^c b'$ (sinon on aurait $b' \in f(F)$), d'où le point (4).

Réciproquement, si (4) est vrai, on a bien $H = \{b \in E' : aRb \text{ pour tout } a \in F\} = f(F)$ et, de même, $F = g(H)$. □

Un *concept* de la relation R est un ensemble $F \times H$ vérifiant les conditions de la proposition 3.43 (on dit aussi *sous-matrice première* ou *rectangle maximal*, entre autres appellations). Nous notons $Gal(E, E', R)$ l'ensemble des concepts $F \times H$ de R . Du fait des propriétés de la correspondance de Galois, si $F \times H$ et $F' \times H'$ sont deux concepts, on a $F \subseteq F'$ si et seulement si $H' \subseteq H$. On ordonne alors $Gal(E, E', R)$ par la relation :

$$F \times H \leq F' \times H' \iff F \subseteq F'$$

$$\iff H' \subseteq H$$

Définition 3.44 *L'ensemble ordonné $(Gal(E, E', R), \leq)$ est appelé le treillis de Galois de R (ou parfois aussi le treillis de concepts).*

Cet ensemble ordonné $Gal(E, E', R)$ est bien un treillis puisque, par définition, il est isomorphe à $\mathcal{F} = \varphi(\underline{2}^E)$ et dual de $\mathcal{G} = \psi(\underline{2}^{E'})$. On en déduit que ses opérations sont données par :

$$(F \times H) \wedge (F' \times H') = (F \cap F') \times (\psi(H \cup H'))$$

et

$$(F \times H) \vee (F' \times H') = (\varphi(F \cup F')) \times (H \cap H')$$

Exemple 3.45 (Guénoche [203], 1993) Le tableau 3.2 donne une relation binaire R de $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ vers $E' = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ et la figure 3.7 son treillis de Galois, qui a 15 éléments. Les significations des éléments de E et de E' sont les suivantes :

La proposition 3.43 et l'exemple précédent précisent et illustrent ce qu'une correspondance de Galois de ce type fait ressortir chaque fois qu'un ensemble E d'objets est décrit par un ensemble E' de « caractères » binaires de type « présence/absence ». On entend par là que les termes de l'alternative associée à chaque caractère n'ont pas un rôle équivalent : il est toujours significatif que l'objet e possède la propriété e' mais pas nécessairement qu'il ne la possède pas. Un fermé F constitue alors la « classe » de tous les objets possédant en commun tous les caractères du fermé $G = f(F)$, c'est-à-dire la

TABLEAU 3.2. Table de la relation R .

1	Atruche	A	Pond des oeufs
2	Canari	B	Possède des plumes
3	Canard	C	Possède des écailles
4	Requin	D	A la peau nue
5	Saumon	E	Possède des dents
6	Grenouille	F	Vole
7	Crocodile	G	Nage
8	Barracuda	H	Respire de l'air

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	×	×						×
2	×	×				×		×
3	×	×				×	×	×
4	×			×	×		×	
5	×		×				×	
6	×			×			×	×
7	×			×	×		×	×
8	×		×		×		×	

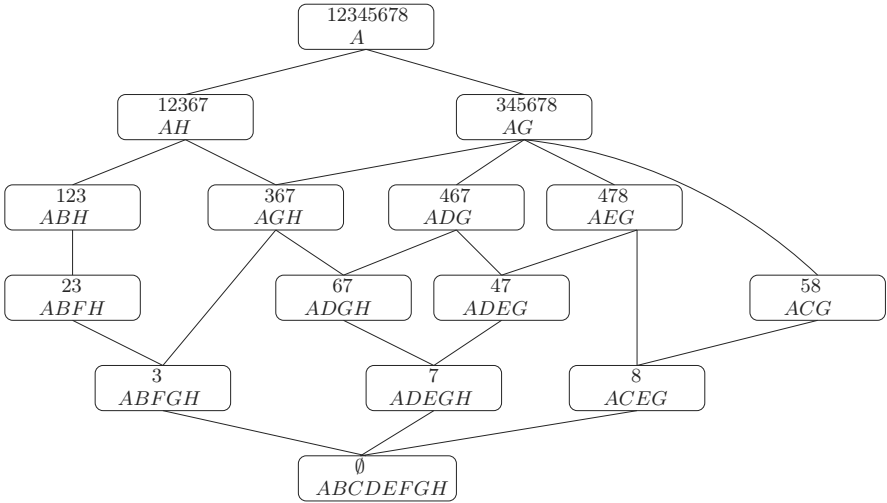


FIG. 3.7. Le treillis de Galois de la relation R .

description en *extension* du concept $C = F \times G$. Ces classes constituent la famille de Moore \mathcal{F} . De son côté, le fermé G est l'ensemble de toutes les propriétés communes aux éléments de F , c'est-à-dire la description en *intension* du concept C . Ces descriptions constituent la famille de Moore duale \mathcal{G} . Le treillis de Galois de R est donc l'ensemble ordonné de tous les concepts engendrés par la relation R . Nous reviendrons sur ce sujet dans les notes de ce chapitre ainsi qu'à la section 7.4 du chapitre 7 mais on voit bien déjà à quel point cette « classification galoisienne » est indissociable de certaines lois de la pensée.

3.5.2 Table d'un ensemble ordonné

Dans cette section, nous allons définir la table d'un ensemble ordonné et montrer que, dans le cas d'un treillis, cette table permet de le reconstituer (théorème 3.49). Nous donnerons ensuite des propriétés de la table d'un treillis (proposition 3.50), ces dernières étant étendues à la table d'un ensemble ordonné quelconque à la fin de la section suivante.

Soit P un ensemble ordonné, S_P et I_P les ensembles de ses sup-irréductibles et de ses inf-irréductibles, et \downarrow et \uparrow ses relations flèches inférieure et supérieure (chapitre 1, définition 1.36). Soient $\downarrow|_{S_P \times I_P}$ et $\uparrow|_{S_P \times I_P}$, respectivement, les restrictions à $S_P \times I_P$ de ces relations flèches (pour simplifier, on utilisera en général la même notation pour les relations flèches de P et pour leur restriction à $S_P \times I_P$ – l'exercice 3.5 justifie cette liberté).

Définition 3.46 La table d'un ensemble ordonné P est la relation $R_P \subseteq S_P \times I_P$ définie par $sR_P i$ si $s \leq i$. La table fléchée de P est le triplet $\mathcal{R}_P = (R_P, \downarrow, \uparrow)$ de relations sur $S_P \times I_P$.

Remarque 3.47 Au chapitre 1, on a utilisé des représentations d'une relation par des « tables », telles les tableaux 1.1 de la section 1.1.1. Il est clair que dans l'expression « table d'un ensemble ordonné », on utilise ce terme en un sens différent puisqu'il y désigne une relation particulière définie sur l'ensemble ordonné. Évidemment, cette relation (comme les relations flèches) peut elle-même être représentée par une table au sens usuel. C'est ce qui est fait plus loin avec le tableau 3.3 représentant la table fléchée (donc représentant trois relations) de l'ensemble ordonné de la figure 3.2.

On rappelle que S_t et I^t désignent respectivement l'ensemble des sup-irréductibles de P majorés par t et l'ensemble des inf-irréductibles de P minorés par t (section 3.2). Dans le cas particulier d'un treillis T , définissons les applications $f_1 : P(S_T) \rightarrow T$, $g_1 : T \rightarrow P(S_T)$, $f_2 : T \rightarrow P(I_T)$ et $g_2 : P(I_T) \rightarrow T$ comme suit : pour tous $t \in T$, $A \subseteq S_T$, $B \subseteq I_T$,

$$f_1(A) = \bigvee A, \quad g_1(t) = S_t, \quad f_2(t) = I^t, \quad g_2(B) = \bigwedge B$$

Les égalités $f_1 g_1 = g_2 f_2 = id_T$ sont obtenues comme conséquences directes des propositions 3.11 et 3.19. De plus, si (f, g) est la correspondance de Galois associée à la table R_T (comme au début de la section 3.5.1), on a

$$f(A) = \{b \in I_T : a \leq b, \forall a \in A\} = \{b \in I_T : \bigvee A \leq b\} = f_2 f_1(A)$$

et

$$g(B) = \{a \in S_T : a \leq b, \forall b \in B\} = \{a \in S_T : a \leq \bigwedge B\} = g_1 g_2(B)$$

i.e. $f = f_2 f_1$ et $g = g_1 g_2$ (figure 3.8).

En particulier $f(t) = I^t$ et $g(t) = S_t$. En munissant – exceptionnellement – $P(I_T)$ de l'ordre \supseteq dual de l'inclusion, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 3.48 *Soit T un treillis. On considère les applications $f_1 : (P(S_T), \subseteq) \rightarrow T$, $g_1 : T \rightarrow (P(S_T), \subseteq)$, $f_2 : T \rightarrow (P(I_T), \supseteq)$ et $g_2 : (P(I_T), \supseteq) \rightarrow T$ définies par $f_1(A) = \bigvee A$, $g_1(t) = S_t$, $f_2(t) = I^t$ et $g_2(B) = \bigwedge B$. Alors f_1 et f_2 sont résiduées, et g_1 et g_2 sont les applications résiduelles associées.*

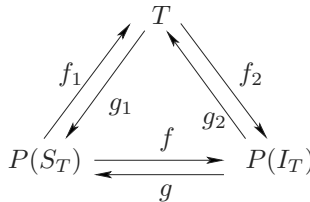


FIG. 3.8. La décomposition d'une correspondance de Galois.

Preuve. Montrons qu'on a, pour tous $t \in T$, $A \subseteq S_T$, $B \subseteq I_T$, les deux équivalences suivantes : $A \subseteq g_1(t)$ si et seulement si $t \geq f_1(A)$ et $t \leq g_2(B)$ si et seulement si $f_2(t) \supseteq B$, c'est-à-dire $A \subseteq S_t$ si et seulement si $\bigvee A \leq t$ et $t \leq \bigwedge B$ si et seulement si $B \subseteq I^t$. Or, $A \subseteq S_t$ implique $\bigvee A \leq \bigvee S_t = t$ et $\bigvee A \leq t$ implique $s \leq t$ pour tout s de A . De même pour la seconde équivalence. Les applications f_1 et f_2 vérifient donc chacune les termes de la condition (2) du théorème 3.33, qui caractérise les applications résiduées, et g_1 et g_2 apparaissent comme leurs résiduelles associées. \square

Théorème 3.49 *Tout treillis T est isomorphe au treillis de Galois de sa table R_T (par l'application $t \mapsto (S_t, I^t)$).*

Preuve. Selon le résultat précédent et la proposition 3.34, le treillis de fermés $g_1 f_1((P(S_T), \subseteq))$ est isomorphe à $f_1 g_1(T) = id_T(T) = T$. Puisque $\varphi = g f = g_1 g_2 f_2 f_1 = g_1 f_1$, le treillis de Galois $Gal(S_T, I_T, R_T)$, qui est isomorphe au treillis de fermés $\varphi((P(S_T), \subseteq))$, est isomorphe au treillis T \square

Soient E et E' deux ensembles, une relation $R \subseteq E \times E'$, et (f, g) la correspondance de Galois associée à R . Nous reprenons les notations de la section 3.5.1 précédente. La famille de Moore $\mathcal{F} = \varphi(\underline{2}^E)$ s'obtient comme à l'exemple 3.29 à partir de la famille $\{Re' : e' \in E'\}$ de parties de E , par intersections sur ces parties. Tout inf-irréductible de \mathcal{F} est donc de la forme Re' , pour un certain $e' \in E'$ (par dualité, la fermeture $\psi(e')$ de celui-ci est alors un sup-irréductible de $\mathcal{G} = \psi(\underline{2}^{E'})$). On avait alors observé que la famille \mathcal{F} reste inchangée si on part seulement de ces inf-irréductibles. Ceci revient à sélectionner un sous-ensemble E'_1 de E' , et à considérer la restriction R_1 de la relation R à $E \times E'_1$. En d'autres termes, un élément e'_0 de E' est ôté de E' dans chacun des cas suivants :

- $Re'_0 = E$,
- Il existe une partie B de $E' \setminus \{e'_0\}$ telle que $Re'_0 = \bigcap \{Re' : e' \in B\}$,
- $Re'_0 = Re'_1$ pour un e'_1 retenu dans E'_1 .

Cette première réduction n'affecte pas la famille de Moore \mathcal{F} , tandis que, dans la correspondance de Galois (f_1, g_1) associée à la relation R_1 , la famille de Moore $\mathcal{G} = \psi(\underline{2}^{E'})$ sur E' est remplacée par une famille de Moore \mathcal{G}_1 sur E'_1 , dont le treillis est dual de \mathcal{F} et donc isomorphe à \mathcal{G} .

Une seconde réduction sélectionne de la même façon une partie E_2 de E . Dans la correspondance de Galois (f_2, g_2) associée à la restriction R_2 de R à $E_2 \times E'_1$, la famille de Moore \mathcal{F} sur E est remplacée par une famille de Moore \mathcal{F}_2 sur E_2 , ordonnée par inclusion en un treillis dual de \mathcal{G}_1 et isomorphe à \mathcal{F} , la famille de Moore \mathcal{G}_1 restant inchangée. Un point important est que, pour tout $e \in E_2$, la partie $eR_2 = f_2(e)$ de E'_1 est un inf-irréductible de \mathcal{G}_1 (et $g_2 f_2(e)$ est un sup-irréductible de \mathcal{F}_2). De même, pour tout $e' \in E'_1$, la partie $R_2 e' = g_2(e')$ de E_2 est un inf-irréductible de \mathcal{F}_2 (et $f_2 g_2(e')$ un sup-irréductible de \mathcal{G}_1). La relation R_2 est alors dite *réduite* (on parle aussi de *table réduite*). Ces relations sont donc celles qui vérifient les trois conditions d'exclusion de l'exercice 3.6.

Nous venons d'observer que toutes les relations qui ont la même relation réduite ont aussi, à l'isomorphisme près, le même treillis de Galois. En revanche, aux isomorphismes et étiquetages près, les tables réduites et les treillis sont en correspondance biunivoque. La table réduite d'un treillis en est donc une expression condensée. La table fléchée d'un treillis apporte plus, puisque ses propriétés permettent, pour plusieurs classes importantes de treillis, de reconnaître que le treillis appartient à une telle classe. C'est par exemple le cas pour les treillis distributifs (comme le montrera la caractérisation (5) de ces treillis au théorème 5.1). Le résultat suivant donne deux propriétés toujours vérifiées par la table fléchée d'un treillis. Nous verrons dans la section 3.5.3 suivante qu'il s'étend à un ensemble ordonné quelconque.

Proposition 3.50 *Soit T un treillis.*

1. Pour tout $s \in S_T$, il existe $i \in I_T$ tel que $s \uparrow i$.
2. Pour tout $i \in I_T$, il existe $s \in S_T$ tel que $s \downarrow i$.

Preuve. (1) Nous montrons d'abord que, pour tout sup-irréductible s , il existe un inf-irréductible i vérifiant $s \downarrow i$. Selon la proposition 3.8, il existe un élément x pour lequel on a $s \downarrow x$. Si x n'est pas inf-irréductible, on a, selon la proposition 3.19, $x = \bigwedge I^x$. Alors, s n'est pas un minorant de I^x car cela entraînerait $s \leq x$. Il existe donc un inf-irréductible $i \in I^x$ tel que $s \not\leq i$. De plus, pour l'élément unique s^- couvert par s (proposition 3.15), on a $s^- \leq x \leq i$, d'où la propriété $s \downarrow i$.

Soit alors un inf-irréductible i maximal avec la propriété $s \downarrow i$. L'élément unique i^+ couvrant i vérifie $s \leq i^+$ (sinon, on trouverait comme précédemment un inf-irréductible i' majorant strictement i et vérifiant $s \downarrow i'$). On a donc $s \uparrow i$, et finalement $s \uparrow i$. On montre dualement la propriété (2). \square

3.5.3 Complété d'un ensemble ordonné

Considérons un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ et reprenons l'exemple 3.2 où deux applications antitones $Majo$ et $Mino$ ont été définies sur $\underline{2}^X$. On vérifie que les applications composées $MinoMajo$ et $MajoMino$ sont extensives : par exemple, si l'on a $A \subseteq A' \subseteq X$, alors $x \in A$ entraîne $x \leq y$, pour tout $y \in MajoA$, donc $x \in Mino(MajoA)$ et $A \subseteq Mino(MajoA)$. En fait, le couple $(Majo, Mino)$ n'est autre que la correspondance de Galois associée à la relation \leq sur X . Il lui correspond le treillis de Galois $Gal(P)$, auquel nous nous intéressons dans cette section.

Définition 3.51 *Pour tout ensemble ordonné $P = (X, \leq)$, on appelle complété de MacNeille (ou complété de Dedekind–MacNeille, ou simplement complété) de P le treillis de Galois $Gal(X, X, \leq)$, que l'on notera $Gal(P)$.*

Les raisons du terme « complété » apparaîtront avec la proposition 3.52. Nous allons établir des propriétés du complété de $P = (X, \leq)$ et, pour cela,

il sera commode de travailler avec le treillis des fermés qui lui est isomorphe et/ou avec le treillis des fermés qui lui est dual (cf. la section 3.5.1). Les deux fermetures correspondantes sont les composées des applications *Mino* et *Majo*. Posons $\mu = \text{MinoMajo}$ et $\mu' = \text{MajoMino}$. On a, pour tout $A \subseteq X$:

$$\mu(A) = \bigcap \{[x], x \in \text{Majo}A\} \text{ et } \mu'(A) = \bigcap \{[x], x \in \text{Mino}A\},$$

et, en particulier, pour tout $x \in P$:

$$\mu(\{x\}) = \text{Mino}\{x\} = [x] \text{ et } \mu'(\{x\}) = \text{Majo}\{x\} =]x[.$$

Puisqu'une partie de X est un fermé de μ si et seulement si elle est égale à X ou à une intersection de sections commençantes de P , c'est une partie commençante de P . Il s'ensuit que le treillis $\mathcal{F} = \mu(\underline{2}^X)$ des fermés de μ est contenu dans le treillis distributif $\mathcal{C}(P)$ des parties commençantes de P (treillis étudié à la section 5.2) ; à l'isomorphisme près, il en est donc ainsi pour le complété de P . De même, le treillis $\mathcal{G} = \mu'(\underline{2}^X)$ des fermés de μ' (dual du treillis \mathcal{F} et du complété de P) est contenu dans le treillis distributif des parties finissantes de P .

La fermeture μ est définie sur $\underline{2}^X$. La proposition suivante montre que sa restriction à X vérifie des propriétés fortes. Pour alléger l'écriture, nous posons $\mu(\{x\}) = \mu(x)$ pour tout $x \in P$.

Proposition 3.52 *Soient $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné et $\mu = \text{MinoMajo}$ la fermeture définie sur $\underline{2}^X$ par $\mu(A) = \bigcap \{[x], x \in \text{Majo}A\}$. La restriction de μ à P est un codage de P dans le treillis de fermés $\mathcal{F} = \mu(\underline{2}^X)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *si x et y ont un infimum $x \wedge y$ dans P , on a $\mu(x \wedge y) = \mu(x) \cap \mu(y)$,*
2. *si x et y ont un supremum $x \vee y$ dans P , alors $\mu(x \vee y)$ est le supremum de $\mu(x)$ et de $\mu(y)$ dans le treillis \mathcal{F} .*

Preuve. Si $x \leq y$, alors $z \leq x$ entraîne $z \leq y$, donc $[x] = \mu(x) \subseteq [y] = \mu(y)$. Réciproquement, $[x] = \mu(x) \subseteq [y] = \mu(y)$ entraîne $x \in [y]$, c'est-à-dire $x \leq y$. L'application μ est donc bien un codage de P dans \mathcal{F} .

(1) Si x et y ont un infimum $x \wedge y$, on a

$$\begin{aligned} z \in \mu(x \wedge y) = [x \wedge y] &\iff z \leq x \wedge y \\ &\iff z \leq x \text{ et } z \leq y \\ &\iff z \in [x] \cap [y] \\ &\iff z \in \mu(x) \cap \mu(y), \end{aligned}$$

d'où le point (1).

(2) De même, si x et y ont un supremum $x \vee y$, et en rappelant que $\mu' = \text{MajoMino}$, on a

$$\begin{aligned} z \in \mu'(x \vee y) =]x \vee y[&\iff z \geq x \vee y \\ &\iff z \geq x \text{ et } z \geq y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff z \in [x] \cap [y] \\ \iff z \in \mu'(x) \cap \mu'(y) \end{aligned}$$

Le treillis \mathcal{F} des fermés de μ et le treillis \mathcal{G} des fermés de μ' sont anti-isomorphes par les restrictions de *Majo* et *Mino*, tandis que $[x \vee y]$, $[x]$ et $[y]$ sont des fermés de μ' , et $[x \vee y]$ est l'intersection de $[x]$ et de $[y]$. Donc, dans le treillis \mathcal{F} (dual de \mathcal{G} par la restriction de *Mino*), $\mu(x \vee y) = \text{Mino}[x \vee y] = (x \vee y)$ est le supremum de $\text{Mino}[x] = (x)$ et de $\text{Mino}[y] = (y)$, ce qui établit le point (2). \square

Le codage μ de P dans le treillis \mathcal{F} (et donc, à l'isomorphisme près, dans le complété de P) « conserve » donc tous les supremums et infimums de P . On peut en fait montrer que le complété de P est le plus petit treillis possédant ces propriétés (voir les compléments de ce chapitre en section 3.6). De plus, le codage μ « conserve » aussi les relations flèches inférieure et supérieure ainsi que les éléments irréductibles de P , comme vont l'établir les résultats finaux de cette section.

Proposition 3.53 *Soient x et y deux éléments d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ et soit $\mathcal{F} = \mu(\underline{2}^X)$, avec $\mu = \text{MinoMajo}$ la fermeture sur $\underline{2}^X$ définie dans la proposition 3.52. Alors :*

1. $x \downarrow_P y$ si et seulement si $\mu(x) \downarrow_{\mathcal{F}} \mu(y)$,
2. $x \uparrow_P y$ si et seulement si $\mu(x) \uparrow_{\mathcal{F}} \mu(y)$.

Preuve. (1) Supposons $x \downarrow_P y$, on a $x \not\leq y$, et donc $\mu(x) \not\leq \mu(y)$. De plus, par hypothèse, x est le seul élément de $\mu(x) = (x)$ non majoré par y dans P . Alors, un fermé de μ strictement inclus dans $\mu(x)$ ne peut contenir x , et est donc inclus dans $(y) = \mu(y)$, et on a bien $\mu(x) \downarrow_{\mathcal{F}} \mu(y)$.

Supposons $\mu(x) \downarrow_{\mathcal{F}} \mu(y)$. Donc, dans le treillis \mathcal{F} , $\mu(x)$ est minimal parmi les fermés non minorants de $\mu(y)$. Du fait que l'application μ est un codage, x n'est pas un minorant de y dans P , et $z < x$ implique $z < y$. On a donc bien $x \downarrow_P y$.

(2) On établirait de façon analogue l'équivalence entre $x \downarrow_P y$ dans P et $\mu'(x) \downarrow_{\mathcal{G}} \mu'(y)$ dans le treillis \mathcal{G} des fermés de μ' (avec $\mu' = \text{MajoMino}$ la fermeture définie sur $\underline{2}^X$), et on en déduit l'équivalence portant sur la relation flèche supérieure par la dualité des treillis \mathcal{F} et \mathcal{G} . \square

Proposition 3.54 *Soient $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné et $\mathcal{F} = \mu(\underline{2}^X)$. Un élément F de \mathcal{F} est un sup-irréductible (respectivement, un inf-irréductible) de \mathcal{F} si et seulement si $F = (s)$ (respectivement, $F = (i)$) est l'image par μ d'un sup-irréductible s (respectivement, d'un inf-irréductible i) de P .*

Preuve. La formule donnant $\mu'(A)$ au début de cette section montre que l'ensemble des sections finissantes de P est une partie inf-génératrice du treillis \mathcal{G} . D'après la version duale du corollaire 3.12, cet ensemble contient donc tous les inf-irréductibles de \mathcal{G} . Comme la restriction de l'application *Mino* à \mathcal{G} est

un anti-isomorphisme entre \mathcal{G} et \mathcal{F} , on en déduit que tout sup-irréductible F de \mathcal{F} est de la forme $F = (x) = \text{Min}_0[x]$ pour un certain x de P . De plus, la propriété (2) de la proposition 3.52 implique que, si (x) est un sup-irréductible de \mathcal{F} , alors x est un sup-irréductible de P .

Réciproquement, si s est un sup-irréductible de P , on sait par la proposition 3.8 qu'il existe un élément x de P vérifiant $s \downarrow_P x$. Donc, par la proposition 3.53, on a $\mu(s) \downarrow_{\mathcal{F}} \mu(x)$, ce qui, par la proposition 3.8 à nouveau, entraîne que $\mu(s)$ est un sup-irréductible de \mathcal{F} .

Le résultat sur les inf-irréductibles s'obtient de façon analogue. \square

À la section 3.5.2, nous avons principalement considéré la table d'un treillis mais la définition 3.46 portait plus largement sur un ensemble ordonné quelconque. Tout élément x d'un tel ensemble ordonné P peut être identifié à son image $\mu(x)$ dans le treillis \mathcal{F} (isomorphe au complété de P). Les propositions 3.52 à 3.54 permettent alors d'énoncer la première partie du corollaire suivant. Le résultat d'isomorphisme provient ensuite du théorème 3.49.

Corollaire 3.55 *Un ensemble ordonné P et son complété ont même table fléchée, et le complété de P est isomorphe au treillis de Galois de sa table R_P .*

Il est alors immédiat que la proposition 3.50 s'étend à la table (fléchée) de tout ensemble ordonné, c'est-à-dire que, pour tout $s \in S_P$ (respectivement, tout $i \in I_P$), il existe $i \in I_P$ (respectivement, $s \in S_P$) tel que $s \uparrow i$.

Soient S et I deux ensembles, et une relation réduite $R \subseteq S \times I$ (page 95). Le treillis $T = \text{Gal}(S, I, R)$ est, à l'isomorphisme près, l'unique treillis admettant R pour table. Par contre, on vient de constater que tous les ensembles ordonnés dont le complété est isomorphe à T admettent cette même table, et ont aussi la même table fléchée que T . L'exercice 3.5 permet de déterminer tous ces ensembles ordonnés et, en particulier, de montrer que le plus petit d'entre eux est $IR(T)$.

Exemple 3.56 Les éléments sup-irréductibles (respectivement, inf-irréductibles) de l'ensemble ordonné de la figure 3.2 sont a, b, c, d, e, f et g (respectivement, d, e, f, g, h, i et j). Le tableau 3.3 et la figure 3.9 correspondent, respectivement, à la table fléchée et au complété de cet ensemble ordonné.

3.6 Compléments et références

La notion d'application isotone entre deux ensembles ordonnés est indispensable, mais le résultat suivant montre qu'elle est trop générale pour permettre une classification satisfaisante des ensembles ordonnés. Duffus et Rival [133] (1981) ont montré que tout ensemble ordonné connexe P à $n \geq 3$ éléments est l'image par une application isotone d'une chaîne alternée (voir page 47) à au plus $2n - 3$ éléments. Ils développent dans cet article

TABLEAU 3.3. Table fléchée de l'ensemble ordonné de la figure 3.2.

	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
<i>a</i>	×	×	↓	↓	×	×	×
<i>b</i>	×	↓	×	↓	×	×	×
<i>c</i>	↓	×	×	×	×	×	×
<i>d</i>	×				×	×	↓
<i>e</i>		×		↑	×	↓	×
<i>f</i>			×	↑	↓	×	×
<i>g</i>		↓	↓	×	↓	↓	×

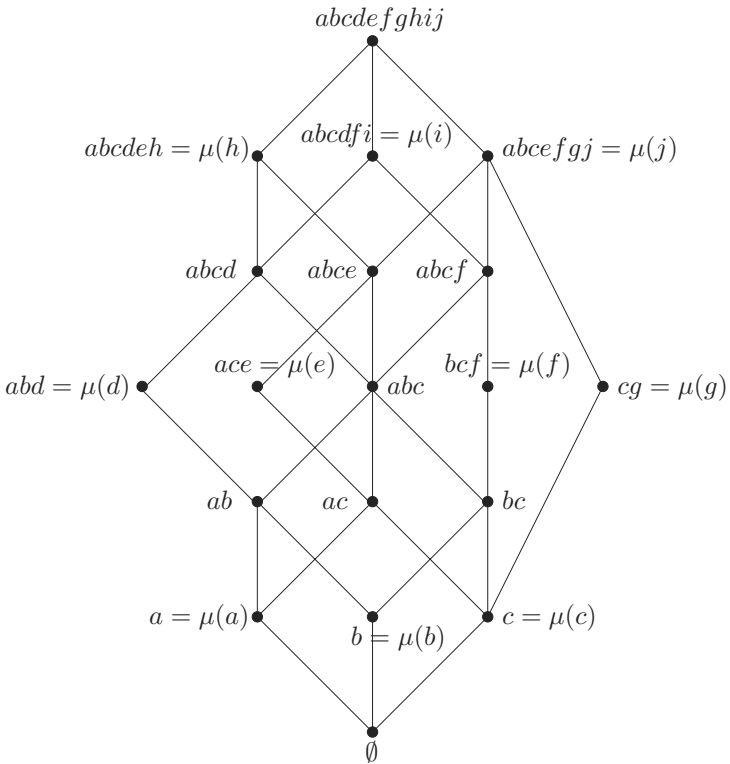


FIG. 3.9. Complété de l'ensemble ordonné de la figure 3.2.

une théorie de la classification des ensembles ordonnés basée sur la notion de rétraction.

Les représentations données à la section 3.2 de tout élément d'un ensemble ordonné comme supremum de sup-irréductibles et comme infimum d'inf-irréductibles constituent des exemples fondamentaux de codages d'ensembles ordonnés quelconques dans des treillis booléens. Elles ne garantissent cependant nullement que ces derniers soient de taille minimum, et l'on reviendra au chapitre 6 sur cette question.

Si, dès 1940, date de la première édition du traité de Birkhoff [50], celui-ci exhibe sous le nom de *polarité* la correspondance de Galois associée à une relation binaire (étudiée à la section 3.5), le terme même et la notion abstraite de correspondance de Galois sont dus à Öre [333] qui en a fait une étude approfondie en 1944. Il remarque notamment qu'une telle correspondance entre sous-groupes et sous-corps apparaît dans la théorie de Galois des équations. La notion connexe d'application résiduée (ou résiduelle) semble apparaître explicitement pour la première fois dans des travaux de Dubreil et Croisot [107] entre 1954 et 1956. Les applications que nous avons préféré appeler galoisiennes sont souvent connues dans la littérature sous le nom de « polarized mapping » (Shmueli [377], 1974). Certains auteurs (cf. Denecke et al. [118], 2004) appellent *correspondance de Galois covariante* (respectivement, *contravariante*) le couple (f, g) où f est une application résiduée (respectivement, galoisienne) et g l'application résiduelle (respectivement, galoisienne) associée. D'autres – ou les mêmes – utilisent aussi le terme *adjonction*, f étant dite l'*adjonction à gauche* (ou *inférieure*) et g l'*adjonction à droite* (ou *supérieure*). Cette terminologie provient de la théorie des catégories où l'on trouve une notion d'adjonction généralisant la situation précédente. Le livre *Residuation theory* de Blyth et Janowitz [55] (1972) et le traité édité par Denecke, Erné et Wismath [118] (2004) montrent l'omniprésence en mathématiques de ces notions, dont l'historique est longuement développé dans le second de ces ouvrages (cf. le chapitre « Adjunctions and Galois connections : origins, history and developments » par Erné). En constatant le nombre de fois où elles ont été redécouvertes, on ne peut que regretter qu'elles ne fassent pas partie de la formation de base des mathématiciens.

On a introduit à la section 3.5 les objets fondamentaux que sont les treillis de Galois, ou de « concepts ». Nous avons retenu ce dernier terme, popularisé par Wille [428] depuis 1982, pour désigner ce qui avait été appelé auparavant des « rectangles maximaux » (cf. par exemple Kaufmann et Pichat [235], 1977, et Barbut et Monjardet [33], 1970). Il renvoie à des considérations philosophiques développées par exemple, dans la *logique de Port-Royal* de Arnault et Nicole [14] (1662) – cf. par exemple Duquenne [135] (1987). Dans celle-ci, F et G sont respectivement appelés l'« étendue » et la « compréhension » de l'« idée » $F \times G$ (en langage moderne, l'*extension* et l'*intension* du concept). L'usage du treillis de Galois d'une relation en analyse des données remonte à un texte de Barbut [32] (1965) paru dans un livre sur l'analyse de questionnaires. Les réponses d'un ensemble de sujets à des questions dichotomiques (réponses par oui ou non) définissent en effet une relation binaire entre sujets et questions. Le cas (rare) où le treillis de Galois de cette relation est une chaîne correspond au cas où les réponses au questionnaire forment une *échelle de Guttman* révélant une structure hiérarchique linéaire duale sur les sujets et les questions : il existe un préordre total sur les questions tel que, si un sujet répond positivement à une question, il répond aussi positivement à toutes les questions la suivant dans ce préordre. Dans ce cas, en codant les oui par 1 et les non par 0, on peut représenter la relation par un tableau « en

escalier » comme celui qu'on trouvera au tableau 7.2 (mais, ici, les lignes et les colonnes du tableau sont étiquetées par deux ensembles différents). Dans le cas général, les chaînes maximales du treillis de Galois associé à la relation constituent autant de *sous-échelles de Guttman* permettant d'obtenir un tableau présentant un « escalier partiel » et un préordre total sur une partie des sujets en correspondance avec un préordre total sur une partie des questions. C'est dans ce même texte de 1965 que Barbut (et non Birkhoff comme on peut parfois le lire) montre que tout treillis est un treillis de Galois (théorème 3.49 ; cf. aussi Barbut et Monjardet [33], 1970). Ce résultat, qui a été plusieurs fois retrouvé sous diverses formes, permet une élégante synthèse des résultats de représentation ensembliste d'un treillis obtenus par Campbell [81] (1943) et Birkhoff et Frink [51] (1948). On peut trouver d'autres développements de l'usage du treillis de Galois pour l'analyse des questionnaires dans les travaux de Flament, Degenne et Vergès (cf. par exemple, Flament et al. [167], 1979), mais cet usage pour l'analyse des données a pris dans les années quatre-vingts un nouvel essor, grâce aux travaux de l'équipe de Darmstadt (cf. par exemple le livre de Ganter et Wille [178], 1999) et à ceux de Duquenne ([135], 1987 et [138], 1993). La détermination de tous les éléments du treillis de Galois est un problème important, de complexité exponentielle par rapport à la taille de la relation de départ (cf. la section A.2.2 où sont mentionnés plusieurs des algorithmes proposés dans la littérature du sujet.).

A l'exemple 3.41 on a associé à une relation binaire entre deux ensembles E et E' un couple (f, g) où f est une application résiduée et g l'application résiduelle associée, donc une correspondance de Galois « covariante ». Aux exercices 4.15 et 5.8 de leur ouvrage de 1972, Blyth et Janowitz [55] proposent d'en étudier les propriétés lorsque $E = E'$. Dans le cas général cette correspondance – parfois appelée *axialité* – induit un treillis dont les éléments – i.e. les couples (A, B) avec $A = g(B) \subseteq E$ et $B = f(A) \subseteq E'$, ont été appelés *concepts supérieurs*. En appliquant cette même correspondance à la relation R^d définie entre E' et E on obtient le treillis des *concepts inférieurs*. Ces deux correspondances induisent une fermeture et une ouverture sur E (ainsi qu'une ouverture et une fermeture sur E'). Si l'on considère la relation d'équivalence définie sur E par $xR = yR$, cette fermeture et cette ouverture ne sont autres que les deux *opérateurs d'approximation supérieure* et *inférieure* associés à cette équivalence et utilisés dans la « rough set analysis » (cf. par exemple, Düntch et Gediga [134], 2003 ou Wolski [432], 2004).

Un autre exemple intéressant d'une correspondance de Galois covariante se trouve en *morphologie mathématique*, i.e. dans une approche en traitement d'images basée sur des transformations géométriques d'images structurées en un treillis (cf. Serra [376] (1988)). Dans le cas d'images binaires, celles-ci sont constituées de parties d'un ensemble E de points et sont donc ordonnées par inclusion. A une partie B de E on peut associer deux opérateurs sur $P(E)$ qui à toute partie X de E font correspondre la somme et la différence de Minkowski de X par B . Le premier de ces opérateurs est une application résiduelle appelée *dilatation* tandis que le second est l'application résiduée

correspondante appelée *érosion*. Ces applications ainsi que l'ouverture et la fermeture obtenues par leur composition sont les opérations morphologiques de base pour le traitement des images.

Ce chapitre se termine par l'exposé de la complétion de MacNeille, dite aussi complétion *normale* ou complétion *de Dedekind–MacNeille*, d'un ensemble ordonné P . Celle-ci se généralise aisément au cas où P n'est plus supposé fini. L'origine de la dernière dénomination ci-dessus est triple : d'abord, ce procédé associe à tout ensemble ordonné (fini ou non) un treillis *complet* (i.e. un treillis où toute partie a un supremum et un infimum) ; ensuite, la construction de la chaîne complète des réels à partir de la chaîne des rationnels au moyen des « coupures de Dedekind » est un exemple de cette complétion ; enfin ce procédé a été défini pour P quelconque par MacNeille [283] (1937). La caractérisation de la complétion de P comme le plus petit treillis T tel qu'il existe un codage de P dans T conservant les supremums et infimums existant dans P est due à Banaschewski [29] (1956) et Schmidt [369] (1956).

3.7 Exercices

Exercice 3.1 On considère le treillis T de la figure 3.1 et l'ensemble ordonné P de la figure 3.3. Trouver deux applications f et f' de T dans P vérifiant les conditions suivantes :

- f est strictement isotone et n'est pas injective,
- f' est isotone et injective mais n'est pas un codage.

Exercice 3.2 [POINT FIXE] Montrer qu'un treillis T vérifie la propriété de point fixe : pour toute application isotone f sur T , il existe $x \in T$ tel que $f(x) = x$ (considérer le supremum des éléments x tels que $x \leq f(x)$).

Exercice 3.3 [DEMI-TREILLIS D'APPLICATIONS] On considère un ensemble ordonné P et un inf-demi-treillis Q , et l'ensemble \mathcal{A} des applications de P dans Q , muni de l'ordre usuel : pour $f, g \in \mathcal{A}$, on a $f \leq g$ si, pour tout $x \in P$, $f(x) \leq g(x)$. Pour $f, g \in \mathcal{A}$, on considère l'application $f \wedge g \in \mathcal{A}$ définie, pour tout $x \in P$, par $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$. Montrer que $f \wedge g$ est l'infimum de f et de g dans \mathcal{A} .

On considère maintenant l'ensemble ordonné Q^P des applications isotones de P dans Q , sous-ensemble ordonné de \mathcal{A} . Montrer que Q^P est stable pour l'infimum ($f, g \in Q^P$ entraîne $f \wedge g \in Q^P$), et donc que Q^P est un sous-inf-demi-treillis de \mathcal{A} .

Établir des résultats analogues dans le cas où Q est un sup-demi-treillis, puis un treillis.

Exercice 3.4 [APPLICATIONS ISOTONES, PRÉORDRES TOTAUX ET CHÂÎNES, Stanley [388]] Montrer que, si une application f d'un ensemble ordonné P

dans un ensemble ordonné Q est isotone, on ordonne les classes $C(x)$ de la partition canonique de P associée à f , en posant $C(x) \leq C(y)$ si et seulement si $f(x) \leq_Q f(y)$. Montrer que l'ensemble ordonné de ces classes, noté P/f , est isomorphe au sous-ensemble ordonné $f(P)$ de Q .

Etablir une bijection entre :

1. l'ensemble des applications isotones de P dans \underline{k} (avec $1 \leq k \leq n = n(P)$),
2. l'ensemble des préordres totaux à au plus k classes contenant l'ordre \leq_P ,
3. l'ensemble des chaînes étendues de longueur au plus k de parties finissantes de P .

En déduire que l'ensemble ordonné $\underline{2}^P$ des applications isotones de P dans $\underline{2}$ est isomorphe (respectivement, anti-isomorphe) à l'ensemble ordonné des parties finissantes (respectivement, commençantes) de P .

Etablir une bijection entre :

1. l'ensemble des applications isotones surjectives de P dans \underline{k} (avec $1 \leq k \leq n = n(P)$),
2. l'ensemble des préordres totaux à k classes contenant l'ordre \leq_P ,
3. l'ensemble des chaînes étendues de longueur k de parties finissantes de P .

En déduire que le nombre d'applications isotones surjectives de P dans \underline{n} égale le nombre d'extensions linéaires de P .

Exercice 3.5 [RELATIONS FLÈCHES D'UN SOUS-ENSEMBLE ORDONNÉ] Montrer que les relations flèches sont conservées par passage au sous-ensemble ordonné, c'est-à-dire, par exemple, que, pour un ensemble ordonné P et un sous-ensemble ordonné Q de P , $x \downarrow y$ dans P et $x, y \in Q$ entraînent $x \downarrow y$ dans Q .

On rappelle que, pour tout ensemble ordonné P , on note $IR(P) = S_P \cup I_P$ l'ensemble des éléments irréductibles de P , et on considère un sous-ensemble ordonné Q de P contenant $IR(P)$. Déduire des résultats précédents que tout sup-irréductible de P est encore un sup-irréductible de Q .

Montrer qu'un élément $x \in Q \setminus S_P$ ne peut être un sup-irréductible de Q et que l'on a donc $S_Q = S_P$. Montrer de même que l'on a $I_Q = I_P$.

En déduire que Q a la même table fléchée que P .

Exercice 3.6 [PROPRIÉTÉS DE LA TABLE D'UN TREILLIS] Soient S_T et I_T les ensembles de sup-irréductibles et d'inf-irréductibles d'un treillis T . Montrer que chacune des trois situations suivantes est impossible :

1. il existe $i \in I_T$ tel que $S_i = S_T$,
2. il existe $i, i' \in I_T$ tels que $i \neq i'$ et $S_i = S_{i'}$,
3. il existe $i \in I_T$ et $I' \subset I_T$ avec $i \notin I'$ et $S_i = \bigcap \{S_{i'} : i' \in I'\}$.

Montrer les résultats duaux en échangeant sup-irréductibles et inf-irréductibles.

Exercice 3.7 [RELATION DE MORGADO] Montrer qu'une application f sur un ensemble ordonné P est une fermeture si et seulement si elle est telle que, pour tout $x \in P$, $f^{-1}((x)) = f^{-1}(f(x))$.

Ceci équivaut à la relation de Morgado : pour tous $x, y \in P$, $y \leq f(x)$ si et seulement si $f(y) \leq f(x)$.

Énoncer et démontrer le résultat dual caractérisant les ouvertures.

Exercice 3.8 [COMPOSITION DES RÉSIDUÉES] Soient P , Q et R trois ensembles ordonnés, deux applications résiduées $f : P \mapsto Q$ et $g : Q \mapsto R$, et f^r et g^r les résiduées correspondantes. Montrer que gf est résiduée avec $(gf)^r = f^r g^r$.

Exercice 3.9 [RÉSIDUÉE SURJECTIVE OU INJECTIVE, Blyth et Janowitz [55]] Soient f une application résiduée d'un ensemble ordonné P dans un ensemble ordonné Q et g la résiduée associée. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes et impliquent que g est un codage de Q dans P :

1. $fg = id_Q$,
2. f est surjective,
3. g est injective,
4. pour tout ensemble ordonné R et toutes applications h et k de Q dans R , $hf = hk$ implique $h = k$.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes et impliquent que f est un codage de P dans Q :

- 1'. $gf = id_P$,
- 2'. f est injective,
- 3'. g est surjective,
- 4'. pour tout ensemble ordonné R et toutes applications h et k de R dans P , $fh = fk$ implique $h = k$.

En déduire que les applications résiduées bijectives de P dans Q sont des isomorphismes entre P et Q .

Exercice 3.10 [RÉSIDIATION ET FERMETURE, Blyth et Janowitz [55]] Soient f une application résiduée sur un ensemble ordonné P et g sa résiduée. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est une ouverture,
2. g est une fermeture,
3. $f = fg$,
4. $g = gf$.

Montrer que $f = g$ si et seulement si $f^2 = id_P$ (ou $g^2 = id_P$).

Exercice 3.11 Montrer qu'un ensemble ordonné P est un inf-demi-treillis si et seulement si, pour tout x de P , l'injection canonique i de $(x]$ dans P définie par $i(y) = y$ est une application résiduée.

Exercice 3.12 [TREILLIS DES APPLICATIONS RÉSIDUELLES] Soient T et T' deux treillis et f_1 et f_2 deux applications isotones de T dans T' . Selon le résultat de l'exercice 3.3, l'infimum de f_1 et f_2 pour l'ordre T'^T d'exponentiation est l'application isotone $f_1 \wedge f_2$ définie par, pour tout $t \in T$, $(f_1 \wedge f_2)(t) = f_1(t) \wedge f_2(t)$, et le supremum de f_1 et f_2 est défini dualement. On suppose que f_1 et f_2 sont résiduées, g_1 et g_2 désignant les applications résiduées associées. En utilisant la propriété (2') des applications résiduées page 85, montrer que $f_1 \wedge f_2$ est encore résiduée et que $g_1 \vee g_2$ est la résiduée associée.

Montrer que l'application constante f_{max} qui associe le maximum de T' à tout $t \in T$ est résiduée (utiliser la propriété définissant une application résiduée). En déduire que l'ensemble des applications résiduées de T dans T' est un réseau de fermeture dans T'^T et qu'il est muni d'un ordre de treillis. Qu'en est-il de l'ensemble des applications résiduées ?

Exercice 3.13 Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné. Montrer qu'une partie A de X est un élément du treillis $Gal(X, X, \not\leq)$ si et seulement si A est une antichaîne maximale de P .

Montrer qu'une partie $A \times B$ de X^2 est un rectangle maximal du treillis $Gal(X, X, \not\leq)$ si et seulement si A est une partie commençante et B une partie finissante de P .

En déduire que les ensembles ordonnés par inclusion $\mathcal{C}(P)$ et $\mathcal{F}(P)$ sont deux treillis duaux (exemple de preuve sophistiquée d'un résultat évident). Qu'en est-il du treillis $Gal(X, X, \not\leq)$?

Exercice 3.14 [ANTICHAÎNES MAXIMALES D'UN ENSEMBLE ORDONNÉ BIPARTI, Morvan et Nourine [322]] Soit $R \subseteq X \times Y$ une relation entre deux ensembles X et Y , et soit R^c la relation complémentaire de R dans $X \times Y$. Montrer qu'une partie $A \times B$ de $X \times Y$ est un élément du treillis $Gal(X, Y, R)$ si et seulement si $A \times B$ est une antichaîne maximale de l'ensemble ordonné biparti $(X + Y, R)$.

Montrer que l'ordre sur les antichaînes maximales induit par cette correspondance correspond à l'inclusion entre les parties finissantes associées.

A partir de l'exercice 3.13, établir que le treillis des parties commençantes d'un ensemble ordonné P , celui des antichaînes maximales de P , et le complété de P sont chacun isomorphes à un treillis d'antichaînes maximales d'un ensemble ordonné biparti bien choisi.

Soit T un treillis. A partir de ce qui précède et du théorème 3.49, montrer que T est isomorphe au treillis des antichaînes maximales d'un ensemble ordonné biparti.

Exercice 3.15 [COMPLÉTIONS STRICTES D'UN ENSEMBLE ORDONNÉ] Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné et $\mathcal{F} = \mu(\underline{2}^X)$, isomorphe au complété de P (cf. la section 3.5.3). Un treillis \mathcal{K} de parties commençantes de P est appelé une *complétion stricte* de P si les sup-irréductibles de \mathcal{K} sont toutes les sections commençantes de P . Quels sont les ensembles ordonnés pour lesquels \mathcal{F} est une complétion stricte de P ? Si \mathcal{F} n'est pas une complétion stricte de P , quelles parties commençantes faut-il lui ajouter pour en faire une complétion stricte de P ? L'ensemble des complétions strictes de P a un maximum : quel est-il? Trouver un ensemble ordonné qui n'admet qu'une complétion stricte (égale ou non au complété de P).

N.B. L'ensemble des complétions strictes de P , ordonné par inclusion, est lui-même un treillis étudié dans Bordalo et Monjardet ([60], 2002 et [61], 2003).

Chaînes et antichaînes

Les problèmes de tri, de recherche et d'ordonnancement que l'on rencontre, par exemple, en informatique et en recherche opérationnelle, sont fréquemment liés à la détermination du cardinal maximum d'une antichaîne d'un ensemble ordonné, c'est-à-dire de sa largeur. Nous donnons plus loin deux illustrations de cette observation générale (exemple 4.28 et exercice 4.2). Ce chapitre est donc dédié à l'étude de cette largeur et à des questions connexes. Tout d'abord, le théorème de Dilworth établit que, pour tout ensemble ordonné P , le cardinal minimum d'une partition de P en chaînes est égal à la largeur de P . C'est l'un des résultats les plus célèbres de la combinatoire, et les deux premières sections de ce chapitre lui sont consacrées. Ce théorème est énoncé et démontré dans la section 4.1, où est aussi décrit son proche environnement. La section 4.2 porte sur ses conséquences dans le cas particulier des ensembles ordonnés bipartis, et notamment sur son équivalence avec le théorème de König–Egerváry portant sur les couplages et les transversales dans une telle structure. Dans les notes de ce chapitre, on fait ressortir l'importance de cette équivalence, qui conduit à la détermination effective de la largeur par des algorithmes de flots issus de la théorie des graphes. On y rappelle que le théorème de Dilworth équivaut aussi à trois autres résultats fondamentaux de la combinatoire : le théorème de König–Hall et les théorèmes de Menger et de Ford et Fulkerson. Ceux-ci sont tout à fait essentiels et ont de nombreuses applications, par exemple, aux matrices binaires et aux problèmes d'affectation pour le premier sous sa forme la plus connue (exercice 4.6), et aux réseaux de transport pour les deux autres.

Les algorithmes de flots évoqués ci-dessus permettent le calcul de la largeur d'un ensemble ordonné quelconque. Toutefois, dans le cas d'un ensemble ordonné rangé P , la largeur peut être égale au nombre maximum des éléments d'un niveau de P . Un ensemble ordonné vérifiant cette propriété est dit *de Sperner* et on dispose alors d'une autre façon, souvent plus directe, de déterminer sa largeur. L'appellation précédente provient du fait que la propriété en question a été établie par Sperner en 1928 pour le treillis booléen $\underline{2}^E$ des parties d'un ensemble E . Les généralisations du théorème de Sperner, qui sont

l'objet de la section 4.3, constituent un autre thème majeur de la combinatoire des ensembles ordonnés. Les produits de chaînes constituent un exemple important d'ensembles ordonnés de Sperner, qui apparaissent fréquemment dans la modélisation des problèmes relevant de domaines comme la décision multicritère ou l'analyse de données. La section 4.4 est consacrée à la détermination des cardinaux des niveaux de ces produits de chaînes – et donc à celle de leur largeur.

4.1 Le théorème de Dilworth

Quatre paramètres fondamentaux attachés à un ensemble ordonné P ont été définis au chapitre 1, section 1.3.2 :

- $\kappa(P)$, le nombre maximum d'éléments d'une chaîne de P , est l'*étendue* de P ,
- $\alpha(P)$, le nombre maximum d'éléments d'une antichaîne de P , est la *largeur* de P ,
- $\theta(P)$ est le nombre minimum de chaînes dans une partition de P en chaînes,
- $\gamma(P)$ est le nombre minimum d'antichaînes dans une partition de P en antichaînes.

Si Q est un sous-ensemble ordonné de P , on a $\alpha(Q) \leq \alpha(P)$. En effet, si A est une antichaîne de Q à $\alpha(Q)$ éléments, c'est encore une antichaîne de P , mais pas forcément de cardinal maximum. On obtient aussi $\kappa(Q) \leq \kappa(P)$ par un raisonnement analogue sur les chaînes.

Pour tout ensemble ordonné P , on a $\kappa(P) \leq \gamma(P)$ et $\alpha(P) \leq \theta(P)$, car deux éléments de P ne peuvent appartenir simultanément à une même chaîne et à une même antichaîne. Le propos de cette section est d'établir que ces inégalités sont en fait des égalités (théorèmes 4.1 et 4.2) et d'en tirer les premières conséquences. Nous commençons par montrer la première de ces égalités, ce qui est relativement aisé.

Théorème 4.1 *Pour tout ensemble ordonné P , on a l'égalité $\kappa(P) = \gamma(P)$.*

Preuve. Nous construisons une partition de P en un nombre h d'antichaînes A_1, A_2, \dots, A_h de la façon suivante : A_1 est l'ensemble des éléments minimaux de P et, pour tout $k > 1$, A_k est l'ensemble des éléments minimaux du sous-ensemble ordonné $P_k = P \setminus (\bigcup_{1 \leq j < k} A_j)$. Chaque A_k est une antichaîne de P_k , donc de P et, pour tout $k > 1$, tout élément x_k de A_k couvre au moins un élément x_{k-1} de A_{k-1} (sinon on aurait trouvé $x_k \in A_{k-1}$). On peut donc construire une chaîne couvrante $C = x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_h$ de P à h éléments. On a donc, d'une part, $\gamma(P) \leq h$, puisque P a été partitionné en h antichaînes et, d'autre part, $h \leq \kappa(P)$, puisque la chaîne C a h éléments. D'où l'inégalité $\gamma(P) \leq \kappa(P)$ et, comme l'inégalité inverse a été observée ci-dessus, on obtient l'égalité $\gamma(P) = \kappa(P)$. \square

Cette preuve est constructive, en ce sens qu'une partition de P en $\gamma(P)$ antichaînes est effectivement déterminée, ainsi qu'une chaîne de P ayant un nombre maximum $\kappa(P)$ d'éléments. Cette chaîne se présente comme une suite $x_1, x_2, \dots, x_{\kappa(P)}$, avec, pour $k = 1, \dots, \kappa(P)$, $x_k \in A_k$ et, pour $k = 2, \dots, \kappa(P)$, $x_{k-1} \prec x_k$.

En revanche, l'égalité $\alpha(P) = \theta(P)$, qui fait l'objet du théorème de Dilworth, n'est pas obtenue ci-dessous de manière constructive.

Théorème 4.2 (Dilworth [120], 1950) *Pour tout ensemble ordonné P , on a l'égalité $\alpha(P) = \theta(P)$.*

Preuve. Nous montrons ce résultat par récurrence sur le nombre $n(P) = n$ d'éléments de P . Pour $n = 1$, on a immédiatement $\theta(P) = \alpha(P) = 1$. Supposons le résultat vrai pour tout ensemble ordonné P' de cardinal $n' < n$ et considérons une chaîne maximale C de P . Deux cas peuvent alors se produire :

1er cas : si C rencontre toutes les antichaînes de P de cardinal $\alpha(P)$, alors $\alpha(P \setminus C) = \alpha(P) - 1$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $P \setminus C$ est partitionnable en $\theta(P) - 1 = \alpha(P) - 1$ chaînes. Donc, en rajoutant la chaîne C , P l'est en $\alpha(P)$ chaînes.

2ème cas : il existe une antichaîne $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{\alpha(P)}\}$ de P de cardinal maximum et ne rencontrant pas C . Associons à A les sous-ensembles ordonnés de P engendrés par sa fermeture commençante $[A] = \{x \in P : \text{il existe } a \in A \text{ avec } x \leq a\}$ et par sa fermeture finissante $\lceil A \rceil = \{x \in P : \text{il existe } a \in A \text{ avec } a \leq x\}$ (chapitre 3, exemple 3.30). Tous deux sont encore de largeur $\alpha(P)$ puisqu'ils contiennent l'antichaîne A .

Soit x un élément de $P \setminus A$. Si x n'est ni minoré ni majoré par un élément de A , alors $A + x$ est encore une antichaîne, ce qui contredit la maximalité de A . Si x est à la fois minoré par un élément a et majoré par un élément a' de A , on a $a \leq x \leq a'$, ce qui contredit le fait que A est une antichaîne. On a donc $[A] \cup \lceil A \rceil = P$ et $[A] \cap \lceil A \rceil = A$.

Observons que l'élément maximum de C n'est pas dans $[A]$, car il serait alors inférieur à au moins un élément de A et la chaîne C ne serait pas maximale. On a donc $[A] \subset C$ et on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au sous-ensemble ordonné $[A]$ et partitionner celui-ci en $\alpha(P)$ chaînes maximales $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1\alpha(P)}$ de sorte que, pour $i = 1, 2, \dots, \alpha(P)$, la chaîne C_{1i} contient l'élément a_i de A . Alors, a_i est le maximum de C_{1i} , car sinon il existerait un élément maximal a de $[A]$, donc élément de A , tel que $a_i < a$, et A ne serait pas une antichaîne. On partitionne dualement le sous-ensemble ordonné $\lceil A \rceil$ en $\alpha(P)$ chaînes maximales $C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2\alpha(P)}$ telles que, pour $i = 1, 2, \dots, \alpha(P)$, a_i est le minimum de C_{2i} .

Finalement, pour tout $i = 1, \dots, \alpha(P)$, $C_i = C_{1i} \oplus' C_{2i}$ (chapitre 1, remarque 1.43) est une chaîne de P , les C_i constituant bien une partition de P en $\alpha(P)$ chaînes maximales. \square

Exemple 4.3 On vérifie facilement que la largeur $\alpha(P)$ de l'ensemble ordonné P dont le diagramme est donné par la figure 4.1(a) est égale à 2. Le théorème 4.1

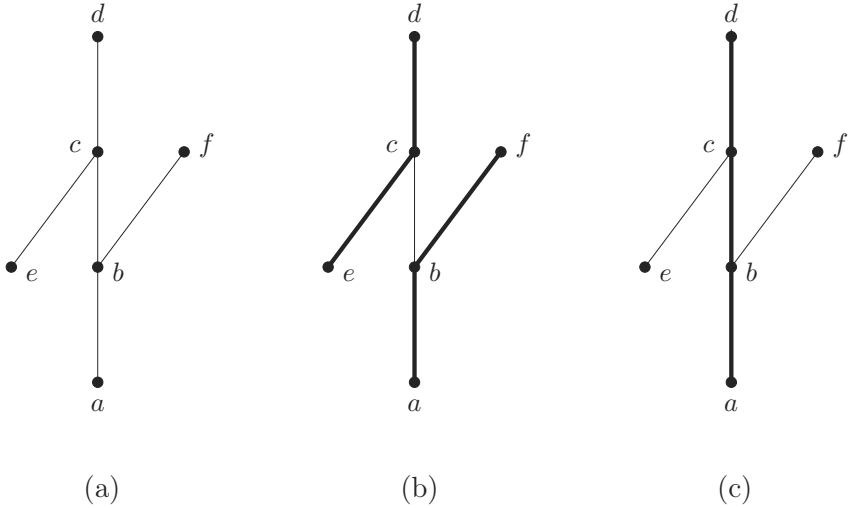


FIG. 4.1. (b) et (c) Deux partitions en chaînes de l'ensemble ordonné en (a), de cardinalités respectives 2 et 3.

assure que P peut donc être partitionné en deux chaînes; la figure 4.1(b) montre une telle partition. Mais on n'obtient pas une telle partition de façon quelconque : par exemple, si l'on prend en premier la chaîne $abcd$ suggérée par l'ordre alphabétique sur les étiquettes des éléments de P , il en faudra encore deux autres, e d'une part et f d'autre part (figure 4.1(c)).

Remarque 4.4 Les deux théorèmes 4.1 et 4.2 précédents sont du type « min-max » : ils établissent que le minimum d'un certain ensemble de valeurs (par exemple, les cardinaux des partitions en chaînes de P) est égal au maximum d'un autre ensemble de valeurs (par exemple, les cardinaux des antichaînes de P). Alors, si l'on trouve une instance du premier ensemble et une du second qui sont égales, on est assuré d'avoir effectivement atteint ce minimum et ce maximum. Par exemple, si l'on trouve simultanément dans un ensemble ordonné P une partition de P en p chaînes et une antichaîne de cardinal p , alors $\alpha(P) = \theta(P) = p$. Ainsi, on observe que l'ensemble ordonné P dont le diagramme est donné par la figure 4.2 admet une partition en cinq chaînes (arêtes renforcées) et une antichaîne $\{c, d, f, h, i\}$ à cinq éléments, d'où $\theta(P) = \alpha(P) = 5$.

Plusieurs énoncés portant sur les ensembles ordonnés sont presque directement équivalents au théorème de Dilworth, comme nous le montrons dans la proposition suivante. On dit qu'un ensemble $\mathcal{R} = \{C_1, \dots, C_h\}$ de chaînes d'un ensemble ordonné P est un *recouvrement* de P si tout élément x de P appartient à au moins une chaîne de \mathcal{R} . Nous disons qu'une chaîne C de P

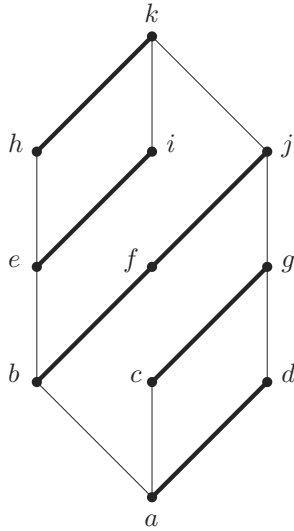


FIG. 4.2. Un ensemble ordonné P tel que $\alpha(P) = \theta(P) = 5$.

rencontre une antichaîne A de P pour exprimer que leur intersection n'est pas vide.

Proposition 4.5 *Chacun des quatre énoncés suivants est équivalent au théorème de Dilworth :*

1. *pour tout ensemble ordonné P , toute chaîne d'une partition de P en $\theta(P)$ chaînes rencontre toute antichaîne de P de cardinal $\alpha(P)$,*
2. *pour tout ensemble ordonné P , il existe une chaîne de P rencontrant toute antichaîne de P de cardinal $\alpha(P)$,*
3. *pour tout ensemble ordonné P , il existe une antichaîne A de P et une partition \mathbf{P} de P en chaînes telles que A rencontre toute chaîne de \mathbf{P} ,*
4. *pour tout ensemble ordonné P , il existe un recouvrement de P par $\alpha(P)$ chaînes maximales.*

Preuve. Nous montrons d'abord l'équivalence des points (1) et (2) avec le théorème de Dilworth, puis avec le point (3), et enfin celle du point (4) avec le théorème de Dilworth.

Dilworth \implies (1) : supposons le point (1) non satisfait par un ensemble ordonné P , c'est-à-dire qu'il existe une antichaîne A de P à $\alpha(P)$ éléments, une partition \mathbf{P} de P en $\theta(P)$ chaînes et une chaîne C de \mathbf{P} ne rencontrant pas A . La partition \mathbf{P} contient alors $\alpha(P)$ chaînes de P contenant chacune un élément de A , et au moins en plus la chaîne C , d'où $\alpha(P) < \theta(P)$, ce qui contredit le théorème de Dilworth. Celui-ci implique donc (1).

(1) \implies (2) : ceci se fait en choisissant une chaîne d'une partition de P en $\theta(P)$ chaînes.

(2) \implies Dilworth : si (2) est vraie, on peut toujours se placer dans le premier cas de la démonstration du théorème de Dilworth pour établir celui-ci par récurrence.

(1) \implies (3) : pour ce faire, on prend une partition de P en $\theta(P)$ chaînes et une antichaîne de P à $\alpha(P)$ éléments.

(3) \implies Dilworth : soient A et \mathbf{P} respectivement l'antichaîne et la partition en chaînes de P telles que A rencontre toute chaîne de \mathbf{P} . On a $|\mathbf{P}| \leq |A|$, ce qui, avec les inégalités $|A| \leq \alpha(P) \leq \theta(P) \leq |\mathbf{P}|$, entraîne $\alpha(P) = \theta(P)$, et donc le théorème de Dilworth.

Dilworth \implies (4) : si \mathbf{P} est une partition de P en k chaînes, il suffit de prolonger chacune d'icelles en une chaîne maximale pour obtenir un recouvrement de P par k chaînes maximales. En prenant $k = \alpha(P)$, on voit que le théorème de Dilworth implique (4).

(4) \implies Dilworth : si (4) est vrai, il existe un recouvrement \mathcal{R} de P par $\alpha(P)$ chaînes maximales. Numérotons arbitrairement $C_1, \dots, C_{\alpha(P)}$ les éléments de \mathcal{R} et posons, pour $k = 2, \dots, \alpha(P)$, $C'_k = C_k \setminus (\bigcup_{1 \leq j < k} C_j)$. Il est immédiat que l'ensemble $\{C_1, C'_2, \dots, C'_{\alpha(P)}\}$ constitue une partition en $\alpha(P)$ chaînes de P (aucun des C'_k n'est vide car cela entraînerait l'existence d'une partition de P en moins de $\alpha(P)$ chaînes). On a donc montré que le point (4) implique le théorème de Dilworth et qu'il lui est donc équivalent. \square

4.2 Couplages et transversales dans un ensemble ordonné biparti

Les ensembles ordonnés bipartis ont été définis à la première section du chapitre 2 comme les ensembles ordonnés P d'étendue $\kappa(P) = 2$. Un tel ensemble est noté $P = (Y + Z, \leq)$, Y (respectivement, Z) étant l'ensemble de ses éléments minimaux (respectivement, maximaux). Dans cette section, on ne considérera que des ensembles ordonnés bipartis sans élément isolé, où donc chaque élément est soit minimal, soit maximal (mais pas les deux). Il sera équivalent d'écrire $y \leq z$ avec $y \in Y$ et $z \in Z$, $y \prec z$, ou $y < z$. Pour toute partie X' de $X = Y + Z$, on pose $X'_Y = X' \cap Y$ et $X'_Z = X' \cap Z$. Soient $p = |Y|$ et $q = |Z|$ (avec $n = p + q$). On supposera $p \leq q$ dans cette section, sans perte de généralité puisque l'on peut sinon remplacer P par son dual.

La donnée de P est équivalente à celle de l'une des structures suivantes :

- Le graphe biparti (Y, Z, U) , où U est l'ensemble des couples $(y, z) \in Y \times Z$ tels que $y < z$,
- La *0/1-matrice* constituée de l'application μ de $Y \times Z$ dans $\{0, 1\}$ définie par $\mu(y, z) = 1$ si $y < z$ et $\mu(y, z) = 0$,
- la *famille* $\mathcal{F} = (yP)_{y \in Y}$ de parties de Z , ou la *famille* « duale » $\mathcal{F}_d = (Pz)_{z \in Z}$ de parties de Y .

Les résultats combinatoires que nous allons obtenir par l'approche ordinale s'appliquent donc aussi à chacun de ces types de structures (et sont souvent

présentés comme tels dans la littérature). Nous introduisons d'abord quelques définitions :

Définition 4.6 Soit $P = (Y + Z, \leq)$ un ensemble ordonné biparti, avec $X = Y + Z$, $p = |Y|$ et $q = |Z|$.

- Un couplage de P est un ensemble de chaînes de P de longueur 1 et deux à deux disjointes. On note $\sigma(P)$ le nombre maximum de chaînes dans un couplage de P . Un couplage de P à p chaînes est appelé un couplage de Y dans Z .
- Une transversale des chaînes de longueur 1 de P est une partie T de $X = Y + Z$ telle que, pour tous $y, z \in X$, avec $y < z$, on a $y \in T$ ou $z \in T$. On note $\tau(P)$ le cardinal minimum d'une telle transversale (on parlera simplement dans la suite d'une transversale de P).
- Soit Y' une partie de Y , et $]Y'$ l'ensemble des $z \in Z$ tels que $y < z$ pour au moins un élément y de Y' . La déficience $\delta(Y')$ de Y' est égale à $|Y'| -]Y'|$ si $]Y'| \leq |Y'|$, et à 0 sinon, tandis que la déficience $\delta(P)$ de P est le maximum des $\delta(Y')$ sur toutes les parties Y' de Y .

Exemple 4.7 Pour l'ensemble ordonné biparti P de la figure 4.3, on a $aP = \{f\}$, $bP = cP = \{f, g\}$, $dP = \{g, h\}$ et $eP = \{f, h, i, j\}$. On a $p = q = 5$, $\sigma(P) = \tau(P) = 4$, et $\delta(P) = 1$ (le vérifier). Un couplage de cardinal maximum correspond aux traits renforcés et une transversale de P de cardinal minimum aux sommets représentés par des cercles blancs.

La proposition 4.8 ci-dessous va montrer que les trois paramètres $\sigma(P)$, $\tau(P)$ et $\delta(P)$ associés à un ensemble ordonné biparti P sont reliés aux paramètres $\alpha(P)$ et $\theta(P)$ de P . A l'aide du théorème de Dilworth, on en déduira le théorème 4.9, expression de deux résultats classiques de combinatoire. La même proposition 4.8 permettra aussi d'obtenir au théorème 4.10 le célèbre résultat de König–Hall sur l'existence d'un couplage de Y dans Z dans un graphe (ensemble ordonné) biparti, résultat exprimé sous sa forme la plus classique au corollaire 4.11.

On remarque que, dans un ensemble ordonné biparti $P = (Y + Z, \leq)$, les antichaînes Y et Z sont des transversales de P , et qu'une transversale de P doit contenir au moins un élément de chaque chaîne d'un couplage de P .

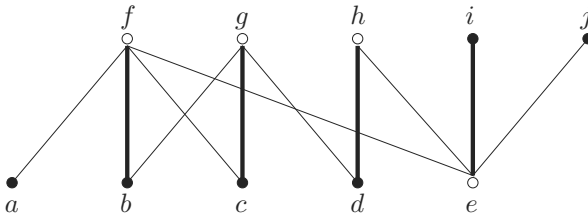


FIG. 4.3. Un couplage de cardinal maximum et une transversale de cardinal minimum dans un ensemble ordonné biparti P .

La suite d'inégalités $\sigma(P) \leq \tau(P) \leq p \leq q \leq \alpha(P)$ est alors immédiate. D'autres relations entre ces nombres suivent :

Proposition 4.8 *Pour tout ensemble ordonné biparti P de cardinal $n = p+q$, on a les égalités suivantes :*

1. $\tau(P) + \alpha(P) = n$,
2. $\alpha(P) = q + \delta(P)$,
3. $\tau(P) = p - \delta(P)$,
4. $\theta(P) + \sigma(P) = n$.

Preuve. L'égalité (1) provient du fait que les transversales de $P = (Y + Z, \leq)$ sont exactement les complémentaires dans $Y + Z$ des antichaînes de P .

Pour montrer (2), considérons d'abord une antichaîne A de P de cardinal maximum $\alpha(P)$. On a $||A_Y|| = |Z \setminus A_Z|$, sinon l'antichaîne A ne serait pas maximale. D'où $\delta(P) \geq \delta(A_Y) = |A_Y| - ||A_Y|| = |A_Y| - (|Z| - |A_Z|) = \alpha(P) - q$. On a aussi $\alpha(P) \geq q + \delta(P)$ car, pour tout $Y' \subseteq Y$ avec $\delta(Y') = \delta(P)$, la partie $Y' \cup (Z \setminus Y')$ est une antichaîne de P de cardinal $|Y'| + |Z| - (|Y'| - \delta(Y')) = q + \delta(Y') = q + \delta(P)$. On a donc (2), que l'on soustrait terme à terme de (1) pour obtenir (3).

A un couplage de P contenant c' chaînes on associe, en le complétant par des chaînes à un seul élément, une partition en $c' + (n - 2c') = n - c'$ chaînes de P , d'où, à partir d'un couplage de P en $\sigma(P)$ chaînes, $\theta(P) \leq n - \sigma(P)$. Inversement, une partition de P en k chaînes est composée de chaînes à un élément et d'un couplage en $c' = n - k$ chaînes, d'où, à partir d'une partition en $\theta(P)$ chaînes, $\sigma(P) \geq n - \theta(P)$ et, finalement (4). \square

La preuve de cette proposition ne fait pas appel à l'égalité $\alpha(P) = \theta(P)$ du théorème de Dilworth. En prenant en compte celle-ci, on obtient à partir des égalités (1) et (4) ci-dessus la première expression du paramètre $\sigma(P)$ donnée au théorème 4.9 suivant. Cette expression, appelée le *théorème de König-Egervàry*, est un autre résultat de type « min-max ». La seconde expression de $\sigma(P)$ donnée dans ce théorème provient de la première, du point (1) de la proposition 4.8 et du fait que, en notant $\mathcal{A}(P)$ l'ensemble des antichaînes de P , on a $\alpha(P) = \max_{A \in \mathcal{A}(P)} \{|A_Y| + |A_Z|\} = \max_{Y' \subseteq Y} \{|Y'| + |Z \setminus Y'|\}$. Cette expression de $\sigma(P)$ est connue comme le *théorème de König-Öre*.

Théorème 4.9 (König-Öre et König-Egervàry) *Dans tout ensemble ordonné biparti $P = (Y + Z, \leq)$, on a les égalités $\sigma(P) = \tau(P) = \min_{Y' \subseteq Y} \{|Y \setminus Y'| + ||Y'|\}$.*

Inversement, l'égalité $\sigma(P) = \tau(P)$ peut être obtenue par d'autres voies, puis utilisée pour démontrer le théorème de Dilworth. On montre en effet qu'il est équivalent de rechercher une partition en $\theta(P)$ chaînes d'un ensemble ordonné quelconque P ou un couplage avec $\sigma(P)$ chaînes d'un certain

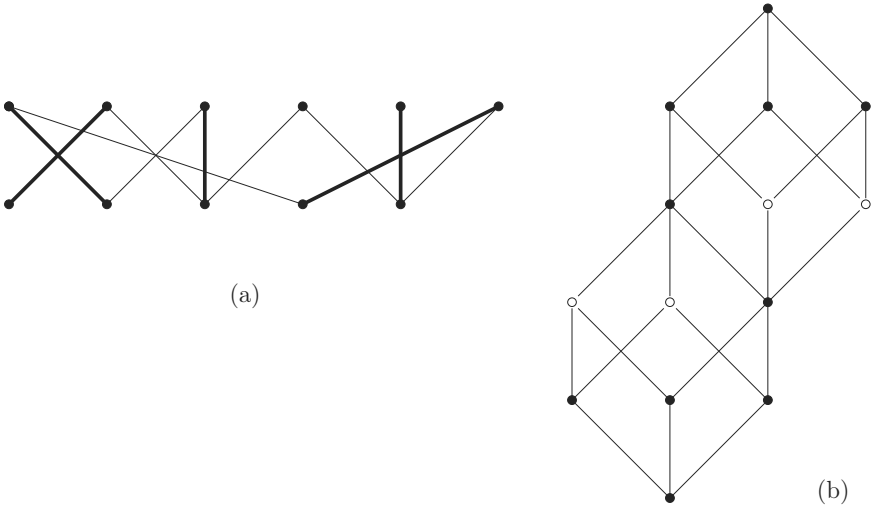


FIG. 4.4. (a) Un ensemble ordonné biparti de Sperner et (b) un treillis distributif non de Sperner.

ensemble ordonné biparti P' associé à P . De même, la recherche d'une antichaîne de P de cardinal $\alpha(P)$ se ramène à celle d'une transversale des chaînes de P' de cardinal $\tau(P')$. On indique dans les notes de ce chapitre comment ces considérations mènent à la détermination effective de ces divers paramètres (cf. aussi l'exercice 4.5).

Le théorème suivant caractérise la situation particulière où le paramètre $\alpha(P)$ atteint sa borne inférieure q , c'est-à-dire celle où l'ensemble Z constitue une antichaîne de P de cardinal maximum. L'équivalence entre les points (1) et (3) n'est autre que le *théorème de König-Hall* – l'un des plus célèbres de la combinatoire – sur l'existence d'un couplage de Y dans Z . Le corollaire 4.11 et l'exercice 4.6 en donnent les formes classiques et la figure 4.4(a) donne un exemple de tel couplage. Chaque élément y de Y appartient à l'une de ces chaînes, l'autre élément de la chaîne étant un élément de Z noté $\iota(y)$. On définit ainsi une injection ι de Y dans Z qui est extensive, puisque vérifiant $y < \iota(y)$ pour tout $y \in Y$. L'existence d'un tel couplage est évidemment équivalente à l'égalité $\sigma(P) = p$.

Théorème 4.10 *Pour tout ensemble ordonné biparti P , les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\sigma(P) = \tau(P) = p$,
2. $\alpha(P) = \theta(P) = q$,
3. $\delta(P) = 0$.

Preuve. Si le point (1) est vérifié, on a, d'après le point (4) de la proposition 4.8, $\theta(P) = n - p = q$, d'où (2). Les autres implications de (2) vers (3) et de (3) vers (1) découlent de même des points (2) et (3) de la proposition 4.8. \square

Corollaire 4.11 (König [254], 1931) Soit $P = (Y + Z, \leq)$ un ensemble ordonné biparti. Il existe un couplage de Y dans Z si et seulement si la déficience $\delta(P)$ de P est nulle, i.e. si, pour tout $Y' \subseteq Y$, on a $|Y'| \leq |Y'|$.

Exemple 4.12 Dans l'ensemble ordonné biparti P de la figure 4.3, il n'existe aucun couplage de Y dans Z , puisque $\delta(P) = 1$ (on peut aussi observer que $|\{a, b, c, d\}| = |\{f, g, h\}|$).

Il est évident que l'ensemble ordonné biparti complet $K_{Y,Z}$ admet un couplage de Y dans Z . Cette observation se généralise comme suit : un ensemble ordonné biparti $P = (Y + Z, \leq)$ est dit *régulier* lorsque chaque élément de Y est couvert par le même nombre k d'éléments de Z , tandis que chaque élément de Z couvre le même nombre k' d'éléments de Y . En comptant de deux façons les couples (y, z) tels que $y < z$, on trouve $kp = k'q$ et donc $k \geq k'$ (puisque, par convention dans cette section, $p \leq q$). Pour $Y' \subseteq Y$, on a aussi $k|Y'| \leq k'|Y'|$, car les couples dont l'élément inférieur est dans Y' constituent une partie de ceux dont l'élément supérieur est dans Y' ; on a donc $k|Y'| \leq k'|Y'|$ et, d'après le corollaire 4.11, on obtient :

Corollaire 4.13 Si $P = (Y + Z, \leq)$ est un ensemble ordonné biparti régulier, il admet un couplage de Y dans Z et l'on a $\alpha(P) = |Z| = q$.

4.3 La propriété de Sperner

Dans cette section, on ne considère que des ensembles ordonnés rangés, de rang normé r . On a défini à la section 2.1 l'ensemble $N_k = \{x \in P : r(x) = k\}$ comme le *niveau* de rang k d'un tel ensemble P , pour $k = 0, \dots, r(P)$, où $r(P)$ est le rang de P . On pose $n_k = |N_k|$ et $\nu(P) = \max_{0 \leq k \leq r(P)} n_k$, (dans la littérature, les nombres n_k sont souvent appelés les *nombres de Whitney* de P). Puisque les niveaux sont des antichaînes particulières, on a $\nu(P) \leq \alpha(P)$.

Définition 4.14 Un ensemble ordonné rangé P est dit de Sperner s'il vérifie la propriété de Sperner selon laquelle tout niveau de cardinal maximum est une antichaîne de cardinal maximum (i.e. si l'égalité $\nu(P) = \alpha(P)$ est atteinte).

On verra dans les notes de ce chapitre que la recherche d'une antichaîne de P de cardinal maximum est un problème en principe traitable dans un ensemble ordonné quelconque, puisqu'elle se ramène à celle d'un flot maximum dans un graphe associé à P . Sa solution est toutefois bien plus immédiate dans le cas d'un ensemble ordonné de Sperner, pourvu que l'on sache déterminer le rang de chaque élément.

L'égalité $\nu(P) = \alpha(P)$ pour les treillis booléens a été établie en 1928 par Sperner [380]. Dans cette section, nous allons voir plusieurs façons de retrouver ce résultat, conduisant chacune à une classe d'ensembles ordonnés de Sperner. On commence au théorème 4.17 par donner deux conditions équivalentes à

la propriété de Sperner. On donne ensuite des conditions sur un ensemble ordonné rangé qui, seules ou combinées, impliquent qu'il vérifie la propriété de Sperner. On aura alors trois façons d'obtenir le théorème de Sperner, énoncé au théorème 4.20.

Remarque 4.15 Les ensembles ordonnés bipartis de Sperner sont ceux qui admettent un couplage de $Y = N_0$ dans $Z = N_1$, ou de N_1 dans N_0 (maintenant nous ne supposons plus $|Y| \leq |Z|$), c'est-à-dire ceux qui vérifient les conditions du théorème 4.10.

Exemple 4.16 L'ensemble ordonné P de la figure 4.1 est de Sperner, puisqu'il vérifie $\nu(P) = \alpha(P) = 2$; celui de la figure 4.2, avec $\nu(P) = 3$ et $\alpha(P) = 5$, n'est pas de Sperner. L'exemple de la figure 4.4(a) est un ensemble ordonné de Sperner d'après la remarque précédente car il admet un couplage de Y dans Z . La figure 4.4(b), où les éléments représentés par des cercles blancs correspondent à une antichaîne de cardinal maximum, donne le diagramme d'un treillis T distributif (cf. le chapitre 2, définition 2.18) non de Sperner (montrer que $\alpha(T) \geq \nu(T)$).

Au théorème 4.17 nous commençons par donner deux caractérisations des ensembles ordonnés de Sperner, qui illustrent le fait que la propriété de Sperner est liée à l'existence de relations entre chaînes et niveaux de l'ensemble ordonné. La condition (N) est une conséquence directe du théorème de Dilworth et de la remarque 4.4. Considérons un recouvrement \mathcal{R} d'un ensemble ordonné P par h chaînes maximales, C_1, \dots, C_h , non forcément toutes distinctes et posons, pour tout élément x de P , $\rho_{\mathcal{R}}(x) = |\{j \in \{1, \dots, h\} : x \in C_j\}|$ et $\rho = \min_{x \in P} \rho_{\mathcal{R}}(x)$. Un niveau N est dit \mathcal{R} -régulier si chaque élément x de N appartient au même nombre $\rho_{\mathcal{R}}(x) = \frac{h}{|N|}$ de ces chaînes. Il est *minimum- \mathcal{R} -régulier* si, de plus, pour tout x de N , $\rho_{\mathcal{R}}(x) = \rho$.

Théorème 4.17 *Soit P un ensemble ordonné rangé. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (S) P est un ensemble ordonné de Sperner,
- (N) il existe une partition de P en $\nu(P)$ chaînes,
- (MR) il existe un recouvrement \mathcal{R} de P par des chaînes maximales et un niveau N de P tels que N est minimum- \mathcal{R} -régulier.

Preuve. La condition (S) signifie que $\nu(P)$ est égal à la largeur $\alpha(P)$ de P , qui, d'après le théorème de Dilworth, est le cardinal minimum d'une partition en chaînes de P , donc (S) implique (N). Pour montrer que (N) implique (MR), on prend une partition de P en $\nu(P)$ chaînes et on complète chacune de celles-ci en une chaîne maximale si elle ne l'est déjà. Il est alors immédiat que l'on a obtenu un recouvrement \mathcal{R} de P par des chaînes maximales et que tout niveau N de cardinal $\nu(P)$ est minimum- \mathcal{R} -régulier avec $\rho_{\mathcal{R}}(x) = 1$ pour tout $x \in N$. Enfin, si (MR) est satisfaite, et si N est un niveau minimum- \mathcal{R} -régulier

pour un recouvrement \mathcal{R} de P par h chaînes maximales, on a, pour toute antichaîne A de P , les inégalités $h \geq \sum_{x \in A} \rho_{\mathcal{R}}(x) \geq \rho|A|$, d'où $|A| \leq \frac{h}{\rho} = |N|$, et P est de Sperner. \square

Comme cas particulier, une condition impliquant (MR) , et donc entraînant que P est de Sperner, est obtenue en prenant simplement pour \mathcal{R} l'ensemble \mathcal{C} de toutes les chaînes maximales de P :

(MCR) il existe un niveau de P minimum- \mathcal{C} -régulier.

Soit P un ensemble ordonné rangé. Considérons l'ensemble suivant de conditions, que nous explicitons après leur énoncé :

(REG) Pour tout $k = 0, \dots, r(P) - 1$, l'ensemble ordonné biparti P_k est régulier.

(SPN) Pour tout $k = 0, \dots, r(P) - 1$, l'ensemble ordonné biparti P_k est de Sperner.

(UNI) L'ensemble ordonné P est unimodal.

(SUR) Les nombres de Whitney de P vérifient $n_0 = n_{r(P)} \leq n_1 = n_{r(P)-1} \leq \dots \leq n_k = n_{r(P)-k} \leq \dots$, pour $k \leq \frac{(r(P)+1)}{2}$.

(SYM) L'ensemble ordonné P est partitionnable en chaînes symétriques.

Prises isolément ou combinées, ces conditions vont intervenir dans la suite pour la détermination de classes d'ensembles ordonnés de Sperner. Les deux conditions *(REG)* de régularité, et *(SPN)* – pour Sperner par niveaux – portent sur les ensembles ordonnés bipartis $P_k = (N_k + N_{k+1}, \leq)$, restrictions de P à deux niveaux consécutifs (avec $0 \leq k \leq r(P) - 1$).

On dit qu'une suite finie m_0, m_1, \dots, m_q d'entiers est *unimodale* si elle est la concaténation d'une suite croissante $m_0 \leq \dots \leq m_p$ et d'une suite décroissante $m_{p+1} \geq \dots \geq m_q$, et qu'un ensemble ordonné rangé est *unimodal* si la suite de ses nombres de Whitney n_k , pour $k = 0, 1, \dots, r(P)$, est unimodale (il est évident ou bien connu que les chaînes et les treillis booléens sont des exemples d'ensembles ordonnés unimodaux). Cette condition, notée *(UNI)*, a comme cas particulier celle, notée *(SUR)*, de *symétrie-unimodalité des rangs*. Cette dernière entraîne $\nu(P) = n_{\frac{r(P)}{2}}$ si $r(P)$ est pair et $\nu(P) = n_{\frac{(r(P)-1)}{2}} = n_{\frac{(r(P)+1)}{2}}$ si $r(P)$ est impair.

Une chaîne C de P est dite *symétrique* si elle est couvrante et si $r(\max C) + r(\min C) = r(P)$, où $\max C$ et $\min C$ sont le maximum et le minimum de C .

Proposition 4.18 Soit P un ensemble ordonné rangé.

1. Si P est régulier, il vérifie *(SPN)*.
2. Si P vérifie *(SUR)*, il vérifie *(UNI)*.
3. Si P vérifie *(SYM)*, il vérifie *(SUR)*.
4. Si P vérifie *(SYM)*, il vérifie *(UNI)* et *(SPN)*.
5. Si P vérifie *(UNI)* et *(SPN)*, il est de Sperner.

Preuve. (1) Cette implication est le corollaire 4.13.

(2) et (3) : Résultent de la définition de ces propriétés.

(4) Supposons que P admette une partition \mathbf{P} en chaînes symétriques. Pour tout niveau N_k de P , n_k est le nombre de chaînes de \mathbf{P} qui ont un élément dans N_k . Supposons $k \leq \frac{r(P)}{2}$. Du fait de la symétrie de ces chaînes, si l'une d'elles a un élément dans N_{k-1} , elle en a aussi un dans $N_{r(P)-(k-1)}$ et, comme elle est couvrante, elle a un élément dans N_k . D'où l'existence d'un couplage de N_{k-1} dans N_k et donc le fait que P_{k-1} est de Sperner et vérifie $n_{k-1} \leq n_k$ (cf. la remarque 4.15). La situation est symétrique pour $k \geq \frac{r(P)}{2}$ et on a $n_k \geq n_{k+1}$, ce qui établit (4).

(5) Nous montrons que, si P vérifie (*UNI*) et (*SPN*), il peut être partitionné en $\nu(P)$ chaînes. Soit N_m un niveau de cardinal $\nu(P)$. Si $m \neq 0$, nous avons, d'après (*UNI*), $n_{m-1} \leq n_m$ et nous pouvons, d'après (*SPN*) et la remarque 4.15, considérer un couplage de N_{m-1} dans N_m , correspondant à une injection extensive ι_{m-1} de N_{m-1} dans N_m . Des injections extensives $\iota_k : N_k \rightarrow N_{k+1}$ sont obtenues de même pour tout k tel que $0 \leq k < m$. Les suites $x, \iota_{m-1}^{-1}(x), \iota_{m-2}^{-1}(\iota_{m-1}^{-1}(x)), \dots$, où x parcourt le niveau N_m , forment donc une partition de la partie commençante $[N_m]$ en $\nu(P)$ chaînes, chacune ayant un élément distinct de N_m comme maximum. On partitionne de même la partie finissante $[N_m]$ et la concaténation deux à deux des chaînes obtenues donne bien une partition de P en $\nu(P)$ chaînes. \square

Prises séparément, les conditions (*UNI*) ou (*SPN*) ne garantissent pas la propriété de Sperner : ainsi, le treillis de la figure 4.4(b) vérifie (*UNI*), mais non (*SPN*) et n'est pas de Sperner. Le lecteur pourra chercher un ordre non de Sperner et vérifiant (*SPN*) (un tel ordre ne vérifiant donc pas la condition (*UNI*)).

Définition 4.19 Une famille \mathcal{F} de parties d'un ensemble E est une famille de Sperner sur E si elle constitue une antichaîne du treillis $\underline{2}^E$, c'est-à-dire si aucun élément de \mathcal{F} n'est inclus dans un autre.

Le résultat de Sperner prouvé ci-dessous établit que le cardinal maximum d'une telle famille est égal au nombre maximum d'éléments d'un niveau du treillis booléen $\underline{2}^E$ (chapitre 1, exemple 1.40). Ceci justifie l'appellation d'« ensemble ordonné de Sperner » donnée à la définition 4.14. L'exercice 4.9 correspond à une application plaisante de ce résultat dans un domaine relevant de l'analyse.

Théorème 4.20 (Sperner [380], 1928) Soit E un ensemble de cardinal n . Le treillis booléen $\underline{2}^E$ est un ensemble ordonné de Sperner, avec $\alpha(\underline{2}^E) = \nu(\underline{2}^E) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Preuve. La valeur de $\nu(\underline{2}^E)$ est classique. Les résultats précédents nous fournissent en fait trois façons de montrer que $\underline{2}^E$ est de Sperner :

- On établit que $\underline{2}^E$ vérifie la propriété (SYM) en construisant directement une partition en chaînes symétriques (exercice 4.10) et on applique la proposition 4.18.

- Il est bien connu que $\underline{2}^E$ vérifie la condition (SUR) et est donc unimodal. Comme chacun des ensembles ordonnés bipartis $P_k = (N_k + N_{k+1}, \leq)$ de $\underline{2}^E$ est régulier, $\underline{2}^E$ vérifie (REG) et donc (SPN). On applique alors le point (2) de la proposition 4.18.

- L'ensemble ordonné $\underline{2}^E$ vérifie la condition (MCR) puisque tous ses niveaux sont \mathcal{C} -réguliers (calculer le nombre de chaînes maximales passant par une partie de E de cardinal k). Il satisfait donc la condition (MR) du théorème 4.17. □

4.4 Produits directs de chaînes

Une importante classe d'ensembles ordonnés, généralisation immédiate des treillis booléens, est constituée des produits directs de chaînes (c'est-à-dire des produits directs d'ensembles totalement ordonnés) $\underline{c}_1 \times \cdots \times \underline{c}_i \times \cdots \times \underline{c}_m$, où, pour tout $i = 1, \dots, m$, c_i est un entier au moins égal à 2 et \underline{c}_i est la chaîne $\{0 < 1 < \cdots < c_{i-1}\}$ à c_i éléments.

Dans cette section, l'expression « produit de chaînes » signifie toujours « produit direct de chaînes » et nous donnons quelques propriétés de ces produits. A cette fin, nous considérons d'abord le cas plus général d'un ensemble ordonné $P' = P \times \underline{c}$, produit direct d'un ensemble ordonné rangé P et de la chaîne $\underline{c} = \{0 < \cdots < c - 1\}$ à c éléments. Nous montrons que P' hérite bon nombre de propriétés de P (les propositions 4.21–4.24), et nous appliquons ce type de résultats aux produits de chaînes (corollaire 4.25).

Un élément de P' est noté $x' = (x, j)$, avec $x \in P$ et $j \in \underline{c}$. Si r est la fonction de rang de P , alors P' est aussi rangé, sa fonction de rang r' étant donnée par $r'(x') = r'((x, j)) = r(x) + j$, pour tout $x' \in P'$. Si $r(P)$ est le rang de P , celui de P' est donc $r(P') = r(P) + c - 1$ (comme au chapitre 2, section 2.1, on distingue ici le paramètre de rang, noté $r(P')$, de l'ensemble ordonné P' et la fonction de rang r' , définie sur P'). On note, comme précédemment, n_k le cardinal du niveau N_k de P , et aussi n'_k le cardinal du niveau N'_k de P' . Nous étendons cette suite de nombres en posant $n_k = 0$ (respectivement, $n'_k = 0$) pour tout entier $k \notin [0, r(P)]$ (respectivement, $k \notin [0, r(P')]$). On obtient alors aisément les égalités (1) et (2) de la proposition 4.21 (faire un croquis).

Proposition 4.21 *Soient P un ensemble ordonné rangé, \underline{c} une chaîne à c éléments et $P' = P \times \underline{c}$. Les nombres n_k et n'_k vérifient pour tout entier $k \geq 0$ les égalités suivantes :*

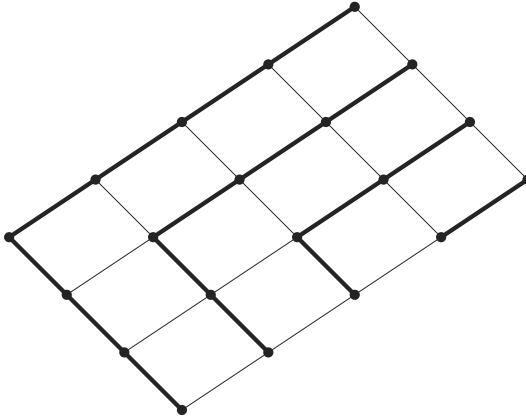


FIG. 4.5. Partition en chaînes symétriques du produit direct de deux chaînes.

1. $n'_k = \sum_{k-c+1 \leq i \leq k} n_i$,
2. $n'_{k+1} = n'_k + n_{k+1} - n_{k-c+1}$.

Dans la section précédente, nous avons défini la condition (*UNI*) d'unimodalité de P , la condition (*SUR*) de symétrie–unimodalité des rangs de P et la condition (*SYM*) selon laquelle P est partitionnable en chaînes symétriques. Dans ce qui suit, nous considérons aussi la propriété suivante : l'ensemble ordonné rangé P est dit *fortement unimodal* s'il est unimodal et si, de plus, $n_{k+1} = n_k$ implique soit $n_k = 0$, soit $n_k = \nu(P)$. Autrement dit, deux niveaux consécutifs d'un tel ensemble ordonné ne peuvent être de même cardinal que si celui-ci est maximum. Un exemple d'un tel ensemble ordonné est donné à la figure 4.5.

On a vu que (*SYM*) implique (*UNI*) et (*SUR*). On remarque, en généralisant la construction illustrée par la figure 4.5 dans le cas du produit $\underline{4} \times \underline{5}$, que le produit de deux chaînes vérifie la condition (*SYM*). On en déduit le résultat suivant, dont la preuve fait l'objet de l'exercice 4.12 :

Proposition 4.22 *Soient P un ensemble ordonné rangé, \underline{c} une chaîne à c éléments et $P' = P \times \underline{c}$. Si P vérifie la condition (*SYM*), alors le produit direct $P' = P \times \underline{c}$ vérifie encore (*SYM*).*

Comme annoncé, nous déduisons maintenant d'autres propriétés des cardinaux des niveaux de $P' = P \times \underline{c}$ de celles des cardinaux des niveaux de P .

Proposition 4.23 *Soient P un ensemble ordonné rangé unimodal, \underline{c} une chaîne à c éléments et $P' = P \times \underline{c}$. Alors :*

1. P' est unimodal,
2. si P vérifie la condition (*SUR*), il en est de même de P' ,
3. si P vérifie (*SUR*) et est fortement unimodal, il en est de même de P' .

Preuve. (1) Montrons d'abord que l'unimodalité de P entraîne celle de P' . D'après l'égalité (2) de la proposition 4.21, la suite des n'_i commence par être croissante : $n'_0 = n_0$; $n'_1 - n'_0 = n_1 > 0$. On va montrer que dès qu'il existe un indice k pour lequel $n'_{k+1} < n'_k$, cette suite ne peut que décroître. Soit k un indice pour lequel on a $n'_{k+1} - n'_k < 0$, donc, toujours d'après (2), $n_{k+1} < n_{k-c+1}$. Dans ce cas, comme P est unimodal, n_{k+1} ne peut être que dans la partie non croissante de la suite des n_i , d'où $n_{k+2} \leq n_{k+1}$.

Si n_{k-c+1} est encore dans la partie non décroissante de la suite des n_i , on a $n_{k-c+1} \leq n_{k-c+2}$ et donc $n'_{k+2} - n'_{k+1} = n_{k+2} - n_{k-c+2} \leq n_{k+1} - n_{k-c+1} < 0$. Sinon, on a $n_{k-c+1} \geq n_{k-c+2} \geq n_{k+2}$ et donc $n'_{k+2} - n'_{k+1} \leq 0$; comme ces dernières inégalités restent vraies pour les différences de rangs suivantes, la suite des n'_i ne peut se remettre à croître. L'ensemble ordonné P' est donc unimodal.

(2) Si P vérifie (SUR), on a les égalités $n'_k = \sum_{0 \leq i \leq c-1} n_{k-i} = \sum_{0 \leq i \leq c-1} n_{r(P)-k+i} = \sum_{0 \leq i \leq c-1} n_{r(P)+(c-1)-k+(i-c+1)} = \sum_{0 \leq i \leq c-1} n_{r(P)-k+i} = n'_{r(P')-k}$. Avec l'unimodalité de P' établie ci-dessus, ceci entraîne la propriété (SUR) pour P' .

(3) Supposons maintenant que P vérifie (SUR) et est fortement unimodal. On va montrer que P' l'est aussi, i.e. que $n'_{k+1} = n'_k$ implique $n'_k = 0$ ou $\nu(P')$. D'après la récurrence (2) de la proposition 4.21, l'égalité $n'_{k+1} = n'_k$ implique $n_{k+1} = n_{k-c+1}$. Examinons les divers cas où l'on peut avoir cette dernière égalité :

- Si $n_{k+1} = 0$, on a aussi $n_i = 0$ pour tout i inférieur à k , et donc, par le point (1) de la proposition 4.21, $n'_{k+1} = n'_k = 0$,
- Si $n_{k+1} = n_{k-c+1} = \nu(P)$, on a, puisque P est unimodal, $n_i = \nu(P)$ pour tout i compris entre $k-c+1$ et $k+1$, et donc, par le point (1) de la proposition 4.21, $n'_{k+1} = n'_k = c\nu(P) = \nu(P')$.
- Si $n_{k+1} = n_{k-c+1}$ est différent de 0 ou $\nu(P)$ on a, par l'unimodalité forte, $k-c+1 = r(P) - k - 1$. Alors, $r(P') = r(P) + c - 1 = 2k + 1$ est impair et on a $k = \frac{r(P')-1}{2}$ et $k+1 = \frac{r(P')+1}{2}$, ce qui, avec la propriété de symétrie, entraîne bien $n'_{k+1} = n'_k = \nu(P')$. \square

Soit q (respectivement, q') le nombre des niveaux de P (respectivement, de P') de cardinal maximum $\nu(P)$ (respectivement, $\nu(P')$). La proposition suivante permet dans certains cas de déterminer q' à partir de q et de c .

Proposition 4.24 *Soient P un ensemble ordonné rangé avec $r(P) = q - 1$, \underline{c} une chaîne à c éléments et $P' = P \times \underline{c}$. Alors :*

1. *Si P est unimodal avec $c \leq q$, P' a exactement $q-c+1$ niveaux de cardinal $\nu(P')$. Dans ce cas, on a $\nu(P') = c\nu(P)$.*
2. *Si P vérifie la condition (SUR), est fortement unimodal, et si $c > q$, alors P' a exactement un (pour $r(P')$ pair) ou deux (pour $r(P')$ impair) niveaux de cardinal maximum $\nu(P')$.*

Preuve. (1) Supposons $c \leq q$, et soit j le plus petit entier tel que $n_j = \nu(P)$, et donc $j + q - 1$ le plus grand entier pour lequel $n_i = \nu(P)$. Avec $c \leq q$, un moment de réflexion montre que la récurrence (1) de la proposition 4.21 donne $n'_k = \sum_{k-c+1 \leq i \leq k} n_i = c\nu(P)$ si et seulement si $j+c-1 \leq k \leq j+q-1$. Toujours d'après (1), il est clair que cette valeur $c\nu(P)$ est la plus grande que puisse atteindre le cardinal d'un niveau de P' .

(2) Remarquons d'abord que, d'après la propriété (SUR) de P' établie par la proposition précédente, s'il y a plusieurs niveaux de cardinal $\nu(P')$, leurs rangs sont « centrés » autour de la valeur $\frac{r(P')}{2} = \frac{r(P)+c-1}{2}$. Supposons $r(P')$ pair et posons $j = \frac{r(P')}{2} = \frac{r(P)+c-1}{2}$. On a $n_j = \nu(P')$ et $n'_{j+1} - n'_j = n_{j+1} - n_{j-c+1}$. Du fait qu'il n'y a que $q < c$ niveaux de cardinal $\nu(P)$ dans P , cette valeur ne peut être simultanément celle de n_{j+1} et de n_{j-c+1} . Par ailleurs, on a $r(P) - (j + 1) = j - c$ et donc, du fait que P vérifie (SUR), $n'_{j+1} - n'_j = n_{r(P)-(j+1)} - n_{j-c+1} = n_{j-c} - n_{j-c+1}$, différence qui ne peut être nulle d'après l'unimodalité forte de P . On a donc $n'_{j+1} \neq \nu(P')$.

Le cas où $r(P')$ est impair se traite de façon analogue en partant de $j = \frac{r(P')+1}{2}$. □

Il est clair qu'une chaîne vérifie la condition (SYM) et est fortement unimodale. Par récurrence sur m , on déduit alors immédiatement de ce qui précède (en particulier des propositions 4.18 et 4.21 à 4.23) les propriétés suivantes pour un produit de m chaînes :

Corollaire 4.25 *Soit $P = \underline{c}_1 \times \dots \times \underline{c}_i \times \dots \times \underline{c}_m$ un produit de m chaînes. L'ensemble ordonné P est rangé, de rang $r(P) = (\sum_{1 \leq i \leq m} c_i) - m$. Il vérifie la condition (SYM) et est de plus fortement unimodal. P est de Sperner et sa largeur $\nu(P)$ vaut le cardinal du niveau $N_{\frac{r(P)}{2}}$ si le rang $r(P)$ est pair, ou des niveaux $N_{\frac{r(P)-1}{2}}$ et $N_{\frac{r(P)+1}{2}}$ s'il est impair.*

La proposition 4.21 fournit des récurrences pour déterminer en pratique les cardinaux des niveaux, et en particulier la largeur, d'un produit P de chaînes. De même, les propriétés listées dans le corollaire ci-dessus permettent d'appliquer la proposition 4.24 pour déterminer le nombre des niveaux de cardinal maximum d'un produit de chaînes $\underline{c}_1 \times \dots \times \underline{c}_i \times \dots \times \underline{c}_m$ à partir de celui de $\underline{c}_1 \times \dots \times \underline{c}_i \times \dots \times \underline{c}_{m-1}$.

Exemple 4.26 Un produit de chaînes $P = \underline{c}_1 \times \dots \times \underline{c}_i \times \dots \times \underline{c}_m$ est un treillis de Post si $c_1 = c_2 = \dots = c_m = c$. Pour $c = 2$, P est un treillis booléen et la récurrence (1) de la proposition 4.21 devient $n'_k = n_k + n_{k-1}$, qui est bien celle des nombres binomiaux. Pour c quelconque, les cardinaux des niveaux de l'ensemble ordonné \underline{c}^m constituent une généralisation de ces nombres. Par exemple, pour $c = 6$, le cardinal n_k du niveau N_k correspond au nombre de façons d'obtenir le score $k + m$ en jetant m dés à jouer (du modèle ordinaire), et $\frac{n_k}{6^m}$ est la probabilité d'obtenir un tel score dans un lancer « régulier ». Le tableau 4.1 donne les nombres n_k correspondants pour $1 \leq m \leq 4$.

TABLEAU 4.1. Nombres de Whitney du treillis de Post.

$m \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1					
2	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
3	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21
4	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146

$m \setminus k$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1										
2										
3		15	10	6	3	1				
4		140	125	104	80	56	35	20	10	4

Le rang d'un treillis de Post $P = \underline{c}^m$ est égal au produit $m(c - 1)$. En appliquant la proposition 4.24, on voit que, pour $m > 1$, l'ensemble ordonné P possède deux niveaux de cardinal $\nu(P)$ si ce produit est impair, un seul sinon. Seul le passage de $m = 1$ à $m = 2$ se fait selon la première partie de cette proposition, avec $c = q = 6$, et ensuite c'est la seconde partie qui s'applique.

Exemple 4.27 Soit $p = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_m^{a_m}$ un entier, où p_1, p_2, \dots, p_m sont les facteurs premiers de p . L'ensemble P des diviseurs de p , muni de l'ordre de divisibilité, est isomorphe au produit de chaînes $(a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \dots \times (a_m + 1)$. Les résultats précédents s'appliquent donc à cet ensemble ordonné.

Exemple 4.28 Dans le domaine de l'extraction de connaissances (et plus précisément, celle des règles de décision d'un expert), Pichon et al. [339] (1994) supposent que des objets sont décrits par m attributs, chacun de ces attributs correspondant à une échelle ordinale (chaîne) \underline{c}_i à c_i éléments (avec $i = 1, \dots, m$). L'univers des possibles est alors décrit par le produit de chaînes $P = \underline{c}_1 \times \dots \times \underline{c}_i \times \dots \times \underline{c}_m$, de rang $r(P) = (\sum_{1 \leq i \leq m} c_i) - m$. Un expert sélectionne des objets de telle façon que, si l'objet e est choisi, il en est de même de tout objet e' supérieur à e dans P , tandis que, si e n'est pas choisi, tout objet e' inférieur à e ne l'est pas non plus. Autrement dit, l'ensemble des objets choisis constitue une partie finissante F de P , et ceux qui ne le sont pas la partie commençante complémentaire. La détermination de l'antichaîne A des éléments minimaux de F révélera les règles de décision de l'expert, qu'il pourrait par ailleurs être difficile de lui faire expliciter. On pourra alors, par exemple, établir un « cahier des charges » pour la réalisation d'un système-expert.

Il peut être important de planifier les questions posées à l'expert afin de ne pas lui en poser un trop grand nombre. Pour ce faire, on peut commencer par partitionner P en $\alpha(P)$ chaînes, chacune ayant au plus $r(P) + 1$ éléments.

Ensuite, trouver une valeur limite sur une chaîne de cardinal c se fait, par « recherche dichotomique », en au plus $\lceil \log_2 c \rceil$ questions. On en déduit la borne supérieure $\alpha(P) \lceil \log_2 r(P) + 1 \rceil$ pour le nombre d'objets à expertiser (cette borne est en fait valide dans tout ensemble ordonné rangé). Dans l'article cité plus haut, on recherche ensuite des adaptations spécifiques aux produits de chaînes, avec un choix de questions plus dépendant des étapes de la recherche.

4.5 Compléments et références

C'est en fait à propos de l'étude de la dimension des treillis distributifs, sur laquelle on revient plus loin au chapitre 6, que Dilworth a été amené à formuler en 1950 son théorème. La démonstration simple de ce résultat que nous donnons à la section 4.1 est due à Tverberg [413] (1967). Les théorèmes de Dilworth et de Sperner ont été les points de départ d'une littérature particulièrement volumineuse, comptant bon nombre de brillants résultats et aussi – fait remarquable – plusieurs excellentes synthèses auxquelles on peut se référer : la revue, axée sur les méthodes de démonstration, publiée par Greene et Kleitman [200] (1978) peu après qu'ils ont obtenu, ensemble ou séparément, d'importantes généralisations du théorème de Dilworth ou du théorème 4.1, la présentation historique très complète de West [422] (1982) et le livre dense et technique de Engel [144] (1997).

On a essentiellement présenté ici des résultats de base ressortant de la théorie des ensembles ordonnés. Toutefois, les ordres bipartis de la section 4.2 sont clairement identifiables à des graphes bipartis et, comme il a été mentionné, à d'autres structures combinatoires. De fait, le théorème de Dilworth se situe au coeur de la combinatoire, comme en témoigne son lien avec la programmation linéaire en nombres entiers, implicite dans son équivalence avec le théorème « min coupe-max flot » de Ford et Fulkerson (Ford et Fulkerson [169], 1962), et explicite dans son obtention comme corollaire d'un théorème de dualité par Dantzig et Hoffman [110] (1956). L'équivalence du théorème de Dilworth et de plusieurs autres résultats fondamentaux de combinatoire a d'ailleurs été mise en évidence dans la littérature. Ainsi, on a montré à la section 4.1 comment le théorème de Dilworth implique celui de König–Hall. Le théorème de Menger de la théorie des graphes se déduit de celui-ci, et entraîne à son tour celui de Ford et Fulkerson, qui lui-même permet de montrer celui de König–Egervàry sur les graphes bipartis, qui entraîne enfin le théorème de Dilworth. Nous revenons ci-dessous sur les deux derniers de ces passages entre théorèmes. Pour les autres (et pour les variantes de l'énoncé du théorème de Menger), le lecteur pourra se reporter au chapitre 8 du livre de Aigner [3] (1979), et au chapitre 13 du livre de Welsh [421] (1976) pour le passage du théorème de König–Hall à celui de Menger.

L'exercice 4.5 propose de retrouver comment le théorème de Dilworth se déduit de celui de König–Egervàry (la réciproque a été établie à la section 4.2).

Pour ce faire, on associe à l'ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné biparti $P' = (X + X', \leq')$, où $X' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ est une copie de $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, avec $x_i < x'_j$ si et seulement si $x_i < x_j$. Par ailleurs, la preuve de l'implication du théorème de König-Egervàry par celui de Ford et Fulkerson s'accompagne d'un algorithme pour la détermination de la largeur d'un ensemble ordonné P (avec le résultat selon lequel cette détermination est un problème polynomial). La recherche d'une partition d'un ensemble ordonné quelconque P en $\theta(P)$ chaînes se ramène en effet à celle d'un flot maximum dans un graphe orienté G associé à l'ensemble ordonné P' qui vient d'être défini, tandis que la recherche d'une antichaîne de P de cardinal $\alpha(P)$ se ramène à celle d'une coupe minimum de G . Nous explicitons l'équivalence entre le théorème de Dilworth et le théorème min coupe-max flot de Ford et Fulkerson. Rappelons d'abord ce dernier.

Pour chaque sommet s d'un graphe orienté $G = (S, U)$, notons Us (respectivement, sU) l'ensemble des arcs d'extrémité (respectivement, d'origine) s . Pour deux sommets distincts y et z , un *flot* de y à z est une application $f : U \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout $s \in X \setminus \{y, z\}$, $\sum_{u \in Us} f(u) = \sum_{u \in sU} f(u)$, tandis que, si $u \in Uy$ (respectivement, $u \in zU$), on a $f(u) = 0$. La *valeur du flot* f est la quantité $f(y, z) = \sum_{u \in Uy} f(u) = \sum_{u \in Uz} f(u)$. Pour être *admissible*, un flot f doit aussi respecter pour tout arc u une inégalité du type $f(u) \leq \chi(u)$, le nombre entier $\chi(u)$ étant la « capacité » de l'arc u . Maximiser $f(y, z)$ sous ces contraintes peut alors être vu comme un problème d'acheminement d'un maximum de marchandises à travers un réseau de transport (celui-ci représenté par le graphe G). Une *coupe* (séparant y et z) est une partition de S en deux classes Y et Z telles que $y \in Y$ et $z \in Z$. On lui associe l'ensemble $D(Y, Z)$ des arcs (y', z') de G tels que $y' \in Y$ et $z' \in Z$, puis la capacité de la coupe $\chi(Y, Z) = \sum_{u \in D(Y, Z)} \chi(u)$. Le théorème de Ford et Fulkerson établit l'égalité :

$$\begin{aligned} & \text{Max}\{f(y, z), f \text{ flot admissible}\} \\ & = \text{Min}\{\chi(Y, Z), (Y, Z) \text{ coupe sparant } y \text{ et } z\} \end{aligned}$$

Ce théorème est associé à des algorithmes efficaces de détermination d'un tel flot et d'une telle coupe. Nous l'appliquons au graphe $G = (S, U)$ qui est dérivé de l'ensemble ordonné P' défini précédemment en lui ajoutant un sommet source y et un sommet puits z ; on pose $S = X \cup X' \cup \{y, z\}$ et $U = \{(y, x) : x \in X\} \cup \{(x, x') : x \in X, x' \in X', x < x'\} \cup \{(x', z) : x' \in X'\}$. On affecte à ce graphe les capacités $\chi(y, x) = \chi(x', z) = 1$, pour tous $x \in X, x' \in X'$, et $\chi(x, x') = n + 1$ pour tout autre arc (x, x') (avec $n = |X|$).

Un couplage C de P' à $\sigma(P')$ chaînes correspond alors à un flot maximum de y vers z , avec $f(y, z) = \sigma(P')$, tandis qu'une coupe (Y, Z) de G , avec $y \in Y$ et $z \in Z$, est de capacité $\chi(Y, Z)$ minimum si et seulement si elle possède les propriétés suivantes : $Y \cap X = Z \cap X' = \emptyset$ et $(Y \cap X') \cup (Z \cap X)$ est une transversale de P' de cardinal minimum. Ainsi, la détermination d'un flot maximum de G entraîne celle d'un couplage de P' en $\sigma(P')$ chaînes, puis d'une partition de P en $\theta(P)$ chaînes, tandis que la détermination d'une coupe

minimum de G entraîne celle d'une transversale de P' de cardinal $\tau(P')$, puis d'une antichaîne de P de cardinal $\alpha(P)$.

Une autre propriété des ensembles ordonnés est que leurs graphes de comparabilité (et les graphes d'incomparabilité qui sont leurs complémentaires, cf. le chapitre 1, définition 1.5) constituent l'une des grandes classes de graphes parfaits, dont nous rappelons ci-dessous la définition. Dans un graphe non orienté $G = (S, U)$, le *nombre de stabilité* $\alpha(G)$ est le cardinal maximum d'une partie libre (i.e. sans éléments adjacents) de S , le *nombre chromatique* $\gamma(G)$ est le nombre minimum de parties libres dans une partition de S en parties libres, le nombre $\kappa(G)$ est le cardinal maximum d'une clique (i.e. dont les éléments sont deux à deux adjacents) de S , et le nombre $\theta(G)$ est le nombre minimum de cliques dans une partition de S en cliques. Le graphe G est dit *parfait* si l'égalité $\alpha = \theta$ est vérifiée pour G et tous ses sous-graphes induits (il revient au même de supposer qu'il s'agit de l'égalité $\kappa = \gamma$, voir la revue de Toft [399] (1995) et celle de Chudnovski et al. [98] (2003) sur les résolutions des conjectures posées sur ces graphes par Berge en 1961). Dans le cas où G est le graphe de comparabilité $Comp(P)$ d'un ensemble ordonné P , on voit facilement que les cliques de $Comp(P)$ correspondent exactement aux chaînes de P et que, en fait, ces paramètres de graphe coïncident avec ceux étudiés tout au long de ce chapitre. Alors le théorème de Dilworth et/ou le théorème 4.1 entraîne(nt) que tout graphe de comparabilité – ou d'incomparabilité – est parfait. On caractérisera au chapitre 6, section 6.4, les ensembles ordonnés particuliers dont le graphe de comparabilité est aussi d'incomparabilité.

Le théorème de Dilworth a aussi été l'objet de nombreuses généralisations. L'une des plus remarquées a porté sur les *k-antichaînes* de cardinal maximum, en relation avec l'existence de partitions (en chaînes) particulières (Greene et Kleitman [199], 1976). L'exercice 4.4 porte sur deux définitions équivalentes de ces *k-antichaînes*.

Le théorème de Sperner peut être vu comme le point de départ de la « théorie extrémale des ensembles », dont le propos est de trouver le nombre maximum (ou minimum) d'éléments d'une famille \mathcal{F} de parties d'un ensemble de cardinal fixé vérifiant une propriété donnée. S'il s'agit, par exemple, de l'incomparabilité pour l'inclusion, le problème est de déterminer la largeur de l'ensemble ordonné (\mathcal{F}, \subseteq) . Ici, nous pouvons renvoyer le lecteur désireux d'en savoir plus au livre d'Anderson [8] (1987).

Le problème de reconnaître si un ordre est ou n'est pas de Sperner est central dans l'étude des ensembles ordonnés rangés. La classification des ordres rangés qu'il induit est bien spécifique : ainsi, ne sont en général de Sperner ni les treillis distributifs ou modulaires (un contre-exemple simple est fourni par la Figure 4.4(b)), ni les treillis géométriques (Dilworth et Greene [122], 1971), ni le treillis des partitions d'un ensemble fini, si celui-ci est assez grand (Canfield [82], 1978). Ce dernier cas a longtemps constitué un problème célèbre. D'autre part, l'existence d'une partition en chaînes symétriques a de nombreuses conséquences qui rendent particulièrement intéressante la recherche de telles partitions (cf. Griggs [201], 1988 et l'exercice 4.10).

Comme l'étude des produits de chaînes généralise celle des treillis booléens, les cardinaux des niveaux de ces treillis incluent les nombres binomiaux comme cas particulier. On observe en effet à l'exemple 4.26 que les récurrences issues de la proposition 4.21 généralisent le triangle de Pascal. En revanche, la formule « en factorielle » des nombres binomiaux ne s'étend guère : on obtient des expressions très complexes, comme celle donnée par Lerman [278] (1981), peu utilisable en pratique (voir aussi l'exercice 4.13 pour le cas $m = 3$). Toutefois, à côté des récurrences, le calcul des probabilités fournit des outils efficaces pour l'évaluation approximative du nombre des éléments d'un « grand » produit de chaînes dont le rang est compris entre deux valeurs données. En reprenant les notations de l'exemple 4.27, posons $V = \frac{1}{12} \sum_{1 \leq i \leq m} a_i(a_i + 2)$ et $s = \sqrt{V}$. On peut considérer le rang $r(x)$ d'un élément x , pris au hasard équiprobable dans P , comme une variable aléatoire de moyenne $\frac{r(P)}{2}$ et de variance V . Si la suite $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ est telle que $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{s} = 0$, la distribution de $r(x)$ tend vers la loi de Laplace–Gauss. Ceci permet notamment d'obtenir la formule asymptotique

$$\alpha(P) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(P)}{s}$$

(cf. par exemple Leclerc [266], 1990). C'est notamment le cas du produit de chaînes $\underline{2} \times \underline{3} \times \dots \times \underline{m}$, dont il a été montré (Le Conte de Poly-Barbut [274], 1990) qu'il a les mêmes nombres de Whitney que l'ordre permutoèdre sur Σ_m défini au chapitre 1, exemple 1.17.

4.6 Exercices

Exercice 4.1 Montrer qu'un treillis rangé dont les niveaux ont au plus deux éléments est partitionnable en deux chaînes (l'exemple de la figure 4.4(b) montre que la situation n'est plus la même si les niveaux peuvent avoir trois éléments).

Exercice 4.2 [OPTIMISATION DE LA FLOTTE] Au départ d'un aéroport, une compagnie a programmé n vols. A chaque vol i correspondent un horaire de départ t_i et une durée d_i d'absence de l'appareil avant son retour. Deux vols i et j sont incompatibles si $[t_i, t_i + d_i] \cap [t_j, t_j + d_j] \neq \emptyset$. Montrer que le nombre minimum d'appareils nécessaires est égal au nombre maximum de vols deux à deux incompatibles.

Exercice 4.3 [TREILLIS DES ANTICHAÎNES DE CARDINAL MAXIMUM, Dilworth [121]] Soient A et A' deux antichaînes de cardinal $\alpha(P)$ d'un ensemble ordonné P . On pose $Y = A \cup A'$, et soient B et B' les ensembles d'éléments respectivement minimaux et maximaux dans le sous-ensemble ordonné (Y, \leq) .

(1) Montrer que $Y = B \cup B'$. En déduire que B et B' sont encore des antichaînes de P de cardinal $\alpha(P)$.

(2) Montrer que, pour l'ordre sur les antichaînes de P défini par $A_1 \leq A_2$ si $(A_1] \subseteq (A_2]$, B (respectivement, B') est l'infimum (respectivement, le supremum) de A et de A' (cet ordre est considéré au chapitre 5, page 140).

Exercice 4.4 [k -ANTICHAÎNES] Soient $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné et Y une partie de X . On dit que Y est une k -antichaîne de P si Y est l'union d'au plus k antichaînes de P . Montrer que Y est une k -antichaîne si et seulement si $\kappa(P') \leq k$, où P' est le sous-ensemble ordonné (Y, \leq) de P .

Exercice 4.5 [DE KÖNIG–EGERVÁRY À DILWORTH, Fulkerson [173]] Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné de cardinalité n , auquel on associe l'ensemble ordonné biparti $P' = (X + X', \leq')$, où $X' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ est une copie de $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $x_i < x'_j$ si et seulement si $x_i < x_j$.

(1) Montrer qu'à un couplage C de P' en c' chaînes correspond une partition \mathbf{P} de P en $n - c'$ chaînes de P , et réciproquement (indication : partir d'un couplage C vide de P' et de la partition \mathbf{P} en n chaînes de P , chacune à un élément, puis ajouter à C des couples (x_i, x'_j) avec $x_i < x'_j$, et réduire simultanément le nombre de chaînes de P en mettant x_i et x_j dans la même chaîne).

(2) Montrer qu'à une transversale T de P' de cardinal t' correspond une antichaîne A de P de cardinal $n - t'$, et réciproquement (indication : x_i est élément de A si et seulement si ni x_i ni x'_i ne sont éléments de T).

(3) En déduire que l'égalité $\sigma(P') = \tau(P')$ implique l'égalité $\theta(P) = \alpha(P)$.

Exercice 4.6 [SYSTÈMES DE REPRÉSENTANTS DISTINCTS] Soit $\mathcal{F} = (F_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E . Un système de représentants distincts (SRD) de \mathcal{F} est un ensemble $\mathcal{R} = \{r_i, i \in I\}$ d'éléments de E tels que, pour tout $i \in I$, on a $r_i \in F_i$. Montrer que le Corollaire 4.11 est équivalent à l'énoncé suivant : une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille \mathcal{F} de parties de E admette un SRD est que, pour tout $J \subseteq I$, on ait $|\bigcup_{i \in J} F_i| \geq |J|$. (Indication : utiliser l'équivalence de structures signalée au début de la section 4.2.)

N.B. Ce résultat très connu a été obtenu sous cette forme par Hall [217]. Il s'applique, entre autres, aux problèmes d'affectation. Si, par exemple, E est l'ensemble des pilotes et I l'ensemble des avions d'une compagnie aérienne, F_i étant l'ensemble des pilotes qualifiés sur l'avion i , la condition obtenue porte sur la possibilité de faire voler simultanément tous les pilotes.

Exercice 4.7 On considère le treillis booléen $\underline{2}^E$ des parties d'un ensemble E et deux niveaux N_k et $N_{k'}$ de ce treillis, avec $k < k' < \frac{n}{2} + 1$. Soit $P = (N_k + N_{k'}, \leq)$ le sous-ensemble ordonné biparti de $\underline{2}^E$ induit par ces deux niveaux. Existe-t-il un couplage de N_k dans $N_{k'}$? Calculer les paramètres $\sigma(P)$, $\tau(P)$, $\gamma(P)$, $\alpha(P)$ et $\delta(P)$.

Exercice 4.8 Caractériser les ensembles ordonnés rangés pour lesquels toute antichaîne est incluse dans un niveau (indication : ils ont été considérés au chapitre 2).

Exercice 4.9 [LE PROBLÈME DE LITTLEWOOD–OFFORD] Soient r_1, \dots, r_n des nombres réels tous égaux au moins à 1 et $I = [t, t+1[$ un intervalle réel. On considère l'ensemble E des nombres réels de la forme $r = \sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i r_i$, où les ε_i sont égaux à 0 ou à 1. Montrer que le nombre d'éléments de E appartenant à l'intervalle I est au plus égal à $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (indication : on considère le n -uplet des ε_i comme un élément du treillis booléen $\underline{2}^n$ et on montre que l'ensemble des r contenus dans l'intervalle I correspond à une antichaîne de $\underline{2}^n$).

N.B. Le chapitre 11 du livre de Anderson [8] (1987) est consacré aux nombreuses extensions de ce résultat.

Exercice 4.10 Donner une partition en chaînes symétriques du treillis booléen $\underline{2}^E$ des parties d'un ensemble E (on pourra choisir un élément e de E , puis chercher à obtenir, à partir de chaque chaîne de longueur ℓ d'une telle partition de $\underline{2}^{E-e}$, deux chaînes de longueurs $\ell + 1$ et $\ell - 1$ de $\underline{2}^E$). Étendre alors le résultat de l'exercice 4.7 à k, k' quelconques, puis généraliser à tout couple de niveaux d'un ensemble ordonné vérifiant la condition (SYM).

Exercice 4.11 Trouver une partition en chaînes symétriques de l'ordre permutatoire sur l'ensemble Σ_4 des permutations d'un ensemble à quatre éléments (chapitre 1, exemple 1.17). On trouvera le diagramme de cet ensemble ordonné au chapitre 5, figure 5.6).

N.B. L'existence d'un partitionnement de l'ordre permutatoire sur Σ_n en chaînes symétriques pour tout entier n reste un problème ouvert (cf. à ce propos Leclerc [270], 1994).

Exercice 4.12 Soit $\{C_1, \dots, C_k\}$ une partition en k chaînes symétriques d'un ensemble ordonné rangé P , et soit C une chaîne sans élément commun avec P . Montrer que tout élément x du produit direct $P \times C$ appartient à un et un seul des sous-ensembles ordonnés $C_1 \times C, \dots, C_k \times C$. En déduire que, si chacun de ces sous-ensembles est partitionnable en chaînes symétriques, il en est de même de $P \times C$.

Exercice 4.13 [LARGEUR DU PRODUIT DE DEUX OU TROIS CHAÎNES, Leclerc [266], 1990] On considère trois chaînes $\underline{c}_1, \underline{c}_2$ et \underline{c}_3 , avec $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq 2$.

1. Montrer que $\alpha(\underline{c}_1 \times \underline{c}_2) = c_2$.
2. Montrer que $\alpha(\underline{c}_1 \times \underline{c}_2 \times \underline{c}_3) = c_2 c_3 - \frac{K}{4}$, avec :
 - $K = 0$ si $c_1 > c_2 + c_3 - 2$,
 - $K = (c_2 + c_3 - c_1 - 1)(c_2 + c_3 - c_1 + 1)$ si $c_1 \leq c_2 + c_3 - 2$ et si $c_2 + c_3 - c_1$ est impair,
 - $K = (c_2 + c_3 - c_1)^2$ si $c_1 \leq c_2 + c_3 - 2$ et si $c_2 + c_3 - c_1$ est pair.

Ensembles ordonnés et treillis distributifs

Les ensembles ordonnés appelés *treillis* ont été définis au chapitre 1 et, au chapitre 2, on a introduit des classes particulières de treillis tels les treillis distributifs, modulaires ou semi-modulaires. La classe des treillis distributifs est la plus importante pour plusieurs raisons. D'abord, on peut noter que les treillis distributifs, du fait justement de la distributivité entre leurs deux opérations, sont ceux dont le maniement algébrique est le plus aisé. Ensuite, bon nombre d'ordres intervenant naturellement en mathématiques pures ou appliquées s'avèrent des treillis distributifs. On a déjà cité le cas des ensembles totalement ordonnés ainsi que celui de l'ensemble des parties d'un ensemble muni de l'ordre d'inclusion, structure isomorphe à celle d'un produit direct de chaînes à deux éléments. Une généralisation de ce cas est le treillis distributif obtenu en faisant le produit direct de chaînes de longueur quelconque. Ainsi, lorsque dans la modélisation d'un problème de décision, on considère que les choix possibles sont évalués selon plusieurs ordres totaux correspondant à différents critères, ces choix correspondent à des éléments du treillis distributif produit de ces ordres. Enfin et surtout, il existe une correspondance fondamentale entre ensembles ordonnés et treillis distributifs, qui fait que toute propriété ou problème sur les ensembles ordonnés peut se « traduire » en une propriété ou un problème sur les treillis distributifs (et inversement). Par exemple, dans les problèmes d'ordonnancement où l'on doit rechercher une extension linéaire d'un ensemble ordonné, le passage au problème correspondant sur le treillis distributif associé se révèle fructueux (cf. la section 7.5).

A la section 5.1 nous donnons plusieurs caractérisations des treillis distributifs (théorème 5.1) ainsi que des exemples de tels treillis. A la section suivante, le théorème 5.6 décrit les propriétés d'un treillis distributif associé à un ensemble ordonné, à savoir le treillis de ses parties commençantes (ordonnées par inclusion). La section 5.3 montre qu'inversement tout treillis distributif est représentable de cette manière, un résultat fondamental dû à Birkhoff. De façon précise, tout treillis distributif est isomorphe au treillis des parties commençantes d'un ensemble ordonné, qui n'est autre que celui de ses éléments sup-irréductibles (théorème 5.9). On établit ainsi une

bijection canonique entre la classe des ensembles ordonnés et celle des treillis distributifs. Cette bijection peut s'interpréter comme résultant d'une dualité fondamentale entre préordres et topologies, elle-même conséquence d'une correspondance de Galois entre relations binaires et familles de parties définies sur le même ensemble. Nous présentons cette correspondance de Galois à la section 5.4 (théorème 5.23) et nous en déduisons plusieurs dualités. D'abord, celle entre préordres et topologies (corollaire 5.24) puis celle entre préordres totaux et topologies linéaires (proposition 5.27), enfin celle entre ordres et topologies quasi-séparées ou encore entre ordres et treillis distributifs (corollaire 5.29). Auparavant, à la section 5.3, nous utilisons le théorème de représentation de Birkhoff pour établir plusieurs propriétés importantes des treillis distributifs telles que l'isomorphisme entre les ensembles ordonnés de ses éléments sup-irréductibles et de ses éléments inf-irréductibles. D'autre part, nous étudions le problème de recherche du nombre minimum de générateurs (pour les deux opérations de supremum et d'infimum) d'un treillis distributif, cette recherche s'avérant utile au chapitre 6 pour celle de la dimension booléenne d'un ensemble ordonné. Le résultat principal est que cette recherche revient à celle d'une transversale de cardinalité minimum d'une famille d'intervalles du treillis (théorème 5.20 et corollaire 5.21).

5.1 Treillis distributifs

À la section 2.3, on a défini un treillis distributif comme un treillis vérifiant l'une ou (et) l'autre des deux propriétés (équivalentes) de distributivité d'une de ses opérations par rapport à l'autre (propriétés (1) et (2) ci-dessous). Nous démontrons dans cette section l'équivalence de ces deux propriétés entre elles ainsi qu'avec quatre autres propriétés.

Nous rappelons les notations suivantes pour un treillis T : S_T (respectivement, I_T) est l'ensemble de ses éléments sup-irréductibles (respectivement, inf-irréductibles) ; S_x (respectivement, I^x) est l'ensemble des éléments sup-irréductibles inférieurs ou égaux (respectivement, inf-irréductibles supérieurs ou égaux) à un élément x de T ; pour $s \in S_T$ et $i \in I_T$, $s \uparrow i$ signifie que $s \vee i = i^+$ (chapitre 3, proposition 3.21).

Théorème 5.1 *Un treillis T est distributif si et seulement si il vérifie l'une quelconque des propriétés suivantes :*

1. pour tous $x, y, z \in T$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
2. pour tous $x, y, z \in T$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,
3. pour tous $x, y, z \in T$, $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$,
4. pour tous $s \in S_T$, $X \subseteq T$, $s \leq \bigvee X$ implique $s \leq x$ pour au moins un élément x de X ,
5. pour tout $s \in S_T$, il existe un unique $i \in I_T$ tel que $s \uparrow i$,
6. pour tous $x, y \in T$, on a $S_{x \vee y} = S_x \cup S_y$.

Preuve. On doit montrer que dans tout treillis distributif, les propriétés (1) à (6) sont équivalentes.

(1) \implies (2) : supposons (1) vraie et soient $x, y, z \in T$. On a $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z]$ (par (1)) $= x \vee [z \wedge (x \vee y)]$ (par absorption et commutativité) $= x \vee [(z \wedge x) \vee (z \wedge y)]$ (par (1)) $= [x \vee (z \wedge x)] \vee (z \wedge y)$ (par associativité) $= x \vee (y \wedge z)$ (par absorption et commutativité). L'implication (2) \implies (1) se montre dualement.

(2) \implies (3) : $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = [(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] \vee z \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] \vee x$ (par (2)) $= [(x \wedge y) \vee z] \wedge [(x \vee (y \wedge z))]$ (par absorption et commutativité) $= [(x \vee z) \wedge (y \vee z)] \wedge [(x \vee y) \wedge (x \vee z)]$ (par (2)) $= (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$ (par associativité et idempotence).

(3) \implies (1) : si (3) est vraie, on en déduit aisément que T vérifie la propriété suivante (M) de modularité : $\forall x, y, z \in T, x \leq z \implies x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

On a aussi, compte tenu de (3), $x \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] = x \wedge [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)]$. En réorganisant le premier membre de cette égalité et en simplifiant le second, on trouve :

$x \wedge ((y \wedge z) \vee [(x \wedge y) \vee (z \wedge x)]) = x \wedge (y \vee z)$, avec $(x \wedge y) \vee (z \wedge x) \leq x$, ce qui permet d'utiliser la commutativité et (M) pour réécrire le premier membre : $([(x \wedge y) \vee (z \wedge x)] \vee (y \wedge z)) \wedge x = [(x \wedge y) \vee (z \wedge x)] \vee (y \wedge z \wedge x) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. D'où finalement, $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$.

(1) \implies (4) : si $s \in S_T$ et $s \leq \bigvee X$, on a $s = s \wedge (\bigvee X) = \bigvee_{x \in X} (s \wedge x)$ par distributivité et, s étant sup-irréductible, on a $s = s \wedge x$ pour au moins un élément x de X .

(4) \implies (5) : supposons l'existence de $s \in S_T$ et de deux éléments distincts i_1 et $i_2 \in I_T$ avec $s \uparrow i_1$ et $s \uparrow i_2$. On a donc i_1 et i_2 incomparables et ainsi (par exemple) $s \leq i_1^+ \leq i_1 \vee i_2$. Par (4) on a alors $s \leq i_1$ ou $s \leq i_2$, une contradiction.

(5) \implies (6) : dans tout treillis T , on a $S_x \cup S_y \subseteq S_{x \vee y}$ (puisque $s \leq x$ ou $s \leq y$ implique $s \leq x \vee y$). Supposons qu'il existe $s \in S_T$ avec $s \leq x \vee y$, $s \not\leq x$ et $s \not\leq y$. On a donc x et y incomparables, et il existe i_1 et $i_2 \in I_T$ avec $x \leq i_1$, $y \leq i_2$, $s \uparrow i_1$ et $s \uparrow i_2$. (5) implique $i_1 = i_2$, d'où $s \leq x \vee y \leq i_1$, une contradiction.

(6) \implies (1) : on a montré dans le chapitre 3 (voir le corollaire 3.12) que, pour tout treillis T , l'application $x \mapsto S_x$ est un inf-codage (définition 3.3) de T dans le treillis $\underline{2}^{S_T}$. (6) implique que cette application est un morphisme (de treillis) injectif et donc que T est isomorphe à un sous-treillis du treillis booléen $\underline{2}^{S_T}$. Puisqu'il a déjà été noté à la section 2.3 que $\underline{2}^{S_T}$ est distributif et que tout sous-treillis d'un treillis distributif est distributif, on obtient la distributivité de T . \square

Les propriétés (1) et (2) du théorème ci-dessus sont duales tandis que la propriété (3) est ipsoduale. Puisqu'elles sont caractéristiques des treillis distributifs, il s'ensuit que le dual d'un treillis distributif est distributif, ce que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Corollaire 5.2 *La classe des treillis distributifs est ipsoduale.*

Les propriétés (1) et (2) nous ont déjà servi au chapitre 1 comme définitions d'un treillis distributif. La troisième identité établit que l'élément obtenu en prenant le supremum des infimums deux à deux de trois éléments x, y, z d'un treillis distributif est le même que celui obtenu en prenant l'infimum de leurs supremums deux à deux; cet élément est appelé la *médiane* de ces trois éléments. Plus généralement, la médiane m d'un k -uplet (x_1, x_2, \dots, x_k) d'éléments d'un treillis T , avec k impair, est définie par $m = \bigvee_{I \subseteq \{1, \dots, k\}, 2|I| > k} (\bigwedge_{i \in I} x_i)$. Dans un treillis distributif, on peut montrer que la médiane d'un k -uplet (x_1, x_2, \dots, x_k) est aussi égale à $\bigwedge_{I \subseteq \{1, \dots, k\}, 2|I| > k} (\bigvee_{i \in I} x_i)$. A la section 7.3 du chapitre 7 on verra que l'opération qui associe à un k -uplet sa médiane correspond à une formalisation latticielle de la règle majoritaire d'agrégation et que cette opération peut être également définie de façon « métrique », la médiane étant alors l'élément à distance minimum du k -uplet.

Un élément x d'un treillis T est dit *sup-premier* s'il est tel que $s \in S_T, X \subseteq T$ et $s \leq \bigvee X$ impliquent $s \leq x$ pour au moins un élément $x \in X$. Le lecteur s'assurera qu'un élément sup-premier est sup-irréductible. La caractérisation (4) s'écrit alors : *un treillis est distributif si et seulement si tous ses éléments sup-irréductibles sont sup-premiers.*

Il est suggestif de donner une autre forme à la caractérisation (5). Appelons *clivage* d'un treillis une bipartition de ses éléments en une section finissante et une section commençante. La figure 5.4(a) montre un exemple d'un tel clivage : le treillis distributif T est bipartitionné en la section finissante des éléments supérieurs ou égaux au sup-irréductible s et la section commençante des éléments inférieurs ou égaux à l'inf-irréductible i . On remarque qu'un treillis peut fort bien n'admettre aucun clivage (chercher des exemples). Par contre, la propriété (5) ci-dessus s'interprète en disant que dans le cas d'un treillis distributif T , à tout sup-irréductible s correspond le clivage $[s] + [i]$ où i est l'unique inf-irréductible tel que $s \uparrow i$. Le fait que cette propriété est caractéristique des treillis distributifs peut donc s'énoncer : *un treillis T est distributif si et seulement si, pour tout sup-irréductible s de T , l'ensemble des éléments supérieurs ou égaux à s et l'ensemble complémentaire des éléments non supérieurs ou égaux à s forment un clivage de T .*

On notera aussi que si $[s] + [i]$ est un clivage de T , on a en fait $s \uparrow i$ (en effet $i^+ \not\leq i$ implique $i^+ \geq s$ et donc $s \vee i = i^+$; et de même, $s \not\leq s^-$ implique $s \wedge i = s^-$).

Remarque 5.3 Puisque la classe des treillis distributifs est ipsoduale (corollaire 5.2) on peut utiliser le principe de dualité qui implique notamment qu'à tout résultat sur les éléments sup-irréductibles d'un treillis distributif correspond un résultat dual sur les inf-irréductibles. En particulier, on peut énoncer d'autres propriétés caractéristiques des treillis distributifs obtenues en prenant les duales des propriétés (4) à (6). Elles s'énoncent :

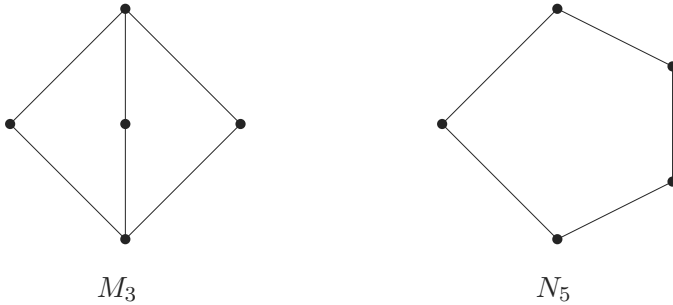


FIG. 5.1. Les treillis M_3 et N_5 .

7. pour tous $i \in I_T$, $X \subseteq T$, $i \geq \bigwedge X$ implique $i \geq x$ pour au moins un élément $x \in X$ (autrement dit, tout inf-irréductible de T est inf-premier),
8. pour tout $i \in I_T$, il existe un unique $s \in S_T$ tel que $s \downarrow i$,
9. pour tous $x, y \in T$, on a $I^x \cup I^y = I^{x \wedge y}$.

Il existe bien d'autres caractérisations des treillis distributifs que celles données au théorème 5.1 et à la remarque précédente. On en trouvera certaines à la section 5.6 des compléments de ce chapitre. Citons simplement ici deux caractérisations très classiques, celle par sous-treillis exclus et celle par « simplification » (qui se déduit facilement de la précédente, comme le lecteur pourra s'en assurer) :

10. un treillis est distributif si et seulement si il ne contient pas de sous-treillis de type M_3 ou N_5 .
11. un treillis est distributif si et seulement si, pour tous x, y, z , $(x \wedge y = x \wedge z$ et $x \vee y = x \vee z)$ impliquent $y = z$.

Exemple 5.4 Un certain nombre d'exemples de treillis distributifs ont été déjà donnés au chapitre 2. Ainsi, les ensembles totalement ordonnés (avec les opérations *max* et *min* comme supremum et infimum) sont des treillis distributifs. Il en est de même des produits directs d'ensembles totalement ordonnés puisque, plus généralement, le produit direct de treillis distributifs est un treillis distributif (proposition 2.19). Le treillis booléen B_n est un cas particulier d'un tel produit, puisqu'il est isomorphe au produit direct $\underline{2}^n$ de n ensembles totalement ordonnés $\{0 < 1\}$. A la proposition 2.20 on a aussi montré qu'un sous-treillis d'un treillis distributif est un treillis distributif, ce qui permet de donner de nombreux autres exemples. En particulier, on a appelé *famille distributive de parties* un ensemble \mathcal{H} de parties d'un ensemble X qui est un sous-treillis de $\underline{2}^X$ (i.e. tel que $A, B \in \mathcal{H}$ entraîne $A \cup B \in \mathcal{H}$ et $A \cap B \in \mathcal{H}$) et mentionné le cas particulier des topologies. Celles-ci devant jouer un rôle important à la quatrième section de ce chapitre, nous en (re)donnons ci-dessous la définition.

Définition 5.5 Une topologie sur un ensemble X est une famille \mathcal{T} de parties de X vérifiant les conditions suivantes :

1. $A, B \in \mathcal{T}$ entraîne $A \cup B \in \mathcal{T}$ et $A \cap B \in \mathcal{T}$,
2. $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$.

Autrement dit, une topologie sur X est une famille distributive de parties de X contenant la partie vide et l'ensemble X . Un exemple de topologie sur X est l'ensemble des parties commençantes (respectivement, finissantes) d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$, puisqu'il a été signalé à la section 1.4.2 que l'ensemble des parties commençantes (respectivement, finissantes) de P est stable pour l'union et l'intersection et contient la partie vide et X . Des classes particulières de topologies seront considérées à la définition 5.26.

5.2 Treillis distributif associé à un ensemble ordonné

À la section précédente on a donné comme exemple de treillis distributif le treillis des parties commençantes d'un ensemble ordonné. Le théorème suivant développe cet exemple en précisant notamment la relation de couverture et les éléments irréductibles de ce treillis. Rappelons (cf. la définition 1.26) qu'un sous-treillis T' d'un treillis T est dit *couvrant* si sa relation de couverture \prec' est la restriction de la relation de couverture \prec de T , i.e. si, pour tous $x, y \in T'$, on a $x \prec' y$ si et seulement si $x \prec y$.

Théorème 5.6 Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné de cardinal n .

1. L'ensemble $\mathcal{C}(P)$ des parties commençantes de P est un treillis distributif de longueur n , sous-treillis couvrant de $\underline{2}^X$; pour $C, C' \in \mathcal{C}(P)$, on a $C' \prec C$ si et seulement si $C' = C \setminus x$, avec x un élément maximal de C .
2. Les éléments sup-irréductibles (respectivement, inf-irréductibles) de $\mathcal{C}(P)$ sont les n sections commençantes $[x]$ (respectivement, les complémentaires $i(x)$ des n sections finissantes $[x]$). En particulier, X (respectivement, \emptyset) est un sup-irréductible (respectivement, un inf-irréductible) de $\mathcal{C}(P)$ si et seulement si P admet un plus grand élément (respectivement, un plus petit élément).
3. L'application $[x] \mapsto i(x) = X \setminus [x]$ est un isomorphisme entre l'ensemble ordonné des sup-irréductibles et celui des inf-irréductibles de $\mathcal{C}(P)$.
4. Dans $\mathcal{C}(P)$, un sup-irréductible $[x]$ est inférieur ou égal à un inf-irréductible $X \setminus [y]$ si et seulement si x est strictement inférieur ou incomparable à y dans P .

Preuve. (1) On a déjà noté à la section précédente que $\mathcal{C}(P)$ est une topologie, sous-treillis de $\underline{2}^X$ contenant les parties \emptyset et X , donc un treillis distributif. Si x est un élément maximal (pour l'ordre \leq) d'une partie commençante C de P , il est immédiat de constater que $C \setminus x$ est encore une partie commençante,

forcément couverte par C dans $\mathcal{C}(P)$. Inversement, soient $C, C' \in \mathcal{C}(P)$ avec $C' \prec C$. Il existe au moins un élément $y \in C \setminus C'$ et un élément x maximal dans C tel que $y \leq x$; on ne peut avoir $x \in C'$, car alors C' ne serait pas commençante. On a donc $C' \subseteq C \setminus x \prec C$, c'est-à-dire $C' = C \setminus x$. On a donc montré que la relation de couverture de $\underline{2}^X$ est conservée dans $\mathcal{C}(P)$, ce qui implique en particulier que les chaînes maximales de ces deux treillis ont même longueur et donc que $\mathcal{C}(P)$ est de longueur n .

(2) Comme une section commençante $[x]$ n'a qu'un élément maximal pour l'ordre de P , elle ne couvre dans $\mathcal{C}(P)$ que la partie commençante $[x[$, ce qui montre que $[x]$ est un sup-irréductible de $\mathcal{C}(P)$. Il est clair que pour toute partie commençante C , on a $C = \bigcup_{x \in C} [x]$. Donc, l'ensemble des sections commençantes est une partie sup-génératrice de $\mathcal{C}(P)$ et est bien l'ensemble de tous ses sup-irréductibles. En particulier, X est un sup-irréductible de $\mathcal{C}(P)$ si et seulement si il existe $x \in P$ tel que $X = [x]$ et donc si et seulement si P admet un plus grand élément. Posons $i(x) = \{y \in X : x \not\leq y\} = X \setminus [x]$, partie commençante complémentaire de la section finissante $[x]$, et supposons que $i(x) = C_1 \cap C_2$ soit l'intersection de deux parties commençantes incomparables C_1 et C_2 ; $i(x) \subset C_1$ implique qu'il existe $z \in C_1$ tel que $x \leq z$ et donc $x \in C_1$; de même, $i(x) \subset C_2$ implique $x \in C_2$. On a donc finalement $x \in i(x)$, ce qui est impossible; $i(x)$ est donc un inf-irréductible de $\mathcal{C}(P)$. Vérifions de plus qu'on a $C = \bigcap \{i(x) : x \notin C\}$ pour toute partie commençante C ; en effet, $x \notin C$ implique $C \subseteq i(x)$ (pourquoi?) et donc $C \subseteq \bigcap \{i(x), x \notin C\}$; d'autre part, $y \in i(x)$ pour tout $x \notin C$ implique $y \not\leq x$ pour tout $x \notin C$, donc $y \in C$. Les $i(x)$ sont donc bien les inf-irréductibles de $\mathcal{C}(P)$. En particulier, \emptyset est un inf-irréductible de $\mathcal{C}(P)$ si et seulement si il existe $x \in P$ tel que $\emptyset = X \setminus [x]$ et donc si et seulement si P admet un plus petit élément.

(3) On vérifie immédiatement que l'application $[x] \mapsto i(x) = X \setminus [x]$ de l'ensemble $S_{\mathcal{C}(P)}$ dans l'ensemble $I_{\mathcal{C}(P)}$ est bijective. D'autre part, on a $[x] \subseteq [y]$ si et seulement si $x \leq y$, si et seulement si $[x] \supseteq [y]$, et si et seulement si $i(x) \subseteq i(y)$. Cette application est donc bien un isomorphisme.

(4) Ceci revient à montrer que $[x] \subseteq X \setminus [y]$ si et seulement si $x \not\leq y$, ce qui est clair. \square

L'ensemble ordonné P est évidemment isomorphe à l'ensemble ordonné (par inclusion) de ses sections commençantes $[x]$, lui-même isomorphe, d'après le théorème précédent, à l'ensemble ordonné des $i(x)$. On obtient donc :

Corollaire 5.7 *Tout ensemble ordonné P est isomorphe à l'ensemble ordonné des éléments sup-irréductibles (respectivement, inf-irréductibles) d'un treillis distributif.*

Nous examinons ci-dessous le comportement du treillis des parties commençantes d'un ensemble ordonné par rapport aux opérations de sommes cardinale et ordinale d'ensembles ordonnés. Rappelons que si P_1 admet un plus grand élément u_1 et P_2 un plus petit élément o_2 , $P_1 \oplus' P_2$ désigne l'en-

semble ordonné obtenu à partir de la somme ordinale $P_1 \oplus P_2$ en identifiant les éléments u_1 et o_2 (cf. la remarque 1.43 du chapitre 1).

Proposition 5.8 *Soient $P_1 = (X_1, \leq_1)$ et $P_2 = (X_2, \leq_2)$ deux ensembles ordonnés avec $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.*

1. $\mathcal{C}(P_1 + P_2)$ est isomorphe à $\mathcal{C}(P_1) \times \mathcal{C}(P_2)$,
2. $\mathcal{C}(P_1 \oplus P_2)$ est isomorphe à $\mathcal{C}(P_1) \oplus' \mathcal{C}(P_2)$.

Preuve. (1) Considérons l'application qui, à toute partie commençante C de $P_1 + P_2$, associe le couple (C_1, C_2) où $C_1 = C \cap X_1$ et $C_2 = C \cap X_2$. Il est clair que C_1 (respectivement, C_2) est une partie commençante de P_1 (respectivement, de P_2), et qu'on a donc défini ainsi une application de $\mathcal{C}(P_1 + P_2)$ dans $\mathcal{C}(P_1) \times \mathcal{C}(P_2)$. Cette application est évidemment injective et elle est surjective puisque, si (C_1, C_2) est tel que C_1 (respectivement, C_2) est une partie commençante de P_1 (respectivement, de P_2), $C = C_1 + C_2$ est une partie commençante de $P_1 + P_2$ (en effet, si $x \in C$, on a, par exemple, $x \in C_1$, et $y \leq x$ dans $P_1 + P_2$ implique $y \in C_1$ et donc $y \in C$). Enfin, on a $C = C_1 + C_2 \subseteq C' = C'_1 + C'_2$ si et seulement si $C_1 \subseteq C'_1$ et $C_2 \subseteq C'_2$ ce qui achève de montrer que cette application est un isomorphisme.

(2) Soit C une partie commençante de $P_1 \oplus P_2$. Elle est soit de la forme $C = C_1$ avec C_1 une partie commençante de P_1 , soit de la forme $C = X_1 + C'_2$ avec C_2 une partie commençante non vide de P_2 . On considère alors l'application f qui, à une telle partie commençante, associe C_1 dans le premier cas et C_2 dans le second. Cette application est bijective entre $\mathcal{C}(P_1 \oplus P_2)$ et $\mathcal{C}(P_1) \oplus' \mathcal{C}(P_2)$ (car dans $\mathcal{C}(P_1) \oplus' \mathcal{C}(P_2)$, le plus grand élément X_1 de $\mathcal{C}(P_1)$ est identifié à \emptyset , le plus petit élément de $\mathcal{C}(P_2)$). En examinant les quatre cas possibles, on vérifie aisément que $C \subseteq C'$ dans $\mathcal{C}(P_1 \oplus P_2)$ si et seulement si $f(C) \leq f(C')$ dans $\mathcal{C}(P_1) \oplus' \mathcal{C}(P_2)$ (par exemple, si $C = C_1$ et $C' = X_1 + C_2$, il est évident que $C \subseteq C'$ si et seulement si $f(C) = C_1 \leq f(C') = C_2$). On a donc montré que f est un isomorphisme entre $\mathcal{C}(P_1 \oplus P_2)$ et $\mathcal{C}(P_1) \oplus' \mathcal{C}(P_2)$. \square

Plusieurs autres treillis distributifs sont naturellement associés à un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$. D'abord, au lieu de considérer le treillis $\mathcal{C}(P)$ des parties commençantes de P , on peut considérer le treillis $\mathcal{F}(P)$ de ses parties finissantes. Mais il est immédiat de vérifier que l'application de complémentation $C \mapsto X \setminus C$ est un anti-isomorphisme entre $\mathcal{C}(P)$ et $\mathcal{F}(P)$, qui sont donc deux treillis duaux. Il est aussi immédiat de vérifier que les applications de fermeture commençante ($Y \mapsto [Y]$) et de fermeture finissante ($Y \mapsto [Y]$) définies sur $\underline{2}^X$ (cf. l'exemple 3.30) induisent deux bijections entre, d'une part, l'ensemble $\mathcal{A}(P)$ des antichaînes de P et, d'autre part, $\mathcal{C}(P)$ ou $\mathcal{F}(P)$. L'ensemble $\mathcal{A}(P)$ peut donc être muni des deux structures duales de treillis distributif respectivement isomorphes à $\mathcal{C}(P)$ et $\mathcal{F}(P)$. Par exemple, posons pour A, B antichaînes de P ,

$$A \leq_{\mathcal{A}} B \iff [A] \subseteq [B]$$

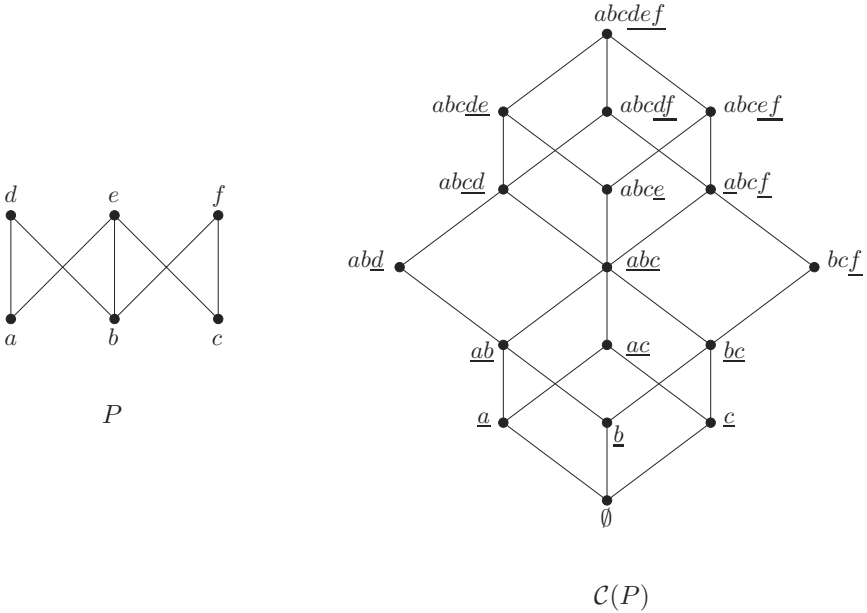


FIG. 5.2. Un ensemble ordonné P et le treillis $\mathcal{C}(P)$ de ses parties commençantes.

(i.e. pour tout x de A , il existe y dans B avec $x \leq y$).

Alors, l'ensemble ordonné $(\mathcal{A}(P), \leq_{\mathcal{A}})$ est un treillis distributif isomorphe à $\mathcal{C}(P)$, où l'on a $A \vee B = \text{Max}(A \cup B)$ et $A \wedge B = \text{Max}([A] \cap [B])$. On peut montrer que l'ensemble des antichaînes de cardinal maximum de P est un sous-treillis du treillis des antichaînes de P (exercice 4.3).

La figure 5.2 montre un ensemble ordonné P et le treillis de ses parties commençantes. Pour chaque partie commençante C on a souligné ses éléments maximaux, i.e. l'antichaîne correspondant à C dans la bijection entre $\mathcal{C}(P)$ et $\mathcal{A}(P)$. En ne considérant que les parties soulignées, le second ensemble ordonné de la figure 5.2 représente donc $\mathcal{A}(P)$ muni de la structure de treillis isomorphe à $\mathcal{C}(P)$. On obtient le treillis dual $\mathcal{F}(P)$ des parties finissantes en prenant les complémentaires des parties commençantes. Il est immédiat de remarquer que ce treillis est aussi celui des parties commençantes de l'ensemble ordonné dual de P , c'est-à-dire qu'on a $\mathcal{F}(P) = \mathcal{C}(P^d)$.

5.3 Représentations d'un treillis distributif

Nous énonçons maintenant le théorème fondamental de représentation des treillis distributifs dû à Birkhoff. Rappelons que pour tout élément x d'un treillis T , $S_x = \{s \in S_T : s \leq x\}$.

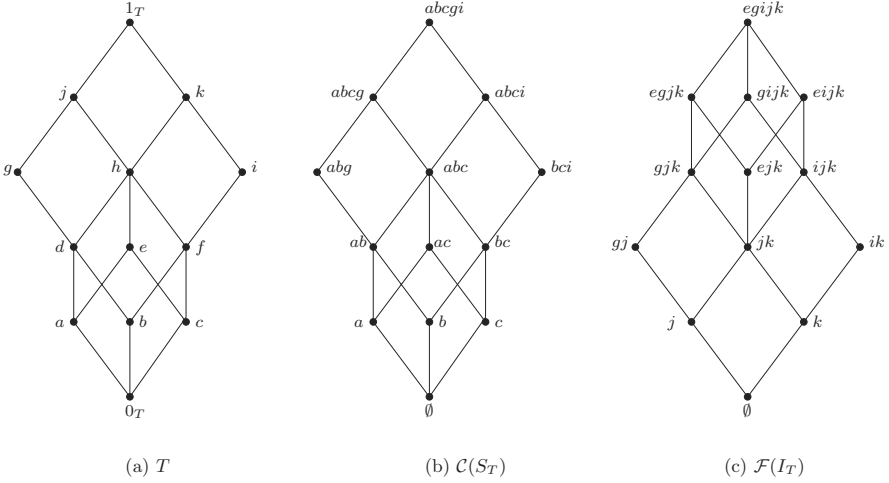


FIG. 5.3. (a) Un treillis T , (b) le treillis $\mathcal{C}(S_T)$ et (c) le treillis $\mathcal{F}(I_T)$.

Théorème 5.9 (Birkhoff [48] 1933) *Soit T un treillis distributif. L'application $x \mapsto c(x) = S_x$ est un isomorphisme entre T et le treillis $\mathcal{C}(S_T)$ des parties commençantes de l'ensemble ordonné S_T des éléments sup-irréductibles de T . L'isomorphisme inverse entre $\mathcal{C}(S_T)$ et T est l'application $C \mapsto \bigvee C$.*

Preuve. Considérons l'application c définie dans l'énoncé. Il est d'abord clair que S_x est une partie commençante de S_T et on sait (proposition 3.11) que $x = \bigvee S_x$. De cette égalité, on déduit immédiatement que c est injective et que $x \leq y$ si et seulement si $S_x \subseteq S_y$. Pour une partie commençante C de S_T , posons $x = \bigvee C$. On a donc $C \subseteq S_x$. Soit s un sup-irréductible de T tel que $s \in S_x$. Puisque $s \leq x = \bigvee C$, il résulte de la caractérisation (4) des treillis distributifs du théorème 5.1 que s est inférieur ou égal à un élément de la partie commençante C . Donc $s \in C$, $C = S_x$ et c est surjective, donc un isomorphisme. Finalement, les deux égalités $x = \bigvee S_x$ et $C = c(\bigvee C)$ ci-dessus montrent la dernière assertion. \square

Remarque 5.10 On a vu au corollaire 3.12 que l'application c qui, à tout x de T , associe l'ensemble S_x des sup-irréductibles inférieurs ou égaux à x est un inf-morphisme. Le théorème précédent montre que, si T est un treillis distributif, elle est aussi un sup-morphisme, i.e. que pour tous $x, y \in T$, on a $S_{x \vee y} = S_x \cup S_y$. Cette égalité résulte aussi immédiatement de la caractérisation (4) des treillis distributifs du théorème 5.1, puisque $s \leq x \vee y$ implique $s \leq x$ ou $s \leq y$. On a déjà remarqué que le treillis $\mathcal{C}(P)$ des parties commençantes d'un ensemble ordonné P est dual du treillis $\mathcal{F}(P)$ de ses parties finissantes (par l'application de complémentation). On déduit alors du théorème 5.9 que le treillis distributif T est dual du treillis $\mathcal{F}(S_T)$ des parties finissantes de l'ensemble ordonné de ses éléments sup-irréductibles (cet anti-isomorphisme

est donné par $x \mapsto S_T \setminus S_x = \{s \in S_T : s \not\leq x\}$. La figure 5.3 donne un exemple de la représentation d'un treillis distributif T par $\mathcal{C}(S_T)$ et du treillis dual de T par $\mathcal{F}(I_T)$ (cf. la remarque 5.12).

Corollaire 5.11 *L'ensemble ordonné S_T des éléments sup-irréductibles d'un treillis distributif T est isomorphe à l'ensemble ordonné I_T de ses éléments inf-irréductibles. Si on note ι cet isomorphisme, on a, pour tout $s \in S_T$:*

1. $\iota(s) = \bigvee\{t \in S_T : s \not\leq t\} = \bigvee\{x \in T : s \not\leq x\}$,
2. $T = [s] + (\iota(s))$ avec $s \uparrow \iota(s)$ (i.e. $s \vee \iota(s) = \iota(s)^+$ et $s \wedge \iota(s) = s^-$).

Preuve. (1) De l'isomorphisme entre T et $\mathcal{C}(S_T)$ et de son inverse (théorème 5.9), on déduit l'isomorphisme $s \mapsto [s]$ entre S_T et l'ensemble $\{[s], s \in S_T\}$ des sup-irréductibles de $\mathcal{C}(S_T)$ ainsi que l'isomorphisme $S_T \setminus [s] \mapsto \bigvee(S_T \setminus [s])$ entre l'ensemble $\{S_T \setminus [s], s \in S_T\}$ des inf-irréductibles de $\mathcal{C}(S_T)$ et l'ensemble I_T . D'autre part, on a montré au théorème 5.6 que l'ensemble des sup-irréductibles de $\mathcal{C}(S_T)$ est isomorphe à l'ensemble de ses inf-irréductibles, par l'application $[s] \mapsto i(s) = S_T \setminus [s]$. On a donc S_T isomorphe à I_T par l'isomorphisme ι composition des trois isomorphismes précédents, ce qui donne l'expression $\iota(s) = \bigvee\{t \in S_T : s \not\leq t\}$. Posons $z = \bigvee\{x \in T : s \not\leq x\} \geq \iota(s)$. Soit $x = s_1 \vee \dots \vee s_k \vee \dots \vee s_p$ (où les s_k sont des sup-irréductibles) tel que $s \not\leq x$. On a, pour tout k , $s \not\leq s_k$, d'où $s_k \leq \iota(s)$ et donc $x = s_1 \vee \dots \vee s_k \vee \dots \vee s_p \leq \iota(s)$. Il s'ensuit $z \leq \iota(s)$, d'où $z = \iota(s)$, ce qui achève de prouver (1).

Pour montrer (2), considérons $s \in S(T)$ et un élément $x \in T \setminus [s]$, i.e. tel que $s \not\leq x$. D'après le raisonnement fait ci-dessus, on a $x \leq \iota(s)$, d'où $T \setminus [s] \subseteq (\iota(s))$. Inversement, d'après le point (4) du théorème 5.1, $s \not\leq \iota(s)$. Donc $x \leq \iota(s)$ implique $s \not\leq x$, soit $(\iota(s)) \subseteq T \setminus [s]$, d'où finalement $T = [s] + (\iota(s))$. On a donc un clivage de T ce qui, comme il a déjà été remarqué, implique $s \uparrow \iota(s)$. □

L'isomorphisme entre S_T et I_T donné dans ce corollaire associe donc à un sup-irréductible s de T le plus grand inf-irréductible non supérieur ou égal à s et, dualement, il associe à un inf-irréductible i de T le plus petit sup-irréductible non inférieur ou égal à i . Il est explicité à la figure 5.4(b) pour le treillis distributif T donné à la figure 5.4(a).

Remarque 5.12 L'isomorphisme entre S_T et I_T a, entre autres, la conséquence suivante : *un treillis distributif est isomorphe au treillis $\mathcal{C}(I_T)$ des parties commençantes de I_T et anti-isomorphe au treillis $\mathcal{F}(I_T)$ des parties finissantes de I_T .*

De façon précise, l'isomorphisme est donné par $x \mapsto (I_T \setminus I^x) = \{i \in I_T : x \not\leq i\}$ et l'anti-isomorphisme par $x \mapsto I^x = \{i \in I_T : x \leq i\}$. La figure 5.3(c) montre le treillis $\mathcal{F}(I_T)$ dual du treillis distributif T de la figure 5.3(a).

En utilisant le théorème 5.9 de représentation d'un treillis distributif, les résultats sur le treillis des parties commençantes d'un ensemble ordonné de

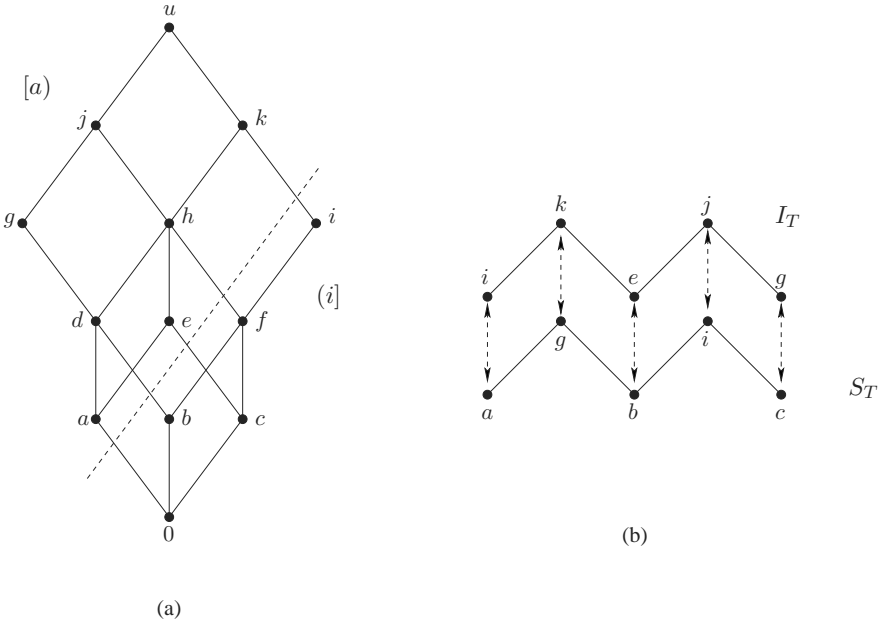


FIG. 5.4. (a) $T = [a] + [i]$ et (b) l'isomorphisme entre S_T et I_T .

la section 5.2 et le principe de dualité pour les treillis distributifs, on peut facilement démontrer d'autres propriétés des treillis distributifs énoncées dans la proposition suivante (les démonstrations sont laissées au lecteur).

Proposition 5.13 *Soit T un treillis distributif.*

1. T est rangé ; le rang de l'élément x est le nombre de sup-irréductibles de T inférieurs ou égaux à x et est aussi le nombre d'inf-irréductibles de T non supérieurs ou égaux à x : $r(x) = |S_x| = |I_T \setminus I^x|$. En particulier, $r(T) = |S_T| = |I_T|$,
2. pour $x, y \in T$, $x < y$ si et seulement si $S_x = S_y \setminus t$ pour un élément t maximal de S_y , ou si et seulement si $I^x = \{i \in I_T : x \leq i\} = I^y + z$ pour un élément z minimal de I^x ,
3. le nombre $|T^-x|$ d'éléments couverts par x dans T est égal au nombre d'éléments maximaux de S_x ,
4. le nombre $|xT^+|$ d'éléments couvrant x dans T est égal au nombre d'éléments minimaux de I^x ,
5. $\max\{|T^-x|, x \in T\} = \max\{|xT^+|, x \in T\} = \alpha(S_T) = \alpha(I_T)$,
6. $|\{x \in T : |T^-x| = k\}| = |\{x \in T : |xT^+| = k\}| = |\{\text{antichaînes à } k \text{ éléments de } S_T\}| = |\{\text{antichaînes à } k \text{ éléments de } I_T\}|$.

Donnons encore une autre propriété, fort utile, des treillis distributifs. Dans un treillis quelconque, un élément peut admettre plusieurs représentations

minimales comme supremum d'éléments sup-irréductibles (ou comme infimum d'éléments inf-irréductibles). Par exemple, dans le treillis M_3 représenté à la figure 5.1, le plus grand élément admet trois représentations minimales par des sup-irréductibles. Ce n'est pas le cas dans un treillis distributif, comme le précise la proposition suivante.

Proposition 5.14 *Tout élément d'un treillis distributif admet une unique représentation minimale comme supremum d'éléments sup-irréductibles (et une unique représentation minimale comme infimum d'éléments inf-irréductibles).*

Preuve. Soit x un élément d'un treillis distributif admettant deux représentations minimales en sup-irréductibles : $x = s_1 \vee \dots \vee s_k \vee \dots \vee s_p = s'_1 \vee \dots \vee s'_j \vee \dots \vee s'_q$. D'après la caractérisation (4) du théorème 5.1, il existe j et k tels que $s_1 \leq s'_j \leq s_k$. Puisque $\{s_1, \dots, s_p\}$ est une antichaîne, on obtient $s_1 = s_k = s'_j$. En itérant ce résultat, on en déduit l'égalité des deux représentations. Par dualité, on obtient le résultat sur l'unicité de la représentation minimale en inf-irréductibles. \square

Remarque 5.15 Plusieurs des propriétés établies aux propositions 5.13 et 5.14 permettent de caractériser les treillis distributifs. Ainsi un treillis T est distributif si et seulement si T est rangé et vérifie $r(T) = |S_T| = |I_T|$, ou si et seulement si tout élément de T admet une unique représentation minimale comme supremum d'éléments sup-irréductibles.

Nous finissons cette section par l'étude des « parties génératrices » d'un treillis distributif, étude dont les résultats seront utiles pour le problème de calcul de la dimension booléenne d'un ensemble ordonné présenté au chapitre 6 (cf. le corollaire 6.4).

Considérons d'abord la famille des sous-treillis d'un treillis T . Puisqu'elle contient T et qu'elle est stable par intersection, c'est une famille de Moore (définition 3.27). On peut donc lui associer une fermeture ϕ sur $\underline{2}^T$ qui, à toute partie A de T , associe $\phi(A)$, le plus petit sous-treillis de T contenant A ($\phi(A)$ est l'intersection de tous les sous-treillis contenant A). On peut alors poser les définitions suivantes :

Définition 5.16 *Une partie G d'un treillis T est dite génératrice (de T) si $\phi(G) = T$, c'est-à-dire si le plus petit sous-treillis de T qui contient G est T . On note $g(T)$ le cardinal minimum d'une partie génératrice d'un treillis T .*

Rappelons que l'infimum (respectivement, le supremum) de la partie vide est le maximum (respectivement, le minimum) du treillis T (cf. l'exemple 3.2 du chapitre 3). Toute partie génératrice de T contient donc une partie génératrice obtenue en lui ôtant (s'ils y étaient) le minimum et le maximum de T . D'autre part, toute partie génératrice de T contient nécessairement ses éléments doublement irréductibles. On obtient donc $g(T) \geq |\{\text{éléments doublement irréductibles de } T\}|$. On remarque que cette borne inférieure de $g(T)$

est atteinte pour tout treillis distributif engendré par ses éléments doublement irréductibles et, en particulier, par une chaîne $(g(\underline{n}) = n - 2)$.

Nous utilisons les notions et notations suivantes :

Définition 5.17 Une partie G d'un ensemble E est appelée une transversale d'une famille de parties $A_1, \dots, A_k, \dots, A_p$ de E si, pour tout $k \leq p$, $A_k \cap G \neq \emptyset$.

Définition 5.18 Soit T un treillis.

- On note $IS(T)$ l'ensemble des sup-irréductibles de T qui sont des inf-irréductibles de l'ensemble ordonné S_T .
- On note $SI(T)$ l'ensemble des inf-irréductibles de T qui sont des sup-irréductibles de l'ensemble ordonné I_T .

Le lecteur montrera qu'un élément de S_T est infimum d'autres éléments dans l'ensemble ordonné S_T si et seulement si il est infimum de ces éléments dans le treillis T (seule l'une de ces implications n'est pas évidente). Donc, $s \in IS(T)$ si et seulement si $(s \in S_T \text{ et } s < \bigwedge \{s' \in S_T : s < s'\})$, avec \bigwedge l'infimum dans le treillis T .

Par exemple, dans le cas du treillis de la figure 5.3(a), S_T et I_T sont représentés à la figure 5.4(b) et on a $IS(T) = \{a, g, i, c\}$ et $SI(T) = \{i, e, g\}$.

La preuve du lemme suivant s'obtient par récurrence sur le nombre d'occurrences d'éléments de G intervenant dans l'expression de x , en utilisant la distributivité de T .

Lemme 5.19 Si G est une partie génératrice du treillis distributif T , tout élément x de T s'écrit sous la forme $x = \bigvee_{H \in \mathcal{H}} (\bigwedge H)$, où \mathcal{H} est une famille de parties de G .

Théorème 5.20 Une partie G d'un treillis distributif T est génératrice si et seulement si G est une transversale de la famille des intervalles $\{[s, i], s \in IS(T), i \in SI(T)\}$.

Preuve. Considérons d'abord une partie génératrice G de T et un intervalle $[s, i]$ de T avec $s \in S_T$ et $i \in I_T$. Puisque s est un sup-irréductible engendré par G , on déduit du lemme 5.19 que s est infimum d'éléments de G . On a donc $s = \bigwedge_{1 \leq k \leq p} g_k \leq i$. Puisque i est inf-irréductible, il existe k tel que $s \leq g_k \leq i$ (propriété (7) de la remarque 5.3). Donc G est transversale de la famille des intervalles $\{[s, i], s \in S_T, i \in I_T\}$ et, en particulier, de la famille des intervalles $\{[s, i], s \in IS(T), i \in SI(T)\}$.

Réciproquement, soit G une transversale de cette dernière famille et soit $s \in IS(T)$. Considérons une représentation de s comme infimum d'inf-irréductibles de T . En remplaçant chaque inf-irréductible n'appartenant pas à $SI(T)$ par un supremum d'inf-irréductibles appartenant à $SI(T)$ et en utilisant la distributivité, on exprime s comme supremum de divers infimum de parties de $SI(T)$. Puisque s est sup-irréductible, on en déduit que

$s = \bigwedge_{1 \leq k \leq p} \{i_k, i_k \in SI(T)\}$. Chaque intervalle $[s, i_k]$ contenant un élément g_k de G , on a $s = \bigwedge_{1 \leq k \leq p} g_k$. Ainsi G engendre $IS(T)$, donc tous les sup-irréductibles de T et, finalement, T lui-même. \square

Le corollaire suivant provient de ce que, pour obtenir une transversale minimale d'une famille de parties, il suffit de considérer les parties minimales de cette famille.

Corollaire 5.21 *Soit T un treillis distributif. On a $g(T) = \min\{|G|, G \text{ transversale de la famille des intervalles } [s, i] \text{ tels que } s \in IS(T), i \in SI(T) \text{ et } [s, i] \text{ minimal pour l'inclusion}\}$.*

Exemple 5.22 Nous illustrons ce résultat en calculant le nombre minimum de générateurs du treillis $T = \mathcal{C}(P)$ de la figure 5.2. On détermine d'abord $IS(T) = \{a, c, abd, bcf, abce\}$ et $SI(T) = \{ac, abd, bcf, abcde, abcef\}$. On doit ensuite déterminer tous les intervalles minimaux de type $[s, i]$, pour $s \in IS(T)$ et $i \in SI(T)$. On en trouve six, qui sont $[abd, abd]$, $[bcf, bcf]$, $[a, ac]$, $[c, ac]$, $[abce, abcde]$ et $[abce, abcef]$. Les deux premiers correspondent aux deux éléments doublement irréductibles de T et doivent donc être contenus dans toute transversale de la famille des intervalles minimaux. On en déduit que T a quatre parties génératrices minimales :

$$\{ac, abd, bcf, abce\}, \{a, c, abd, bcf, abce\},$$

$$\{ac, abd, bcf, abcef, abcde\}, \{a, c, abd, bcf, abcef, abcde\},$$

et que $g(T) = 4$.

Cet exemple ne doit pas inciter le lecteur à croire que la détermination de $g(T)$ soit facile. En fait, le Corollaire 5.21 montre qu'elle se ramène au problème classique, mais très difficile, de recherche d'une transversale minimum, lui-même équivalent au problème du recouvrement minimum (cf. par exemple Berge [41], 1970, ou Gondran et Minoux [188], 1985). On peut toutefois déterminer facilement $g(T)$ dans certains cas particuliers (cf. la remarque 6.34 du chapitre 6).

5.4 Dualités entre préordres et topologies et entre ensembles ordonnés et treillis distributifs

Dans cette section nous allons considérer plusieurs dualités dérivant d'une dualité fondamentale entre préordres et topologies définis sur le même ensemble X . On obtient cette dualité à partir d'une correspondance de Galois (définition 3.37) entre relations binaires et familles de parties définies sur X .

Commençons par préciser les structures ordinales en jeu. Nous considérons les deux ensembles $P(X^2)$, ensemble de toutes les relations binaires sur X , et $P[P(X)]$, noté $P^2(X)$, ensemble de toutes les familles de parties de X . Ces deux ensembles sont ordonnés par inclusion : $R \subseteq R'$, i.e. xRy implique $xR'y$ (on dit alors que R est *contenue* dans R' ou que R' est *compatible avec* R), et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, i.e. $A \in \mathcal{F}$ implique $A \in \mathcal{F}'$.

Munis de ces ordres, $P(X^2)$ et $P^2(X)$ définissent deux treillis (booléens), notés respectivement $\underline{2}^{X^2}$ et $\underline{2}^{P(X)}$, et où les opérations de supremum et d'infimum sont les opérations d'union et d'intersection ensemblistes :

$$R \cup R', R \cap R', \mathcal{F} \cup \mathcal{F}', \mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$$

Nous allons maintenant définir une application t de $\underline{2}^{X^2}$ dans $\underline{2}^{P(X)}$ et une application p de $\underline{2}^{P(X)}$ dans $\underline{2}^{X^2}$ et montrer qu'elles forment une correspondance de Galois entre ces deux treillis. Pour cela nous avons besoin de quelques définitions.

Soit d'abord une relation binaire R sur X . On dit qu'une partie C de X est une *partie R -commençante*, ou simplement, une *partie commençante* si, pour tout $x \in X$ et tout $y \in C$, xRy implique $x \in C$.

On notera que cette notion généralise celle de partie commençante d'un ensemble ordonné. La partie vide et l'ensemble X sont des parties commençantes de n'importe quelle relation binaire sur X ; une partie commençante est dite *propre* si elle est différente de X ou de la partie vide. On note $\mathcal{C}(R)$ l'ensemble des parties commençantes de R et $\mathcal{C}^*(R)$ l'ensemble des parties commençantes propres de R . On remarque que la réunion et l'intersection de deux parties commençantes étant commençante, $\mathcal{C}(R)$ est une topologie sur X (définition 5.5).

Soit maintenant \mathcal{F} une famille de parties de X . On pose $\mathcal{F}(x) = \{A \in \mathcal{F} : x \in A\}$ et on définit une relation binaire $R(\mathcal{F})$ sur X en posant $xR(\mathcal{F})y$ si $\mathcal{F}(y) \subseteq \mathcal{F}(x)$, i.e. si, pour tout $A \in \mathcal{F}$, $y \in A$ implique $x \in A$, ce qui s'écrit encore $x \in \bigcap \mathcal{F}(y)$.

Il est clair que $R(\mathcal{F})$ est une relation de préordre sur X (exemple 1.20), et que deux éléments x et y sont dans une même classe de ce préordre si et seulement si $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y)$.

Nous avons ainsi associé à toute relation binaire R sur X la famille $\mathcal{C}(R)$ de ses parties commençantes, et à toute famille \mathcal{F} de parties de X la relation binaire $R(\mathcal{F})$ et donc défini les deux applications t et p suivantes :

$$\begin{array}{ll} t : \underline{2}^{X^2} \longrightarrow \underline{2}^{P(X)} & p : \underline{2}^{P(X)} \longrightarrow \underline{2}^{X^2} \\ R \longmapsto t(R) = \mathcal{C}(R) & \mathcal{F} \longmapsto p(\mathcal{F}) = R(\mathcal{F}) \end{array}$$

On peut alors énoncer le résultat fondamental :

Théorème 5.23 *Le couple d'applications (t, p) est une correspondance de Galois entre les deux treillis $\underline{2}^{X^2}$ et $\underline{2}^{P(X)}$. La relation $pt(R)$, notée $\pi(R)$,*

est le plus petit préordre contenant R . La famille $tp(\mathcal{F})$, notée $\tau(\mathcal{F})$, est la plus petite topologie contenant \mathcal{F} .

Preuve. Pour montrer que (t, p) est une correspondance de Galois, il suffit de montrer (définition 3.37) qu'on a les propriétés suivantes : (1) $R \subseteq R' \implies t(R) \supseteq t(R')$, (2) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}' \implies p(\mathcal{F}) \supseteq p(\mathcal{F}')$, (3) $R \subseteq pt(R)$ et (4) $\mathcal{F} \subseteq tp(\mathcal{F})$. Montrons les propriétés (1) et (3) concernant t et pt . Soit R contenue dans R' et C une partie commençante de R' . Puisque yRx implique $yR'x$, $x \in C$ et yRx impliquent $y \in C$, ce qui montre que C est une partie commençante de R , et donc que $t(R') (= C(R')) \subseteq t(R) (= C(R))$.

Soient x, y avec xRy ; puisque toute partie commençante de R contenant y contient x , on a $[t(R)](y) = \{C \in \mathcal{C}(R) : y \in C\} \subseteq [t(R)](x)$, i.e. $x[pt(R)]y$. On a donc bien $R \subseteq pt(R)$. On prouverait de même les propriétés (2) et (4) concernant p et tp , ce qui montre que (t, p) est bien une correspondance de Galois entre les deux treillis $\underline{2}^{X^2}$ et $\underline{2}^{P(X)}$. Il résulte alors des propriétés d'une telle correspondance entre deux treillis (théorème 3.38) que les applications $\pi = pt$ et $\tau = tp$ sont deux fermetures et que leurs images $\pi[\underline{2}^{X^2}] = p[\underline{2}^{P(X)}]$ et $\tau[\underline{2}^{P(X)}] = t[\underline{2}^{X^2}]$ sont deux treillis duaux. D'autre part, nous avons déjà noté que $\pi(R)$ est un préordre et que $\tau(\mathcal{F})$ est une topologie.

Il reste à montrer que $\pi(R)$ (respectivement, $\tau(\mathcal{F})$) est le plus petit préordre contenant R (respectivement, la plus petite topologie contenant \mathcal{F}).

Soit une relation R définie sur X . On doit montrer que pour tout préordre Q contenant R , le préordre $\pi(R)$ est contenu dans Q , i.e. que $y[\pi(R)]x$ implique yQx . Puisque $R \subseteq Q$, on a (par la propriété (1) d'une correspondance de Galois) $t(Q) = \mathcal{C}(Q) \subseteq \mathcal{C}(R) = t(R)$. Pour x quelconque, la partie $Qx = \{z \in X : zQx\}$ étant Q -commençante (du fait de la transitivité de Q) est donc aussi une partie R -commençante, et elle contient x (du fait de la réflexivité de Q). D'autre part, $y[\pi(R)]x = y[p(\mathcal{C}(R))]x$ signifie que toute partie R -commençante contenant x contient également y . Puisque Qx est une partie R -commençante contenant x , elle contient y et on a bien montré que $y[\pi(R)]x$ implique yQx .

Soit maintenant une famille \mathcal{F} de parties de X . On doit montrer que pour toute topologie \mathcal{T} contenant \mathcal{F} , $\tau(\mathcal{F})$ est contenue dans \mathcal{T} , i.e. que $T \in \tau(\mathcal{F})$ implique $T \in \mathcal{T}$. Soit donc $T \in \tau(\mathcal{F})$; puisque τ est isotone, on a $T \in \tau(\mathcal{T}) = tp(\mathcal{T})$ et T est donc une partie commençante de $p(\mathcal{T})$. Notons $C(x)$ la section commençante de $p(\mathcal{T})$ engendrée par x : $C(x) = \{y \in X : y[p(\mathcal{T})]x\} = \{y \in X : \mathcal{T}(x) \subseteq \mathcal{T}(y)\}$ (où $\mathcal{T}(x) = \{A \in \mathcal{T} : x \in A\}$). Or $\mathcal{T}(x) \subseteq \mathcal{T}(y)$ est équivalent à $y \in \bigcap \mathcal{T}(x)$. Donc $C(x) = \bigcap \mathcal{T}(x)$ et $C(x) \in \mathcal{T}$ puisque \mathcal{T} est \cap -stable. Mais d'autre part, on a évidemment $T = \bigcup \{C(x), x \in T\}$. Comme les $C(x)$ appartiennent à \mathcal{T} qui est \cup -stable, leur réunion T appartient aussi à \mathcal{T} . \square

Corollaire 5.24 *L'ensemble \mathcal{Q}_X des préordres et l'ensemble \mathcal{T}_X des topologies sur X sont deux treillis duaux. Soient R_1 et R_2 deux préordres sur X , \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 les topologies associées; leurs infimum et supremum sont donnés par les formules suivantes :*

$$R_1 \wedge R_2 = R_1 \cap R_2 \quad R_1 \vee R_2 = \pi(R_1 \cup R_2) = p(\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2)$$

et

$$\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \quad \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2 = \tau(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) = t(R_1 \cap R_2)$$

Preuve. Ce résultat provient immédiatement de la caractérisation des fermetures π et τ énoncée dans le théorème 5.23. En effet, si R est un préordre (respectivement, \mathcal{F} est une topologie), on a $\pi(R) = R$ (respectivement, $\tau(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$) et on a donc $\pi(P(X^2)) = \mathcal{Q}_X$ (respectivement, $\tau(P^2(X)) = \mathcal{T}_X$). Les formules donnant l'infimum dans les treillis \mathcal{Q}_X et \mathcal{T}_X proviennent de ce qu'ils sont des familles de Moore et celles donnant le supremum sont une application des formules générales pour les treillis duaux associés à une correspondance de Galois (formules qu'on trouve avant l'exemple 3.41). \square

Le théorème 5.23 caractérise les deux fermetures π et τ associées à la correspondance de Galois (t, p) . En particulier, π n'est autre que la fermeture réflexo-transitive d'une relation binaire, fermeture définie à l'exemple 1.20. Si \mathcal{T} est une topologie et que la famille \mathcal{F} vérifie $\tau(\mathcal{F}) = \mathcal{T}$ on dit que \mathcal{F} engendre ou génère \mathcal{T} , ou encore que \mathcal{F} est une partie génératrice de \mathcal{T} . Il en est de même pour la fermeture π .

Remarque 5.25 De manière duale à la définition d'une partie commençante d'une relation, on définit la notion de *partie finissante* pour une relation R définie sur X : une partie F de X est *finissante* si $x \in X, y \in F$ et yRx impliquent $x \in F$. On note $\mathcal{F}(R)$ l'ensemble des parties finissantes de R et $\mathcal{F}^*(R)$ l'ensemble de ses parties finissantes propres (i.e. différentes de X et de \emptyset). Puisque la réunion et l'intersection de deux parties finissantes est finissante, $\mathcal{F}(R)$ est une topologie sur X . On remarque que $\mathcal{F}(R) = \{X \setminus C, C \in \mathcal{C}(R)\}$.

Nous allons maintenant considérer des classes particulières de préordres et préciser les classes duales de topologies associées, ce qui nécessite quelques définitions.

Définition 5.26 Soit \mathcal{T} une topologie sur X .

1. \mathcal{T} est complétée si, pour tout $A \subseteq X$, on a $A \in \mathcal{T}$ si et seulement si $X \setminus A \in \mathcal{T}$.
2. \mathcal{T} est quasi-séparée (on parle aussi de T_0 -topologie) si, pour toute paire d'éléments de X , il existe $A \in \mathcal{T}$ contenant un et un seul de ces deux éléments.
3. \mathcal{T} est linéaire si, pour tous $A, B \in \mathcal{T}$, on a $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.
4. \mathcal{T} est linéaire saturée si \mathcal{T} est linéaire et de cardinalité $|X| + 1$.

L'ensemble noté \mathcal{T}_X^0 des topologies quasi-séparées définies sur X va être mis en dualité avec l'ensemble \mathcal{O}_X des ordres définis sur X (proposition 5.27 et corollaire 5.29). On remarquera que les topologies linéaires (respectivement, linéaires saturées) ne sont rien d'autre que les chaînes étendues, donc contenant \emptyset et X (respectivement, les chaînes maximales) du treillis $\underline{2}^X$ des parties

de X . En particulier, les topologies linéaires saturées sont les topologies linéaires contenant le nombre maximum de parties possibles pour une telle topologie.

On peut alors énoncer le résultat suivant dont la démonstration ne présente pas de difficulté.

Proposition 5.27 *Dans la dualité entre l'ensemble des préordres et l'ensemble des topologies définis sur X , les ensembles des équivalences, des ordres, des préordres totaux et des ordres totaux correspondent respectivement aux ensembles de topologies complémentées, quasi-séparées, linéaires et linéaires saturées.*

La figure 5.5 illustre la correspondance entre les équivalences (respectivement, les ordres, les préordres totaux) et les topologies complémentées (respectivement, quasi-séparées, linéaires).

La dualité entre relations d'équivalences et topologies complémentées est bien connue sous la forme dérivée que constitue la correspondance classique entre équivalences et partitions : les unions des classes de l'équivalence associée à une partition forment une topologie complémentée, i.e. un treillis booléen, dont les atomes sont ces classes.

Précisons quelque peu la dualité entre les préordres totaux et les chaînes étendues, qui servira au chapitre suivant dans la démonstration du théorème fondamental du codage. Si R est un préordre total, l'ensemble de ses classes

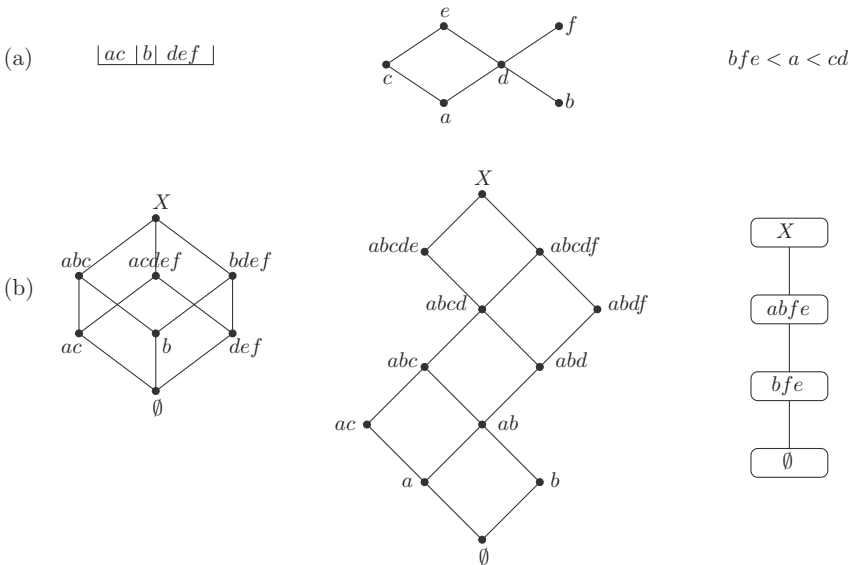


FIG. 5.5. (a) Une équivalence, un ordre et un préordre total sur $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, et (b) leurs topologies duales.

est totalement ordonné (Exemple 1.20). Si ce préordre admet k classes, on peut alors, en les numérotant suivant cet ordre, l'écrire sous la forme :

$$X_1 < \dots < X_i < \dots < X_k \quad (1)$$

On vérifie que la topologie $\tau(R)$ associée à ce préordre R est la chaîne étendue :

$$\emptyset \subset F_1 \dots \subset F_i \dots \subset F_k = X,$$

avec pour tout $i = 1, \dots, k$, $F_i = \bigcup_{1 \leq h \leq i} X_h$.

Inversement, si l'on se donne une chaîne étendue $\mathcal{C} = \emptyset \subset F_1 \subset \dots \subset F_i \dots \subset F_k = X$ de $\underline{2}^X$ contenant k parties non vides, le préordre correspondant $\pi(\mathcal{C})$ est obtenu sous la forme (1), en posant $F_0 = \emptyset$ et, pour tout $i = 1, \dots, k$, $X_i = F_i \setminus F_{i-1}$.

On voit ainsi que les préordres totaux à k classes correspondent aux topologies linéaires de cardinal $k + 1$, i.e. aux chaînes étendues de longueur k de $\underline{2}^X$. Deux cas sont particulièrement intéressants :

- Si $k = 2$, les préordres de la forme $X_1 < X_2$ correspondent aux topologies de la forme $\{\emptyset, X_1, X\}$ (on notera que les premiers sont les coatomes du treillis des préordres, les secondes étant les atomes du treillis des topologies);
- Si $k = |X| = n$, on obtient les ordres totaux $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_i \prec x_{i+1} \dots \prec x_n$ auxquels correspondent les topologies linéaires saturées, i.e. les chaînes maximales du treillis $\underline{2}^X$:

$$\begin{aligned} \emptyset \subset \{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \dots \subset \{x_1, x_2, \dots, x_i\} \subset \{x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}\} \\ \dots \subset \{x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\} = X \end{aligned}$$

On peut alors préciser un des résultats de la proposition 5.27.

Proposition 5.28 *Dans la dualité entre l'ensemble des préordres totaux et l'ensemble des topologies linéaires définis sur X , les préordres totaux à k classes correspondent aux chaînes étendues de longueur k de $\underline{2}^X$. En particulier, les préordres totaux à 2 classes correspondent aux topologies ne contenant qu'un fermé différent des parties \emptyset et X , et les ordres totaux correspondent aux chaînes maximales de $\underline{2}^X$.*

Dans la proposition 5.27, les bijections énoncées entre les différents ensembles sont évidemment des dualités pour les ordres (d'inclusion) dont sont munis ces ensembles. En particulier, comme l'ensemble des ordres définis sur X est un inf-demi-treillis (pour l'opération d'intersection), l'ensemble des topologies quasi-séparées est un sup-demi-treillis et l'on obtient :

Corollaire 5.29 (Birkhoff [49], 1937) *L'inf-demi-treillis \mathcal{O}_X des ordres définis sur un ensemble X est dual du sup-demi-treillis \mathcal{T}_X^0 des topologies quasi-séparées (ou T_0 -topologies) définies sur X .*

Dans cette dualité, à l'ordre O correspond la topologie quasi-séparée $t(O) = \mathcal{C}(O)$ formée des parties commençantes de O . A l'infimum $O_1 \cap O_2$ de deux ordres correspond le supremum $\mathcal{C}(O_1) \vee \mathcal{C}(O_2) = \mathcal{C}(O_1 \cap O_2)$ des deux topologies quasi-séparées associées, etc. Nous laissons au lecteur le soin de préciser les autres dualités résultant de la proposition 5.27.

Dans le résultat du corollaire 5.29, tous les ordres sont définis sur un même ensemble X , de cardinalité disons n . D'autre part, les topologies quasi-séparées définies sur X correspondent aux treillis distributifs de longueur n (d'après le théorème 5.9 et la proposition 5.13). On obtient donc ainsi une dualité entre ensembles ordonnés de cardinal n et treillis distributifs de longueur n . Ce résultat étant vrai pour n quelconque, on peut dire qu'on a une dualité entre la classe des ensembles ordonnés et celle des treillis distributifs. Toutefois cette dernière dualité est de nature plus générale que celle induite par une correspondance de Galois. Pour pouvoir la définir convenablement, il faudrait se placer en théorie des catégories et montrer qu'il existe une dualité entre la catégorie des ensemble ordonnés et celle des treillis distributifs. Ceci impliquerait de définir ces catégories avec leurs « morphismes », ce qui dépasse le cadre de cet ouvrage (on pourra se reporter au livre de Davey et Priestley [112], 2001 pour une approche plus catégorielle de cette dualité).

Les conséquences de la dualité entre ensembles ordonnés et treillis distributifs est que tout résultat, construction ou question sur l'une des classes de ces deux structures peut être transformé en un résultat, construction ou question sur l'autre classe (et inversement). Suivant les cas, il pourra être plus facile d'effectuer une construction ou de résoudre une question sur l'une de ces classes ou sur l'autre. Par exemple, le premier point de la proposition 5.8 s'interprète en disant que le produit direct de deux treillis distributifs peut s'obtenir à partir de la somme cardinale de leurs ensembles ordonnés d'éléments sup-irréductibles. Avant de terminer cette section par un second exemple, signalons qu'on en verra d'autres au chapitre suivant où des problèmes de dimension d'ensemble ordonnés se traduisent en problèmes sur les parties génératrices (pour le supremum et l'infimum) d'un treillis distributif (corollaires 6.4 et 6.11 du chapitre 6).

Du théorème 5.23 et de la correspondance entre chaînes étendues et préordres totaux décrite ci-dessus, on déduit aussi le résultat suivant :

Proposition 5.30 *Soit $P = (X, O)$ un ensemble ordonné de cardinal n et $\mathcal{C}(P)$ le treillis des parties commençantes de P . Les préordres totaux à k classes contenant l'ordre O sont en bijection avec les chaînes étendues de longueur k de $\mathcal{C}(P)$. En particulier, les extensions linéaires de P sont en bijection avec les chaînes maximales de $\mathcal{C}(P)$.*

Preuve. Soit \mathcal{C} une chaîne étendue de longueur k contenue dans $\mathcal{C}(P) = t(O)$. D'après les propriétés de la correspondance de Galois (t, p) (théorème 5.23), $\mathcal{C} \subseteq t(O)$ est équivalent à $pt(O) = \pi(O) = O \supseteq p(\mathcal{C})$, où $p(\mathcal{C})$ est un préordre total à k classes (proposition 5.27). Inversement, par un raisonnement analogue, si R est un préordre total à k classes contenant O , son image $t(R)$ est

une chaîne étendue de longueur k contenue dans $\mathcal{C}(P)$. En prenant $k = |X|$, on obtient le cas des extensions linéaires de P . \square

Remarque 5.31 La proposition 5.30 peut être transférée aux treillis distributifs au moyen du théorème de représentation de ces treillis. On obtient en particulier l'énoncé suivant : *les extensions linéaires de l'ensemble ordonné des éléments sup-irréductibles d'un treillis distributif \mathcal{T} sont en correspondance bijective avec les chaînes maximales de ce treillis*. Si $s_1 \prec s_2 \prec \dots \prec s_n$ est une extension linéaire de $S_{\mathcal{T}}$, alors

$$0_{\mathcal{T}} \prec s_1 \prec s_1 \vee s_2 \prec \dots \prec s_1 \vee s_2 \dots \vee s_i \prec \dots \prec \bigvee S_{\mathcal{T}} = 1_{\mathcal{T}}$$

est une chaîne maximale de \mathcal{T} .

L'exercice 5.14 permet de généraliser la proposition 5.30 ainsi que l'énoncé ci-dessus.

Remarque 5.32 L'exercice 7.4 montre qu'il existe une bijection entre les préordres totaux et les ordres forts (la partie asymétrique d'un préordre total est un ordre fort strict). Les résultats des propositions 5.28 et 5.30 peuvent donc s'écrire en remplaçant « préordre total » par « ordre fort ». On obtient, par exemple, que les ordres forts stricts d'étendue k , extensions d'un ordre O , sont en bijection avec les chaînes étendues de longueur k du treillis des parties commençantes de O .

5.5 Dualité entre ordres et fuseaux d'ordres totaux

Nous allons maintenant établir une autre dualité importante entre d'une part l'ensemble \mathcal{O}_X des ordres définis sur X et d'autre part l'ensemble des « fuseaux » (ou « parties convexes » ou « parties géodésiquement convexes ») de l'ensemble \mathcal{L}_X des ordres totaux sur X (proposition 5.41). Commençons par définir ces notions et par montrer leur équivalence.

Nous rappelons que $\mathcal{L}(O)$ désigne l'ensemble des extensions linéaires de l'ordre O et qu'on a $O = \bigcap \{L : L \in \mathcal{L}(O)\}$ (cf. le théorème 2.29 au chapitre 2).

Définition 5.33 *Un ensemble $\mathcal{E} = \{L_1, L_2, \dots, L_r\}$ d'ordres totaux sur l'ensemble X est un fuseau (d'ordres totaux) sur X , s'il existe un ordre O sur X tel que $\mathcal{E} = \mathcal{L}(O)$.*

Le lecteur montrera que cette définition est équivalente à écrire que, pour tout ordre total L sur X , $L \supseteq L_1 \cap L_2 \dots \cap \dots \cap L_r$ implique $L \in \mathcal{E}$.

Exemple 5.34 Considérons sur l'ensemble $X = \{1, 2, 3, 4\}$ l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{1342, 1432, 3142, 3412, 4132, 4312\}$$

d'ordres totaux (ici écrits sous forme de permutations de X , cf. la section 1.1.2). Le lecteur vérifiera que \mathcal{E} est le fuseau d'ordre $\mathcal{L}(O)$ avec

$$O = \{(1, 2), (3, 2), (4, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Par contre, si l'on ôte à \mathcal{E} l'un quelconque de ses ordres, il perd sa qualité de fuseau.

Définition 5.35 *Un ensemble $\mathcal{E} = \{L_1, \dots, L_i, \dots, L_r\}$ d'ordres totaux sur l'ensemble X est une partie convexe de l'ensemble \mathcal{L}_X de tous les ordres totaux sur X si, pour tous $i, j (1 \leq i, j \leq r)$ et pour tout ordre total L sur X , $L_i \cap L_j \subseteq L \subseteq L_i \cup L_j$ implique $L \in \mathcal{E}$.*

Associons à deux ordres totaux L et L' sur X un intervalle, noté $[L, L']$, défini comme l'ensemble des ordres totaux contenus dans $[L \cap L', L \cup L']$. Par exemple, sur $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $[1342, 3412] = \{1342, 3142, 3412\}$. Un ensemble \mathcal{E} d'ordres totaux est alors une partie convexe de \mathcal{L}_X si, dès qu'il contient les ordres totaux L_i et L_j , il contient également l'intervalle $[L_i, L_j]$. On retrouve alors la définition classique d'un ensemble convexe une fois définie une notion d'intervalle.

Un ensemble convexe d'ordres totaux sur $X = \{1, 2, 3, 4\}$ est donné par l'ensemble $\mathcal{E} = \{1342, 1432, 3142, 3412, 4132, 4312\}$ de l'exemple 5.34, comme le lecteur pourra s'en assurer. Il montrera aussi sans peine que dans la définition précédente on peut remplacer $L_i \cap L_j \subseteq L \subseteq L_i \cup L_j$ par une seule des deux conditions $L \subseteq L_i \cup L_j$ ou $L_i \cap L_j \subseteq L$.

Nous allons maintenant définir la notion de partie géodésiquement convexe de \mathcal{L}_X et, à cette fin, munir \mathcal{L}_X d'une structure de graphe (non orienté), ce qui revient à définir une relation symétrique entre ordres totaux. Soit L un ordre total sur X écrit sous forme d'une permutation de X . On dit qu'on effectue une *commutation* sur L si l'on y échange deux éléments consécutifs dans la permutation représentant L ; on obtient ainsi un autre ordre total L' sur X . Par exemple, si $L = 24135$, les quatre commutations possibles sur L engendrent les quatre ordres totaux 42135, 21435, 24315 et 24153. On observera que si L' est obtenu à partir de L par la commutation des deux éléments consécutifs x et y , le seul couple (x, y) de L est modifié et donc que ceci est équivalent à écrire que $L \cap L'^d = \{(x, y)\}$.

Définition 5.36 *Le graphe permutoèdre sur un ensemble X est le graphe, noté Σ_X , dont l'ensemble des sommets est l'ensemble \mathcal{L}_X des ordres totaux sur X et dont les arêtes sont définies par la relation d'adjacence suivante, notée Adj , entre deux ordres totaux : pour $L, L' \in \mathcal{L}_X$, $L Adj L'$ si $|L \cap L'^d| = 1$.*

Dire que L et L' sont adjacents dans Σ_X revient donc à dire que L' s'obtient à partir de L (ou L à partir de L') par une commutation.

Le graphe permutoèdre sur $X = \{1, 2, 3, 4\}$ est représenté à la figure 5.6. On notera que ce graphe est le graphe de voisinage de l'ordre permutoèdre présenté à l'exemple 1.17.

Dans un graphe (non orienté), la *distance géodésique* entre deux sommets est la plus courte longueur d'un chemin les joignant. Comme elle vérifie clairement les axiomes d'une distance, elle fait de ce graphe un espace métrique. Un plus court chemin entre deux sommets s'appelle une *géodésique* entre ces sommets.

Dans le cas du graphe permutoèdre Σ_X , la distance géodésique entre deux ordres totaux L et L' est (par définition) le nombre minimum de commutations à effectuer pour passer de l'un à l'autre. Nous la notons $\delta(L, L')$.

Par exemple, on peut vérifier à la figure 5.6 que dans $\Sigma_{\{1,2,3,4\}}$, $\delta(1432, 3412) = 3$.

Le calcul de la distance géodésique entre deux sommets d'un graphe ayant un nombre élevé de sommets peut être difficile, mais la proposition 5.37 suivante va montrer que ce n'est pas le cas pour Σ_X bien que celui ci ait $|X|!$ sommets.

Étant donnés deux ordres totaux L et L' sur X , nous posons

$$d(L, L') = |L \cap L'^d| = |L \setminus L'|$$

Autrement dit, $d(L, L')$ est le nombre de couples (x, y) avec xLy et $yL'x$. Un tel couple, si ces ordres totaux représentent des préférences, s'interprète comme un *désaccord* sur les préférences entre x et y . Nous dirons donc que $d(L, L')$ est le nombre de désaccords entre ces deux ordres.

Du fait de l'égalité $|L \setminus L'| = |L' \setminus L|$, on a aussi $d(L, L') = (|L \setminus L'| + |L' \setminus L|)/2$, ce qui montre que d n'est autre que la moitié de la classique distance de la différence symétrique entre L et L' (rappelons que la *distance de la différence symétrique* entre deux parties A et B d'un ensemble est le cardinal de leur différence symétrique $(|A \setminus B| + |B \setminus A|)$, cf. l'exercice 5.12). Par exemple, $d(1432, 3412) = |\{(1, 4), (1, 3), (4, 3)\}| = 3$.

L'égalité $\delta(1432, 3412) = d(1432, 3412)$ obtenue dans cet exemple n'est pas fortuite, puisqu'on a le résultat suivant :

Proposition 5.37 *La distance géodésique $\delta(L, L')$ entre deux ordres totaux L et L' , sommets du graphe permutoèdre Σ_X , est égale au nombre $d(L, L')$ de leurs désaccords.*

Preuve. On remarque d'abord qu'on a toujours $d(L, L') \leq \delta(L, L')$. En effet toute commutation effectuée sur L supprimant au plus un désaccord entre L et L' , il faut effectuer au moins $d(L, L')$ commutations pour passer de L à L' .

Nous montrons maintenant l'inégalité inverse $d(L, L') \geq \delta(L, L')$ par récurrence sur $d(L, L')$. Pour $d(L, L') = 1$, on vérifie aisément que $\delta(L, L') = 1$. Supposons la propriété vérifiée pour $d(L, L') = k > 1$ et considérons deux ordres totaux L et L' vérifiant $d(L, L') = k + 1$. En effectuant une commutation sur deux éléments consécutifs x et y de L tels que $(x, y) \in L \setminus L'$ (de tels éléments existent, sinon $L = L'$), on obtient un ordre total L'' (différent de L') et l'on a $d(L, L') = 1 + k = d(L, L'') + d(L'', L)$. Par l'hypothèse de récurrence, on en déduit $d(L, L') \geq \delta(L, L'') + \delta(L'', L)$ et, par l'inégalité triangulaire appliquée à la distance δ , $d(L, L') \geq \delta(L, L')$. \square

Comme dans tout graphe (non orienté), on peut maintenant définir la notion d'intervalle géodésique du graphe permutoèdre.

Définition 5.38 On appelle intervalle géodésique entre deux ordres totaux L et L' définis sur X – et on note $[L, L']_g$ – l'ensemble des ordres totaux situés sur les géodésiques reliant L et L' dans le graphe permutoèdre Σ_X .

Une partie \mathcal{E} de \mathcal{L}_X est géodésiquement convexe si c'est une partie géodésiquement convexe du graphe permutoèdre Σ_X , i.e. si, pour tous $L, L' \in \mathcal{E}$, $[L, L']_g \subseteq \mathcal{E}$.

Par exemple, sur la figure 5.6, l'intervalle géodésique

$$[3142, 4132]_g = \{1342, 1432, 3142, 3412, 4132, 4312\}$$

est visualisé.

Nous avons donc défini trois sous-ensembles particuliers de l'ensemble \mathcal{L}_X des ordres totaux sur X , à savoir les fuseaux d'ordres totaux, les parties convexes et les parties géodésiquement convexes. Nous allons maintenant

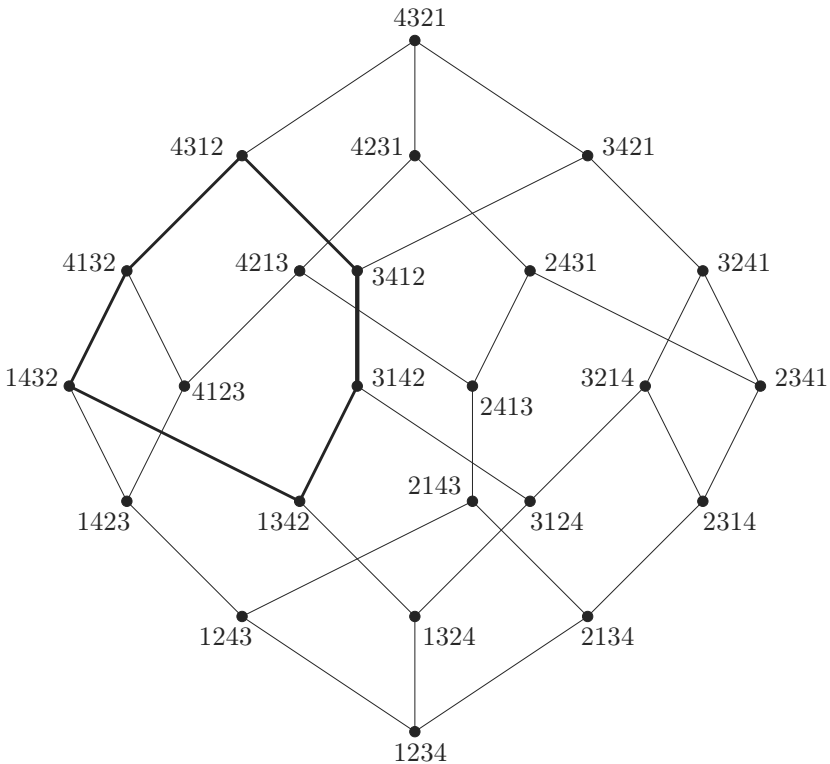


FIG. 5.6. Le graphe permutoèdre sur $\{1, 2, 3, 4\}$ et l'intervalle géodésique $[3142, 4132]_g$.

montrer que ces trois notions sont équivalentes en prouvant le théorème 5.40. Nous commençons par énoncer un lemme, qui est la simple application à la distance d (moitié de la distance de la différence symétrique entre ordres totaux) d'un résultat classique sur la distance de la différence symétrique (la preuve est laissée au lecteur, cf. l'exercice 5.12).

Lemme 5.39 *Soient L, L' et M trois ordres totaux sur X . Alors :*

$$L \cap L' \subseteq M \subseteq L \cup L' \iff d(L, M) + d(M, L') = d(L, L')$$

Théorème 5.40 *Soit \mathcal{E} un ensemble d'ordres totaux sur X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. \mathcal{E} est convexe,
2. \mathcal{E} est géodésiquement convexe,
3. \mathcal{E} est un fuseau d'ordres.

Preuve. (1) \implies (2) : puisque \mathcal{E} est convexe (respectivement, géodésiquement convexe) si et seulement si il contient $[L, L']$ (respectivement, $[L, L']_g$) pour tous $L, L' \in \mathcal{E}$, on obtient cette équivalence en montrant que ces deux intervalles sont égaux. Or puisque $d = \delta$, dire que $d(L, M) + d(M, L') = d(L, L')$ est équivalent à dire que $\delta(L, M) + \delta(M, L') = \delta(L, L')$. Et, dans le graphe permuttoèdre comme dans tout graphe, cette dernière égalité est équivalente au fait que M est sur une géodésique joignant L et L' . Il s'ensuit que l'intervalle géodésique $[L, L']_g$ est égal à l'intervalle $[L, L']$ défini plus haut comme l'ensemble des ordres totaux contenus dans $[L \cap L', L \cup L']$ et égal, d'après le lemme 5.39, à l'ensemble des ordres totaux M tels que $d(L, M) + d(M, L') = d(L, L')$.

(3) \implies (1) : tout fuseau \mathcal{E} est une partie convexe puisque, si $L_i, L_j \in \mathcal{E}$, $M \supseteq L_i \cap L_j$ implique $M \supseteq \bigcap \{L : L \in \mathcal{E}\}$.

(1) \implies (3) : on va montrer qu'une partie convexe \mathcal{E} est le fuseau $\mathcal{L}(O)$, avec $O = \bigcap \{L : L \in \mathcal{E}\}$. Par définition de O , on a $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L}(O)$. Supposons $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}(O)$, donc l'existence de $L \supset O$ avec $L \notin \mathcal{E}$. Soit $L' \in \mathcal{E} \subset \mathcal{L}(O)$, et soit $L' = L_0, L_1, \dots, L_p = L$ une géodésique de L' à L dans le graphe permuttoèdre. Le fuseau $\mathcal{L}(O)$ étant convexe, donc géodésiquement convexe, cette géodésique est contenue dans $\mathcal{L}(O)$. Considérons le plus petit i tel que $L_i \in \mathcal{E}$ et $L_{i+1} \in \mathcal{L}(O) \setminus \mathcal{E}$. On a $\delta(L_i, L_{i+1}) = 1$, i.e. $L_i \cap L_{i+1}^d = (x, y)$. Puisque L_{i+1} n'appartient pas à la partie convexe \mathcal{E} , pour tout M de \mathcal{E} , on a $M \cap L_i \not\subseteq L_{i+1}$. Il s'ensuit que $M \cap L_i \cap L_{i+1}^d$ est non vide et égal à (x, y) et donc que pour tout M de \mathcal{E} , (x, y) appartient à M et donc à O , ce qui contredit le fait que $(x, y) \notin L_{i+1}$. \square

Puisque les notions de fuseau, de partie convexe et de partie géodésiquement convexe sont identiques, nous utiliserons indifféremment dans la suite l'une ou l'autre. Nous noterons \mathcal{F}_X l'ensemble de tous les fuseaux de \mathcal{L}_X . Cet ensemble est naturellement ordonné par l'ordre d'inclusion entre parties et, en fait, il résulte de la proposition suivante que cet ordre fait de \mathcal{F}_X un sup-demi-treillis :

Proposition 5.41 *Les ensembles \mathcal{O}_X des ordres et \mathcal{F}_X des fuseaux d'ordres totaux définis sur X sont deux demi-treillis duaux.*

Preuve. Définissons deux applications entre le demi-treillis \mathcal{O}_X et le treillis $\underline{2}^{\mathcal{L}^X}$ des parties de \mathcal{L}_X de la manière suivante : à un ordre O on fait correspondre l'ensemble des ordres totaux le contenant, i.e. le fuseau $\mathcal{L}(O)$; à un ensemble d'ordres totaux on fait correspondre l'ordre obtenu par leur intersection. On vérifie aisément qu'on a ainsi défini une correspondance de Galois entre \mathcal{O}_X et $\underline{2}^{\mathcal{L}^X}$, et donc deux fermetures sur ces ensembles ordonnés. Puisque tout ordre est intersection des ordres totaux le contenant, l'ensemble des fermés de \mathcal{O}_X est l'ensemble \mathcal{O}_X lui-même. Quant aux fermés de $\underline{2}^{\mathcal{L}^X}$, ce sont les images des ordres, donc les fuseaux d'ordres totaux. Il résulte alors des propriétés des correspondances de Galois (chapitre 3, théorème 3.38) que \mathcal{F}_X est un sup-demi-treillis dual de l'inf-demi-treillis. \square

On remarquera que dans cette dualité l'opération d'infimum (i.e. d'intersection) de deux ordres dans \mathcal{O}_X correspond à l'opération de supremum dans \mathcal{F}_X , opération consistant à prendre la « fermeture convexe » de la réunion de deux fuseaux (i.e. le plus petit fuseau contenant cette réunion). En combinant le corollaire 5.29 et la proposition 5.41, on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.42 *L'inf-demi-treillis \mathcal{O}_X des ordres définis sur X est dual du sup-demi-treillis $\mathcal{T}_X^{\mathcal{O}}$ des topologies quasi-séparées et du sup-demi-treillis \mathcal{F}_X des fuseaux d'ordres totaux définis sur X ; en particulier, ces deux sup-demi-treillis sont isomorphes.*

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'isomorphisme énoncé dans le théorème associe à une topologie quasi-séparée (donc à un treillis distributif de longueur $|X|$) l'ensemble des ordres totaux sur X correspondant aux images des chaînes maximales de ce treillis (de façon précise ce sont les images de ces chaînes par l'application p de la correspondance de Galois du théorème 5.23).

5.6 Compléments et références

Certains résultats sur les treillis distributifs apparaissent dans la préhistoire de la théorie des treillis ; c'est ainsi que dès 1897, Dedekind montre des propriétés de base de ces treillis et qu'en 1900, il pose le problème de calculer le nombre d'éléments du treillis distributif libre à n générateurs, problème qui, à ce jour, n'est résolu que pour n inférieur à 9 (cf. l'exercice 5.7). Il faut ensuite attendre Birkhoff ([48], 1933 et [49], 1937) pour obtenir des résultats fondamentaux, comme le théorème 5.9 de représentation, l'isomorphisme entre sup-irréductibles et inf-irréductibles (corollaire 5.11) ou la propriété d'unicité des représentations en irréductibles (proposition 5.14). Les précisions apportées sur la structure des treillis distributifs (par exemple, à la proposition 5.13)

sont dues, souvent indépendamment, à différents auteurs dont Schützenberger [373] (1949), Avann ([18], 1958 et [20], 1961), Bonnet et Pouzet [58] (1969), Stanley [386] (1972), Monjardet [304] (1974), etc. Comme il a été dit à la remarque 5.15, un certain nombre de ces propriétés permettent de caractériser les treillis T distributifs. Outre les propriétés citées dans cette remarque, on peut ajouter la propriété « toute chaîne maximale de T a $|S_T| + 1 = |I_T| + 1$ éléments » (propriété résultant de la proposition 5.13) ou celle « le nombre de chaînes maximales de T égale le nombre d'extensions linéaires de l'ensemble ordonné de ses éléments sup-irréductibles » (propriété résultant de la remarque 5.31), ces deux caractérisations étant dûes à Rival [358] (1976). On notera que la bijection entre les chaînes maximales d'un treillis distributif T et les extensions linéaire de S_T s'étend en une bijection entre les sous-treillis couvrants de T et les extensions de S_T (Baldy, Morvan et Thierry [27], 1999). On trouvera dans la littérature de nombreuses autres caractérisations des treillis distributifs, notamment au moyen des relations de projectivité (Avann [18], 1958 et [21], 1961), des éléments sup-premiers (Ky Fan [261] 1972), ou de propriétés d'inégalités entre fonctions ou mesures de probabilité définies sur le treillis (voir Daykin [115], 1977 et Winkler [429], 1986).

On a décrit la caractérisation (5) des treillis distributifs donnée au théorème 5.1 au moyen de la notion de *clivage* (terme dû à Schützenberger [373], 1949), c'est-à-dire d'une bipartition d'un treillis distributif en une section finissante $[s]$ et une section commençante $[i]$ (avec $s \not\leq i$). Le point (1) de l'exercice 5.10 montre qu'on déduit d'un tel clivage l'existence de deux intervalles de T isomorphes. Le point (2) du même exercice montre qu'on peut alors décomposer T en deux treillis distributifs formés d'intervalles disjoints et, qu'en itérant cette opération à partir d'une extension linéaire de I_T , on peut ainsi obtenir une partition C_1, C_2, \dots, C_{n+1} de T en intervalles de T (avec $C_{n+1} = \{1_T\}$). De plus, tout élément x de C_i est couvert par un unique élément y de $C_{i+1} \cup \dots \cup C_{n+1}$ et l'ensemble des couples (x, y) constitue une arborescence couvrante de T . Cette arborescence définie (sous le nom d'« ideal tree ») par Habib et Nourine [214] (1996) est utilisée pour obtenir des algorithmes efficaces sur les treillis distributifs (cf. la section A.2.2 de l'annexe A).

Enfin, le point (3) de l'exercice 5.10 est une réciproque de la décomposition précédente. Il permet de passer d'un treillis distributif T à un treillis distributif T^x obtenu en dupliquant une section commençante de base x de T . On en déduit une procédure engendrant tous les treillis distributifs à partir de la chaîne $\underline{1}$ à un élément (Blair [54], 1984). Mais cette procédure est en fait un cas particulier d'une procédure permettant d'engendrer par itération à partir de la chaîne $\underline{1}$ à un élément la classe des treillis *bornés*, classe contenant celle des treillis distributifs. Le procédé de duplication est le même mais il s'applique à un intervalle quelconque du treillis et non plus seulement à un intervalle formé par une section commençante (voir par exemple, Bertet et Caspard [46], 2002).

La caractérisation des parties génératrices d'un treillis distributif donnée au théorème 5.20 se trouve dans la thèse de Bouchet [66] (1971), thèse dont

nous parlerons plus longuement dans les notes du prochain chapitre. Un treillis distributif T peut n'avoir qu'une partie génératrice minimale, qui est alors nécessairement l'ensemble de ses éléments doublement irréductibles ; le calcul du cardinal minimum $g(T)$ d'une partie génératrice de T est alors ramené au calcul, plus simple, du nombre des éléments doublement irréductibles de T . Les treillis distributifs vérifiant cette condition sont caractérisés par la propriété que le complété de Dedekind–MacNeille de l'ensemble ordonné de leurs éléments sup-irréductibles est un treillis distributif (Monjardet et Wille [318], 1988–1989). C'est donc le cas du treillis $\mathcal{C}(T)$ des parties commençantes d'un treillis distributif T (pourquoi ?).

La correspondance de Galois entre relations binaires et familles de parties présentée à la section 5.4 est dûe indépendamment à Chacron [93] (1966) et Lorrain [279] (1969) (cf. aussi le chapitre 6 de Barbut et Monjardet [33], 1970). Elle généralise la dualité entre ordres et topologies quasi-séparées qu'avait établie Birkhoff dès 1933. C'est Feldman–Högaasen [152] (1969) qui, la première, a montré l'existence d'une autre dualité entre ordres et parties géodésiquement convexes (dans le graphe permutoèdre) de l'ensemble des ordres totaux, dualité résultant de ce que ces parties ne sont autres que les fuseaux d'ordres totaux. Diverses applications de ces résultats sont dans Monjardet [303] (1970). Le terme « fuseau d'ordres » a été introduit par Frey à propos du problème d'établir une chronologie de la vie de Jésus à partir des Évangiles synoptiques, c'est-à-dire, plus généralement, de reconstituer un ordre total à partir de divers ordres (voir à ce sujet Frey et Barbut [172], 1970).

Il existe aussi diverses généralisations de cette correspondance de Galois, notamment celle qui permet d'établir une dualité entre les fermetures et les systèmes complets d'implications (voir le chapitre 7, page 242 et cf. par exemple, Caspard et Monjardet [90], 2003). Comme nous l'avons déjà signalé, le graphe permutoèdre est le graphe de voisinage de l'ordre faible de Bruhat défini sur l'ensemble des ordres totaux (ou des permutations). Cet ensemble ordonné (défini à l'exemple 1.17) est en fait un treillis, appelé *treillis permutoèdre* (Guilbaud et Rosenstiehl [206], 1963) qui a été étudié par différents auteurs (Barbut et Monjardet [33], 1970), Le Conte de Poly-Barbut [274] [275] (1990), Duquenne et Cherfouh [139] (1994), Markowsky [288] 1994). Comme ce treillis est borné (Caspard [88], 2000), on peut l'obtenir par le procédé de duplication décrit plus haut. Il en est de même, plus généralement, pour les groupes de Coxeter finis munis de l'ordre de Bruhat faible (Caspard, Le Conte de Poly-Barbut et Morvan [89], 2004).

Dans la correspondance entre ensembles ordonnés et treillis distributifs, les ensembles ordonnés de largeur au plus 2 correspondent aux treillis distributifs planaires (cf. la section 2.5 du chapitre 2). Ces treillis peuvent être caractérisés de multiples façons et on peut montrer qu'ils ont la propriété de Sperner définie au chapitre 4 (définition 4.14) (Monjardet [305], 1976).

Outre le théorème fondamental de Birkhoff sur la représentation d'un treillis distributif par certaines parties d'un ensemble ordonné, il existe de nombreux résultats montrant qu'un treillis distributif peut être représenté

par un treillis distributif « concret » spécifié. Ainsi, tout treillis distributif est isomorphe au treillis des congruences d'un treillis fini (cf. Grätzer et Schmidt [197], 1962) pouvant être pris planaire et « petit » (Grätzer et Lakser [196], 1989), au treillis des *coupures* ou des *coupures strictes* (parties rencontrant toute chaîne maximale, une seule fois pour les strictes) d'un ensemble ordonné (Escalante [145], 1972, Higgs [220], 1986), au treillis des sous-groupes normaux d'un groupe fini résoluble (Silcock [378], 1977, Palfy [335] 1987), au treillis des idéaux d'un anneau régulier infini (Kim et Roush [246], 1980) et non nécessairement fini (Palfy [335], 1987), au treillis des congruences d'un treillis modulaire et complété infini (Schmidt [370], 1984), au treillis des antichaînes de cardinal maximum d'un ensemble ordonné (Koh [252], 1983), au treillis des sous-modules d'un module fini (Palfy [335], 1987).

Enfin, tout treillis distributif est aussi isomorphe à un treillis de « mariages stables ». Précisons ce qu'est le problème des mariages stables, représentatif des nombreux problèmes d'affectations d'individus à des positions sur lesquelles ils ont des préférences (comme, par exemple, l'affectation d'internes dans des hôpitaux, ou celle de camarades de chambre dans un collège universitaire). On considère deux ensembles disjoints H et F de même cardinal n , tels qu'à tout $h \in H$ (respectivement, $f \in F$) est associé un ordre total \geq_h sur F (respectivement, \geq_f sur H). Une bijection (ou couplage) β de H dans F est appelé un *mariage* (ou un *couplage*) *instable* si il existe $h \in H$ et $f \in F$ tels que $f >_h \beta(h)$ et $h >_f \beta^{-1}(f)$ (en effet, dans ce cas, pour assurer la paix des ménages, le couplage couplant h et f est préférable au couplage β). Une bijection qui n'est pas un mariage instable est appelé un mariage *stable*. Gale et Shapley [175] (1962) ont montré qu'il existe toujours au moins un mariage stable. On définit une relation sur l'ensemble des mariages stables en posant $\beta \geq \beta'$ si, pour tout $h \in H$, $\beta(h) \geq_h \beta'(h)$. Knuth [251] (1976) a prouvé que cette relation est un ordre munissant cet ensemble d'une structure de treillis distributif (on peut définir de façon similaire un ordre \geq_f qui fait de l'ensemble des couplages un treillis dual du précédent). En 1984, Blair [54] a montré que tout treillis distributif est isomorphe à un treillis de mariages stables. Pour cela, il considère le treillis distributif T des mariages stables entre deux ensembles de cardinal n , et il montre que, pour tout $x \in T$, le treillis T^x (défini à l'exercice 5.10) est isomorphe au treillis des mariages stables entre deux ensembles de cardinal $2n$. Le résultat s'en déduit (on en trouvera une autre preuve et des résultats supplémentaires dans le livre de Gusfield et Irving [207], 1989, consacré à ce sujet).

Plusieurs autres classes intéressantes de treillis distributifs « concrets », liés à des problèmes combinatoires, ont été étudiées par Stanley (cf. notamment Stanley [387], 1975 et [388], 1986).

Une généralisation particulièrement intéressante des treillis distributifs est constituée des treillis (*inférieurement* ou *supérieurement*) *localement distributifs*. Originellement, les treillis (supérieurement) localement distributifs ont été définis par Dilworth [119] (1940) comme les treillis vérifiant la propriété d'unicité de la représentation minimale par les (inf-)irréductibles (établie par

la proposition 5.14 pour les treillis distributifs). Ils ont été caractérisés par lui-même et d'autres auteurs (notamment Avann [20], 1961 et [22], 1968) de multiples façons. Celle utilisant les relations flèches est particulièrement élégante : un treillis T est (supérieurement) localement distributif si et seulement si, pour tout $s \in S_T$, il existe un unique $i \in I_T$ tel que $s \downarrow i$. On rencontre ces treillis dans de nombreuses situations (cf. Monjardet [311], 1990) et, en particulier, dans la théorie des « géométries convexes » (Edelman et Jamison [141], 1985). Ces dernières, dont les propriétés généralisent celle des ensembles convexes de R^n , sont en effet les familles de Moore qui sont la représentation ensembliste des treillis (inférieurement) localement distributifs (cf. les exemples 3.28 et 3.29). De plus, les géométries convexes sont en dualité avec les fonctions de choix (cf. la section 2.5 des compléments du chapitre 2) qui sont « chemin-indépendantes » (cf. Monjardet et Raderanirina [319], 2001).

5.7 Exercices

Exercice 5.1 Montrer que dans un treillis T , on a $[x \wedge y = x \wedge z \text{ et } x \vee y = x \vee z] \implies y = z$ si et seulement si T est distributif (la caractérisation (10) des treillis distributifs donnée à la remarque 5.3 pourra être utile).

Exercice 5.2 Démontrer les propositions 2.19 et 2.20 du chapitre 2 : le produit direct de treillis distributifs et tout sous-treillis d'un treillis distributif sont distributifs.

Montrer que l'image d'un treillis distributif par un morphisme latticiel (chapitre 3, définition 3.3) est distributif. Montrer que si T est un treillis distributif et P un ensemble ordonné, l'ensemble T^P des applications isotones de P dans T est un treillis distributif.

Exercice 5.3 [FORMULE D'INCLUSION ET D'EXCLUSION] Soit T un treillis distributif et r la fonction de rang de ce treillis. Montrer qu'on a la propriété (a) suivante : pour tous $x, y \in T$, $r(x \vee y) = r(x) + r(y) - r(x \wedge y)$ (utiliser la proposition 5.13 et le théorème 5.1).

En déduire par récurrence sur n que T vérifie la propriété (b) suivante : pour tous $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n \in T$ avec $n \geq 2$,

$$r\left(\bigvee_{1 \leq i \leq n} x_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} r(x_i) \\ + \dots + (-1)^{k+1} \sum_{A \in P_k} \left(\bigwedge_{i \in A} x_i\right) + \dots + (-1)^{n+1} r\left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} x_i\right),$$

où P_k est l'ensemble de toutes les parties à k éléments de $\{1, \dots, i, \dots, n\}$.

Ecrire ce que devient la formule (b) lorsque T est le treillis 2^X des parties d'un ensemble X (on obtient la formule dite d'« inclusion et d'exclusion »).

Montrer qu'un treillis rangé vérifiant la propriété (b) pour $n \leq 3$ est distributif (montrer que $x \wedge (y \vee z)$ et $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ sont deux éléments comparables et de même rang).

N.B. Les treillis rangés vérifiant la propriété (a) sont les treillis dits *modulaires*, caractérisés aussi par la propriété (M) de modularité apparaissant à la preuve de l'implication (3) \implies (1) du théorème 5.1. Un treillis distributif est donc modulaire, la réciproque étant fautive comme le montre le treillis de la figure 5.1(a).

Exercice 5.4 Construire le treillis distributif $\mathcal{C}(P)$ des parties commençantes de l'ensemble ordonné P lorsque P est :

1. l'antichaîne A_n à n éléments,
2. la chaîne C_n à n éléments.

Construire le treillis $\mathcal{C}(P)$ où P est l'un des ensembles ordonnés de l'annexe B et vérifier les assertions du théorème 5.6.

Exercice 5.5 Caractériser les treillis distributifs isomorphes aux treillis des parties commençantes de P lorsque P est :

1. un ensemble fortement ordonné,
2. un ensemble ordonné obtenu comme somme cardinale de chaînes.

Exercice 5.6 Montrer qu'un treillis distributif T est isomorphe à l'ensemble ordonné des applications antitones de S_T (ensemble ordonné de ses sup-irréductibles) dans $\underline{2} = \{0 < 1\}$ et anti-isomorphe à l'ensemble ordonné $\underline{2}^{S_T}$ des applications isotones de S_T dans $\underline{2}$ (utiliser le théorème 5.9 de Birkhoff).

Exercice 5.7 [TREILLIS DISTRIBUTIF LIBRE] On appelle *fonction booléenne croissante* sur un ensemble X toute application isotone f de $\underline{2}^X$ dans $\{0 < 1\}$, *famille finissante* sur X toute famille \mathcal{F} de parties de X vérifiant $[A \in \mathcal{F}, B \supseteq A \text{ impliquent } B \in \mathcal{F}]$, et *famille de Sperner* sur X toute famille \mathcal{F} de parties de X vérifiant $[A, B \in \mathcal{F} \text{ et } A \subseteq B \text{ impliquent } A = B]$ (\mathcal{F} est donc une antichaîne du treillis $\underline{2}^X$). Montrer que les ensembles formés de :

1. toutes les fonctions booléennes croissantes,
2. toutes les familles finissantes,
3. toutes les familles de Sperner,

définies sur le même ensemble X peuvent être munis de structures de treillis distributifs isomorphes.

Représenter le diagramme d'un de ces treillis pour $|X| = 2$.

N.B. Si l'on ôte à l'un des treillis distributifs ainsi obtenus son minimum et son maximum, on obtient un treillis distributif isomorphe au « treillis distributif libre à $|X|$ générateurs » ; ce treillis distributif, noté $TDL(n)$, est engendré par un ensemble X de n générateurs et est tel que, pour tout treillis distributif T engendré par $A \subseteq X$, il existe un morphisme latticiel surjectif de $TDL(n)$ sur T dont les générateurs sont des points fixes

(cf. Birkhoff [50], 1967 ou Barbut et Monjardet [33], 1970). Le nombre $f(n) = |TDL(n)| + 2$ est donc le nombre d'antichaînes (dont celle, vide, à distinguer de l'antichaîne $\{\emptyset\}$) du treillis booléen $\underline{2}^X$. Le « problème de Dedekind » consiste à calculer ce nombre (que Dedekind avait calculé pour $n \leq 4$). On a $f(1) = 3, f(2) = 6, f(3) = 20, f(4) = 168, f(5) = 7\ 581, f(6) = 7\ 828\ 354, f(7) = 2\ 414\ 682\ 040\ 998, f(8) = 56\ 130\ 437\ 228\ 687\ 557\ 907\ 788$ et une estimation asymptotique de $f(n)$ (cf. Quackenbush [348], 1986 et Wiedemann [424], 1991).

Exercice 5.8 Montrer que le nombre minimum de générateurs du treillis représenté à la figure 5.3(b) est 3 (par exemple, en utilisant le corollaire 5.21).

Exercice 5.9 Soient T et T' deux treillis de minimums respectifs 0 et $0'$ et de maximums respectifs 1 et $1'$. On note ω (respectivement, ν) le nombre d'éléments minimums (respectivement, maximums) de ces deux treillis qui en sont des éléments inf-irréductibles (respectivement, des éléments sup-irréductibles). Montrer qu'on a $g(T \times T') \leq g(T) + g(T') + \min(\omega, \nu)$.

Exercice 5.10 [DUPLICATION DANS UN TREILLIS DISTRIBUTIF, HABIB ET NOURINE [214]] Soit T un treillis distributif, S_T (respectivement, I_T) l'ensemble de ses éléments sup-irréductibles (respectivement, inf-irréductibles); on utilise les notations du corollaire 5.11.

1. Expliciter l'isomorphisme ι^{-1} entre I_T et S_T . Si $i \in I_T$ et $s = \iota^{-1}(i)$, montrer que les intervalles $[s^-, i]$ et $[s, i^+]$ sont isomorphes (considérer l'application $x \mapsto x \vee s$). Montrer que l'intervalle $[s^-, i^+]$ est isomorphe au produit direct $\underline{2} \times [s^-, i]$.

2. Si i est un inf-irréductible minimal de I_T , montrer que $[i]$ est isomorphe à $[s, i^+]$ (où $s = \iota^{-1}(i)$) et que $T \setminus [i]$ est un treillis distributif dont l'ensemble des inf-irréductibles est $I_T \setminus \{i\}$. En déduire qu'à toute extension linéaire $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ de T , avec $n = |I_T|$, on peut associer une partition C_1, C_2, \dots, C_{n+1} de T en $n + 1$ sous-treillis de T , avec $C_{n+1} = \{1_T\}$.

3. Soit x un élément de T ; on considère l'ensemble $\mathcal{I}_x = (x) \times \{1\}$ (dont tout élément est donc de la forme $z' = z1$ avec $z \in (x)$). On définit une relation \leq' sur $T + \mathcal{I}_x$ en posant :

$$z' \leq' t' \iff \begin{cases} z', t' \in T \text{ et } z' \leq t', \\ \text{ou} \\ z' \in T, t' = t1 \in \mathcal{I}_x \text{ et } z' \leq t, \\ \text{ou} \\ z' = z1 \in \mathcal{I}_x, t' \in T \text{ et } z \leq t', \\ \text{ou} \\ z' = z1, t' = t1 \in \mathcal{I}_x \text{ et } z \leq t. \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble ordonné $T^x = (T + \mathcal{I}_x, \leq')$ ainsi obtenu est un treillis distributif. Déterminer ses éléments sup-irréductibles et inf-irréductibles.

N.B. La construction du point (3) ci-dessus peut être faite en remplaçant l'idéal de base x par un intervalle quelconque d'un treillis T quelconque également. En partant de la chaîne $\underline{1}$, on peut ainsi obtenir tous les *treillis bornés* (classe de treillis contenant les treillis distributifs) (cf. par exemple Bertet et Caspard [46], 2002).

Exercice 5.11 [NOMBRE MINIMUM DE GÉNÉRATEURS DU TREILLIS BOO-LÉEN] On considère le treillis booléen $\underline{2}^E$, où $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Soit \mathcal{F} une famille de parties de E de cardinalité t . On dit que \mathcal{F} est *séparante* si, pour tous éléments distincts i et j de E , il existe $A, B \in \mathcal{F}$ tels que $i \in A \setminus B$ et $j \in B \setminus A$. Pour tout $i \in E$, on pose $\mathcal{F}(i) = \{A \in \mathcal{F} : i \in A\}$ et $\mathcal{F}^* = \{\mathcal{F}(i), i \in E\}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. \mathcal{F} est séparante,
2. pour tout $i \in E$, $\bigcap \mathcal{F}(i) = \{i\}$,
3. \mathcal{F}^* est une famille de Sperner de cardinal n ,
4. \mathcal{F} est une partie génératrice du treillis $\underline{2}^E$.

En déduire que $g(\underline{2}^X) = t(n)$ où $t(n) = \min\{t \in \mathbb{N} : n \leq \binom{t}{\frac{t}{2}}\}$ (remarquer que \mathcal{F}^* est une famille de Sperner sur \mathcal{F} et utiliser le théorème de Sperner (chapitre 4, théorème 4.20)).

Exercice 5.12 [DISTANCE DE LA DIFFÉRENCE SYMÉTRIQUE] La différence symétrique de deux parties A et B d'un ensemble E est $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. On pose $\delta(A, B) = |A \Delta B|$. Montrer que (a) $\delta(A, B) = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 2|A \cup B| - |A| - |B|$, et (b) $\delta(A, B) + \delta(B, C) = \delta(A, C) + 2|(A \cap C) \setminus B| + 2|B \setminus (A \cup C)| = \delta(B, A \cup C) + \delta(B, A \cap C)$.

En déduire que δ est une distance sur l'ensemble des parties de E et qu'on a $\delta(A, B) + \delta(B, C) = \delta(A, C)$ si et seulement si $A \cap C \subseteq B \subseteq A \cup C$.

Exercice 5.13 [A PROPOS DE COMPLÉMENTATION, Barbut et Monjardet [33]] Dans un treillis T dont 0 et 1 sont le minimum et le maximum respectivement, on appelle *complément* de l'élément x tout élément x' tel que $x \wedge x' = 0$ et $x \vee x' = 1$. Un treillis T est dit *complémenté* si tout élément x admet au moins un complément (chapitre 2, définition 2.18).

1. Montrer que si T est distributif, tout élément admet au plus un complément.
2. Un treillis distributif et complémenté est dit *booléen*. Un treillis dont tout intervalle est un treillis complémenté est dit *relativement complémenté*. Montrer qu'un treillis booléen est relativement complémenté (indication : le complément de x dans l'intervalle $[a, b]$ s'obtient à partir du complément de x dans T).
3. Montrer qu'un treillis relativement complémenté est atomistique et coatomistique (chapitre 3, définition 3.20).

4. Montrer qu'un treillis booléen est isomorphe au treillis des parties de l'ensemble de ses atomes.

Exercice 5.14 [GÉNÉRALISATION DE LA PROPOSITION 5.30] Soit $P = (X, O)$ un ensemble ordonné avec $|X| = n$. Montrer que les préordres à k classes (respectivement, les ordres) contenant l'ordre O sont en bijection avec les topologies de longueur k (respectivement, de longueur n) contenues dans $\mathcal{C}(P)$. Transférer ce résultat aux treillis distributifs.

Codages et dimensions des ordres

Nous avons déjà eu plusieurs fois l'occasion de considérer des codages (définition 3.1) d'un ensemble ordonné dans un autre ensemble ordonné. Il est en effet naturel, devant un ensemble ordonné pouvant avoir une structure complexe, de chercher à le représenter dans une structure ordinaire plus simple. Dans ce chapitre, nous prendrons comme structure simple les ensembles ordonnés obtenus comme produits directs de chaînes (cf. la section 1.5.2). Un codage de l'ensemble ordonné P sera donc une application envoyant P dans un sous-ensemble ordonné, isomorphe à P , d'un tel produit. Cette notion se particularise lorsqu'on impose des conditions sur la cardinalité des chaînes. Ainsi, quand toutes les chaînes sont de cardinalité k (k étant un entier fixé), comme nous le supposerons dans la suite, nous parlerons de k -codage. Le nombre minimum de chaînes nécessaires pour qu'il existe un k -codage de P s'appellera la k -dimension de P .

Dans la première section de ce chapitre nous étudions les 2-codages et la 2-dimension appelée aussi *dimension booléenne* d'un ensemble ordonné P . Se donner un 2-codage de P , i.e. un codage de P dans un produit direct de p chaînes de cardinalité 2, équivaut en effet à se donner un codage de P dans le treillis booléen des parties d'un ensemble de cardinal p (codage qu'on peut aussi appeler *booléen*). La dimension booléenne de l'ensemble ordonné P est donc le nombre minimum d'éléments d'un ensemble dont une famille de parties, ordonnée par inclusion, reproduit exactement (i.e. est isomorphe à) P . Un résultat énoncé au chapitre 3 (proposition 3.6) montre qu'un ensemble ordonné admet toujours un codage booléen (dans le treillis des sous-ensembles d'une de ses parties sup-généatrices). Quant au problème de la recherche de la dimension booléenne, nous l'avons déjà rencontré au chapitre 1 (exemple 1.18) dans le cas particulier où il s'agissait de coder de manière optimale une hiérarchie de types dans $\underline{2}^S$. Plus généralement, ce problème a été posé en algorithmique pour l'obtention du meilleur codage booléen d'un ensemble ordonné.

Un autre cas particulier important de k -codage d'un ensemble ordonné P est celui où l'on prend k égal à la cardinalité de P ou, ce qui est équivalent, lorsqu'on cherche à coder P dans un produit direct \mathbb{N}^q (avec q un entier quelconque). L'entier q minimum pour qu'il existe un tel codage s'appelle alors la *dimension* de P . Les sections 6.2 et 6.3 sont consacrées à l'étude de cette dimension. Dans la section 6.2 nous donnons d'abord quelques résultats généraux, notamment sur le comportement de la dimension par rapport aux opérations sur les ensembles ordonnés vues au chapitre 1 (section 1.5). Puis nous démontrons le théorème d'Hiraguchi selon lequel la dimension de P est bornée par $\frac{|P|}{2}$ (pour $|P| \geq 4$); la démonstration utilise deux autres bornes, dont l'une est la largeur de P . La section 6.3 est consacrée aux ensembles ordonnés de dimension 2 dont nous donnons plusieurs caractérisations.

Au lieu de parler de la dimension de l'ensemble ordonné $P = (X, \leq)$, nous parlerons aussi de la dimension de l'ordre \leq (étant sous-entendu que cet ordre est défini sur l'ensemble X). D'autre part, il sera parfois commode de remplacer la notation \leq par la notation littérale O . On verra en effet apparaître d'autres définitions des notions de dimension d'un ensemble ordonné ou de l'ordre correspondant faisant intervenir des préordres totaux d'un certain type dont l'intersection est cet ordre. Ainsi, la dimension booléenne de $P = (X, O)$ est aussi le nombre minimum de préordres totaux à deux classes dont l'intersection est l'ordre O , tandis que sa dimension est aussi le nombre minimum d'ordres totaux dont O est intersection. Ces définitions équivalentes sont la conséquence d'un résultat général sur la k -dimension présenté à la section 6.4 et lui-même provenant de la dualité fondamentale entre préordres et topologies vue au chapitre 5.

Le fait que la dimension d'un ordre soit le nombre minimum d'ordres totaux dont il est intersection explique pourquoi cette notion a pu être utilisée dans des modélisations en sciences sociales. Si, par exemple, O représente l'ordre de préférence d'un agent économique, sa dimension représente le nombre minimum de critères linéaires expliquant sa préférence au sens où l'agent préfère le bien x au bien y si et seulement si il le préfère sur tous les critères. Nous reviendrons sur de telles utilisations de la notion de dimension dans les compléments en section 6.5 de ce chapitre.

Nous aurons besoin de quelques notations générales pour une application d'un ensemble ordonné dans un produit direct de chaînes de même cardinalité. Nous notons $\underline{k}_1 \times \cdots \times \underline{k}_i \times \cdots \times \underline{k}_r$ le produit direct des r chaînes $\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_i, \dots, \underline{k}_r$, toutes de cardinalité k . En notant \leq_i l'ordre de la chaîne \underline{k}_i et \leq l'ordre de $\underline{k}_1 \times \cdots \times \underline{k}_i \times \cdots \times \underline{k}_r$, celui-ci est donc donné par $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r) \leq (x'_1, \dots, x'_i, \dots, x'_r)$ si et seulement si $x_i \leq_i x'_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$. Se donner une application c d'un ensemble ordonné P dans $\underline{k}_1 \times \cdots \times \underline{k}_i \times \cdots \times \underline{k}_r$ revient à se donner les r applications « i ème coordonnée » $c_1, \dots, c_i, \dots, c_r$ de P dans, respectivement, $\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_i, \dots, \underline{k}_r$ et l'on écrit : $c(x) = (c_1(x), \dots, c_i(x), \dots, c_r(x))$ et $c = (c_1, \dots, c_i, \dots, c_r)$.

6.1 Codages booléens et dimension booléenne d'un ensemble ordonné

Nous étudions ici les codages d'un ensemble ordonné dans le produit direct de chaînes $\underline{k}_1 \times \cdots \times \underline{k}_i \times \cdots \times \underline{k}_r$, où toutes les chaînes \underline{k}_i sont isomorphes à la chaîne $C_2 = \{0 < 1\}$.

Définition 6.1 1. Un 2-codage, dit aussi codage booléen, d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est une application $c = (c_1, \dots, c_i, \dots, c_r)$ de P dans un produit direct $\underline{k}_1 \times \cdots \times \underline{k}_i \times \cdots \times \underline{k}_r$ de r chaînes de cardinalité 2, telle que :

$$x \leq y \iff c_i(x) \leq_i c_i(y) \text{ pour tout } i = 1, \dots, r$$

2. Un codage booléen $c = (c_1, \dots, c_i, \dots, c_r)$ de P est strict si, pour tout $i = 1, \dots, r$, $c_i(P) = \underline{k}_i$.
3. La dimension booléenne (ou 2-dimension) de P , notée $\dim_2 P$, est le nombre minimum de chaînes de cardinalité 2 tel qu'il existe un codage booléen de P dans le produit direct de ces chaînes.

Le terme de « booléen » utilisé ci-dessus s'explique aisément. En effet, le produit direct $\underline{k}_1 \times \cdots \times \underline{k}_i \times \cdots \times \underline{k}_r$ de r chaînes à deux éléments étant isomorphe à l'ensemble ordonné des parties d'un ensemble E de cardinalité r , on peut aussi dire qu'un codage booléen (respectivement, booléen strict) de P est une application c de P dans le treillis booléen $\underline{2}^E$ des parties d'un ensemble E telle que :

$$x \leq y \iff c(x) \subseteq c(y)$$

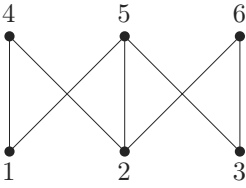
(respectivement, telle que $x \leq y \iff c(x) \subseteq c(y)$ et pour tout i , $c_i(P) \neq \emptyset, E$).

De même, la dimension booléenne de P est la cardinalité minimum d'un ensemble E tel qu'il existe un codage booléen de P dans $\underline{2}^E$.

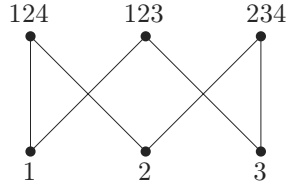
Le fait que tout ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ admet bien un codage booléen a déjà été vu au chapitre 3 puisqu'il suffit de prendre pour l'ensemble E de codage une partie sup-génératrice de P (proposition 3.6). En particulier, si l'on prend $E = X$, on obtient le codage de P par ses sections commençantes $(x]$ ($x \leq y$ si et seulement si $(x] \subseteq (y]$). D'autre part, puisque la partie sup-génératrice minimale de P est formée par l'ensemble $S(P)$ de ses éléments sup-irréductibles, on obtient le résultat suivant :

Proposition 6.2 Pour tout ensemble ordonné P , $\dim_2 P \leq |S(P)|$.

A la figure 6.1, on a représenté en (b) un codage booléen dans $\underline{2}^4$ de l'ensemble ordonné P à 6 éléments représenté en (a). On a donc dans ce cas $\dim_2 P \leq 4 < |S(P)| = 5$, ce qui montre que la dimension booléenne d'un ensemble ordonné peut être strictement inférieure au nombre de ses sup-irréductibles (on verra plus loin que la dimension booléenne de cet ensemble ordonné P est 4).



(a) P



(b)

$X \setminus E$	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	1	1	0	1
5	1	1	1	0
6	0	1	1	1

(c)

FIG. 6.1. (a) Ensemble ordonné P (b) Codage booléen de P et (c) représentation de ce codage par un tableau 0/1.

On remarque qu'un codage booléen de P dans $\underline{2}^E$ peut se représenter sous la forme d'un « tableau 0/1 » ; les lignes de ce tableau correspondent aux éléments x de P , ses colonnes aux éléments j de E ; l'entrée $t(x, j)$ vaut 1 si $j \in c(x)$, et 0 sinon ; ainsi, on a $c(x) = \{j \in E : t(x, j) = 1\}$. Dans l'exemple de codage de la figure 6.1, ce tableau est représenté en (c).

Inversement, n'importe quel tableau 0/1 aux lignes deux à deux distinctes peut être considéré comme représentant un codage de l'ensemble des étiquettes de ses lignes, ordonné par l'ordre $x \leq y$ si et seulement si $t(x, j) \leq t(y, j)$, pour toute colonne j du tableau.

Le fait qu'un codage booléen de P soit strict se reconnaît sur le tableau associé, puisque le codage est strict si et seulement si ce tableau ne contient aucune colonne composée uniquement de 0 ou uniquement de 1 (ce qui est le cas pour le codage de la figure 6.1). Les codages booléens non stricts n'ont guère d'intérêt, puisqu'on les obtient à partir des codages stricts en rajoutant des colonnes de 0 ou de 1 aux tableaux correspondants. En particulier, il est clair que les codages booléens dans $\underline{2}^{dim_2 P}$ sont stricts. Nous donnons donc ci-dessous le théorème fondamental pour les codages booléens en nous limitant aux codages stricts.

Il sera plus commode pour ce théorème de noter O la relation d'ordre de l'ensemble ordonné P , qui s'écrit donc $P = (X, O)$. Rappelons aussi qu'on note $\mathcal{C}(P)$ l'ensemble des parties commençantes de P et qu'une partie commençante est dite propre si elle n'est égale ni à P ni à la partie vide.

Théorème 6.3 *Soit $P = (X, O)$ un ensemble ordonné. Les trois ensembles ci-dessous sont en bijection :*

1. *l'ensemble des codages booléens stricts de P dans $\underline{2}^E$, avec $|E| = r$,*
2. *l'ensemble des familles (R_1, \dots, R_r) de r préordres totaux à deux classes définis sur X et dont l'intersection est O ,*
3. *l'ensemble des familles (C_1, \dots, C_r) de r parties commençantes propres de P engendrant (par union et intersection) toutes les parties commençantes de P .*

Ce théorème est l'application au cas où $\underline{k} = \underline{2}$ d'un théorème fondamental (théorème 6.29) sur les codages de P dans le produit de chaînes \underline{k}^r . Nous en donnerons donc la preuve après avoir démontré le théorème 6.29 dans la quatrième section de ce chapitre.

Corollaire 6.4 *La dimension booléenne d'un ensemble ordonné P est le nombre minimum $g[\mathcal{C}(P)]$ de générateurs de $\mathcal{C}(P)$ (i.e. le nombre minimum de parties commençantes propres de P engendrant par union et intersection toutes les parties commençantes de P) :*

$$\dim_2 P = g(\mathcal{C}(P))$$

Ce corollaire est une conséquence immédiate du point (3) du théorème 6.3, puisque chercher la dimension booléenne de P équivaut à chercher une partie génératrice de $\mathcal{C}(P)$ de cardinalité minimum. On n'oubliera pas pour l'application de ces résultats qu'engendrer toutes les parties commençantes de $P = (X, O)$ revient à engendrer toutes ses parties commençantes propres (puisque la partie vide et la partie X sont toujours engendrées trivialement).

Il résulte du corollaire que la recherche de la dimension booléenne d'un ensemble ordonné se ramène à celle du nombre minimum de générateurs d'un treillis distributif, problème étudié au chapitre 5. A la figure 5.2, nous y avons déterminé à titre d'exemple les parties génératrices minimales du treillis $\mathcal{C}(P)$ pour un ensemble ordonné P isomorphe à celui de la figure 6.1(a). Puisque l'on avait alors montré que $g(\mathcal{C}(P)) = 4$, on en déduit que la dimension booléenne de P est 4.

Une autre application immédiate du corollaire 6.4 est la détermination de la dimension booléenne d'une chaîne \underline{k} . En effet le treillis des parties commençantes d'une telle chaîne est isomorphe à la chaîne $\underline{k+1}$, dont tous les éléments sauf le minimum et le maximum sont doublement irréductibles. On obtient donc $\dim_2 \underline{k} = k - 1$.

Le passage d'un codage booléen strict de P à une famille de parties commençantes (propres) de P engendrant $\mathcal{C}(P)$, ou le passage inverse, se fait de façon particulièrement simple en considérant le tableau 0/1 défini après la proposition 6.2 (cf. la figure 6.1(c)). A partir d'un tel tableau associé à un codage de P dans $\underline{2}^E$, la famille génératrice correspondante de $\mathcal{C}(P)$ est $\{C_i, i \in E\}$, avec, pour tout $i \in E$, $C_i = \{x \in P : t(x, i) = 0\}$.

Ainsi, dans l'exemple de l'ensemble ordonné P de la figure 6.1, on obtient comme famille génératrice de $\mathcal{C}(P)$ la famille $\{236, 13, 124, 1235\}$ (ce qu'on peut vérifier sur le treillis isomorphe à $\mathcal{C}(P)$ de la figure 5.2).

Inversement, à une famille génératrice de $\mathcal{C}(P)$ formée de r parties commençantes de P , on associe un tableau 0/1 à $|P|$ lignes et r colonnes, en associant à chaque partie commençante C_j la colonne j où $t(x, j) = 0$ si $x \in C_j$, et $t(x, j) = 1$ sinon. Les lignes de ce tableau induisent alors le codage cherché (on laisse au lecteur le soin de vérifier que ces assertions résultent du théorème 6.3).

Donnons quelques résultats généraux sur la dimension booléenne en commençant par son comportement par rapport à certaines opérations sur les ensembles ordonnés (cf. la section 1.5 du chapitre 1).

Proposition 6.5 *Soient P, Q et $P_i, i = 1, \dots, h$ des ensembles ordonnés. Alors :*

1. $Q \sqsubseteq P$ implique $\dim_2 Q \leq \dim_2 P$,
2. $\dim_2 P^d = \dim_2 P$,
3. $\dim_2(\Sigma_{1 \leq i \leq h} P_i) \leq \min(\omega, \nu) + \Sigma_{1 \leq i \leq h} \dim_2 P_i$, où $\omega = |\{i : P_i \text{ a un minimum}\}|$ et $\nu = |\{i : P_i \text{ a un maximum}\}|$,
4. $\dim_2(\bigoplus_{1 \leq i \leq h} P_i) = t + \Sigma_{1 \leq i \leq h} \dim_2 P_i$, où $t = |\{i : P_i \text{ a un maximum et } P_{i+1} \text{ un minimum}\}|$,
5. $\dim_2(\Pi_{1 \leq i \leq h} P_i) \leq \Sigma_{1 \leq i \leq h} \dim_2 P_i$, avec l'égalité si tous les P_i ont un minimum et un maximum.

Preuve. (1) Immédiat puisque, si Q est un sous-ensemble ordonné de P , on obtient un codage booléen de Q en restreignant le codage booléen de P à ce sous-ensemble.

(2) Immédiat puisque, si c est un codage de P dans $\mathbb{2}^E$, on obtient un codage c' de P^d dans $\mathbb{2}^E$ en posant $c'(x) = E \setminus c(x)$.

Nous montrons (3), (4) et (5) pour deux ensembles ordonnés $P_1 = (X_1, \leq_1)$ et $P_2 = (X_2, \leq_2)$, laissant au lecteur le soin de généraliser.

(3) La dimension booléenne de $P_1 + P_2$ est le nombre minimum de générateurs de $\mathcal{C}(P_1 + P_2)$, treillis isomorphe au treillis $\mathcal{C}(P_1) \times \mathcal{C}(P_2)$ (proposition 5.8). D'après le résultat de l'exercice 5.9, le nombre minimum de générateurs de ce treillis produit est borné par la somme des nombres minimum de générateurs de $\mathcal{C}(P_1)$ et $\mathcal{C}(P_2)$ (i.e. $\dim_2 P_1 + \dim_2 P_2$) et du minimum des nombres ω et ν , où ω (respectivement, ν) est le nombre des P_i ($i = 1, 2$) tels que dans $\mathcal{C}(P_i)$ la partie vide \emptyset (respectivement, la partie X_i) est un inf-irréductible (respectivement, un sup-irréductible). Le point (2) du théorème 5.6 donne alors le résultat.

(4) La dimension booléenne de $P_1 \oplus P_2$ est le nombre minimum de générateurs de $\mathcal{C}(P_1 \oplus P_2)$, treillis isomorphe au treillis $\mathcal{C}(P_1) \oplus' \mathcal{C}(P_2)$ (proposition 5.8). D'autre part, d'après le point (2) du théorème 5.6, l'élément obtenu en identifiant le maximum de $\mathcal{C}(P_1)$ et le minimum de $\mathcal{C}(P_2)$ n'est

doublement irréductible (et donc doit être inclus dans toute partie génératrice de $\mathcal{C}(P_1) \oplus \mathcal{C}(P_2)$) que si P_1 admet un maximum et P_2 un minimum. Or il est aisé de voir que, si T_1 et T_2 sont deux treillis, $g(T_1 \oplus T_2) = g(T_1) + g(T_2) + t$, avec $t = 1$ si $u_1 \in S(T_1)$ et $0_2 \in I(T_2)$, et $t = 0$ sinon. On en déduit l'égalité cherchée.

(5) Soit c_1 (respectivement, c_2) un codage de P_1 (respectivement, P_2) dans $\underline{2}^{E_1}$ (respectivement, $\underline{2}^{E_2}$) avec $|E_i| = \dim_2 P_i$ ($i = 1, 2$). On vérifie immédiatement que l'application c de $P_1 \times P_2$ dans $\underline{2}^{E_1 + E_2}$ définie par $c(x_1, x_2) = c_1(x_1) + c_2(x_2)$ – où $+$ désigne ici l'union disjointe – est un codage, d'où l'inégalité de (5).

Supposons que P_i ($i = 1, 2$) admette un minimum 0_i et un maximum u_i . Il faut montrer $\dim_2(P_1 \times P_2) = \dim_2 P_1 + \dim_2 P_2$, soit, compte tenu de l'inégalité obtenue ci-dessus, $\dim_2(P_1 \times P_2) \geq \dim_2 P_1 + \dim_2 P_2$. Soit $c = (c_1, \dots, c_i, \dots, c_r)$ un codage de $P_1 \times P_2$ dans $\underline{2}^E$, avec $E = \{1, \dots, i, \dots, r\}$ (où $r = \dim_2(P_1 \times P_2)$). Posons $A = \{i \in E : c_i(0_1, u_2) = 0 < c_i(u_1, 0_2) = 1\}$ et $B = \{i \in E : c_i(0_1, u_2) = 1 > c_i(u_1, 0_2) = 0\}$ (avec, puisque $(0_1, u_2)$ et $(u_1, 0_2)$ sont incomparables, A et B non vides). Nous allons montrer que, pour tout $i \in A$, les restrictions des c_i à $P_1 \times \{0_2\}$ induisent un codage booléen de cet ensemble ordonné. Il suffit pour cela de montrer que, si deux éléments x et y sont incomparables dans P_1 , les images de $(x, 0_2)$ et $(y, 0_2)$ par ces restrictions sont incomparables. Puisque $(y, 0_2) < (u_1, 0_2)$ et $(0_1, u_2) < (x, u_2)$ dans l'ordre produit, on a, pour tout $i \in B$, $c_i(y, 0_2) = 0 < c_i(x, u_2) = 1$; puisque $(y, 0_2)$ et (x, u_2) sont incomparables, il existe $i \in A$ tel que $c_i(y, 0_2) = 1 > c_i(x, u_2) = c_i(x, 0_2) = 0$. Un raisonnement similaire montre qu'il existe $j \in A$ avec $c_j(y, 0_2) = 0 < c_j(x, 0_2) = 1$, ce qui montre le résultat annoncé d'incomparabilité. Pour tout $i \in A$, les restrictions des c_i à $P_1 \times \{0_2\}$ induisant un codage booléen de cet ensemble ordonné et donc de P_1 , on en déduit $|A| \geq \dim_2 P_1$. On montre de même que $|B| \geq \dim_2 P_2$, d'où $\dim_2(P_1 \times P_2) \geq |A| + |B| \geq \dim_2 P_1 + \dim_2 P_2$, et l'égalité annoncée. \square

Puisque la dimension booléenne d'une chaîne \underline{k} est $k-1$ (pour $k \geq 2$), on déduit immédiatement du point (5) de cette proposition la dimension booléenne d'un produit de chaînes de longueurs quelconques.

Corollaire 6.6 *Si $\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_i, \dots, \underline{k}_h$ sont h chaînes toutes de cardinalités supérieures à 1, $\dim_2(\underline{k}_1 \times \dots \times \underline{k}_i \times \dots \times \underline{k}_h) = (\sum_{1 \leq i \leq h} k_i) - h$.*

Le problème de trouver la dimension booléenne d'un ensemble ordonné est généralement difficile (cf. l'annexe A). Il est donc intéressant de connaître des bornes facilement calculables sur cette dimension, ce qui est le cas de celles données ci-dessous. Rappelons que $\lambda(P)$ et $\alpha(P)$ désignent respectivement la longueur et la largeur de l'ensemble ordonné P ($\lambda(P)$ est définie page 20).

Proposition 6.7 *Pour tout ensemble ordonné P , on a*

$$\max[\log_2|P|, \lambda(P), t(\alpha(P))] \leq \dim_2 P \leq |P|,$$

où $t(n)$ désigne le plus petit entier t tel que $n \leq \binom{t}{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}$.

Preuve. Soit P codé dans $\underline{2}^d$ avec $d = \dim_2 P$; on a donc $2^d \geq |P|$, $\lambda(\underline{2}^d) = d \geq \lambda(P)$, et $\alpha(\underline{2}^d) = \binom{d}{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ (théorème 4.20) $\geq \alpha(P)$, d'où la borne inférieure. La borne supérieure est immédiate en utilisant le fait que l'application associant à tout élément x sa section commençante $[x]$ est un codage de P dans $\underline{2}^{|P|}$. \square

On notera que les bornes données dans cette proposition peuvent être atteintes. Ainsi, la proposition 6.35 montre que la borne inférieure $\lambda(P)$ est atteinte par les treillis distributifs (puisque la longueur d'un tel treillis est égale au nombre de ses sup-irréductibles). Les ensembles ordonnés pour lesquels $\dim_2 P = |P|$ ont été caractérisés (voir la section 6.5). Le lecteur cherchera des exemples pour les autres cas.

6.2 Dimension d'un ensemble ordonné

Nous étudions maintenant les codages d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ de cardinalité n dans le produit direct de chaînes \underline{n}_i , toutes isomorphes à la chaîne $\underline{n} = \{0 < 1 < \dots < n - 1\}$. Rappelons que, si c désigne ce codage, on a alors $x \leq y$ si et seulement si $c(x) \leq c(y)$ dans l'ordre produit (cf. la définition 3.1).

Définition 6.8 *Soit $P = (X, \leq)$ un ensemble ordonné de cardinalité n . Un n -codage (cartésien) de P est un codage c de P dans un produit direct de chaînes toutes de cardinalité n . Lorsque ce produit direct est celui de r chaînes (c'est-à-dire qu'il est égal à $\underline{n}_1 \times \dots \times \underline{n}_i \times \dots \times \underline{n}_r$), on écrit $c = (c_1, \dots, c_i, \dots, c_r)$ et l'on a :*

$$x \leq y \iff c_i(x) \leq_i c_i(y), \text{ pour tout } i = 1, \dots, r$$

Un n -codage $c = (c_1, \dots, c_i, \dots, c_r)$ de P est strict si, pour tout $i \leq r$, $c_i(P) = \underline{n}_i$.

La dimension de P , notée $\dim P$, est le nombre minimum de chaînes de cardinalité n tel qu'il existe un n -codage de P dans le produit direct de ces chaînes.

Au chapitre 1 (cf. la définition 1.33) nous avons donné une autre définition de la dimension d'un ensemble ordonné, que nous rappelons ci-dessous :

Définition 6.9 *Un ensemble d'extensions linéaires d'un ensemble ordonné P est une réalisation de P (on dit aussi que ces extensions linéaires réalisent P) si P est l'intersection de ces extensions. Une réalisation de P est minimale si*

l'intersection d'une quelconque de ses parties (strictes) contient strictement P . Une base de P est une réalisation (minimale) de P de cardinalité minimum (i.e. ayant le plus petit nombre possible d'extensions linéaires de P). La dimension de P est le cardinal minimum d'une base de P , i.e. le nombre minimum d'extensions linéaires de P dont il est intersection.

Le fait que les deux définitions de la dimension données ci-dessus sont équivalentes (ainsi d'ailleurs que d'autres définitions) provient des résultats ci-dessous. Pour ces résultats, il sera commode d'utiliser la notation littérale $P = (X, O)$ de P .

Théorème 6.10 *Soit $P = (X, O)$ un ensemble ordonné de cardinal n et soit r un entier fixé. Les trois ensembles ci-dessous sont en bijection :*

1. *l'ensemble des n -codages stricts de P dans \underline{n}^r ,*
2. *l'ensemble des familles $(L_1, \dots, L_i, \dots, L_r)$ d'extensions linéaires de O réalisant O (i.e. tel que $O = \bigcap_{1 \leq i \leq r} L_i$),*
3. *l'ensemble des familles $(C_1, \dots, C_i, \dots, C_r)$ où, pour tout $i = 1, \dots, r$, C_i est une chaîne de longueur $n-2$ de parties commençantes propres de P , et telles que $\bigcup_{1 \leq i \leq r} C_i$ est une partie génératrice du treillis $\mathcal{C}(P)$ des parties commençantes de P .*

Ce théorème est l'application d'un résultat fondamental sur les codages de P dans le produit de chaînes \underline{k}^r (pour un entier $k \geq 2$). Nous en donnons donc la preuve après avoir démontré ce résultat (théorème 6.29) dans la quatrième section de ce chapitre.

Corollaire 6.11 *La dimension d'un ensemble ordonné $P = (X, O)$ de cardinal n est donnée par l'une quelconque des expressions suivantes :*

1. *le plus petit entier r tel qu'il existe un n -codage strict de P dans \underline{n}^r ,*
2. *le plus petit entier r tel qu'il existe un codage de P dans \mathbb{N}^r ,*
3. *le nombre minimum d'extensions linéaires de O dont O est intersection,*
4. *le nombre minimum de chaînes engendrant $\mathcal{C}(P)$,*
5. *la largeur minimum d'une partie génératrice de $\mathcal{C}(P)$,*
6. *la dimension convexe de l'ensemble $\mathcal{L}(O)$ des extensions linéaires de O .*

Preuve. (1) Pour prouver que, dans la définition de la dimension de P , on peut ne considérer que les codages stricts, il suffit de montrer que l'existence d'un codage de P dans \underline{n}^r implique celle d'un codage strict de P dans \underline{n}^r . Soit $c = (c_1, \dots, c_i, \dots, c_r)$ un n -codage de $P = (X, O)$ dans \underline{n}^r . Pour chaque $i \in E = \{1, \dots, r\}$, définissons un préordre total R_i sur X par $xR_i y$ si et seulement si $c_i(x) \leq c_i(y)$. On obtient ainsi une famille $(R_1, \dots, R_i, \dots, R_r)$ de r préordres totaux dont – puisque c est un codage – l'intersection est O . Le préordre total R_i contenant l'ordre O , il contient (au moins) une extension

linéaire L_i de O (théorème 2.29). Puisque, pour tout $i \in E$, $O \subseteq L_i \subseteq R_i$, on a $O = \bigcap_{1 \leq i \leq r} L_i$. Il résulte alors du théorème 6.10 qu'il existe un n -codage strict de P dans \underline{n}^r .

(2) On montre cette expression en prouvant qu'elle est équivalente à l'expression (3). Le même raisonnement que dans (1) prouve que, si $P = (X, O)$ est codé dans \mathbb{N}^r , O est intersection de r ordres totaux. Inversement, si $O = \bigcap_{i=1}^r L_i$ est intersection de r ordres totaux, on obtient un codage de P dans \underline{n}^r (et donc dans \mathbb{N}^r) en posant, pour tout x de P , $c(x) = (r_1(x), \dots, r_i(x), \dots, r_r(x))$, où $r_i(x)$ est le rang (normé) de x dans l'ordre total L_i . Ces deux assertions prouvent le résultat.

(3) Immédiat à partir du point (2) du théorème 6.10.

(4) Immédiat à partir du point (3) du théorème 6.10 et du fait que toute chaîne de $\mathcal{C}(P)$ constituée de parties commençantes propres de P peut être étendue en une chaîne de longueur $n - 2$.

(5) Immédiat à partir de (4) et du théorème de Dilworth (cette formulation résulte aussi d'une formule pour la k -dimension donnée à la proposition 6.33).

(6) Cette formulation nécessite d'abord de définir la notion de dimension convexe. On a vu au chapitre 5 que les fuseaux d'ordres (totaux) – i.e. les ensembles $\mathcal{L}(O)$ formés de toutes les extensions linéaires d'un ordre O défini sur X – sont les parties convexes de l'ensemble \mathcal{L}_X de tous les ordres totaux sur X (théorème 5.40 et définition 5.35). Comme l'intersection de parties convexes est convexe et que \mathcal{L}_X est convexe, les parties convexes forment une famille de Moore auquel est associée une fermeture Φ (définition 3.27) dite fermeture convexe : pour tout $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}_X$, sa *fermeture convexe* $\Phi(\mathcal{A})$ est la plus petite partie convexe contenant \mathcal{A} et elle est égale à $\mathcal{L}(O_{\mathcal{A}})$, où $O_{\mathcal{A}} = \bigcap \{L \in \mathcal{A}\}$ est l'ordre intersection des ordres totaux de \mathcal{A} . On appelle alors *base* d'une partie convexe $\mathcal{L}(O)$ une partie \mathcal{B} de $\mathcal{L}(O)$ minimale pour la propriété $\Phi(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(O)$. La *dimension convexe* de $\mathcal{L}(O)$ est la cardinalité minimum d'une de ses bases. Mais, puisque dire que $\Phi(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(O)$ équivaut à dire que $O = \bigcap \{L \in \mathcal{B}\}$, une base \mathcal{B} de $\mathcal{L}(O)$ au sens de la fermeture convexe n'est rien d'autre qu'une base de O au sens de la définition 1.33 (et de la définition 6.9 ci-dessus). La dimension convexe de $\mathcal{L}(O)$ est donc bien la dimension de $P = (X, O)$. \square

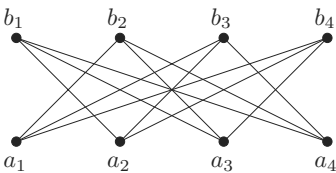
Comme exemple d'application du corollaire 6.11, on peut déterminer la dimension de l'ensemble ordonné représenté à la figure 6.1(a). En effet, si l'on utilise l'expression (5) de la dimension donnée dans ce corollaire, il suffit évidemment de considérer les parties génératrices minimales de $\mathcal{C}(P)$. Or, au chapitre 5 (à l'exemple 5.22, page 147), nous avons déterminé les parties génératrices minimales du treillis $\mathcal{C}(P)$ pour un ensemble ordonné P isomorphe à celui de la figure 6.1(a). Elles sont au nombre de quatre, dont trois de largeur 3 et une de largeur 2. On en déduit donc $\dim P = 2$. Cet exemple montre aussi qu'il faut se garder de croire que la largeur minimum d'une partie génératrice de $\mathcal{C}(P)$ est obtenue lorsqu'elle est de cardinal minimum : dans cet exemple, c'est la partie génératrice de cardinal maximum qui a la largeur minimum !

Le fait qu'on puisse donner plusieurs expressions pour la dimension d'un ensemble ordonné (celles du corollaire 6.11 ou d'autres comme celle de l'exercice 6.7) ne rend pas, en général, son calcul plus facile (il s'agit, en effet d'un problème « difficile » cf. l'annexe A). On est donc amené à rechercher des bornes sur cette dimension, ce qui fera l'objet des résultats de la fin de cette section. Une technique de preuve pour obtenir une borne supérieure, i.e. pour établir que $\dim P \leq r$ pour un entier r , est de montrer qu'un certain ensemble $\mathcal{E} = \{L_1, \dots, L_i, \dots, L_r\}$ d'ordres totaux est une réalisation de P . Il résulte immédiatement des définitions que ceci revient à montrer d'une part que les L_i sont des extensions linéaires de P (ce qui sera souvent évident), et d'autre part, que pour toute paire $\{x, y\}$ d'éléments incomparables dans P , il existe $L_i, L_j \in \mathcal{E}$ avec xL_iy et yL_jx . Si de plus, dans un tel cas, on a montré que $\dim P \geq r$, on obtient $\dim P = r$. L'exemple suivant illustre ce mode de détermination de la dimension d'un ensemble ordonné.

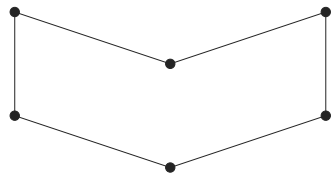
Exemple 6.12 On note S_n ($n \geq 2$) l'ensemble ordonné défini sur X de la manière suivante : $X = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$; les couples de S_n sont tous les couples (a_i, b_j) avec $i \neq j$ (S_4 est représenté à la figure 6.2(a)). On va montrer que $\dim S_n = n$.

Pour cela, on montre d'abord que $\dim S_n \leq n$, en exhibant une réalisation de S_n formée de n extensions linéaires. Le lecteur vérifiera que tel est le cas en prenant pour $i = 1, \dots, i, \dots, n$, $L_i = a_i b_{i+1} a_{i+1} b_{i+2} a_{i+2} \cdots a_{i-2} b_{i-1} a_{i-1} b_i$ (avec $n+1 = 1$).

Montrons ensuite que $\dim S_n \geq n$. Considérons en effet les deux couples (b_i, a_i) et (b_j, a_j) avec i différent de j . Puisqu'ils sont formés d'éléments incomparables dans S_n et qu'on a $a_i L_i b_i$ et $a_j L_j b_j$, une réalisation de S_n doit contenir deux extensions linéaires L_k et L_h de S_n telles que $b_i L_k a_i$ et $b_j L_h a_j$. Or $L_k = L_h = L$ est impossible, puisqu'on aurait alors $a_j L b_i L a_i L b_j L a_j$. Il en résulte qu'une réalisation de S_n doit comporter au moins autant d'ordres totaux que de couples (b_i, a_i) et donc que $\dim S_n \geq n$. On obtient finalement $\dim S_n = n$.



(a)



(b)

FIG. 6.2. (a) L'ensemble ordonné S_4 et (b) un ensemble ordonné P tel que $\dim P = \frac{|P|}{2} = 3$.

Nous examinons maintenant comment la dimension se comporte par rapport aux opérations usuelles sur les ensembles ordonnés (voir la section 1.5 du chapitre 1). Dans la proposition suivante, on considère h ensembles ordonnés P_i et les opérations portent sur ces h ensembles (dans plusieurs des formules suivantes, le domaine de variation de i , qui est toujours de 1 à h , n'est pas précisé).

Proposition 6.13 *Soient P, Q et P_i , pour $i = 1, \dots, h$ ($h \geq 2$) des ensembles ordonnés. On a alors :*

1. $Q \sqsubseteq P$ implique $\dim Q \leq \dim P$,
2. $\dim P^d = \dim P$,
3. $\dim P - 1 \leq \dim(P \setminus x) \leq \dim P$, pour tout $x \in P$,
4. $\dim \Sigma P_i = \max(2, \max(\dim P_i))$,
5. $\dim \bigoplus P_i = \max(\dim P_i)$,
6. $\dim Q_{y_1, \dots, y_h}^{P_1, \dots, P_h} = \max(\dim Q, \max(\dim P_i))$
7. $\max(\dim P_i) \leq \dim \Pi P_i \leq \Sigma \dim P_i$, avec $\dim \Pi P_i = \Sigma \dim P_i$ si les P_i sont tous bornés et non isomorphes à $\underline{1}$.

Preuve. (1) Immédiat puisque, si Q est un sous-ensemble ordonné de P , on obtient un codage de Q en restreignant le codage de P à ce sous-ensemble.

(2) Immédiat puisque, si $\{L_1, \dots, L_r\}$ est une réalisation de P , il est clair que $\{L_1^d, \dots, L_r^d\}$ est une réalisation de P^d .

(3) D'après (1), la suppression d'un élément x de P ne peut que diminuer ou laisser inchangée sa dimension. Il faut montrer que, s'il y a diminution, elle est d'au plus une unité, i.e. que $\dim P \leq \dim(P \setminus x) + 1$. Pour cela, nous montrons qu'à partir d'une base $\{L_1, \dots, L_r\}$ de $P \setminus x$, il existe une réalisation de P utilisant $r + 1$ extensions linéaires de P . A cet effet, nous construisons à partir de l'extension linéaire L_1 de $P \setminus x$ deux extensions linéaires M_1 et M_2 de P . Dans leurs définitions données ci-dessous, le nombre 1 en indice désigne la restriction de l'ordre L_1 au sous-ensemble indicé (et $I(x)$ est l'ensemble des éléments incomparables à x dans P) :

$$M_1 = [(x \cup I(x))_1 \oplus \{x\} \oplus x]_1 \qquad M_2 = (x_{[1 \oplus \{x\}] \oplus [I(x) \cup x]}]_1$$

On vérifie aisément que M_1 et M_2 sont bien des extensions linéaires de P et que, si y est un élément incomparable à x , on a yM_1x et xM_2y . Montrons que, si y et z sont deux éléments incomparables de P différents de x , le couple (y, z) – par exemple – ne peut être dans toutes les extensions linéaires $M_1, M_2, L_2, \dots, L_r$. Le seul cas à considérer est celui où l'on a yL_iz pour tout $i \geq 2$ et (donc) zL_1y . Dans ce cas, il résulte de la définition de M_1 (respectivement, de M_2) que, si yM_1z (respectivement, yM_2z) on a $y \in (x \cup I(x)$ et $z \in [x]$ (respectivement, $y \in [x]$ et $z \in I(x) \cup [x]$); $(yM_1z$ et $yM_2z)$ est donc impossible, car on aurait alors $y <_P x <_P z$, une contradiction avec l'hypothèse. On en déduit que $\{M_1, M_2, L'_2, \dots, L'_r\}$, où les L'_i sont les extensions

linéaires de P déduites des L_i en intercalant l'élément x entre $(x)_i$ et $]x)_i$, forme une réalisation de P .

(4) et (5) sont des cas particuliers de (6) où Q est une antichaîne dans le premier cas, une chaîne dans le second (cf. la section 1.5.1).

(6) Considérons le cas $h = 2$ (le lecteur généralisera). Soient $\{L_1, \dots, L_{p_1}\}$ une base de P_1 , $\{M_1, \dots, M_{p_2}\}$ une base de P_2 et $\{N_1, \dots, N_q\}$ une base de Q , avec, par exemple, $p_1 \geq p_2 \geq q$. On vérifie patiemment que les p_1 ordres totaux

$$(N_1)_{y_1 y_2}^{L_1 M_1}, (N_2)_{y_1 y_2}^{L_2 M_2}, \dots, (N_q)_{y_1 y_2}^{L_q M_q}, (N_q)_{y_1 y_2}^{L_{q+1} M_{q+1}}, \dots, (N_q)_{y_1 y_2}^{L_{p_2} M_{p_2}}, \\ (N_q)_{y_1 y_2}^{L_{p_2+1} M_{p_2+1}}, \dots, (N_q)_{y_1 y_2}^{L_{p_1} M_{p_1}}$$

forment une réalisation de $Q_{y_1 y_2}^{P_1 P_2}$. Comme $Q_{y_1 y_2}^{P_1 P_2}$ contient P_1 comme sous-ensemble ordonné, sa dimension est (d'après (1)) supérieure ou égale à la dimension p_1 de P_1 , et donc la réalisation précédente de $Q_{y_1 y_2}^{P_1 P_2}$ en est une base.

(7) On considère de même le cas $h = 2$. Il est clair que, si l'on peut coder P_1 dans \mathbb{N}^{p_1} et P_2 dans \mathbb{N}^{p_2} , on peut coder $P_1 \times P_2$ dans $\mathbb{N}^{p_1} \times \mathbb{N}^{p_2} = \mathbb{N}^{p_1+p_2}$. D'où $\dim(P_1 \times P_2) \leq \dim P_1 + \dim P_2$.

Puisque P_i ($i = 1, 2$) est isomorphe à un sous-ensemble ordonné de $P_1 \times P_2$, la première inégalité provient de (1).

Supposons que P_i ($i = 1, 2$) admette un minimum 0_i et un maximum u_i . Il faut montrer $\dim(P_1 \times P_2) = \dim P_1 + \dim P_2$, soit, compte tenu de l'inégalité obtenue ci-dessus, $\dim(P_1 \times P_2) \geq \dim P_1 + \dim P_2$. Puisque $(0_1, u_2)$ et $(u_1, 0_2)$ sont incomparables dans $P_1 \times P_2$, on peut trouver une base $\{L_1, \dots, L_{p+q}\}$ de $P_1 \times P_2$, avec $(0_1, u_2)L_i(u_1, 0_2)$ pour $1 \leq i \leq p$ et $(u_1, 0_2)L_i(0_1, u_2)$ pour $p+1 \leq i \leq p+q$. Soient x et y incomparables dans P_1 ; puisque $(y, 0_2) < (u_1, 0_2)$ et $(0_1, u_2) < (x, u_2)$ dans l'ordre produit, on a $(y, 0_2)L_i(x, u_2)$ pour tout $i > p$ et il existe donc un $i \leq p$ avec $(x, u_2)L_i(y, 0_2)$. On a donc $(x, 0_2)L_i(y, 0_2)$. Un raisonnement similaire montre qu'il existe $j \leq p$ avec $(y, 0_2)L_j(x, 0_2)$. On en déduit que, pour $1 \leq i \leq p$, les restrictions des L_i à $P_1 \times \{0_2\}$ forment une réalisation de $P_1 \times \{0_2\}$ et induisent donc une réalisation de P_1 . On a donc $p \geq \dim P_1$. On montre de même $q \geq \dim P_2$, d'où $\dim(P_1 \times P_2) \geq \dim P_1 + \dim P_2$ et l'égalité. \square

La proposition 6.13 permet le calcul de certaines dimensions. Ainsi puisque la dimension d'une chaîne est 1, on déduit immédiatement du point (7) de cette proposition la dimension d'un produit de chaînes de longueurs non nulles quelconques.

Corollaire 6.14 *Si $\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_i, \dots, \underline{k}_h$ sont h chaînes toutes de cardinalités supérieures à 1, $\dim(\underline{k}_1 \times \dots \times \underline{k}_i \times \dots \times \underline{k}_h) = h$.*

Comme autre exemple d'application de la proposition 6.13, on peut noter que son point (6) permet de montrer que les ensembles ordonnés sans N (cf. la section 2.2, chapitre 2) différents d'une chaîne, sont de dimension 2. En effet,

ces ensembles ordonnés sont les ensembles ordonnés série-parallèles obtenus par substitution à partir d'ensembles ordonnés de dimension inférieure ou égale à 2, dont l'un au moins est de dimension 2.

Nous terminons cette section en donnant des bornes sur la dimension d'un ensemble ordonné arbitraire. Nous allons notamment montrer le résultat fondamental d'Hiraguchi (le théorème 6.21) qui établit que la dimension d'un ensemble ordonné P est au plus $\frac{|P|}{2}$. La méthode de preuve utilisée permet d'obtenir deux autres bornes faisant intervenir la largeur de l'ensemble ordonné, bornes que nous présentons dans la proposition 6.15 et le corollaire 6.20.

Proposition 6.15 *La dimension d'un ensemble ordonné P est inférieure ou égale à sa largeur : $\dim P \leq \alpha(P)$.*

Pour obtenir ce résultat il suffit de montrer $\dim P \leq \theta(P)$ puisque, d'après le théorème de Dilworth (le théorème 4.2), $\theta(P) = \alpha(P)$. Pour cela, nous montrons d'abord le lemme suivant, à la suite duquel nous prouvons la proposition.

Lemme 6.16 *A toute chaîne C d'un ensemble ordonné P , on peut associer une extension linéaire L de P telle que :*

$$\forall x \in P \setminus C, \forall y \in C \text{ avec } x \parallel_P y, \text{ on a } xLy$$

Autrement dit, pour tout élément x n'appartenant pas à la chaîne, x est inférieur dans l'extension linéaire à tout élément de la chaîne qui lui est incomparable dans P . Une telle extension s'appelle une *extension linéaire inférieure* de P (une définition duale permet d'associer à une chaîne une *extension linéaire dite supérieure*).

Preuve. Commençons par celle du lemme. Soit C une chaîne de l'ensemble ordonné $P = (X, O)$. Posons $A_C = \{(x, c) : x \in X \setminus C, c \in C \text{ et } x \parallel c\}$ et montrons que la relation $O \cup A_C$ définie sur X est sans circuit. Il est clair que O et A_C (qui est un ordre biparti) sont sans circuits. Supposons que $O \cup A_C$ contienne un circuit $(a_1 \dots a_i \dots a_k a_1)$ que nous prenons de longueur minimale. Si $(a_i, a_{i+1}) \in O$, $(a_{i+1}, a_{i+2}) \notin O$ (par minimalité du circuit). Si $(a_i, a_{i+1}) \in A_C$, $(a_{i+1}, a_{i+2}) \notin A_C$ (par définition de A_C). On en déduit que $(a_1 a_2 \dots a_k a_1)$ est une « chaîne alternée » i.e. qu'elle peut s'écrire $(c_1 x_1 \dots c_i x_i \dots c_r x_r c_1)$ avec, pour tout $i \leq r$, $c_i \in C$, $x_i \in X \setminus C$, $(c_i, x_i) \in O$ et $(x_i, c_{i+1}) \in A_C$. Soit alors c_h le plus grand élément dans la sous-chaîne de C formée par $\{c_1, \dots, c_i, \dots, c_r\}$. On a $(c_h, x_h) \in O$ et $(c_{h+1}, c_h) \in O$, d'où $(c_{h+1}, x_h) \in O$, une contradiction avec le fait que x_h est incomparable à c_{h+1} .

Puisque $O \cup A_C$ est sans circuit on peut prolonger cette relation en un ordre total qui est une extension linéaire de P (chapitre 2, théorème 2.22) et qui, par définition, vérifie la condition du lemme.

Prouvons maintenant la proposition 6.15 et considérons pour cela une partition de $P = (X, O)$ en $\alpha(P)$ chaînes $\{C_1, \dots, C_i, \dots, C_{\alpha(P)}\}$. A chacune de ces chaînes C_i nous associons par le lemme 6.16 une extension linéaire inférieure L_i . On a donc $O \subseteq \bigcap_{1 \leq i \leq \alpha(P)} L_i$. Supposons qu'il existe $(x, y) \in \bigcap \{L_i, i = 1, \dots, \alpha(P)\} \setminus O$. On a donc $x||_P y$ et x et y appartiennent à deux chaînes différentes C_i et C_j . Compte tenu de la définition des extensions linéaires inférieures, on en déduit $xL_i y$ et $yL_j x$, une contradiction. \square

Pour obtenir la borne du corollaire 6.20, nous avons besoin de deux autres lemmes, pour lesquels nous utiliserons les notations suivantes : si x et y sont deux éléments distincts de l'ensemble ordonné $P = (X, \leq)$, on pose $x \sim y$ si $(x[= (y[\text{ et }]x) =]y)$. Il est clair qu'alors, x et y sont incomparables. D'autre part, nous posons $x <_{\sim} y$ si $x < y$ et si, pour tout z différent de x et de y , on a $z < x$ si et seulement si $z < y$, et $z > x$ si et seulement si $z > y$ (ce qui implique $x < y$ avec x inf-irréductible et y sup-irréductible).

Lemme 6.17 *Soient x, y deux éléments distincts d'un ensemble ordonné P . Alors :*

1. $x \sim y$ implique $\dim(P \setminus x) = \dim P$, sauf si $P \setminus x$ est une chaîne (auquel cas $\dim(P \setminus x) = \dim P - 1$),
2. $x <_{\sim} y$ implique $\dim(P \setminus x) = \dim(P \setminus y) = \dim P$.

Preuve. Ces deux résultats proviennent du point (6) de la proposition 6.13. Pour le cas (1), on substitue l'antichaîne $\{x, y\}$ à y dans $P \setminus x$. Pour le cas (2), on substitue la chaîne $\{x < y\}$ à y dans $P \setminus x$ ou à x dans $P \setminus y$. \square

On notera que, pour calculer la dimension d'un ensemble ordonné, le point (1) (respectivement, le point (2)) du lemme permet de se ramener au cas où deux éléments x et y de l'ensemble ordonné ne vérifient jamais $x \sim y$ (respectivement, $x <_{\sim} y$).

Lemme 6.18 *Si un ensemble ordonné P admet une antichaîne A telle que $|P \setminus A| = 2$, alors $\dim P \leq 2$.*

Preuve. Si P est une antichaîne alors $\dim P = 2$.

Sinon, soit A une antichaîne de P telle que $P \setminus A = \{x, y\}$ et supposons d'abord $x||y$. On peut supposer sans perte de généralité qu'il existe $a \in A$ avec $a < x$. On en déduit que, pour tout $a' \in A$, $a' < x$ ou $a' || x$.

S'il existe $b \in A$ avec $b < y$, on a, pour tout $a' \in A$, $a' < y$ ou $a' || y$. On peut donc partitionner A en quatre ensembles : $A_1 = \{a \in A : a < x \text{ et } a || y\}$, $A_2 = \{a \in A : a < y \text{ et } a || x\}$, $A_3 = \{a \in A : a < x \text{ et } a < y\}$, $A_4 = \{a \in A : a || x \text{ et } a || y\}$. Si deux éléments z et t sont dans un même A_i , alors $z \sim t$ (avec la notation introduite pour le lemme 6.17) ; en utilisant le lemme 6.17, on peut donc se ramener au cas où $|A_i| \leq 1$ (avec $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \geq 1$). Il en résulte que P est isomorphe à un sous-ensemble ordonné de l'ensemble ordonné représenté à la figure 6.3(a).

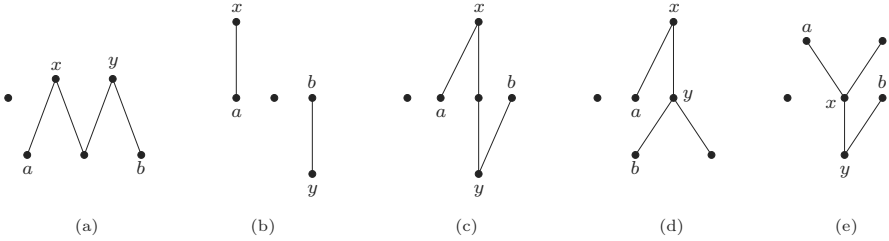


FIG. 6.3. Illustration du lemme 6.18.

Si il existe $b \in A$ avec $y < b$, ou s'il existe $a \in A$ avec $x < a$, des raisonnements analogues montrent que P est isomorphe à un sous-ensemble ordonné de l'ensemble ordonné de la figure 6.3(b) ou des ensembles ordonnés duaux de ceux représentés sur les deux figures précédentes.

Si x et y sont comparables avec, par exemple, $y < x$, on montre de même que P est isomorphe à un sous-ensemble ordonné de l'ensemble ordonné des figures 6.3(c), (d) ou (e).

Comme on montre aisément que les ensembles ordonnés représentés à la figure 6.3 sont de dimension 2 (le lecteur cherchera une base de 2 ordres totaux pour chacun d'eux), on en déduit qu'on a toujours $\dim P \leq 2$ (et $\dim P = 2$ si $|A| \geq 2$). □

Proposition 6.19 *Si A est une antichaîne d'un ensemble ordonné P vérifiant $|P \setminus A| \geq 2$, on a $\dim P \leq |P \setminus A|$.*

Preuve. La proposition se démontre par récurrence sur le nombre $k = |P \setminus A|$. Elle est vraie pour $k = 2$ d'après le lemme 6.18. Supposons-la vraie pour un entier $k \geq 2$ et soit A une antichaîne d'un ensemble ordonné P vérifiant $|P \setminus A| = k + 1$. Pour $x \in P \setminus A$, on a alors $|P \setminus (x + A)| = k \geq 2$, donc $\dim(P \setminus x) \leq k$; et puisque la suppression d'un élément d'un ensemble ordonné ne peut diminuer sa dimension que d'au plus une unité (point (3) de la proposition 6.13), $\dim P \leq k + 1$. □

En considérant alors une antichaîne A de P de cardinal $\alpha(P)$, on obtient le résultat suivant en utilisant la proposition 6.19 si $|P \setminus A| \geq 2$ ou trivialement sinon.

Corollaire 6.20 *La dimension d'un ensemble ordonné P vérifie l'inégalité $\dim P \leq \max(2, |P| - \alpha(P))$.*

Soit P un ensemble ordonné tel que $|P| - \alpha(P) \geq 2$. Puisque $\dim P \leq \alpha(P)$ (proposition 6.15) et $\dim P \leq \max(2, |P| - \alpha(P))$ (corollaire 6.20), on en déduit $\dim P \leq \lfloor \frac{|P|}{2} \rfloor$. De plus, si $|P| - \alpha(P) \leq 1$, on vérifie aisément qu'on a la même inégalité, sauf si $|P| = 1$ ou si P est un ensemble ordonné à 2 ou 3 éléments différent d'une chaîne. On a donc montré le résultat d'Hiraguchi :

Théorème 6.21 ([Hiraguchi [223], 1951]) *Si P est un ensemble ordonné avec $|P| \geq 4$, $\dim P \leq \frac{|P|}{2}$.*

Remarque 6.22 A l'exemple 6.12, nous avons considéré pour $n \geq 2$ l'ensemble ordonné S_n de cardinal $2n$ et montré que sa dimension était n . D'autre part, il est clair que $\alpha(S_n) = n$. On a donc $\dim S_n = \alpha(S_n) = |S_n| - \alpha(S_n) = \frac{|S_n|}{2}$, ce qui montre que les trois bornes supérieures données ci-dessus pour la dimension peuvent être atteintes.

6.3 Ensembles ordonnés de dimension 2

Les ensembles ordonnés de dimension 2 sont particulièrement intéressants du fait qu'ils permettent de donner une interprétation simple d'un ordre comme intersection de deux ordres totaux. Par exemple, si un ensemble ordonné représente la préférence d'un agent, le fait qu'il soit de dimension 2 s'interprète en disant que cette préférence est obtenue à partir de deux critères aux modalités linéairement ordonnés, l'agent préférant x à y si et seulement si il le préfère à y sur les deux critères. En fait, on rencontre assez souvent des applications où apparaissent de tels ensembles ordonnés. De plus, d'un point de vue algorithmique, les problèmes (par exemple, le calcul de leurs parties commençantes) y deviennent généralement plus faciles à traiter (cf. l'annexe A). Des caractérisations de ces ensembles ordonnés s'obtiennent d'abord en réécrivant le corollaire 6.11 dans ce cas particulier, ce qui donne le résultat suivant :

Proposition 6.23 *Pour tout ensemble ordonné P différent d'une chaîne, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\dim P = 2$,
2. *il existe un codage de P dans \mathbb{N}^2 ,*
3. *P est intersection de 2 ensembles totalement ordonnés,*
4. *le treillis $\mathcal{C}(P)$ des parties commençantes de P est engendré (par union et intersection) par 2 chaînes,*
5. *la largeur minimum d'une partie génératrice de $\mathcal{C}(P)$ est 2,*
6. *la partie convexe du graphe permutoèdre définie par $\mathcal{L}(P) = \{\text{extensions linéaires de } P\}$ est la fermeture convexe de 2 ordres totaux.*

Ainsi, pour montrer, par exemple, qu'un ensemble ordonné P (différent d'une chaîne) est de dimension 2, il suffit d'exhiber un sous-ensemble ordonné de \mathbb{N}^2 isomorphe à P . C'est ce qui est fait à la figure 6.4 pour l'ensemble ordonné de la figure 6.1. On remarque que le codage c de P dans \mathbb{N}^2 montré à droite de la figure 6.4 induit un codage strict de P dans $\underline{4}^2$.

Nous allons voir que les ensembles ordonnés de dimension 2 ont d'autres caractérisations et nous introduisons à cet effet quelques définitions.

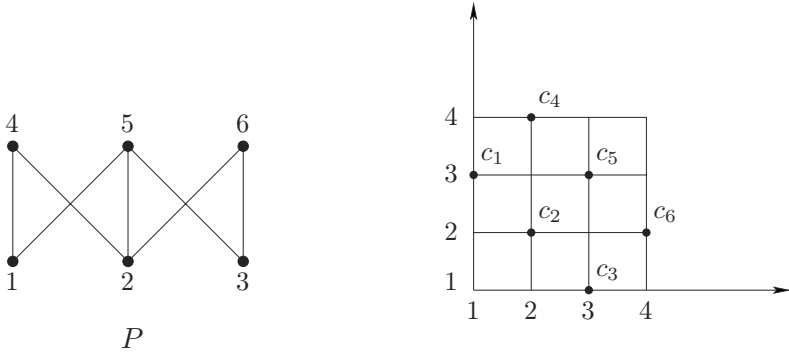


FIG. 6.4. Codage de l'ensemble ordonné P dans \mathbb{N}^2 .

Définition 6.24 Deux ensembles ordonnés $P = (X, \leq_P)$ et $Q = (X, \leq_Q)$ sont dits conjugués si, pour tous x, y distincts, x et y sont comparables dans l'un et l'un seul de ces deux ensembles ordonnés : $x <_P y$ ou $x >_P y$ si et seulement si $x \parallel_Q y$. On dit aussi dans ce cas que Q (respectivement, P) est un conjugué de P (respectivement, de Q).

Une extension linéaire L d'un ensemble ordonné P est dite non séparante si deux éléments comparables de P ne sont jamais « séparés » dans L par un élément qui leur est incomparable : $x <_P y$ et $x <_L z <_L y$ impliquent $x <_P z$ ou $z <_P y$.

On peut alors énoncer les caractérisations suivantes des ensembles ordonnés de dimension 2.

Théorème 6.25 Soit P un ensemble ordonné. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\dim P = 2$,
2. P peut être codé dans l'ensemble ordonné par inclusion des intervalles d'un ensemble totalement ordonné,
3. le graphe d'incomparabilité de P est un graphe de comparabilité,
4. P admet un ensemble ordonné conjugué,
5. P admet une extension linéaire non séparante.

Preuve. (1) \implies (2) : soient L et M deux extensions linéaires de $P = (X, \leq_P)$ réalisant P . Posons $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ et soit $X' = \{x'_1, \dots, x'_i, \dots, x'_n\}$ avec $X \cap X' = \emptyset$. Soit $M' = (X', \leq'_M)$ l'ensemble totalement ordonné obtenu en posant $x'_j \leq_{M'} x'_i$ si et seulement si $x_i \leq_M x_j$. Nous définissons une application f de P dans les intervalles de l'ensemble totalement ordonné $N = M' \oplus L$ (somme ordinale de M' et L), en posant $f(x_i) = [x'_i, x_i]$. On a $x_i \leq_P x_j$ si et seulement si $[x_i \leq_L x_j$ et $x_i \leq_M x_j]$, si et seulement si $[x_i \leq_L x_j$ et

$x'_j \leq_{M'} x'_i$], si et seulement si $[x'_j \leq_N x'_i \leq_N x_i \leq_N x_j]$, si et seulement si $f(x_i) \subseteq f(x_j)$. Puisque f est injective, c'est bien le codage cherché.

(2) \implies (3) : notons I_x l'intervalle image de x dans l'isomorphisme entre P et un ensemble d'intervalles d'un ensemble totalement ordonné L , et notons i_x l'origine de cet intervalle. Si x et y sont deux éléments incomparables de P , i_x et i_y sont nécessairement différents. Posons alors $x < y$ si $i_x <_L i_y$. Il est clair qu'on obtient ainsi une orientation transitive des arêtes du graphe d'incomparabilité de P qui est donc un graphe de comparabilité.

(3) \implies (4) : puisqu'il existe un ensemble ordonné Q tel que le graphe de comparabilité de Q égale le graphe d'incomparabilité de P , Q est un conjugué de P .

(4) \implies (5) : soit Q un ensemble ordonné conjugué de $P = (X, \leq_P)$. Posons $x \leq_L y$ si et seulement si $[x \leq_P y \text{ ou } x \leq_Q y]$; il résulte de la définition du conjugué que \leq_L est une relation totale et antisymétrique. Montrons qu'elle est transitive, donc qu'elle est un ordre total. Soient $x <_P y$, $y <_Q z$ et supposons $z <_L x$, d'où, par exemple, $z <_P x$. On en déduit $z <_P y$, ce qui (Q étant conjugué de P) est contradictoire avec $y <_Q z$. $L = (X, \leq_L)$ est donc une extension linéaire de P dont il reste à montrer qu'elle est non séparante. Si l'on a $x <_P y$ et $x <_L z <_L y$, on a $x <_P z$ ou $x <_Q z$, et $z <_P y$ ou $z <_Q y$. Comme $x <_Q z$ et $z <_Q y$ impliqueraient $x <_Q y$ qui est impossible, on a bien $x <_P z$ ou $z <_P y$ et L est séparante.

(5) \implies (1) : soit L une extension linéaire non séparante de $P = (X, \leq_P)$. Posons $Q = (X, <_Q)$ avec $x <_Q y$ si ($x <_L y$ et $x \parallel_P y$) et montrons que $<_Q$ est un ordre strict soit, puisque cette relation est asymétrique, qu'elle est transitive. Soient $x <_Q y$ et $y <_Q z$; on a donc $x <_L y <_L z$, $x \parallel_P y$ et $y \parallel_P z$. Si $x <_P z$, puisque L est non séparante, on aurait $x <_P y$ ou $y <_P z$, ce qui est impossible. Comme $z <_P x$ est aussi impossible, on a donc $x \parallel_P z$. On en déduit $x <_Q z$, ce qui montre que $<_Q$ est un ordre strict. Posons alors $M = (X, \leq_M)$ avec $x \leq_M y$ si ($x \leq_P y$ ou $y <_Q x$); la relation \leq_M est antisymétrique et totale. Montrons qu'elle est transitive; considérons $x <_M y$ et $y <_M z$, avec, par exemple, $x <_P y$ et $z <_Q y$ (donc $y \parallel_P z$). Si $z <_M x$, on a soit $z <_P x$, soit $x <_Q z$, ce qui (en utilisant la transitivité de P et de Q) conduit dans les deux cas à une contradiction. Donc \leq_M est un ordre total, M est une extension linéaire de P , et il est clair que L et M réalisent P . \square

Ce théorème montre en particulier que, si P est de dimension 2 et si Q est un ensemble ordonné conjugué de P , $\{P \cup Q, P \cup Q^d\}$ (respectivement, $\{P \cup Q, P^d \cup Q\}$) est une base de P (respectivement, de Q).

Donnons un exemple où, pour montrer qu'un ensemble ordonné est de dimension 2, on utilise la caractérisation (5) du théorème. Rappelons qu'un ensemble ordonné arborescent est un inf-demi-treillis où $x \wedge y$ est le plus grand élément de l'intersection des deux chaînes allant de 0 à, d'une part, x et, d'autre part, y (cf. l'exercice 2.5). Soit alors P l'ensemble ordonné arborescent représenté figure 6.5(a). Considérons l'extension linéaire L de P défini par la numérotation suivante des éléments : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

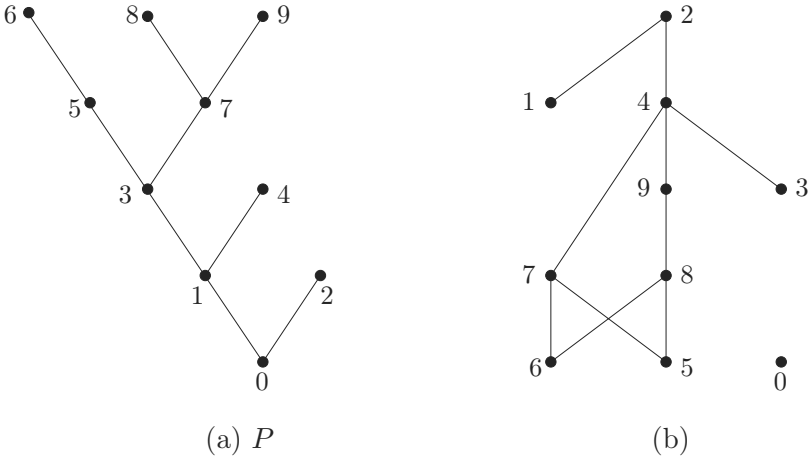


FIG. 6.5. (a) Un ensemble ordonné P arborescent et (b) son conjugué.

Nous dirons qu'elle est définie par un parcours « gauche » (relativement au diagramme de P) des éléments de P . A partir de l'élément 0, on liste les éléments en choisissant comme successeur de x l'élément y le plus « à gauche » (relativement au diagramme de l'ensemble ordonné) parmi les éléments non listés couvrant le plus grand élément vérifiant les deux conditions suivantes :

1. Il est déjà listé,
2. Il est couvert dans P par au moins un élément non encore listé.

Soit alors $i <_L j <_L k$ avec $i <_P k$. Montrons qu'on a $i <_P j$. Puisque $i <_L j$ on ne peut avoir que $i <_P j$ ou $i ||_P j$. Dans le second cas, on a alors $i \wedge j$ strictement inférieur à i . Si j est sur une chaîne « à gauche » de $i \wedge j$, on aurait $j <_L i$, ce qui est impossible ; et si j est sur une chaîne « à droite » de $i \wedge j$, on aurait $k <_L j$, ce qui est également impossible. Il en résulte que L est une extension linéaire non séparante de P et que P est donc de dimension 2. On obtient une autre extension linéaire de P , qui forme avec L une réalisation de P , en énumérant les éléments suivant un parcours « droit » (soit dans l'exemple : 0, 9, 1, 8, 2, 5, 7, 6, 3, 4).

Notons qu'en général, le fait que les ensembles ordonnés arborescents sont de dimension 2 peut s'obtenir plus simplement. En effet ces ensembles ordonnés étant sans N , on peut appliquer un résultat de l'exercice 6.4. La démonstration donnée pour le cas ci-dessus avait pour but d'exhiber explicitement une extension linéaire non séparante.

6.4 k -dimension d'un ensemble ordonné

Dans cette section, nous définissons les notions de k -codage et de k -dimension d'un ensemble ordonné (pour un entier $k \geq 2$) et nous démontrons

les résultats fondamentaux les concernant. Des cas particuliers de ces résultats donnent ceux sur la dimension booléenne et la dimension d'un ensemble ordonné énoncés dans les sections précédentes.

Définition 6.26 *Un k -codage d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est un codage c de P dans un produit direct de chaînes toutes de même cardinalité k (pour un entier $k \geq 2$).*

Lorsque ce produit direct s'écrit $\underline{k}_1 \times \cdots \times \underline{k}_i \times \cdots \times \underline{k}_r$ et est donc le produit de r chaînes, on écrit $c = (c_1, \dots, c_i, \dots, c_r)$ et l'on a :

$$x \leq y \iff c_i(x) \leq_i c_i(y), \text{ pour } i = 1, \dots, r$$

Un k -codage $c = (c_1, \dots, c_i, \dots, c_r)$ de P est dit strict si, pour tout $i = 1, \dots, r$, $c_i(P) = \underline{k}_i$.

La k -dimension de P est le nombre, noté $\dim_k P$, défini par :

$$\dim_k P = \min\{r \in \mathbb{N} : \text{il existe un codage de } P \text{ dans } \underline{k}^r\}$$

La k -dimension vérifie trivialement les relations suivantes :

$$P \sqsubseteq Q \implies \dim_k P \leq \dim_k Q \qquad \dim_k P = \dim_k P^d$$

Le lemme suivant est utile pour montrer les relations existant entre les différentes k -dimensions (pour tout entier $k \geq 2$).

Lemme 6.27 *Soit P un ensemble ordonné de cardinalité n . Pour tout entier $k \geq 2$, on a $\dim_n P \leq \dim_k P$.*

Preuve. Pour montrer ce résultat, il suffit de montrer qu'un codage c de $P = (X, O)$ dans \underline{k}^r induit un codage de P dans \underline{n}^r (avec $n = |P|$). Notons c_i , $i \in E = \{1, \dots, r\}$, les p fonctions coordonnées associées au k -codage $c : c(x) = (c_1(x), \dots, c_i(x), \dots, c_r(x))$. Pour chaque $i \in E$, définissons un préordre total R_i sur X par $xR_i y$ si et seulement si $c_i(x) \leq c_i(y)$. On obtient ainsi une famille $(R_1, \dots, R_i, \dots, R_r)$ de r préordres totaux dont – puisque c est un codage – l'intersection est O . Puisque le préordre total R_i contient l'ordre O , il contient une extension linéaire L_i de O (cf. le théorème 2.29). Puisque pour tout $i \in E$, on a $O \subseteq L_i \subseteq R_i$, on a aussi $O = \bigcap_{i \in E} L_i$. Définissons alors, pour tout $i \in E$, une application c'_i de P dans la chaîne $\{0 < 1 < \dots < n - 1\}$ de cardinalité n en posant, pour tout $x \in P$, $c'_i(x) = r_{L_i}(x)$ (rang de x dans l'ordre total L_i , cf. le théorème 2.26). Puisque $xL_i y$ si et seulement si $r_{L_i}(x) \leq r_{L_i}(y)$, $c' = (c'_1, \dots, c'_i, \dots, c'_r)$ est un codage de P dans \underline{n}^r . \square

Proposition 6.28 *Pour tout ensemble ordonné P de cardinal n , on a, pour $2 \leq k \leq n$, $\dim P = \dim_n P \leq \dots \leq \dim_k P \leq \dots \leq \dim_2 P$ et, pour $k > n$, $\dim_k P = \dim P$.*

Preuve. Par définition, $\dim_n P = \dim P$. Si $k \geq k'$, un codage de P dans \underline{k}'^r induit un codage de P dans \underline{k}^r , ce qui implique $\dim_k P \leq \dim_{k'} P$. En particulier, $k \geq n$ implique $\dim_k P \leq \dim_n P$. Mais, dans ce cas, le lemme 6.27 donne l'inégalité inverse. \square

Avant d'énoncer les résultats fondamentaux sur les k -codages, rappelons qu'une partie commençante d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est propre si elle est différente des parties \emptyset et X .

Théorème 6.29 *Soit $P = (X, O)$ un ensemble ordonné. Les trois ensembles ci-dessous sont en bijection :*

1. l'ensemble des codages stricts c de P dans le produit direct \underline{k}^r de r chaînes \underline{k} ,
2. l'ensemble des familles $(R_1, \dots, R_i, \dots, R_r)$ de r préordres totaux sur X admettant chacun k classes et dont l'intersection est O ,
3. l'ensemble des familles $(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_i, \dots, \mathcal{C}_r)$ où, pour tout $i = 1, \dots, r$, \mathcal{C}_i est une chaîne de longueur $k - 2$ de parties commençantes propres de P , et telles que $\bigcup \{\mathcal{C}_i, i = 1, \dots, r\}$ est une partie génératrice du treillis $\mathcal{C}(P)$ des parties commençantes de P .

Preuve. Soit c un codage strict de $P = (X, O)$ dans \underline{k}^r . Notons $c_1, \dots, c_i, \dots, c_r$ les r fonctions coordonnées associées : $c(x) = (c_1(x), \dots, c_i(x), \dots, c_r(x))$. Pour chaque $i \leq r$, définissons un préordre total R_i sur X par $xR_i y$ si $c_i(x) \leq c_i(y)$. On obtient ainsi une famille $(R_1, \dots, R_i, \dots, R_r)$ de r préordres totaux, dont les nombres de classes sont tous égaux à k , et dont – puisque c est un codage – l'intersection est O .

Notons $\mathcal{T}_i = t(R_i)$ la chaîne étendue de longueur k de parties commençantes de P associée au préordre total R_i dans la correspondance de Galois (t, p) du chapitre 5 (théorème 5.23 et proposition 5.28). Par définition de l'application t , on a $t(O) = \mathcal{C}(O) (= \mathcal{C}(P))$. D'autre part, $t(O) = t(\bigcap_{i \leq r} R_i) = \tau(\bigcup_{i \leq r} \mathcal{T}_i)$ (du fait des propriétés de cette correspondance de Galois énoncées au corollaire 5.24). Donc $\mathcal{C}(P) = \tau(\bigcup_{i \leq r} \mathcal{T}_i)$, ce qui signifie que $\bigcup_{i \leq r} \mathcal{T}_i$ est une partie génératrice de $\mathcal{C}(P)$. En posant $\mathcal{C}_i = \mathcal{T}_i \setminus \{X, \emptyset\}$, on exhibe donc une famille de r chaînes de parties commençantes propres de P , dont les longueurs sont toutes égales à $k - 2$ et qui engendrent toutes les parties commençantes propres de P , et donc aussi toutes les parties commençantes de P (puisque les parties commençantes \emptyset et X sont toujours engendrées trivialement). Autrement dit, $\bigcup_{i \leq r} \mathcal{C}_i$ est une partie génératrice de $\mathcal{C}(P)$.

Considérons maintenant une famille $(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_i, \dots, \mathcal{C}_r)$ de r chaînes de parties commençantes propres de P , toutes de longueur égale à $k - 2$, et telle que $\bigcup_{i \leq r} \mathcal{C}_i$ est une partie génératrice de $\mathcal{C}(P)$. En adjoignant à chaque \mathcal{C}_i la partie vide et X , on obtient r chaînes étendues $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_i, \dots, \mathcal{T}_r$ (de longueurs égales à k) et qui engendrent toutes les parties commençantes de P . Pour tout $i \leq r$, notons R_i le préordre total à k classes $p(\mathcal{T}_i)$ associé à la chaîne étendue \mathcal{T}_i (proposition 5.28). Puisque $t(O) = \mathcal{C}(O) = \tau(\bigcup_{1 \leq i \leq r} \mathcal{T}_i) = t(\bigcap_{1 \leq i \leq r} R_i)$

(corollaire 5.24) et que t est injective sur l'ensemble des préordres, on en déduit que O est intersection des r préordres totaux R_i .

Supposons enfin que l'ordre O de P soit intersection de r préordres totaux à k classes $R_i = (X_1^{(i)} < \dots < X_h^{(i)} < \dots < X_k^{(i)})$. Définissons pour tout $i = 1, \dots, r$ l'application c_i de X dans $\underline{k} = \{1 < \dots < h < \dots < k\}$ par $c_i(x) = h$ si $x \in X_h^{(i)}$. Cette application est surjective et vérifie xR_iy si et seulement si $c_i(x) \leq c_i(y)$. Donc $c = (c_1, \dots, c_i, \dots, c_r)$ est un codage strict de P dans \underline{k}^r .

Les constructions précédentes permettent de définir des applications entre deux quelconques des trois ensembles considérés dans l'énoncé du théorème, applications dont il suffit de vérifier que leurs composées (sur la même paire d'ensembles) sont toutes égales à l'application identité, ce que nous laissons au lecteur. \square

Au lieu de considérer les codages stricts de l'ensemble ordonné P dans \underline{k}^r , comme nous l'avons fait ci-dessus, on peut considérer les codages quelconques. On obtient alors le résultat suivant (dont le lecteur pourra s'assurer de la véracité au moyen de démonstrations quasi-identiques à celles ci-dessus).

Théorème 6.30 *Soit $P = (X, O)$ un ensemble ordonné. Les trois ensembles ci-dessous sont en bijection :*

1. l'ensemble des codages c de P dans le produit direct \underline{k}^r de r chaînes isomorphes à \underline{k} ,
2. l'ensemble des familles $(R_1, \dots, R_i, \dots, R_r)$ de r préordres totaux admettant chacun au plus k classes et dont l'intersection est O ,
3. l'ensemble des familles $(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_i, \dots, \mathcal{C}_r)$ où, pour tout $i = 1, \dots, r$, \mathcal{C}_i est une chaîne de longueur au plus égale à $k - 2$ de parties commençantes propres de P , et telles que $\bigcup\{\mathcal{C}_i, i = 1, \dots, r\}$ est une partie génératrice du treillis $\mathcal{C}(P)$ des parties commençantes de P .

Ce dernier résultat donne immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 6.31 *La k -dimension de l'ensemble ordonné $P = (X, O)$ est le nombre minimum de préordres totaux à au plus k classes dont l'intersection est O , ainsi que le nombre minimum de chaînes de parties commençantes propres de P dont les longueurs sont au plus égales à $k - 2$ et qui engendrent (par union et intersection) toutes les parties commençantes de P .*

Nous introduisons une définition permettant une expression concise de la k -dimension.

Définition 6.32 *Un k -chaîne recouvrement d'un ensemble ordonné P est un recouvrement de P en chaînes de longueur au plus k . On pose :*

$$\theta_k(P) = \text{nombre minimum de chaînes d'un } k\text{-chaîne recouvrement de } P.$$

On notera que $\theta_0(P) = |P|$ et que, pour $k \geq \lambda(P)$ (où $\lambda(P)$ est la longueur de P), $\theta_k(P) = \theta(P) = \alpha(P)$ (cette dernière égalité étant le théorème 4.2 de Dilworth).

La deuxième expression de la k -dimension obtenue au corollaire 6.31 peut alors s'écrire sous la forme suivante, où \mathcal{G} est dite partie génératrice propre de $\mathcal{C}(P)$ si elle ne contient ni \emptyset ni X :

Proposition 6.33 *Pour tout ensemble ordonné P ,*

$$\dim_k P = \min\{\theta_{k-2}((\mathcal{G}, \subseteq)), \mathcal{G} \text{ partie génératrice propre de } \mathcal{C}(P)\}.$$

Nous allons maintenant pouvoir donner les preuves des théorèmes 6.3 sur la dimension booléenne, 6.10 sur la dimension ainsi que du point (5) du corollaire 6.11.

Preuve. Pour $k = 2$, la k -dimension de l'ensemble ordonné $P = (X, O)$ est sa dimension booléenne. Les conditions (1) et (2) du théorème 6.29 deviennent alors les conditions (1) et (2) du théorème 6.3. Il en est de même pour la condition (3), puisque une chaîne de longueur 0 de parties commençantes propres de P n'est autre qu'une partie commençante propre de P . Quant à la proposition 6.33, elle donne l'expression de la dimension booléenne de P énoncée au corollaire 6.4 (puisque $\theta_0((\mathcal{G}, \subseteq)) = |\mathcal{G}|$).

De même, pour $k = n (= |P|)$, les énoncés (1), (2) et (3) du théorème 6.29 deviennent ceux du théorème 6.10 (puisque un préordre total à $n = |X|$ classes contenant l'ordre O est une extension linéaire de cet ordre). La proposition 6.33 devient $\dim_n P = \min\{\theta_{n-2}((\mathcal{G}, \subseteq)), \mathcal{G} \text{ partie génératrice propre de } \mathcal{C}(P)\}$. Mais (\mathcal{G}, \subseteq) est un sous-ensemble ordonné du treillis $\mathcal{C}(P)$ ne contenant pas les parties \emptyset et X . Puisque $\mathcal{C}(P)$ est de longueur n (théorème 5.6), la longueur de (\mathcal{G}, \subseteq) est au plus $n - 2$, et l'on a donc $\theta_{n-2}((\mathcal{G}, \subseteq)) = \theta((\mathcal{G}, \subseteq)) = \alpha((\mathcal{G}, \subseteq))$. On obtient ainsi que la dimension de P égale la largeur minimum d'une partie génératrice (quelconque) de $\mathcal{C}(P)$, c'est-à-dire le point (5) du corollaire 6.11. \square

Remarque 6.34 Le calcul de la k -dimension d'un ensemble ordonné P nécessite celui des parties génératrices minimales du treillis $\mathcal{C}(P)$ de ses parties commençantes. Lorsque $\mathcal{C}(P)$ a une unique partie génératrice minimale, ce calcul est beaucoup plus simple. Par exemple, il a été montré (Monjardet et Wille [318], 1988) que si T est un treillis distributif, l'ensemble $DIR(\mathcal{C}(T))$ des éléments doublement irréductibles de $\mathcal{C}(T)$ engendre $\mathcal{C}(T)$ et est donc son unique partie génératrice minimale. D'autre part, il n'est pas difficile de montrer qu'en tant qu'ensemble ordonné (par l'inclusion), $DIR(\mathcal{C}(T))$ est alors isomorphe à l'ensemble ordonné S_T des sup-irréductibles de T . On en déduit le résultat suivant :

Proposition 6.35 *Pour tout treillis distributif T , $\dim_k T = \theta_{k-2}(S_T)$. En particulier, la dimension booléenne (respectivement, la dimension) d'un treillis*

distributif est égale à la cardinalité (respectivement, la largeur) de l'ensemble ordonné de ses sup-irréductibles.

L'exercice 6.12 montre que, de plus, tout treillis distributif est plongeable dans un produit direct de chaînes par un codage vérifiant de bonnes propriétés.

6.5 Compléments et références

Historiquement la notion de dimension d'un ensemble ordonné est apparue pour la première fois dans un article de Dushnik et Miller [140] (1941) sous la forme du nombre minimum d'extensions linéaires réalisant cet ensemble ordonné. Ces auteurs remarquent en effet que la preuve du résultat de Szpilrajn [398] (1930) montrant que tout ordre admet une extension linéaire permet d'en déduire immédiatement que tout ordre est intersection de ses extensions linéaires (cf. le théorème 2.29). Leur article donnait aussi la dimension de S_n (l'exemple 6.12) et les caractérisations des ensembles ordonnés de dimension 2 énoncées au théorème 6.25. La forme élégante de la caractérisation (3) dans ce théorème est due à Baker, Fishburn et Roberts [24] (1972). Elle peut aussi s'énoncer en disant qu'un graphe G est le graphe de comparabilité d'un ensemble ordonné de dimension 2 si et seulement si G et son complémentaire sont des graphes de comparabilité; de tels graphes ont été aussi appelés *graphes de permutation*. En utilisant les caractérisations connues des graphes de comparabilité, on obtient des algorithmes « efficaces » de reconnaissance de ces graphes ou des ensembles ordonnés de dimension 2 (cf. l'annexe A). Toujours au théorème 6.25, les ordres de dimension 2 sont caractérisés par le fait qu'ils sont isomorphes à l'ordre d'inclusion d'une famille d'intervalles d'un ordre total. Plus généralement, on montre que les ordres de dimension au plus r sont caractérisés par le fait qu'ils sont isomorphes à l'ordre d'inclusion de sous-arbres d'un arbre à r sommets pendants¹ (Leclerc [263], 1976).

L'équivalence entre la définition de la dimension donnée par Dushnik et Miller et celle (popularisée par le livre d'Öre [334], 1962) utilisant la notion de codage de l'ensemble ordonné se trouve dans Hiraguchi [224] (1955). La notion de codage booléen de l'ensemble ordonné P se trouve déjà implicitement dans l'article de Dushnik et Miller [140] (1941), ceux-ci utilisant l'isomorphisme entre P et l'ensemble ordonné (par l'inclusion) de ses sections commençantes. Quant à la notion de k -dimension, on peut la faire remonter à Novak [332] (1963) dont l'« α -pseudodimension » est la k -dimension lorsque la chaîne α (qui peut être infinie) est la chaîne \underline{k} (cet auteur montre que la k -dimension de \underline{k}^r est r , et il donne les dimensions booléennes de C_n et A_n). Mais ces notions de codages dans un produit direct de chaînes de cardinalité k et de k -dimension vont être reprises indépendamment et considérablement développées dans la thèse de Bouchet [66] (1971), dont les motivations premières

¹ On rappelle qu'un arbre est un graphe non orienté connexe et sans cycle.

étaient d'ordre algorithmique (le codage booléen d'un ensemble ordonné permet un « traitement en machine »). Bouchet obtient notamment les résultats fondamentaux des théorèmes 6.29, 6.30 et du corollaire 6.31 sur l'équivalence de différentes notions de k -dimension. En fait, ses résultats (malheureusement non publiés, à l'exception de Bouchet [67], 1984) sont plus généraux, car ils portent sur des codages d'un ensemble ordonné dans un produit direct de chaînes de cardinalités variées.

Dans l'article [120] de 1950 où Dilworth montre son fameux théorème (au chapitre 4, le théorème 4.2), il l'utilise pour montrer un résultat équivalent à celui contenu dans la proposition 6.35 : la dimension d'un treillis distributif égale la largeur de l'ensemble ordonné de ses sup-irréductibles. Cette proposition qui porte sur la k -dimension d'un treillis distributif est une généralisation conséquente de ce résultat ; il est dû à Trotter [400] (1975), ainsi que la proposition 6.33 exprimant la k -dimension au moyen de recouvrements en chaînes de l'ensemble ordonné. Trotter [403] (1976) prouve aussi que, pour tout ensemble ordonné P et tout $k \geq 2$, on a $\dim_k P \leq \theta_k(p)$ (avec, si $|P| \geq 5$, $\dim_3 P \leq \lceil \frac{|P|}{2} \rceil$ et, si $|P| \geq 6$, $\dim_4 P \leq \lfloor \frac{|P|}{2} \rfloor$). Pour la dimension booléenne, qui elle peut être inférieure ou égale à $|P|$, Trotter [401] (1975) caractérise les ensembles ordonnés dont cette dimension atteint cette borne. Les autres résultats sur la dimension booléenne de la section 6.1 sont dus à Bouchet (théorème 6.3) et à Trotter (proposition 6.5). Du point de vue algorithmique, Stahl (cf. West [423], 1985) a montré que le calcul de la k -dimension était \mathcal{NP} -difficile (cf. l'annexe A). On peut signaler que le nombre de codages booléens d'un ensemble ordonné P dans $\underline{2}^p$ (où p est un entier quelconque) a été étudié par Hillman [221] (1955), qui donne des formules pour $|P| \leq 4$ et pour $P = \underline{k}$, et par Markowsky [287] (1980). Le fait que tout tableau 0/1 induit deux codages booléens d'ensembles ordonnés peut être utilisé en analyse ordinale des données, puisqu'un tel tableau induit donc naturellement deux ordres sur ses lignes et ses colonnes. Ce fait est exploité d'un point de vue plus théorique dans Monjardet et Netchine-Grynberg [317] (1988) à propos de travaux en psychologie du développement de l'enfant.

Après l'article fondateur de Dushnik et Miller [140] (1941), les premiers travaux importants sur la dimension sont ceux d'Hiraguchi ([223], 1951 et [224], 1955) et de Baker [23] (1961). On doit entre autres à Hiraguchi plusieurs relations de la proposition 6.13 (dimension de $P \setminus x$, de la somme lexicographique et du produit d'ensembles ordonnés quelconques), la notion d'ensemble ordonné d -irréductible (cf. plus loin et l'exercice 6.5) et les bornes supérieures $\alpha(P)$ et $\lfloor \frac{|P|}{2} \rfloor$ pour la dimension de P . La démonstration que nous avons donnée de ce dernier résultat, fondamental, est due à Trotter [402] (1975) sur une idée de Bogart. Alors qu'on sait caractériser les ensembles ordonnés P dont la dimension égale la borne $\lfloor \frac{|P|}{2} \rfloor$ (Bogart et Trotter [57], 1973, Kimble [247], 1973), on ne sait pas, en général, caractériser ceux pour lesquels la dimension égale les bornes $\alpha(P)$ ou $|P| - \alpha(P)$. On doit à Baker la formule sur la dimension du produit d'ensembles ordonnés bornés (point (7) de la proposition 6.13) et le

résultat suivant lequel la dimension d'un ensemble ordonné égale celle de son complété (cf. le chapitre 3, section 3.5.3). La preuve de ce résultat fait l'objet de l'exercice 6.8. Baker a aussi montré l'équivalence pour un treillis entre le fait d'être planaire (cf. les compléments du chapitre 2) et celui d'avoir une dimension inférieure ou égale à 2 (le lecteur en déduira une autre preuve de ce qu'un ensemble ordonné arborescent est de dimension inférieure ou égale à 2). Notons que les résultats de Baker montrent qu'un ensemble ordonné P est de dimension inférieure ou égale à 2 si et seulement si son complété $Gal(P)$ est planaire.

En fait, c'est surtout à partir des années soixante-dix que les travaux sur la dimension se développent considérablement, notamment avec Trotter et Kelly. Leurs articles de synthèse (Kelly et Trotter [244], 1982, Trotter [405], 1983 et [407], 1994) et le livre de Trotter [406] (1992) faisant le point sur les nombreux résultats obtenus, nous nous contenterons ici de mentionner les plus significatifs dont certains plus récents.

Le résultat le plus remarquable concerne la notion d'ensemble ordonné dit *d-irréductible*. Un ensemble ordonné P est *d-irréductible* si $dim P = d \geq 2$ et si tout sous-ensemble ordonné de P (différent de P) est de dimension inférieure à d , ou – de façon équivalente à la seconde condition (pourquoi ?) – si, pour tout x de P , $dim(P \setminus x) = d - 1$. Un ensemble ordonné de dimension d contient toujours un sous-ensemble ordonné *d-irréductible*. A l'exercice 6.5, on demande d'en déduire qu'un ensemble ordonné est de dimension au plus d (supérieur ou égal à 2) si et seulement si il ne contient aucun sous-ensemble ordonné $(d+1)$ -irréductible. En particulier, tout ensemble ordonné P différent d'une chaîne est de dimension 2 si et seulement si il ne contient aucun sous-ensemble ordonné 3-irréductible. Ces ensembles ordonnés 3-irréductibles ont été (indépendamment) déterminés par Trotter et Moore [409] (1976) d'une part, et Kelly [237] (1977) d'autre part. Ils consistent (à l'isomorphisme près) en neuf familles infinies d'ensembles ordonnés et 18 ensembles ordonnés particuliers obtenus pour $n = 6$ (2) ou $n = 7$ (16). La preuve de Trotter et Moore est fondée sur la caractérisation (3) des ensembles ordonnés de dimension 2 donnée au théorème 6.25 (i.e. par le fait que leur graphe d'incomparabilité est un graphe de comparabilité). On en déduit qu'un ensemble ordonné est 3-irréductible si et seulement si son graphe d'incomparabilité appartient à la liste des sous-graphes exclus caractérisant les graphes de comparabilité (liste établie par Gallai [176], 1967). La preuve de Kelly utilise le résultat de Baker (mentionné ci-dessus) disant que la dimension de P est inférieure ou égale à 2 si et seulement si son complété $Gal(P)$ est planaire, combiné avec la caractérisation par sous-treillis exclus des treillis planaires (Kelly et Rival [243], 1975). Pour les ensembles ordonnés *d-irréductibles* quelconques, Trotter et Ross [412] (1983) montrent que tout ensemble ordonné *d-irréductible* ($d \geq 3$) est sous-ensemble ordonné d'un ensemble ordonné $d + 1$ -irréductible.

L'exercice 6.7 donne une autre caractérisation de la dimension d'un ensemble ordonné ne faisant intervenir que ses couples critiques. Cette caractérisation en induit une autre qui fait de la dimension d'un ensemble ordonné

P le nombre chromatique d'un certain hypergraphe² $H(P)$ associé à P . Les sommets de $H(P)$ sont les couples P -critiques et ses arêtes les *IP-cycles forts* contenus dans l'ensemble $Crit(P)$ des couples P -critiques : un *IP-cycle* (ou *cycle alterné*) de $P = (X, \leq)$ est une suite $(x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_p, y_p)$ de $p \geq 2$ couples P -critiques de P vérifiant les conditions $y_1 \leq x_2, \dots, y_i \leq x_{i+1}, \dots, y_p \leq x_1$; un *IP-cycle* est dit *fort* si $y_i \not\leq x_j$ pour tout $j \neq i + 1$ (modulo p). Cette notion est importante car on montre (Trotter et Moore [410], 1977) que, si K est un sous-ensemble de couples d'incomparabilité de P , il existe une extension linéaire de P contenant K si et seulement si K est sans *IP-cycle fort*. En utilisant le résultat de l'exercice 6.7, on en déduit alors aisément la formule : $dim P = \chi(H(P))$ (pour P différent d'une chaîne). Par exemple, dans le cas de l'ensemble ordonné S_n (exemple 6.13), $Crit(S_n)$ est formé des n couples (b_j, a_j) , et tout *IP-cycle fort* est formé de deux quelconques de ces couples ; l'hypergraphe $H(S_n)$ est donc isomorphe au graphe complet à n sommets qui a pour nombre chromatique n , ce qui redonne $dim S_n = n$. Dans le cas de la dimension 2, un résultat de la thèse de Cogis sur la dimension Ferrers (1980, cf. plus loin) montre qu'on peut remplacer l'hypergraphe $H(P)$ par le graphe $G(H(P))$ défini par les arêtes à deux sommets de $H(P)$: un ensemble ordonné P est de dimension 2 si et seulement si le graphe $G(H(P))$ est de nombre chromatique 2. Cette réduction au cas d'un graphe n'est plus vraie en dimension supérieure comme le montre un exemple de Trotter [405] (1983).

Plusieurs résultats portent sur la dimension de classes particulières d'ordres. Ainsi, le résultat de Baker, énonçant qu'un treillis planaire (différent d'une chaîne) est de dimension 2, est complété d'abord par Trotter et Moore [410] (1977) qui montrent qu'un ensemble ordonné planaire ayant un maximum ou un minimum peut être de dimension 3, puis par Kelly [239] (1981) qui exhibe des ensembles ordonnés planaires de dimension arbitraire. La dimension des ordres d'intervalles est elle bornée par leur étendue, tandis que celle des ordres quasi-forts ne peut dépasser 3 (Rabinovitch [350] et [351], 1978). Brightwell et Trotter [78] (1993) montrent que l'ensemble ordonné par inclusion des sommets, arêtes et faces de toute carte planaire (avec boucles et arêtes multiples) est de dimension au plus 4. Ce résultat généralise celui de Schnyder [371] (1989) montrant qu'un graphe G (non orienté) est planaire si et seulement si la dimension d'un ensemble ordonné P_G associé à G est inférieure ou égale à 3 (P_G a pour éléments les sommets et les arêtes de G ordonnés par $x < u$ si le sommet x appartient à l'arête u).

Le calcul de la dimension d'un ensemble ordonné est un problème «difficile» sauf s'il est de dimension au plus 2 (cf. l'annexe A). Aussi, à partir des années

² Un *hypergraphe* est un couple $H = (X, \mathcal{E})$ où X est un ensemble et \mathcal{E} une famille de parties de X . Les éléments de \mathcal{E} sont appelés les *arêtes* de H . Soit $H = (X, \mathcal{E})$ un hypergraphe. Une partie de X est un ensemble *stable* de H si elle ne contient aucune partie appartenant à \mathcal{E} de cardinalité supérieure à 1. Le *nombre chromatique* $\chi(H)$ de H est le nombre minimum d'ensembles stables de H partitionnant X .

quatre-vingt, deux directions principales de recherche ont été suivies pour pallier cet inconvénient. D'une part, on a déterminé des classes d'ordres, qu'on trouvera à l'annexe A, pour lesquels le problème devient « facile ». D'autre part, des notions de dimension plus aisément calculables ont été introduites. Nous décrivons la plus significative appelée *dimension gloutonne*. Informellement, on obtient une *extension linéaire gloutonne* d'un ensemble ordonné P en suivant la règle « aller toujours aussi haut que possible » ; donc, partant d'un élément minimal x de P , on le fait suivre d'un élément y tel que y soit minimal dans $P \setminus x$ et, si un tel élément existe, qu'on ait $x < y$. Ce processus est réitéré jusqu'à l'obtention d'un ordre total, qui est bien une extension linéaire de P . On prouve que P est intersection de toutes ses extensions linéaires gloutonnes, ce qui conduit à définir la dimension gloutonne de P comme le nombre minimum des extensions linéaires gloutonnes réalisant P (Bouchitté, Habib et Jegou [70], 1985). En continuant dans la même direction de recherche, on peut, par exemple, définir les notions d'extension linéaire *super gloutonne* et de dimension *super gloutonne* d'un ensemble ordonné (cf. le livre de Trotter [406], 1992 pour les résultats obtenus sur ces dimensions).

Nous terminons ces compléments en disant quelques mots de la *dimension Ferrers* d'une relation quelconque, qui conduit à une autre approche de la dimension d'un ordre. Cette notion remonte à Bouchet [66] (1971) qui entendait définir les notions de codages et de dimensions pour une relation binaire R quelconque (pouvant être définie entre deux ensembles A et B arbitraires). Pour ce faire, il considère les *relations de Ferrers* (la définition 7.9 donnée au chapitre 7 dans le cas où $A = B$ s'applique au cas général), appelées par lui « relations en escaliers ». Il est facile de s'assurer que toute relation est intersection des relations de Ferrers qui la contiennent. Bouchet étudie alors le nombre minimum de relations de Ferrers dont l'intersection est R , nombre appelé depuis la *dimension Ferrers* (ou parfois la *bidimension*) de R . Comme Bouchet montre que la dimension Ferrers d'un ordre est égale à sa dimension, il obtient une généralisation de la notion de dimension. La dimension Ferrers a été ensuite particulièrement étudiée par Cogis [100], [101] (1982), Doignon, Ducamp et Falmagne [129] (1984) et Koppen [255], [256] (1987 et 1989). Les motivations de ces quatre derniers auteurs étaient d'ordre appliqué. Leurs travaux se situaient dans le contexte de la théorie des espaces des connaissances initiée par Falmagne et Doignon (cf. leur ouvrage *Knowledge spaces* [151] de 1999). Cette théorie de l'évaluation et de l'apprentissage des connaissances utilise des modèles discrets pour la représentation des états et des structures de connaissance (formellement, un « espace de connaissance » n'est d'ailleurs, à une dualité près, qu'une famille de Moore). Elle est couramment utilisée notamment au moyen du logiciel ALEKS (« Assessment and LEarning in Knowledge Spaces » <http://www.k12.aleks.com/theory-ENGLISH.html>). Dans le cadre de cette théorie, la dimension Ferrers peut être utilisée pour fournir des modèles expliquant les réponses d'un sujet à un test de connaissances comme résultant de l'état de ses connaissances sur plusieurs dimensions ordonnées.

D'un point de vue théorique, il a été en particulier montré (par Bouchet) que la dimension Ferrers d'une relation est égale à la dimension du treillis de Galois associé à cette relation (cf. la section 3.5.1). Dans le cas où la relation est un ordre (dont la dimension Ferrers est donc égale à la dimension), on obtient le résultat de l'exercice 6.8 ($\dim(P) = \dim Gal(P)$). Plus généralement, un résultat de Bouchet selon lequel, si un ensemble ordonné P peut être codé dans un treillis (complet), il en est de même pour $Gal(P)$, permet d'obtenir la relation $\dim_k P = \dim_k Gal(P)$. Il en résulte que la dimension d'un ensemble ordonné P égale la dimension Ferrers de la relation $(S(P), I(P), \leq)$. D'autre part, comme on le verra à la section 7.1, les relations de Ferrers irréflexives ne sont autres que les ordres d'intervalles stricts. Si on se limite à ces relations on obtient une autre notion de dimension étudiée sous le nom de *dimension intervallaire* (« interval dimension ») par Trotter et autres (voir West [423], 1985). La dimension Ferrers a été utilisée par Reuter [356] (1989) pour obtenir notamment des résultats sur le problème difficile de déterminer la dimension d'un produit d'ensembles ordonnés, ainsi que par Flath [168] (1993) pour obtenir la dimension des treillis de « multipermutations » et montrer, en particulier, que la dimension du treillis permutoèdre Σ_n (exemple 1.17, chapitre 1) est $n - 1$.

6.6 Exercices

Exercice 6.1 Calculer la dimension booléenne de l'antichaîne A_n (cf. le théorème 4.20 de Sperner).

Exercice 6.2 Calculer les dimensions booléennes des ensembles ordonnés P de cardinal $n \leq 4$. Montrer que, pour $n = 2$ (respectivement, 3,4), il existe 1 (respectivement, 2,4) ensemble(s) ordonné(s) avec $\dim_2 P = n$.

Exercice 6.3 Déterminer la dimension booléenne de la bichaîne $\underline{n-1} + \underline{1}$, notée L_n . Retrouver ce résultat en considérant le treillis $\mathcal{C}(L_n)$ (utiliser la proposition 5.8 et le corollaire 6.4). Montrer que ce treillis admet 2^{n-2} parties génératrices de cardinal minimum.

Exercice 6.4 [DIMENSION D'UN ENSEMBLE ORDONNÉ SANS N] Soient P_i les sous-ensembles ordonnés formés par les composantes connexes d'un ensemble ordonné $P = (X, O)$. Pourquoi a-t-on $\dim P = \max(2, \max(\dim(P_i)))$? Montrer qu'un ensemble ordonné sans N (définition 2.12) est de dimension au plus 2 (relire la section 2.2 et la proposition 6.13).

Exercice 6.5 [ENSEMBLES ORDONNÉS d -IRRÉDUCTIBLES] Un ensemble ordonné P est dit *d -irréductible* si $\dim P = d \geq 2$ et si tout sous-ensemble ordonné de P (différent de P) est de dimension inférieure à d , ou – de façon équivalente à la seconde condition (pourquoi?) –, si pour tout x de P ,

$\dim(P \setminus x) = d - 1$. Montrer qu'un ensemble ordonné est de dimension inférieure ou égale à d (avec $d \geq 2$) si et seulement si il ne contient aucun sous-ensemble ordonné $(d+1)$ -irréductible. Quels sont les ensembles ordonnés 2-irréductibles ?

Montrer que, pour $d \geq 2$, tout ensemble ordonné d -irréductible est indécomposable pour l'opération de substitution (proposition 6.13). Montrer que l'ensemble ordonné S_3 (exemple 6.12) est 3-irréductible.

Exercice 6.6 Soit P un ensemble ordonné biparti sans minimum ni maximum. Pourquoi a-t-on $\dim P \leq \min(|\text{Min}P|, |\text{Max}P|)$?

Exercice 6.7 [DIMENSION ET COUPLES P -CRITIQUES] Montrer qu'un ensemble $L_1, \dots, L_i, \dots, L_k$ d'extensions linéaires d'un ensemble ordonné P réalise P (i.e. $P = \bigcap_{1 \leq i \leq k} L_i$) si et seulement si tout couple P -critique (définition 1.34) appartient à l'une de ces extensions.

En notant $\text{Crit}(P, L)$ l'ensemble $L \cap \text{Crit}(P)$ des couples P -critiques contenus dans l'extension linéaire L de P , en déduire que la dimension de P est le nombre minimum de ses extensions linéaires L_i telles que $\text{Crit}(P) = \bigcup_{1 \leq i \leq k} \text{Crit}(P, L_i)$.

Représenter le diagramme de l'ordre de forçage pour l'ensemble ordonné S_3 (exemple 6.12). En déduire $\text{Crit}(S_3)$ et la dimension de S_3 .

Exercice 6.8 [DIMENSION DU TREILLIS $\text{Gal}(P)$] On rappelle que $\text{IR}(P) = S(P) \cup I(P)$ désigne le sous-ensemble formé des éléments irréductibles d'un ensemble ordonné P . Montrer que l'ordre de forçage (définition 1.35) sur les couples d'incomparabilité de $\text{IR}(P)$ est la restriction à ces couples de l'ordre de forçage sur les couples d'incomparabilité de P (utiliser l'exercice 3.5).

En déduire que $\text{Crit}(P) = \text{Crit}(\text{IR}(P))$.

Soit $\text{Gal}(P)$ le complété de P . Montrer qu'on a $\text{Crit}(\text{Gal}(P)) = \text{Crit}(P)$.

Déduire de ces résultats et de l'expression de la dimension de P qu'on a $\dim P = \dim \text{IR}(P) = \dim \text{Gal}(P)$.

N.B. Plus généralement, il a été montré que $\dim_k P = \dim_k \text{Gal}(P)$.

Exercice 6.9 [DIMENSIONS D'UN TABLEAU] Soit un tableau à n lignes et p colonnes dont les entrées $t(i, j)$ valent 0 ou 1. On ordonne l'ensemble des lignes (respectivement, des colonnes) de ce tableau en posant $i \leq i'$ si $t(i, j) \leq t(i', j)$ pour toute colonne j (respectivement, $j \leq j'$ si $t(i, j) \leq t(i, j')$ pour toute ligne i). Expliciter les ensembles ordonnés ainsi obtenus pour le tableau 0/1 dont les six lignes sont 110111, 101111, 011111, 001111, 010110 et 100100.

Montrer que les dimensions de ces deux ensembles ordonnés sont respectivement 3 et 2.

Généraliser cet exemple pour obtenir un tableau à $2n$ lignes et $2n$ colonnes dont l'ordre sur les lignes (respectivement, sur les colonnes) est n (respectivement, 2).

N.B. Cet exemple est dû à Trotter.

Exercice 6.10 [DIMENSION 2 : TEST GRAPHIQUE] A tout élément x d'un ensemble ordonné P , on associe un point $p(x)$ du plan et la portion $Q(x)$ du plan formé de l'ensemble des points situés au-dessus et à droite de $p(x)$. Montrer que P est de dimension 2 si et seulement si l'on peut toujours placer y dans $Q(x)$ lorsque $x < y$ et seulement dans ce cas.

Exercice 6.11 Montrer que l'ensemble ordonné $\underline{2}^n$ est de dimension n (une preuve possible consiste à montrer que $\underline{2}^n$ contient un sous-ensemble ordonné isomorphe à S_n – exemple 6.12). En déduire que $\dim_k \underline{k}^n = n$.

Exercice 6.12 Soit T un treillis distributif et $(C_1, \dots, C_i, \dots, C_p)$ un recouvrement en chaînes de l'ensemble ordonné S_T de ses éléments sup-irréductibles vérifiant, pour tous $i \neq j$, $C_i \cap C_j = \{0_T\}$ (minimum de T). Pour tous $x \in T$ et $i = 1, 2, \dots, p$, on pose $x_i = \max(x \cap C_i)$. On définit une application c de T dans le produit direct $\prod_{1 \leq i \leq p} C_i$ en posant $c(x) = (x_1, x_2, \dots, x_p)$. Montrer que l'application c est un sup-codage et un inf-codage strict dans ce produit direct et qu'elle conserve la relation de couverture de T .

N.B. Ce résultat peut être facilement généralisé pour obtenir l'inégalité $\dim_k T \leq \theta_{k-2}(S_T)$ (montrée en fait être une égalité à la proposition 6.35).

Exercice 6.13 Montrer que la cardinalité maximum d'une chaîne de l'ensemble ordonné \underline{k}^r est $r(k-1) + 1$. En déduire que $\dim_k \underline{n} = \lceil \frac{n-1}{k-1} \rceil$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 6.14 Montrer que si $|P| = 4$, $\dim_3 P = 2$, sauf pour $P = A_4$ ou $P = A_2 + C_2$ (auxquels cas $\dim_3 P = 3$).

Exercice 6.15 Soit l'ensemble $X = \{1, 2, \dots, n\}$ et π une permutation sur X . Le *graphe d'inversion* associé à π est le graphe $G = (X, U)$, où $(i, j) \in U$ si i et j sont inversés dans π (i.e. si $\pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(j)$). Un graphe $G = (X, U)$ est un *graphe de permutation* s'il existe une permutation de X dont G est le graphe d'inversion. Montrer que G est un graphe de permutation si et seulement si G est le graphe de comparabilité d'un ordre de dimension 2.

N.B. Les graphes de permutations ont été très étudiés (cf. par exemple, Spinrad [381], 1985).

Quelques usages

7.1 Modélisation des préférences

Au chapitre 1 (exemple 1.21), on a mentionné que la classique fonction d'utilité u des économistes qui représente les préférences d'un agent sur un ensemble de biens (le bien x est préféré au bien y si $u(x) > u(y)$) définit un ordre (strict) particulier, dit ordre fort, sur cet ensemble. Dans cette modélisation des préférences par une fonction d'utilité, deux biens de même utilité sont considérés comme indifférents. La relation d'indifférence de l'agent est donc transitive. Or, on a constaté depuis longtemps que cette hypothèse n'est pas nécessairement vérifiée et l'on a défini d'autres modèles ordinaux pour la préférence qui, tout en permettant une représentation numérique d'icelle, permettent aussi d'avoir une relation d'indifférence non transitive. Ce sont ces modèles et leurs représentations numériques que nous allons développer dans cette section. Plusieurs points sont d'abord à mentionner ou préciser.

Les relations d'ordre que nous allons étudier sont utilisées dans les nombreux domaines où l'on a besoin de modéliser des préférences, c'est-à-dire non seulement en microéconomie, mais aussi par exemple dans les théories normatives ou descriptives de la décision et du choix (préférences d'un décideur sur des options, préférences d'un joueur sur des loteries) ou en théorie des votes (préférences d'un votant sur les candidats).

Dans ces modèles, on peut vouloir modéliser soit la préférence dite *stricte* (qui s'interprète comme « l'objet x est meilleur que l'objet y ») soit la préférence dite *large* (qui s'interprète comme « l'objet x est au moins aussi bon que l'objet y »). Nous ferons dans cet ouvrage le premier choix qui conduit à modéliser la préférence par une relation O d'ordre strict, avec la convention que xOy s'interprète comme « y est meilleur que x ». Pour passer de cette modélisation à la seconde, il suffit de définir la préférence large R à partir de O par $(x, y) \in R$ si et seulement si $(y, x) \notin O$. La relation de préférence large ainsi obtenue est totale et sa partie symétrique (xRy et yRx), qui modélise l'indifférence, est identique à la relation d'incomparabilité de l'ordre strict O ($(x, y) \notin O$ et $(y, x) \notin O$). Dans cette section, nous considérerons donc que

la relation d'incomparabilité de l'ordre strict O modélise la relation d'indifférence. Nous reviendrons sur l'équivalence – en fait une dualité – entre ces deux classes de modèles à la fin de cette section.

Nous examinerons successivement les modèles de préférence définis par les classes d'ordres suivantes : ordre strict fort, ordre strict quasi-fort et ordre strict d'intervalles. Précisons que, dans ce chapitre et pour ne pas alourdir les énoncés, nous omettrons le terme « strict ». Pour chacune de ces classes, nous donnerons plusieurs caractérisations des ordres de la classe ainsi que leurs propriétés de représentation numérique. Ces caractérisations font intervenir des notions valables pour toute relation binaire, telles la notion de *tableau* que nous définirons. La démonstration des résultats énoncés ne sera pas toujours faite immédiatement. En effet, il sera plus simple et surtout moins répétitif d'introduire une classe de relations binaires particulières appelées *relations de Ferrers* – ou *biordres*. Les biordres ne sont pas en général des ordres, mais tous les ordres évoqués ci-dessus sont des biordres particuliers. Il suffira donc d'appliquer à ces différents cas les résultats généraux de caractérisation et de représentation numérique des biordres (ces résultats sont d'ailleurs simples à démontrer). On a toutefois une exception à cette démarche dans le cas de la représentation numérique « à seuil constant » des ordres quasi-forts. Ce résultat d'obtention beaucoup moins aisée, peut être prouvé au moyen de notions et résultats de la théorie des graphes dont l'exposé serait trop long dans cet ouvrage ; nous nous contenterons donc de renvoyer le lecteur à des références pour sa preuve (cf. la section 7.6 des compléments).

Au chapitre 2 (définition 2.12) nous avons défini les ensembles fortement ordonnés, quasi-fortement ordonnés et les ensembles ordonnés d'intervalles par des propriétés d'exclusion de sous-ensembles ordonnés. Nous reprenons ces définitions dans le cas d'un ordre strict aux points (1) des propositions 7.4, 7.5 et 7.7 suivantes (en excluant cette fois des sous-ordres stricts). Ces propositions, qui nécessitent au préalable les définitions et notations suivantes, donnent plusieurs caractérisations de ces ordres.

Définition 7.1 Soient R et R' deux relations binaires définies sur un ensemble X . Leur composée, notée RR' , est la relation définie par $xRR'y$ s'il existe $t \in X$ tel que xRt et $tR'y$.

Définition 7.2 Un tableau d'une relation binaire R sur un ensemble X est la donnée d'un triplet (R, L_1, L_2) où L_1 et L_2 sont deux ordres totaux sur X .

Un tableau (R, L_1, L_2) est dit en escalier si $L_1RL_2 \subseteq R$, i.e. si, pour tous x, y, z, t de X , xL_1y , yRz et zL_2t impliquent xRt .

Un tableau où $L_1 = L_2 = L$ est noté (R, L) . Un tableau (R, L) en escalier est dit surdiagonal si $R \subseteq L$.

Notons que dans ces définitions, les ordres L_1 et L_2 sont des ordres réflexifs. Il s'ensuit que la condition $L_1RL_2 \subseteq R$ implique aussi $L_1R \cup RL_2 \subseteq R$.

Le fait qu'une relation R admette un tableau en escalier permet une représentation « en escalier » de la matrice d'incidence de cette relation, c'est-à-dire

de la 0/1 matrice M à $n = |X|$ lignes et n colonnes où $m_{x,y} = 1$ si $(x, y) \in R$ et $m_{x,y} = 0$ sinon. Il suffit d'ordonner les lignes et les colonnes de cette matrice suivant les ordres L_1 et L_2 . La figure 7.1(a) donne un exemple d'ordre admettant un tableau en escalier pour le même ordre $L = cabedh$ des lignes et des colonnes (tableau 7.1). Comme de plus, tous les 1 de la 0/1 matrice d'incidence correspondant à ce tableau sont au-dessus de la diagonale principale, ce tableau est surdiagonal. L'ordre de la figure 7.3(a) admet aussi un tableau en escalier représenté au tableau 7.2. Mais, contrairement aux apparences, ce n'est pas un tableau surdiagonal, car l'ordre b, a, c, d, e des lignes est différent de l'ordre a, b, c, d, e des colonnes.

Soit R une relation binaire sur un ensemble X . En généralisant les notations utilisées pour les relations d'ordre, nous notons R^c la *relation complémentaire* de R ($xR^c y$ si $(x, y) \notin R$), et R^d la *relation duale* de R ($xR^d y$ si yRx). La relation $(R^c)^d (= (R^d)^c)$ est notée R^{cd} et est égale à $\{(x, y) : (y, x) \notin R\}$; on l'appelle la *coduale* de R .

Puisque nous travaillons dans cette section avec des ordres stricts qui pourront être caractérisés par l'absence de certains sous-ordres, tous sommes cardinales d'ordres strictement totaux, nous reprenons la notation présentée dans la définition 1.3 pour ces ordres. Ainsi, \underline{k}_s désigne l'ordre strictement total sur un ensemble de cardinalité k et, par exemple, la notation $\underline{2}_s + \underline{2}_s$ représente l'ordre strict biparti formé par deux couples (x, y) et (z, t) d'éléments distincts (son diagramme est le même que celui de l'ordre réflexif correspondant $C_2 + C_2$, représenté à la figure 2.5).

Nous commençons avec la proposition 7.4 par caractériser les ordres forts via différentes conditions. La seconde utilise la propriété de transitivité négative définie ci-dessous. La cinquième montre que les ensembles fortement ordonnés ne sont autres que les sommes ordinales d'antichâmes (une antichaine étant prise ici comme un ensemble ordonné irréflexif – donc sans aucun couple –, cf. le point (2) de la remarque 1.44). La dernière montre que ces ordres peuvent être « représentés » par une fonction numérique, cette notion de représentation étant précisément définie par cette condition (6). On peut la paraphraser en disant qu'à toute fonction numérique définie sur un ensemble X est associé naturellement l'ordre sur X induit par les valeurs strictement croissantes de cette fonction. Cet ordre est un ordre fort et, inversement, tout ordre fort peut être obtenu de cette manière. Cette propriété de représentation des ordres forts sera très utile dans la suite pour obtenir d'autres types de représentations numériques.

Définition 7.3 Une relation binaire R définie sur un ensemble X est négativement transitive si, pour tous x, y, z de X , $xR^c y$ et $yR^c z$ impliquent $xR^c z$.

Autrement dit, R est négativement transitive si R^c est transitive.

Lorsque O est une relation binaire, on note $I = O^c \cap O^d$. Ainsi, quand O est un ordre strict, I est la relation Inc_O d'incomparabilité de cet ordre.

Dans la suite, on utilisera la notation plus économique de I pour désigner cette relation d'incomparabilité.

Proposition 7.4 *Soit O une relation binaire définie sur un ensemble X et soit $I = O^c \cap O^{cd}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. O est un ordre fort, i.e. un ordre strict ne contenant pas $\underline{1}_s + \underline{2}_s$,
2. O est asymétrique et négativement transitive,
3. O est un ordre strict et $O = OI = IO$,
4. O est un ordre strict et I est une relation d'équivalence,
5. (X, O) est une somme ordinale d'antichaînes,
6. il existe une fonction numérique $u : X \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$xOy \iff u(x) < u(y).$$

Preuve. (1) \implies (2) : étant un ordre fort, O est asymétrique. Si O n'est pas négativement transitive, il existe x, y et z avec $xO^c y$, $yO^c z$ et xOz . Or, yOx est impossible (puisque, sinon, on en déduirait yOz , une contradiction) ; on a de même $zO^c y$. La restriction de O à $\{x, y, z\}$ est alors isomorphe à $\underline{1}_s + \underline{2}_s$, ce qui est impossible.

(2) \implies (3) : O étant asymétrique, elle est irréflexive, I est donc réflexive et l'on a $O \subseteq OI$. Supposons $OI \not\subseteq O$; il existe donc x, y et z tels que xOy , yIz et $xO^c z$. Mais $xO^c z$, $zO^c y$ et O négativement transitive impliquent $xO^c y$, une contradiction. On a donc $O = OI$ et on montre de même que $O = IO$.

(3) \implies (4) : comme ci-dessus, on a I réflexive. Puisque $(O^c \cap O^{cd})^d = O^{cd} \cap O^c$, I est symétrique. Soient x, y, z avec xIy et yIz . Si $xI^c z$, on a soit xOz , soit zOx . Dans le premier cas, yIx et xOz impliquent yOz , une contradiction. Le second cas conduit à une contradiction analogue. I est donc transitive et est une équivalence.

(4) \implies (5) : soit X/I l'ensemble quotient de X par l'équivalence I ; ses éléments, qui sont les classes d'incomparabilité de I , sont donc des antichaînes maximales de (X, O) . Définissons une relation $<$ sur cet ensemble quotient en posant, pour toute paire $\{A, A'\}$ d'antichaînes de X/I , $A < A'$ s'il existe $x \in A$ et $y \in A'$ tels que xOy . On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette relation peut aussi bien être définie par l'expression [pour tout $x \in A$ et tout $y \in A'$, on xOy], et que $<$ est un ordre strict sur X/I . De plus, cet ordre est strictement total. En effet, si pour deux antichaînes (maximales) distinctes A et A' de X/I , il existait $x \in A$ et $y \in A'$ avec $xO^c y$ et $yO^c x$, on aurait xIy , une contradiction. L'ordre strictement total $<$ peut donc être écrit dans l'ordre des rangs de ses éléments comme $A_1 \prec \dots \prec A_i \prec \dots \prec A_p$ (où ici, i est égal au rang normé augmenté d'une unité, cf. la remarque 2.27). Il est alors clair que, dans l'ensemble ordonné (X, O) , x est couvert par y si et seulement

si il existe $i < p$ tel que $x \in A_i$ et $y \in A_{i+1}$, ce qui signifie que (X, O) est la somme ordinale des antichaînes A_i .

(5) \implies (6) : soit $(X, O) = \bigoplus_{i=1}^p A_i$ un ensemble ordonné somme ordinale de p antichaînes A_i . Définissons une application r de X dans \mathbb{N} en posant $r(x) = i$ si $x \in A_i$. Puisque xOy équivaut à $(x \in A_i \text{ et } y \in A_j, \text{ avec } i < j)$, on a bien xOy si et seulement si $r(x) < r(y)$, c'est-à-dire la propriété (6). (On peut remarquer que (X, O) est rangé avec r comme fonction rang.)

(6) \implies (1) : soit u une fonction de X dans \mathbb{R} et O la relation définie par xOy si et seulement si $u(x) < u(y)$. Il est immédiat de vérifier que O est irréflexive et transitive, i.e. un ordre strict. On a d'autre part xIy si et seulement si $u(x) = u(y)$. L'existence de trois éléments x, y, z avec xOy , xIz et yIz est alors clairement impossible (puisque l'on aurait dans ce cas $u(x) = u(z) = u(y)$ et $u(x) < u(y)$). \square

Lorsqu'on définit en microéconomie la préférence d'un agent sur un ensemble X de biens au moyen d'une fonction d'utilité définie sur X , on suppose de ce fait que sa préférence (stricte) constitue un ordre fort. Il en résulte, comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction de cette section, que sa relation d'indifférence est transitive; en fait, x est indifférent à y si et seulement si $u(x) = u(y)$. Les notions d'ordre quasi-fort et d'ordre d'intervalles permettent des modélisations des préférences qui ne supposent plus une indifférence transitive mais conservent un certain type de représentation numérique que nous précisons ci-dessous. Nous commençons par donner diverses caractérisations des ordres quasi-forts.

Proposition 7.5 *Soit O une relation binaire définie sur un ensemble X et soit $I = O^c \cap O^c$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. O est un ordre quasi-fort, i.e. un ordre strict ne contenant ni $\underline{2}_s + \underline{2}_s$ ni $\underline{1}_s + \underline{3}_s$,
2. O est irréflexive et, pour tous éléments x, y, z, t de X , $[xOy \text{ et } zOt]$ impliquent $[xOt \text{ ou } zOy]$, et $[xOy \text{ et } yOz]$ impliquent $[xOt \text{ ou } tOz]$,
3. O est un ordre strict et $OI \cup IO$ est un ordre fort,
4. O admet un tableau en escalier (O, L) surdiagonal.

Comme il a été dit plus haut, nous prouverons cette proposition après avoir prouvé la proposition 7.10 plus générale (et, précisément, après le lemme 7.13).

Nous illustrons les caractérisations précédentes d'un ordre quasi-fort sur l'ordre quasi-fort O donné par son diagramme à la figure 7.1(a). Il est facile de vérifier que cet ordre ne contient ni $\underline{2}_s + \underline{2}_s$ ni $\underline{1}_s + \underline{3}_s$. Les ordres forts associés OI , IO et $OI \cup IO$ sont représentés aux figures 7.1(b), (c) et (d) respectivement. Le tableau en escalier surdiagonal de O est donné au tableau 7.1.

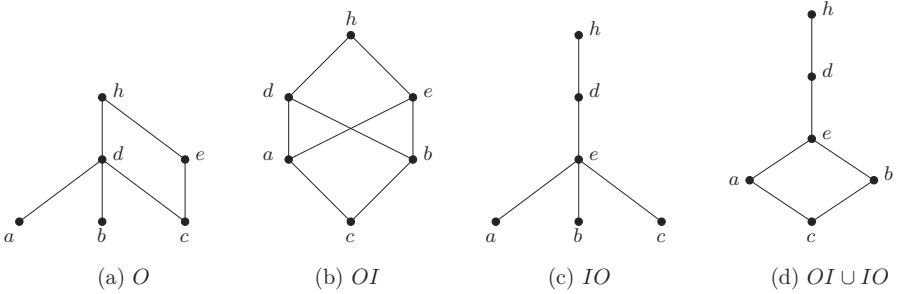


FIG. 7.1. (b), (c) et (d) Les ordres forts OI , IO et $OI \cup IO$ associés à l'ordre quasi-fort O en (a).

TABLEAU 7.1. Tableau en escalier surdiagonal de l'ordre quasi-fort O de la figure 7.1 (a).

	c	a	b	e	d	h
c	0	0	0	1	1	1
a	0	0	0	0	1	1
b	0	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	0	1
d	0	0	0	0	0	1
h	0	0	0	0	0	0

Théorème 7.6 (Représentation numérique des ordres quasi-forts)

Soit O une relation binaire définie sur un ensemble X et soit $I = O^c \cap O^{cd}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. O est un ordre quasi-fort,
2. il existe une fonction numérique $u : X \mapsto \mathbb{R}$ et un réel s tels que

$$xOy \iff u(x) + s < u(y),$$

3. il existe une fonction F de X dans l'ensemble des intervalles de longueur unité de \mathbb{R} telle que

$$xOy \iff F(x) < F(y),$$

(l'ordre $<$ sur les intervalles de \mathbb{R} étant pris au sens où, pour tous $a \in F(x), b \in F(y)$, on a $a < b$).

La condition (3) est illustrée ci-dessous dans le cas de l'ordre quasi-fort O de la figure 7.1.

La condition (2) ci-dessus montre le type de représentation numérique obtenu pour les ordres quasi-forts. Pour que y soit préféré à x , il faut et il suffit que son « utilité » (pour adopter le terme utilisé en microéconomie) dépasse

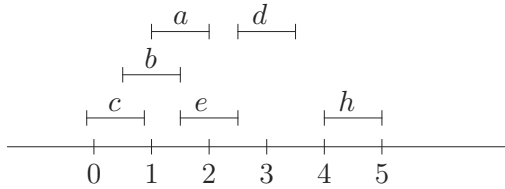


FIG. 7.2. Représentation par intervalles unitaires de l'ordre quasi-fort O de la figure 7.1(a).

l'utilité de x d'une certaine quantité s . Celle-ci joue donc le rôle d'un « seuil » en dessous duquel x et y seront considérés comme indifférents. On notera que dans le modèle de l'ordre quasi-fort, ce seuil est constant et donc indépendant de l'utilité de x . Le modèle d'ordre d'intervalles permet d'obtenir un seuil variable, comme cela va apparaître dans les différentes caractérisations de ces ordres données dans la proposition suivante (condition (5)). Nous renvoyons à l'exercice 7.7 et aux compléments de ce chapitre en section 7.6 pour des références où l'on trouvera la preuve du théorème 7.6 ainsi que pour le problème voisin de l'introduction d'un seuil d'indiscernabilité en psychophysique.

Proposition 7.7 *Soit O une relation binaire définie sur un ensemble X et soit $I = O^c \cap O^{cd}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. O est un ordre d'intervalles, i.e. un ordre strict ne contenant pas $\underline{2}_s + \underline{2}_s$,
2. O est irréflexive et, pour tous éléments x, y, z, t de X , xOy et zOt impliquent $[xOt$ ou $zOy]$,
3. O est un ordre strict et OI est un ordre fort,
4. O est irréflexive et admet un tableau en escalier (O, L_1, L_2) ,
5. il existe deux fonctions numériques $u : X \mapsto \mathbb{R}$ et $s : X \mapsto \mathbb{R}^+$ telles que

$$xOy \iff u(x) + s(x) < u(y),$$

6. il existe une fonction F de X dans l'ensemble des intervalles de \mathbb{R} telle que

$$xOy \iff F(x) < F(y).$$

Comme il a été dit plus haut, nous prouverons cette proposition après avoir prouvé la proposition 7.10 plus générale (et, précisément, après le lemme 7.13).

Dans la condition (3) ci-dessus, l'expression « OI est un ordre fort » pourrait être remplacée par « IO est un ordre fort ». On remarque que la condition (5), tout comme la condition (3) du théorème précédent, implique que, dans ce modèle d'ordre d'intervalles, x est indifférent à y si et seulement si $(u(x) \leq u(y) + s(y) \text{ et } u(y) \leq u(x) + s(x))$. Quant à la condition (6), elle implique que x est indifférent à y si et seulement si les deux intervalles $F(x)$ et $F(y)$ ont une intersection non vide (cf. les compléments de la section 7.6 pour les graphes définis de cette manière).

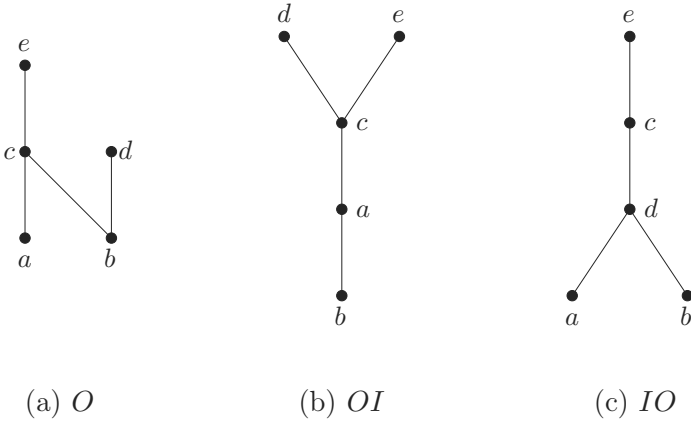


FIG. 7.3. (b) et (c) : Les deux ordres forts OI et IO associés à l'ordre d'intervalles O .

TABLEAU 7.2. Tableau en escalier de l'ordre d'intervalles O de la figure 7.3(a).

	a	b	d	c	e
b	0	0	1	1	1
a	0	0	0	1	1
c	0	0	0	0	1
d	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0

Exemple 7.8 Nous illustrons les caractérisations précédentes des ordres d'intervalles sur l'ordre (strict) O dont le diagramme est donné à la figure 7.3(a). C'est un ordre d'intervalles, puisqu'il ne contient pas $\underline{2}_s + \underline{2}_s$. Les deux ordres forts OI et IO correspondants (condition (3)) sont représentés aux figures 7.3(b) et 7.3(c) par leurs diagrammes. Le tableau en escalier de O (condition (4)) est donné au tableau 7.2. Pour obtenir la représentation numérique de la condition (5), on utilise l'algorithme donné plus loin dans la preuve de la proposition 7.10 (implication de (5) par (3)). Ceci permet d'abord de trouver deux fonctions f et g telles que xOy si et seulement si $f(x) < g(y)$. Pour f on peut, par exemple, prendre une fonction rang de l'ordre OI (on verra au point (4) du lemme 7.11 que OO^{cd} égal à $O + I$). On peut ainsi obtenir $f(b) = 1$, $f(a) = 2$, $f(c) = 3$ et $f(d) = f(e) = 4$. On a alors, puisque l'ensemble $\{y \in X : xO^{cd}y\} = xO^{cd} = x(O + I)$ n'est jamais vide, $g(x) = \text{Min}\{f(z) : xO^{cd}z\}$, ce qui donne $g(a) = g(b) = 1$, $g(c) = 3$, $g(d) = 2$ et $g(e) = 4$. En prenant ensuite $u = g$ et $s = f - g$, on obtient $s(a) = 1$, $s(b) = s(c) = s(e) = 0$ et $s(d) = 2$. Le lecteur vérifiera qu'on a bien alors xOy si et seulement si $u(x) + s(x) < u(y)$. Pour obtenir l'application F de la condition (6), on pose $F(x) = [u(x), u(x) + s(x)]$, ce qui donne $F(a) = [1, 2]$, $F(b) = [1, 1]$, $F(c) = [3, 3]$, $F(d) = [2, 4]$ et $F(e) = [4, 4]$. On remarque que

certains des intervalles permettant de représenter l'ordre O sont réduits à un seul nombre (mais il serait facile de déduire de cette représentation une autre sans intervalles triviaux).

Afin de faciliter les preuves des propositions 7.5 et 7.7, nous introduisons maintenant la classe des relations de Ferrers (dites aussi biordres) et en donnons plusieurs caractérisations.

Définition 7.9 Une relation binaire R sur un ensemble X est une relation de Ferrers (ou un biordre) si, pour tous $x, y, z, t \in X$, on ne peut avoir simultanément xRy , zRt , $xR^c t$ et $zR^c y$.

On notera que, si $x = z$ ou $y = t$, la condition de cette définition est trivialement vérifiée, mais que ce n'est pas le cas si d'autres éléments sont égaux. Par exemple, avec $x = y$ et $z = t$, on obtient qu'un biordre R ne peut contenir la sous-relation xRx , zRz , $xR^c z$ et $zR^c x$.

Proposition 7.10 Soit R une relation binaire définie sur un ensemble X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. R est une relation de Ferrers,
2. pour tous x, y, z, t distincts de X , xRy et zRt impliquent $[xRt$ ou $zRy]$,
3. RR^{cd} est un ordre fort,
4. R admet un tableau en escalier (R, L_1, L_2) ,
5. il existe deux fonctions f et g de X dans \mathbb{R} telles que

$$xRy \iff f(x) < g(y),$$

6. il existe deux fonctions u et s de X dans \mathbb{R} telles que

$$xRy \iff u(x) + s(x) < u(y).$$

Nous commençons par prouver le lemme suivant portant sur une relation binaire R quelconque définie sur X . Pour $x \in X$, on pose $xR = \{y \in X : xRy\}$ et $Rx = \{y \in X : yRx\}$.

Lemme 7.11 Soit R une relation binaire sur un ensemble X . On a alors :

1. Pour tous $x, y \in X$:
 - $xRR^{cd}y \iff xR \not\subseteq yR$,
 - $xR^{cd}Ry \iff Ry \not\subseteq Rx$,
 - $x[(RR^{cd})^{cd}]y \iff xR \supseteq yR$,
 - $x[(R^{cd}R)^{cd}]y \iff Rx \subseteq Ry$.
2. Les relations RR^{cd} et $R^{cd}R$ sont négativement transitives,

3. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- RR^{cd} est asymétrique,
- $R^{cd}R$ est asymétrique,
- RR^{cd} est un ordre fort,
- $R^{cd}R$ est un ordre fort.

4. Si R est un ordre strict, noté O , et $I = O^c \cap O^{cd}$, alors $O^{cd} = O + I$, $OI = OO^{cd}$ et $IO = O^{cd}O$.

Preuve. (1) $xRR^{cd}y$ est équivalent à l'existence d'un élément t de X tel que xRt et $yR^c t$, ce qui est équivalent à $xR \not\subseteq yR$. On en déduit immédiatement que $x[(RR^{cd})^{cd}]y$ équivaut à $xR \supseteq yR$. Les deux autres équivalences se prouvent de manière identique.

(2) Puisque, d'après (1), $x[(RR^{cd})^c]y$ équivaut à $yR \supseteq xR$, et $x[(R^{cd}R)^c]y$ équivaut à $Ry \subseteq Rx$, la transitivité négative de RR^{cd} et de $R^{cd}R$ est évidente.

(3) Supposons RR^{cd} asymétrique et $R^{cd}R$ non asymétrique. Il existe donc x et y distincts avec $xR^{cd}Ry$ et $yR^{cd}Rx$, ce qui implique l'existence de z et t distincts avec zRy , $zR^c x$, tRx et $tR^c y$. Avoir tRx et $zR^c x$ implique $tRR^{cd}z$, tandis qu'avoir zRy et $tR^c y$ implique $zRR^{cd}t$, une contradiction avec l'asymétrie de RR^{cd} . On montre de même que si $R^{cd}R$ est asymétrique, alors RR^{cd} l'est aussi. Enfin puisque, d'après (2), RR^{cd} est aussi négativement transitive, cette relation est un ordre fort (proposition 7.4). Il en va de même pour $R^{cd}R$.

(4) Une relation binaire O est asymétrique si $O \subseteq O^{cd}$, ce qui implique $O^{cd} = O^{cd} \cap (O + O^c) = O + I$. Pour toute relation binaire O , on a évidemment $OI \subseteq OO^{cd}$. Si O est un ordre strict et $xOO^{cd}y$, il existe t avec xOt et $yO^c t$. Si $tO^c y$, on a tIy et donc $xOIy$. Si tOy , la transitivité de O implique xOy , et la réflexivité de I implique yIy , d'où $xOIy$. On a donc bien montré que $OI = OO^{cd}$. On montrerait de même $IO = O^{cd}O$. \square

Remarque 7.12 Il résulte immédiatement du point (1) du lemme précédent que $(RR^{cd})^{cd}$ et $(R^{cd}R)^{cd}$ sont des préordres totaux (dont les ordres forts RR^{cd} et $R^{cd}R$ sont les parties asymétriques). Ces préordres, déjà considérés à l'exercice 1.10, sont souvent appelés les *préordres traces* (à droite, et à gauche). L'exercice 7.3 permet de montrer quelques résultats complémentaires sur ces préordres (notés respectivement, T_d et T_g) ou leur intersection (notée T).

Nous revenons maintenant à la preuve de la proposition 7.10.

Preuve (Preuve de la proposition 7.10). (1) \implies (2) : évident.

(2) \implies (3) : d'après le point (3) du lemme 7.11, pour montrer que RR^{cd} est un ordre fort, il suffit de montrer que cette relation est asymétrique. Si RR^{cd} n'est pas asymétrique, il existe $x, y \in X$ avec $xRR^{cd}y$ et $yRR^{cd}x$. Ceci implique qu'il existe t et z avec xRt , $yR^c t$, yRz et $xR^c z$, une contradiction avec (2).

(3) \implies (4) : d'après le lemme 7.11, RR^{cd} étant un ordre fort, $R^{cd}R$ l'est également. D'après le point (1) du théorème 2.29 (appliqué au cas des ordres

stricts), il existe donc deux ordres strictement totaux $L_{1,s}$ et $L_{2,s}$ tels que $RR^{cd} \subseteq L_{1,s}$ et $R^{cd}R \subseteq L_{2,s}$. Observons d'autre part que le codual d'un ordre strictement total L_s est l'ordre total associé : $(L_s)^{cd} = L_s + \{(x, x), x \in X\}$. Notons $L_1 = (L_{1,s})^{cd}$ et $L_2 = (L_{2,s})^{cd}$ les deux ordres totaux associés à $L_{1,s}$ et $L_{2,s}$. On va montrer que (R, L_1, L_2) est un tableau en escalier, i.e. que xL_1y , yRz et zL_2t impliquent xRt . Faisons d'abord une observation évidente : si $R \subseteq R'$ on a $R^{cd} \supseteq R'^{cd}$. En particulier, $RR^{cd} \subseteq L_{1,s}$ implique $L_1 = (L_{1,s})^{cd} \subseteq (RR^{cd})^{cd}$. Il s'ensuit que xL_1y implique $x[(RR^{cd})^{cd}]y$, c'est-à-dire $xR \supseteq yR$ (lemme 7.11). On montre de même que zL_2t implique $Rz \subseteq Rt$. Puisqu'on a yRz , on déduit alors xRz de la première implication, ce qui, avec la seconde implication, entraîne xRt .

(4) \implies (1) : soit (R, L_1, L_2) un tableau en escalier de R et soient x, y, z, t tels que xRy et zRt . Puisque L_1 est un ordre total, on a xL_1z ou zL_1x . Par définition de (R, L_1, L_2) , $L_1R \subseteq R$ et on obtient dans le premier cas xRt et dans le second zRy , ce qui montre (1).

(3) \implies (5) : RR^{cd} étant un ordre fort, il existe, d'après la proposition 7.4, une fonction $f : X \mapsto \mathbb{R}$ telle que $xRR^{cd}z$ si et seulement si $f(x) < f(z)$. Posons alors, pour tout y dans X ,

$$g(y) = \begin{cases} \text{Max}\{f(z), z \in X\} + 1 & \text{si } yR^{cd} = \emptyset \text{ (i.e. s'il n'existe pas } z \text{ tel} \\ & \text{que } yR^{cd}z\text{),} \\ \text{Min}\{f(z) : yR^{cd}z\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons d'abord que xRy implique $f(x) < g(y)$. Soient x, y avec xRy . Si $yR^{cd} = \emptyset$, $f(x) \leq \text{Max}\{f(z), z \in X\} < g(y)$.

Si $yR^{cd} \neq \emptyset$, alors soit z tel que $yR^{cd}z$. xRy et $yR^{cd}z$ impliquent $xRR^{cd}z$.

On a donc $f(x) < f(z)$ pour tout $z \in yR^{cd}$, d'où $f(x) < \text{Min}\{f(z) : yR^{cd}z\} = g(y)$.

Réciproquement, soient x et y tels que $f(x) < g(y)$. Que $g(y)$ soit égal à $\text{Max}\{f(z), z \in X\} + 1$ ou à $\text{Min}\{f(z) : yR^{cd}z\}$, on a $y(R^{cd})^c x$, i.e. xRy .

(5) \implies (6) : posons, pour tout $t \in X$, $u(t) = g(t)$ et $s(t) = f(t) - u(t)$. Alors xRy si et seulement si $f(x) = u(x) + s(x) < u(y)$.

(6) \implies (1) : supposons qu'il existe x, y, z, t tels que xRy , $zR^c y$, zRt et $xR^c t$. On a alors $u(x) + s(x) < u(y) \leq u(z) + s(z) < u(t) \leq u(x) + s(x)$, ce qui est impossible. \square

Le lemme suivant nous permet de prouver facilement les propositions 7.7 et 7.5 (dans cet ordre).

Lemme 7.13 *Soit O une relation binaire sur un ensemble X .*

1. *O est un ordre d'intervalles si et seulement si O est une relation de Ferrers irréflexive.*
2. *O est un ordre quasi-fort si et seulement si O est une relation de Ferrers irréflexive et ne contenant pas $\underline{1}_s + \underline{3}_s$.*

Preuve. (1) Si O est un ordre d'intervalles, il est irréflexif. De plus, puisqu'il ne contient pas $\underline{2}_s + \underline{2}_s$, il vérifie la caractérisation (2) d'une relation de Ferrers (proposition 7.10). Inversement, si O est une relation de Ferrers irréflexive, elle est transitive car $xOy, yO^c y$ et yOt impliquent xOt (point (2) de la proposition 7.10). O est donc un ordre strict qui ne peut contenir $\underline{2}_s + \underline{2}_s$ puisque O est une relation de Ferrers. C'est donc un ordre d'intervalles.

(2) Ceci résulte immédiatement de (1) et du fait que, par définition, un ordre quasi-fort est un ordre d'intervalles ne contenant pas $\underline{1}_s + \underline{3}_s$. \square

Nous donnons à présent les preuves des propositions 7.7 et 7.5.

Preuve (Preuve de la proposition 7.7). Appliquons la proposition 7.10 au cas où R est une relation de Ferrers irréflexive, donc un ordre d'intervalles noté O , et montrons que des conditions de cette proposition deviennent les cinq premières conditions de la proposition 7.7, ce qui prouvera l'équivalence de ces dernières. C'est évident pour les conditions (2) et (4). Pour la condition (1), ceci résulte du lemme 7.13, énonçant que les relations de Ferrers irréflexives sont les ordres d'intervalles.

Pour la condition (3), si OO^{cd} est un ordre fort, O est une relation de Ferrers (proposition 7.10) qui, étant irréflexive est – d'après ce qui vient d'être dit – un ordre strict (d'intervalles). D'après le point (4) du lemme 7.11 on a alors $OO^{cd} = OI$. Inversement, si O est un ordre (strict) on a, d'après ce même point, $OI = OO^{cd}$.

La condition (5) de la proposition 7.7 est obtenue à partir de la condition (6) de la proposition 7.10. En effet, O étant irréflexive, on a $u(x) + s(x) \geq u(x)$ et, donc, $s(x) \geq 0$.

Considérons finalement la condition (6) de la proposition 7.7. Elle est évidemment impliquée par la condition (5) (de cette même proposition) : il suffit de poser $F(x) = [u(x), u(x) + s(x)]$. Inversement, montrons que si (6) est vérifiée, O est un ordre d'intervalles, en montrant que la condition (2) est vérifiée. D'abord, puisque $F(x) \not\prec F(x)$, O est irréflexive. Soient x, y, z, t avec xOy, zOt et $xO^c t$; on doit montrer zOy . Les deux premières relations impliquent $u(x) + s(x) < u(y)$ et $u(z) + s(z) < u(t)$ et la troisième donne $u(x) + s(x) \geq u(t)$. On en déduit $u(z) + s(z) < u(y)$, soit zOy . \square

Preuve (Preuve de la proposition 7.5). (1) \implies (2) : un ordre quasi-fort étant un ordre d'intervalles sans $\underline{1}_s + \underline{3}_s$, il vérifie la première implication de (2) (d'après la proposition 7.7). Quant à la seconde, il est aisé de voir que si elle n'était pas vérifiée, la restriction de O à $\{x, y, z, t\}$ serait isomorphe à $\underline{1}_s + \underline{3}_s$, ce qui est impossible.

(2) \implies (3) : d'après la proposition 7.7, O est un ordre d'intervalles et OI est un ordre fort ; il en est de même de IO (cf. le commentaire de la proposition 7.7 page 207). Comme il est clair que l'union de deux relations négativement transitives est négativement transitive, $OI \cup IO$ est négativement transitive. Pour montrer que cette relation est un ordre fort, il suffit donc de montrer qu'elle est asymétrique. Or, supposons qu'il existe x, y avec $x(OI \cup IO)y$ et

$y(OI \cup IO)x$; OI et IO étant asymétriques, on aurait alors, par exemple, $xOIy$ et $yIOx$. Ceci implique qu'il existe z et t avec xOz , zIy , yIt et tOx . Ces quatre éléments sont nécessairement différents (par exemple, $t \neq y$, car sinon la transitivité de O implique yOz , une contradiction). Mais alors la restriction de O à $\{y, t, x, z\}$ serait isomorphe à $\underline{1}_s + \underline{3}_s$, ce qui est impossible.

(3) \implies (4) : d'après les points (4) et (2) du lemme 7.11, les relations OI et IO sont négativement transitives. Mais comme elles sont contenues dans l'ordre fort $OI \cup IO$, elles sont aussi asymétriques et donc des ordres forts (proposition 7.4). D'après l'implication de (4) par (3) établie à la proposition 7.7, O admet un tableau en escalier (O, L_1, L_2) , où L_1 et L_2 sont deux ordres totaux contenant respectivement OI et IO (cette dernière assertion résulte de la preuve de l'implication de (4) par (3) dans la preuve de la proposition 7.10 et du fait que, O étant un ordre, on a alors $OO^{cd} = OI$ et $O^{cd}O = IO$, voir page 210). Mais, puisque les ordres forts OI et IO sont contenus dans l'ordre fort $OI \cup IO$, on peut prendre $L_1 = L_2 = L$, ordre total contenant $OI \cup IO$. La relation I étant réflexive, on a $O \subseteq OI \cup IO \subseteq L$. Le tableau (O, L) est donc surdiagonal.

(4) \implies (1) : puisque O admet un tableau en escalier (O, L) , c'est un ordre d'intervalles (proposition 7.7). Soient x, y, z, t avec xOy , yOz (et donc xOz). Ce tableau (O, L) étant surdiagonal, on a $O \subseteq L$, donc xLy , yLz et xLz . Puisque $LO \subseteq O$ et yOz , si on a tLy , on a aussi tOz . De même, puisque $OL \subseteq O$ et xOy , si yLt , on a aussi xOt . Donc, la restriction de O à $\{x, y, z, t\}$ ne peut être isomorphe à $\underline{1}_s + \underline{3}_s$, ce qui montre que O est un ordre quasi-fort. \square

Pour terminer cette section, nous revenons sur la dualité entre les modélisations de la préférence stricte et de la préférence large d'un individu. Cette dualité est une conséquence du résultat élémentaire suivant :

Proposition 7.14 *Les ensembles, ordonnés par inclusion, des relations asymétriques et des relations totales définies sur un ensemble X sont deux demi-treillis, duaux par l'application de codualité $R \longmapsto R^{cd}$.*

Preuve. Il est évident que l'intersection (respectivement, l'union) de deux relations asymétriques (respectivement, totales) définies sur X est asymétrique (respectivement, totale). L'ensemble des relations asymétriques (respectivement, totales) définies sur X est donc un inf-demi-treillis (respectivement, un sup-demi-treillis). Comme une relation asymétrique R (respectivement, totale) est caractérisée par $R \subseteq R^{cd}$ (respectivement, $R \supseteq R^{cd}$), que $(R^{cd})^{cd} = R$, et que $R \subseteq R'$ si et seulement si $R^{cd} \supseteq R'^{cd}$, on en déduit aisément que l'application de codualité est un anti-isomorphisme entre ces deux demi-treillis. \square

Ainsi, chaque fois que l'on définit une classe particulière de relations asymétriques, l'application de codualité la transforme en une classe duale de relations totales. La classe duale des ordres forts est celle des préordres totaux (cf. l'exercice 7.4). Celle des ordres est la classe des relations totales dont la partie

asymétrique est transitive, relations qui, dans la littérature économique, sont souvent appelées *relations quasi-transitives*. Alors que les relations coduales d'un ordre d'intervalles n'ont pas reçu de nom particulier, celles coduales d'un ordre quasi-fort ont été appelées *quasi-ordres* ou *semiordres* (il n'est pas inutile de signaler que le terme anglais de *semiorder* désigne selon les auteurs un ordre quasi-fort ou un quasi-ordre).

D'autre part, la dualité entre deux de ces classes permet de transporter immédiatement tout résultat obtenu sur l'une en un résultat sur l'autre. Ainsi, il revient exactement au même de modéliser la notion de préférence comme une préférence stricte, c'est-à-dire par un ordre strict, ou comme une préférence large, c'est-à-dire par une relation quasi-transitive. Si, en microéconomie, le second choix est plus souvent fait, le choix du premier a au moins deux avantages : d'une part, il est plus conforme au principe de parcimonie (la coduale d'une relation asymétrique comporte beaucoup plus de couples) ; d'autre part, et surtout, il fait relever de la théorie des ensembles ordonnés l'étude des modèles mathématiques de la préférence.

Remarque 7.15 Si O est une relation asymétrique et que l'on note R la relation totale coduale de O , on a $R = O^{cd} = O + I$, avec $I = O^c \cap O^{cd} = R \cap R^d$. Ainsi, si O est un ordre modélisant la préférence stricte, on retrouve bien que la relation d'incomparabilité de cet ordre est la partie symétrique de la relation R modélisant la préférence large, c'est-à-dire la relation qui, dans ce modèle classique, représente l'indifférence.

7.2 Agrégation des préférences : théorèmes Arrowiens pour ordres

Depuis l'Antiquité, le vote des citoyens a été utilisé comme moyen de choisir des représentants ou des dirigeants, par exemple, les membres du Sénat ou les consuls de la république romaine. Au dix-huitième siècle, l'Académie des Sciences élit ses nouveaux membres au moyen d'un système simple, souvent encore utilisé (par exemple, pour l'élection des membres du Parlement britannique), consistant à choisir le candidat ayant obtenu le plus de voix dans un scrutin où chaque votant indique son candidat préféré. Le lecteur construira facilement des exemples où ce mode d'élection amène à élire le candidat classé dernier par la plus grande partie du corps électoral. Cette critique conduisit Borda à proposer la méthode qui porte son nom. Elle consiste à demander à chaque votant de donner son ordre (supposé total) de préférences sur les candidats, puis à classer ces candidats d'après la somme des rangs qu'ils ont obtenus dans ces différents ordres. Peu après, Condorcet remarque que la majorité des votants peut préférer un autre candidat à celui élu par la méthode de Borda (un exemple sera donné plus loin). Il propose alors comme remède sa propre méthode : la règle majoritaire. Elle consiste à considérer toutes les paires de candidats et à définir la préférence collective comme l'union de

toutes les préférences majoritaires obtenues sur ces paires. Mais Condorcet s'aperçoit du défaut de sa méthode : elle peut conduire à une préférence collective qui contient des circuits, et n'est donc plus un ordre total. C'est « l'effet Condorcet » (ou le « paradoxe du vote ») dont l'exemple le plus simple se produit dans le cas de trois votants dont les préférences sur trois candidats a , b et c sont les ordres totaux abc , bca et cab : le résultat de la règle majoritaire de Condorcet est alors un circuit où a est préféré à c , c préféré à b et b préféré à a ! Condorcet cherchera à remédier à ce défaut dont l'explication ne sera fournie que bien plus tard, lorsqu'Arrow, formalisant les difficultés rencontrées par les économistes pour construire une fonction d'utilité collective à partir des utilités individuelles, énoncera son fameux théorème d'impossibilité.

Le théorème d'Arrow a conduit à la création et au développement considérable de la « théorie du choix social ». Nous nous contenterons ici de présenter quelques résultats initiaux de cette théorie qui portent sur la difficulté d'agrèger de façon satisfaisante des ordres totaux en une préférence collective qui soit un ordre. Nous commencerons par préciser les règles d'agrégation proposées par Borda et Condorcet. Nous décrirons ensuite une vaste classe de règles, généralisant celle de Condorcet, et basées sur l'utilisation de « majorités généralisées ». La recherche parmi ces règles de celles pour lesquelles la préférence collective n'a jamais de circuits nous conduira au théorème de Nakamura et à un premier résultat d'impossibilité. Nous passerons alors à la démarche axiomatique introduite par Arrow dans ce domaine et qui consiste à chercher les règles vérifiant de « bonnes » propriétés. Le résultat d'impossibilité précédent nous conduira alors à plusieurs théorèmes « arrowiens » sur la difficulté d'agrèger des ordres totaux. En particulier, le théorème d'Arrow, montré ici dans le cas d'ordres totaux, apparaîtra comme une caractérisation des projections sur un certain espace produit.

Nous décrivons d'abord le modèle mathématique d'agrégation des préférences utilisé.

$X = \{x, y, z, \text{etc.}\}$ est un ensemble fini de m éléments que, dans la suite, nous appellerons les « candidats », mais qui, selon les contextes, peuvent être les « paniers de biens », les « options », etc.

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ est un ensemble fini de n éléments que, dans la suite, nous appellerons les « votants », mais qui, selon les contextes, peuvent être les « agents économiques », les « décideurs », etc.

Il sera toujours supposé dans la suite (et donc non répété) qu'il y a au moins trois candidats et trois votants ($m, n \geq 3$).

Chacun des votants est supposé avoir un ordre total (réflexif) de préférences sur l'ensemble des candidats. On définit ainsi une application de N dans l'ensemble $\mathcal{L} = \mathcal{L}_X$ des $m!$ ordres totaux définis sur X . Cette application est appelée un *profil* π de préférences (ou simplement un *profil*) et est notée :

$$\pi = (L_1, \dots, L_i, \dots, L_n),$$

TABLEAU 7.3. Tableau des $n_\pi(y, x)$ pour le profil π .

$n_\pi(y, x)$	a	b	c	d
a	7	2	0	4
b	5	7	5	2
c	7	2	7	4
d	3	5	3	7

où L_i est l'ordre total de préférences du votant i sur les candidats et où donc, xL_iy s'interprète comme « le candidat y est préféré au candidat x ». L'ensemble de tous les profils de préférences des N votants est noté \mathcal{L}^N .

Soit $\pi = (L_1, \dots, L_i, \dots, L_n)$ un profil. Pour $x, y \in X$, on pose :

$$N_\pi(y, x) = \{i \in N : yL_ix\}, \quad n_\pi(y, x) = |\{i \in N : yL_ix\}|$$

$N_\pi(y, x)$ est donc l'ensemble des votants préférant le candidat x au candidat y et $n_\pi(y, x)$ le nombre de ces votants.

Exemple 7.16 $X = \{a, b, c, d\}$ est un ensemble de quatre candidats et N est un ensemble de sept votants. Le profil de préférences des votants sur les candidats est $\pi = (cadb : 2, bcad : 2, dbca : 3)$ où, par exemple, $cadb : 2$ signifie que 2 votants ont l'ordre $c < a < d < b$ comme préférence sur les candidats. Le tableau 7.3 donne le tableau des $n_\pi(x, y)$ pour ce profil. Par exemple, la valeur 2 de $n_\pi(a, b)$ est à l'intersection de la ligne a et de la colonne b de ce tableau.

Enfin, le rang de l'élément x dans l'ordre total L_i (où ce rang est défini par $r_{L_i}(x) = |L_ix| = \{y \in X : yL_ix\}$ – cf. la remarque 2.27) est noté plus simplement $r_i(x)$. Ainsi, les candidats ont des rangs allant de 1 (pour le moins apprécié) à n (pour le plus apprécié).

Le problème de l'agrégation des préférences consiste à définir des fonctions qui, d'une part, associent à chaque profil possible de préférences une relation sur X représentant la « préférence collective » des votants de ce profil, et qui, d'autre part, vérifient de « bonnes » propriétés.

Il serait a priori souhaitable que la préférence collective soit, comme la préférence individuelle, un ordre total. Mais la difficulté (voire l'impossibilité) d'obtenir de bonnes fonctions réalisant cet objectif amène à le relâcher. On peut ainsi se contenter de demander que la relation de préférence collective soit sans circuits. En effet, on sait que dans ce cas on peut étendre la préférence collective en un ordre total (théorème 2.22). Cependant, on a vu plus haut qu'une règle d'agrégation des préférences aussi « naturelle » que la règle majoritaire de Condorcet peut conduire à des relations de préférence collective admettant des circuits. Nous donnons donc une définition des fonctions d'agrégation permettant de considérer ces différents cas.

Définition 7.17 Soit \mathcal{M} un ensemble de relations binaires sur l'ensemble X . Une \mathcal{M} -fonction d'agrégation des préférences (\mathcal{M} -FAP) est une application F de l'ensemble \mathcal{L}^N de tous les profils d'ordres totaux dans \mathcal{M} : pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$, $F(\pi) \in \mathcal{M}$.

Commençons par préciser les \mathcal{M} -fonctions d'agrégation des préférences proposées par Borda et Condorcet.

Soit $\pi = (L_1, \dots, L_i, \dots, L_n) \in \mathcal{L}^N$. Pour tout $x \in X$, on pose $R(x, \pi) = \sum_{i=1,2,\dots,n} r_i(x)$ (somme des rangs de x dans les ordres du profil π).

On définit une relation binaire $R_B(\pi)$ sur X par $yR_B(\pi)x$ si $R(x, \pi) > R(y, \pi)$.

Il est évident que, pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$, $R_B(\pi)$ est un ordre fort sur X (condition (6) de la proposition 7.4). La fonction d'agrégation des préférences ainsi définie est donc une \mathcal{W} -FAP (où \mathcal{W} est l'ensemble des ordre forts définis sur X) qu'on appelle *fonction d'agrégation de Borda* (ou *règle de Borda*).

Pour montrer que cette fonction d'agrégation peut contredire le principe de majorité, considérons l'exemple suivant. On a sept votants dont les préférences sur trois candidats a, b et c sont cba (i.e. $c < b < a$) pour trois d'entre eux, bac pour deux autres et acb pour les deux derniers – autrement dit, le profil associé est $\pi = (cba : 3, bac : 2, acb : 2)$. Le lecteur s'assurera que le préordre de Borda est alors l'ordre total cba , ce qui met a comme vainqueur. Cependant c , dernier dans cet ordre, est préféré à a par quatre voix contre trois.

L'exercice 7.10 montre à quels autres types de « paradoxes » peut conduire l'utilisation de la fonction d'agrégation de Borda : une modification des préférences des votants sur un seul candidat peut conduire à inverser complètement la préférence collective.

Nous définissons maintenant les règles majoritaires de Condorcet.

Définition 7.18 La fonction (*respectivement*, la fonction large) d'agrégation des préférences de Condorcet fait correspondre à tout profil $\pi \in \mathcal{L}^N$ sa relation majoritaire $R_{MAJ}(\pi)$ (*respectivement*, sa relation majoritaire large $R_{MAJL}(\pi)$). Ces deux relations sont définies par : pour tous $x, y \in X$,

$$yR_{MAJ}(\pi)x \text{ si } n_\pi(y, x) > \frac{n}{2}$$

et

$$yR_{MAJL}(\pi)x \text{ si } n_\pi(y, x) \geq \frac{n}{2}$$

Il est utile pour la suite de donner une autre forme à ces définitions en explicitant les notions de majorité qu'elles utilisent : une partie S de l'ensemble N des votants est une *majorité (stricte)* si $|S| > \frac{n}{2}$, et une *majorité large* si $|S| \geq \frac{n}{2}$. En posant $\mathcal{F}_{MAJ} = \{\text{majorités de } N\}$ et $\mathcal{F}_{MAJL} = \{\text{majorités larges de } N\}$, on peut donc écrire :

$$yR_{MAJ}(\pi)x \text{ si } N_\pi(y, x) \in \mathcal{F}_{MAJ}, \text{ et } yR_{MAJL}(\pi)x \text{ si } N_\pi(y, x) \in \mathcal{F}_{MAJL}$$

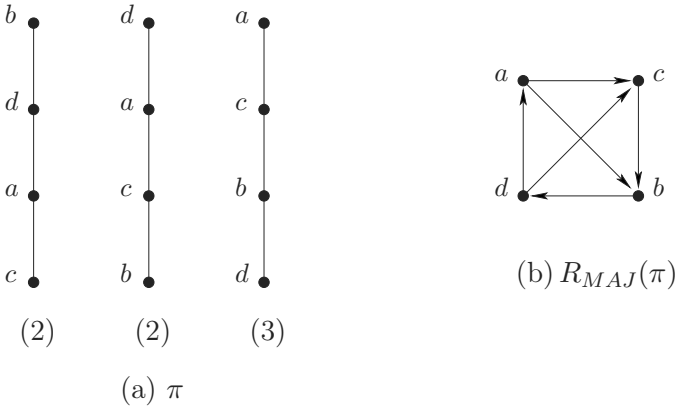


FIG. 7.4. (a) Un profil de sept votants sur quatre candidats, dont le tournoi majoritaire (b) est non transitif.

La proposition suivante, dont la preuve fait l'objet de l'exercice 7.11, donne des indications sur les ensembles \mathcal{M} d'arrivée des deux fonctions majoritaires de Condorcet.

- Proposition 7.19**
1. Pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$, $R_{MAJ}(\pi)$ est une relation réflexive et antisymétrique, et $R_{MAJL}(\pi)$ est une relation totale.
 2. Pour toute relation réflexive et antisymétrique (respectivement, totale) R définie sur X , il existe un ensemble N de votants de cardinalité paire et un profil π de \mathcal{L}^N tels que $R_{MAJ}(\pi) = R$ (respectivement, $R_{MAJL}(\pi) = R$).
 3. Pour tout ensemble N de cardinalité impaire et tout profil $\pi \in \mathcal{L}^N$, $R_{MAJ}(\pi) = R_{MAJL}(\pi)$ est une relation de tournoi et, pour tout tournoi R défini sur X , il existe un ensemble N de cardinalité paire et un profil $\pi \in \mathcal{L}^N$ tels que $R_{MAJ}(\pi) = R$.

On voit ainsi que l'utilisation des règles majoritaires de Condorcet peut conduire à une préférence collective qui est une relation antisymétrique ou totale arbitraire, ce qui n'est évidemment pas le but recherché. Ceci est illustré à la figure 7.4 où l'on prend comme profil de préférences celui de l'exemple 7.16. Les couples majoritaires sont alors ceux exprimés par au moins quatre votants et, en utilisant la table 7.3, on obtient comme relation majoritaire le tournoi non transitif de la figure (les arcs de réflexivité du tournoi n'y sont pas représentés). On retrouvera cet exemple à l'exercice 7.10.

Pour essayer de pallier le problème posé par l'utilisation des règles majoritaires de Condorcet, nous définissons une classe beaucoup plus large de fonctions majoritaires, associées à des familles de majorités généralisées.

- Définition 7.20** 1. Une famille de majorités généralisées sur l'ensemble N est une famille \mathcal{F} de parties de N telle que, pour tout $T \subseteq N$, $S \in \mathcal{F}$ et $S \subseteq T$ impliquent $T \in \mathcal{F}$.
2. Soit \mathcal{F} une famille de majorités généralisées sur N et $\pi \in \mathcal{L}^N$. On définit la relation de préférence collective $R_{\mathcal{F}}(\pi)$ associée à \mathcal{F} et π en posant $yR_{\mathcal{F}}(\pi)x$ si $N_{\pi}(y, x) \in \mathcal{F}$.
3. La fonction majoritaire (généralisée) associée à la famille finissante \mathcal{F} de parties de N est la fonction d'agrégation des préférences qui, à tout profil π de \mathcal{L}^N , associe la relation $R_{\mathcal{F}}(\pi)$; elle est notée $F_{\mathcal{F}}$.

On remarque qu'une famille de majorités généralisées n'est rien d'autre qu'une famille de parties finissante (pour l'ordre d'inclusion).

Nous donnons des exemples de telles fonctions majoritaires en considérant les familles finissantes de parties appelées filtres et ultrafiltres. Bien que ces exemples puissent paraître très particuliers, on verra que ce sont ceux que font surgir les théorèmes arrowiens ultérieurs.

Définition 7.21 Une famille \mathcal{F} de parties de N est un filtre sur N si elle est finissante, \cap -stable (i.e. $S, T \in \mathcal{F}$ implique $S \cap T \in \mathcal{F}$) et différente de l'ensemble $P(N)$ des parties de N . Un filtre est un ultrafiltre si c'est un filtre maximal pour l'ordre d'inclusion entre filtres.

Il est immédiat de remarquer qu'un filtre ne peut contenir ni la partie vide ni deux parties d'intersection vide. L'exercice 7.12 a pour but de montrer d'autres résultats bien connus sur un ensemble fini : tout filtre est de la forme $\mathcal{F}_V = \{S \subseteq N : V \subseteq S\}$, où V est une partie non vide de N . On dit que \mathcal{F}_V est le filtre de base V (on notera que \mathcal{F}_V est la partie finissante $[V]$ dans $\underline{2}^N$). Les ultrafiltres sur N ne sont autres que les n filtres de base i , pour un élément i quelconque de N ; un tel filtre, noté \mathcal{F}_i , est donc la famille de toutes les parties de N contenant le votant i . Ces notions sont illustrées à la figure 7.5.

Définition 7.22 Une fonction F d'agrégation des préférences est une \cap -projection (respectivement, une projection) s'il existe un filtre (respectivement, un ultrafiltre) \mathcal{F} sur N tel que $F = F_{\mathcal{F}}$.

Dans le cas où F est une \cap -projection, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_V$ est un filtre de base V . On obtient alors $F_{\mathcal{F}}(\pi) = \bigcap \{L_i : i \in V\}$ pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$, et le domaine d'arrivée de cette FAP est l'ensemble $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ des ordres sur X .

Dans le cas où F est une projection, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$ est un ultrafiltre de base i . On obtient alors $F_{\mathcal{F}}(\pi) = L_i$, pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$. Autrement dit, F est la i ème projection de \mathcal{L}^N et son domaine d'arrivée est l'ensemble $\mathcal{L} = \mathcal{L}_X$ des ordres totaux sur X .

Remarque 7.23 En théorie du choix social, une \cap -projection est appelée une fonction « oligarchique », terme rendant compte du fait que la préférence

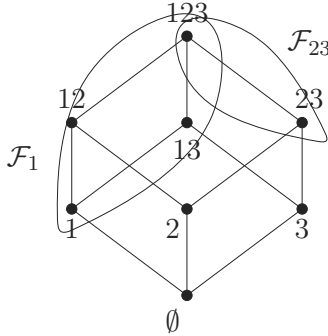


FIG. 7.5. Le filtre \mathcal{F}_{23} et l’ultrafiltre \mathcal{F}_1 sur $N = \{1, 2, 3\}$, représentés dans le treillis $\underline{2}^N$.

collective n’est alors déterminée que par les seuls votants de l’« oligarchie » V . Le cas particulier où $V = \{i\}$ – et où F est alors une projection – est baptisé fonction « dictatoriale » (puisque la préférence collective est celle du « dictateur » i).

On considère maintenant une hypothèse minimale pour qu’une fonction majoritaire $F_{\mathcal{F}}$ soit considérée comme satisfaisante, à savoir que les relations de préférence collective qu’elle détermine soient sans circuits. La caractérisation des familles de majorités correspondantes est due à Nakamura et nécessite la définition du nombre de Nakamura. Nous utilisons la notation suivante : pour une famille \mathcal{F} de parties de N , $\bigcap \mathcal{F}$ désigne l’intersection $\bigcap \{S \subseteq N : S \in \mathcal{F}\}$ de toutes les parties appartenant à \mathcal{F} .

Définition 7.24 On appelle nombre de Nakamura d’une famille \mathcal{F} de parties de N , et l’on note $\nu(\mathcal{F})$, le nombre défini par :

$$\nu(\mathcal{F}) = \begin{cases} \text{Min}\{|\mathcal{F}'|, \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} \text{ et } \bigcap \mathcal{F}' = \emptyset\} & \text{si } \bigcap \mathcal{F} = \emptyset, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque l’intersection $\bigcap \mathcal{F}$ de la famille \mathcal{F} est vide, $\nu(\mathcal{F})$ est donc la cardinalité minimum d’une sous-famille de \mathcal{F} dont l’intersection est vide. Ainsi si, par exemple, $\nu(\mathcal{F}) > 3$, \mathcal{F} ne contient pas trois parties dont l’intersection est vide.

Le théorème de Nakamura caractérise les familles pour lesquelles $F_{\mathcal{F}}(\pi)$ n’a jamais de circuits. En notant \mathcal{A} l’ensemble des relations sans circuits définies sur X , ces fonctions d’agrégation sont donc des \mathcal{A} – FAP. Rappelons que $yR_{\mathcal{F}}(\pi)x$ si et seulement si $N_{\pi}(y, x) \in \mathcal{F}$.

Théorème 7.25 (Nakamura [327], 1975) Soit \mathcal{F} une famille finissante de parties de N différente de $P(N)$ et $F_{\mathcal{F}}$ la FAP qui, à tout profil π de \mathcal{L}^N ,

associe la relation $R_{\mathcal{F}}(\pi)$. Alors, $F_{\mathcal{F}}$ est une \mathcal{A} – FAP si et seulement si $\nu(\mathcal{F}) > |N|$.

Autrement dit, $F_{\mathcal{F}}$ associe à tout profil de préférences une relation sans circuits si et seulement si le nombre de Nakamura de \mathcal{F} est strictement supérieur au cardinal de N . La démonstration, qui n’est pas très difficile, de ce résultat fait l’objet de l’exercice 7.13.

En utilisant le nombre de Nakamura, on obtient la caractérisation suivante des ultrafiltres qui permet une preuve simple du corollaire 7.27.

Lemme 7.26 *Soit \mathcal{F} une famille de parties de N . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. \mathcal{F} est un ultrafiltre,
2. $\nu(\mathcal{F}) > 3$ et, pour tout $S \subseteq N$, $S \notin \mathcal{F}$ implique $N \setminus S \in \mathcal{F}$.

Preuve. Si \mathcal{F} est un ultrafiltre, il est de la forme $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$ pour un certain i de N . On a alors $\nu(\mathcal{F}) = +\infty$ et la vérification de la seconde propriété est immédiate.

Inversement, montrons d’abord que \mathcal{F} est un filtre. En effet, $\nu(\mathcal{F}) > 3$ implique d’abord que \mathcal{F} ne contient pas la partie vide. S’il existe $S \in \mathcal{F}$ et $T \supset S$ avec $T \notin \mathcal{F}$, on a $N \setminus T \in \mathcal{F}$, d’où $S \cap (N \setminus T) = \emptyset$, une contradiction avec $\nu(\mathcal{F}) > 3$. Enfin, si $S, T \in \mathcal{F}$ et $S \cap T \notin \mathcal{F}$ alors $N \setminus (S \cap T) \in \mathcal{F}$ d’où $S \cap T \cap (N \setminus (S \cap T)) = \emptyset$, et la même contradiction. La famille \mathcal{F} est donc un filtre. Supposons qu’elle ne soit pas un filtre maximal, i.e. qu’il existe un filtre \mathcal{G} sur N tel que $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$. Il existe donc $S \subseteq N$ tel que $S \in \mathcal{G}$ et $S \notin \mathcal{F}$. Mais on a alors $N \setminus S \in \mathcal{F}$, d’où S et $N \setminus S \in \mathcal{G}$, ce qui est impossible. \square

En considérant maintenant les FAP $F_{\mathcal{F}}$ pour lesquelles la préférence collective est toujours un ordre total, i.e. les \mathcal{L} – FAP, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 7.27 *La FAP $F_{\mathcal{F}}$ associée à la famille finissante \mathcal{F} de parties de N est une \mathcal{L} – FAP si et seulement si \mathcal{F} est un ultrafiltre, i.e. si et seulement si $F_{\mathcal{F}}$ est une projection.*

Preuve. Montrons la condition nécessaire. Puisque $F_{\mathcal{F}}$ est une \mathcal{L} – FAP, et que $|N| \geq 3$, le théorème de Nakamura implique $\nu(\mathcal{F}) > 3$. D’après le lemme 7.26, il suffit donc de montrer que \mathcal{F} vérifie la deuxième condition de ce lemme. Supposons que ce ne soit pas le cas, i.e. qu’il existe $S \subseteq N$ tel que $S \notin \mathcal{F}$ et $N \setminus S \notin \mathcal{F}$. Considérons alors $x, y \in X$ et un profil π tels que, pour tout i de S (respectivement, tout j de $N \setminus S$), on ait $xL_i y$ (respectivement, $yL_j x$), les préférences entre les autres candidats étant quelconques. On a alors $(x, y) \notin F_{\mathcal{F}}(\pi)$ et $(y, x) \notin F_{\mathcal{F}}(\pi)$, ce qui est impossible puisque $F_{\mathcal{F}}(\pi)$ est un ordre total.

La condition suffisante est, elle, évidente. \square

Les résultats précédents vont permettre de donner des preuves simples de théorèmes « arrowiens ». La démarche suivie par Arrow consistait à définir axiomatiquement ce qu'on entend par « bonne » fonction d'agrégation des préférences, puis à chercher les fonctions vérifiant ces axiomes. Nous allons suivre cette démarche dans le cas où les préférences individuelles sont des ordres totaux (cf. la section 7.6 des compléments pour le cas des ordres forts considérés par Arrow). Dans la suite nous considérons donc des \mathcal{M} -FAP de \mathcal{L}^N dans \mathcal{M} où l'ensemble \mathcal{M} de relations auxquelles peuvent appartenir les préférences collectives sera précisé dans chaque cas. Il est demandé à la fonction d'agrégation F de vérifier les deux propriétés de Pareto et d'indépendance définies ci-dessous :

Définition 7.28 Soit F une fonction d'agrégation de \mathcal{L}^N dans un ensemble \mathcal{M} de relations.

- F vérifie la propriété de Pareto si, pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$ et tous $x, y \in X$, $N_\pi(y, x) = N$ entraîne $yF(\pi)x$. On dit aussi que \mathcal{F} est parétienne ou qu'elle vérifie la propriété d'unanimité.
- F vérifie la propriété d'indépendance si, pour tous $\pi, \pi' \in \mathcal{L}^N$ et tous $x, y \in X$, $N_\pi(y, x) = N_{\pi'}(y, x)$ entraîne $[yF(\pi)x \iff yF(\pi')x]$. On dit aussi que F est indépendante.

La première de ces propriétés signifie simplement que, si tous les votants préfèrent le candidat x au candidat y , cette préférence unanime doit être une préférence collective, ce qui va de soi. Quant à la propriété d'indépendance, elle signifie que la préférence collective entre x et y ne doit dépendre que des préférences individuelles entre ces deux candidats et non de préférences faisant intervenir d'autres candidats, ce qui paraît une exigence raisonnable. On observera que l'exigence de vérifier cette propriété est clairement satisfaite par les FAP définies ci-dessus à partir d'une famille finissante, mais qu'elle ne l'est pas pour la règle de Borda, comme le montre l'exercice 7.10 (tandis que la propriété parétienne est, elle, satisfaite pour toutes ces règles). Toutefois, si l'on ajoute à ces deux exigences, a priori fondées, celle selon laquelle la préférence collective est, soit un ordre total, soit simplement un ordre, on aboutit à des résultats dictatoriaux ou oligarchiques.

La preuve de ces résultats fait intervenir des profils de préférences pour lesquels on fixe les préférences des votants sur certains candidats, les préférences sur les autres candidats étant alors arbitraires. Nous utilisons le type de notations suivantes pour de tels profils : $\pi = (xyz : S, yzx : T, zyx : U)$, où (S, T, U) est une partition de N et où les préférences de tous les votants de S (respectivement, de T , de U) sur les trois candidats x, y et z sont xyz (respectivement, yzx, zyx), les préférences sur les autres candidats étant quelconques.

Théorème 7.29 (Arrow pour les ordres totaux) Soit F une \mathcal{L} -fonction d'agrégation des préférences. F est indépendante et parétienne si et seulement si F est une projection.

Preuve. La condition suffisante est évidente. La preuve de la condition nécessaire s'obtient en montrant que, si F est indépendante et parétienne, il existe alors une famille finissante \mathcal{F} de parties de N telle que $F = F_{\mathcal{F}}$. Le corollaire 7.27 permet de conclure, puisque \mathcal{F} est alors un ultrafiltre. Pour alléger les notations, nous notons L l'ordre total $F(\pi)$.

Afin d'obtenir la famille \mathcal{F} , on introduit la notion d'ensemble décisif. Soit (y, x) un couple d'éléments distincts de X . Un sous-ensemble S de N est un (y, x) -ensemble décisif (pour la fonction F) si, pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$ tel que $N_{\pi}(y, x) = S$, on a yLx . On observe que, F étant indépendante, il suffit qu'il existe un profil π avec $N_{\pi}(y, x) = S$ et yLx pour que S soit (y, x) -décisif. En notant $\mathcal{F}(y, x)$ la famille des (y, x) -ensembles décisifs (pour F), on a donc yLx si et seulement si $N_{\pi}(y, x) \in \mathcal{F}(y, x)$. On note que $\mathcal{F}(y, x)$ n'est jamais vide puisque, par la propriété de Pareto, elle contient N .

Un sous-ensemble S de N est un ensemble décisif (pour F) si S est (y, x) -décisif pour tout couple (y, x) d'éléments distincts de X .

On va montrer que, si S est un ensemble (y, x) -décisif pour au moins un couple (y, x) , c'est un ensemble décisif. Montrons d'abord que, si S est (y, x) -décisif, il est (z, x) -décisif pour tout $z \neq x, y$, i.e. que $\mathcal{F}(y, x) \subseteq \mathcal{F}(z, x)$. Soient $S \subset N$ avec $S \in \mathcal{F}(y, x)$, et z différent de x et de y . Soit le profil $\pi = (zyx : S, xzy : N \setminus S)$. L'ensemble S étant (y, x) -décisif et F étant parétienne, on a yLx et zLy . Par transitivité de l'ordre total L , on en déduit zLx . Mais, puisque $N_{\pi}(z, x) = S$, on obtient $S \in \mathcal{F}(z, x)$. On laisse au lecteur le soin de montrer de façon analogue que, pour tout $z \neq x, y$, $\mathcal{F}(y, x) \subseteq \mathcal{F}(y, z)$, puis de déduire de ces deux résultats que toutes les familles d'ensembles (y, x) -décisifs sont identiques pour tous les couples (y, x) d'éléments distincts de X et sont donc tous égaux à la famille \mathcal{F} des ensembles décisifs.

On peut donc écrire que yLx si et seulement si $N_{\pi}(y, x) \in \mathcal{F}$, ce qui revient à dire que $F = F_{\mathcal{F}}$. Pour pouvoir utiliser le corollaire 7.27, il ne reste plus qu'à prouver que \mathcal{F} est une famille finissante. Soient $S \in \mathcal{F}$, $N \supseteq T \supset S$ et $\pi = (zyx : S, yzx : T \setminus S, yxz : N \setminus T)$. F étant parétienne et l'ensemble S étant décisif, on a yLx et zLy . Puisque L est transitif, on en déduit zLx et, puisque $N_{\pi}(z, x) = T$, on obtient bien $T \in \mathcal{F}$. \square

On élargit maintenant le domaine des préférences collectives possibles en supposant qu'il s'agisse de l'ensemble $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ de tous les ordres sur X . Le résultat suivant montre qu'on passe alors de la « dictature » à l'« oligarchie ».

Théorème 7.30 *Soit F une \mathcal{O} -fonction d'agrégation des préférences. F est indépendante et parétienne si et seulement si F est une \cap -projection (définition 7.22).*

Preuve. La condition suffisante est évidente. La preuve de la condition nécessaire s'obtient en montrant que, dans ce cas, il existe un filtre \mathcal{F} sur N tel que $F = F_{\mathcal{F}}$ et, donc, un sous-ensemble V de N tel que $F(\pi) = \bigcap \{L_i : i \in V\}$, pour tout π .

On définit les notions d'ensembles décisifs comme au théorème 7.29 et on observe d'abord que la preuve donnée alors de l'identité de toutes les familles d'ensembles (y, x) -décisifs ne fait intervenir que la transitivité de $F(\pi)$. Elle reste donc valable ici et l'on peut écrire $F = F_{\mathcal{F}}$. Il en est de même pour la preuve de ce que \mathcal{F} est finissante. La partie vide ne peut appartenir à \mathcal{F} (puisque, par le théorème de Nakamura, on a $\nu(\mathcal{F}) > |N| \geq 3$). Pour montrer que la famille \mathcal{F} est un filtre, il reste à montrer qu'elle est stable par intersection. Soient $S, T \in \mathcal{F}$ avec $S \not\subseteq T$ et $S \not\supseteq T$; $\nu(\mathcal{F}) > 3$ implique $S \cap T \neq \emptyset$. Soit $\pi = (zyx : S \cap T, yxz : S \setminus T, xzy : T \setminus S, xyz : N \setminus (S \cup T))$. Les ensembles S et T étant décisifs, on a yOx (avec $O = F(\pi)$) et zOy . La transitivité de O implique zOx . Puisque $N_{\pi}(z, x) = S \cap T$, nous obtenons bien $S \cap T \in \mathcal{F}$. \square

Remarque 7.31 Les deux théorèmes précédents peuvent s'énoncer comme des résultats d'impossibilité. Il suffit d'ajouter aux conditions sur la fonction d'agrégation qu'elle ne soit pas, respectivement, dictatoriale ou oligarchique.

On peut se demander ce que devient une fonction d'agrégation (indépendante et parétienne), lorsqu'on prend comme domaine admissible des préférences collectives une classe particulière d'ordres contenant les ordres totaux, telle que la classe des ordres forts ou celle des ordres d'intervalles. La réponse est donnée pour ces deux classes à l'exercice 7.14.

7.3 Les rôles des ordres en classification

La classification est une branche de l'analyse de données qui s'occupe de déterminer des classes dans un ensemble E d'objets à classer. Une classe $C \subseteq E$ est interprétée comme un ensemble d'objets regroupés en vertu de propriétés communes, ou d'un certain type de proximité entre eux. Ainsi, l'exemple 3.45 illustre la *classification galoisienne*, où chaque concept $F \times G$ correspond à une classe F d'éléments de E partageant les caractères de G . Nous reviendrons dans la section suivante sur cette approche qui concerne, notamment, les bases de données relationnelles et l'extraction des connaissances. Dans le domaine de la classification, l'approche galoisienne n'est pas la plus usuelle. On considère plus fréquemment au départ une fonction d mesurant la dissemblance entre éléments à classer, dite *dissimilarité* sur E , dont la définition donnée ci-dessous est plus générale que celle d'une métrique :

Définition 7.32 Une dissimilarité sur un ensemble E est une application d de E^2 dans l'ensemble \mathbb{R}^+ des réels non négatifs vérifiant, pour tous $e, e' \in E$, les propriétés suivantes :

- $d(e, e') = 0$ si et seulement si $e = e'$,
- $d(e, e') = d(e', e)$.

L'interprétation d'une telle dissimilarité est que les objets e et e' sont d'autant plus ressemblants que la valeur $d(e, e')$ est moins élevée. A partir

d'une dissimilarité (mais parfois, d'un autre type de données), on construit un système de classification sur E , c'est-à-dire une famille \mathcal{C} de parties de E dont les éléments seront les classes cherchées, avec deux objectifs :

1. Les objets d'une même classe doivent être plus ressemblants entre eux qu'avec ceux qui sont hors de cette classe,
2. La famille \mathcal{C} est d'un type particulier (modèle classificatoire) assurant la simplicité et la lisibilité de l'issue du processus de classification.

Ces objectifs ne peuvent être simultanément atteints que de façon approchée. Pour les nombreuses méthodes (et algorithmes) disponibles, qui sortent du propos de ce livre, on pourra se reporter à divers manuels existants comme ceux de Arabie, Hubert et De Soete [11] (1996), ou de Mirkin [296] (1997).

Nous allons aborder ici les aspects ordinaux qui interviennent, d'une part, dans la description de plusieurs types de modèles classificatoires usuels et, d'autre part dans la structuration de l'espace \mathcal{M} des solutions d'un problème de classification. L'approche ordinale constitue alors un outil important pour des problèmes « dérivés » comme la comparaison et l'agrégation des classifications. Nous allons donc d'abord présenter quelques types de modèles, partitions, équivalences, hiérarchies, hiérarchies indicées, dendrogrammes et ultramétriques, souvent considérés en classification, auxquels nous ajoutons les familles de Moore. Observant que les ensembles de modèles rencontrés sont des inf-demi-treillis, parfois des treillis, nous abordons ensuite les problèmes de comparaison et d'agrégation dans de telles structures. Nous munissons un inf-demi-treillis T d'une métrique particulière liée à la représentation de tout élément t de T par l'ensemble S_t des sup-irréductibles qui lui sont inférieurs (chapitre 3, proposition 3.11 et corollaire 3.12). L'agrégation métrique consiste à chercher un élément, dit *médiane*, minimisant la somme de ses distances à un k -uplet d'éléments donnés de T (ou à chercher toutes les médianes lorsqu'il y en a plus d'une). On obtient des propriétés des médianes en relation avec (la forme latticielle de) la règle majoritaire de la section précédente, et on définit les *demi-treillis à médianes* où les médianes s'obtiennent effectivement par cette règle. La section se termine en observant comment ces résultats s'appliquent, entre autres, aux modèles classificatoires.

Commençons donc par une présentation de ces derniers. Rappelons qu'une partition $\mathbf{P} = \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$ de E (chapitre 1, exemple 1.14) est un ensemble de parties de E (les classes de \mathbf{P}) deux à deux disjointes et d'union E : chaque élément de E est donc placé dans une et une seule des classes de \mathbf{P} . Il est bien connu que la donnée d'une partition \mathbf{P} de E équivaut à celle d'une relation d'équivalence (i.e. réflexive, symétrique et transitive) $R_{\mathbf{P}}$ sur E . La correspondance bijective entre \mathbf{P} et $R_{\mathbf{P}}$ est donnée par $(e, e') \in R_{\mathbf{P}}$ si et seulement si e et e' appartiennent à la même classe de la partition \mathbf{P} . L'ensemble \mathcal{E}_E des équivalences sur E contient l'équivalence totale E^2 et est stable pour l'intersection (le vérifier). Il s'agit donc d'une famille de Moore (définition 3.27) sur E^2 , et d'un treillis pour l'ordre d'inclusion. La fermeture correspondante n'est autre que la fermeture réflexo-transitive associant à toute relation symétrique sur E la plus petite équivalence la contenant. Considérons

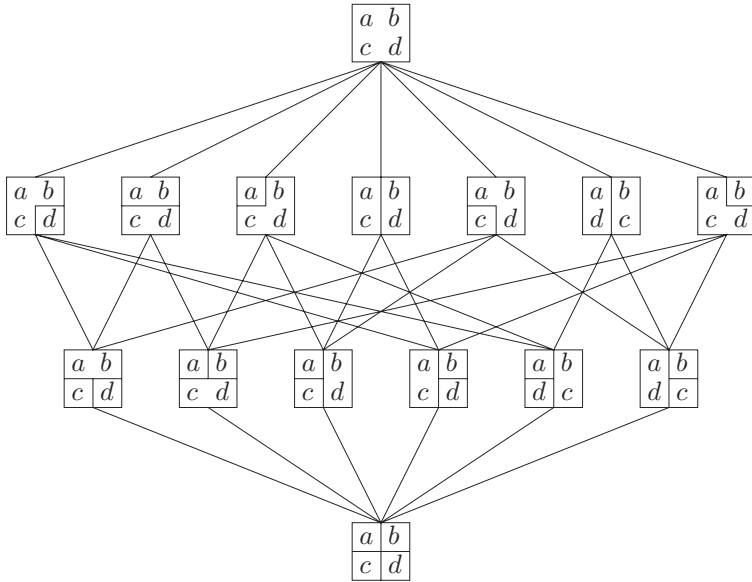


FIG. 7.6. Le treillis $\mathcal{P}_{\{a,b,c,d\}}$ des partitions de $\{a, b, c, d\}$ munies de l'ordre de finesse.

l'ordre de finesse sur l'ensemble \mathcal{P}_E des partitions de E qui a été défini à l'exemple 1.14. On vérifie aisément que, pour $\mathbf{P}, \mathbf{P}' \in \mathcal{P}_E$, \mathbf{P} est plus fine que \mathbf{P}' (c'est-à-dire que toute classe de \mathbf{P} est contenue dans une classe de \mathbf{P}') si et seulement si on a $R_{\mathbf{P}} \subseteq R_{\mathbf{P}'}$. L'ordre de finesse munit donc l'ensemble \mathcal{P}_E d'une structure de treillis, avec pour minimum la partition la plus fine \mathbf{P}_0 en $|E|$ classes et pour maximum la partition la moins fine \mathbf{P}_1 en 1 classe égale à E (voir les exercices 7.15 et 7.16 pour quelques propriétés de ce treillis). La figure 7.6 donne le diagramme du treillis $\mathcal{P}_{\{a,b,c,d\}}$ muni de l'ordre de finesse.

Les autres modèles que nous allons présenter correspondent à diverses formes d'*arbres de classification*. En classification *hiérarchique*, les sorties des programmes sont du type représenté par la figure 7.7 ; l'information apportée par un tel arbre sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ se lit à plusieurs niveaux, auxquels correspondent plusieurs modèles classificatoires que nous allons définir précisément.

L'arbre de la figure 7.7 a pour éléments minimaux les « singletons » (parties à un seul élément) de E . Chaque trait plein horizontal correspond alors à une partie H de E , formée de tous les éléments de E situés « en dessous » de ce trait. Ainsi, l'arbre de cette figure représente la famille de parties

$$\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{2\}, \{3\}, \\ \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{6, 7, 8\}, \{7\}, \{7, 8\}, \{8\}, \{9\}, \{9, 10\}, \{10\}, E\},$$

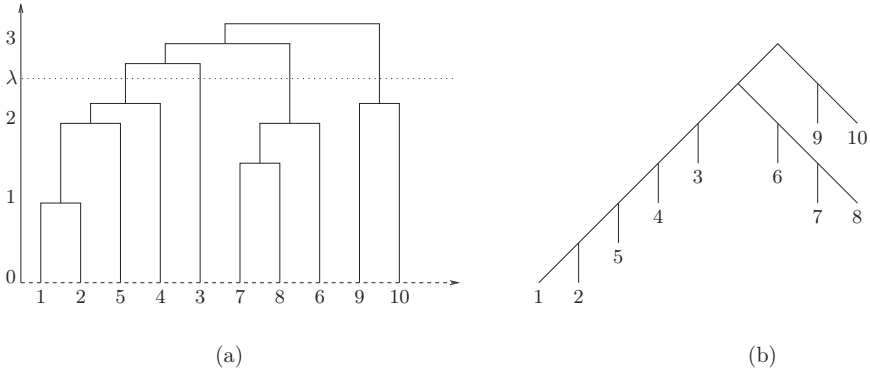


FIG. 7.7. Arbres de classification d'une hiérarchie.

dans laquelle on observe que deux parties sont soit disjointes ou soit incluses l'une dans l'autre. On identifie en fait l'arbre à une famille \mathcal{H} de parties de E du type défini comme suit :

Définition 7.33 Une hiérarchie sur un ensemble E est une famille \mathcal{H} de parties de E vérifiant les propriétés suivantes :

1. $E \in \mathcal{H}, \emptyset \in \mathcal{H}, \{e\} \in \mathcal{H}$ pour tout $e \in E$,
2. pour tous $H, H' \in \mathcal{H}, H \cap H' \in \{\emptyset, H, H'\}$.

L'ensemble des hiérarchies sur E est noté \mathbb{H} .

Deux hiérarchies sur E ne peuvent différer que par celles de leurs classes qui ont entre 2 et $n - 1$ éléments ; les autres classes sont dites *triviales*. La propriété (2) entraîne que, pour toute partie A non vide de E , l'ensemble des classes de \mathcal{H} contenant A est totalement ordonné par l'inclusion (le vérifier) et contient donc une classe minimum H_A . On en déduit les propriétés suivantes :

- L'ensemble ordonné (\mathcal{H}, \subseteq) est un sup-demi-treillis avec, pour tous $H, H' \in \mathcal{H}, H \vee H' = H_{(H \cup H')}$,
- L'ensemble ordonné (\mathcal{H}, \subseteq) est arborescent (chapitre 2, définition 2.12).

Les hiérarchies constituent donc la formalisation de base des arbres de classification. L'exercice 2.5 du chapitre 2 énumère un certain nombre de propriétés qui (par dualité, car l'exercice porte sur les inf-demi-treillis arborescents) s'appliquent aux hiérarchies. Par exemple, en notant que, pour tous $e, e' \in E, \{e\} \vee \{e'\} = H_{\{e, e'\}}$, on obtient :

Proposition 7.34 Soit \mathcal{H} une hiérarchie sur E . Pour tous $e, e', e'' \in E$, on a $|\{H_{\{e, e'\}}, H_{\{e, e''\}}, H_{\{e', e''\}}\}| < 3$.

La figure 7.7(b) donne le diagramme de la hiérarchie de la figure 7.6. Les étiquettes sur les singletons suffisent puisque tout autre sommet correspond à l'ensemble des singletons qui lui sont inférieurs. Les méthodes de classification

hiérarchique fournissent fréquemment, en plus d'une hiérarchie \mathcal{H} , un indice de niveau ι qui s'interprète comme un indicateur de la cohésion des classes, les faibles valeurs de l'indice correspondant aux classes les plus cohérentes.

Définition 7.35 Une hiérarchie indicée sur un ensemble E est un couple (\mathcal{H}, ι) où :

- \mathcal{H} est une hiérarchie sur E ,
- ι est une application strictement isotone de \mathcal{H} dans \mathbb{R}^+ vérifiant $\iota(\{e\}) = 0$ pour tout $e \in E$.

Avec l'échelle qui figure sur sa gauche, la figure 7.7(a) donne en fait une représentation d'une hiérarchie indicée. Coupons l'arbre par une horizontale d'ordonnée λ , comme sur cette figure. Les classes de la hiérarchie situées juste en dessous ou sur cette horizontale forment une partition $f(\lambda)$ de E (sur la figure, on a $f(\lambda) = \{\{1, 2, 4, 5\}, \{3\}, \{6, 7, 8\}, \{9, 10\}\}$). Comme $\lambda \leq \lambda'$ implique $f(\lambda) \leq f(\lambda')$, la deuxième inégalité portant sur l'ordre de finesse entre partitions de E , on a en fait défini une application isotone f de \mathbb{R}^+ dans le treillis \mathcal{P}_E des partitions de E . L'image par f de \mathbb{R}^+ dans \mathcal{P}_E en est une chaîne étendue, c'est-à-dire contenant la partition la plus fine (à n classes) et la moins fine (à 1 classe). De plus, pour tous $e, e' \in E$, $\iota(H_{\{e, e'\}})$ est le minimum des $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tels que e et e' sont dans une même classe de $f(\lambda)$. Ces observations conduisent aux définitions suivantes :

Définition 7.36 Soient E un ensemble et L une partie de \mathbb{R}^+ contenant le nombre 0. On appelle L -dendrogramme sur E toute application isotone f de L dans \mathcal{P}_E vérifiant la propriété (DG) suivante :

Pour tous $e, e' \in E$, l'image inverse $f^{-1}(\{P \in \mathcal{P}_E : e \text{ et } e' \text{ sont dans la même classe de } P\})$ a un minimum. (DG)

En particulier, on appelle dendrogramme sur E tout \mathbb{R}^+ -dendrogramme sur E .

Définition 7.37 On appelle ultramétrique sur E toute dissimilarité u sur E vérifiant l'inégalité (U) suivante :

$$\text{Pour tous } e, e', e'' \in E, u(e, e') \leq \text{Max}(u(e, e''), u(e', e''))(U)$$

En posant, pour tous $e, e' \in E$, $u(e, e') = \iota(H_{\{e, e'\}})$, on déduit de la hiérarchie indicée (\mathcal{H}, \subseteq) une dissimilarité u sur E dont on vérifie, à partir de la proposition 7.34, qu'elle est une ultramétrique sur E .

Dans les exercices 7.18 à 7.20, on revient au cas fini en prenant pour L la chaîne finie $\underline{k} = \{0 < 1 < \dots < k - 1\}$. La condition (DG) est alors satisfaite par toute application isotone de \underline{k} dans \mathcal{P}_E . Ces exercices consistent à établir, d'une part, que les \underline{k} -dendrogrammes sur E sont exactement les applications résiduelles (définition 3.32) de \underline{k} dans \mathcal{P}_E , et, d'autre part, que les trois ensembles suivants sont en correspondance bijective :

1. l'ensemble des hiérarchies indicées sur E à valeurs de ι prises dans la chaîne \underline{k} ,
2. l'ensemble des \underline{k} -dendrogrammes sur E ,
3. l'ensemble des ultramétriques sur E à valeurs dans \underline{k} .

De plus, les deux derniers de ces ensembles sont des ensembles d'applications qui sont dualement ordonnées pour l'ordre d'exponentiation (chapitre 3, définition 3.4).

Si les modèles classificatoires décrits ci-dessus sont les plus usuels, bien d'autres ont été proposés dans la littérature. Sans les passer en revue, nous pouvons dégager quelques conditions pouvant être requises pour un ensemble de classes $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$:

- (C1) $E \in \mathcal{F}$,
 (C2) $C, C' \in \mathcal{F}$ implique $C \cap C' \in \mathcal{F}$,
 (C3) pour tout $e \in E$, $\{e\} \in \mathcal{F}$.

La condition (C1) porte sur l'existence d'une classe « universelle » et (C2) sur l'obligation, dès lors que deux classes C et C' ont été obtenues, de considérer aussi la classe $C \cap C'$ des éléments communs à C et à C' . Ensemble, les conditions (C1) et (C2) expriment simplement que \mathcal{F} est une famille de Moore sur E (définition 3.27). Lorsqu'on leur ajoute la condition (C3), qui stipule que les éléments de E sont particularisés dans \mathcal{F} , on a aussi, avec (C2), $\emptyset \in \mathcal{F}$. On remarque que ni les partitions ni les hiérarchies ne constituent directement de telles familles. Toutefois, on a indiqué au chapitre 3 (exemple 3.29) comment une famille de Moore unique $\mathcal{F} = \mu(\mathcal{A}) = \{\bigcap \mathcal{B} : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$ correspond à toute famille \mathcal{A} de parties de E . Ainsi, si $P = \{C_1, \dots, C_p\}$ est une partition de E , on a $\mu(P) = P \cup \{E, \emptyset\}$. Si \mathcal{H} est une hiérarchie sur E , alors la famille de Moore $\mu(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \cup \{\emptyset\}$ vérifie (C3).

D'autre part, on a vu au chapitre 3 (proposition 3.43 et exemple 3.45) comment, pour un ensemble E d'objets décrits par un ensemble E' d'attributs binaires (la donnée étant une relation $R \subseteq E \times E'$), le treillis de Galois de la relation R correspond à une famille de Moore \mathcal{F} sur E ainsi qu'à une famille de Moore \mathcal{G} sur E' , dualement isomorphe à \mathcal{F} pour l'inclusion.

De tels exemples justifient l'adjonction des familles de Moore aux ensembles de modèles précédents, car, d'une part, elles en constituent une généralisation naturelle et, d'autre part, on vient de rappeler qu'elles sont les ensembles de classes résultant de la classification galoisienne. Nous avons donc, sous diverses particularisations, un ensemble \mathcal{M} de modèles qui est un ensemble ordonné :

- par l'ordre de finesse pour $\mathcal{M} = \mathcal{P}_E$,
- par l'ordre d'inclusion pour $\mathcal{M} = \mathbb{H}$ ou $\mathcal{M} = \mathbb{F}$, l'ensemble des familles de Moore sur E ,
- par l'ordre d'exponentiation si \mathcal{M} est l'ensemble des L -dendrogrammes, ou celui des ultramétriques sur E .

De plus, ces ensembles de modèles, et bien d'autres, sont munis naturellement d'une structure de treillis ou tout au moins d'inf-demi-treillis : nous avons rencontré le treillis des partitions, et nous établirons plus loin que l'ensemble ordonné (\mathbb{H}, \subseteq) est un inf-demi-treillis d'un type particulier, tandis que les exercices 7.18 et 7.20 montrent comment définir des ordres de treillis sur les ensembles des k -dendrogrammes et des ultramétriques sur E . Enfin, la structure de treillis de l'ensemble \mathcal{F} sera établie dans la prochaine section. Nous utilisons la structure ordinale de \mathcal{M} pour aborder deux types de problèmes :

- *le problème de comparaison* : il s'agit de définir une métrique sur \mathcal{M} qui soit aisément calculable, même si la taille de l'ensemble \mathcal{M} croît exponentiellement avec le cardinal de E ,
- *le problème d'agrégation* : il s'agit de transposer aux classifications les problèmes et les approches considérés à la section 7.2 précédente dans le cas de l'agrégation des préférences.

Dans ce dernier cas, on considère donc un profil $\pi = (M_1, \dots, M_i, \dots, M_v) \in \mathcal{M}^v$ (on dit que π est un *profil de \mathcal{M}*) et des fonctions d'agrégation sur \mathcal{M}^v faisant correspondre une ou plusieurs classifications à un tel profil. Ce problème de consensus de classifications est apparu dès les années soixante en analyse de données et en reconstruction phylogénétique (voir les compléments en section 7.6.3).

Dans ce qui suit, nous lions les deux problèmes précédents et nous les abordons principalement dans le cadre abstrait de l'agrégation *métrique* dans les demi-treillis. On appliquera ensuite les résultats obtenus aux divers treillis et demi-treillis de classifications qui viennent d'être évoqués. Nous considérons donc un inf-demi-treillis (T, \leq) , muni d'une distance d sur T .

Définition 7.38 Soient (T, \leq) un inf-demi-treillis, d une distance sur T , $\pi = (t_1, \dots, t_i, \dots, t_v)$ un profil de T^v , et t un élément de T . L'éloignement de t à π est la quantité $E_d(\pi, t) = \sum_{1 \leq i \leq v} d(t_i, t)$. L'élément t est une médiane (métrique) de π si son éloignement à π est minimum dans T . On appelle procédure médiane dans T la procédure d'agrégation qui associe à tout profil $\pi \in T^v$ l'ensemble $Med_d(\pi)$ des médianes de π pour la métrique d .

Remarque 7.39 Le terme *médiane* est apparu dans un sens différent (celui d'un polynôme latticiel particulier dans les commentaires suivant le corollaire 5.2 page 135. Il faut en général distinguer cette médiane *latticielle* de la médiane *métrique* que nous venons de définir. En fait, l'un des objets de cette section est la reconnaissance d'un vaste domaine où ces deux notions coïncident.

Pour le choix d'une distance appropriée sur T , nous utilisons l'inf-codage $t \mapsto S_t$ de T dans 2^{S_T} défini au chapitre 3 (proposition 3.6 et corollaire 3.12), S_T étant l'ensemble des éléments sup-irréductibles de T . A partir des résultats de l'exercice 5.12 sur la distance de la différence symétrique entre parties d'un ensemble, on définit sur T une distance qui la généralise et qui correspond, dans divers cas particuliers, à des distances usuelles :

Définition 7.40 Soient T un inf-demi-treillis et S_T l'ensemble de ses sup-irréductibles. La distance de la différence symétrique sur T est l'application δ de T^2 dans \mathbb{R}^+ définie par : pour tous $t, t' \in T$,

$$\begin{aligned}\delta(t, t') &= |S_t \Delta S_{t'}| \\ &= |\{s \in S : [s \in S_t \text{ et } s \notin S_{t'}] \text{ ou } [s \notin S_t \text{ et } s \in S_{t'}]\}| \\ &= |S_t \setminus S_{t'}| + |S_{t'} \setminus S_t| \\ &= |S_t \cup S_{t'}| - |S_t \cap S_{t'}|\end{aligned}$$

Par extension du cas latticiel, un inf-demi-treillis T est dit *distributif* si, pour tout $t \in T$, le treillis $\langle t \rangle$ est distributif. On va montrer qu'un tel demi-treillis est rangé et que la distance δ s'y exprime en termes de rang, ou de longueurs des chemins dans le graphe de voisinage $Vois(T)$ de T (chapitre 1, section 1.1.2) :

Proposition 7.41 Soient T un inf-demi-treillis distributif, δ la distance de la différence symétrique sur T et $t, t' \in T$. On a alors :

1. T est rangé avec $r(t) = |S_t|$,
2. $\delta(t, t') = r(t) + r(t') - 2r(t \wedge t')$,
3. $\delta(t, t')$ est la longueur minimum d'un chemin entre t et t' dans le graphe $Vois(T)$,
4. si $t \vee t'$ existe, $\delta(t, t') = r(t \vee t') - r(t \wedge t')$.

Preuve. Il est immédiat, à partir du point (1) de la proposition 5.13, qu'un tel demi-treillis est rangé, et que le rang $r(t)$ n'est autre que $|S_t|$. On obtient alors l'expression (2) en observant que $|S_t \setminus S_{t'}| = |S_t| - |S_t \cap S_{t'}|$ et, de même, $|S_{t'} \setminus S_t| = |S_{t'}| - |S_t \cap S_{t'}|$. Dans un treillis distributif, l'application $t \mapsto S_t$ est aussi un sup-codage (point (6) du théorème 5.1). Les égalités $r(t \vee t') = |S_{t \vee t'}| = |S_t \cup S_{t'}|$ et $r(t \wedge t') = |S_{t \wedge t'}| = |S_t \cap S_{t'}|$ donnent alors (4) lorsque $t \vee t'$ existe. Si t et t' sont reliés par une arête du graphe $Vois(T)$, par exemple, si on a $t \prec t'$, alors les ensembles S_t et $S_{t'}$ diffèrent d'exactlyement 1 élément. Pour t et t' quelconques, la quantité $|S_t \Delta S_{t'}|$ est donc une borne inférieure pour la longueur d'un chemin de $Vois(T)$ entre t et t' . Cette borne est effectivement atteinte car l'expression (2) correspond à l'existence d'un chemin de cette longueur passant par $t \wedge t'$, d'où (3). \square

Pour un profil donné $\pi = (t_1, \dots, t_i, \dots, t_v) \in T^v$ et en posant $V = \{1, \dots, v\}$, nous attachons à tout sup-irréductible $s \in S_T$ les paramètres suivants :

$$v_\pi(s) = |\{i \in V : s \leq t_i\}|, \quad v'_\pi(s) = |\{i \in V : s \not\leq t_i\}|, \quad \text{et } w_\pi(s) = v_\pi(s) - v'_\pi(s)$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, c'est-à-dire pratiquement toujours, on omet l'indice π dans ces notations. On a les égalités $v(s) + v'(s) = v$ et $w(s) = 2v(s) - v$. Nous dirons qu'un sup-irréductible s est *majoritaire* si $2v(s) > v$, ou encore si $w(s)$ est strictement positif (c'est-à-dire si s apparaît dans une majorité stricte des représentations par sup-irréductibles des éléments du profil), et *équilibré* si $2v(s) = v$ (donc si $w(s) = 0$).

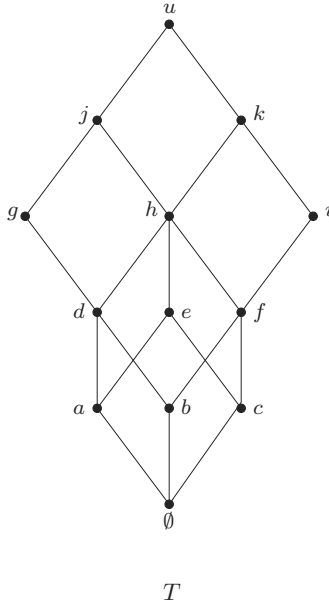


FIG. 7.8.

TABLEAU 7.4. Fonctions v et w sur les éléments sup-irréductibles du treillis distributif de la figure 7.8.

$s \in S_T$	a	b	c	g	i
$v(s)$	5	3	3	1	1
$w(s)$	4	0	0	-4	-4

Exemple 7.42 Considérons le treillis (distributif) T de la figure 7.8 et le profil $\pi = (a, a, e, f, g, k)$ de T . On a $S_T = \{a, b, c, g, i\}$, les valeurs des fonctions v et w étant données par le tableau 7.4. Le sup-irréductible a est majoritaire, tandis que b et c sont équilibrés.

Lorsque T est un inf-demi treillis quelconque, on obtient une formule simple pour l'éloignement $E_\delta(\pi, t)$ d'un élément t arbitraire de T à un profil π de T .

Proposition 7.43 Soit T un inf-demi-treillis. Pour tout profil $\pi = (t_1, \dots, t_i, \dots, t_v) \in T^v$ et pour tout $t \in T$, on a :

$$E_\delta(\pi, t) = \sum_{1 \leq i \leq v} |S_{t_i}| - \sum_{s \in S_t} w(s)$$

Preuve. Par définition de $E_\delta(\pi, t)$, on a $E_\delta(\pi, t) = \sum_{1 \leq i \leq v} \delta(t_i, t) = \sum_{1 \leq i \leq v} |S_{t_i} \Delta S_t|$. Introduisons la fonction caractéristique c_i de $S_{t_i} \Delta S_t$ définie

par : pour tout $s \in S_T$,

$$c_i(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in S_{t_i} \Delta S_t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $E_\delta(\pi, t) = \sum_{1 \leq i \leq v} \sum_{s \in S_T} c_i(s) = \sum_{s \in S_T} \sum_{1 \leq i \leq v} c_i(s)$. En partitionnant S_T en S_t et son complémentaire, on obtient :

$$E_\delta(\pi, t) = \sum_{s \notin S_t} \sum_{1 \leq i \leq v} c_i(s) + \sum_{s \in S_t} \sum_{1 \leq i \leq v} c_i(s) = \sum_{s \notin S_t} v(s) + \sum_{s \in S_t} (v - v(s))$$

Dans cette dernière expression, on ajoute alors la quantité $\sum_{s \in S_t} v(s)$ à la première sommation et on la retranche de la seconde pour obtenir l'expression cherchée :

$$E_\delta(\pi, t) = \sum_{s \in S_T} v(s) + \sum_{s \in S_t} (v - 2v(s)) = \sum_{1 \leq i \leq v} |S_{t_i}| - \sum_{s \in S_t} w(s)$$

□

Dans l'expression de l'éloignement qui vient d'être obtenue, la première sommation est une constante ne dépendant que du profil donné π tandis que, dans la deuxième, la quantité $-w(s)$ apparaît comme la contribution du sup-irréductible $s \in S_t$ à l'éloignement de t . Cette contribution est donc négative si s est un sup-irréductible majoritaire, nulle s'il est équilibré, et positive sinon. Pour obtenir un éloignement aussi réduit que possible, le mieux serait donc de trouver un élément t de T dont la représentation S_t contiendrait tous les sup-irréductibles majoritaires, éventuellement certains équilibrés, et aucun autre. L'objet de ce qui suit est de reconnaître la classe de demi-treillis, incluant les treillis distributifs, où un tel élément existe pour tout profil π .

Nous introduisons d'abord une nouvelle notation en posant, pour $\pi \in T^v$ et pour tout entier σ , $S(\pi, \sigma) = \{s \in S_T : v_\pi(s) \geq \sigma\}$.

Cet ensemble sera le plus souvent noté simplement $S(\sigma)$. En particulier, en prenant $\alpha = \frac{v+1}{2}$ et $\beta = \frac{v}{2}$, $S(\alpha)$ est l'ensemble des sup-irréductibles majoritaires et $S(\beta) \setminus S(\alpha)$ celui, vide si v est impair, des sup-irréductibles équilibrés.

Il résulte de la proposition 7.43 que tout élément t vérifiant $S(\alpha) \subseteq S_t \subseteq S(\beta)$ minimise l'éloignement de $E_\delta(\pi, t)$.

Proposition 7.44 *Soient T un inf-demi-treillis et σ un entier. L'ensemble $S(\sigma)$ est une partie commençante du sous-ensemble ordonné (S_T, \leq) de T .*

Preuve. Si $s \in S(\sigma)$, il existe une partie $W \subseteq V$ telle que $|W| \geq \sigma$ et $s \leq t_i$ pour tout $i \in W$. Alors, $s' \leq s$ implique $s' \leq t_i$ pour tout $i \in W$ et donc $s' \in S(\sigma)$. □

Sous réserve de l'existence de ces éléments, posons :

$$t(\sigma) = \bigvee S(\sigma) \text{ et } t'(\sigma) = \bigvee \{ \bigwedge_{i \in W} t_i : W \subseteq V, |W| \geq \sigma \}.$$

La seconde expression est un « polynôme latticiel ». Dans le cas où π est un profil $(L_1, \dots, L_i, \dots, L_n)$ d'ordres totaux, on a défini à la section 7.2 page 217 sa relation majoritaire large $R_{MAJL}(\pi)$. Or il est immédiat de vérifier que $R_{MAJL}(\pi) = \bigcup \{(y, x) : n_\pi(y, x) \geq \frac{n}{2}\} = \bigcup \{\bigcap_{i \in W} L_i, W \subseteq N \text{ et } |W| \geq \frac{n}{2}\}$, les opérations \cup et \cap étant celles du treillis $P(X^2)$ des relations binaires. Ainsi l'expression $t'(\alpha)$ est une formalisation latticielle de la règle majoritaire.

On a vu au chapitre 2 (proposition 2.15) que, dans un inf-demi-treillis T , toute partie majorée T' de T a un supremum, à savoir l'infimum des majorants de T' . En particulier, pour tout $t \in T$, le sous-ensemble ordonné $\{t' \in T : t' \leq t\}$ est un treillis.

Proposition 7.45 *Soient T un inf-demi-treillis et π un profil de T . Si l'un des éléments $t(\sigma)$ et $t'(\sigma)$ existe, l'autre existe aussi, et on a l'égalité $t(\sigma) = t'(\sigma)$.*

Preuve. Supposons que $t'(\sigma)$ existe, et soit $s \in S(\sigma)$. Il existe donc une partie W de V telle que $|W| \geq \sigma$ et $s \leq t_i$ pour tout $i \in W$. Donc $s \leq \bigwedge_{i \in W} t_i \leq t'(\sigma)$. Alors, $t'(\sigma)$ est un majorant de $S(\sigma)$, d'où l'existence de $t(\sigma)$, avec $t(\sigma) \leq t'(\sigma)$.

D'autre part, puisque la représentation par les sup-irréductibles est un inf-morphisme, on a $S_{\bigwedge_{i \in W} t_i} = \bigcap_{i \in W} S_{t_i} = \{s \in S_T : s \leq t_i \text{ pour tout } i \in W\}$. Pour $|W| \geq \sigma$, cet ensemble de sup-irréductibles est un sous-ensemble de $S(\sigma)$. Il s'ensuit que l'élément $t(\sigma) = \bigvee S(\sigma)$, dont l'existence est assurée par la première partie de la preuve, est un majorant de $\bigwedge_{i \in W} t_i = \bigvee S_{\bigwedge_{i \in W} t_i}$. Par conséquent, $t'(\sigma)$ est un supremum d'éléments tous majorés par $t(\sigma)$, ce qui entraîne $t(\sigma) \geq t'(\sigma)$, et l'égalité.

Supposons que $t(\sigma)$ existe. Il majore chaque infimum $\bigwedge_{i \in W} t_i$ pour lequel on a $|W| \geq \sigma$, d'où l'existence de $t'(\sigma)$, et on peut appliquer ce qui précède. □

D'après cette proposition, quand l'élément $t(\alpha)$ existe, il a, d'une part, l'expression polynomiale $t(\alpha) = \bigvee \{\bigwedge_{i \in W} t_i : W \subseteq V, |W| = \frac{v+1}{2}\}$ et, d'autre part, une représentation par sup-irréductibles $S_{t(\alpha)}$ contenant tous les majoritaires. Mais l'ensemble $S_{t(\alpha)}$ contient aussi en général des sup-irréductibles qui ne sont ni majoritaires ni équilibrés.

Proposition 7.46 *Pour tout inf-demi-treillis distributif T et tout profil π de T , on a $S_{t(\alpha)} = S(\alpha)$, i.e. pour tout $s \in S_T$, $s \leq \bigvee S(\alpha)$ si et seulement si $v(s) \geq \alpha$.*

Preuve. Par définition, $v(s) \geq \alpha$ implique $s \in S(\alpha)$ et donc $s \leq \bigvee S(\alpha)$. Montrons maintenant la réciproque. Dans un treillis distributif et, par extension, dans un inf-demi-treillis distributif, le point (4) du théorème 5.1 assure que, pour tout sup-irréductible $s \leq t(\alpha) = \bigvee S(\alpha)$, il existe un élément s' de $S(\alpha)$ (donc majoritaire) avec $s \leq s'$. La proposition 7.44 assure alors que s est lui-même majoritaire, ce qui établit que $S_{t(\alpha)}$ ne contient que des sup-irréductibles majoritaires. □

Nous allons maintenant définir une classe d'inf-demi-treillis distributifs dans lesquels l'existence de l'élément $t(\alpha)$ est assurée.

Définition 7.47 *Un demi-treillis à médianes est un inf-demi-treillis distributif T tel que, pour tous $t, t', t'' \in T$, l'existence des trois éléments $t \vee t'$, $t \vee t''$ et $t' \vee t''$ entraîne celle de $t \vee t' \vee t''$.*

Pour tout profil $\pi = (t_1, t_2, t_3)$ de longueur 3 d'un tel treillis, l'existence de l'élément $t'(\alpha) = (t_1 \wedge t_2) \vee (t_1 \wedge t_3) \vee (t_2 \wedge t_3)$ est donc assurée (pourquoi?). Un calcul algébrique sans difficulté étend cette existence de $t'(\alpha)$ (mais non celle de $t'(\beta)$), sous sa forme de polynôme latticiel, à un profil de longueur finie quelconque. On obtient alors la caractérisation suivante des médianes pour la distance δ dans de tels demi-treillis, qui porte en particulier sur les médianes dans les treillis distributifs (puisque'il est évident que les treillis distributifs sont des demi-treillis à médianes) :

Théorème 7.48 *Soient T un demi-treillis à médianes et $\pi \in T^v$ un profil. Si v est impair, $t(\alpha)$ est l'unique médiane de π ; si v est pair, l'ensemble des médianes de π est $Med_\delta(\pi) = \{\bigvee S' : S(\alpha) \subseteq S' \subseteq S(\beta) \text{ et } \bigvee S' \text{ existe}\}$.*

En particulier, dans un treillis distributif, $Med_\delta(\pi) = [t(\alpha), t(\beta)]$.

Preuve. On a observé que, en conséquence de la proposition 7.43, un élément t vérifiant $S(\alpha) \subseteq S_t \subseteq S(\beta)$ minimise $E_\delta(\pi, t)$, lorsqu'il existe. D'après ce qu'on vient de voir, et avec la proposition 7.45, l'élément $t(\alpha) = \bigvee S(\alpha)$ existe pour tout profil d'un demi-treillis à médianes. Soit $s \in S$ tel que $s \leq t(\alpha)$. D'après la proposition 7.46, on a $S_{t(\alpha)} = S(\alpha)$, ce qui établit que $t(\alpha)$ est une médiane. On montre comme dans cette proposition que $s \leq \bigvee S'$ avec $S' \subseteq S(\beta)$ entraîne $s \in S(\beta)$. Donc les éléments qui ont le même éloignement que $S(\alpha)$ sont ceux de la forme $\bigvee S'$ avec $S(\alpha) \subseteq S' \subseteq S(\beta)$. Si v est impair, on a $S(\alpha) = S(\beta)$ et $t(\alpha)$ est la seule médiane.

En particulier, si $t(\alpha)$ existe – comme c'est le cas pour un treillis distributif – on a $Med_\delta(\pi) = [t(\alpha), t(\beta)]$. \square

Le point essentiel qui ressort de ce résultat est que, dans un demi-treillis à médianes, la médiane latticielle $t'(\alpha)$ est aussi une médiane métrique, les autres se déduisant de celle-ci par l'adjonction éventuelle des éléments « neutres » que sont les sup-irréductibles équilibrés.

Exemple 7.49 Nous continuons maintenant l'exemple 7.42. Le tableau 7.5 donne, pour chaque élément t du treillis T , l'ensemble S_t correspondant, puis l'éloignement $E_\delta(\pi, t)$, calculé à partir de $\sum_{1 \leq i \leq v} |S_{t_i}| = 13$, des valeurs $w(s)$ de le tableau 7.4, et de la proposition 7.43. Dans cet exemple, on a $t(\alpha) = a$ et $t(\beta) = h$, et on constate bien que l'ensemble $\{a, d, e, h\}$ des médianes du profil $\pi = (a, a, e, f, g, k)$ est l'intervalle $[a, h]$ du treillis.

TABLEAU 7.5. Éloignements des éléments de T au profil π .

$t \in T$	\emptyset	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	u
S_t	\emptyset	a	b	c	a, b	a, c	b, c	a, b, g	a, b, c	b, c, i	a, b, c, g	a, b, c, i	S_T
$E_\delta(\pi, t)$	13	9	13	13	9	9	13	13	9	17	13	13	17

En fait, la procédure médiane peut être définie sans fixer la longueur du profil π , et en supposant donc simplement que celui-ci est de longueur finie, donc pris dans l'ensemble $T^* = \bigcup_{v \in \mathbb{N}} T^v$. La longueur, notée $v(\pi)$, d'un profil π devient un paramètre de celui-ci, avec $\beta = \frac{v(\pi)}{2}$, tandis que α est le plus petit entier strictement supérieur à β . Cette procédure plus générale a été caractérisée axiomatiquement dans les demi-treillis à médianes. Pour deux profils $\pi = (t_1, \dots, t_{v(\pi)})$ et $\pi' = (t'_1, \dots, t'_{v(\pi')}) \in T^*$, la *concaténation* de π et de π' est le profil $\pi\pi' = (t_1, \dots, t_{v(\pi)}, t'_1, \dots, t'_{v(\pi')})$ avec donc $v(\pi\pi') = v(\pi) + v(\pi')$. On a alors le théorème ci-dessous (dont la démonstration se trouve dans McMorris [294], 2000) :

Théorème 7.50 *Soient T un demi-treillis à médianes et $F : T^* \mapsto (P(T) \setminus \{\emptyset\})$ une procédure d'agrégation. Alors F est la procédure médiane si et seulement si elle vérifie les propriétés :*

$$\text{CONDORCET} : \pi \in T^v \text{ avec } v \text{ pair, } s \in S(\beta) \setminus S(\alpha), t \in T \text{ et } t \vee s \text{ existe} \\ \text{impliquent } (t \vee s^- \in F(\pi) \iff t \vee s \in F(\pi)),$$

$$\text{CONSISTANCE} : \pi, \pi' \in T^* \text{ et } F(\pi) \cap F(\pi') \neq \emptyset \text{ impliquent } F(\pi\pi') \\ = F(\pi) \cap F(\pi'),$$

$$\text{CONFORMITÉ} : \pi \in T^1 \text{ et } \pi = (t) \text{ impliquent } F(\pi) = \{t\}.$$

Les demi-treillis à médianes constituent donc un type de structure où les médianes ont une caractérisation simple. De plus, la détermination de la médiane $t(\alpha)$ est aisée, pourvu que celle de l'ensemble S_t pour tout $t \in S_T$ et le calcul du supremum le soient. En revanche, la recherche des médianes pour la distance de la différence symétrique dans un treillis ou demi-treillis d'un autre type devient vite difficile.

Dans un inf-demi-treillis distributif T qui n'est pas à médianes, les conclusions du théorème 7.48 s'appliquent à tout profil pour lequel $t(\alpha)$ existe. Autrement, on recherche les éléments t de T de la forme $t = (\bigvee S_1) \vee (\bigvee S_2)$, où S_1 est un ensemble de sup-irréductibles majoritaires tel que $\bigvee S_1$ existe et maximisant $\sum_{s \in S_1} w(s)$ sous cette condition, et S_2 est un ensemble de sup-irréductibles équilibrés pour lequel un tel élément t existe dans T . Cette recherche peut être difficile.

Lorsque T n'est plus distributif, on n'est plus assuré que $t(\alpha)$ est une médiane, même quand cet élément existe. Il reste toutefois des liens entre les médianes et la règle majoritaire (Leclerc [270], 1994) :

Théorème 7.51 *Soit T un inf-demi-treillis. Pour tout profil π de T tel que $t(\alpha)$ existe et pour toute médiane t de π , on a l'inégalité $t \leq t(\beta)$; pour tout profil π tel que $t(\alpha)$ existe et pour toute médiane t de π , il existe une médiane t' telle que $t' \leq t \wedge t(\alpha)$ et telle que tout élément t'' vérifiant $t' \leq t'' \leq t$ est une médiane.*

Preuve. Soit t une médiane de π telle que $t \not\leq t(\beta)$, et posons $t' = t \wedge t(\beta) < t$. L'ensemble $S_t \setminus S_{t'}$ n'est pas vide et ne contient que des sup-irréductibles s qui ne sont ni majoritaires ni équilibrés, c'est-à-dire qui vérifient $w(s) < 0$. D'après la proposition 7.43 on a alors $E(\pi, t') < E(\pi, t)$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle t est une médiane.

Pour la seconde partie, prenons une médiane t telle que $t \not\leq t(\alpha)$ et considérons l'élément $t'' = t \wedge t(\alpha)$. Comme précédemment, nous observons que les éléments de $S_t \setminus S_{t''}$ ne sont pas majoritaires, et sont donc équilibrés puisque t est une médiane. On en déduit l'égalité $E(\pi, t'') = E(\pi, t)$, qui s'étend à tout intermédiaire entre t'' et t . \square

Pour revenir aux problèmes d'agrégation des classifications (et d'autres objets), examinons d'abord la portée des théorèmes 7.48 et 7.50. Ceux-ci s'appliquent à tous les treillis distributifs, dont en particulier, les treillis booléens, les treillis $\underline{2}^{E^2}$ des relations binaires sur E , les chaînes et les produits directs de chaînes de la section 4.4. L'énoncé de ces résultats en termes de demi-treillis à médianes doit son intérêt au fait que l'on rencontre fréquemment de tels demi-treillis qui ne sont pas des treillis. Les inf-demi-treillis arborescents constituent une première classe de tels treillis : ils vérifient la condition de la définition 7.47 car, dans un tel demi-treillis T , les trois éléments $t \vee t'$, $t \vee t''$ et $t' \vee t''$ existent si et seulement si le sous-ensemble $\{t, t', t''\}$ est une chaîne de T .

Une autre classe de demi-treillis à médianes, qui ne contient ni n'est contenue dans les précédentes, apparaît quand on considère un ensemble E muni d'une relation symétrique A modélisant une idée de « compatibilité », et les parties C de E dont les éléments sont deux à deux compatibles, c'est-à-dire les cliques du graphe $G = (X, A)$. On constate d'abord que cet ensemble est une partie commençante du treillis booléen $\underline{2}^E$, donc un inf-demi-treillis distributif (qui n'est un treillis que dans le cas très particulier où le graphe G est complet). De plus, on vérifie que, pour trois cliques quelconques C, C' et C'' de G , l'ensemble $(C \cap C') \cup (C \cap C'') \cup (C' \cap C'')$ est encore une clique de G . On en déduit que l'ensemble ordonné (C, \subseteq) des cliques de G est un demi-treillis à médianes (qui, de plus, est atomistique). Par exemple, lorsque A est la relation de comparabilité (respectivement, d'incomparabilité) d'un ensemble ordonné P , on obtient :

Proposition 7.52 *Soit P un ensemble ordonné. L'ensemble des chaînes et celui des antichaînes de P , ordonnés par l'inclusion, sont des demi-treillis à médianes.*

L'ensemble ordonné (\mathbb{H}, \subseteq) des hiérarchies sur E constitue un autre exemple de demi-treillis de cliques :

Proposition 7.53 *L'ensemble des hiérarchies sur un ensemble E , ordonné par l'inclusion, est un demi-treillis à médianes.*

Preuve. Considérons le graphe $G = (P^*(E), A)$, avec $P^*(E) = \{E' \subseteq E : 2 \leq |E'| < n\}$, et, pour $E', E'' \in P^*(E)$, $(E', E'') \in A$ si et seulement si $E' \cap E'' \in \{\emptyset, E', E''\}$. On vérifie alors que toute hiérarchie \mathcal{H} sur E correspond à une clique du graphe G , augmentée des classes triviales. L'ensemble ordonné (\mathbb{H}, \subseteq) est donc un demi-treillis à médianes. \square

On vérifie alors les points suivants :

- Les atomes du demi-treillis \mathbb{H} sont les hiérarchies admettant une unique classe H non triviale (et ce sont les seuls sup-irréductibles de \mathbb{H}),
- La distance de la différence symétrique entre deux hiérarchies \mathcal{H} et \mathcal{H}' est $\delta(\mathcal{H}, \mathcal{H}') = |\mathcal{H} \Delta \mathcal{H}'|$, nombre de classes apparaissant dans une et une seule des hiérarchies \mathcal{H} et \mathcal{H}' ,
- Pour un profil $\pi = (\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_v)$ de \mathbb{H} , l'ensemble $\mathcal{H}(\alpha)$ qui contient les classes présentes dans plus de la moitié des éléments de π est une hiérarchie, médiane de π pour la distance précédente. Cette médiane est unique si v est impair ; sinon, les autres médianes s'obtiennent, à partir du théorème 7.48, en ajoutant à $\mathcal{H}(\alpha)$ des classes équilibrées (i. e. présentes dans la moitié des éléments de π) tant que ces adjonctions ne contredisent pas la condition (2) de la définition 7.33.

Le théorème 7.51 s'applique aux autres ensembles ordonnés de classifications décrits dans cette section (partitions, dendrogrammes, ultramétriques, familles de Moore), ainsi, par exemple, qu'au treillis des préordres ou à l'inf-demi-treillis des ordres.

7.4 Analyse galoisienne des données : fermetures et implications

Dans nombre de situations, des connaissances sur les éléments d'un ensemble E se présentent sous la forme d'une famille \mathcal{D} de parties de E . On a ainsi évoqué dans la section précédente les classes construites à partir d'une méthode de classification, et aussi les familles de Moore obtenues par la classification galoisienne décrite au chapitre 3. D'autres cas analogues apparaissent dans les bases de données ou la représentation des connaissances. Par exemple, une base de données peut être décrite par la famille \mathcal{D} des ensembles d'éléments (parfois appelés *transactions*) satisfaisant les diverses requêtes possibles. Dans la théorie des « espaces de connaissance » de Falmagne et Doignon [151] (1999), l'ensemble de base est celui des « unités de connaissance », qui sont, par exemple, des problèmes de mathématiques de niveau Cours Moyen. Un « état

de connaissance » est l'ensemble des problèmes qu'un élève est capable de résoudre et une « structure de connaissance » est un ensemble d'états de connaissance, i.e. une famille de parties de l'ensemble des unités de connaissance.

Dans ces contextes variés, on cherche souvent des *implications* (ou *règles d'association*, ou *dépendances fonctionnelles*). Une telle implication, notée $A \longrightarrow B$ (A implique B) avec $A, B \subseteq E$, signifie que tout élément de \mathcal{D} qui contient A contient également B . Par exemple, les états de connaissance évoqués ci-dessus ne sont pas des parties quelconques, du fait que tout élève sachant résoudre certains problèmes saura en résoudre certains autres. Ainsi, un service de marketing peut être intéressé à relever que, dans un certain « segment » de clients potentiels, tout acheteur de café et de cornet achète aussi du sucre, ce que l'on note donc $\{\text{café, cornet}\} \longrightarrow \{\text{sucre}\}$. Les implications cherchées peuvent être exactes ou approchées avec, par exemple, une condition sur une proportion minimale de cas où elles sont observées. Ce dernier problème ne sera évoqué que dans les compléments. Même exactes, les implications observées peuvent être très nombreuses, et l'on cherche aussi à les résumer par un petit nombre d'entre elles permettant de les retrouver toutes. L'exemple suivant illustre ces questions et sera repris par la suite.

Exemple 7.54 Duquenne [137] (1995) reprend, à l'aide d'outils latticiels, une étude anthropologique sur 98 paysans indonésiens de l'île de Java (Schweizer [374], 1993). Ceux-ci sont décrits par 31 attributs binaires portant sur leur logement, leur mobilier et leur cheptel. En particulier, les six attributs correspondant au cheptel sont les six espèces suivantes :

H : poule de Bantam P : poule de race
 M : canard de Manille D : canard (ordinaire)
 U : buffle G : chèvre

On a donc (chapitre 3, section 3.5.1) un treillis de Galois $\text{Gal}(E', E, R)$ où E' est l'ensemble des individus de l'étude, $E = \{D, G, H, M, P, U\}$ est l'ensemble des six attributs ci-dessus, et R est la relation de E' vers E définie par $(e', e) \in R$ si le paysan e' possède du cheptel de type e . On s'intéresse en fait aux implications entre attributs et donc à la famille de Moore $\psi_R(\underline{2}^E)$ sur E , qui sera ici notée \mathcal{F} . La fermeture ψ_R sur $\underline{2}^E$ est celle associée à la relation R à la section 3.5.1, et donc une partie F de E est un fermé de ψ_R si et seulement si il existe un groupe de paysans $A \subseteq E'$ qui tous possèdent les espèces de F et n'en ont pas d'autre en commun.

Dans l'exemple considéré, la famille de Moore \mathcal{F} a 18 éléments. La figure 7.9 représente le treillis (\mathcal{F}, \subseteq) et le tableau 7.6 donne la table fléchée de ce treillis (où les croix correspondent à la relation réduite de R ; la relation R elle-même n'est pas représentée ici car il y faudrait 98 lignes). L'ensemble $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ des inf-irréductibles de \mathcal{F} est égal à $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \{DGH, DHM, DHP, DHU, DMP, G, GH, HP, HU, U\}$ où, par exemple, DGH est une notation abrégée pour $\{D, G, H\}$. La famille \mathcal{F} entière s'obtient en faisant toutes les intersections possibles sur les parties de $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$.

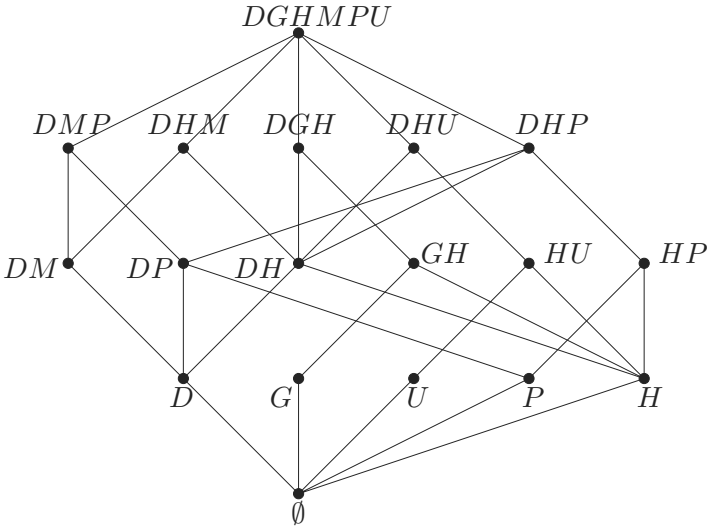


FIG. 7.9. Le treillis des possessions en bétail (exemple 7.54).

TABLEAU 7.6. La table fléchée du treillis de la figure 7.9.

	<i>DMP</i>	<i>DHM</i>	<i>DGH</i>	<i>DHU</i>	<i>DHP</i>	<i>GH</i>	<i>HU</i>	<i>HP</i>	<i>G</i>	<i>U</i>
<i>D</i>	×	×	×	×	×	↑	↓	↑	↓	↓
<i>G</i>	↑	↑	×	↑	↑	×	↓	↓	×	↓
<i>U</i>	↑	↑	↑	×	↑	↓	×	↓	↓	×
<i>P</i>	×	↑	↑	↑	×	↓	↓	×	↓	↓
<i>H</i>	↑	×	×	×	×	×	×	×	↑	↑
<i>DM</i>	×	×	↑	↑	↑					

D’ores et déjà, on peut observer des règles d’association simples telles que $M \rightarrow D$: « qui a des canards de Manille a des canards (ordinaires) » puisque tout fermé contenant M contient également D . On peut aussi observer d’autres règles moins attendues (et donc plus intéressantes pour les spécialistes), $DU \rightarrow H$: « qui possède canards (ordinaires) et buffle possède des poules de Bantam ». Dans l’article cité, Duquenne met en évidence un ensemble de neuf implications particulières, permettant de retrouver toutes les autres, et dont nous dirons plus loin comment elles sont obtenues.

L’objet de cette section est donc l’étude des propriétés des implications du type considéré ci-dessus et l’obtention d’un nombre réduit d’implications rendant compte des données. On définit d’abord la relation d’implication $i(\mathcal{D})$ sur $P(E)$ associée à une famille \mathcal{D} quelconque de parties d’un ensemble fixé E (définition 7.55) et on caractérise les relations sur $P(E)$ ainsi obtenues, souvent appelées *systèmes d’implications complets* dans la littérature (théorème 7.58).

On définit une correspondance de Galois particulière entre les ensembles $\underline{2}^{P(E)}$ des familles de parties de E et $\underline{2}^{(P(E))^2}$ des relations sur $P(E)$, tous deux ordonnés par l'inclusion. Entre autres conséquences, celle-ci établit que, ordonnés par inclusion, les ensembles \mathbb{F} de toutes les familles de Moore sur E et \mathbb{I} de toutes les relations d'implication sur $P(E)$, constituent deux treillis duaux (théorème 7.60). On donne quelques propriétés de ces treillis, utiles pour revenir ensuite à la recherche d'ensembles d'implications aussi réduits que possible mais permettant de définir toutes les implications d'un élément de \mathbb{I} . On montre que de tels ensembles existent, particulièrement la *base canonique d'implications de Guigues–Duquenne*, que l'on décrit en donnant ses propriétés essentielles.

Comme au chapitre 3 (exemple 3.29) et à la section précédente, nous notons $\mathbf{m}(\mathcal{D}) = \{\bigcap \mathcal{C} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}\}$ la famille de Moore obtenue en complétant une famille \mathcal{D} de parties d'un ensemble E par intersections (dans l'exemple 7.54 ci-dessus, on a $\mathcal{F} = \mathbf{m}(I_{\mathcal{F}})$). Nous étendons alors la définition de l'opérateur de fermeture $\varphi_{\mathcal{F}}$ sur $\underline{2}^E$ associé à une famille de Moore \mathcal{F} (définition 3.27), et nous associons une relation d'implication à toute famille \mathcal{D} de parties.

Définition 7.55 *Soit \mathcal{D} une famille de parties d'un ensemble E . On lui associe une application $\varphi_{\mathcal{D}}$ sur $P(E)$ en posant, pour tout $A \subseteq E$, $\varphi_{\mathcal{D}}(A) = \bigcap \{D \in \mathcal{D} : A \subseteq D\}$. Une partie F de E telle que $\varphi_{\mathcal{D}}(A) = F$ pour au moins un $A \subseteq E$ est dite \mathcal{D} -fermée.*

On définit une application i de $P(P(E))$ dans $P((P(E))^2)$ en posant, pour toute famille \mathcal{D} de parties de E , $i(\mathcal{D}) = \{(A, B) \in (P(E))^2 : B \subseteq \varphi_{\mathcal{D}}(A)\}$. La relation binaire $i(\mathcal{D})$ sur $P(E)$ est appelée la relation d'implication de \mathcal{D} . Nous écrirons souvent $A \longrightarrow_{\mathcal{D}} B$ pour $(A, B) \in i(\mathcal{D})$.

Une relation binaire I sur $P(E)$ est une relation d'implication sur $P(E)$ si elle est égale à $i(\mathcal{D})$ pour une famille \mathcal{D} de parties de E . On notera \mathbb{I} l'ensemble de toutes les relations d'implication sur $P(E)$.

On remarquera que la définition de $\varphi_{\mathcal{D}}$ implique $\varphi_{\mathcal{D}}(A) = E$ dès que A n'est inclus dans aucune partie de \mathcal{D} (cf. l'exemple 3.2).

Le fait de parler de partie \mathcal{D} -fermée se justifie en montrant que l'application $\varphi_{\mathcal{D}}$ sur $P(E)$ est identique à $\varphi_{\mathbf{m}(\mathcal{D})}$, qui est la fermeture sur $\underline{2}^E$ associée à la famille de Moore $\mathbf{m}(\mathcal{D})$.

Proposition 7.56 *Soient \mathcal{D} une famille de parties d'un ensemble E et $\mathbf{m}(\mathcal{D})$ la famille de Moore obtenue en complétant \mathcal{D} par intersections. Avec les notations précédentes, on a $\varphi_{\mathcal{D}}(A) = \varphi_{\mathbf{m}(\mathcal{D})}(A)$ pour tout $A \subseteq E$.*

Preuve. Nous savons que l'infimum dans le treillis $\mathbf{m}(\mathcal{D})$ est l'intersection, d'où, puisque \mathcal{D} est une partie inf-génératrice de $\mathbf{m}(\mathcal{D})$, $\varphi_{\mathbf{m}(\mathcal{D})}(A) = \bigcap \{D \in \mathcal{D} : \varphi_{\mathbf{m}(\mathcal{D})}(A) \subseteq D\}$ (proposition 3.16). De plus, comme $\varphi_{\mathbf{m}(\mathcal{D})}(A)$ est le plus petit fermé de $\mathbf{m}(\mathcal{D})$ contenant A , l'inclusion $A \subseteq D$ équivaut à $\varphi_{\mathbf{m}(\mathcal{D})}(A) \subseteq D$, pour tout $D \in \mathcal{D}$. On a donc $\varphi_{\mathbf{m}(\mathcal{D})}(A) = \bigcap \{D \in \mathcal{D} : A \subseteq D\} = \varphi_{\mathcal{D}}(A)$. \square

Les couples (A, B) de la relation $i(\mathcal{D})$ se caractérisent donc de plusieurs façons, avec pour conséquence que toute les implications d'une relation d'implication s'obtiennent à partir d'une famille de Moore sur E :

Proposition 7.57 *Soient \mathcal{D} une famille de parties d'un ensemble E , et A et B deux parties de E . Les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $(A, B) \in i(\mathcal{D})$, i.e. $B \subseteq \varphi_{\mathcal{D}}(A)$,
2. pour tout $D \in \mathcal{D}$, $A \subseteq D \implies B \subseteq D$,
3. pour tout $F \in \mathbf{m}(\mathcal{D})$, $A \subseteq F \implies B \subseteq F$,
4. $B \subseteq \varphi_{\mathbf{m}(\mathcal{D})}(A)$.

Preuve. (1) \implies (2) : découle de la définition de $\varphi_{\mathcal{D}}$.

(2) \implies (3) : soient $A, B \subseteq E$ vérifiant la condition (2), et F un élément de $\mathbf{m}(\mathcal{D}) \setminus \mathcal{D}$. Si $F = E$, on a $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$, ce qui s'accorde avec (3). Sinon, F est l'intersection d'une partie \mathcal{C} non vide de \mathcal{D} . Si l'on a $A \subseteq F$, cela implique $A \subseteq D$, et donc $B \subseteq D$ pour tout $D \in \mathcal{C}$. On a bien $B \subseteq F = \bigcap \mathcal{C}$.

(3) \implies (4) : d'après (3), tout élément de $\mathbf{m}(\mathcal{D})$ contenant A contient B . C'est en particulier le cas de $\varphi_{\mathbf{m}(\mathcal{D})}(A)$.

(4) \implies (1) : est une conséquence immédiate de la proposition 7.56. \square

Ainsi, dans l'exemple 7.54, puisque $\mathbf{m}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$, la donnée de la famille $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ des inf-irréductibles du treillis \mathcal{F} suffit bien pour obtenir la relation d'implication $i(\mathcal{F})$. Le théorème 7.58 suivant donne une caractérisation des relations d'implication qui est une variante de celle due à Armstrong [13] (1974). Une relation sur $P(E)$ satisfaisant les conditions de ce théorème est souvent appelée *système d'implications complet*, ou *famille complète de dépendances fonctionnelles*, dans la littérature ; en raison de la manière dont elles ont été introduites, nous continuerons ici à les appeler simplement « relations d'implication ».

Théorème 7.58 *Une relation binaire I sur $P(E)$ est une relation d'implication si et seulement si elle vérifie, pour tous $A, B, C, D \subseteq E$, les trois propriétés suivantes :*

1. $B \subseteq A \implies (A, B) \in I$,
2. $(A, B) \in I$ et $(B, C) \in I \implies (A, C) \in I$,
3. $(A, B) \in I$ et $(C, D) \in I \implies (A \cup C, B \cup D) \in I$.

Preuve. Si I est une relation d'implication, il y a une famille de Moore \mathcal{F} sur E telle que $I = i(\mathcal{F})$. Alors, $(A, B) \in I$ équivaut à $B \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}(A)$, et l'on a :

- $B \subseteq A \implies B \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}(A)$ (car $A \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}(A)$), d'où la propriété (1),
- $B \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}(A) \implies \varphi_{\mathcal{F}}(B) \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}(\varphi_{\mathcal{F}}(A)) = \varphi_{\mathcal{F}}(A)$; alors $C \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}(B) \implies C \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}(A)$, d'où la propriété (2),

– $B \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}(A)$ et $D \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}(C) \implies [B \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}(A \cup C) \text{ et } D \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}(A \cup C)] \implies B \cup D \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}(A \cup C)$, d'où la propriété (3).

Réciproquement, soit I une relation sur $P(E)$ satisfaisant les propriétés (1), (2) et (3). Nous posons, pour toute partie A de E , $\varphi(A) = \{e \in E : (A, \{e\}) \in I\}$ et nous établissons d'abord l'équivalence $(A, B) \in I \iff B \subseteq \varphi(A)$.

En appliquant (3), on voit que $(A, B) \in I$ et $e \in \varphi(A)$ entraînent $(A, B \cup \{e\}) \in I$ et on en déduit par récurrence sur $|B|$ que $B \subseteq \varphi(A)$ entraîne $(A, B) \in I$.

Supposons maintenant $(A, B) \in I$ et soit $e \in B$. On a, d'après (1), $(B, \{e\}) \in I$, et donc, d'après (2), $(A, \{e\}) \in I$, c'est-à-dire $e \in \varphi(A)$. On en déduit $B \subseteq \varphi(A)$ et l'équivalence cherchée.

Nous montrons ensuite que l'application φ est une fermeture sur $P(E)$. En effet, elle est :

- Extensive : d'après (1), $e \in A$ entraîne $e \in \varphi(A)$, d'où $A \subseteq \varphi(A)$,
- Isotone : soient deux parties A et B de E avec $A \subseteq B$, et $e \in E$ tel que $(A, \{e\}) \in I$. Alors, d'après (1), on a $(B, A) \in I$ d'où, d'après (2), $(B, \{e\}) \in I$. On a donc $e \in \varphi(B)$, d'où $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$,
- Idempotente : on a $(A, \varphi(A)) \in I$ et $(\varphi(A), \varphi(\varphi(A))) \in I$ d'où, d'après (2), $(A, \varphi(\varphi(A))) \in I$, ce qui entraîne $\varphi(\varphi(A)) \subseteq \varphi(A)$ et, avec l'extensivité de φ , $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$.

Nous pouvons alors conclure que l'on a $I = i(\mathcal{F})$, où \mathcal{F} est la famille de Moore associée à la fermeture φ . \square

Selon la propriété (1) ci-dessus, une relation d'implication est réflexive et, selon la propriété (2), elle est transitive. Il s'agit donc d'une classe particulière de préordres sur $P(E)$, à savoir les préordres compatibles avec l'ordre dual de l'inclusion et vérifiant la propriété (3) de stabilité pour l'union.

Pour toute relation R sur $P(E)$ on peut obtenir la plus petite relation d'implication $\mathbf{a}(R)$ contenant R en complétant récursivement R par les couples imposés par les trois propriétés du théorème. On établira plus loin (théorème 7.60) que l'application \mathbf{a} ainsi définie est une fermeture sur $\underline{2}^{(P(E))^2}$.

La définition 7.55 introduit l'application i de $P(P(E))$ dans $P((P(E))^2)$ qui fait correspondre à toute famille de parties $\mathcal{D} \in P(P(E))$ sa relation d'implication $i(\mathcal{D}) \subseteq (P(E))^2$. Dans l'autre sens, nous associons une famille de parties de E à toute relation binaire R sur $P(E)$.

Définition 7.59 Soit R une relation binaire sur $P(E)$. La famille $s(R)$ des parties de E dites saturées pour la relation R est définie par $s(R) = \{F \subseteq E : A \subseteq F \text{ et } (A, B) \in R \text{ entraînent } B \subseteq F\}$.

On observera que cette notion de partie saturée d'une relation a déjà été utilisée (sous une autre appellation). En effet, dire que la partie F est saturée peut aussi s'écrire : $A \in (F]$ et ARB impliquent $B \in (F]$, ce qui signifie que dans $P(E)$ la famille $(F]$ est finissante pour la relation R (remarque 5.25 page 150).

Le résultat suivant établit la dualité entre les ensembles ordonnés (\mathbb{F}, \subseteq) des familles de Moore sur E et (\mathbb{I}, \subseteq) des relations d'implication sur $P(E)$, en montrant que le couple (i, s) d'applications est une correspondance de Galois.

Théorème 7.60 *Soit E un ensemble. Alors :*

1. le couple (i, s) constitue une correspondance de Galois entre les ensembles ordonnés $\underline{2}^{P(E)}$ et $\underline{2}^{(P(E))^2}$,
2. l'image de $\underline{2}^{(P(E))^2}$ par s est l'ensemble \mathbb{F} des familles de Moore sur E et, pour tout $\mathcal{D} \in \underline{2}^{P(E)}$, on a $si(\mathcal{D}) = \mathbf{m}(\mathcal{D})$,
3. l'image de $\underline{2}^{P(E)}$ par i est l'ensemble \mathbb{I} des relations d'implication sur $P(E)$ et, pour tout $R \in \underline{2}^{P(E)}$, on a $is(R) = \mathbf{a}(R)$.

Preuve. Montrons d'abord le point (1). Pour cela, nous établissons la relation de Pickert (point (2) du théorème 3.36) : pour tous $\mathcal{D} \in \underline{2}^{P(E)}$, $R \in \underline{2}^{(P(E))^2}$, $\mathcal{D} \subseteq s(R)$ équivaut à $R \subseteq i(\mathcal{D})$.

Supposons $\mathcal{D} \subseteq s(R)$, prenons un couple $(A, B) \in R$, et montrons que ce couple est dans $i(\mathcal{D})$, i.e. que $B \subseteq \varphi_{\mathcal{D}}(A) = \bigwedge \{D \in \mathcal{D} : A \subseteq D\}$. Cherchons les éléments D de \mathcal{D} contenant A . S'il n'en existe pas, on a par définition $(A, B) \in i(\mathcal{D})$ car, dans le treillis $\underline{2}^E$, l'infimum de la famille vide est E . Sinon, ces parties D appartiennent par hypothèse à $s(R)$, ce qui signifie qu'elles contiennent toutes B . Donc $B \subseteq \varphi_{\mathcal{D}}(A)$ et $(A, B) \in i(\mathcal{D})$ et, finalement, $\mathcal{D} \subseteq s(R)$ entraîne $R \subseteq i(\mathcal{D})$.

Supposons $R \subseteq i(\mathcal{D})$, prenons un élément D de \mathcal{D} , et montrons qu'il est dans $s(R) = \{F \subseteq E : A \subseteq F \text{ et } (A, B) \in R \text{ entraînent } B \subseteq F\}$. S'il n'existe pas de couple $(A, B) \in R$ avec $A \subseteq D$, on a bien $D \in s(R)$. Sinon, on a pour tout tel couple $(A, B) \in i(\mathcal{D})$, d'où $B \subseteq \varphi_{\mathcal{D}}(A) \subseteq D$. On a donc bien $D \in s(R)$, et $R \subseteq i(\mathcal{D})$ entraîne $\mathcal{D} \subseteq s(R)$.

Montrons le point (2). Pour toute relation R sur $P(E)$, on a $E \in s(R)$ de façon évidente. Soient $F, F' \in s(R)$ et un couple $(A, B) \in R$ tel que $A \subseteq F \cap F'$. On a donc $A \subseteq F$ et, par hypothèse, $B \subseteq F$ et, de même, $A \subseteq F'$ et $B \subseteq F'$, donc $B \subseteq F \cap F'$. Ainsi $F, F' \in s(R)$ entraîne $F \cap F' \in s(R)$, d'où $s(R) \in \mathbb{F}$. L'image de $\underline{2}^{(P(E))^2}$ par s est donc contenue dans l'ensemble \mathbb{F} .

Soit \mathcal{F} une famille de Moore sur E . D'après les propriétés des correspondances de Galois, si est une fermeture dans $\underline{2}^{P(E)}$, et on a $\mathcal{F} \subseteq si(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$. L'ensemble \mathcal{G} est donc une famille de Moore sur E , et c'est, par définition de l'application s , l'ensemble des parties G de E telles que $(A, B) \in i(\mathcal{F})$ et $A \subseteq G$ entraînent $B \subseteq G$. En d'autres termes, $B \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}(A)$ et $A \subseteq G$ entraînent $B \subseteq G$, ou encore $B \subseteq \varphi_{\mathcal{F}}(A)$ entraîne $B \subseteq \varphi_{\mathcal{G}}(A)$. On a donc $\varphi_{\mathcal{F}} \leq \varphi_{\mathcal{G}}$ pour l'ordre d'exponentiation sur les applications dans $\underline{2}^{P(E)}$, ce qui, d'après la proposition 3.24, entraîne $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ et, donc, $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Toute famille de Moore appartient ainsi à l'image de $\underline{2}^{(P(E))^2}$ par s et on a $s(\underline{2}^{(P(E))^2}) = si(\underline{2}^{P(E)}) = \mathbb{F}$.

Si \mathcal{D} est une famille quelconque de parties de E , alors $si(\mathcal{D})$ est la plus petite famille de Moore contenant \mathcal{D} , soit $\mathbf{m}(\mathcal{D})$.

Enfin, le point (3) est directement conséquence de la définition 7.55 et du fait que la relation $\mathbf{a}(R)$ (définie juste précédemment) est la plus petite relation d'implication contenant R . \square

Le théorème précédent établit que l'ensemble \mathbb{F} des familles de Moore sur E (respectivement, l'ensemble \mathbb{I} des relations d'implication sur $P(E)$) est une famille de Moore sur $P(E)$ (respectivement, sur $(P(E))^2$). Les ensembles ordonnés (\mathbb{F}, \subseteq) et (\mathbb{I}, \subseteq) sont des treillis duaux. Le minimum du treillis \mathbb{F} est la famille de Moore $\{E\}$ réduite à un seul élément et son maximum est $P(E)$. Ses atomes sont les familles de Moore $\mathcal{F}_A = \{A, E\}$, pour tout $A \subset E$. Le minimum du treillis \mathbb{I} est la relation duale de l'inclusion sur $P(E)$ (pourquoi?) et son maximum est $i(\{E\}) = (P(E))^2$.

Puisque le treillis \mathbb{F} est celui des fermés par la fermeture \mathbf{m} sur $\underline{2}^{P(E)}$, la proposition 3.26, la définition 3.27 et leurs commentaires conduisent à la première des deux expressions du supremum de ce treillis données ci-dessous, la seconde étant facile à obtenir :

$$\text{pour tous } \mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathbb{F}, \mathcal{F} \vee \mathcal{F}' = \mathbf{m}(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}') = \{F \cap F' : F \in \mathcal{F}, F' \in \mathcal{F}'\}$$

Ces expressions du supremum dans le treillis \mathbb{F} permettent une preuve aisée de la proposition suivante qui implique que toute famille de Moore est supremum d'atomes. Comme précédemment, $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ désigne l'ensemble des éléments inf-irréductibles du treillis \mathcal{F} , i.e. les parties qui sont dans \mathcal{F} et qui ne s'obtiennent pas comme intersection d'autres éléments de \mathcal{F} .

Proposition 7.61 *Soient \mathcal{F} une famille de Moore sur un ensemble E et \mathcal{D} une partie de $\mathcal{F} \setminus \{E\}$. Alors l'égalité $\mathcal{F} = \bigvee \{\mathcal{F}_D : D \in \mathcal{D}\}$ dans le treillis \mathcal{F} est équivalente à l'inclusion $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{D}$.*

Preuve. Si \mathcal{D} est une partie de $\mathcal{F} \setminus \{E\}$, on a $\mathbf{m}(\mathcal{D}) = \mathbf{m}(\mathcal{D} \cup \{E\}) = \mathbf{m}(\bigcup \{\mathcal{D}, E\} : \mathcal{D} \in \mathcal{D}) = \bigvee \{\mathcal{F}_D : D \in \mathcal{D}\}$, la dernière de ces égalités résultant de la première expression ci-dessus du supremum dans \mathbb{F} . Alors, si \mathcal{D} contient $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$, on a bien, d'après la seconde expression ci-dessus du supremum, $\mathbf{m}(\mathcal{D}) = \bigvee \{\mathcal{F}_D : D \in \mathcal{D}\} = \mathcal{F}$. A l'opposé, s'il existe un inf-irréductible A de \mathcal{F} qui n'appartient pas à \mathcal{D} , alors A ne peut être obtenu comme intersection d'autres éléments de \mathcal{F} , donc de \mathcal{D} , et A n'appartient pas à la famille de Moore $\bigvee \{\mathcal{F}_D : D \in \mathcal{D}\}$, qui ne peut être égale à \mathcal{F} . \square

Puisque, d'après cette proposition, toute famille de Moore s'obtient comme supremum d'atomes, le treillis \mathbb{F} est atomistique (définition 3.13). De plus, toute famille de Moore \mathcal{F} admet une représentation par sup-irréductibles minimale unique correspondant à $\mathcal{D} = \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$, ce qui entraîne que le treillis \mathbb{F} est inférieurement localement distributif (voir page 162). Précisément, il s'agit d'une géométrie convexe (voir la fin de la section 5.6). La relation de couverture dans \mathbb{F} se caractérise simplement :

Proposition 7.62 *Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux familles de Moore sur un ensemble E . Alors, \mathcal{G} couvre \mathcal{F} dans le treillis \mathbb{F} si et seulement si il existe un inf-irréductible A de \mathcal{G} avec $\mathcal{G} = \mathcal{F} + \{A\}$.*

Preuve. Supposons qu'il existe une partie A de E telle que \mathcal{G} est égale à $\mathcal{F} + \{A\}$. Alors, on a $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{G}}$, sinon \mathcal{F} n'est pas stable pour l'intersection, tandis que \mathcal{G} couvre \mathcal{F} dans le treillis \mathbb{F} puisque les deux familles ne diffèrent que par un élément.

Supposons que \mathcal{G} couvre \mathcal{F} dans le treillis \mathbb{F} et qu'il existe deux parties A et A' de E vérifiant $\{A, A'\} \subseteq \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$.

Supposons que \mathcal{G} couvre \mathcal{F} dans le treillis \mathbb{F} et qu'il existe deux parties A et A' de E vérifiant $\{A, A'\} \subseteq \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Dans \mathbb{F} , on a alors $\mathcal{G} = \mathcal{F} \vee \mathcal{F}_A = \mathcal{F} \vee \mathcal{F}_{A'}$, ce qui entraîne qu'il existe deux éléments G et G' de \mathcal{F} avec $A = G \cap A'$ et $A' = G' \cap A$, d'où $A' = G \cap G' \cap A'$. Donc $A' \subseteq G$ et $A = G \cap A' = A'$. \square

Aux sup-irréductibles du treillis \mathbb{F} , i.e. à ses atomes, correspondent par l'application i les inf-irréductibles du treillis dual \mathbb{I} , i.e. ses coatomes. Ceux-ci sont caractérisés dans l'exercice 7.24. Par dualité avec \mathbb{F} , le treillis \mathbb{I} est supérieurement localement distributif, ce qui entraîne notamment que toute relation d'implication a une unique représentation minimale par inf-irréductibles.

Remarque 7.63 Soient E un ensemble et R une relation sur $P(E)$. La fermeture $is(R)$ est l'intersection des relations d'implication contenant R , et donc l'intersection de tous les inf-irréductibles du treillis \mathbb{I} qui contiennent R .

Dans ce qui suit, nous revenons aux représentations d'une relation d'implication $is(R)$ comme supremum d'un ensemble d'éléments du treillis \mathbb{I} et, en particulier, aux représentations par des bases, la notion de base étant définie ci-dessous. Nous commençons par énoncer un lemme.

Lemme 7.64 *Soient A et B deux parties d'un ensemble E :*

1. *La famille de parties $\mathcal{F}_{A,B} = \{F \subseteq E : A \not\subseteq F \text{ ou } B \subseteq F\}$ est une famille de Moore et la relation $[A \longrightarrow B] = \{(C, D) \in P(E)^2 : C \not\subseteq A \text{ ou } D \subseteq B\}$ est une relation d'implication. On a $\mathcal{F}_{A,B} = s(\{(A, B)\})$ et $[A \longrightarrow B] = i(\mathcal{F}_{A,B}) = is(\{(A, B)\})$.*
2. *Pour toute relation R sur $P(E)$, on a $is(R) = \bigvee \{[A \longrightarrow B], (A, B) \in R\}$.*
3. $\mathbb{G} = \{[A \longrightarrow B] : A, B \subseteq E\}$ *est une partie sup-génératrice du treillis \mathbb{I} des relations d'implications.*

Preuve. Le point (1) est sans difficulté, à partir des définitions des applications i et s et du théorème 7.60.

Pour le point (2), considérons une relation R sur $P(E)$. On note d'abord que, puisque is est une fermeture sur $\underline{2}^{(P(E))^2}$ (en conséquence du théorème 7.60), on a, pour tout couple $(A, B) \in R$, $is(\{(A, B)\}) = [A \longrightarrow B] \subseteq is(R)$. On en déduit l'inclusion $\bigvee \{[A \longrightarrow B] : (A, B) \in R\} \subseteq is(R)$, où le supremum

est celui du treillis \mathbb{I} . On a aussi $(A, B) \in is(\{(A, B)\}) = [A \longrightarrow B]$, d'où $R \subseteq \bigcup\{[A \longrightarrow B] : (A, B) \in R\} \subseteq \bigvee\{[A \longrightarrow B] : (A, B) \in R\}$, et donc, ce dernier élément étant un fermé de is , $is(R) \subseteq is(\bigvee\{[A \longrightarrow B] : (A, B) \in R\}) = \bigvee\{[A \longrightarrow B] : (A, B) \in R\}$. On a finalement bien l'égalité annoncée par le point (2).

En prenant pour R un élément de \mathbb{I} on a alors $R = is(R) = \bigvee\{[A \longrightarrow B] : (A, B) \in R\}$. Toute relation d'implication s'obtient donc comme supremum d'éléments de la partie \mathbb{G} de \mathbb{I} , ce qui est le point (3) du lemme. \square

Définition 7.65 *Pour une relation d'implication I , nous disons que la relation R est une base de I si $is(R) = I$ et si R est minimale pour l'inclusion avec cette propriété.*

Pour une famille de Moore \mathcal{F} , nous disons que la relation R est une base d'implications de \mathcal{F} (ou de la fermeture associée $\varphi_{\mathcal{F}}$) si R est une base de la relation $i(\mathcal{F})$ (ou, de façon équivalente, si $s(R) = \mathcal{F}$).

Autrement dit, la relation R est une base d'une relation d'implication I si I est la plus petite relation d'implication contenant R et si la fermeture $is(R')$ de toute sous-relation R' de R est strictement contenue dans I . De même une base d'implication d'une famille de Moore \mathcal{F} – ou de la fermeture $\varphi_{\mathcal{F}}$ associée – est un ensemble minimal d'implications qui engendre \mathcal{F} (par l'application s). Il résulte du point (2) du lemme 7.64 et du corollaire 3.12 que l'ensemble \mathbb{G} des implications de la forme $[A \longrightarrow B]$ contient les sup-irréductibles de \mathbb{I} (que l'exercice 7.24 propose de caractériser). Il est alors clair que toute représentation minimale d'une relation d'implication I par des sup-irréductibles de \mathbb{I} correspond à une base de I . Cependant le point important est que I ou \mathcal{F} admettent aussi des bases qui ne sont pas composées de sup-irréductibles de \mathbb{I} et qui comportent en général moins d'implications. Il en est ainsi de la base dite *base canonique de Guigues–Duquenne*. Elle est associée à toute relation d'implication I ainsi qu'à la famille de Moore correspondante $\mathcal{F} = s(I)$ (elle est aussi associée à toute famille \mathcal{D} telle que $\mathbf{m}(\mathcal{D}) = \mathcal{F}$). Dans la suite nous la notons $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$.

Nous savons par la proposition 7.62 à quelle condition une partie de E peut être ôtée d'une famille de Moore \mathcal{F} sans sortir de l'ensemble \mathbb{F} . Les définitions suivantes, qui portent sur les ajouts possibles, vont permettre de caractériser au théorème 7.69 la base de Guigues–Duquenne et d'expliciter à la proposition 7.70 en quoi elle est canonique. On reviendra sur l'importance de cette base à la section 7.6.4 des compléments.

Définition 7.66 *Soit \mathcal{F} une famille de Moore sur un ensemble E . Une partie Q de E est :*

- un quasi-fermé de \mathcal{F} si $Q \notin \mathcal{F}$ et $F + \{Q\} \in \mathcal{F}$,
- un F -quasi-fermé de \mathcal{F} si Q est un quasi-fermé de \mathcal{F} et $\varphi_{\mathcal{F}}(Q) = F$,
- une partie F -critique de \mathcal{F} si Q est un F -quasi-fermé de \mathcal{F} et est minimale avec cette propriété,

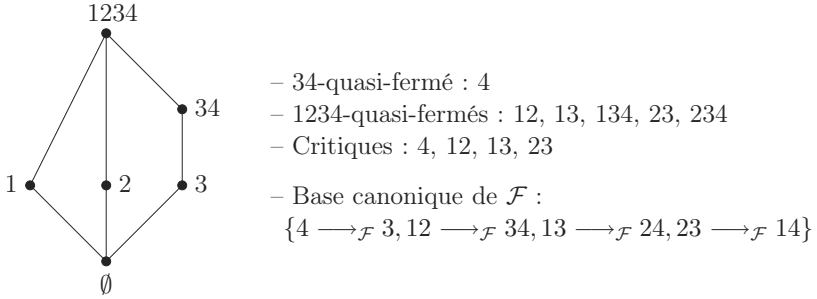


FIG. 7.10. Une famille de Moore \mathcal{F} , ses quasi-fermés, ses critiques, et sa base canonique d'implications.

- une partie critique de \mathcal{F} si Q est F -critique pour un $F \in \mathcal{F}$.

On note $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des parties critiques de \mathcal{F} . La base canonique d'implications (de Guigues-Duquenne) de \mathcal{F} est la relation $K_{\mathcal{F}} = \{(Q, \varphi_{\mathcal{F}}(Q) \setminus Q) : Q \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}\}$, qui s'écrit aussi comme l'ensemble d'implications $K_{\mathcal{F}} = \{Q \longrightarrow_{\mathcal{F}} \varphi_{\mathcal{F}}(Q) \setminus Q : Q \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}\}$.

On notera qu'une partie $Q \notin \mathcal{F}$ est un quasi-fermé de \mathcal{F} si, pour tout $F \in \mathcal{F}$, $Q \cap F \in \mathcal{F} + \{Q\}$, ce qui peut encore s'écrire $\mathbf{m}(\mathcal{F} + \{Q\}) = \mathcal{F} + \{Q\}$.

Les définitions précédentes sont illustrées sur la famille de Moore \mathcal{F} représentée à la figure 7.10. Ces définitions s'étendent immédiatement à une famille quelconque \mathcal{D} de parties de E en remplaçant \mathcal{F} par $\mathbf{m}(\mathcal{D})$. L'exercice 7.25, qui associe des bases particulières à toute base d'implications de \mathcal{F} , permet de remplacer éventuellement les implications de la forme $Q \longrightarrow_{\mathcal{F}} \varphi_{\mathcal{F}}(Q) \setminus Q$ par celles de la forme $Q \longrightarrow_{\mathcal{F}} \varphi_{\mathcal{F}}(Q)$. Notons que cette formulation générale plus simple correspond en fait à des implications en partie tautologiques, les éléments de Q y étant répétés dans leur partie droite.

L'existence de quasi-fermés, et donc aussi de parties critiques, pour toute famille de Moore \mathcal{F} sur E non maximale dans le treillis \mathbb{F} (c'est-à-dire différente de $P(E)$) est assurée par la définition 7.66 et la proposition 7.62. En effet, dans ce cas, \mathcal{F} est couverte par $\mathcal{G} = \mathcal{F} + \{Q\}$, où Q est un quasi-fermé de \mathcal{F} et un inf-irréductible de \mathcal{G} . L'exercice 7.26 permet de reconnaître certaines de ces parties critiques.

Exemple 7.67 Reprenons la famille de Moore \mathcal{F} de l'exemple 7.54. L'ensemble \mathcal{Q} des quasi-fermés de \mathcal{F} est donné par :

$$\mathcal{Q} = \{M, DG, DU, GP, GU, PU, GHP, GHU, GPU, HPU, DGHM, DGHP, DGHU, DHMP, DHMU, DHPU, GHPU, DGHMP, DGHMU, DGHPU, DGMPU, DHMPU\}$$

La partie $\{D, G\}$ de E est un quasi-fermé de \mathcal{F} puisque l'intersection de tout fermé de \mathcal{F} avec DG appartient à $\{\emptyset, D, G, DG\}$. Ce n'est pas le cas de la partie GM puisque son intersection avec le fermé DM est M , qui n'est pas

un fermé. Le lecteur pourra, à l'instar des auteurs et s'il est patient, vérifier la liste des quasi-fermés donnée ci-dessus. D'autre part, il vérifiera aisément que $\varphi_{\mathcal{F}}(M) = DM$, $\varphi_{\mathcal{F}}(DG) = DGH$, $\varphi_{\mathcal{F}}(DU) = DHU$, et $\varphi_{\mathcal{F}}(Q) = E$ dans tous les autres cas. En appliquant les définitions ci-dessus, on voit que M est DM -critique, DG est DGH -critique, DU est DHU -critique, tandis que GP , GU , PU , $DGHM$, $DHMP$ et $DHMU$ sont E -critiques. La base canonique d'implications $K_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} comprend donc les neuf implications suivantes :

$$\begin{array}{lll} M \longrightarrow_{\mathcal{F}} D & DG \longrightarrow_{\mathcal{F}} H & DU \longrightarrow_{\mathcal{F}} H \\ GP \longrightarrow_{\mathcal{F}} DHMU & GU \longrightarrow_{\mathcal{F}} DHMP & PU \longrightarrow_{\mathcal{F}} DGHM \\ DHMU \longrightarrow_{\mathcal{F}} GP & DHMP \longrightarrow_{\mathcal{F}} GU & DGHM \longrightarrow_{\mathcal{F}} PU \end{array}$$

On notera que les six dernières forment trois couples d'implications réciproques : par exemple, GP (possession de chèvre et de poule de race) implique $DHMU$ (possession de canard, de canard de Manille, de poule de Bantam et de buffle), et réciproquement. Les six termes de gauche de ces implications sont les ensembles minimaux dont la présence assure celle de toutes les espèces du cheptel.

La justification de l'appellation « base canonique » comporte deux parties. Le théorème suivant établit que l'ensemble d'implications $K_{\mathcal{F}}$ défini précédemment est bien, au sens de la définition 7.65, une base d'implications de la famille de Moore \mathcal{F} . Nous précisons ensuite en quoi cette base est canonique, en renvoyant cette fois à la littérature pour les démonstrations. Nous commençons par la proposition suivante, liée à plusieurs résultats de cette section (proposition 7.62, exercice 7.26), et qui sert à la preuve du théorème.

Proposition 7.68 *Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux familles de Moore sur un ensemble E , avec $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, et soit A un élément de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$.*

1. *Si A est minimal pour l'inclusion dans $\mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, alors A est un quasi-fermé de \mathcal{F} .*
2. *Si A est maximal pour l'inclusion dans $\mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, alors A est un inf-irréductible du treillis (\mathcal{G}, \subseteq) .*

Preuve. (1) Soit A un élément minimal de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, que nous supposons ne pas être un quasi-fermé de \mathcal{F} . Il existe donc un fermé F de \mathcal{F} tel que $A \cap F \notin \mathcal{F} + \{A\}$. On a donc $A \cap F \subset A$ mais, puisque $A \cap F \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, on obtient une contradiction avec la minimalité de A .

(2) Si A est un élément maximal de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$ et si A n'est pas inf-irréductible dans (\mathcal{G}, \subseteq) , il existe $G, G' \in \mathcal{G}$ avec $A = G \cap G'$, $A \subset G$ et $A \subset G'$. Avec l'hypothèse de maximalité de A , ceci entraîne $G, G' \in \mathcal{F}$ et donc $A \in \mathcal{F}$, une contradiction. \square

Théorème 7.69 *Soient \mathcal{F} une famille de Moore sur un ensemble E et $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des parties critiques de \mathcal{F} . Alors, la relation $K_{\mathcal{F}} = \{(Q, \varphi_{\mathcal{F}}(Q) \setminus Q) : Q \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}\}$ sur $P(E)$ constitue une base d'implications de \mathcal{F} .*

Preuve. La relation $K_{\mathcal{F}}$ est une base d'implications de \mathcal{F} si $s(K_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$, où s est l'opérateur de saturation de la définition 7.59 et si \mathcal{F} est minimal pour cette égalité.

Montrons d'abord l'égalité, c'est-à-dire $\{F \subseteq E : (A, B) \in K_{\mathcal{F}} \text{ et } A \subseteq F \text{ impliquent } B \subseteq F\} = \mathcal{F}$. L'inclusion $\mathcal{F} \subseteq s(K_{\mathcal{F}})$ s'obtient en notant d'abord que, par définition, toute implication $Q \longrightarrow \varphi_{\mathcal{F}}(Q) \setminus Q$ de $K_{\mathcal{F}}$ appartient à la relation $i(\mathcal{F})$. On a donc $K_{\mathcal{F}} \subseteq i(\mathcal{F})$, d'où $\mathcal{F} = \mathbf{m}(\mathcal{F}) = si(\mathcal{F}) \subseteq s(K_{\mathcal{F}})$ (la première égalité provient de ce que \mathcal{F} est une famille de Moore, et est donc un fermé de \mathbf{m} , la seconde du point (2) du théorème 7.60, et l'inclusion de l'antitonicité de l'application s , qui provient du point (1) de ce même théorème). Montrons que cette inclusion est en fait une égalité, c'est-à-dire que toute partie A de E qui est dans $s(K_{\mathcal{F}})$ est aussi dans \mathcal{F} . Pour cela, commençons par caractériser les parties $A \in s(K_{\mathcal{F}})$. D'après les propriétés des correspondances de Galois (point (1) du théorème 3.38), on a $s(K_{\mathcal{F}}) = sis(K_{\mathcal{F}})$. L'expression $is(K_{\mathcal{F}}) = \bigvee \{[Q \longrightarrow \varphi_{\mathcal{F}}(Q) \setminus Q] : Q \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}\}$ rencontrée plus haut (dans le lemme 7.64) entraîne, puisque la restriction de s à \mathbb{I} est un anti-isomorphisme entre les treillis \mathbb{I} et \mathbb{F} , $s(K_{\mathcal{F}}) = \bigcap \{s([Q \longrightarrow \varphi_{\mathcal{F}}(Q) \setminus Q]) : Q \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}\} = \bigcap \{\mathcal{F}_{Q, \varphi_{\mathcal{F}}(Q) \setminus Q} : Q \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}\}$. Autrement dit, une partie A de E appartient à $s(K_{\mathcal{F}})$ si et seulement si, pour tout $Q \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$, elle vérifie la propriété $[Q \not\subseteq A$ ou $\varphi_{\mathcal{F}}(Q) \setminus Q \subseteq A]$, qui s'écrit aussi, plus simplement, $[Q \not\subseteq A$ ou $\varphi_{\mathcal{F}}(Q) \subseteq A]$. Supposons $\mathcal{F} \subset s(K_{\mathcal{F}})$ et considérons une partie Q minimale dans $s(K_{\mathcal{F}}) \setminus \mathcal{F}$. D'après la proposition 7.68, Q est un quasi-fermé de \mathcal{F} . Mais alors, il existe une partie critique $Q' \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ pour laquelle on a $Q' \subseteq Q$ et $Q \subset \varphi_{\mathcal{F}}(Q') = \varphi_{\mathcal{F}}(Q)$, ce qui contredit l'hypothèse d'appartenance de Q à $s(K_{\mathcal{F}})$. On a donc bien $\mathcal{F} = s(K_{\mathcal{F}})$.

Montrons enfin que la relation $K_{\mathcal{F}}$ est minimale pour l'égalité $s(K_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$, ce qui achèvera la preuve. On doit donc montrer que, pour tout $Q \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$, on a $\mathcal{F} \subset s(K_{\mathcal{F}} \setminus \{(Q, \varphi_{\mathcal{F}}(Q) \setminus Q)\}) = \bigcap \{\mathcal{F}_{Q', \varphi_{\mathcal{F}}(Q') \setminus Q'} : Q' \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \setminus \{Q\}\}$. C'est bien le cas car on a $Q \in s(K_{\mathcal{F}} \setminus \{(Q, \varphi_{\mathcal{F}}(Q) \setminus Q)\}) = \{F : Q' \not\subseteq F \text{ ou } \varphi_{\mathcal{F}}(Q') \setminus Q' \subseteq F\}$, alors que Q n'est pas un élément de \mathcal{F} . En effet, soit $Q' \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \setminus \{Q\}$. Si $Q' \not\subseteq Q$, alors $Q \in \mathcal{F}_{Q', \varphi_{\mathcal{F}}(Q') \setminus Q'}$. Sinon, Q étant quasi-fermé, $Q \cap \varphi_{\mathcal{F}}(Q') \in \{Q\} \cup \mathcal{F}$. Or $Q \cap \varphi_{\mathcal{F}}(Q') = Q$ impliquerait $Q \subset \varphi_{\mathcal{F}}(Q')$ d'où $\varphi_{\mathcal{F}}(Q') = \varphi_{\mathcal{F}}(Q)$, ce qui est impossible. Donc $Q' \subset Q \cap \varphi_{\mathcal{F}}(Q') \in \mathcal{F}$ et, par conséquent, $\varphi_{\mathcal{F}}(Q') = Q \cap \varphi_{\mathcal{F}}(Q')$, c'est-à-dire $\varphi_{\mathcal{F}}(Q') \subset Q$. \square

Pour terminer cette section, nous énonçons une propriété de la base canonique d'implications $K_{\mathcal{F}}$ d'une famille de Moore \mathcal{F} , qui entraîne notamment le fait qu'elle est de cardinal minimum parmi toutes les bases d'implications de \mathcal{F} , et que, de plus, toutes les bases d'implications de même cardinal sont liées à $K_{\mathcal{F}}$. Pour ce faire, nous donnons une version simplifiée du théorème 51 de Caspard et Monjardet (2001) et nous en omettons la preuve. On pourra se reporter à cet article pour un énoncé complet, caractérisant les bases d'implications de \mathcal{F} , avec sa preuve. On y trouvera aussi des références et une revue des variantes terminologiques de la littérature.

Proposition 7.70 *Soient \mathcal{F} une famille de Moore sur un ensemble E et $R = \{(A_1, B_1), \dots, (A_r, B_r)\}$ une base d'implications de \mathcal{F} . Alors, pour tout $i = 1, \dots, r$, il existe une unique partie critique $C_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ telle que $A_i \subseteq C_i$.*

Ainsi, on est assuré que toute relation R sur $P(E)$ contenant une base d'implications d'une famille de Moore \mathcal{F} (c'est-à-dire telle que $s(R) = \mathcal{F}$) est de cardinal supérieur ou égal à celui de la base canonique $K_{\mathcal{F}}$. Ceci est vrai même lorsque la base canonique d'implications de \mathcal{F} est de taille relativement importante comme pour les familles de l'exercice 7.29).

7.5 Ordonnements

Le mot « ordonnancement » a plusieurs sens. Nous l'utilisons ici au sens de son emploi en gestion et en recherche opérationnelle où, de manière la plus générale, il s'agit d'affecter temporellement des ressources permettant d'effectuer les tâches interdépendantes nécessaires à la réalisation de produits ou projets. Plus précisément, nous étudierons ici des problèmes du type suivant : afin d'effectuer un certain travail, on dispose d'un certain nombre de ressources (processeurs, machines, etc.) pour réaliser des tâches dont certaines doivent être achevées avant que d'autres puissent commencer ; il s'agit alors de trouver une affectation temporelle des ressources aux tâches, optimale par rapport à un certain critère. Ce type de problème comporte de multiples variantes, pour lesquelles on a à rechercher des algorithmes d'obtention d'une solution optimale et à étudier leur complexité. Dans les compléments de cette section ainsi que dans l'annexe A, nous donnerons quelques références générales sur ces problèmes d'ordonnement et la complexité des algorithmes les résolvant. Mais dans cette section, où il s'agit seulement de montrer les aspects ordinaux de certains de ces problèmes, nous nous limiterons à présenter trois d'entre eux, simples mais classiques. Que ces problèmes comportent une dimension ordinale est évident, dès lors que les contraintes de précédence entre les tâches induisent un ordre strict (le plus souvent partiel) sur icelles. Toutefois notre troisième problème illustrera un cas où, bien qu'il n'existe pas de telles contraintes, on sera amené à considérer un ordre et ses extensions linéaires. Dans les deux premiers problèmes que nous allons traiter, les hypothèses de base concernant les tâches et les machines sont que les tâches ne sont pas morcelables, que chaque machine ne peut réaliser qu'une tâche à la fois et qu'elle l'effectue sans interruption.

Dans cette section, tous les ensembles ordonnés considérés le sont strictement et le terme ordre désignera toujours un ordre strict.

7.5.1 Problème d'ordonnement à 1 machine

Nous considérons d'abord la variante la plus simple de ce problème où le modèle mathématique considéré est le suivant :

- un ensemble ordonné $P = (X, <)$, où $X = \{x, y, z, \dots\}$ est l'ensemble des n tâches à effectuer et $<$ l'ordre sur ces tâches donné par des contraintes de précédences : $x < y$ si la tâche y ne peut commencer qu'une fois la tâche x terminée ;
- une machine utilisée pour la réalisation des tâches.

Dans ce problème, les divers ordres possibles pour l'exécution de l'ensemble des tâches sont donc toutes les extensions linéaires de P . On suppose qu'à chacune de ces extensions linéaires est associé un coût. Le problème est alors de déterminer une extension linéaire de coût minimal.

Supposons, par exemple, que réaliser la tâche y juste après la tâche x , lorsque x et y sont incomparables dans l'ordre de précedence des tâches, a un certain coût $c(x, y)$. Dans une extension linéaire de P contenant le couple (x, y) , ce couple constitue alors un saut (chapitre 1, définition 1.32) et le coût de cette extension est la somme des coûts de ses sauts. Si on suppose de plus que le coût d'un saut est constant, on obtient le problème de trouver une extension linéaire minimisant le nombre de sauts. Ce dernier problème est connu pour être \mathcal{NP} -difficile, mais il peut devenir polynomial pour certaines classes d'ordres (cf. l'annexe A). On a, a fortiori, les mêmes constats pour le problème de minimiser la somme des coûts des sauts.

On apporte maintenant plusieurs précisions au modèle d'un ensemble muni d'un ordre de précedence sur des tâches à effectuer sur une seule machine. A une tâche x sont associés sa durée d'exécution $t(x)$ et un poids $p(x)$. Soit un ordonnancement possible des tâches, c'est-à-dire une extension linéaire $L = x_1 \dots x_i \dots x_n$ de leur ordre de précedence. La tâche x_i est donc terminée au temps $d(x_i) = \sum_{j \leq i} t(j)$. On associe alors à l'ordre total L la quantité $D(L) = \sum_{i=1}^n p(x_i) d(x_i)$, appelée le *délai moyen pondéré*. Le problème est alors de trouver une extension linéaire de l'ordre de précedence, minimisant cette quantité. Ce problème d'optimisation est en général très difficile (\mathcal{NP} -difficile au sens de l'annexe A). On peut toutefois le résoudre pour certaines classes d'ordres, telle la classe des ordres série-parallèles. On trouvera ces résultats à la section A.2.3 de l'annexe A.

7.5.2 Problème d'ordonnement à m machines

Le modèle mathématique considéré est le suivant :

- un ensemble ordonné $P = (X, <)$, où $X = \{x, y, z, \dots\}$ est l'ensemble des n tâches à effectuer et $<$ l'ordre sur ces tâches donné par des contraintes de précédences : $x < y$ si la tâche y ne peut commencer qu'une fois la tâche x terminée ;
- un ensemble $I = \{1, 2, \dots, m\}$ de m machines parallèles et identiques utilisées pour la réalisation des tâches.

Dire que les machines sont parallèles et identiques signifie que chacune d'elles peut traiter chacune des tâches dans le même temps. Le temps est mesuré par un entier (positif) et, pour simplifier l'exposé, on supposera ici

que toutes les tâches ont la même durée d'exécution que l'on prend égale à une unité de temps, soit 1.

La notion d'ordonnement dans un tel modèle est alors formalisée par la définition suivante :

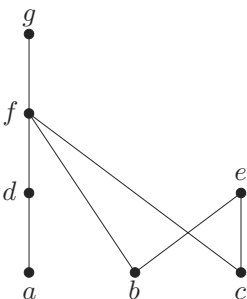
Définition 7.71 Soient $P = (X, <)$ un ensemble ordonné (de tâches) et $I = \{1, 2, \dots, m\}$ un ensemble (de machines). Un m -ordonnement de P est une application $f = (f_1, f_2)$ de P dans le produit direct $\{1, 2, \dots, m\} \times \mathbb{N}$, telle que l'application f_2 est strictement isotone (i.e. $x < y$ implique $f_2(x) < f_2(y)$).

Cette définition s'interprète ainsi : l'application f_1 est celle qui affecte une tâche à une machine : $f_1(x) = i$ si la tâche x est affectée à la machine i .

L'application f_2 est celle mesurant la durée d'exécution : $f_2(x) = p$ si la tâche x est effectuée pendant la p -ième unité de temps. Le fait que cette application doit être isotone est la traduction des contraintes de précédence entre les tâches.

Exemple 7.72 L'ensemble X des tâches est $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ et l'ordre de précédence entre elles est donné par le diagramme de la figure 7.11(a). On dispose de deux machines. Un 2-ordonnement est donné par le tableau de la figure 7.11(b) : la première machine effectue successivement les tâches a, c, e, g , la seconde les tâches b, d, f . Un tel tableau s'appelle un *tableau* (ou un *diagramme*) de Gandt.

Le critère choisi pour déterminer un ordonnement optimal est celui de la durée totale d'exécution des n tâches, soit $\max\{f_2(x), x \in P\}$, noté $C_{max}(f)$. On définit donc un « problème m -ordonnement » de la façon suivante :



(a)

M_1	a	c	e	g
M_2	b	d	f	
	0	1	2	3

(b)

FIG. 7.11. (a) Un ensemble ordonné P de tâches et (b) un 2-ordonnement de P .

Définition 7.73 *Pour un ensemble ordonné P donné, le problème m -ordonnancement consiste à minimiser la quantité $C_{\max}(f) = \max\{f_2(x), x \in P\}$ sur tous les m -ordonnements f de P .*

Nous allons d'abord donner diverses traductions de ce problème en présentant plusieurs équivalences de la notion de m -ordonnancement. Nous utilisons les notions d'ordre fort (strict, cf. la proposition 7.4), de largeur, d'étendue et d'extension d'un ensemble ordonné (définitions 1.30 et 1.31) et le treillis des parties commençantes d'un tel ensemble (théorème 5.6).

Proposition 7.74 *Soit $P = (X, <)$ un ensemble ordonné et k un entier. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. P admet un m -ordonnancement de durée d'exécution k ,
2. l'ordre de P admet comme extension un ordre fort de largeur au plus m et d'étendue k ,
3. il existe dans le treillis $\mathcal{C}(P)$ des parties commençantes de P une chaîne étendue de longueur k , $\emptyset = C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_k = X$, telle que, pour tout $i = 1, 2, \dots, k$, l'ensemble $A_i = C_i \setminus C_{i-1}$ comporte au plus m éléments maximaux de C_i .

Preuve. Il est d'abord clair qu'un m -ordonnancement $f = (f_1, f_2)$ étant donné, l'application f_2 induit un ordre fort O contenant l'ordre de P et défini par xOy si et seulement si $f_2(x) < f_2(y)$ (cf. la proposition 7.4); une antichaîne de cet ordre correspondant à un ensemble de t tâches incomparables dans l'ordre de précédence des tâches et donc pouvant être affectées simultanément à t machines différentes, cette antichaîne est de taille au plus m ; l'ordre étant fort, le nombre de ces antichaînes est la durée d'exécution de toutes les tâches, soit l'entier k .

Réciproquement, soit O un ordre fort extension de P , de largeur au plus m et d'étendue k . D'après la proposition 7.4, il s'écrit comme une somme ordinale $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$ de k antichaînes, chacune de taille au plus m . Posons $A_i = \{x_{i1}, \dots, x_{iq_i}\}$ avec $1 \leq q_i \leq m$. On réalise un m -ordonnancement $f = (f_1, f_2)$ en posant, pour tous $i = 1, 2, \dots, k$ et $j = 1, 2, \dots, q_i$, $f_1(x_{ij}) = j$ et $f_2(x_{ij}) = i$. On a donc montré l'équivalence des points (1) et (2).

Pour l'équivalence entre les points (2) et (3), on sait (cf. la remarque 5.32) que les ordres forts d'étendue k qui sont des extensions de l'ordre de P sont en correspondance bijective avec les chaînes étendues de longueur k du treillis des parties commençantes de P . Dans cette correspondance, $A_i = C_i \setminus C_{i-1}$ ($i = 1, \dots, k$) est l'antichaîne de rang i de l'ordre fort, d'où l'on déduit la deuxième condition de (3). \square

Il résulte de cette proposition que le problème de chercher un m -ordonnancement de P minimisant la durée d'exécution se ramène à la recherche dans le treillis des parties commençantes de P d'une chaîne étendue $\emptyset = C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_k = X$ telle que, pour tout $i = 1, 2, \dots, k$, l'ensemble

$A_i = C_i \setminus C_{i-1}$ comporte au plus m éléments maximaux de C_i et dont la longueur k soit minimale.

On peut encore poser ce problème en termes de graphes. L'ensemble ordonné $P = (X, <)$ étant donné, on construit le graphe orienté $G_m(P)$ dont les sommets sont les parties commençantes de P et les arcs les couples (C, C') de parties commençantes telles que $C \subset C'$ et $C' \setminus C$ comporte au plus m éléments maximaux de C' . La recherche d'un m -ordonnement optimal de P se ramène alors à la recherche d'un plus court chemin de la partie \emptyset à la partie X dans le graphe $G_m(P)$.

Nous illustrons cette procédure sur l'exemple 7.72 précédent où $m = 2$. Le treillis des parties commençantes pour l'ensemble ordonné P de cet exemple (figure 7.11) est représenté à la figure 7.12(a). Dans ce treillis, il suffit de construire le graphe $G'_2(P)$, appelé la « partie utile » du graphe $G_2(P)$ et défini comme suit : partant d'un sommet retenu C (qui au départ est la partie vide), on retient tous les sommets C' et tous les arcs (C, C') où C' est une partie commençante de la forme $C + D$ avec D une antichaîne de cardinalité 2 ou maximale de cardinalité 1. A la figure 7.12(a), on a représenté cette partie utile de $G_2(P)$ par des arcs en pointillés reliant les parties commençantes retenues, ou des flèches sur les arcs de couverture utilisés. On voit sur cette figure qu'il existe dans ce graphe trois chemins de la partie \emptyset à la partie X , dont un de longueur 5 et deux de longueur 4, ces deux derniers correspondant donc à deux 2-ordonnements optimaux pour P . La figure 7.11(b) montre l'un de ces deux ordonnancements, qui correspond au premier ordre fort représenté à la figure 7.12(b). Le second ordre fort représenté sur cette figure correspond quant à lui au chemin de longueur 5 dans $G'_2(P)$ et donc à un ordonnancement non optimal.

Les résultats précédents permettent d'obtenir des résultats de complexité. Puisque la recherche d'un plus court chemin dans un graphe peut se faire en temps polynomial, il en sera de même de la recherche d'un m -ordonnement optimal de P , dès lors que la construction de $G_m(P)$ pourra elle-même se faire en temps polynomial. En particulier, puisque le nombre d'antichaînes – et donc de parties commençantes – d'un ensemble ordonné de cardinal n et de largeur au plus ℓ est borné par n^ℓ (pourquoi?), on obtient le résultat suivant :

Corollaire 7.75 *Pour un entier ℓ fixé, le problème m -ordonnement ($m \leq \ell$), restreint à la classe des ensembles ordonnés dont la largeur est au plus ℓ , est résoluble en temps polynomial.*

7.5.3 Problème d'ordonnement à 2 étapes (et 2 machines)

Dans ce problème, les tâches à réaliser doivent être effectuées en deux étapes sur deux machines différentes. La machine M exécute la première partie de la tâche x_i en un temps t_i et la machine M' la seconde partie en un temps t'_i , qui ne peut commencer qu'après la fin de l'exécution de la première partie sur M . Contrairement aux problèmes précédents, on ne suppose pas ici l'existence

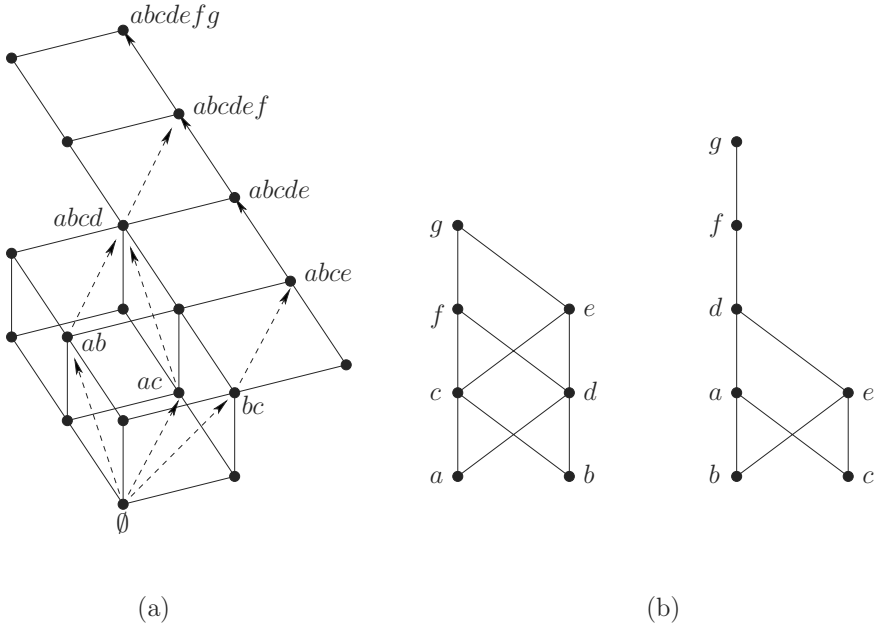


FIG. 7.12. (a) Le treillis $C(P)$ et le graphe $G'_2(P)$ pour l'ensemble ordonné P de la figure 7.11 ; (b) deux ordres forts de largeur 2, extensions de P .

de contraintes de précédence entre les tâches, mais l'on suppose toujours que chaque machine ne peut réaliser qu'une (partie de) tâche à la fois et qu'elle l'effectue sans interruption.

Le modèle mathématique est le suivant :

- un ensemble $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de n tâches à effectuer,
- une application f de X dans le produit direct $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : f(x_i) = (t_i, t'_i)$, où t_i (respectivement, t'_i) est le temps d'exécution de x_i sur la machine M (respectivement, la machine M').

Le problème consiste à trouver un *ordonnancement optimal* des tâches, c'est-à-dire un ordonnancement minimisant la durée totale d'exécution, notée T .

Ici, un ordonnancement se traduit par la donnée d'un couple (L, L') d'ordres totaux sur X : la machine M effectue les premières parties des tâches dans l'ordre de L , la machine M' les secondes dans l'ordre de L' .

Une première remarque est qu'on peut toujours obtenir un ordonnancement optimal de la forme (L, L) . Considérons en effet l'ordre total L écrit sous la forme d'une permutation $x_1x_2\dots x_n$ de X et le début $x_1x_2\dots x_ix_j$ de l'ordre total L' jusqu'à l'élément x_j ($j > i + 1$), où il diffère du premier (pour ne pas alourdir inutilement les notations, x_i désigne dans ces ordres la première ou la seconde partie de la tâche). Ceci implique que x_j et x_{i+1} ont déjà été effectuées sur M . Modifions L' en intercalant x_{i+1} entre x_i et x_j et en effectuant sur

TABLEAU 7.7. Minimums des temps d'exécution.

$\min(t_i, t'_j)$	$t'_1 = 3$	$t'_2 = 5$	$t'_3 = 2$	$t'_4 = 3$
$t_1 = 1$		1	1	1
$t_2 = 4$	3		2	3
$t_3 = 2$	2	2		2
$t_4 = 4$	3	4	2	

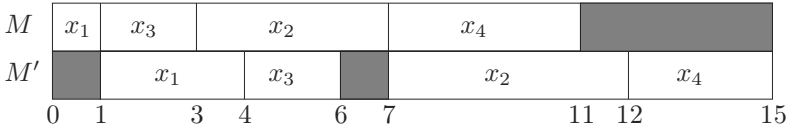


FIG. 7.13. Diagramme de Gantt d'un ordonnancement optimal sur les tâches x_1, x_2, x_3, x_4 .

M' les tâches restantes le plus tôt possible. Alors, la durée totale d'exécution ne peut être augmentée (le lecteur s'en convaincra aisément au moyen d'un dessin).

Désormais, on cherche donc un ordonnancement optimal donné par un ordre total L sur X . La machine M effectuera sans interruption les premières parties des tâches en suivant l'ordre L , soit en un temps égal à $\sum_{i=1}^n t_i$. La machine M' effectuera la seconde partie d'une tâche dès que la première partie aura été faite par M (donc, avec des interruptions possibles).

Exemple 7.76 La figure 7.13 illustre avec un diagramme de Gantt un tel ordonnancement pour l'exemple suivant : on a $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et les temps d'exécution sur M et sur M' sont donnés dans les marges du tableau 7.7.

Intuitivement, on conçoit qu'on a intérêt à effectuer la tâche x_i tôt si t_i est petit, et tard si t'_i est grand. Plus précisément, on a le résultat suivant dont la preuve – non trop difficile – est laissée en exercice (exercice 7.34).

Lemme 7.77 Soit $x_1 \dots x_{k-1} x_k \dots x_l \dots x_n$ l'ordre L sur les tâches. Si la tâche x_l ($l > k$) vérifie $t_l \leq \min(t_k, t'_l)$, l'ordre $L' = x_1 \dots x_{k-1} x_l x_k \dots x_{l-1} x_{l+1} \dots x_n$ obtenu en insérant x_l entre x_{k-1} et x_k a un temps d'exécution T' au plus égal à T .

On considérera donc dans ce cas qu'on a intérêt à effectuer x_l avant x_k . On a le même résultat si $t'_k \leq \min(t_k, t'_l)$. Ceci conduit à définir une relation $<$ sur l'ensemble X des tâches dont on montre qu'elle est un ordre strict.

Lemme 7.78 La relation $<$ définie sur X par $x_i < x_j$ si $\min(t_i, t'_j) < \min(t_j, t'_i)$ est un ordre strict.

Preuve. La relation $<$ est évidemment irreflexive. Pour montrer qu'elle est transitive (donc, un ordre strict), il faut montrer que, si $x_i < x_j$ et $x_j < x_k$, donc $\min(t_i, t'_j) < \min(t_j, t'_i)$ et $\min(t_j, t'_k) < \min(t_k, t'_j)$, on a aussi $x_i < x_k$, c'est-à-dire $\min(t_i, t'_k) < \min(t_k, t'_i)$. On remarque d'abord qu'on ne peut avoir $t'_j \leq t_i$ et $t_j \leq t'_k$ car, puisque $x_i < x_j$, la première inégalité impliquerait $t'_j < t_j$ et, puisque $x_j < x_k$, la seconde $t_j < t'_j$. On a donc trois cas possibles. Considérons d'abord le cas où $t'_j \leq t_i$ et $t'_k < t_j$. On a donc $t'_j < \min(t_j, t'_i)$ et $t'_k < \min(t_k, t'_j)$, d'où l'on déduit $\min(t_i, t'_k) = t'_k < \min(t_k, t'_i)$. Le cas où $t_i < t'_j$ et $t'_k \leq t_j$ se traite de manière analogue. Enfin, si $t_i < t'_j$ et $t'_k < t_j$, on a $t_i < \min(t_j, t'_i)$ et $t'_k < \min(t_k, t'_j)$, d'où $\min(t_i, t'_k) < \min(t_k, t'_i)$. \square

Appelons *ordre de priorité (du problème à 2 étapes)* l'ordre $<$ défini ci-dessus. Le lemme 7.77 implique alors que, si x_l est après x_k dans un ordre L et avant ou incomparable à x_k dans l'ordre de priorité, on peut modifier L en insérant x_l avant x_k sans augmenter le temps d'exécution. On a alors le résultat suivant :

Proposition 7.79 *Toutes les extensions linéaires de l'ordre de priorité d'un problème à 2 étapes sont des ordonnancements optimaux.*

Preuve. Considérons un ordonnancement L quelconque. Si ce n'est pas une extension linéaire de l'ordre de priorité $<$, il existe x_i, x_j avec $x_i < x_j$ et $x_j L x_i$. On peut alors faire la transformation du lemme 7.77, en mettant x_i entre x_{j-1} et x_j dans L , ce qui n'augmente pas le temps d'exécution. En itérant cette opération, on obtient une extension linéaire de l'ordre de priorité qui n'accroît pas le temps d'exécution. En particulier, si L est un ordonnancement optimal, on obtient une extension linéaire de l'ordre de priorité, elle-même optimale. De plus, il résulte du théorème 5.40 que toutes les extensions linéaires d'un ordre s'obtiennent à partir de l'une d'elle par des commutations (échange de deux éléments consécutifs). Comme de telles commutations opérées sur l'extension linéaire optimale obtenue ne peuvent ni diminuer ni accroître (cf. le lemme 7.77) le temps d'exécution, celui-ci reste optimal. \square

On peut remarquer que la réciproque de cette proposition est erronée. Il peut exister des ordonnancements optimaux qui ne sont pas des extensions linéaires de l'ordre de priorité. On en donne un exemple ci-dessous.

Exemple 7.80 On a $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Le tableau 7.7 donne les minimums $\min(t_i, t'_j)$ des temps d'exécution. On en déduit l'ordre de priorité sur X , qui est représenté à la figure 7.14. Cet ordre a trois extensions linéaires $x_1x_3x_2x_4$, $x_1x_2x_3x_4$, $x_1x_2x_4x_3$, auxquelles correspondent trois ordonnancements optimaux, de durée totale d'exécution 15. Le premier a été représenté à la figure 7.13.

Si, dans cet exemple, la durée t'_3 devient 1 au lieu de 2, on obtient un ordre de priorité qui est l'ordre total $x_1x_2x_4x_3$, de durée totale d'exécution égale à 14. On peut vérifier que l'ordre $x_1x_2x_3x_4$ est aussi un ordonnancement optimal.

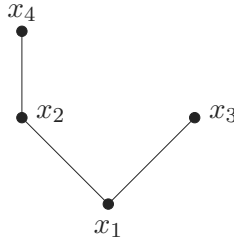


FIG. 7.14. L'ordre de priorité sur X .

L'exercice 7.35 décrit un algorithme simple permettant d'obtenir une extension linéaire de l'ordre de priorité sans avoir à construire explicitement cet ordre.

7.6 Compléments et références

7.6.1 Modélisation des préférences

Comme nous l'avons déjà mentionné, les modèles ordinaux de préférences décrits dans cette section sont utilisés dans de multiples domaines. Pour la recherche opérationnelle, on pourra par exemple, se reporter aux textes de l'« école francophone » d'aide à la décision (Bouyssou et Roy [74], 1993, Bouyssou et Vincke [75], 1997, [76], 1998). Pour l'intelligence artificielle et les bases de données, on peut consulter les sites des conférences spécialisées dont celle tenue en 2006 (Multidisciplinary Workshop on Advances in Preference Handling, <http://www.mycosima.com/ecai2006-preferences>; cf. également Chomicki [97], 2003).

Nous détaillons plus particulièrement ci-dessous les motivations variées qui ont fait (re)découvrir maintes fois les ordres d'intervalles. C'est une longue histoire qui présente la particularité d'être discontinue. Cette histoire remonte au début du siècle dernier quand, à Cambridge, le jeune mathématicien prodige Norbert Wiener cherche à répondre à une question que lui a posée Bertrand Russel : comment obtenir la notion d'instant de temps (ou de point sur une droite) à partir de la notion de période de temps (ou d'intervalle sur une droite) ? Dans son article de 1914 [425], Wiener définit une relation O de « complete succession » par les deux conditions que O est irreflexive et satisfait $OIO \subseteq O$ (ce qui est l'une des caractérisations des ordres d'intervalles données à l'exercice 7.5). Deux papiers ultérieurs de Wiener (dont on trouvera l'essentiel du contenu traduit en notations modernes dans Fishburn et Monjardet [163], 1992) contiennent des développements sur ces ordres. Ils sont motivés par le projet de fonder une théorie valable de la mesure de quantités comme la perception psychologique de la hauteur tonale, pour lesquelles on peut seulement définir une relation de « différence juste perceptible » (jnd)

introduite par les psychophysiciens de la fin du dix-neuvième siècle. Dans ce cas, comme l'avait fait observer Poincaré, la relation d'indiscernabilité entre deux quantités n'est plus une équivalence, puisqu'elle n'est pas nécessairement transitive.

Dans les années trente du siècle dernier, des économistes comme Georgescu-Roegen ou Armstrong remarquent un phénomène similaire pour les préférences : la relation d'indifférence peut ne pas être transitive. Et, 25 ans plus tard, le souci de construire un modèle de préférence individuelle rendant compte de cette intransitivité de l'indifférence conduit Luce [280] (1956) à définir les quasi-ordres (qu'il dénomme « semiordres »). Alors que les papiers de Wiener étaient pratiquement tombés dans l'oubli, les ordres d'intervalles réapparaissent en 1970 dans un article de Fishburn [157] (1970) généralisant les « semiordres » de Luce. Ils sont alors définis comme des relations O irreflexives vérifiant la condition que xOy et zOt impliquent xOt ou zOy .

Auparavant, pour un problème de génétique, Benzer avait considéré des « graphes (non orientés) d'intervalles » dont on observa ensuite qu'ils étaient exactement les complémentaires des graphes de comparabilité des ordres d'intervalles (en effet, les sommets de ce graphe sont les éléments d'une famille d'intervalles, deux intervalles étant reliés par une arête si leur intersection est non vide).

Depuis, les ordres d'intervalles, les ordres quasi-forts, les graphes ou les hypergraphes d'intervalles, ou les graphes d'indifférence (qui sont les complémentaires des graphes de comparabilité des ordres quasi-forts) sont apparus (ou réapparus, car leurs redécouvertes ont été nombreuses) dans de multiples contextes de mathématiques « pures » ou « appliquées » et d'informatique : représentations ensemblistes et numériques de graphes, estimation statistique, sériation et archéologie, théorie de l'utilité en psychologie mathématique et microéconomie, aide à la décision, ordonnancements, classification, logique temporelle etc. De très nombreux résultats et références concernant ces structures peuvent être trouvés dans les ouvrages de Berge [41] (1970), Golumbic [186] (1980), Mirkin et Rodin [297] (1984), Fishburn [161] (1985), Pirlot et Vincke [340] (1997), Aleskerov, Bouyssou et Monjardet [7] (2007) ou encore dans Monjardet ([307], 1978 et [310], 1988). Citons simplement un résultat intéressant notamment du point de vue de la reconnaissance algorithmique des ordres d'intervalles. Considérons l'ordre strict $<$ suivant entre les antichaînes maximales d'un ordre O (à l'exercice 4.3 du chapitre 4, il a été montré que l'ordre réflexif associé \leq est un treillis) : $A < A'$ si, pour tout x dans $A \setminus A'$, il existe x' dans A' avec xOx' . On a alors qu'un ordre strict est un ordre d'intervalles si et seulement l'ordre $<$ entre ses antichaînes maximales est un ordre strictement total. De plus, le nombre des antichaînes maximales d'un ordre d'intervalles est exactement le nombre de « marches » de son tableau en escalier. Signalons aussi deux références de base pour les aspects algorithmiques concernant ces structures, à savoir les deux synthèses de Möhring ([300], 1984 et [301], 1989). La propriété fondamentale pour des applications variées des ordres d'intervalles (respectivement, des ordres quasi-forts, des ordres forts)

est celle de leur représentation numérique avec seuil variable (respectivement, seuil constant, seuil nul). Plusieurs classes d'ordres qui les généralisent au moyen de propriétés portant sur ces représentations ont été étudiées et on en trouvera une description synthétique dans Fishburn [162] (1997).

La notion de relation de Ferrers a été introduite par Riguet [357] en 1951, le nom de Ferrers étant dû au lien avec le graphe de Ferrers–Sylvester associé à une partition d'un entier. La représentation numérique associée n'est toutefois pas mentionnée et la notion ne suscite guère d'intérêt. Mais, près de vingt ans plus tard, Ducamp et Falmagne [130] (1969) motivés par l'étude de « l'échelle de Gutmann » en analyse des questionnaires, définissent la notion correspondante dans le cas d'une relation entre deux ensembles X et Y disjoints (et non nécessairement finis) et donnent le résultat de représentation : il existe deux fonctions f de X dans \mathbb{R} et g de Y dans \mathbb{R} telles que xRy si et seulement si $f(x) < g(y)$. Ce même résultat est obtenu indépendamment par Bouchet ([66], 1971 et [67], 1984) dans son étude des codages des relations binaires. Rebaptisées parfois « biordres », les relations de Ferrers ou leurs généralisations valuées (qui permettent, dans la théorie de la « consistance probabiliste », de modéliser les préférences variables dans le temps d'un sujet) ont fait l'objet de nombreux travaux, notamment à propos de la « dimension Ferrers » (ou « bidimension ») d'une relation (cf. par exemple, Monjardet [305], 1976, Cogis [100] et [101], 1982, Ducamp, Doignon et Falmagne [129], 1984 ou Doignon, Monjardet, Roubens et Vincke [124], 1986 ainsi que le livre de Falmagne [150], 1985).

7.6.2 Agrégation des préférences : théorèmes arrowiens pour ordres

Comme nous l'avons dit dans l'introduction de la section 7.2, le théorème d'impossibilité démontré par Arrow a conduit à un développement considérable de la théorie du choix social, dont on peut avoir une idée à partir, par exemple, des ouvrages de Fishburn [158] (1973), Kelly [236] (1978), Moulin [323] (1988) ou Aizerman et Aleskerov [6] (1995). Avant d'indiquer quelques-uns de ces développements, précisons la différence entre notre théorème 7.29 (« Arrow pour les ordres totaux ») et le théorème d'Arrow proprement dit. Ce dernier porte sur des fonctions d'agrégation des préférences (appelées « social welfare functions » par Arrow) dont le domaine et le codomaine sont respectivement l'ensemble des profils de préférences composés de préordres totaux et l'ensemble des préordres totaux, ou, de façon équivalente (cf. la proposition 7.14), l'ensemble des profils d'ordres forts et l'ensemble des ordres forts. Il ne caractérise pas les fonctions de cette nature qui sont indépendantes et paréliennes (cette dernière propriété portant sur les préférences strictes). Il dit seulement qu'il existe un *dictateur*, c'est-à-dire un votant qui impose sa préférence stricte : si ce votant préfère strictement le candidat x au candidat y , il en sera de même pour la collectivité. Par contre, si le dictateur est indifférent entre ces deux candidats, le résultat collectif n'est pas déterminé.

Pour qu'il le devienne, il faut renforcer un des axiomes, ce qui conduit par exemple à obtenir une *hiérarchie de dictateurs*, dont chacun peut imposer une préférence stricte collective si tous ses supérieurs dans la hiérarchie sont indifférents. Si la preuve initiale donnée par Arrow à son théorème comportait une erreur (rectifiée dans la seconde édition de son livre ([16], 1963), celui-ci a maintenant de multiples preuves. Nous en mentionnons simplement deux liées à des considérations ordinales. D'abord Leclerc ([268], 1991) a obtenu une généralisation de ce théorème lorsque les préférences (individuelles et collectives) sont des « préordres flous ». Ensuite, on peut obtenir ce théorème à partir du théorème 7.29 qui le démontre dans le cas d'ordres totaux (cf. par exemple, Monjardet [313], 2003) ; or, ce dernier théorème, qui caractérise des projections, peut être obtenu à partir de résultats sur les ensembles ordonnés projectifs (Pouzet [343], 1998), où un ensemble ordonné P est dit *projectif* si toute application isotone et idempotente de P^n dans P est une projection.

Une partie des recherches motivées par le théorème d'Arrow a consisté à éprouver sa robustesse en affaiblissant les conditions le rendant possible. Comme nous l'avons montré dans la section 7.2 (cf. aussi Barthélemy [34], 1982), le fait de demander à la préférence collective d'être un ordre plutôt qu'un ordre total ne suffit pas, puisqu'elle conduit à des fonctions oligarchiques d'agrégation des préférences. Si l'on affaiblit encore les exigences sur la préférence collective, en lui demandant de ne pas comporter de circuits (ce qui peut être considéré comme le niveau minimal de rationalité), les fonctions trouvées continuent à n'être guère satisfaisantes, par exemple parce qu'elles donnent des droits de veto à certains votants.

Une autre direction de recherche a consisté à affaiblir l'hypothèse selon laquelle la fonction d'agrégation des préférences doit fournir une préférence collective pour n'importe quel profil possible de préférences individuelles. En fait, si l'on restreint convenablement le domaine de ces profils, les procédures majoritaires de Condorcet conduisent à une préférence collective transitive. On est donc ainsi amené, en particulier, à rechercher des sous-ensembles « condorcéens » de l'ensemble de tous les ordres totaux, i.e. des sous-ensembles \mathcal{C} de \mathcal{L} tels que la relation majoritaire $R_{MAJ}(\pi)$ appliquée à tout profil π d'ordres totaux pris dans \mathcal{C} est sans circuit. C'est notamment le cas lorsque les ordres totaux représentant les préférences des votants « respectent » un ordre total « objectif » sur les candidats : si un votant préfère x à y et que dans l'ordre objectif, y est préféré à z , alors il préfère aussi x à z . Il a été montré que ce domaine condorcéen, défini par Black [53] (1958), est un cas particulier d'une vaste classe d'ensembles condorcéens, qui sont tous des sous-treillis distributifs du treillis permutoèdre (cf. la section 5.6 du chapitre 5) qui conservent la relation de couverture de ce treillis (Chameni-Nembua [94], 1989), Galambos et Reiner [174], 2005). Un exemple de tel ensemble condorcéen, sous-treillis distributif du treillis permutoèdre Σ_n , est donné à la figure 7.15 (il contient 45 ordres totaux, nombre dont il a été montré qu'il est le cardinal maximum d'un ensemble condorcéen de Σ_6). Ces ensembles condorcéens peuvent être construits à partir d'une chaîne maximale du treillis permutoèdre (Abello

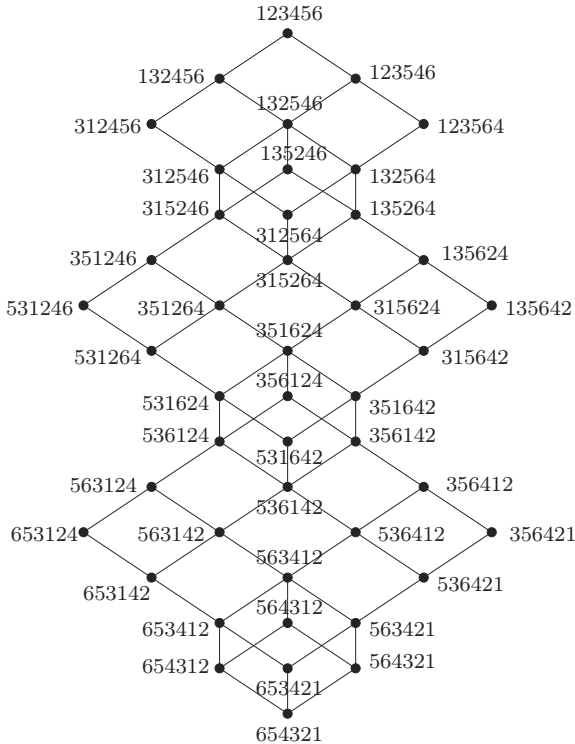


FIG. 7.15.

[1], 1991) ou par des procédures ad hoc tels que le « alternating scheme » (Fishburn [162], 1997). On trouvera dans Monjardet [315] [316] (2006, 2007) des compléments et une vue d'ensemble sur ces résultats qui établissent un autre lien entre la théorie du choix social et celle des ensembles ordonnés. Fishburn [159] (1974) a initié un autre lien entre ces deux théories à propos d'un problème voisin. On considère le profil π d'ordres totaux constitué par l'ensemble $\mathcal{L}(P)$ des extensions linéaires d'un ensemble ordonné P . La relation majoritaire stricte $R_{MAJ}(\pi)$ appliquée à ce profil ne peut contenir un 3-circuit que si la largeur $\alpha(P)$ de P est au moins égale à 3 (pourquoi?). Fishburn [159] (1974) montre que, dès que le nombre n d'éléments de l'ensemble ordonné est au moins égal à 31, on peut trouver un ensemble ordonné P de largeur 3 et de longueur $n - 3$ tel que le profil $\mathcal{L}(P)$ admette un 3-circuit. Ce qui signifie que même pour des votants presque unanimes sur leurs préférences, la règle majoritaire peut créer des circuits. Il a été aussi montré que le nombre minimum d'éléments de P pour lequel un circuit peut apparaître est 9 (Ewacha, Fishburn et Gehrlein [146], 1990).

Un autre apport de l'approche axiomatique introduite par Arrow en agrégation des préférences est de donner une base théorique au fait que toute

procédure d'agrégation a des effets indésirables (dits souvent « paradoxaux »), comme l'« effet Condorcet » pour la règle majoritaire, ou celui mis en évidence à l'exercice 7.10 pour la règle de Borda. Dès lors, on s'est attaché à préciser les caractéristiques des procédures possibles, notamment en les caractérisant par un certain nombre de propriétés. C'est ainsi que l'on dispose, par exemple, d'une caractérisation « axiomatique » de la règle de Borda (Young [434], 1974) ou de la procédure des ordres médians considérée à l'exemple 1.24 (Young et Levenglick [435], 1978). On avait alors signalé que cette dernière procédure coïncide avec la règle majoritaire de Condorcet si les préférences des votants ne sont pas totalement quelconques. En fait, c'est le cas si ces préférences appartiennent à l'un des domaines condorcéens mentionnés ci-dessus, domaines où la relation majoritaire ne peut avoir de circuits. En effet, un ordre (total) L est un ordre médian d'un profil $\pi = (L_1, \dots, L_i, \dots, L_n)$ d'ordres totaux s'il maximise parmi tous les ordres totaux possibles la somme des accords qu'il a avec eux, c'est-à-dire la quantité $\sum_{(y,x) \in L} n_{\pi}(y, x)$. Dès lors, il est facile de voir que, si la relation majoritaire associée au profil π est sans circuits, tout ordre total la contenant est un ordre médian de ce profil. Le fait que ces ensembles condorcéens d'ordres totaux puissent être munis d'une structure de treillis distributif est relié aux considérations de la section 7.6.3 sur les liens entre irréductibles majoritaires et éléments médians dans les demi-treillis à médianes (et, en particulier, dans les treillis distributifs). On trouvera un exposé synthétique sur ces questions dans Hudry et al. [228], 2006).

Signalons enfin que l'approche axiomatique introduite par Arrow dans les problèmes d'agrégation de préférences a été utilisée dans d'autres domaines, par exemple, en analyse des données pour la recherche du consensus de plusieurs classifications obtenues sur le même ensemble d'objets. Plusieurs résultats, mettant souvent en jeu la structure ordinale de l'ensemble de ces objets, et analogues au théorème d'Arrow, ont été ainsi montrés. Dès lors, il a été possible de développer une théorie axiomatique ordinale (ou latticielle) du consensus qui permet d'obtenir de manière unifiée de tels résultats (Monjardet [312], 1990, Leclerc et Monjardet [273], 1994). Cette théorie ainsi que l'approche ordinale métrique sont évoquées à la section 7.3.

7.6.3 Les rôles des ordres en classification

Les quelques applications des ensembles ordonnés qui ont été décrites dans cette section se situent dans le cadre de l'analyse combinatoire des données (« combinatorial data analysis » selon Arabie [9], 1982), dont on trouvera une revue – déjà datée – dans Guénoche et Monjardet [204] (1987). L'intérêt des applications des ensembles ordonnés à la classification est apparu avec une approche axiomatique des problèmes d'ajustement due à Janowitz [229] (1978), puis avec deux articles de synthèse (Barthélemy et al. [37] [38], 1984 et 1986). Janowitz a notamment montré comment la théorie de la résiduation permet de formaliser et de généraliser des méthodes d'ajustement bien connues en classification, tandis que les articles de Barthélemy et al. donnent les premiers

résultats issus de la formalisation ordinale des problèmes de comparaison et de consensus de classifications. Plus récemment, Domenach et Leclerc [125] [126] (2001, 2002) ont proposé une formalisation des problèmes d'ajustement, sous des contraintes portant sur les données et sur les modèles, qui prolonge celles étudiées par Janowitz [229] (1978) et Barthélemy et al. [37] (1984).

La distance de la différence symétrique dans un demi-treillis distributif est caractérisée plus haut de plusieurs façons : à partir d'une pondération (unitaire) des sup-irréductibles, ou de la fonction de rang de T , ou des chemins dans le graphe de voisinage de T . Chacune de ces caractérisations conduit à définir une famille de métriques dans les ensembles ordonnés, les exercices 7.21 et 7.22 donnant un aperçu de certaines de ces généralisations. L'étude des valuations et des métriques associées remonte, en théorie des treillis, aux travaux de Glivenko [184] (1938). La revue de Monjardet [309] (1981) concerne le cas plus général des ensembles ordonnés quelconques. L'intérêt pratique de ces développements est bien illustré par le cas des partitions : pour la comparaison de celles-ci, diverses distances de type géodésique ont été proposées (cf. Arabie et Boorman [10], 1973), mais, lorsque ces distances ne sont pas associées à des valuations, le simple calcul de la distance entre deux partitions peut être un problème \mathcal{NP} -difficile (Day et Wells [114], 1984).

Les travaux sur l'agrégation (ou le *consensus*) de classifications ont eu pour point de départ ceux sur l'agrégation des partitions. Celle-ci a été considérée, notamment, en statistique où Régnier a proposé dès 1965 [354] de chercher des partitions « centrales », c'est-à-dire médianes, au sens de la définition 7.38, pour la distance de la différence symétrique. Mais, en relation avec le fait bien connu que le treillis des partitions n'est pas distributif, l'obtention de ces médianes est un problème qui s'est ensuite révélé \mathcal{NP} -difficile (cf. Barthélemy et Leclerc [36], 1995, et l'annexe A). L'étude de l'agrégation des classifications hiérarchiques s'est développée en taxonomie dans les années quatre-vingts, à propos notamment de la reconstruction phylogénétique. Margush et McMorris ont montré dès 1981 [286] que l'application de la règle majoritaire à un profil de hiérarchies donne une hiérarchie médiane, unique si le profil est impair, une propriété analogue à ce qui était déjà connu pour les treillis distributifs (Birkhoff et Kiss [52], 1947, Barbut [31], 1961, Monjardet [308], 1980) et pour les arbres au sens de la théorie des graphes (Jordan [233], 1869, Zelinka [436], 1968). Le théorème 7.48 rassemble ces résultats et étend le domaine où règle majoritaire et médianes correspondent, celui-ci étant exactement celui des demi-treillis à médianes (Bandelt et Barthélemy [30], 1984). Ceci est en fait vrai pour toute métrique associée à une pondération comme à l'exercice 7.22 (Leclerc [270], 1994). On appelle *graphe à médianes* un graphe où tout triplet de sommets a une médiane unique (pour la distance du nombre minimum d'arêtes d'un chemin) ; c'est, par exemple, le cas des arbres. Les graphes à médianes sont exactement les graphes de voisinage des demi-treillis à médianes (Avann [19], 1961). Pour un exposé général sur les liens entre médianes métriques et latticielles, on pourra consulter Hudry et al. [228] (2006). Le théorème 7.51 établit que, pour les autres treillis et demi-treillis, des relations

entre médianes et majorités subsistent sous une forme affaiblie (Leclerc [266], 1990, [269], 1993, [270], 1994).

Le consensus de classifications a été étudié via d'autres approches, notamment du type de celles, axiomatiques, décrites dans la section précédente. On pourra se reporter à ce sujet à Monjardet [312] (1990) et Leclerc et Monjardet [273] (1995), et au livre de Day et McMorris [113] (2003). La caractérisation de la procédure médiane dans les demi-treillis à médianes du théorème 7.50 est due à McMorris et al. [294] (2000). Dans celui-ci, la condition de consistance est une propriété générale des médianes métriques reconnue par Young et Levenglick [435] (1978) dans un contexte de choix social. L'appellation de la première condition est un écho, bien déformé par les formalisations et généralisations, au fait qu'en 1785, Condorcet a proposé d'utiliser la règle majoritaire dans les procédures de vote.

7.6.4 Analyse galoisienne des données : fermetures et implications

Les relations d'implication, telles qu'elles ont été brièvement évoquées, sont à la base de nombreux travaux, dont beaucoup sont motivés par les usages d'icelles dans des domaines variés. A ceux mentionnés au début de cette section (bases de données, espaces de connaissance, etc.), il convient d'ajouter, entre autres, l'intelligence artificielle ainsi que la fouille des données (« data mining ») où l'on cherche à extraire des informations pertinentes d'une grande masse de données peu structurées a priori. La multiplicité et la variété de ces domaines se sont accompagnées d'une multiplicité des terminologies, en français comme en anglais, et il n'est pas toujours facile de s'y reconnaître. Cette situation est largement débrouillée dans Caspard et Monjardet [90] (2003), au moins pour l'anglais.

Comme nous l'avons souligné, une implication est définie ici comme l'association systématique de certains caractères à certains autres. Le terme « implication » lui-même apparaît aussi dans d'autres contextes logiques ou algébriques. On le retrouve notamment, avec un sens voisin, dans l'analyse booléenne (Hammer et Rudeanu [218], 1966, Degenne [116], 1972, Flament [166], 1976). Ici, on se situe dans le prolongement de l'analyse galoisienne (ou conceptuelle) décrite au chapitre 3 (section 3.5) ; l'exemple 7.54 illustre comment : une famille de parties \mathcal{D} (souvent interprétée comme une base de données) se met sous la forme d'une table, dont le treillis de Galois est isomorphe à la famille de Moore $\mathcal{F} = \mathbf{m}(\mathcal{D})$; celle-ci est, d'après le théorème 7.60, déterminée par l'ensemble $i(\mathcal{D})$ des implications de \mathcal{D} . Elle l'est aussi par sa fermeture φ , ou encore par sa relation d'emboîtement $\tilde{\delta}$ sur $P(E)$ définie par $A\tilde{\delta}B$ si $A \subset B$ et $\varphi(A) \subset \varphi(B)$. Les relations de ce type, qui sont des ordres stricts, sont étudiés et caractérisés dans Domenach et Leclerc [127] (2004). Notons, d'un point de vue plus théorique que, puisque tout treillis est représentable par une famille de Moore (théorème 3.49, chapitre 3), il l'est aussi par une relation d'implication.

En pratique, la relation $i(\mathcal{D})$ est bien trop vaste pour fournir un descripteur lisible des données (représentées par la famille \mathcal{D}), d'où l'intérêt de la recherche de résumés exhaustifs (donc de bases d'implications de \mathcal{D}). Dans cette direction, un résultat majeur est l'existence et la caractérisation de la base canonique de Guigues-Duquenne (Guigues et Duquenne [205], 1986). La mise en évidence de celle-ci a été précédée, accompagnée ou suivie de nombreux travaux allant dans le même sens, par exemple Maier [285] (1983), Duquenne [135] (1987), Luxenburger [281] (1991), Wild [426], (1994) et Ganter et Wille [178] (1999). Le théorème 7.69 et la proposition 7.70 sont des variantes de résultats de Guigues et Duquenne avec, pour le premier, une démonstration basée sur celle de Caspard et Monjardet [90] (2003).

Cependant, la détermination de la base canonique n'est pas un problème algorithmiquement facile (au sens développé dans l'annexe A). C'est, entre autres, pour cette raison que plusieurs auteurs ont défini des bases d'implications alternatives, notamment la *base canonique directe*, étudiée par Bertet et Monjardet [47] (2005). Ils montrent notamment que cette base a été découverte à (au moins) cinq reprises (et sous des formes différentes) dans la littérature et qu'elle est liée à la représentation par inf-irréductibles d'une famille de Moore \mathcal{F} dans le treillis \mathbb{F} , ainsi qu'à la représentation d'une fonction booléenne de Horn par ses implicants premiers.

Les implications décrites dans cette section sont « exactes », puisque correspondant, on l'a dit, à des associations systématiques. Un problème qui se pose alors est que certaines de ces implications peuvent être en fait fort peu attestées dans la famille \mathcal{D} . Le cas extrême est celui d'une partie A de E qui n'est incluse dans aucun élément de \mathcal{D} : on obtient l'implication $A \longrightarrow_{\mathcal{D}} E \setminus A$, qui en fait n'est pas réalisée dans la famille donnée \mathcal{D} . Duquenne, dans l'article [137] de 1995 d'où nous avons tiré l'exemple 7.54, règle ce type de problème en tenant systématiquement compte des effectifs des réponses dans ses analyses des possessions des paysans indonésiens (un aspect que nous n'avons pas repris ici, pour alléger l'exposé). Un autre problème est qu'une implication vérifiée dans une centaine d'éléments de \mathcal{D} mais contredite dans un 101ème n'apparaît plus comme telle dans le modèle « rigide » décrit précédemment. Cette nécessité de faire le tri entre des implications significatives et d'autres plus accidentelles a conduit à l'introduction de validations statistiques fondées sur des modèles probabilistes plus ou moins élaborés comme celui de l'analyse implicative statistique (Gras et Coll. [193], 1996, Gras, Kuntz et Briand [194], 2001) ou celui de l'analyse implicative bayésienne (Bernard et Charron [43], [44], 1996, Bernard et Poitrenaud [45], 1999).

Dans la même optique de sélection d'implications non forcément exactes mais significatives, une approche simple connaît un grand essor en fouille des données. Elle consiste en la recherche d'implications $A \longrightarrow_{\mathcal{D}} B$ satisfaites « suffisamment souvent » dans la base de données \mathcal{D} . La recherche de telles implications se fait en deux temps. On extrait d'abord les « motifs fréquents », c'est-à-dire les parties de E incluses dans au moins p éléments de \mathcal{D} (p étant un seuil fixé ; l'exercice 7.23 porte sur des propriétés de l'ensemble de ces

motifs fréquents). On cherche ensuite à subdiviser chaque motif fréquent en deux parties A et B , de façon que l'implication $A \longrightarrow_{\mathcal{D}} B$ soit elle-même suffisamment attestée. L'extraction des motifs fréquents, qui est essentielle dans la procédure, a fait l'objet depuis Agrawal et Srikant [2] (1994 – algorithme *Apriori*) de très nombreux travaux algorithmiques (cf. par exemple, Hipp, Güntzer et Nakhaeizadeh [222], 2000), et Boulicaut et Crémilleux [72], 2004), dans lesquels les approches basées sur le treillis de Galois ont à nouveau une bonne part (Ben Yahia et Mephu Nguifo [40], 2004).

7.6.5 Ordonnements

Les problèmes d'ordonnements sont une des grandes classes de problèmes étudiés en recherche opérationnelle. On en trouvera un exposé très complet dans l'ouvrage de Carlier et Chrétienne [85] (1988). On trouve des exposés mettant l'accent sur les aspects ordinaux de ces problèmes dans Lenstra et Rinnooy Kan [277] (1984), Möhring [300] [301] (1984, 1989), Jansen [230] (1993) ou Pogunke [341] (1986) dont nous avons suivi la présentation.

Pour le problème de l'ordonnement à m machines nous avons vu qu'il est résoluble en temps polynomial lorsque $m = 2$ et que les durées d'exécution des tâches sont identiques. Il existe de nombreux travaux montrant que ce résultat subsiste ou au contraire devient \mathcal{NP} -difficile, suivant la valeur de m , le type d'ordre de précedence entre les tâches, les hypothèses sur les durées des tâches (cf. l'annexe A et/ou Lenstra et Rinnooy Kan [277], 1984).

Dans les exemples que nous avons traités dans cette section, nous n'avons considéré que l'aspect temporel pour l'accomplissement des tâches. Des modèles plus complets font intervenir l'aspect ressources nécessaires pour les effectuer ; elles sont de différents types, si bien qu'à chaque tâche est associé un vecteur de ressources. Ces dernières ayant un coût, variable suivant leur type, on cherche alors à minimiser une fonction qui dépend, d'une part, d'une mesure globale de performance fondée sur les durées d'exécution et, d'autre part, d'une mesure globale des coûts des ressources nécessaires. En fait, le problème se présente souvent sous une forme différente où l'on cherche à optimiser le critère performance temporelle, l'autre critère apparaissant comme une contrainte : chacune des ressources n'est disponible qu'en quantité limitée. Ainsi un problème classique (et qui englobe de multiples variantes) consiste à minimiser la durée d'exécution sous des contraintes de ressources. Radermacher [352] [353] (1977, 1986) et Möhring [300] [301] (cf. 1984, 1989) ont développé un modèle ordinal pour ce problème qui conduit à l'obtention d'algorithmes de séparation et évaluation progressives (« Branch and Bound ») pour le résoudre. Dans un tel modèle, on se donne un ordonnancement des tâches (respectant les contraintes de précedence) défini par la donnée des débuts des tâches. L'idée de base est alors de considérer l'ordre d'intervalles sur X associé à la famille d'intervalles $[t_i, t_i + d_i]$, où t_i est le début de la tâche x_i et d_i sa durée. Cet ordre est une extension de l'ordre de précedence des tâches et il induit un autre ordonnancement qui ne peut qu'avancer (ou maintenir)

les débuts des tâches. Autrement dit, on a obtenu un ordonnancement qui ne peut être que meilleur que (ou équivalent à) l'ordonnancement initial. D'autre part, on montre que la quantité globale d'une ressource consommée dans cet ordonnancement égale le poids maximum d'une antichaîne de l'ordre d'intervalles, le poids d'une tâche étant le coût de cette ressource qu'elle requiert pour son accomplissement. On peut alors montrer qu'on obtient un ordonnancement optimal (et respectant les contraintes de ressources) à partir de certains ordres d'intervalles qui sont des extensions de l'ordre de précédence, et qu'on peut caractériser.

7.7 Exercices

7.7.1 Modélisation des préférences

Exercice 7.1 Soit l'ensemble ordonné (X, O) , où $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ et dont l'ordre O est donné par la relation de couverture suivante : (a, b) (i.e. a est couvert par b dans O), (c, a) , (c, d) , (e, g) , (g, a) , (g, d) , (g, f) , (h, j) , (j, c) , (j, e) et (i, g) . Représenter le diagramme de cet ensemble ordonné.

Calculer les relations IO et OI et en déduire que O est un ordre d'intervalles.

Donner le tableau en escalier et des représentations numériques par seuil et par intervalles de cet ordre. Comparer le nombre de « marches » du tableau en escalier de O et le nombre de ses antichaînes maximales (cf. la section 7.6.1 des compléments et références).

Exercice 7.2 Soit l'ensemble ordonné (X, O) , où $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ et dont l'ordre O est donné par la relation de couverture suivante :

$$(d, a), (e, a), (e, b), (e, c), (f, a), (f, b), (f, c), (g, b), (g, c), (h, d)$$

$$(h, e), (h, f), (i, d), (i, e), (i, f), (h, j), (j, e), (j, g), (j, f)$$

Répondre aux mêmes questions qu'à l'exercice 7.1 et, en particulier, déterminer à quelle classe d'ordres appartient l'ordre O .

Exercice 7.3 [AUTOUR DES PRÉORDRES « TRACES » T_d ET T_g] Soit R une relation binaire sur un ensemble X . Pour $x \in X$, on pose $d^+(x) = |xR| = |\{y \in X : xRy\}|$, $d^-(x) = |Rx| = |\{y \in X : yRx\}|$ et $s(x) = d^+(x) - d^-(x)$. On définit les relations suivantes sur X :

$$\begin{aligned} - xT_dy \text{ si } xR \supseteq yR, & \quad - xT_gy \text{ si } Rx \subseteq Ry, & \quad - T = T_d \cap T_g, \\ - xT_+y \text{ si } d^+(x) \geq d^+(y), & \quad - xT_-y \text{ si } d^-(x) \leq d^-(y), & \quad - xT_sy \text{ si } s(x) \geq s(y). \end{aligned}$$

En décomposant ces relations en leurs parties asymétriques et symétriques,

on écrit :

$$\begin{aligned} - T_d &= F_d + E_d & - T_g &= F_g + E_g & - T_+ &= F_+ + E_+ \\ - T_- &= F_- + E_- & - T &= F + E & - T_s &= F_s + E_s. \end{aligned}$$

Montrer les relations suivantes :

1. $T_d = (RR^{cd})^{cd} \subseteq T_+$, $T_g = (R^{cd}R)^{cd} \subseteq T_-$ et $T \subseteq T_s$.
2. $F_d = (RR^{cd})^{cd} \cap (RR^{cd})$, $F_g = (R^{cd}R)^{cd} \cap (R^{cd}R)$ et $F = (F_d \cap T_g) \cup (F_g \cap T_d)$.

Dans le cas où R est un ordre strict O et où $I = O^{cd} \cap O^c$, montrer les relations suivantes :

- | | |
|--|---|
| $- T_d = (OI)^{cd}$, | $- F_d = (OI)^{cd} \cap OI$, |
| $- T_g = (IO)^{cd}$, | $- F_g = (IO)^{cd} \cap IO$, |
| $- T = (OI)^{cd} \cap (IO)^{cd} = (OI \cup IO)^{cd}$, | $- F = (OI \cup IO) \cap (OI \cup IO)^{cd}$, |
| $- E = (OI)^c \cap (OI)^{cd} \cap (IO)^c \cap (IO)^{cd}$, | $- O = OE \cup EO$, |

ainsi que les équivalences xEy si et seulement si $[xO = yO$ et $Ox = Oy]$, si et seulement si $xI = yI$.

Exercice 7.4 [ORDRES FORTS ET PRÉORDRES TOTAUX] Soit O une relation binaire définie sur un ensemble X . Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. O est un ordre fort,
2. O^{cd} est un préordre total (i.e. une relation totale et transitive),
3. Il existe une fonction numérique f définie sur X et telle que $xO^{cd}y$ si et seulement si $f(x) \leq f(y)$.

Exercice 7.5 [MULTIPLES CARACTÉRISATIONS DES ORDRES D'INTERVALLES] Soit O un ordre strict sur un ensemble X . En utilisant les notations de l'exercice 7.3, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. O est un ordre d'intervalles,
2. $OIO \subseteq O$,
3. OI est sans circuit,
4. OI est asymétrique,
5. $OI = F_d$,
6. T_d est un préordre total,
7. $T_d = T_+$.

Montrer que dans les caractérisations (2), (3), (6) et (7), on peut ne pas supposer que O est irréflexive. Donner d'autres caractérisations des ordres d'intervalles utilisant IO , T_g ou T_- .

Exercice 7.6 [MULTIPLES CARACTÉRISATIONS DES ORDRES QUASI-FORTS] Soit O un ordre strict sur un ensemble X . En utilisant les notations de l'exercice 7.3, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. O est un ordre quasi-fort,
2. $OIO \subseteq O$ et $O^2I \subseteq O$,

3. $OI \cup IO$ est sans circuit,
4. $OI \cup IO$ est asymétrique,
5. $OI \cup IO = F$,
6. $T = OI \cup IO \cup E$,
7. T est un préordre total,
8. $T = T_s$,
9. O est un ordre d'intervalles vérifiant $F_d \cap (F_g)^d = \emptyset$,
10. pour toute paire $\{x, y\}$ d'éléments incomparables de O , soit (x, y) soit (y, x) est un couple O -critique.

Montrer que, si O est un ordre quasi-fort, on a aussi $T = T_+ \cap T_-$.

Montrer que, dans les caractérisations (2), (5) et (7), on peut ne pas supposer que O est irréflexive.

Exercice 7.7 [VERS LA PREUVE DU THÉORÈME 7.6] Soit O une relation binaire asymétrique définie sur un ensemble X et $I = O^{cd} \cap O^c$.

Montrer que O est un ordre d'intervalles si et seulement si tout circuit de la relation O^{cd} ($= O + I$) contient au moins deux couples consécutifs qui appartiennent à I .

Montrer que O est un ordre quasi-fort si et seulement si la relation O^{cd} est totale et tout circuit de longueur 3 ou 4 de cette relation contient strictement plus de couples de la relation I que de couples de la relation O .

N.B. Cette caractérisation des ordres quasi-forts, utilisée avec un résultat sur l'existence d'une fonction potentiel pour une relation valuée, permet de donner une preuve du théorème 7.6 de représentation numérique à seuil constant des ordres quasi-forts (cf. Pirlot et Vincke [340] (1997), ou Aleskerov, Bouyssou et Monjardet [7], 2007).

Exercice 7.8 [LES « S -ORDRES »] Soit O une relation binaire définie sur un ensemble X . On suppose que O est irréflexive et vérifie la condition (S) suivante :

$$\text{pour tous } x, y, z, t \in X, xOy \text{ et } yOz \text{ impliquent } xOt \text{ ou } tOz. \quad (S)$$

Montrer que :

1. O est une relation d'ordre strict ; un tel ordre est appelé un S -ordre,
2. un ordre strict O est un S -ordre si et seulement si il n'existe pas $x, y, z, t \in X$ avec xOy, yOz, xIt, yIt et zIt (où $I = O^{cd} \cap O^c$).

Montrer que, pour une relation binaire irréflexive O définie sur un ensemble X , les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. O est un S -ordre,
2. pour tous $x, y \in X, xO \supseteq yO$ ou $Oy \subseteq Ox$,

3. pour tous $x, y \in X$, $xO = yO$ ou $Ox = Oy$ ou ($xO \supset yO$ et $Ox \subset Oy$) ou ($yO \supset xO$ et $Oy \subset Ox$).

N.B. On observera qu'un ordre quasi-fort est un ordre d'intervalles qui est également un S -ordre. On trouvera une étude des S -ordres dans Monjardet [307] (1978) et Doble, Doignon, Falmagne et Fishburn [123] (2001).

7.7.2 Agrégation des préférences : théorèmes arrowiens pour ordres

Exercice 7.9 [BORDA ET LES COMPARAISONS PAR PAIRES] Soient N un ensemble de n votants et X un ensemble de m candidats. A un profil $\pi \in \mathcal{L}^N$, on associe les nombres $n_\pi(y, x)$ donnant les résultats des comparaisons par paires entre les candidats x et y . Montrer qu'on peut calculer le préordre de Borda à partir de ces nombres, en établissant la relation $R(x, \pi) = \sum_{y \in X} n_\pi(y, x)$.

Montrer que $\sum_{x \in X} R(x, \pi) = \frac{nm(m+1)}{2}$.

En déduire qu'un candidat tel que tous les autres candidats lui sont majoritairement préférés ne peut être préféré à tous ces autres dans le préordre de Borda.

Exercice 7.10 [UN « PARADOXE » DE LA RÈGLE DE BORDA, Fishburn [160]] Soit N un ensemble de sept votants ayant le profil suivant de préférences sur un ensemble $X = \{x, a_1, a_2, a_3\}$ de quatre candidats : $\pi = (a_1 a_2 a_3 x : 3 ; a_2 a_3 x a_1 : 2 ; a_3 x a_1 a_2 : 2)$ (où, par exemple, $a_1 a_2 a_3 x : 3$ signifie que trois votants ont l'ordre total $a_1 < a_2 < a_3 < x$ de préférences sur les quatre candidats).

1. Calculer le préordre de Borda $R_B(\pi)$ pour ce profil.

2. On suppose maintenant que, suivant la manoeuvre classique consistant pour un votant à mal classer le candidat le plus « dangereux » pour son candidat préféré, les quatre votants n'ayant pas x comme candidat préféré l'aient mis en dernière position dans leur classement. Calculer le préordre de Borda pour ce profil. Que remarquez-vous ?

3. En généralisant l'exemple précédent, montrer que, sur un ensemble $X = \{x, a_1, a_2, \dots, a_p\}$ de cardinalité $p+1 \geq 3$, on peut trouver un profil π de $2p+1$ votants tel que $R_B(\pi) = a_p a_{p-1} \dots a_1 x$ et tel que, pour le profil π' où tous les votants n'ayant pas x comme candidat préféré l'ont mis en dernière position, on ait $R_B(\pi') = x a_1 \dots a_{p-1} a_p$.

Exercice 7.11 [PREUVE DE LA PROPOSITION 7.19, McGarvey [292], 1953] Soient X et N deux ensembles.

1. Pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$, montrer que $R_{MAJ}(\pi)$ est une relation réflexive et antisymétrique et que $R_{MAJL}(\pi)$ est une relation totale.

2. Soit R une relation réflexive et antisymétrique définie sur X . A tout couple (x, y) d'éléments distincts de R , on associe les deux ordres totaux $L_1(x, y) = Mxy$ et $L_2(x, y) = xyM^d$ définis sur X et où M est un ordre total

arbitraire sur $X \setminus \{x, y\}$. On définit ainsi un profil π d'ordres totaux sur X dont on calculera la relation majoritaire $R_{MAJ}(\pi)$. Dédire de ce résultat et d'un résultat similaire pour les relations totales, les assertions du point (2) de la proposition 7.19.

3. Montrer les assertions du point (3) de la proposition 7.19.

Exercice 7.12 [LE DEMI-TREILLIS DES FILTRES] Soient \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux filtres définis sur un ensemble N .

1. Montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ est un filtre. On pose $\mathcal{F} \vee \mathcal{F}' = \{F \cap F', F \in \mathcal{F} \text{ et } F' \in \mathcal{F}'\}$. Montrer que $\mathcal{F} \vee \mathcal{F}'$ est un filtre si et seulement si $F \cap F'$ n'est jamais vide.

2. Montrer que \mathcal{F} est un ultrafiltre si et seulement si \mathcal{F} est un filtre tel que, pour tout $S \subseteq N$, $S \notin \mathcal{F}$ implique $N \setminus S \in \mathcal{F}$ (indication pour la condition nécessaire : s'il existe $S \subseteq N$ tel que $S \notin \mathcal{F}$ et $N \setminus S \notin \mathcal{F}$, considérer $\mathcal{F} \vee \mathcal{F}_S$, avec $\mathcal{F}_S = \{T \subseteq N : S \subseteq T\}$).

3. Montrer que tout filtre \mathcal{F} défini sur un ensemble N est de la forme $\mathcal{F} = \mathcal{F}_V$, où V , base du filtre, est une partie non vide de N . En déduire que, si $V = \{i\}$, \mathcal{F}_i est un ultrafiltre.

4. Dédire des résultats précédents que les ultrafiltres sur N sont les n filtres \mathcal{F}_i de base i un élément de N (ce sont donc les éléments maximaux de l'inf-demi-treillis des filtres).

Exercice 7.13 [PREUVE DU THÉORÈME 7.25 DE NAKAMURA] Soit R une relation binaire sur un ensemble X .

1. Montrer que R est sans circuit si et seulement si elle n'admet pas de circuit de longueur au plus égale à $|X|$.

2. Soit $\mathcal{F} \subseteq P(N)$ une famille finissante de parties de N et $F_{\mathcal{F}}$ la FAP qui, à tout profil π de \mathcal{L}^N , associe la relation $R_{\mathcal{F}}(\pi)$ ($yR_{\mathcal{F}}(\pi)x$ si $N_{\pi}(y, x) \in \mathcal{F}$).

3. Montrer que, si $\nu(\mathcal{F}) > p$ (pour un entier p), $R_{\mathcal{F}}(\pi)$ est sans circuit de longueur au plus égale à p , pour tout $\pi \in \mathcal{L}^N$ (indication : montrer que dans le cas contraire, on peut trouver une sous-famille \mathcal{F}' de \mathcal{F} telle que $|\mathcal{F}'| \leq p$ et $\bigcap \mathcal{F}' = \emptyset$).

4. Avec les notations de (2), montrer que, si $R_{\mathcal{F}}(\pi)$ est sans circuit de longueur au plus égale à p , on a $\nu(\mathcal{F}) > p$ (indication : si $\nu(\mathcal{F}) = k < p$, construire un profil π de \mathcal{L}^N tel que $R_{\mathcal{F}}(\pi)$ contienne un circuit x_1x_2, \dots, x_kx_1 ; considérer pour cela une sous-famille \mathcal{F}' de \mathcal{F} de cardinalité k et d'intersection vide; en posant $\mathcal{F}' = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, commencer par associer à tout $i \in \bigcup \{S_h, S_h \in \mathcal{F}'\}$ une relation $R(i)$ formée de tous les couples (x_h, x_{h+1}) pour lesquels $i \in S_h$).

5. Dédire des résultats précédents le théorème de Nakamura.

N.B. Cette démonstration, qui simplifie celle donnée par Nakamura, se trouve par exemple dans Moulin [323] (1988).

Exercice 7.14 Soit \mathcal{M} un ensemble d'ordres définis sur un ensemble X et contenant l'ensemble $\mathcal{L} = \mathcal{L}_X$ des ordres totaux sur X . \mathcal{M} est dit $\mathcal{L} - \cap$ -stable

si, pour tous $L, L' \in \mathcal{L}$, $L \cap L' \in \mathcal{M}$ (ou, de façon équivalente, si \mathcal{M} contient tous les ordres de dimension 2). Montrer que, si \mathcal{M} n'est pas $\mathcal{L} - \cap$ -stable, une $\mathcal{M} - FAP$ de \mathcal{L}^N dans \mathcal{M} est indépendante et parétienne si et seulement si elle est une projection.

En déduire que, si \mathcal{M} est l'ensemble des ordres forts, des ordres quasi-forts ou des ordres d'intervalles, une $\mathcal{M} - FAP$ de \mathcal{L}^N dans \mathcal{M} indépendante et parétienne est dictatoriale.

7.7.3 Les rôles des ordres en classification

Exercice 7.15 [LE TREILLIS DES PARTITIONS EST SEMI-MODULAIRE SUPÉRIEUREMENT] Soit \mathcal{P}_E l'ensemble des partitions d'un ensemble E . Montrer que, pour $\mathbf{P}, \mathbf{P}' \in \mathcal{P}_E$, on a $\mathbf{P} \leq \mathbf{P}'$ (pour l'ordre de finesse) si et seulement si toute classe de \mathbf{P}' est union de classes de \mathbf{P} .

Montrer en particulier que \mathbf{P}' couvre \mathbf{P} si et seulement si \mathbf{P}' s'obtient par réunion de deux classes de \mathbf{P} .

En déduire que le treillis (\mathcal{P}_E, \leq) vérifie la condition de semi-modularité supérieure (chapitre 2, définition 2.7).

Exercice 7.16 [LE TREILLIS DES PARTITIONS EST ATOMISTIQUE ET COATOMISTIQUE] Soit \mathcal{P}_E le treillis des partitions d'un ensemble E à n éléments. Montrer qu'une partition \mathbf{P} de E est un atome de \mathcal{P}_E (chapitre 3, définition 3.13) si et seulement si elle a $n - 1$ classes, puis que le treillis \mathcal{P}_E est atomistique.

Montrer que les coatomes de \mathcal{P}_E (chapitre 3, définition 3.20) sont les partitions en deux classes de E (*bipartitions*, ou *dichotomies*) et que le treillis \mathcal{P}_E est coatomistique.

N.B. Le treillis des partitions est donc un *treillis géométrique*, c'est-à-dire un treillis semi-modulaire supérieurement et atomistique. Pour en savoir plus sur ce treillis, on pourra consulter, par exemple, Grätzer [195] (1998).

Exercice 7.17 Soient E un ensemble et d une dissimilarité sur E . Pour $e \in E$ et $\lambda > 0$, la boule $B(e, \lambda)$ est l'ensemble $\{e' \in E : d(e, e') \leq \lambda\}$. Montrer que d est une ultramétrie si et seulement si, pour tout $\lambda \geq 0$ fixé, l'ensemble $\{B(e, \lambda) : e \in E\}$ est une partition, notée $\mathbf{P}_{d, \lambda}$, de E .

Exercice 7.18 [ULTRAMÉTRIQUES, HIÉRARCHIES INDICÉES ET DENDROGRAMMES, Barthélemy et al. [37], 1984] Soient E un ensemble et la chaîne $\underline{k} = \{0 < 1 < \dots < k - 1\}$.

1. Soit u une ultramétrie sur E à valeurs dans \underline{k} , et f_u l'application qui associe à tout $\lambda \in \underline{k}$ la partition $\mathbf{P}_{d, \lambda}$ définie à l'exercice précédent. Montrer que f_u est un \underline{k} -dendrogramme sur E et que l'application $u \mapsto f_u$ est injective.

2. Soit f un \underline{k} -dendrogramme sur E , et $\mathcal{H}_f = \bigcup \{f(\lambda) : \lambda \in \underline{k}\}$. Pour tout $H \in \mathcal{H}_f$, on pose $\nu_f(H) = \min\{\lambda \in \underline{k} : H \text{ est inclus dans une classe de}$

$f(\lambda)$. Montrer que le couple (\mathcal{H}_f, ι_f) est une hiérarchie indicée sur E et que l'application $f \mapsto (\mathcal{H}_f, \iota_f)$ est injective.

3. Soit (\mathcal{H}, \subseteq) une hiérarchie indicée sur E à valeurs d'indice dans \underline{k} . On pose, pour tous $e, e' \in E$, $u_{(\mathcal{H}, \iota)}(e, e') = \iota(H_{\{e, e'\}})$. Montrer que la dissimilarité $u_{(\mathcal{H}, \iota)}$ sur E ainsi définie est une ultramétrie (à valeurs dans \underline{k}) et que l'application $(\mathcal{H}, \iota) \mapsto u_{(\mathcal{H}, \iota)}$ est injective.

4. Dédire de ce qui précède que les ensembles \mathbf{U}_k des ultramétries sur E à valeurs dans \underline{k} , \mathbf{D}_k des \underline{k} -dendrogrammes sur E et \mathbb{H}_k^c des hiérarchies indicées sur E à valeurs d'indice dans \underline{k} sont deux à deux en correspondance bijective. Soit $u \in \mathbf{U}_k$, $f \in \mathbf{D}_k$ et $(\mathcal{H}, \iota) \in \mathbb{H}_k^c$ trois éléments se correspondant. Montrer les égalités suivantes pour tous $e, e' \in E$: $u(e, e') = \min\{\lambda \in \underline{k} : e \text{ et } e' \text{ sont dans la même classe de } f(\lambda)\} = \iota(H_{\{e, e'\}})$.

Exercice 7.19 [LES DENDROGRAMMES SONT DES APPLICATIONS RÉSIDUELLES, Janowitz [229], 1978 dans la version de Barthélemy et al. [37], 1984] Soit u une ultramétrie sur E à valeurs dans \underline{k} , et f_u le dendrogramme (application de \underline{k} dans \mathcal{P}_E) associé à u à la question (1) de l'exercice précédent. On définit une application g_u de \mathcal{P}_E dans \underline{k} en posant, pour toute partition \mathbf{P} de E , $g_u(\mathbf{P}) = \max\{u(e, e') : e \text{ et } e' \text{ sont dans la même classe de } \mathbf{P}\}$ (et donc $g_u(\mathbf{P}_0) = 0$, avec \mathbf{P}_0 la partition la plus fine).

Montrer que l'on a, pour tous $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_E$ et $\lambda \in \underline{k}$, $\mathbf{P} \leq f_u(\lambda)$ si et seulement si $g_u(\mathbf{P}) \leq \lambda$.

En déduire que le dendrogramme f_u est une application résiduelle de \underline{k} dans \mathcal{P}_E et que g_u est l'application résiduée correspondante (chapitre 3, section 3.4).

Exercice 7.20 [DUALITÉ DU TREILLIS DES DENDROGRAMMES ET DU TREILLIS DES ULTRAMÉTRIQUES, Leclerc [264], 1981] On considère, d'une part, l'ensemble \mathbf{D}_k des \underline{k} -dendrogrammes sur E , muni de l'ordre d'exponentiation (avec l'ordre usuel sur \underline{k} et l'ordre de finesse sur \mathcal{P}_E) et, d'autre part, l'ensemble \mathbf{U}_k des ultramétries sur E à valeurs dans \underline{k} , muni de l'ordre usuel : $u \leq u'$ si $u(e, e') \leq u'(e, e')$ pour tous $e, e' \in E$.

1. Montrer que, pour tous $f, f' \in \mathbf{D}_k$, les applications $f \vee f'$ et $f \wedge f'$ définies par, pour tout $\lambda \in \underline{k}$, $(f \vee f')(\lambda) = f(\lambda) \vee f'(\lambda)$ et $(f \wedge f')(\lambda) = f(\lambda) \wedge f'(\lambda)$, sont encore des \underline{k} -dendrogrammes sur E .

2. Montrer que, pour tous $u, u' \in \mathbf{U}_k$, la dissimilarité $u \vee u'$ définie pour tous $e, e' \in E$, par $(u \vee u')(e, e') = \max(u(e, e'), u'(e, e'))$ est encore un élément de \mathbf{U}_k et en déduire que \mathbf{U}_k est un treillis.

3. Montrer que, pour la correspondance définie à la question (1) de l'exercice 7.18, on a $u \leq u'$ entraîne $f'_u \leq f_u$. En déduire que les treillis \mathbf{U}_k et \mathbf{D}_k sont duaux.

Exercice 7.21 [Monjardet [306], 1976] Soit T un inf-demi-treillis, et v une application strictement isotone de T dans \mathbb{R}^+ . On dit que v est une *valuation inférieure* si l'on a, pour tous x, y dans T tels que $x \vee y$ existe, $v(x) + v(y) \leq$

$v(x \wedge y) + v(x \vee y)$. Montrer que, si v est une valuation inférieure, la fonction d_v de T^2 dans \mathbb{R}^+ définie pour tous $x, y \in T$ par $d_v(x, y) = v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y)$, est une distance sur T , c'est-à-dire qu'elle vérifie, pour tous $x, y, z \in T$, $d_v(x, z) \leq d_v(x, y) + d_v(y, z)$.

Exercice 7.22 [Leclerc [270]] Soient P un ensemble ordonné et w une fonction réelle strictement positive sur l'ensemble S_P des éléments sup-irréductibles de P .

1. Montrer que la fonction δ_w définie, pour tous $x, y \in P$, par $\delta_w(x, y) = \sum_{s \in S_x \Delta S_y} w(s)$ est une distance sur P^2 .

2. On suppose que P est un inf-demi-treillis. Montrer que la fonction v définie sur P par $v(x) = \sum_{s \in S_x} w(s)$ est une valuation inférieure (au sens défini à l'exercice précédent) sur P et que l'on a, pour tous $x, y \in T$, $d_v(x, y) = \delta_w(x, y)$.

3. On suppose que P est un inf-demi-treillis distributif. Montrer que la fonction v vérifie alors, pour tous x, y dans T tels que $x \vee y$ existe, $v(x) + v(y) = v(x \vee y) + v(x \wedge y)$ (on dit que v est une *valuation* sur P).

4. Montrer que, réciproquement, toute valuation sur un inf-demi-treillis distributif P s'obtient comme ci-dessus à partir d'une fonction w définie sur S_P .

7.7.4 Analyse galoisienne des données : fermetures et implications

Exercice 7.23 [MOTIFS FRÉQUENTS] Soit \mathcal{D} une famille de parties d'un ensemble E , et $p \leq |\mathcal{D}|$ un entier. Une partie M non vide de E est appelée un *motif fréquent* si elle est incluse dans au moins p éléments de \mathcal{D} . Montrer que l'ensemble \mathcal{M} des motifs fréquents constitue une partie commençante de l'ensemble ordonné $\underline{2}^E$. Montrer que les motifs fréquents maximaux sont fermés pour la fermeture $\varphi_{\mathcal{D}}$.

Prendre $\mathcal{D} = \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$, où $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ est la famille des dix inf-irréductibles de la famille de Moore \mathcal{F} de l'exemple 7.54, et $p = 3$, et trouver les motifs fréquents correspondants.

Exercice 7.24 [INF-IRRÉDUCTIBLES DU TREILLIS \mathbb{F} ET IRRÉDUCTIBLES DU TREILLIS \mathbb{I}] Montrer que les éléments inf-irréductibles du treillis \mathbb{F} des familles de Moore sur un ensemble E sont les familles de la forme $\mathcal{F}_{A, \{e\}}$ (définition 7.65), où A est une partie non vide de E et $e \in E \setminus A$. Donner alors la forme générale des sup-irréductibles du treillis \mathbb{I} des relations d'implication.

A partir de la forme des sup-irréductibles de \mathbb{F} , montrer qu'un inf-irréductible de \mathbb{I} est de la forme $\{(C, D) \in (P(E))^2 : C \not\subseteq A \text{ ou } D \subseteq A\}$.

Exercice 7.25 Soient \mathcal{F} une famille de Moore sur un ensemble E et $R = \{(A_1, B_1), \dots, (A_r, B_r)\}$ une relation sur $P(E)$. On pose $R' = \{(A_1, \varphi_{\mathcal{F}}(A_1)), \dots, (A_r, \varphi_{\mathcal{F}}(A_r))\}$. En utilisant le théorème 7.58, montrer que, si R est une base d'implications de \mathcal{F} , alors il en est de même de R' .

On suppose que, de plus, $\varphi_{\mathcal{F}}(A_i) \setminus A_i \subseteq B_i$, pour tout $i = 1, \dots, r$. Montrer qu'alors R est une base d'implications de \mathcal{F} si et seulement si il en est de même de R' .

Exercice 7.26 [PARTIES CRITIQUES FACILEMENT CALCULABLES] Soit \mathcal{F} une famille de Moore sur un ensemble E . Montrer que tout élément minimal pour l'inclusion dans $P(E) \setminus \mathcal{F}$ est une partie critique de \mathcal{F} . Quels sont les éléments de E qui sont des parties critiques ? Quelles sont les parties critiques des types précédents dans l'exemple 7.67 ?

Exercice 7.27 [UNE CARACTÉRISATION DES QUASI-FERMÉS D'UNE FAMILLE DE MOORE, Caspard et Monjardet [90]] Soient \mathcal{F} une famille de Moore sur un ensemble E , φ la fermeture associée et $Q \in P(E) \setminus \mathcal{F}$. Montrer que, si Q est un quasi-fermé de \mathcal{F} , alors, pour tout $A \subset Q$, $\varphi(A) \subset \varphi(Q)$ implique $\varphi(A) \subset Q$.

Réciproquement, soit $Q \in P(E) \setminus \mathcal{F}$ et vérifiant $\varphi(A) = \varphi(Q)$ ou $\varphi(A) \subset Q$ pour tout $A \subseteq Q$. Montrer qu'alors $F \cap Q \in \mathcal{F}$ pour tout $F \in \mathcal{F}$ incomparable à Q pour l'inclusion. En déduire qu'un tel Q est un quasi-fermé de \mathcal{F} et donc qu'une partie $Q \in P(E) \setminus \mathcal{F}$ est un quasi-fermé de \mathcal{F} si et seulement si, pour tout $A \subset Q$, $\varphi(A) \subset \varphi(Q)$ implique $\varphi(A) \subset Q$.

Exercice 7.28 Soit \mathcal{F} une famille de Moore sur un ensemble E et φ la fermeture associée. On pose $xR(\mathcal{F})y$ si $\varphi(x) \subseteq \varphi(y)$. En utilisant l'exercice 7.27, montrer que, si une partie Q de E est un quasi-fermé pour \mathcal{F} de cardinalité au moins 2, Q est une partie commençante du préordre $R(\mathcal{F})$ (voir page 148).

Exercice 7.29 [BASE CANONIQUE D'UNE PARTIE COMMENÇANTE DE $\underline{2}^E$] Soient E un ensemble et \mathcal{A} une antichaîne du treillis booléen $\underline{2}^E$. Montrer que la base canonique de la relation d'implication $i((\mathcal{A}))$ est constituée de toutes les implications de la forme $A \longrightarrow_{(\mathcal{A})} E \setminus A$, où $A \in \mathcal{A}$. Utiliser les résultats du chapitre 4, section 4.3, pour en déduire le nombre maximum d'implications qu'une telle base peut contenir.

N.B. Les familles de Moore de la forme $\mathcal{F} = (\mathcal{A}[\cup\{E\}])$ admettent diverses caractérisations, ainsi que leurs relations d'implication du type $i((\mathcal{A}))$. Ainsi, dans les bases de données relationnelles, on dit qu'une telle relation d'implication est « dans la forme normale de Boyce-Codd » (cf. Caspard et Monjardet [90] (2003), proposition 33 (3) et remarque 64 (2)).

7.7.5 Ordonnements

Exercice 7.30 [ENSEMBLES ORDONNÉS k -SAUT CRITIQUES] On dit qu'un ensemble ordonné P est k -saut critique si $s(P) = k$ (cf. la définition 1.32) et si, pour tout élément x de P , $s(P \setminus x) < k$. Montrer que l'ensemble ordonné S_3 (cf. l'exemple 6.12, page 179) est 3-saut critique. Soit $P = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$ un ensemble fortement ordonné, où A_i est une antichaîne de taille n_i ($i =$

$1, 2, \dots, k$). Montrer que P est $[(n_1 + n_2 + \dots + n_k) - k]$ -saut critique. En déduire quatre autres ensembles ordonnés 3-saut critiques.

Exercice 7.31 Montrer que le nombre de sauts d'un ensemble ordonné P vérifie les inégalités suivantes : pour tout $x \in P$, $s(P) - 1 \leq s(P \setminus x) \leq s(P)$.

Exercice 7.32 Soit l'ensemble ordonné $P = (X, O)$ avec $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ et où l'ordre O est donné par la relation de couverture suivante :

$$(a, d), (b, e), (b, d), (c, d), (c, f), (d, g), (f, h), (g, i).$$

Calculer un 2-ordonnancement optimal et un 3-ordonnancement optimal de P .

Exercice 7.33 [DURÉE D'EXÉCUTION ET ÉTENDUE] Soit k la durée d'exécution d'un m -ordonnancement optimal d'un ensemble ordonné P . Montrer que l'étendue de P (définition 1.30) vérifie $k \geq \kappa(P)$. Donner un exemple d'ensemble ordonné pour lequel la durée d'exécution d'un 2-ordonnancement optimal est strictement supérieure à son étendue. Plus généralement, donner un exemple d'ensemble ordonné P connexe pour lequel cette durée est égale $\kappa(P) + h$ (pour un entier h quelconque).

Exercice 7.34 Démontrer le résultat du lemme 7.77 (examiner les différents cas possibles).

Exercice 7.35 [CALCUL D'UNE EXTENSION OPTIMALE] Soit l'ordre de priorité associé à un problème à 2 étapes et 2 machines (lemme 7.78). Dans le but de construire une extension linéaire particulière de l'ordre de priorité, on utilise l'algorithme suivant : on considère le minimum de tous les temps d'exécution ; si ce minimum est un t_i (respectivement, un t'_i), x_i est mis au premier rang (respectivement, au dernier) de l'extension linéaire cherchée. Ce processus est ensuite itéré (après suppression de x_i , t_i et t'_i). Montrer qu'on obtient bien ainsi une extension linéaire de l'ordre de priorité et donc une extension optimale.

Questions de complexité¹

L'utilisation en pratique des notions et résultats présentés dans ce livre nécessite de pouvoir répondre à des questions posées sur un ensemble ordonné modélisant telle ou telle situation. Il peut s'agir, par exemple, de déterminer une extension linéaire de cet ensemble ordonné, ou le treillis de ses parties commençantes, ou son graphe de couverture, ou encore de calculer sa largeur ou sa dimension.

La résolution effective de ces problèmes nécessite d'utiliser un algorithme « efficace » implémenté par un programme utilisable sur un ordinateur. Mais qu'est-ce qu'un algorithme efficace ? Est-il toujours possible d'en trouver un, quel que soit le problème à résoudre ? Si oui, peut-on mesurer son efficacité ? Ce type de questions est étudié à deux niveaux liés mais distincts. D'une part, on dispose d'une théorie de la complexité qui, à partir d'une formalisation des notions de *problème* et d'*algorithme* (par exemple, au moyen de « langages acceptés » par une « machine de Turing »), aboutit à une classification des problèmes suivant leur difficulté à être résolus algorithmiquement, et ceci indépendamment de l'algorithme utilisé. La première partie de cette annexe a pour but d'en donner brièvement une idée intuitive². D'autre part, pour un problème donné, on recherchera les algorithmes (ou les heuristiques³) les plus performants en prenant en compte les nombreux facteurs qui peuvent

¹ Nous remercions Marc Demange et Olivier Hudry pour les améliorations apportées par leur lecture attentive des premières versions de cette annexe.

² Mettons toutefois le lecteur en garde : une définition comme celle de la classe \mathcal{P} de problèmes, qu'on trouvera plus loin, n'a de réel sens que dans le cadre formalisé de la théorie de la complexité. Puisque l'objectif n'est pas ici de présenter cette théorie, nous renvoyons pour cela le lecteur à d'excellents ouvrages, tels ceux de Garey et Johnson [179] (1979), Stern [394] (1990) ou Wolper [431] (1991) – cf. également les chapitres s'y rapportant dans Barthélemy, Cohen et Lobstein [35] (1992) ou Charon, Germa et Hudry [96] (1996).

³ Contrairement à un algorithme, une heuristique n'a pas pour but de donner la réponse exacte à un problème, mais seulement de s'approcher au mieux de cette solution.

en pratique améliorer leur efficacité⁴. Dans la seconde partie de cette annexe, nous donnerons une liste de problèmes sur les ensembles ordonnés avec, pour chacun, la mention de la complexité d'au moins un algorithme de résolution (mais non nécessairement du « meilleur » algorithme) et les références correspondantes.

A.1 Théorie de la complexité

De manière informelle, un algorithme est une procédure de résolution d'un problème qui, partant d'une « entrée » (les données du problème) conduit au moyen d'un nombre fini d'instructions à une « sortie » (la solution du problème). La spécification des données définissant l'entrée de l'algorithme est ce qu'on appelle une *instance* du problème. Par exemple, pour le problème du calcul de la dimension (au sens du chapitre 6), une instance sera un certain ensemble ordonné. D'autre part, pour résoudre un problème par un algorithme implémenté sur un ordinateur, il faut que la donnée du problème soit compréhensible par la machine, ce qui revient en fin de compte à la représenter par une suite de 0 et de 1. La longueur λ de cette suite définit la *taille* de l'instance du problème. La *complexité en temps* d'un algorithme censé résoudre ce problème est la fonction $t(\lambda)$ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} qui donne le nombre maximum d'« opérations élémentaires »⁵ requises par l'exécution de l'algorithme pour résoudre le problème sur une instance de taille λ de ce problème (on considère donc le pire des cas possibles)⁶.

Cette complexité de l'algorithme va dépendre non seulement de l'algorithme lui-même, mais aussi de la manière dont est codée l'instance. Par exemple, un ensemble ordonné peut être donné par tous ses couples ou seulement par ceux de sa relation de couverture, et ces couples peuvent être donnés par une matrice d'adjacence ou par une liste de successeurs ou de prédécesseurs. Toutefois, la définition (qu'on trouvera plus bas) d'un algorithme efficace donnée par la théorie de la complexité va permettre, moyennant quelques précautions, de faire abstraction de ce facteur. Ainsi, un algorithme efficace pour un codage « raisonnable » de l'instance le restera pour tout codage qui lui est *polynomialement lié* (c'est-à-dire tel que la taille de l'instance dans

⁴ Pour la conception et l'analyse d'algorithmes et d'heuristiques, on peut, par exemple, se reporter aux ouvrages de Beauquier, Berstel et Chrétienne [39] (1992) ou de Sedgewick et Flageolet [375] (1996), ainsi que, pour des domaines particuliers, à ceux de Barthélemy, Cohen et Lobstein, et de Charon, Germa et Hudry, cités à la note 2.

⁵ La notion d'opération élémentaire va dépendre du problème traité ; ce peut être une opération arithmétique, une opération de comparaison ou d'affectation d'éléments. Cependant, les notions de *classes de complexité* introduites plus loin sont indépendantes d'une définition précise des opérations élémentaires.

⁶ Nous ne parlerons pas ici de la « complexité en espace », qui mesure la place en mémoire requise pour l'algorithme.

le premier codage est majorée par une fonction polynomiale de la taille de l'instance dans le second, et inversement). On montre de ce fait qu'on peut remplacer la taille de l'instance, telle qu'elle a été définie plus haut à partir d'une suite de 0 et 1, par une taille « intuitive » qui, dans le cas d'un ensemble ordonné, peut être le nombre n d'éléments de cet ensemble ou le nombre m des couples de sa relation d'ordre ou celui m_{\prec} des couples de sa relation de couverture ou encore les sommes $n + m$ ou $n + m_{\prec}$. Pour les définitions qui vont suivre, nous prenons n comme taille et nous considérons donc la fonction de complexité en temps $t(n)$ donnant, pour un certain algorithme, le nombre maximum d'opérations élémentaires requises par l'exécution de l'algorithme pour résoudre le problème sur une instance de taille n . Le calcul exact de cette complexité serait souvent difficile. Aussi cherche-t-on à la borner, en utilisant des notions et notations classiques sur les ordres de grandeur, que nous rappelons ci-dessous.

On définit deux relations O et Ω sur l'ensemble des fonctions sur \mathbb{N} de la manière suivante : pour f et g deux fonctions sur \mathbb{N} , on dit que g *majoré* (respectivement, *minoré*) *asymptotiquement* f s'il existe un nombre réel positif c et un entier positif n_0 tels que, pour tout entier $n > n_0$, $f(n) \leq cg(n)$ (respectivement, $f(n) \geq cg(n)$). Au lieu de la notation fOg (respectivement, $f\Omega g$), on écrit $f = O(g)$ (respectivement, $f = \Omega(g)$) et on dit aussi que f *est en* $O(g)$ (respectivement, f *est en* $\Omega(g)$).

Le lecteur s'assurera que les relations O et Ω définissent deux préordres duaux sur l'ensemble des fonctions sur \mathbb{N} . Il précisera aussi l'équivalence induite, qui se note $f = \Theta(g)$ et se traduit par l'expression « f et g ont (asymptotiquement) même ordre de grandeur ».

Un algorithme est dit (*en temps*) *polynomial* si sa fonction de complexité en temps $t(n)$ est en $O(n^k)$ pour un nombre $k \geq 1$ fixé. Dans ce cas, l'algorithme est considéré comme *efficace* ou « bon »⁷. Dans le cas contraire, l'algorithme est dit (*en temps*) *exponentiel*⁸ et il est considéré comme *inefficace*⁹. C'est par, exemple, le cas si sa complexité est en $\Omega(k^n)$ pour un nombre $k > 1$, c'est-à-dire si elle est minorée par une fonction exponentielle.

On se rend aisément compte de la pertinence de cette distinction en comparant les valeurs $t(n)$ obtenues pour une fonction polynomiale et une fonction exponentielle. En supposant que $t(n)$ est exprimée en secondes, le calcul de n^3 et 3^n pour, par exemple, $n = 40$, donne respectivement un peu moins de 18 heures et 3855 siècles ! Ainsi, sauf pour des données de toute petite taille, la complexité exponentielle d'un algorithme le rend normalement impraticable.

⁷ Il est clair que l'efficacité en pratique d'un algorithme sera d'autant meilleure que k sera petit. En particulier, on peut considérer comme très efficaces les algorithmes dits (*en temps*) *linéaires*, à savoir ceux dont la fonction de complexité en temps est en $\Theta(n)$.

⁸ Même si $t(n)$ n'est pas une fonction exponentielle, par exemple, si $t(n) = n!$.

⁹ Cette terminologie ne doit pas être prise complètement au pied de la lettre. On connaît des algorithmes exponentiels qui sont très performants en pratique. C'est le cas de l'algorithme du simplexe pour les problèmes de programmation linéaire.

Revenons maintenant à la question : existe-t-il pour tout problème un algorithme efficace permettant de le résoudre ? La théorie des classes de complexité se propose d'étudier cette question en constituant une typologie des problèmes dits *de décision*. Un *problème de décision* comporte une entrée et une question. L'entrée précise une instance particulière du problème et la question n'admet que les réponses « oui » ou « non ». Formellement, un problème de décision est défini comme un couple (I, J) où I est l'ensemble des instances du problème et J le sous-ensemble (non vide) de I des instances dites *positives*, c'est-à-dire celles pour lesquelles la réponse à la question est « oui ». Nous nous intéressons ici aux problèmes de décision sur les ensembles ordonnés. L'entrée sera donc un certain ensemble ordonné P , et la question sera de savoir si P vérifie une certaine propriété, par exemple, une propriété qui en fait un ensemble ordonné d'intervalles. La recherche de la valeur d'un paramètre de P , par exemple sa dimension, n'est pas un problème de décision mais peut s'y ramener en posant des questions du type : la dimension de P est-elle inférieure ou égale à un entier q donné ?

Notons aussi que (contrairement aux problèmes dits *indécidables*, pour lesquels il n'existe aucun algorithme permettant de répondre à la question), pour les problèmes de décision posés sur un ensemble ordonné fini, il existe normalement un algorithme permettant, en théorie, de les résoudre. Par exemple, pour le problème évoqué ci-dessus portant sur la dimension d'un ensemble ordonné P , il « suffit » de calculer toutes les extensions linéaires de P (en passant en revue les $n!$ ordres totaux possibles), puis toutes les intersections de q d'entre elles pour s'assurer qu'une de ces intersections est – ou non – P . Un tel algorithme est clairement de complexité exponentielle, donc inefficace. En fait, ce problème de décision portant sur la dimension est l'un des nombreux exemples de problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme efficace, mais dont on ne sait pas non plus démontrer qu'il n'en existe pas. Ceci va être précisé avec les définitions ci-dessous des deux classes fondamentales de complexité.

Définition A.1 *La classe \mathcal{P} est l'ensemble des problèmes de décision pour lesquels, pour toute instance de tout problème, on peut déterminer par un algorithme polynomial si la réponse est « oui » ou « non ».*

La classe \mathcal{NP} est l'ensemble des problèmes de décision pour lesquels, pour toute instance de tout problème, on peut vérifier par un algorithme polynomial appliqué à un « certificat succinct » (i.e. un certificat de taille polynomiale par rapport à la taille de l'instance) que la réponse est « oui » si et seulement si l'instance est positive.

Par exemple, pour le problème dont l'énoncé est « La dimension de P est-elle inférieure ou égale à q ? » (avec P un ensemble ordonné et $q \leq \frac{|P|}{2}$, d'après le théorème 6.21), un tel certificat sera la donnée de $q \leq \frac{|P|}{2}$ extensions linéaires de P et l'on peut vérifier en temps polynomial que leur intersection est P .

Plus précisément, on dit que les problèmes de la classe \mathcal{NP} sont « résolus » par un *algorithme non-déterministe* au sens suivant : la première étape de cet algorithme est une étape de « divination » où un « devin » fournit un certificat (de taille polynomiale) permettant pour une instance positive du problème de répondre oui. Dans ce cas, la seconde étape est celle de vérification et consiste en un algorithme polynomial appliqué à ce certificat ; elle permet donc de répondre oui en cas d'instance positive. Si, au contraire, l'instance est négative, il n'existe aucun tel certificat. Il faut remarquer qu'un tel algorithme ne résout pas réellement le problème, puisqu'en l'absence du devin fournissant un certificat (si ce dernier existe), il pourrait être nécessaire de tester un nombre exponentiel de cas (par exemple le nombre binomial $\binom{n}{q}$ d'ensembles de q extensions linéaires de P) pour connaître la réponse.

Plus formellement, dans la théorie de la complexité, on modélise le calcul effectué par un algorithme au moyen d'une « machine de Turing ». Les problèmes de la classe \mathcal{P} (respectivement, de la classe \mathcal{NP}) sont alors ceux qui sont résolubles en temps polynomial par une machine de Turing « déterministe » (respectivement, « non déterministe »). On se reportera aux ouvrages cités à la note 2 de cette annexe pour l'exposé formel de la théorie.

Insistons donc sur le fait qu'il serait erroné de traduire « \mathcal{NP} » par « non polynomial », puisque cela signifie au contraire « polynomial de façon non déterministe ».

Résultat : \mathcal{P} est incluse dans \mathcal{NP} .

Problème ouvert : cette inclusion est-elle stricte ou y a-t-il égalité ?

En fait, il est considéré comme hautement probable que la classe \mathcal{P} soit différente de la classe \mathcal{NP} mais, comme on ne dispose d'aucune preuve de cette différence, l'assertion « $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ » est toujours une conjecture. Si quelqu'un prouve qu'elle est vraie (ce qui lui fera gagner un million de dollars, cf. le site <http://www.claymath.org/millennium/>), ceci impliquera que tous les problèmes qui sont dans \mathcal{NP} et non dans \mathcal{P} sont « difficiles », au sens où il n'existe pas d'algorithme polynomial pour les résoudre.

Un problème de décision est dit *\mathcal{NP} -complet* s'il est dans la classe \mathcal{NP} et s'il est au moins aussi difficile que tout problème de la classe \mathcal{NP} , au sens où l'existence d'un algorithme polynomial pour résoudre un problème \mathcal{NP} -complet entraînerait l'existence d'algorithmes polynomiaux pour résoudre n'importe quel problème de la classe \mathcal{NP} (on aurait alors $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$)¹⁰.

Conséquence : on a $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ si et seulement si la classe des problèmes \mathcal{NP} -complets et la classe \mathcal{P} sont disjointes.

¹⁰ La notion de problèmes \mathcal{NP} -complets a été introduite par Cook [104] (1971) qui a montré l'existence de tels problèmes en prouvant que le problème dit de *satisfiabilité* d'une expression booléenne (en forme normale conjonctive) est \mathcal{NP} -complet. Depuis lors, de très nombreux problèmes ont été montrés \mathcal{NP} -complets, et nous en citerons quelques-uns portant sur les ensembles ordonnés dans la seconde partie de cette annexe.

Remarque A.2 Les notions précédentes sont en fait ordinales. Définissons une relation de *réduction polynomiale* entre problèmes de \mathcal{NP} en disant qu'un problème A est *réduit* en un problème B s'il existe une fonction calculable en temps polynomial qui transforme toute instance du problème A en une instance de même nature (positive ou négative) du problème B . Cette relation est un préordre sur \mathcal{NP} et l'équivalence associée définit des classes de problèmes équivalents. L'ordre quotient entre ces classes a un élément minimum, à savoir la classe \mathcal{P} , et un élément maximum, à savoir la classe des problèmes \mathcal{NP} -complets. Si $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, on montre aussi que ce préordre admet une infinité de classes constituées de problèmes de difficulté « intermédiaire » à celle des classes minimum et maximum, et qu'il n'est pas total.

Les deux classes fondamentales \mathcal{P} et \mathcal{NP} de problèmes ont été définies autour des années soixante-dix. S'y sont adjointes depuis de nombreuses autres classes (cf. le « zoo des complexités », <http://www.complexityzoo.com>), dont nous ne donnerons ici que quelques exemples.

Un problème est dit *\mathcal{NP} -difficile* (traduction usuelle de l'anglais *\mathcal{NP} -hard*) s'il est au moins aussi difficile (au même sens que précédemment) qu'un problème \mathcal{NP} -complet. Tout problème \mathcal{NP} -complet est donc \mathcal{NP} -difficile, et on a la relation

$$\{\text{problèmes } \mathcal{NP}\text{-difficiles}\} \cap \{\text{problèmes de } \mathcal{NP}\} = \{\text{problèmes } \mathcal{NP}\text{-complets}\}$$

Il faut noter que nous utilisons ici le terme de problème sans qu'il soit précisément défini. Cette définition va dépendre du contexte; par exemple, les problèmes d'optimisation sont ceux où, à chaque instance du problème, est associé un ensemble S de « solutions possibles » et où l'on cherche une solution minimisant (ou maximisant) une fonction numérique f définie sur S . Tout problème d'optimisation admet un problème de décision associé. Par exemple, chercher le nombre $s(P)$ de sauts d'un ensemble ordonné P est un problème d'optimisation consistant à minimiser sur l'ensemble $\mathcal{L}(P)$ des extensions linéaires L de P , le nombre $s(P, L)$ de sauts de L . Le problème de décision associé comporte en entrée l'ensemble ordonné P et un entier k et pose la question : a-t-on $s(P) \leq k$? Si le problème de décision associé à un problème d'optimisation est \mathcal{NP} -complet, celui-ci est \mathcal{NP} -difficile.

Les classes de problèmes $\#\mathcal{P}$, $\#\mathcal{P}$ -complets et $\#\mathcal{P}$ -difficiles ont été introduites (par Valiant [416] [417], 1979) pour rendre compte de la difficulté de problèmes de dénombrement de certains objets combinatoires, c'est-à-dire de la détermination du nombre de ces objets (par exemple, le calcul du nombre d'extensions linéaires d'un ensemble ordonné). De façon analogue à ce qui est écrit plus haut, on a

$$\begin{aligned} \{\text{problèmes } \#\mathcal{P}\text{-difficiles}\} \cap \{\text{problèmes de } \#\mathcal{P}\} \\ = \{\text{problèmes } \#\mathcal{P}\text{-complets}\}. \end{aligned}$$

Les versions dénombrement de la plupart des problèmes \mathcal{NP} -complets sont des problèmes $\#\mathcal{P}$ -complets, mais ce peut être aussi le cas pour des problèmes

de la classe \mathcal{P} (par exemple, le problème de calculer le nombre de couplages d'un graphe orienté biparti).

D'autre part, pour les problèmes d'énumération d'objets combinatoires sur un ensemble de cardinal n , où le nombre N de ces objets peut être exponentiel en n (par exemple, lorsqu'il s'agit des extensions linéaires d'un ensemble ordonné), d'autres notions ont été introduites. Un algorithme d'énumération de ces N objets (c'est-à-dire qui en fournit une liste) est en *temps polynomial* si sa complexité est en $O((n+N)^k)$, avec k une constante au moins égale à 1. Il est en *temps polynomial* (respectivement, *linéaire*) *par objet* si sa complexité est en $O(n^k N)$, avec k une constante au moins égale à 1 (respectivement, en $O(nN)$). Dans ce cas, on dit aussi que l'algorithme a une *complexité amortie* polynomiale (respectivement, linéaire). Lorsque la complexité est en $O(N)$, on dit que l'algorithme a une *complexité amortie constante*, ou encore qu'il est en *temps constant amorti* (TCA). Si, de plus, la complexité (en temps) du calcul pour passer d'un objet de la liste à son successeur est bornée par une constante, l'algorithme est dit *sans boucles* (« loopless » ou en « constant worst case time »). Enfin, la liste fournie est du *type code de Gray* si la différence entre deux objets successifs de la liste est petite (par exemple si, dans une liste de tous les ordres totaux, deux ordres successifs ne diffèrent que par l'inversion d'un couple).

A.2 Résultats de complexité

Considérons le problème suivant : la dimension d'un ensemble ordonné est-elle au plus égale à un entier $k > 2$? La difficulté de ce problème diffère suivant la classe d'ensembles ordonnés pour laquelle on se le pose. Trivial s'il s'agit d'ensembles totalement ordonnés, ce problème est \mathcal{NP} -complet si l'on considère la classe de tous les ensembles ordonnés, mais il devient polynomial pour certaines classes d'ordres. Nous commencerons donc ci-dessous (section A.2.1) par des résultats de complexité d'algorithmes portant sur des problèmes (de décision ou non) « faciles », c'est-à-dire pour lesquels il existe toujours un algorithme polynomial. Nous donnerons ensuite (section A.2.2) une liste de problèmes « difficiles » (\mathcal{NP} -complets, \mathcal{NP} -difficiles ou $\#\mathcal{P}$ -complets) sur la classe de tous les ensembles ordonnés. Lorsque l'on doit résoudre un tel problème sur un ensemble ordonné spécifié, il y a plusieurs possibilités. D'abord il se peut que cet ensemble ordonné soit de suffisamment petite taille pour que le problème puisse y être résolu par un algorithme exponentiel. Ensuite, cet ensemble ordonné peut appartenir à une classe particulière d'ensembles ordonnés pour laquelle il a été montré que le problème y devient polynomial ; nous donnerons dans la section A.2.3 un tableau présentant des classes d'ordres (reconnaissables polynomialement) pour lesquelles certains des problèmes difficiles précédents deviennent polynomiaux. Enfin, si aucune des possibilités précédentes ne s'applique, on peut recourir – lorsqu'il en existe – à des algorithmes (polynomiaux) d'approximation donnant une solution approchée,

dont on peut parfois garantir la qualité au moyen de *bornes de performance*; nous n'en dirons pas plus sur cette possibilité, qui est l'objet de multiples recherches, et pour laquelle on pourra se référer, par exemple, aux ouvrages de Vazirani [418] (2001) ou au texte de Demange et Paschos [117] (2005) (toutefois, à très peu d'exceptions près, les résultats d'approximation pour des problèmes sur les ordres ne se trouvent que dans des journaux ou comptes-rendus de conférences spécialisés).

Finalement, les résultats énoncés dans les trois sous-sections suivantes fournissent un échantillon consistant de ceux obtenus dans la littérature algorithmique sur les ordres. On trouvera une part de ces résultats avec, le cas échéant, la description des algorithmes correspondants dans les textes de synthèse sur ces questions dus à Bouchitté et Habib [69] (1989), Möhring ([300], 1984 et [301], 1989) et Spinrad [382] (1994).

Il est à remarquer que la complexité de certains problèmes reste à ce jour inconnue. Il en est ainsi du problème de décision concernant l'isomorphisme de deux ensembles ordonnés (comme, plus généralement, celui de deux graphes). Il en est de même pour le problème d'énumérer toutes les transversales minimales d'une famille finissante.

A.2.1 Problèmes faciles (algorithmes polynomiaux)

Les problèmes sur un ensemble ordonné qu'on trouvera ci-dessous, que ce soient des problèmes de décision de la classe \mathcal{P} ou d'autres, peuvent être résolus par un algorithme polynomial. La complexité d'un tel algorithme peut dépendre de façon non négligeable des structures de données utilisées pour la représentation de l'ensemble ordonné. Mais il ne peut être question ici de préciser cette structure de données et l'algorithme utilisé; en fait, ce que le lecteur trouvera, c'est la complexité (en temps) d'un ou deux algorithmes résolvant le problème et des références où il pourra trouver une écriture de ces algorithmes et des détails sur leur implémentation. Il faut préciser que les références mentionnées ne sont pas toujours celles des articles originaux – non nécessairement facilement accessibles – et que la complexité indiquée n'est pas toujours la « meilleure ».

Comme il a été dit plus haut, la complexité va être évaluée en fonction d'une « taille » de l'ensemble ordonné $P = (X, \leq)$. Celle-ci peut être le cardinal n de X , le nombre m des couples de la relation d'ordre \leq , celui m_{\prec} des couples de la relation de couverture \prec , ou encore une fonction de n, m ou m_{\prec} . D'autre part, l'entrée de ces algorithmes est parfois non une relation d'ordre ou de couverture d'un ensemble ordonné, mais un graphe orienté sans circuits $G = (X, U)$. Ceci revient, en considérant l'ensemble ordonné fermeture transitive de ce graphe, à en prendre une sous-relation U telle que \prec est contenue dans U qui est elle-même contenue dans \leq . La taille est alors mesurée par le nombre d'arcs du graphe G , i.e. par l'entier m_U (avec $m_{\prec} \leq m_U \leq m$). Ainsi, dans les complexités données ci-dessous, l'apparition de m_{\prec} (respectivement, m_U ou m) dans une expression signifie que la donnée en entrée de l'algorithme est

la relation de couverture d'un ordre (respectivement, un graphe sans circuits ou une relation d'ordre).

1. Calcul de la relation d'ordre de P à partir d'une sous-relation (contenant la relation de couverture de P) :

- (a) $O(n^3)$: Roy (1959), Warshall (1962), Schröder (2002).
- (b) $O(nm_U)$: Goralcikova et Koubek (1979), Mehlhorn (1984).
- (c) Si P est rangé, $O(n + m_U)$: Goralcikova et Koubek (1979).
- (d) Si P est un ensemble ordonné de dimension 2 (respectivement, un treillis distributif), $O(n^2)$: Ma et Spinrad (1991) (respectivement, Bordat (1991)).
- (e) Si P est de largeur bornée, $O(n + m)$: Habib, Morvan et Rampon (1993).

2. Calcul de la relation de couverture de P à partir de sa relation d'ordre :

- (a) $O(n^3)$: Schröder (2002).
- (b) $O(nm + n^2)$: Freese, Jezek et Nation (1995).
- (c) Si P est un ensemble ordonné de dimension 2, $O(n^2)$: Ma et Spinrad (1991).
- (d) Si P est un ensemble ordonné sans N (respectivement, de largeur bornée), $O(n + m)$: Ma et Spinrad (1991) (respectivement, Habib, Morvan et Rampon (1993)).
- (e) Si P est un treillis : $O(n^2)$, Freese, Jezek et Nation (1995).

N.B. Le premier de ces deux problèmes est celui de la fermeture réflexo-transitive d'un graphe (ici orienté et sans circuits). Les deux problèmes 1. et 2. sont équivalents à celui du calcul du produit de deux matrices d'ordre n , problème pour lequel la borne supérieure en n^3 a été améliorée, mais par des algorithmes non nécessairement implémentables en pratique.

3. Partie commençante $[A]$ engendrée par une partie A de P :

$O(n + m_U)$: Bordat (1985).

4. Calcul d'une extension linéaire de P :

$O(n + m_U)$: Kahn (1962), Knuth (1965), Freese, Jezek et Nation (1995).

N.B. Si $G = (X, U)$ est un graphe orienté a priori quelconque, l'algorithme permet de tester s'il est sans circuits (donc, si la fermeture réflexo-transitive de U est un ordre).

5. Arbre de décomposition de P :

- (a) $O(n^2)$: Müller et Spinrad (1984, 1989), McConnell (1995).
- (b) $O(n + m)$: Cournier et Habib (1994), McConnell et de Montgolfier (2005).

CALCUL DE PARAMÈTRES DE P

6. Étendue $\kappa(P)$ de P :

- (a) $O(n + m_U)$: Freese, Jezek et Nation (1995).
- (b) $O(n^2)$: Möhring (1984).

- (c) Si P est un ensemble ordonné de dimension 2, $O(n \log \log n)$: cf. Spinrad (1985), sous la forme équivalente de la recherche d'une clique de cardinal maximum dans un graphe de permutation (voir l'exercice 6.13).

N.B. L'algorithme (a) permet de calculer la hauteur de tout élément de P et une partition de P en $\alpha(P)$ antichaînes.

7. Largeur $\alpha(P)$ de P :

- (a) $O(n^{\frac{5}{2}})$: via Hopcroft et Karp (1973).
 (b) $O(nm)$: via Nemhauser et Wolsey (1988).
 (c) Si P est un ordre d'intervalles (donné par une représentation par intervalles), $O(n^2)$: Schröder (2002).
 (d) Si P est un ensemble ordonné de dimension 2, $O(n \log \log n)$: cf. Spinrad (1985), sous la forme équivalente de la recherche d'une partie stable de cardinal maximum dans un graphe de permutation (voir l'exercice 6.13).

N.B. 1. L'algorithme (a) (respectivement, (b)) associe d'abord à l'ensemble ordonné le graphe biparti adéquat (voir en page 128 et l'exercice 4.5), puis utilise l'algorithme de couplage maximum dans un graphe biparti de Hopcroft et Karp (respectivement, de Nemhauser et Wolsey).

2. Des modifications de l'algorithme (a) précédent permettent, avec une complexité $O(kn^2)$, de décider si $\alpha(P) \leq k$ (avec k un entier) et, dans ce cas, d'obtenir une antichaîne maximum ou une partition de P en $\alpha(P)$ chaînes : Felsner, Raghavan et Spinrad (2003) – cf. aussi Gavril (1987).

3. Un algorithme dû à Bogart et Magagnosc permet de trouver $\alpha(P)$ et une partition de P en $\alpha(P)$ chaînes en $O(n^3)$ (cf. Freese, Jezek et Nation, 1995).

PROBLÈMES DE RECONNAISSANCE

Dans ces problèmes, la question est : P est-il un ensemble ordonné du type écrit ci-dessous ?

8. Ensemble ordonné série-parallèle :

- (a) $O(n^3)$: Möhring (1989).
 (b) $O(n + m_U)$: Valdes, Tarjan et Lawler (1982).

N.B. Ces algorithmes fournissent l'arbre de décomposition de P et, pour (b), l'ordre et la relation de couverture de P .

9. Ensemble ordonné sans N :

$O(n + m_{\prec})$: Valdes, Tarjan et Lawler (1978), Syslo (1982), Habib et Jegou (1985) – cf. Möhring (1989).

N.B. L'algorithme de Habib et Jegou donne l'arbre de décomposition de P .

10. Ensemble ordonné d'intervalles :

- (a) $O(n + m)$: Papadimitriou et Yannakakis (1979).
 (b) $O(n + m_U)$: Baldy et Morvan (1993).

N.B. Ces algorithmes fournissent une représentation de P par intervalles.

11. Ensemble quasi-fortement ordonné :

$O(n + m_U)$: Mitas (1994).

N.B. L'algorithme fournit une représentation de P par intervalles unitaires.

12. Ensemble ordonné de dimension 2 :

(a) $O(n^2)$: Spinrad et Valdes (1983), Spinrad (1985), Ma et Spinrad (1991).

(b) $O(n + m_U)$: McConnell et Spinrad (1999).

N.B. Les deux premiers algorithmes ont pour entrée la relation d'ordre de P , tandis que le troisième a pour entrée une sous-relation de l'ordre contenant la relation de couverture de P , et le quatrième un graphe de comparabilité $G = (X, U)$. Ces algorithmes produisent deux ordres totaux formant une base de P .

13. Ensemble ordonné de largeur au plus k :

$O(kn^2)$: Gavril (1987), Felsner, Raghavan et Spinrad (2003).

14. Ensemble ordonné de diamètre de décomposition au plus k :

$O(n^2)$: Muller et Spinrad (1984).

15. Ensemble ordonné rangé :

$O(n + m_U)$.

16. Ensemble ordonné semi-modulaire :

(a) $O(n^3)$, $O(n(n + m_U))$: Bordat (1985).

(b) Si P est un demi-treillis, $O(n^2)$: Bordat (1985).

N.B. La complexité du premier algorithme peut être abaissée à celle du produit de deux matrices d'ordre n .

17. Demi-treillis :

(a) $O(n^{\frac{5}{2}})$, $O(n + m_U)$: Goralcik, Goralcikova, Koubek et Rodl (1981), Freese, Jezek et Nation (1995).

(b) $O(n(n + m_U))$: Bordat (1985).

N.B. L'algorithme de (a) a pour entrée la table d'une opération binaire sur X ou un graphe sans circuit. L'algorithme de (b) a pour entrée un graphe sans circuit.

18. Treillis : $O(n^{\frac{5}{2}})$: Goralcik, Goralcikova, Koubek et Rodl (1981), Freese, Jezek et Nation (1995).

N.B. L'algorithme a pour entrée une relation quelconque et permet, si celle-ci est l'ordre d'un treillis, d'obtenir les tables de ses opérations supremum et infimum, ainsi que sa relation de couverture.

19. Treillis distributif :

(a) $O(n^2)$: Bordat (1985).

(b) $O(n + m_{\prec})$: Bordat (1985).

N.B. 1. L'algorithme de (a) a pour entrée un graphe orienté dont la fermeture transitive est un treillis, celui de (b) le graphe de couverture d'un treillis.

2. L'arborescence couvrante (« ideal tree ») associée à une extension linéaire de l'ensemble ordonné I_T d'un treillis distributif T (cf. la page 160) s'obtient en $O(n + m_{\prec})$ à partir de la relation de couverture du treillis et permet inversement et avec la même complexité d'obtenir cette relation ; en

utilisant une telle arborescence, on peut calculer la fermeture transitive de la relation \prec et les opérations supremum et infimum de T en $O(|I_T|)$ (Habib et Nourine (1996), Habib, Médina, Nourine et Steiner (2001)).

Le dernier problème de reconnaissance que nous considérons porte, non sur un ensemble ordonné, mais sur un graphe non orienté :

20. Reconnaissance d'un graphe de comparabilité :

$O(\Delta(G))$, où $\Delta(G)$ est le degré maximum d'un sommet du graphe non orienté G , Golumbic (1977) – cf. Möhring (1984).

N.B. L'orientation transitive d'un graphe de comparabilité se fait en $O(n^2)$ ou $O(m \log n)$ si l'entrée est l'arbre de décomposition du graphe de comparabilité (Spinrad 1985, 1994) et en $O(n + m_U)$ si l'entrée est ce graphe $G = (X, U)$ (McConnell et Spinrad, 1999).

A.2.2 Problèmes difficiles (algorithmes exponentiels)

Il s'agit de problèmes \mathcal{NP} -complets, \mathcal{NP} -difficiles, $\#\mathcal{P}$ -complets, $\#\mathcal{P}$ -difficiles, problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithmes polynomiaux. Nous mentionnerons également dans cette section des problèmes d'énumération, non difficiles aux sens précédents, mais pour lesquels la taille de la réponse n'est pas bornée par une fonction polynomiale de la taille de la donnée (par exemple, rechercher tous les éléments du treillis de Galois d'une relation).

Les problèmes de décision suivants sont \mathcal{NP} -complets :

Entrée : un graphe non orienté G .

Question : existe-t-il un ensemble ordonné P tel que $G = \text{Vois}(P)$?

Nesetril et Rödl (1987), Brighthwell (1993).

N.B. Reste \mathcal{NP} -complet pour un graphe 4-coloriable (Brighthwell, 1993).

Entrée : un ensemble ordonné P et un entier $k \geq 3$.

Question : a-t-on $\dim P \leq k$?

Yannakakis (1982).

N.B. Reste \mathcal{NP} -complet pour un ensemble ordonné sans N , Kierstead et Penrice (1989).

Entrée : un ensemble ordonné P biparti.

Question : a-t-on $\dim P \leq 4$?

Yannakakis (1982).

Entrée : un ensemble ordonné P et un entier k .

Question : a-t-on $\dim_2 P \leq k$?

Stahl et Wille (1984), Habib, Nourine, Raynaud et Thierry (2004).

N.B. On a montré (proposition 6.7) que $\dim_2 P \geq \lambda(P) (= \kappa(P) - 1)$. Le problème de reconnaître si $\dim_2 P = \lambda(P)$ est \mathcal{NP} -complet (Habib, Nourine, Raynaud et Thierry, 1999). On trouve une étude d'heuristiques de calcul de la 2-dimension dans Caseau, Habib, Nourine et Raynaud (1999).

Entrée : un ensemble ordonné P .

Question : a-t-on $s(P) = \alpha(P) - 1$?

Bouchitté et Habib (1987).

N.B. Par définition, cette question revient à reconnaître si P est un ensemble ordonné de Dilworth.

Les problèmes d'optimisation suivants sont \mathcal{NP} -difficiles :

Entrée : un ensemble ordonné P .

Sortie : une extension linéaire L de P minimisant le nombre de sauts ($s(L) = s(P)$).

Pulleyblank (1981, non publié), Bouchitté et Habib (1987).

N.B. Le calcul de $s(P)$ reste \mathcal{NP} -difficile pour les ensembles ordonnés bipartis (Pulleyblank, 1981) ou d'intervalles (Mitas, 1991).

Entrée : un ensemble ordonné P de cardinal n et deux n -uplets $(t_1, t_2, \dots, t_n), (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sortie : une extension linéaire de P minimisant le délai moyen pondéré.

Lawler (1978).

N.B. Le problème reste \mathcal{NP} -difficile sur les ensembles ordonnés sans N , même si tous les t_i (ou tous les p_i) sont égaux (Habib et Möhring, 1987). Pour des algorithmes d'approximation, voir Woeginger (2001).

Entrée : un profil $\pi = (L_1, \dots, L_i, \dots, L_n)$ d'ordres totaux.

Sortie : un ordre médian de π .

Voir Hudry (2004) et, pour des algorithmes d'approximation, Hudry (1997).

Les problèmes suivants de dénombrement sont $\#\mathcal{P}$ -complets :

Entrée : un ensemble ordonné P .

Sortie : le nombre $|\mathcal{C}(P)|$ des parties commençantes de P (soit aussi le nombre de ses antichaînes).

Provan et Ball (1983).

N.B. *Énumération de $\mathcal{C}(P)$:*

(a) $O(n|\mathcal{C}(P)|)$: Steiner (1986), Pruesse et Ruskey (1993).

(b) $O(\log n |\mathcal{C}(P)|)$: Squire (1995).

(c) $O(\alpha(P)|\mathcal{C}(P)|)$: Bordat (1991).

(d) $O(\Delta(P)|\mathcal{C}(P)|)$ (où $\Delta(P)$ est le nombre maximum d'éléments couverts par un élément de P) : Habib, Medina, Nourine et Steiner (2001) – cf. aussi Habib, Nourine et Steiner (1997).

(e) Si P est un ensemble ordonné d'intervalles, $O(|\mathcal{C}(P)|)$ (avec un algorithme « sans boucles » et du type code de Gray) : Habib, Nourine et Steiner (1997).

Relation de couverture de $\mathcal{C}(P)$:

(a) $O(\alpha(P)|\mathcal{C}(P)|)$: Bordat (1991).

(b) $O(n + m)$ (avec pour entrée l'arborescence couvrante de $\mathcal{C}(P)$, cf. la page 160) : Habib, Médina, Nourine et Steiner (2001).

Entrée : un ensemble ordonné P .

Sortie : le nombre $|\mathcal{L}(P)|$ d'extensions linéaires de P .

Brightwell et Winkler (1991).

N.B. *Énumération de $\mathcal{L}(P)$:*

(a) $O(|\mathcal{L}(P)|)$: Pruesse et Ruskey (1994).

(b) Korsh et LaFollette (2002, avec un algorithme « sans boucles »).

(c) Pour des algorithmes d'approximation, cf. Brightwell et Winkler (1991).

(d) Pour un algorithme d'énumération de toutes les extensions d'un ensemble ordonné, cf. Corrêa et Szwarcfiter (2005).

Entrée : (E', E, R) , où $R \subseteq E' \times E$ est une relation binaire de E' vers E .

Sortie : $|Gal(E', E, R)|$.

Kuznetsov (2001).

N.B. En particulier il est $\#\mathcal{P}$ -complet de calculer le nombre d'éléments d'un treillis donné par sa table. Il existe de nombreux algorithmes pour énumérer les fermés du treillis de Galois et/ou déterminer sa relation de couverture (cf. par exemple Kuznetsov et Obiedkov (2001) où les performances de dix algorithmes sont comparées, Nourine et Raynaud (2002) ou Gely, 2005).

Entrée : (E', E, R) , où $R \subseteq E' \times E$ est une relation binaire de E' vers E .

Sortie : le nombre $|C_{\mathcal{F}}|$ de parties critiques de la famille de Moore \mathcal{F} sur E associée à R .

Kuznetsov (2004).

A.2.3 Problèmes difficiles et classes particulières d'ordres

Le tableau ci-dessous croise un certain nombre de classes d'ordres facilement reconnaissables et de problèmes difficiles en général (ou de statut inconnu comme le problème de l'isomorphisme), mais qui peuvent devenir polynomiaux pour ces classes. La case correspondante du tableau est alors libellée « \mathcal{P} » (pour polynomial) ou contient la complexité d'un algorithme polynomial. Les cases remplies par « ? » sont celles pour lesquelles on sait que la réponse est actuellement inconnue, tandis que les cases vides sont celles sur lesquelles on ne possède aucune information. Les problèmes « nombre de sauts » et « délai moyen pondéré » (troisième et quatrième colonnes) sont les deux problèmes d'ordonnement à une machine présentés à la section 7.5.1.

Pour chacune des classes d'ordres du tableau, nous donnons ci-dessous, dans l'ordre des problèmes figurant en colonnes, les références des résultats de complexité donnés dans les cases du tableau.

1. Ordre série-parallèle :

- Isomorphisme : Lawler (1976), Valdes, Tarjan et Lawler (1982).
- Dimension (elle est égale à 2) : Valdes, Tarjan et Lawler (1982).
- Nombre de sauts : Cogis et Habib (1979).
- Délai moyen pondéré : Lawler (1978).
- Nombres de parties commençantes et d'extensions linéaires : ils s'obtiennent par des formules utilisant l'arbre de décomposition de P , Faigle, Lovász, Schrader et Turán (1986), Faigle et Schrader (1986).

2. Ordre sans N :

- Isomorphisme : Habib et Möhring (1987).
- Dimension : Kierstead et Penrice (1989).

ORDRE	Isomorphisme	$Dim_{\mathcal{P}}$	Nombre de sauts
série-parallèle	\mathcal{P}	\mathcal{P}	\mathcal{P}
sans N	isomorphisme complet ^a	\mathcal{NP}	\mathcal{P}
de dimension 2	$O(n^2)$	\times	?
d'intervalles	\mathcal{P}	?	\mathcal{NP}
quasi-fort	\mathcal{P}	\mathcal{P}	\mathcal{P}
fort	\mathcal{P}	\mathcal{P}	\mathcal{P}
de largeur au plus k	?	?	$O(n^k)$
de diamètre de décomposition au plus k	$O(n^2 k^2 k!)$	$O(n^2 k!)$	$O((2k)!n^2)$

^aUn problème est *isomorphisme complet* s'il est au moins aussi difficile que le problème de l'isomorphisme de graphes.

ORDRE	Délai moyen pondéré	$ C(P) $	$ L(P) $
série-parallèle	$O(n \log n)$	\mathcal{P}	\mathcal{P}
sans N	\mathcal{NP}	?	?
de dimension 2	?	\mathcal{P}	?
d'intervalles	?	\mathcal{P}	?
quasi-fort		\mathcal{P}	?
fort	\mathcal{P}	\mathcal{P}	\mathcal{P}
de largeur au plus k		$O(n^{2k+1})$	$O(n^{k+1})$
de diamètre de décomposition au plus k	$O(n^{k^2})$	\mathcal{P}	$O(n^{k^2})$

TABLEAU A.1. Classes d'ordres et complexités de problèmes.

- Nombre de sauts : Rival (1983, algorithme « glouton » de construction d'une extension linéaire optimale), Faigle, Gierz et Schrader (1985), Bouchitté et Habib (1989).
- Délai moyen pondéré : Habib et Möhring (1987).

3. Ordre de dimension 2 :

- Isomorphisme : Spinrad et Valdes (1983).
- Nombre de parties commençantes : Steiner (1984).

N.B. Suite à un résultat de Ceroi (2003) montrant qu'une version pondérée du problème du nombre de sauts sur un ensemble ordonné de dimension 2 est \mathcal{NP} -complète, on peut conjecturer que la version non pondérée l'est également.

4. Ordre d'intervalles :

- Isomorphisme : Lueker et Booth (1979).
- Nombre de sauts : Mitas (1991) ; pour des algorithmes d'approximation, voir Faigle et Schrader (1985) et Felsner (1990).
- Nombre de parties commençantes : il s'obtient par des formules de récurrence, Faigle, Lovász, Schrader et Turán (1986).

5. Ordre quasi-fort :

- Nombre de sauts : Arnim et de la Higuera (1994).
- Nombre de parties commençantes : Faigle et Schrader (1986).

6. Ordre fort :

- Folklore

7. Ordre de largeur au plus k :

- Reconnaissance : Felsner, Raghavan et Spinrad (2003).
- Nombre de sauts : Colbourn et Pulleyblank (1985).
- Nombre de parties commençantes : Faigle et Schrader (1986).
- Nombre d'extensions linéaires : Steiner (1987).

8. Ordre de diamètre de décomposition au plus k :

- Isomorphisme : Habib et Möhring (1987).
- Dimension : Habib et Möhring (1987), Möhring (1989).
- Nombre de sauts : Habib et Möhring (1987), Möhring (1989).
- Délai moyen pondéré : Möhring et Radermacher (1985).
- Nombre de parties commençantes : Faigle et Schrader (1986).
- Nombre d'extensions linéaires : Habib et Möhring (1987).

B

Les 58 types d'ordres connexes à au plus 5 éléments

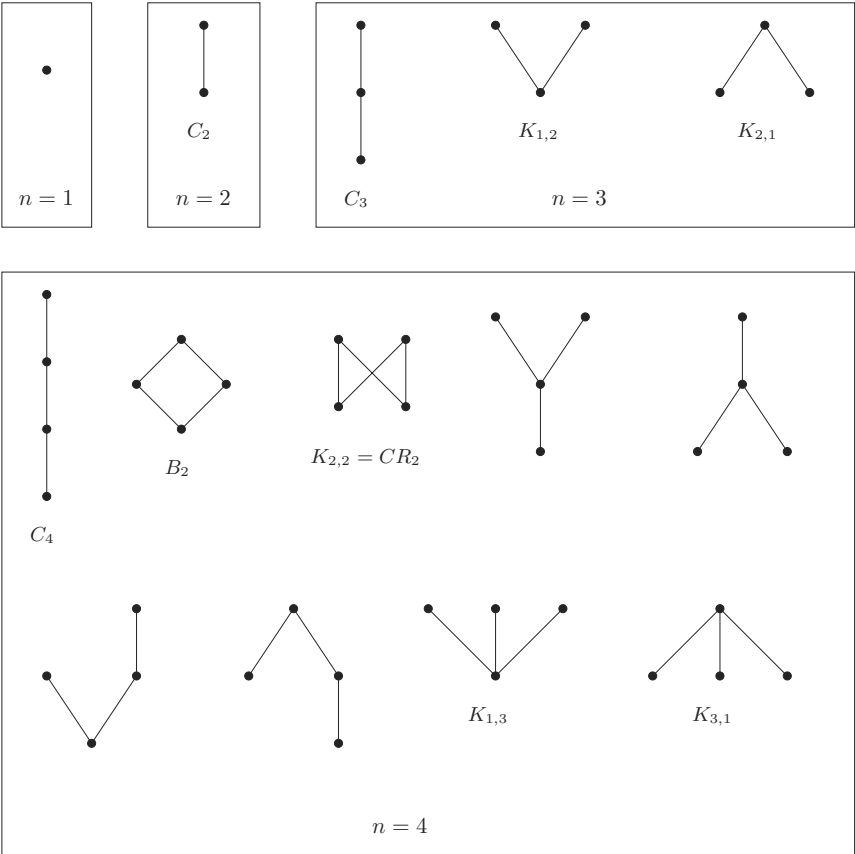


FIG. B.1. Les 14 types d'ordres connexes à au plus 4 éléments

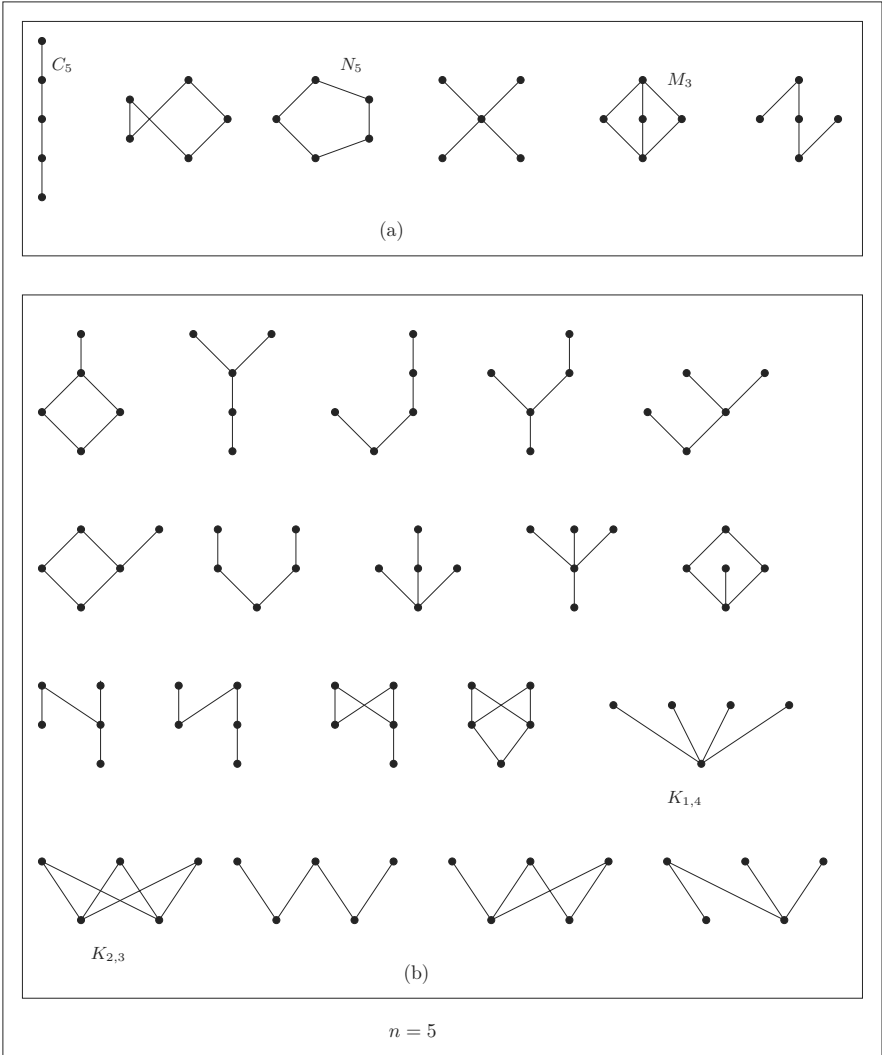


FIG. B.2. Les 44 types d'ordres connexes à 5 éléments

La figure B.2 donne les diagrammes des 44 types d'ordres connexes à 5 éléments. L'encadré (a) représente ceux qui sont auto-duaux et l'encadré (b) donne les autres (sans représenter la dualité ; le lecteur retournera le livre pour voir apparaître les types d'ordres duaux de ceux représentés dans ce second encadré).

C

Nombres d'ordres et de types d'ordres

n	Ordres	Ordres connexes
1	1	1
2	3	2
3	19	12
4	219	146
5	4231	3060
6	130 023	101 642
7	6 129 859	5 106 612
8	431 723 379	377 403 266
9	44 511 042 511	40 299 722 580
10	6 611 065 248 783	6 138 497 261 882
11	1 396 281 677 105 899	1 320 327 172 853 172
12	414 864 951 055 853 499	397 571 105 288 091 506
13	171 850 728 381 587 059 351	166 330 355 795 371 103 700
14	98 484 324 257 128 207 032 183	96 036 130 723 851 671 469 482
15	77 567 171 020 440 688 353 049 939	76 070 282 980 382 554 147 600 692
16	83 480 529 785 490 157 813 844 256 579	82 226 869 197 428 315 925 408 327 266
17	122 152 541 250 295 322 862 941 281 269 151	120 722 306 604 121 583 767 045 993 825 620
18	241 939 392 597 201 176 602 897 820 148 085 023	239 727 397 782 668 638 856 762 574 296 226 842

TABLEAU C.1. Nombres d'ordres et d'ordres connexes sur un ensemble à $n \leq 18$ éléments (cf. Brinkmann et McKay [80], 2002).

n	Types d'ordres	Types d'ordres connexes
1	1	1
2	2	1
3	5	3
4	16	10
5	63	44
6	318	238
7	2 045	1 650
8	16 999	14 512
9	183 231	163 341
10	2 567 284	2 360 719
11	46 749 427	43 944 974
12	1 104 891 746	1 055 019 099
13	33 823 827 452	32 664 984 238
14	1 338 193 159 771	1 303 143 553 205
15	68 275 077 901 156	66 900 392 672 168
16	4 483 130 665 195 087	4 413 439 778 321 689

TABLEAU C.2. Nombres de types d'ordres et de types d'ordres connexes sur un ensemble à $n \leq 16$ éléments (cf. Brinkmann et McKay [80], 2002).

N.B. Le nombre 2 567 284 de types d'ordres sur un ensemble ordonné à 10 éléments provient de Culberson et Rawlins [108] (1991).

BORNES POUR LE NOMBRE $|\mathcal{O}_n|$ DES ORDRES SUR UN ENSEMBLE À n ÉLÉMENTS

$$\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{3}n - 3\log_2 n \leq \log_2 |\mathcal{O}_n| \leq \frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{2}n + c\log_2 n,$$

où c est une constante (cf. Kleitman et Rotschild [249], 1975).

D

Repères documentaires

Comme nous l'avons déjà signalé, l'étude des ensembles ordonnés a pendant longtemps été presque exclusivement consacrée à celle des treillis. Les choses ont changé à partir des années soixante-dix et des centaines d'articles ont porté depuis sur d'autres ensembles ordonnés, notamment finis. Il faudrait donc plusieurs copieux manuels pour pouvoir décrire ne serait-ce que les principaux résultats obtenus dans ce domaine (à titre de comparaison, le « Handbook » sur les algèbres de Boole publié par Elsevier en 3 volumes a 1440 pages). Cependant, en ce qui concerne les ouvrages, la situation a peu évolué. Alors qu'il existe des dizaines d'ouvrages sur la théorie des treillis, il n'y en a encore que fort peu consacrés aux ensembles ordonnés et ils portent généralement sur des aspects particuliers. C'est pourquoi nous avons évoqué dans la dernière section de chaque chapitre un certain nombre de notions et de résultats importants en renvoyant aux (nombreuses) références permettant d'en savoir plus. Nous donnons ci-dessous quelques repères pour s'orienter dans ces références et plus généralement dans les ressources documentaires du domaine.

D.1 Internet et l'incontournable Google

Si vous demandez à ce moteur de recherche, par exemple, « dimension ordre partiel » avec les réponses limitées au français, vous obtenez 58.000 références, mais, sur les 50 premières, seules 5 sont réellement appropriées. Par contre, si vous demandez « partial order dimension » vous obtenez 2.010.000 références, dont au moins 40 des 50 premières sont pertinentes. Il est clair que Google peut donc être très efficace si les questions sont bien posées (en sachant toutefois que des références importantes mais anciennes peuvent ne pas s'y trouver).

Il existe en outre des sites généralistes sur lesquels on trouve un certain nombre de définitions et de résultats (sur les ensembles ordonnés) :

[http://en.wikipedia.org/wiki/Ordered set](http://en.wikipedia.org/wiki/Ordered_set),

<http://mathworld.wolfram.com/PartialOrder.html>

D.2 Livres

Il s'agit ici de livres sur les ensembles ordonnés ne portant pas principalement sur la théorie des treillis. On trouve en français :

1. N. Bourbaki (1956) *Éléments de Mathématiques – Livre I – Théorie des ensembles*, chapitre 3, Ensembles ordonnés. N. Hermann & Cie, Editeurs, Paris.

Certes, le style particulier de Bourbaki ne permet pas de recommander ce chapitre comme texte d'initiation, mais on notera qu'à l'époque, il contenait, avec ses exercices, l'essentiel de ce que l'on savait sur les ensembles ordonnés quelconques. D'autre part, il a eu le mérite d'introduire pour les notions de base une terminologie devenue pratiquement standard chez les auteurs francophones (ce qui contraste heureusement avec la confusion qu'on trouve en anglais).

2. M. Barbut et B. Monjardet (1970) *Ordre et Classification, Algèbre et Combinatoire*, tomes I et II, Hachette, Paris.

Cet ouvrage (depuis longtemps épuisé, mais qu'on peut trouver dans les bonnes bibliothèques) est orienté vers les applications des structures ordinales aux sciences humaines. Les treillis y occupent toutefois une place non négligeable. Il en est de même dans les chapitres sur les ensembles ordonnés qu'on peut trouver dans des ouvrages sur les mathématiques de l'informatique, tels que :

3. M. Marchand (1992), *Mathématique discrète ; outil pour l'informaticien*, De Boeck Université, Bruxelles.
4. J. Velu (1987), *Méthodes mathématiques pour l'informatique*, Dunod, Paris (2ème édition 1994).
5. N.H. Xuong (1992), *Mathématiques discrètes et informatique*, Masson, Paris.

En anglais, on trouve essentiellement des ouvrages consacrés à un domaine précis :

6. P.C. Fishburn (1985), *Interval orders and interval graphs. A study of partially ordered sets*, Wiley, New York.
7. W.T. Trotter (1992), *Combinatorics and partially ordered sets : dimension theory*, The John Hopkins University Press, Baltimore.
8. M. Pirlot, Ph. Vincke (1997), *Semiorders. Properties, representations, applications*, Kluwer, Dordrecht.
9. K. Engel (1997), *Sperner theory, encyclopedia of mathematics and its applications 65*, Cambridge University Press, Cambridge (UK).
10. B.A. Davey et H.A. Priestley (1990), *Introduction to lattices and order*, Cambridge University Press, Cambridge (UK).

En effet, malgré son titre, l'excellente introduction de Davey et Priestley porte essentiellement sur les treillis. Toutefois la parution récente des deux ouvrages ci-dessous fait penser qu'une évolution est en cours. Le second de ces ouvrages porte essentiellement sur les ensembles ordonnés infinis et le premier leur consacre une part importante (les principaux types d'ordres infinis sont aussi présentés dans le chapitre 2 de Barbut et Monjardet [33], 1970) :

11. B.S.W. Schröder (2002), *Ordered sets. An introduction*, Birkhäuser, Boston.
12. E. Harzheim (2005), *Ordered sets, series : advances in mathematics*, Vol.7, Springer, New York.

D.3 Journaux

Pendant longtemps, les articles sur les ensembles ordonnés sont parus dans des journaux mathématiques très variés. C'est toujours le cas mais, en 1984, Ivan Rival (auteur ou co-auteur à cette date-là de plus de soixante papiers dans le domaine) lançait la publication chez D. Reidel du journal spécialisé *Order*.

Celui-ci (édité maintenant par Springer) est donc devenu un lieu privilégié pour publier d'excellents papiers sur les ensembles ordonnés. Après Rival, l'« editor » actuel est maintenant W.T. Trotter (<http://www.math.gatech.edu/trotter>).

La liste des articles publiés depuis le volume 1 se trouve sur le site du journal : http://www.springerlink.com/app/home/journal.asp?wasp=0d2c92dcfe314_a4b8b7e75e66f36f12f&referrer=parent&backto=linkingpublicationresults,1:100324,1.

On n'oubliera pas les deux journaux de « reviews » ayant pour ambition de donner pour tout article publié en mathématiques un bref commentaire (parfois limité à un résumé) :

1. *Mathematical Review*, publiée par l'American Mathematical Society, et qui présente les papiers suivant une classification dont la dernière mouture remonte à 2000 (on la trouve sur le site <http://www.ams.org/msc/>).
2. *Zentralblatt Mathematik* (<http://www.emis.de/ZMATH/>).

D.4 Textes de synthèse et comptes-rendus de conférences

Ivan Rival (décédé en 2002) voulait non seulement publier dans *Order* les recherches de pointe, mais aussi encourager la diffusion des résultats et la communication entre les chercheurs et leurs thèmes d'études. A cet effet, il fut l'initiateur de plusieurs conférences consacrées en majeure partie à des exposés de synthèse demandés à un ou deux spécialistes (ces conférences comportaient aussi des séances de questions ouvertes). Ces exposés furent ensuite publiés dans les recueils suivants :

1. Ordered sets. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held in Banff, Alta., August 28–September 12, 1981. I. Rival (ed.). NATO ASI Series C 83. D. Reidel Publishing, Dordrecht, Boston, MA, 1982. xviii+966 pp.
2. Graphs and order. The role of graphs in the theory of ordered sets and its applications. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held in Banff, Alta., May 18–31, 1984. I. Rival (ed.), NATO ASI Series, 147. D. Reidel Publishing, Dordrecht, Boston, MA, 1985. xix+796 pp.
3. Combinatorics and ordered sets. Proceedings of the AMS-IMS-SIAM joint summer research conference held at Humboldt State University, Arcata, CA, August 11–17, 1985. I. Rival (ed.). Contemporary Mathematics, 57. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986. xvi+285 pp.
4. Algorithms and order. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held in Ottawa, Ontario, June 1–12, 1987. I. Rival (ed.). Kluwer Academic, Dordrecht, Boston, MA, 1989. x+498 pp.

Il faut ajouter les comptes-rendus d'autres conférences qui peuvent aussi comporter des textes de synthèse :

5. Orders : Descriptions and Roles, M. Pouzet et D. Richard (eds.) *Annals of Discrete Mathematics* 23, 1984. North-Holland.
6. Orders, Algorithms and Applications, International Workshop ORDAL'94, Lyon, France, July 4-8, 1994. Proceedings Series : Lecture Notes in Computer Science, Vol. 831, Bouchitté, V.; Morvan, M. (eds.) 1994. IX, 204 pp.
7. Orders, Algorithms and Applications, International Workshop ORDAL'96, Ottawa, ON, Canada, Aout 5-9, 1996. *Theoretical Computer Science*, 217 (2), I. Rival, N. Zaguia (eds.) 1999, Elsevier Science Publishers, B.V., Amsterdam, 1999. pp. i–iv and 173-436.

On peut également ajouter à cette liste des textes de synthèse portant exclusivement sur les ensembles ordonnés finis :

8. C. Greene et D. Kleitman (1978), Proof techniques in the theory of finite sets, in *Studies in Combinatorics*, G.-C.Rota (ed.), Mathematical Association of America, 22–79.
9. D.B. West (1985), Parameters of partial orders and graphs : packing, covering and representation, in *Graphs and orders* (I. Rival ed.), D. Reidel, Dordrecht, 267-350.
10. W.T. Trotter (1995), Chapter 8, Partially ordered sets, in *Handbook of Combinatorics*, R.L. Graham, M. Grötschell, L. Lovasz (eds.), Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 433–480.

Ainsi que les chapitres portant sur les ensembles ordonnés des ouvrages suivants :

11. R.P. Stanley (1986), *Enumerative combinatorics*, Vol. 1, Wadsworth and Brooks, Monterey.

12. D. Stanton et D. White (1986), *Constructive Combinatorics*, Springer, New York.

D.5 Logiciels

Un logiciel appelé « the posets package » et contenant 33 programmes écrits en MAPLE est développé par John Stembridge (<http://www.math.lsa.umich.edu/jrs/maple.html>). Parmi les procédures disponibles pour un ensemble ordonné on trouve la recherche de sa relation de couverture, de chaînes ou d'antichaînes, la détermination de ses extensions linéaires ou de son treillis des idéaux, des tests de reconnaissance de certaines propriétés (existence d'un rang, reconnaissance d'une structure latticielle). On trouve aussi un test d'isomorphisme de deux ensembles ordonnés et une bibliothèque des 19.449 types d'ensembles ordonnés à au plus 8 éléments, ainsi que des 7.372 types de treillis à au plus 10 éléments.

Karell Bertet (kbertet@univ-lr.fr) a incorporé au logiciel libre Graphviz de visualisation des graphes des fonctions de manipulations d'ordre (fermeture/réduction transitive/symétrique,...) et un ensemble de classes Java permettant d'instancier un système implicatif (ensemble de règles d'implications), de tester et d'appliquer certaines propriétés sur ces règles, et de générer le système de fermeture associé. Voir <http://perso.univ-lr.fr/kbertet/dotty.html>.

On peut en outre mentionner le dernier chapitre, intitulé « Computational aspects of lattice theory », du livre *Free lattices* (Freese, Jezek et Nation, 1995). Il contient de nombreux algorithmes, écrits en un langage simple, sur les ordres et les treillis. On y trouve notamment : fermeture transitive, passages entre différentes représentations d'un ordre, extensions linéaires, antichaînes, partitions en chaînes.

Les logiciels de traitement de graphes tels LEDA – « a Library of Efficient Data types and Algorithms » –, <http://www.cs.sunysb.edu/algorithm/implement/LEDA/implement.shtml>, contiennent des algorithmes de fermeture et de réduction transitive.

Enfin, notons que de nombreux logiciels sont développés pour l'utilisation des outils ordinaux dans l'analyse et la fouille des données. On peut, par exemple, citer TOCKIT (<http://tockit.sourceforge.net/>), GALICIA (<http://www.iro.umontreal.ca/Egalicia>) et CONCEPTS (<http://www.st.cs.uni-sb.de/lindig/src/concepts.html>).

Bibliographie

- [1] J.M. Abello (1991) The weak Bruhat order of S_n , consistent sets and Catalan numbers, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 4(1), 1–16.
- [2] R. Agrawal and R. Srikant (1994) Fast algorithms association rules, in: Proceedings of the 20th VLDB Conference, Santiago, Chile, 1–7.
- [3] M. Aigner (1979) *Combinatorial Theory*, Springer, Berlin.
- [4] M. Aigner and R. Wille (eds. 1991) Combinatorics of ordered sets, *Discrete Mathematics*, 88(2–3).
- [5] H. Aït-Kaci, R.S. Boyer, P. Lincoln and R. Nasr (1989) Efficient implementation of lattice operations, *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, 11(1), 115–146.
- [6] M. Aizerman and F.T. Aleskerov (1995) *Theory of Choice*, North-Holland, Elsevier Science B.V., Amsterdam.
- [7] F.T. Aleskerov, D. Bouyssou and B. Monjardet (2007, 2ème éd.) *Utility Maximisation, Choice and Preference*, Studies in Economic Theory, Vol. 16, Springer, Berlin.
- [8] I. Anderson (1987) *Combinatorics of Finite Sets*, Clarendon Press, Oxford, New York.
- [9] P. Arabie (1982) Review of “Group Choice” by B.G. Mirkin, *Psychometrika*, 47, 361–364.
- [10] P. Arabie and S.A. Boorman (1973) Multidimensional scaling of measures of distances between partitions, *Journal of Mathematical Psychology*, 17, 31–63.
- [11] P. Arabie, L.J. Hubert and G. De Soete (eds. 1996) *Clustering and Classification*, World Scientific Publishers, River Edge, NJ.
- [12] J.C. Arditti (1978) Partially ordered sets and their comparability graphs, their dimension and their adjacency, in: *Problèmes combinatoires et théorie des graphes*, Orsay 1976, Colloques internationaux (C.N.R.S.), 260, Editions du C.N.R.S., Paris, 5–8.

- [13] W.W. Armstrong (1974) Dependency structures of database relationships, *Information Processing*, 74, 580–583.
- [14] A. Arnauld and P. Nicole (1662) *La Logique ou L'art de Penser*, Ch. Savreux, Paris.
- [15] A. von Arnim and C. de la Higuera (1994) Computing the jump number on semi-orders is polynomial, *Discrete Applied Mathematics*, 51(1–2), 219–232.
- [16] K.J. Arrow (1951, 1963) *Social Choice and Individual Values*, Wiley, New York.
- [17] M.D. Atkinson (1989) The complexity of orders, in: *Algorithms and Order* (ed. I. Rival), 255, D. Reidel, Kluwer, Dordrecht, 195–230.
- [18] S.P. Avann (1958) Dual symmetry of projective sets in a finite modular lattice, *Transactions of the American Mathematical Society*, 89, 541–558.
- [19] S.P. Avann (1961) Metric ternary distributive semi-lattices, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 12, 407–414.
- [20] S.P. Avann (1961) Application of the join-irreducible excess function to semimodular lattices, *Mathematische Annalen*, 142, 345–354.
- [21] S.P. Avann (1961) Distributive properties in semi-modular lattices, *Mathematische Zeitschrift*, 76, 283–287.
- [22] S.P. Avann (1968) Locally atomic upper locally distributive lattices, *Mathematische Annalen*, 175, 320–336.
- [23] K.A. Baker (1961) Dimension, join-independence, and breadth in partially ordered sets, non publié.
- [24] K.A. Baker, P.C. Fishburn and F.S. Roberts (1972) Partial orders of dimension two, *Networks*, 2, 11–28
- [25] P. Baldy and J. Mitas (1994) Generalized dimension of an ordered set and its MacNeille completion, *Order*, 11(2), 135–148.
- [26] P. Baldy and M. Morvan (1993) A linear time and space algorithm to recognise interval orders, *Discrete Applied Mathematics*, 46, 173–178.
- [27] P. Baldy, M. Morvan and E. Thierry (1999) Extending a partially ordered set: links with its lattice of ideals, *Order* 16(4), 305–312.
- [28] M.O. Ball and J.S. Provan (1983) Calculating bounds on reachability and connectedness in stochastic networks, *Networks*, 13, 235–278.
- [29] B. Banaschewski (1956) Hüllensysteme und Erweiterungen von Quasi-Ordnungen, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 2, 117–130.
- [30] H.J. Bandelt and J.P. Barthélemy (1984) Medians in median graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 8, 131–142.

- [31] M. Barbut (1961) Médiane, distributivité, éloignements, *Publications du Centre de mathématiques sociales*, Paris, et *Mathématiques et Sciences humaines*, 70, 5–31 (1980).
- [32] M. Barbut (1965) Note sur l'algèbre des techniques d'analyse hiérarchique, in : B. Matalon, *L'analyse hiérarchique*, Gauthier-Villars, Paris.
- [33] M. Barbut and B. Monjardet (1970) *Ordre et classification, algèbre et combinatoire*, tomes I et II, Hachette, Paris.
- [34] J.-P. Barthélemy (1982) Arrow's theorem: unusual domains and extended codomains, *Mathematical Social Sciences*, 3, 79–89.
- [35] J.-P. Barthélemy, G. Cohen and A. Lobstein (1992) *Complexité algorithmique et problèmes de communications*, Masson, Paris.
- [36] J.-P. Barthélemy and B. Leclerc (1995) The median procedure for partitions *Partitioning data sets* (eds. I.J. Cox, P. Hansen, et B. Julesz), in: *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 19, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 3–34.
- [37] J.-P. Barthélemy, B. Leclerc and B. Monjardet (1984) Ensembles ordonnés et taxonomie mathématique, in : *Orders : Descriptions and Roles* (eds. M. Pouzet et D. Richard), *Annals of Discrete Mathematics*, 23, North-Holland, Amsterdam, 523–548.
- [38] J.-P. Barthélemy, B. Leclerc and B. Monjardet (1986) On the use of ordered sets in problems of comparison and consensus of classification, *Journal of Classification*, 3, 187–224.
- [39] D. Beauquier, J. Berstel and Ph. Chrétienne (1992) *Éléments d'algorithmique*, Masson, Paris.
- [40] S. Ben Yahia and E. Mephu Nguifo (2004) Approches d'extraction de règles d'association basées sur la correspondance de Galois, *RSTI-ISI* 9(3–4), 23–55.
- [41] C. Berge (1970) *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris.
- [42] J.-C. Bermond (1972) Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux, *Mathématiques et Sciences humaines*, 37, 5–25.
- [43] J.-M. Bernard and C. Charron (1996) L'analyse implicative bayésienne, une méthode pour l'étude des dépendances orientées, tome I : données binaires, *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 134, 5–38.
- [44] J.-M. Bernard and C. Charron (1996) L'Analyse implicative bayésienne, une méthode pour l'étude des dépendances orientées, tome II : modèle logique sur un tableau de contingence, *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 135, 5–18.
- [45] J.-M. Bernard and S. Poitrenaud (1999) L'analyse implicative bayésienne multivariée d'un questionnaire binaire : quasi-implications et

- treillis de Galois simplifié, *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 147, 25–46.
- [46] K. Bertet and N. Caspard (2002) Doubling convex sets in lattices: characterizations and recognition algorithms, *Order*, 19(2), 181–207.
- [47] K. Bertet and B. Monjardet (2005) The multiple facets of the direct implicational basis, preprint, *Cahiers de la MSE*, 2005.52.
- [48] G. Birkhoff (1933) On the combination of subalgebras, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 29, 441–464.
- [49] G. Birkhoff (1937) Ring of sets, *Duke Mathematical Journal*, 3, 443–454.
- [50] G. Birkhoff (1940, 1948, 1967) *Lattice Theory* (3 edns.), American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [51] G. Birkhoff and O. Frink (1948) Representations of lattices by sets, *Transactions of the American Mathematical Society*, 64, 299–316.
- [52] G. Birkhoff and S.A. Kiss (1947) A ternary operation in distributive lattices, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53, 749–752.
- [53] D. Black (1958) *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, London.
- [54] C. Blair (1984) Every finite distributive lattice is a set of stable matchings, *Journal of Combinatorial Theory (A)*, 37, 353–356.
- [55] T.S. Blyth and M.F. Janowitz (1972) *Residuation Theory*, Pergamon Press, Oxford.
- [56] K.P. Bogart, R.H. Möhring and S.P. Ryan (1998) Proper and unit trapezoid orders and graphs, *Order*, 15(3) 325–340.
- [57] K.P. Bogart and W.T. Trotter (1973) Maximal dimensional partially ordered sets, II: characterization of $2n$ -element posets with dimension n , *Discrete Mathematics*, 5, 33–45.
- [58] R. Bonnet and R. Pouzet (1969) Extensions et stratifications d'ensembles dispersés, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, Série I, 1512–1515.
- [59] K.S. Booth and G. S. Lueker (1976) Testing for the consecutive ones property, interval graphs and planarity using PQ -tree algorithms, *Journal of Computer and System Sciences*, 13, 335–379.
- [60] G. Bordalo and B. Monjardet (2002) The lattice of strict completions of a finite lattice, *Algebra Universalis*, 47, 183–200.
- [61] G. Bordalo and B. Monjardet (2003) Finite orders and their minimal strict completions lattices, *Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications*, 23, 85–100.
- [62] J.P. Bordat (1985) Parcours dans les graphes : un outil pour l'algorithmique des ensembles ordonnés, *Discrete Applied Mathematics*, 3, 215–231.

- [63] J.P. Bordat (1986) Calcul pratique du treillis de Galois d'une correspondance, *Mathématiques et Sciences humaines*, 96, 31–47.
- [64] J.P. Bordat (1991) Efficient polynomial algorithms for distributive lattices, *Discrete Applied Mathematics*, 32, 31–50.
- [65] J.P. Bordat (1991) Calcul des idéaux d'un ordonné fini, *Revue de recherche opérationnelle*, 25(3), 265–275.
- [66] A. Bouchet (1971) *Étude combinatoire des ensembles ordonnés finis : applications*, thèse de doctorat d'état, Grenoble.
- [67] A. Bouchet (1984) Codages et dimensions de relations binaires, in: Orders : Descriptions and Roles (eds. M. Pouzet et D. Richard), *Annals of Discrete Mathematics*, 23, 387–396.
- [68] V. Bouchitté and M. Habib (1987) \mathcal{NP} -completeness properties about linear extensions, *Order*, 4, 143–154.
- [69] V. Bouchitté and M. Habib (1989) The calculation of invariants for ordered sets, in: *Algorithms and orders* (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrecht, 231–279.
- [70] V. Bouchitté, M. Habib and R. Jegou (1985) On the greedy dimension of a partial order, *Order*, 1(3), 219–224.
- [71] V. Bouchitté, R. Jegou and J.X. Rampon (1993) Line directionality of orders, *Order*, 10(1), 17–30.
- [72] J.-F. Boulicaut and B. Crémilleux (2004) Extraction de motifs dans les bases de données, *RSTI-ISI*, 9(3–4), 7–21.
- [73] N. Bourbaki (1956) *Éléments de mathématique. Fascicule 20. Livre 1, Théorie des ensembles. Chapitre 3, Ensembles ordonnés ; Cardinaux, nombres entiers* (1968, 2ème édition revue et augmentée), Hermann, Paris.
- [74] D. Bouyssou and B. Roy (1993) *Aide multicritère à la décision : méthodes et cas*, Economica, Paris.
- [75] D. Bouyssou and Ph. Vincke (1997) Ranking alternatives on the basis of preference relations: a progress report with special emphasis on outranking relations, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 6, 77–85.
- [76] D. Bouyssou and Ph. Vincke (1998) Introduction to topics on preference modelling, *Annals of Operations Research*, 80, i–xiv.
- [77] G.R. Brightwell (1993) On the complexity of diagram testing, *Order*, 10(4), 297–303.
- [78] G.R. Brightwell and W.T. Trotter (1993) The order dimension of complex polytopes, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 6(2), 214–229.
- [79] G.R. Brightwell and P. Winkler (1991) Counting linear extensions, *Order*, 8, 225–242.
- [80] G. Brinkmann and B.D. McKay (2002) Posets on up to 16 Points, *Order*, 19(2), 147–179.

- [81] A.D. Campbell (1943) Set-coordinates for lattices, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49, 395–398.
- [82] E.R. Canfield (1978) On a problem of Rota, *Advances in Mathematics*, 29, 1–10.
- [83] E.R. Canfield and S.G. Williamson (1995) A loop-free algorithm for generating the linear extensions of a poset, *Order*, 12(1), 1–18.
- [84] M.J.A. Caritat, Marquis de Condorcet (1785) *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Paris.
- [85] J. Carlier and Ph. Chrétienne (1988) *Problèmes d'ordonnement : modélisation, complexité, algorithmes*, Masson, Paris.
- [86] L. Carlsen (1984) Giving molecules an identity. On the interplay between QSARs and partial order ranking, *Molecules*, 9, 1010–1018.
- [87] Y. Caseau, M. Habib, L. Nourine and O. Raynaud (1999) Encoding of multiple inheritance hierarchies and partial orders, *Computational Intelligence*, 15(1), 50–62.
- [88] N. Caspard (2000) The lattice of permutations is bounded, *International Journal of Algebra and Computation*, 10(4), 481–489.
- [89] N. Caspard, C. Le Conte de Poly-Barbut and M. Morvan (2004) Cayley lattices of finite Coxeter groups are bounded, *Advances in Applied Mathematics*, 33(1), 71–94.
- [90] N. Caspard and B. Monjardet (2003) The lattice of closure systems, closure operators and implicational systems on a finite set: a survey, *Discrete Applied Mathematics*, 127(2), 241–269.
- [91] P. Cegielski (1987) Historique de la théorie élémentaire des ensembles, in : *Fragments d'histoire des mathématiques II*, Brochure de l'APMEP, 65, 161–211.
- [92] S. Ceroi (2003) A weighted version of the jump number problem on two-dimensional orders is \mathcal{NP} -complete, *Order*, 15(1), 1–11.
- [93] J. Chacron (1966) *Les relations de préordre. Les ensembles de parties stables pour l'intersection et la réunion finies ou infinies*, thèse de doctorat, Paris.
- [94] C. Chameni-Nembua (1989) Règle majoritaire et distributivité dans le permutoèdre, *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 108, 5–22.
- [95] I. Charon-Fournier, A. Germa and O. Hudry (1992) Utilisation des scores dans des méthodes exactes déterminant les ordres médians des tournois, *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 119, 53–74.
- [96] I. Charon, A. Germa and O. Hudry (1996) *Méthodes d'optimisation combinatoire*, Masson, Paris.

- [97] J. Chomicki (2003) Preference formulas in relational queries, *ACM Transactions on Database Systems*, 28(4), 427–466.
- [98] M. Chudnovsky, N. Robertson, P.D. Seymour and R. Thomas (2003) Progress on perfect graphs, *Mathematical Programming* (B), 97, 405–422.
- [99] A. Cobham (1964) The intrinsic computational difficulty of functions, in *Proceedings of the 17th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 98–108.
- [100] O. Cogis (1982) Ferrers digraphs and threshold graphs, *Discrete Mathematics*, 38, 33–46.
- [101] O. Cogis (1982) On the Ferrers dimension of a digraph, *Discrete Mathematics*, 38, 47–52.
- [102] O. Cogis and M. Habib (1979) Nombre de sauts et graphes série-parallèles, *RAIRO Informatique théorique*, 13, 3–18.
- [103] C.J. Colbourn and W.R. Pulleyblank (1985) Minimizing setups in ordered sets of fixed width, *Order*, 1(3), 225–229.
- [104] S.A. Cook (1971) The complexity of theorem-proving procedures, *Proceedings of the third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Association for Computing Machinery, New York, 151–158.
- [105] R. Corrêa and J. Szwarcfiter (2005) On extensions, linear extensions, upsets and downsets of ordered sets, *Discrete Mathematics*, 295(1–3), 13–30.
- [106] A. Cournier and M. Habib (1994) A new linear algorithm for modular decomposition, in: *Trees in Algebra and Programming CAAP'94* (ed. S. Tison), *Lecture Notes in Computer Science*, 787, 68–84.
- [107] R. Croisot (1956) Applications résiduées, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 73(3), 453–474.
- [108] J.C. Culberson and G.J.E. Rawlins (1991) New results from an algorithm for counting posets, *Order*, 7, 361–374.
- [109] W.H. Cunningham and J. Edmonds (1980) A combinatorial decomposition theory, *Canadian Journal of Mathematics*, 32, 734–765.
- [110] G.B. Dantzig and A. Hoffman (1956) Dilworth's theorem on partially ordered sets, in: *Linear inequalities and related systems* (eds. H.W. Kuhn et A.W. Tucker), *Annals of Mathematical Study*, 38, Princeton University Press, 207–214.
- [111] B. A. Davey and D. Duffus (1982) Exponentiation and duality, in: *Ordered Sets* (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrech, 43–95.
- [112] B.A. Davey and H.A. Priestley (2001) *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [113] W.H.E. Day and F.R. McMorris (2003) *Axiomatic Consensus Theory in Group Choice and Biomathematics*, SIAM Frontiers in Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania.

- [114] W.H.E. Day and R.S. Wells (1984) Extremes in the complexity of computing metric distances between partitions, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-6, 69–73.
- [115] D.E. Daykin (1977) A lattice is distributive if and only if $|A||B| \leq |A \wedge B||A \vee B|$, *Nanta Mathematica*, 10, 58–60.
- [116] A. Degenne (1972) *Techniques ordinales en analyse des données : statistique*, Hachette, Paris.
- [117] M. Demange and V.Th. Paschos (2005) Complexité et approximation polynomiale, in: *Optimisation combinatoire* (ed. V. Paschos) 2, Hermès Science, Paris, 21–58.
- [118] K. Denecke, M. Ern e and S.L. Wismath (eds., 2004) *Galois Connections and Applications*, Mathematics and its Applications, 565, Kluwer Academic, Dordrecht.
- [119] R.P. Dilworth (1940) Lattices with unique irreducible representations, *Annals of Mathematics*, 41, 771–777.
- [120] R.P. Dilworth (1950) A decomposition theorem for partially ordered sets, *Annals of Mathematics*, 51, 161–165.
- [121] R.P. Dilworth (1960) Some combinatorial problems on partially ordered sets, in: *Combinatorial Analysis, Proc. Symp. Appl. Math.*, American Mathematical Society, Providence, 85–90.
- [122] R.P. Dilworth and C. Greene (1971) A counterexample to the generalization of Sperner’s theorem, *Journal of Combinatorial Theory*, 10, 18–20.
- [123] C.W. Doble, J.P. Doignon, J.C. Falmagne and P.C. Fishburn (2001) Almost connected orders, *Order*, 18, 295–311.
- [124] J.P. Doignon, B. Monjardet, M. Roubens and Ph. Vincke (1986) Biorders families, valued relations and preference modelling, *Journal of Mathematical Psychology*, 30, 435–480.
- [125] F. Domenach and B. Leclerc (2001) Biclosed binary relations and Galois connections, *Order*, 18, 89–104.
- [126] F. Domenach and B. Leclerc (2002) On the roles of Galois connections in classification (eds. M. Schwaiger et O. Opitz), in: *Explanatory Data Analysis in Empirical Research*, Springer, Berlin, 31–40.
- [127] F. Domenach and B. Leclerc (2004) Closure systems, implicational systems, overhanging relations and the case of hierarchical classification, *Mathematical Social Science*, 47(3), 349–364.
- [128] B. Dreesen, W. Poguntke and P. Winkler (1985) Comparability invariance of the fixed point property, *Order*, 2, 269–274.
- [129] J.P. Doignon, A. Ducamp and J.C. Falmagne (1984) On realizable biorders and the biorder dimension of a relation, *Journal of Mathematical Psychology*, 28(1), 73–109.

- [130] A. Ducamp and J.C. Falmagne (1969) Composite measurement, *Journal of Mathematical Psychology*, 6(3), 359–390.
- [131] D. Duffus (1984) Powers of ordered sets, *Order*, 1(1), 83–92.
- [132] D. Duffus and I. Rival (1976) Crowns in dismantable partially ordered Sets, *Colloquium of the János Bolyai Mathematical Society*, 18, 271–292.
- [133] D. Duffus and I. Rival (1981) A structure theory for ordered sets, *Discrete Mathematics*, 35, 53–118.
- [134] I. Düntch and G. Gediga (2003) *Approximation operators in qualitative data analysis*, in: *Theory and Applications of Relational Structures as Knowledge Instruments* (eds. H. de Swart, E. Orłowska, G. Schmidt et M. Roubens), *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Heidelberg, 216–233.
- [135] V. Duquenne (1987) Contextual implications between attributes and some representation properties for finite lattices, in: *Beiträge zur Begriffsanalyse* (eds. B. Ganter et al.), Wissenschaftsverlag, Mannheim, 213–239.
- [136] V. Duquenne (1992) *GLAD (General Lattice Analysis et Design): A Fortran Program for a Glad User*, Maison des Sciences de l’Homme, Paris.
- [137] V. Duquenne (1995) Models of possessions and lattice analysis, *Social Science Information*, 34(2), 253–267.
- [138] V. Duquenne (1996) On lattice approximations, *Social Networks*, 18, 189–199.
- [139] V. Duquenne and A. Cherfouh (1994) On permutation lattices, *Mathematical Social Sciences*, 27(1), 73–89.
- [140] B. Dushnik and E.W. Miller (1941) Partially ordered sets, *American Journal of Mathematics*, 63, 600–610.
- [141] P.H. Edelman and R.E. Jamison (1985) The theory of convex geometries, *Geometriae Dedicata*, 19, 247–270.
- [142] M.H. El Zahar (1989) Enumeration of ordered sets, in: *Algorithms and Orders* (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrecht, 327–352.
- [143] M.H. El-Zahar and J.H. Schmerl (1984) On the size of jump-critical ordered sets, *Order*, 1(1), 3–5.
- [144] K. Engel (1997) *Sperner Theory*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 65, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [145] F. Escalante (1972) Schnittverbände in Graphen, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 38, 199–220.
- [146] K. Ewacha, P.C. Fishburn and W.V. Gehrlein (1990) Linear extension majority cycles in height-1 orders, *Order*, 6(4), 313–318.
- [147] U. Faigle, L. Lovász, R. Schrader and G. Turán (1986) Searching in trees, series-parallel and interval orders, *SIAM Journal on Computing*, 15, 1075–1084.

- [148] U. Faigle and R. Schrader (1985) A setup heuristic for interval orders, *Operations Research Letters*, 4, 185–188.
- [149] U. Faigle and R. Schrader (1986) On the computational complexity of the order polynomial, *Discrete Applied Mathematics*, 15, 261–269.
- [150] J.C. Falmagne (1985) *Elements of Psychophysical Theory*, Oxford University Press, Oxford.
- [151] J.C. Falmagne and J.P. Doignon (1999) *Knowledge Spaces*, Springer, New York.
- [152] J. Feldman-Högaasen (1969) Ordres et permutoèdre, *Mathématiques et sciences humaines*, 28, 27–38.
- [153] S. Felsner (1990) A $3/2$ -approximation algorithm for the jump number of interval orders, *Order*, 6, 325–334.
- [154] S. Felsner, J. Gustedt and M. Morvan (1998) Interval reductions and extensions of orders: bijections to chains in lattices, *Order*, 15(3), 221–246.
- [155] S. Felsner, V. Raghavan and J. Spinrad (2003) Recognition algorithms for orders of small width and graphs of small Dilworth number, *Order*, 20, 351–364.
- [156] S. Fiorini and P.C. Fishburn (2003) Extendability of cyclic orders, *Order*, 20(2), 151–171.
- [157] P.C. Fishburn (1970) Intransitive indifference with unequal indifference intervals, *Journal of Mathematical Psychology*, 7, 144–149.
- [158] P.C. Fishburn (1973) *The Theory of Social Choice*, Princeton University Press, Princeton.
- [159] P.C. Fishburn (1974) On the family of linear extensions of a partial order, *Journal of Combinatorial Theory (B)*, (17), 240–243.
- [160] P.C. Fishburn (1981) Inverted orders for monotone scoring rules, *Discrete Applied Mathematics*, 3, 27–36.
- [161] P.C. Fishburn (1985) *Interval Orders and Interval Graphs. A Study of Partially Ordered Sets*, Wiley, New York.
- [162] P.C. Fishburn (1997) Acyclic sets of linear orders, *Social Choice and Welfare*, 14, 113–124.
- [163] P.C. Fishburn and B. Monjardet (1992) Norbert Wiener on the theory of measurement, 1914, 1915, 1921, *Journal of Mathematical Psychology*, 36, 165–184.
- [164] P.C. Fishburn and J.H. Spencer (1971) Directed graphs as unions of partial orders, *Pacific Journal of Mathematics*, 39, 149–161.
- [165] P.C. Fishburn and W.T. Trotter (1999) Geometric containment orders: a survey, *Order*, 15(2), 167–182.
- [166] C. Flament (1976) *L'analyse booléenne de questionnaires*, Mouton, Paris.

- [167] C. Flament, A. Degenne and P. Vergès (1979) Analyse de similitude ordinale, *Informatique et sciences humaines*, 11, 223–231.
- [168] B. Flath (1993) The order dimension of multinomial lattices, *Order*, 10(3), 201–219.
- [169] L.R. Ford and D.R. Fulkerson (1962) *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton.
- [170] H. de Fraysseix and P. Ossona de Mendez (1997) Planarity and edge poset dimension, *European Journal of Combinatorics*, 17, 731–740.
- [171] R. Freese, K. Jezeq and J.B. Nation (1995) *Free Lattices*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [172] L. Frey and M. Barbut (1970) *Techniques ordinales en analyse des données*, tome I, *Algèbre et combinatoire*, Hachette, Paris.
- [173] D.R. Fulkerson (1956) Note on Dilworth's decomposition for partially ordered sets, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7, 701–702.
- [174] A. Galambos and V. Reiner (2005) Acyclic sets of linear orders via the Bruhat order, à paraître dans *Social Choice and Welfare*.
- [175] D. Gale and L.S. Shapley (1962) College admissions and the stability of marriages, *American Mathematical Monthly*, 69, 9–15.
- [176] T. Gallai (1967) Transitiv orientierbare graphen, *Acta Mathematica Hungarica*, 18, 25–66.
- [177] B. Ganter, K. Rindfrey and M. Skorsky (1986) Software for concept analysis, in: *Classification as a Tool of Research* (eds. W. Gaul et M. Schader), North-Holland, Amsterdam, 161–168.
- [178] B. Ganter and R. Wille (1999) *Formal Concept Analysis, Mathematical Foundations*, Springer, Berlin.
- [179] M.R. Garey and D.S. Johnson (1979) *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of \mathcal{NP} -Completeness*, W.H. Freeman, New York.
- [180] F. Gavril (1987) Algorithms for maximum k -colorings and k -coverings of transitive graphs, *Networks*, 17, 465–470.
- [181] A. Gely (2005) *Autour de l'énumération d'objets combinatoires : cas des cliques maximales, bicliques maximales et base d'implications minimum*, thèse de doctorat, Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand II.
- [182] A. Ghouila Hourii (1962) Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 254, Paris, 1370–1371.
- [183] P.C. Gilmore and A.J. Hoffman (1964) A characterization of comparability graphs and of interval graphs, *Canadian Journal of Mathematics*, 16, 539–548.

- [184] V. Glivenko (1938) *Théorie des Structures*, Gauthier-Villars, Paris.
- [185] M.C. Golumbic (1977) The complexity of comparability graph recognition and coloring, *Computing*, 18, 199–208.
- [186] M.C. Golumbic (1980) *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, New York.
- [187] M. C. Golumbic, D. Rotem and J. Urrutia (1983) Comparability graphs and intersection graphs, *Discrete Mathematics*, 43, 37–46.
- [188] M. Gondran and M. Minoux (1985) *Graphes et Algorithmes*, Eyrolles, Paris.
- [189] P. Goralcik, A. Goralcikova, V. Koubek and V. Rodl (1981) Fast recognition of rings and lattices, in: Proceedings of Fundamental of Computation Theory (ed. F. Gécseg), Springer, New York, *Lecture Notes in Computer Science*, 117, 137–145.
- [190] A. Goralcikova and V. Koubek (1979) A reduct and closure algorithm for graphs, in: *Proceedings of Mathematical Foundations of Computer Science* (MFCS'79), Springer, New York, *Lecture Notes in Computer Science*, 74, 301–307.
- [191] R.L. Graham (1982) Linear extensions of partial orders and the FKG inequality, in: *Ordered Sets* (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrecht, 213–236.
- [192] R.L. Graham, D.E. Knuth and O. Patashnik (1994) *Concrete Mathematics*, Addison Wesley (2nd édition), Reading, MA.
- [193] R. Gras et al. (1996) *L'implication Statistique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- [194] R. Gras, P. Kuntz and H. Briand (2001) Les fondements de l'analyse statistique implicative et quelques prolongements pour la fouille des données, *Mathématiques et Sciences humaines*, 154/155, 9–29.
- [195] G. Grätzer (1978, 1998) *General Lattice Theory*, Birkhäuser-Verlag, Stuttgart et Springer, Berlin.
- [196] G. Grätzer and H. Lakser (1989) Congruence lattices, automorphisms of finite lattices and planarity, *Comptes-Rendus Mathematical Reports Academy of Science, Canada*, 11(4), 137–142.
- [197] G. Grätzer and E.T. Schmidt (1962) On congruence lattices of lattices, *Acta Mathematica Hungarica*, 13, 179–185
- [198] G. Grätzer and E.T. Schmidt (1999) Some combinatorial aspects of congruence lattice representations, *Theoretical Computer Science*, 217(2), 291–300.
- [199] C. Greene and D.J. Kleitman (1976) The structure of Sperner k -families, *Journal of Combinatorial Theory (A)*, 20, 41–68.
- [200] C. Greene and D.J. Kleitman (1978) Proof techniques in the theory of finite sets, in *Studies in Combinatorics* (ed. G.C. Rota), *MAA Studies in Mathematics*, 17, 22–79.

- [201] J.R. Griggs (1988) Problems on chain partitions, *Discrete Mathematics*, 72, 157–162.
- [202] P.A. Grillet (1969) Maximal chains and antichains, *Fundamenta Mathematicae*, 65, 157–67.
- [203] A. Guénoche (1993) Hiérarchies conceptuelles de données binaires, *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 121, 23–34.
- [204] A. Guénoche and B. Monjardet (1987) Méthodes ordinales et combinatoires en analyse des données, *Mathématiques et Sciences humaines*, 100, 5–47.
- [205] J.-L. Guigues and V. Duquenne (1986) Familles minimales d'implications informatives résultant d'un tableau de données binaires, *Mathématiques et Sciences humaines*, 95, 5–18.
- [206] G.Th. Guilbaud and P. Rosenstiehl (1963) Analyse algébrique d'un scrutin, *Mathématiques et Sciences humaines*, 4, 9–33.
- [207] D. Gusfield and R.W. Irving (1989) *The Stable Marriage Problem, Structure and Algorithms*, MIT Press, Cambridge.
- [208] M. Habib (1984) Comparability invariants, *Annals of Discrete Mathematics*, 23, 371–386.
- [209] M. Habib and R. Jegou (1985) N -free posets as generalizations of series-parallel posets, *Discrete Applied Mathematics*, 3, 279–291.
- [210] M. Habib, R. Médina, L. Nourine and G. Steiner (2001) Efficient algorithms on distributive lattices, *Discrete Applied Mathematics*, 110(2–3), 169–187.
- [211] M. Habib and R.H. Möhring (1987) On some complexity properties of N -free posets and posets with bounded decomposition diameter, *Discrete Mathematics*, 63, 157–182.
- [212] M. Habib, M. Morvan, M. Pouzet and J.-X. Rampon (1993) Interval dimension and MacNeille completion, *Order*, 10(2), 147–151.
- [213] M. Habib, M. Morvan and J.-X. Rampon (1993) On the calculation of transitive reduction-closure of orders, *Discrete Mathematics*, 111(1–3), 289–303.
- [214] M. Habib and L. Nourine (1996) Tree structure for distributive lattices and applications, *Theoretical Computer Science*, 65(2), 391–405.
- [215] M. Habib, L. Nourine, O. Raynaud and E. Thierry (2004) Computational aspects of the 2-dimension of partially ordered sets, *Theoretical Computer Science*, 312(2–3), 401–431.
- [216] M. Habib, L. Nourine and G. Steiner (1997) Gray codes for the ideals of interval orders, *Journal of Algorithms*, 25(1), 52–66.
- [217] P. Hall (1934) On representations of subsets, *Journal of London Mathematical Society*, 10, 26–30.

- [218] P.L. Hammer and S. Rudeanu (1968) *Boolean Methods in Operations Research and Related Areas*, Springer, Berlin.
- [219] F. Hausdorff (1914) *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig. Et dans ses oeuvres complètes: *Gesammelte Werke, II*, Springer, Berlin (2002).
- [220] D. Higgs (1986) Lattices of crosscuts, *Algebra Universalis*, 23, 10–18.
- [221] A.P. Hillman (1955) On the number of realizations of a Hasse diagram by finite sets, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 6, 542–548.
- [222] J. Hipp, U. Güntzer and G. Nakhaeizadeh (2000) Algorithms for association rule mining – a general survey and comparison, *SIGKDD Explorations*, 2(1), 58–64.
- [223] T. Hiraguchi (1951) On the dimension of partially ordered sets, *The Science Reports of Kanazawa University*, 1, 77–94.
- [224] T. Hiraguchi (1955) On the dimension of orders, *The Science Reports of Kanazawa University*, 4, 1–20.
- [225] J.E. Hopcroft and R.M. Karp (1973) An $5/2$ algorithm for maximum matching in bipartite graphs, *SIAM Journal on Computing*, 2, 225–231.
- [226] O. Hudry (1997) Algorithms for the aggregation of ordinal preferences: a review, *Actes de la First Conference on Operations and Quantitative Management (ICOQM)*, 169–176.
- [227] O. Hudry (2004) Computation of median orders: complexity results, *Annales du LAMSADE*, 3, in *Actes du Workshop on Computer Science and Decision Theory (DIMACS)*, 179–214.
- [228] O. Hudry, B. Leclerc, B. Monjardet and J.P. Barthélemy (2006) Médiannes métriques et latticielles, chapitre 6 du volume 3 du traité *Méthodes pour l'aide à la décision* (eds. Denis Bouyssou, Didier Dubois, Marc Pirlot et Henri Prade), Hermès, Paris, 271–312.
- [229] M.F. Janowitz (1978) An order theoretic model for cluster analysis, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 37, 148–165.
- [230] K. Jansen (1993) Scheduling and related graph theoretical problems, *Forschungsbericht*, n° 93–24, Universität Trier.
- [231] B. Jónsson (1982) Arithmetic of ordered sets, in: *Ordered Sets* (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrecht, 3–41.
- [232] B. Jónsson and R. McKenzie (1982) Powers of partially ordered sets: cancellation and refinement properties, *Mathematica Scandinavica*, 51, 87–120.
- [233] C. Jordan (1869) Sur les assemblages de lignes, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 70, 185–190.
- [234] A.B. Kahn (1962) Topological sorting of large networks, *Communications A.C.M.*, 5, 558–562.

- [235] A. Kaufmann and E. Pichat (1977) *Méthodes mathématiques non numériques et leurs algorithmes*, Tome 1, *Algorithmes de recherche des éléments maximaux*, Masson, Paris.
- [236] J.S. Kelly (1978) *Arrow Impossibility Theorems*, Academic Press, New York.
- [237] D. Kelly (1977) 3-irreducible partially ordered sets, *Canadian Journal of Mathematics*, 29, 367–383.
- [238] D. Kelly (1980) Modular lattices of dimension two, *Algebra Universalis*, 11, 101–104.
- [239] D. Kelly (1981) On the dimension of partially ordered sets, *Discrete Mathematics*, 3, 135–156.
- [240] D. Kelly (1985) Comparability graphs, in: *Graphs and Orders* (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrecht, 3–40.
- [241] D. Kelly (1986) Invariants of finite comparability graphs, *Order*, 3(2), 155–158.
- [242] D. Kelly and I. Rival (1974) Crowns, fences and dismantable lattices, *Canadian Journal of Mathematics*, 26, 1257–1271.
- [243] D. Kelly and I. Rival (1975) Planar lattices, *Canadian Journal of Mathematics*, 27, 636–665.
- [244] D. Kelly and W.T. Trotter (1982) Dimension theory for ordered sets, in: *Ordered Sets* (eds. I. Rival et al.), Reidel, North-Holland, Amsterdam, 171–212.
- [245] D.G. Kendall and B. Babington Smith (1940) On the method of paired comparisons, *Biometrika*, 33, 239–251.
- [246] K.H. Kim and F.W. Roush (1980) Regular rings and distributive lattices, *Communications in Algebra*, 8(13), 1283–1290.
- [247] R. Kimble (1973) *Extremal problems in dimension theory for partially ordered sets*, PhD. thesis, M.I.T.
- [248] H.A. Kierstead and G.S. Penrice (1989) Computing the dimension of N -free ordered sets is \mathcal{NP} -complete, *Order*, 6(2), 133–135.
- [249] D. Kleitman and B.L. Rothschild (1975) Asymptotic enumeration of partial orders on a finite set, *Transactions of the American Mathematical Society*, 205, 205–220.
- [250] D.E. Knuth (1973) *The Art of Computer Programming*, volumes 1–3, Addison-Wesley, Reading, MA.
- [251] D.E. Knuth (1976) *Mariages stables et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires*, Presses de l'Université de Montréal, Montréal.
- [252] K.M. Koh (1983) On the lattice of maximum-sized antichains of a finite poset, *Algebra Universalis*, 17, 73–86.

- [253] S.G. Kolliopoulos and G. Steiner (2002) Partially-ordered knapsack and applications to scheduling, in: *Proceedings of the 10th Annual European Symposium on Algorithms* (eds. R. Möhring et R. Raman), *Lecture Notes in Computer Science*, 2461, Springer, 612–624.
- [254] D. König (1931) Graphen und Matrizen, *Matematikae és Fizika Lapok*, 38, 116–119.
- [255] M. Koppen (1987) On finding the bidimension of a relation, *Journal of Mathematical Psychology*, 31, 155–178.
- [256] M. Koppen (1989) *Biororder representation and knowledge spaces*, Doctoral dissertation, Nijmegen University, Pays-Bas.
- [257] F. Korsh and P.S. LaFollette (2002) Loopless generation of linear extensions of a poset, *Order*, 19(2), 115–126.
- [258] S.O. Kuznetsov (2001) On computing the size of a lattice and related decision problems, *Order*, 18, 313–321.
- [259] S.O. Kuznetsov (2004) On the intractability of computing the Duquenne-Guigues base, *Journal of Universal Computer Science*, 10(8), 927–933.
- [260] S.O. Kuznetsov and S.A. Obiedkov (2001) Comparing performance of algorithms for generating concept lattices, in: *Proceedings of the ICCS-2001 International Workshop on Concept Lattices-based Theory, Methods and Tools for Knowledge Discovery in Databases, (CLKDD'01)* (eds. E. Mephu Nguifo et al.), Stanford University, Palo Alto, 35–47.
- [261] Ky Fan (1972) On Dilworth's coding theorem, *Mathematische Zeitschrift*, 127, 92–94.
- [262] E.L. Lawler (1978) Sequencing jobs to minimize total weighted completion time subject to precedence constraints, *Annals of Discrete Mathematics*, 2, 75–90.
- [263] B. Leclerc (1976) Arbres et dimension des ordres, *Discrete Mathematics*, 14, 69–76.
- [264] B. Leclerc (1981) Description combinatoire des ultramétries, *Mathématiques et Sciences humaines*, 73, 5–37.
- [265] B. Leclerc (1985) La comparaison des hiérarchies : indices et métriques, *Mathématiques et Sciences humaines*, 92, 5–40.
- [266] B. Leclerc (1990) Sur le nombre d'éléments des niveaux des produits de chaînes et des treillis permutaoédres, *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 112, 37–48.
- [267] B. Leclerc (1990) Medians and majorities in semimodular lattices, *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, 3, 266–276.
- [268] B. Leclerc (1991) Aggregations of fuzzy preferences: a theoretic Arrow-like approach, *Fuzzy Sets and Systems*, 43(3), 291–309.

- [269] B. Leclerc (1993) Lattice valuations, medians and majorities, *Discrete Mathematics*, 111, 345–356.
- [270] B. Leclerc (1994) Medians for weight metrics in the covering graphs of semilattices, *Discrete Applied Mathematics*, 49, 281–297.
- [271] B. Leclerc (1993) The residuation model for the ordinal construction of dissimilarities and other valued objects, in: *Classification and Dissimilarity Analysis* (ed. B. Van Cutsem), *Lecture Notes in Statistics*, 11, Springer, New York, 149–172.
- [272] B. Leclerc (1994) A finite Coxeter group the weak Bruhat order of which is not symmetric chain, *European Journal of Combinatorics*, 15, 181–185.
- [273] B. Leclerc and B. Monjardet (1995) Latticial theory of consensus, in: *Social Choice, Welfare, and Ethics* (eds. W. Barnett, H. Moulin, M. Salles et N. Schofield), Cambridge University Press, Cambridge, 145–160.
- [274] C. Le Conte de Poly-Barbut (1990) Le diagramme du permutoèdre est intersection des diagrammes de deux produits d'ordres totaux, *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 112, 49–53.
- [275] C. Le Conte de Poly-Barbut (1990) Automorphismes du permutoèdre et votes de Condorcet, *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 111, 73–82.
- [276] C. Le Conte de Poly-Barbut (1994) Sur les treillis de Coxeter finis, *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 125, 41–57.
- [277] J.K. Lenstra and A.H.G. Rinnooy Kan (1984) Two open problems in precedence constrained scheduling, in: *Orders: Descriptions and Roles* (eds. M. Pouzet et D. Richard), *Annals of Discrete Mathematics*, 23, North-Holland, Amsterdam, 509–521.
- [278] I.C. Lerman (1981) *Classification et analyse ordinale des données*, Dunod, Paris.
- [279] F. Lorrain (1969) Notes on topological spaces with minimum neighborhoods, *American Mathematical Monthly*, 76(6), 616–627.
- [280] R.D. Luce (1956) Semiorders and theory of utility discrimination, *Econometrica*, 24(2), 178–191.
- [281] M. Luxenburger (1991) Implications partielles dans un contexte, *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 113, 35–55.
- [282] T.H. Ma and J.P. Spinrad (1991) Transitive closure for restricted classes of partial orders, *Order*, 8, 175–183.
- [283] H. MacNeille (1937) Partially ordered sets, *Transactions of the American Mathematical Society*, 42, 416–460.
- [284] N.V.R. Mahadev and U.N. Peled (1995) *Threshold Graphs and Related Topics*, Elsevier, Amsterdam, New York.

- [285] D. Maier (1983) *The Theory of Relational Data Bases*, Computer Science Press, Rockville.
- [286] T. Margush and F.R. McMorris (1981) Consensus n -trees, *Bulletin of Mathematical Biology*, 43, 239–244.
- [287] G. Markowsky (1980) The representation of posets and lattices by sets, *Algebra Universalis*, 11, 173–192.
- [288] G. Markowsky (1994) Permutation lattices revisited, *Mathematical Social Sciences*, 27(1), 59–72.
- [289] R.M. McConnell (1995) An $O(n^2)$ incremental algorithm for modular decomposition of graphs and 2-structures, *Algorithmica*, 14, 209–227.
- [290] R.M. McConnell and F. de Montgolfier (2005) Linear-time modular decomposition of directed graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 145(2), 189–209.
- [291] R.M. McConnell and J.P. Spinrad (1999) Modular decomposition and transitive orientation, *Discrete Mathematics*, 201, 189–241.
- [292] D.C. McGarvey (1953) A theorem on the construction of voting paradoxes, *Econometrica*, 21, 608–610.
- [293] R. McKenzie (2000) Arithmetic of finite ordered sets: cancellation of exponents 2, *Order*, 17, 309–332.
- [294] F.R. McMorris, H.M. Mulder and R.C. Powers (2000) The median function on median graphs and semilattices, *Discrete Applied Mathematics*, 101, 221–230.
- [295] K. Mehlhorn (1984) *Data Structures and Efficient Algorithms 2, Graph Algorithms and \mathcal{NP} -Completeness*, Springer, Berlin.
- [296] B.G. Mirkin (1997) *Mathematical Classification and Clustering*, Kluwer, Dordrecht.
- [297] B.G. Mirkin and S.N. Rodin (1984) *Graphs and Genes*, Springer, Berlin.
- [298] J. Mitas (1991) Tackling the jump number of interval orders, *Order*, 8(2), 115–132.
- [299] J. Mitas (1994) Minimal representation of semiorders with intervals of same length, in: *Orders, Algorithms and Applications ORDAL'94* (eds. V. Bouchitté et M. Morvan), *Lecture Notes in Computer Science*, 831, 162–175.
- [300] R.H. Möhring (1984) Algorithmic aspects of comparability graphs and interval graphs, in: *Graphs and Orders* (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrecht, 41–101.
- [301] R.H. Möhring (1989) Computationally tractable classes of ordered sets, in: *Algorithms and Orders* (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrecht, 283–306.
- [302] R.H. Möhring and F.J. Radermacher (1985) Generalized results on the polynomiality of certain weighted sum scheduling problems, *Methods of Operational Research*, 49, 405–417.

- [303] B. Monjardet (1970) Fuseaux, tresses, préordres et topologies, *Mathématiques et Sciences humaines*, 30, 11–22.
- [304] B. Monjardet (1974) *Problèmes de transversalité dans les hypergraphes, les ensembles ordonnés et en théorie de la décision collective*, thèse d'état, Université Paris VI.
- [305] B. Monjardet (1976) Caractérisations et propriété de Sperner des treillis distributifs planaires finis, in : *Problèmes combinatoires et théorie des graphes*, Colloques internationaux du C.N.R.S., 260, Editions du C.N.R.S., Paris, 297–300.
- [306] B. Monjardet (1976) Caractérisation métrique des ensembles ordonnés semi-modulaires, *Mathématiques et Sciences humaines*, 56, 77–87.
- [307] B. Monjardet (1978) Axiomatiques et propriétés des quasi-ordres, *Mathématiques et Sciences humaines*, 63, 51–82.
- [308] B. Monjardet (1980) Théorie et applications de la médiane dans les treillis distributifs, *Annals of Discrete Mathematics*, 9, 87–91.
- [309] B. Monjardet (1981) Metrics on partially ordered sets – a survey, *Discrete Mathematics*, 35, 173–184.
- [310] B. Monjardet (1988) Intervals, intervals, *Order*, 5, 211–219.
- [311] B. Monjardet (1990) The consequences of Dilworth's work on lattices with unique irreducible decompositions, in: *The Dilworth Theorems*, selected papers of Robert P. Dilworth (eds. K.P. Bogart, R. Freese et J. Kung), Birkhäuser, Boston, 192–201.
- [312] B. Monjardet (1990) Arrowian characterizations of latticial federation consensus functions, *Mathematical Social Sciences*, 20(1), 51–71.
- [313] B. Monjardet (2003) De Condorcet à Arrow via Guilbaud, Nakamura et les “jeux simples”, *Mathématiques et Sciences humaines*, 163, 5–32.
- [314] B. Monjardet (2005) Social choice theory and “the Centre de Mathématique Sociale”: some historical notes, *Social Choice and Welfare*, 25, 433–456.
- [315] B. Monjardet (2006) Condorcet domains and distributive lattices, *Annales du LAMSADE*, 6, 285–302.
- [316] B. Monjardet (2007) Acyclic domains of linear orders: a survey, à paraître dans un volume en l'honneur de Peter Fishburn, Springer.
- [317] B. Monjardet and G. Netchine-Grynberg (1988) Plural psychological development models: an ordinal generalization of Guttman scale, *Journal of Mathematical Psychology*, 32(2), 213–231.
- [318] B. Monjardet and R. Wille (1988-89) On finite lattices generated by their doubly irreducible elements, *Discrete Mathematics*, 73, 163–164.
- [319] B. Monjardet and V. Raderanirina (2001) The duality between the anti-exchange closure operators and the path independent choice operators on a finite set, *Mathematical Social Sciences*, 41(2), 131–150.

- [320] J. Moore and W.T. Trotter (1976) Characterization problems for graphs, partially ordered sets, lattices, and families of sets, *Discrete Mathematics*, 16, 361–381.
- [321] J. Moore and W.T. Trotter (1977) The dimension of planar posets, *Journal of Combinatorial Theory* (B), 21, 51–67.
- [322] M. Morvan and L. Nourine (1996) Simplicial Elimination Schemes, Extremal Lattices and Maximal Antichains Lattice, *Order* 13(2), 159–173.
- [323] H. Moulin (1988) *Axioms of cooperative decision making*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [324] H. Müller (1990) Alternating cycle-free matchings, *Order*, 7(1) 11–21.
- [325] H. Müller and J.P. Spinrad (1984) On linear modular decomposition, *Technical report GIT-ICS-84/11*, Georgia Institute of Technology.
- [326] H. Müller and J.P. Spinrad (1989) Incremental modular decomposition, *Journal of the ACM*, 36(1), 1–19.
- [327] K. Nakamura (1975) The core of a simple game without ordinal preferences, *International Journal of Game Theory*, 4(1), 95–104.
- [328] G.L. Nemhauser and L.A. Wolsey (1988) *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, Londres.
- [329] J. Nešetřil and V. Rödl (1987) Complexity of diagrams, *Order*, 3(4), 321–330.
- [330] J. Nešetřil and V. Rödl (1995) More on complexity of diagrams, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 2, 269–278.
- [331] E.M. Norris (1978) An algorithm for computing the maximal rectangles in a binary relation, *Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées*, 23, 243–250.
- [332] V. Novak (1963) On the pseudo-dimension of ordered sets, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 13, 587–598.
- [333] O. Öre (1944) Galois connexions, *Transactions of the American Mathematical Society*, 55, 493–513.
- [334] O. Öre (1962) *Theory of Graphs*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 38, Rhode Island.
- [335] P.P. Palfy (1987) Distributive congruence lattices of finite algebras, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 51, 103–121.
- [336] Ch. Papadimitriou and M. Yannakakis (1979) Scheduling interval-ordered tasks, *SIAM Journal of Computing*, 8, 405–409.
- [337] V.Th. Paschos (2004) *Complexité et approximation polynomiale*, Hermès Science, Paris.
- [338] C.S. Peirce (1880) On the algebra of logic, *American Journal of Mathematics*, 3, 15–57.

- [339] E. Pichon, Ph. Lenca, F. Guillet and J.W. Wang (1994) Un algorithme de partition d'un produit direct d'ordres totaux en un nombre minimum de chaînes, *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 125, 5–15.
- [340] M. Pirlot and Ph. Vincke (1997) *Semiorders. Properties, Representations, Applications*, Kluwer, Dordrecht.
- [341] W. Poguntke (1986) Order-theoretic aspects of scheduling, *Contemporary Mathematics*, 57, 1–32.
- [342] N. Polat and C. Flament (1980) Applications galoisiennes proches d'une application entre treillis, *Mathématiques et Sciences humaines*, 70, 33–49.
- [343] M. Pouzet (1998) A projection property and Arrow's impossibility theorem, *Discrete Mathematics*, 192(1–3), 293–308.
- [344] M. Pouzet and D. Richard (eds. 1984) *Orders: Descriptions and Roles*, *Annals of Discrete Mathematics*, 23, North-Holland.
- [345] J.S. Provan and M.O. Ball (1983) The complexity of counting cuts and of computing the probability that a graph is connected, *SIAM Journal on Computing*, 12, 777–788.
- [346] W.R. Pulleyblank (1981) On minimizing setups in precedence constraint scheduling, rapport technique.
- [347] G. Pruesse and F. Ruskey (1994) Generating linear extensions fast, *SIAM Journal on Computing*, 23(2), 373–386.
- [348] R.W. Quackenbush (1982) Enumeration in classes of ordered structures, in: *Ordered Sets* (ed. I. Rival), NATO ASI, (C)(83), D. Reidel, Dordrecht, 523–554.
- [349] R.W. Quackenbush (1986) Dedekind's problem, *Order*, 2(4), 415–417.
- [350] I. Rabinovitch (1978) The dimension of semi-orders, *Journal of Combinatorial Theory (A)*, 25, 50–61.
- [351] I. Rabinovitch (1978) An upper bound on dimension of interval orders, *Journal of Combinatorial Theory (A)*, 25, 68–71.
- [352] F.J. Radermacher (1977) Floats in project networks, *Methods of Operations Research*, 27, 163–224.
- [353] F.J. Radermacher (1985–1986) Scheduling of project networks, *Annals of Operations Research*, 4, 227–252.
- [354] S. Régnier (1965) Sur quelques aspects mathématiques des problèmes de classification automatique, *ICC Bulletin*, 4, 175–191. Repris dans *Mathématiques et Sciences humaines*, 82, 13–29 (1983).
- [355] G. Reinelt (1985) *The Linear Ordering Problem: Algorithms and Applications*, Helderman Verlag, Berlin.
- [356] K. Reuter (1989) On the dimension of the cartesian product of relations and orders, *Order*, 6(3), 277–293.

- [357] J. Riguet (1951) Les relations de Ferrers, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (A)*, 232, 1729–1730.
- [358] I. Rival (1976) A note on linear extensions of irreducible elements in a finite lattice, *Algebra Universalis*, 6(2), 99–103.
- [359] I. Rival (1984) Linear extensions of finite ordered sets, in: *Orders: Descriptions and Roles* (eds. M. Pouzet et D. Richard), *Annals of Discrete Mathematics*, 23, 355–370.
- [360] I. Rival (1985) The diagram, *Graphs and Orders* (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrecht, 103–133.
- [361] I. Rival (1989) Graphical data structures for ordered sets, in: *Algorithms and Orders* (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrecht, 3–31.
- [362] I. Rival (ed. 1982) *Ordered Sets*, NATO ASI Series (C)83, D. Reidel, Dordrecht.
- [363] I. Rival (ed. 1985) *Graphs and Orders*, NATO ASI Series (C)147, D. Reidel, Dordrecht.
- [364] I. Rival (ed. 1986) *Combinatorics and Ordered Sets*, American Mathematical Society, Contemporary Mathematics, 57.
- [365] I. Rival (ed. 1989) *Algorithms and orders*, NATO ASI Series (C)255, D. Reidel, Dordrecht.
- [366] B. Roy (1959) Transitivité et connexité, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 249, 216–218.
- [367] S.P. Ryan (1998) Trapezoid order classification, *Order*, 15(4), 341–354.
- [368] M. Saks (1985) Balancing linear extensions of ordered sets, *Order*, 2(3), 327–330.
- [369] J. Schmidt (1956) Zur Kennzeichnung der Dedekind-MacNeilleschen Hülle einer geordneten Menge, *Archiv der Mathematik*, 7, 241–249.
- [370] E.T. Schmidt (1984) Congruence lattices of complemented modular lattices, *Algebra Universalis*, 18, 386–395.
- [371] W. Schnyder (1989) Planar graphs and poset dimension, *Order*, 5(4), 323–343.
- [372] B.S.W. Schröder (2002) *Ordered Sets, An Introduction*. Birkhäuser, Boston.
- [373] M.P. Schützenberger (1949) Sur l'extension des théorèmes de dualité aux treillis distributifs non complémentés, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (A)*, 228, 33–35.
- [374] T. Schweizer (1993) The dual ordering of actors and possessions, *Current Anthropology*, 34, 469–483.
- [375] R. Sedgewick and Ph. Flajolet (1996) *An Introduction to the Analysis of Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, MA.

- [376] J. Serra (ed. 1988) *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2, Theoretical Advances*, NATO ASI Series (C)83, Academic Press, New York.
- [377] Z. Shmueli (1974) The structure of Galois connections, *Pacific Journal of Mathematics*, 54(2), 209–225.
- [378] H.L. Silcock (1977) Generalized wreath products and the lattice of the normal subgroups of a group, *Algebra Universalis*, 7, 361–372.
- [379] P. Slater (1961) Inconsistencies in a schedule of paired comparisons, *Biometrika*, 53, 303–312.
- [380] E. Sperner (1928) Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Mathematische Zeitschrift*, 27, 544–548.
- [381] J.P. Spinrad (1985) On comparability and permutation graphs, *SIAM Journal on Computing*, 14, 658–670.
- [382] J.P. Spinrad (1994) Dimension and Algorithms, in: *Orders, Algorithms and Applications, International Workshop ORDAL'94* (eds. V. Bouchitté et M. Morvan), *Lecture Notes in Computer Science*, 831, 33–52.
- [383] J.P. Spinrad and J. Valdes (1983) Recognition and isomorphism of two dimensional partial orders, in: 10th Colloquium on Automata, Language and Programming, *Lecture Notes in Computer Science*, 154, Springer, Berlin, 676–686.
- [384] M.B. Squire (1995) Enumerating the ideals of a poset (preprint).
- [385] J. Stahl and R. Wille (1986) Preconcepts and set representation of contexts, in: *Classification as a tool of research* (eds. W. Gaul et M. Schader), North-Holland, Amsterdam, 431–438.
- [386] R.P. Stanley (1972) *Ordered Structures and Partitions*, Memoirs of the American Mathematical Society, 119, American Mathematical Society, Providence.
- [387] R.P. Stanley (1975) The Fibonacci lattice, *Fibonacci Quarterly*, 13(3), 215–232.
- [388] R.P. Stanley (1986) *Enumerative Combinatorics*, Vol. 1, Wadsworth and Brooks, Monterey.
- [389] D. Stanton and D. White (1986) *Constructive Combinatorics*, Springer, New York.
- [390] G. Steiner (1984) Single machine scheduling with precedence constraints of dimension 2, *Mathematics of Operation Research*, 9, 248–259.
- [391] G. Steiner (1986) An algorithm to generate the ideals of a partial order, *Operations Research Letters*, 5(6), 317–320.
- [392] G. Steiner (1987) On computing the information theoretic bound for sorting: counting the linear extension of posets, *Report 87 459-OR*, Universität de Bonn.

- [393] G. Steiner and L.K. Stewart (1987) A linear time algorithm to find the jump number of 2-dimensional bipartite partial orders, *Order*, 3, 359–367.
- [394] J. Stern (1990) *Fondements mathématiques de l'informatique*, McGraw-Hill, Paris.
- [395] M.M. Syslo (1982) A labeling algorithm to recognize a line digraph and output its root graph, *Information Processing Letters*, 15(1), 28–30.
- [396] M.M. Syslo (1984) On the computational complexity of the minimum-dummy-activities problem in a PERT network, *Networks*, 14, 37–45.
- [397] G. Szasz (1971) *Introduction à la théorie des treillis*, Dunod, Paris.
- [398] E. Szpilrajn (1930) Sur l'extension de l'ordre partiel, *Fundamenta Mathematicae*, 16, 386–389.
- [399] B. Toft (1995) Colouring, stable sets and perfect graphs, Chapitre 5 de *Handbook of Combinatorics* (eds. R.L. Graham, M. Grötschell and L. Lovász), North-Holland, Amsterdam, 233–288.
- [400] W.T. Trotter (1975) A note on Dilworth's embedding theorem, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 52, 33–39.
- [401] W.T. Trotter (1975) Embedding finite posets in cubes, *Discrete Mathematics*, 12, 165–172.
- [402] W.T. Trotter (1975) Inequalities in dimension theory for posets, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 47, 311–316.
- [403] W.T. Trotter (1976) A generalization of Hiraguchi's inequality for posets, *Journal of Combinatorial Theory (A)*, 20, 114–123.
- [404] W.T. Trotter (1976) A forbidden subposet characterization of an order-dimension inequality, *Mathematical Systems Theory*, 10, 91–96.
- [405] W.T. Trotter (1983) Graphs and partially ordered sets, in: *Selected Topics in Graph Theory*, Vol. II (eds. L. Beineke et R. Wilson), Academic Press, New York, 237–268.
- [406] W.T. Trotter (1992) *Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory*, The John Hopkins University Press, Baltimore.
- [407] W.T. Trotter (1994) Progress and new directions in dimension theory for finite partially ordered sets, in: *Extremal Problems for Finite Sets* (eds. P. Frankl, Z. Füredi, G. Katona et D. Miklos), *Bolyai Society of Mathematical Studies*, 3, 457–477.
- [408] W.T. Trotter and K.P. Bogart (1976) Maximal dimensional partially ordered sets III: A characterization of Hiraguchi's inequality for interval dimension, *Discrete Mathematics*, 15, 389–400.
- [409] W.T. Trotter and J.I. Moore (1976) Characterization problems for graphs, partially ordered set, lattices and families of sets, *Discrete Mathematics*, 16, 361–381.

- [410] W.T. Trotter and J.I. Moore (1977) The dimension of planar posets, *Journal of Combinatorial Theory (B)*, 22, 54–67.
- [411] W.T. Trotter, J.I. Moore and D.P. Sumner (1976) Dimension of a comparability graph, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 60, 35–38.
- [412] W.T. Trotter and J.A. Ross (1983) Every t -irreducible partial order is a suborder of a $t + 1$ -irreducible partial order, *Annals of Discrete Mathematics*, 17, 613–621.
- [413] H. Tverberg (1967) On Dilworth's decomposition theorem for partially ordered sets, *Journal of Combinatorial Theory*, 3, 305–306.
- [414] J. Urrutia (1989) Partial orders and euclidean geometry, in: *Algorithms and Orders* (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrecht, 387–434.
- [415] J. Valdes, R.E. Tarjan and E.L. Lawler (1982) The recognition of series-parallel digraphs, *SIAM Journal on Computing*, 11, 298–313.
- [416] L.G. Valiant (1979) The complexity of enumeration and reliability problems, *SIAM Journal on Computing*, 8(3), 410–421.
- [417] L.G. Valiant (1979) The complexity of computing the permanent, *Theoretical Computer Science*, 8, 189–201.
- [418] V.V. Vazirani (2001) *Approximation Algorithms*, Springer, Berlin.
- [419] D. Wagner (1990) Decompositions of partial orders, *Order*, 6, 335–350.
- [420] S. Warshall (1962) A theorem on boolean matrices, *Journal of the ACM*, 9, 11–12.
- [421] D.J.A. Welsh (1976) *Matroid Theory*, Academic Press, Londres.
- [422] D.B. West (1982) Extremal problems in partially ordered sets, in: *Ordered Sets* (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrecht, 473–521.
- [423] D.B. West (1985) Parameters of partial orders and graphs: packing, covering and representation, in: *Graphs and Orders* (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrecht, 267–350.
- [424] D. Wiedemann (1991) A computation of the eighth Dedekind number, *Order*, 8(1), 5–6.
- [425] N. Wiener (1914) Contribution to the theory of relative position, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 17, 441–449.
- [426] M. Wild (1994) A theory of finite closure spaces based on implications, *Advances in Mathematics*, 108(1), 118–139.
- [427] R. Wille (1974) On modular lattices of order dimension two, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 43, 287–292.
- [428] R. Wille (1982) Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts, in: *Ordered Sets* (ed. I. Rival), D. Reidel, Dordrecht, 445–470.

- [429] P.M. Winkler (1986) Correlation and order, in: *Combinatorics and Ordered Sets* (ed. I. Rival), *Contemporary Mathematics*, 57, 151–174.
- [430] G.J. Woeginger (2001) On the approximability of average completion time scheduling under precedence constraints, in: Proceedings of the 28th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP'2001), *Lecture Notes in Computer Science*, 2076, Springer, Berlin, 862–874.
- [431] P. Wolper (1991) *Introduction à la calculabilité*, Inter-Editions, Paris.
- [432] M. Wolski (2004) Galois connections and data analysis, *Fundamenta Informaticae*, 60, 401–415.
- [433] M. Yannakakis (1982) The complexity of the partial order dimension problem, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 3(3), 351–358.
- [434] H.P. Young (1974) An axiomatization of Borda's rule, *Journal of Economic Theory*, 9, 43–52.
- [435] H.P. Young and A. Levenglick (1978) A consistent extension of Condorcet's election principle, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 35, 285–300.
- [436] B.L. Zelinka (1968) Median and peripherian of trees, *Archivum Mathematicum (Brno)*, 4, 87–95.

Liste des symboles

- $(A + B, \leq)$: ensemble ordonné biparti 47
- $(Gal(E, E', R), \leq)$: treillis de Galois de R 92
- $[Y]$: fermeture commençante de Y 84
- $x[$: ensemble des minorants stricts de x 4
- $(x]$ ou Px : ensemble des minorants de x 4
- (\mathcal{H}, ι) : hiérarchie indicée 228
- 0_P : minimum de P 24
- 1_P : maximum de P 24
- A_n : antichaîne à n éléments 4
- CR_p : couronne à $2p$ éléments 47
- C_n ou \underline{n} : chaîne à n éléments 2
- $Comp(P)$: graphe de comparabilité de P 5
- $Comp_P$: relation de comparabilité de P 5
- $Cov(P)$: graphe de couverture de P 6
- $Crit(P)$: ensemble des couples P -critiques 39
- DIR_P ou $DIR(P)$: ensemble des doublement irréductibles de P 27
- F_P : relation de forçage associée à P 22
- G_x : ensemble des minorants de x dans la partie G 75
- $Gal(E, E', R)$: ensemble des concepts $F \times H$ de R 91
- $Gal(P)$: complété de MacNeille de P 96
- H^x : ensemble des majorants de x dans la partie H 79
- IR_P ou $IR(P)$: ensemble des irréductibles de P 27
- I^x : ensemble des inf-irréductibles supérieurs ou égaux à x 27
- I_P ou $I(P)$: ensemble des inf-irréductibles de P 27
- $Inc(P)$: graphe d'incomparabilité de P 5
- Inc_P : relation d'incomparabilité de P 5
- $K_{p,q}$: ensemble ordonné biparti complet 47
- M_3 : plus petit treillis modulaire non distributif 57
- $MajoY$: ensemble des majorants de la partie Y 24
- $Majo$ (application) 73
- $MinP$: ensemble des éléments minimaux de P 24
- $MinoY$: ensemble des minorants de la partie Y 24
- $Mino$ (application) 73
- N_5 : plus petit treillis non modulaire 57
- N_k : niveau de rang k 45
- $P \equiv Q$: P et Q sont isomorphes 8
- $P(E)$: ensemble des parties de E 11
- $P = (X, \leq) (= (X, O))$: un ensemble ordonné 2

- P^-x : ensemble des éléments couverts par x 6
 $P_1 \oplus' P_2$: somme ordinale fusionnée de P_1 et P_2 31
 $P_1 \oplus P_2$: somme ordinale de P_1 et P_2 31
 $P_1 \otimes P_2$: produit lexicographique de P_1 et P_2 31
 $P_1 + P_2$: somme cardinale de P_1 et P_2 31
 $P_1 \times P_2$: produit direct de P_1 et P_2 32
 $Q \sqsubseteq P$: Q est un sous-ensemble ordonné de P 18
 Q^P : ensemble ordonné des applications isotones de P dans Q 74
 $Q_{y_1 \dots y_h}^{P_1 \dots P_h}$: substitution des P_i 30
 R : une relation binaire 2
 R^c : relation complémentaire de R 2
 R^d : relation duale de R 10
 R_P : table de P 93
 SNC : sans N couvrant 51
 S_P ou $S(P)$: ensemble des sup-irréductibles de P 27
 S_n 179
 S_x : ensemble des sup-irréductibles inférieurs ou égaux à x 27
 T : un tournoi 59
 T : un treillis 52
 $Vois(P)$: graphe de voisinage de P 6
 $]Y$: fermeture finissante de Y 84
 $[x, y]$: intervalle entre x et y 19
 Δ : différence symétrique 166
 $\prod_{1 \leq i \leq h} P_i$: produit direct des P_i 32
 Σ_n : Permutoèdre 13
 $\alpha(P)$: largeur de P 20
 $\bigoplus_{1 \leq i \leq h} P_i$: somme ordinale des P_i 31
 $\delta(P)$: déficience de P 115
 $\delta(Y')$: déficience de la partie Y' 115
 $\gamma(P)$ 20
 ι : isomorphisme entre S_T et I_T 143
 $\kappa(P)$: étendue de P 20
 $\lambda(P)$: longueur de P 20
 \mathbb{F} : ensemble des réseaux de fermeture 81
 \mathbb{G} : ensemble des fermetures 81
 \mathbb{H} : ensemble des hiérarchies 227
 \mathbb{N} : ensemble des entiers naturels 11
 \mathbb{R} : ensemble des réels 15
 $\nu(P)$: cardinal maximum d'un niveau 45
 $\otimes_{1 \leq i \leq h} P_i$: produit lexicographique des P_i 32
 $\pi(R)$: fermeture réflexo-transitive de R 58
 \prec : relation de couverture 6
 \setminus : différence ensembliste 18
 $\sigma(P)$: cardinal maximum d'un couplage 115
 $\sum_{1 \leq i \leq h} P_i$: somme cardinale des P_i 30
 $\tau(P)$: cardinal minimum d'une transversale 115
 $\tau(\mathcal{F})$: plus petite topologie contenant \mathcal{F} 149
 $\theta(P)$ 20
 $\underline{2}^X$: treillis des parties de X 11
 \underline{n}_s : ensemble strictement totalement ordonné à n éléments 3
 $]Y$: 115
 $]x$: ensemble des majorants stricts de x 4
 $dim P$: dimension de P 176
 $dim_2 P$: dimension booléenne de P 171
 $dim_k P$: k -dimension de P 189
 $g(T)$: cardinal minimum d'une partie génératrice de T 145
 gf : composée des applications f et g 80
 $h(x)$: hauteur de l'élément x 45
 i^+ : unique élément couvrant i 80
 $inf Y$ ou $\bigwedge Y$: infimum de la partie Y 25
 n_k : cardinal du niveau N_k 118
 $o(P)$: nombre de couvertures de P 21
 $o(P, L)$: nombre de couvertures de L 21
 $p(x)$: profondeur de l'élément x 46
 $r(P)$: paramètre de rang de P 44
 $r(x)$: rang de x 44
 r_T : application rang d'un tournoi T 59
 $s(P)$: nombre de sauts de P 21
 $s(P, L)$: nombre de sauts de L 21
 s^- : unique élément couvert par s 77
 $sup Y$ ou $\bigvee Y$: supremum de la partie Y 25

- $x \downarrow y$: relation flèche inférieure 23
 $x \uparrow y$: relation flèche supérieure 23
 $x \updownarrow y$: relation double flèche 23
 xP : ensemble des majorants de x 4
 $x \leq y$: x inférieur ou égal à y 4
 $x \vee y$: supremum de x et y 25
 $x \wedge y$: infimum de x et y 25
 \mathbf{P} : partition d'un ensemble 12
 $\mathbf{m}(\mathcal{D})$: famille de Moore engendrée par \mathcal{D} 83
 $\mathcal{C}(P)$: ensemble des parties commengantes de P 27
 $\mathcal{F}(P)$: ensemble des parties finissantes de P 27
 \mathcal{F}_X : ensemble des fuseaux de \mathcal{L}_X 158
 \mathcal{H} : hiérarchie 227
 $\mathcal{L}(P)$ ou $\mathcal{L}(O)$: ensemble des extensions linéaires de $P = (X, O)$ 21
 \mathcal{L}_X : ensemble des ordres totaux sur X 154
 \mathcal{O}_X : ensemble des ordres sur X 150
 \mathcal{P}_X : ensemble des partitions de X 12
 \mathcal{R}_P : table fléchée de P 93
 \mathcal{SP} : classe des ensembles ordonnés série-parallèle 51
 \mathcal{T}_X^0 : ensemble des topologies quasi-séparées sur X 150
 \mathcal{W} : ensemble des ordres forts 217
 $F \times H$: un concept 91
 $MaxP$: ensemble des éléments maximaux de P 24
 $P \equiv_d Q$: P et Q sont duaux 9
 xP^+ : ensemble des éléments couvrant x 6
 $\mathcal{A}(P)$: ensemble des antichaînes de P 116

Index

- Adjonction 101
- Algorithme
 - exponentiel 281
 - linéaire 281
 - non déterministe 283
 - polynomial 281
 - TCA 285
- Antichaîne 4
 - d'un ensemble ordonné 19
 - maximale 20
- Anti-isomorphisme 9
- antitone voir Application
- Application
 - antitone 73
 - contractante 81
 - extensive 81
 - galoisienne 85
 - idempotente 81
 - isotone 73
 - monotone 73
 - résiduée 85
 - résiduelle 85
 - strictement isotone 73
- Arête 5
- Arbre 51
 - de classification 226
 - de décomposition 38
 - de parties 12
- Arc 5
- Atome 78
- Automorphisme 8
 - d'implications 247
 - d'un ensemble ordonné 22, 177
 - d'une relation d'implication 247
- Bichaîne 51
- Biordre 209
- biparti voir Ensemble ordonné
- Birkhoff voir Théorème
- booléen voir Codage, Dimension, Treillis
- Borda voir Règle de Borda
- Borne
 - inférieure 25
 - supérieure 25
- Chaîne 2
 - couvrante 19
 - étendue 19
 - maximale 19
 - symétrique 120
- Chemin 15
 - hamiltonien 58
- Circuit 58
 - hamiltonien 58
- Classe de problèmes
 - Classe $\#\mathcal{P}$ 284
 - Classe \mathcal{NP} 282
 - Classe \mathcal{P} 282
- Clivage 136
- Coatome 80
- Codage 73
 - 2-codage 171
 - booléen 171
 - inf- 74
 - k -codage 189
- Base
 - canonique (de Guigues-Duquenne) 248

- strict 176
- sup- 74
- Commutation 13, 155
- Complément 55
- complémenté(e) voir Topologie, Treillis
- Complété d'un ensemble ordonné 96
- Complétion stricte 107
- Complexité (en temps) 280
- Composante connexe 7
- Composée (de relations) 202
- Concept (d'une relation binaire) 91
- Condorcet voir Propriété
- Connaissance (espace de) 197, 238
- connexe voir Ensemble ordonné
- Consistance voir Propriété
- contractante voir Application
- convexe voir Géométrie, Partie
- Correspondance de Galois 88
- Coupe 128
- Couplage 115
- Couple P -critique 22
- Couronne 47
- Couverture voir Graphe, Nombre, Relation
- couvrant(e) voir Chaîne, Sous-ensemble ordonné
- critique voir Couple, Partie

- décisif (ensemble) 223
- Décomposition voir Arbre, Diamètre
- Décomposition modulaire 37
- Dedekind (problème de) 165
- Déficiencie
 - d'un ordre biparti 115
 - d'une partie 115
- démantelable voir Ensemble ordonné, Treillis
- Demi-treillis 52
 - distributif 231
 - inf- 52
 - à médianes 235
 - semi-modulaire 68
 - sous-inf 53
 - sous-sup 53
 - sup- 52
- Dendrogramme 228
- Dépendance fonctionnelle 239

- Désaccord 156
- Diagramme
 - de Gandt 253
 - de Hasse 7
- Diamètre (de décomposition) 38
- Dilworth voir Ordre, Théorème
- Dimension 22, 176
 - 2-dimension 14, 171
 - booléenne 171
 - convexe 178
 - Ferrers 197
 - gloutonne 197
 - k -dimension 189
- Dissimilarité 224
- Distance
 - de la différence symétrique 156, 231
 - géodésique 156
- distributif(ve) voir Demi-treillis, Famille de parties, Treillis
- Dual (d'un ensemble ordonné) 9
- Dualité (principe de) 10
- Duplication 165

- Élément
 - inf-premier 137
 - irréductible 26
 - maximal 24
 - minimal 24
 - sup-premier 136
- Éloignement 230
- Ensemble ordonné 2
 - arboré 51
 - arborescent 51
 - atomistique 78
 - biparti 47
 - complet 47
 - régulier 118
 - borné 24
 - chaînes-alternées 47
 - coatomistique 80
 - conjugué 186
 - connexe 7
 - décomposable 37
 - démantelable 64
 - d -irréductible 195, 198
 - filtrant inférieurement 68
 - fortement ordonné 51
 - d'intervalles 51

- linéairement ordonné 2
- modulaire 48
- multi-arborescent 51
- planaire 63
- quasi-fortement ordonné 51
- rangé 44
 - de Sperner 118
 - unimodal 120
- sans N 51
- sans N couvrant 51
- semi-modulaire
 - inférieurement 47
 - supérieurement 47
- série-parallèle 51
- strictement ordonné 3
- strictement totalement ordonné 3
- totalement ordonné 2
- Étendue d'un ensemble ordonné 20, 110
- étendue voir Chaîne
- Exponentiation 74
- Extension d'un ordre 21
 - extension linéaire 21
 - gloutonne 197
 - extension maximale 22
 - extension minimale 22
- extensive voir Application
- Extrémité d'une chaîne 19
- Famille de parties
 - famille distributive 56
 - famille finissante 219
 - famille de majorités 219
 - famille de Moore 83
 - famille de Sperner 121
- Fermé 81
- Fermeture 81
 - commençante 84
 - finissante 84
 - réflexo-transitive 15
- Ferrers voir Dimension, Relation
- Filtre voir Partie finissante, 219
- Flot 128
- Fonction booléenne croissante 164
- Fonction d'agrégation des préférences 217
- Forçage voir Relation, Ordre
- Fuseau d'ordres totaux 154
- galoisienne voir Application
- génératrice voir Partie
- Géodésique 156
- géodésique voir Distance
- Géométrie convexe 163
- gloutonne voir Dimension, Extension
- Graphe
 - biparti 114
 - de comparabilité 5, 35
 - de couverture 6
 - d'incomparabilité 5
 - d'intervalles 34
 - non orienté 5
 - orienté 5
 - parfait 129
 - de permutation 193, 200
 - permutoèdre 155
 - de voisinage 6
- Guttman (échelle de) 101
- hamiltonien voir Chemin, Circuit
- Hauteur d'un élément 45
- Hierarchie 12, 227
 - indicée 228
- Hiraguchi voir Théorème
- homogène voir Partie homogène
- Hypergraphe 196
- Idéal 28
- idempotente voir Application
- Implication 239, voir Relation
- Inclusion/exclusion (formule d') 163
- Indépendance voir Propriété
- Inf-codage 74
- Inf-demi-treillis 25, 52
 - arborescent 67
 - distributif 231
- inf-génératrice voir Partie
- Inf-irréductible 26
- Inf-morphisme 74
- inf-premier voir Élément
- Infimum 25
- Instance (d'un problème) 280
- Intervalle 19
 - géodésique 157
- Intervalles voir Ensemble ordonné, Graphe, Ordre

- Invariant de comparabilité 20, 37
- IP*-cycle 196
- ipsoduale (classe) 10
- Irréductible 26
 - doublement 26
 - inf- 26
 - sup- 26
- Isomorphisme 8
- isotone voir Application

- Jordan-Dedekind voir Propriété

- k*-antichaîne 131
- k*-codage 189
- k*-dimension 189

- Largeur 20, 110
- lexicographique voir Ordre,
 - Produit, Somme
- linéaire voir Algorithme,
 - Extension
- Littlewood-Offord (problème de) 132
- Longueur
 - d'une chaîne 19
 - d'un ensemble ordonné 20

- Majorant 24
- majoritaire voir Règle, Relation
- Mariage stable 162
- maximal(e) voir Antichaîne, Chaîne,
 - Élément, Extension
- Maximum 24
- médian voir Ordre
- Médiane
 - latticielle 56, 136
 - métrique 230
- médiane voir Procédure
- minimal(e) voir Élément,
 - Extension
- Minimum 24
- Minorant 24
- modulaire voir Ensemble
 - ordonné, Treillis
- monotone voir Application
- Moore voir Famille de parties,
 - Partie
- Morgado voir Relation
 - de Morgado
- Morphisme 71
 - inf- 74
 - sup- 74
 - de treillis 74

- Nakamura voir Nombre,
 - Théorème
- Niveau 45
 - minimum- \mathcal{R} -régulier 119
 - \mathcal{R} -régulier 119
- Nombre
 - de couvertures 21
 - de Nakamura 220
 - de sauts 21
- Nombres de Whitney 118

- Ordonnancement 251
 - à deux étapes 255
 - m*-ordonnancement 253
- Ordre 2
 - de Dilworth 65
 - de divisibilité 11
 - de dominance 40
 - de forçage 28
 - d'exponentiation 74
 - facteur 39
 - faible de Bruhat 13
 - de finesse 12
 - fort 15
 - d'intervalles 15, 51
 - lexicographique 39
 - médian 16
 - permutaoèdre 13
 - de priorité 258
 - quasi-fort 51, 205
 - série-parallèle 51
 - strict 3
 - strictement total 3
 - total 2
- Origine d'une chaîne 19
- Ouvert 81
- Ouverture 81

- Pareto voir Propriété
- Partie
 - bornée 25
 - inférieurement 25
 - supérieurement 25
 - commençante 27
 - convexe 19, 155

- critique 248
- \mathcal{D} -fermée 241
- finissante 27
- génératrice 145
- géodésiquement convexe 157
- homogène 36
- inf-fermée 26
- inf-génératrice 27
- majorée 24
- minorée 24
- de Moore 81
- quasi-fermée 247
- saturée 243
- sup-fermée 26
- sup-génératrice 27
- Partition 12, voir Treillis, 225
 - en antichaines 110
 - en chaînes 110
- Permutation 13
- permutaoèdre voir Graphe, Ordre, Treillis
- planaire voir Ensemble ordonné, Treillis
- Préordre 14
 - des sections 41
 - trace 210, 269
- Problème
 - $\#\mathcal{P}$ -complet 284
 - $\#\mathcal{P}$ -difficile 284
 - de $\#\mathcal{P}$ 284
 - $\mathcal{N}\mathcal{P}$ -difficile 284
 - de décision 282
 - indécidable 282
 - de $\mathcal{N}\mathcal{P}$ 283
 - $\mathcal{N}\mathcal{P}$ -complet 283
 - de \mathcal{P} 283
- Procédure médiane 230
- Produit
 - direct 32
 - lexicographique 32
- Profil (de préférences) 215
- Profondeur d'un élément 46
- Projection 219
 - \sqcap -projection 219
- Propriété
 - de Condorcet 236
 - de consistance 236
 - d'indépendance 222
 - de Jordan-Dedekind 46
 - de Pareto 222
 - de régularité 120
 - de Sperner 118
 - de Sperner par niveaux 120
 - de symétrie-unimodalité des rangs 120
- Quasi-fermé 247
- Quasi-ordre 214
- Rang (application)
 - d'un ensemble ordonné 44
 - rang normé 44
 - d'un tournoi 59
- Rang (paramètre) 44
- Réalisation d'un ordre 22, 176
- Recouvrement (en chaînes) 112
- Réduction polynomiale 284
- Règle
 - de Borda 217
 - majoritaire 217
- Relation
 - de Morgado 105
 - de Pickert 88
- Relation (binaire) 2
 - antisymétrique 2
 - asymétrique 3
 - coduale 203
 - de comparabilité 5
 - complémentaire 203
 - de couverture 6
 - double flèche 23
 - duale 203
 - de Ferrers 209
 - flèche inférieure 23
 - flèche supérieure 23
 - de forçage 22
 - d'implication 241
 - d'incomparabilité 5
 - d'indifférence 15, 201
 - irréflexive 3
 - majoritaire 217
 - négativement transitive 203
 - de préférence 15, 201
 - quasi-transitive 214
 - réduite 95
 - réflexive 2
 - totale 2, 59
 - transitive 2

- Représentation
 - en irréductibles 78
 - d'un treillis distributif 141
- Réseau
 - de fermeture 81
 - d'ouverture 82
- résiduelle voir Application
- résiduelle voir Application
- Rétraction 81
- Sac à dos (problème du) 16
- Saut 21
- Section
 - commençante 27
 - finissante 27
- Semiordre 51, 214
- Somme d'ensembles ordonnés
 - somme cardinale 30
 - somme lexicographique 30
 - somme ordinale 31
- Sous-ensemble ordonné 18
 - couvrant 18
- Sous-inf-demi-treillis 53
- Sous-ordre 18
- Sous-sup-demi-treillis 53
- Sous-treillis 53
- Sperner voir Ensemble ordonné, Famille, Propriété, Théorème
- Sperner par niveaux voir Propriété
- Substitution 29
- Sup-codage 74
- Sup-demi-treillis 25, 52
- sup-génératrice voir Partie
- Sup-irréductible 26
 - majoritaire 231
- Sup-morphisme 74
- sup-premier voir Élément
- Supremum 25
- Système complet
 - d'implications 240
- Système de représentants distincts 131
- Table d'un ensemble ordonné 93
 - table fléchée 93
 - table réduite 95
- Tableau d'une relation
 - binaire 202
 - tableau en escalier 202
- Taille (d'une instance) 281
- Théorème
 - d'Arrow 222
 - de Birkhoff 141
 - de Dilworth 111
 - d'Hiraguchi 185
 - de König-Egervary 116
 - de König-Hall 118
 - de König-Öre 116
 - de Nakamura 220
 - de Sperner 121
- Topologie 138
 - complémentée 150
 - linéaire 150
 - quasi-séparée 150
 - T_0 -topologie 150
- Tournoi 59
- Transversale
 - d'un biparti 115
 - d'une famille de parties 146
- Treillis 25, 52
 - des antichaînes 130, 140
 - booléen 25
 - borné 166
 - complémenté 55
 - complet 103
 - de concepts 92
 - démantelable 64
 - distributif 55
 - distributif libre 164
 - des familles de Moore 241
 - de Galois 92
 - géométrique 274
 - localement distributif 162
 - modulaire 57
 - des partitions 226
 - permutoèdre 161
 - planaire 64
 - de Post 125
 - semi-modulaire 69
- Tri topologique 59
- Ultrafiltre 219
- Ultramétrique 228
- unimodal voir Ensemble ordonné
- Whitney voir Nombres de Whitney

Déjà parus dans la même collection

1. T. CAZENAVE, A. HARAUX : Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires. 1990
2. P. JOLY : Mise en œuvre de la méthode des éléments finis. 1990
- 3/4. E. GODLEWSKI, P.-A. RAVIART : Hyperbolic systems of conservation laws. 1991
- 5/6. PH. DESTUYNDER : Modélisation mécanique des milieux continus. 1991
7. J. C. NEDELEC : Notions sur les techniques d'éléments finis. 1992
8. G. ROBIN : Algorithmique et cryptographie. 1992
9. D. LAMBERTON, B. LAPEYRE : Introduction au calcul stochastique appliqué. 1992
10. C. BERNARDI, Y. MADAY : Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques. 1992
11. V. GENON-CATALOT, D. PICARD : Eléments de statistique asymptotique. 1993
12. P. DEHORNOY : Complexité et décidabilité. 1993
13. O. KAVIAN : Introduction à la théorie des points critiques. 1994
14. A. BOSSAVIT : Électromagnétisme, en vue de la modélisation. 1994
15. R. KH. ZEYTOUNIAN : Modélisation asymptotique en mécanique des fluides Newtoniens. 1994
16. D. BOUCHE, F. MOLINET : Méthodes asymptotiques en électromagnétisme. 1994
17. G. BARLES : Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. 1994
18. Q. S. NGUYEN : Stabilité des structures élastiques. 1995
19. F. ROBERT : Les systèmes dynamiques discrets. 1995
20. O. PAPINI, J. WOLFMANN : Algèbre discrète et codes correcteurs. 1995
21. D. COLLOMBIER : Plans d'expérience factoriels. 1996
22. G. GAGNEUX, M. MADAUNE-TORT : Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière. 1996
23. M. DUFLO : Algorithmes stochastiques. 1996
24. P. DESTUYNDER, M. SALAUN : Mathematical Analysis of Thin Plate Models. 1996
25. P. ROUGEE : Mécanique des grandes transformations. 1997
26. L. HÖRMANDER : Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations. 1997
27. J. F. BONNANS, J. C. GILBERT, C. LEMARÉCHAL, C. SAGASTIZÁBAL : Optimisation numérique. 1997
28. C. COCOZZA-THIVENT : Processus stochastiques et fiabilité des systèmes. 1997
29. B. LAPEYRE, É. PARDOUX, R. SENTIS : Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion. 1998
30. P. SAGAUT : Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible. 1998
31. E. RIO : Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants. 1999
32. J. MOREAU, P.-A. DOUDIN, P. CAZES (EDS.) : L'analyse des correspondances et les techniques connexes. 1999
33. B. CHALMOND : Eléments de modélisation pour l'analyse d'images. 1999
34. J. ISTAS : Introduction aux modélisations mathématiques pour les sciences du vivant. 2000
35. P. ROBERT : Réseaux et files d'attente : méthodes probabilistes. 2000
36. A. ERN, J.-L. GUERMOND : Eléments finis : théorie, applications, mise en œuvre. 2001
37. S. SORIN : A First Course on Zero-Sum Repeated Games. 2002
38. J. F. MAURRAS : Programmation linéaire, complexité. 2002

39. B. YCART : Modèles et algorithmes Markoviens. 2002
40. B. BONNARD, M. CHYBA : Singular Trajectories and their Role in Control Theory. 2003
41. A. TSYBAKOV : Introduction à l'estimation non-paramétrique. 2003
42. J. ABDELJAOUED, H. LOMBARDI : Méthodes matricielles – Introduction à la complexité algébrique. 2004
43. U. BOSCAIN, B. PICCOLI : Optimal Syntheses for Control Systems on 2-D Manifolds. 2004
44. L. YOUNES : Invariance, déformations et reconnaissance de formes. 2004
45. C. BERNARDI, Y. MADAY, F. RAPETTI : Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques. 2004
46. J.-P. FRANÇOISE : Oscillations en biologie : Analyse qualitative et modèles. 2005
47. C. LE BRIS : Systèmes multi-échelles : Modélisation et simulation. 2005
48. A. HENROT, M. PIERRE : Variation et optimisation de formes : Une analyse géométrique ? 2005
49. B. BIDÉGARAY-FESQUET : Hiérarchie de modèles en optique quantique : De Maxwell-Bloch à Schrödinger non-linéaire. 2005
50. R. DÁGER, E. ZUAZUA : Wave Propagation, Observation and Control in 1 – d Flexible Multi-Structures. 2005
51. B. BONNARD, L. FAUBOURG, E. TRÉLAT Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux. 2005
52. F. BOYER, P. FABRIE : Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles. 2005
53. E. CANCÈS, C. L. BRIS, Y. MADAY : Méthodes mathématiques en chimie quantique. Une introduction. 2006
54. J.-P. DEDIEU : Points fixes, zéros et la méthode de Newton. 2006
55. P. LOPEZ, A. S. NOURI : Théorie élémentaire et pratique de la commande par les régimes glissants. 2006
56. J. COUSTEIX, J. MAUSS : Analyse asymptotique et couche limite. 2006
57. J.-F. DELMAS, B. JOURDAIN : Modèles aléatoires. 2006
58. G. ALLAIRE : Conception optimale de structures. 2007
59. M. ELKADI, B. MOURRAIN : Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux. 2007
60. N. CASPARD, B. LECLERC, B. MONJARDET : Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages. 2007