

GEOMETRIE

CLASSES DE SECONDE

T. C. M. M' et I

par

R. CLUZEL

Professeur

à l'École normale

nationale d'enseignement technique

de Paris

J.-P. ROBERT

Professeur

à l'École normale

supérieure de l'enseignement

technique

P. VISSIO

Professeur agrégé

au Lycée Lakanal

LIBRAIRIE DELAGRAVE¹

1965

¹ La présente édition électronique est partielle, volontairement, seule la partie Géométrie de l'espace nous ayant paru nécessaire pour l'instant.

CHAPITRE II

GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

- 9. Le plan. Détermination du plan.
- 10. Droites parallèles.
- 11. Droite et plan parallèles.
- 12. Plans parallèles.
- 13. Droite et plan perpendiculaires.
- 14. Droite et plan perpendiculaires (suite).
- 15. Distances.
- 16. Angles dièdres.
- 17. Plans perpendiculaires.
- 18. Angles trièdres.
- 19. Angles polyèdres.

Problèmes relatifs au chapitre II.

9. - LE PLAN

DÉTERMINATION DU PLAN

1. La droite.

Définition.

Une droite est une ligne illimitée telle que par deux points distincts il n'en passe qu'une seule. On dit encore que deux points distincts déterminent une droite.

De cette définition, il résulte que :

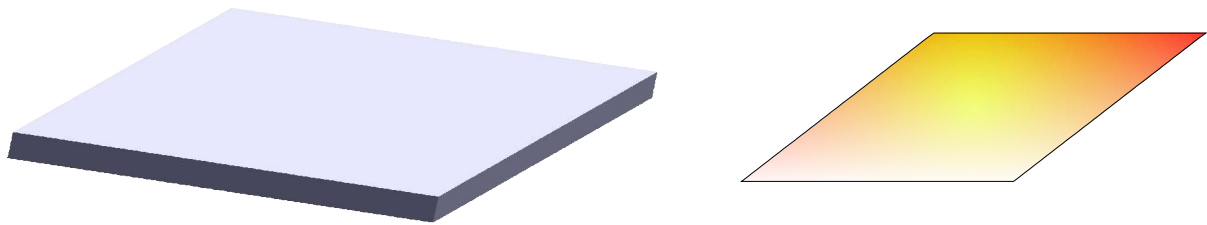
- 1° deux droites distinctes ont au plus un seul point commun. Dans le cas où ce point existe, les droites sont dites sécantes et leur point commun est leur point d'intersection.
- 2° Si deux droites possèdent deux points communs, on peut affirmer qu'elles sont confondues.

Propriétés.

- 1° Deux droites sont superposables : pour réaliser cette superposition, il suffit de faire coïncider deux points de l'une avec deux points de l'autre.
- 2° Une droite peut glisser sur elle-même.

2. Le plan.

- 1° La surface d'une nappe d'eau au repos, le dessus d'un marbre d'atelier (fig. 1) nous donnent l'idée d'une portion de plan.

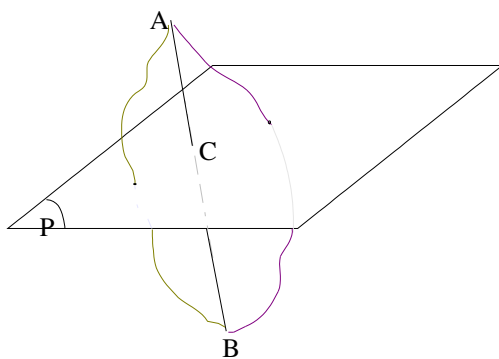


C'est pourquoi, par convention, un plan sera représenté par une portion de plan qui sera figurée, en perspective, par un parallélogramme : le plan P (fig. 2).

- 2° Si l'on pose, sur le plan, l'arête d'une règle préalablement vérifiée, on constate que cette arête est entièrement contenue dans le plan, et cela dans n'importe quelle direction. Donc, si l'on considère deux points quelconques A et B d'un plan, tous les points de la droite AB sont dans ce plan (fig. 3). Cette propriété caractéristique permet de définir le plan (un plan est illimité, comme les droites qu'il contient).

Définition. Un plan est une surface illimitée telle que la droite qui joint deux quelconques de ses points y est contenue tout entière.

3° Si une figure (ensemble de points, de lignes,...) est entièrement contenue dans un plan, elle est dite plane ; sinon elle est gauche. Le menuisier et l'ajusteur utilisent une règle pour vérifier qu'une surface à dresser est dégauchie, c'est-à-dire plane.



3. Positions relatives d'une droite et d'un plan.

1er cas : La droite a deux points communs avec le plan : Alors elle y est contenue tout entière (§ 2).

2e cas : La droite a un seul point commun avec le plan.

On dit alors que la droite et le plan sont sécants ou qu'ils se coupent. On dit aussi que la droite perce le plan. Leur point commun est appelé point d'intersection du plan et de la droite on encore pied, ou trace, de la droite dans le plan.

3e cas : On peut se demander s'il existe des droites n'ayant aucun point commun avec un plan. La réponse à cette question sera donnée dans la 11e leçon.

4. Remarques.

1° En géométrie plane, on peut réaliser effectivement les constructions de figures à l'aide de la règle et du compas. Il n'en est pas de même dans l'espace.

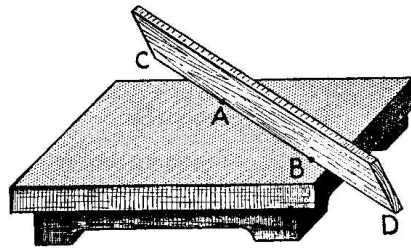
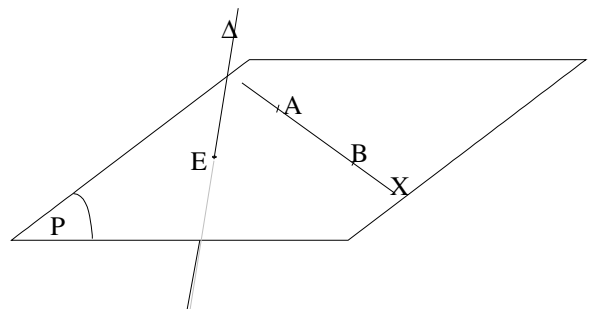


Fig. 3. — Si l'on fait passer l'arête CD d'une règle par deux points *quelconques* A et B d'un plan, cette arête s'appuie *entièrement* sur le plan.

4° Précisons que l'expression "un plan est une surface illimitée", signifie qu'un plan partage l'espace en deux régions et que, pour joindre un point de l'une de ces régions à un point de l'autre, il faut nécessairement traverser au moins une fois le plan (fig. 4).

5° Notons aussi que deux figures de l'espace sont dites égales quand elles sont superposables (même définition qu'en géométrie plane).



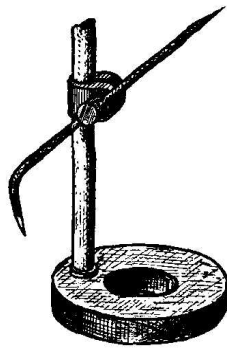


Fig. 7. — Chaque extrémité de la pointe du trusquin peut être considérée comme un point. Grâce à la douille du trusquin, ce point peut être déplacé.

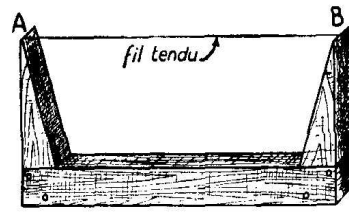


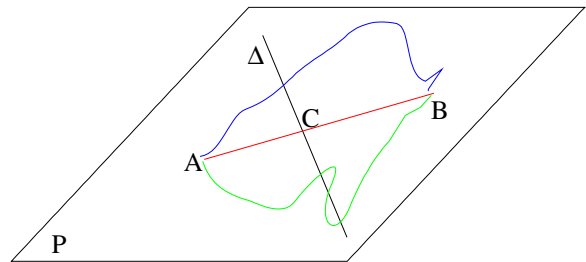
Fig. 8. — Deux planchettes, clouées sur les bouts d'une règle, supportent le fil fin AB fortement tendu; on peut le regarder comme une portion de droite.

On peut cependant matérialiser certains éléments géométriques tels que

- a) des points : extrémités des pointes du trusquin d'ajusteur (fig. 7);
- b) des droites : fil tendu (fig. 8), arête d'une règle, aiguille rectiligne en acier,
- c) des plans : dessus de marbres d'atelier, plaque métallique, dessus de planches à dessin bien dressées,
- d) des angles droits : équerre à dessin, équerres de menuisier ou d'ajusteur,

2° Une droite Δ contenue dans un plan (P) le partage en deux régions : chacune d'elles est un demi-plan.

Pour joindre un point d'un de ces demi-plans à un point de l'autre demi-plan, il faut nécessairement traverser au moins une fois la droite Δ .



5. Il existe une infinité de plans passant par un point donné.

Nous pouvons, en effet, placer une plaque métallique plane P dans une infinité de positions tout en l'appuyant sur une pointe fixe A (fig. 10).

6. Il existe une infinité de plans passant par deux points donnés.

Nous pouvons, en effet, placer une plaque métallique plane (P) dans une infinité de positions tout en l'appuyant sur deux pointes fixes A et B (fig. 11).

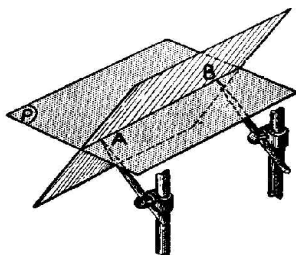


Fig. 11.

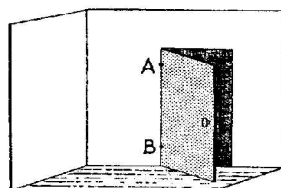


Fig. 12.

Notons que tous les plans représentés ainsi contenant les points A et B contiennent la droite AB. Une image analogue est fournie par une porte tournant autour de ses gonds A et B (fig. 12).

7. Il existe un plan et un seul passant par trois points donnés non en ligne droite.

Considérons trois points fixes A, B, C non en ligne droite (fig. 13). Nous pouvons vérifier expérimentalement :

1° qu'il est possible d'appuyer une plaque métallique plane (P) sur ces trois pointes ;

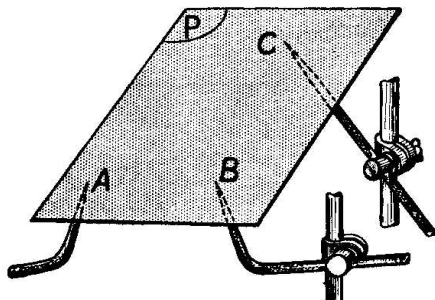


Fig. 13.

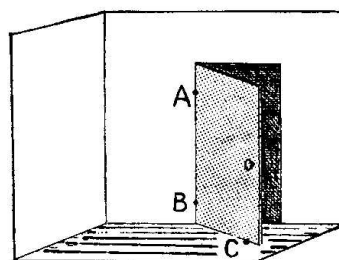


Fig. 14.

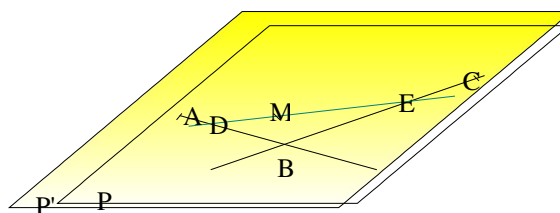
2° qu'il n'existe qu'un seul plan passant par les trois points.

De même une porte, qui peut tourner autour de ses gonds A et B et que l'on oblige à heurter une butée C, prend une position bien déterminée (fig. 14).

On admet que : par trois points non situés sur une même droite il passe un plan.

On peut démontrer qu'il n'existe qu'un seul plan passant par trois points non alignés. On dit encore que trois points non alignés déterminent un plan.

Supposons que deux plans P et P' contiennent les trois points A, B, C non situés sur une même droite (fig. 15).



Soit M un point quelconque de P. Si ce point était choisi sur l'une des droites AB, BC ou CA il serait aussi dans P' car ces droites, ayant deux points dans chacun des plans P et P', y sont entièrement contenues (§ 2).

Supposons donc M en dehors de ces droites et menons par M, dans le plan P, une droite coupant les droites AB et BC. Soient D et E les points d'intersection obtenus. La droite AB étant contenue dans P', le point D est situé dans P'. De même, BC étant entièrement dans P', le point E est dans P'.

La droite DE ayant alors deux points dans le plan P' y est contenue en entier : M est donc situé dans P'.

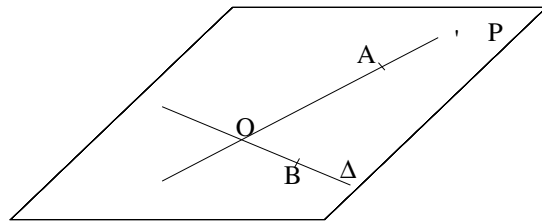
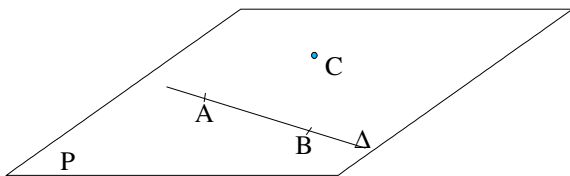
Tout point M du plan P est donc situé dans P'.

De la même manière on montrerait que tout point du plan P' est situé dans le plan P.

Ainsi les plans P et P' sont confondus.

8. Première conséquence.

Soient une droite Δ et un point C extérieur à cette droite (fig. 16). Prenons deux points quelconques A et B sur Δ . Il existe un plan P passant par A, B, C (donc par C et Δ) et ce plan est unique : une droite et un point extérieur déterminent un plan et un seul.



9. Deuxième conséquence.

Soient deux droites Δ et Δ' sécantes en O (fig. 17). Prenons un point A sur Δ' et un point B sur Δ . Il existe un plan P passant par les points O, A, B (donc par Δ et Δ') et ce plan est unique : deux droites sécantes déterminent un plan et un seul.

10. Construction d'un plan.

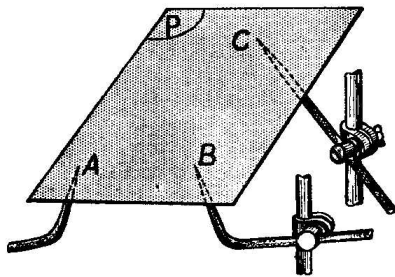


Fig. 18. — La plaque qui s'appuie sur les trois pointes A, B, C non en ligne droite, détermine un plan P et un seul.

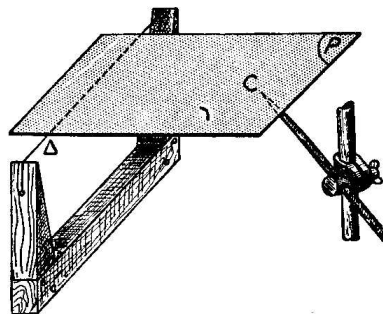


Fig. 19. — La plaque qui passe par le fil Δ et qui contient la pointe C détermine un plan P et un seul.

Construire un plan, c'est le déterminer, soit :

- 1° par trois points non situés en ligne droite (fig. 18) ;
- 2° par une droite et un point extérieur à cette droite (fig. 19) ;

11. Propriétés du plan.

1° Déplaçons un plan de manière qu'il passe constamment par trois points fixes non alignés ; il reste superposé à lui-même :

un plan peut glisser sur lui-même.

2° Plaçons deux plans de manière à les faire passer par trois points non alignés ; nous avons démontré que ces plans coïncidaient :

deux plans sont superposables.

Ainsi, pour vérifier qu'une face d'une pièce métallique est plane, l'ajusteur l'applique et la fait glisser sur le marbre d'atelier préalablement enduit d'ocre rouge. Si la face à vérifier n'est pas plane, seules les saillies sont enduites d'ocre ; l'ajusteur les réduit à la lime ou au grattoir.

12. Positions relatives de deux plans.

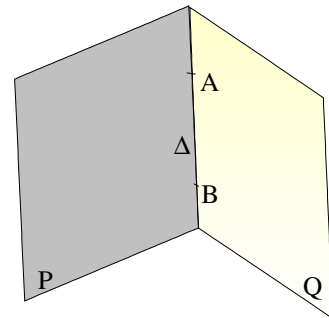
Considérons deux plans P et Q et cherchons les points qui leur sont communs.

1er cas : On connaît trois points non alignés, communs à ces deux plans : ces plans coïncident (§ 7).

2e cas : Les plans P et Q sont distincts et l'on connaît deux points A et B qui leur sont communs.

La droite Δ qui joint les points A et B est contenue entièrement dans le plan P et dans le plan Q. Ces plans n'ont d'ailleurs pas d'autre point commun situé en dehors de Δ , car ils coïncideraient (§ 7).

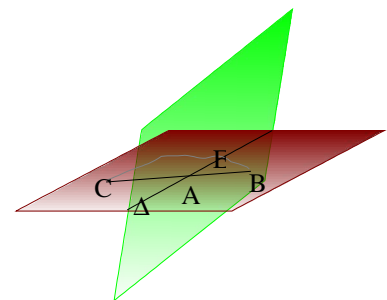
On dit que les plans P et Q sont sécants, ou qu'ils se coupent selon Δ , qui est leur droite d'intersection.



3e cas : Les plans P et Q sont distincts et l'on connaît un point A qui leur est commun.

Nous allons démontrer qu'ils possèdent une droite commune passant par A (fig. 22).

Prenons, dans le plan P, un point B non contenu dans le plan Q. La droite BA coupe le plan Q en A. Prenons un point C sur le prolongement de BA et traçons dans le plan P une ligne L allant de B à C sans passer par A.



Puisque B et C sont de part et d'autre du plan Q, la ligne L traverse ce dernier en un point E, qui appartient ainsi aux deux plans.

Les plans P et Q ont donc deux points communs distincts A et E et, par suite, une droite commune (2e cas) : la droite Δ qui passe par A et E. D'où l'énoncé :

Si deux plans distincts ont un point commun, ils se coupent suivant une droite passant par ce point.

4e cas : On peut se demander s'il existe des plans n'ayant aucun point commun. La réponse à cette question sera donnée dans la 12e leçon.

En résumé.

Deux plans ayant un point commun peuvent être :

confondus (alors tous leurs points sont communs) ;

sécants (alors tous leurs points communs forment une droite) ;

D'où une méthode pour démontrer que des points de l'espace sont alignés.

13. Lieux géométriques dans l'espace.

Comme en géométrie plane, un lieu géométrique (ou lieu) est l'ensemble des points qui satisfont à une ou plusieurs propriétés déterminées, à l'exclusion de tous les autres points.

1- Le lieu d'un point variable peut être, soit une ligne L (droite, cercle, ...), soit une surface S (plan, sphère, ...).

Pour établir qu'un point variable a pour lieu une ligne L (ou une surface S), on procède comme en géométrie plane ; on démontre, dans l'ordre que l'on veut, que :

- a) tout point M possédant les propriétés considérées est sur la ligne L (ou la surface S),
- b) tout point de L (ou de S) possède les propriétés envisagées.

2- Le lieu d'une ligne variable C est une surface (S). Pour l'établir, on démontre, dans l'ordre que l'on veut, que

- a) tout point de chaque ligne C appartient à S.
- b) tout point de S appartient à une ligne C.

EXERCICES

156. - On prend trois points non alignés A, B, C dans un plan et un point D extérieur à ce plan. Établir que le quadrilatère ABCD est gauche. En déduire que quatre points, pris au hasard, ne sont pas en général dans un même plan.

157. - On donne quatre points distincts A, B, C, D non situés dans un même plan. Énumérer les plans distincts formés par ces points pris trois par trois.

158. - Trois droites distinctes, non situées dans un même plan, ont un point commun. Prises deux à deux, combien déterminent-elles de plans distincts ?

159. - Trois droites de l'espace se coupent deux à deux. Démontrer qu'elles sont dans un même plan, ou qu'elles sont concourantes.

160. - Établir que la position d'une figure de l'espace est déterminée si l'on fixe trois de ses points, non en ligne droite (table à trois pieds, pied d'appareil photographique). Une table à quatre pieds doit être calée, en général.

161. - On donne cinq points tels que chaque plan déterminé par trois quelconques d'entre eux ne contienne aucun des deux autres. Enumérer les plans distincts formés par ces cinq points pris trois par trois. Démontrer que trois quelconques de ces cinq points ne sont pas alignés.

162. - Cinq points, non situés dans un même plan, sont tels que trois d'entre eux sont alignés. Énumérer les plans distincts formés par ces points pris trois à trois.

163. - On donne un triangle isocèle ABC ($AB = AC$), un point M sur AB, un point N sur AC. On plie le triangle autour de la hauteur AH de manière que les deux parties AHB et AHC ne soient pas dans un même plan. Démontrer que, dans la nouvelle position de la figure, les points B, C, M, N sont dans un même plan.

164. - On donne un trapèze ABCD. Soient M et N les points qui divisent les bases AB et DC en segments de même nature dans le rapport k. On plie la figure autour de MN de manière que les deux parties du trapèze ne soient pas dans un même plan. Démontrer que, dans la nouvelle position de la figure, les quatre sommets du trapèze sont dans un même plan.

165. - Étant donné une droite D et un point O, non situé sur D, quel est le lieu, lorsque M décrit la droite D, de la droite OM ?

166. - Quatre points A, B, C, D ne sont pas situés dans un même plan. Quelle est l'intersection des plans ABD et DAC ?

167. - On donne deux droites X, Y sécantes en A, et un point B en dehors du plan de ces droites. Quelle est l'intersection des plans (X, B) et (Y, B) ?

168. - On donne deux plans sécants P et Q, un point A dans P, un point B dans Q. Quelle est l'intersection des plans P et AMB, ou Q et AMB, dans chacun des cas suivants :

1° M est un point donné commun aux deux plans ?

2° M est un point donné du plan Q ?

169. - Les côtés BC, CA, AB d'un triangle coupent un plan P respectivement en X, Y, Z. Démontrer que ces trois points sont alignés.

170. - On donne un quadrilatère gauche ABCD. Sur AB, AD, CD on marque les points E, F, G tels que EF ne soit pas parallèle à BD.

1° Déterminer le point d'intersection de la droite BC avec le plan EFG.

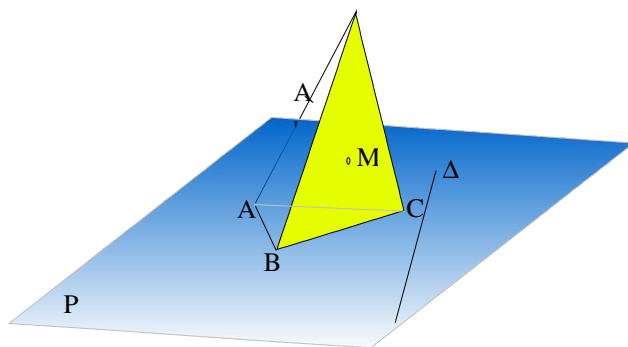
2° Démontrer que ce point reste fixe quand ABD tourne autour de BD, le plan BCD restant fixe.

171. - On donne, dans un plan P, un triangle ABC et une droite Δ non parallèle à AB et AC.

Soit S un point extérieur au plan P. On marque un point A' sur SA et un point M dans la face SBC (fig. 24). Dessiner :

1° l'intersection de la droite A'M avec le plan P ;

2° les intersections, avec le plan (Δ , A'), des plans SAB, SCA, SBC.

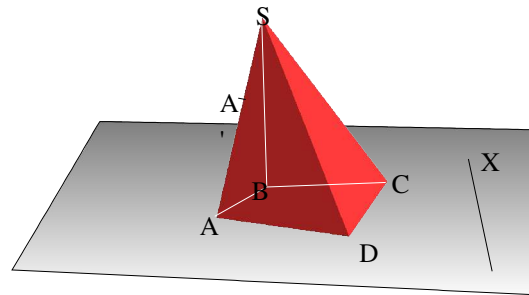


172. - On donne un plan P, un quadrilatère ABCD de ce plan et un point S extérieur au plan. Sur SA, SB, SC, on marque les points A', B', C' tels que A'B' et B'C' ne soient pas parallèles à AB et BC. Dessiner :

1° l'intersection des plans P et A'B'C' ;

2° les intersections des plans ASD et CSD avec le plan A'B'C'.

173. - On donne un plan P , un quadrilatère $ABCD$ de ce plan, une droite X du plan P et un point S en dehors de P . Sur SA , on marque le point A' . Dessiner les intersections des droites SB , SC , SD avec le plan (X, A') .



10. - DROITES PARALLÈLES (DANS L'ESPACE)

1. Positions relatives de deux droites dans l'espace.

Considérons deux droites Δ et Δ' dans l'espace.

Observons d'abord que si les deux droites ont deux points communs, elles coïncident. Sinon elles sont distinctes ; dans ce cas il existe au moins un point de Δ qui n'est pas situé sur la droite Δ' . Soit A l'un de ces points.

La droite Δ' et le point A définissent un plan P (9e leçon).

Comment peuvent être disposées, l'une par rapport à l'autre, les droites Δ et Δ' ?

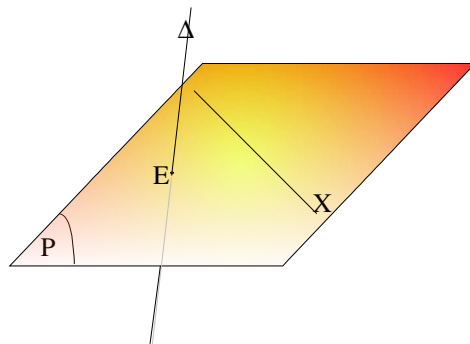
1er cas : La droite Δ n'est pas dans le plan P.

La droite Δ n'a qu'un point commun avec le plan

P : le point E.

La droite X est entièrement contenue dans le plan P et le point E n'est pas situé sur X.

Alors, Δ et X n'ont aucun point commun ; on dit qu'elles sont quelconques.



2e cas : la droite Δ est dans le plan P.

Les droites Δ et Δ' sont donc contenues dans un même plan (on dit qu'elles sont coplanaires) et, par suite, ou bien :

a) Δ et Δ' ont un point commun, elles sont sécantes (fig. 2).

b) Δ et Δ' n'ont pas de point commun : elles sont parallèles.

En résumé :

Deux droites de l'espace peuvent occuper l'une par rapport à l'autre quatre positions :

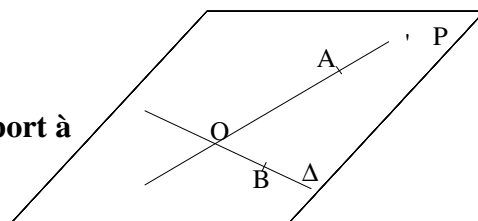
1° les droites ont deux points communs : elles coïncident.

2° les droites ont un point commun : elles déterminent un plan (droites sécantes).

3° et 4° les droites n'ont pas de point commun :

si elles ne sont pas coplanaires (cas général) : droites quelconques,

si elles sont coplanaires : droites parallèles.



2. Définition.

Deux droites sont dites parallèles

1° si elles sont dans un même plan ; et 2° si elles n'ont aucun point commun.

3. Théorème.

Par un point non situé sur une droite, 1° on peut mener une parallèle à cette droite; 2° on n'en

peut mener qu'une.

Données : La droite Δ et le point A non situé sur Δ .

Conclusions : 1° Par A, on peut mener une parallèle à Δ . 2° Cette parallèle est unique.

1° La droite Δ et le point A déterminent un plan P (fig. 4). Dans ce plan on peut mener, par A, la parallèle Δ' à Δ (Classe de 4e).

2° Inversement, une parallèle à Δ , menée par A, est nécessairement dans le plan P (définition des droites parallèles). Or, dans ce plan, on ne peut mener qu'une seule parallèle à Δ (Postulat d'Euclide).

Conséquence.

On peut dire que deux droites parallèles déterminent un plan.

4. Remarque.

En géométrie dans l'espace, une droite est définie, ou déterminée, si l'on connaît :

1° deux points de cette droite,

ou 2° un point de cette droite et une droite qui lui est parallèle,

ou 3° deux plans distincts qui la contiennent.

Construire une droite, c'est la déterminer comme il vient d'être dit.

5. Théorème. Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

Hypothèses : X parallèle à Y ; P coupe X en A.

Conclusion : P coupe Y.

Il s'agit de prouver que la droite Y et le plan P ont un point commun et un seul.

1° Prouvons que Y et P ont un point commun.

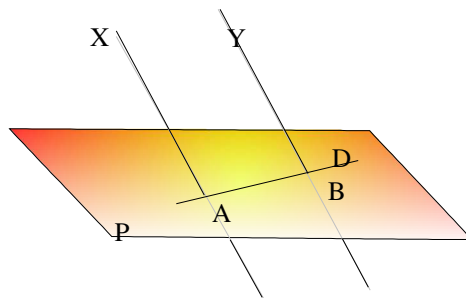
Les droites X et Y étant parallèles définissent un plan. Soit Q ce plan. La droite X n'étant pas contenue dans P, les plans P et Q sont distincts.

Ils ont en commun le point A ; ils se coupent donc suivant une droite D passant par A (9e leçon, § 12).

Dans le plan Q la droite D coupe X donc elle coupe la parallèle Y (Classe de 4e). Le point d'intersection B de D et Y est commun à Y et au plan P.

2° Prouvons que Y et P n'ont qu'un seul point commun.

Tout point commun à la droite Y et au plan P appartient aux plans P et Q et par suite à leur intersection D. Les droites D et Y n'ayant qu'un point commun B, il en est de même de la droite Y et du plan P.



6. Théorème. Si deux droites sont parallèles à une même droite, elles sont elles-mêmes parallèles.

Ce théorème a été démontré dans le cas où les trois droites sont dans un même plan (Classe de 4e). Nous supposons qu'il n'en est pas ainsi. Il s'agit de prouver que D et D' sont dans le même plan et qu'elles n'ont pas de point commun (fig. 6).

1° Démontrons que D et D' sont coplanaires.

Désignons par P le plan défini par la droite D et par un point quelconque A de D'.

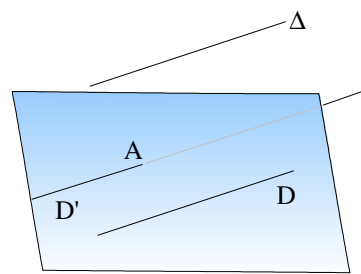
Si la droite D' perçait ce plan en A, le plan P couperait la droite Δ , qui est parallèle à D' (§ 5) et par suite il couperait aussi la droite D qui est parallèle à Δ (§ 5).

Ceci est contraire à l'hypothèse puisque D est contenue dans P. Alors la droite D', qui a le point A dans le plan P et qui ne perce pas ce plan, est contenue dans P.

2° Démontrons que D et D' n'ont aucun point commun.

Si D et D' étaient sécantes en un point O, on pourrait, par ce point, mener deux droites D et D' parallèles à Δ , ce qui est impossible.

Ainsi, D et D' n'ayant aucun point commun et étant situées dans le même plan sont parallèles.



On dit parfois que les trois droites D, D', Δ sont parallèles ou qu'elles forment un ensemble de trois droites parallèles, mais il est préférable de dire que les trois droites ont même direction.

7. Angles à côtés parallèles.

Soient deux droites D et Δ sécantes en O. Menons, par un point O', les droites D' et Δ' respectivement parallèles à D et à Δ . Nous traçons ainsi des angles à côtés parallèles (fig. 7).

Par un point quelconque M de D, menons la parallèle à OO' qui coupe D' en M'. Par un point quelconque N de Δ , menons la parallèle à OO' qui coupe Δ' en N'.

Les quadrilatères OMM'O' et ONN'O' sont des parallélogrammes.

Donc

(1) $OM = O'M'$ et $ON = O'N'$, et

(2) $MM' = OO'$; et $NN' = OO'$;

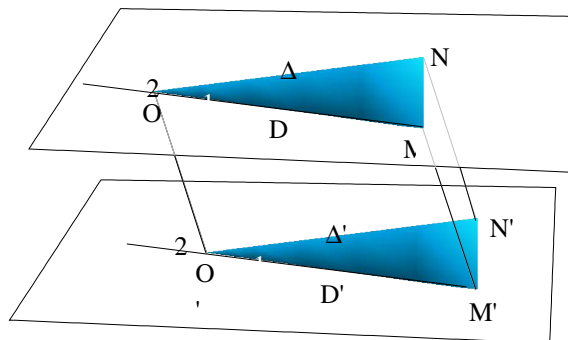
De plus, par construction, $MM' \parallel OO'$, et $NN' \parallel OO'$

Des relations (2), il résulte que les segments MM' et

NN' sont égaux et parallèles; le quadrilatère

$MM'N'N$ est un parallélogramme, donc

(3) $MN = M'N'$.



D'après les relations (1) et (3), les triangles OMN et O'M'N' ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, ils sont égaux. Donc les angles O1 et O'1 sont égaux.

Leurs suppléments sont égaux, $O2 = O'2$ et, par suite, O1 et O'2 sont supplémentaires.

On peut donc énoncer le **Théorème** :

Si deux angles ont leurs côtés respectivement parallèles :

1° s'ils sont tous deux aigus (ou tous deux obtus), ils sont égaux ;

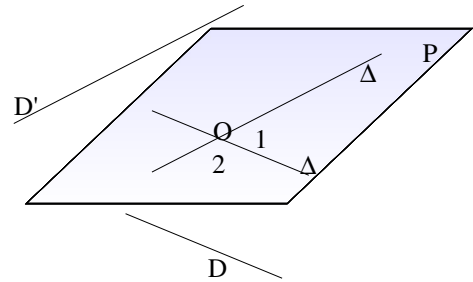
2° si l'un est aigu et l'autre obtus, ils sont supplémentaires.

8. Angle de deux droites dans l'espace.

Considérons deux droites D et D' .

Par un point quelconque O , menons les parallèles Δ et Δ' à D et à D' (fig. 8).

D'après le théorème précédent, la grandeur des angles O_1 et O_2 , formés par Δ et Δ' reste constante quelle que soit la position de O . L'un quelconque des angles O_1 ou O_2 est dit l'angle des deux droites D et D' .



Définition :

l'angle de deux droites est l'un quelconque des angles formés par les parallèles à ces droites, menées par un point quelconque de l'espace.

Si D et D' sont parallèles, les parallèles Δ et Δ' sont confondues. On convient de dire que l'angle des droites D et D' est nul.

Si Δ et Δ' sont perpendiculaires, c'est-à-dire si les angles O_1 , et O_2 , sont droits, les droites D et D' sont dites orthogonales.

Définition :

deux droites non situées dans un même plan sont dites orthogonales si leur angle est droit.

Dans ce qui suit nous réserverons donc, en général, l'expression droites perpendiculaires à des droites sécantes formant des angles droits.

Remarque.

Deux droites parallèles font des angles égaux avec une autre droite.

En particulier :

si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale (ou perpendiculaire) à l'autre.

EXERCICES

174. - Démontrer que les droites qui joignent les milieux des côtés consécutifs d'un quadrilatère gauche forment un parallélogramme.

175. - Démontrer que, dans un quadrilatère gauche, les segments joignant les milieux des côtés opposés et le segment joignant les milieux des diagonales se coupent au milieu de chacun d'eux.

176. - On donne un quadrilatère gauche ABCD ; les points E et F divisent AD et AB en segments de même nature dans le rapport k ; les points G et H divisent CB et CD en segments de même nature dans le rapport k' . Que peut-on dire du quadrilatère EFGH ? Examiner le cas : $k = k'$.

177. - On donne un carré ABCD. Sur les côtés AB et AD, on marque les points E et F tels que $AE = AF$. Sur les côtés CB et CD, on marque les points I et H tels que $CI = CH$.

1° On plie la figure autour de AC de manière que les deux parties du carré ne soient pas dans un même plan. Démontrer que, dans toute position de la figure, le quadrilatère EFHI est plan ; quelle est la nature de ce quadrilatère ?

2° En est-il de même si l'on plie la figure autour de BD ?

178. - Par deux points A et B, on mène deux parallèles sur lesquelles on prend les points C et D tels que $AC = 12$ cm, $BD = 5$ cm, les vecteurs AC et BD étant de même sens. Par A et B, on mène deux autres parallèles Ax et By dont le plan est distinct du plan des deux premières. Sur Ax on prend le point E tel que $AE = 4$ cm. Le plan CDE coupe By en F.

1° Calculer BF.

2° Quelle est la nature du quadrilatère CEFD?

179. - On donne un plan P, un point O en dehors de ce plan et une droite Y sécante au plan P. Le plan (O, Y) coupe le plan P suivant une droite Z. Démontrer que Z passe par un point fixe quand Y se déplace parallèlement à elle-même.

180. - Un quadrilatère gauche ABCD est tel que $AB = CD$. Démontrer que AB et CD font des angles égaux avec la droite qui joint les milieux des deux autres côtés. Réciproque.

181. - Démontrer que si trois plans se coupent deux à deux, leurs intersections sont concourantes, ou parallèles, ou confondues.

182. - Démontrer que si deux plans sécants passent respectivement par deux droites parallèles, leur intersection est parallèle à chacune de ces droites,

a) soit en utilisant le théorème § 6:

b) soit en raisonnant par l'absurde ; dans ce cas, en déduire, comme conséquence, le théorème du § 6.

183. - A, B, C, D, étant quatre points non situés dans un même plan, on désigne par M le milieu de AB, N celui de CD, P celui de BC, Q celui de AD, R et S les milieux respectifs de AC et BD.

1° Démontrer que MPNQ est un parallélogramme.

2° Comment doit-on choisir les points A, B, C, D pour que MPNQ soit un rectangle ? ou un losange ? ou un carré ?

3° On suppose dans cette seule question que $AC = BD$. Démontrer que la droite MN fait des angles égaux avec les droites AC et BD.

4° Démontrer que PSQR est un parallélogramme. Dédire du 1° que les droites MN, PQ, RS sont concourantes.

5° Soit A' le centre de gravité du triangle BCD. On désigne par G le point d'intersection de AA' et MN et par K le point d'intersection de BN et de la parallèle à AA' menée par M. (Il est recommandé de dessiner une figure plane, dans le plan ABN.)

Démontrer que G est le milieu de MN et que $GA'/GA = -1/3$.

En déduire que les trois droites MN, PQ, RS et les quatre droites joignant l'un des points A, B, C ou D au centre de gravité des triangles formés par les trois autres points sont sept droites concourantes.

11. - DROITE ET PLAN PARALLÈLES

1. Positions relatives d'une droite et d'un plan.

Rappelons l'étude faite 9e leçon, § 3 :

1° Si une droite a deux points communs avec un plan, elle est tout entière dans le plan.

2° Une droite non contenue dans un plan ne peut avoir, au plus, qu'un seul point commun avec ce plan.

Nous sommes alors amenés à nous poser la question :

Une droite et un plan peuvent-ils n'avoir aucun point commun ?

2. Théorème.

Si, par un point extérieur à un plan, on mène la parallèle à une droite contenue dans ce plan, la droite obtenue et le plan considéré n'ont aucun point commun.

Hypothèse : D droite du plan P

A point extérieur à P

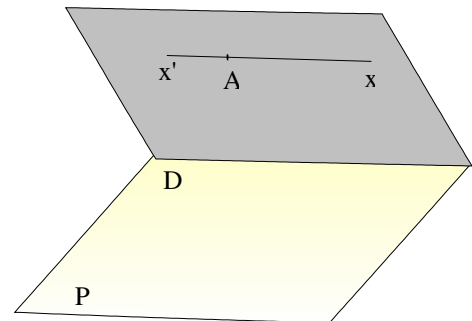
$x'Ax$ parallèle à D.

Conclusion : $x'Ax$ et P n'ont aucun point commun.

Si la droite $x'Ax$ et le plan P (fig. 1) avaient un point commun, le plan P devrait couper la droite D puisque celle-ci est parallèle à $x'Ax$ (10e leçon, § 5).

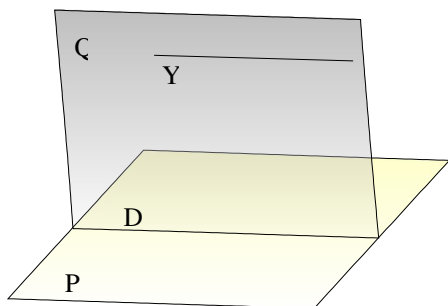
Ce qui est contraire à l'hypothèse, celle-ci supposant que le plan P contient la droite D.

Ainsi, la droite $x'Ax$ et le plan P n'ont pas de point commun.



3. Définition.

Le théorème précédent, qui établit l'existence de droites et plans n'ayant pas de point commun, justifie la définition suivante :



une droite et un plan sont dits parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun.

On dit aussi que la droite est parallèle au plan, ou que le plan est parallèle à la droite.

Notons que le théorème précédent (§ 2) peut s'énoncer :

Si, par un point extérieur à un plan, on mène la parallèle à une droite quelconque de ce plan, la droite obtenue et le plan sont parallèles.

4. Première réciproque du théorème d'existence.

Si une droite Y et un plan P sont parallèles, tout plan contenant Y et sécant avec le plan P coupe celui-ci suivant une parallèle à Y.

Hypothèse : $Y \parallel P$; et : Q passe par Y et coupe P selon la droite D.

Conclusion : Les droites D et Y sont parallèles.

1° Les droites D et Y sont dans le même plan Q.

2° Si D et Y se coupaient, leur point commun appartiendrait à la fois à la droite à et au plan P.

Alors, la droite Y et le plan P se couperaient, ce qui est contraire à l'hypothèse.

5. Condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit parallèle à un plan.

Le théorème d'existence (§ 2) et le théorème réciproque précédent (§ 4) peuvent s'énoncer comme suit :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite non contenue dans un plan P soit parallèle à ce plan P est qu'elle soit parallèle à une droite de ce plan.

ou bien :

Pour qu'une droite non contenue dans un plan P soit parallèle à ce plan, il faut et il suffit qu'elle soit parallèle à une droite de ce plan.

1° La condition est suffisante.

Il s'agit de démontrer que si une droite, non contenue dans un plan, est parallèle à une droite du plan, alors elle est parallèle à ce plan.

C'est le théorème d'existence (§ 2).

2° La condition est nécessaire.

Il faut démontrer que, lorsqu'une droite est parallèle à un plan, elle est parallèle à une droite contenue dans ce plan.

C'est le théorème réciproque (§ 4), dans lequel on définit le plan Q (fig. 2) à l'aide de la droite Δ (fig. 2) et d'un point quelconque du plan P.

6. Deuxième réciproque du théorème d'existence.

Si une droite Y et un plan P sont parallèles et si, par un point du plan P, on mène la parallèle à la droite Y, cette parallèle est contenue dans le plan P.

Hypothèse :

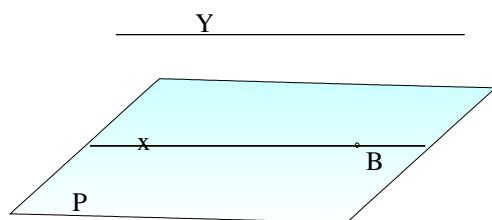
$Y \parallel P$

B, point du plan P

$Bx \parallel Y$

Conclusion :

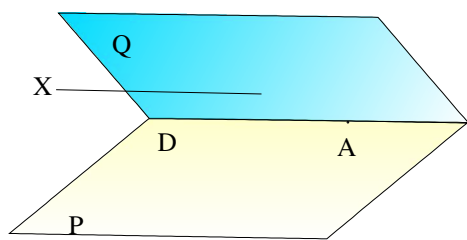
Bx est dans le plan P.



Le plan défini par la droite Y et le point B (fig. 3) coupe le plan P suivant une parallèle à Y (§ 4). Si Bx n'était pas confondu avec cette droite, on pourrait mener, par le point B, deux parallèles à Y, ce qui est impossible (10e leçon, § 7).

7. Théorème.

Si une droite est parallèle à deux plans sécants, elle est parallèle à leur intersection.



Hypothèse :

P et Q sécants suivant la droite D

X parallèle à P

X parallèle à Q.

Conclusion :

$X \parallel D$

Menons, par un point A quelconque de la droite D, la parallèle à X.

D'après la deuxième réciproque (§ 6) cette droite doit être entièrement contenue dans le plan P et dans le plan Q. Cette parallèle est donc l'intersection des plans P et Q.

Il en résulte que X et D sont parallèles.

EXERCICES

Mener, par un point extérieur à un plan, les droites parallèles à ce plan.

184. - Montrer que, par le point A extérieur au plan P, on peut mener une infinité de droites parallèles à ce plan. (On mène, par le point A, la droite parallèle à une droite quelconque du plan P.

Mener, par un point extérieur à une droite, les plans parallèles à cette droite.

185. - Montrer que, par le point A, extérieur à la droite Δ , on peut mener une infinité de plans parallèles à cette droite. (On mène, par A, la parallèle Δ' à Δ et on fait passer par Δ' un plan quelconque).

Étant données deux droites Δ et Δ' non contenues dans un même plan, mener, par l'une, le plan parallèle à l'autre.

186. - Montrer que, par la droite Δ , on peut mener un plan P et un seul parallèle à la droite Δ' (On mène, par un point quelconque A de Δ , la parallèle Δ'' à Δ').

Mener, par un point, le plan parallèle à deux droites non parallèles.

187. - Montrer que, par le point A, on peut mener un plan P, et un seul, parallèle à deux droites données Δ et Δ' . (On mène, par A, les parallèles D et D' à Δ et Δ').

188. - Mener une droite parallèle à une direction donnée et rencontrant deux droites données. Trois droites D, D' et L étant données, montrer qu'il existe, en général, une seule droite parallèle à L et qui rencontre D et D'. (Mener, par D, le plan P parallèle à L, considérer l'intersection A' de D' avec P et construire par A' la parallèle à L). Discuter.

189. - Démontrer que si deux plans sécants P et P' passent respectivement par deux droites parallèles X et Y , l'intersection de P et P' est parallèle à X (et Y).
190. - Montrer que trois droites quelconques ne sont pas, en général, parallèles à un même plan.
191. - On donne deux plans sécants P et Q , un point A dans P . Mener par A , dans le plan P la parallèle au plan Q .
192. - On donne un quadrilatère gauche $ABCD$. Soient E et F les points qui divisent AB et AD en segments de même nature dans le rapport k . Un plan quelconque, passant par E et F , coupe CB et CD en G et H . Démontrer que G et H partagent CB et CD dans le même rapport.
193. - Mener, par deux points donnés A et B , le plan parallèle à une droite donnée D .
194. - Démontrer que si une droite et un plan sont parallèles, les portions de parallèles comprises entre la droite et le plan sont égales.
195. - Un plan R coupe deux plans P et Q sécants suivant la droite X .
 1° Démontrer que si R est parallèle à X , R coupe P et Q suivant deux droites parallèles.
 2° Réciproquement, si R coupe P et Q suivant deux droites parallèles, R est parallèle à X .
196. - Démontrer qu'un plan ne peut couper un cercle en plus de deux points. Si un plan a deux points communs avec un cercle, il est dit sécant à ce cercle ; si un plan a un seul point commun avec un cercle, il est dit tangent à ce cercle. Mener, par deux points donnés A et B , un plan tangent à un cercle donné.
197. - On considère deux plans sécants P et Q et un point A de P . Mener par A , dans le plan P la parallèle au plan Q .
198. - Mener, par deux points donnés A et B , le plan parallèle à une droite donnée. Discuter.
199. - Démontrer que si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre (ou contient cette autre).
200. - Une droite variable X rencontre une droite fixe D et reste parallèle à une autre droite fixe D' . Quel est le lieu de X ? (c'est-à-dire la surface engendrée par X).
201. - On considère deux droites parallèles X et Y et un segment de droite AB non parallèle au plan (X,Y) . Un plan variable passe par A et B et coupe X en M , Y en N .
 1° Montrer que la droite MN passe par un point fixe.

- 2° Quel est le lieu du point I, intersection des droites AM et BN ?
- 3° Quel est le lieu du point J, intersection des droites AN et BM ?
- 4° Quel est le lieu du point d'intersection des droites MN et IJ ?

202. - On considère deux demi-droites fixes X, et Y, non situées dans un même plan et d'origines respectives A et B.

M étant un point quelconque de X, on désigne par M' l'intersection de la parallèle à AB menée par M avec le plan P (plan parallèle à X et contenant Y).

- 1° Quel est le lieu de M'?
- 2° N étant un point quelconque de Y, I le milieu de MN et J le milieu de M'N, comparer IJ et AB en grandeur et direction.
- 3° Trouver le lieu de J si M et N varient de telle sorte que l'on ait constamment $AM = BN$. En déduire le lieu de I.
- 4° On suppose maintenant que X et Y sont orthogonales. Trouver le lieu de J si M et N varient de façon que M'N garde une longueur constante. En déduire le lieu de I.
- 5° X et Y étant toujours supposées orthogonales, trouver le lieu de J si l'on suppose maintenant que $AM + BN = 2k$, k étant une longueur donnée.

12. - PLANS PARALLÈLES

1. Positions relatives de deux plans.

Rappelons l'étude faite 9e leçon, § 12 :

1° Deux plans ayant en commun trois points non alignés sont confondus.

2° Deux plans distincts ayant en commun deux points A et B sont sécants suivant la droite AB.

3° Deux plans distincts ayant en commun un point A sont sécants suivant une droite passant par A.

Nous sommes alors amenés à nous poser la question :

deux plans peuvent-ils n'avoir aucun point commun ?

2. Théorème.

Si, par un point extérieur à un plan P, on mène deux droites distinctes parallèles à ce plan, le plan formé par ces deux droites n'a pas de point commun avec le plan P.

Hypothèse :

$Y \parallel P$

$Z \parallel P$

Y et Z forment un plan P'.

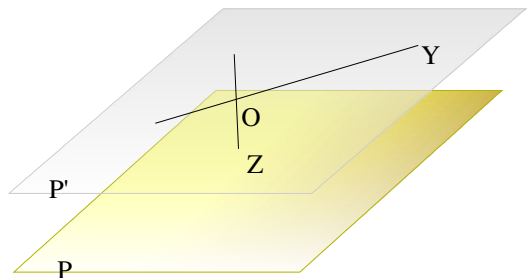
Conclusion : P et P' n'ont aucun point commun.

Les droites Y et Z menées par O parallèlement au plan P déterminent un plan P', distinct de P puisque

O est supposé non situé dans le plan P.

Si P et P' étaient sécants, leur intersection devrait être parallèle à la fois à Y et à Z (11e leçon, § 4), ce qui est impossible puisque Y et Z sont sécantes en O.

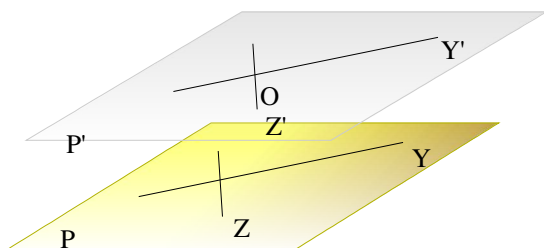
Les plans P et P' n'ont donc pas de point commun.



3. Définition.

Le théorème précédent, qui établit l'existence de plans n'ayant pas de point commun, justifie la définition suivante : deux plans sont dits parallèles s'ils n'ont aucun point commun.

4. Théorème.



Par un point extérieur à un plan :

1° on peut mener un plan parallèle au plan donné ; 2° on n'en peut mener qu'un seul.

1° On peut mener un plan parallèle à P.

D'après le théorème d'existence, il suffit de mener par O deux droites distinctes parallèles au plan P.

Pour cela menons, par O, deux droites Y' et Z' parallèles à deux droites Y et Z sécantes de P (11e leçon, § 2).

2° Prouvons que le plan obtenu est unique.

Supposons qu'il existe un autre plan R, passant par O et parallèle au plan P. Ce plan R, distinct de P', couperait au moins l'une des droites Y' ou Z', soit Y' par exemple. Le plan R, coupant Y', couperait sa parallèle Y (10e leçon, § 5) et, par suite, le plan P, ce qui est absurde.

5. Condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient parallèles.

La définition des plans parallèles, le théorème d'existence (§ 2) et le théorème précédent (§ 4) permettent d'énoncer divers résultats.

Par exemple :

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient parallèles est que l'un d'eux contienne deux droites sécantes parallèles à l'autre plan.

Ce qui peut aussi s'énoncer :

Pour que deux plans soient parallèles il faut et il suffit que l'un d'eux contienne deux droites sécantes parallèles à l'autre plan.

1° La condition est nécessaire.

En effet, si deux plans P et P' sont parallèles, ils n'ont, par définition, aucun point commun. Par suite, les droites de l'un des plans n'ont pas de point commun avec l'autre plan : toutes les droites de l'un sont parallèles à l'autre.

On peut donc trouver dans chaque plan deux droites (sécantes ou non) parallèles à l'autre plan.

2° La condition est suffisante.

Si un plan contient deux droites sécantes parallèles à un autre plan, nous avons établi (§ 2) que les deux plans étaient parallèles.

Notons aussi que l'on peut énoncer :

le lieu géométrique des droites menées par un point fixe O parallèlement à un plan fixe P, est le plan passant par O et parallèle à P.

6. Théorème.

Si deux plans sont parallèles à un même plan, ils sont parallèles entre eux.

Soient $P' \parallel P$ et $P'' \parallel P$. Si les plans P' et P'' étaient sécants, on pourrait, par un point de leur intersection, mener deux plans parallèles au plan P, ce qui est impossible (§ 4).

On dit parfois que les trois plans P, P', P'' sont parallèles (ce que l'on écrit $P \parallel P' \parallel P''$) ou qu'ils forment un ensemble, ou faisceau, de trois plans parallèles.

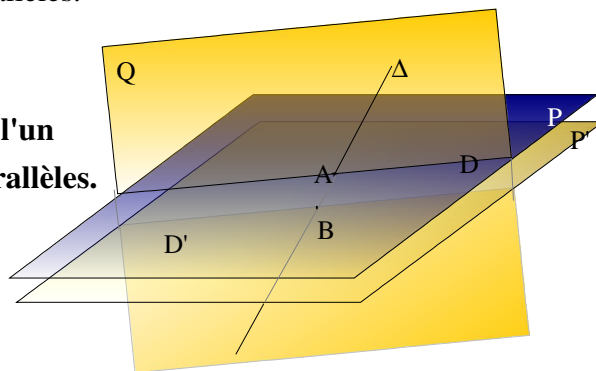
7. Théorème.

Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles.

Hypothèse :

$P \parallel P'$

Q coupe P suivant D.



Conclusion :

Q coupe P' (suivant D'), et $D' \parallel D$

1° Les plans P' et Q ne peuvent être confondus, car P serait parallèle à Q, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les plans P' et Q ne peuvent être parallèles : en effet, s'il en était ainsi, P et Q, parallèles à P', seraient parallèles (§ 6), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les plans P' et Q sont donc sécants (suivant la droite D').

2° a) D et D' sont dans le même plan Q.

b) Si D et D' avaient un point commun, ce point appartiendrait aux plans P et P', ce qui est absurde.

8. Théorème.

Si deux plans sont parallèles, toute droite qui perce l'un perce l'autre.

Soient $P \parallel P'$, et Δ qui perce P (voir figure précédente).

a) Prouvons que Δ et P' ont un point commun.

Soit A le point où la droite Δ perce le plan P. Menons, par A, une droite quelconque D du plan P, et soit Q le plan (D, Δ). Les plans P et Q sont distincts, car Δ n'est pas dans le plan P ; ils se coupent suivant D.

Le plan Q, qui coupe P suivant D, coupe P' suivant D' parallèle à D (§ 7). Dans le plan Q, la droite Δ , qui coupe D, coupe sa parallèle D' (livre de 4e, p. 235) : donc Δ coupe P'.

b) Prouvons que A et P' n'ont qu'un point commun.

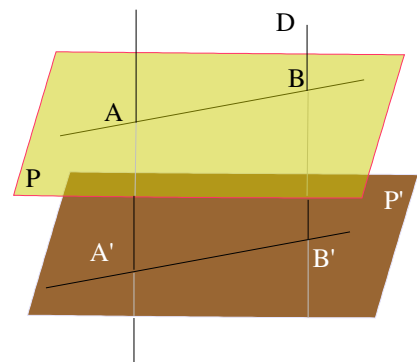
Soit B l'intersection de Δ et D'. Si Δ avait un autre point, soit C, commun avec le plan P', elle serait dans P' ; en particulier, A serait dans P', ce qui est contraire à l'hypothèse.

9. Théorème.

Deux plans parallèles découpent des segments égaux sur deux droites parallèles qu'ils rencontrent.

Les droites parallèles Δ et D (fig. 6) déterminent un plan R qui coupe les plans P et P' suivant les parallèles A'B' et AB (§ 7).

Le quadrilatère ABB'A' est donc un parallélogramme et, par suite $AA' = BB'$.



10. Théorème de Thalès en géométrie dans l'espace.

Si plusieurs plans parallèles sont percés par deux droites, les segments déterminés sur l'une des droites sont proportionnels aux segments correspondants déterminés sur l'autre.

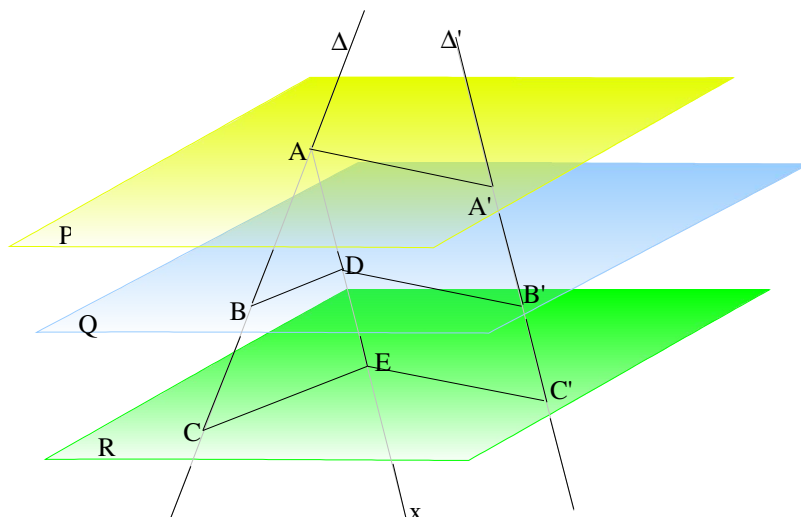
Hypothèse : $P \parallel Q \parallel R$.

Conclusion : $AB/A'B' = BC/B'C'$

1° Si les sécantes Δ et Δ' sont dans un même plan, les droites AA' , BB' , CC' (fig. 7) sont parallèles (§ 7) et l'on est ramené au théorème de Thalès en géométrie plane (livre de 3e).

2° Nous supposons donc que les sécantes ne sont pas coplanaires (fig. 7).

Par l'un des points d'intersection d'une droite et d'un plan, A par exemple, menons la parallèle Ax à Δ' ; elle coupe Q en D et R en E.



Le plan (Δ, Ax) coupe les plans parallèles Q et R suivant les parallèles BD et CE. Appliquons à cette figure plane le théorème de Thalès (livre de 3e) :

$$AB/AD = BC/DE \quad (1)$$

D'après le théorème précédent : $AD = A'B'$ et $DE = B'C'$.

L'égalité (1) peut donc s'écrire :

$$AB/A'B' = BC/B'C' \quad (2)$$

Pour la même raison

$$AB/A'B' = BC/B'C' = AC/A'C'$$

11. Forme algébrique du théorème de Thalès.

Les rapports de segments écrits ci-dessus sont des rapports arithmétiques.

Or, si l'on oriente d'une façon quelconque les droites Δ et Δ' , on peut considérer les rapports de mesures algébriques AB/BC , $A'B'/B'C'$

Puisque les points A, B, C de Δ et les points A', B', C' de Δ' ont même disposition relative, les rapports de mesures algébriques AB/BC , $A'B'/B'C'$ ont le même signe.

Or l'égalité (2) pouvant s'écrire $AB/BC = A'B'/B'C'$, on en déduit l'égalité des rapports des mesures algébriques.

12. Réciproque du théorème de Thalès.

Si l'on considère deux groupes de points A, B, C et A', B', C', situés respectivement sur deux droites non coplanaires Δ et Δ' , et tels que les rapports de mesures algébriques AB/BC , $A'B'/B'C'$ sont

égaux, alors les droites AA' , BB' , CC' sont parallèles à un même plan.

Remarquons d'abord que les droites AA' et BB' ne sont pas parallèles, sinon elles définiraient un plan qui contiendrait Δ et Δ' , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si l'on mène par A la parallèle Az à BB' , on définit un plan P parallèle à BB' (fig. 8).

Menons par B et C les plans parallèles à P.

Puisque BB' est parallèle à P, les points d'intersection de Δ et Δ' avec ces plans sont B' , d'une part, et C' , d'autre part, tels que $AB/BC = A'B'/B'C''$ (Théorème de Thalès).

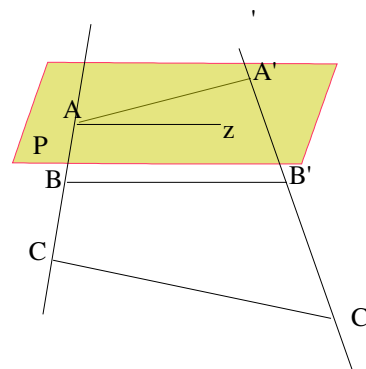
En comparant à l'hypothèse (relation 3), on en déduit

$$B'C'' = B'C'$$

ce qui montre que les points C'' et C' sont confondus.

La droite CC' est donc contenue dans un plan parallèle au plan P. Elle est parallèle au plan P.

Les droites AA' , BB' , CC' sont donc parallèles à un même plan.



EXERCICES

203. - Démontrer que si deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à l'autre.

204. - Démontrer que si deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre (ou contenue dans cet autre).

205. - On donne deux plans parallèles et une droite X dans l'un d'eux. Par un point de l'autre plan, on mène Y parallèle à X. Démontrer que Y est dans cet autre plan.

206. - Démontrer que si deux droites ne sont pas dans un même plan, les plans menés par chacune d'elles parallèlement à l'autre sont parallèles.

207. - Démontrer que si deux plans sont respectivement parallèles à deux plans sécants, l'intersection des deux premiers est parallèle à l'intersection des deux derniers.

208. - On donne deux plans parallèles, trois points A, B, C dans l'un, trois points A', B', C' dans l'autre. Dessiner l'intersection des plans AA'C' et BB'C.

209. - Trois droites concourantes sont coupées en A, B, C par un plan P. Démontrer que le triangle ABC reste semblable à lui-même quand P se déplace parallèlement à lui-même.

210. - Le plan P est parallèle au plan Q, lequel est parallèle à R, lequel est parallèle à S. Démontrer que deux quelconques de ces quatre plans sont parallèles. Généraliser : faisceau de n plans

parallèles.

211. - On donne deux droites X, Y non situées dans un même plan, un point A sur X , un point A' sur Y . Un plan P passe par AA' . Un plan mobile P' parallèle à P , coupe X en M et Y en M' .
Démontrer qu'il existe deux positions du plan P pour lesquelles on a constamment $AM = A'M'$ et les déterminer.

212. - On donne deux droites Y et Z . Un plan fixe P les coupe en A et B et un plan mobile parallèle au plan P , les coupe en M et N . Démontrer que le rapport BN/AM reste constant.

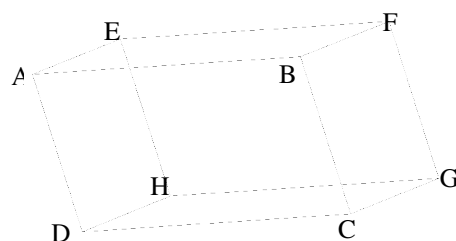
213. - Démontrer que tout plan parallèle à deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche partage les deux autres côtés en segments de même nature proportionnels.

Réciproquement, soient E et F les points qui divisent les côtés AB et DC d'un quadrilatère gauche $ABCD$ en segments de même nature proportionnels. Démontrer que les droites AD, BC, EF sont parallèles à un même plan.

214. - On donne un triangle ABC et une droite X ; soit G le point de concours des médianes de ce triangle. Les plans menés par A, B, C, G parallèlement à un plan fixe P coupent X en A', B', C', G' . On prend sur X un point O extérieur aux segments $A'B', B'C', C'A'$. Démontrer que :
 $3 OG' = OA' + OB' + OC'$.

215. - Un bloc de pierre $ABCDEFGH$ a la forme d'un parallélépipède (six faces deux à deux parallèles). On veut le scier par le plan MNP déterminé comme il est précisé ci-dessous. Dessiner la section et indiquer le tracé de la section que doit effectuer le marbrier dans chacun des cas suivants :

- M est en A , N est sur l'arête EF , P dans la face $ABCD$.
- M, N, P sont respectivement sur les arêtes DH, CG, AB .
- M, N, P sont respectivement sur les arêtes DC, CB, BF .



216. - Soient deux demi-droites fixes D et D' non situées dans le même plan et d'origines respectives A et B . On mène par D' le plan Q parallèle à D et par M , point variable de D , la parallèle à AB . Cette droite perce Q en R .

1° Quelle ligne fixe décrit R ?

2° N étant le point de D' tel que $BR = BN$, montrer que le plan MRN reste parallèle à un plan fixe.

3° On suppose, dans cette seule question, que D et D' sont orthogonales. M étant variable sur D , on considère le point S de D' tel que RS garde une longueur constante. Quel est le lieu du milieu de RS ?

4° P étant un plan donné parallèle à AB , montrer qu'il existe une infinité de droites parallèles à P et s'appuyant sur D et D' .

5° Soit MM' une droite variable de cette famille. CE étant une droite fixe de cette famille (C sur D , E sur D'), montrer que AM/BM' reste constant lorsque MM' varie.

6° Dans la même hypothèse, préciser comment se déplace RM' et trouver le lieu du point L qui partage algébriquement MM' dans un rapport donné k .

217. -Soient deux plans parallèles P et P' . On considère dans le plan P un parallélogramme $ABCD$. On mène par A, B, C, D quatre droites parallèles entre elles et non situées dans P . Elles coupent respectivement le plan P' en A', B', C', D' .

1° Quelle est la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$?

2° Montrer que les plans $A'BD$ et $CB'D'$ sont parallèles. En déduire qu'ils coupent AC' en trois segments égaux.

3° On désigne par M et N les intersections de AC' avec les plans $A'BD$ et $CB'D'$. Montrer que M et N sont respectivement les centres de gravité des triangles $A'BD$ et $CB'D'$.

4° On désigne par O le milieu de AC' . Quelle est la nature du quadrilatère $AA'C'C$? En déduire que $A'C$ passe par O . Démontrer qu'il en est de même de DB' et $D'B$.

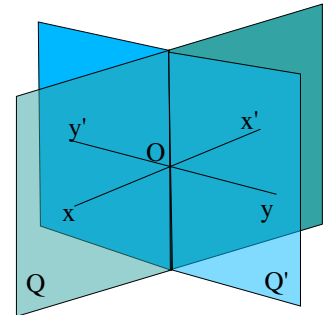
5° On mène par le point O le plan parallèle au plan $A'BD$. Montrer que ce plan coupe $BC, BB', CD, DD', A'D', A'B'$ en 6 points qui sont les sommets d'un hexagone dont les côtés opposés sont égaux et parallèles.

13. - DROITE ET PLAN PERPENDICULAIRES

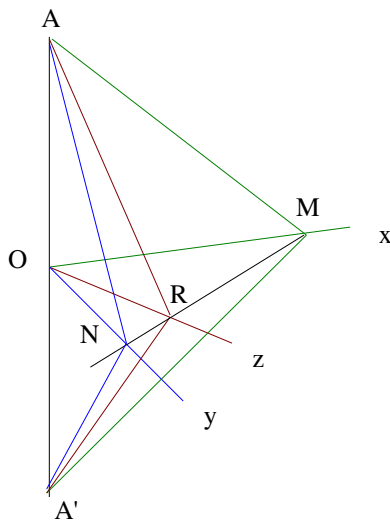
1. Droites perpendiculaires à une droite donnée en un point de celle-ci.

Considérons une droite Δ et un point fixe O de cette droite (fig. 1). Dans chaque plan Q passant par Δ il existe une perpendiculaire en O à Δ (livre de quatrième).

Nous nous proposons d'étudier l'ensemble des droites obtenues $x'Ox$, $y'Oy$... lorsque l'on considère tous les plans Q contenant Δ .



2. Lieu géométrique des droites perpendiculaires à une droite en un point de celle-ci.



1° Soient deux droites distinctes Ox et Oy perpendiculaires en O à la droite Δ .

Ces droites déterminent un plan P , nous allons démontrer que toute droite menée par O dans le plan P est perpendiculaire à Δ . Soit Oz une telle droite (fig. 2) et A un point de Δ .

Traçons, dans le plan P , une droite coupant Ox , Oy , Oz en M , N , R .

Prolongeons AO d'une longueur OA' égale à OA et joignons A et A' aux points M , N , R .

Les droites Oy et Ox sont médiatrices du segment AA' ; par suite :

$NA = NA'$ et $MA = MA'$. Les triangles AMN et $A'MN$ sont donc égaux (3e cas d'égalité).

Par suite les angles $AMR = A'MR$.

Comparons les triangles AMR et $A'MR$; ils ont :

$MA = MA'$; les angles $AMR = A'MR$; MR commun.

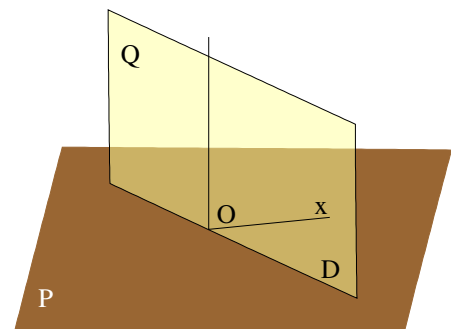
Ils sont égaux (2e cas). Donc : $RA = RA'$.

Le triangle RAA' est isocèle ; par suite sa médiane RO est perpendiculaire sur la base AA' . Donc Δ est perpendiculaire à Oz .

2° Nous allons démontrer que toute droite perpendiculaire en O à la droite Δ est contenue dans le plan P .

Soit Ox une telle droite (fig. 3). Les droites Δ et Ox déterminent un plan distinct de P . Les plans P et Q ayant le point O en commun sont sécants suivant une droite D .

D'après la partie directe, D , contenue dans P , est perpendiculaire en O à Δ . Or, dans le plan Q , on ne peut mener par O qu'une seule perpendiculaire à la droite Δ . Les droites



Ox et D sont donc confondues ; la droite Ox est bien dans le plan P.
Ces deux démonstrations peuvent se traduire par l'énoncé suivant.

Théorème.

Le lieu géométrique des droites perpendiculaires à une droite en un point de celle-ci est le plan déterminé par deux quelconques de ces perpendiculaires.

3. Définition.

Remarquons que toutes les droites du plan P (fig. 2) sont orthogonales à la droite Δ puisque les parallèles menées par O sont dans P, donc sont perpendiculaires à Δ .

Ainsi, il existe des droites qui sont perpendiculaires, ou orthogonales, à toutes les droites d'un plan. Ce qui justifie la définition suivante :

une droite est dite perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale, ou perpendiculaire, à toutes les droites de ce plan.

On dit aussi que la droite est normale au plan, ou que le plan est perpendiculaire (ou normal) à la droite, ou encore que, la droite et le plan sont perpendiculaires.

4. Théorème.

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.

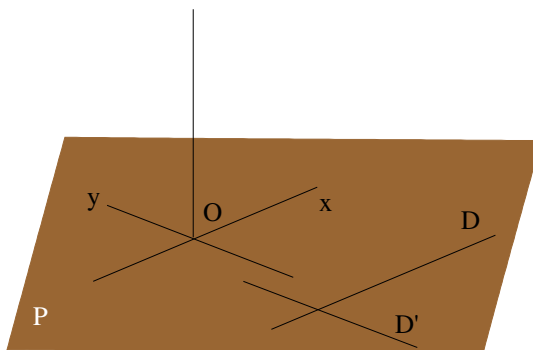
Soit Δ une droite orthogonale à deux droites D et D' sécantes, situées dans un plan P.

a) La droite Δ n'est pas dans le plan P, car, s'il en était ainsi, les droites D et D', perpendiculaires à une même droite Δ du plan P, seraient parallèles.

b) La droite Δ n'est pas parallèle au plan P, car, s'il en était ainsi, la parallèle à Δ , menée par un point du plan P, serait perpendiculaire à D et D', lesquelles seraient parallèles.

c) La droite Δ perce donc le plan P (en un point O).

Par le point O (fig. 4), menons les droites Ox et Oy, parallèles à D et D'. La droite Δ , qui est orthogonale à D et D', est perpendiculaire à Ox et Oy ; donc Δ est perpendiculaire à P (§ 2).



Il résulte de ce qui précède :

une condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan est qu'elle soit orthogonale (ou perpendiculaire) à deux droites sécantes de ce plan.

La condition est nécessaire : conséquence de la définition (§ 3).

La condition est suffisante : conséquence du théorème (§ 4) lequel résulte de l'étude de la partie directe du lieu (§ 2).

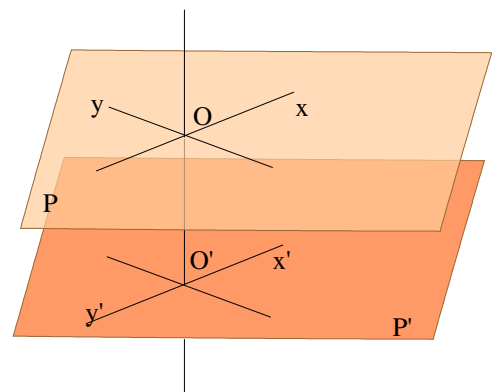
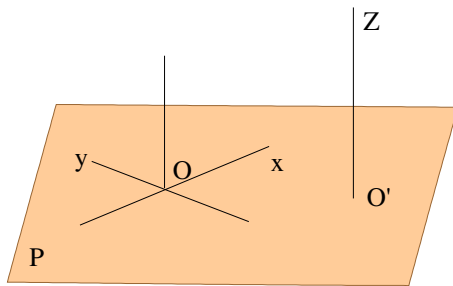
5. Conséquences.

1° Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Si Δ et P sont perpendiculaires (fig. 5), le plan P coupe Δ et, par suite, coupe aussi la parallèle Z à Δ (10e leçon, § 5).

Menons, dans le plan P , par le point d'intersection O de Δ et P , deux droites Ox et Oy . Par hypothèse, Δ est perpendiculaire à Ox et Oy . Mais la parallèle Z à Δ est alors orthogonale à Ox et Oy .

Z est donc perpendiculaire au plan P (§ 4).



2° Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Δ et P étant perpendiculaires, Δ perce P en un point O et par suite perce le plan P' parallèle à P en un point O' (12e leçon, § 8).

Menons par O (fig. 6) et dans le plan P deux droites Ox et Oy .

Menons par O' les parallèles $O'x'$ et $O'y'$, à Ox et Oy . Ces droites sont contenues dans P' puisque Ox et Oy sont parallèles à P' (11e leçon, § 6). Δ étant perpendiculaire à Ox et Oy par hypothèse, est perpendiculaire à $O'x'$ et $O'y'$, donc est perpendiculaire au plan P' .

EXERCICES

218. - Mener, par un point A , une droite qui soit orthogonale à une droite Δ et parallèle à un plan P .

219. - On donne deux plans P et Q sécants suivant la droite Y . Par un point A de Y , on mène une droite AB dans le plan P . Construire la droite AC du plan Q telle que l'angle BAC soit droit.

220. - Une droite Z est orthogonale à deux droites D et D' non parallèles. Démontrer que Z est perpendiculaire à tout plan P parallèle à D et à D' . En est-il de même si D et D' sont parallèles?

221. - Démontrer que si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale ou perpendiculaire à toute droite parallèle à ce plan.

222. - Une droite X est perpendiculaire à un plan P et orthogonale à une droite Y. Démontrer que la droite Y est parallèle au plan P ou contenue dans ce plan.

223. - On donne deux droites D et E non situées dans un même plan. Mener, par un point donné A, une droite orthogonale aux droites D et E.

224. - Démontrer que si deux droites sont orthogonales, on peut faire passer, par l'une quelconque d'entre elles, un plan perpendiculaire à l'autre. Réciproque.

225. - Une droite X est perpendiculaire à un plan P ; une droite D n'est pas parallèle au plan P. Démontrer que D et X ne sont pas orthogonales.

226. - Par deux points A et B d'une droite D, on mène deux segments AA' et BB', de même longueur, perpendiculaires à D, non situés dans un même plan. Soient O et O' les milieux des segments AB et A'B'. Démontrer que OO' est perpendiculaire sur AB et sur A'B'.

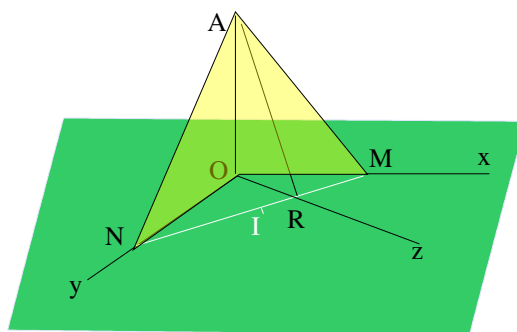
227. - Autre démonstration du théorème direct § 2.
Sur Ox et Oy prendre respectivement deux points M et N tels que OM = ON. Soit I le milieu de MN (fig. 7).

1° Démontrer que le triangle MAN est isocèle.

2° En utilisant, dans les triangles ANR et ONR, le théorème relatif à la différence des carrés de deux côtés (3e leçon, § 4), montrer que :

$$OR^2 - ON^2 = AR^2 - AN^2.$$

3° En utilisant le triangle rectangle AON, montrer que $AR^2 = OA^2 + OR^2$. En déduire que OA est perpendiculaire à Oz.



228. - Sur trois demi-droites Ox, Oy, Oz perpendiculaires deux à deux, on considère trois points A sur Ox, B sur Oy, C sur Oz.

1° Démontrer que les droites AB et OC sont orthogonales et qu'il en est de même de BC et OA, de CA et OB.

2° Soit H le point où la perpendiculaire menée de O au plan ABC perce ce plan. Démontrer que AB est perpendiculaire au plan OCH. En déduire que H est orthocentre du triangle ABC.

3° On rappelle que dans un triangle rectangle, l'inverse du carré de la hauteur est égal à la somme des inverses des carrés des côtés de l'angle droit. Démontrer alors que

$$1/OH^2 = 1/OA^2 + 1/OB^2 + 1/OC^2$$

4° Démontrer que l'aire du triangle OAB est moyenne proportionnelle entre les aires des triangles ABC et HAB.

5° Démontrer que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des

triangles OAB, OBC, OCA.

229. - On considère dans un plan fixe P deux droites X et Y sécantes en un point fixe A. D'un point fixe O, extérieur à P, on abaisse la perpendiculaire OH sur ce plan. On suppose H non situé sur X ni sur Y.

1° M et N étant les points respectifs où les perpendiculaires menées par O aux plans (O,X) et (O,Y) percent P, montrer que OA est perpendiculaire au plan OMN.

2° Montrer que AH est perpendiculaire à MN. A' étant l'intersection de AH et MN, trouver une relation entre OH, AH et A'H.

3° MH coupant Y en B et NH coupant X en C, montrer que H est orthocentre du triangle ABC.

Que peut-on dire des droites BC et MN ?

4° Quel est le lieu de M et N lorsque X et Y pivotent autour de A?

5° X étant fixé, peut-on déterminer la position de Y pour que le triangle MON soit rectangle en O?

6° Par un point R de MC on mène le plan parallèle aux droites AC et OM. Ce plan coupe AM en S, OA en T, OC en U. Quelle est la nature du quadrilatère RSTU?

14. - DROITE ET PLAN PERPENDICULAIRES (suite)

1. Théorème (dit des trois perpendiculaires).

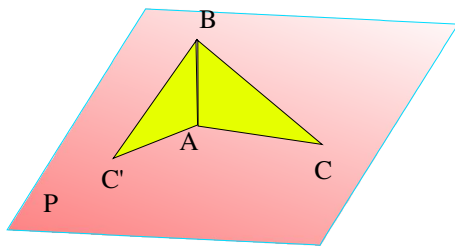
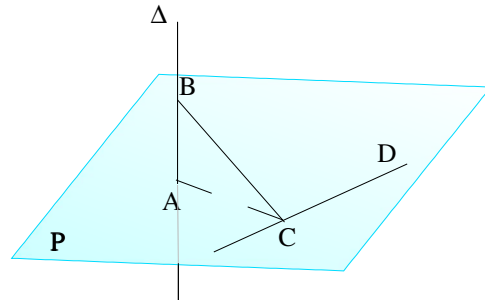
Si par un point B quelconque d'une droite perpendiculaire en A à un plan P, on mène la perpendiculaire BC à une droite D quelconque du plan P, la droite AC est perpendiculaire à D.

La droite BA, perpendiculaire au plan P, est orthogonale à D, droite de ce plan.

Par hypothèse, la droite AC est perpendiculaire à D.

La droite D, perpendiculaire ou orthogonale aux droites sécantes AC et AB, est perpendiculaire au plan ABC et par suite à AC, droite de ce plan.

Il existe deux réciproques de ce théorème (Voir exercices n° 238 et n° 239).



2. Problème. - Mener, par un point A, une perpendiculaire à un plan P.

1er cas.-Le point A est dans le plan P.

a) Par A, on peut mener une perpendiculaire au plan P.

Méthode pratique.

Fixons deux équerres l'une à l'autre de manière qu'elles aient en commun le côté OB de l'angle droit (fig. 3), sans être dans le même plan.

Plaçons-les de manière que O soit en A, et que les autres côtés OC et OC' des angles droits soient dans le plan P ; la droite AB, qui est perpendiculaire aux droites distinctes OC et OC' du plan P, est perpendiculaire au plan P.

Théoriquement.

Menons, dans le plan P, une droite quelconque Ax. Une droite perpendiculaire en A à P est perpendiculaire à Ax.

Or, le lieu des droites perpendiculaires en A à Ax est un plan Q (13e leçon, § 2). Ce plan, ne contenant pas Ax, est distinct de P.

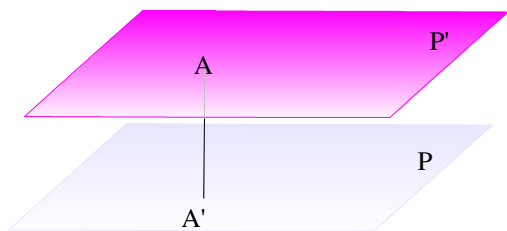
Le point A étant commun aux plans P et Q, ceux-ci se coupent suivant une droite Ay.

Si l'on trace par A, dans le plan Q, la droite X perpendiculaire à Ay, cette droite est bien perpendiculaire à P.

b) Par A, on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan P.

Si l'on pouvait mener, par A, deux perpendiculaires AB et AB' au plan P leur plan Q couperait le

plan P suivant une droite Y qui serait perpendiculaire à AB et AB'. Dans le plan Q, on pourrait donc mener, par A, deux perpendiculaires à X, ce qui est absurde.



2e cas. - Le point A est extérieur au plan O.

S'il existe une droite X passant par A et perpendiculaire au plan P, elle est perpendiculaire au plan P' mené par A et parallèle à P (13e leçon, § 5, 2°). Inversement, la droite X, perpendiculaire à P' en A, est perpendiculaire au plan P.

Ainsi, le problème revient à mener une droite perpendiculaire à P' en A (1er cas); on a vu qu'il existe une droite et une seule, solution du problème.

En résumé, on peut énoncer :

Théorème :

Par un point, on peut mener une perpendiculaire à un plan et l'on n'en peut mener qu'une.

A l'atelier, pour tracer une perpendiculaire à un plan, on utilise l'équerre à trois branches qui présente trois arêtes (fig. 8) ; l'une quelconque de ces arêtes est perpendiculaire au plan formé par les deux autres.

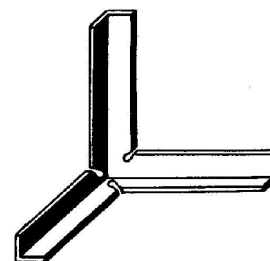
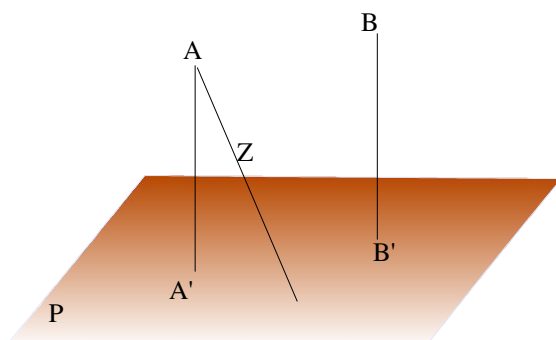


Fig. 8.

Conséquence du théorème précédent.

Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, elles sont parallèles.

Soient deux droites X et Y perpendiculaires au plan P (fig. 9). Par un point quelconque A de X, menons la parallèle D à Y.



La droite D est perpendiculaire au plan P (13e leçon, § 5, 1°). Les droites D et X passent par A et sont perpendiculaires au plan P : elles sont confondues et, par suite, X et Y sont parallèles.

3. Problème. - Mener, par un point A, un plan perpendiculaire à une droite X donnée.

1er cas. - Le point A est sur la droite X.

On a démontré que le lieu des droites perpendiculaires en A à X était le plan perpendiculaire en A à X (13e leçon, § 2). Il suffit donc de construire ce plan comme il a été dit.

2e cas. - Le point A est en dehors de la droite X.

Menons par A, la droite Y parallèle à X.

Un plan perpendiculaire à X est perpendiculaire à Y (13e leçon, § 5, 1°) et, inversement, un plan perpendiculaire à Y est perpendiculaire à X.

Le problème revient donc à mener, par A, le plan perpendiculaire à Y (1er cas).

D'où l'énoncé :

Théorème.

Par un point, on peut mener un plan perpendiculaire à une droite et l'on n'en peut mener qu'un.

Conséquence.

Deux plans distincts perpendiculaires à la même droite sont parallèles.

En effet, si ces plans distincts étaient sécants, on pourrait mener, d'un point de leur intersection, deux plans perpendiculaires à la même droite, ce qui est contraire au théorème précédent.

EXERCICES

230. - Une droite X est oblique à un plan P . Démontrer qu'il existe une infinité de droites D du plan P , toutes parallèles entre elles, qui sont orthogonales à X .

231. - Deux droites X et Y sont respectivement perpendiculaires à deux plans P et P' . Si P et P' sont parallèles, démontrer que X et Y sont parallèles. Réciproque.

232. - On donne deux droites D et D' non situées dans un même plan. Soient A et B deux points de D , O le milieu de AB . On mène les perpendiculaires AA' , BB' , OO' sur D' . Démontrer que O' est le milieu de $A'B'$.

233. - On donne deux droites D et D' non situées dans un même plan. Par deux points A et B de D , on mène les perpendiculaires AA' et BB' sur D' . Soient I et I' les points qui divisent AB et $A'B'$ en segments de même nature dans le rapport k . Démontrer que II' est perpendiculaire sur D' .

234. - Une droite Y est oblique à un plan P . Deux droites distinctes D et D' du plan P sont orthogonales à Y . Démontrer que D et D' sont parallèles.

235. - On donne, dans un plan P , un triangle ABC rectangle en A ; $BC = a$, $\angle C = 30^\circ$. On mène $AD = b$ perpendiculaire au plan P . Calculer la distance du point D à la droite BC .

Application numérique : $a = 6$ cm, $b = 5$ cm.

236. - On donne un point A dans un plan P et un point B extérieur à ce plan. Mener par A , dans le plan P , une droite située à une distance donnée d du point B .

237. - On donne deux points A et B extérieurs à un plan P . Tracer une droite X du plan P connaissant les distances k et m des points A et B à X .

238. - Première réciproque du théorème des trois perpendiculaires. Si la droite X est perpendiculaire en A à un plan P , et si B est le pied de la perpendiculaire menée de A sur une droite D quelconque

de P , alors toute droite joignant B à un point quelconque de X est perpendiculaire à D .

239. - Deuxième réciproque du théorème des trois perpendiculaires. Si d'un point M extérieur à un plan P , on mène la perpendiculaire MB sur une droite D quelconque de P , et si, dans P , on mène par B la perpendiculaire D' à D , alors la droite menée de M perpendiculaire à D' est perpendiculaire au plan P .

15. - DISTANCES

1. DISTANCE D'UN POINT A UN PLAN

1. Définitions.

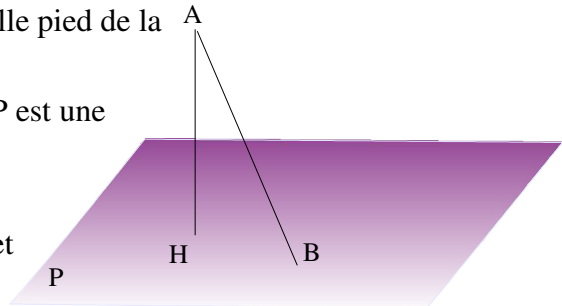
Étant donné un plan P et un point A non situé dans P , on sait que l'on peut mener par A une seule perpendiculaire au plan P (14e leçon, § 2).

Le point où cette perpendiculaire perce le plan P s'appelle pied de la perpendiculaire ; point H .

Toute autre droite passant par A et rencontrant le plan P est une oblique ; exemple: AB .

Le segment HB est l'écartement de l'oblique AB .

Dans ce chapitre, par convention, les perpendiculaires et obliques seront des segments limités au point A et au plan P .



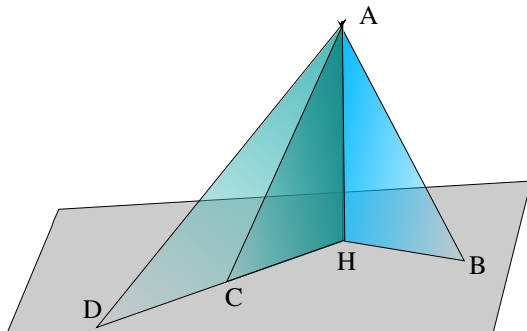
2. Théorème.

Si, par un point extérieur à un plan, on mène, à ce plan, la perpendiculaire et diverses obliques :

1° la perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;

2° deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales ;

3° deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire sont inégales et celle qui s'en écarte le moins est la plus petite.



1° Dans le plan AHB , la perpendiculaire AH à la droite HB est plus courte que l'oblique AB .

2° Les triangles rectangles AHB et AHC sont égaux (2e cas d'égalité). Donc $AB = AC$.

3° Prenons, sur HD , le point C tel que $HC = HB$. Le point C est entre H et D . Dans le plan AHD , on a (livre de 4e) : $AC < AD$ ou $AB < AD$.

On peut énoncer et démontrer par l'absurde, à titre d'exercice, les réciproques des trois parties de ce théorème.

3. Définition.

D'après le théorème précédent, la longueur AH est la plus courte des distances de A aux points du plan P ; cette longueur AH s'appelle la distance du point A au plan P .

La distance d'un point à un plan est la longueur du segment de la perpendiculaire menée de ce point au plan (segment limité au point et au plan).

II. DISTANCE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN PARALLÈLES

4. Théorème.

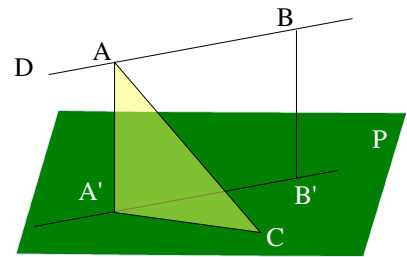
Si une droite et un plan sont parallèles, tous les points de la droite sont équidistants du plan.

A et B étant deux points quelconques de la droite D parallèle au plan P, les droites AA' et BB', perpendiculaires au plan P, sont parallèles. Elles déterminent un plan qui coupe P selon une droite A'B' parallèle à AB. Le quadrilatère AA'B'B est donc un rectangle. Par suite : $AA' = BB'$.

5. Définition.

D'après le théorème précédent, tous les points de la droite D, parallèle au plan P, sont à égale distance de ce plan ; cette distance, mesurée par exemple sur AA', est plus courte que la longueur de toute oblique AC, joignant un point A quelconque de D à un point quelconque de P (fig. 4), car le triangle AA'C étant rectangle en A', on a $AA' < AC$.

La longueur $AA' = BB' = \dots$, qui est la plus courte distance d'un point quelconque de D à un point quelconque de P, est appelée distance de la droite D au plan parallèle P.



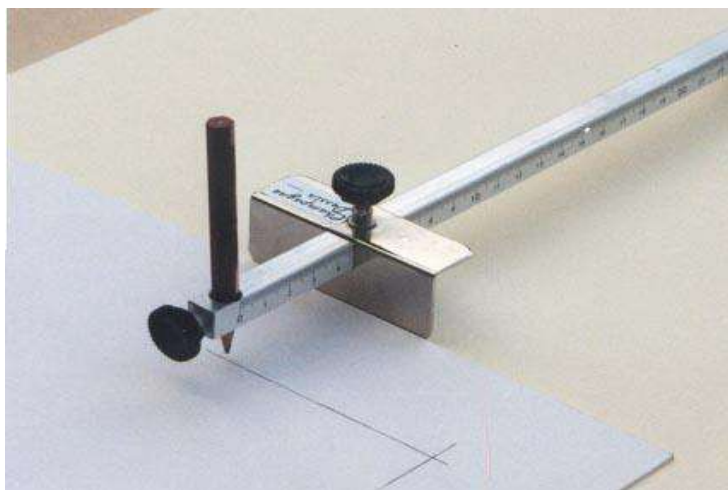
La distance d'une droite et d'un plan parallèles est la distance d'un point quelconque de la droite à ce plan.

6. Application pratique.

Tracé, à l'atelier, d'une droite parallèle à un plan.

Si tous les points d'une droite sont équidistants d'un plan, cette droite est parallèle au plan.

La pointe M d'un trusquin de menuisier ou d'un trusquin d'ajusteur se déplace en restant à distance constante d'un plan fixe : elle décrit une droite parallèle à ce plan.



III. DISTANCE DE DEUX PLANS PARALLÈLES

7. Théorème.

Si deux plans sont parallèles, tous les points de l'un sont équidistants de l'autre.

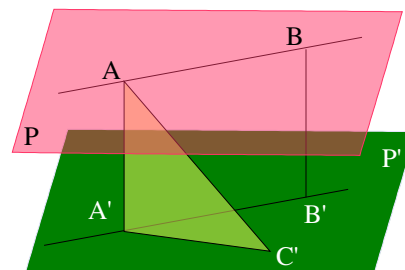
A et B étant deux points quelconques du plan P, les droites AA' et BB', perpendiculaires au plan P, sont parallèles. Elles déterminent un plan qui coupe P et P' selon deux droites parallèles AB et A'B'. Le quadrilatère ABB'A' est un rectangle. Donc : $AA' = BB'$.

8. Définition.

D'après le théorème précédent, tous les points de l'un des deux plans parallèles P et P' sont à égale distance de l'autre plan; cette distance, AA' par exemple, est plus courte que la longueur de toute oblique, AC' par exemple joignant un point quelconque A de P à un point quelconque C' de P', car le triangle AA'C' est rectangle en A'.

La longueur $AA' = BB' = \dots$, plus courte distance d'un point quelconque de P à un point quelconque de P', est appelée distance des plans parallèles P et P'.

La distance de deux plans parallèles est la distance d'un point quelconque de l'un des plans à l'autre.



9. Application pratique.

On vérifie, à l'atelier, le parallélisme de deux plans en comparant leur distance en différents points, soit avec un compas d'épaisseur, soit avec un compas d'intérieur.

IV. PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES

10. Perpendiculaire commune à deux droites.

Considérons deux droites D et Y et cherchons s'il existe une droite qui soit perpendiculaire à chacune d'elles.

1er cas. - Les droites D et Y sont parallèles.

Elles ont, dans leur plan, une infinité de perpendiculaires communes.

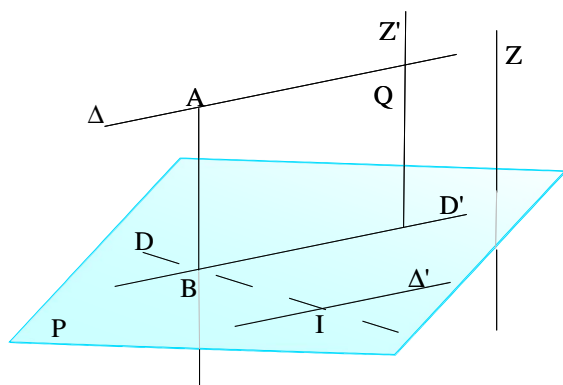
2e cas. - Les droites D et Y sont sécantes.

S'il existe une droite X perpendiculaire aux deux droites sécantes D et Y , la droite X doit être perpendiculaire au plan déterminé par D et Y (13e leçon, § 4).

Inversement, on vérifie que la perpendiculaire en O (point d'intersection de D et Y) au plan (D, Y) répond à la question.

Il existe une perpendiculaire commune à D et A .

3e cas. - Les droites D et Y ne sont pas coplanaires (cas général).



S'il existe une droite X perpendiculaire aux deux droites quelconques D et Y , cette droite est perpendiculaire au plan P contenant D et parallèle à Z . (Ce plan est obtenu en menant par un point quelconque I de D la parallèle D' à Y .) Soit Z une droite perpendiculaire à ce plan P .

La droite X cherchée, si elle existe, doit s'appuyer sur D et être parallèle à Z . Elle est donc située dans le plan Q contenant A et parallèle à Z .

Le plan Q coupe le plan P suivant une droite D' , parallèle à Y (11e leçon, § 4) et, par suite, D perce le plan Q en un point B .

Inversement, la droite menée par A , parallèlement à la direction Z , rencontre perpendiculairement les droites D et Y .

Ainsi, il existe une droite, appelée perpendiculaire commune, qui rencontre perpendiculairement les droites D et Y . Les points A et B sont les pieds de la perpendiculaire commune.

11. Plus courte distance de deux droites.

Comparons la longueur AB à la longueur d'un segment joignant un point quelconque M de X à un point quelconque N de D .

Désignons par M' le pied de la perpendiculaire menée de M au plan P :

$$AB = MM' \text{ (§ 4)}$$

$$\text{et } MM' < MN \text{ (§ 2)}$$

Par suite $AB < MN$.

Donc, le segment qui joint les pieds de la perpendiculaire commune à deux droites D et Y est le plus court de tous les segments dont les extrémités sont sur D et Y .

La longueur AB est dite la plus courte distance des deux droites D et D' .

La plus courte distance de deux droites est égale à la distance d'un point quelconque de l'une d'elles au plan mené par l'autre parallèlement à la première.

Elle est encore égale à la distance des deux plans parallèles obtenus en menant, par chaque droite, le plan parallèle à l'autre droite.

V. APPLICATIONS

12. Points équidistants de deux points donnés.

Soient A et B deux points fixes et M un point tel que $MA = MB$. Le point O étant le milieu de AB , la droite MO est perpendiculaire à AB .

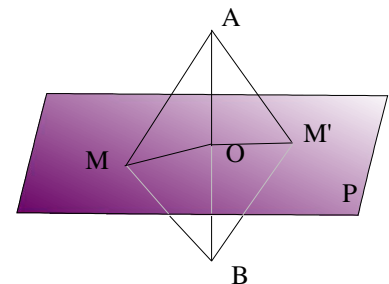
Par suite le point M est situé dans le plan perpendiculaire en O à AB .

Réciproquement, M' étant un point quelconque du plan P , la droite AB est perpendiculaire à OM' . Le point O étant le milieu de AB , la droite OM' est une médiatrice du segment AB et par suite $M'A = M'B$.

D'où l'énoncé :

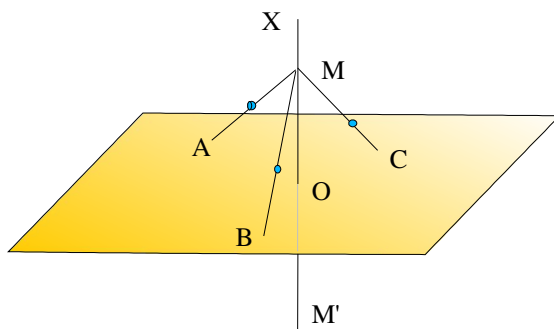
l'ensemble des points équidistants de deux points fixes A et B est le plan perpendiculaire au segment AB en son milieu.

Ce plan est dit plan médiateur du segment AB .



13. Points équidistants de trois points donnés.

Soient trois points donnés A, B, C . Si ces points sont alignés il est clair qu'il n'y a pas de point situé à égale distance de A, B et C .



Nous supposons donc A, B, C non alignés.

Ils déterminent un plan P (fig. 12).

Soit M un point tel que $MA = MB = MC$ et soit X la perpendiculaire menée de M au plan P .

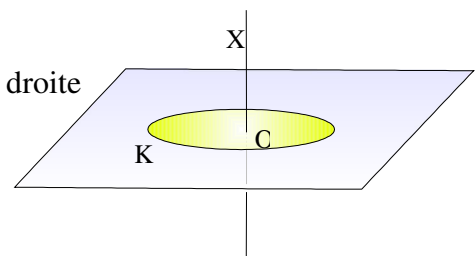
Désignons par O son pied.

Les triangles rectangles AOM, BOM, COM sont égaux. Alors O est indépendant du point M choisi ; c'est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Réciproquement : soit M' un point quelconque de la droite X , droite perpendiculaire en O au plan P . On a donc $OA = OB = OC$.

Les obliques $M'A, M'B, M'C$ s'écartent également du pied O de la perpendiculaire. Elles sont égales (§ 2).

D'où l'énoncé :



L'ensemble des points équidistants de trois points fixes A, B, C, non alignés, est la droite menée perpendiculairement au plan ABC par le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Cette droite est dite axe du cercle circonscrit à ABC (fig. 13).

EXERCICES

240. - On donne deux points A et B extérieurs à un plan P ; soit O le milieu de AB. Comparer la distance du point O au plan P et les distances des points A et B à ce plan. (Deux cas suivant la position de A et B par rapport au plan P.)

241. - Trois points A, B, C sont situés d'un côté d'un plan P. Démontrer que la somme des distances des points A, B, C au plan est égale à trois fois la distance du centre de gravité du triangle ABC au plan P.

242. Que peut-on dire des plans médiateurs des cordes d'un cercle ?

243. Démontrer qu'il existe un point et un seul équidistant de quatre points donnés A, B, C, D non situés dans un même plan.

244. - On donne, dans un plan P, trois points A, B, C non en ligne droite. Un point O, extérieur au plan P, est équidistant des points A, B, C. Où est située la projection de O sur le plan ? Réciproque. En déduire un procédé pratique permettant de trouver la distance d'un point à un plan.

245. - 1° Étudier les plans équidistants de deux points A et B.

2° Étudier les plans équidistants de trois points A, B, C non alignés.

3° Construire les plans équidistants de quatre points A, B, C, D non situés dans le même plan.

246. - 1° Mener, par une droite D, un plan équidistant de deux points A et B.

2° Mener, par une droite D, un plan connaissant le rapport k des distances de A et B à ce plan.

247. - 1° Mener, par un point A, un plan équidistant de trois points A, B, C.

2° Mener, par un point A, un plan tel que les distances de trois points A, B, C à ce plan, soient proportionnelles à trois nombres donnés.

248. - Par un point donné A, mener un plan parallèle à une droite X et qui soit à égale distance de X et d'un point B.

249. - Une droite X, qui coupe un plan P en O, est également inclinée sur trois droites distinctes Ox, Oy, Oz du plan P. Démontrer que X est perpendiculaire au plan P.

250. - On donne deux points A et B extérieurs à un plan P. Déterminer un point C du plan P tel que le triangle ABC soit équilatéral.
251. - On donne un cercle et un point A extérieur au plan de ce cercle. Le point M étant variable sur ce cercle, trouver le maximum et le minimum de AM.
252. - On donne deux segments égaux AB et A'B' non situés dans un même plan. Les plans médiateurs de AA' et de BB' se coupent suivant une droite X. Démontrer que :
 1° tout point de X est équidistant des droites AB et A'B';
 2° X fait des angles égaux avec les droites AB et A'B'.
253. - Soient deux points fixes A et B et k une constante donnée ; quel est le lieu des points M de l'espace tels que : $MA^2 - MB^2 = k$?
254. - Soit C un cercle situé dans un plan P. On désigne par X une droite non située dans P. M étant un point quelconque de X et N un point quelconque de C, on pose $MN = d$.
 1° M étant fixé, déterminer les positions de N pour lesquelles d est maximum ou minimum.
 2° N étant fixé, déterminer une position de M pour laquelle d est minimum.
 3° Déterminer M et N pour que d soit aussi petit que possible.
255. - Soient trois demi-droites Ox, Oy, Oz deux à deux perpendiculaires sur lesquelles on marque respectivement les points A, B, C tels que : $OA = 3a$, $OB = 4a$, $OC = 2a$. Soit D le quatrième sommet du rectangle dont les trois autres sommets sont OBC.
 1° Calculer la plus courte distance des droites OC et AD.
 2° Soit M le pied, sur OC, de la perpendiculaire commune aux droites OC et AD. Soit N son pied sur AD. Calculer la rapport algébrique NA/NB, puis les longueurs NA, ND, OM.
256. - Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. Sur la perpendiculaire en A au plan ABC, on considère, d'un certain côté du plan, le point S tel que $AS = a$.
 1° Calculer les lignes trigonométriques de l'angle des droites AB et SC.
 2° Calculer la plus courte distance des droites AB et SC.
257. - Soient deux droites Y et D non coplanaires et AB leur plus courte distance, A sur Y et B sur D. Sur Y on porte, de part et d'autre de A des segments égaux AM et AM'. Soient N et N' les pieds des perpendiculaires menées de M et M' à la droite D et Z la parallèle à Y menée par B.
 1° Démontrer que $BN = BN'$.
 2° On pose : $AB = a$, $AM = x$ et on désigne par \angle l'un des angles des droites D et Y. Calculer MN en fonction de a, de x, et de \angle . Cas particuliers : $\angle = 60^\circ$, $\angle = 45^\circ$, $\angle = 30^\circ$.
 Application numérique : $\angle = 45^\circ$, $a = 3 \text{ cm}$; $x = 6 \text{ cm}$.

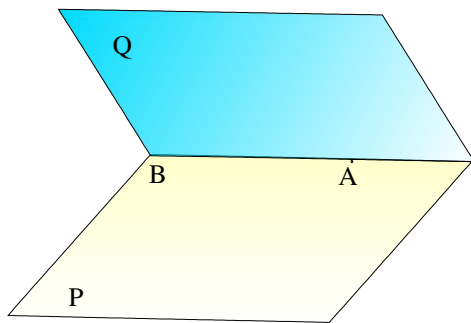
16. - ANGLES DIÈDRES

1. Définition.

En géométrie plane (livre de 4e), nous avons défini un angle : c'est l'une ou l'autre des deux régions du plan déterminées par deux demi-droites issues d'un même point ; l'un des angles est dit saillant, l'autre rentrant.

De même, deux demi-plans issus d'une même droite, déterminent dans l'espace deux régions appelées angles dièdres ou, plus brièvement, dièdres :

un angle dièdre est une portion de l'espace limitée par deux demi-plans issus de la même droite.



Les demi-plans P et Q issus de la droite AB forment le dièdre (P, AB, Q).

Les demi-plans P et Q sont les faces du dièdre ; la droite AB en est l'arête.

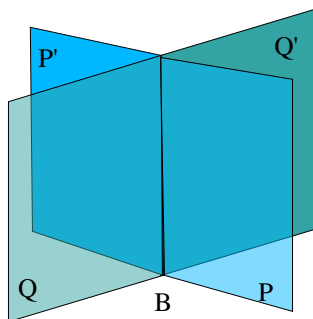
On dit encore :

le dièdre (P,Q), lorsque les faces sont les demi-plans P et Q ; le dièdre d'arête AB, s'il n'y a qu'un dièdre dont l'arête est AB.

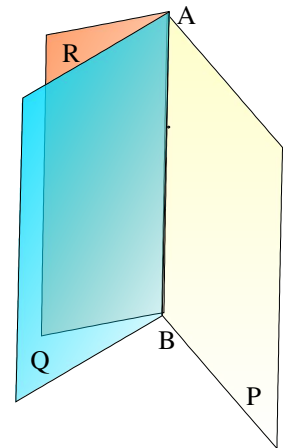
Un dièdre est plat quand ses deux faces sont dans le prolongement l'une de l'autre.

Un dièdre est nul si ses faces sont confondues.

Soient deux demi-plans P et Q, non opposés et non superposés, issus de la même droite AB. Les demi-plans opposés à P et Q, c'est-à-dire



P' et Q', sont situés dans l'un des deux dièdres déterminés par P et Q. Par définition le dièdre contenant P' et Q' est rentrant, l'autre est saillant.



2. Dièdres adjacents. Somme de dièdres.

Nous allons étudier les dièdres de la même manière que furent étudiés les angles en géométrie plane (livre de 4e). Ainsi :

1° Deux dièdres sont dits égaux s'ils peuvent se superposer.

2° Deux dièdres sont dits adjacents lorsqu'ils ont même arête, une face commune et sont situés de part et d'autre de cette face commune ; tels sont les dièdres (P, AB, Q) et (Q, AB, R) (fig. 4).

3° Pour additionner deux dièdres, on les place dans la position d'adjacents. Le dièdre (P, AB, R)

est la somme des dièdres (P, AB, Q) et (Q, AB, R) . On définit, d'une manière analogue, la somme de plusieurs dièdres.

Deux dièdres sont dits supplémentaires si leur somme est un dièdre plat.

4° On appelle bissecteur d'un dièdre le demi-plan qui le partage en deux dièdres égaux.

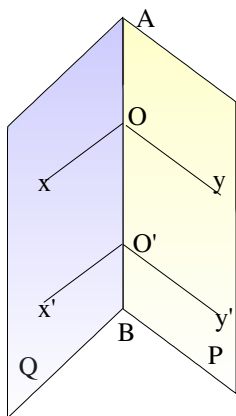
5° Deux dièdres sont dits opposés par l'arête s'ils ont la même arête et si leurs faces sont des demi-plans opposés. Exemple : (P, AB, Q) et (P', AB, Q')

Deux dièdres opposés par l'arête sont égaux.

En effet, à chacun des dièdres (P, AB, Q) et (P', AB, Q') (fig. 3), il suffit d'ajouter le dièdre (P', AB, Q) pour obtenir les dièdres plats, donc égaux (P', AB, P) ou (Q', AB, Q) .

6° On définit, d'une manière analogue à celle qui a été employée pour les angles (livre de 4e), la différence de deux dièdres, la multiplication et la division d'un dièdre par un nombre.

3. Rectiligne, ou angle plan, d'un dièdre.



1° Par un point O de l'arête AB d'un dièdre (P, AB, Q) , menons, dans chacune des faces, les perpendiculaires Ox et Oy à l'arête ; nous obtenons ainsi un angle xOy.

Répetons la même construction pour un point quelconque O' de l'arête AB ; nous obtenons un angle x'O'y' qui a ses côtés parallèles à ceux de l'angle xOy et de même sens. Ces angles sont donc égaux.

La grandeur de l'angle xOy ne dépend donc pas de la position de son sommet sur l'arête : c'est l'angle plan, ou le rectiligne du dièdre (P, AB, Q) .

En particulier, le rectiligne d'un dièdre plat est un angle plat et réciproquement.

2° Superposons deux dièdres égaux en faisant coïncider les sommets de deux rectilignes. Ceux-ci coïncident. Donc : **si deux dièdres sont égaux, leurs rectilignes sont égaux.**

3° **Réciproquement, si les rectilignes de deux dièdres sont égaux, ces dièdres sont égaux.**

En effet, les rectilignes xOy et x'O'y' étant égaux, plaçons le dièdre $(P', A'B', Q')$ sur le dièdre (P, AB, Q) , de manière à faire coïncider x'O'y' avec xOy.

On ne peut mener en O, au plan xOy, qu'une perpendiculaire ; donc, les arêtes OA et O'A' des dièdres coïncident.

Les deux dièdres coïncident : ils sont égaux.

Un dièdre est donc caractérisé par son rectiligne.

4° Soient xOy et yOz les rectilignes des dièdres (P, AB, Q) et (Q, AB, R) ; xOz est le rectiligne du dièdre (P, AB, R) .

Ox, Oy et Oz étant dans le même plan mené par O, perpendiculairement à AB :

$$\widehat{xOz} = \widehat{xOy} + \widehat{yOz},$$

ce qui s'énonce :

la somme de deux ou plusieurs dièdres a pour rectiligne la somme des rectilignes de ces dièdres.

Il est aisé de démontrer que les opérations définies sur les dièdres (§ 2) : soustraction, multiplication, division par un nombre, conduisent aux opérations analogues sur leurs rectilignes.

4. Dièdre droit. Définition. Un dièdre droit est la moitié d'un dièdre plat.

1° Tous les dièdres plats étant égaux, tous les dièdres droits sont égaux.

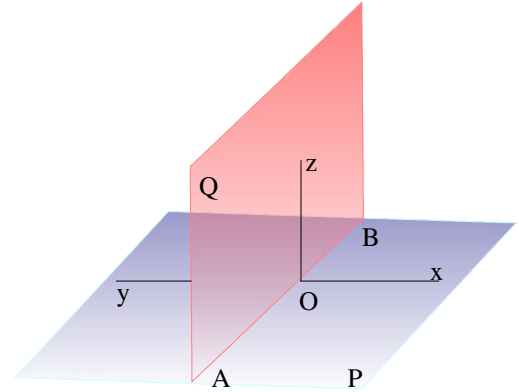
2° Le rectiligne $x\hat{O}z$ d'un dièdre droit est donc la moitié de l'angle plat xOy , c'est-à-dire un angle droit.

Réciproquement, si le rectiligne d'un dièdre (P, AB, Q) est droit, ce rectiligne est la moitié d'un angle plat. Le dièdre est la moitié d'un dièdre plat, c'est-à-dire un dièdre droit. En résumé :

le rectiligne d'un dièdre droit est un angle droit et réciproquement.

3° Les sous-multiples du dièdre droit (degré, grade ...) se définissent par rapport au dièdre droit comme se définissent les sous-multiples de l'angle droit par rapport à l'angle droit.

Un dièdre de 1 degré a donc pour rectiligne un angle de 1 degré.



5. Mesure des dièdres.

Pour mesurer un dièdre :

1° on choisit un dièdre pour unité;

2° on compte le nombre d'unités, ou de parties égales d'unité, contenues dans le dièdre donné.

Prenons, par exemple, le degré pour unité de dièdre. Soit un dièdre de 37° .

Son rectiligne vaut donc 37° . D'où l'énoncé :

si l'on prend pour unité d'angle le rectiligne de l'unité de dièdre, un dièdre et son rectiligne sont

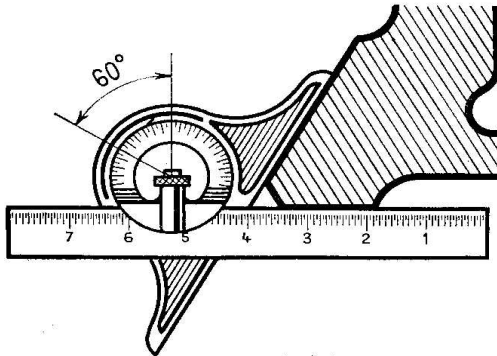


Fig. 9. — Mesure d'un dièdre au moyen d'un rapporteur.

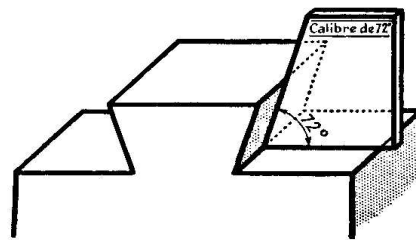


Fig. 10. — Vérification d'un dièdre au moyen d'un calibre.

mesurés par le même nombre.

Un dièdre de n degrés (ou p grades) a pour rectiligne un angle de n degrés (ou p grades).

Pratiquement, pour mesurer un dièdre, on mesure son rectiligne.

Pour cela, on utilise un rapporteur (fig. 9); le dièdre mesuré vaut 60° .

On vérifie également la grandeur d'un dièdre au moyen d'un calibre (fig. 10); le dièdre vérifié vaut 72° .

Enfin, la fausse équerre (fig. 11) permet de comparer un dièdre à un dièdre donné.

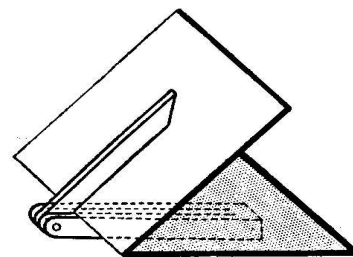


Fig. 11. — Comparaison d'un dièdre à un dièdre donné au moyen d'une fausse équerre de menuisier.

6. Angle de deux plans sécants.

Deux plans sécants forment quatre dièdres : deux quelconques de ces dièdres sont égaux ou supplémentaires.

Par définition, **l'angle de deux plans sécants est le rectiligne de l'un des dièdres aigus ou droits formés par ces plans.**

EXERCICES

258. - Démontrer que tout point du bissecteur d'un dièdre est équidistant des faces du dièdre. Réciproque.

259. - Deux dièdres sont opposés par l'arête lorsque les faces de l'un sont les prolongements des faces de l'autre. Démontrer que deux dièdres opposés par l'arête sont égaux. Que dire de leurs bissecteurs?

260. - Deux dièdres sont supplémentaires quand leur somme vaut deux dièdres droits. Démontrer que si deux dièdres adjacents sont supplémentaires, leurs bissecteurs forment un dièdre droit. Réciproque.

261. - Démontrer que les bissecteurs des quatre dièdres formés par deux plans sécants forment deux plans tels que l'un quelconque des quatre dièdres qu'ils font entre eux est droit.

262. - Démontrer que la somme des dièdres consécutifs formés par des demi-plans issus d'une même droite d'un plan P et situés d'un même côté de ce plan P, est égale à deux dièdres droits. Réciproque.

263. - On donne un plan P et une demi-droite Ox de ce plan. Construire un plan Q tel que Ox soit un côté d'un rectiligne du dièdre (P, Q).

264. - Démontrer que tout plan mené par la bissectrice d'un rectiligne d'un dièdre en coupe les faces suivant deux droites également inclinées sur l'arête.

265. - On donne un plan P et une demi-droite Ox issue d'un point O de P. Mener un plan Q tel que

Ox soit bissectrice d'un rectiligne du dièdre (P, Q).

266. - On donne un dièdre (P,AB, Q) et une demi-droite Ox issue d'un point O de l'arête AB.

Mener un plan R passant par Ox tel que Ox soit bissectrice de l'angle formé par les intersections de R avec P et Q.

267. - On donne un dièdre (P,AB,Q), un point C dans P, un point D dans Q. Trouver un point O sur l'arête AB tel que l'angle COD soit droit.

268. - Trouver le lieu des points de l'espace qui sont équidistants de deux plans sécants donnés.

269. - Soit M un point intérieur à un dièdre saillant (P,AB,Q), MH et MK désignent les distances du point M aux faces de ce dièdre.

1° Montrer que $MH + MK$ reste constant lorsque M décrit soit une parallèle à AB, soit une perpendiculaire au bissecteur.

2° Montrer que $|MH - MK|$ reste constant lorsque M décrit une parallèle au bissecteur.

270. - Soient quatre points A, B, C, D non coplanaires tels que

$AB = BC = CA = AD = CD = BD$.

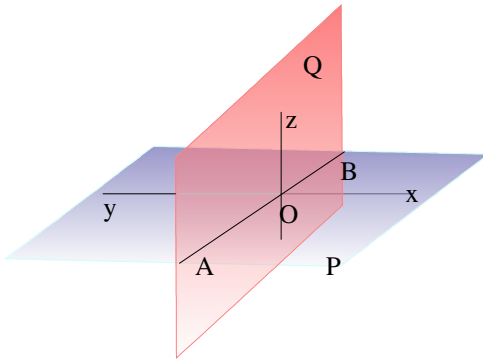
1° Démontrer que le bissecteur P du dièdre (CAB, ABD) est plan médiateur du segment CD.

2° Montrer que le bissecteur Q du dièdre (BAC, ACD) coupe le bissecteur P suivant l'axe du cercle circonscrit au triangle BCD. Quel est l'angle des bissecteurs P et Q ?

3° Déterminer les lignes trigonométriques du rectiligne du dièdre (BCD, ACD). A l'aide des tables, donner la valeur approchée, en degrés, de ce rectiligne.

17. - PLANS PERPENDICULAIRES

1. Définition.



Considérons deux plans P et Q tels que l'un des dièdres qu'ils forment soit droit (fig. 1). Si, par exemple (P, AB, Q) est droit, son rectiligne xOz est droit ; les rectilignes des trois autres dièdres sont droits.

Donc les quatre dièdres sont droits. On dit que les plans P et Q sont perpendiculaires :

deux plans sont perpendiculaires quand l'un des dièdres qu'ils forment est droit.

2. Propriété caractéristique de deux plans perpendiculaires.

1° Soient deux plans perpendiculaires P et Q, AB leur intersection, xOz un de leurs rectilignes.

La droite Oz est perpendiculaire à AB (définition du rectiligne).

La droite Oz est perpendiculaire à Ox (xOz est droit par hypothèse).

La droite Oz, perpendiculaire aux deux droites sécantes AB et Ox du plan P, est donc perpendiculaire à ce plan. (De même Ox est perpendiculaire au plan Q.)

Ce qui s'énonce :

si deux plans sont perpendiculaires, toute droite appartenant à l'un des plans et perpendiculaire à leur intersection est perpendiculaire à l'autre plan.

2° Réciproquement, supposons qu'un plan Q contienne une droite Z perpendiculaire (en O) à un plan P.

Le plan Q est distinct du plan P puisqu'il contient la droite Z qui n'est pas dans P. Ces plans ayant un point commun O se coupent suivant une droite D. Construisons en O, le rectiligne de l'un des dièdres formés par les plans P et Q.

Z étant perpendiculaire au plan P, est perpendiculaire à D et peut donc être considérée comme un côté du rectiligne.

Pour construire l'autre côté, il suffit, dans P, de mener la perpendiculaire Ox en O à D.

Mais Ox étant dans P, l'angle de Z et de Ox est droit. Ainsi le rectiligne formé est droit : les plans P et Q sont perpendiculaires. Ce qui s'énonce :

si une droite est perpendiculaire à un plan P, tout plan contenant cette droite est perpendiculaire au plan P.

De ce qui précède, on déduit le théorème suivant :

Théorème.

Pour que deux plans soient perpendiculaires, il faut et il suffit que l'un quelconque d'eux contienne une droite perpendiculaire à l'autre.

(le 1° prouve que la condition est nécessaire, le 2° qu'elle est suffisante).

3. Conséquences.

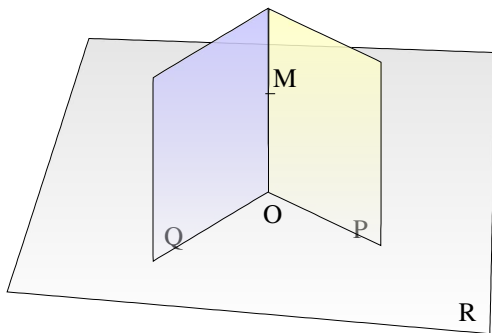
1° Soient deux plans perpendiculaires P et Q, AB leur intersection, M un point de l'un des plans, Q par exemple (fig. 4). Menons de M la perpendiculaire MO au plan P. On sait que celle-ci est unique (14e leçon, § 2).

Mais la droite MO' menée de M, dans Q, perpendiculairement à AB, est perpendiculaire au plan P (§ 2) :

lorsque deux plans sont perpendiculaires, toute droite menée dans l'un, perpendiculairement à l'autre, est contenue dans le premier.

2° Soient deux plans sécants P et Q, perpendiculaires à un plan R (fig. 5). Par un point quelconque M de l'intersection des plans P et Q, menons la perpendiculaire au plan R.

D'après le 1°, cette droite, qui passe par un point M du plan P, est entièrement contenue dans ce plan. Mais, puisque M est également dans le plan Q, cette droite est entièrement contenue dans le plan Q.



La droite ainsi tracée, appartenant aux deux plans, est leur intersection MO. La droite MO est donc perpendiculaire au plan R :

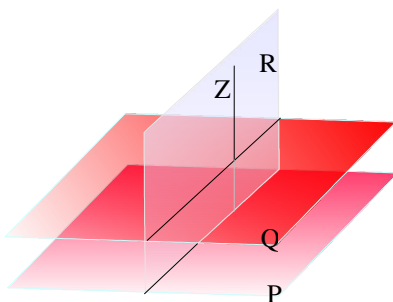
lorsque deux plans sécants sont perpendiculaires à un troisième, leur intersection est perpendiculaire à ce troisième plan.

3° Soient un plan Q et une droite Z, perpendiculaires à un plan P, la droite Z n'étant pas dans le plan Q. Par un point quelconque M du plan Q, menons la parallèle MH à Z.

Puisque Z est perpendiculaire au plan P, il en est de même de MH (13e leçon, § 5) et, par suite, MH est contenue dans le plan Q (1°).

La droite Z, étant parallèle à une droite du plan Q, est parallèle à ce plan (11e leçon, § 5) :

lorsqu'un plan et une droite, non contenue dans ce plan, sont perpendiculaires à un même plan, ils sont parallèles.



4° Soient deux plans parallèles P et Q et un plan R perpendiculaire au plan P.

Menons, dans R, une droite Z perpendiculaire à P.

Puisque P et Q sont parallèles, la droite Z, perpendiculaire à P, est aussi perpendiculaire à Q (13e leçon, § 5). Le plan R, contenant la droite Z, perpendiculaire au plan Q, est perpendiculaire à celui-ci :

lorsque deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

EXERCICES

271. - Montrer que par un point donné A, on peut faire passer une infinité de plans perpendiculaires à un plan donné P.

272. - Montrer que, par un point donné A, on peut mener un plan unique perpendiculaire à deux plans sécants donnés.

273. - Montrer que, par une droite non perpendiculaire à un plan P, on peut faire passer un plan perpendiculaire au plan P, et un seul. En est-il de même si la droite est perpendiculaire au plan ?

274. - On considère deux droites parallèles D, D' et un plan F qui ne leur est pas perpendiculaire. Montrer que les deux plans menés par D et D' perpendiculairement au plan F, sont parallèles.

275. - On coupe deux plans perpendiculaires P et Q par un plan P' perpendiculaire à P. Quel angle forment les intersections des plans (P, P') et (Q, P')?

276.-Montrer que si un plan Q est perpendiculaire à une droite X parallèle à un plan P, le plan Q est perpendiculaire au plan P. Réciproque. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient perpendiculaires.

277. - On donne un plan P et une droite Y. Mener, par un point A, le plan parallèle à Y et perpendiculaire au plan P.

278. - Deux droites Z et Y, non parallèles entre elles, sont parallèles à un plan P ; deux plans sécants Q et R sont respectivement perpendiculaires à Z et à Y. Démontrer que l'intersection des plans Q et R est perpendiculaire au plan P.

279.-On donne un dièdre (P,AB,Q). Par un point O, on mène les perpendiculaires OC et OD sur les plans P et Q. Démontrer que l'angle COD est égal au rectiligne du dièdre ou à son supplément.

280. - Démontrer que, par deux droites orthogonales, on peut mener une infinité de couples de plans perpendiculaires : si l'un d'eux varie, l'autre reste fixe.

281. - On donne, dans un plan P un cercle de diamètre AB et un point I de ce cercle. C étant un point quelconque de la perpendiculaire élevée en A au plan, démontrer que les plans AIC et BIC sont perpendiculaires.

282. - Deux droites D et D' rencontrent un cercle en deux points diamétralement opposés. L'une de ces droites est perpendiculaire au plan du cercle. Démontrer qu'un point quelconque M du cercle détermine avec les droites D et D' deux plans perpendiculaires.

283. - On donne, dans un plan P , un cercle (O, R) et une droite D . Le point A étant extérieur au plan P , mener une tangente T au cercle telle que les plans (A, D) et (A, T) soient perpendiculaires.

284. - Quel est le lieu des points de l'espace équidistants de deux droites parallèles ou de deux droites sécantes données ?

285. - Lieu des demi-droites issues d'un point fixe O et qui font des angles égaux avec deux demi-droites données Ox et Oy ? (Prendre un point A sur Ox et un point B sur Oy tels que $OA = OB$; montrer que le lieu cherché est le plan médiateur de AB ; caractériser ce plan à l'aide des données.)

286. - Ensemble des points de l'espace équidistants de trois droites formant un triangle ?

287. - Soit, dans un plan P , un cercle C de centre O . AB étant un diamètre de ce cercle, on élève en A la perpendiculaire D au plan P et on trace par B une droite K , non située dans P et telle que D et K ne soient pas coplanaires.

1° M étant un point quelconque de C , construire une droite X passant par M et rencontrant D et K . Discuter suivant la position de M sur C .

2° Démontrer que les plans (D, X) et (K, X) sont perpendiculaires.

3° Un plan Q perpendiculaire à D coupe cette droite en A' , coupe X en M' et K en B' . Démontrer que le triangle $A'M'B'$ est rectangle.

4° Un plan R perpendiculaire à X coupe D en A'' , X en M'' , K en B'' . Démontrer que le triangle $A''M''B''$ est rectangle.

288. - On considère un plan P et un point A de ce plan. On désigne par B' le pied de la perpendiculaire menée d'un point B sur le plan. On suppose que $BB' = AB'$. On désigne par Z une droite variable du plan P telle que A et B soient équidistants de Z . Soient M et N les pieds des perpendiculaires menées respectivement de A et B sur Z .

1° Démontrer que $B'N$ est perpendiculaire à Z ; que la médiatrice, dans le plan P , du segment MN passe par un point fixe I de AB' .

2° La droite Z peut-elle être parallèle à AB' ? Peut-elle lui être perpendiculaire ?

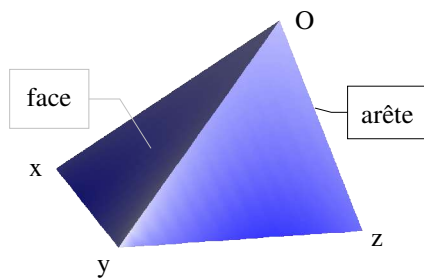
3° J étant le milieu de MN , démontrer que les segments JA et JB sont égaux. En déduire que le lieu de J est la droite, du plan P , perpendiculaire en B' à AB' .

4° Construire les droites Z passant par le point K symétrique de I par rapport à B' et montrer qu'elles sont perpendiculaires.

5° Soit H le pied de la perpendiculaire menée de A sur le plan variable (B, Z) . Démontrer que les droites MH et BN sont parallèles et que le segment AH garde une grandeur constante lorsque Z varie.

18. - ANGLES TRIÈDRES

1. Définition.



Un angle trièdre (ou trièdre) est la figure formée par trois demi-droites issues d'un même point et non situées dans le même plan.

Dans le trièdre Oxyz (fig. 1), le point O est le sommet, les demi-droites Ox, Oy, Oz, sont les arêtes, les angles xOy, yOz, zOx (tous inférieurs à deux droits) sont les faces.

Les dièdres formés par les plans de deux faces quelconques sont les dièdres du trièdre : le dièdre d'arête Ox est opposé à la face yOz.

Les trois faces et les trois rectilignes des dièdres sont les éléments du trièdre. Ce sont six angles, tous inférieurs à deux droits.

Remarquons que si l'on considère un triangle ABC et un point O extérieur au plan du triangle, on obtient un trièdre en traçant les trois demi-droites OA, OB, OC.

Inversement, tout trièdre peut être obtenu de cette manière : il suffit de prendre trois points A, B, C arbitraires situés respectivement sur les arêtes.

Un trièdre est dit isocèle quand il a deux faces égales.

Un trièdre est dit équifacial lorsque ses trois faces sont égales.

Un trièdre est dit trirectangle lorsque ses trois faces sont des angles droits (il est donc équifacial).

Chaque arête est perpendiculaire au plan formé par les deux autres arêtes. Ainsi les murs d'angle d'une salle rectangulaire et le plancher se coupent en formant un trièdre trirectangle.

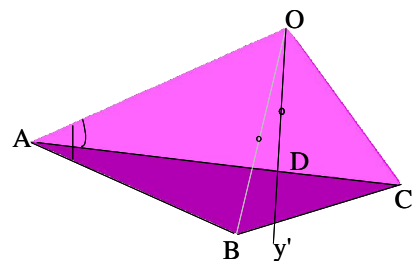
2. Théorème.

Dans tout trièdre, une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres.

$$(1) \ xOy < yOz + zOx$$

$$(2) \ yOz < zOx + xOy$$

$$(3) \ zOx < xOy + yOz$$



Remarquons que le théorème est évident si le trièdre est équifacial ou s'il possède deux faces égales plus grandes que la troisième.

Nous pouvons donc supposer qu'il existe une face plus grande que les autres. Soit zOx cette face ; les inégalités (1) et (2) sont alors vérifiées ; il reste à démontrer l'inégalité (3).

Dans la face zOx , traçons la demi-droite Oy' telle que: $xOy' = xOy$.

Oy' est à l'intérieur de zOx , puisque celle-ci est la plus grande des faces.

Sur Oy et Oy' , portons deux longueurs égales OB et OD .

Menons, par B et D , un plan qui coupe Ox en A et Oz en C ; D est sur le segment AC . Les triangles AOB et AOD sont égaux (deuxième cas d'égalité).

Donc : $AD = AB$. (4)

Dans le triangle ABC :

$$AC < AB + BC$$

$$\text{ou: } AD + DC < AB + BC$$

$$\text{ou, d'après (4) } DC < BC.$$

Les deux triangles BOC et DOC sont donc tels que

$$OB = OD, OC \text{ commun}, DC < BC.$$

$$\text{Donc } \widehat{DOC} < \widehat{BOC} \text{ (livre de 4e)}$$

Ajoutons aux deux membres de cette inégalité les angles égaux \widehat{AOD} et \widehat{AOB}

$$\widehat{AOD} + \widehat{DOC} < \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$$

$$\text{ou : } \widehat{zOx} < \widehat{xOy} + \widehat{yOz}$$

3. Théorème.

Dans tout trièdre, la somme des faces est inférieure à quatre droits.

Considérons le trièdre $Oxyz$, et traçons la demi-droite Ou opposée à Ox . Nous formons un nouveau trièdre $Ouyz$.

Appliquons le théorème précédent à la face yOz du trièdre

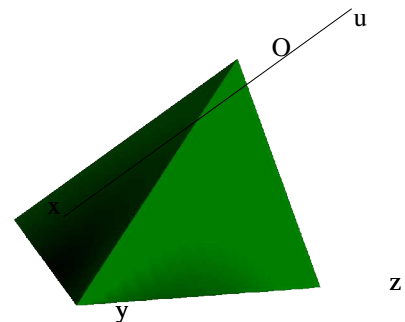
$Ouyz$:

$$yOz < uOy + uOz \quad (1)$$

Mais les angles uOy et uOz sont les suppléments respectifs des angles xOy et zOx . L'inégalité (1) s'écrit donc

$$yOz < 2D - xOy + 2D - zOx$$

$$\text{ou } xOy + yOz + zOx < 4D.$$



4. Résumé.

Si l'on désigne par a, b, c les mesures des faces d'un trièdre, ces nombres vérifient les inégalités suivantes :

$$0 < a < 2D ; 0 < b < 2D ; 0 < c < 2D$$

$$a < b + c ; b < c + a ; c < a + b$$

$$a + b + c < 4D.$$

Inversement, on peut se demander si, étant donnés trois angles vérifiant les inégalités précédentes, il existe un trièdre dont les faces sont égales à ces angles.

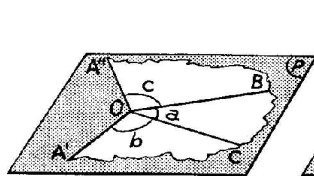


Fig. 5. — Sur une feuille de carton, on trace trois angles consécutifs $\widehat{A'OC} = b$, $\widehat{COB} = a$, $\widehat{BOA''} = c$ et l'on découpe la feuille suivant OA' et OA'' .

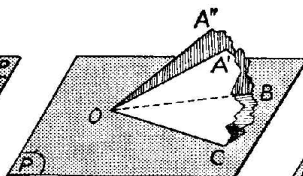


Fig. 6. — La face BOC restant fixe dans le plan P, on plie les deux autres angles $\widehat{A'OC}$ et $\widehat{BOA''}$ autour des plis OC et OB.

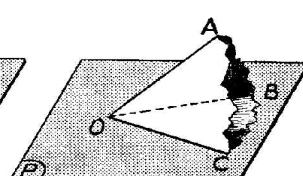
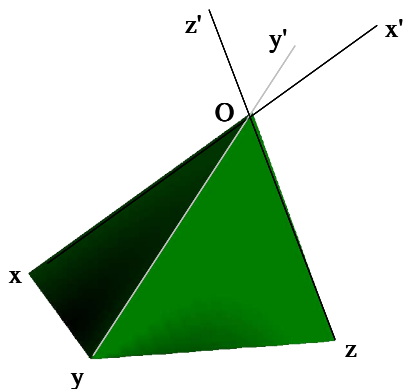


Fig. 7. — On constate que l'on peut amener OA' et OA'' à coïncider suivant OA . Le trièdre OABC a pour faces les angles a, b, c .

Les figures 5, 6, 7 indiquent une construction d'un tel trièdre, mais il est clair que l'on obtiendra un deuxième trièdre si l'on « plie » (fig. 7) les deux faces $A'OC$ et BOA'' dans l'autre région de l'espace limitée par le plan P. Il est intéressant de construire les deux trièdres obtenus et de vérifier que, si les trièdres ne sont pas isocèles, ils ne sont pas superposables.

5. Trièdres opposés par le sommet.

Soit le trièdre $Oxyz$ (fig. 8). Traçons les demi-droites Ox' , Oy' , Oz' respectivement opposées à Ox , Oy , Oz et considérons le trièdre $Ox'y'z'$. Les trièdres $Oxyz$ et $Ox'y'z'$ sont dits opposés par le sommet, ou symétriques par rapport au point O .



Étudions ces deux trièdres :

leurs faces sont égales chacune à chacune (angles opposés par le sommet) ; leurs dièdres sont égaux chacun à chacun (dièdres opposés par l'arête). Ainsi, les 6 éléments de ces deux trièdres sont égaux chacun à chacun et cependant ces trièdres ne sont pas, en général, égaux, c'est-à-dire superposables. En effet, si le trièdre $Oxyz$ n'est pas isocèle, on peut montrer que deux quelconques des trois dièdres sont inégaux et que, par suite, la superposition de $Oxyz$ et de $Ox'y'z'$ ne peut s'obtenir qu'en faisant coïncider Ox et Ox' , Oy et Oy' , Oz et Oz' .

Or, Ox , Ox' , Oz , Oz' sont dans un même plan et leur coïncidence respective s'obtiendra en faisant tourner la face $x'Oz'$ dans ce plan jusqu'à ce qu'elle coïncide avec xOz . Mais l'arête Oy' , qui est située dans une certaine région de l'espace par rapport au plan xOz , ne pourra pas en même temps coïncider avec Oy qui est située dans l'autre région.

Ainsi, les 6 éléments d'un trièdre ne suffisent pas à le caractériser.

Nous devons alors introduire une nouvelle notion.

6. Sens d'un trièdre.

Soit un trièdre $Oxyz$. Plaçons un observateur sur l'arête Ox (pieds en O , tête vers x), de manière qu'il regarde les deux autres arêtes Oy et Oz (fig. 9).

Si cet observateur voit Oy à sa droite (et par suite Oz à sa gauche), nous dirons que le trièdre $Oxyz$, dans lequel les arêtes sont prises dans l'ordre Ox , Oy , Oz , est direct, ou que son sens est positif.

Si cet observateur voit Oy à sa gauche (donc Oz à sa droite), nous dirons que le trièdre $Oxyz$ est rétrograde, ou de sens négatif.

On peut montrer que si l'on échange deux arêtes, le sens du trièdre est changé : $Oxyz$ est direct, $Oyxz$ est rétrograde. (fig. 9), si l'on permute circulairement les arêtes, le sens du trièdre est conservé : $Oxyz$ et $Ozxy$ sont de sens direct (fig. 9); si deux trièdres sont opposés par le sommet, ils sont de sens contraire.

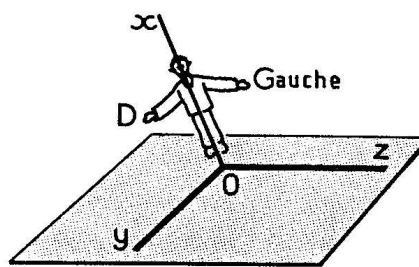


Fig. 9. — Le trièdre $Oxyz$ est direct.
Le trièdre $Oyxz$ est rétrograde.

EXERCICES

289. - Par pliage, construire un trièdre dont les faces mesurent

- a) 15° , 18° et 30° ;
- b) 43° , 24° et 55° ;
- c) 72° , 22° et 34° ;
- d) 150° , 140° et 95° .

On constatera que deux de ces constructions sont impossibles ; dire pourquoi.

290.- Deux faces d'un trièdre mesurent 51° et 39° . Entre quelles limites est comprise la troisième face ?

291. - Énoncer les trièdres formés par trois droites concourantes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ non situées dans un même plan. Comparer leurs faces et leurs dièdres.

292. - Étudier la section d'un trièdre

- a) par un plan parallèle à une arête ;
- b) par un plan parallèle à deux arêtes.

293. - Sur les arêtes d'un trièdre de sommet O , on porte trois longueurs égales $OA = OB = OC$. Démontrer que la projection du point O sur le plan ABC est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

294. - Démontrer que les plans bissecteurs des dièdres d'un trièdre passent par une même droite.

295. - Que peut-on dire des trois plans menés par chaque arête d'un trièdre et la bissectrice de la face opposée? (porter trois longueurs égales $OA = OB = OC$ sur les trois arêtes).

296. - Que peut-on dire des trois plans menés par chaque arête d'un trièdre perpendiculairement à la face opposée?

297. - On considère un trièdre isocèle $Oxyz$ ($xOy = xOz$). Sur les trois arêtes Ox , Oy , et Oz , on marque respectivement les points A , B , C tels que $OA = OB = OC$.

- a) Que dire du triangle ABC ?
- b) Démontrer que la projection de O sur le plan ABC est située sur la médiane AD du triangle ABC .
- c) Démontrer que les droites OA et BC sont orthogonales.
- d) En déduire une méthode pratique de construction d'un trièdre isocèle.

298. - Un trièdre $Oxyz$ est équifacial. Sur les trois arêtes, on porte trois longueurs égales $OA = OB = OC$.

- a) Que dire du triangle ABC ?
- b) Quelle est la projection de O sur le plan ABC ?
- c) Démontrer que les droites OA et BC (ou OB et CA , ou OC et AB) sont orthogonales.
- d) En déduire une méthode pratique de construction d'un trièdre équifacial.

299. - On donne un trièdre isocèle $Oxyz$; les faces opposées aux arêtes Ox , Oy , Oz sont α , β , μ .

1° Quelles conditions doivent satisfaire les angles α et μ pour que le trièdre existe ?

2° Un plan perpendiculaire à Oz coupe les arêtes Ox , Oy , Oz en A , B , C ; démontrer que le triangle ABC est isocèle.

3° Calculer l'angle ACB si $\alpha = \mu = 60^\circ$.

19. - ANGLES POLYÈDRES

1. Définition.

Un angle polyèdre est la figure formée par plusieurs demi-droites issues d'un même point, rangées dans un ordre déterminé et telles que trois consécutives d'entre elles ne soient pas coplanaires.

Remarquons que, dans les deux leçons précédentes, on a confondu les expressions "angle dièdre" et "dièdre", puis "angle trièdre" et "trièdre" mais qu'il est indispensable de dire ici "angle polyèdre" et non polyèdre, ce mot ayant un autre sens (cf. 28e leçon).

Exemple. Considérons le polygone plan ABCDE et un point O extérieur à son plan. Joignons O aux sommets successifs du polygone. Les demi-droites obtenues

Ox, Oy, Oz, Ot, Ou rangées dans l'ordre, forment les

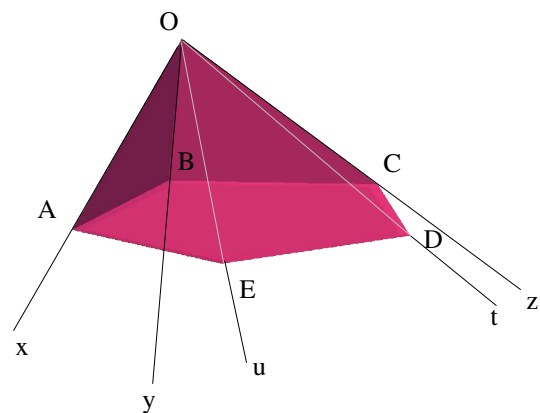
angles saillants consécutifs xOy, yOz, zOt, tOu,

uOx. La figure ainsi obtenue est l'angle polyèdre

Oxyztu. Le point O est le sommet ; les demi-droites

Ox, Oy, Oz, Ot, Ou sont les arêtes ; les angles saillants xOy, yOz, zOt, tOu, uOx sont les faces.

Un trièdre est un angle polyèdre à trois faces. On peut nommer ses arêtes dans un ordre quelconque, sauf s'il s'agit de définir le sens du trièdre.



2. Angle polyèdre convexe. Angle polyèdre concave.

Supposons que le polygone plan ABCDE soit convexe (ci-dessus) ; l'angle polyèdre Oxyztu est situé entièrement d'un même côté du plan de chaque face ;

on ne peut donc trouver deux arêtes qui soient de part et d'autre du plan de l'une quelconque des faces : un tel angle polyèdre est dit convexe.

D'où la définition :

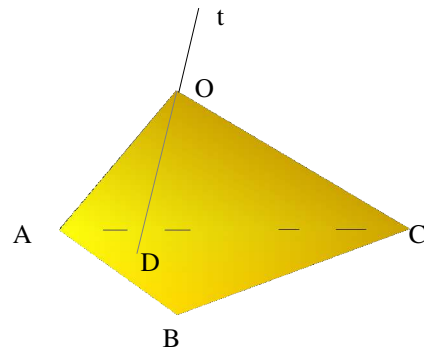
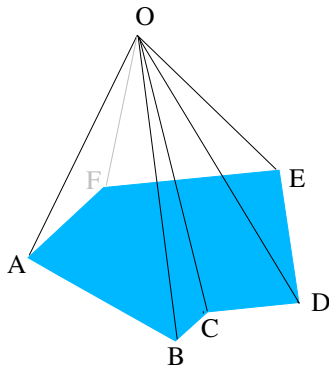
un angle polyèdre est dit convexe quand il est situé d'un même côté du plan de l'une quelconque de ses faces.

Dans le cas contraire, l'angle polyèdre est concave : il n'est pas situé entièrement d'un même côté du plan de l'une au moins de ses faces; il existe donc des arêtes qui sont situées de part et d'autre du plan de l'une au moins de ses faces (fig. 2 et 3).

Figures ci-après :

Fig. 2. -Angle polyèdre concave OABCDEF obtenu en joignant un point O, extérieur à un plan P, aux sommets d'un polygone concave ABCDEF situé dans le plan P. Cet angle polyèdre est concave car les arêtes OA et OE, par exemple, sont de part et d'autre du plan BOC.

Fig. 3.-Angle polyèdre OABOt obtenu en construisant la demi-droite Ot opposée à OD, le point D étant intérieur au triangle ABC. Cet angle polyèdre est concave car OC et Ot sont de part et d'autre du plan AOB.



3. Remarque.

On n'obtient pas tous les angles polyèdres à n faces ($n > 4$) comme il a été dit précédemment, c'est-à-dire en joignant un point O aux sommets consécutifs d'un polygone plan de n côtés ; il existe en effet des angles polyèdres pour lesquels il est impossible de trouver un plan qui coupe toutes leurs arêtes (fig. de droite ci-dessus et exercice 306).

Toutefois on obtient tous les angles polyèdres convexes comme il a été dit (fig. 1), c'est-à-dire en joignant un point O aux sommets consécutifs d'un polygone plan convexe (exercice 307).

En particulier un angle trièdre est nécessairement convexe : on obtient donc tout angle trièdre en joignant un point O aux sommets d'un triangle quelconque, comme cela a d'ailleurs été indiqué (18e leçon, § 1).

4. Somme des faces d'un angle polyèdre convexe.

Considérons l'angle polyèdre convexe Oxyztu (fig. 1) coupé par le plan P suivant le polygone convexe ABCDE (cf. exercice 306).

Le point A est le sommet d'un trièdre dont les arêtes sont AO, AB, AE.

On a donc (13e leçon, § 2) : $\angle EAB < \angle EAO + \angle BAO$.

De même : $\angle ABC < \angle ABO + \angle CBO$.

etc .

Additionnons ces inégalités, qui sont de même sens :

Somme des angles du polygone convexe ABCDE < Somme des angles à la base des triangles tels que AOB.

Si le polygone convexe a n côtés, la somme des angles du polygone convexe est $(2n - 4) D$.

La somme des angles à la base des triangles tels que AOB est

$2 nD$ - Somme des faces du polyèdre.

Donc $(2 n - 4) D < 2 nD$ - Somme des faces du polyèdre.

et : Somme des faces < $4 D$.

D'où le théorème :

la somme des faces d'un angle polyèdre convexe est inférieure à quatre droits.

Ce théorème généralise celui démontré pour les trièdres (18e leçon, § 2).

5. Développement d'un angle polyèdre convexe.

Soit l'angle polyèdre convexe Oxyztu (fig. 1).

Dans un plan (fig. 4), dessinons les angles adjacents consécutifs suivants, qui sont respectivement égaux aux faces consécutives de l'angle polyèdre :

$$x'Oy' = xOy$$

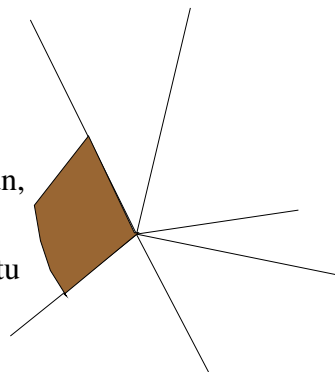
$$y'Oz' = yOz$$

etc..

Si l'on fend, suivant Ox, l'angle polyèdre et si on l'applique sur un plan, on obtient une figure égale à la figure 4.

On dit que l'on a effectué le développement de l'angle polyèdre Oxyztu sur un plan.

Notons que la somme des faces de l'angle polyèdre étant inférieure à 4 droits, le développement ne couvre qu'une partie du plan (partie non ombrée fig. 4).



6. Sections d'un angle polyèdre par deux plans parallèles.

Soit un angle polyèdre Oxyzt (fig. 5). Supposons qu'il existe un plan P qui coupe toutes les arêtes. Soient A, B, C, D les points obtenus.

Un plan P', parallèle au plan P, coupe alors les arêtes en A', B', C', D'.

Nous nous proposons de comparer les deux polygones ABCD et A'B'C'D'.

Pour cela, menons par les points B, C, D les parallèles à une arête, Ox par exemple. Ces parallèles à Ox percent le plan P' respectivement en b (sur la droite A'B'), en c (sur la droite A'C'), en d (sur la droite A'D').

1° Comparons les polygones ABCD et A'bcd.

Les quadrilatères ABBA', BbcC, cCDd, DdA'A étant des parallélogrammes, on a :

$$AB = A'b, BC = bc, CD = cd, DA = dA'.$$

De même, les angles tels que DAB et dA'b sont égaux.

On en déduit que les polygones ABCD et A'bcd sont égaux.

2° Comparons les polygones A'bcd et A'B'C'D'.

On peut écrire (en mesures algébriques) :

$$A'b/A'B' = AB/A'B' = OA/OA'$$

$$A'c/A'C' = AC/A'C' = OA/OA'$$

$$A'd/A'D' = AD/A'D' = OA/OA'$$

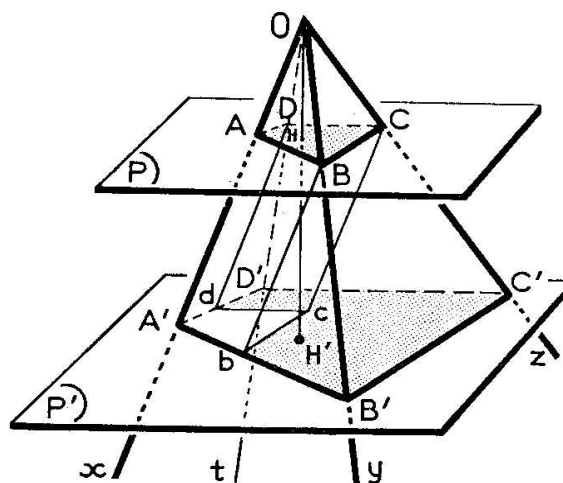


Fig. 5.

et, H et H' désignant les pieds, sur P et P', de la perpendiculaire menée de O aux plans P et P', tous

les rapports ci-dessus sont égaux à OH/OH'

Si l'on pose ce rapport = k , il vient

$$A'b/A'B' = A'c/A'C' = A'd/A'D' = k$$

Dans le plan P' , le polygone $A'bcd$ est donc homothétique du polygone $A'B'C'D'$ dans l'homothétie de centre A' et de rapport k (livre de 3e, page 249).

3° De ce qui précède, il résulte que les polygones $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont semblables, leur rapport de similitude étant $|k|$

4° On peut donc écrire : $\text{aire } ABCD = k^2 \times \text{aire } A'B'C'D'$

D'où le théorème :

Lorsque deux plans parallèles coupent toutes les arêtes d'un angle polyèdre :

1° les sections sont des polygones semblables et le rapport de similitude de ces polygones est égal au rapport des distances du sommet aux deux plans ;

2° le rapport des aires de ces polygones est égal au carré du rapport de similitude.

EXERCICES

300. - Démontrer que chaque face d'un angle polyèdre est inférieure à la somme des autres faces.

301. - Construire par pliage, un angle polyèdre $Oxyzt$ sachant que $x\hat{O}y = 21^\circ$, $y\hat{O}z = 53^\circ$, $z\hat{O}t = 64^\circ$, $t\hat{O}x = 44^\circ$ et que le dièdre d'arête Ox est droit.

302. - Démontrer que la somme des angles que fait une droite quelconque avec les arêtes d'un angle polyèdre est supérieure à la demi-somme des faces.

303. - Couper un angle polyèdre convexe à quatre faces par un plan tel que la section soit un parallélogramme.

304. - On donne un cercle, un point O de son axe et un quadrilatère convexe $ABCD$ circonscrit à ce cercle. Démontrer que l'angle tétraèdre $OABCD$ est tel que la somme de deux faces opposées est égale à la somme des deux autres faces.

305. - Par le sommet A d'un carré $ABCD$ de côté a , on mène la perpendiculaire $AO = a$ au plan de ce carré et l'on considère l'angle tétraèdre $OABCD$.

1° Évaluer les rectilignes des dièdres d'arêtes OA , OB , OD .

2° Démontrer que les droites OC et BD sont orthogonales.

3° Par B , on mène le plan P perpendiculaire à OC ; démontrer que ce plan passe par D . Il coupe OC en C' . Évaluer les côtés du triangle $BC'D$.

4° Calculer le rectiligne du dièdre d'arête OC .

5° Préciser la position du point C' sur le segment OC .

6° Sur la perpendiculaire en C au plan du carré, on marque le point O' tel que $CO' = a$, les points O et O' étant du même côté du plan du carré. Démontrer que le plan P passe par O' .

306. - Soit un angle polyèdre convexe $Oxyz$ Sur Ox et Oy respectivement, on marque deux points A et B . Soit $\#$ le demi-plan limité par la droite AB et contenant le point O . On mène, par A et B , les demi-droites Az' et Bz'' , parallèles à Oz et de même sens. Soit a (en degrés) le rectiligne du dièdre d'arête AB et dont les faces sont les demi-plans $\#$ et $z'ABz''$.

On effectue, à partir des points A et B , la même construction pour chacune des arêtes restantes de l'angle polyèdre. Par exemple, on trace At' et Bt'' , demi-droites parallèles et de même sens que Ot (ne pas oublier que l'angle polyèdre est convexe) et on désigne par b le rectiligne du dièdre d'arête AB et dont les faces sont $\#$ et $t'ABt''$.

1° Soit Q un demi-plan limité par AB , coupant Oz et tel que le rectiligne du dièdre ($\#, AB, Q$) soit inférieur à chacun des angles a, b, \dots . Montrer que ce demi-plan Q coupe toutes les arêtes de l'angle polyèdre. En déduire qu'il existe une infinité de plans qui coupent toutes les arêtes d'un angle polyèdre convexe.

2° Un plan coupe en $A, B, C, D \dots$ toutes les arêtes Ox, Oy, Oz, Ot, \dots d'un angle polyèdre convexe $Oxyz \dots$. Démontrer que le polygone plan $ABCD \dots$ est convexe.

3° Montrer que le résultat du 1° reste valable pour un angle polyèdre concave $Oxyz \dots$ si les arêtes $Oz, Ot \dots$ sont situées d'un même côté du plan particulier xOy mais toutes les sections planes $ABCD \dots$ étant des polygones concaves.

307. - L'exercice précédent (3°) montre qu'il peut exister des plans coupant toutes les arêtes d'un angle polyèdre concave.

1° Montrer qu'il n'existe aucun plan coupant les quatre arêtes de l'angle tétraèdre concave $Oxyz$ (fig. 3).

2° Quelles sont les intersections des plans des faces de cet angle polyèdre avec le plan ABC (fig. 3)?
E étant un point de l'arête Ot , construire les intersections des faces de l'angle polyèdre par les plans EAB, EBC, ECA .

PROBLÈMES RELATIFS AU CHAPITRE II

308. - Une droite et un plan sont parallèles ; démontrer que tout plan qui coupe l'un coupe l'autre.

309. - Deux plans P et Q passent par une droite X, deux autres plans R et S par une droite Y.

Les plans P et R se coupent suivant une droite D, les plans Q et S suivant une droite E.

1° si X et Y sont parallèles, démontrer que D et E sont parallèles ;

2° si D et E sont parallèles, démontrer que X et Y sont parallèles.

310. - Deux triangles ABC et DEF, non situés dans un même plan, ont leurs côtés respectivement parallèles. Démontrer que :

1° ces triangles sont semblables ;

2° les droites AD, BE, CF sont concourantes (ou parallèles).

311. - Démontrer que si un plan R est parallèle à l'intersection de deux plans P et Q, il les coupe suivant deux parallèles. Réciproque.

312. - On donne un plan P, un point O extérieur à ce plan et une droite D parallèle au plan P.

Trouver un point M sur la droite D tel que si OM coupe P en M', la longueur MM' soit égale à une longueur donnée k.

313. - On donne deux points A, B et deux droites Y et Z. Construire un point M de Y et un point N de Z tels que les droites AM et BN soient parallèles.

314. - Mener une droite qui passe par un point donné, qui rencontre une droite donnée et qui soit parallèle à un plan donné.

315. - Mener une droite qui passe par un point donné et qui rencontre deux droites non situées dans un même plan.

316. - Démontrer qu'il existe une infinité de droites qui rencontrent trois droites données.²

317. - Mener une droite qui rencontre deux droites données et qui soit parallèle à une droite donnée.

318. - On donne un plan P, un quadrilatère ABCD de ce plan et les parallèles Ax, By, Cz, Dt non situées dans le plan P. Sur Ax, By, Dt, on prend respectivement les points A', B', D' tels que A'B' et A'D' ne soient pas parallèles à AB et AD (fig. 1). Dessiner

1° l'intersection des plans P et A'B'D' ;

2° les intersections des plans yBCz et zCDt avec le plan A'B'D' ;

² Note de la présente éditrice : ce n'est pas toujours vrai, donc il faut préciser que les droites sont 2 à 2 non coplanaires.

3° l'intersection de Cz avec le plan A'B'D'.

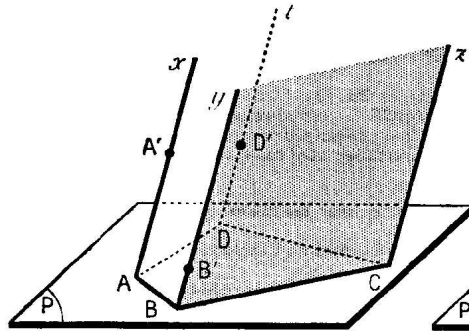


Fig. 1.

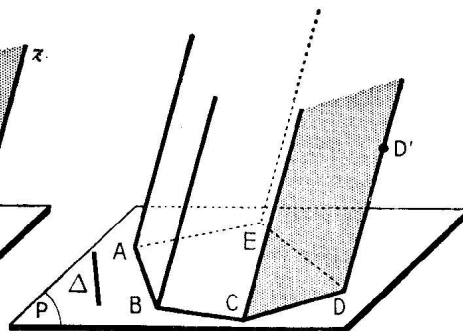


Fig. 2.

319. On donne un pentagone ABCDE tracé dans un plan P. Par les cinq sommets, on mène des parallèles non contenues dans P. Soient D' un point sur la droite passant par D et X une droite du plan P (fig. 2).

Dessiner les intersections des quatre autres parallèles avec le plan (X, D').

320. - On donne un quadrilatère plan ABCD et un point S en dehors de ce plan. Sur les segments SA, SB, SC, on marque respectivement les points A', B', C' tels que A'B' soit parallèle à AB, mais B'C' non parallèle à BC (fig. 3). Dessiner l'intersection de la droite SD avec le plan A'B'C'.

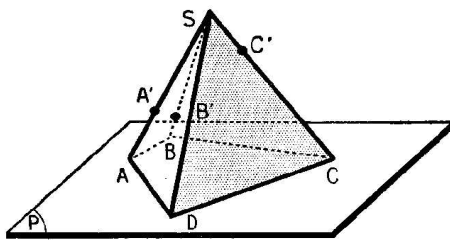


Fig. 3.

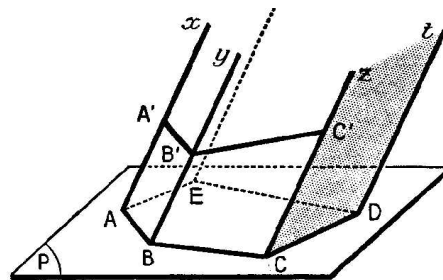


Fig. 4.

321. - On donne un pentagone ABCDE d'un plan P, et les

parallèles Ax, By, Cz, Dt, Eu non situées dans ce plan P. Sur Ax, By, Cz on marque respectivement les points A', B', C' tels que A'B' soit parallèle à AB, mais B'C' non parallèle à BC (fig. 4). Dessiner les intersections des droites Dt et Eu avec le plan A'B'C'.

322. - 1° Démontrer qu'un plan coupe un cercle en deux points au plus. Si un plan n'a qu'un point commun avec un cercle, il lui est tangent.

2° Mener, par un point donné, une droite qui rencontre une droite et un cercle donnés.

3° Mener, par deux points donnés, un plan tangent à un cercle donné.

4° Mener, par un point donné, un plan parallèle à une droite donnée et tangent à un cercle donné.

323. - On donne deux points A et B d'un plan P et deux points O et O' extérieurs à ce plan. Construire deux parallèles passant par O et O', rencontrant P en M et M' de manière que le quadrilatère ABM'M soit un parallélogramme.

324. - Deux points M et M' décrivent respectivement deux plans parallèles P et P'.

1° lieu du milieu de MM' ?

2° lieu du point qui divise le segment MM' algébriquement dans un rapport donné ?

325. - Deux points M et M' décrivent respectivement deux droites X et Y non situées dans un même plan :

1° lieu du milieu de MM' ?

2- lieu du point qui divise le segment MM' algébriquement dans un rapport donné ?

326. - On donne deux droites D, D' sécantes en O et une droite X qui ne les rencontre pas.

Le point M étant variable sur X , trouver le lieu de la droite d'intersection des plans (M, D) et (M, D') .

327. - On donne deux points A et B d'un plan P et un point O extérieur à ce plan. Autour de A et de B pivotent, dans P , deux droites parallèles X et Y . Lieu de la droite d'intersection des plans (O, X) et (O, Y) ?

328. - On donne deux plans P et Q . Une droite variable, qui reste parallèle à elle-même, coupe ces plans en M et N :

1° lieu du milieu de MN ?

2° lieu du point qui divise algébriquement MN dans un rapport donné ?

329. - Deux cercles $(O, R), (O', R')$, ont leurs plans parallèles. Trouver un point M sur le premier cercle et un point M' sur le second tels que la droite MM' soit parallèle à une droite donnée.

330. - Deux triangles ABC et $A'B'C'$, non situés dans un même plan, sont tels que les droites BC et $B'C'$, CA et $C'A'$, AB et $A'B'$ se coupent respectivement en U, V, W . Démontrer que :

1° les points U, V, W sont alignés ;

2° les droites AA', BB', CC' sont concourantes ou parallèles.

331. - Trois droites parallèles D, E, F ne sont pas dans un même plan.

1° Lieu des points de l'espace équidistants de ces trois droites ?

2° Lieu des points de l'espace équidistants des trois plans formés par deux quelconques de ces parallèles ?

332. - On donne deux droites sécantes X, Y et deux points I et J tels que la droite IJ ne soit pas parallèle au plan (X, Y) . Un plan variable, qui passe par IJ , coupe X en M et Y en N .

1° Démontrer que la droite MN passe par un point fixe.

2° Trouver le lieu du point d'intersection des droites IM et JN .

3° Trouver le lieu du point d'intersection des droites IN et JM .

333. - Deux quadrilatères gauches $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ont leurs côtés parallèles deux à deux.

Démontrer que les quatre droites AA' , BB' , CC' , DD' sont concourantes (ou parallèles). En est-il de même quand les quadrilatères sont plans ?

334. - On donne un plan P et deux droites Y , Z non situées dans un même plan. Trouver un point M sur Y , un point N sur Z tels que le segment MN soit parallèle au plan P et ait une longueur donnée t .

335.- On donne un plan P et deux droites Y et Z non situées dans un même plan. Trouver un point M sur Y , un point N sur Z tels que le segment MN soit parallèle au plan P et soit de longueur minimum.

336. - On donne trois droites X , Y , Z non situées dans un même plan. Trouver une droite qui les rencontre respectivement en I , J , K tels que I soit le milieu de JK . Même problème connaissant le rapport $m = IJ/IK$.

337. - Une droite K fait des angles égaux avec trois droites d'un plan (deux quelconques d'entre elles n'étant pas parallèles). Démontrer que la droite K est perpendiculaire au plan.

338. - On donne deux points A et B extérieurs à un plan P . Trouver le lieu des points M du plan P tels que $MA^2 + MB^2 = k^2$, k étant une constante donnée.

339. - On considère un quadrilatère gauche $ABCD$. Soit M un point quelconque de AB . On mène par M le plan parallèle à AD et BC . Ce plan coupe AC en N , DB en Q , DC en P .

1° Démontrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

2° Comment doivent être choisies les droites BC et AD pour que $MNPQ$ soit un rectangle ?

3° Cette hypothèse étant vérifiée, on suppose de plus que $AD = AB = BC = a$ (a longueur donnée). On pose $AM = x$. Calculer en fonction de a et x l'aire du rectangle $MNPQ$.

4° Peut-on déterminer x de façon que cette aire ait une valeur donnée m^2 ? Discuter.

340.-Soient E et F les points qui divisent algébriquement dans le même rapport les côtés AB et AD du quadrilatère gauche $ABCD$ (c'est-à-dire en valeur algébrique $EA/EB = FA/FD$)

Un plan quelconque, passant par E et F , coupe les droites CB et CD en G et H . Démontrer que $GC/GB = HC/HD$.

341. - On donne deux triangles ABC et $A'BC$ qui ont en commun le côté BC , mais qui sont situés dans des plans distincts. Soient H et H' leurs orthocentres.

1° Démontrer que si AA' est perpendiculaire au plan ABC , HH' est perpendiculaire au plan $A'BC$.

2° Réciproque du 1°.

3° Quel est le lieu du point H' quand A' décrit la perpendiculaire menée par A au plan ABC ?

342. - On donne deux droites orthogonales X et Y , et un point fixe A sur X . Les points M et N varient sur Y de manière que le dièdre d'arête X et dont les faces contiennent M et N reste

constamment droit.

1° Démontrer que l'orthocentre du triangle AMN reste fixe.

2° Lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle AMN ?

3° Démontrer que : $AM^2 + AN^2 - MN^2 = \text{constante}$.

343. - On donne un triangle ABC ; un point M varie sur la perpendiculaire en A au plan ABC.

Trouver le lieu de la projection du point A sur le plan MBC.

344. - 1° Si deux segments AB et CD sont orthogonaux, démontrer que : $CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2$.

2° Réciproque du 1°.

3° Quatre points A, B, C, D, non situés dans un même plan, sont tels que AB et AC sont respectivement orthogonaux à CD et à BD. Démontrer que AD et BC sont orthogonaux.

345. - 1° Démontrer que le lieu des points de l'espace dont la différence des carrés des distances à deux points fixes A et B a une valeur donnée k est un plan perpendiculaire à AB que l'on précisera.

2° On considère quatre points non situés dans le même plan S, A, B, C tels que :

$SA^2 - SB^2 = CA^2 - CB^2$. Démontrer que SC et AB sont orthogonales.

3° On désigne par H le pied de la perpendiculaire menée de S au plan ABC. Soit K le point d'intersection de CH et AB. Démontrer que CK est une hauteur du triangle ABC et SK une hauteur de SAB.

4° Si D est un point quelconque de SC, montrer que $DA^2 - DB^2 = CA^2 - CB^2$.

346. - On considère deux plans perpendiculaires H et F et leur intersection xy.

1° Caractériser les plans P qui coupent les plans H et F suivant deux droites perpendiculaires.

2° Montrer que par une droite D de l'espace on peut, en général, mener deux plans P. Discuter.

Comment choisir D pour que l'on puisse mener par cette droite un seul plan P, ou aucun plan P ou une infinité?

3° A étant un point fixe de l'espace non situé ni dans H, ni dans F, on considère toutes les droites de l'espace passant par A et les plans P contenant ces droites. Par un point B fixe de xy on mène les perpendiculaires à ces plans. Soit K le pied sur chaque plan P. Quel est le lieu de ces perpendiculaires? Quel est le lieu des points K?

347. - On donne un trièdre trirectangle Oxyz.

Dans la face yOz, on trace la demi-droite Ot telle que l'angle zOt = a ; dans la face xOz, on trace la demi-droite Ou telle que l'angle zOu = b. Sur Ot, on marque un point B (OB = m). On projette B en C sur Oz, C en A sur Ou.

1° Démontrer que $OA = m \cos a \cos b$.

2° Démontrer que le triangle ABC est rectangle. En déduire que $\cos uOt = \cos a \cos b$.

348. - Dans un plan P, on donne un triangle ABC. Sur la perpendiculaire en A au plan P, on marque un point O (OA = m).

On considère le trièdre OABC dont les faces sont :

$\text{BOC} = a$; $\text{COA} = b$; $\text{AOB} = c$.

L'angle $\text{BAC} = \hat{A}$ est le rectiligne du dièdre d'arête OA.

1° Calculer, en fonction de m , b et c , les longueurs AB, AC, OB, OC.

2° Calculer BC^2 dans le triangle BAC, puis dans le triangle BOC. En déduire que $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

3° Application numérique : on connaît les trois faces d'un trièdre

$a = 72^\circ$; $b = 64^\circ$; $c = 37^\circ$.

Calculer les rectilignes des dièdres opposés à ces faces.

349. - Un plan coupe en A, B, C les arêtes d'un trièdre trirectangle de sommet O.

1° On connaît $\text{OA} = a$, $\text{OB} = b$, $\text{OC} = c$; calculer AB, BC, CA.

2° Démontrer que le triangle ABC a tous ses angles aigus.

3° On projette O en H sur le plan ABC ; démontrer que H est intérieur au triangle ABC, et que les angles AHB, BHC et CHA sont tous obtus.

4° Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

5° Démontrer que : $1/\text{OH}^2 = 1/\text{OA}^2 + 1/\text{OB}^2 + 1/\text{OC}^2$

6° Démontrer que $\cos^2 \hat{\text{AÔH}} + \cos^2 \hat{\text{HÔB}} + \cos^2 \hat{\text{CÔH}} = 1$.

7° Démontrer que l'aire du triangle OAB est moyenne proportionnelle entre les aires des triangles ABC et ABH.

8° Démontrer que le carré de l'aire du triangle ABC est égale à la somme des carrés des aires des triangles OAB, OBC et OCA.

CHAPITRE III

GEOMETRIE DE L'ESPACE ;

PROJECTIONS

- 20. Projections cylindriques.
- 21. Perspective cavalière.
- 22. Projections orthogonales sur un plan ; Projection d'un angle droit.
- 23. Perspectives axonométriques.
- 24. Applications des projections orthogonales.
- 25. Géométrie descriptive : épure d'un point.
- 26. Géométrie descriptive : épure d'une droite.
- 27. Géométrie descriptive : épure d'un plan.

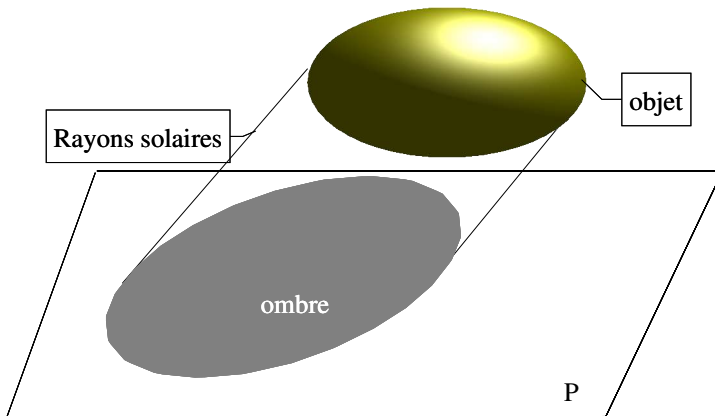
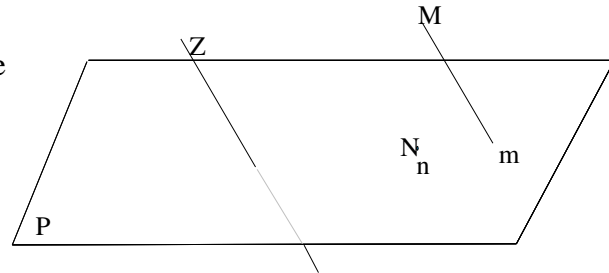
Problèmes relatifs au chapitre III

20. - PROJECTIONS CYLINDRIQUES

1. Définitions. Soit un plan P (plan de projection) et une droite Z qui lui est sécante (direction des projetantes).

La parallèle à Z , menée par un point quelconque M de l'espace, coupe P en m (fig. 1) : le point m est appelé projection cylindrique de M parallèlement à Z ; la droite Mm est la projetante de M .

Fig. 1. - Le point m est la projection cylindrique de M sur P , parallèlement à la direction Z .
Si le point N est dans P , la projection n est confondue avec N .



Si la droite Z est oblique au plan P , la projection cylindrique est dite oblique ; si la droite Z est perpendiculaire au plan P , la projection cylindrique est dite orthogonale.

L'ombre d'un objet opaque sur l'écran (plan P) donne l'image d'une projection cylindrique (les projetantes sont les rayons solaires supposés parallèles).

Si un point M décrit une figure (F) , sa projection m décrit une figure (f) du plan P appelée projection cylindrique de (F) sur P (projection parallèlement à Z) ; la projection d'une figure (F) sur le plan P est le lieu des projections, sur ce plan P , de tous les points de la figure (F) .

2. Propriétés des projections cylindriques.

Soit P le plan de projection, Z la direction des projetantes.

A. - La projection d'une droite D , non parallèle à Z , est une droite d .

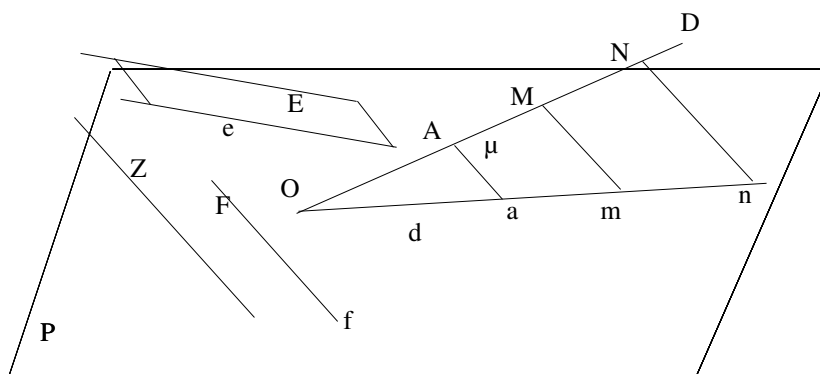
Soit A un point fixe de D , a sa projection.

Soit M un point variable de D , m sa projection.

Il s'agit de chercher le lieu de m quand M décrit D .

1° Les parallèles Aa et Mm sont dans un même plan μ : c'est le plan fixe contenant D et Aa (plan mené par D parallèlement à Z).

Le point m est sur la droite fixe d qui est l'intersection des plans P et μ . La projection de tout point de D est donc sur d .



2° Réciproquement, soit n un point quelconque de d . La parallèle à Z , menée par n , étant dans le plan μ , coupe D en N ; n est donc la projection de N . Tout point de d est donc la projection d'un point de D . (On peut aussi observer que si M décrit D , m décrit toute la droite d .)

La projection de D est donc la droite d .

Le plan μ (plan mené par D parallèlement à Z) est le plan projetant D .

Remarques.

1° Si D perce le plan P en O , la droite d (projection de D) passe par O .

2° Si E est parallèle au plan P , sa projection e est parallèle à E .

3° Si F est parallèle à Z , sa projection est le point f , intersection de F avec P .

B. - Si un segment AB est parallèle au plan P , sa projection est un segment ab égal à AB .

Cette propriété résulte du fait que le quadrilatère $ABba$ est un parallélogramme.

Conséquences.

1° Si un triangle ABC est parallèle au plan P , sa projection sur P est un triangle abc qui lui est égal.

2° Plus généralement, toute figure située dans un plan parallèle au plan P se projette sur P suivant une figure qui lui est égale.

3° Il en résulte que les projections (f) et (f') d'une même figure (F) , parallèlement à une direction Z , sur deux plans parallèles P et P' , sont égales.

C. - Si deux droites D et E sont parallèles, leurs projections d et e sont parallèles.

Supposons que D ne soit pas parallèle à la direction Z des projetantes. Les plans projetant D et E (plans DAa et EBb) sont parallèles : leurs intersections d et e par P sont donc parallèles.

Notons que la réciproque de cette propriété est inexacte (cf. exercice 353).

Si Z est parallèle au plan (D, E) , d et e sont confondues.

Si D et E sont parallèles à Z , la projection de chacune d'elles est un point.

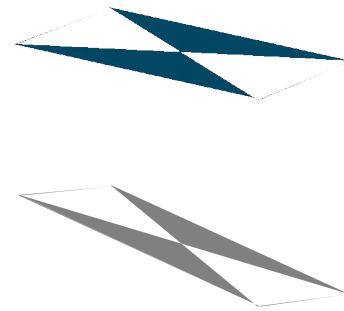
Conséquence :

La projection d'un parallélogramme ABCD est un parallélogramme abcd. Le centre i de abcd est la projection du centre I de ABCD.

D. - Trois points alignés A, B, C se projettent suivant trois points alignés a, b, c tels que, en mesures algébriques :

$$CA/CB = ca/cb$$

Cette propriété résulte du théorème de Thalès en géométrie plane (plan projetant la droite AB)
En particulier, le milieu de AB se projette au milieu de ab.



Conséquence.

Soient deux segments AB et A'B' portés par des droites parallèles. De ce qui précède, il résulte que :

1° Les projections cylindriques ab et a'b' sont parallèles.

(porter, sur la droite AB, le segment AB'' égal à A'B' et de même sens que A'B', d'où en mesures algébriques $AB/AB'' = ab/ab''$ (th. de Thalès)

et $ab'' = a'b'$ (d'après (B)).

Ce qui peut s'énoncer :

le rapport des mesures algébriques de deux segments parallèles est égal à celui de leurs projections.

EXERCICES

350. - Si plusieurs droites de l'espace concourent en un point A, leurs projections cylindriques concourent en a, projection de A. La réciproque est-elle exacte ?

351. - Si une ligne L est située dans un plan parallèle à la direction des projetantes, sa projection cylindrique sur un plan est une droite (ou un segment de droite).

352. - Que dire d'une ligne L dont les projections cylindriques, sur deux plans sécants et parallèlement à deux directions différentes, sont des droites ?

353. - Les projections cylindriques de deux droites D et D' sont parallèles. Peut-on affirmer que D et D' sont parallèles ?

354. - On donne deux droites D et E telles que leurs projections cylindriques sur un plan P, parallèlement à Z, sont parallèles ; leurs projections cylindriques sur un autre plan Q, parallèlement à T, sont aussi parallèles. Les droites D et E sont-elles parallèles ?

355. - On donne deux droites D et E non situées dans un même plan, et un plan de projection P. Peut-on déterminer une direction X des projetantes de manière que les projections cylindriques d et e de D et E sur P soient parallèles ?

356. - On donne un quadrilatère gauche ABCD et un plan de projection P. Peut-on déterminer une direction des projetantes pour que la projection cylindrique de ce quadrilatère, sur le plan P, soit un parallélogramme ? En est-il de même si ABCD est un quadrilatère plan ?

357. - Soit abc la projection cylindrique d'un triangle ABC. Démontrer que le point de concours G des médianes du triangle ABC se projette en g qui est le point de concours des médianes du triangle abc .

358. - Démontrer que si quatre points A, B, C, D forment une division harmonique, leurs projections cylindriques a, b, c, d forment aussi une division harmonique.

359. - On donne un plan P et un angle xOy dont les côtés coupent le plan P. Montrer que l'on peut trouver une infinité de directions Z telles que la projection cylindrique de xOy sur P, parallèlement à Z, soit un angle droit (on supposera d'abord que le point O est extérieur à P). Généraliser en supposant que la projection cylindrique de xOy sur P soit un angle égal à un angle donné.

Projections coniques.

On donne un plan P (plan de projection) et un point S (centre de projection) extérieur à ce plan. Le point M étant quelconque, la droite SM coupe le plan P en m ; on dit que m est la projection conique de M sur le plan P, le centre de projection étant S. Si M décrit une figure (F), le point m décrit une figure (f) qui est dite la projection conique de (F).

360. - Démontrer que la projection conique d'une droite est une droite (cas d'exception).

361. - Démontrer que si plusieurs droites sont parallèles, leurs projections coniques sont concourantes (cas d'exception).

362. - On donne un plan P et un angle xOy dont les côtés coupent P. Montrer que l'on peut trouver une infinité de centres de projection S tels que la projection conique de xOy sur P, soit un angle droit. Où se trouvent tous ces centres S ? (On supposera d'abord que le point O est extérieur à P.)

363. - On donne un point a d'un plan P et un triangle ABC dont aucun des côtés n'est parallèle à P. Trouver un centre S tel que la projection conique du triangle ABC sur P soit un triangle isocèle abc de sommet a ($ab = ac$).

364. - On donne un angle xOy et deux plans parallèles P et P'. Trouver le lieu du point S du plan P tel que la projection conique (centre S) de l'angle xOy sur le plan P' soit un angle droit.

365. - On donne un quadrilatère plan ABCD et un point S extérieur à son plan. Déterminer un plan P tel que la projection conique (centre S) du quadrilatère sur le plan P soit un parallélogramme. Ce parallélogramme peut-il être un rectangle ?