N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

Groupes et algèbres de Lie

Chapitres 4 à 6

Springer

GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES, par N. BOURBAKI.

Algèbre, chapitre 4 à 7. 1981, 432 pages.

Algèbre, chapitre 10. Algèbre homologique. 1980, 416 pages, 3 figures.

Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 à 5. 1981, 400 pages.

Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6. 1981, 288 pages.

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

Chapitres 4, 5 et 6

CHAPITRE IV

Groupes de Coxeter et systèmes de Tits

CHAPITRE V

Groupes engendrés par des réflexions

CHAPITRE VI

Systèmes de racines

MASSON

Paris - New York - Barcelone - Milan
Mexico - Rio de Janeiro
1981

ISBN : 2-225-76076-4

MASSON S.A.	120 Bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06
MASSON PUBLISHING U.S.A. Inc.	133 East 58 th Street, New York, N.Y. 10022
TORRAY-MASSON S.A.	Balmes 151, Barcelona 8
MASSON ITALIA EDITORI S.p.A.	Via Giovanni Pascoli 55, 20133 Milano
MASSON EDITORES	Dakota 383 Colonia Napoles Mexico 18 DF
EDITORA MASSON DO BRASIL Ltda	Rua da Quitanda, 20/s 301 Rio de Janeiro R.J.

INTRODUCTION AUX CHAPITRES IV, V ET VI

L'étude des groupes semi-simples (analytiques ou algébriques) et de leurs algèbres de Lie conduit à la considération des structures de *systèmes de racines, groupes de Coxeter et systèmes de Tits*. Les chapitres IV, V et VI sont consacrés à ces structures.

Pour orienter le lecteur, nous en donnons ci-dessous quelques exemples.

I. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ (*). Une *racine* de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$ est une forme linéaire non nulle α sur $\mathfrak{h}$ telle qu'il existe un élément x non nul de $\mathfrak{g}$ avec $[h, x] = \alpha(h)x$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$. Ces racines forment dans l'espace vectoriel $\mathfrak{h}^*$ dual de $\mathfrak{h}$ un système de racines réduit R. La donnée de R détermine $\mathfrak{g}$ à un isomorphisme près et tout système de racines réduit est isomorphe à un système de racines obtenu de cette manière. Un automorphisme de $\mathfrak{g}$ laissant stable $\mathfrak{h}$ définit un automorphisme de $\mathfrak{h}^*$ laissant R invariant, et l'on obtient ainsi tout automorphisme de R. Le groupe de Weyl de R se compose des automorphismes de $\mathfrak{h}^*$ définis par les automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$ laissant stable $\mathfrak{h}$; c'est un groupe de Coxeter.

Soient G un groupe de Lie complexe connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et Γ le sous-groupe de $\mathfrak{h}$ formé des éléments h tels que $\exp_G(2\pi i h) = 1$. Soit $R^\vee$ le système de racines dans $\mathfrak{h}$ inverse de R, soit $Q(R^\vee)$ le sous-groupe de $\mathfrak{h}$ engendré par $R^\vee$ et soit $P(R^\vee)$ le sous-groupe associé au sous-groupe $Q(R)$ de $\mathfrak{h}^*$ engendré par R (i.e. l'ensemble des $h \in \mathfrak{h}$ tels que $\lambda(h)$ soit *entier* pour tout $\lambda \in Q(R)$). On a alors $P(R^\vee) \supset \Gamma \supset Q(R^\vee)$. De plus le centre de G est canoniquement isomorphe à $P(R^\vee)/\Gamma$ et le groupe fondamental de G à $\Gamma/Q(R^\vee)$. En particulier, Γ est égal à $P(R^\vee)$ si G est le groupe adjoint et Γ est égal à $Q(R^\vee)$ si G est simplement connexe. Enfin les poids des représentations linéaires de dimension finie de G sont les éléments du sous-groupe de $\mathfrak{h}^*$ associé à Γ.

(*) Nous utilisons librement dans cette Introduction la terminologie traditionnelle ainsi que les notions définies dans les chapitres IV, V et VI.

II. Soit G un groupe de Lie réel compact connexe semi-simple et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soient T un tore maximal de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, et X le groupe des caractères de T. Soit R l'ensemble des éléments α non nuls de X tels qu'il existe un élément x non nul de $\mathfrak{g}$ avec $(\mathrm{Ad}\, t).x = \alpha(t)x$ pour tout $t \in \mathrm{T}$. Identifions X à un réseau de l'espace vectoriel réel $\mathrm{V} = \mathrm{X} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$; alors R est un système de racines réduit dans V. Soit N le normalisateur de T dans G; l'action de N sur T définit un isomorphisme du groupe N/T sur le groupe de Weyl de R. On a $\mathrm{P}(\mathrm{R}) \supset \mathrm{X} \supset \mathrm{Q}(\mathrm{R})$; de plus, on a $\mathrm{X} = \mathrm{P}(\mathrm{R})$ si G est simplement connexe et $\mathrm{X} = \mathrm{Q}(\mathrm{R})$ si le centre de G est réduit à l'élément neutre.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}$ complexifiée de $\mathfrak{g}$ est semi-simple et $\mathfrak{t}_{(\mathbf{C})}$ en est une sous-algèbre de Cartan. Il existe un isomorphisme canonique de $\mathrm{V}_{(\mathbf{C})}$ sur le dual de $\mathfrak{t}_{(\mathbf{C})}$ qui transforme R en le système de racines de $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}$ par rapport à $\mathfrak{t}_{(\mathbf{C})}$.

III. Soit G un groupe algébrique semi-simple connexe sur un corps commutatif k. Soient T un élément maximal de l'ensemble des tores de G déployés sur k et X le groupe des caractères de T (homomorphismes de T dans le groupe multiplicatif). On identifie X à un réseau de l'espace vectoriel réel $\mathrm{V} = \mathrm{X} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. Les racines de G par rapport à T sont les éléments α non nuls de X tels qu'il existe un élément x non nul de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G avec $(\mathrm{Ad}\, t).x = \alpha(t)x$ pour tout point t de T. On obtient ainsi un système de racines R dans V, qui n'est pas nécessairement réduit. Soient N le normalisateur et Z le centralisateur de T dans G et soient $\mathrm{N}(k)$ et $\mathrm{Z}(k)$ leurs groupes de points rationnels sur k. L'action de $\mathrm{N}(k)$ sur T définit un isomorphisme de $\mathrm{N}(k)/\mathrm{Z}(k)$ sur le groupe de Weyl de R.

Soit U un élément maximal de l'ensemble des sous-groupes unipotents de G, définis sur k et normalisés par Z. Posons $\mathrm{P} = \mathrm{Z}.\mathrm{U}$. On a $\mathrm{P}(k) = \mathrm{Z}(k).\mathrm{U}(k)$ et $\mathrm{P}(k) \cap \mathrm{N}(k) = \mathrm{Z}(k)$. De plus, il existe une base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de R telle que les poids de T dans U soient les racines de R positives pour cette base; le quadruplet $(\mathrm{G}(k), \mathrm{P}(k), \mathrm{N}(k), \mathrm{S})$, où S désigne l'ensemble des éléments de $\mathrm{N}(k)/\mathrm{Z}(k)$ correspondant grâce à l'isomorphisme défini plus haut aux symétries $s_{\alpha_i} \in \mathrm{W}(\mathrm{R})$ associées aux racines α_i, est un système de Tits.

IV. Dans la théorie des groupes algébriques semi-simples sur un corps local, on rencontre des systèmes de Tits dont le groupe W est le groupe de Weyl affine d'un système de racines. Soit, par exemple, $\mathrm{G} = \mathbf{SL}(n+1, \mathbf{Q}_p)$ (avec $n \geqslant 1$). Soit B le groupe des matrices $(a_{ij}) \in \mathbf{SL}(n+1, \mathbf{Z}_p)$ telles que $a_{ij} \in p\mathbf{Z}_p$ pour $i < j$ et soit N le sous-groupe de G formé des matrices n'ayant qu'un seul élément non nul dans chaque ligne et dans chaque colonne. Il existe alors une partie S de $\mathrm{N}/(\mathrm{B} \cap \mathrm{N})$ telle que le quadruplet (G, N, B, S) soit un système de Tits. Le groupe $\mathrm{W} = \mathrm{N}/(\mathrm{B} \cap \mathrm{N})$ est le groupe de Weyl affine d'un système de racines de type A_n; c'est un groupe de Coxeter infini.

Pour la rédaction de ces trois chapitres, de nombreuses conversations avec J. Tits nous ont apporté une aide précieuse. Nous l'en remercions très amicalement.

CHAPITRE IV

GROUPES DE COXETER ET SYSTÈMES DE TITS

§ 1. Groupes de Coxeter

Dans tout ce paragraphe, on désigne par W un groupe, noté multiplicativement, d'élément neutre 1, et par S un sous-ensemble générateur de W tel que $S = S^{-1}$ et $1 \notin S$. Tout élément de W est produit d'une suite finie d'éléments de S. A partir du nº 3, on suppose que tout élément de S est d'ordre 2.

1. Longueur et décompositions réduites

DÉFINITION 1. — *Soit $w \in W$. On appelle longueur de w (par rapport à S), et l'on note $l_S(w)$ ou simplement $l(w)$, le plus petit entier $q \geqslant 0$ tel que w soit produit d'une suite de q éléments de S. On appelle décomposition réduite de w (par rapport à S) toute suite $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ d'éléments de S telle que $w = s_1 \ldots s_q$ et $q = l(w)$.*

Ainsi 1 est l'unique élément de longueur 0 et S se compose des éléments de longueur 1.

PROPOSITION 1. — *Soient w et w' dans W. On a les formules:*

$$l(ww') \leqslant l(w) + l(w') \tag{1}$$

$$l(w^{-1}) = l(w) \tag{2}$$

$$|l(w) - l(w')| \leqslant l(ww'^{-1}). \tag{3}$$

Soient $(s_1, \ldots, s_p)$ et $(s'_1, \ldots, s'_q)$ des décompositions réduites de w et w' respectivement; on a donc $l(w) = p$ et $l(w') = q$, et comme on a $ww' = s_1 \ldots s_p s'_1 \ldots s'_q$, on a $l(ww') \leqslant p + q$, d'où (1). Comme $S = S^{-1}$ et $w^{-1} = s_p^{-1} \ldots s_1^{-1}$, on a $l(w^{-1}) \leqslant p = l(w)$; remplaçant w par w^{-1}, on obtient l'inégalité opposée $l(w) \leqslant l(w^{-1})$, d'où (2). Remplaçant w par ww'^{-1} dans (1) et (2), on obtient les relations:

$$l(w) - l(w') \leqslant l(ww'^{-1}), \tag{4}$$

$$l(ww'^{-1}) = l(w'w^{-1}); \tag{5}$$

en échangeant w et w' dans (4), on obtient $l(w') - l(w) \leqslant l(ww'^{-1})$ d'après (5), d'où (3).

COROLLAIRE. — *Soient $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_p)$ et $\boldsymbol{s}' = (s'_1, \ldots, s'_q)$ deux suites d'éléments de S telles que $w = s_1 \ldots s_p$ et $w' = s'_1 \ldots s'_q$. Si la suite $(s_1, \ldots, s_p, s'_1, \ldots, s'_q)$*

est une décomposition réduite de ww', alors $\mathbf{s}$ *est une décomposition réduite de w et* $\mathbf{s}'$ *en est une de w'.*

Par hypothèse, on a $l(w) \leqslant p$, $l(w') \leqslant q$ et $l(ww') = p + q$. D'après (1), on a donc $l(w) = p$ et $l(w') = q$, d'où le corollaire.

Remarque. — La formule $d(w,w') = l(ww'^{-1})$ définit une distance d sur W, invariante par les translations à droite, en vertu des formules (1) et (2).

2. Groupes diédraux

DÉFINITION 2. — *On appelle groupe diédral tout groupe engendré par deux éléments d'ordre* 2, *distincts.*

Exemple. —Soit M le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$, et soit m un entier $\geqslant 2$ (resp. $m = \infty$). On fait opérer M sur le groupe $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (resp. sur $\mathbf{Z}$) par $(-1).x = -x$, et l'on note $\mathbf{D}_m$ le produit semi-direct correspondant de M par $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (resp. de M par $\mathbf{Z}$). Les éléments de $\mathbf{D}_m$ sont donc les couples (ε, x) avec $\varepsilon = \pm 1$ et $x \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (resp. $x \in \mathbf{Z}$); la loi de groupe dans $\mathbf{D}_m$ est donnée par la formule:

$$(6) \qquad (\varepsilon, x).(\varepsilon', x') = (\varepsilon\varepsilon', \varepsilon' x + x').$$

On note ι la classe de 1 modulo m (resp. $\iota = 1$) et l'on pose

$$(7) \qquad \rho = (-1,0), \qquad \rho' = (-1, \iota), \qquad \pi = (1,\iota);$$

on a alors $\rho^2 = \rho'^2 = 1$ et $\pi = \rho\rho'$. Les formules

$$(8) \qquad \pi^n = (1, n\iota), \qquad \rho\pi^n = (-1, n\iota)$$

montrent que $\mathbf{D}_m$ est un groupe diédral engendré par $\{\rho, \rho'\}$.

PROPOSITION 2. — *On suppose que* S *se compose de deux éléments distincts s et s' d'ordre* 2.

(i) *Le sous-groupe* P *de* W *engendré par $p = ss'$ est distingué, et* W *est produit semi-direct du sous-groupe* $\mathrm{T} = \{1, s\}$ *et de* P. *De plus, on a* $(\mathrm{W}:\mathrm{P}) = 2$.

(ii) *Soit m l'ordre (fini ou non) de p. On a $m \geqslant 2$ et* W *est d'ordre $2m$. Il existe un unique isomorphisme φ de $\mathbf{D}_m$ sur* W *tel que $\varphi(\rho) = s$ et $\varphi(\rho') = s'$.*

(i) On a $sps^{-1} = sss's = s's = p^{-1}$, d'où

$$(9) \qquad sp^ns^{-1} = p^{-n}$$

pour tout entier n. Comme W est engendré par $\{s, s'\}$, donc par $\{s, p\}$, le sous-groupe P de W est distingué. Par suite, TP est un sous-groupe de W; comme TP contient s et $s' = sp$, on a donc $\mathrm{W} = \mathrm{TP} = \mathrm{P} \cup s\mathrm{P}$. Pour prouver (i), il suffit donc de montrer que l'on a $\mathrm{W} \neq \mathrm{P}$. Si l'on avait $\mathrm{W} = \mathrm{P}$, le groupe W serait commutatif, d'où $p^2 = s^2s'^2 = 1$; les seuls éléments de $\mathrm{W} = \mathrm{P}$ seraient 1 et p, contrairement à l'hypothèse que W contient au moins trois éléments, à savoir 1, s et s'.

(ii) Comme on a $s \neq s'$, on a $p \neq 1$, d'où $m \geqslant 2$. Comme P est d'ordre m et que l'on a $(\mathrm{W} : \mathrm{P}) = 2$, l'ordre de W est $2m$. Si m est fini (resp. infini), il existe un isomorphisme φ' de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{Z}$) sur P appliquant π sur p; il existe de plus un isomorphisme φ'' de $\mathrm{M} = \{1, -1\}$ sur T appliquant -1 sur s. Le groupe W est produit semi-direct de T et P; d'après les formules (9) et $\rho\pi^n\rho^{-1} = \pi^{-n}$, on déduit de φ' et φ'' un isomorphisme φ de $\mathbf{D}_m$ sur W tel que $\varphi(\rho) = s$ et $\varphi(\pi) = p$, d'où $\varphi(\rho') = s'$. L'unicité de φ résulte de ce que $\mathbf{D}_m$ est engendré par $\{\rho, \rho'\}$.

Remarque. — Considérons un groupe diédral W d'ordre $2m$, engendré par deux éléments distincts s et s' d'ordre 2. Désignons par $\boldsymbol{s}_q$ (resp. $\boldsymbol{s}'_q$) la suite de longueur q dont les termes de rang impair (resp. pair) sont égaux à s et les termes de rang pair (resp. impair) à s' et soit w_q (resp. w'_q) le produit de la suite $\boldsymbol{s}_q$ (resp. $\boldsymbol{s}'_q$). On a:

$$w_{2k} = (ss')^k, \qquad w_{2k+1} = (ss')^k s$$
$$w'_{2k} = (s's)^k = (ss')^{-k} \qquad w'_{2k+1} = (s's)^k s' = (ss')^{-k-1}s.$$

Si $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ est une décomposition réduite (par rapport à $\{s, s'\}$) d'un élément w de W, on a évidemment $s_i \neq s_{i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant q-1$. Par suite, on a $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_q$ ou $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}'_q$.

Si $m = \infty$, les éléments $(ss')^n$ et $(ss')^n s$ pour $n \in \mathbf{Z}$ sont distincts. Par suite, les éléments w_q $(q \geqslant 0)$ et w'_q $(q > 0)$ sont distincts et si $\boldsymbol{s}$ est une décomposition réduite de w_q (resp. w'_q), on a nécessairement $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_q$ (resp. $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}'_q$). Il en résulte que $l(w_q) = l(w'_q) = q$ et que *l'ensemble des décompositions réduites d'éléments de* W *est l'ensemble des* $\boldsymbol{s}_q$ *et des* $\boldsymbol{s}'_q$. De plus, tout élément de W possède une seule décomposition réduite.

Supposons maintenant *m fini*. Si $q \geqslant 2m$, on a $w_q = w_{q-2m}$ et $w'_q = w'_{q-2m}$; si $m \leqslant q \leqslant 2m$, on a $w_q = w'_{2m-q}$, $w'_q = w_{2m-q}$. Par suite, ni $\boldsymbol{s}_q$ ni $\boldsymbol{s}'_q$ ne sont des décompositions réduites dès que $q > m$. On en déduit que chacun des $2m$ éléments de W est l'un des $2m$ éléments $w_0 = w'_0$, w_q et w'_q pour $1 \leqslant q \leqslant m-1$ et $w_m = w'_m$. Ces $2m$ éléments sont donc distincts et il en résulte comme plus haut que $l(w_q) = l(w'_q) = q$ pour $q \leqslant m$ et que *l'ensemble des décompositions réduites d'éléments de* W *est l'ensemble des* $\boldsymbol{s}_q$ *et des* $\boldsymbol{s}'_q$ *pour* $0 \leqslant q \leqslant m$. Tout élément de W distinct de w_m possède une seule décomposition réduite; w_m en possède deux.

3. Premières propriétés des groupes de Coxeter

Rappelons qu'à partir de maintenant, on suppose que les éléments de S sont d'ordre 2.

Définition 3. — *On dit que* (W, S) *est un système de Coxeter s'il satisfait à la condition suivante :*

(C) *Pour* s, s' *dans* S, *soit* $m(s, s')$ *l'ordre de* ss' *; soit* I *l'ensemble des couples* (s, s')

tels que $m(s, s')$ *soit fini. L'ensemble générateur* S *et les relations* $(ss')^{m(s,s')} = 1$ *pour* (s, s') *dans* I *forment une présentation* (*) *du groupe* W.

Lorsque (W, S) est un système de Coxeter, on dit aussi, par abus de langage, que W est un *groupe de Coxeter*.

Exemples. — 1) Soit m un entier $\geqslant 2$ ou ∞ et soit W un groupe défini par un ensemble générateur $S = \{s, s'\}$ et les relations $s^2 = s'^2 = 1$ lorsque $m = \infty$, $s^2 = s'^2 = (ss')^m = 1$ lorsque m est fini. Considérons d'autre part le groupe diédral $\mathbf{D}_m$ (nº 2, *Exemple*) et les éléments ρ et ρ' de $\mathbf{D}_m$ définis par (7). Puisque $\rho^2 = \rho'^2 = 1$ et que $(\rho\rho')^m = 1$ lorsque m est fini, il existe un homomorphisme f et un seul de W sur $\mathbf{D}_m$ tel que $f(s) = \rho$ et $f(s') = \rho'$. Comme $\rho\rho'$ est d'ordre m, il en résulte que ss' est lui aussi d'ordre m. Par suite, (W, S) est un système de Coxeter, W est un groupe diédral d'ordre $2m$ et f est un isomorphisme (prop. 2).

Par transport de structure, on en déduit que tout groupe diédral est un groupe de Coxeter.

2) Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique de degré n, avec $n \geqslant 2$. Soit s_i la transposition de i et $i + 1$ pour $1 \leqslant i < n$, et soit $S = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. On peut montrer (§ 2, nº 4, *Exemple* et § 1, exerc. 4) que $(\mathfrak{S}_n, S)$ est un système de Coxeter.

3) Pour la classification des groupes de Coxeter finis, cf. Chap. VI, § 4.

Remarque. — Supposons que (W, S) soit un système de Coxeter. Il existe un homomorphisme ε de W dans le groupe $\{1, -1\}$ caractérisé par $\varepsilon(s) = -1$ pour tout $s \in S$. On dit que $\varepsilon(w)$ est la *signature* de w; elle est égale à $(-1)^{l(w)}$. La formule $\varepsilon(ww') = \varepsilon(w) . \varepsilon(w')$ se traduit donc par $l(ww') \equiv l(w) + l(w') \bmod. 2$.

PROPOSITION 3. — *Supposons que* (W, S) *soit un système de Coxeter. Pour que deux éléments* s *et* s' *de* S *soient conjugués* (**) *dans* W, *il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie:*

(I) *Il existe une suite finie* $(s_1, \ldots, s_q)$ *d'éléments de* S *telle que* $s_1 = s$, $s_q = s'$ *et que* $s_j s_{j+1}$ *soit d'ordre fini* impair *pour* $1 \leqslant j < q$.

Soient s et s' dans S tels que $p = ss'$ soit d'ordre fini $2n + 1$. D'après (9), on a $sp^{-n} = p^n s$, d'où

$$p^n s p^{-n} = p^n p^n s = p^{-1} s = s'ss = s', \tag{10}$$

et s' est conjugué de s.

Pour tout s dans S, soit A_s l'ensemble des $s' \in S$ satisfaisant à (I). Avec les hypothèses de (I), les éléments s_j et s_{j+1} sont conjugués pour $1 \leqslant j < q$ d'après ce qui précède, donc tout élément s' de A_s est conjugué de s.

(*) Ceci signifie que (W, S) satisfait à la propriété universelle suivante: étant donnés un groupe G et une application f de S dans G telle que $(f(s)f(s'))^{m(s,s')} = 1$ pour (s, s') dans I, il existe un homomorphisme g de W dans G prolongeant f. Cet homomorphisme est unique car S engendre W. Une forme équivalente de cette définition est la suivante: soient $\overline{W}$ un groupe, f un homomorphisme de $\overline{W}$ sur W et h une application de S dans $\overline{W}$ telle que $f(h(s)) = s$ et $(h(s)h(s'))^{m(s,s')} = 1$ pour (s, s') dans I et que les $h(s)$ (pour $s \in I$) engendrent $\overline{W}$; alors f est injectif (donc un isomorphisme de $\overline{W}$ sur W).

(**) Rappelons que deux éléments (resp. deux sous-ensembles) d'un groupe W sont dits *conjugués* s'il existe un automorphisme intérieur de W qui transforme l'un en l'autre.

Soit f l'application de S dans $M = \{1, -1\}$ égale à 1 dans A_s et à -1 dans $S - A_s$. Soient s' et s'' dans S tels que $s's''$ soit d'ordre fini m; on a $f(s')f(s'') = 1$ si s' et s'' sont tous deux dans A_s ou dans $S - A_s$; dans les autres cas, on a $f(s')f(s'') = -1$, mais m est pair; on a donc $(f(s')f(s''))^m = 1$ dans tous les cas. Comme (W, S) est un système de Coxeter, il existe un homomorphisme g de W dans M induisant f sur S. Soit s' un conjugué de s; comme s appartient au noyau de g, il en est de même de s', d'où $f(s') = g(s') = 1$ et finalement $s' \in A_s$. C.Q.F.D.

4. Décompositions réduites dans un groupe de Coxeter

Supposons que (W, S) soit un système de Coxeter. Soit T l'ensemble des conjugués des éléments de S dans W. Pour toute suite finie $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ d'éléments de S, on note $\Phi(\boldsymbol{s})$ la suite $(t_1, \ldots, t_q)$ d'éléments de T définie par :

$$t_j = (s_1 \ldots s_{j-1})s_j(s_1 \ldots s_{j-1})^{-1} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant q. \tag{11}$$

On a $t_1 = s_1$ et $s_1 \ldots s_q = t_q t_{q-1} \ldots t_1$. Pour tout élément $t \in T$, on note $n(\boldsymbol{s}, t)$ le nombre d'entiers j tels que $1 \leqslant j \leqslant q$ et $t_j = t$. Enfin, on pose

$$R = \{1, -1\} \times T.$$

Lemme 1. — (i) *Soient $w \in W$ et $t \in T$. Le nombre $(-1)^{n(\boldsymbol{s}, t)}$ a la même valeur $\eta(w, t)$ pour toutes les suites $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ d'éléments de S telles que $w = s_1 \ldots s_q$.*

(ii) *Pour $w \in W$, soit U_w l'application de R dans lui-même définie par :*

$$U_w(\varepsilon, t) = (\varepsilon . \eta(w^{-1}, t), wtw^{-1}) \quad (\varepsilon = \pm 1, \ t \in T). \tag{12}$$

L'application $w \longmapsto U_w$ est un homomorphisme de W dans le groupe des permutations de R.

Pour $s \in S$, définissons une application U_s de R dans lui-même par :

$$U_s(\varepsilon, t) = (\varepsilon . (-1)^{\delta_{s,t}}, sts^{-1}) \quad (\varepsilon = \pm 1, \ t \in T) \tag{13}$$

où $\delta_{s,t}$ est le symbole de Kronecker. On vérifie aussitôt que $U_s^2 = \mathrm{Id}_R$, ce qui montre que U_s est une *permutation* de R.

Soit $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ une suite d'éléments de S. Posons $w = s_q \ldots s_1$ et $U_{\boldsymbol{s}} = U_{s_q} \ldots U_{s_1}$. Nous allons montrer, par récurrence sur q, que l'on a :

$$U_{\boldsymbol{s}}(\varepsilon, t) = (\varepsilon . (-1)^{n(\boldsymbol{s}, t)}, wtw^{-1}). \tag{14}$$

C'est évident pour $q = 0,1$. Si $q > 1$, posons $\boldsymbol{s}' = (s_1, \ldots, s_{q-1})$ et

$$w' = s_{q-1} \ldots s_1.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} U_{\boldsymbol{s}}(\varepsilon, t) &= U_{s_q}(\varepsilon . (-1)^{n(\boldsymbol{s}', t)}, w'tw'^{-1}) \\ &= (\varepsilon . (-1)^{n(\boldsymbol{s}', t) + \delta_{s_q, w'tw'^{-1}}}, wtw^{-1}) \end{aligned}$$

Or $\Phi(\boldsymbol{s}) = (\Phi(\boldsymbol{s}'), w'^{-1}s_q w')$ et $n(\boldsymbol{s}, t) = n(\boldsymbol{s}', t) + \delta_{w'^{-1}s_q w', t}$ d'où la formule (14).

Soient alors $s, s' \in S$, tels que $p = ss'$ soit d'ordre fini m. Soit $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_{2m})$ la suite d'éléments de S définie par $s_j = s$ pour j impair et $s_j = s'$ pour j pair. On a $s_{2m} \ldots s_1 = p^{-m} = 1$ et la formule (11) entraîne :

$$t_j = p^{j-1}s \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant 2m. \tag{15}$$

Comme p est d'ordre m, les éléments $t_1, \ldots, t_m$ sont distincts et l'on a $t_{j+m} = t_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$. Pour tout $t \in T$, l'entier $n(\boldsymbol{s}, t)$ est donc égal à 0 ou à 2 et (14) montre que $U_{\boldsymbol{s}} = \mathrm{Id}_R$. Autrement dit, on a $(U_s U_{s'})^m = \mathrm{Id}_R$. D'après la définition même des systèmes de Coxeter, il existe donc un homomorphisme $w \longmapsto U_w$ de W dans le groupe des permutations de R tel que U_s soit donné par le second membre de (13). On a alors $U_w = U_{\boldsymbol{s}}$ pour toute suite $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ telle que $w = s_q \ldots s_1$ et le lemme 1 résulte immédiatement de (14).

Lemme 2. — *Soient* $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_q)$, $\Phi(\boldsymbol{s}) = (t_1, \ldots, t_q)$ *et* $w = s_1 \ldots s_q$. *Soit* T_w *l'ensemble des éléments* $t \in T$ *tels que* $\eta(w, t) = -1$. *Pour que* $\boldsymbol{s}$ *soit une décomposition réduite de* w, *il faut et il suffit que les* t_i *soient distints; on a alors* $T_w = \{t_1, \ldots, t_q\}$ *et* $\mathrm{Card}\,(T_w) = l(w)$.

On a évidemment $T_w \subset \{t_1, \ldots, t_q\}$; en prenant $\boldsymbol{s}$ réduite, on en déduit d'abord que $\mathrm{Card}\,(T_w) \leqslant l(w)$. De plus, si les t_i sont distincts, $n(\boldsymbol{s}, t)$ est égal à 1 ou 0 suivant que t appartient ou non à $\{t_1, \ldots, t_q\}$. D'où $T_w = \{t_1, \ldots, t_q\}$ et $q = \mathrm{Card}\,(T_w) \leqslant l(w)$, ce qui entraîne que $\boldsymbol{s}$ est réduite. Supposons enfin que l'on ait $t_i = t_j$ avec $i < j$. On en tire $s_i = us_ju^{-1}$, avec $u = s_{i+1} \ldots s_{j-1}$, d'où aussitôt

$$w = s_1 \ldots s_{i-1}s_{i+1} \ldots s_{j-1}s_{j+1} \ldots s_q,$$

ce qui montre que $\boldsymbol{s}$ n'est pas une décomposition réduite de w.

Lemme 3. — *Soient* $w \in W$ *et* $s \in S$ *tels que* $l(sw) \leqslant l(w)$. *Pour toute suite* $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ *d'éléments de* S *avec* $w = s_1 \ldots s_q$, *il existe un entier* j *tel que* $1 \leqslant j \leqslant q$ *et*

$$ss_1 \ldots s_{j-1} = s_1 \ldots s_{j-1}s_j.$$

Soient p la longueur de w et $w' = sw$. D'après la *Remarque* du nº 3, on a $l(w') \equiv l(w) + 1 \mod. 2$; l'hypothèse $l(w') \leqslant l(w)$ et la relation

$$|l(w) - l(w')| \leqslant l(ww'^{-1}) = l(s) = 1$$

entraînent $l(w') = p - 1$. Choisissons une décomposition réduite

$$(s'_1, \ldots, s'_{p-1})$$

de w' et posons $\boldsymbol{s}' = (s, s'_1, \ldots, s'_{p-1})$ et $\Phi(\boldsymbol{s}') = (t'_1, \ldots, t'_p)$. Il est clair que $\boldsymbol{s}'$ est une décomposition réduite de w et que l'on a $t'_1 = s$; les éléments $t'_1, \ldots, t'_p$ étant distincts par le lemme 2, on a $n(\boldsymbol{s}', s) = 1$. Comme w est le produit de la suite $\boldsymbol{s}$, on a $n(\boldsymbol{s}, s) \equiv n(\boldsymbol{s}', s)$ mod. 2 d'après le lemme 1, d'où $n(\boldsymbol{s}, s) \neq 0$; par suite, s est égal à l'un des éléments t_j de la suite $\Phi(\boldsymbol{s})$, d'où le lemme.

Remarque. — L'ensemble T_w défini au lemme 2 se compose des éléments de la forme $w''sw''^{-1}$ correspondant aux triplets $(w', w'', s) \in W \times W \times S$ tels que $w = w''sw'$ et $l(w') + l(w'') + 1 = l(w)$.

5. La condition d'échange

On désigne sous le nom de « condition d'échange » l'assertion suivante sur (W, S) :

(E). *Soient $w \in W$ et $s \in S$ tels que $l(sw) \leqslant l(w)$. Pour toute décomposition réduite $(s_1, \ldots, s_q)$ de w, il existe un entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant q$ et*

$$ss_1 \ldots s_{j-1} = s_1 \ldots s_{j-1}s_j. \tag{16}$$

On suppose dans ce numéro que (W, S) satisfait à (E) ; d'après le lemme 3, il en est ainsi si (W, S) est un système de Coxeter. Les résultats de ce numéro s'appliquent donc aux systèmes de Coxeter.

PROPOSITION 4. — *Soient $s \in S$, $w \in W$ et $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ une décomposition réduite de w. Deux cas seulement sont possibles :*

a) $l(sw) = l(w) + 1$ et $(s, s_1, \ldots, s_q)$ est une décomposition réduite de sw.

b) $l(sw) = l(w) - 1$ et il existe un entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant q$, que

$$(s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_q)$$

soit une décomposition réduite de sw et que la suite $(s, s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_q)$ soit une décomposition réduite de w.

Posons $w' = sw$; d'après la formule (3) du n° 1, on a

$$|l(w) - l(w')| \leqslant l(s) = 1.$$

Nous distinguerons deux cas :

a) $l(w') > l(w)$. On a donc $l(w') = q + 1$ et $w' = ss_1 \ldots s_q$, donc

$$(s, s_1, \ldots, s_q)$$

est une décomposition réduite de w'.

b) $l(w') \leqslant l(w)$. D'après (E), il existe un entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant q$, satisfaisant à (16). On a alors $w = ss_1 \ldots s_{j-1}s_{j+1} \ldots s_q$, d'où

$$w' = s_1 \ldots s_{j-1}s_{j+1} \ldots s_q;$$

comme on a $q - 1 \leqslant l(w') \leqslant q$, on a nécessairement $l(w') = q - 1$ et $(s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_q)$ est une décomposition réduite de w'.

Lemme 4. — *Soient* $w \in W$ *de longueur* $q \geqslant 1$, D *l'ensemble des décompositions réduites de* w, *et* F *une application de* D *dans un ensemble* E. *On suppose que l'on a* $F(\boldsymbol{s}) = F(\boldsymbol{s}')$ *si les éléments* $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_q)$, $\boldsymbol{s}' = (s'_1, \ldots, s'_q)$ *de* D *satisfont à l'une des hypothèses suivantes :*

a) *On a* $s_1 = s'_1$ *ou* $s_q = s'_q$.

b) *Il existe* s *et* s' *dans* S *tels que* $s_j = s'_k = s$ *et* $s_k = s'_j = s'$ *pour* j *impair et* k *pair.*

Alors F *est constante.*

A) Soient $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}' \in D$; posons $\boldsymbol{t} = (s'_1, s_1, \ldots, s_{q-1})$. Nous allons montrer que si $F(\boldsymbol{s}) \neq F(\boldsymbol{s}')$, on a $\boldsymbol{t} \in D$ et $F(\boldsymbol{t}) \neq F(\boldsymbol{s})$. On a en effet $w = s'_1 \ldots s'_q$, donc $s'_1 w = s'_2 \ldots s'_q$ est de longueur $< q$. D'après la prop. 4, il existe un entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant q$ et que la suite $\boldsymbol{u} = (s'_1, s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_q)$ appartienne à D. On a $F(\boldsymbol{u}) = F(\boldsymbol{s}')$ d'après la condition *a*); si l'on avait $j \neq q$, on aurait $F(\boldsymbol{s}) = F(\boldsymbol{u})$ pour la même raison, d'où $F(\boldsymbol{s}) = F(\boldsymbol{s}')$ contrairement à l'hypothèse. On a donc $j = q$, d'où $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{u} \in D$ et $F(\boldsymbol{t}) = F(\boldsymbol{s}') \neq F(\boldsymbol{s})$.

B) Soient $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{s}'$ dans D. Pour tout entier j avec $0 \leqslant j \leqslant q$, définissons une suite $\boldsymbol{s}_j$ de q éléments de S de la manière suivante :

$$(17)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{s}_0 = (s'_1, \ldots, s'_q) \\ \boldsymbol{s}_1 = (s_1, \ldots, s_q) \\ \boldsymbol{s}_{q+1-k} = (s_1, s'_1, \ldots, s_1, s'_1, s_1, s_2, \ldots, s_k) & \text{pour } q-k \text{ pair et } 1 \leqslant k \leqslant q \\ \boldsymbol{s}_{q+1-k} = (s'_1, s_1, \ldots, s_1, s'_1, s_1, s_2, \ldots, s_k) & \text{pour } q-k \text{ impair et } 1 \leqslant k \leqslant q. \end{cases}$$

Notons (H_j) l'assertion « $\boldsymbol{s}_j \in D$, $\boldsymbol{s}_{j+1} \in D$ et $F(\boldsymbol{s}_j) \neq F(\boldsymbol{s}_{j+1})$ ». D'après (A), on a $(H_j) \Longrightarrow (H_{j+1})$ pour $0 \leqslant j < q$, et (H_q) n'est pas satisfaite d'après la condition *b*). Par suite, (H_0) n'est pas satisfaite. Comme $\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{s}'$ et $\boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{s}$, il en résulte que $F(\boldsymbol{s}) = F(\boldsymbol{s}')$.

PROPOSITION 5. — *Soient* M *un monoïde* (*avec élément unité* 1) *et* f *une application de* S *dans* M. *Pour* s, s' *dans* S, *soit* $m(s, s')$ *l'ordre de* ss'; *on pose*

$$(18)\qquad a(s, s') = \begin{cases} (f(s)f(s'))^l & si \quad m(s, s') = 2l, \quad l \text{ fini} \\ (f(s)f(s'))^l f(s) & si \quad m(s, s') = 2l + 1, \quad l \text{ fini} \\ 1 & si \quad m(s, s') = \infty. \end{cases}$$

Si l'on a $a(s, s') = a(s', s)$ *quels que soient* $s \neq s'$ *dans* S, *il existe une application* g *de* W *dans* M *telle que*

$$(19)\qquad g(w) = f(s_1) \ldots f(s_q)$$

pour tout $w \in W$ *et toute décomposition réduite* $(s_1, \ldots, s_q)$ *de* w.

Pour tout $w \in W$, soient D_w l'ensemble des décompositions réduites de w et F_w l'application de D_w dans M définie par

$$F_w(s_1, \ldots, s_q) = f(s_1) \ldots f(s_q).$$

Nous allons prouver par récurrence sur la longueur de w que F_w est constante, ce qui établira la prop. 5. Les cas $l(w) = 0,1$ étant triviaux, nous supposons $q \geqslant 2$ et notre assertion prouvée pour les éléments w avec $l(w) < q$. Soient w de longueur q et $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}'$ dans D_w; d'après le lemme 4, il suffit de prouver que l'on a $F_w(\boldsymbol{s}) = F_w(\boldsymbol{s}')$ dans les cas *a*) et *b*) dudit lemme.

a) La formule

$$F_w(s_1, \ldots, s_q) = f(s_1)F_{w''}(s_2, \ldots, s_q) = F_{w'}(s_1, \ldots, s_{q-1})f(s_q)$$

pour $w' = s_1 \ldots s_{q-1}$ et $w'' = s_2 \ldots s_q$ et l'hypothèse de récurrence montrent que l'on a $F_w(\boldsymbol{s}) = F_w(\boldsymbol{s}')$ si $s_1 = s'_1$ ou $s_q = s'_q$.

b) Supposons qu'il existe deux éléments s et s' de S tels que $s_j = s'_k = s$ et $s_k = s'_j = s'$ pour j impair et k pair. Il suffit de traiter le cas $s \neq s'$. Les suites $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{s}'$ sont alors deux décompositions réduites distinctes de w dans le groupe diédral engendré par s et s'. D'après la *Remarque* du n° 2, l'ordre m de ss' est nécessairement fini et l'on a, avec les notations de cette remarque, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_m$ et $\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{s}'_m$. Par suite, on a $F_w(\boldsymbol{s}) = a(s, s')$ et $F_w(\boldsymbol{s}') = a(s', s)$, d'où

$$F_w(\boldsymbol{s}) = F_w(\boldsymbol{s}').$$

6. Caractérisation des groupes de Coxeter

Théorème 1. — *Pour que* (W, S) *soit un système de Coxeter, il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition d'échange* (E) *du n°* 5.

Le lemme 3 du n° 4 montre que tout système de Coxeter satisfait à (E).

Réciproquement, supposons (E) vérifiée. Soient G un groupe et f une application de S dans G, telle que l'on ait $(f(s)f(s'))^m = 1$ chaque fois que s et s' appartiennent à S et que ss' est d'ordre fini m. D'après la prop. 5, il existe alors une application g de W dans G telle que l'on ait :

$$g(w) = f(s_1) \ldots f(s_q) \tag{20}$$

chaque fois que $w = s_1 \ldots s_q$ est de longueur q. Pour prouver que (W, S) est un système de Coxeter, il suffit de prouver que g est un homomorphisme, ce qui est conséquence de la formule

$$g(sw) = f(s)g(w) \qquad \text{pour} \quad s \in S,\ w \in W \tag{21}$$

puisque S engendre W. D'après la prop. 4 du n° 5, deux cas seulement sont possibles :

a) $l(sw) = l(w) + 1$: si $(s_1, \ldots, s_q)$ est une décomposition réduite de w, alors $(s, s_1, \ldots, s_q)$ est une décomposition réduite de sw, d'où (21).

b) $l(sw) = l(w) - 1$: posons $w' = sw$; on a $w = sw'$ et $l(sw') = l(w') + 1$. D'après *a*), on a donc $g(w) = f(s)g(sw)$, d'où $f(s)g(w) = g(sw)$ puisque l'on a $(f(s))^2 = 1$.

7. Familles de partitions

Supposons que (W, S) soit un système de Coxeter. Pour tout s dans S, notons P_s l'ensemble des éléments w de W tels que $l(sw) > l(w)$. On a les propriétés suivantes :

(A) *On a* $\bigcap_{s \in S} P_s = \{1\}$.

En effet, soit $w \neq 1$ dans W et soit $(s_1, \ldots, s_q)$ une décomposition réduite de w. On a $q \geqslant 1$, et $(s_2, \ldots, s_q)$ est une décomposition réduite de $s_1 w$, d'où $l(w) = q$ et $l(s_1 w) = q - 1$. On a donc $w \notin P_{s_1}$.

(B) *Pour tout s dans* S, *les ensembles* P_s *et* sP_s *forment une partition de* W.

Soient $w \in W$ et $s \in S$. D'après la prop. 4 du nº 5, on doit distinguer deux cas :

a) $l(sw) = l(w) + 1$: on a alors $w \in P_s$.

b) $l(sw) = l(w) - 1$: posons $w' = sw$ d'où $w = sw'$; on a alors

$$l(w') < l(sw')$$

d'où $w' \in P_s$, c'est-à-dire $w \in sP_s$.

(C) *Soient s, s' dans* S *et w dans* W. *Si l'on a $w \in P_s$ et $ws' \notin P_s$, on a $sw = ws'$.*

Soit q la longueur de w. De $w \in P_s$, on déduit $l(sw) = q + 1$; de $ws' \notin P_s$, on déduit $l(sws') = l(ws') - 1 \leqslant q$ et comme on a $l(sws') = l(sw) \pm 1$, on a finalement $l(ws') = q + 1$ et $l(sws') = q$.

Soient $(s_1, \ldots, s_q)$ une décomposition réduite de w et $s_{q+1} = s'$; alors $(s_1, \ldots, s_q, s_{q+1})$ est une décomposition réduite de l'élément ws' de longueur $q + 1$. D'après la condition d'échange, il existe un entier j avec $1 \leqslant j \leqslant q + 1$ tel que

$$ss_1 \ldots s_{j-1} = s_1 \ldots s_j. \tag{22}$$

Si l'on avait $1 \leqslant j \leqslant q$, on aurait $sw = s_1 \ldots s_{j-1}s_{j+1} \ldots s_q$ contrairement à la formule $l(sw) = q + 1$. On a donc $j = q + 1$, et la formule (22) s'écrit alors $sw = ws'$.

Réciproquement, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 6. — *Soit* $(P_s)_{s \in S}$ *une famille de parties de* W *satisfaisant à* (C) *et aux conditions suivantes :*

(A′) *On a* $1 \in P_s$ *pour tout* $s \in S$.

(B′) *Les ensembles* P_s *et* sP_s *sont disjoints pour tout* $s \in S$.

Alors, (W, S) *est un système de Coxeter et* P_s *se compose des éléments w de* W *tels que* $l(sw) > l(w)$.

Soient $s \in S$ et $w \in W$. De deux choses l'une :

a) $w \notin P_s$. Soient $(s_1, \ldots, s_q)$ une décomposition réduite de w et

$$w_j = s_1 \ldots s_j$$

pour $1 \leqslant j \leqslant q$; on pose aussi $w_0 = 1$. Comme on a $w_0 \in P_s$ d'après (A′) et que $w = w_q$ n'est pas dans P_s, il existe un entier j avec $1 \leqslant j \leqslant q$ tel que $w_{j-1} \in P_s$ et que $w_j = w_{j-1}s_j$ n'appartienne pas à P_s. D'après (C), on a donc

$$sw_{j-1} = w_{j-1}s_j.$$

On a donc prouvé la formule

$$ss_1 \ldots s_{j-1} = s_1 \ldots s_{j-1}s_j$$

qui entraîne $sw = s_1 \ldots s_{j-1}s_{j+1} \ldots s_q$ et $l(sw) < l(w)$.

b) $w \in P_s$: posons $w' = sw$, d'où $w' \notin P_s$ d'après (B′). D'après *a*), on a alors $l(sw') < l(w')$, c'est-à-dire $l(w) < l(sw)$.

La comparaison de *a*) et *b*) prouve que P_s se compose des $w \in W$ tels que $l(sw) > l(w)$. La condition d'échange résulte de ce qui a été vu en *a*), donc (W, S) est un système de Coxeter (th. 1 du nº 6).

8. Sous-groupes des groupes de Coxeter

Dans ce numéro, on suppose que (W, S) est un système de Coxeter. Pour toute partie X de S, on note W_X le sous-groupe de W engendré par X.

PROPOSITION 7. — *Soit w dans* W. *Il existe une partie S_w de* S *telle que l'on ait* $\{s_1, \ldots, s_q\} = S_w$ *pour toute décomposition réduite* $(s_1, \ldots, s_q)$ *de* w.

On note M le monoïde formé des parties de S avec la loi de composition $(A, B) \longmapsto A \cup B$; l'élément neutre de M est $\varnothing$. On pose $f(s) = \{s\}$ pour $s \in S$. Nous allons appliquer la prop. 5 du nº 5 à M et f; on a $a(s, s') = \{s, s'\}$ pour s, s' dans S si $m(s, s')$ est fini, et il existe donc une application $g : w \longmapsto S_w$ de W dans M telle que $g(w) = f(s_1) \cup \cdots \cup f(s_q)$, c'est-à-dire $S_w = \{s_1, \ldots, s_q\}$ pour tout $w \in W$ et toute décomposition réduite $(s_1, \ldots, s_q)$ de w.

COROLLAIRE 1. — *Pour toute partie* X *de* S, *le sous-groupe* W_X *de* W *se compose des éléments* w *de* W *tels que* $S_w \subset X$.

Si $w = s_1 \ldots s_q$ avec $s_1, \ldots, s_q$ dans S, on a $w^{-1} = s_q \ldots s_1$; on en déduit

$$S_{w^{-1}} = S_w. \tag{23}$$

La prop. 4 du nº 5 montre que l'on a $S_{sw'} \subset \{s\} \cup S_{w'}$ pour $s \in S$ et $w' \in W$, d'où la formule

$$S_{ww'} \subset S_w \cup S_{w'} \tag{24}$$

par récurrence sur la longueur de w. D'après (23) et (24), l'ensemble U des $w \in W$ tels que $S_w \subset X$ est un sous-groupe de W; on a $X \subset U \subset W_X$, d'où $U = W_X$.

COROLLAIRE 2. — *Pour toute partie* X *de* S, *on a* $W_X \cap S = X$.

Cela résulte du cor. 1 et de la formule $S_s = \{s\}$ pour s dans S.

COROLLAIRE 3. — *L'ensemble* S *est un ensemble générateur minimal de* W.

Si $X \subset S$ engendre W, on a $W = W_X$, d'où $X = S \cap W_X = S$ d'après le cor. 2.

COROLLAIRE 4. — *Pour toute partie* X *de* S *et tout* w *dans* W_X, *la longueur de* w *par rapport à l'ensemble générateur* X *de* W_X *est égale à* $l_S(w)$.

Soit $(s_1, \ldots, s_q)$ une décomposition réduite de w considéré comme élément de W; on a $w = s_1 \ldots s_q$ et $s_j \in X$ pour $1 \leqslant j \leqslant q$ (cor. 1); par ailleurs, w ne peut être produit de $q' < q$ éléments de $X \subset S$ par définition de $q = l_S(w)$.

THÉORÈME 2. — (i) *Pour toute partie* X *de* S, *le couple* (W_X, X) *est un système de Coxeter.*

(ii) *Soit* $(X_i)_{i \in I}$ *une famille de parties de* S. *Si* $X = \bigcap_{i \in I} X_i$, *on a* $W_X = \bigcap_{i \in I} W_{X_i}$.

(iii) *Soient* X *et* X' *deux parties de* S. *On a* $W_X \subset W_{X'}$ (resp. $W_X = W_{X'}$) *si et seulement si l'on a* $X \subset X'$ (resp. $X = X'$).

Tout élément de X est d'ordre 2 et X engendre W_X. Soient $x \in X$ et $w \in W_X$ avec $l_X(xw) \leqslant l_X(w) = q$. D'après le cor. 4 de la prop. 7, on a donc

$$l_S(xw) \leqslant l_S(w) = q.$$

Soient $x_1, \ldots, x_q$ des éléments de X tels que $w = x_1 \ldots x_q$; comme (W, S) satisfait à la condition d'échange (th. 1 du n° 6), il existe un entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant q$ et $xx_1 \ldots x_{j-1} = x_1 \ldots x_{j-1}x_j$. Par suite, (W_X, X) satisfait à la condition d'échange, donc c'est un système de Coxeter (th. 1 du n° 6). D'où (i).

Les assertions (ii) et (iii) résultent immédiatement du cor. 1 de la prop. 7.

9. Matrices et graphes de Coxeter

DÉFINITION 4. — *Soit* I *un ensemble. On appelle matrice de Coxeter de type* I *toute matrice carrée symétrique* $M = (m_{ij})_{i,j \in I}$ *dont les éléments sont des entiers ou* $+\infty$ *satisfaisant aux relations :*

(25) $\quad m_{ii} = 1 \quad$ *pour tout* $i \in I$;

(26) $\quad m_{ij} \geqslant 2 \quad$ *pour* $i, j \in I$ *avec* $i \neq j$.

On appelle (par abus de langage) graphe de Coxeter de type I *un couple formé d'un graphe* Γ (*) *ayant* I *comme ensemble de sommets et d'une application* f *de l'ensemble des arêtes de ce graphe dans l'ensemble formé de* $+\infty$ *et des entiers* $\geqslant 3$. *On dit que* Γ *est le graphe sous-jacent au graphe de Coxeter* (Γ, f).

A toute matrice de Coxeter M de type I, on associe un graphe de Coxeter (Γ, f) de la manière suivante :

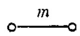
le graphe Γ a pour ensemble de sommets I et pour ensemble d'arêtes les parties $\{i, j\}$ de I telles que $m_{i,j} \geqslant 3$, l'application f associe à l'arête $\{i, j\}$ l'élément correspondant m_{ij} de M.

(*) Voir l'annexe pour la définition et les propriétés des *graphes* utilisées ici.

Il est clair que l'on obtient ainsi une *bijection* de l'ensemble des matrices de Coxeter de type I sur l'ensemble des graphes de Coxeter de type I.

Pour faciliter la lecture des raisonnements, on représente souvent un graphe de Coxeter de type I par la figure utilisée pour représenter son graphe sous-jacent, où l'on inscrit en outre à côté ou au-dessus de chaque arête $\{i, j\}$ le nombre $f(\{i, j\})$. On omet généralement d'inscrire ceux de ces nombres qui sont égaux à 3.

Si (W, S) est un système de Coxeter, la matrice $M = (m(s, s'))_{s, s' \in S}$, où $m(s, s')$ est l'ordre de ss', est une matrice de Coxeter de type S, que l'on appelle la matrice de (W, S) : on a en effet $m(s, s) = 1$ puisque $s^2 = 1$ pour tout $s \in S$, et $m(s,s') = m(s',s) \geqslant 2$ si $s \neq s'$ puisque $ss' = (s's)^{-1}$ est alors $\neq 1$. Le graphe de Coxeter (Γ, f) associé à M s'appelle le graphe de Coxeter de (W, S). Remarquons que deux sommets s et s' de Γ sont *liés* si et seulement si s et s' ne commutent pas. Par exemple, la matrice de Coxeter d'un groupe diédral d'ordre $2m$ est $\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$ et son graphe de Coxeter est représenté par



lorsque $m \geqslant 3$ (ou

si $m = 3$) et par

lorsque $m = 2$. *Le graphe de Coxeter du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est représenté par

 ($n - 1$ sommets).*

On montrera plus tard (chap. V, § 4) que réciproquement toute matrice de Coxeter est la matrice d'un système de Coxeter.

On dit qu'un système de Coxeter (W, S) est *irréductible* si le graphe Γ sous-jacent au graphe de Coxeter associé est *connexe* (Annexe, n° 2) et *non vide.* Il revient au même de dire que S est non vide et qu'il n'existe pas de partition de S en deux ensembles S′ et S″ distincts de S tels que tout élément de S′ commute avec tout élément de S″. Plus généralement, soit $(\Gamma_i)_{i \in I}$ la famille des composantes connexes de Γ (Annexe, n° 2) et soit S_i l'ensemble des sommets de Γ_i. Soit $W_i = W_{S_i}$ le sous-groupe de W engendré par S_i (cf. n° 8). Alors les (W_i, S_i) sont des systèmes de Coxeter irréductibles (n° 8, th. 2) qu'on appelle les *composantes irréductibles de* (W, S). De plus, le groupe W est *produit direct restreint* (*) *des*

(*) On dit qu'un groupe G est *produit direct restreint* d'une famille $(G_i)_{i \in I}$ de sous-groupes si, pour toute partie finie J de I, le sous-groupe G_J de G engendré par les G_i pour $i \in J$ est produit direct des G_i pour $i \in J$, et si G est la réunion des G_J. Il revient au même de dire que tout élément de G_i commute avec tout élément de G_j pour $i \neq j$ et que tout élément de G s'écrit d'une manière et d'une seule comme produit $\prod_{i \in I} g_i$ avec $g_i \in G_i$ et $g_i = 1$ sauf pour un nombre fini d'indices. Cette dernière condition équivaut à dire que G est engendré par la réunion des G_i et que $G_i \cap G_J = \{1\}$ pour tout $i \in I$ et toute partie finie $J \subset I$ telle que $i \notin J$.

sous-groupes W_i pour $i \in I$. Cela résulte en effet de la proposition plus générale suivante :

PROPOSITION 8. — *Soit* $(S_i)_{i \in I}$ *une partition de* S, *telle que tout élément de* S_i *commute avec tout élément de* S_j *pour* $i \neq j$. *Pour tout* $i \in I$, *soit* W_i *le sous-groupe engendré par* S_i. *Alors* W *est produit direct restreint de la famille* $(W_i)_{i \in I}$.

Il est clair que pour tout $i \in I$, le sous-groupe W'_i engendré par la réunion des W_j pour $j \neq i$ est aussi engendré par $S'_i = \bigcup_{i \neq j} S_j$. On a donc

$$W_i \cap W'_i = W_\emptyset = \{1\},$$

d'après le th. 2 du n° 8. Comme W est engendré par la réunion des W_i, cela démontre la proposition.

§ 2. Systèmes de Tits

Dans ce paragraphe, les lettres G, B, N, S, T, W *ont la signification indiquée au n° 1 ci-dessous.*

1. Définition et premières propriétés

Soient G un groupe et B un sous-groupe de G. On fait opérer le groupe $B \times B$ sur G par la loi $(b, b').g = bgb'^{-1}$ pour $b, b' \in B$ et $g \in G$. Les orbites de $B \times B$ dans G sont les ensembles BgB, pour $g \in G$, qu'on appelle *doubles classes* de G suivant B. Elles forment une *partition* de G; l'ensemble quotient correspondant se note $B\backslash G/B$. Si C et C′ sont deux doubles classes, CC′ est *réunion* de doubles classes.

DÉFINITION 1. — *On appelle système de Tits un quadruplet* (G, B, N, S), *où* G *est un groupe,* B *et* N *deux sous-groupes de* G *et* S *une partie de* $N/(B \cap N)$, *satisfaisant aux axiomes suivants :*

(T1) *L'ensemble* $B \cup N$ *engendre* G *et* $B \cap N$ *est un sous-groupe distingué de* N.

(T2) *L'ensemble* S *engendre le groupe* $W = N/(B \cap N)$ *et se compose d'éléments d'ordre* 2.

(T3) *On a* $sBw \subset BwB \cup BswB$ *pour* $s \in S$ *et* $w \in W$ (*).

(T4) *Pour tout* $s \in S$, *on a* $sBs \not\subset B$.

Le groupe $W = N/(B \cap N)$ est parfois appelé le *groupe de Weyl* du système de Tits (G, B, N, S).

Remarques. — 1) On verra au n° 5 (cor. du th. 3) que, si (G, B, N) sont donnés, il existe au plus une partie S de $N/(B \cap N)$ telle que (G, B, N, S) soit un système de Tits.

(*) Tout élément de W est une classe modulo $B \cap N$, donc un sous-ensemble de G; ceci donne un sens aux produits tels que BwB. Plus généralement, pour toute partie A de W, nous noterons BAB le sous-ensemble $\bigcup_{w \in A} BwB$.

2) Soit (G, B, N, S) un système de Tits, et soit Z un sous-groupe distingué de G contenu dans B. Soient $G' = G/Z$, $B' = B/Z$, $N' = N/(Z \cap N)$, et soit S' l'image de S dans $N'/(B' \cap N')$. Alors on voit aussitôt que (G', B', N', S') est un système de Tits.

Dans tout ce paragraphe, (G, B, N, S) *désigne un système de Tits, on pose* $T = B \cap N$ *et* $W = N/T$. *Par double classe, on entend une double classe de* G *suivant* B. *Pour tout* $w \in W$, *on pose* $C(w) = BwB$; *c'est une double classe.*

Nous allons déduire quelques conséquences élémentaires des axiomes (T1) à (T4). On note $w, w', \ldots$ des éléments de W et $s, s', \ldots$ des éléments de S. On a les relations évidentes

$$C(1) = B, \qquad C(ww') \subset C(w).C(w'), \qquad C(w^{-1}) = C(w)^{-1}. \tag{1}$$

L'axiome (T3) s'écrit aussi sous la forme

$$C(s).C(w) \subset C(w) \cup C(sw). \tag{2}$$

Comme on a par ailleurs $C(sw) \subset C(s).C(w)$ d'après (1) et que $C(s).C(w)$ est réunion de doubles classes, il n'y a que deux possibilités

$$C(s).C(w) = \begin{cases} C(sw) & \text{si} \quad C(w) \not\subset C(s).C(w) \\ C(w) \cup C(sw) & \text{si} \quad C(w) \subset C(s).C(w). \end{cases} \tag{3}$$

On a $B \neq C(s).C(s)$ d'après (T4); faisant $w = s$ dans (3) et utilisant la relation $s^2 = 1$, on obtient

$$C(s).C(s) = B \cup C(s). \tag{4}$$

Cette formule montre que $B \cup C(s)$ est un sous-groupe de G. Multiplions les deux membres de (4) *à droite* par $C(w)$, utilisons la formule (3) et la relation

$$B.C(w) = C(w);$$

on obtient

$$C(s).C(s).C(w) = C(w) \cup C(sw). \tag{5}$$

Si l'on prend les inverses des ensembles intervenant dans les formules (2), (3) et (5) et qu'on y remplace w par w^{-1}, on obtient les formules

$$C(w).C(s) \subset C(w) \cup C(ws) \tag{2'}$$

$$C(w).C(s) = \begin{cases} C(ws) & \text{si} \quad C(w) \not\subset C(w).C(s) \\ C(w) \cup C(ws) & \text{si} \quad C(w) \subset C(w).C(s). \end{cases} \tag{3'}$$

$$C(w).C(s).C(s) = C(w) \cup C(ws). \tag{5'}$$

Lemme 1. — *Soient* $s_1, \ldots, s_q \in S$ *et soit* $w \in W$. *On a*

$$C(s_1 \ldots s_q).C(w) \subset \bigcup_{(i_1, \ldots, i_p)} C(s_{i_1} \ldots s_{i_p} w),$$

où $(i_1, \ldots, i_p)$ *décrit l'ensemble des suites strictement croissantes d'entiers de l'intervalle* $[1, q]$.

On raisonne par récurrence sur q, le cas $q = 0$ étant trivial. Si $q \geqslant 1$, on a $\mathrm{C}(s_1 \ldots s_q) . \mathrm{C}(w) \subset \mathrm{C}(s_1) . \mathrm{C}(s_2 \ldots s_q) . \mathrm{C}(w)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{C}(s_2 \ldots s_q) . \mathrm{C}(w)$ est contenu dans la réunion des $\mathrm{C}(s_{j_1} \ldots s_{j_p} w)$, où

$$2 \leqslant j_1 < \cdots < j_p \leqslant q.$$

D'après (T3), l'ensemble $\mathrm{C}(s_1) . \mathrm{C}(s_{j_1} \ldots s_{j_p} w)$ est contenu dans la réunion de $\mathrm{C}(s_1 s_{j_1} \ldots s_{j_p} w)$ et de $\mathrm{C}(s_{j_1} \ldots s_{j_p} w)$. D'où le lemme.

2. Un exemple

Soient k un corps, n un entier $\geqslant 0$, et soit (e_i) la base canonique de k^n. Soit $\mathrm{G} = \mathbf{GL}(n, k)$, soit B le sous-groupe trigonal large supérieur de G (formé des matrices triangulaires supérieures), et soit N le sous-groupe de **G** formé des matrices n'ayant qu'un seul élément non nul dans chaque ligne et dans chaque colonne. Un élément de N permute les droites ke_i; on en déduit un homomorphisme surjectif $\mathrm{N} \to \mathfrak{S}_n$ dont le noyau est le sous-groupe $\mathrm{T} = \mathrm{B} \cap \mathrm{N}$ des matrices diagonales; cela permet d'identifier $\mathrm{W} = \mathrm{N}/\mathrm{T}$ et $\mathfrak{S}_n$. On désigne par s_j $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ l'élément de W correspondant à la transposition de j et $j+1$; soit S l'ensemble des s_j. *Le quadruplet* (G, B, N, S) *est un système de Tits.* En effet:

L'axiome (T1) résulte du cor. 2 de la prop. 14 de *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 10, no 13.

L'axiome (T2) est démontré dans *Alg.*, Chap. I, nouv. éd., Rectif. à la p. 97.

L'axiome (T4) est immédiat.

Reste à vérifier (T3), i.e.

$$s_j \mathrm{B} w \subset \mathrm{B} w \mathrm{B} \cup \mathrm{B} s_j w \mathrm{B} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1, w \in \mathrm{W}$$

ou, ce qui revient au même:

$$s_j \mathrm{B} \subset \mathrm{B}\mathrm{B}' \cup \mathrm{B} s_j \mathrm{B}', \qquad \text{avec} \quad \mathrm{B}' = w\mathrm{B}w^{-1}.$$

Soit G_j le sous-groupe de G formé des éléments laissant fixes les e_i pour $i \neq j$, $j+1$ et laissant stable le plan engendré par e_j et e_{j+1}; ce groupe est isomorphe à $\mathbf{GL}(2,k)$. On vérifie que $\mathrm{G}_j \mathrm{B} = \mathrm{B} \mathrm{G}_j$. Comme $s_j \in \mathrm{G}_j$, on a $s_j \mathrm{B} \subset \mathrm{B} \mathrm{G}_j$, et il suffit de prouver la formule

$$\mathrm{G}_j \subset (\mathrm{B} \cap \mathrm{G}_j)(\mathrm{B}' \cap \mathrm{G}_j) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{G}_j) s_j (\mathrm{B}' \cap \mathrm{G}_j).$$

Identifions G_j à $\mathbf{GL}(2, k)$; le groupe $\mathrm{B} \cap \mathrm{G}_j$ s'identifie au sous-groupe trigonal large supérieur B_2 de $\mathbf{GL}(2, k)$; le groupe $\mathrm{B}' \cap \mathrm{G}_j$ s'identifie à B_2 lorsque $w(j) < w(j+1)$, et au sous-groupe trigonal large inférieur B_2^- sinon. Dans le premier cas, la formule à démontrer s'écrit

$$\mathbf{GL}(2, k) = \mathrm{B}_2 \cup \mathrm{B}_2 s \mathrm{B}_2 \qquad \text{où} \qquad s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

elle résulte par exemple du fait que B_2 est le stabilisateur d'un point dans l'action de $\mathbf{GL}(2, k)$ sur la droite projective $\mathbf{P}_1(k)$, et opère transitivement sur le complémentaire de ce point. Dans le second cas, la formule à démontrer s'écrit

$$\mathbf{GL}(2, k) = B_2B_2^- \cup B_2sB_2^-;$$

comme $B_2^- = sB_2s$, elle résulte de la précédente par multiplication à droite par s.

3. Décomposition de G en doubles classes

THÉORÈME 1. — *On a* $G = BWB$. *L'application* $w \longmapsto C(w)$ *est une bijection de* W *sur l'ensemble* $B\backslash G/B$ *des doubles classes de* G *suivant* B.

Il est clair que BWB est stable par $x \longmapsto x^{-1}$, et le lemme 1 montre qu'il est stable par produit. Comme il contient B et N, il est donc égal à G.

Il nous reste à prouver que $C(w) \neq C(w')$ si $w \neq w'$. Pour cela, nous démontrerons par récurrence sur l'entier q l'assertion suivante :

(A_q) Étant donnés w et w' distincts dans W tels que $l_S(w) \geqslant l_S(w') = q$, on a $C(w) \neq C(w')$.

(Pour la définition de $l_S(w)$, voir § 1, n° 1.)

Cette assertion est évidente pour $q = 0$, car on a alors $w' = 1$ et $w \neq 1$, d'où $C(w') = B$ et $C(w) \neq B$.

Supposons que $q \geqslant 1$ et que w, w' vérifient les hypothèses de (A_q). Il existe $s \in S$ tel que sw' soit de longueur $q - 1$. On a

$$l_S(w) > l_S(sw') \tag{6}$$

d'où $w \neq sw'$. De plus, on a $sw \neq sw'$; d'après la formule (3) du § 1, n° 1, on a

$$l_S(sw) \geqslant l_S(w) - 1 \geqslant l_S(sw') = q - 1. \tag{7}$$

Vu l'hypothèse de récurrence, $C(sw')$ est distinct de $C(w)$ et de $C(sw)$; de la formule (2), on déduit

$$C(sw') \cap C(s).C(w) = \varnothing. \tag{8}$$

Comme on a par ailleurs $C(sw') \subset C(s).C(w')$, on a finalement $C(w) \neq C(w')$.

Remarque. — L'axiome (T4) n'a pas été utilisé dans la démonstration précédente.

4. Relations avec les systèmes de Coxeter

THÉORÈME 2. — *Le couple* (W, S) *est un système de Coxeter. De plus, pour* $s \in S$ *et* $w \in W$, *les relations* $C(sw) = C(s).C(w)$ *et* $l_S(sw) > l_S(w)$ *sont équivalentes.*

Pour tout $s \in S$, soit P_s l'ensemble des éléments $w \in W$ tels que

$$C(s).C(w) = C(sw).$$

Nous allons vérifier que les P_s satisfont aux conditions (A′), (B′) et (C) du § 1, n° 7; les deux assertions du théorème résulteront alors de la prop. 6 du § 1, n° 7.

La condition (A′) est évidente.

Vérifions (B′). Si P_s et sP_s avaient un élément commun w, on aurait $w \in P_s$ et $sw \in P_s$ d'où

$$C(s).C(w) = C(sw), \qquad C(s).C(sw) = C(w).$$

On en déduirait $C(s).C(s).C(w) = C(w)$ et, d'après la formule (5), ceci entraînerait $C(w) = C(sw)$, en contradiction avec le th. 1.

Vérifions (C). Soient $s, s' \in S$ et $w, w' \in W$ avec $w' = ws'$. On fait l'hypothèse que $w \in P_s$ et $w' \notin P_s$, d'où

$$C(sw) = C(s).C(w) \tag{9}$$

$$C(w') \subset C(s).C(w') \tag{10}$$

d'après (3).

De (9) et de la relation $w = w's'$, on déduit

$$C(s)w's'B = C(sw). \tag{11}$$

D'après la formule (2′), on a $C(w')C(s') \subset C(w') \cup C(w's')$, d'où immédiatement

$$C(w')s'B \subset C(ws') \cup C(w). \tag{12}$$

Comme $C(w')$ est réunion de classes à gauche gB et que l'on a

$$C(s)C(w') = C(s)w'B,$$

la formule (10) montre que $C(s)w'$ rencontre $C(w')$ et *a fortiori* que $C(s)w's'B$ rencontre $C(w')s'B$. Il résulte alors des formules (11) et (12) que la double classe $C(sw)$ est égale à l'une des doubles classes $C(ws')$ et $C(w)$; comme on a $sw \neq w$, le th. 1 permet de conclure que $sw = ws'$.

COROLLAIRE 1. — *Soient $w_1, \ldots, w_q \in W$ et soit $w = w_1 \ldots w_q$. Si*

$$l_S(w) = l_S(w_1) + \cdots + l_S(w_q),$$

on a

$$C(w) = C(w_1) \ldots C(w_q).$$

En prenant des décompositions réduites des w_i, on se ramène au cas d'une décomposition réduite

$$w = s_1 \ldots s_q, \qquad \text{avec} \quad s_i \in S.$$

Si $u = s_2 \ldots s_q$, on a alors $w = s_1u$ et $l_S(s_1u) > l_S(u)$, d'où $C(w) = C(s_1).C(u)$ d'après le théorème; la formule cherchée s'en déduit par récurrence sur q.

COROLLAIRE 2. — *Soit* $w \in \mathrm{W}$ *et soit* T_w *la partie de* W *associée à* w *par le procédé du lemme* 2 *du* § 1, n° 4. *Si* $t \in \mathrm{T}_w$, *on a*

$$\mathrm{C}(t) \subset \mathrm{C}(w) \,.\, \mathrm{C}(w^{-1}).$$

Si $t \in \mathrm{T}_w$, il existe par définition des éléments w', $w'' \in \mathrm{W}$ et $s \in \mathrm{S}$ tels que

$$w = w'sw'', \qquad l_{\mathrm{S}}(w) = l_{\mathrm{S}}(w') + l_{\mathrm{S}}(w'') + 1 \qquad \text{et} \qquad t = w'sw'^{-1}.$$

D'après le cor. 1, on a

$$\mathrm{C}(w) \,.\, \mathrm{C}(w^{-1}) = \mathrm{C}(w') \,.\, \mathrm{C}(s) \,.\, \mathrm{C}(w'') \,.\, \mathrm{C}(w''^{-1}) \,.\, \mathrm{C}(s) \,.\, \mathrm{C}(w'^{-1}).$$

D'où :

$$\mathrm{C}(w) \,.\, \mathrm{C}(w^{-1}) \supset \mathrm{C}(w') \,.\, \mathrm{C}(s) \,.\, \mathrm{C}(s) \,.\, \mathrm{C}(w'^{-1}).$$

D'après (4), on a $\mathrm{C}(s) \subset \mathrm{C}(s) \,.\, \mathrm{C}(s)$. D'où :

$$\mathrm{C}(w) \,.\, \mathrm{C}(w^{-1}) \supset \mathrm{C}(w') \,.\, \mathrm{C}(s) \,.\, \mathrm{C}(w'^{-1}) \supset \mathrm{C}(t).$$

COROLLAIRE 3. — *Soit* $w \in \mathrm{W}$ *et soit* H_w *le sous-groupe de* G *engendré par* $\mathrm{C}(w) \,.\, \mathrm{C}(w^{-1})$. *Alors* :

a) *Pour toute décomposition réduite* $(s_1, \ldots, s_q)$ *de* w, *on a*

$$\mathrm{C}(s_j) \subset \mathrm{H}_w \qquad \textit{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant q.$$

b) *Le groupe* H_w *contient* $\mathrm{C}(w)$ *et est engendré par* $\mathrm{C}(w)$.

Démontrons *a*) par récurrence sur j. Supposons que $\mathrm{C}(s_k)$ soit contenu dans H_w pour $k < j$. Soit

$$t = (s_1 \ldots s_{j-1})s_j(s_1 \ldots s_{j-1})^{-1}.$$

L'élément t appartient à la partie T_w de W définie dans le lemme 2 du § 1, n° 4. D'après le cor. 2, on a $\mathrm{C}(t) \subset \mathrm{H}_w$, d'où $\mathrm{C}(s_j) \subset \mathrm{H}_w$.

Comme $\mathrm{C}(w) = \mathrm{C}(s_1) \ldots \mathrm{C}(s_q)$, cf. cor. 1, on a $\mathrm{C}(w) \subset \mathrm{H}_w$, d'où *b*).

Exemple. — Le th. 2, appliqué au système de Tits décrit au n° 2, montre que le *groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$, muni de l'ensemble des transpositions d'éléments consécutifs, *est un groupe de Coxeter.*

5. Sous-groupes de G contenant B

Pour toute partie X de S, on note W_{X} le sous-groupe de W engendré par X (cf. § 1, n° 8) et G_{X} la réunion $\mathrm{BW}_{\mathrm{X}}\mathrm{B}$ des doubles classes $\mathrm{C}(w)$, $w \in \mathrm{W}_{\mathrm{X}}$. On a $\mathrm{G}_{\varnothing} = \mathrm{B}$, et $\mathrm{G}_{\mathrm{S}} = \mathrm{G}$.

THÉORÈME 3. — *a*) *Pour toute partie* X *de* S, *l'ensemble* G_{X} *est un sous-groupe de* G, *engendré par* $\bigcup_{s \in \mathrm{X}} \mathrm{C}(s)$.

b) *L'application* $\mathrm{X} \longmapsto \mathrm{G}_{\mathrm{X}}$ *est une bijection de* $\mathfrak{P}(\mathrm{S})$ *sur l'ensemble des sous-groupes de* G *contenant* B.

c) *Soit* $(X_i)_{i \in I}$ *une famille de parties de* S. *Si* $X = \bigcap_{i \in I} X_i$, *on a* $G_X = \bigcap_{i \in I} G_{X_i}$.

d) *Soient* X *et* Y *deux parties de* S. *On a* $G_X \subset G_Y$ (resp. $G_X = G_Y$) *si et seulement si l'on a* $X \subset Y$ (resp. $X = Y$).

Il est clair que $G_X = (G_X)^{-1}$; le lemme 1 du nº 1 montre que $G_X . G_X \subset G_X$; d'où *a*), compte tenu du cor. 1 du th. 2.

L'injectivité de $X \longmapsto G_X$ résulte de celle de $X \longmapsto W_X$ (§ 1, nº 8, th. 2). Soit d'autre part H un sous-groupe de G contenant B. Soit U l'ensemble des $w \in W$ tels que $C(w) \subset H$. On a $H = BUB$ puisque H est réunion de doubles classes. Soit $X = U \cap S$; montrons que $H = G_X$. On a évidemment $G_X \subset H$. D'autre part, soit $u \in U$, et soit $(s_1, \ldots, s_q)$ une décomposition réduite de u. Le cor. 3 du th. 2 entraîne $C(s_j) \subset H$, d'où $s_j \in X$ pour $1 \leqslant j \leqslant q$. On a donc $u \in W_X$, et comme H est réunion des $C(u)$ pour $u \in U$, on a bien $H \subset G_X$, ce qui achève de prouver (*b*).

Les assertions *c*) et *d*) résultent des propriétés analogues des groupes W_X (§ 1, nº 8, th. 2).

COROLLAIRE. — *L'ensemble* S *se compose des éléments* $w \in W$ *tels que* $w \neq 1$ *et que* $B \cup C(w)$ *soit un sous-groupe de* G.

Les éléments $w \in W$ tels que $B \cup C(w)$ soit un sous-groupe de G sont ceux pour lesquels il existe $X \subset S$ avec $W_X = \{1, w\}$. Si de plus $w \neq 1$, on a nécessairement $\mathrm{Card}(X) = 1$, i.e. $w \in S$.

Remarque 1). — Le corollaire ci-dessus montre que S est déterminé par (G, B, N) ; pour cette raison, on se permet parfois de dire que (G, B, N) est un système de Tits, ou encore que (B, N) est *un système de Tits dans* G.

PROPOSITION 1. — *Soient* X *une partie de* S, *et* N′ *un sous-groupe de* N *dont l'image dans* W *soit égale à* W_X. *Alors* (G_X, B, N', X) *est un système de Tits.*

On a $G_X = BW_XB = BN'B$, ce qui prouve que G_X est engendré par $B \cup N'$. La vérification des axiomes (T1) à (T4) est alors immédiate.

PROPOSITION 2. — *Soient* $X, Y \subset S$ *et* $w \in W$. *On a*

$$G_X w G_Y = BW_X w W_Y B.$$

Soient $s_1, \ldots, s_q \in X$ et $t_1, \ldots, t_q \in Y$. Le lemme 1 montre que l'on a

$$C(s_1 \ldots s_q) . C(w) . C(t_1 \ldots t_q) \subset BW_X w W_Y B,$$

d'où

$$G_X w G_Y \subset BW_X w W_Y B.$$

L'inclusion opposée est évidente.

Remarque 2). — Notons $G_X \backslash G / G_Y$ l'ensemble des parties de G de la forme $G_X g G_Y$, $g \in G$; définissons de manière analogue $W_X \backslash W / W_Y$. La proposition précédente montre que la bijection canonique $w \longmapsto C(w)$ de W sur $B \backslash G / B$ définit par passage au quotient une *bijection* $W_X \backslash W / W_Y \rightarrow G_X \backslash G / G_Y$.

PROPOSITION 3. — *Soient* $X \subset S$ *et* $g \in G$. *La relation* $gBg^{-1} \subset G_X$ *entraîne* $g \in G_X$.

Soit $w \in W$ tel que $g \in C(w)$. Comme B est un sous-groupe de G_X, l'hypothèse $gBg^{-1} \subset G_X$ entraîne $C(w).C(w^{-1}) \subset G_X$, d'où $C(w) \subset G_X$ d'après le cor. 3 du th. 2, et g appartient à G_X.

6. Sous-groupes paraboliques

DÉFINITION 2. — *On dit qu'un sous-groupe de* G *est parabolique s'il contient un conjugué de* B.

Il est clair que tout sous-groupe qui contient un sous-groupe parabolique est parabolique.

PROPOSITION 4. — *Soit* P *un sous-groupe de* G.

a) *Pour que* P *soit parabolique, il faut et il suffit qu'il existe une partie* X *de* S *telle que* P *soit conjugué de* G_X (cf. n° 5 pour la définition de G_X).

b) *Soient* $X, X' \subset S$ *et* $g, g' \in G$ *tels que* $P = gG_Xg^{-1} = g'G_{X'}g'^{-1}$. *On a alors* $X = X'$ *et* $g'g^{-1} \in P$.

L'assertion *a*) résulte du th. 3, *b*).

Sous les hypothèses de *b*), on a

$$g^{-1}g'Bg'^{-1}g \subset g^{-1}g'G_{X'}g'^{-1}g = G_X,$$

et la prop. 3 montre que $g^{-1}g' \in G_X$. D'où $G_{X'} = G_X$ et $X' = X$ d'après le th. 3, *b*). Enfin, on a :

$$g'g^{-1} = g.g^{-1}g'.g^{-1} \in gG_Xg^{-1},$$

d'où *b*).

Si le sous-groupe parabolique P est conjugué de G_X, avec $X \subset S$, on dit que X est le *type* de P.

THÉORÈME 4. — (i) *Soient* P_1 *et* P_2 *deux sous-groupes paraboliques de* G *dont l'intersection est parabolique et soit* $g \in G$ *tel que* $gP_1g^{-1} \subset P_2$. *Alors* $g \in P_2$ *et* $P_1 \subset P_2$.

(ii) *Deux sous-groupes paraboliques distincts dont l'intersection est parabolique ne sont pas conjugués.*

(iii) *Soient* Q_1 *et* Q_2 *deux sous-groupes paraboliques de* G *contenus dans un sous-groupe* Q *de* G. *Tout* $g \in G$ *tel que* $gQ_1g^{-1} = Q_2$ *appartient à* Q.

(iv) *Tout sous-groupe parabolique est son propre normalisateur* (*).

L'assertion (i) résulte des prop. 3 et 4, et entraîne (ii). Sous les hypothèses de (iii), on a $gQ_1g^{-1} \subset Q$, d'où $g \in Q$ d'après (i). Enfin (iv) résulte de (iii) en prenant $Q_1 = Q_2 = Q$.

PROPOSITION 5. — *Soient* P_1 *et* P_2 *deux sous-groupes paraboliques de* G. *Alors* $P_1 \cap P_2$ *contient un conjugué de* T.

(*) Si H est un sous-groupe d'un groupe G, le normalisateur de H dans G est le sous-groupe $\mathcal{N}(H)$ formé des éléments g de G tels que $gHg^{-1} = H$. On dit que le sous-groupe H' normalise H si l'on a $H' \subset \mathcal{N}(H)$, auquel cas $HH' = H'H$ est un sous-groupe de G, dans lequel H est distingué.

Quitte à transformer P_1 et P_2 par un automorphisme intérieur de G, on peut supposer que $B \subset P_1$. Soit $g \in G$ tel que $gBg^{-1} \subset P_2$. D'après le th. 1, il existe $n \in N$ et b, $b' \in B$ tels que $g = bnb'$. Comme T est distingué dans N, on a

$$P_2 \supset gBg^{-1} = bnBn^{-1}b^{-1} \supset bnTn^{-1}b^{-1} = bTb^{-1}$$

et

$$P_1 \supset B \supset bTb^{-1}$$

d'où la proposition.

7. Théorème de simplicité

Lemme 2. — *Soit* H *un sous-groupe distingué de* G. *Il existe une partie* X *de* S *telle que* $BH = G_X$ *et tout élément de* X *commute à tout élément de* $S - X$.

Puisque BH est un sous-groupe de G contenant B, il existe une unique partie X de S telle que $BH = G_X$ (th. 3).

Soient $s_1 \in X$ et $s_2 \in S - X$; soient n_1 et n_2 des représentants respectifs de s_1 et s_2 dans N. On a $n_1 \in G_X = BH$ et il existe $b \in B$ tel que $bn_1 \in H$. Comme H est distingué dans G, l'élément $h = n_2bn_1n_2^{-1}$ de G appartient à H. D'autre part

$$h \in C(s_2) . C(s_1) . C(s_2).$$

Si la longueur de $s_2s_1s_2$ est égale à 3, le cor. 1 du th. 2 entraîne

$$C(s_2) . C(s_1) . C(s_2) = C(s_2s_1s_2),$$

d'où $h \in H \cap C(s_2s_1s_2)$. Puisque $H \cap C(s_2s_1s_2)$ est non vide, on a $s_2s_1s_2 \in W_X$. Comme (s_2, s_1, s_2) est une décomposition réduite, on en déduit $s_2 \in X$, contrairement à l'hypothèse (§ 1, nº 8, cor. 1 de la prop. 7).

On a donc $l_S(s_2s_1s_2) \leqslant 2$; si $l_S(s_1s_2) = 1$, on a $s_1s_2 \in S$, donc $(s_1s_2)^2 = 1$, $s_1s_2 = s_2s_1$. Si $l_S(s_1s_2) = 2$ la propriété (E) du § 1, nº 5 entraîne alors $s_2s_1 = s_1s_2$, car $s_1 \neq s_2$. C.Q.F.D.

Dans le th. 5 ci-dessous interviendra la propriété suivante d'un groupe U :

(R) *Pour tout sous-groupe distingué* V *de* U, *distinct de* U, *le groupe des commutateurs* (*cf. Alg.*, chap. I, § 6, nº 8) *de* U/V *est distinct de* U/V.

Tout groupe résoluble vérifie (R); en particulier tout groupe commutatif vérifie (R); il en est de même de tout groupe simple non commutatif. On peut montrer que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ vérifie (R) pour tout n (cf. exerc. 29).

THÉORÈME 5. — *Soit* Z *l'intersection des conjugués de* B, *soit* U *un sous-groupe de* B *et soit* G_1 *le sous-groupe engendré par les conjugués de* U *dans* G. *On fait les hypothèses suivantes :*

(1) U *est distingué dans* B *et* $B = UT$.

(2) U *possède la propriété* (R).

(3) G_1 *est égal à son groupe des commutateurs.*

(4) *Le système de Coxeter* (W, S) *est irréductible* (cf. § 1, nº 9).

Alors tout sous-groupe H *de* G *normalisé par* G_1 *est contenu dans* Z *ou contient* G_1.

Montrons d'abord que $G = G_1T$. Le groupe G_1T contient B, donc est son propre normalisateur (th. 4); comme N normalise G_1 et T, il normalise aussi G_1T, d'où $N \subset G_1T$; puisque G est engendré par B et N, on a bien $G = G_1T$.

Posons maintenant

$$G' = G_1H, \qquad B' = B \cap G', \qquad N' = N \cap G',$$
$$T' = T \cap G' = B' \cap N' \qquad \text{et} \qquad W' = N'/T'.$$

On a $G = G'T$ puisque G' contient G_1, d'où $N = N'T$. L'injection de N' dans N définit donc, par passage aux quotients, un isomorphisme $\alpha : W' \to W$. Soit $S' = \alpha^{-1}(S)$.

Montrons que (G', B', N', S') *est un système de Tits.* Comme $G = BNB$ et $B = TU = UT$, on a $G = UNU$ et, puisque U est un sous-groupe de G', on en déduit $G' = UN'U$, d'où (T1) puisque $U \subset B'$. L'axiome (T2) est satisfait puisque α est un isomorphisme. Soit $w \in W$ et soit $w' = \alpha^{-1}(w)$ l'élément correspondant de W'. On a

$$BwB = BwB' = Bw'B', \qquad \text{puisque} \quad B = B'T.$$

On en conclut que $G' \cap BwB = B'w'B'$, ou encore que l'injection de G' dans G définit par passage aux quotients une bijection de $B'\backslash G'/B'$ sur $B\backslash G/B$. L'axiome (T3) est alors immédiat. L'axiome (T4) résulte de $B = B'T$.

Le sous-groupe H est distingué dans G'. D'après le lemme 2 appliqué à (G', B', N', S'), il existe une partie X' de S' telle que $B'H = G'_{X'}$ et tout élément de $S' - X'$ commute à tout élément de X'. Vu l'hypothèse (4), deux cas seulement sont possibles :

a) $X' = \varnothing$, i.e. $B'H = B'$, et $H \subset B' \subset B$. Si $g \in G$, on a $g = g_1t$, avec $g_1 \in G_1$, $t \in T$ et $H \subset g_1Bg_1^{-1}$ puisque G_1 normalise H. D'où $H \subset gBg^{-1}$; comme Z est l'intersection des gBg^{-1}, on a $H \subset Z$.

b) $X' = S'$, i.e. $B'H = G'$; comme $G = G'T$, on a

$$G = B'HT = HB'T = HB.$$

Comme B normalise U, tout conjugué de U est de la forme hUh^{-1}, avec $h \in H$. Un tel sous-groupe est contenu dans le groupe UH, d'où $G_1 \subset UH$, par définition de G_1. On a alors les isomorphismes

$$U/(U \cap H) \simeq UH/H = G_1H/H \simeq G_1/(G_1 \cap H).$$

D'après l'hypothèse (3), $G_1/(G_1 \cap H)$ est égal à son groupe des commutateurs. L'hypothèse (2) montre alors que le groupe $U/(U \cap H)$, isomorphe à $G_1/(G_1 \cap H)$, est réduit à l'élément neutre. D'où $G_1 \cap H = G_1$ et $G_1 \subset H$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses du th.* 5, *le groupe* $G_1/(G_1 \cap Z)$ *est simple non commutatif, ou réduit à l'élément neutre.*

Le th. 5 montre que $G_1/(G_1 \cap Z)$ est simple ou réduit à l'élément neutre; d'autre part l'hypothèse (3) entraîne qu'il est égal à son groupe des commutateurs; d'où le corollaire.

Remarques. — 1) Les hypothèses (2), (3), (4) n'ont pas été utilisées pour démontrer que (G', B', N', S') est un système de Tits.

2) Supposons que $Z \cap U = \{1\}$. Comme Z et U sont distingués dans B, il en résulte que tout élément de Z commute à tout élément de U, donc à tout élément de G_1. Vu le corollaire ci-dessus, il s'ensuit que $G_1 \cap Z$ *est le centre de* G_1.

3) L'hypothèse (3) est entraînée par la condition suivante:

(3′) U *est engendré par les commutateurs* $b^{-1}u^{-1}bu$, *avec* $u \in U$ *et* $b \in B \cap G_1$.

Exemples. — 1) Soient k un corps, n un entier $\geqslant 0$, $G = \mathbf{GL}(n, k)$, et soit (G, B, N, S) le système de Tits décrit au nº 2. Soit U le groupe trigonal strict supérieur, i.e. le sous-groupe de B formé des matrices dont les éléments diagonaux sont égaux à 1. La condition (1) du th. 5 se vérifie immédiatement; il en est de même de (2) puisque U est résoluble; la condition (4) est vérifiée si $n \geqslant 2$. On peut prouver (cf. *Alg.*, Chap. II, 3e éd., § 10, exerc. 13) que (3) est vérifiée si $n \geqslant 3$ ou si $n = 2$ et $\mathrm{Card}(k) \geqslant 4$. Sous ces conditions, on en conclut que $G_1/(G_1 \cap Z)$ est *simple* et que $G_1 \cap Z$ est le centre de G_1 (cf. *Remarque* 2).

Lorsque k est commutatif, on a $G_1 = \mathbf{SL}(n,k)$, cf. *Alg.*, Chap. III, 3e éd., § 8, nº 9.

2) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur $\mathbf{C}$, et soit G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ (cf. chap. III). On peut montrer, en utilisant le théorème 5, que G est simple non abélien.

ANNEXE

GRAPHES

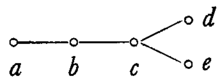
1. Définitions

Définition 1. — *On appelle graphe combinatoire* (ou simplement *graphe*, lorsqu'aucune confusion n'en résulte) *un couple* $\Gamma = (A, S)$, *où* S *est un ensemble, et* A *une partie de* $\mathfrak{P}(S)$ *formée d'ensembles à deux éléments.*

Soit $\Gamma = (A, S)$ un graphe. Les éléments de A s'appellent les *arêtes* et ceux de S les *sommets* de Γ; on dit que deux sommets x, y sont *liés* si $\{x, y\}$ est une arête. Un sommet est dit *terminal* s'il est lié à un sommet au plus, et *point de ramification* s'il est lié à trois sommets au moins.

Conformément aux définitions générales (*Ens.* R, § 8), un *isomorphisme* du graphe Γ sur un graphe $\Gamma' = (A', S')$ est une bijection f de S sur S' qui transforme A en A'. Un graphe $\Gamma' = (A', S')$ est appelé un *sous-graphe* de Γ si l'on a $S' \subset S$ et $A' \subset A$; on dit que Γ' est un sous-graphe *plein* de Γ si l'on a $S' \subset S$ et $A' = A \cap \mathfrak{P}(S')$; il est clair que toute partie de S est l'ensemble des sommets d'un sous-graphe plein de Γ et d'un seul.

Pour faciliter la lecture des raisonnements, on représentera un graphe par un dessin composé de points correspondants aux sommets, deux points étant joints par un trait si et seulement si les sommets qu'ils représentent sont liés dans le graphe. Par exemple, la figure



représente un graphe dont les sommets sont a, b, c, d, e et les arêtes $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, d\}$ et $\{c, e\}$.

2. Composantes connexes d'un graphe

Soit $\Gamma = (A, S)$ un graphe. Si a et b sont deux sommets, on appelle *chemin* joignant a à b toute suite $(x_0, \ldots, x_n)$ de sommets de Γ, avec $x_0 = a$, $x_n = b$, les sommets x_i et x_{i+1} étant liés pour $0 \leqslant i < n$; l'entier $n \geqslant 0$ est la *longueur* du chemin considéré. On dit que le chemin $(x_0, \ldots, x_n)$ est injectif si l'on a $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$; si un chemin $(x_0, \ldots, x_n)$ joignant a à b est de longueur minimale dans l'ensemble de ces chemins, il est nécessairement injectif : sinon, il existerait i et j avec $0 \leqslant i < j \leqslant n$ et $x_i = x_j$ et la suite

$$(x_0, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

serait un chemin de longueur $< n$ joignant a à b.

La relation « il existe un chemin joignant a à b » entre deux sommets a et b de Γ est une relation d'équivalence R dans l'ensemble S des sommets. Les classes d'équivalence pour R s'appellent les *composantes connexes* de Γ; on dit que Γ est *connexe* s'il existe dans S au plus une composante connexe, c'est-à-dire si deux sommets quelconques de Γ peuvent être joints par au moins un chemin.

PROPOSITION 1. — *Soient* $\Gamma = (A, S)$ *un graphe et* $(S_\alpha)_{\alpha \in L}$ *la famille de ses composantes connexes. On note* Γ_α *le sous-graphe plein de* Γ *ayant* S_α *pour ensemble de sommets.*

(i) *Pour tout* α *dans* L, *le graphe* Γ_α *est connexe.*

(ii) *Si* $\Gamma' = (A', S')$ *est un sous-graphe connexe de* Γ, *il existe* α *dans* L *tel que* $S' \subset S_\alpha$.

(iii) *Pour* $\alpha \neq \beta$, *aucun élément de* S_α *n'est lié dans* Γ *à un élément de* S_β (autrement dit, toute arête de Γ est une arête de l'un des Γ_α).

(iv) *Soit* $(S'_\lambda)_{\lambda \in M}$ *une partition de* S *telle que pour* $\lambda \neq \mu$ *aucun élément de* S'_λ *ne soit lié dans* Γ *à un élément de* S'_μ; *alors chacun des ensembles* S'_λ *est réunion de composantes connexes de* Γ.

(i) Soient α dans L, et a, b dans S_α. Il existe donc un chemin $c = (x_0, \ldots, x_n)$ joignant a à b *dans* Γ; pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, le chemin $(x_0, \ldots, x_i)$ joint a à x_i dans Γ, d'où $x_i \in S_\alpha$; finalement, c est un chemin *dans* Γ_α joignant a à b. Par suite, Γ_α est connexe.

(ii) Soient $\Gamma' = (A', S')$ un sous-graphe connexe non vide de Γ, a un élément de S', S_α la composante connexe de Γ contenant a. Pour tout b dans S', il existe un chemin c joignant a à b *dans* Γ', et *a fortiori dans* Γ. Par suite, on a $S' \subset S_\alpha$.

(iii) Étant donnés α et β distincts dans L, et des sommets $a \in S_\alpha$ et $b \in S_\beta$, il n'existe aucun chemin joignant a à b, et en particulier aucune arête ne joint a à b.

(iv) Soient a dans S'_λ, et S_α la composante connexe de Γ contenant a; pour tout b dans S_α, il existe un chemin $(x_0, \ldots, x_n)$ joignant a à b dans Γ. Si i est un entier tel que $0 \leqslant i < n$ et $x_i \in S'_\lambda$, on a $x_{i+1} \in S'_\lambda$ puisque x_i est lié à x_{i+1}; par récurrence, on a donc $x_i \in S'_\lambda$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ et en particulier $b = x_n$ est dans S'_λ. On a donc $S_\alpha \subset S'_\lambda$.

COROLLAIRE 1. — *Pour que le graphe* $\Gamma = (A, S)$ *soit connexe, il faut et il suffit qu'il n'existe aucune partition* (S', S'') *de* S *en deux ensembles non vides telle qu'aucun élément de* S' *ne soit lié dans* Γ *à un élément de* S''.

Supposons Γ non connexe et soit S' une de ses composantes connexes; l'ensemble $S'' = S - S'$ est non vide d'après la prop. 1, (i) et aucun élément de S' n'est lié dans Γ à un élément de S'' d'après la prop. 1, (iii).

Supposons Γ connexe et soit (S', S'') une partition ayant la propriété de l'énoncé. D'après la prop. 1, (iv), l'ensemble S' contient au moins une composante connexe, d'où $S' = S$ et $S'' = \varnothing$, ce qui est contradictoire.

Corollaire 2. — *Pour qu'une partie* S' *de* S *soit réunion de composantes connexes, il faut et il suffit qu'aucun sommet appartenant à* S' *ne soit lié à un sommet appartenant à* $S - S'$.

La condition est suffisante d'après la prop. 1, (iv). Elle est nécessaire d'après la prop. 1, (iii).

3. Forêts et arbres

Soit $\Gamma = (A, S)$ un graphe. On appelle *circuit* dans Γ toute suite

$$(x_1, \ldots, x_n)$$

de sommets distincts de Γ, avec $n \geqslant 3$, x_i lié à x_{i+1} pour $1 \leqslant i < n$ et x_n lié à x_1. On dit que Γ est une *forêt* s'il n'existe aucun circuit dans Γ; tout sous-graphe de Γ est alors une forêt. Une forêt connexe s'appelle un *arbre*; les composantes connexes d'une forêt sont donc des arbres.

Proposition 2. — *Soit* $\Gamma = (A, S)$ *une forêt n'ayant qu'un nombre fini de sommets.*

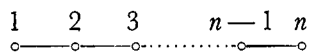
(i) *Si* Γ *possède au moins un sommet, il admet un sommet terminal.*

(ii) *Si* Γ *possède au moins deux sommets, il existe une partition* (S', S'') *de l'ensemble des sommets en deux parties non vides telle que deux sommets distincts appartenant tous deux à* S' *ou tous deux à* S'' *ne soient jamais liés.*

Supposons qu'il existe au moins un sommet dans Γ, et soit $(x_0, \ldots, x_n)$ un chemin injectif de longueur maximale dans Γ. Le sommet x_0 ne peut être lié à un sommet y distinct de $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sinon il existerait dans Γ un chemin injectif de longueur $n + 1$, à savoir $(y, x_0, \ldots, x_n)$. Le sommet x_0 n'est lié à aucun sommet x_i avec $2 \leqslant i \leqslant n$, sinon $(x_0, x_1, \ldots, x_i)$ serait un circuit dans la forêt Γ. Donc x_0 est terminal.

On démontrera (ii) par récurrence sur le nombre m de sommets de Γ, le cas $m = 2$ étant trivial. Supposons donc $m \geqslant 3$ et l'assertion (ii) prouvée pour les graphes à $m - 1$ sommets. Soit a un sommet terminal de Γ (cf. (i)). Appliquons l'hypothèse de récurrence au sous-graphe plein de Γ ayant pour sommets les sommets $x \neq a$ de Γ; il existe donc deux parties non vides et disjointes S'_1 et S''_1 de S avec $S'_1 \cup S''_1 = S - \{a\}$, telles que deux sommets distincts de S'_1 (resp. S''_1) ne soient jamais liés. Comme a est lié à un sommet au plus de Γ, on peut supposer par exemple qu'il n'est lié à aucun sommet de S''_1; la partition $(S'_1, S''_1 \cup \{a\})$ de S répond alors à la question. C.Q.F.D.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note A_n le graphe dont les sommets sont les entiers $1, 2, \ldots, n$ et les arêtes les parties $\{i, j\}$ avec $i - j = \pm 1$:



On dit qu'un graphe Γ est une *chaîne de longueur* $m \geqslant 0$ s'il est isomorphe à A_{m+1}; ceci équivaut à l'existence dans Γ d'un chemin injectif $(x_0, \ldots, x_m)$ contenant tous les sommets, les sommets x_i et x_j n'étant pas liés lorsque $|j-i| > 1$.

PROPOSITION 3. — *Pour qu'un graphe soit une chaîne, il faut et il suffit que le nombre de ses sommets soit fini et non nul, et qu'il soit un arbre sans point de ramification.*

Supposons que le graphe Γ soit une chaîne $(x_0, \ldots, x_m)$ avec les propriétés énumérées avant l'énoncé de la prop. 3. Il est clair qu'un sommet de Γ est lié à deux sommets au plus. Pour $i < j$, le chemin $(x_i, \ldots, x_j)$ extrait du chemin $(x_0, \ldots, x_m)$ joint x_i à x_j; donc Γ est connexe. Enfin, soit $(x_{p_1}, \ldots, x_{p_n})$ un circuit dans Γ; soit p_k le plus petit parmi les entiers distincts $p_1, \ldots, p_n$. Il existe i et j distincts tels que x_{p_k} soit lié à x_{p_i} et x_{p_j}: cela résulte de la définition d'un circuit. Comme on a $p_k < p_i$ et $p_k < p_j$, on a nécessairement $p_i = p_j = p_k + 1$, ce qui est contradictoire puisque $p_1, \ldots, p_n$ sont distincts. Il n'y a donc aucun circuit dans Γ.

Réciproquement, soit Γ un arbre sans point de ramification, à un nombre fini non nul de sommets, et soit $(x_0, \ldots, x_m)$ un chemin injectif de longueur maximale dans Γ. Notons T l'ensemble des sommets autres que $x_0, \ldots, x_m$. Un sommet $b \in \mathrm{T}$ ne peut être lié à un sommet x_i; il y a en effet trois possibilités :

a) $i = 0$, mais alors $(b, x_0, \ldots, x_m)$ serait un chemin injectif de longueur $m + 1$ dans Γ;

b) $i = m$, mais alors $(x_0, \ldots, x_m, b)$ serait un chemin injectif de longueur $m + 1$ dans Γ;

c) $0 < i < m$, mais alors x_i serait lié aux trois sommets distincts x_{i-1}, x_{i+1} et b.

Comme Γ est connexe, T est vide d'après le cor. 1 de la prop. 1. Par ailleurs, s'il existait i, j tels que $j - i > 1$ et que x_i, x_j soient liés, on aurait un circuit $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j)$ dans Γ. Donc Γ est une chaîne. C.Q.F.D.

Exercices

§ 1

1) *a*) Soit (W, S) un système de Coxeter et soient $s_1, \ldots, s_r$ des éléments de S. Posons $w = s_1 \ldots s_r$. Montrer que si $l_S(w) < r$, il existe deux entiers p et q avec $1 \leqslant p < q \leqslant r$ tels que $w = s_1 \ldots s_{p-1}s_{p+1} \ldots s_{q-1}s_{q+1} \ldots s_r$. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $j(1), \ldots, j(k)$ d'entiers compris entre 1 et r telle que $(s_{j(1)}, \ldots, s_{j(k)})$ soit une décomposition réduite de w.

b) Soient (W, S) un système de Coxeter et X, Y, Z trois parties de S. Montrer que

$$W_X \cap (W_Y . W_Z) = (W_X \cap W_Y) . (W_X \cap W_Z)$$

(montrer que tout élément $w \in W_Y . W_Z$ possède une décomposition réduite

$$(s_1, \ldots, s_h, t_1, \ldots, t_k)$$

telle que $s_i \in Y$ et $t_j \in Z$ et utiliser le cor. 1 de la prop. 7 du nº 8).

Montrer que

$$W_X . (W_Y \cap W_Z) = (W_X . W_Y) \cap (W_X . W_Z).$$

2) Soient (W, S) un système de Coxeter et X une partie de S. Montrer que pour que W_X soit distingué dans W, il faut et il suffit que tout élément de X commute avec tout élément de S — X.

3) Soient (W, S) un système de Coxeter et X, Y deux parties de S. Soit $a \in W$. Montrer qu'il existe un élément $w \in W_X a W_Y$ de longueur minimum et un seul et que tout élément

$$w' \in W_X a W_Y$$

s'écrit sous la forme $w' = xwy$, avec $x \in W_X$, $y \in W_Y$ et $l(w') = l(x) + l(w) + l(y)$ (on prendra un élément de longueur minimum dans $W_X a W_Y$ et on utilisera l'exerc. 1). On dit qu'un élément $w \in W$ est (X, Y)-*réduit* si c'est l'élément de longueur minimum dans la double classe $W_X w W_Y$.

Montrer que si w est (X, $\varnothing$)-réduit, on a $l(xw) = l(x) + l(w)$ pour tout $x \in W_X$ et que tout élément de W s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme xw, où $x \in W_X$ et w est (X, $\varnothing$)-réduit. Montrer qu'un élément $w \in W$ est (X, $\varnothing$)-réduit si et seulement si l'on a $l(xw) > l(w)$ pour tout $x \in X$ (écrire w sous la forme yw', où $y \in W_X$ et w' est (X, $\varnothing$)-réduit).

Montrer que pour que $w \in W$ soit (X,Y)-réduit, il faut et il suffit que w soit à la fois (X,$\varnothing$)-réduit et ($\varnothing$,Y)-réduit.

4) Soit n un entier $\geqslant 2$. Pour tout entier i avec $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, on note s_i la transposition de i et $i + 1$ dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, et H_i l'ensemble des $w \in \mathfrak{S}_n$ tels que $w^{-1}(i) < w^{-1}(i+1)$; on pose $S = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. Montrer que $(\mathfrak{S}_n, S)$ est un système de Coxeter et que H_i est l'ensemble des $w \in \mathfrak{S}_n$ tels que $l(w) < l(s_i w)$ (utiliser la prop. 6 du nº 7).

¶ 5) Soient X un ensemble non vide et W un ensemble de permutations de X. On suppose donnés un ensemble $\mathfrak{L}$ de relations d'équivalence dans X, un élément $x_0 \in X$ et une application $\varphi : H \longmapsto s_H$ de $\mathfrak{L}$ dans W. On note $\mathfrak{L}_0$ l'ensemble des $H \in \mathfrak{L}$ tels que $s_H(x_0) \equiv x_0$ mod. H' pour tout $H' \neq H$ dans $\mathfrak{L}$, et S_0 l'ensemble des s_H pour H dans $\mathfrak{L}_0$. On fait les hypothèses suivantes :

(i) Pour tout $H \in \mathfrak{L}$, il y a deux classes d'équivalence modulo H qui sont permutées par s_H et l'on a $s_H^2 = 1$.

(ii) Pour tout $H \in \mathcal{L}$ et tout $w \in W$, la relation d'équivalence $w(H)$ transformée de H par w appartient à $\mathcal{L}$ et l'on a $s_{w(H)} = ws_H w^{-1}$.

(iii) Pour tout $w \neq 1$ dans W, l'ensemble des $H \in \mathcal{L}$ tels que $w(x_0) \not\equiv x_0$ mod. H est fini et rencontre $\mathcal{L}_0$.

a) Prouver que (W, S_0) est un système de Coxeter (utiliser la prop. 6 du n° 7).

b) Prouver que la longueur $l_{S_0}(w)$ est égale au nombre d'éléments $H \in \mathcal{L}$ tels que

$$w(x_0) \not\equiv x_0 \text{ mod. H.}$$

c) Soient E un ensemble fini et X l'ensemble des relations d'ordre total sur E. On note W le groupe des permutations de E, agissant de manière évidente sur X. Soient i et j distincts dans E; on dit que deux éléments R et R' de X sont équivalents mod. H_{ij} si l'on a à la fois $R(i, j)$ et $R'(i, j)$ ou bien $R(j, i)$ et $R'(j, i)$; on note s_{ij} la transposition de i et j. Soient $\mathcal{L}$ l'ensemble des relations d'équivalence de la forme H_{ij} et φ l'application de $\mathcal{L}$ dans W définie par $\varphi(H_{ij}) = s_{ij}$; enfin soit x_0 un élément quelconque de X. Montrer que ces données satisfont aux hypothèses (i) à (iii), et retrouver les résultats de l'exerc. 4.

6) Soient E un ensemble à 6 éléments et F l'ensemble des structures de droite projective par rapport au corps $\mathbf{F}_5$ sur E. On note $\mathfrak{S}_E$ le groupe des permutations de E; pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_E$, on note $\tilde{\sigma}$ la permutation de F déduite de σ par transport de structure. Montrer qu'il existe une bijection u de E sur F, et que l'application $\sigma \longmapsto u^{-1}\tilde{\sigma}u$ est un automorphisme non intérieur de $\mathfrak{S}_E$ (si s est une transposition, $u^{-1}\tilde{s}u$ a trois orbites à deux éléments).

7) Construire un groupe W et deux parties S et S' de W telles que (W, S) et (W, S') soient des systèmes de Coxeter isomorphes, mais qu'il n'existe aucun automorphisme intérieur de W transformant S en S' (utiliser l'exerc. 4 et l'exerc. 6).

8) Construire un groupe W et deux parties S et S' de W telles que (W, S) et (W, S') soient des systèmes de Coxeter non isomorphes, l'un d'eux étant irréductible et l'autre ne l'étant pas (prendre pour W un groupe diédral d'ordre 12 engendré par $\{s, s'\}$ où s et s' sont d'ordre 2 et $s \neq s'$, et poser $S = \{s, s'\}$ et $S' = \{(ss')^3, s', s'(ss')^2\}$.

9) Soit (W, S) un système de Coxeter de matrice $(m(s, s'))$, et soit W^+ le sous-groupe de W formé des éléments de longueur paire. Soit $s_0 \in S$. Posons $g_s = ss_0$. Montrer que la famille $(g_s)_{s \in S - \{s_0\}}$ et les relations $g_s^{m(s, s_0)} = 1$ pour $m(s, s_0) \neq \infty$ et $(g_s g_{s'}^{-1})^{m(s, s')} = 1$ pour $s, s' \in S - \{s_0\}$ et $m(s, s') \neq \infty$, forment une présentation de W^+. (Soit H^+ le groupe défini par la présentation ci-dessus. Montrer qu'il existe un automorphisme α de H^+, de carré l'identité, qui transforme g_s en g_s^{-1} pour tout $s \in S - \{s_0\}$. Si H_α est le produit semi-direct de $\{1, -1\}$ et de H^+, relatif à α, définir des homomorphismes $H_\alpha \to W$ et $W \to H_\alpha$ inverses l'un de l'autre.) Montrer que si les éléments de S sont conjugués (cf. prop. 3), le groupe W^+ est le *groupe des commutateurs* de W (remarquer que les éléments g_s sont alors des commutateurs).

10) Soit $\mathfrak{A}_n$ le groupe alterné d'ordre n, formé des permutations $w \in \mathfrak{S}_n$ de signature égale à 1. Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est le groupe des commutateurs de $\mathfrak{S}_n$ (utiliser les exerc. 4 et 9). Pour tout entier i avec $1 \leqslant i \leqslant n - 2$, posons $u_i = s_1 s_{i+1}$ (avec les notations de l'exerc. 4). Montrer que la famille (u_i) et les relations $u_1^3 = 1$, $u_i^2 = 1$ pour $i \geqslant 2$, $(u_i u_{i+1})^3 = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n - 3$ et $u_i u_j = u_j u_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n - 4$ et $i + 2 \leqslant j \leqslant n - 2$, forment une présentation du groupe $\mathfrak{A}_n$ (utiliser l'exerc. 9).

*11) Soit (W, S) un système de Coxeter. Soit Γ_∞ le graphe dont l'ensemble des sommets est S, deux sommets s, s' étant joints par une arête si et seulement si $m(s, s') \neq \infty$. Soient S_α les composantes connexes de Γ_∞. Montrer que W peut être identifié au *produit libre* des W_{S_α}. En particulier, tout $w \in W$ s'écrit de façon unique comme un produit $w_1 \ldots w_h$, $w_i \neq 1$, w_i appartenant à un $W_{S_{\alpha_i}}$, et $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant h - 1$; montrer que la longueur de w est la somme des longueurs des w_i.*

12) Soit (W, S) un système de Coxeter tel que $m(s, s')$ soit pair pour $s \neq s'$ et soit X une partie de S. Montrer qu'il existe un homomorphisme f_X et un seul de W sur W_X tel que $f_X(s) = s$ pour $s \in X$ et $f_X(s) = 1$ pour $s \in S - X$. En déduire que W est produit semi-direct de W_X et du

noyau de f_X. Montrer que si $X \subset Y \subset S$, il existe un homomorphisme $f_{X,Y}$ de W_Y sur W_X et un seul tel que $f_X = f_{X,Y} \circ f_Y$ et que W s'identifie à un sous-groupe du système projectif ainsi obtenu des W_X pour X décrivant l'ensemble filtrant des parties finies de S.

¶ 13) Soit (W, S) un système de Coxeter. Pour $s, s' \in S$, on définit la suite $\boldsymbol{a}(s, s')$ par les règles suivantes :

(i) si ss' est d'ordre infini, $\boldsymbol{a}(s, s')$ est la suite vide;

(ii) si ss' est d'ordre fini m la suite $\boldsymbol{a}(s, s')$ est de longueur m et ses éléments de rang pair (resp. impair) sont égaux à s' (resp. s).

On note $a(s, s')$ le produit de la suite $\boldsymbol{a}(s, s')$.

a) Montrer que l'ensemble générateur S et les relations $s^2 = 1$ et $a(s, s') = a(s', s)$ forment une présentation du groupe W.

b) Soit q un entier $\geqslant 1$. Soit Σ_q l'ensemble des suites de q éléments de S et et soit R_q la plus petite relation d'équivalence dans Σ_q pour laquelle les suites de la forme (A, $\boldsymbol{a}(s, s')$, B) et (A, $\boldsymbol{a}(s', s)$, B) (où $s, s' \in S$ et où A et B sont des suites d'éléments de S) sont équivalentes. Soit Σ_q^r l'ensemble des suites $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ telles que $w(\boldsymbol{s}) = s_1 \ldots s_q$ soit de longueur q. Montrer que les suites $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}' \in \Sigma_q^r$ sont équivalentes modulo R_q si et seulement si l'on a $w(\boldsymbol{s}) = w(\boldsymbol{s}')$ (raisonner par récurrence sur q et appliquer la prop. 5 du n° 5.)

c) Montrer que, pour qu'une suite $\boldsymbol{s} \in \Sigma_q$ n'appartienne pas à Σ_q^r, il faut et il suffit que $\boldsymbol{s}$ soit équivalente modulo R_q à une suite ayant deux termes consécutifs égaux. (On raisonnera par récurrence sur q et on se ramènera à étudier le cas d'une suite $(s_1, \ldots, s_q)$ n'appartenant pas à Σ_q^r mais telle que $(s_1, \ldots, s_{q-1})$ et $(s_2, \ldots, s_q)$ appartiennent à Σ_{q-1}^r; en utilisant l'exerc. 1, on montrera que $s_1 \ldots s_{q-1} = s_2 \ldots s_q$ et on appliquera *b*).)

*14) Soit (W, S) un système de Coxeter et soit (Γ, f) son graphe de Coxeter. Soit k un entier $\geqslant 3$; si a est une arête de Γ, posons $f_k(a) = f(a)$ si $f(a) \neq \infty$ et $f_k(a) = k$ si $f(a) = \infty$. Soit (W_k, S) un système de Coxeter de graphe de Coxeter égal à (Γ, f_k) (chap. V, § 4, n° 3, cor. de la prop. 4). Montrer qu'il existe un homomorphisme φ_k et un seul de W sur W_k induisant l'identité sur S. Montrer que si k divise k', il existe un homomorphisme et un seul $\varphi_{k,k'}$ de $W_{k'}$ sur W_k tel que $\varphi_k = \varphi_{k,k'} \circ \varphi_{k'}$. Montrer que l'homomorphisme (φ_k) de W dans la limite projective des W_k est injectif (utiliser l'exerc. 13 *c*)), mais en général non surjectif, (par exemple, dans le cas d'un groupe diédral infini).*

15) (*) Soient A un ensemble et $\mathfrak{C}$ une partie de $\mathfrak{P}(A)$. Les éléments de $\mathfrak{C}$ seront appelés les *chambres* de A et une partie F d'une chambre C est appelée une *facette*, la *codimension* de F dans C étant le cardinal de C — F. On dit que F est une *cloison* de C si F est de codimension 1 dans C. Deux chambres C et C' sont dites *mitoyennes* si elles ont une cloison F commune : on a alors $C = C'$ ou $F = C \cap C'$. Une *galerie* de longueur n est une suite $\Gamma = (C_0, C_1, \ldots, C_n)$ de $n + 1$ chambres telle que C_i et C_{i+1} soient mitoyennes pour $0 \leqslant i \leqslant n - 1$. On dit que C_0 et C_n sont les *extrémités* de Γ. La galerie Γ est dite *injective* si $C_i \neq C_{i+1}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n - 1$ et est dite *minimale* s'il n'existe pas de galerie ayant mêmes extrémités et de longueur $< n$.

On dit que A (muni de $\mathfrak{C}$) est un *immeuble* si tout élément de A appartient à au moins une chambre et si deux chambres quelconques sont les extrémités d'une galerie. On appelle alors *distance* de deux chambres C et C' la longueur $d(C, C')$ d'une galerie minimale d'extrémités C et C'.

Un *sous-immeuble* d'un immeuble A est une partie D de A telle que D muni de $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{P}(D)$ soit un immeuble.

a) Montrer que si A est un immeuble, une facette a la même codimension dans toute chambre la contenant, ce qui permet de parler de la codimension d'une facette et d'une cloison de A sans référence à une chambre particulière. Un *morphisme* d'un immeuble B dans A est une application f de B dans A telle que la restriction de f à toute chambre C de B soit une bijection de C sur une chambre $f(C)$ de A. Montrer que l'image par f d'une facette de B est une facette de même codimension.

(*) Les exercices 15 à 24, ainsi que les exercices 3 à 17 du § 2, en grande partie inédits, nous ont été communiqués par J. Tits.

b) On dit qu'un immeuble est un *appartement* si toute cloison est contenue dans exactement deux chambres. Montrer que si A est un appartement, tout automorphisme de A (i.e. toute permutation de A conservant $\mathfrak{C}$) laissant fixes tous les points d'une chambre est l'identité. Plus généralement, soit φ un endomorphisme de A et soit C une chambre de A telle que $\varphi(a) = a$ pour tout $a \in C$; soit $(C, C_1, \ldots, C_n)$ une galerie de A. Montrer que, ou bien la galerie $(C, \varphi(C_1), \ldots, \varphi(C_n))$ n'est pas injective, ou bien on a $\varphi(a) = a$ pour tout a appartenant à la réunion des C_i.

16) Soit (W, S) un système de Coxeter. Pour $s \in S$, on désigne par $W^{(s)}$ le sous-groupe $W_{S-\{s\}}$ de W, par A l'ensemble des parties de W de la forme $wW^{(s)}$ pour $w \in W$ et $s \in S$, et par $\mathfrak{C}$ l'ensemble des parties de A de la forme $C_w = \{wW^{(s)} | s \in S\}$ pour $w \in W$, qu'on appelle chambres de A (exerc. 15).

a) Montrer que l'application $w \longmapsto C_w$ est une bijection de W sur $\mathfrak{C}$.

b) Montrer que pour que deux chambres distinctes C_w et $C_{w'}$ soient mitoyennes, il faut et il suffit qu'il existe $s \in S$ tel que $w' = ws$. En déduire que A (muni de $\mathfrak{C}$) est un *appartement* (exerc. 15), qu'on appelle l'appartement de (W, S). Montrer que la longueur d'une galerie minimale d'extrémités C_w et $C_{w'}$ est égale à $l_S(w^{-1}w')$.

c) Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des facettes de A et soit $F \in \mathfrak{F}$. Montrer qu'il existe une partie X et une seule de S et un élément $w \in W$ tels que $wW_X = \bigcap_{i \in F} i$. On dit alors que F est *de type* X. Montrer que F est de codimension égale au cardinal de X. Montrer que l'application j : $F \longmapsto \bigcap_{i \in F} i$ est une *bijection strictement décroissante* (pour l'inclusion) de $\mathfrak{F}$ sur l'ensemble des parties de W de la forme wW_X pour $w \in W$ et $X \subset S$. Montrer que toute facette de type X contient une facette de type Y et une seule pour tout Y tel que $X \subset Y \subset S$.

d) On fait opérer W sur A grâce aux translations à gauche et on pose $C = C_e$. Montrer que W opère de manière simplement transitive sur $\mathfrak{C}$ (*). Soient $C_1, \ldots, C_n$ des chambres de A. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $\Gamma = (C_0 = C, C_1, \ldots, C_n)$ est une galerie injective;

(ii) il existe une suite $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ d'éléments de S telle que $C_j = t_j(C_{j-1})$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, où t_j est l'élément de $\Phi(\boldsymbol{s})$ défini au nº 4, formule (11).

Montrer que si ces conditions sont satisfaites, la suite $\boldsymbol{s}$ est unique et que $C_n = s_1 \ldots s_n(C)$. Montrer que la galerie Γ est minimale si et seulement si la suite $\boldsymbol{s}(\Gamma) = \boldsymbol{s}$ est une décomposition réduite de $w = s_1 \ldots s_n$.

e) Soit T la réunion des conjugués de S. Pour $t \in T$, on désigne par L_t et on appelle *mur* défini par t l'ensemble des points de A invariants par t. Montrer que L_t est réunion de cloisons et que, pour qu'une cloison F soit contenue dans L_t, il faut et il suffit que $j(F)$ soit de la forme $wW_{\{s\}}$ avec $t = wsw^{-1}$. En déduire que, pour toute cloison F, il existe un élément $t = t(F) \in T$ et un seul tel que $F \subset L_t$: on dit que L_t est le *support* de F.

Montrer que si $w(L_t) = L_t$ (pour $w \in W$), on a $w = 1$ ou $w = t$.

f) Soient $w', w'' \in W$. Posons $C' = w'(C)$, $C'' = w''(C)$ et soit $\Gamma = (C_0 = C', C_1, \ldots, C_n = C'')$ une galerie injective d'extrémités C′ et C″. Soit t_j l'élément de T définissant le mur support de la cloison $C_j \cap C_{j-1}$ (pour $1 \leqslant j \leqslant n$). Montrer que la suite $\Psi(\Gamma) = (w'^{-1}t_jw')_{1 \leqslant j \leqslant n}$ coïncide avec la suite $\Phi(\boldsymbol{s}(w'^{-1}(\Gamma)))$. Pour $t \in T$, soit $n(\Gamma, t)$ le nombre de fois que $w'^{-1}tw'$ intervient dans $\Psi(\Gamma)$. Déduire du lemme 1 du nº 4 que le nombre $(-1)^{n(\Gamma, t)}$ ne dépend que de C′ et C″ et non de Γ : on le notera $\eta(C', C'', t)$. Montrer que la relation $\eta(C', C'', t) = 1$ est une relation d'équivalence entre C′ et C″, admettant deux classes d'équivalences permutées par t. On désignera par $\mathfrak{C}^+(t)$ celle de ces deux classes qui contient C et par $\mathfrak{C}^-(t)$ l'autre.

Montrer que, pour $w \in W$ et $s \in S$, la chambre $w(C)$ appartient à $\mathfrak{C}^+(s)$ si et seulement si $l(sw) > l(w)$.

(*) Soient H un groupe et E un ensemble où opère H. On dit que H opère de manière *simplement transitive* sur E si l'application $h \longmapsto h.x$ est une bijection de H sur E pour tout $x \in E$; on dit encore que E est un *ensemble homogène principal sous* H.

g) Soit $A^+(t)$ (resp. $A^-(t)$) la réunion des chambres appartenant à $\mathfrak{C}^+(t)$ (resp. $\mathfrak{C}^-(t)$) (pour $t \in T$). Montrer que $A^+(t) \cap A^-(t) = L_t$. (Pour montrer que $A^+(t) \cap A^-(t) \subset L_t$, on se ramènera au cas $t \in S$. Si $a \in A^+(t) \cap A^-(t)$, on posera $a = wW^{(s)}$, avec $s \in S$ et w étant $(\varnothing, S - \{s\})$-réduit (exerc. 3). Si $w(C) \in \mathfrak{C}^-(t)$, on a $l(tw) < l(w)$ et $w = ts_1 \dots s_q$ avec $s_j \in S$ et $l(w) = q + 1$. Comme $a \in A^-(t)$, il existe $x \in W^{(s)}$ tel que $wx(C) \in \mathfrak{C}^+(t)$; on a alors

$$l(twx) = 1 + l(wx) = 1 + l(w) + l(x);$$

mais $twx = s_1 \dots s_q x$, d'où une contradiction. On a donc $w(C) \in \mathfrak{C}^+(t)$ et $l(tw) = 1 + l(w)$; si $x \in W^{(s)}$ est tel que $l(twx) < l(wx)$, on déduit de l'exerc. 1 que $twx = wx'$ avec $x' \in W^{(s)}$, d'où $ta = a$ et $a \in L_t$.)

Les sous-ensembles $A^+(t)$ et $A^-(t)$ seront appelés les *moitiés* de A déterminées par le mur L_t. On dira que deux points de A sont du même côté (resp. strictement de part et d'autre) de L_t s'ils appartiennent (resp. n'appartiennent pas tous deux) à l'une de ces moitiés. Toute facette est contenue dans l'une des moitiés déterminées par L_t. Si deux facettes sont contenues dans des moitiés différentes, on dira qu'elles sont de part et d'autre de L_t, ou encore que L_t les sépare.

h) Soit $w \in W$. Montrer que $l(w)$ est égal au nombre de murs séparant les chambres C et $w(C)$.

i) Montrer que l'application φ qui à la moitié $A^+(t)$ (resp. $A^-(t)$) fait correspondre le couple $(1, t)$ (resp. $(-1, t)$) est une bijection de l'ensemble $\mathfrak{M}$ des moitiés de A sur l'ensemble $R = \{1, -1\} \times T$ (cf. nº 4). Reprenons les notations du lemme 1 du nº 4 : montrer que $\varphi(w(M)) = U_w(\varphi(M))$ quels que soient $w \in W$ et $M \in \mathfrak{M}$.

17) On garde les notations de l'exerc. 16 et on suppose W *fini*. Soit $\mathfrak{H}$ l'ensemble des murs de A. A tout $H \in \mathfrak{H}$, on associe la moitié H^+ de A déterminée par H et contenant C. Montrer qu'on peut numéroter les éléments de H de telle sorte que l'application $j \longmapsto \bigcap_{i \leqslant j} H_i^+$ soit strictement décroissante sur l'intervalle $[1, \operatorname{Card}(\mathfrak{H})]$. (Considérer la famille $\mathfrak{F}$ des intersections d'ensembles H^+ ordonnée par inclusion et considérer une suite $(F_0, \dots, F_q)$ strictement décroissante de longueur maximale d'éléments de $\mathfrak{F}$; pour tout $H \in \mathfrak{H}$, il existe un i tel que $H^+ \supset F_j$ pour $j \geqslant i$ et $H^+ \not\supset F_{i-1}$: montrer que $F_i = H^+ \cap F_{i-1}$.)

18) Soit A un appartement (exerc. 15). On appelle *pliage* de A un endomorphisme π de A tel que $\pi^2 = \pi$ et que toute chambre de A soit image par π de 0 ou 2 chambres.

a) Soient π un pliage de A et C une chambre de A telle que $\pi(C) = C$. Pour toute chambre C′ mitoyenne de C, on a, ou bien $\pi(C') = C'$ ou bien $\pi(C') = C$; si $a \in C$, on a $\pi(a) = a$. Soit $(C_0 = C, C_1, \dots, C_n)$ une galerie : montrer que, ou bien $\pi(C_i) = C_i$ pour tout i, ou bien $(C_0, \pi(C_1), \dots, \pi(C_n))$ n'est pas minimale (et même a deux chambres consécutives égales). En déduire que toute galerie minimale d'extrémités invariantes par π est invariante par π. Si $(C = C_0, C_1, \dots, C_n)$ est une galerie minimale et si $\pi(C_n) \neq C_n$, il existe un indice i avec $0 \leqslant i < n$ tel que $\pi(C_j) = C_j$ pour $0 \leqslant j \leqslant i$ et $\pi(C_j) \neq C_j$ pour $i < j \leqslant n$.

b) Soient C_1 et C_2 deux chambres mitoyennes distinctes et π, π' deux pliages de A. On suppose que $\pi(C_2) = C_1$ et $\pi'(C_1) = C_2$. Soit C une chambre; considérons les trois conditions suivantes :

(1) $$\pi(C) = C;$$
(2) $$d(C, C_1) < d(C, C_2);$$
(3) $$\pi'(C) \neq C.$$

Montrer que (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) et en déduire que ces trois conditions sont équivalentes. Montrer que π (resp. π') est l'unique pliage de A amenant C_2 (resp. C_1) sur C_1 (resp. C_2) (supposons (2) vérifiée et soit $(C_1, C'_2, \dots, C'_n = C)$ une galerie minimale : montrer que $\pi'(C'_{j+1})$ est l'unique chambre distincte de $\pi'(C'_j)$ et contenant la cloison $\pi'(C'_j \cap C'_{j+1})$). Montrer que $\pi(\mathfrak{C})$ et $\pi'(\mathfrak{C})$ forment une partition de l'ensemble $\mathfrak{C}$ des chambres de A et que $\pi(a) = \pi'(a) = a$ pour tout $a \in \pi(A) \cap \pi'(A)$. Montrer que l'application de A dans lui-même qui coïncide avec π' sur $\pi(A)$ et avec π sur $\pi'(A)$ est un automorphisme involutif de A. On l'appelle la *réflexion* par rapport à la cloison $C_1 \cap C_2$. Montrer que c'est le seul automorphisme non trivial de A laissant fixes tous les points de $C_1 \cap C_2$ (utiliser l'exerc. 15 *b*)).

c) On suppose que A est l'appartement associé à un système de Coxeter (W, S) et on reprend les notations de l'exerc. 16. Soient C_1 et C_2 deux chambres mitoyennes et t l'élément de T tel que le mur L_t soit le support de $C_1 \cap C_2$. Soit M_j la moitié de A déterminée par L_t et contenant C_j (pour $j = 1,2$). Montrer que l'application π définie par $\pi(a) = a$ si $a \in M_1$ et $\pi(a) = t(a)$ si $a \in M_2$ est un pliage de A tel que $\pi(C_2) = C_1$ et que la réflexion par rapport à la cloison $C_1 \cap C_2$ est l'application $a \longmapsto t(a)$.

19) Soit A un appartement. On suppose que, quelles que soient les chambres mitoyennes distinctes C_1 et C_2, il existe un pliage (exerc. 18) de A amenant C_1 en C_2. Soient C une chambre de A et $(C_i)_{i\in I}$ la famille des chambres mitoyennes de C, distinctes de C. On désigne par s_i la réflexion par rapport à la cloison $C \cap C_i$ (exerc. 18 *b*)). On pose $S = \{s_i | i \in I\}$ et on désigne par W le groupe d'automorphismes de A engendré par les s_i.

a) Montrer que, pour toute chambre C′, il existe $w \in W$ tel que $C' = w(C)$ (on raisonnera par récurrence sur $d(C, C')$).

b) Montrer que (W, S) est un système de Coxeter (pour $i \in I$, poser

$$P_{s_i} = \{w \in W | w(C) \subset \pi_i(A)\},$$

où π_i est le pliage amenant C_i sur C et montrer que les hypothèses de la prop. 6 sont vérifiées : pour démontrer la condition (C′), on remarquera que si $w \in P_{s_i}$ et $ws_j \notin P_{s_i}$, on a

$$w(C) \cap ws_j(C) \subset \pi_i(A) \cap s_i\pi_i(A).$$

Comme $w(C)$ et $ws_j(C)$ sont mitoyennes, on en déduira que $s_i = ws_jw^{-1}$ (exerc. 18 *b*)).

c) Soit F une facette de la chambre C. Montrer que le stabilisateur W_F de F dans W est engendré par les $s_i \in S$ tels que $F \subset C \cap C_i$ (soit $w \in W_F$, avec $l_S(w) > 1$ et soit $i \in I$ tel que $w = s_iw'$ avec $l(w') = l(w) - 1$; d'après la prop. 6, on a $w' \in P_{s_i}$, d'où $w(C) \subset s_i\pi_i(A)$, $F \subset \pi_i(A) \cap s_i\pi_i(A)$ et $s_i \in W_F$). En particulier, on a $w(C) = C$ si et seulement si $w = 1$.

d) Montrer que l'application $a \longmapsto W_{\{a\}}$ est un isomorphisme de l'appartement A sur l'appartement associé à (W, S) (exerc. 16), compatible avec l'action de W.

20) Soient A un immeuble et S un ensemble. On dit que A est *numéroté* par S si l'on s'est donné une application f de A dans S telle que, pour toute chambre C de A, la restriction de f à C soit une *bijection* de C sur S. Si F est une facette de A, on dit alors que $f(F)$ est le *type* de F. Soit A un immeuble numéroté. Un endomorphisme φ de A est dit *permis* si a et $\varphi(a)$ sont de même type pour tout $a \in A$.

a) Soit φ un endomorphisme de A. Montrer que s'il existe une chambre C de A telle que a et $\varphi(a)$ soient de même type pour tout $a \in C$, alors φ est permis. Montrer que si A est un appartement et π un pliage de A (exerc. 18), alors π est un endomorphisme permis.

b) Une partie D de A est dite *convexe* si, pour tout $a \in A - D$, il existe un endomorphisme permis φ de A tel que $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in D$ et $\varphi(a) \neq a$. Montrer que toute intersection de parties convexes est convexe et que, pour toute partie D de A, il existe une plus petite partie convexe contenant D : on l'appelle l'*enveloppe convexe* de D et on la note $\Gamma(D)$.

21) Soient (W, S) un système de Coxeter et A l'appartement associé (cf. exerc. 16, dont nous reprenons les notations).

a) Montrer qu'il existe un numérotage et un seul (dit canonique) de A pour lequel le type d'une facette F est celui défini à l'exerc. 16 *c*). On considérera toujours A comme muni de ce numérotage.

b) Montrer que les automorphismes permis de A sont les opérations de W.

c) Soit D une partie de A contenant au moins une chambre. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) D est l'intersection des moitiés de A (exerc. 16 *g*)) qui contiennent D;

(ii) D est convexe;

(iii) quelles que soient les facettes F_1 et F_2 contenues dans D, l'enveloppe convexe de $F_1 \cup F_2$ est contenue dans D;

(iv) quelles que soient la chambre C_1 et la facette F contenues dans D et quelle que soit la galerie $(C_1, \ldots, C_n)$ telle que $F \subset C_n$, de plus petite longueur possible, on a $C_i \subset D$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

(Pour montrer que (iii) $\Longrightarrow$ (iv), utiliser l'exerc. 15 *b*). Pour montrer que (iv) $\Longrightarrow$ (i), on raisonnera par l'absurde. Soit D' l'intersection des moitiés de A contenant D; soient $a \in D' - D$, C_0 une chambre contenue dans D et $(C_0, C_1, \ldots, C_n)$ une galerie de plus petite longueur possible telle que $a \in C_n$. On a alors $C_j \subset D'$ pour tout j. Montrer qu'il existe un entier j avec $0 \leqslant j < n$ tel que $C_j \subset D$ et $C_{j+1} \not\subset D$. Soit M (resp. M') la moitié de A déterminée par le mur support de la cloison $C_j \cap C_{j+1}$ et contenant C_j (resp. C_{j+1}). Montrer que $D \not\subset M$. Soient $b \in D \cap (A - M)$ et $\Gamma = (C_j, C'_1, \ldots, C'_p)$ une galerie de plus petite longueur possible telle que $b \in C'_p$. On a $C'_k \subset D$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$ et $C'_p \subset M'$. Soit π le pliage de A d'image M' (exerc. 18 *c*)) : on a $\pi(C_j) = C_{j+1}$ et la galerie $\pi(\Gamma)$ n'est pas injective (exerc. 18 *a*)). Si $\Gamma' = (C_{j+1}, C''_2, \ldots, C''_{p-2}, C'_p)$ est la galerie obtenue à partir de $\pi(\Gamma)$ par suppression de l'une de deux chambres consécutives égales, la galerie $(C_j, C_{j+1}, C''_2, \ldots, C''_{p-2}, C'_p)$ est minimale d'après la définition de Γ. On déduit alors de (iv) que $C_{j+1} \subset D$. Contradiction.)

22) On garde les notations des exerc. 16 et 21.

a) Soient $t \in T$ et $w \in W$. Montrer que les chambres C et $w(C)$ sont séparées par le mur L_t si et seulement si $l(tw) < l(w)$ (utiliser le pliage sur la moitié $A^+(t)$).

b) Soit $w_0 \in W$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\qquad l(ww_0) = l(w_0) - l(w) \qquad$ pour tout $w \in W$;

(ii) $\qquad l(tw_0) < l(w_0) \qquad$ pour tout $t \in T$;

(iii) quel que soit $t \in T$, les chambres C et $w_0(C)$ sont séparées par le mur L_t. (Utiliser l'exerc. 16 *h*) pour montrer que (iii) $\Longrightarrow$ (i).)

Montrer qu'un tel élément w_0 est unique et existe si et seulement si W est *fini*. C'est alors l'élément de plus grande longueur de W et il est caractérisé par :

(iv) $\qquad l(sw_0) < l(w_0) \qquad$ pour tout $s \in S$.

De plus, on a $w_0^2 = 1$, $w_0 S w_0 = S$ et $l(w_0) = \mathrm{Card}\,(T)$.

c) On suppose W fini. Montrer que, pour toute chambre C_0, il existe une chambre $-C_0$ et une seule telle que $C_0 \cup (-C_0)$ ne soit contenue dans aucune moitié de A. Montrer qu'il existe un automorphisme involutif (non nécessairement permis) φ et un seul de A tel que $\varphi(C_0) = -C_0$ pour toute chambre C_0 et que $\varphi(L) = L$ pour tout mur L de A. On posera $\varphi(a) = -a$ pour $a \in A$. Si F est une facette, la facette $-F = \varphi(F)$ sera dite *opposée* à F.

d) Soit C_0 une chambre de A et soit F une cloison de C_0. Montrer que l'enveloppe convexe de $C_0 \cup (-F)$ est la moitié de A déterminée par le mur L de support F, et contenant C_0.

23) Reprenons les notations de l'exerc. 16. Soit Aut(A) le groupe des automorphismes de l'appartement A. Montrer que si $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$, alors φ permute les murs de A, et que $\varphi t \varphi^{-1} \in T$ pour tout $t \in T$ (utiliser l'exerc. 18). En déduire que W (identifié à un sous-groupe de Aut(A)) est distingué et que Aut(A) est produit semi-direct du sous-groupe E des automorphismes conservant la chambre C par W. Montrer que la loi d'opération de A dans W définit un isomorphisme de E sur le groupe des automorphismes du système de Coxeter (W, S), ou encore du graphe de Coxeter de (W, S) (cf. aussi exerc. 19.)

24) On appelle *immeuble structuré* un immeuble I muni d'un ensemble $\mathfrak{A}$ de sous-immeubles satisfaisant aux conditions suivantes :

(IS 1) Les sous-immeubles $A \in \mathfrak{A}$ sont des appartements.

(IS 2) Deux chambres de I sont contenues dans au moins un même élément de $\mathfrak{A}$.

(IS 3) Quels que soient $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ tels que $A_1 \cap A_2$ contienne une chambre, il existe un isomorphisme de A_1 sur A_2 laissant fixes les points de $A_1 \cap A_2$.

Soit $(I, \mathfrak{A})$ un immeuble structuré. Les éléments de $\mathfrak{A}$ sont appelés les appartements de $(I, \mathfrak{A})$, ou plus simplement de I.

a) Montrer que les appartements de I sont deux à deux isomorphes. Soient C une chambre de I et A un appartement de I contenant C. Montrer qu'il existe un endomorphisme ρ et un seul de l'immeuble I (appelé la *rétraction de centre* C de I sur A) tel que $\rho(a) = a$ pour tout $a \in A$ et que, pour tout appartement A′ contenant C, la restriction de ρ à A′ soit un isomorphisme de A′ sur A (en utilisant (IS 2) et l'exerc. 15 *b*), on remarquera que, pour tout appartement A′ contenant C, il existe un unique isomorphisme $\rho_{A'}$ de A′ laissant fixes tous les points de C). Montrer que $\rho^2 = \rho$ et que $\rho^{-1}(C) = C$.

b) Soient A un appartement de I, C_0 une chambre et F une facette contenues dans A. Soit $(C_0, C_1, \ldots, C_n)$ une galerie de plus petite longueur possible telle que $F \subset C_n$. Montrer que $C_i \subset A$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ (on raisonnera par l'absurde : si $C_i \subset A$ et $C_{i+1} \not\subset A$, considérer la rétraction de I sur A ayant pour centre la chambre de A distincte de C_i et contenant $C_i \cap C_{i+1}$).

c) Soient A un appartement de I, C une chambre de A, F une cloison de C, C′ une chambre de I et $\Gamma = (C_0, \ldots, C_n = C')$ une galerie telle que $F \subset C_0$, de plus petite longueur possible. Montrer que la rétraction ρ de I sur A de centre C transforme Γ en une galerie

$$(C'_0, \ldots, C'_n = \rho(C'))$$

telle que $F \subset C'_0$, de plus petite longueur possible (considérer un appartement A′ contenant C′ et F, appliquer *b*) et le fait que la restriction de ρ à A′ est un isomorphisme).

d) Soient A un appartement, C_1 et C_2 deux chambres mitoyennes distinctes contenues dans A, C′ une chambre contenant $C_1 \cap C_2$ et distincte de C_1 et C_2, A'_i un appartement contenant C_i et C′ (pour $i = 1,2$). Soit φ_i (resp. ψ_i) la rétraction de I sur A (resp. A'_i) de centre C_i (resp. C′) et soit ρ_i la restriction de $\varphi_i \circ \psi_i$ à A. Soit C une chambre de A; montrer que si

$$d(C, C_1) \leqslant d(C, C_2),$$

on a $\rho_1(a) = a$ pour tout $a \in C$ et $d(C, C_1) < d(C, C_2)$ (considérer une galerie minimale Γ d'extrémités C et C_1 et appliquer *c*) pour montrer que $\rho_1(\Gamma)$ est minimale; utiliser alors l'exerc. 15 *b*)). Montrer que, si $d(C, C_2) < d(C, C_1)$, on a $\rho_1(C) \neq C$ et $\rho_1^2(C) = \rho_1(C)$ (prendre une galerie minimale Γ d'extrémités C et C_2 et utiliser *c*) pour montrer que $\rho_1(\Gamma)$ est une galerie ayant une extrémité égale à $\rho_1(C)$ et l'autre contenant $C_1 \cap C_2$, de plus petite longueur possible; en déduire que $d(C_1, \rho_1(C_1)) \leqslant d(C_2, \rho_1(C_1))$).

Montrer que ρ_i est un *pliage* (exerc. 19) de A (montrer que $A = \rho_1(A) \cup \rho_2(A)$ et définir un automorphisme involutif σ de A en posant $\sigma(A) = \rho_2(a)$ si $a \in \rho_1(A)$ et $\sigma(a) = \rho_1(a)$ si $a \in \rho_2(A)$; montrer que si C est une chambre contenue dans $\rho_1(A)$, on a $\rho_1^{-1}(C) = \{C, \rho_2(C)\}$).

e) Soit I un immeuble structuré *spacieux*, c'est-à-dire tel que toute cloison soit contenue dans au moins trois chambres. Montrer qu'il existe un système de Coxeter (W, S) et un seul à isomorphisme près tel que les appartements de I soient isomorphes à l'appartement A_0 associé à (W, S) (utiliser *d*) et l'exerc. 19). Soient A un appartement de I et φ un isomorphisme de A_0 sur A. Montrer qu'il existe un numérotage de I et un seul, à valeurs dans S, tel que les types de a et $\varphi(a)$ soient égaux pour tout $a \in A_0$ (choisir une chambre C de A et montrer, en utilisant *b*), que, si A′ et A″ sont deux appartements de I contenant C, les numérotages de A′ et A″ prolongeant celui déterminé sur C coïncident sur $A' \cap A''$).

On dira que le système de Coxeter (W, S) et le numérotage ainsi obtenus sont *adaptés* à I.

Montrer que les rétractions introduites en *a*) sont des endomorphismes permis. Montrer qu'une partie de I contenue dans un appartement A de I est convexe dans I si et seulement si elle convexe dans A (exerc. 20).

f) Gardons les notations de *e*) et soit $\mathfrak{J}$ l'ensemble des isomorphismes permis de A_0 sur les divers appartements de I. Montrer que si $\varphi, \psi \in \mathfrak{J}$ et si C est une chambre et F une facette de I contenues dans $\varphi(A_0) \cap \psi(A_0)$, il existe un élément $w \in W$ tel que $\psi^{-1}(C) = w\varphi^{-1}(C)$ et $\psi^{-1}(F) = w\varphi^{-1}(F)$ (considérer un isomorphisme λ de $\varphi(A_0)$ sur $\psi(A_0)$ laissant fixes les points de $\varphi(A_0) \cap \psi(A_0)$ et appliquer l'exerc. 21 *b*) à l'automorphisme $\psi^{-1} \circ \lambda \circ \varphi^{-1}$ de A_0).

25) Soit I un ensemble et soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties finies de I. Pour tout $A \in \mathfrak{F}$, on pose $\varepsilon(A) = (-1)^{\mathrm{Card}(A)}$. Soit G un groupe commutatif, noté additivement, et soient φ et ψ deux

applications de $\mathfrak{F}$ dans G. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $$\varphi(A) = \sum_{B \subset A} \psi(B) \qquad \text{pour tout} \quad A \in \mathfrak{F};$$

(ii) $$\psi(A) = \sum_{B \subset A} \varepsilon(A - B)\varphi(B) \qquad \text{pour tout} \quad A \in \mathfrak{F}.$$

26) Soit (W, S) un système de Coxeter, avec S fini. Pour toute partie H de W, on désigne par $H(t)$ la série formelle à coefficients entiers définie par :

$$H(t) = \sum_{w \in H} t^{l(w)}.$$

a) On suppose que $\text{Card}(S) = 2$. Montrer que

$$\begin{aligned} W(t) &= (1 + t - t^m - t^{m+1})/(1 - t) \quad &\text{si W est d'ordre fini } 2m \\ W(t) &= (1 + t)/(1 - t) &\text{si W est infini.} \end{aligned}$$

b) On suppose que W est *fini*. Soit w_0 l'élément de plus grande longueur de W (exerc. 22) et soit $m = l(w_0)$. Montrer que l'on a :

$$W(t) = t^m W(t^{-1})$$

(utiliser l'exerc. 22).

c) Soit X une partie de S. On note A_X l'ensemble des éléments $(X, \varnothing)$-réduits de W (exerc. 3) et W_X le sous-groupe de W engendré par X. On sait (exerc. 3) qu'un élément $w \in W$ appartient à A_X si et seulement si $l(xw) = l(w) + 1$ pour tout $x \in X$, que tout élément $w \in W$ s'écrit de façon unique sous la forme $w = uv$ avec $u \in W_X$ et $v \in A_X$, et que l'on a alors $l(w) = l(u) + l(v)$. En déduire la formule :

$$W(t) = W_X(t) \,.\, A_X(t).$$

d) On conserve les notations précédentes, et on note B_X l'ensemble des $w \in A_X$ tels que $l(sw) = l(w) - 1$ pour tout $s \in S - X$. Montrer que l'on a :

$$A_X(t) = \sum_{X \subset Y \subset S} B_Y(t).$$

En déduire que :

$$B_X(t) = \sum_{X \subset Y \subset S} \varepsilon(Y - X) A_Y(t) \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon(Z) = (-1)^{\text{Card}(Z)}$$

(utiliser l'exerc. 25).

e) On suppose W *fini* et l'on définit m et w_0 comme dans *b*). Montrer que $B_\varnothing = \{w_0\}$ et que :

$$t^m = \sum_{Y \subset S} \varepsilon(Y) \frac{W(t)}{W_Y(t)}$$

(utiliser *c*) et *d*)).

f) On suppose W *infini*. Montrer que $B_\varnothing = \varnothing$ et que l'on a :

$$0 = \sum_{Y \subset S} \frac{\varepsilon(Y)}{W_Y(t)}.$$

g) Montrer que la série formelle $W(t)$ est une fonction rationnelle de t (utiliser *f*) et raisonner par récurrence sur Card (S)). Montrer que cette fonction rationnelle ne s'annule que pour des valeurs de t qui sont des racines de l'unité; montrer que $1/W(\infty)$ est un entier. Montrer que l'on a $\dfrac{1}{W(t^{-1})} \in \mathbf{Z}[[t]]$.

§ 2

1) Soient G un groupe, B et N deux sous-groupes de G et S une partie de $W = N/(B \cap N)$; pour tout $w \in W$, on pose $C(w) = BwB$. On suppose que les conditions (T1) et (T2) de la définition 1 du nº 1 sont vérifiées, que, quels que soient $s \in S$ et $w \in W$, l'une au moins des deux relations $C(s).C(w) = C(sw)$ et $C(s).C(sw) = C(w)$ est vérifiée et que $B \cup C(s)$ est un sous-groupe de G pour tout $s \in S$. Montrer que la condition (T3) est vérifiée. Si de plus B est d'indice $\geqslant 3$ dans $B \cup C(s)$, alors (G, B, N, S) est un système de Tits.

2) Soient G un groupe, B et N deux sous-groupes de G et S une partie de $W = N/(B \cap N)$. Soit Z un sous-groupe distingué de G contenu dans B. Soient B′ et N′ les images canoniques de B et N dans $G' = G/Z$. Montrer que l'application canonique de N sur N′ définit un isomorphisme de W sur $W' = N'/(B' \cap N')$. Soit S′ l'image de S par cet isomorphisme. Montrer que (G′, B′, N′, S′) est un système de Tits si et seulement si (G, B, N, S) en est un.

3) Soient G un groupe, B un sous-groupe de G et $(C(w))_{w \in W}$ la famille des doubles classes de G suivant B. On dit que B est un *sous-groupe de Tits* de G s'il existe un sous-ensemble S de W tel que les conditions suivantes soient vérifiées :

(1) la réunion des $C(s)$ pour $s \in S$ engendre G;

(2) pour tout $s \in S$, l'ensemble $B \cup C(s)$ est un sous-groupe de G et B est d'indice $\geqslant 3$ dans $B \cup C(s)$;

(3) pour tout $s \in S$ et tout $w \in W$, il existe un élément $w' \in W$ tel que $C(s).C(w) \subset C(w) \cup C(w')$.

On suppose désormais que B est un sous-groupe de Tits de G et on se donne une partie S de W satisfaisant aux conditions (1), (2) et (3).

a) Montrer que $C(s)^{-1} = C(s)$ et que $C(s).C(s) = B \cup C(s)$ pour tout $s \in S$. Montrer que, pour tout $s \in S$ et tout $w \in W$, il existe un élément $w'' \in W$ tel que $C(w).C(s) \subset C(w) \cup C(w'')$.

b) Pour $w \in W$, on appelle *longueur* de w et on note $l(w)$ la borne inférieure des entiers $n \geqslant 0$ tels qu'il existe $s_1, \ldots, s_n \in S$ avec $C(w) \subset C(s_1) \ldots C(s_n)$. Montrer que $l(w)$ est fini pour tout $w \in W$.

Soient $u, v \in W$ avec $l(u) < l(v)$ et soit $s \in S$; montrer que si $C(v) \subset C(u).C(s)$ (resp. $C(v) \subset C(s).C(u)$), alors on a $C(v) = C(u).C(s)$ (resp. $C(v) = C(s).C(u)$) (on raisonnera par récurrence sur la longueur de u. Si $C(v) \neq C(u).C(s)$, on a $C(u).C(s) = C(u) \cup C(v)$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on montrera qu'il existe $t \in S$ et $w \in W$ tels que

$$C(u) = C(t).C(w) \qquad \text{avec} \qquad l(w) = l(u) - 1.$$

Des relations $C(v) \subset C(u).C(s) = C(t).C(w).C(s)$ et $C(t).C(w) = C(u) \neq C(v)$, on déduira l'existence d'un élément $w' \neq w$ tel que $C(w') \subset C(w).C(s)$ et $C(v) \subset C(t).C(w')$, d'où $l(w') \geqslant l(v) - 1 > l(u) - 1 = l(w)$. L'hypothèse de récurrence entraîne alors

$$C(w') = C(w).C(s).$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} C(t).C(u).C(s) &= C(t).C(t).C(w).C(s) = C(t).C(w).C(s) \cup C(w).C(s) \\ &= C(u).C(s) \cup C(w') = C(u) \cup C(v) \cup C(w') \end{aligned}$$

et aussi

$$C(t).C(u).C(s) = C(t).(C(u) \cup C(v)) \supset C(t).C(t).C(w) \supset C(w)$$

d'où une contradiction puisque $w \neq u, v, w'$.)

c) Montrer que pour tout $w \in W$ et tout $s \in S$, il existe un élément et un seul noté $s.w$ (resp. $w * s$) distinct de w tel que

$$C(s.w) \subset C(s).C(w) \subset C(w) \cup C(s.w)$$
$$(\text{resp. } C(w * s) \subset C(w).C(s) \subset C(w) \cup C(w * s)).$$

(On montrera par récurrence sur $l(w)$ que $C(s).C(w) \neq C(w)$. Pour cela, on écrira

$$C(w) = C(u).C(t)$$

avec $t \in S$, $u \in W$ et $l(w) = l(u) + 1$. Si $C(s).C(w) = C(w)$, on a

$$C(s).C(u).C(t) = C(u).C(t)$$

et en multipliant à droite par $C(t)$, on en tire $C(u) \cup C(w) = C(s).C(u) \cup C(w)$. Comme $C(u) \neq C(s).C(u)$ par l'hypothèse de récurrence, on a, d'après *b*),

$$C(s).C(u) = C(w),$$

d'où

$$C(u) \subset C(s).C(s).C(u) = C(s).C(w) = C(w)$$

ce qui est absurde).

d) Soit $s \in S$. Montrer que l'application $p_s : w \longmapsto s.w$ (resp. $q_s : w \longmapsto w * s$) est une permutation de W et que $p_s^2 = \mathrm{Id}$ (resp. $q_s^2 = \mathrm{Id}$). Montrer que, pour $s, t \in S$, on a $p_s \circ q_t = q_t \circ p_s$ (on étudiera le produit $C(s).C(w).C(t)$ pour $w \in W$ et on montrera que $(s.w) * t \in \{w, s.w, w * t, s.(w * t)\}$; on montrera que $(s.w) * t \notin \{s.w, w * t\}$ et que si $(s.w) * t = w$, on a $s.w = w * t$ et $w = s.(w * t)$).

e) Montrer que le groupe de permutations P (resp. Q) engendré par les p_s (resp. q_s) pour $s \in S$, opère de manière simplement transitive sur W (pour montrer que P est transitif, on utilisera (2) et on raisonnera comme au lemme 1 du nº 1; pour montrer que P est simplement transitif, on utilisera *d*)). En déduire qu'il existe sur W une structure de groupe et une seule telle que l'application $p \longmapsto p(e)$ (où e désigne l'élément de W tel que $B = C(e)$) soit un isomorphisme de P sur W. L'application $q \longmapsto q(e)$ est alors aussi un isomorphisme; on a $s.w = w * s = sw$ pour tout $s \in S$ et tout $w \in W$ et $C(w)^{-1} = C(w^{-1})$.

f) Montrer que le couple (W, S) est un système de Coxeter et généraliser les résultats du nº 4.

g) Soient X une partie de S et W_X le sous-groupe de W engendré par X. Montrer que l'ensemble G_X réunion des $C(w)$ pour $w \in W_X$ est un sous-groupe de G et que le th. 3 du nº 5 est encore vrai. Montrer que B est un sous-groupe de Tits de G_X. Généraliser les prop. 2 et 3 du nº 5, la déf. 2, la prop. 4 et le th. 4 du nº 6. Montrer que S est l'ensemble des $w \in W$ tels que $B \cup C(w)$ soit un sous-groupe de G distinct de B. Le système de Coxeter (W, S) et le groupe W (qu'on appelle *groupe de Weyl* de (G, B)) ne dépendent donc que de (G, B).

h) Soit N un sous-groupe de G tel que $B \cap N$ soit distingué dans N et que toute double classe $C(w)$ suivant B rencontre N suivant une classe modulo $B \cap N$. Montrer que le groupe $N/(B \cap N)$ s'identifie à W et que (G, N, B, S) est un système de Tits.

4) Soient (G, B, N, S) et (G′, B′, N′, S′) deux systèmes de Tits avec $G = G'$ et $B = B'$, de groupes de Weyl W et W′. Soit j la bijection de W sur W′ définie par la relation

$$BwB = Bj(w)B.$$

Montrer que j est un isomorphisme du groupe W sur le groupe W′ et que $j(S) = S'$.

5) Soit $\Sigma = (G, B, N, S)$ un système de Tits. Posons $T = B \cap N$ et soit $\hat{N}$ le normalisateur de N.

a) Soit $b \in B \cap \hat{N}$. Montrer que $bnb^{-1}n^{-1} \in B \cap N$ pour tout $n \in N$ (poser $bn = n'b$ et utiliser le th. 1) et que b appartient à l'intersection $\tilde{T}$ des conjugués nBn^{-1} pour $n \in N$. Montrer que $\tilde{T} \cap N = T$.

On dit que Σ est *saturé* si l'on a $\tilde{T} = T$.

b) Posons $\tilde{N} = N.\tilde{T}$. Montrer que $\tilde{N}$ est un sous-groupe de G, contenant $\tilde{T}$ comme sous-groupe distingué, et que $\tilde{N} \cap B = \tilde{T}$. Montrer que l'injection de N dans $\tilde{N}$ définit un isomorphisme j du groupe de Weyl W de Σ sur $\tilde{N}/\tilde{T}$.

c) Montrer que $(G, B, \tilde{N}, j(S))$ est un système de Tits saturé, dit *associé* à Σ.

6) Reprenons les notations du nº 2 et soit N_0 le sous-groupe de N formé des matrices dont tous les éléments sont égaux à 0 ou 1. Montrer que $B \cap N_0 = T \cap N_0 = \{1\}$ et que l'applica-

tion canonique j de N_0 dans $W = N/T$ est un isomorphisme. Posons $S_0 = j^{-1}(S)$. Montrer que (G, B, N_0, S_0) est un système de Tits et que (G, B, N, S) est le système de Tits saturé associé.

7) Soit G un groupe opérant sur un ensemble E. On dit que G est *doublement transitif* sur E si, quels que soient les points $x, y, x', y' \in E$ avec $x \neq y$ et $x' \neq y'$, il existe un élément $g \in G$ tel que $g.x = x'$ et $g.y = y'$.

a) Soit (G, B, N, S) un système de Tits dont le groupe de Weyl est d'ordre 2. Montrer que G est doublement transitif sur G/B.

b) Soit G un groupe doublement transitif sur un ensemble E. On suppose $\operatorname{Card} E \geqslant 3$. Soient $e \in E$ et B le stabilisateur de e. Soit $x \in E$, avec $x \neq e$, et soit $n \in G$ tel que $n(e) = x$ et $n(x) = e$. Soit N le sous-groupe de G engendré par n. Soit s l'image canonique de n dans N/T. Montrer que $(G, B, N, \{s\})$ est un système de Tits dont le groupe de Weyl est d'ordre 2.

8) Soit (G, B, N, S) un système de Tits; on pose $T = B \cap N$ et $W = N/T$. Soit $\tilde{G}$ un groupe contenant G comme sous-groupe distingué. On suppose que pour tout $h \in \tilde{G}$, il existe $g \in G$ tel que $hBh^{-1} = gBg^{-1}$ et $hNh^{-1} = gNg^{-1}$. Soit $\hat{B}$ (resp. $\hat{N}$) le normalisateur de B (resp. N) dans $\tilde{G}$; on pose $\Gamma = \hat{B} \cap \hat{N}$, $\tilde{N} = \Gamma.N$ et $\tilde{T} = \tilde{N} \cap B$.

a) Montrer que $\tilde{G} = \Gamma.G$, $\hat{B} = \Gamma.B$, $\Gamma \cap B = \Gamma \cap G$ et $\tilde{T} = (\Gamma \cap B).T$. Les groupes $\Omega = \Gamma/(\Gamma \cap B)$, $\tilde{G}/G$ et $\hat{B}/B$ sont donc canoniquement isomorphes. Si $\Phi \subset \Omega$ et si H est un sous-groupe de G contenant $\Gamma \cap B$, on notera ΦH la réunion des ensembles φH pour $\varphi \in \Phi$.

b) Montrer que $\tilde{T}$ est distingué dans $\tilde{N}$ (pour montrer que $n\gamma n^{-1} \in \tilde{T}$ pour $n \in \tilde{N}$ et $\gamma \in \Gamma \cap B$, utiliser l'exerc. 5 *a*)), que $N \cap \tilde{T} = T$ et que $\Gamma \cap \tilde{T} = \Gamma \cap B$. L'injection de N (resp. Γ) dans $\tilde{N}$ permet donc d'identifier W (resp. Ω) à un sous-groupe de $\tilde{W} = \tilde{N}/\tilde{T}$. Montrer que Ω normalise S et que $\tilde{W}$ est produit semi-direct de Ω et de W.

c) Montrer que, pour tout $s \in S$ et tout $u \in \tilde{W}$, on a :

$$BsBuB \subset (BuB) \cup (BsuB).$$

d) Montrer que l'application $u \longmapsto BuB$ est une bijection de $\tilde{W}$ sur $B\backslash\tilde{G}/B$ (utiliser le th. 1 et le fait que Γ normalise B).

e) Soit $\mathfrak{P}$ l'ensemble des couples (Φ, X), où Φ est un sous-groupe de Ω et X une partie de S normalisée par Φ. On pose $G_{(\Phi, X)} = \Phi G_X = B\Phi W_X B$ (avec les notations du n° 5). Montrer que l'application $(\Phi, X) \longmapsto G_{(\Phi, X)}$ est une bijection de $\mathfrak{P}$ sur l'ensemble des sous-groupes de $\tilde{G}$ contenant B. Généraliser les assertions *b*) et *c*) du th. 3 et la prop. 2 du n° 5.

Montrer que le normalisateur de $G_{(\Phi, X)}$ dans $\tilde{G}$ est le sous-groupe $G_{(\Phi', X)}$, où Φ' est l'ensemble des éléments de Ω normalisant à la fois Φ et X.

f) Montrer que $G_{(\Phi, X)}$ est un sous-groupe maximal de $\tilde{G}$ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

(i) $X = S$ et Φ est un sous-groupe maximal de Ω;

(ii) $\Phi = \Omega$ et Φ opère transitivement sur $S - X$ (qui est non vide).

Montrer que $G_{(\Phi, X)}$ est un sous-groupe maximal dans l'ensemble des sous-groupes de $\tilde{G}$ ne contenant pas G si et seulement si l'on a :

(iii) $X \neq S$, Φ est le normalisateur de X dans Ω et opère transitivement sur $S - X$.

g) Soit Φ un sous-groupe distingué de Ω et posons $G' = \Phi G$, $B' = \Phi B$, $N' = \Phi N$ et $T' = B' \cap N'$. Montrer que $T' = \Phi\tilde{T}$ et que T' est distingué dans N' si et seulement si tout élément de Φ commute avec tout élément de W. Montrer que G' est alors distingué dans $\tilde{G}$, que l'injection de N dans N' définit un isomorphisme j de W sur $W' = N'/T'$ et que (G', B', N', S') (avec $S' = j(S)$) est un système de Tits.

9) Soient (G, B, N, S) un système de Tits et X, Y, Z trois parties de S. Montrer que

$$G_X \cap (G_Y . G_Z) = (G_X \cap G_Y) . (G_X \cap G_Z)$$

(utiliser l'exerc. 1 du § 1 et la prop. 2 du n° 5).

10) Soient G un groupe et B un sous-groupe de Tits de G. Reprenons les notations de l'exerc. 3. Pour $s \in S$, désignons par $G^{(s)}$ le sous-groupe $G_{S-\{s\}}$ (exerc. 3 *g*)). Soient I l'ensemble des parties de G de la forme $gG^{(s)}$ (pour $g \in G$ et $s \in S$), $\mathfrak{C}$ l'ensemble des parties de I de la forme $C_g = \{gG^{(s)} | s \in S\}$ pour $g \in G$. Les C_g sont appelées les *chambres* de I (§ 1, exerc. 15). On fait opérer G sur I grâce aux translations à gauche.

a) Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des facettes de I (c'est-à-dire des parties des chambres, cf. § 1, exerc. 15). Soit $F \in \mathfrak{F}$. Montrer qu'il existe une partie X de S et une seule et un élément $g \in G$ tels que $gG_X = \bigcap_{a \in F} a$; on dit que F est *de type* X. Montrer que F est alors l'ensemble des $gG^{(s)}$ pour $s \in S - X$ et est de codimension Card X dans toute chambre la contenant. Montrer que l'application $j : F \longmapsto \bigcap_{a \in F} a$ est une bijection strictement décroissante, compatible avec les translations à gauche, de $\mathfrak{F}$ sur l'ensemble des parties de G de la forme gG_X pour $g \in G$ et $X \subset S$. Montrer que toute facette de type X contient une facette de type Y et une seule pour $X \subset Y \subset S$.

b) Montrer que G opère transitivement sur l'ensemble $\mathfrak{C}$ des chambres et que le stabilisateur de la chambre C_g ($g \in G$) est égal à gBg^{-1}; l'application $g \longmapsto C_g$ définit donc une bijection de G/B sur $\mathfrak{C}$.

c) Montrer que deux chambres C_g et $C_{g'}$ ($g, g' \in G$) sont *mitoyennes* (§ 1, exerc. 15) si et seulement si il existe $s \in S$ tel que $g' \in g(B \cup BsB)$.

d) Soient $C_1, \ldots, C_n$ des chambres de I et posons $C_0 = C_e$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $\Gamma = (C_0, C_1, \ldots, C_n)$ est une galerie injective;

(ii) il existe une suite $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ d'éléments de S et une suite $(b_1, \ldots, b_n)$ d'éléments de B telles que $C_j = b_1\bar{s}_1 b_2\bar{s}_2 \ldots b_j\bar{s}_j(C_0)$ (où $\bar{s}_j$ désigne un élément donné de la double classe Bs_jB) pour $1 \leqslant j \leqslant n$.

Montrer que, si ces conditions sont satisfaites, la suite $\boldsymbol{s}$ est unique : on l'appelle le *type* de Γ et on la note $\boldsymbol{s}(\Gamma)$. Montrer qu'une galerie injective est minimale si et seulement si son type est une décomposition réduite. Montrer que les conditions suivantes sont vérifiées :

(WI 1) *Quelles que soient les chambres* C *et* C′ *de* I, *il existe un élément* $t(C, C')$ *et un seul de* W *tel que l'ensemble des types des galeries minimales d'extrémités* C *et* C′ *soit l'ensemble des décompositions réduites de* $t(C, C')$.

(WI 2) *Pour toute chambre* C, *l'application* $t(C, C')$ *de l'ensemble des chambres de* I *dans* W *est surjective.*

e) Montrer que deux galeries minimales de même type et de mêmes extrémités sont identiques. (On se ramènera à prouver que, si $(s_1, \ldots, s_n)$ est une décomposition réduite et si $b_1, \ldots, b_n, b'_1, \ldots, b'_n$ sont des éléments de B tels que $b_1\bar{s}_1 \ldots b_n\bar{s}_n \in b'_1\bar{s}_1 \ldots b'_n\bar{s}_nB$, alors $b_1\bar{s}_1 \in b'_1\bar{s}_1B$. Pour cela, on remarquera que si l'on avait $\bar{s}_1^{-1}b_1^{-1}b'_1\bar{s}_1 \notin B$, cet élément appartiendrait à Bs_1B et on aurait $b_2\bar{s}_2 \ldots b_n\bar{s}_n \in b\bar{s}_1 b' b'_2\bar{s}_2 \ldots b'_n\bar{s}_nB$ avec $b, b' \in B$, ce qui contredirait le cor. 1 du th. 2 du n° 4.)

f) Montrer que I muni de $\mathfrak{C}$ est un *immeuble*, dit *associé* au couple (G, B). Montrer qu'il existe un *numérotage* (§ 1, exerc. 20) de I et un seul pour lequel le type d'une facette est celui défini en *a*).

g) Montrer que I est *spacieux*, c'est-à-dire que toute cloison de I est contenue dans au moins trois chambres (cf. § 1, exerc. 24). Montrer que la condition suivante est satisfaite :

(G) *Quelles que soient la cloison* F, *la chambre* C_0, *la galerie* $\Gamma = (C_0, \ldots, C_n)$ *telle que* $F \subset C_n$ *et de plus petite longueur possible, et les chambres* C′ *et* C″ *contenant* F *et distinctes de* C_n, *il existe un élément* $g \in G$ *tel que* $g(C_i) = C_i$ *pour* $0 \leqslant i \leqslant n$ *et* $g(C') = C''$.

(On se ramènera au cas $C_0 = C$; soit $u \in S$ tel que F soit de type $S - \{u\}$ et soit $\boldsymbol{s}$ le type de Γ. Montrer que $(\boldsymbol{s}, u)$ est une décomposition réduite. Prendre $h \in G$ tel que $C_n = h(C)$; il existe b' et $b'' \in B$ tels que $C' = hb'u(C)$ et $C'' = hb''u(C)$. Utiliser alors le cor. 1 du th. 2 du n° 4 généralisé au cas d'un sous-groupe de Tits (cf. exerc. 3 *f*)) pour montrer qu'il existe $b \in B$ tel que $bhb'uB = hb''uB$; on a alors $b \in hBuBu^{-1}Bh^{-1} \subset (hBh^{-1}) \cup (hBuBh^{-1})$. Si $b \in hBuBh^{-1}$, on aurait $BhB \subset BhBuB = BhuB$ (*loc. cit.*) ce qui est impossible. Par suite $b(C_n) = C_n$, et *e*) entraîne $b(C_i) = C_i$ pour tout i.)

11) Soient (W, S) un système de Coxeter, et I un immeuble numéroté par S (§ 1, exerc. 20). Si $\Gamma = (C_0, \ldots, C_n)$ est une galerie injective, on appelle *type* de Γ et on note $\boldsymbol{s}(\Gamma)$ la suite $(s_1, \ldots, s_n)$ d'éléments de S telle que la cloison $C_{i-1} \cap C_i$ soit de type $S - \{s_i\}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$). On dit que I est un (W, S)-*immeuble* si les conditions (WI 1) et (WI 2) de l'exerc. 10 sont satisfaites.

Soit I un (W, S)-immeuble spacieux (cf. exerc. 10 *g*)) et soit G un groupe d'automorphismes permis de I vérifiant la condition suivante :

(G_0) *Quelles que soient les trois chambres distinctes* C, C′ *et* C″ *contenant une même cloison, il existe un élément g de* G *tel que* $g(C) = C$ *et* $g(C') = C''$.

On choisit une chambre C de I et on note B le stabilisateur de C dans G.

a) Montrer que G opère transitivement sur l'ensemble des chambres de I.

b) Soient C′ et C″ deux chambres. Montrer que $t(C, C') = t(C, C'')$ si et seulement si il existe $b \in B$ tel que $C'' = b(C')$ (si $t(C, C') = t(C, C'') = w$, considérer une décomposition réduite $\boldsymbol{s}$ de w et une galérie minimale Γ' (resp. Γ'') d'extrémités C et C′(resp. C″) et de type $\boldsymbol{s}$. Raisonner par récurrence sur $l(w)$ en utilisant (G_0) et *a*)). En déduire une bijection $w \longmapsto B(w)$ de W sur B\G/B.

c) Soit F la cloison de C de type $S - \{s\}$. Montrer que le stabilisateur de F dans G est égal à $B \cup B(s)$ (si $g(F) = F$, on a $t(C, g(C)) = 1$ ou s). Montrer que $B \subset B(s)B(s)$ (utiliser (G_0)).

d) Montrer que B est un sous-groupe de Tits de G et que le système de Coxeter de (G, B) est canoniquement isomorphe à (W, S). (Soient $w \in W$ et $s \in S$ tels que $l_S(sw) = l_S(w) + 1$. Soit $g \in B(w)$ et $u \in B(s)$; soient $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ une décomposition réduite de w, $(C = C_0, C_1, \ldots, C_n = g(C))$ une galerie minimale de type $\boldsymbol{s}$ et choisissons un élément $\bar{s}_i \in B(s_i)$; montrer, en utilisant (G_0), qu'il existe des éléments $b_i \in B$ tels que $C_i = b_1\bar{s}_1 \ldots b_i\bar{s}_i(C)$. Poser $C'_i = u(C_{i-1})$ et montrer que la galerie $(C, u(C), u(C_1), \ldots, u(C_n))$ est de type $(s, \boldsymbol{s})$, donc minimale. En déduire que $ug \in B(sw)$ et que $B(s)B(w) = B(sw)$. Si maintenant $l(sw) = l(w) - 1$, poser $w' = sw$: on a $B(s)B(w') = B(w)$, d'où

$$B(s)B(w) = B(s)B(s)B(w') \subset B(w') \cup (B(s)B(w')) = B(sw) \cup B(w);$$

enfin comme $B \subset B(s)B(s)$, on a aussi $B(w') = B(sw) \subset B(s)B(w)$.)

e) Montrer qu'il existe un isomorphisme et un seul de l'immeuble associé à (G, B) (exerc. 10) sur I, compatible avec l'action de G et transformant la chambre canonique C_e en C.

12) Soient (G, B, N, S) un système de Tits, $W = N/(B \cap N)$ son groupe de Weyl, I le (W, S)-immeuble associé à (G, B) (exerc. 10) et $C = C_e$ la chambre canonique de I. Soit A_0 l'appartement associé au système de Coxeter (W, S) (§1, exerc. 16). Pour tout $g \in G$, soit φ_g l'application de A_0 dans I qui au point $wW^{(s)}$ de A_0 ($w \in W$, $s \in S$) fait correspondre le point $gwG^{(s)}$ de I.

Montrer que, pour tout $g \in G$, l'application φ_g est un isomorphisme d'immeubles numérotés de A_0 sur un sous-immeuble de I qui est la réunion des chambres $gn(C_e)$ pour $n \in N$. Montrer que I, muni de l'ensemble $\mathfrak{A}$ des $\varphi_g(A_0)$ pour $g \in G$, est un immeuble structuré (§ 1, exerc. 24) (pour démontrer (IS 2), on remarquera que, si $g', g'' \in G$, il existe $b', b'' \in B$ et $n \in N$ tels que $g'^{-1}g'' = b'nb''$; poser alors $g = g'b'n$ et montrer que $g'(C)$ et $g''(C)$ sont contenues dans $\varphi_g(A_0)$. Pour démontrer (IS 3), on se ramènera au cas de deux appartements $A' = \varphi_e(A_0)$ et $A'' = \varphi_b(A_0)$, avec $b \in B$, et on montrera que l'application $a \longmapsto b(a)$ laisse fixes les points de $A' \cap A''$ en utilisant la prop. 2 du n° 5). Montrer que le système de Coxeter (W, S) et le numérotage de I sont adaptés à $(I, \mathfrak{A})$ (§ 1, exerc. 24 *e*)) et que l'ensemble $\mathfrak{J}$ des isomorphismes permis de A_0 sur les divers éléments de $\mathfrak{A}$ est l'ensemble des φ_g pour $g \in G$.

13) Reprenons les notations de l'exerc. 24 du § 1 : (I, $\mathfrak{A}$) est un immeuble structuré spacieux muni d'un système de Coxeter (W, S) et d'un numérotage adaptés et $\mathfrak{J}$ est l'ensemble des isomorphismes permis de l'appartement A_0 associé à (W, S) sur les divers appartements de (I, $\mathfrak{A}$). Soit de plus G un groupe d'automorphismes permis de I, conservant E : le groupe G opère alors sur $\mathfrak{J}$ et on suppose que G opère *transitivement* sur $\mathfrak{J}$.

On note C une chambre de I, A un appartement de $\mathfrak{A}$ contenant C, φ l'isomorphisme permis de A_0 sur A transformant la chambre canonique C_e de A_0 en C, B le stabilisateur de C dans G et N le stabilisateur de A dans G.

a) Montrer que, si A′ et A″ sont deux appartements appartenant à $\mathfrak{A}$, et contenant une même chambre, il existe $g \in G$ tel que $g(A') = A''$ et que $g(a) = a$ pour tout $a \in A' \cap A''$. Montrer que G est transitif sur l'ensemble des couples (A, C) où $A \in \mathfrak{A}$ et où C est une chambre de A.

b) Montrer que l'application $n \longmapsto \varphi^{-1} \circ n \circ \varphi$ est un homomorphisme surjectif de N sur W, de noyau $B \cap N$. On identifie ainsi $N/(B \cap N)$ et W.

c) Montrer que les conditions (WI 1) et (WI 2) de l'exerc. 10 *d*) sont satisfaites (utiliser le fait suivant : si un appartement de I contient deux chambres C′ et C″, il contient toute galerie minimale d'extrémités C′ et C″ (§ 1, exerc. 24 *b*))).

d) Montrer que la condition (G) de l'exerc. 10 *g*) (et *a fortiori* la condition (G_0) de l'exerc. 11) est satisfaite (avec les notations de (G), considérer un appartement A′ (resp. A″) de I contenant C_0 et C′ (resp. C″); montrer en utilisant l'exerc. 24 *b*) du § 1 que $\Gamma \subset A' \cap A''$ et utiliser *a*)).

e) Montrer que (G, B, N, S) est un système de Tits et que (I, $\mathfrak{A}$) est canoniquement isomorphe à l'immeuble structuré numéroté associé (exerc. 12).

14) Soient (G, B, N, S) un système de Tits, (I, $\mathfrak{A}$) l'immeuble structuré numéroté associé (exerc. 12). Montrer que G, considéré comme groupe d'automorphismes de I, satisfait aux conditions de l'exerc. 13. Posons, avec les notations de l'exerc. 12, $A = \varphi_e(A_0)$ et $C = \varphi_e(C_e)$; montrer que B est le stabilisateur de C dans G. Soit $\tilde{N}$ le stabilisateur de A dans G : montrer que $\tilde{N}/(B \cap \tilde{N})$ s'identifie à W et que (G, B, $\tilde{N}$, S) est le système de Tits *saturé* associé à (G, B, N, S) (exerc. 5).

15) Reprenons les hypothèses et notations de l'exerc. 10. On suppose de plus que le groupe de Weyl W de (G, B) est *fini* et on désigne par w_0 l'élément de plus grande longueur de W (§ 1, exerc. 22). On dit que deux chambres C et C′ sont *opposées* si $t(C, C') = w_0$.

a) Montrer que si C et C′ sont opposées, C′ et C le sont aussi. Montrer que toute chambre C admet une opposée. Montrer que le stabilisateur d'une chambre C dans G est transitif sur l'ensemble des chambres opposées à C.

b) Soient C et C′ deux chambres opposées. Montrer que pour tout $w \in W$, il existe une chambre C_w et une seule possédant la propriété suivante : si $(s_1, \ldots, s_k)$ (resp. $(s'_1, \ldots, s'_h)$) est une décomposition réduite de w (resp. de $w' = w_0 w^{-1}$), il existe une galerie minimale $(C_0 = C, C_1, \ldots, C_n = C')$ de type $(s_1, \ldots, s_k, s'_1, \ldots, s'_h)$ (avec $n = h + k$) telle que $C_w = C_k$ (utiliser l'exerc. 22 du § 1 et l'exerc. 10, *d*) et *e*)). Montrer que C_w et C_{ww_0} sont opposées.

c) Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des couples de chambres opposées. Pour $m = (C, C') \in \mathfrak{M}$, soit A_m la réunion des chambres C_w construites comme ci-dessus. Montrer que I muni de l'ensemble $\mathfrak{A}$ des A_m pour $m \in \mathfrak{M}$ est un immeuble structuré (§ 1, exerc. 24) et que le système de Coxeter (W, S) et le numérotage de I sont adaptés à (I, $\mathfrak{A}$); définir une bijection canonique de $\mathfrak{M}$ sur l'ensemble noté $\mathfrak{J}$ dans l'exerc. 24 du § 1. On identifie ces deux ensembles.

d) Soit $m = (C, C') \in \mathfrak{M}$, avec $C = C_e$, et soit N le stabilisateur de A_m dans G. Montrer que $N/(B \cap N)$ s'identifie à W et que (G, B, N, S) est un système de Tits saturé (utiliser l'exerc. 13).

16) Gardons les hypothèses et notations de l'exerc. 15.

a) Soient C et C′ deux chambres. Montrer qu'il existe une chambre C″ opposée à la fois à C et C′ (prendre C″ opposée à C telle que $t(C', C'')$ soit de plus grande longueur possible; si $t(C', C'') \neq w_0$, il existe une chambre C_1 mitoyenne de C″ telle que $l(t(C', C_1)) > l(t(C', C''))$; montrer en utilisant la condition (G) de l'exerc. 10 que l'on peut supposer que $C_1 \not\subset A_{(C, C'')}$ et que C_1 est alors opposée à C).

b) Soit $A \in \mathfrak{A}$; montrer qu'il existe un automorphisme involutif (non nécessairement permis) j_A et un seul transformant toute chambre de A en la chambre opposée (utiliser l'exerc. 22 *c*) du § 1). Soient F et F′ deux facettes de I; montrer que si $F' = j_A(F)$ pour un $A \in \mathfrak{A}$ contenant F et F′, alors il en est de même pour tout $A \in \mathfrak{A}$ contenant F et F′ (si $F, F' \in A \cap A'$, avec $A, A' \in \mathfrak{A}$, considérer une chambre C (resp. C′) de A (resp. A′) contenant F (resp. F′) et un $A'' \in \mathfrak{A}$ contenant C et C′ et utiliser (IS 3)). On dit alors que F et F′ sont *opposées*. Montrer que, pour que deux facettes aient une opposée commune, il faut et il suffit qu'elles soient de même type T et qu'une facette opposée à une facette de type T est de type $w_0 T w_0^{-1}$.

c) Soit A_0 l'appartement associé au système de Coxeter (W, S) (§ 1, exerc. 16) et soit $\mathfrak{J}$ l'ensemble des isomorphismes permis de A_0 sur les divers éléments de $\mathfrak{A}$. Si α est une moitié de A_0, de mur L (§ 1, exerc. 16) et si $\varphi \in \mathfrak{J}$, on dira que $\varphi(\alpha)$ est un *demi-appartement* de I, de *mur* $\varphi(L)$. Montrer que $\varphi(L)$ ne dépend alors que de $\varphi(\alpha)$ et non du couple (φ, α). Soient D_1 et D_2 deux demi-appartements distincts, de même mur L : montrer qu'il existe $\varphi \in \mathfrak{J}$ et un mur L_0 de A_0 tels que $L = \varphi(L_0)$ et que les D_i soient les images par φ des deux moitiés de A_0 déterminées par L_0 (on choisira une cloison F contenue dans L et deux chambres C_1 et C_2, contenues l'une dans D_1 et d'autre dans D_2 et telles que C_1 contienne F et C_2 la cloison opposée à F dans D_1 (qui est aussi opposée à F dans D_2) et on considérera l'appartement de I contenant C_1 et C_2).

17) Gardons les hypothèses et notations des exerc. 15 et 16. On choisit un élément $\varphi \in \mathfrak{J}$ transformant la chambre canonique C de A_0 (§ 1, exerc. 16) en la chambre canonique C_e de I et on désigne, comme dans l'exerc. 15 *d*), par N le stabilisateur de l'appartement $\varphi(A_0) \in \mathfrak{A}$ dans le groupe G. Pour toute partie D de A_0, on désigne par B_D le sous-groupe de G laissant fixes tous les points de $\varphi(D)$: on a $B = B_C$ et $B \cap N = B_{A_0}$.

a) Soit α une moitié de A_0, contenant C. Montrer que B_α est transitif sur les demi-appartements de I ayant pour mur le mur L de $\varphi(\alpha)$ et distincts de $\varphi(\alpha)$ (soient X un tel demi-appartement, F une cloison contenue dans L et C′ une chambre de $\varphi(\alpha)$ contenant F; montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $g(X \cup \varphi(\alpha)) = \varphi(A_0)$ et $g(C') = C'$, en utilisant l'exerc. 16 *c*) et l'exerc. 13 *a*); montrer que $g(F) = F$ et déduire de l'exerc. 22 *c*) du § 1 que $g \in B_\alpha$). En déduire que B_L est doublement transitif sur les demi-appartements de mur L et que $(B_L, B_\alpha, B_L \cap N)$ est un système de Tits de groupe de Weyl d'ordre 2 (cf. exerc. 7).

b) Soient D_1 et D_2 deux parties convexes de A_0, telles que $C \subset D_1 \subset D_2$ et qu'il existe une moitié α et une seule de A_0 avec $D_1 \subset \alpha$ et $D_2 \not\subset \alpha$: on a alors $D_1 = D_2 \cap \alpha$ (§ 1, exerc. 21 *c*)). Montrer que $B_{D_1} = B_\alpha B_{D_2}$ et que $B_\alpha \cap B_{D_2} = B \cap N$ (en considérant une galerie de plus petite longueur possible ayant une extrémité égale à C, et l'autre contenant un point $a \in D_2 - D_1$, on montrera qu'il existe deux chambres mitoyennes C'_1 et C'_2 de A_0, telles que $C'_1 \subset D_1$, $C'_2 \subset D_2$, $C'_2 \not\subset D_1$ et $C'_1 \cap C'_2$ contenue dans le mur L′ de α. Posons $C_i = \varphi(C'_i)$, $F = \varphi(C'_1 \cap C'_2)$ et $L = \varphi(L')$. Montrer que l'enveloppe convexe de $D_1 \cup C'_2$ est égale à D_2. Soit $b \in B_{D_1}$: on a $b(C_1) = C_1$, d'où $b(F) = F$ et $b(C_2) \neq C_1$. En déduire que l'enveloppe convexe de $b(C_2) \cup L$ est un demi-appartement X de mur L, distinct de $\varphi(\alpha)$ et qu'il existe $b' \in B_\alpha$ tel que

$$b'(\varphi(A_0)) = X \cup \varphi(\alpha).$$

Montrer que $b'b(a) = a$ pour tout $a \in \varphi(D_1 \cup C'_2)$ et que $b'b \in B_{D_2}$).

c) Soit $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ les moitiés de A_0 contenant C, numérotées de façon que l'application

$$j \longmapsto \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant j} \alpha_i$$

soit strictement décroissante (cf. § 1, exerc. 17). Montrer que $B = B_{\alpha_1} \ldots B_{\alpha_q}$ et que si $b_i, b'_i \in B_{\alpha_i}$ avec $b_1 \ldots b_q = b'_1 \ldots b'_q$, alors $b'_i \in b_i(B \cap N)$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$.

18) Reprenons les hypothèses et notations du nº 2. Soit V_i le sous-espace vectoriel de k^n engendré par $e_1, \ldots, e_i$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$).

a) Montrer que, pour toute partie X de S, le sous-groupe G_X (nº 5) se compose des éléments $g \in G$ tels que $g(V_i) = V_i$ pour tout i tel que $s_i \notin X$.

b) Soit I l'immeuble associé au système de Tits (G, B, N, S) (exerc. 10 et 12). Montrer que l'application j qui au point $g\mathrm{G}^{(i)}$ de I (où $\mathrm{G}^{(i)}$ désigne le sous-groupe $\mathrm{G}_{\mathrm{S}-\{s_i\}}$ de G, c'est-à-dire le stabilisateur de V_i) fait correspondre le sous-espace vectoriel $g(\mathrm{V}_i)$, est une *bijection* de I sur l'ensemble $\mathfrak{V}$ des sous-espaces vectoriels de $k^n \neq \{0\}$ et $\neq k^n$, compatible avec l'action de G.

c) Si E est un espace vectoriel, on appelle *drapeau* de E un ensemble totalement ordonné pour l'inclusion de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que des éléments $a_1, \ldots, a_k$ de I appartiennent à une même facette de I si et seulement si $\{j(a_1), \ldots, j(a_k)\}$ est un drapeau de k^n.

d) Montrer que G est doublement transitif sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 1 de k^n. Supposons $n \geqslant 2$ et soit N_1 le sous-groupe de G engendré par l'élément qui échange e_1 et e_2 et laisse fixes les autres e_i : montrer que $(\mathrm{G}, \mathrm{G}^{(1)}, \mathrm{N}_1)$ est un système de Tits dont le groupe de Weyl est d'ordre 2.

e) On suppose k commutatif. On pose

$$\mathrm{G}' = \mathbf{SL}(n, k),\ \mathrm{B}' = \mathrm{G}' \cap \mathrm{B},\ \mathrm{N}' = \mathrm{G}' \cap \mathrm{N} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}' = \mathrm{N}' \cap \mathrm{B}' = \mathrm{T} \cap \mathrm{G}'.$$

Montrer que N'/T' s'identifie à $\mathfrak{S}_n$ et que $(\mathrm{G}', \mathrm{B}', \mathrm{N}', \mathrm{S})$ est un système de Tits (raisonner comme au nº 2).

19) Soit k un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$ et soit Q la forme quadratique $x_1x_3 + x_2^2$ sur k^3. Montrer que le groupe $\mathbf{SO}(\mathrm{Q})$ est doublement transitif sur l'ensemble des droites isotropes de k^3. Comparer le système de Tits correspondant (exerc. 7) avec celui obtenu au nº 2 pour $n = 2$ (cf. *Alg.* chap. IX, § 9, exerc. 15).

20) Reprenons les notations du nº 2, en supposant de plus k commutatif. On se place dans l'un des cas suivants :

(B_l) $n = 2l + 1$ (avec $l \geqslant 1$), k est de caractéristique $\neq 2$ et k^n est muni de la forme quadratique $\mathrm{Q} = x_1x_n + \cdots + x_lx_{l+2} + x_{l+1}^2$;

(C_l) $n = 2l$ (avec $l \geqslant 1$) et k^n est muni de la forme alternée Φ telle que $\Phi(e_i, e_j) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $i \leqslant j$, sauf pour $i \leqslant l$, $j = n + 1 - i$, où $\Phi(e_i, e_j) = 1$;

(D_l) $n = 2l$ (avec $l \geqslant 2$), k est de caractéristique $\neq 2$ et k^n est muni de la forme quadratique $\mathrm{Q} = x_1x_n + \cdots + x_lx_{l+1}$.

On désigne par G_1 le groupe spécial orthogonal $\mathbf{SO}(\mathrm{Q})$ dans les cas (B_l) et (D_l), le groupe symplectique $\mathbf{Sp}(\Phi)$ dans le cas (C_l). On pose

$$\mathrm{B}_1 = \mathrm{G}_1 \cap \mathrm{B},\ \mathrm{N}_1 = \mathrm{G}_1 \cap \mathrm{N} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_1 = \mathrm{G}_1 \cap \mathrm{T} = \mathrm{B}_1 \cap \mathrm{N}_1.$$

a) Montrer que l'action de N_1 sur l'ensemble des droites ke_i définit un homomorphisme de N_1, de noyau T_1, sur un sous-groupe W_1 de $\mathfrak{S}_n$, permettant d'identifier W_1 et $\mathrm{N}_1/\mathrm{T}_1$. Montrer que W_1 est le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré :

dans le cas (B_l) par les $\sigma_j = s_js_{n-j}$ pour $1 \leqslant j < l$ et par $\sigma_l = s_{l-1}s_ls_{l-1}$;
dans le cas (C_l) par $\sigma_j = s_js_{n-j}$ pour $1 \leqslant j < l$ et par $\sigma_l = s_l$;
dans le cas (D_l) par $\sigma_j = s_js_{n-j}$ pour $1 \leqslant j < l$ et par $\sigma_l = s_{l-1}s_ls_{l-1}s_ls_{l+1}s_l$.

b) Soit S_1 l'ensemble des σ_j pour $1 \leqslant j \leqslant l$. Montrer que $(\mathrm{G}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{N}_1, \mathrm{S}_1)$ est un système de Tits (pour démontrer que le sous-groupe H de G_1 engendré par B_1 et N_1 est G_1 tout entier, on raisonnera comme en *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 10, nº 13, en remarquant que H contient le sous-groupe trigonal large inférieur de G_1 et que, quels que soient les $\xi_i \in k$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$, il existe une matrice $b = (b_{ij}) \in \mathrm{B}_1$ telle que $b_{11} = 1$, $b_{1i} = \xi_i$ pour $2 \leqslant i \leqslant n - 1$ et que $b_{1n} = \xi_n$ dans le cas (C_l), $b_{1n} = 0$ dans les cas (B_l) et (D_l). On raisonnera ensuite comme au nº 2 en introduisant les sous-groupes $\mathrm{G}_{1,j} = \mathrm{G}_1 \cap (\mathrm{G}_j . \mathrm{G}_{n-j})$ pour $1 \leqslant j < l$ et le sous-groupe $\mathrm{G}_{1,l}$ des éléments de G_1 qui laissent fixes :

dans le cas (B_l) : les e_i pour $i \neq l$, $l + 1$, $l + 2$ et le sous-espace engendré par e_l, e_{l+1} et e_{l+2};

dans le cas (C_l): les e_i pour $i \neq l$, $l + 1$ et le plan engendré par e_l et e_{l+1};

dans le cas (D_l) : les e_i pour $i < l - 1$ ou $i > l + 2$ et les deux plans engendrés respectivement par e_{l-1} et e_{l+1}, et par e_l et e_{l+2}.

On montrera que $G_{1,j}$ s'identifie soit à $\mathbf{GL}(2, k)$, soit à $\mathbf{SL}(2, k)$, soit au groupe spécial orthogonal de l'exerc. 19).

$_*c$) Montrer que le graphe de Coxeter du groupe W_1 est, suivant les cas, de type (B_l), (C_l) ou (D_l) (chap. VI, § 4, n° 1).$_*$

d) Montrer que pour toute partie X de S_1, le sous-groupe G_{1X} se compose des $g \in G_1$ tels que $g(V_i) = V_i$ pour tout i tel que $\sigma_i \notin X$, sauf dans le cas (D_l), où la même assertion reste exacte à condition de désigner par V_{r-1} le sous-espace engendré par $e_1, \ldots, e_{r-1}$ et e_{r+1}. En déduire, comme dans l'exerc. 18 *b*), une bijection j de l'immeuble associé à (G_1, B_1) sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes $\neq 0$ dans les cas (B_l) et (C_l), sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes de dimensions $\neq 0$ et $\neq r-1$ dans le cas (D_l). Montrer que des points $a_1, \ldots, a_k$ de I appartiennent à une même facette si et seulement si $\{j(a_1), \ldots, j(a_k)\}$ est un drapeau.

21) Soient A un anneau de valuation discrète (*Alg. comm.*, chap. VI, § 3, n° 6), $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, γ un générateur de $\mathfrak{m}$ et K le corps des fractions de A. Soient G le groupe $\mathbf{SL}(2, K)$, B le sous-groupe de G formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $a, b, d \in A$ et $c \in \mathfrak{m}$ (avec $ad - bc = 1$) et N le sous-groupe formé des matrices appartenant à G et n'ayant qu'un seul élément non nul dans chaque ligne et dans chaque colonne.

a) Montrer que $T = B \cap N$ est distingué dans N et que $W = N/T$ est un groupe diédral infini engendré par les classes s et s' des matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ respectivement.

b) Montrer que (G, B, N, S) (avec $S = \{s, s'\}$) est un système de Tits.

c) Soit $H = \mathbf{SL}(2, A)$ le sous-groupe de G formé des matrices à coefficients dans A. Montrer que (H, N, $B \cap H$, $\{s\}$) est un système de Tits. Comparer avec l'exerc. 18 *e*).

d) Soit $\hat{A}$ le complété de A et soient $\hat{G}$, $\hat{B}$, $\hat{N}$, $\hat{T}$ les groupes définis comme ci-dessus, mais en remplaçant A par $\hat{A}$. Montrer que l'injection de G dans $\hat{G}$ définit un isomorphisme j de l'immeuble I associé à (G, B) (exerc. 10) sur l'immeuble $\hat{I}$ associé à ($\hat{G}$, $\hat{B}$). Soit (I, $\mathfrak{A}$) (resp. ($\hat{I}$, $\hat{\mathfrak{A}}$)) l'immeuble *structuré* associé à (G, B, N) (resp. ($\hat{G}$, $\hat{B}$, $\hat{N}$)) (exerc. 12) : montrer que $j(\mathfrak{A}) \subset \hat{\mathfrak{A}}$, mais que $j(\mathfrak{A}) \neq \hat{\mathfrak{A}}$ si $\hat{A} \neq A$ (remarquer que les appartements $\hat{\mathfrak{A}}$ (resp. $\mathfrak{A}$) correspondent bijectivement aux conjugués de T (resp. $\hat{T}$) par G (resp. $\hat{G}$)).

22) Soient G un groupe et B un sous-groupe de G.

a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $B \cap gBg^{-1}$ est d'indice fini dans B pour tout $g \in G$;

(ii) toute double classe BgB suivant B est réunion finie de classes à gauche suivant B.

Plus précisément, montrer que, pour tout $g \in G$, l'indice q_g de $B \cap gBg^{-1}$ dans B est égal au nombre de classes à gauche suivant B contenues dans la double classe BgB. Montrer que $q_{gh} \leqslant q_g \cdot q_h$ pour tous $g, h \in G$.

On suppose désormais que les conditions (i) et (ii) sont vérifiées et on note k un anneau commutatif. Pour $t \in G/B$ (resp. $t \in B\backslash G/B$), on note a_t l'application de G dans k définie par $a_t(g) = 0$ si $g \notin t$ et $a_t(g) = 1$ si $g \in t$. Soit L (resp. H) le k-module engendré par les a_t pour $t \in G/B$ (resp. $t \in B\backslash G/B$).

b) Montrer qu'il existe une forme linéaire μ et une seule sur L telle que $\mu(a_t) = 1$ pour tout $t \in G/B$.

c) Soient $\varphi \in L$ et $\psi \in H$. Montrer que, pour tout $x \in G$, l'application

$$\theta_x : y \longmapsto \varphi(y)\psi(y^{-1}x)$$

appartient à L et que l'application $\varphi * \psi : x \longmapsto \mu(\theta_x)$ appartient à L. Si de plus $\varphi \in H$, alors $\varphi * \psi \in H$. Montrer que l'application $(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi * \psi$ munit H d'une structure d'algèbre sur k, admettant a_B comme élément unité, et munit L d'une structure de H-module à droite.

On dit que l'algèbre H est l'*algèbre de Hecke* de G par rapport à B et on la note $H_k(G, B)$.

d) Montrer que, pour t, $t' \in B\backslash G/B$, on a :

$$a_t * a_{t'} = \sum_{t''} m(t, t'; t'')a_{t''}$$

où $m(t, t'; t'')$ est le nombre de classes suivant B contenues dans $t \cap gt'^{-1}$ pour tout $g \in t''$.

e) On fait opérer G dans L par les translations à gauche. Montrer que l'action de H dans L définit un isomorphisme de H sur le commutant de la représentation linéaire de G dans L ainsi obtenue.

f) *On suppose que G est *fini* et que la caractéristique de k ne divise pas le cardinal de G. Montrer que $H_k(G, B)$ est absolument semi-simple sur k (*Alg.*, chap. VIII, § 7, nº 5) (utiliser le théorème de Maschke (chap. V, Annexe) et la prop. 3 d'*Alg.*, chap. VIII, § 5, nº 1) $_*$.

g) On suppose que G est un groupe topologique et B un sous-groupe ouvert et compact de G. Montrer que les conditions (i) et (ii) sont vérifiées et que, lorsque $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, le produit $\varphi * \psi$ n'est autre que le produit de convolution relatif à la mesure de Haar à droite sur G, normalisée par la condition $\mu(B) = 1$ (cf. *Intégr.*, chap. VIII, § 4, nº 5).

23) Soient (W, S) un système de Coxeter et k un anneau commutatif. On suppose donnés, pour tout $s \in S$, deux éléments λ_s et μ_s de k, tels que $\lambda_s = \lambda_{s'}$ et $\mu_s = \mu_{s'}$ lorsque s et s' sont conjugués dans W. Posons $E = k^{(W)}$ et soit (e_w) la base canonique de E.

a) Montrer qu'il existe sur E une structure d'algèbre sur k et une seule telle que l'on ait, pour $s \in S$ et $w \in W$:

$$e_s . e_w = \begin{cases} e_{sw} & \text{si} \quad l(sw) > l(w) \\ \lambda_s e_w + \mu_s e_{sw} & \text{si} \quad l(sw) < l(w) \end{cases}$$

(introduire l'endomorphisme P_s de E défini par les formules ci-dessus, où l'on remplace $e_s . e_w$ par $P_s(w)$, et l'endomorphisme $Q_s = jP_sj^{-1}$, où j désigne l'automorphisme de E défini par $j(e_w) = e_{w^{-1}}$; montrer que $P_sQ_t = Q_tP_s$ pour $s, t \in S$ en remarquant que les conditions $l(swt) = l(w)$ et $l(sw) = l(wt)$ entraînent $sw = wt$; raisonner ensuite comme dans l'exerc. 3 *e*)). Le module E, muni de cette structure d'algèbre, sera noté $E_k((\lambda_s), (\mu_s))$. Montrer que $E((0), (1))$ est l'algèbre $k[W]$ du groupe W (*Alg.*, chap. III, 3ᵉ éd., § 2, nº 6).

b) Montrer que la famille génératrice $(e_s)_{s \in S}$ et les relations :

$$\begin{aligned} e_s^2 &= \lambda_s e_s + \mu_s && \text{pour } s \in S \\ (e_s e_t)^r &= (e_t e_s)^r && \text{pour } s, t \in S \text{ tels que } st \text{ soit d'ordre fini pair } 2r \\ (e_s e_t)^r e_s &= (e_t e_s)^r e_t && \text{pour } s, t \in S \text{ tels que } st \text{ soit d'ordre fini impair } 2r + 1 \end{aligned}$$

forment une présentation de l'algèbre E (raisonner comme pour la démonstration du th. 1 du nº 6 du § 1).

24) Soient G un groupe, B un sous-groupe de Tits de G (exerc. 3, dont nous reprenons les notations). On suppose que pour tout $s \in S$, la double classe $C(s)$ est réunion d'un nombre fini q_s de classes à gauche suivant B. On reprend les notations de l'exerc. 22 et on pose $a_w = a_{C(w)}$ pour tout $w \in W$.

a) Montrer que les conditions (i) et (ii) de l'exerc. 22 sont satisfaites. On peut donc parler de l'algèbre de Hecke $H_k(G, B)$ (k étant un anneau commutatif), dont $(a_w)_{w \in W}$ forme une base.

b) Soient $s \in S$, et $w \in W$. Montrer que $a_s * a_s = (q_s - 1)a_s + q_s$; montrer que si $l(sw) > l(w)$, on a $a_s * a_w = a_{sw}$.

c) Montrer que l'application linéaire de l'algèbre $E_k((q_s - 1), (q_s))$ associée au système de Coxeter (W, S) (exerc. 23) dans $H_k(G, B)$ qui transforme e_w en a_w pour tout $w \in W$, est un isomorphisme d'algèbres.

25) Reprenons les notations de l'exerc. 8. On suppose de plus que, pour tout $s \in S$, l'indice q_s de $B \cap gBg^{-1}$ dans B est fini pour tout $g \in BsB$.

a) Montrer que le couple $(\tilde{G}, B)$ satisfait aux conditions (i) et (ii) de l'exerc. 22.

b) Montrer que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application $x \longmapsto \gamma x \gamma^{-1}$ définit un automorphisme σ de l'algèbre de Hecke $H_k(G, B)$ et que σ ne dépend que de la classe ω de γ dans $\Omega = \Gamma/(\Gamma \cap B)$. On le note σ_ω.

c) Soient $k[\Omega]$ l'algèbre du groupe Ω, (e_ω) sa base canonique. Montrer que l'application linéaire j de $k[\Omega] \otimes_k H_k(G, B)$ dans $H_k(\tilde{G}, B)$ définie par $j(e_\omega \otimes a_{BwB}) = a_{B\omega wB}$ (avec les notations de l'exerc. 22) pour $\omega \in \Omega$ et $w \in \Omega$, est bijective et que l'on a :

$$j^{-1}(j(e_\omega \otimes x) j(e_{\omega'} \otimes y)) = e_{\omega\omega'} \otimes \sigma_\omega(x) y$$

pour $\omega, \omega' \in \Omega$ et $x, y \in H_k(G, B)$.

¶ 26) Si E est une algèbre absolument semi-simple de rang fini sur un corps commutatif k, on appelle *invariant numérique* de E la suite d'entiers $(n_1, \ldots, n_r)$ telle que $n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_r > 0$ et que $\bar{k} \otimes_k E$ soit isomorphe, pour toute clôture algébrique $\bar{k}$ de k, à $\prod_i \mathbf{M}_{n_i}(\bar{k})$.

Soient V un anneau intègre, K son corps des fractions, φ un homomorphisme de V dans un corps commutatif k, E une V-algèbre. On suppose que E est un V-module libre de rang fini et on pose $E_0 = E \otimes_V k$ et $E_1 = E \otimes_V K$.

a) On suppose que la forme bilinéaire $(x, y) \longmapsto \mathrm{Tr}_{E_0/k}(xy)$ sur E_0 est non dégénérée. Montrer que E_0 et E_1 sont absolument semi-simples (cf. *Alg.*, chap. IX, § 2, exerc. 1).

b) On suppose que E_0 et E_1 sont absolument semi-simples sur k et K respectivement. Montrer que E_0 et E_1 ont même invariant numérique (on se ramènera au cas où k et K sont algébriquement clos; soient (e_i) une base de E sur V et (X_i) des indéterminées. On montrera que le polynôme caractéristique de l'élément $\sum_i X_i e_i$ de $E_1 \otimes_K K[(X_i)]$ (resp. $E_0 \otimes_k k[(X_i)]$) est de la forme $P = \prod_j P_j^{n_j}$ $\left(\text{resp. } Q = \prod_k Q_k^{m_k}\right)$, où $(n_1, \ldots, n_r)$ (resp. $(m_1, \ldots, m_s)$) est l'invariant numérique de E_1 (resp. E_0), avec $\deg P_j = n_j$ (resp. $\deg Q_k = m_k$). On montrera que $P_j \in V[(X_i)]$ et que $Q = \varphi(P)$. On en déduira qu'il existe des entiers $c_{jk} \geqslant 0$ tels que

$$m_k = \sum_j c_{jk} n_j \qquad \text{et} \qquad n_j = \sum_k c_{jk} m_k.)$$

*27) Soit (G, B, N, S) un système de Tits et soit k un corps commutatif. On suppose que G est *fini* et que la caractéristique de k ne divise ni l'ordre de G ni l'ordre du groupe de Weyl $W = N/(B \cap N)$. Montrer que les algèbres $H_k(G, B)$ (exerc. 22) et $k[W]$ sont absolument semi-simples et ont même invariant numérique, donc sont isomorphes lorsque k est algébriquement clos (soit q_s l'indice de $B \cap gBg^{-1}$ dans B pour $g \in BsB$, $s \in S$. Considérer l'algèbre $E_{k[X]}((X(q_s - 1)), (1 + X(q_s - 1)))$ construite comme dans l'exerc. 23 à partir du système de Coxeter (W, S) et de l'anneau des polynômes $k[X]$ et utiliser l'exerc. 26 *a*) et *b*) en remarquant que, d'après le théorème de Maschke (chap. V, Annexe), la forme bilinéaire $\mathrm{Tr}_{k[W]/k}(xy)$ est non dégénérée).*

28) Soient G un groupe, M un sous-groupe maximal de G et U un sous-groupe distingué de M, satisfaisant à la condition (R) du nº 7. On suppose que G est égal à son groupe des commutateurs, qu'il est engendré par la réunion des conjugués de U et que l'intersection des conjugués de M est réduite à l'élément neutre. Montrer que G est simple. (Considérer un sous-groupe distingué N de G distinct de $\{1\}$; montrer que G = N.M, puis que G = N.U.)

29) Soit H un groupe simple non commutatif. Soit θ un automorphisme de H d'ordre premier p et soit U le produit semi-direct de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ par H correspondant à θ. Montrer que, si θ n'est pas un automorphisme intérieur, les seuls sous-groupes distingués de U sont $\{1\}$, H et U. En déduire que U n'est pas résoluble, mais qu'il satisfait à la condition (R) du nº 7. Application au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

GROUPES ENGENDRÉS PAR DES RÉFLEXIONS

§ 1. Hyperplans, chambres et facettes

Dans ce paragraphe, on note E un espace affine *réel* de dimension finie d et T l'espace des translations de E (cf. *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 9 et *Esp. vect. top.*, chap. II, § 2). Pour deux points a, b de E, on notera $[ab]$ (resp. $]ab[$, resp. $]ab]$) le segment fermé (resp. ouvert, resp. ouvert en a et fermé en b), d'extrémités a, b. On munit T de son unique topologie d'espace vectoriel topologique séparé, cf. *Esp. vect. top.*, chap. I, § 2, no 3; il est isomorphe à $\mathbf{R}^d$. On munit E de l'unique topologie telle que, pour tout $e \in E$, l'application : $t \longmapsto e + t$ de T sur E soit un homéomorphisme.

On note $\mathfrak{H}$ un ensemble *localement fini* d'hyperplans de E (*Top. gén.*, chap. I, § 1, no 5).

1. Notations

Soit H un hyperplan de E. Rappelons que E — H a deux composantes connexes, que l'on appelle les *demi-espaces ouverts* limités par H. Leurs adhérences s'appellent les *demi-espaces fermés* limités par H. Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont *strictement du même côté* de H s'ils sont contenus dans le même sous-espace ouvert limité par H, ou, ce qui revient au même, si le segment fermé d'extrémités x et y ne rencontre pas H. On dit que x et y sont *de part et d'autre* de H si x appartient à l'un des demi-espaces ouverts limités par H, et y à l'autre. Si $x \in E$ et $t \in T$, on dit que x et t sont strictement du même côté de H s'il en est ainsi pour x et $h + t$, quel que soit $h \in H$.

Soit A une partie connexe non vide de E. Pour tout hyperplan H de E ne rencontrant pas A, on note $D_H(A)$ l'unique demi-espace ouvert limité par H qui contient A. Si $\mathfrak{N}$ est un ensemble d'hyperplans de E dont aucun ne rencontre A, on pose

$$D_{\mathfrak{N}}(A) = \bigcap_{H \in \mathfrak{N}} D_H(A). \tag{1}$$

Si A est réduit à un point a, on écrit $D_H(a)$ et $D_{\mathfrak{N}}(a)$ au lieu de $D_H(\{a\})$ et $D_{\mathfrak{N}}(\{a\})$.

2. Facettes

L'ensemble des points de E qui n'appartiennent à aucun hyperplan H de l'ensemble $\mathfrak{H}$ est ouvert dans E puisque $\mathfrak{H}$ est localement fini. De manière plus précise, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *Soit a un point de* E. *Il existe un voisinage ouvert convexe de a qui ne rencontre aucun hyperplan* H *appartenant à* $\mathfrak{H}$ *et ne passant pas par a. De plus, il n'existe qu'un nombre fini d'hyperplans appartenant à* $\mathfrak{H}$ *et passant par a.*

L'ensemble $\mathfrak{N}$ des hyperplans H tels que $H \in \mathfrak{H}$ et $a \notin H$ est localement fini puisqu'il est contenu dans $\mathfrak{H}$; par suite, l'ensemble U des points de E n'appartenant à aucun des hyperplans de l'ensemble $\mathfrak{N}$ est ouvert; comme on a $a \in U$, il existe un voisinage ouvert convexe de a contenu dans U. Le reste de la proposition est évident.

Étant donnés deux points x et y de E, on notera $R\{x, y\}$ la relation

« Pour tout hyperplan $H \in \mathfrak{H}$, ou bien $x \in H$ et $y \in H$, ou bien x et y sont strictement du même côté de H. »

Il est clair que R est une relation d'équivalence dans E.

DÉFINITION 1. — *On appelle facette de* E *relativement à* $\mathfrak{H}$ *toute classe selon la relation d'équivalence* R *définie ci-dessus.*

PROPOSITION 2. — *L'ensemble des facettes est localement fini.*

C'est évident, puisque $\mathfrak{H}$ est localement fini.

Soient F une facette et a un point de F. Pour qu'un hyperplan $H \in \mathfrak{H}$ contienne F, il faut et il suffit que l'on ait $a \in H$; l'ensemble $\mathfrak{F}$ de ces hyperplans est donc fini; il a pour intersection un sous-espace affine L de E, que l'on appellera le *support* affine de F; la dimension de L s'appellera la *dimension* de F.

Si $\mathfrak{N}$ est l'ensemble des hyperplans $H \in \mathfrak{H}$ ne contenant pas F, on a

$$F = L \cap \bigcap_{H \in \mathfrak{N}} D_H(a). \tag{2}$$

Nous allons montrer que l'adhérence de F est donnée par la formule

$$\overline{F} = L \cap \bigcap_{H \in \mathfrak{N}} \overline{D_H(a)}. \tag{3}$$

Il est clair que le membre de droite contient le membre de gauche. Inversement, soit $x \in L \cap \bigcap_{H \in \mathfrak{N}} \overline{D_H(a)}$. Le segment ouvert d'extrémités a et x est contenu dans L et dans chacun des $D_H(a)$ pour $H \in \mathfrak{N}$, donc dans F. Il en résulte que x est adhérent à F, d'où la formule.

PROPOSITION 3. — *Soient* F *une facette et* L *son support affine.*

(i) *L'ensemble* F *est une partie ouverte et convexe du sous-espace affine* L *de* E.

(ii) *L'adhérence de* F *est réunion de* F *et de facettes de dimension strictement inférieure à celle de* F.

(iii) *Dans l'espace topologique* L, *l'ensemble* F *est l'intérieur de son adhérence.*

Comme tout demi-espace ouvert et tout hyperplan sont des parties convexes de E, la formule (2) montre que F est intersection d'une famille de parties convexes, donc est convexe. Par ailleurs, soit a dans F, et soit U un voisinage ouvert convexe de a dans E ne rencontrant aucun des hyperplans appartenant à l'ensemble $\mathfrak{N}$ des $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$ tels que $a \notin \mathrm{H}$. Pour tout $\mathrm{H} \in \mathfrak{N}$, on a alors $\mathrm{U} \subset \mathrm{D_H}(a)$, d'où $\mathrm{L} \cap \mathrm{U} \subset \mathrm{F}$, donc F est ouvert dans l'espace topologique L.

Soient b un point de $\overline{\mathrm{F}} - \mathrm{F}$, appartenant à la facette F', et $\mathfrak{N}'$ l'ensemble des hyperplans $\mathrm{H} \in \mathfrak{N}$ passant par b; on pose $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{N} - \mathfrak{N}'$. Pour tout H dans $\mathfrak{N}''$, on a $b \notin \mathrm{H}$ et $b \in \overline{\mathrm{D_H}(a)}$, d'où $b \in \mathrm{D_H}(a)$ et donc $\mathrm{D_H}(b) = \mathrm{D_H}(a)$; par définition d'une facette, on a donc :

$$\mathrm{F}' = \mathrm{L} \cap \bigcap_{\mathrm{H} \in \mathfrak{N}'} \mathrm{H} \cap \bigcap_{\mathrm{H} \in \mathfrak{N}''} \mathrm{D_H}(a) \tag{4}$$

alors que (3) entraîne :

$$\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{L} \cap \bigcap_{\mathrm{H} \in \mathfrak{N}'} \overline{\mathrm{D_H}(a)} \cap \bigcap_{\mathrm{H} \in \mathfrak{N}''} \overline{\mathrm{D_H}(a)} \tag{5}$$

d'où $\mathrm{F}' \subset \overline{\mathrm{F}}$. On ne peut avoir $\mathfrak{N}' = \varnothing$, car cela entraînerait $\mathrm{F} = \mathrm{F}'$ d'après (2) et (4), contrairement à l'hypothèse $b \notin \mathrm{F}$ et $b \in \mathrm{F}'$. Le support de F' est l'ensemble $\mathrm{L}' = \mathrm{L} \cap \bigcap_{\mathrm{H} \in \mathfrak{N}'} \mathrm{H}$; on a $a \in \mathrm{L}$, mais $a \notin \mathrm{H}$ pour H dans $\mathfrak{N}'$, d'où $\mathrm{L}' \neq \mathrm{L}$ et finalement $\dim \mathrm{L}' < \dim \mathrm{L}$, c'est-à-dire $\dim \mathrm{F}' < \dim \mathrm{F}$. Ceci prouve (ii).

Soient H dans $\mathfrak{N}'$ et D le demi-espace ouvert limité par H et distinct de $\mathrm{D_H}(a)$; on a $b \in \mathrm{H} \cap \mathrm{L}$, et il est immédiat que $\mathrm{D} \cap \mathrm{L}$ est un demi-espace de L limité par l'hyperplan $\mathrm{H} \cap \mathrm{L}$ de L; par suite, tout voisinage de b *dans* L rencontre $\mathrm{D} \cap \mathrm{L}$, et comme $\mathrm{D} \cap \mathrm{L}$ est disjoint de $\overline{\mathrm{F}}$ d'après (3), on voit que le point b de $\overline{\mathrm{F}} - \mathrm{F}$ ne peut être intérieur à $\overline{\mathrm{F}}$ dans l'espace topologique L. Comme F est ouvert dans L, on a (iii). C.Q.F.D.

COROLLAIRE. — *Soient* F *et* F' *deux facettes. Si l'on a* $\overline{\mathrm{F}} = \overline{\mathrm{F}'}$, *les facettes* F *et* F' *sont égales.*

Cela résulte de (iii).

PROPOSITION 4. — *Soient* F *une facette, et* L *un sous-espace affine de* E, *intersection d'hyperplans appartenant à* $\mathfrak{H}$; *on note* $\mathfrak{N}$ *l'ensemble des hyperplans* $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$ *qui ne contiennent pas* L. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Il existe une facette* F' *de support* L *rencontrant* $\overline{\mathrm{F}}$.

(ii) *Il existe une facette* F' *de support* L *contenue dans* $\overline{\mathrm{F}}$.

(iii) *Il existe un point* x *dans* $\mathrm{L} \cap \overline{\mathrm{F}}$ *qui n'appartient à aucun des hyperplans de* $\mathfrak{N}$.

Si ces conditions sont remplies, $\mathrm{L} \cap \mathrm{D}_{\mathfrak{N}}(\mathrm{F})$ *est l'unique facette de support* L *contenue dans* $\overline{\mathrm{F}}$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Comme $\overline{\mathrm{F}}$ est réunion de facettes (prop. 3, (ii)), toute facette qui rencontre $\overline{\mathrm{F}}$ rencontre une facette contenue dans $\overline{\mathrm{F}}$, et lui est donc égale.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : Tout point x de F′ vérifie (iii) car tout hyperplan de $\mathfrak{H}$ contenant x contient F′, donc L.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : Soit x un point vérifiant (iii) et soit F′ la facette contenant x; il est clair que F′ rencontre $\overline{\mathrm{F}}$. Soit $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$; on a $x \notin \mathrm{H}$ si $\mathrm{H} \in \mathfrak{N}$ et évidemment $x \in \mathrm{H}$ si $\mathrm{H} \notin \mathfrak{N}$; par suite, le support de F′ est l'intersection des hyperplans de $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$, et il est égal à L.

Enfin, soit F′ une facette de support L, contenue dans $\overline{\mathrm{F}}$, et soit x un point de F′; comme aucun hyperplan de $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{H}$ ne passe par x, la prop. 1 montre qu'il existe un voisinage ouvert convexe U de x ne rencontrant aucun hyperplan de $\mathfrak{N}$. Comme x est adhérent à F, on a $\mathrm{U} \cap \mathrm{F} \neq \varnothing$; or $\mathfrak{N}$ est l'ensemble des hyperplans $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$ qui ne contiennent pas F′, et pour tout H dans $\mathfrak{N}$, on a $\mathrm{D_H}(x) = \mathrm{D_H}(\mathrm{U}) = \mathrm{D_H}(\mathrm{U} \cap \mathrm{F}) = \mathrm{D_H}(\mathrm{F})$ et la formule (2) entraîne

$$\mathrm{F}' = \mathrm{L} \cap \mathrm{D}_{\mathfrak{N}}(\mathrm{F}). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

3. Chambres

Définition 2. — *On appelle chambre de* E *relativement à* $\mathfrak{H}$ (ou simplement *chambre* s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\mathfrak{H}$) *toute facette de* E *relativement à* $\mathfrak{H}$ *qui n'est contenue dans aucun hyperplan appartenant à* $\mathfrak{H}$.

Soit U l'ensemble ouvert dans E formé des points qui n'appartiennent à aucun hyperplan de $\mathfrak{H}$; comme un hyperplan appartenant à $\mathfrak{H}$ ne peut rencontrer une facette sans la contenir, les chambres sont donc les facettes contenues dans U; toute chambre est une partie ouverte et convexe (donc connexe) de E d'après la prop. 3, (i); comme les chambres forment une partition de U, ce ne sont autres que les *composantes connexes* de U. Toute partie convexe A de U est connexe, donc contenue dans une chambre qui est bien déterminée si A est non vide. Il est clair que les chambres sont les facettes de support E, et la prop. 3, (iii) montre que toute chambre est l'intérieur de son adhérence. Enfin, soient C une chambre et A une partie non vide de C; des formules (2) et (3), on déduit :

$$\mathrm{C} = \bigcap_{\mathrm{H} \in \mathfrak{H}} \mathrm{D_H}(\mathrm{A}) = \mathrm{D}_{\mathfrak{H}}(\mathrm{A}), \qquad \overline{\mathrm{C}} = \bigcap_{\mathrm{H} \in \mathfrak{H}} \overline{\mathrm{D_H}(\mathrm{A})} \tag{6}$$

puisque l'on a $\mathrm{D_H}(\mathrm{A}) = \mathrm{D_H}(a)$ pour tout $a \in \mathrm{A}$.

Proposition 5. — *Soit* C *une partie non vide de* E. *On suppose qu'il existe une partie* $\mathfrak{H}'$ *de* $\mathfrak{H}$ *ayant les deux propriétés suivantes :*

a) On peut associer à tout H *dans* $\mathfrak{H}'$ *un demi-espace ouvert* $\mathrm{D_H}$ *limité par* H *de sorte que* $\mathrm{C} = \bigcap_{\mathrm{H} \in \mathfrak{H}'} \mathrm{D_H}$.

b) L'ensemble C *ne rencontre aucun hyperplan qui appartient à* $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}'$.

Dans ces conditions, C *est une chambre définie par* $\mathfrak{H}$ *dans* E, *et l'on a* $D_H = D_H(C)$ *pour tout* $H \in \mathfrak{H}$.

Les propriétés *a*) et *b*) montrent que C est une partie convexe de U; il existe donc une chambre C′ avec $C \subset C'$. Comme on a $C \subset D_H$, on a $D_H = D_H(C)$ pour tout H dans $\mathfrak{H}'$, d'où $C = D_{\mathfrak{H}'}(C) \supset D_{\mathfrak{H}}(C)$ puisque $\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{H}$; on a $D_{\mathfrak{H}}(C) = C'$ d'après (6), d'où $C \supset C'$. Finalement, on a $C = C'$.

PROPOSITION 6. — *Tout point de* E *est adhérent à une chambre au moins.*

Si E est réduit à un point, c'est évident. Sinon, soit $a \in E$, et soient $H_1, \ldots, H_m$ les hyperplans de $\mathfrak{H}$ contenant *a*. Puisque $\mathfrak{H}$ est localement fini, il existe un voisinage V de *a* ne rencontrant aucun hyperplan de $\mathfrak{H}$ distinct de $H_1, \ldots, H_m$. Soit D une droite passant par *a* et qui n'est contenue dans aucun des H_i; si $x \in D$, $x \neq a$, et *x* est assez voisin de *a*, le segment ouvert $]ax[$ est contenu dans V et ne rencontre aucun des H_i. On a alors $]ax[\subset U$; comme $]ax[$ est connexe, il est contenu dans une chambre C, d'où $a \in \overline{C}$.

PROPOSITION 7. — *Soient* L *un sous-espace affine de* E *et* Ω *une partie ouverte non vide de* L.

(i) *Il existe un point a de* Ω *n'appartenant à aucun des hyperplans de* $\mathfrak{H}$ *qui ne contiennent pas* L.

(ii) *Si* L *est un hyperplan et si* $L \notin \mathfrak{H}$, *il existe une chambre rencontrant* Ω.

(iii) *Si* L *est un hyperplan et si* $L \in \mathfrak{H}$, *il existe un point a de* Ω *n'appartenant à aucun hyperplan* $H \neq L$ *de* $\mathfrak{H}$.

On notera $\mathfrak{N}$ l'ensemble des hyperplans H avec $H \in \mathfrak{H}$ et $L \not\subset H$, et $\mathfrak{L}$ l'ensemble des hyperplans *de l'espace affine* L de la forme $L \cap H$ avec $H \in \mathfrak{N}$. Il est clair que $\mathfrak{L}$ est un ensemble localement fini d'hyperplans dans L, et la prop. 6 montre que Ω rencontre une chambre Γ définie par $\mathfrak{L}$ dans L. Si *a* est un point de $\Gamma \cap \Omega$, on aura $a \notin H$ pour tout $H \in \mathfrak{N}$, d'où (i).

Supposons que L soit un hyperplan; tout hyperplan contenant L lui est égal, et par suite, on peut distinguer deux cas:

a) $L \notin \mathfrak{H}$: alors $\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$, et l'on a $a \notin H$ pour tout $H \in \mathfrak{H}$; donc *a* appartient à une chambre définie par $\mathfrak{H}$ dans E, d'où (ii).

b) $L \in \mathfrak{H}$: on a alors $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} - \{L\}$, d'où (iii).

4. Murs et faces

DÉFINITION 3. — *Soit* C *une chambre de* E. *On appelle face de* C *toute facette contenue dans l'adhérence de* C *et dont le support est un hyperplan. On appelle mur de* C *tout hyperplan qui est le support d'une face de* C.

Tout mur de C appartient à $\mathfrak{H}$. La prop. 4 montre qu'un hyperplan $L \in \mathfrak{H}$ est un mur de C si et seulement si l'on a $C \neq D_{\mathfrak{H}-\{L\}}(C)$. De plus, tout mur de C est le support d'une seule face de C.

PROPOSITION 8. — *Tout hyperplan* H *appartenant à* $\mathfrak{H}$ *est le mur d'au moins une chambre.*

D'après la prop. 7, (iii), il existe un point a de H n'appartenant à aucun hyperplan $H' \neq H$ de $\mathfrak{H}$; d'après la prop. 6, il existe une chambre C telle que $a \in \overline{C}$; la prop. 4 montre alors que H est un mur de C.

PROPOSITION 9. — *Soient* C *une chambre et* $\mathfrak{M}$ *l'ensemble des murs de* C. *On a* $C = D_{\mathfrak{M}}(C)$ *et toute partie* $\mathfrak{L}$ *de* $\mathfrak{H}$ *telle que* $C = D_{\mathfrak{L}}(C)$ *contient* $\mathfrak{M}$. *Pour qu'une partie* F *de* $\overline{C}$ *soit une facette, il faut et il suffit que ce soit une facette de* E *relativement à la famille* $\mathfrak{M}$.

a) Soit $\mathfrak{L}$ une partie de $\mathfrak{H}$ telle que $C = D_{\mathfrak{L}}(C)$. Considérons un hyperplan L appartenant à $\mathfrak{H}$ mais non à $\mathfrak{L}$; soit $\mathfrak{N}$ l'ensemble des hyperplans $H \neq L$ appartenant à $\mathfrak{H}$. On a $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{N}$, d'où $C = D_{\mathfrak{N}}(C)$, et L ne rencontre pas $D_{\mathfrak{N}}(C)$. D'après la prop. 4 (implication (i) $\Longrightarrow$ (iii)), l'hyperplan L n'est pas un mur de C. Par conséquent, tout mur de C appartient à $\mathfrak{L}$.

b) On suppose toujours $C = D_{\mathfrak{L}}(C)$. Soit H un hyperplan appartenant à $\mathfrak{L}$, qui ne soit pas un mur de C, et posons $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} - \{H\}$. D'après la prop. 4 (implication (iii) $\Longrightarrow$ (i)), l'ensemble convexe $D_{\mathfrak{L}'}(C)$ ne rencontre pas H, d'où $D_{\mathfrak{L}'}(C) \subset D_H(C)$ et $C = D_{\mathfrak{L}'}(C)$. Par récurrence sur le cardinal de $\mathfrak{F}$, on en conclut que, si $\mathfrak{F}$ est une partie finie de $\mathfrak{L}$ ne contenant aucun mur de C, on a $C = D_{\mathfrak{L}-\mathfrak{F}}(C)$.

c) Soit a un point de C; on a évidemment $C \subset D_{\mathfrak{M}}(a)$. Soit a' un point de $D_{\mathfrak{M}}(a)$; comme le segment fermé $[aa']$ est compact, l'ensemble $\mathfrak{F}$ des hyperplans $H \in \mathfrak{H}$ qui rencontrent $[aa']$ est fini. Comme a et a' sont strictement du même côté de tout mur de C, aucun mur de C n'appartient à $\mathfrak{F}$; d'après *b*), on a donc $C = D_{\mathfrak{H}-\mathfrak{F}}(C)$. Comme $a' \in D_{\mathfrak{H}-\mathfrak{F}}(a)$, on a $a' \in C$. On a donc prouvé que $D_{\mathfrak{M}}(a) \subset C$, ce qui démontre la première partie de la proposition.

d) Pour prouver la dernière assertion de la proposition, il suffit évidemment de montrer qu'une partie F de $\overline{C}$ qui est une facette de E relativement à $\mathfrak{M}$, est une facette de E relativement à $\mathfrak{H}$, ou encore que tout hyperplan $H \in \mathfrak{H}$ qui rencontre F contient F. Soit donc H un hyperplan rencontrant F et ne le contenant pas. Comme F est ouvert dans son support affine, il n'est pas tout entier d'un même côté de H. Il en résulte que $\overline{C}$ n'est pas tout entier d'un même côté de H et par suite l'hyperplan H ne peut pas appartenir à $\mathfrak{H}$, ce qui achève la démonstration.

Remarques. — 1) Il résulte de la formule (6) et de la prop. 9 que l'adhérence d'une chambre C est l'intersection des demi-espaces fermés limités par un mur de C et qui contiennent C.

2) Soit F une facette dont le support est un hyperplan L; on va montrer qu'il existe deux chambres dont F soit une face. Soit $\mathfrak{N}$ l'ensemble des hyperplans $H \neq L$ appartenant à $\mathfrak{H}$; posons $A = D_{\mathfrak{N}}(F)$ et notons D^+ et D^- les demi-espaces ouverts limités par L. L'ensemble A est ouvert et contient $F \subset L$, et comme tout point de L est adhérent à D^+ et à D^-, les ensembles $C^+ = A \cap D^+$ et $C^- = A \cap D^-$ sont non vides; ce sont des chambres. De plus, l'hyper-

plan L rencontre $D_{\mathfrak{N}}(F) = D_{\mathfrak{N}}(C^+)$; la prop. 4 montre que L est un mur de C^+ et F, qui rencontre $L \cap D_{\mathfrak{N}}(F)$, est une face de C^+; de même, F est une face de C^-. Enfin, soit C une chambre dont F soit une face, et supposons par exemple $D^+ = D_L(C)$; d'après la prop. 4, l'ensemble $D_{\mathfrak{N}}(C)$ rencontre F, donc est égal à $D_{\mathfrak{N}}(F)$ et l'on a

$$C = D_{\mathfrak{H}}(C) = D_L(C) \cap D_{\mathfrak{N}}(C) = D^+ \cap D_{\mathfrak{N}}(F) = C^+.$$

5. Dièdres

Rappelons (*Alg.*, chap. II, 3e éd., § 9, n° 3) que deux sous-espaces affines P et P′ de E sont dits parallèles s'il existe un vecteur t dans T tel que $P' = t + P$. Il est clair que la relation « P et P′ sont parallèles » est une relation d'équivalence dans l'ensemble des sous-espaces affines de E.

Lemme 1. — *Deux hyperplans non parallèles ont une intersection non vide.*

Soient H et H′ deux hyperplans non parallèles, $a \in H$ et $a' \in H'$; il existe deux hyperplans M et M′ dans l'espace vectoriel T tels que $H = M + a$ et $H' = M' + a'$; comme H et H′ ne sont pas parallèles, on a $M \neq M'$, d'où $T = M + M'$; il existe alors $u \in M$ et $u' \in M'$ tels que $a' - a = u - u'$, et le point $u + a = u' + a'$ appartient à $H \cap H'$.

Lemme 2. — *Soient* H *et* H′ *deux hyperplans distincts dans* E, *et* f, f' *deux fonctions affines sur* E *telles que* H (resp. H′) *se compose des points* a *de* E *tels que* $f(a) = 0$ (resp. $f'(a) = 0$). *Enfin soit* L *un hyperplan dans* E. *On suppose l'une des hypothèses suivantes remplies* :

a) *Les hyperplans* H, H′ *et* L *sont parallèles.*

b) *Les hyperplans* H *et* H′ *ne sont pas parallèles, et* $H \cap H' \subset L$.

Il existe alors des nombres réels λ, λ' *non tous deux nuls tels que* L *se compose des* $a \in E$ *qui annulent la fonction affine* $g = \lambda.f + \lambda'.f'$.

Le lemme étant trivial lorsque $L = H$, nous pouvons supposer qu'il existe un point a de L avec $a \notin H$. Posons $\lambda = f'(a)$, $\lambda' = -f(a)$ et

$$g = \lambda.f + \lambda'.f';$$

on a $\lambda' \neq 0$ puisque $a \notin H$; de plus, comme $H \neq H'$, il existe $b \in H$ tel que $b \notin H'$, d'où $f(b) = 0$, $f'(b) \neq 0$, et donc $g(b) = -f(a).f'(b)$ est non nul. L'ensemble L_1 des points où s'annule la fonction affine $g \neq 0$ est alors un hyperplan dans E; on a $g(a) = 0$, d'où $a \in L_1$.

a) *Supposons* H *et* H′ *parallèles* : tout point de $L_1 \cap H$ annule g et f, donc aussi f' puisque $\lambda' \neq 0$, et appartient donc à H′; mais comme H et H′ sont parallèles et distincts, ils sont disjoints, d'où $L_1 \cap H = \varnothing$, et le lemme 1 montre que L_1 est parallèle à H. Comme on a $a \in L$ et $a \in L_1$, on a donc $L = L_1$.

b) *Supposons* H *et* H′ *non parallèles* : d'après le lemme 1, il existe un point c dans $H \cap H'$; nous munirons E de la structure d'espace vectoriel obtenue en prenant c comme origine. Alors $H \cap H'$ est un sous-espace vectoriel de codimension 2 dans E, et comme on a $a \notin H$, le sous-espace vectoriel M de E engendré par $H \cap H'$ et a est un hyperplan; comme on a $H \cap H' \subset L \cap L_1$ et $a \in L \cap L_1$, on a $M \subset L \cap L_1$, d'où $M = L = L_1$. C.Q.F.D.

PROPOSITION 10. — *Soit* C *une chambre, soient* H *et* H' *deux murs de* C, *et soit* L *un hyperplan rencontrant* $D_H(C) \cap D_{H'}(C)$. *On suppose que* H *est distinct de* H' *et que l'une des conditions suivantes est satisfaite* :

a) *Les hyperplans* H, H' *et* L *sont parallèles.*

b) *Les hyperplans* H *et* H' *ne sont pas parallèles, et* $H \cap H' \subset L$.

Alors L *rencontre* C.

Soit b (resp. b') un point de la face de C de support H (resp. H'); il est immédiat que tout point du segment $[bb']$ distinct de b et b' appartient à C.

Introduisons une fonction affine f nulle en tout point de H et telle que $f(x) > 0$ pour x dans $D_H(C)$; introduisons de même une fonction affine f' ayant la propriété analogue par rapport à H'. Appliquant le lemme 2, on peut trouver des nombres λ et λ' et une fonction affine g ayant les propriétés indiquées. On a $(\lambda, \lambda') \neq (0, 0)$ et pour tout point x de $L \cap D_H(C) \cap D_{H'}(C)$, on a $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ et $\lambda.f(x) + \lambda'.f'(x) = 0$, d'où $\lambda\lambda' < 0$. Par ailleurs, on a $g(b) = \lambda'.f'(b)$ et $g(b') = \lambda.f(b')$, et comme $f(b') > 0, f'(b) > 0$, on a $g(b).g(b') < 0$. Les points b et b' sont strictement de part et d'autre de l'hyperplan L, et il existe un point c de L appartenant à $[bb']$ et distinct de b et b', donc appartenant à C.

6. Exemples : cônes simpliciaux et simplexes

a) Soient a un point de E, et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de T; tout point de E s'écrit alors d'une manière et d'une seule sous la forme

$$x = a + \xi_1.e_1 + \cdots + \xi_d.e_d \tag{7}$$

avec $\xi_1, \ldots, \xi_d$ réels. On notera e_i' la fonction affine sur E qui, pour tout $x \in E$ écrit sous la forme (7), prend la valeur ξ_i. On notera H_i l'hyperplan formé des x tels que $e_i'(x) = 0$, et $\mathfrak{H}$ l'ensemble des hyperplans $H_1, \ldots, H_d$. Pour toute partie J de l'ensemble $I = \{1, 2, \ldots, d\}$, on posera $H_J = \bigcap_{i \in J} H_i$; pour toute suite $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ de nombres tous égaux à 0, 1 ou -1, on notera $F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $e_i'(x)$ soit de signe (*Top. gén.*, chap. IV, § 3, n° 2) ε_i pour tout i dans I. Il est immédiat que les facettes définies par $\mathfrak{H}$ dans E sont les ensembles $F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ et que ces ensembles sont deux à deux distincts; le support de $F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ est égal à H_J si J est l'ensemble des $i \in I$ tels que $\varepsilon_i = 0$; en particulier, les chambres sont les ensembles de la forme $F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ où chacun des nombres ε_i est égal à 1 ou -1.

L'ensemble $C = F(1, \ldots, 1)$ formé des x avec $e_i'(x) > 0$ pour tout $i \in I$ est une chambre, qu'on appellera le *cône simplicial ouvert de sommet a défini par la base* $(e_1, \ldots, e_d)$. Son adhérence se compose des points x tels que $e_i'(x) \geqslant 0$ pour tout $i \in I$ lorsque $d \geqslant 1$; sinon, cette adhérence est vide. Pour toute partie J de I, soit C_J l'ensemble des points x de E tels que $e_i'(x) = 0$ pour $i \in J$ et $e_i'(x) > 0$ pour $i \in I - J$. Alors C_J est une facette de support H_J, et c'est un cône simplicial ouvert de sommet a dans l'espace affine H_J; de plus, on a $\overline{C} = \bigcup_{J \subset I} C_J$. En particulier, les murs de C sont les hyperplans H_i pour $i \in I$, et la face de C contenue dans H_i est égale à $C_{\{i\}}$.

On ne change aucun des ensembles H_i, H_J, C, C_J et $F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ si l'on remplace la base $(e_1, \ldots, e_d)$ par une base $(\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_d e_d)$ avec $\lambda_i > 0$ pour tout i.

b) Supposons maintenant donné un système affinement libre de points de E, soit $(a_0, a_1, \ldots, a_d)$. On sait que tout point de E s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $x = \xi_0 . a_0 + \cdots + \xi_d . a_d$ avec $\xi_0, \ldots, \xi_d$ réels et $\xi_0 + \cdots + \xi_d = 1$ (*Alg.*, chap. II, 3e éd., § 9, n° 3). On définit des fonctions affines $f_0, \ldots, f_d$, la fonction f_i faisant correspondre à tout point x mis sous la forme précédente le nombre ξ_i. Nous noterons H_i l'hyperplan de E défini par $f_i(x) = 0$ et $\mathfrak{H}$ l'ensemble des hyperplans $H_0, H_1, \ldots, H_d$; enfin, nous poserons $I = \{0, 1, \ldots, d\}$. On appelle *simplexe ouvert de sommets* $a_0, \ldots, a_d$ l'ensemble C des points x de E tels que $f_i(x) > 0$ pour tout $i \in I$; c'est une des chambres définies par $\mathfrak{H}$ dans E. L'adhérence de C est l'ensemble $\overline{C}$ des points x de E tels que $f_i(x) \geqslant 0$ pour tout $i \in I$; c'est l'enveloppe convexe de l'ensemble fini $\{a_0, \ldots, a_d\}$ et l'on voit facilement que les points extrémaux de $\overline{C}$ sont $a_0, \ldots, a_d$.

Pour toute partie J de I, distincte de I, posons $H_J = \bigcap_{i \in J} H_i$ et soit C_J l'ensemble des points x de E tels que $f_i(x) = 0$ pour $i \in J$ et $f_i(x) > 0$ pour $i \in I - J$. L'ensemble C_J est un simplexe ouvert dans l'espace affine H_J ayant pour sommets les points a_i pour $i \in I - J$; on a $C_\varnothing = C$, $\overline{C} = \bigcup_{J \neq I} C_J$ et $C_J \neq C_{J'}$ pour $J \neq J'$; de plus C_J est une facette de support H_J. En particulier, les murs de C sont $H_0, \ldots, H_d$ et $C_{\{i\}}$ est la face contenue dans H_i.

Pour toute partie non vide K de I, soit B_K l'ensemble des points x de E tels que $f_i(x) > 0$ pour $i \in K$ et $f_i(x) < 0$ pour $i \in I - K$. Les ensembles B_K sont les chambres définies par $\mathfrak{H}$ dans E et l'on a $B_I = C$. On voit facilement que $\overline{C}$ est compact; par contre, si K est une partie de I distincte de I, de cardinal p, la chambre B_K contient la suite des points x_n définis pour $n \geqslant 2$ par

$$f_i(x_n) = \begin{cases} n & \text{pour } i \in K \\ (1 - pn)/(d + 1 - p) & \text{pour } i \in I - K \end{cases}$$

et ceci prouve que B_K n'est pas relativement compacte.

§ 2. Réflexions

Dans ce paragraphe, on désigne par K un corps commutatif, supposé de caractéristique $\neq 2$ à partir du nº 2. On note V un espace vectoriel sur K.

1. Pseudo-réflexions

Définition 1. — *On dit qu'un endomorphisme s de l'espace vectoriel* V *est une pseudo-réflexion si* $1 - s$ *est de rang* 1.

Soit s une pseudo-réflexion dans V, et soit D l'image de $1 - s$. Par définition, D est de dimension 1; étant donné $a \neq 0$ dans D, il existe donc une forme linéaire non nulle a^* sur V telle que $x - s(x) = \langle x, a^* \rangle . a$ pour tout x dans V.

Réciproquement, étant donnés $a \neq 0$ dans V et une forme linéaire $a^* \neq 0$ sur V, la formule

$$s_{a, a^*}(x) = x - \langle x, a^* \rangle . a \quad (x \in \mathrm{V}) \tag{1}$$

définit une pseudo-réflexion s_{a, a^*}; l'image de $1 - s_{a, a^*}$ est engendrée par a et le noyau de $1 - s_{a, a^*}$ est l'hyperplan de V formé des x tels que $\langle x, a^* \rangle = 0$ Si V* est le dual de V, il est immédiat que l'endomorphisme $s_{a^*, a}$ de V* transposé de s_{a, a^*} est la pseudo-réflexion définie par la formule:

$$s_{a^*, a}(x^*) = x^* - \langle x^*, a \rangle . a^* \quad (x^* \in \mathrm{V}^*). \tag{2}$$

Si a est un vecteur non nul, on appelle *pseudo-réflexion de vecteur a* toute pseudo-réflexion s telle que a appartienne à l'image de $1 - s$. On appelle *hyperplan d'une pseudo-réflexion s* le noyau de $1 - s$, ensemble des vecteurs x tels que $s(x) = x$.

Proposition 1. — *Soient* G *un groupe et* ρ *une représentation linéaire irréductible de* G *dans un espace vectoriel* V; *on suppose qu'il existe un élément g de* G *tel que* $\rho(g)$ *soit une pseudo-réflexion.*

(i) *Tout endomorphisme de* V *commutant à* $\rho(\mathrm{G})$ *est une homothétie, et* ρ *est absolument irréductible.*

(ii) *Supposons* V *de dimension finie. Soit* B *une forme bilinéaire non nulle sur* V *invariante par* $\rho(\mathrm{G})$. *Alors* B *est non dégénérée, symétrique ou antisymétrique, et toute forme bilinéaire sur* V *invariante par* $\rho(\mathrm{G})$ *est proportionnelle à* B.

Soit u un endomorphisme de V commutant à $\rho(\mathrm{G})$. Soient par ailleurs g un élément de G tel que $\rho(g)$ soit une pseudo-réflexion, et D l'image de $1 - \rho(g)$. Comme D est de dimension 1 et que $u(\mathrm{D}) \subset \mathrm{D}$, il existe α dans K tel que $u - \alpha . 1$ s'annule sur D; le noyau N de $u - \alpha . 1$ est alors un sous-espace vectoriel de V stable par $\rho(\mathrm{G})$, non nul puisqu'il contient D; comme ρ est irréductible, on a $\mathrm{N} = \mathrm{V}$ et $u = \alpha . 1$. La deuxième partie de (i) résulte de la première d'après *Alg.*, chap. VIII, § 13, nº 4, cor. de la prop. 5.

Soit N (resp. N′) le sous-espace de V formé des x tels que $B(x, y) = 0$ (resp. $B(y, x) = 0$) pour tout y dans V; comme B est invariante par $\rho(G)$, les sous-espaces N et N′ de V sont stables par $\rho(G)$ et distincts de V puisque $B \neq 0$. Puisque ρ est irréductible, on a $N = N' = 0$, et B est donc non dégénérée.

Comme V est de dimension finie, toute forme bilinéaire sur V est donnée par la formule

$$B'(x, y) = B(u(x), y) \tag{3}$$

où u est un endomorphisme convenable de V. Si B′ est invariante par $\rho(G)$, l'endomorphisme u commute à $\rho(G)$. Soient en effet x, y dans V et g dans G; comme B et B′ sont invariantes par $\rho(G)$, on a

$$\begin{aligned} B(u(\rho(g)(x)), y) &= B'(\rho(g)(x), y) = B'(x, \rho(g^{-1})(y)) \\ &= B(u(x), \rho(g^{-1})(y)) = B(\rho(g)(u(x)), y), \end{aligned}$$

d'où $u(\rho(g)(x)) = \rho(g)(u(x))$ puisque B est non dégénérée. D'après (i), il existe α dans K avec $u = \alpha.1$, d'où $B' = \alpha.B$.

Appliquons ceci en particulier à la forme bilinéaire $B'(x, y) = B(y, x)$; on a alors $B(y, x) = \alpha.B(x, y) = \alpha^2.B(y, x)$ quels que soient x, y dans V, et comme B est non nulle, on a $\alpha^2 = 1$, d'où $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$. Donc B est symétrique ou antisymétrique.

2. Réflexions

On rappelle que sauf mention expresse du contraire, le corps K est désormais supposé de caractéristique différente de 2. On appellera *réflexion* dans V toute pseudo-réflexion s telle que $s^2 = 1$; si s est une réflexion, on notera V_s^+ le noyau de $s - 1$ et V_s^- celui de $s + 1$.

Proposition 2. — *Soit s un endomorphisme de* V.

(i) *Si s est une réflexion,* V *est somme directe de l'hyperplan* V_s^+ *et de la droite* V_s.

(ii) *Réciproquement, supposons que* V *soit somme directe d'un hyperplan* H *et d'une droite* D *tels que $s(x) = x$ et $s(y) = -y$ pour $x \in H$ et $y \in D$. Alors s est une réflexion, et l'on a $H = V_s^+$ et $D = V_s^-$. Enfin,* D *est l'image de $1 - s$.*

(i) Si s est une réflexion, V_s^+ est un hyperplan. Si x appartient à $V_s^+ \cap V_s^-$, on a $x = s(x) = -x$, d'où $x = 0$ puisque K est de caractéristique $\neq 2$. Enfin, pour tout x dans V, le vecteur $x' = s(x) + x$ (resp. $x'' = s(x) - x$) appartient à V_s^+ (resp. V_s^-) puisque $s^2 = 1$, et l'on a $2x = x' - x''$. Donc V est somme directe de V_s^+ et de V_s^-, et V_s^- est nécessairement de dimension 1 puisque V_s^+ est un hyperplan.

(ii) Sous les hypothèses faites, tout élément de V s'écrit de manière unique sous la forme $v = x + y$ avec $x \in H$ et $y \in D$ et l'on a $s(v) = x - y$; l'assertion (ii) résulte immédiatement de là.

Corollaire. — *Si* V *est de dimension finie, toute réflexion est de déterminant* -1.

Soit s une réflexion dans V. La prop. 2, (i) montre qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V telle que $s(e_1) = e_1, \ldots, s(e_{n-1}) = e_{n-1}$ et $s(e_n) = -e_n$, d'où $\det s = -1$.

PROPOSITION 3. — *Soit s une réflexion dans* V.

(i) *Pour qu'un sous-espace* V′ *de* V *soit stable par s, il faut et il suffit que l'on ait* $V_s^- \subset V'$ *ou* $V' \subset V_s^+$.

(ii) *Pour qu'un endomorphisme u de* V *commute à s, il faut et il suffit que* V_s^+ *et* V_s^- *soient stables par u.*

(i) Si $V' \subset V_s^+$, on a $s(x) = x$ pour tout x dans V′, d'où $s(V') \subset V'$. Supposons $V_s^- \subset V'$; pour tout x dans V′, on a $s(x) - x \in V_s^- \subset V'$, d'où $s(x) \in V'$; on a encore $s(V') \subset V'$. Réciproquement, supposons que l'on ait $s(V') \subset V'$; si l'on a $V' \not\subset V_s^+$, il existe x dans V′ avec $s(x) \neq x$; le vecteur non nul $a = s(x) - x$ appartient à la droite V_s^-, donc engendre cet espace; comme on a $a \in V'$, on a $V_s^- \subset V'$.

(ii) Supposons d'abord que u commute à s. Si x est un vecteur tel que $s(x) = \varepsilon . x$ (où $\varepsilon = \pm 1$), on a $s(u(x)) = u(s(x)) = \varepsilon . u(x)$, donc V_s^+ et V_s^- sont stables par u. Réciproquement, supposons V_s^+ et V_s^- stables par u; il est clair que $us - su$ est nul dans V_s^+ et dans V_s^-, et comme V est somme directe de V_s^+ et V_s^-, on a $us - su = 0$.

COROLLAIRE. — *Pour que deux réflexions distinctes s et u soient permutables, il faut et il suffit que l'on ait* $V_s^- \subset V_u^+$ *et* $V_u^- \subset V_s^+$.

Si l'on a $V_s^- \subset V_u^+$ et $V_u^- \subset V_s^+$, la prop. 3, (i) montre que V_u^+ et V_u^- sont stables par s, d'où $su = us$ d'après la prop. 3, (ii).

Réciproquement, si l'on a $su = us$, le sous-espace V_s^- est stable par u d'après (ii); d'après (i), il y a donc deux cas possibles :

a) On a $V_u^- \subset V_s^-$: ces deux espaces étant de dimension 1 sont donc égaux, d'où $V_s^- \not\subset V_u^+$; comme V_u^+ est stable par s, on a donc $V_u^+ \subset V_s^+$, et ces deux hyperplans sont égaux. D'où $s = u$, ce qui est exclu.

b) On a $V_s^- \subset V_u^+$: l'image de $1 - s$ est donc contenue dans le noyau de $1 - u$, d'où $(1 - u).(1 - s) = 0$. Comme u et s commutent, on a aussi $(1 - s).(1 - u) = 0$, c'est-à-dire $V_u^- \subset V_s^+$.

Remarque. — Soit $a \neq 0$ dans V et soit a^* une forme linéaire non nulle sur V : de la formule (1), on déduit

$$s_{a, a^*}^2(x) = x + (\langle a, a^* \rangle - 2)\langle x, a^* \rangle . a$$

et par suite s_{a, a^*} *est une réflexion si et seulement si l'on a* $\langle a, a^* \rangle = 2$. Dans ces conditions, on a alors $s_{a, a^*}(a) = -a$.

3. Réflexions orthogonales

Supposons V de dimension finie. Soit B une forme bilinéaire non dégénérée sur V. D'après *Alg.*, chap. IX, § 6, n° 3, prop. 4, pour qu'une réflexion s dans

V laisse B invariante, il faut et il suffit que les sous-espaces V_s^+ et V_s^- de V soient orthogonaux pour B; ils sont alors non isotropes. De plus, pour tout hyperplan non isotrope H dans V, il existe une réflexion s et une seule qui conserve B et induise l'identité sur H; c'est la *symétrie par rapport à* H, cf. *Alg.*, chap. IX, § 6, n° 3. Si a est un vecteur non nul orthogonal à H, on a alors $B(a, a) \neq 0$, et la réflexion s est donnée par la formule

$$s(x) = x - 2\frac{B(x, a)}{B(a, a)} \cdot a \qquad \text{pour tout} \quad x \in V, \tag{4}$$

d'après *Alg.*, chap. IX, § 6, n° 4, formule (6). On dit aussi que s est *la réflexion orthogonale par rapport à* H.

PROPOSITION 4. — *On suppose* V *de dimension finie. Soient* B *une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur* V, X *un sous-espace de* V *et* X^0 *l'orthogonal de* X *par rapport à* B; *enfin soit s la réflexion orthogonale par rapport à un hyperplan non isotrope* H *de* V. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est stable par s.*

(ii) X^0 *est stable par s.*

(iii) H *contient* X *ou* X^0.

On a $V_s^+ = H$, et d'après ce qu'on a rappelé, V_s^- est l'orthogonal H^0 de H par rapport à B. Pour que X soit stable par s, il faut et il suffit d'après la prop. 3, (i) que l'on ait $X \subset H$ ou $H^0 \subset X$; mais la relation $H^0 \subset X$ équivaut à $X^0 \subset H$ d'après *Alg.*, chap. IX, § 1, n° 6, cor. 1 de la prop. 4. On a donc prouvé l'équivalence de (i) et (iii); celle de (ii) et (iii) s'en déduit en échangeant les rôles de X et X^0, car $(X^0)^0 = X$.

4. Réflexions orthogonales dans un espace affine euclidien

Conservons les notations du numéro précédent, et soit E un espace affine dont V est l'espace des translations. La donnée de la forme B sur V munit E d'une structure d'*espace euclidien* (*Alg.*, chap. IX, § 6, n° 6).

Soit H un hyperplan non isotrope de E. La symétrie par rapport à H (*Alg.*, chap. IX, § 6, n° 6) s'appelle aussi la *réflexion orthogonale par rapport à* H; on la note souvent s_H. On a $s_H^2 = 1$, et s_H est l'unique *déplacement* (*loc. cit.*, déf. 3) de E, distinct de l'identité, et laissant fixes les éléments de H. L'automorphisme de V associé à s_H est la réflexion orthogonale par rapport à la direction de H (qui est un hyperplan non isotrope de V).

Tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = h + v$, avec $h \in H$, et $v \in V$ orthogonal à H; on a

$$s_H(h + v) = h - v.$$

PROPOSITION 5. — *Soient* H *et* H′ *deux hyperplans de* E *parallèles et non isotropes Il existe un unique vecteur* $v \in V$, *orthogonal à* H, *et tel que* $H' = H + v$. *Le déplacement* $s_{H'} s_H$ *est la translation de vecteur* $2v$.

L'existence et l'unicité de v sont immédiates. L'automorphisme de V associé à $s_{H'}s_H$ est l'identité; donc $s_{H'}s_H$ est une translation. D'autre part, soit $a \in H'$; on a $a - v \in H$ et

$$s_{H'}s_H(a - v) = s_{H'}(a - v) = a + v = (a - v) + 2v,$$

ce qui montre que $s_{H'}s_H$ est la translation de vecteur $2v$.

Corollaire. — *Soient* H *et* H′ *deux hyperplans parallèles, distincts et non isotropes. Si* K *est de caractéristique zéro* (resp. $p > 0$, *avec* $p \neq 2$) *le groupe de déplacements de* E *engendré par* s_H *et* $s_{H'}$ *est un groupe diédral infini* (resp. *d'ordre* $2p$).

En effet, d'après la prop. 2 du chap. IV, § 1, nº 2, il suffit de vérifier que $s_{H'}s_H$ est d'ordre infini (resp. d'ordre p), ce qui est évident.

Remarque. — Gardons les notations de la prop. 5 et supposons de plus que $K = \mathbf{R}$. Posons $s = s_H$ et $s' = s_{H'}$. Soit H_n l'hyperplan $H + n.v$ et soit C_n l'ensemble des points de E de la forme $a + \xi.v$ avec $a \in H$ et $n < \xi < n + 1$. Les C_n sont des ensembles ouverts connexes et ils forment une partition de $E - \bigcup_n H_n$. Ce sont donc les *chambres* définies par le système $\mathrm{H} = (H_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ dans E. La translation $(s's)^n$ transforme la chambre $C = C_0$ en la chambre C_{2n}, et comme $s(C_0) = C_{-1}$, on a $(s's)^n s(C) = C_{2n-1}$. Il en résulte que *le groupe diédral* W *engendré par* s *et* s' *permute de façon simplement transitive les chambres* C_n. De plus, montrons que, *si les chambres* C *et* $w(C)$ *sont de part et d'autre de* H (pour $w \in W$), *on a* $l(sw) = l(w) - 1$ (les longueurs étant prises par rapport à $S = \{s, s'\}$ (chap. IV, § 1, nº 1)). En effet, on a alors $w(C) = C_n$ avec $n < 0$. Si $n = -2k$, on a $w = (ss')^k$ et $sw = (s's)^{k-1}s'$, d'où $l(w) = 2k$ et $l(sw) = 2k - 1$ (chap. IV, § 1, nº 2, *Remarque*). Si $n = -2k - 1$, on a $w = (ss')^k s$ et $sw = (s's)^k$, d'où $l(w) = 2k + 1$ et $l(sw) = 2k$.

5. Compléments sur les rotations planes

Dans ce nº, on désigne par V un espace vectoriel réel de dimension 2, muni d'un *produit scalaire* (c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique positive *non dégénérée*) et d'une *orientation.* Les mesures d'angles seront prises par rapport à la base 2π; la mesure principale d'un angle de demi-droites (resp. de droites) est donc un nombre réel θ tel que $0 \leqslant \theta < 2\pi$ (resp. $0 \leqslant \theta < \pi$) (*Top. gén.*, chap. VIII, § 2, nº 3 et nº 6). Pour tout nombre réel θ, on parlera par abus de langage de l'angle θ pour désigner un angle dont une mesure est θ et on note ρ_θ la rotation d'angle θ (*Alg.*, chap. IX, § 10, nº 3).

Proposition 6. — *Soit* s *la réflexion orthogonale par rapport à une droite* D *de* V. *Si* Δ *et* Δ' *sont deux demi-droites d'origine* 0 (resp. *deux droites passant par* 0) *de* V, *on a* :

$$\widehat{(s(\Delta), s(\Delta'))} \equiv -\widehat{(\Delta, \Delta')} \quad (\text{mod. } 2\pi) \ (\text{resp. } (\text{mod. } \pi)).$$

Soit u une rotation transformant Δ en Δ'. Comme su est une transformation orthogonale de V de déterminant -1, c'est une réflexion et l'on a donc $(su)^2 = 1$. Par suite, $u^{-1} = sus^{-1}$ transforme $s(\Delta)$ en $s(\Delta')$, d'où la proposition.

Corollaire. — *Soient* D *et* D′ *deux droites de* V *et soit* θ *une mesure de l'angle* $(\widehat{\mathrm{D}, \mathrm{D}'})$. *On a* $s_{\mathrm{D}'}s_{\mathrm{D}} = \rho_{2\theta}$.

On sait que $s_{\mathrm{D}'}s_{\mathrm{D}}$ est une rotation puisque son déterminant vaut 1. Soient Δ et Δ' des demi-droites d'origine 0 portées par D et D′. On a :

$$\begin{aligned}(\widehat{\Delta, s_{\mathrm{D}'}s_{\mathrm{D}}(\Delta)}) &\equiv (\widehat{\Delta, s_{\mathrm{D}'}(\Delta)}) \equiv (\widehat{\Delta, \Delta'}) + (\widehat{\Delta', s_{\mathrm{D}'}(\Delta)}) \\ &\equiv (\widehat{\Delta, \Delta'}) + (\widehat{s_{\mathrm{D}'}(\Delta'), s_{\mathrm{D}'}(\Delta)}) \\ &\equiv (\widehat{\Delta, \Delta'}) - (\widehat{\Delta', \Delta}) \equiv 2(\widehat{\Delta, \Delta'}) \pmod{2\pi}\end{aligned}$$

d'où le corollaire.

Soient maintenant Δ et Δ' deux demi-droites de V telles que

$$\Delta \neq \Delta' \qquad \text{et} \qquad \Delta \neq -\Delta',$$

et soient s et s' les réflexions orthogonales par rapport aux droites D et D′ contenant Δ et Δ'. Soit θ la mesure principale de l'angle $(\widehat{\mathrm{D}, \mathrm{D}'})$. Si $\theta \in \pi\mathbf{Q}$, on désigne par m le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $m\theta \in \pi\mathbf{Z}$. Si $\theta \notin \pi\mathbf{Q}$, on pose $m = \infty$. Soit W le groupe engendré par s et s'.

Proposition 7. — *Le groupe* W *est un groupe diédral* (chap. IV, § 1, n° 2) *d'ordre* $2m$. *Il se compose des rotations* $\rho_{2n\theta}$ *et des produits* $\rho_{2n\theta}s$ *pour* $n \in \mathbf{Z}$. *Les transformées de* D *et* D′ *par les éléments de* W *sont les transformées de* D *par les rotations* $\rho_{n\theta}$ *pour* $n \in \mathbf{Z}$.

Le cor. de la prop. 6 montre que $s's$ est d'ordre m, d'où la première assertion. Les éléments de W sont donc de la forme $(s's)^n = \rho_{2n\theta}$ ou $(s's)^n s = \rho_{2n\theta}s$; la dernière assertion en résulte, puisque $\mathrm{D}' = \rho_\theta(\mathrm{D})$.

Corollaire. — *Soit* C *le secteur angulaire ouvert réunion des demi-droites ouvertes* Δ_1 *d'origine* 0 *telles que* $0 < (\widehat{\Delta, \Delta_1}) < \theta$. *Pour qu'aucune transformée de* D *ou de* D′ *par un élément de* W *ne rencontre* C, *il faut et il suffit que* m *soit fini et que*

$$\theta = \pi/m.$$

Si $m = \infty$, l'image de l'ensemble des $n\theta$ ($n \in \mathbf{Z}$) est dense dans $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ (*Top. gén.*, chap. VII, § 1, cor. de la prop. 11); la réunion des transformées de D par les éléments de W est donc dense dans V et rencontre C. Si m est fini et si $\theta = k\pi/m$, avec $1 < k < m$, les entiers k et m étant étrangers, il existe un entier h tel que $hk \equiv 1 \bmod. m$; on a alors $(\widehat{\mathrm{D}, \rho_{h\theta}(\mathrm{D})}) \equiv \pi/m \pmod{\pi}$, et $\rho_{h\theta}(\mathrm{D})$ rencontre C. Ceci montre que la condition est nécessaire. La réciproque est immédiate.

Remarque. — Supposons m fini et $\theta = \pi/m$. Si $n \in \mathbf{Z}$, soit C_n la réunion des demi-droites ouvertes Δ_1 d'origine 0 telles que

$$n\theta < (\widehat{\Delta, \Delta_1}) < (n+1)\theta.$$

Les C_n pour $-m \leqslant n < m$ sont des ouverts connexes et forment une partition de $E - \bigcup_n D_n$ (en posant $D_n = \rho_{n\theta}(D)$). Ce sont donc les *chambres* déterminées dans E par le système des m droites D_n ($1 \leqslant n \leqslant m$). On a $C_{2k} = \rho_{2k\theta}(C)$ et $C_{2k-1} = \rho_{2k\theta}s(C)$. De plus, on a $C_n = C$ si et seulement si $n \in 2m\mathbf{Z}$. Par suite, *le groupe* W *permute de façon simplement transitive les chambres* C_n.

Montrons enfin que, *si* $w \in W$ *est tel que les chambres* C *et* $w(C)$ *soient de part et d'autre de la droite* D, *on a* $l(sw) = l(w) - 1$ (les longueurs étant prises par rapport à $S = \{s, s'\}$). En effet, on a alors $w(C) = C_n$, avec $-m \leqslant n < 0$. Si $n = -2k$, on a $w = (ss')^k$ et $sw = s'(ss')^{k-1}$, d'où $l(w) = 2k$ et $l(sw) = 2k - 1$ (chap. IV, § 1, n° 2, *Remarque*)). Si $n = -2k + 1$, on a

$$w = (ss')^{k-1}s \qquad \text{et} \qquad sw = (s's)^{k-1},$$

d'où $l(w) = 2k - 1$ et $l(sw) = 2k - 2$. C.Q.F.D.

§ 3. Groupes de déplacements engendrés par des réflexions

Dans ce paragraphe, on désigne par E un espace affine *réel* de dimension finie d, par T l'espace des translations de E. On suppose T muni d'un produit scalaire (c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique positive *non dégénérée*) noté $(t|t')$. Pour $t \in T$, on pose $\|t\| = (t|t)^{1/2}$. La fonction $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E, qui définit la topologie de E (§ 1).

On désigne par $\mathfrak{H}$ un ensemble d'hyperplans de E et par W le groupe de déplacements de l'espace euclidien E engendré par les réflexions orthogonales s_H par rapport aux hyperplans $H \in \mathfrak{H}$ (§ 2, n° 4). On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

(D 1) *Pour tout* $w \in W$ *et tout* $H \in \mathfrak{H}$, *l'hyperplan* $w(H)$ *appartient à* $\mathfrak{H}$;

(D 2) *Le groupe* W *muni de la topologie discrète opère proprement dans* E.

Comme E est localement compact, il résulte de la *Remarque* du § 4, n° 5 de *Top. gén.*, chap. III, 3e éd., que la condition (D 2) équivaut à la condition suivante :

(D' 2) *Quelles que soient les parties compactes* K *et* L *de* E, *l'ensemble des* $w \in W$ *tels que* $w(K)$ *rencontre* L *est fini.*

1. Résultats préliminaires

Lemme 1. — *L'ensemble d'hyperplans* $\mathfrak{H}$ *est localement fini.*

Soit en effet K une partie compacte de E. Si un hyperplan $H \in \mathfrak{H}$ rencontre K, l'ensemble $s_H(K)$ rencontre aussi K, puisque tout point de $K \cap H$ est fixe par s_H. L'ensemble des $H \in \mathfrak{H}$ rencontrant K est donc fini d'après (D' 2).

On peut donc appliquer à E et $\mathfrak{H}$ les définitions et résultats du § 1. Nous appellerons simplement chambres, facettes, murs, etc. relatifs à W les chambres, facettes, murs, etc. définis dans E par $\mathfrak{H}$. Un déplacement $w \in W$ permute entre elles les chambres, les facettes, les murs, etc.

Lemme 2. — *Soit* C *une chambre.*

(i) *Pour tout* $x \in E$, *il existe un élément* $w \in W$ *tel que* $w(x) \in \overline{C}$.

(ii) *Pour toute chambre* C′, *il existe un élément* $w \in W$ *tel que* $w(C') = C$.

(iii) *Le groupe* W *est engendré par l'ensemble des réflexions orthogonales par rapport aux murs de* C.

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des murs de C et soit $W_{\mathfrak{M}}$ le sous-groupe de W engendré par les réflexions par rapport aux murs de C. Démontrons (i) : soit $x \in E$ et soit J l'orbite de x par rapport au groupe $W_{\mathfrak{M}}$. Il suffit de prouver que J rencontre $\overline{C}$.

Soit a un point de C; il existe une boule fermée B de centre a rencontrant J; comme B est compacte, la propriété (D′ 2) du n° 1 montre que $B \cap J$ est fini. Il existe donc un point y de J tel que

$$d(a, y) \leqslant d(a, y') \qquad \text{pour tout } y' \text{ dans J.} \tag{1}$$

On va prouver que l'on a $y \in \overline{C}$. Pour cela, il suffit de montrer que si H est un mur de C, on a $y \in \overline{D_H(C)}$ (cf. § 1, n° 4, prop. 9). Comme on a $s_H \in W_{\mathfrak{M}}$, on a $s_H(y) \in J$ d'où (fig. 1)

$$d(a, y)^2 \leqslant d(a, s_H(y))^2 \tag{2}$$

d'après (1). Il existe $b \in H$ et deux vecteurs t et u tels que $a = b + t$ et $y = b + u$, le vecteur u étant orthogonal à H; on a alors $s_H(y) = b - u$, et (2) équivaut à $(t - u | t - u) \leqslant (t + u | t + u)$, c'est-à-dire à $(t|u) \geqslant 0$. Cette inégalité entraîne $y \in \overline{D_H(C)}$.

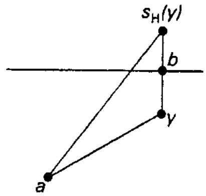


FIGURE 1

(ii) Soient C′ une chambre et $a' \in C'$. D'après ce qu'on vient de démontrer, il existe $w \in W_{\mathfrak{M}}$ tel que $w^{-1}(a') \in \overline{C}$; par suite, la chambre C′ rencontre $\overline{w(C)}$; comme $\overline{w(C)}$ est réunion de $w(C)$ et de facettes d'intérieur vide (§ 1, n° 2, prop. 3), on a $C' = w(C)$.

(iii) On a à prouver $W = W_{\mathfrak{M}}$ et il suffit de prouver que l'on a $s_{H'} \in W_{\mathfrak{M}}$ pour tout $H' \in \mathfrak{H}$. Or H′ est le mur d'au moins une chambre C′ (§ 1, n° 4, prop. 8); on a vu qu'il existe $w \in W_{\mathfrak{M}}$ tel que $C' = w(C)$; par suite, il existe un mur H de C tel que $H' = w(H)$, d'où $s_{H'} = w . s_H . w^{-1} \in W_{\mathfrak{M}}$.

2. Relation avec les systèmes de Coxeter

THÉORÈME 1. — *Soient* C *une chambre et* S *l'ensemble des réflexions par rapport aux murs de* C.

(i) *Le couple* (W, S) *est un système de Coxeter.*

(ii) *Soient* $w \in W$ *et* H *un mur de* C. *La relation* $l(s_{\mathrm{H}}w) > l(w)$ *signifie que les chambres* C *et* $w(\mathrm{C})$ *sont du même côté de* H.

(iii) *Pour toute chambre* C′, *il existe un unique élément* $w \in W$ *tel que* $w(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$.

(iv) *L'ensemble des hyperplans* H *tels que* $s_{\mathrm{H}} \in W$ *est égal à* $\mathfrak{H}$.

Tout élément de S est d'ordre 2 et le lemme 2 montre que S engendre W. Pour tout mur H de C, notons P_{H} l'ensemble des $w \in W$ tels que les chambres C et $w(\mathrm{C})$ (qui ne rencontrent pas H) soient du même côté de H. Nous allons vérifier les conditions (A′), (B′) et (C) du chap. IV, § 1, nº 7.

(A′) $1 \in \mathrm{P}_{\mathrm{H}}$: Trivial.

(B′) P_{H} *est disjoint de* $s_{\mathrm{H}}.\mathrm{P}_{\mathrm{H}}$: En effet, $w(\mathrm{C})$ et $s_{\mathrm{H}}w(\mathrm{C})$ sont de part et d'autre de H, donc si $w(\mathrm{C})$ est du même côté de H que C, il n'en est pas de même de $s_{\mathrm{H}}w(\mathrm{C})$.

(C) *Soient* $w \in \mathrm{P}_{\mathrm{H}}$ *et* H′ *un mur de* C *tel que* $ws_{\mathrm{H}'} \notin \mathrm{P}_{\mathrm{H}}$; *on a* $ws_{\mathrm{H}'} = s_{\mathrm{H}}w$: Par hypothèse $w(\mathrm{C})$ est du même côté de H que C, et $ws_{\mathrm{H}'}(\mathrm{C})$ est de l'autre côté de H. Donc $ws_{\mathrm{H}'}(\mathrm{C})$ et $w(\mathrm{C})$ sont de part et d'autre de H; les chambres $s_{\mathrm{H}'}(\mathrm{C})$ et C sont de part et d'autre de l'hyperplan $w^{-1}(\mathrm{H})$. Soit a un point de la face de C de support H′. Le point $a = s_{\mathrm{H}'}(a)$ est adhérent aux deux chambres C et $s_{\mathrm{H}'}(\mathrm{C})$ qui sont respectivement contenues dans les deux demi-espaces ouverts limités par $w^{-1}(\mathrm{H})$; on a donc $a \in w^{-1}(\mathrm{H})$, d'où $\mathrm{H}' = w^{-1}(\mathrm{H})$. De là, on tire $s_{\mathrm{H}'} = w^{-1}s_{\mathrm{H}}w$, d'où $ws_{\mathrm{H}'} = s_{\mathrm{H}}w$.

Ceci étant, les assertions (i) et (ii) résultent de la prop. 6 du chap. IV, § 1, nº 7. On a de plus (*loc. cit.*, condition (A))

$$\bigcap_{\mathrm{H} \in \mathfrak{M}} \mathrm{P}_{\mathrm{H}} = \{1\}. \tag{3}$$

Le lemme 2 montre que W est transitif sur l'ensemble des chambres. De plus, si $w \in W$ est tel que $w(\mathrm{C}) = \mathrm{C}$, on a $w \in \mathrm{P}_{\mathrm{H}}$ pour tout mur H de C, d'où $w = 1$ par (3). Ceci établit (iii).

Soit enfin H un hyperplan tel que $s_{\mathrm{H}} \in W$. Si l'on avait $\mathrm{H} \notin \mathfrak{H}$, il existerait au moins une chambre C′ rencontrant H (§ 1, nº 3, prop. 7). Tout point de $\mathrm{H} \cap \mathrm{C}'$ est invariant par s_{H}, donc appartient aux chambres C′ et $s_{\mathrm{H}}(\mathrm{C}')$; on a donc $\mathrm{C}' = s_{\mathrm{H}}(\mathrm{C}')$ ce qui contredit (iii) puisque $s_{\mathrm{H}} \neq 1$.

COROLLAIRE. — *Soit* Σ *un ensemble de réflexions engendrant* W. *Toute réflexion appartenant à* W *est conjuguée à un élément de* Σ.

Soit $\mathfrak{H}'$ l'ensemble des hyperplans de la forme $w(\mathrm{H})$ avec $w \in W$ et $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$ tel que $s_{\mathrm{H}} \in \Sigma$. Comme W est engendré par la famille $(s_{\mathrm{H}})_{\mathrm{H} \in \mathfrak{H}'}$ et que $\mathfrak{H}'$ est stable par W, on peut appliquer à $\mathfrak{H}'$ au lieu de $\mathfrak{H}$ tous les résultats de ce nº; mais le th. 1, (iv) montre que toute réflexion de W est de la forme s_{H} avec $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}'$, d'où le corollaire.

3. Domaine fondamental, stabilisateurs

Rappelons (*Intégr.*, chap. VII, § 2, n° 10, déf. 2) qu'une partie D de E est appelée un *domaine fondamental* pour le groupe W si toute orbite de W dans E rencontre D en un point et un seul. Ceci équivaut à la conjonction des deux conditions :

a) *Pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *il existe* $w \in \mathrm{W}$ *tel que* $w(x) \in \mathrm{D}$.

b) *Étant donnés* $x, y \in \mathrm{D}$ *et* $w \in \mathrm{W}$ *tels que* $y = w(x)$, *on a* $y = x$ (mais on peut avoir $w \neq 1$).

Nous allons démontrer les trois énoncés suivants :

Théorème 2. — *Pour toute chambre* C, *l'adhérence* $\overline{\mathrm{C}}$ *de* C *est un domaine fondamental pour* W *opérant dans* E.

Proposition 1. — *Soient* F *une facette et* C *une chambre telles que* $\mathrm{F} \subset \overline{\mathrm{C}}$. *Soit* $w \in \mathrm{W}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $w(\mathrm{F})$ *rencontre* F ;
(ii) $w(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$;
(iii) $w(\overline{\mathrm{F}}) = \overline{\mathrm{F}}$;
(iv) w *laisse fixe au moins un point de* F ;
(v) w *laisse fixe tout point de* F ;
(vi) w *laisse fixe tout point de* $\overline{\mathrm{F}}$;
(vii) w *appartient au sous-groupe de* W *engendré par les réflexions par rapport aux murs de* C *contenant* F.

Pour toute partie A de E, notons W(A) le sous-groupe de W formé des éléments laissant fixes tous les points de A.

Proposition 2. — *Soit* A *une partie non vide de* E, *soit* $\mathfrak{H}_{\mathrm{A}}$ *l'ensemble des hyperplans* $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$ *contenant* A, *soit* A' *l'intersection des* $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}_{\mathrm{A}}$ *et soit* F *une facette de* E, *ouverte dans* A' (§ 1, n° 3, prop. 7). *On a* $\mathrm{W(A)} = \mathrm{W(A')} = \mathrm{W(F)}$, *et* W(A) *est engendré par les réflexions par rapport aux hyperplans de* $\mathfrak{H}_{\mathrm{A}}$.

Démontrons tout d'abord l'assertion suivante :

(I) *Soient* C *une chambre,* x *et* y *deux points de* $\overline{\mathrm{C}}$ *et* $w \in \mathrm{W}$ *tel que* $w(x) = y$. *On a alors* $x = y$ *et* w *appartient au sous-groupe* $\mathrm{W}_{\mathfrak{N}}$, *où* $\mathfrak{N}$ *est l'ensemble des murs de* C *contenant* x.

Nous raisonnerons par récurrence sur la longueur q de w (relativement à l'ensemble S des réflexions par rapport aux murs de C), le cas $q = 0$ étant évident. Si $q \geqslant 1$, il existe un mur H de C et un élément $w' \in \mathrm{W}$ tel que $w = s_{\mathrm{H}} w'$ et $l(w') = q - 1$. Puisque $l(s_{\mathrm{H}} w) < l(w)$, les chambres C et $w(\mathrm{C})$ sont de part et d'autre de H d'après le th. 1 du n° 2. On a donc $\overline{\mathrm{C}} \cap w(\overline{\mathrm{C}}) \subset \mathrm{H}$, d'où $y \in \mathrm{H}$. On a alors $y = w'(x)$ et l'hypothèse de récurrence entraîne $x = y$ et $w' \in \mathrm{W}_{\mathfrak{N}}$. De $y \in \mathrm{H}$ on déduit $\mathrm{H} \in \mathfrak{N}$, d'où $w = s_{\mathrm{H}} w' \in \mathrm{W}_{\mathfrak{N}}$, ce qui termine la démonstration de (I).

Démonstration du théorème 2 : il résulte de (I) et du lemme 2.

Démonstration de la proposition 1 : on sait que deux facettes distinctes sont disjointes et ont des adhérences distinctes (§ 1, nº 2, cor. de la prop. 3). L'équivalence de (i), (ii) et (iii) en résulte. D'autre part, il est clair que

$$\text{(vii)} \Longrightarrow \text{(vi)} \Longrightarrow \text{(v)} \Longrightarrow \text{(iv)} \Longrightarrow \text{(i)}$$

et l'assertion (I) montre que (i) $\Longrightarrow$ (vii).

Démonstration de la proposition 2 : soit A'' le sous-espace affine de E engendré par A. On a évidemment $W(A) = W(A'')$. D'après la prop. 7 du § 1, nº 3, il existe un point $x \in A''$ n'appartenant à aucun hyperplan $H \in \mathfrak{H} - \mathfrak{H}_A$. Soit F_x la facette contenant x : elle est ouverte dans A'' et la prop. 1 montre que

$$W(F_x) \subset W(A') \subset W(A) = W(A'') \subset W(\{x\}) = W(F_x)$$

d'où $W(A) = W(A') = W(F_x)$. En remplaçant A par F, on a aussi

$$W(A) = W(F),$$

d'où la proposition.

Remarques. — 1) Il résulte du th. 2 que si C est une chambre et F une facette, *il existe une facette* F' *et une seule contenue dans* $\overline{C}$ *qui soit transformée de* F *par un élément de* W.

2) Il résulte des prop. 1 et 2 que pour toute partie non vide A de E, il existe un point $a \in E$ tel que $W(A) = W(\{a\})$; de plus, le groupe W(A) est un *groupe de Coxeter* (th. 1).

3) Soient C une chambre de E et S l'ensemble des réflexions par rapport aux murs de C. Soit $w \in W$ et soit $(s_1, \ldots, s_q)$ une décomposition réduite de w par rapport à S. Si $x \in \overline{C}$ est fixe par w, on a $s_j(x) = x$ pour tout j : cela résulte de la prop. 1 ci-dessus et du cor. 1 de la prop. 7 du chap. IV, § 1.

4. Matrice et graphe de Coxeter de W

Soient C une chambre, $S = S(C)$ l'ensemble des réflexions orthogonales par rapport aux murs de C et $M = (m(s, s'))$ la matrice de Coxeter du système de Coxeter (W, S) (chap. IV, § 1, nº 9) : rappelons que $m(s, s')$ est l'ordre (fini ou ∞) de l'élément ss' de W (pour $s, s' \in S$). Si C' est une autre chambre, l'unique élément $w \in W$ tel que $w(C) = C'$ définit une bijection

$$s \longmapsto f(s) = wsw^{-1}$$

de S sur $S' = S(C')$, et l'on a $m(f(s), f(s')) = m(s, s')$. Il en résulte que, si l'on fait opérer W sur l'ensemble X des couples (C, s), où C est une chambre et où $s \in S(C)$, en posant $w.(C, s) = (w(C), wsw^{-1})$, chaque orbite i de W dans X rencontre chacun des ensembles $\{C\} \times S(C)$ en un point et un seul, que l'on note $(C, s_i(C))$. Soit alors I l'ensemble de ces orbites; pour $i, j \in I$, le nombre $m_{ij} = m(s_i(C), s_j(C))$ est indépendant du choix de la chambre C. La matrice

$M(\mathrm{W}) = (m_{ij})_{i,j \in \mathrm{I}}$ est une matrice de Coxeter que l'on appelle la *matrice de Coxeter* de W. Le graphe de Coxeter associé à $M(\mathrm{W})$ (chap. IV, § 1, n° 9) est appelé le *graphe de Coxeter* de W.

Soit C une chambre. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, on désigne par $\mathrm{H}_i(\mathrm{C})$ le mur de C tel que $s_i(\mathrm{C})$ soit la réflexion par rapport à $\mathrm{H}_i(\mathrm{C})$ et par $e_i(\mathrm{C})$ le vecteur unitaire orthogonal à $\mathrm{H}_i(\mathrm{C})$ et situé du même côté de $\mathrm{H}_i(\mathrm{C})$ que C. L'application $i \longmapsto \mathrm{H}_i(\mathrm{C})$ est appelée la *famille canoniquement indexée des murs de* C.

Proposition 3. — *Soit* C *une chambre, et soient* $i, j \in \mathrm{I}$, *avec* $i \neq j$. *Posons* $s_i = s_i(\mathrm{C})$, $\mathrm{H}_i = \mathrm{H}_i(\mathrm{C})$, $e_i = e_i(\mathrm{C})$ *et définissons de même* s_j, H_j *et* e_j.

(i) *Si* H_i *et* H_j *sont parallèles, on a* $m_{ij} = \infty$ *et* $e_i = -e_j$.

(ii) *Si* H_i *et* H_j *ne sont pas parallèles, alors* m_{ij} *est fini et on a* :

$$(e_i|e_j) = -\cos(\pi/m_{ij}). \tag{4}$$

(iii) *On a* $(e_i|e_j) \leqslant 0$.

Si H_i et H_j sont parallèles, s_is_j est une translation (§ 2, n° 4, prop. 5), d'où $m_{ij} = \infty$. De plus, on a ou bien $e_i = e_j$, ou bien $e_i = -e_j$. Or il existe un point a (resp. a') adhérent à C et appartenant à H_i (resp. H_j), mais n'appartenant pas à H_j (resp. H_i). On a alors $(a' - a|e_i) > 0$ et $(a - a'|e_j) > 0$, ce qui exclut le cas $e_i = e_j$ et démontre (i).

Supposons maintenant que H_i et H_j ne soient pas parallèles. Choisissons une origine $a \in \mathrm{H}_i \cap \mathrm{H}_j$ et identifions T et E par la bijection $t \longmapsto a + t$. Soit V le plan orthogonal à $\mathrm{H}_i \cap \mathrm{H}_j$ passant par a. Posons $\Gamma = \mathrm{V} \cap \mathrm{D}_{\mathrm{H}_i}(\mathrm{C}) \cap \mathrm{D}_{\mathrm{H}_j}(\mathrm{C})$ (où $\mathrm{D}_\mathrm{H}(\mathrm{C})$ désigne le demi-espace ouvert limité par H et contenant C (§ 1, n° 1)) et soit D (resp. D′) la demi-droite de V portée par $\mathrm{H}_i \cap \mathrm{V}$ (resp. $\mathrm{H}_j \cap \mathrm{V}$) et contenue dans l'adhérence de Γ. Pour une orientation convenable de V l'ensemble Γ est la réunion des demi-droites ouvertes Δ de V telles que

$$0 < (\widehat{\mathrm{D}, \Delta}) < (\widehat{\mathrm{D}, \mathrm{D}'}).$$

Soit W′ le sous-groupe de W engendré par s_i et s_j. Pour tout $w \in \mathrm{W}'$, les hyperplans $w(\mathrm{H}_i)$ et $w(\mathrm{H}_j)$ appartiennent à $\mathfrak{H}$, contiennent $\mathrm{H}_i \cap \mathrm{H}_j$ et ne rencontrent pas C. Il en résulte qu'ils ne rencontrent pas Γ (§ 1, n° 5, prop. 10). Le cor. de la prop. 7 du § 2, n° 5 entraîne alors (ii).

Enfin, l'assertion (iii) résulte immédiatement de (i) et (ii), puisque $m_{ij} \geqslant 2$ pour $i \neq j$.

Remarque. — La formule (4) est en fait valable quels que soient $i, j \in \mathrm{I}$: en effet, on a $\pi/m_{ij} = 0$ si $m_{ij} = \infty$, et si $i = j$, on a $m_{ij} = 1$ et $(e_i|e_j) = 1$.

5. Systèmes de vecteurs à produits scalaires négatifs

Lemme 3. — *Soit* q *une forme quadratique positive sur un espace vectoriel réel* V *et soit* B *la forme bilinéaire symétrique associée. Soient* $a_1, \ldots, a_n$ *des éléments de* V *tels que* $\mathrm{B}(a_i, a_j) \leqslant 0$ *pour* $i \neq j$.

(i) *Si* $c_1, \ldots, c_n$ *sont des nombres réels tels que* $q(\sum_i c_i a_i) = 0$, *on a*

$$q(\sum_i |c_i| . a_i) = 0.$$

(ii) *Si q est non dégénérée et s'il existe une forme linéaire f sur* V *telle que* $f(a_i) > 0$ *pour tout i, les vecteurs* $a_1, \ldots, a_n$ *sont linéairement indépendants.*

La relation $B(a_i, a_j) \leqslant 0$ pour $i \neq j$ entraîne aussitôt

$$q(\sum_i |c_i| . a_i) \leqslant q(\sum_i c_i a_i),$$

d'où (i). Si q est non dégénérée, la relation $\sum_i c_i a_i = 0$ entraîne donc

$$\sum_i |c_i| . a_i = 0;$$

pour toute forme linéaire f sur V, on en déduit $\sum_i |c_i| . f(a_i) = 0$, d'où $c_i = 0$ pour tout i, si de plus $f(a_i) > 0$ pour tout i. Cela démontre (ii).

Lemme 4. — *Soit* $Q = (q_{ij})$ *une matrice réelle carrée symétrique d'ordre n telle que :*

a) on a $q_{ij} \leqslant 0$ *pour* $i \neq j$;

b) il n'existe pas de partition de $\{1, 2, \ldots, n\}$ *en deux ensembles non vides* I *et* J *tels que* $(i, j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$ *entraîne* $q_{ij} = 0$;

c) la forme quadratique $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} q_{ij} x_i x_j$ *sur* $\mathbf{R}^n$ *est positive.*

Alors :

(i) *Le noyau* N *de q est de dimension* 0 *ou* 1. *Si* dim N = 1, N *est engendré par un vecteur dont toutes les coordonnées sont* > 0.

(ii) *La plus petite valeur propre de Q est de multiplicité* 1 *et un vecteur propre correspondant a toutes ses coordonnées* > 0, *ou toutes ses coordonnées* < 0.

Comme q est une forme quadratique positive, le noyau N de q est l'ensemble des vecteurs isotropes pour q (*Alg.*, chap. IX, § 7, nº 1, cor. de la prop. 2). Soit $a_1, \ldots, a_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Si $\sum_i c_i a_i \in \mathrm{N}$, le lemme 3 montre que l'on a aussi $\sum_i |c_i| . a_i \in \mathrm{N}$, d'où $\sum_i q_{ji} |c_i| = 0$ pour tout j. Soit alors I l'ensemble des i tels que $c_i \neq 0$. Si $j \notin \mathrm{I}$, on a $q_{ji}|c_i| \leqslant 0$ pour $i \in \mathrm{I}$ et $q_{ji}|c_i| = 0$ pour $i \notin \mathrm{I}$, d'où $q_{ji} = 0$ pour $j \notin \mathrm{I}$ et $i \in \mathrm{I}$. L'hypothèse *b*) entraîne donc que ou bien $\mathrm{I} = \varnothing$, ou bien $\mathrm{I} = \{1, \ldots, n\}$. Par suite, tout vecteur non nul de N a toutes ses coordonnées $\neq 0$. Si on avait dim N $\geqslant 2$, l'intersection de N et de l'hyperplan d'équation $x_i = 0$ serait de dimension $\geqslant 1$, contrairement à ce que l'on vient de voir. En outre, ce qui précède montre que, si dim N = 1, alors N contient un vecteur de coordonnées toutes > 0. Ceci achève la démonstration de (i).

D'autre part, on sait que les valeurs propres de Q sont réelles (*Alg.*, chap. IX, § 7, nº 3, prop. 5) et positives puisque q est positive. Soit λ la plus petite d'entre elles. La matrice $Q' = Q - \lambda I_n$ est alors la matrice d'une forme positive dégénérée q' et les éléments non diagonaux de Q' sont les mêmes que ceux de Q. Par suite, Q' satisfait aux conditions *a*), *b*) et *c*) de l'énoncé. Comme le noyau N' de q' est le sous-espace propre de Q correspondant à la valeur propre λ, l'assertion (ii) résulte de (i).

Lemme 5. — *Soient* $e_1, \ldots, e_n$ *des vecteurs engendrant* T *tels que* :

a) $(e_i|e_j) \leqslant 0$ *pour* $i \neq j$;

b) *il n'existe pas de partition de* $\{1, \ldots, n\}$ *en deux ensembles* I *et* J *non vides tels que* $(e_i|e_j) = 0$ *pour* $i \in \mathrm{I}$ *et* $j \in \mathrm{J}$.

Alors deux cas sont possibles :

1) $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base de* T;

2) $n = \dim \mathrm{T} + 1$; *il existe une famille* $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *de nombres réels* > 0 *tels que* $\sum\limits_i c_i e_i = 0$, *et toute famille* $(c'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *de nombres réels tels que* $\sum\limits_i c'_i e_i = 0$ *est proportionnelle à* $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Posons $q_{ij} = (e_i|e_j)$. La matrice $Q = (q_{ij})$ satisfait alors aux hypothèses du lemme 4 : les conditions *a*) et *b*) du lemme 4 sont les mêmes que les conditions *a*) et *b*) ci-dessus, et *c*) est satisfaite puisque $\sum\limits_{i,j} q_{ij}x_i x_j = \sum\limits_i \|x_i e_i\|^2$. Le noyau N de la forme quadratique q sur $\mathbf{R}^n$, de matrice Q, est l'ensemble des $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que $\sum\limits_i c_i e_i = 0$. Si $\mathrm{N} = \{0\}$, les e_i sont linéairement indépendants et l'on est dans le cas 1). Si $\dim \mathrm{N} > 0$, le lemme 4 (i) montre que l'on est dans le cas 2).

Lemme 6. — *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* T *telle que* $(e_i|e_j) \leqslant 0$ *pour* $i \neq j$.

(i) *Si* $x = \sum\limits_i c_i e_i \in \mathrm{T}$ *est tel que* $(x|e_i) \geqslant 0$ *pour tout* i, *on a* $c_i \geqslant 0$ *pour tout* i.

(ii) *Si* x *et* y *sont deux éléments de* T *tels que* $(x|e_i) \geqslant 0$ *et* $(y|e_i) \geqslant 0$ *pour tout* i, *on a* $(x|y) \geqslant 0$. *Si* $(x|e_i) > 0$ *et* $(y|e_i) > 0$ *pour tout* i, *on a* $(x|y) > 0$.

Plaçons-nous dans les hypothèses de (i) et supposons qu'il existe un i tel que $c_i < 0$. Soit f la forme linéaire sur T définie par $f(e_i) = 1$ et

$$f(e_j) = -c_i/(\sum_{k=1}^{n} |c_k|) \quad \text{pour} \quad j \neq i.$$

Les vecteurs $-x, e_1, \ldots, e_n$ satisfont alors aux hypothèses du lemme 3 (ii) (en prenant pour q la forme métrique de T). On en conclut qu'ils sont linéairement indépendants, ce qui est absurde. D'où (i). De plus, si $x = \sum\limits_i c_i e_i \in \mathrm{T}$ et si $y \in \mathrm{T}$, on a $(x|y) = \sum\limits_i c_i(e_i|y)$, de sorte que (ii) résulte immédiatement de (i).

6. Théorèmes de finitude

Lemme 7. — *Soit* A *un ensemble de vecteurs unitaires de* T. *S'il existe un nombre réel* $\lambda < 1$ *avec* $(a|a') \leqslant \lambda$ *pour* $a, a' \in \mathrm{A}$ *et* $a \neq a'$, *alors l'ensemble* A *est fini.*

Pour a, $a' \in A$ tels que $a \neq a'$, on a :

$$||a - a'||^2 = 2 - 2(a|a') \geqslant 2 - 2\lambda.$$

Or, la sphère unité S de T étant compacte, il existe un recouvrement fini de S par des ensembles de diamètre $< (2 - 2\lambda)^{1/2}$ et chacun de ces ensembles contient au plus un point de A, d'où le lemme.

Notons $U(w)$ l'automorphisme de T associé à l'application affine $w \in W$ de E dans lui-même. On a

$$w(x + t) = w(x) + U(w).t \qquad \text{pour} \quad t \in T \text{ et } x \in E.$$

On définit ainsi un homomorphisme U du groupe W dans le groupe orthogonal de T; le noyau de U est l'ensemble des translations appartenant à W.

THÉORÈME 3. — (i) *L'ensemble des murs d'une chambre est fini.*

(ii) *L'ensemble des directions des hyperplans appartenant à $\mathfrak{H}$ est fini.*

(iii) *Le groupe $U(W)$ est fini.*

L'assertion (i) résulte aussitôt de la prop. 3, (iii) et du lemme 7. Démontrons (ii). Soient C une chambre et $\mathfrak{M}$ l'ensemble de ses murs. Les facettes de $\overline{C}$ (relativement à $\mathfrak{H}$) sont les mêmes que celles relativement à $\mathfrak{M}$ (§ 1, n° 4, prop. 9). Puisque $\mathfrak{M}$ est fini, elles sont en nombre fini. Comme une facette ne rencontre qu'un nombre fini d'hyperplans appartenant à $\mathfrak{H}$, l'ensemble des hyperplans appartenant à $\mathfrak{H}$ et rencontrant $\overline{C}$ est fini, ainsi que l'ensemble A(C) des vecteurs unitaires de T orthogonaux à un hyperplan appartenant à $\mathfrak{H}$ et rencontrant $\overline{C}$. Par suite, il existe un nombre réel $\lambda < 1$ tel que $(a|a') \leqslant \lambda$ pour a, $a' \in A(C)$ et $a \neq a'$.

Soit alors A l'ensemble des vecteurs unitaires de T qui sont orthogonaux à un hyperplan appartenant à $\mathfrak{H}$. Soient a, $a' \in A$ avec $a \neq a'$. Si a et a' sont parallèles, on a $a = -a'$ et $(a|a') = -1$. Sinon, soit $H \in \mathfrak{H}$ (resp. $H' \in \mathfrak{H}$) tel que a (resp. a') soit orthogonal à H (resp. H'). On a $H \cap H' \neq \varnothing$, et si $x \in H \cap H'$, il existe un élément $w \in W$ tel que $x \in w(\overline{C})$. Les vecteurs $U(w).a$ et $U(w).a'$ appartiennent alors à A(C), l'on a :

$$(a|a') = (U(w).a|U(w).a') \leqslant \lambda$$

et l'ensemble A est fini d'après le lemme 7. D'où (ii).

Soit maintenant $w \in W$ tel que $U(w).a = a$ pour tout $a \in A$. On a alors $U(w).t = t$ pour tout t appartenant au sous-espace de T engendré par A. D'autre part, si $t \in T$ est orthogonal à A, on a $U(s_H).t = t$ pour tout $H \in \mathfrak{H}$, d'où $U(w).t = t$ et finalement $U(w) = 1$. Comme $U(w)(A) = A$ pour tout $w \in W$, on en déduit que $U(W)$ est isomorphe à un groupe de permutations de l'ensemble fini A, d'où (iii).

PROPOSITION 4. — *Soient* C *une chambre et* $\mathfrak{N}$ *un ensemble de murs de* C. *Soit* $W_{\mathfrak{N}}$ *le sous-groupe de* W *engendré par les réflexions orthogonales par rapport aux éléments de* $\mathfrak{N}$.

Pour $\mathrm{H} \in \mathfrak{M}$, *notons* e_{H} *le vecteur unitaire orthogonal à* H *situé du même côté que* C *de* H. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le groupe* $\mathrm{W}_{\mathfrak{M}}$ *est fini.*

(ii) *Il existe un point de* E *invariant par tout élément de* $\mathrm{W}_{\mathfrak{M}}$.

(iii) *Les hyperplans appartenant à* $\mathfrak{M}$ *ont une intersection non vide.*

(iv) *La famille de vecteurs* $(e_{\mathrm{H}})_{\mathrm{H}\in\mathfrak{M}}$ *est libre dans* T.

Supposons que $\mathrm{W}_{\mathfrak{M}}$ ait un cardinal fini d. Pour tout point a de E, le point $b = \sum\limits_{w\in\mathrm{W}_{\mathfrak{M}}} d^{-1}.w(a)$ est invariant par $\mathrm{W}_{\mathfrak{M}}$, donc (i) entraîne (ii).

D'après la propriété (D 2) du début du § 3, le stabilisateur dans W de tout point de E est fini, donc (ii) entraîne (i).

Comme le groupe $\mathrm{W}_{\mathfrak{M}}$ est engendré par l'ensemble des réflexions par rapport aux hyperplans appartenant à $\mathfrak{M}$, les points fixes de $\mathrm{W}_{\mathfrak{M}}$ sont les points de E appartenant à tout hyperplan $\mathrm{H} \in \mathfrak{M}$, d'où l'équivalence de (ii) et (iii).

Supposons qu'il existe un point a de E tel que $a \in \mathrm{H}$ pour tout $\mathrm{H} \in \mathfrak{M}$ et soit $t \in \mathrm{T}$ tel que $a + t \in \mathrm{C}$. Puisque $(e_{\mathrm{H}}|e_{\mathrm{H}'}) \leqslant 0$ pour $\mathrm{H}, \mathrm{H}' \in \mathfrak{M}$, tels que $\mathrm{H} \neq \mathrm{H}'$ (prop. 3), et que $(t|e_{\mathrm{H}}) > 0$ pour tout $\mathrm{H} \in \mathfrak{M}$, le lemme 3 (ii) entraîne que les e_{H} pour $\mathrm{H} \in \mathfrak{M}$ sont linéairement indépendants. Par suite (iii) entraîne (iv).

Supposons enfin que la famille $(e_{\mathrm{H}})_{\mathrm{H}\in\mathfrak{M}}$ soit libre. Soit a un point de E. Pour tout hyperplan $\mathrm{H} \in \mathfrak{M}$, il existe un nombre réel c_{H} tel que H se compose des points $a + t$ de E avec $(t|e_{\mathrm{H}}) = c_{\mathrm{H}}$. Puisque la famille (e_{H}) est libre, il existe $t \in \mathrm{T}$ tel que $(t|e_{\mathrm{H}}) = c_{\mathrm{H}}$ pour tout $\mathrm{H} \in \mathfrak{M}$, et le point $a + t$ de E appartient à tous les hyperplans $\mathrm{H} \in \mathfrak{M}$. Donc (iv) entraîne (iii).

Remarques. — 1) Comme W est engendré par les réflexions par rapport aux murs de la chambre C, la proposition précédente donne un critère pour que W soit fini. Nous reviendrons sur cette question au n° 9.

2) Soient F un espace affine réel de dimension finie et G un groupe d'automorphismes de F. Pour tout $g \in \mathrm{G}$, notons $U(g)$ l'automorphisme de l'espace des translations V de F associé à g. Supposons que l'image $U(\mathrm{G})$ soit un sous-groupe *fini* de $\mathbf{GL}(\mathrm{V})$; il existe alors sur V un produit scalaire invariant par $U(\mathrm{G})$ (*Intégr.*, chap. VII, § 3, n° 1, prop. 1). Si de plus G opère proprement sur F lorsqu'on le munit de la topologie discrète et qu'il soit engendré par des réflexions, on peut donc appliquer à G tous les résultats du présent paragraphe.

7. Décomposition de la représentation linéaire de W dans T

Soit I l'ensemble des sommets du graphe de Coxeter de W (n° 4) et soit J une partie de I telle qu'un sommet de J et un sommet de I — J ne soient jamais liés. Soient C une chambre, s la bijection canonique de I sur l'ensemble des réflexions par rapport aux murs de C, et soit $\mathrm{W}_{\mathrm{J,C}}$ le sous-groupe engendré par l'image $s(\mathrm{J})$. Il résulte alors du chap. IV, § 1, n° 9, prop. 8, que W est *produit direct* des deux sous-groupes $\mathrm{W}_{\mathrm{J,C}}$ et $\mathrm{W}_{\mathrm{I-J,C}}$. Soient C′ une autre chambre et s' l'injection correspondante de I dans W. Nous avons vu (n° 4) que si $w \in \mathrm{W}$ transforme C en C′, on a $s'(i) = ws(i)w^{-1}$ pour $i \in \mathrm{I}$. Puisque $\mathrm{W}_{\mathrm{J,C}}$ est distingué dans W, il en résulte que $s'(i) \in \mathrm{W}_{\mathrm{J,C}}$ pour tout $i \in \mathrm{J}$. On en déduit que le *sous-groupe* $\mathrm{W}_{\mathrm{J,C}}$ *ne dépend pas de* C. Nous le noterons simplement W_{J} dans ce qui suit.

La définition de $\mathrm{W}_{\mathrm{J,C}}$ s'étend évidemment à une partie J quelconque de I. Mais s'il existe un sommet de J et un sommet de I — J qui soient *liés*, alors $\mathrm{W}_{\mathrm{J,C}}$ n'est pas distingué et dépend du choix de la chambre C.

Soit $\mathrm{T}_{\mathrm{J}}^0$ le sous-espace de T formé des vecteurs invariants par tout élément de $U(\mathrm{W}_{\mathrm{J}})$ et soit T_{J} le sous-espace orthogonal à $\mathrm{T}_{\mathrm{J}}^0$. Puisque W_{J} est un sous-groupe distingué de W, il est clair que $\mathrm{T}_{\mathrm{J}}^0$ est invariant par $U(\mathrm{W})$, donc aussi T_{J}.

PROPOSITION 5. — *Soient* $\mathrm{J}_1, \ldots, \mathrm{J}_s$ *les ensembles de sommets des composantes connexes du graphe de Coxeter de* W. *Pour* $1 \leqslant p \leqslant s$, *posons*

$$\mathrm{W}_p = \mathrm{W}_{\mathrm{J}_p}, \qquad \mathrm{T}_p = \mathrm{T}_{\mathrm{J}_p}, \qquad \mathrm{T}'_p = \mathrm{T}^0_{\mathrm{J}_p} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{T}_0 = \bigcap_{1 \leqslant p \leqslant s} \mathrm{T}'_p.$$

(i) *Le groupe* W *est produit direct des sous-groupes* W_p $(1 \leqslant p \leqslant s)$.

(ii) *L'espace* T *est somme directe orthogonale des sous-espaces* $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_s$, *qui sont stables par* $U(\mathrm{W})$.

(iii) *Pour tout* q *tel que* $1 \leqslant q \leqslant s$, *le sous-espace* T'_q *de* T *est formé des vecteurs invariants par* $U(\mathrm{W}_q)$; *il est somme directe des* T_p *pour* $0 \leqslant p \leqslant s$ *et* $p \neq q$.

(iv) *Soit* C *une chambre. Le sous-espace* T_p (*pour* $1 \leqslant p \leqslant s$) *est engendré par les vecteurs* $e_i(\mathrm{C})$ *pour* $i \in \mathrm{J}_p$ (notations du n° 4).

(v) *Les représentations de* W *dans les sous-espaces* T_p $(1 \leqslant p \leqslant s)$ *sont absolument irréductibles, non triviales, et deux à deux non équivalentes.*

L'assertion (i) résulte du chap. IV, § 1, n° 9. D'autre part, nous avons déjà vu que les sous-espaces T_p sont invariants par $U(\mathrm{W})$, et il en est de même de T_0. Soit C une chambre; comme W_p est engendré par les réflexions $s_i(\mathrm{C})$ pour $i \in \mathrm{J}_p$, il est clair que T'_p est le sous-espace orthogonal aux $e_i(\mathrm{C})$ pour $i \in \mathrm{J}_p$, d'où (iv). Par ailleurs, si $i \in \mathrm{J}_p$, $j \in \mathrm{J}_q$ avec $p \neq q$, on a $m_{ij} = 2$ puisque $\{i, j\}$ n'est pas une arête du graphe de Coxeter de W, d'où $(e_i|e_j) = 0$. On en déduit aussitôt (ii). L'assertion (iii) en résulte, puisque T'_q est l'orthogonal de T_q.

Enfin, soit V un sous-espace de T_p invariant par $U(\mathrm{W}_p)$. Pour tout $i \in \mathrm{J}_p$, ou bien on a $e_i \in \mathrm{V}$, ou bien e_i est orthogonal à V (§ 2, n° 2, prop. 3). Soit A (resp. B) l'ensemble des $i \in \mathrm{J}_p$ tels que $e_i \in \mathrm{V}$ (resp. e_i orthogonal à V). On a évidemment $(e_i|e_j) = 0$ pour $i \in \mathrm{A}$ et $j \in \mathrm{B}$, et puisque J_p est connexe, on en déduit, ou bien $\mathrm{A} = \varnothing$ et $\mathrm{V} = \{0\}$, ou bien $\mathrm{A} = \mathrm{J}_p$ et $\mathrm{V} = \mathrm{T}_p$. Par suite, la représentation de W_p dans T_p est irréductible, donc absolument irréductible (§ 2, n° 1, prop. 1). Elle est non triviale par définition même de T_p. Enfin, la dernière assertion de (v) résulte aussitôt de (iii).

On dit que W est *essentiel* si le sous-espace T_0 des vecteurs de T invariants par $U(W)$ est réduit à $\{0\}$; on dit que W est *irréductible* si la représentation U de W dans T est irréductible.

COROLLAIRE. — *Supposons* $W \neq \{1\}$. *Pour que* W *soit irréductible, il faut et il suffit qu'il soit essentiel et que son graphe de Coxeter soit connexe.*

Remarque. — Sous les hypothèses de la prop. 5, les sous-espaces T_p pour $0 \leqslant p \leqslant s$ sont les composantes isotypiques de la représentation linéaire U de W dans T (*Alg.*, chap. VIII, § 3, nº 4). Il en résulte (*loc. cit.*, prop. 11) que tout sous-espace vectoriel V de T stable par W est somme directe des sous-espaces $V \cap T_p$ pour $0 \leqslant p \leqslant s$; de plus (*loc. cit.*, prop. 10) tout endomorphisme commutant aux opérateurs $U(w)$ pour $w \in W$, laisse stable chacun des T_p pour $0 \leqslant p \leqslant s$ et y induit une homothétie pour $1 \leqslant p \leqslant s$. En particulier, les formes bilinéaires Φ sur T invariantes par W sont les formes bilinéaires données par:

$$\Phi(\sum_k t_k, \sum_k t'_k) = \Phi_0(t_0, t'_0) + \sum_{1 \leqslant p \leqslant s} a_p(t_p|t'_p)$$

où Φ_0 est une forme bilinéaire sur T_0 et a_p (pour $1 \leqslant p \leqslant s$) un nombre réel: en effet, une telle forme Φ s'écrit d'une manière et d'une seule $(t, t') \longmapsto (A(t)|t')$, où A est un endomorphisme de T commutant aux $U(w)$ pour $w \in W$.

8. Décomposition de l'espace affine E en produit

Conservons les notations de la prop. 5. Pour $0 \leqslant p \leqslant s$, soit E_p l'ensemble des orbites du groupe T'_p dans E, et soit φ_p l'application canonique de E sur E_p. Les opérations de T dans E passent au quotient; en particulier, T_p opère sur E_p et on vérifie immédiatement (par exemple en prenant une origine dans E) que E_p est un espace affine admettant T_p comme espace des translations. Posons $E' = E_0 \times \cdots \times E_s$: c'est un espace affine ayant $T = T_0 \oplus \cdots \oplus T_s$ comme espace des translations. Soit $\varphi : E \to E'$ l'application produit des φ_p; comme φ commute aux opérations de T, c'est une bijection et même un isomorphisme d'espaces affines. Dans ce qui suit, nous identifierons E et E' au moyen de φ; l'application φ_p s'identifie alors à la projection canonique de E' sur E_p.

Comme W laisse stable T'_p, les opérations de W dans E passent au quotient et définissent une loi d'opération de W dans E_p (pour $0 \leqslant p \leqslant s$), d'où par restriction une loi d'opération de W_p dans E_p (pour $1 \leqslant p \leqslant s$). D'autre part, soit C une chambre, soit $i \in I$ et soit p l'entier tel que $i \in J_p$. Pour tout $x \in E$, on a:

$$s_i(C)(x) = x - \lambda . e_i(C) \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Comme $e_i \in T'_q$ pour $q \neq p$, on en déduit que

$$\varphi_q(w(x)) = \varphi_q(x) \qquad \text{pour} \quad x \in E,\ w \in W_p,\ 0 \leqslant q \leqslant s \text{ et } q \neq p.$$

Par suite, si $w = w_1 \dots w_s \in \mathrm{W}$ avec $w_p \in \mathrm{W}_p$ pour $1 \leqslant p \leqslant s$, on a :

$$(5) \qquad w((x_0, \dots, x_s)) = (x_0, w_1(x_1), \dots, w_s(x_s))$$

quels que soient les $x_p \in \mathrm{E}_p$ pour $0 \leqslant p \leqslant s$. Autrement dit, *la loi d'opération de* W *dans* $\mathrm{E} = \mathrm{E}'$ *n'est autre que la loi produit des lois d'opérations des* W_p *dans les* E_p (en posant $\mathrm{W}_0 = \{1\}$). Il en résulte que W_p opère fidèlement dans E_p et qu'*on peut identifier* W_p *à un groupe de déplacements de l'espace euclidien* E_p (l'espace des translations T_p de E_p étant naturellement muni du produit scalaire induit par celui de T).

PROPOSITION 6. — (i) *Le groupe* W_p *est un groupe de déplacements de l'espace affine euclidien* E_p; *il est engendré par des réflexions*; *muni de la topologie discrète, il opère proprement dans* E_p; *il est irréductible.*

(ii) *Soit* $\mathfrak{H}_p$ *l'ensemble des hyperplans* H *de* E_p *tels que* $s_\mathrm{H} \in \mathrm{W}_p$. *L'ensemble* $\mathfrak{H}$ *se compose des hyperplans de la forme*

$$\mathrm{H} = \mathrm{E}_0 \times \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_{p-1} \times \mathrm{H}_p \times \mathrm{E}_{p+1} \times \cdots \times \mathrm{E}_s$$

avec $p = 1, \dots, s$ *et* $\mathrm{H}_p \in \mathfrak{H}_p$.

(iii) *Toute chambre* C *est de la forme* $\mathrm{E}_0 \times \mathrm{C}_1 \times \cdots \times \mathrm{C}_s$, *où pour chaque* p *l'ensemble* C_p *est une chambre définie dans* E_p *par l'ensemble d'hyperplans* $\mathfrak{H}_p$; *de plus* C_p *admet pour murs les hyperplans* $\varphi_p(\mathrm{H}_i(\mathrm{C}))$ *pour* $i \in \mathrm{J}_p$.

Soit C une chambre. Posons $\mathrm{H}_i = \mathrm{H}_i(\mathrm{C})$, $e_i = e_i(\mathrm{C})$ et $s_i = s_i(\mathrm{C})$ pour $i \in \mathrm{I}$ (notations du nº 4).

(i) Soit i dans J_p; comme on a $e_i \in \mathrm{T}_p$ et que T est somme directe des sous-espaces mutuellement orthogonaux $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_s$, l'hyperplan de T orthogonal à e_i est de la forme $\mathrm{L}_i + \mathrm{T}'_p$ où L_i est l'hyperplan de T_p orthogonal à e_i. L'hyperplan affine H_i de E est de la forme $\mathrm{L}_i + \mathrm{T}'_p + x$, avec $x \in \mathrm{E}$, et on a :

$$(6) \qquad \mathrm{H}_i = \mathrm{E}_0 \times \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_{p-1} \times \mathrm{H}'_i \times \mathrm{E}_{p+1} \times \cdots \times \mathrm{E}_s$$

avec $\mathrm{H}'_i = \mathrm{L}_i + \varphi_p(x) = \varphi_p(\mathrm{H}_i)$. Il est alors immédiat que s_i opère dans E_p par la réflexion associée à l'hyperplan H'_i de E_p. Donc le groupe W_p est un groupe de déplacements engendré par des réflexions dans E_p; la vérification du critère (D′ 2) de propreté est immédiate. Enfin, la prop. 5, (v) montre que W_p est irréductible. On a prouvé (i).

(ii) D'après le cor. du th. 1, l'ensemble $\mathfrak{H}_p$ se compose des hyperplans de la forme $w_p(\mathrm{H}'_i)$ pour i dans J_p et w_p dans W_p. Par ailleurs, si $w = w_1 \dots w_s$ avec $w_p \in \mathrm{W}_p$ pour tout p, les formules (5) et (6) entraînent

$$(7) \qquad w(\mathrm{H}_i) = \mathrm{E}_0 \times \mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_{p-1} \times w_p(\mathrm{H}'_i) \times \mathrm{E}_{p+1} \times \cdots \times \mathrm{E}_s$$

d'où immédiatement (ii).

(iii) Soit i dans J_p; d'après la formule (6), le demi-espace ouvert D_i limité par H_i contenant C est de la forme

$$D_i = E_0 \times E_1 \times \cdots \times E_{p-1} \times D'_i \times E_{p+1} \times \cdots \times E_s$$

où D'_i est un demi-espace ouvert limité par H'_i dans E_p. Posons $C_p = \bigcap_{i \in J_p} D'_i$; puisque l'on a $C = \bigcap_{i \in I} D_i$, on en déduit immédiatement

$$C = E_0 \times C_1 \times \cdots \times C_s;$$

par suite aucun des ensembles C_p n'est vide, et comme C ne rencontre aucun hyperplan appartenant à $\mathfrak{H}$, l'ensemble C_p ne rencontre aucun hyperplan appartenant à $\mathfrak{H}_p$. La prop. 5 du § 1, n° 3 montre alors que C_p est l'une des chambres définies par $\mathfrak{H}_p$ dans E_p. En utilisant la prop. 4 du § 1, n° 2, on voit facilement que les murs de C_p sont les hyperplans $H'_i = \varphi_p(H_i)$ pour $i \in J_p$.

9. Structure des chambres

Soient C une chambre, $\mathfrak{M}$ l'ensemble des murs de C et pour $H \in \mathfrak{M}$, soit e_H le vecteur unitaire orthogonal à H situé du même côté que C de l'hyperplan H.

Proposition 7. — *Supposons que le groupe* W *soit essentiel et fini. Alors :*

(i) *Il existe un unique point a de* E *invariant par* W.

(ii) *La famille $(e_H)_{H \in \mathfrak{M}}$ est une base de* T.

(iii) *La chambre* C *est le cône simplicial ouvert de sommet a défini par la base $(e'_H)_{H \in \mathfrak{M}}$ de* T *telle que $(e_H | e'_{H'}) = \delta_{HH'}$.*

(i) D'après la prop. 4 du n° 6, il existe un point $a \in E$ invariant par W. Soit $t \in T$ tel que $t + a$ soit invariant par W. Pour tout $w \in W$, on a

$$U(w).t + a = w(t + a) = t + a,$$

d'où $U(w).t = t$; comme W est essentiel, cela entraîne $t = 0$, ce qui montre l'unicité de a.

(ii) Comme W est essentiel, on a $T = T_I$ avec les notations du n° 7, et la prop. 5, (iv) montre que la famille $(e_H)_{H \in \mathfrak{M}}$ engendre l'espace vectoriel T. L'existence d'un point de E invariant par W montre que la famille $(e_H)_{H \in \mathfrak{M}}$ est libre (n° 6, prop. 4).

(iii) Soit a l'unique point de E invariant par W. Comme $(e_H)_{H \in \mathfrak{M}}$ est une base de T, et que le produit scalaire est une forme bilinéaire non dégénérée sur T, il existe une base $(e'_H)_{H \in \mathfrak{M}}$ de T et une seule telle que $(e_H | e'_{H'}) = \delta_{HH'}$ pour H, H' dans $\mathfrak{M}$. Tout point x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = t + a$ avec $t = \sum_{H \in \mathfrak{M}} \xi_H . e'_H$ et les ξ_H réels. Pour que x appartienne à C, il faut et il suffit que, pour tout hyperplan $H \in \mathfrak{M}$, il soit du même côté de H que e_H, c'est-à-dire que $(t | e_H) = \xi_H$ soit strictement positif. D'où (iii).

PROPOSITION 8. — *Supposons que le groupe* W *soit essentiel, irréductible et infini. Alors :*

(i) *Aucun point de* E *n'est invariant par* W.

(ii) *On a* Card $\mathfrak{M} = \dim T + 1$, *et il existe des nombres réels* $c_H > 0$ *tels que* $\sum_{H \in \mathfrak{M}} c_H . e_H = 0$. *Si les nombres réels* c'_H *sont tels que* $\sum_{H \in \mathfrak{M}} c'_H . e_H = 0$, *il existe* ξ *réel avec* $c'_H = \xi c_H$ *pour tout* H *dans* $\mathfrak{M}$.

(iii) *La chambre* C *est un simplexe ouvert.*

L'assertion (i) résulte de la prop. 4. D'autre part, puisque W est essentiel, les vecteurs $(e_H)_{H \in \mathfrak{M}}$ engendrent T. On a $(e_H | e_{H'}) \leqslant 0$ pour $H, H' \in \mathfrak{M}$ et $H \neq H'$ (prop. 3) et, puisque W est irréductible, il n'existe pas de partition de $\mathfrak{M}$ en deux ensembles non vides $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ telle que $H' \in \mathfrak{M}'$ et $H'' \in \mathfrak{M}''$ entraînent $(e_{H'} | e_{H''}) = 0$. On peut donc appliquer le lemme 5 du nº 5, et le cas 1) de ce lemme est exclu : en effet, les e_H ne sont pas linéairement indépendants, puisque W n'a pas de point fixe. L'assertion (ii) en résulte.

Démontrons (iii). Numérotons les murs de C sous la forme $H_0, H_1, \ldots, H_d$ et posons $t_m = e_{H_m}$. D'après (ii), les vecteurs $t_1, \ldots, t_d$ forment une base de T, donc les hyperplans $H_1, \ldots, H_d$ ont un point a_0 en commun, et il existe une base $(t'_1, \ldots, t'_d)$ de T telle que $(t_m | t'_n) = \delta_{mn}$; de plus, toujours d'après (ii), il existe des nombres réels $c_1 > 0, \ldots, c_d > 0$ tels que

$$t_0 = -(c_1 . t_1 + \cdots + c_d . t_d).$$

Comme le vecteur t_0 est orthogonal à l'hyperplan H_0, il existe un nombre réel c tel que H_0 soit l'ensemble des points $x = t + a_0$ de E avec $(t | t_0) = -c$.

Tout point de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = t + a_0$ avec $t = \xi_1 . t'_1 + \cdots + \xi_d . t'_d$ et $\xi_1, \ldots, \xi_d$ réels. Pour que x appartienne à C, il faut et il suffit qu'il soit du même côté de H_m que t_m pour $0 \leqslant m \leqslant d$; ceci se traduit par les inégalités $(t | t_1) > 0, \ldots, (t | t_d) > 0$, et $(t | t_0) > -c$, ou encore par $\xi_1 > 0, \ldots, \xi_d > 0$, $c_1 \xi_1 + \cdots + c_d \xi_d < c$. Comme C est non vide, on a $c > 0$. Posons $a_m = a_0 + \frac{c}{c_m} . t'_m$ pour $1 \leqslant m \leqslant d$; la chambre C se compose alors des points de E de la forme $a_0 + \sum_{m=1}^{d} \lambda_m . (a_m - a_0)$ avec $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_d > 0$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_d < 1$, donc C est le simplexe ouvert de sommets $a_0, \ldots, a_d$. C.Q.F.D.

Remarques. — 1) Identifions E à $E_0 \times E_1 \times \cdots \times E_s$, et W à $W_1 \times \cdots \times W_s$ comme au nº 8. D'après la prop. 6, la chambre C s'identifie alors à

$$E_0 \times C_1 \times \cdots \times C_s$$

où C_p est une chambre dans E_p par rapport à l'ensemble $\mathfrak{H}_p$ d'hyperplans. D'après les prop. 7 et 8, chacune des chambres $C_1, \ldots, C_s$ est un cône simplicial ouvert ou un simplexe ouvert.

2) Supposons W irréductible et essentiel. Si H et H' sont deux murs de C, on a $m_{HH'} = +\infty$ si et seulement si l'on a $e_H = -e_{H'}$ (prop. 3). D'après les

prop. 7 et 8, ceci ne peut se produire que si H et H′ sont les seuls murs de C et E de dimension 1. Le seul cas où l'un des $m_{\mathrm{HH}'}$ est infini est donc celui où E est de dimension 1 et où le groupe W est engendré par les réflexions associées à deux points distincts (cf. § 2, n° 4).

Dans le cas général, la matrice de Coxeter associée à W a ses éléments finis, sauf si l'un au moins des $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_s$ est du type précédent.

10. Points spéciaux

Soient L l'ensemble des translations appartenant à W et Λ l'ensemble des $t \in \mathrm{T}$ tels que la translation $x \longmapsto t + x$ appartienne à L. Il est immédiat que Λ est stable par $U(\mathrm{W})$ et que L est un sous-groupe distingué de W. Comme W opère proprement dans E, il en est de même de L, et on en déduit facilement que Λ est un sous-groupe discret de T. Pour tout point x de E, on notera W_x le stabilisateur de x dans W.

Proposition 9. — *Soit $a \in \mathrm{E}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *On a* $\mathrm{W} = \mathrm{W}_a . \mathrm{L}$;

(ii) *La restriction de l'homomorphisme U à W_a est un isomorphisme de W_a sur* $U(\mathrm{W})$;

(iii) *Pour tout hyperplan $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$, il existe un hyperplan $\mathrm{H}' \in \mathfrak{H}$ parallèle à H et tel que $a \in \mathrm{H}'$.*

Il est clair que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii), puisque L est le noyau de U et que $\mathrm{L} \cap \mathrm{W}_a = \{1\}$.

Admettons (i) et soit $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$; on a $s_{\mathrm{H}} \in \mathrm{W}_a . \mathrm{L}$ et il existe donc un vecteur $t \in \Lambda$ tel que $a = s_{\mathrm{H}}(a) + t$; le vecteur t est orthogonal à H, et si $\mathrm{H}' = \mathrm{H} + \frac{1}{2} t$ on a $s_{\mathrm{H}'}(x) = s_{\mathrm{H}}(x) + t$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ (cf. § 2, n° 4, prop. 5). Comme on a $t \in \Lambda$ et $s_{\mathrm{H}} \in \mathrm{W}$, on a $s_{\mathrm{H}'} \in \mathrm{W}$, d'où $\mathrm{H}' \in \mathfrak{H}$; on a aussi $a = s_{\mathrm{H}'}(a)$, d'où $a \in \mathrm{H}'$. Donc (i) implique (iii).

Admettons (iii). Soit $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$; prenons H′ comme dans (iii). Alors $s_{\mathrm{H}'}(a) = a$, d'où $s_{\mathrm{H}'} \in \mathrm{W}_a$; comme H est parallèle à H′, l'élément $w = s_{\mathrm{H}'} s_{\mathrm{H}}$ de W est une translation (§ 2, n° 4, prop. 5), d'où $w \in \mathrm{L}$; on a alors $s_{\mathrm{H}} = s_{\mathrm{H}'} w \in \mathrm{W}_a . \mathrm{L}$. Comme W est engendré par la famille $(s_{\mathrm{H}})_{\mathrm{H} \in \mathfrak{H}}$, on a donc $\mathrm{W} = \mathrm{W}_a . \mathrm{L}$ et (iii) implique (i).

Définition 1. — *On dit qu'un point a de E est spécial pour W s'il satisfait aux conditions équivalentes de la prop.* 9.

Il est clair que l'ensemble des points spéciaux de E est stable par W.

Proposition 10. — *Il existe un point spécial pour* W.

D'après la prop. 6 du n° 8, on peut se limiter au cas où W est essentiel.

Le groupe $U(\mathrm{W})$ d'automorphismes de T est fini (cf. n° 6, th. 3) et $U(s_{\mathrm{H}})$ est une réflexion orthogonale pour tout hyperplan H; de plus, $U(\mathrm{W})$ est engendré par la famille $(U(s_{\mathrm{H}}))_{\mathrm{H}\in\mathfrak{H}}$. D'après la prop. 7 du nº 9, il existe une base $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de T telle que le groupe $U(\mathrm{W})$ soit engendré par l'ensemble des réflexions $(s_i)_{i\in\mathrm{I}}$ définies par

$$s_i(t) = t - 2(t|e_i)\,.\,e_i.$$

Le cor. du th. 1 du nº 2 montre que toute réflexion $s \in U(\mathrm{W})$ est de la forme $s = U(s_{\mathrm{H}})$ avec $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$. On peut donc trouver dans $\mathfrak{H}$ une famille d'hyperplans $(\mathrm{H}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ tels que $s_i = U(s_{\mathrm{H}_i})$ pour tout i. Comme les vecteurs e_i sont linéairement indépendants, il existe $a \in \mathrm{E}$ tel que $a \in \mathrm{H}_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$. On a $s_{\mathrm{H}_i} \in \mathrm{W}_a$, d'où $U(\mathrm{W}) = U(\mathrm{W}_a)$, c'est-à-dire $\mathrm{W} = \mathrm{W}_a.\mathrm{L}$ puisque L est le noyau de U. Donc a est spécial.

Lorsque W est fini essentiel, il n'y a qu'un seul point spécial pour W, à savoir l'unique point invariant par W. La considération des points spéciaux est donc surtout intéressante quand W est infini.

Proposition 11. — *Supposons* W *essentiel. Soit a un point spécial pour* W. *Les chambres relatives à* W_a *sont des cônes simpliciaux ouverts de sommet a. Pour toute chambre* C′ *relative à* W_a *il existe une chambre* C *et une seule relative à* W, *contenue dans* C′, *et telle que* $a \in \overline{\mathrm{C}}$. *La réunion des* $w'(\overline{\mathrm{C}})$ *pour* $w' \in \mathrm{W}_a$ *est un voisinage fermé de a dans* E. *Tout mur de* C′ *est un mur de* C. *Si* W *est infini irréductible, les murs de* C *sont les murs de* C′ *et un hyperplan affine non parallèle aux murs de* C.

Soit $\mathfrak{H}'$ l'ensemble des $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$ qui contiennent a. Le groupe W_a est engendré par les s_{H} pour $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}'$ (nº 3, prop. 2). Les chambres relatives à W_a sont des cônes simpliciaux ouverts de sommet a (nº 9, prop. 7). Soit C′ une telle chambre et soit U une boule ouverte non vide de centre a ne rencontrant aucun élément de $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}'$. Comme $a \in \overline{\mathrm{C}}'$, il existe b dans $\mathrm{U} \cap \mathrm{C}'$. On a $b \notin \mathrm{H}$ pour tout $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$, donc b appartient à une chambre C relative à $\mathfrak{H}$. Comme on a $\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{H}$, on a $\mathrm{C} \subset \mathrm{C}'$. L'ensemble $\mathrm{U} \cap \mathrm{C}'$ ne rencontre aucun $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$ et est convexe, donc $\mathrm{U} \cap \mathrm{C}' \subset \mathrm{C}$; on a donc $a \in \overline{\mathrm{C}}$. Inversement, soit C_1 une chambre relative à W contenue dans C′ et telle que $a \in \overline{\mathrm{C}}_1$; alors C_1 rencontre U, et on a $\mathrm{U} \cap \mathrm{C}_1 \subset \mathrm{U} \cap \mathrm{C}' = \mathrm{U} \cap \mathrm{C}$; les chambres C et C_1, ayant un point commun, coïncident. Pour tout $w' \in \mathrm{W}_a$, on a $w'(\mathrm{U}) = \mathrm{U}$, donc

$$\mathrm{U} \cap w'(\mathrm{C}) = w'(\mathrm{U} \cap \mathrm{C}) = w'(\mathrm{U} \cap \mathrm{C}') = \mathrm{U} \cap w'(\mathrm{C}');$$

comme la réunion des $w'(\mathrm{C}')$ pour $w' \in \mathrm{W}_a$ est dense dans E, la réunion des $\mathrm{U} \cap w'(\mathrm{C}') = \mathrm{U} \cap w'(\mathrm{C})$ est dense dans U, et la réunion des $w'(\overline{\mathrm{C}})$ pour $w' \in \mathrm{W}_a$ contient donc U. Enfin, si H est un mur de C′, il existe un point $c \in \mathrm{U} \cap \mathrm{H}$ et un voisinage ouvert $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ de c tel que $\mathrm{V} \cap \mathrm{C}'$ soit l'intersection de V et du demi-espace ouvert déterminé par H contenant C′; comme $\mathrm{V} \cap \mathrm{C}' = \mathrm{V} \cap \mathrm{U} \cap \mathrm{C}' = \mathrm{V} \cap \mathrm{U} \cap \mathrm{C} = \mathrm{V} \cap \mathrm{C}$, on voit que H est un mur de C. Si W est infini irréductible, C est un simplexe ouvert (nº 9, prop. 8), donc admet un mur de plus que le cône simplicial ouvert C′.

COROLLAIRE. — *Supposons* W *essentiel.*

(i) *Si* $a \in$ E *est spécial, il existe une chambre* C *telle que* a *soit un point extrémal de* $\overline{\mathrm{C}}$.

(ii) *Si* C *est une chambre, il existe un point extrémal de* $\overline{\mathrm{C}}$ *qui est spécial.*

La première assertion résulte de la prop. 11. La seconde résulte de la première et du fait que W opère transitivement sur l'ensemble des chambres.

Par contre, un point extrémal de $\overline{\mathrm{C}}$ n'est pas nécessairement un point spécial pour W (cf. chap. VI, planche X, systèmes B_2 et G_2).

Remarque 1). — Supposons W essentiel, irréductible et infini et gardons les notations de la prop. 11. Puisque U est un isomorphisme de W_a sur $U(\mathrm{W})$, on voit que le graphe de Coxeter du groupe de déplacements $U(\mathrm{W})$ (qui est engendré par les réflexions $U(s_{\mathrm{H}})$ pour $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$) s'obtient à partir du graphe de Coxeter de W en supprimant le sommet i correspondant à l'unique mur de C qui n'est pas un mur de C'.

PROPOSITION 12. — *Supposons* W *essentiel. Soit* a *un point spécial, soit* L(a) *l'ensemble de ses transformés par le groupe de translations* L, *et soit* C *une chambre. Alors* $\overline{\mathrm{C}}$ *rencontre* L(a) *en un point et un seul; ce point est point extrémal de* $\overline{\mathrm{C}}$.

Il existe une chambre C_1 telle que a soit point extrémal de $\overline{\mathrm{C}}_1$ (cor. de la prop. 11). Toute chambre est de la forme $\mathrm{C} = tw'(\mathrm{C}_1)$ avec $w' \in \mathrm{W}_a$ et $t \in \mathrm{L}$ puisque $\mathrm{W} = \mathrm{W}_a . \mathrm{L}$; alors $\overline{\mathrm{C}}$ admet le point extrémal $tw'(a) = t(a) \in \mathrm{L}(a)$. D'autre part, $\overline{\mathrm{C}}$ ne peut contenir deux points distincts de L(a) puisque $\overline{\mathrm{C}}$ est un domaine fondamental pour W (n° 3, th. 2).

Remarque 2). — L'ensemble L(a) est contenu dans l'ensemble des points spéciaux. Il en est en général distinct (cf. chap. VI, § 2, n° 2 et planches I à VI).

§ 4. Représentation géométrique d'un groupe de Coxeter

Dans ce paragraphe, tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels *réels.*

1. Forme associée à une matrice de Coxeter

Soit S un ensemble, et soit $M = (m(s, s'))_{s,s' \in \mathrm{S}}$ une *matrice de Coxeter* (chap. IV, § 1, n° 9) de type S. Rappelons ce que cela signifie :

(1) Les éléments de M sont des entiers ou $+\infty$.

(2) M est symétrique.

(3) On a $m(s, s) = 1$ pour tout s.

(4) On a $m(s, s') \geqslant 2$ pour $s \neq s'$.

Soit $E = \mathbf{R}^{(S)}$, soit $(e_s)_{s \in S}$ la base canonique de E, et soit B_M la forme bilinéaire sur E telle que

$$B_M(e_s, e_{s'}) = -\cos \frac{\pi}{m(s, s')}.$$

La forme B_M est *symétrique*. On dit que c'est la *forme associée* à la matrice M. On a

$$B_M(e_s, e_s) = 1 \qquad \text{et} \qquad B_M(e_s, e_{s'}) \leqslant 0 \qquad \text{si} \quad s \neq s'.$$

Soit $s \in S$, et soit f_s la forme linéaire $x \longmapsto 2B_M(e_s, x)$. Nous noterons σ_s la *pseudo-réflexion* définie par le couple (e_s, f_s) (cf. § 2, nº 1) ; du fait que $\langle e_s, f_s \rangle = 2$, c'est une *réflexion* (§ 2, nº 2). On a

$$\sigma_s(x) = x - 2B_M(e_s, x) \,.\, e_s$$

et en particulier

$$\sigma_s(e_{s'}) = e_{s'} + 2 \cos \frac{\pi}{m(s, s')} . e_s.$$

Puisque e_s n'est pas isotrope pour B_M, l'espace E est somme directe de la droite $\mathbf{R}e_s$ et de l'hyperplan H_s orthogonal à e_s. Comme σ_s est égal à -1 sur $\mathbf{R}e_s$ et à 1 sur H_s, il s'ensuit que σ_s *conserve* la forme B_M. Lorsque S est fini et B_M non dégénérée (cas sur lequel on reviendra au nº 8), on voit donc que σ_s est une *réflexion orthogonale* (§ 2, nº 3).

2. Le plan $E_{s, s'}$ et le groupe engendré par σ_s et $\sigma_{s'}$

Dans ce numéro, on désigne par s et s' deux éléments de S, avec $s \neq s'$. On pose $m = m(s, s')$, et l'on note $E_{s, s'}$ le plan $\mathbf{R}e_s \oplus \mathbf{R}e_{s'}$.

PROPOSITION 1. — *La restriction de B_M à $E_{s, s'}$ est positive. Elle est non dégénérée si et seulement si m est fini.*

Soit $z = xe_s + ye_{s'}$, avec $x, y \in \mathbf{R}$, un élément de $E_{s, s'}$. On a

$$\begin{aligned} B_M(z, z) &= x^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{m} + y^2 \\ &= (x - y . \cos \frac{\pi}{m})^2 + y^2 \sin^2 \frac{\pi}{m}, \end{aligned}$$

ce qui montre que B_M est positive sur $E_{s, s'}$, et qu'elle y est non dégénérée si et seulement si $\sin \frac{\pi}{m} \neq 0$. D'où la proposition.

Les réflexions σ_s et $\sigma_{s'}$ laissent stable $E_{s,s'}$. Nous allons déterminer l'ordre de la restriction de $\sigma_s\sigma_{s'}$ à $E_{s,s'}$. Distinguons deux cas :

a) $m = +\infty$.

Soit $u = e_s + e_{s'}$. On a $B_M(u, e_s) = B_M(u, e_{s'}) = 0$, donc u est invariant par σ_s et $\sigma_{s'}$. De plus :

$$\sigma_s(\sigma_{s'}(e_s)) = \sigma_s(e_s + 2e_{s'}) = 3e_s + 2e_{s'} = 2u + e_s,$$

d'où
$$(\sigma_s\sigma_{s'})^n(e_s) = 2nu + e_s \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Il en résulte que la restriction de $\sigma_s\sigma_{s'}$ à $E_{s,s'}$ est *d'ordre infini.*

b) *m est fini.*

La forme B_M munit $E_{s,s'}$ d'une structure de *plan euclidien.* Puisque le produit scalaire de e_s et $e_{s'}$ est égal à $-\cos\frac{\pi}{m} = \cos(\pi - \frac{\pi}{m})$, on peut orienter $E_{s,s'}$ de telle sorte que l'angle des demi-droites $\mathbf{R}_+e_s$ et $\mathbf{R}_+e_{s'}$ soit égal à $\pi - \frac{\pi}{m}$. Si D et D′ désignent les droites orthogonales à e_s et $e_{s'}$, on a

$$(\widehat{D', D}) = \pi - (\widehat{D, D'}) = \frac{\pi}{m}.$$

Or, les restrictions $\bar\sigma_s$ et $\bar\sigma_{s'}$ de σ_s et $\sigma_{s'}$ à $E_{s,s'}$ sont les *symétries orthogonales* par rapport à D et D′. D'après le cor. de la prop. 6 du § 2, n° 5, il s'ensuit que $\bar\sigma_s\bar\sigma_{s'}$ *est la rotation d'angle* $\frac{2\pi}{m}$. En particulier, son ordre est m.

Revenons maintenant à E :

PROPOSITION 2. — *Le sous-groupe de* $\mathbf{GL}(E)$ *engendré par* σ_s *et* $\sigma_{s'}$ *est un groupe diédral d'ordre* $2m(s, s')$.

Comme σ_s et $\sigma_{s'}$ sont d'ordre 2, et sont distincts, il suffit de voir que leur produit $\sigma_s\sigma_{s'}$ est d'ordre $m(s, s')$. Lorsque $m(s, s')$ est infini, cela résulte de *a*) ci-dessus. Lorsque $m(s, s')$ est fini, il résulte de la prop. 1 que E est somme directe de $E_{s,s'}$ et de son orthogonal $V_{s,s'}$; comme σ_s et $\sigma_{s'}$ sont l'identité dans $V_{s,s'}$, et que la restriction de $\sigma_s\sigma_{s'}$ à $E_{s,s'}$ est d'ordre $m(s, s')$ d'après *b*), l'ordre de $\sigma_s\sigma_{s'}$ est bien égal à $m(s, s')$.

3. Groupe et représentation associés à une matrice de Coxeter

Conservons les notations des numéros précédents. Soit $W = W(M)$ le groupe défini par la *famille génératrice* $(g_s)_{s\in S}$ et par les *relations* (*)

$$(g_sg_{s'})^{m(s,s')} = 1, \qquad \text{pour} \quad s, s' \in S,\ m(s, s') \neq +\infty.$$

PROPOSITION 3. — *Il existe un homomorphisme et un seul*

$$\sigma : W \to \mathbf{GL}(E)$$

(*) Cela signifie que, si L_S désigne le groupe libre sur S, W est le quotient de L_S par le plus petit sous-groupe distingué de L_S contenant les éléments $(ss')^{m(s,s')}$, pour $m(s, s') \neq +\infty$.

tel que $\sigma(g_s) = \sigma_s$ *pour tout* $s \in S$. *Les éléments de* $\sigma(W)$ *conservent la forme bilinéaire* B_M.

Pour prouver l'existence et l'unicité de σ, il suffit de voir que l'on a $(\sigma_s\sigma_{s'})^{m(s,s')} = 1$ si $m(s, s') \neq +\infty$. Or, si $s = s'$, cela résulte de ce que σ_s est d'ordre 2; si $s \neq s'$, cela résulte de ce qui a été démontré au nº 2. Enfin, comme les réflexions σ_s conservent B_M, il en est de même des éléments de $\sigma(W)$.

Remarque 1). — Nous verrons au nº 4 que σ est *injective;* le groupe W pourra donc être identifié au sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$ engendré par les σ_s.

Proposition 4. — *a*) *L'application* $s \longmapsto g_s$ *de* S *dans* W *est injective.*

b) *Chacun des* g_s *est d'ordre* 2.

c) *Si* $s, s' \in S$, $g_sg_{s'}$ *est d'ordre* $m(s, s')$.

L'assertion *a*) résulte de ce que l'application composée

$$s \longmapsto g_s \longmapsto \sigma_s$$

de S dans $\mathbf{GL}(E)$ est injective.

Pour *b*) (resp. *c*)), on remarque que l'ordre de g_s (resp. l'ordre de $g_sg_{s'}$) est *au plus* 2 (resp. *au plus* $m(s, s')$). Comme on a vu au nº 2 que l'ordre de σ_s (resp. de $\sigma_s\sigma_{s'}$) est 2 (resp. $m(s, s')$), il y a nécessairement égalité.

Vu *a*), on peut *identifier* S à une partie de W, au moyen de l'application $s \longmapsto g_s$.

Corollaire. — *Le couple* (W, S) *est un système de Coxeter, de matrice M.*

Cela ne fait que traduire les propriétés *b*) et *c*), ainsi que la définition de W.

Remarque 2). — Nous avons ainsi démontré que *toute matrice de Coxeter correspond à un groupe de Coxeter.*

4. La représentation contragrédiente

Soit E^* le dual de E. Comme W opère sur E au moyen de σ, il opère aussi, par transport de structure, sur E^*. La représentation correspondante

$$\sigma^* : W \to \mathbf{GL}(E^*)$$

s'appelle la *représentation contragrédiente* de σ. On a

$$\sigma^*(w) = {}^t\sigma(w^{-1}) \qquad \text{pour tout} \quad w \in W.$$

Si $x^* \in E^*$ et $w \in W$, nous noterons également $w(x^*)$ le transformé de x^* par $\sigma^*(w)$.

Si $s \in S$, notons A_s l'ensemble des $x^* \in E^*$ tels que $x^*(e_s) > 0$. Soit C l'intersection des A_s, $s \in S$. Lorsque S est *fini*, C est un *cône simplicial ouvert* de E^* (§ 1, nº 6).

THÉORÈME 1 (Tits). — *Si* $w \in \mathrm{W}$ *et si* $\mathrm{C} \cap w(\mathrm{C}) \neq \varnothing$, *on a* $w = 1$.

Indiquons tout de suite quelques conséquences de ce théorème :

COROLLAIRE 1. — *Le groupe* W *opère de façon simplement transitive sur l'ensemble des* $w(\mathrm{C})$ *pour* $w \in \mathrm{W}$.

C'est clair.

COROLLAIRE 2. — *Les représentations* σ *et* σ^* *sont injectives.*

En effet, si $\sigma^*(w) = 1$, on a $w(\mathrm{C}) = \mathrm{C}$, d'où $w = 1$ d'après le théorème. L'injectivité de σ résulte de celle de σ^*.

COROLLAIRE 3. — *Si* S *est fini,* $\sigma(\mathrm{W})$ *est un sous-groupe discret de* $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ (muni de sa structure canonique de groupe de Lie) ; *de même,* $\sigma^*(\mathrm{W})$ *est un sous-groupe discret de* $\mathbf{GL}(\mathrm{E}^*)$.

Soit $x^* \in \mathrm{C}$. L'ensemble U des $g \in \mathbf{GL}(\mathrm{E}^*)$ tels que $g(x^*) \in \mathrm{C}$ est un voisinage de l'élément neutre dans $\mathbf{GL}(\mathrm{E}^*)$; d'après le théorème, on a

$$\sigma^*(\mathrm{W}) \cap \mathrm{U} = \{1\};$$

donc $\sigma^*(\mathrm{W})$ est un sous-groupe discret de $\mathbf{GL}(\mathrm{E}^*)$. Par transport de structure, on en déduit que $\sigma(\mathrm{W})$ est discret dans $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$.

Démonstration du théorème 1.

Si $w \in \mathrm{W}$, notons $l(w)$ la *longueur de* w par rapport à S (chap. IV, § 1, n° 1).

Nous allons démontrer les assertions suivantes, où n désigne un entier $\geqslant 0$:

(P_n) *Soient* $w \in \mathrm{W}$, *avec* $l(w) = n$, *et* $s \in \mathrm{S}$. *On a alors*:
ou bien $w(\mathrm{C}) \subset \mathrm{A}_s$;
ou bien $w(\mathrm{C}) \subset s(\mathrm{A}_s)$ *et* $l(sw) = l(w) - 1$.

(Q_n) *Soient* $w \in \mathrm{W}$, *avec* $l(w) = n$, *et* $s, s' \in \mathrm{S}$, $s \neq s'$. *Soit* $\mathrm{W}_{s,s'}$ *le sous-groupe de* W *engendré par* s *et* s'. *Il existe* $u \in \mathrm{W}_{s,s'}$ *tel que*

$$w(\mathrm{C}) \subset u(\mathrm{A}_s \cap \mathrm{A}_{s'}) \qquad \text{et} \qquad l(w) = l(u) + l(u^{-1}w).$$

Ces assertions sont triviales pour $n = 0$. Nous les démontrerons par récurrence sur n, suivant le schéma

$$((\mathrm{P}_n) \text{ et } (\mathrm{Q}_n)) \Longrightarrow (\mathrm{P}_{n+1}) \qquad \text{et} \qquad ((\mathrm{P}_{n+1}) \text{ et } (\mathrm{Q}_n)) \Longrightarrow (\mathrm{Q}_{n+1}).$$

Démonstration de $((\mathrm{P}_n)$ et $(\mathrm{Q}_n)) \Longrightarrow (\mathrm{P}_{n+1})$.

Soient $w \in \mathrm{W}$, avec $l(w) = n + 1$, et $s \in \mathrm{S}$. On peut écrire w sous la forme $w = s'w'$ avec $s' \in \mathrm{S}$ et $l(w') = n$. Si $s' = s$, (P_n) appliqué à w' montre que $w'(\mathrm{C}) \subset \mathrm{A}_s$, d'où $w(\mathrm{C}) \subset s(\mathrm{A}_s)$ et l'on a bien $l(sw) = l(w') = l(w) - 1$. Si $s' \neq s$, (Q_n) appliqué à w' montre qu'il existe $u \in \mathrm{W}_{s,s'}$ tel que

$$w'(\mathrm{C}) \subset u(\mathrm{A}_s \cap \mathrm{A}_{s'}) \qquad \text{et} \qquad l(w') = l(u) + l(u^{-1}w').$$

On a $w(\mathrm{C}) = s'w'(\mathrm{C}) \subset s'u(\mathrm{A}_s \cap \mathrm{A}_{s'})$.

Lemme 1. — *Soient s, $s' \in S$, avec $s \neq s'$ et soit $v \in W_{s,s'}$. Alors $v(A_s \cap A_{s'})$ est contenu, soit dans A_s, soit dans $s(A_s)$, et dans le second cas, on a $l(sv) = l(v) - 1$.*

La démonstration sera donnée au nº 5.

Appliquons ce lemme à l'élément $v = s'u$. On a alors deux possibilités : ou bien

$$s'u(A_s \cap A_{s'}) \subset A_s \qquad \text{et} \qquad \textit{a fortiori} \quad w(C) \subset A_s,$$

ou bien

$$s'u(A_s \cap A_{s'}) \subset s(A_s) \qquad \text{et} \qquad \textit{a fortiori} \quad w(C) \subset s(A_s).$$

De plus, dans le second cas, on a $l(ss'u) = l(s'u) - 1$. D'où :

$$\begin{aligned} l(sw) &= l(ss'w') = l(ss'u.u^{-1}w') \leqslant l(ss'u) + l(u^{-1}w') \\ &= l(s'u) + l(u^{-1}w') - 1 = l(w) - 1, \end{aligned}$$

et l'on sait que cela entraîne bien $l(sw) = l(w) - 1$.

Démonstration de $((P_{n+1})$ et $(Q_n)) \Longrightarrow (Q_{n+1})$.

Soient $w \in W$, avec $l(w) = n + 1$, et s, $s' \in S$, $s \neq s'$. Si $w(C)$ est contenu dans $A_s \cap A_{s'}$, la condition (Q_{n+1}) est vérifiée en prenant $u = 1$. Sinon, supposons par exemple que $w(C)$ ne soit pas contenu dans A_s. D'après (P_{n+1}), on a $w(C) \subset s(A_s)$ et $l(sw) = n$. D'après (Q_n), appliqué à sw, il existe $v \in W_{s,s'}$ tel que

$$sw(C) \subset v(A_s \cap A_s') \qquad \text{et} \qquad l(sw) = l(v) + l(v^{-1}sw).$$

On a alors

$$w(C) \subset sv(A_s \cap A_{s'})$$

et

$$\begin{aligned} l(w) &= 1 + l(sw) = 1 + l(v) + l(v^{-1}sw) \\ &\geqslant l(sv) + l((sv)^{-1}w) \geqslant l(w), \end{aligned}$$

et les inégalités ci-dessus sont des égalités. On en conclut que (Q_{n+1}) est vérifiée en prenant $u = sv$.

Démonstration du théorème.

Soit $w \in W$, avec $w \neq 1$. On peut écrire w sous la forme sw', avec $s \in S$, et $l(w') = l(w) - 1$. D'après (P_n), appliqué à w' et à $n = l(w')$, on a $w'(C) \subset A_s$, puisque le cas $w'(C) \subset s(A_s)$ est exclu du fait que $l(sw') = l(w) = l(w') + 1$. D'où $w(C) = sw'(C) \subset s(A_s)$, et comme A_s et $s(A_s)$ sont disjoints, on a $C \cap w(C) = \varnothing$. C.Q.F.D.

5. Démonstration du lemme 1

Soit $E^*_{s,s'}$ le dual du plan $E_{s,s'} = \mathbf{R}e_s \oplus \mathbf{R}e_{s'}$ (nº 2). La transposée de l'injection $E_{s,s'} \to E$ est une surjection

$$p : E^* \to E^*_{s,s'}$$

qui commute à l'action du groupe $W_{s,s'}$. Il est clair que A_s, $A_{s'}$ et $A_s \cap A_{s'}$

sont les *images réciproques par p* des sous-ensembles correspondants de $E^*_{s,s'}$ (considéré comme espace de la représentation contragrédiente du groupe de Coxeter $W_{s,s'}$). Comme en outre la longueur d'un élément de $W_{s,s'}$ est la même par rapport à $\{s, s'\}$ et par rapport à S (chap. IV, § 1, n° 8), on voit que *l'on est finalement ramené au cas où* $S = \{s, s'\}$; si $m = m(s, s')$, le groupe W est alors un groupe *diédral* d'ordre $2m$.

Distinguons maintenant deux cas:

a) $m = +\infty$.

Soit $(\varepsilon, \varepsilon')$ la base duale de $(e_s, e_{s'})$. On a

$$s.\varepsilon = -\varepsilon + 2\varepsilon', \qquad s'.\varepsilon = \varepsilon$$
$$s.\varepsilon' = \varepsilon' \qquad , \qquad s'.\varepsilon' = 2\varepsilon - \varepsilon'.$$

Soit D la droite affine de E^* contenant ε et ε'; les formules ci-dessus montrent que D est stable par s et s' et que la restriction de s (resp. de s') à D est la réflexion par rapport au point ε' (resp. ε). Soit

$$\theta : \mathbf{R} \to D$$

la bijection affine $t \longmapsto \theta(t) = t\varepsilon + (1-t)\varepsilon'$. Soit I_n l'image par θ de l'intervalle ouvert $]n, n+1[$, et soit C_n la réunion des λI_n, pour $\lambda > 0$. On a $C_0 = C$; de plus, d'après la *Remarque* du § 2, n° 4, appliquée à l'espace affine D, les I_n sont permutés de façon simplement transitive par W; il en est donc de même des C_n. Si $v \in W$, $v(C)$ est égal à l'un des C_n, donc est contenu dans A_s si $n \geqslant 0$ et dans $s(A_s)$ si $n < 0$. Dans le second cas, I_0 et I_n sont de part et d'autre du point ε'; d'où $l(sv) = l(v) - 1$ (*loc. cit.*).

b) m est fini.

La forme B_M est alors non dégénérée (n° 2) ce qui permet d'identifier E^* à E. On a vu que l'on peut orienter E de telle sorte que les demi-droites $\mathbf{R}_+ e_s$ et $\mathbf{R}_+ e_{s'}$ fassent un angle égal à $\pi - \frac{\pi}{m}$.

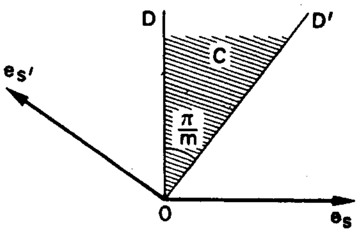


FIGURE 2

Soit D (resp. D') la demi-droite déduite de $\mathbf{R}_+ e_s$ (resp. de $\mathbf{R}_+ e_{s'}$) par une rotation de $\pi/2$ (resp. de $-\pi/2$), cf. figure 2. La chambre C est l'ensemble des $x \in E$ dont le produit scalaire avec e_s et $e_{s'} > 0$; c'est le secteur angulaire ouvert d'origine D' et d'extrémité D. D'après la *Remarque* du § 2, n° 5, tout élément v de W transforme C en un secteur angulaire qui est, soit situé du même côté que C de D (i.e. est contenu dans A_s), soit situé de l'autre côté (i.e. contenu dans $s(A_s)$) et dans ce dernier cas, on a

$$l(sv) = l(v) - 1,$$

ce qui achève de démontrer le lemme.

6. Domaine fondamental de W dans la réunion des chambres

On conserve les notations du n° 4. Pour $s \in S$, on désigne par H_s l'hyperplan de E^* orthogonal à e_s, par $\overline{A}_s$ l'ensemble des $x^* \in E^*$ tels que $\langle x^*, e_s\rangle \geqslant 0$ et par $\overline{C}$ l'intersection des $\overline{A}_s$ pour $s \in S$. Pour la topologie faible $\sigma(E^*, E)$ définie par la dualité entre E^* et E (*Esp. vect. top.*, chap. II, 2^e^ éd., § 6, n° 2), les $\overline{A}_s$ sont des demi-espaces fermés et $\overline{C}$ est un cône convexe fermé. De plus, $\overline{C}$ est l'*adhérence* de C : en effet, si $x^* \in \overline{C}$ et $y^* \in C$, on a $x^* + ty^* \in C$ pour tout nombre réel $t > 0$ et $x^* = \lim\limits_{t \to 0} (x^* + ty^*)$.

Pour $X \subset S$, on pose :

$$C_X = \Big(\bigcap_{s \in X} H_s\Big) \cap \Big(\bigcap_{s \in S-X} A_s\Big).$$

On a $C_X \subset \overline{C}$, $C_\varnothing = C$ et $C_S = \{0\}$. Les ensembles C_X, pour $X \in \mathfrak{P}(S)$, forment une *partition* de $\overline{C}$.

Rappelons d'autre part (chap. IV, § 1, n° 8) que l'on désigne par W_X le sous-groupe de W engendré par X. On a évidemment $w(x^*) = x^*$ pour $w \in W_X$ et $x^* \in C_X$.

PROPOSITION 5. — *Soient* X, $X' \subset S$ *et* w, $w' \in W$. *Si* $w(C_X) \cap w'(C_{X'}) \neq \varnothing$, *alors on a* $X = X'$, $wW_X = w'W_{X'}$ *et* $w(C_X) = w'(C_{X'})$.

On se ramène aussitôt au cas $w' = 1$. Nous ferons alors la démonstration par récurrence sur la longueur n de w. Si $n = 0$, l'assertion est évidente. Si $l(w) > 0$, il existe un $s \in S$ tel que $l(sw) = l(w) - 1$ et on a alors (cf. fin du n° 4) $w(C) \subset s(A_s)$, d'où $w(\overline{C}) \subset s(\overline{A}_s)$. Comme $\overline{C} \subset \overline{A}_s$, il en résulte que

$$\overline{C} \cap w(\overline{C}) \subset H_s.$$

On a donc $s(x^*) = x^*$ pour tout $x^* \in \overline{C} \cap w(\overline{C})$ et *a fortiori* pour tout

$$x^* \in C_{X'} \cap w(C_X).$$

Par suite, la relation $C_{X'} \cap w(C_X) \neq \varnothing$ entraîne d'une part $C_{X'} \cap H_s \neq \varnothing$, d'où $s \in X'$, d'autre part $C_{X'} \cap sw(C_X) \neq \varnothing$. L'hypothèse de récurrence entraîne alors que $X = X'$ et $swW_X = W_{X'} = W_X$, d'où $sw \in W_X$ et $w \in W_X$ puisque $s \in W_X$. Il en résulte que $wW_X = W_{X'}$ et que $w(C_X) = C_X = C_{X'}$.

COROLLAIRE. — *Soient* X *une partie de* S *et* x^* *un élément de* C_X. *Le stabilisateur de* x^* *dans* W *est* W_X.

Soit maintenant U la réunion des $w(\overline{C})$ pour $w \in W$, et soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties de U de la forme $w(C_X)$, avec $X \subset S$ et $w \in W$. Vu ce qui précède, $\mathfrak{F}$ est une *partition* de U.

PROPOSITION 6. — (i) *Le cône* U *est convexe.*

(ii) *Tout segment fermé contenu dans* U *ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de* $\mathfrak{F}$.

(iii) *Le cône* $\overline{C}$ *est un domaine fondamental de* W *opérant dans* U.

Pour prouver (iii), il suffit de montrer que si $x^*, y^* \in \overline{C}$ et $w \in W$ sont tels que $w(x^*) = y^*$, on a $x^* = y^*$. Or il existe deux parties X et Y de S telles que $x^* \in C_X$ et $y^* \in C_Y$; on a $w(C_X) \cap C_Y \neq \emptyset$, et la prop. 5 montre que $X = Y$ et $w \in W_X$, ce qui entraîne bien $x^* = y^*$.

Soient maintenant $x^*, y^* \in U$, et montrons que *le segment fermé* $[x^*y^*]$ *est recouvert par un nombre fini d'éléments de* $\mathfrak{F}$, ce qui établira à la fois (i) et (ii). Quitte à transformer x^* et y^* par un même élément de W, on peut supposer que $x^* \in \overline{C}$. Soit $w \in W$ tel que $y^* \in w(\overline{C})$. Nous allons raisonner par récurrence sur la longueur de w. Pour $s \in S$, la relation $w(\overline{C}) \not\subset \overline{A}_s$ est équivalente à $w(C) \not\subset A_s$ et par suite à $l(sw) < l(w)$ (cf. n° 4). La prop. 7 du n° 8 du chap. IV, § 1, entraîne donc qu'il n'existe qu'un nombre fini de $s \in S$ tels que $w(\overline{C}) \not\subset \overline{A}_s$. L'ensemble T des $s \in S$ tels que $\langle y^*, e_s \rangle < 0$ est donc fini. D'autre part, l'intersection $\overline{C} \cap [x^*y^*]$ est un segment fermé $[x^*z^*]$. Si $z^* = y^*$, c'est-à-dire si $y^* \in \overline{C}$, il existe des parties X et Y de S telles que $x^* \in C_X$ et $y^* \in C_Y$. Le segment ouvert $]x^*y^*[$ est alors contenu dans $C_{X \cap Y}$, d'où $[x^*y^*] \subset C_X \cup C_Y \cup C_{X\cap Y}$. Si $z^* \neq y^*$, il existe un $s \in T$ tel que $z^* \in H_s$. On a alors $w(C) \not\subset A_s$ et $l(sw) < l(w)$. L'hypothèse de récurrence entraîne donc que le segment $[z^*y^*] = s([z^*(sw(y^*))])$ est recouvert par un nombre fini d'éléments de $\mathfrak{F}$, donc aussi

$$[x^*y^*] = [x^*z^*] \cup [z^*y^*]$$

puisque $[x^*z^*] \subset \overline{C}$.

7. Irréductibilité de la représentation géométrique d'un groupe de Coxeter

On conserve les notations des n^{os} précédents, et l'on suppose que S est *fini.*

PROPOSITION 7. — *Supposons que* (W, S) *soit irréductible* (chap. IV, § 1, n° 9). *Soit* E^0 *le sous-espace de* E *orthogonal à* E *vis-à-vis de* B_M. *Le groupe* W *opère trivialement sur* E^0, *et tout sous-espace de* E, *distinct de* E *et stable par* W, *est contenu dans* E^0.

Si $x \in E^0$, on a $\sigma_s(x) = x - 2B_M(e_s, x)e_s = x$ pour tout $s \in S$. Comme W est engendré par S, il en résulte bien que W opère trivialement sur E^0.

Soit E' un sous-espace de E stable par W. Soient $s, s' \in S$ deux éléments *liés* dans le graphe Γ de (W, S) (chap. IV, § 1, n° 9); rappelons que cela signifie que $m(s, s') \geqslant 3$. Supposons que $e_s \in E'$. On a alors $\sigma_{s'}(e_s) \in E'$ et comme le coefficient de $e_{s'}$ dans $\sigma_{s'}(e_s)$ est non nul, on a $e_{s'} \in E'$. Comme Γ est connexe, il s'ensuit que, si E' contient l'un des e_s, il les contient tous et coïncide avec E. Ce cas étant écarté, il résulte de la prop. 3 du § 2, n° 2 que, pour tout $s \in S$, E' est contenu dans l'hyperplan H_s orthogonal à e_s. Comme l'intersection des H_s est égale à E^0, cela démontre la proposition.

Corollaire. — *Supposons que* (W, S) *soit irréductible. Alors:*

a) Si B_M *est non dégénérée, le* W-*module* E *est absolument simple.*

b) Si B_M *est dégénérée, le* W-*module* E *n'est pas semi-simple.*

Dans le cas *a*), la prop. 7 montre que E est simple, donc aussi absolument simple (§ 2, nº 1, prop. 1).

Dans le cas *b*), on a $E^0 \neq 0$, $E \neq E^0$ (puisque $B_M \neq 0$), et la prop. 7 montre que E^0 n'admet pas de supplémentaire stable par W; le W-module E n'est donc pas semi-simple.

8. Critère de finitude

On conserve les notations des nºˢ précédents, et l'on suppose que S est fini.

Théorème 2. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) W *est fini.*

(2) *La forme* B_M *est positive non dégénérée.*

(1) $\Longrightarrow$ (2). Soit $S = \bigcup_i S_i$ la décomposition de S en composantes connexes (chap. IV, § 1, nº 9), et soit $W = \prod_i W_i$ la décomposition correspondante de W. L'espace E s'identifie à la somme directe des espaces $E_i = \mathbf{R}^{S_i}$, et B_M s'identifie à la somme directe des formes B_{M_i} correspondantes. On est donc ramené au cas où (W, S) est *irréductible*. Comme W est supposé fini, E est un W-module semi-simple (Annexe, prop. 2). D'après le cor. de la prop. 5, il s'ensuit que E est absolument simple. Soit alors B′ une forme positive non dégénérée sur E, et soit B″ la somme de ses transformées par W. Puisque B″ est invariante par W, elle est proportionnelle à B_M (§ 2, nº 1, prop. 1); du fait que $B_M(e_s, e_s) = 1$ pour tout $s \in S$, le coefficient de proportionalité est > 0, et, comme B″ est positive, il en est de même de B_M, ce qui démontre (2).

(2) $\Longrightarrow$ (1). Si B_M est positive non dégénérée, le groupe orthogonal $\mathbf{O}(B_M)$ est *compact* (*Intégr.*, chap. VII, § 3, nº 1). Comme $\sigma(W)$ est un sous-groupe *discret* de $\mathbf{O}(B_M)$ (cor. 3 du th. 1), il s'ensuit que $\sigma(W)$ est fini, donc aussi W. C.Q.F.D.

Le résultat suivant a été prouvé en cours de démonstration :

Corollaire. — *Si* (W, S) *est irréductible et fini,* E *est un* W-*module absolument simple.*

Le critère fourni par le th. 2 permet de classifier tous les groupes de Coxeter *finis* (cf. chap. VI, § 4). Bornons-nous ici à un résultat préliminaire :

Proposition 8. — *Si* W *est fini, le graphe de* (W, S) *est une forêt* (chap. IV, Annexe).

Sinon, ce graphe contiendrait un circuit $(s_1, \ldots, s_n)$, $n \geqslant 3$. Si l'on pose $m_i = m(s_i, s_{i+1})$, $1 \leqslant i < n$, et $m_n = m(s_n, s_1)$, cela signifie que l'on a $m_i \geqslant 3$ pour tout i. Soit

$$x = e_{s_1} + \cdots + e_{s_n}.$$

On a $B_M(x, x) = n + 2 \sum_{i<j} B_M(e_{s_i}, e_{s_j})$. Or

$$B_M(e_{s_i}, e_{s_{i+1}}) = -\cos\frac{\pi}{m_i} \leqslant -\cos\frac{\pi}{3} \leqslant -\frac{1}{2}\ (*),$$

et de même pour $B_M(e_{s_n}, e_{s_1})$. Comme les autres termes de la somme ci-dessus sont $\leqslant 0$, on obtient

$$B_M(x, x) \leqslant n - n = 0.$$

contrairement au fait que B_M est positive non dégénérée.

COROLLAIRE. — *Si* (W, S) *est irréductible et fini, son graphe est un arbre.*

En effet, une forêt connexe est un arbre.

Comparaison avec les résultats du § 3.

Soit tout d'abord (W, S) un groupe de Coxeter fini. Notons $(x|y)$ la forme $B_M(x, y)$; d'après le th. 2, c'est un produit scalaire sur E. Pour tout $s \in S$, soit H_s l'hyperplan associé à la réflexion orthogonale σ_s, et soit $\mathfrak{H}$ la famille des hyperplans $w(H_s)$, pour $s \in S, w \in W$. Soit C_0 l'ensemble des $x \in E$ tels que $(x|e_s) > 0$ pour tout $s \in S$. Enfin, identifions W (au moyen de σ) à un sous-groupe du groupe orthogonal $\mathbf{O}(E)$ de l'espace E.

PROPOSITION 9. — *Avec les notations précédentes,* W *est le sous-groupe de* $\mathbf{O}(E)$ *engendré par les réflexions par rapport aux hyperplans de* $\mathfrak{H}$. *C'est un groupe essentiel* (§ 3, n° 7) *et* C_0 *est une chambre de* E *relativement à* $\mathfrak{H}$.

La première assertion est triviale. D'autre part, si $x \in E$ est invariant par W, il est orthogonal à tous les e_s, donc nul; cela montre que W est essentiel. Enfin, l'isomorphisme $E \to E^*$ défini par B_M transforme C_0 en l'ensemble C du n° 4; la propriété (P_n) démontrée à cet endroit prouve que, pour tout $w \in W$, et tout $s \in S$, $w(C_0)$ ne rencontre pas H_s. On en conclut que C_0 est contenu dans le complémentaire U de la réunion des hyperplans de $\mathfrak{H}$, et comme C_0 est connexe, ouvert et fermé dans U, c'est une *chambre* de E relativement à $\mathfrak{H}$, C.Q.F.D.

On peut donc appliquer à W et C_0 toutes les propriétés démontrées au § 3. En

(*) Les racines de l'équation $z^3 - 1 = 0$ sont 1 et $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Donc $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ et par suite $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. Notons à cette occasion que $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, d'où

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{6} = -\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

De même, les racines de l'équation $z^2 - i = 0$ sont $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, d'où

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et par suite} \qquad \sin\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

particulier, $\overline{C}_0$ est un *domaine fondamental* pour l'action de W sur E (en d'autres termes, le cône U défini au nº 6 est égal à E tout entier).

Inversement, soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $(x|y)$ et soit W un groupe fini essentiel de déplacements de E laissant 0 fixe; supposons W *engendré par des réflexions.* Soit C_0 une chambre de E par rapport à W (cf. § 3), et soit S l'ensemble des réflexions orthogonales relativement aux murs de C_0. Alors (W, S) est un *système de Coxeter fini* (§ 3, nº 2, th. 1). De plus, si $s \in S$, notons H_s le mur de C_0 correspondant à s, et notons e_s le vecteur unitaire orthogonal à H_s et situé du même côté que C_0 de H_s. Si $(m(s, s'))$ désigne la matrice de Coxeter de (W, S), les prop. 3 et 7 du § 3 montrent que

$$(e_s|e_{s'}) = -\cos(\pi/m(s, s'))$$

et que les e_s forment une base de E. *La représentation naturelle de* W *dans* E *s'identifie donc à la représentation* σ *du nº* 3.

9. Cas où B_M est positive et dégénérée

Dans ce numéro, nous supposons que S est fini, que (W, S) est *irréductible,* et que la forme B_M est *positive et dégénérée.*

Lemme 2. — *L'orthogonal* E^0 *de* E *pour* B_M *est de dimension* 1; *il est engendré par un élément* $v = \sum_{s \in S} v_s e_s$, *avec* $v_s > 0$ *pour tout* s.

Cela résulte du lemme 4 du § 3, nº 5, appliqué à la matrice des $B_M(e_s, e_{s'})$.

Soit $v = \sum_s v_s e_s$ le vecteur satisfaisant aux conditions du lemme 2, tel que $\sum_s v_s = 1$ et soit A l'hyperplan affine de E^* formé des $y^* \in E^*$ tels que $\langle v, y^* \rangle = 1$. Si T désigne l'orthogonal de v dans E^*, A est muni de façon naturelle d'une structure d'espace affine d'espace de translations T. De plus, la forme B_M définit par passage au quotient un produit scalaire non dégénéré sur E/E^0, donc aussi sur son dual T; d'où une *structure euclidienne* sur l'espace affine A (*Alg.*, chap. IX, § 6, nº 6).

Soit G le sous-groupe de $\mathbf{GL}(E)$ formé des automorphismes laissant invariants v et B_M; si $g \in G$, le contragrédient ${}^tg^{-1}$ laisse stables A et T, et définit par restriction à A un *déplacement* $i(g)$ de A (cf. § 3). Il est immédiat que l'on obtient ainsi un *isomorphisme* de G sur le groupe des déplacements de A. De plus le stabilisateur G_a d'un point a de A s'identifie au groupe orthogonal de l'espace hilbertien T et est donc *compact.* Par ailleurs, G est un groupe localement compact dénombrable à l'infini et A est un espace de Baire : il s'ensuit (*Intégr.*, chap. VII, Appendice, lemme 2) que l'application $\psi : g \longmapsto g(a)$ définit un homéomorphisme de G/G_a sur A. Donc G *opère proprement sur* A (*Top. gén.*, chap. III, 3e éd., § 4, nº 2, cor. de la prop. 5). Puisque W est un sous-groupe de G, il s'identifie à un groupe de déplacements de A. Nous allons voir que ce groupe satisfait aux hypothèses du § 3. Plus précisément :

PROPOSITION 10. — *Le groupe* W *muni de la topologie discrète opère proprement sur* A; *il est engendré par des réflexions orthogonales; il est infini, irréductible et essentiel* (§ 3, n° 7). *L'intersection* $C \cap A$ *est une chambre de* A *pour* W. *Si l'on désigne par* L_s *l'hyperplan de* A *intersection de* A *avec l'hyperplan de* E^* *orthogonal à* e_s, *les* L_s *pour* $s \in S$ *forment la famille des murs de* $C \cap A$. *Si* ε_s *est le vecteur unitaire de* T *orthogonal à* L_s *situé du même côté que* $C \cap A$ *de* L_s, *on a* $(\varepsilon_s|\varepsilon_t) = -\cos(\pi/m(s, t))$ (*pour* s, $t \in S$) *et la matrice de Coxeter de* W (§ 3, n° 4) *s'identifie à* M.

D'après le cor. 3 du th. 1, W est discret dans $\mathbf{GL}(E)$, donc dans G et opère proprement dans A. Soit $s \in S$. Comme $\operatorname{Card} S \geqslant 2$, l'hyperplan de E^* orthogonal à e_s n'est pas orthogonal à v et son intersection L_s avec A est bien un hyperplan. Le déplacement correspondant à s est donc un déplacement d'ordre 2 laissant fixes tous les points de L_s : c'est nécessairement la réflexion orthogonale associée à L_s. Il en résulte que W est bien engendré par des réflexions orthogonales. Le th. 2 montre alors que W est infini et la prop. 7 qu'il est essentiel et irréductible.

Comme C est un cône simplicial ouvert, ayant pour murs les hyperplans d'équations $\langle x^*, e_s\rangle = 0$ (pour $s \in S$), l'intersection $C \cap A$ est une partie convexe, donc connexe, ouverte et fermée du complémentaire de la réunion des L_s dans A. De plus $C \cap A$ est non vide, car si $x^* \in C$, on a $\langle x^*, v\rangle = \sum_s v_s\langle x^*, e_s\rangle > 0$ et $\langle x^*, v\rangle^{-1}x^* \in C \cap A$. Il en résulte que $C \cap A$ est une chambre de A relativement au système des L_s. De plus, on a $w(C \cap A) \cap L_s = \varnothing$ pour tout $w \in W$ (cf. n° 4, propriété (P_n)) et il en résulte que $C \cap A$ est une chambre de A relativement au système formé des transformés des L_s par tous les éléments de W; d'après le cor. du th. 1 du § 3, n° 2, il en résulte que $C \cap A$ est une chambre de A relative à W.

Soit alors a_s^* le sommet du simplexe $C \cap A$ non situé dans L_s. On a

$$\langle a_s^*, e_t\rangle = 0$$

pour s, $t \in S$ et $s \neq t$, et

$$\langle a_s^*, e_s\rangle = v_s^{-1}\langle a_s^*, v\rangle = v_s^{-1}.$$

Soit ε_s le vecteur de T défini par les relations :

$$(\varepsilon_s|a_s^* - a_t^*) = v_s^{-1} \qquad \text{pour} \qquad t \in S,\ t \neq s.$$

Le vecteur ε_s est orthogonal à L_s et est situé du même côté que $C \cap A$ de l'hyperplan L_s. On a de plus :

$$(\varepsilon_s|a_s^* - a_t^*) = \langle e_s, a_s^* - a_t^*\rangle \qquad \text{quels que soient} \quad s,\ t \in S$$

ce qui montre que ε_s est l'image de la classe de e_s par l'isomorphisme de

E/E^0 sur T déduit de la forme quadratique B_M. Il en résulte que

$$(\varepsilon_s|\varepsilon_t) = B_M(e_s, e_t).$$

Par suite ε_s est bien un vecteur unitaire et la dernière assertion de la prop. 10 est démontrée.

Nous dirons que l'espace affine euclidien A muni du groupe W est *l'espace associé à la matrice de Coxeter M* et nous le noterons A_M.

La proposition 10 admet une réciproque:

PROPOSITION 11. — *Soit* W *un groupe de déplacements d'un espace affine euclidien* A, *satisfaisant aux hypothèses du* § 3. *On suppose que* W *est infini, essentiel et irréductible. Alors la forme* B_M *attachée à la matrice de Coxeter M de* W *est positive dégénérée et il existe un isomorphisme et un seul de l'espace affine* A_M *associé à M sur* A, *commutant à l'action de* W. *Cet isomorphisme transforme le produit scalaire de* A_M *en un multiple du produit scalaire de* A.

Soit C_0 une chambre de A et soit S l'ensemble des réflexions orthogonales par rapport aux murs de C_0. Si η_s désigne le vecteur unitaire orthogonal à l'hyperplan N_s associé à la réflexion s, situé du même côté que C_0 de N_s (§ 3, prop. 3), la forme B_M est telle que $B_M(e_s, e_t) = (\eta_s|\eta_t)$ pour $s, t \in S$. Elle est donc *positive*. Comme les η_s sont linéairement dépendants (§ 3, nº 9, prop. 8), elle est *dégénérée*.

On peut donc appliquer à M les constructions précédentes. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a $(\varepsilon_s|\varepsilon_t) = (\eta_s|\eta_t)$ et il existe un isomorphisme φ d'espaces hilbertiens et un seul de T sur l'espace des translations de A tel que $\varphi(\varepsilon_s) = \eta_s$. Soient a et b deux sommets distincts de C_0 et s_0 la réflexion de S telle que $a \notin N_{s_0}$. Posons $\lambda = (\eta_{s_0}|a - b)$ et soit ψ la bijection affine de A_M sur A définie par:

$$\psi(a_{s_0} + x) = a + v_{s_0}\lambda\varphi(x) \qquad \text{pour} \quad x \in T.$$

Il est alors immédiat que $\psi(L_s) = N_s$ pour tout $s \in S$ et que ψ transforme le produit scalaire de A_M en un multiple de celui de A. On en déduit aussitôt que ψ commute à l'action de W. Enfin, l'unicité de ψ est évidente, car a_s par exemple est l'unique point de A_M invariant par les réflexions $t \in S$, $t \neq s$.

§ 5. Invariants dans l'algèbre symétrique

1. Série de Poincaré des algèbres graduées

Soit K un anneau commutatif à élément unité, non réduit à 0. Soient M un K-module gradué de type **Z**, M_n l'ensemble des éléments de M homogènes de degré n. Supposons que chaque M_n soit *libre de type fini*. Alors le rang $\mathrm{rg}_K(M_n)$ est défini pour tout n (*Alg. comm.*, chap. II, § 5, nº 3).

DÉFINITION 1. — *S'il existe* $n_0 \in \mathbf{Z}$ *tel que* $M_n = 0$ *pour* $n \leqslant n_0$, *la série formelle* $\sum_{n \geqslant n_0} \operatorname{rg}_K(M_n)T^n$, *qui est un élément de* $\mathbf{Q}((T))$, *s'appelle la série de Poincaré de* M *et se note* $P_M(T)$.

Soient M′ un autre K-module gradué de type **Z**, $(M'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ sa graduation. Supposons que M'_n soit nul pour n majoré par un certain nombre. Alors on a

$$P_{M \oplus M'}(T) = P_M(T) + P_{M'}(T) \tag{1}$$

et, si l'on munit $M \otimes_K M'$ de la graduation totale (*Alg.*, chap. II, 3e éd., § 11, nº 5)

$$P_{M \otimes M'}(T) = P_M(T) P_{M'}(T). \tag{2}$$

PROPOSITION 1. — *Soit* $S = \bigoplus_{n \geqslant 0} S_n$ *une* K-*algèbre graduée commutative admettant un système générateur* $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *formé d'éléments homogènes et algébriquement indépendants. Soit* d_i *le degré de* x_i, *et supposons* $d_i > 0$ *pour tout* i. *Alors les* S_n *sont libres de rang fini sur* K, *et l'on a*

$$P_S(T) = \prod_{i=1}^{m} (1 - T^{d_i})^{-1}. \tag{3}$$

En effet, S s'identifie au produit tensoriel $K[x_1] \otimes K[x_2] \otimes \cdots \otimes K[x_m]$, muni de la graduation totale. La série de Poincaré de $K[x_i]$ est

$$\sum_{n \geqslant 0} T^{nd_i} = (1 - T^{d_i})^{-1},$$

et il suffit d'appliquer (2).

Sous les hypothèses de la prop. 1, nous dirons que S est une K-*algèbre graduée de polynômes.*

COROLLAIRE. — *Les degrés* d_i *sont déterminés à l'ordre près par* S.

En effet, l'inverse de $P_S(T)$ est le polynôme $N(T) = \prod_{i=1}^{m} (1 - T^{d_i})$, qui est donc déterminé de manière unique. Si q est un entier $\geqslant 1$ et si $\zeta \in \mathbf{C}$ est une racine primitive q-ème de l'unité, la multiplicité de la racine ζ de N(T) est égale au nombre des d_i qui sont multiples de q. Ce nombre est nul pour q suffisamment grand. Le nombre des d_i égaux à q est ainsi déterminé de manière unique par récurrence descendante.

On dit que les entiers d_i sont les *degrés caractéristiques* de S. Leur nombre est égal au degré de transcendance de S sur K lorsque K est un corps; nous l'appellerons encore le degré de transcendance de S sur K dans le cas général. C'est la multiplicité de la racine 1 du polynôme N(T).

Soient $S = \bigoplus_{n \geqslant 0} S_n$ une K-algèbre graduée commutative, $R = \bigoplus_{n \geqslant 0} R_n$ une sous-algèbre graduée de S. *On suppose que chaque* R_n *est libre de type fini, et que le* R-*module* S *admet une base finie formée d'éléments homogènes* $z_1, z_2, \ldots, z_N$ *de degrés* $f_1, f_2, \ldots, f_N$. Alors, si l'on note M le K-module gradué $\sum_{j=1}^{N} Kz_j$, le K-module gradué S est isomorphe à $R \otimes_K M$, donc chaque S_n est libre de type fini et l'on a

$$(4) \qquad P_S(T) = P_M(T)P_R(T) = (\sum_{j=1}^{N} T^{f_j})P_R(T).$$

Proposition 2. — *Conservons les notations précédentes, et supposons que* S *et* R *soient des* K-*algèbres graduées de polynômes.*

(i) R *et* S *ont même degré de transcendance* r *sur* K.

(ii) *Soient* $p_1, \ldots, p_r$ (resp. $q_1, \ldots, q_r$) *les degrés caractéristiques de* S (resp. R). *On a*

$$\prod_{i=1}^{r} (1 - T^{q_i}) = (\sum_{j=1}^{N} T^{f_j}) \prod_{i=1}^{r} (1 - T^{p_i}).$$

(iii) $Np_1p_2 \ldots p_r = q_1q_2 \ldots q_r$.

La formule (4) prouve d'abord que la multiplicité de la racine 1 est la même dans les polynômes $P_S(T)^{-1}$ et $P_R(T)^{-1}$ et, compte tenu de (3), prouve (i) puis (ii).

On déduit de (ii) que

$$\prod_{i=1}^{r} (1 + T + T^2 + \cdots + T^{q_i - 1}) = (\sum_{j=1}^{N} T^{f_j}) \prod_{i=1}^{r} (1 + T + T^2 + \cdots + T^{p_i - 1}).$$

Faisant $T = 1$ dans cette relation, on obtient (iii).

Remarque. — Soient $S = K[X_1, \ldots, X_n]$ une K-algèbre graduée de polynômes, d_i le degré de X_i et $F(X_1, \ldots, X_n)$ un élément homogène de degré m de S. Alors on a

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} d_i X_i \frac{\partial F}{\partial X_i} = mF.$$

En effet, il est immédiat que l'application K-linéaire D de S dans S qui transforme tout élément z homogène de degré p en pz est une dérivation de S. Donc :

$$mF(X_1, \ldots, X_n) = D(F(X_1, \ldots, X_n)) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) \frac{\partial F}{\partial X_i} = \sum_{i=1}^{n} d_i X_i \frac{\partial F}{\partial X_i}.$$

2. Invariants d'un groupe linéaire fini : propriétés de module

Soient K un anneau commutatif ayant un élément unité, V un K-module, G un groupe opérant dans V. On sait que tout automorphisme de V se prolonge de façon unique en un automorphisme de l'algèbre symétrique $S = S(V)$, et G opère donc dans cette algèbre. Si $x \in S$ et $g \in G$, nous noterons $g_S . x$ le transformé de x par g. Soit R la sous-algèbre S^G de S formée des éléments invariants par G.

Supposons G fini, V de type fini, et K nœthérien. Alors S est un R-*module de type fini*, et R est une K-algèbre de type fini (*Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 9, th. 2). Supposons S intègre et soit N son corps des fractions. Le corps des fractions L de R est l'ensemble des éléments de N invariants par G (*loc. cit.*, cor. de la prop. 23), donc N est une extension *galoisienne* de L. Tout élément de N s'écrit z/t avec $z \in S$ et $t \in R$ (*loc. cit.*, prop. 23). D'après *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 7, n° 10, cor. 3 de la prop. 26, le rang du R-module S est [N : L]. Supposons que G opère fidèlement dans V. Le groupe de Galois de N sur L s'identifie alors à G, donc $[N : L] = \mathrm{Card}\, G$; ainsi :

$$\mathrm{rg}_R(S) = [N : L] = \mathrm{Card}\,(G). \tag{6}$$

Pour toute algèbre graduée $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \oplus \ldots$, nous noterons A_+ l'idéal $\bigoplus\limits_{n>0} A_n$.

THÉORÈME 1. — *Soient* K *un corps commutatif,* V *un espace vectoriel de dimension finie sur* K, $S = S(V)$ *l'algèbre symétrique de* V, G *un groupe fini d'automorphismes de* V, *et* R *la sous-algèbre graduée de* S *formée des éléments invariants par* G. *On suppose que* G *est engendré par des pseudo-réflexions* (§ 2, n° 1), *et que* $q = \mathrm{Card}(G)$ *est étranger à l'exposant caractéristique de* K. *Alors le* R-*module* S *admet une base formée de* q *éléments homogènes.*

a) Comme chaque sous-module de $S/(R_+S)$ est libre sur $R_0 = K$, il suffit de montrer (en vertu d'*Alg.*, chap. II, 3e éd., § 11, n° 4, prop. 7) que l'homomorphisme canonique de $R_+ \otimes_R S$ dans S est injectif. Pour tout R-module E, notons T(E) le R-module $\mathrm{Ker}(R_+ \otimes_R E \to E)$ (*autrement dit $T(E) = \mathrm{Tor}_1^R(R/R_+, E)$*). Si E, E′ sont deux R-modules et si u est un homomorphisme de E dans E′, l'homomorphisme $1 \otimes u$ de $R_+ \otimes E$ dans $R_+ \otimes E'$ définit par restriction à T(E) un homomorphisme de T(E) dans T(E′) que nous noterons $T(u)$. Si u' est un homomorphisme de E′ dans un R-module E″, on a $T(u' \circ u) = T(u') \circ T(u)$. Donc, si G opère sur E de façon R-linéaire, G opère dans T(E).

b) Le groupe G opère dans S de façon R-linéaire, donc aussi dans T(S). Par ailleurs, T(S) est muni de manière naturelle d'une structure de S-module gradué. Montrons d'abord que, si $g \in G$, g transforme tout élément x de T(S) est un élément congru à x modulo $S_1T(S)$. Il suffit de le faire quand g est une pseudo-réflexion. Il existe alors un vecteur non nul v de V tel que $g(x) - x \in Kv$ pour tout $x \in V$. Comme V engendre S, on en déduit que g_S opère trivialement sur S/Sv. Donc, pour tout $y \in S$, il existe un élément $h(y)$ de S tel que

$$g_S(y) - y = h(y)v.$$

Comme S est intègre et que v est non nul, cet élément est déterminé de manière unique par y; il est immédiat que h est un endomorphisme de degré -1 du R-module S. Ainsi, $g_S - 1_S = m_v \circ h$ en notant m_v l'homothétie de rapport v dans S. Donc

$$T(g_S) - 1_{T(S)} = T(g_S - 1_S) = T(m_v) \circ T(h)$$

dont l'image est contenue dans $vT(S)$, ce qui prouve notre assertion.

c) Montrons maintenant que tout élément de T(S) invariant par G est nul. En effet, soit Q l'endomorphisme du R-module S défini par

$$Q(y) = q^{-1} \sum_{g \in G} g_S(y)$$

pour tout $y \in S$. On a $Q(S) = R$. On peut donc écrire $Q = i \circ Q'$ où Q' est un homomorphisme du R-module S sur le R-module R et où i désigne l'injection canonique de R dans S. Donc $T(Q) = T(i) \circ T(Q')$, et $T(Q') = 0$ puisque $T(R) = \mathrm{Ker}\,(R_+ \otimes R \to R) = 0$. Donc

$$0 = T(Q) = q^{-1} \sum_{g \in G} T(g_S).$$

Or $q^{-1} \sum_{g \in G} T(g_S)$ laisse fixes les éléments de T(S) invariants par G. Ceux-ci sont donc nuls.

d) Supposons $T(S) \neq 0$. Il existe dans T(S) un élément homogène $u \neq 0$ de degré minimum. D'après *b*), u est invariant par G. D'après *c*), $u = 0$. On a ainsi une contradiction, d'où $T(S) = 0$. C.Q.F.D.

Remarques. — 1) Il résulte d'*Alg.*, chap. II, 3e éd., § 11, no 4, prop. 7 que, si $(z_1, z_2, \ldots, z_q)$ est une famille d'éléments homogènes de S dont les images canoniques dans $S/(R_+S)$ forment une base de $S/(R_+S)$ sur K, alors $(z_1, z_2, \ldots, z_q)$ est une base de S sur R.

2) Soit g une pseudo-réflexion de V, d'ordre fini $n \geqslant 2$, premier à l'exposant caractéristique de K. D'après le théorème de Maschke (Annexe, prop. 2), on peut décomposer V en $D \oplus H$, où H est l'hyperplan formé des éléments de V invariants par g, et où D est une droite sur laquelle g opère par multiplication par une racine primitive n-ème de l'unité. Lorsque $K = \mathbf{R}$, ceci n'est possible que si $n = 2$, et g est alors une *réflexion*; dans ce cas, les groupes aux-

quels s'appliquent le th. 1 sont donc les *groupes de Coxeter finis*. (Pour $K = \mathbf{C}$, par contre, le th. 1 s'applique à certains groupes qui ne sont pas de Coxeter) (*).

THÉORÈME 2. — *Les hypothèses et notations sont celles du théorème* 1.

(i) *Il existe un sous-espace vectoriel gradué de* S, *supplémentaire de* R_+S *dans* S, *stable par* G.

(ii) *Soit* U *un tel supplémentaire. L'homomorphisme canonique de* $U \otimes_K R$ *dans* S *est un isomorphisme de* G-*modules, et la représentation de* G *dans* U (resp. S) *est isomorphe à la représentation régulière de* G *sur* K (resp. R).

En effet, pour tout entier $n \geqslant 0$, les K-espaces vectoriels S_n et $(R_+S) \cap S_n$ sont stables par G, et il résulte du th. de Maschke (Annexe, prop. 2) qu'il existe un supplémentaire U_n de $(R_+S) \cap S_n$ dans S_n stable par G. Alors $\sum_{n \geqslant 0} U_n$ est un supplémentaire de R_+S dans S stable par G, d'où (i).

Soit U un sous-espace vectoriel gradué de S, supplémentaire de R_+S dans S, stable par G. D'après la remarque 1, toute base du K-espace vectoriel U est aussi une base du R-module S, et par suite une base du corps des fractions N de S sur le corps des fractions L de R. Ainsi, le L-espace vectoriel N s'identifie à $U \otimes_K L$. Comme U est stable par G, cette identification est compatible avec les opérations de G. L'algèbre L[G] du groupe G sur L s'identifie à l'algèbre $K[G] \otimes_K L$. L'extension galoisienne N de L admet une base normale (*Alg.*, chap. V, § 10, th. 5 et *Alg.*, chap. VII, § 5, n° 7), ce qui peut s'interpréter en disant que N, considéré comme L[G]-module, est isomorphe au module de la représentation régulière de G sur L. Comme U est de dimension finie sur K, il résulte alors de l'Annexe, prop. 1, que le K[G]-module U est isomorphe au module de la représentation régulière de G sur K. Nos assertions en résultent aussitôt.

3. Invariants d'un groupe linéaire fini : propriétés d'anneau

THÉORÈME 3. — *Les hypothèses et notations sont celles du th.* 1. *Dans l'ensemble des systèmes générateurs de l'idéal* R_+ *de* R *formés d'éléments homogènes, choisissons un élément minimal* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$. *Soit* k_i *le degré de* α_i. *On suppose que les* k_i *sont étrangers à l'exposant caractéristique de* K. *Alors* $l = \dim V$, *les* α_i *engendrent la* K-*algèbre* R, *et sont algébriquement indépendants sur* K. *En particulier,* R *est une* K-*algèbre graduée de polynômes de degré de transcendance* l *sur* K.

L'hypothèse faite sur les k_i est superflue, mais n'est pas gênante pour les applications aux groupes de Coxeter finis, puisqu'on a alors $K = \mathbf{R}$. Cf. le n° 5, où l'on donnera d'ailleurs une autre démonstration du th. 3.

(*) On trouvera une classification de ces groupes dans G. C. SHEPHARD et J. A. TODD, Finite unitary reflection groups, *Canad. J. of Maths.*, t. VI (1954), p. 274-304.

Le th. 3 résultera de la prop. 2 (i), du th. 1, et du lemme suivant :

Lemme 1. — *Soient* K *un corps commutatif,* S *une* K*-algèbre graduée de polynômes, et* R *une sous-algèbre graduée de type fini de* S *telle que le* R*-module* S *admette une base* $(z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *formée d'éléments homogènes. Dans l'ensemble des systèmes générateurs de l'idéal* R_+ *de* R *formés d'éléments homogènes, choisissons un élément minimal* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. *On suppose que, pour tout* i, *le degré* k_i *de* α_i *est étranger à l'exposant caractéristique* p *de* K. *Alors les* α_i *engendrent la* K*-algèbre* R *et sont algébriquement indépendants sur* K.

D'après *Alg.*, chap. II, § 11, n° 4, prop. 7, l'hypothèse faite sur les α_i équivaut à dire qu'ils sont homogènes et que leurs images dans le K-espace vectoriel $R_+/(R_+)^2$ forment une base de cet espace. Cette condition est invariante par extension du corps de base; on peut donc se ramener au cas où celui-ci est *parfait.*

La famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ engendre l'algèbre R d'après *Alg. comm.*, chap. III, § 1, n° 2, prop. 1. Raisonnons par l'absurde et supposons que cette famille soit algébriquement liée sur K.

1) Nous allons d'abord montrer qu'il existe des familles

$$(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant s}, \qquad (y_k)_{1\leqslant k\leqslant r}, \qquad (d_{ik})_{1\leqslant i\leqslant s,\, 1\leqslant k\leqslant r}$$

d'éléments homogènes de S, avec les propriétés suivantes :

$$\beta_i \in \mathrm{R} \quad \text{pour tout } i, \text{ et les } \beta_i \text{ sont non tous nuls;} \tag{7}$$

$$\deg y_k > 0 \quad \text{pour tout } k; \tag{8}$$

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{r} d_{ik} y_k \quad \text{pour tout } i; \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_i d_{ik} = 0 \quad \text{pour tout } k. \tag{10}$$

Soient $X_1, \ldots, X_s$ des indéterminées et munissons $K[X_1, \ldots, X_s]$ de la structure d'algèbre graduée pour laquelle X_i est de degré k_i. Il existe des éléments homogènes non nuls $H(X_1, \ldots, X_s)$ de $K[X_1, \ldots, X_s]$ tels que $H(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = 0$; choisissons H de manière que son degré soit minimum. Si $\partial H/\partial X_i \neq 0$, le polynôme $\dfrac{\partial H}{\partial X_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ est donc un élément homogène non nul de R; si $p \neq 1$, H n'est pas de la forme H_1^p avec $H_1 \in K[X_1, \ldots, X_s]$. Prenons alors

$$\beta_i = k_i \frac{\partial H}{\partial X_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s).$$

Comme K est parfait, les polynômes $\partial H/\partial X_i \in K[X_1, \ldots, X_s]$ ne sont pas tous nuls (*Alg.*, chap. V, § 1, n° 3, prop. 4); vu l'hypothèse faite sur les k_i, il en est de même des β_i.

D'autre part, S s'identifie à une algèbre graduée de polynômes

$$K[x_1, \ldots, x_r]$$

en notant $x_1, \ldots, x_r$ des indéterminées affectées de degrés $m_i > 0$ convenables. Soit D_k la dérivation partielle par rapport à x_k dans S. Nous prendrons $d_{ik} = k_i^{-1} D_k(\alpha_i)$. Alors l'égalité (10) est vraie car son premier membre est $D_k(H(\alpha_1, \ldots, \alpha_s))$. D'autre part, si on pose $y_1 = m_1 x_1, \ldots, y_r = m_r x_r$, l'égalité (9) résulte de l'égalité (5) du n° 1.

2) Soit $\mathfrak{b}$ l'idéal de R engendré par les β_i; il existe une partie J de

$$I = \{1, 2, \ldots, s\}$$

telle que $(\beta_i)_{i \in J}$ soit un système générateur minimal de $\mathfrak{b}$. On a $J \neq \varnothing$ car $\mathfrak{b} \neq 0$. Nous allons déduire de (9) et (10) que, si $i \in J$, α_i est combinaison R-linéaire des α_j pour $j \neq i$, ce qui contredira la minimalité de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ et achèvera la démonstration.

Il existe des éléments homogènes γ_{ji} de R ($i \in J$, $j \in I - J$) tels que

$$\beta_j = \sum_{i \in J} \gamma_{ji} \beta_i \quad (j \in I - J). \tag{11}$$

En tenant compte de (11), la formule (10) donne

$$\sum_{i \in J} \beta_i \Big(d_{ik} + \sum_{j \in I - J} \gamma_{ji} d_{jk}\Big) = 0. \tag{12}$$

Posons

$$u_{ik} = d_{ik} + \sum_{j \in I - J} \gamma_{ji} d_{jk}. \tag{13}$$

On a donc

$$\sum_{i \in J} \beta_i u_{ik} = 0. \tag{14}$$

Écrivons $u_{ik} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_{ik\lambda} z_\lambda$, où les $\delta_{ik\lambda}$ appartiennent à R. La relation (14) entraîne $\sum_{i \in J} \beta_i \delta_{ik\lambda} = 0$ quels que soient k et λ. Si l'un des $\delta_{ik\lambda}$ avait une composante homogène de degré 0 non nulle, l'égalité précédente entraînerait que l'un des β_i ($i \in J$) est combinaison R-linéaire des autres, contrairement à la minimalité de $(\beta_i)_{i \in J}$. Donc $\delta_{ik\lambda} \in R_+$ et par suite $u_{ik} \in R_+ S$ quels que soient i et k. Il existe donc des $u_{ikh} \in S$ tels que $u_{ik} = \sum_{h=1}^{s} u_{ikh} \alpha_h$, autrement dit, d'après (13),

$$d_{ik} + \sum_{j \in I - J} \gamma_{ji} d_{jk} = \sum_{h=1}^{s} u_{ikh} \alpha_h. \tag*{$(15)_{ik}$}$$

Multiplions les deux membres de $(15)_{ik}$ par y_k, et additionnons pour i fixé dans J et $k = 1, 2, \ldots, r$; en vertu de (9), on trouve

$$\alpha_i + \sum_{j \in \mathrm{I}-\mathrm{J}} \gamma_{ji}\alpha_j = \sum_{h=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} u_{ikh} y_k \alpha_h.$$

Prenons les composantes homogènes de degré k_i des deux membres. Comme $\deg y_k > 0$, on voit que α_i est combinaison S-linéaire des α_j avec $j \neq i$. Comme S est libre sur R et que $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathrm{R}$, on en déduit que α_i est combinaison R-linéaire des α_j avec $j \neq i$ (*Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 5, prop. 9 *d*)).

Corollaire. — *Les hypothèses et notations étant celles du th.* 3, *le produit des degrés caractéristiques de* R *est* Card (G).

En effet, on a $\mathrm{rg}_{\mathrm{R}}(\mathrm{S}) = \mathrm{Card}(\mathrm{G})$ (formule (6), n° 2). Les degrés caractéristiques de S sont égaux à 1. Alors le corollaire résulte du n° 1, prop. 2 (iii).

Lemme 2. — *Soient* K *un corps commutatif,* V *un espace vectoriel de dimension finie sur* K, $\mathrm{S} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{S}_n$ *l'algèbre symétrique de* V, s *un endomorphisme de* V, *et* $s^{(n)}$ *le prolongement canonique de* s *à* S_n. *Alors,* T *désignant une indéterminée, on a dans* K[[T]]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}(s^{(n)})\mathrm{T}^n = (\det(1 - s\mathrm{T}))^{-1}.$$

Quitte à étendre le corps de base, on peut supposer K algébriquement clos. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de V par rapport à laquelle la matrice de s est triangulaire inférieure, et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les éléments diagonaux de cette matrice. Par rapport à la base $(e_1^{i(1)} \ldots e_r^{i(r)})_{i(1)+\cdots+i(r)=n}$ de S_n, ordonnée lexicographiquement, la matrice de $s^{(n)}$ est triangulaire inférieure, et ses éléments diagonaux sont les produits $\lambda_1^{i(1)} \ldots \lambda_r^{i(r)}$. Donc

$$\mathrm{Tr}(s^{(n)}) = \sum_{i(1)+\cdots+i(r)=n} \lambda_1^{i(1)} \ldots \lambda_r^{i(r)},$$

et par suite

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}(s^{(n)})\mathrm{T}^n &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1^n\mathrm{T}^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_2^n\mathrm{T}^n\Big) \ldots \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_r^n\mathrm{T}^n\Big)\\ &= (1 - \lambda_1\mathrm{T})^{-1}(1 - \lambda_2\mathrm{T})^{-1} \ldots (1 - \lambda_r\mathrm{T})^{-1}\\ &= (\det(1 - s\mathrm{T}))^{-1}.\end{aligned}$$

Lemme 3. — *Soient* K, V *et* S *comme dans le lemme* 2, G *un groupe fini d'automorphismes de* V, q *l'ordre de* G, R *la sous-algèbre graduée de* S *formée des éléments invariants par* G. *On suppose* K *de caractéristique* 0. *La série de Poincaré de* R *est alors*

$$q^{-1} \sum_{g \in \mathrm{G}} (\det(1 - g\mathrm{T}))^{-1}.$$

En effet, l'endomorphisme $f = q^{-1} \sum_{g \in G} g^{(n)}$ est un projecteur de S_n sur R_n, donc $\operatorname{Tr}(f) = \dim_K S^G$. La série de Poincaré de R est alors

$$q^{-1} \sum_{g \in G} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Tr} g^{(n)}) T^n \right),$$

et il suffit d'appliquer le lemme 2.

Proposition 3. — *Les hypothèses et notations étant celles du th.* 3, *soit* H *l'ensemble des pseudo-réflexions appartenant à* G *et distinctes de* 1. *On suppose* K *de caractéristique* 0. *Alors* $\operatorname{Card}(H) = \sum_{i=1}^{l} (k_i - 1)$.

D'après la prop. 3 de l'Annexe, on peut supposer K algébriquement clos. Pour tout $g \in G$, soient $\lambda_1(g), \ldots, \lambda_l(g)$ ses valeurs propres. Comme tout $g \in G$ est diagonalisable (Annexe, prop. 2), on a $g = 1$ si et seulement si tous les $\lambda_i(g)$ sont égaux à 1, et $g \in H$ si et seulement si le nombre des $\lambda_i(g)$ égaux à 1 est $l - 1$ (nous noterons alors $\lambda(g)$ la valeur propre distincte de 1). La prop. 1 du n° 1 et le lemme 3 prouvent que

$$q \prod_{i=1}^{l} (1 - T^{k_i})^{-1} = \sum_{g \in G} (\det(1 - gT))^{-1} \tag{16}$$

dans K[[T]], donc dans K(T). Par suite, on a dans K(T) :

$$q \frac{(1 - T)^{l-1}}{\prod_{i=1}^{l} (1 - T^{k_i})} = \frac{1}{1 - T} + \sum_{g \in H} \frac{1}{1 - \lambda(g)T} + \sum_{g \neq 1, g \notin H} \frac{(1 - T)^{l-1}}{\det(1 - gT)},$$

ce qui s'écrit

$$\frac{q - \prod_{i=1}^{l} (1 + T + \cdots + T^{k_i - 1})}{(1 - T) \prod_{i=1}^{l} (1 + T + \cdots + T^{k_i - 1})} = \sum_{g \in H} \frac{1}{1 - \lambda(g)T} + \sum_{g \neq 1, g \notin H} \frac{(1 - T)^{l-1}}{\det(1 - gT)}. \tag{17}$$

On voit que $q - \prod_{i=1}^{l} (1 + T + \cdots + T^{k_i - 1})$ doit s'annuler pour $T = 1$, d'où $q = k_1 k_2 \ldots k_l$, ce que nous savions déjà par le cor. du th. 3. Cela étant dit, soit $Q(T)$ le polynôme $(1 - T)^{-1}(q - \prod_{i=1}^{l} (1 + T + \cdots + T^{k_i - 1}))$. En dérivant l'égalité $(1 - T)Q(T) = q - \prod_{i=1}^{l} (1 + T + \cdots + T^{k_i - 1})$ et en faisant $T = 1$, on voit que $-Q(1)$ est la valeur pour $T = 1$ de

$$-\frac{d}{dt}\Big(\prod_{i=1}^{l}(1 + T + \cdots + T^{k_i-1})\Big)$$
$$= -\sum_{i=1}^{l}(1 + 2T + \cdots + (k_i - 1)T^{k_i-2})\prod_{j\neq i}(1 + T + \cdots + T^{k_j-1}))$$

d'où
$$Q(1) = \sum_{i=1}^{l}\frac{(k_i-1)k_i}{2}\prod_{j\neq i}k_j = \Big(\prod_{j=1}^{l}k_j\Big)\Big(\sum_{i=1}^{l}\frac{k_i-1}{2}\Big).$$

Revenant à (17), on a par ailleurs

$$Q(1) = \Big(\prod_{j=1}^{l}k_j\Big)\Big(\sum_{g\in H}\frac{1}{1-\lambda(g)}\Big)$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{l}\frac{k_i-1}{2} = \sum_{g\in H}\frac{1}{1-\lambda(g)}. \tag{18}$$

Or les éléments de G qui laissent fixes les points d'un hyperplan donné laissent stable une droite supplémentaire de l'hyperplan (Annexe, prop. 2), donc forment un sous-groupe cyclique G' de G d'après *Alg.*, chap. V, § 11, n° 1, th. 1. Soit t l'ordre de G'; les valeurs de $\lambda(g)$ pour $g \in G'$ sont $\theta, \theta^2, \ldots, \theta^{t-1}$ avec θ racine primitive t-ème de l'unité. On a $\frac{1}{1-\theta^i} + \frac{1}{1-\theta^{t-i}} = 1$, donc $\sum_{g\in G', g\neq 1}\frac{1}{1-\lambda(g)} = \frac{1}{2}(t-1) = \frac{1}{2}\operatorname{Card}(H \cap G')$. L'égalité (18) prouve alors la proposition.

Remarque. — Lorsque $K = \mathbf{R}$, G est un groupe de Coxeter et H est l'ensemble des réflexions appartenant à G, on sait (§ 3) que les éléments de H sont en correspondance binnivoque avec les *murs* de V.

PROPOSITION 4. — *Les hypothèses et notations étant celles du th.* 3, *on suppose* K *de caractéristique* $\neq 2$. *Pour qu'on ait* $-1 \in G$, *il faut et il suffit que les degrés caractéristiques* $k_1, \ldots, k_l$ *de* R *soient tous pairs.*

Soit f l'automorphisme de l'algèbre S qui prolonge l'automorphisme -1 de V. On a $f(z) = (-1)^{\deg z} z$ pour tout z homogène de S. Donc, si $-1 \in G$, tout élément homogène de degré impair de R est nul, et les k_i sont pairs. Réciproquement, si les k_i sont pairs, tout élément de R est invariant par f, et la théorie de Galois montre que $-1 \in G$.

4. Éléments anti-invariants

On conserve les hypothèses et les notations du th. 3, et on suppose K de caractéristique 0. Un élément z de S est dit *anti-invariant* par G si

$$g(z) = (\det g)^{-1}z$$

quel que soit $g \in G$.

Soit H l'ensemble des pseudo-réflexions appartenant à G et distinctes de 1. Pour tout $g \in H$, il existe $e_g \in V$ et $f_g \in V^*$ tels que

$$g(x) = x + f_g(x)e_g, \qquad \text{quel que soit } x \in V.$$

Proposition 5. — (i) *Soit* D *l'élément* $\prod_{g \in H} e_g$ *de* S. *Les éléments de* S *anti-invariants par* G *sont les éléments de* RD.

(ii) *Supposons* S *identifiée à l'algèbre des polynômes* $K[X_1, \ldots, X_l]$ *par le choix d'une base* $(X_1, \ldots, X_l)$ *de* V, *et soient* $(P_1, \ldots, P_l)$ *des éléments homogènes algébriquement indépendants de* S *engendrant l'algèbre* R (*th.* 3). *Alors le jacobien* $J = \det\left(\frac{\partial P_i}{\partial X_j}\right)$ *est de la forme* λD, *où* $\lambda \in K^*$.

a) Avec les notations de (ii), on a

$$dP_1 \wedge dP_2 \wedge \ldots \wedge dP_l = J dX_1 \wedge dX_2 \wedge \ldots \wedge dX_l,$$

d'où, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} g(J)(\det g) dX_1 \wedge \ldots \wedge dX_l &= g(J) d(gX_1) \wedge \ldots \wedge d(gX_l) \\ &= g(dP_1 \wedge \ldots \wedge dP_l) = dP_1 \wedge \ldots \wedge dP_l = J dX_1 \wedge \ldots \wedge dX_l \end{aligned}$$

donc J est anti-invariant par G. En outre, le corps des fractions N de S est extension galoisienne du corps des fractions E de R (n° 2); si Δ est une dérivation de E à valeurs dans un surcorps Ω de N, Δ se prolonge en une dérivation de N dans Ω (*Alg.*, chap. V, § 9, prop. 5); comme les P_i sont algébriquement indépendants, on en déduit que $dP_1 \wedge \ldots \wedge dP_l \neq 0$, donc $J \neq 0$.

b) Soit z un élément de S anti-invariant par G. Montrons que z est divisible par D dans S. Soit a un vecteur non nul de V. Les éléments de G qui laissent stable Ka laissent stable un hyperplan supplémentaire L (Annexe, prop. 2); pour qu'un élément de G laissant stable Ka soit 1 ou une pseudo-réflexion de vecteur a, il faut et il suffit qu'il induise 1 dans L; les pseudo-réflexions de vecteur a qui appartiennent à G constituent donc avec 1 un sous-groupe cyclique G′ de G; soit t son ordre. Il existe une base $(X_1, \ldots, X_l)$ de V telle que $a = X_1$, $X_2 \in L, \ldots, X_l \in L$, et on peut identifier z à un polynôme $P(X_1, \ldots, X_l)$ à coefficients dans K. Exprimant que $g(z) = (\det g)^{-1} z$ pour $g \in G'$, on voit que X_1 n'intervient dans $P(X_1, \ldots, X_l)$ qu'avec des exposants congrus à -1 modulo t. Donc $P(X_1, \ldots, X_l)$ est divisible par $X_1^{t-1} = a^{t-1}$. Or D est, à un facteur scalaire près, le produit des a^{t-1} pour les $a \in V$ tels que $t > 1$, et ces éléments de S sont étrangers deux à deux. Comme S est factoriel, z est divisible par D.

c) D'après *a*) et *b*), J est divisible par D dans S. Or

$$\deg J = \sum_{i=1}^{l} (k_i - 1) = \mathrm{Card}\,(H)$$

(prop. 3), donc $\deg J = \deg D$, donc $J = \lambda D$ avec $\lambda \in K$. Comme $J \neq 0$, on a $\lambda \in K^*$. On a ainsi prouvé (ii).

d) Les parties *a*) et *c*) de la démonstration prouvent que D est anti-invariant par G. Alors, si $y \in R$, il est clair que yD est anti-invariant par G. Enfin, si $z \in S$ est anti-invariant par G, on a vu en *b*) qu'il existe $y \in S$ tel que $z=y\mathrm{D}$. Comme S est intègre, on a $y \in R$. Ceci achève de prouver (i).

*5. Compléments (*)

Lemme 4. — *Soient* K *un corps commutatif,* V *un espace vectoriel de dimension finie sur* K, G *un groupe fini d'automorphismes de* V *d'ordre* q *inversible dans* K, S *l'algèbre symétrique de* V, R *la sous-algèbre de* S *formée des éléments invariants par* G. *Pour qu'un idéal premier* $\mathfrak{P}$ *de hauteur* 1 *de* S *soit ramifié sur* $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$ (*Alg. comm.*), *il faut et il suffit qu'il existe un élément non nul* a *de* V *et un élément non nul* f *de* V* *tels que* $\mathfrak{P} = Sa$ *et que la pseudo-réflexion* $s_{a,f}$ *appartienne à* G. *Le groupe de décomposition* $\mathcal{G}^Z(\mathfrak{P})$ *est alors le sous-groupe des éléments de* G *laissant* Ka *stable, et le groupe d'inertie* $\mathcal{G}^T(\mathfrak{P})$ *est le sous-groupe cyclique* H_a *de* G *formé des pseudo-réflexions de* G *de vecteur* a. *Le corps résiduel* $S(\mathfrak{P})$ *de* S *en* $\mathfrak{P}$ *est séparable sur le corps résiduel* $R(\mathfrak{p})$ *de* R *en* $\mathfrak{p}$, *et l'indice de ramification* $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$, *égal au coefficient de* $\mathfrak{P}$, *augmenté de* 1, *dans le diviseur* $\mathrm{div}(\mathfrak{D}_{S/R})$ *de la différente, est égal à* Card (H_a).

Dire que $\mathfrak{P}$ est ramifié sur R signifie que son groupe d'inertie $\mathcal{G}^T(\mathfrak{P})$ n'est pas réduit à l'identité, autrement dit qu'il existe $g \neq 1$ dans G tel que $g(z) \equiv z$ (mod. $\mathfrak{P}$) pour tout $z \in S$. Comme S est un anneau factoriel, $\mathfrak{P}$ est un idéal principal Sa, et a doit diviser tous les éléments $g(z) - z$ ($z \in S$); or, pour $z \in V$, ceux-ci sont homogènes de degré 1 et non tous nuls (car $g \neq 1$); donc a doit être homogène de degré 1, autrement dit $a \in V$. Il existe alors une forme linéaire f sur V telle que $g = s_{a,f}$. Inversement, si g est une pseudo-réflexion $s_{a,f}$ distincte de 1, on a $g(z) \equiv z$ (mod. Sa) pour tout $z \in S$, donc g appartient au groupe d'inertie de l'idéal premier $\mathfrak{P} = Sa$. Ceci prouve la première assertion du lemme et les caractérisations de $\mathcal{G}^Z(\mathfrak{P})$ et $\mathcal{G}^T(\mathfrak{P})$. On sait que le degré résiduel $[S(\mathfrak{P}) : R(\mathfrak{p})]$ divise $\mathrm{Card}(G) = q$ (*Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 2); comme q est étranger à l'exposant caractéristique p de K (qui est celui aussi de $S(\mathfrak{P})$), l'extension $S(\mathfrak{P})$ de $R(\mathfrak{p})$ est séparable. L'égalité $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = \mathrm{Card}\,(H_a)$ en résulte (*Alg. comm.*). Comme $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ est étranger à p, le coefficient de $\mathfrak{P}$ dans $\mathrm{div}(\mathfrak{D}_{S/R})$ est $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) - 1$ (*Alg. comm.*). Ceci achève la démonstration du lemme.

Lemme 5. — *Soient* K *un corps commutatif,* S *une* K-*algèbre graduée de polynômes et* R *une sous-algèbre graduée de* S. *Pour que* S *soit un* R-*module libre gradué* (*Alg.*,

(*) Dans ce numéro, nous utilisons des résultats figurant dans des chapitres en préparation du livre d'Algèbre commutative. Nous y renvoyons par le sigle « *Alg. comm.* ».

chap. II, 3e éd. § 11, n° 2), *il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées*:

a) R *est une* K-*algèbre graduée de polynômes*;

b) *si* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ *est un système générateur de la* K-*algèbre* R *formée d'éléments homogènes et algébriquement indépendants, ce système est une suite* S-*régulière* (*).

Lorsque S *est un* R-*module de type fini, b*) *est conséquence de a*).

Pour la démonstration, voir *Alg. comm.*

Théorème 4. — *Soient* K *un corps commutatif,* V *un espace vectoriel de dimension finie sur* K, S *l'algèbre symétrique de* V, G *un groupe fini d'automorphismes de* V, *et* R *la sous-algèbre de* S *formée des éléments invariants par* G. *On suppose que* $q = \mathrm{Card}\, G$ *est inversible dans* K. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) G *est engendré par des pseudo-réflexions*;

(ii) S *est un* R-*module libre gradué*;

(iii) R *est une* K-*algèbre graduée de polynômes.*

L'équivalence de (ii) et (iii) résulte du n° 2 et du lemme 5. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte du th. 1.

Montrons que (iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit G′ le sous-groupe de G engendré par les pseudo-réflexions appartenant à G, et soit R′ la sous-algèbre de S formée des éléments invariants par G′. On a $R \subset R' \subset S$. D'après le lemme 4, on a $\mathrm{div}(\mathfrak{D}_{S/R}) = \mathrm{div}(\mathfrak{D}_{S/R'})$, d'où $\mathrm{div}(\mathfrak{D}_{R'/R}) = 0$. Supposons alors que R soit une algèbre graduée de polynômes. Comme c'est aussi le cas pour R′ (puisque G′ est engendré par des pseudo-réflexions), le lemme 5 montre que le R-module R′ admet une base homogène $(Q_1, \ldots, Q_m)$; soit $q_i = \deg(Q_i)$. Posons

$$d = \det(\mathrm{Tr}_{R'/R}(Q_i Q_j)), \quad \text{cf. } Alg., \text{ chap. IX, § 2.}$$

Le fait que $\mathrm{div}(\mathfrak{D}_{R'/R})$ soit nul montre que $\mathrm{div}(d) = 0$ (*Alg. comm.*), ce qui signifie que d appartient à K*. Mais d'autre part $\mathrm{Tr}_{R'/R}(Q_i Q_j)$ est un élément homogène de degré $q_i + q_j$, et d est homogène de degré $2 \sum_i q_i$. On a donc $\sum_i q_i = 0$, i.e. $q_i = 0$ pour tout i, ce qui entraîne $R' = R$, d'où $G' = G$ d'après la théorie de Galois. On a donc bien prouvé que G est engendré par des pseudo-réflexions. C.Q.F.D.

Remarques. — 1) Sous les hypothèses du th. 4, les degrés caractéristiques de R ont pour produit q (formule (6) et prop. 2 (iii)), donc sont étrangers à l'exposant caractéristique de K. C'est ce qu'on avait annoncé au n° 3.

2) Lorsqu'on ne suppose plus que Card (G) est inversible dans K, on a encore (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) (cf. lemme 5) et (ii) $\Longrightarrow$ (i) (cf. exerc. 8); l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) n'est par contre plus vraie (exerc. 9).

(*) Cela signifie que, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, l'image canonique de α_i dans l'anneau

$$S/(S\alpha_1 + \cdots + S\alpha_{i-1})$$

est non diviseur de zéro dans cet anneau.

PROPOSITION 6. — *Les hypothèses et les notations sont celles du th. 4. Soit* H *l'ensemble des pseudo-réflexions appartenant à* G *et distinctes de* 1. *On suppose que* H *engendre* G. *Pour tout* $g \in \mathrm{H}$, *posons* $g(x) = x + f_g(x)e_g$ *avec* $e_g \in \mathrm{V}$, $f_g \in \mathrm{V}^*$. *Posons*

$$\mathrm{D} = \prod_{g \in \mathrm{H}} e_g \in \mathrm{S}.$$

(i) *La différente de* S *sur* R *est l'idéal principal* SD.

(ii) *Supposons* S *identifiée à l'algèbre* $\mathrm{K}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l]$ *par le choix d'une base* $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_l)$ *de* V, *et soient* $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_l$ *des éléments homogènes algébriquement indépendants engendrant l'algèbre* R. *Alors le jacobien* $\mathrm{J} = \det\left(\dfrac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial \mathrm{X}_j}\right)$ *est de la forme* $\lambda\mathrm{D}$ *où* $\lambda \in \mathrm{K}^*$.

(iii) *On a* $\sum_{i=1}^{l} (\deg(\mathrm{P}_i) - 1) = \mathrm{Card}(\mathrm{H})$.

(iv) *L'ensemble des éléments anti-invariants de* S *est* RD.

L'assertion (i) résulte du lemme 4. L'assertion (ii) résulte de ce que SJ est la différente de S sur R (*Alg. comm.*). L'assertion (iii) s'obtient en écrivant que les polynômes homogènes D et J ont même degré. La démonstration de (iv) est alors la même qu'au nº 4 (démonstration de la prop. 5, parties *b*) et *d*)).$_*$

§ 6. Transformation de Coxeter

Dans ce paragraphe, V désigne un espace vectoriel réel de dimension finie l et W désigne un sous-groupe fini de **GL**(V), engendré par des réflexions, et essentiel (§ 3, nº 7). On munit V d'un produit scalaire $(x|y)$ invariant par W On note $\mathfrak{H}$ l'ensemble des hyperplans H de V tels que la réflexion orthogonale s_{H} correspondante appartienne à W.

1. Définition des transformations de Coxeter

Nous appellerons *chambre ordonnée* relative à W le couple formé d'une chambre C déterminée par $\mathfrak{H}$ et d'une bijection $i \longmapsto \mathrm{H}_i$ de $\{1, 2, \ldots, l\}$ sur l'ensemble des murs de C (cf. § 3, nº 9, prop. 7).

DÉFINITION 1. — *On appelle transformation de Coxeter définie par une chambre ordonnée* $(\mathrm{C}, (\mathrm{H}_i)_{1 \leqslant i \leqslant l})$ *l'élément* $c = s_{\mathrm{H}_1} s_{\mathrm{H}_2} \ldots s_{\mathrm{H}_l}$ *de* W.

PROPOSITION 1. — *Toutes les transformations de Coxeter de* W *sont conjuguées dans* W.

Comme W permute transitivement les chambres déterminées par $\mathfrak{H}$ (§ 3, nº 2, th. 1), tout revient à prouver ceci : soient $(\mathrm{C}, (\mathrm{H}_i)_{1 \leqslant i \leqslant l})$ une chambre ordonnée, et $\pi \in \mathfrak{S}_l$; alors $s_{\mathrm{H}_1} s_{\mathrm{H}_2} \ldots s_{\mathrm{H}_l}$ et $s_{\mathrm{H}_{\pi(1)}} s_{\mathrm{H}_{\pi(2)}} \ldots s_{\mathrm{H}_{\pi(l)}}$ sont conjugués dans W. Compte tenu du § 4, n° 8, prop. 8, ceci résultera aussitôt du lemme suivant :

Lemme 1. — *Soient* X *une forêt finie,* $x \longmapsto g_x$ *une application de* X *dans un groupe* Γ, *telle que* g_x *et* g_y *commutent toutes les fois que* x *et* y *ne sont pas liés dans* X. *Soit* $\mathfrak{T}$ *l'ensemble des ordres totaux sur* X. *Pour tout* $\xi \in \mathfrak{T}$, *soit* p_ξ *le produit dans* Γ *de la séquence* $(g_x)_{x \in X}$ *définie par* ξ. *Les éléments* p_ξ *sont alors conjugués dans* Γ.

1) Raisonnons par récurrence sur $n = \operatorname{Card} X$. Le cas où $n = 1$ est immédiat, supposons $n \geqslant 2$. Il existe dans X un sommet terminal a (chap. IV, Annexe, n° 3, prop. 2). Soit $b \in X - \{a\}$ un sommet lié à a s'il en existe; si a n'est lié à aucun sommet de $X - \{a\}$, on prend b quelconque dans $X - \{a\}$. Dans tous les cas, g_a commute à g_x pour $x \neq b$. Soit $\eta \in \mathfrak{T}$ tel que a soit le plus grand élément de X et b le plus grand élément de $X - \{a\}$; soit $\xi \in \mathfrak{T}$, et prouvons que p_ξ, p_η sont conjugués.

2) Supposons d'abord que, pour ξ, a soit le plus grand élément de X et b le plus grand élément de $X - \{a\}$. Soit X' le sous-graphe plein $X - \{a\}$, qui est une forêt. Définissons une application $x \longmapsto g'_x$ de X' dans Γ en posant $g'_x = g_x$ si $x \neq b$, $g'_b = g_b g_a$. Soient ξ', η' les restrictions de ξ, η à X'. L'hypothèse de récurrence est applicable, donc $p_{\xi'}$ et $p_{\eta'}$ sont conjugués. Mais il est clair que $p_{\xi'} = p_\xi$, $p_{\eta'} = p_\eta$, d'où le lemme dans ce cas.

3) Supposons que a soit le plus grand élément de X pour ξ. Soit X_1 (resp. X_2) l'ensemble des éléments de $X - \{a\}$ strictement majorés (resp. minorés) par b; soit ξ_i la restriction de ξ à X_i. On a

$$p_\xi = p_{\xi_1} g_b p_{\xi_2} g_a = p_{\xi_1} g_b g_a p_{\xi_2},$$

et cet élément est conjugué de $p_{\xi_2} p_{\xi_1} g_b g_a$. On est donc ramené au cas 2).

4) Dans le cas général, soit X_3 (resp. X_4) l'ensemble des éléments de X strictement majorés (resp. minorés) par a; soit ξ_i la restriction de ξ à X_i. On a $p_\xi = p_{\xi_3} g_a p_{\xi_4}$, et cet élément est conjugué de $p_{\xi_4} p_{\xi_3} g_a$. On est donc ramené au cas 3).

Il résulte de la prop. 1 que toutes les transformations de Coxeter ont le même ordre $h = h(W)$. Ce nombre s'appelle le *nombre de Coxeter de* W.

Remarque. — Soient $W_1, \cdots, W_m$ des groupes finis essentiels dans des espaces $V_1, \ldots, V_m$, engendrés par des réflexions. Soit C_j une chambre relative à W_j. Soit W le groupe $W_1 \times \cdots \times W_m$ opérant dans $V_1 \times \cdots \times V_m$. Alors $C_1 \times \cdots \times C_m$ est une chambre relative à W. Les transformations de Coxeter de W définies par C sont les produits $c_1 c_2 \ldots c_m$, où c_j est une transformation de Coxeter de W_j définie par C_j.

2. Valeurs propres d'une transformation de Coxeter. Exposants

Comme toutes les transformations de Coxeter sont conjuguées (n° 1, prop. 1), elles ont même polynôme caractéristique P(T). Soit h le nombre de Coxeter de W. On a

$$P(T) = \prod_{j=1}^{l} \left(T - \exp \frac{2i\pi m_j}{h}\right)$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_l$ sont des entiers tels que

$$0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_l < h.$$

DÉFINITION 2. — *Les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_l$ s'appellent les exposants de* W.

Soient C une chambre déterminée par $\mathfrak{H}$, $H_1, \ldots, H_l$ ses murs, et posons $s_i = s_{H_i}$. Notons e_i le vecteur unitaire orthogonal à H_i et situé du même côté de H_i que C. D'après la prop. 2 de l'Annexe du chap. IV, on peut supposer les H_i numérotés de telle manière que $e_1, e_2, \ldots, e_r$ soient deux à deux orthogonaux, et que $e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_l$ soient deux à deux orthogonaux. Alors $s' = s_1 s_2 \ldots s_r$ est la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace

$$V' = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_r,$$

$s'' = s_{r+1} s_{r+2} \ldots s_l$ est la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace

$$V'' = H_{r+1} \cap H_{r+2} \cap \cdots \cap H_l,$$

et $c = s's''$ est une transformation de Coxeter. Comme $(e_1, \ldots, e_l)$ est une base de V, V est somme directe de V' et V''.

On en déduit d'abord que 1 *n'est pas valeur propre de c.* Car si $x \in V$ est tel que $c(x) = x$, on a $s'(x) = s''(x)$, donc $x - s'(x) = x - s''(x)$ est orthogonal à V' et V'', donc nul, d'où $x = s'(x) = s''(x) \in V' \cap V'' = \{0\}$.

On a par suite

$$(1) \qquad 0 < m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_l < h.$$

Le polynôme caractéristique de c est à coefficients réels. Donc, pour tout j, l'exposant de $T - \exp \frac{2i\pi m_j}{h}$ dans P(T) est égal à celui de $T - \exp \frac{2i\pi(h - m_j)}{h}$. D'où

$$(2) \qquad m_j + m_{l+1-j} = h \quad (1 \leqslant j \leqslant l).$$

Ajoutant membre à membre les égalités (2), on obtient :

$$(3) \qquad m_1 + m_2 + \cdots + m_l = \frac{1}{2} lh.$$

Lemme 2. — *Supposons* W *irréductible. Avec les notations précédentes, il existe deux vecteurs linéairement indépendants z', z'' tels que :*

(i) *le plan* P *engendré par z', z'' est stable par s' et s'' ;*

(ii) *$s'|P$ et $s''|P$ sont les réflexions orthogonales par rapport à $\mathbf{R}z'$ et $\mathbf{R}z''$;*

(iii) z', $z'' \in \overline{C}$, *et* $P \cap C$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires de* z', z'' *à coefficients* > 0.

Soit $(e^1, \ldots, e^l)$ la base de V telle que $(e^i|e_j) = \delta_{ij}$. Alors C est le cône simplicial ouvert déterminé par les e^i (§ 3, n° 9, prop. 7). Il est clair que V′ est engendré par $e^{r+1}, \ldots, e^l$ et V″ par $e^1, \ldots, e^r$. Soit q l'endomorphisme de V tel que $q(e^1) = e_1, \ldots, q(e^l) = e_l$. Sa matrice par rapport à $(e^1, \ldots, e^l)$ est $Q = ((e_i|e_j))$. On a $(e_i|e_j) \leqslant 0$ pour $i \neq j$ (§ 3, n° 4, prop. 3). Puisque W est irréductible, il n'existe pas de partition $\{1, 2, \ldots, l\} = I_1 \cup I_2$ telle que $(e_i|e_j) = 0$ pour $i \in I_1$ et $j \in I_2$. Donc (§ 3, n° 5, lemme 4) Q admet un vecteur propre $(a_1, \ldots, a_l)$ à coordonnées toutes > 0; soit a la valeur propre correspondante. Posons

$$\begin{aligned} z &= a_1e^1 + \cdots + a_le^l, \\ z'' &= a_1e^1 + \cdots + a_re^r \in V'' \cap \overline{C}, \\ z' &= a_{r+1}e^{r+1} + \cdots + a_le^l \in V' \cap \overline{C}, \end{aligned}$$

et soit P le plan engendré par z' et z''. Alors $P \cap C$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de z' et z'' à coefficients > 0. La relation $q(z) = az$ donne $\sum_{j=1}^{l} a_je_j = \sum_{j=1}^{l} aa_je^j$; en multipliant scalairement par e_k (où $k \leqslant r$), il vient $a_k + \sum_{j=r+1}^{l} a_j(e_j|e_k) = aa_k$; donc

$$\begin{aligned} (a-1)z'' &= \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{j=r+1}^{l} a_j(e_j|e_k)\Big)e^k \\ &= \sum_{j=r+1}^{l} a_j \Big(\sum_{k=1}^{r} (e_j|e_k)e^k\Big) \\ &= \sum_{j=r+1}^{l} a_j \Big(- e^j + \sum_{k=1}^{l} (e_j|e_k)e^k\Big) \\ &= - \sum_{j=r+1}^{l} a_je^j + \sum_{j=r+1}^{l} a_je_j \\ &= - z' + \sum_{j=r+1}^{l} a_je_j. \end{aligned}$$

Ainsi, $(a-1)z'' + z'$ est orthogonal à $e^1, \ldots, e^r$, c'est-à-dire à V″. Donc s'' laisse stable le plan engendré par z'' et $(a-1)z'' + z'$, c'est-à-dire P. De même, s' laisse stable P. Comme $z' \in P \cap V'$ et $z'' \in P \cap V''$, $s'|P$ et $s''|P$ sont les réflexions par rapport à $\mathbf{R}z'$ et $\mathbf{R}z''$.

THÉORÈME 1. — *On suppose* W *irréductible. Alors :*

(i) $m_1 = 1$, $m_l = h - 1$.

(ii) Card $(\mathfrak{H}) = \dfrac{1}{2} lh$.

Conservons les notations précédentes. La restriction de $c = s's''$ à P est la rotation d'angle $2(\widehat{z'', z'})$ (§ 2, n° 5, cor. de la prop. 6). Comme c est d'ordre h, les h éléments $1, c, \ldots, c^{h-1}$ de W sont deux à deux distincts; les éléments s', $s'c, \ldots, s'c^{h-1}$ sont donc deux à deux distincts, et sont distincts des précédents car $c^i|\mathrm{P}$ est une rotation et $s'c^j|\mathrm{P}$ est une réflexion. L'ensemble

$$\{1, c, \ldots, c^{h-1}, s', s'c, \ldots, s'c^{h-1}\}$$

est le sous-groupe W' de W engendré par s' et s'', et induit dans P le groupe W'' engendré par les réflexions orthogonales par rapport à $\mathbf{R}z'$, $\mathbf{R}z''$. Le transformé de C par un élément de W' est disjoint de — C ou égal à — C. Donc le transformé de $\mathrm{P} \cap \mathrm{C}$ par un élément de W'' est disjoint de $-(\mathrm{P} \cap \mathrm{C})$ ou égal à $-(\mathrm{P} \cap \mathrm{C})$. Donc, pour une orientation convenable de P, il existe un entier $m > 0$ tel que $(\widehat{z'', z'}) = \frac{\pi}{m}$ (§ 2, n° 5, cor. de la prop. 7). Par ailleurs, les ensembles $g'(\mathrm{C})$, pour $g' \in \mathrm{W}'$, sont deux à deux disjoints; les ensembles $g''(\mathrm{P} \cap \mathrm{C})$, pour $g'' \in \mathrm{W}''$, sont donc deux à deux disjoints; ainsi, W'' est d'ordre $2h$. D'où $m = h$. En définitive, $c|\mathrm{P}$ est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{h}$, et admet par suite les valeurs propres $\exp\frac{2i\pi}{h}$, $\exp\frac{2i\pi(h-1)}{h}$. Ceci prouve que $m_1 = 1$, $m_l = h - 1$.

Les transformées de $\mathbf{R}z'$ et $\mathbf{R}z''$ par W' sont h droites $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_h$ de P, et les points de $\mathrm{P} - (\mathrm{D}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{D}_h)$ sont transformés par des éléments de W' de points de $\mathrm{P} \cap \mathrm{C}$. Donc un hyperplan de $\mathfrak{H}$ coupe nécessairement P suivant l'une des droites D_i, et par suite est transformé, par une opération de W', d'un hyperplan de $\mathfrak{H}$ contenant $\mathbf{R}z'$ ou $\mathbf{R}z''$.

Or, tout $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$ qui contient $\mathbf{R}z'$ est l'un des hyperplans $\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_r$. En effet, soit e_H le vecteur unitaire orthogonal à H et situé du même côté de H que C. On a $e_\mathrm{H} = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_l e_l$ avec des λ_i tous $\geqslant 0$ (§ 3, n° 5, lemme 6, (i)). Or $0 = (e_\mathrm{H}|z') = \lambda_{r+1}a_{r+1} + \cdots + \lambda_l a_l$, donc

$$\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_l = 0, \qquad \text{et} \qquad e_\mathrm{H} = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r.$$

Supposons que deux des λ_i soient non nuls, par exemple λ_1 et λ_2; comme $e_1, \ldots, e_r$ sont deux à deux orthogonaux, on aurait

$$s_1(e_\mathrm{H}) = -\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_r e_r$$

et les coordonnées de $s_1(e_\mathrm{H})$ ne seraient pas toutes de même signe, ce qui est absurde (*loc. cit.*). Donc e_H est proportionnel à l'un des vecteurs $e_1, \ldots, e_r$, ce qui prouve notre assertion. De même, tout $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$ qui contient $\mathbf{R}z''$ est l'un des hyperplans $\mathrm{H}_{r+1}, \ldots, \mathrm{H}_l$.

Le nombre d'éléments de $\mathfrak{H}$ contenant $\mathbf{R}z'$ ou $\mathbf{R}z''$ est donc l. Si h est pair, $\mathrm{Card}(\mathfrak{H})$ est donc égal à $\frac{h}{2}\,l$. Si h est impair, $\mathrm{Card}(\mathfrak{H})$ est égal à

$\frac{h-1}{2}l+r$, et aussi à $\frac{h-1}{2}l+(l-r)$; d'où $r=l-r$, de sorte que $r=\frac{l}{2}$, et $\mathrm{Card}(\mathfrak{H}) = \frac{h-1}{2}l+\frac{l}{2}=\frac{h}{2}l$.

Remarque. — Conservons les notations de la démonstration précédente. Soient c' l'extension **C**-linéaire de c à $V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$, et c'' la restriction de c' à $P\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$. D'après l'étude de $c|P$, c'' admet un vecteur propre x correspondant à la valeur propre $\exp\frac{2i\pi}{h}$, et ce vecteur propre n'appartient à aucun ensemble $D\cap\mathbf{C}$, où D désigne une droite de P (puisque D n'est pas stable par c). Or, pour tout $H\in\mathfrak{H}$, on a vu que $H\cap P$ est une droite; donc $x\notin H\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$.

Corollaire. — *Soit* R_0 *l'ensemble des vecteurs unitaires de* V *orthogonaux à un élément de* $\mathfrak{H}$. *Si* W *est irréductible, on a, pour tout* $x\in V$,

$$\sum_{u\in R_0}(x|u)^2 = h(x|x). \tag{4}$$

Posons $f(x)=\sum_{u\in R_0}(x|u)^2$. Il est clair que f est une forme quadratique positive invariante par W, non dégénérée puisque les e_i forment une base de V. Comme W est irréductible, il existe une constante β telle que $f(x)=\beta(x|x)$ (§ 2, n° 1, prop. 1). Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant l}$ est une base orthonormale de V pour le produit scalaire $(x|y)$, on a

$$\begin{aligned}\beta l &= \sum_{i=1}^{l}\beta(x_i|x_i) = \sum_{i=1}^{l}f(x_i) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{u\in R_0}(x_i|u)^2\\ &= \sum_{u\in R_0}1 = \mathrm{Card}\,(R_0) = 2\,\mathrm{Card}\,(\mathfrak{H}) = hl.\end{aligned}$$

D'où $\beta = h$, ce qui prouve (4).

Proposition 2. — *Si* h *est pair, l'unique élément de* W *qui transforme* C *en* $-$C *est* $c^{h/2}$.

Adoptons les notations de la démonstration du th. 1. Puisque $c|P$ est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{h}$, $c^{h/2}$ transforme z' en $-z'$, z'' en $-z''$, donc $z'+z''=z$ en $-z$. Or $z\in C$, donc la chambre $c^{h/2}(C)$ est nécessairement $-$C.

Proposition 3. — *Supposons* W *irréductible. Soient* $u_1,\ldots,u_l$ *des éléments homogènes de l'algèbre symétrique* $S=S(V)$, *algébriquement indépendants sur* **R** *et engendrant l'algèbre des éléments de* S *invariants par* W (§ 5, n° 3, th. 3). *Si* p_j *est le degré de* u_j, *les exposants de* W *sont* $p_1-1,\ldots,p_l-1$.

Posons $V'=V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$, $S'=S(V')=S\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$, et prolongeons le produit scalaire de V en une forme hermitienne sur V'. Si c est une transformation de Coxeter de W, il existe une base orthonormale $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ de V′ formée de vecteurs propres de $c \otimes 1$ (*Alg.*, chap. IX, § 7, n° 3, prop. 4); on peut supposer en outre que, pour $1 \leqslant j \leqslant l$, X_j correspond à la valeur propre $\exp \frac{2i\pi m_j}{h}$ de $c \otimes 1$. Il est clair que S′ s'identifie à l'algèbre $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_l]$, et l'on peut écrire $u_j \otimes 1 = f_j(X_1, \ldots, X_l)$, où f_j est un polynôme homogène de degré p_j dans $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_l]$. Posons $D_j = \frac{\partial}{\partial X_j}$, et $J(X_1, \ldots, X_l) = \det(D_k f_j)$. Rappelons (§ 5, n° 4, prop. 5) que $J(X_1, \ldots, X_l)$ est proportionnel au produit dans S′ de $\operatorname{Card}(\mathfrak{H})$ vecteurs y_k de V donc chacun est orthogonal à un hyperplan de $\mathfrak{H}$. Comme on peut supposer que $X_1 \notin H \otimes \mathbf{C}$ pour tout $H \in \mathfrak{H}$ (*Remarque*), les composantes sur X_1 de chacun des vecteurs y_k sont $\neq 0$, donc $J(1, 0, 0, \ldots, 0) \neq 0$. La règle de développement d'un déterminant prouve alors l'existence d'une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, l\}$ telle que $(D_{\sigma(j)} f_j)(1, 0, 0, \ldots, 0) \neq 0$ pour tout j. Comme $D_{\sigma(j)} f_j$ est homogène de degré $p_j - 1$, le coefficient de $X_1^{p_j-1} X_{\sigma(j)}$ dans $f_j(X_1, \ldots, X_l)$ est non nul. Or $f_j(X_1, \ldots, X_l)$ est invariant par $c \otimes 1$, et

$$(c \otimes 1)(X_1^{p_j-1} X_{\sigma(j)}) = \left(\exp \frac{2i\pi}{h} (p_j - 1 + m_{\sigma(j)})\right)(X_1^{p_j-1} X_{\sigma(j)}).$$

Ceci prouve que $p_j - 1 + m_{\sigma(j)} \equiv 0 \pmod{h}$. Or $h - m_{\sigma(j)}$ est un exposant (formule (2)). En permutant les u_j, on peut donc supposer que $p_j - 1 \equiv m_j \pmod{h}$ pour tout j. Comme $p_j - 1 \geqslant 0$ et $m_j < h$, on a $p_j - 1 = m_j + \mu_j h$ avec μ_j entier $\geqslant 0$. D'après le § 5, prop. 3, on voit que

$$\operatorname{Card}(\mathfrak{H}) = \sum_{j=1}^{l} (p_j - 1) = \sum_{j=1}^{l} m_j + h \sum_{j=1}^{l} \mu_j.$$

Compte tenu de la formule (3) et du th. 1 (ii), on obtient $h \sum_{j=1}^{l} \mu_j = 0$, donc $\mu_j = 0$, pour tout j et finalement $p_j - 1 = m_j$ pour tout j.

Corollaire 1. — *Si $(m_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ est la suite croissante des exposants de* W, *l'ordre de* W *est égal à* $(m_1 + 1)(m_2 + 1) \ldots (m_l + 1)$.

Ceci résulte des relations $m_j + 1 = p_j$ et du § 5, n° 3, cor. du th. 3.

Corollaire 2. — *Si c est une transformation de Coxeter de* W,

$$\exp\left(\frac{2i\pi}{h}\right) \textit{ et } \exp\left(-\frac{2i\pi}{h}\right)$$

sont des valeurs propres de multiplicité 1 *de* c.

Dans le cas contraire, il existerait deux invariants homogènes de degré 2 non proportionnels dans S, d'où deux formes quadratiques non proportionnelles sur V* invariantes par W, contrairement au § 2, n° 1, prop. 1.

COROLLAIRE 3. — *Pour que l'homothétie de rapport* — 1 *dans* V *appartienne à* W, *il faut et il suffit que tous les exposants de* W *soient impairs. Lorsqu'il en est ainsi, h est pair et l'on a $c^{h/2} = -1$ pour toute transformation de Coxeter c de* W.

La première assertion résulte du § 5, n° 3, prop. 4. Supposons les exposants de W impairs. Alors h est pair d'après la formule (2), et

$$\left(\exp \frac{2i\pi m_j}{h}\right)^{h/2} = \exp\,(i\pi m_j) = -1;$$

donc $c^{h/2} = -1$ puisque c est un automorphisme semi-simple de V (*Alg.*, chap. IX, § 7, n° 3, prop. 4).

COMPLÉMENTS SUR LES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES

La proposition suivante généralise la prop. 13 du chap. I, § 3, n° 8.

PROPOSITION 1. — *Soient* K *un corps commutatif,* A *une* K-*algèbre,* V *et* W *deux* A-*modules à gauche qui sont des espaces vectoriels de dimension finie sur* K. *S'il existe une extension* L *de* K *telle que les* $(A \otimes_K L)$-*modules* $V \otimes_K L$ *et* $W \otimes_K L$ *soient isomorphes, alors les* A-*modules* V *et* W *sont isomorphes.*

a) Supposons d'abord que L soit une extension de K *de degré fini n*. Comme $V \otimes_K L$ et $W \otimes_K L$ sont isomorphes en tant que $(A \otimes_K L)$-modules, ils sont isomorphes en tant que A-modules; mais, en tant que A-modules, ils sont isomorphes respectivement à V^n et W^n. Or V et W sont des A-modules de longueur finie; donc V (resp. W) est somme directe d'une famille $(M_i^{r_i})_{1 \leqslant i \leqslant p}$ (resp. $(N_j^{s_j})_{1 \leqslant j \leqslant q}$) de sous-modules tels que les M_i (resp. N_j) soient indécomposables, et que deux M_i (resp. N_j) d'indices distincts soient non isomorphes (*Alg.*, chap. VIII, § 2, n° 2, th. 1). Alors V^n (resp. W^n) est somme directe des $M_i^{nr_i}$ (resp. $N_j^{ns_j}$); on en conclut (*loc. cit.*) que $p = q$ et qu'après permutation éventuelle des N_j, M_i est isomorphe à N_i et nr_i égal à ns_i pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Donc V est isomorphe à W.

b) Supposons que K soit un corps infini. L'hypothèse entraîne que V et W ont même dimension sur K. Soient $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ des bases de V et W sur K, (a_λ) une base de A sur K. Un isomorphisme $u : V \otimes_K L \rightarrow W \otimes_K L$ est une application L-linéaire bijective qui est en même temps un $(A \otimes_K L)$-homomorphisme, autrement dit qui vérifie les conditions :

$$(1) \qquad a_\lambda u(e_i) = u(a_\lambda e_i) \qquad \text{pour tout } \lambda \text{ et tout } i.$$

Posons $a_\lambda e_i = \sum_j \gamma_{\lambda ij} e_j$, $a_\lambda e'_i = \sum_j \gamma'_{\lambda ij} e'_j$, où les $\gamma_{\lambda ij}$ et $\gamma'_{\lambda ij}$ appartiennent à K, et $u(e_i) = \sum_j \xi_{ij} e'_j$, où les ξ_{ij} appartiennent à L. Les conditions (1) s'écrivent

$$(2) \qquad \sum_j \xi_{ij} \gamma'_{\lambda jk} = \sum_j \gamma_{\lambda ij} \xi_{jk}$$

quels que soient λ, i, k. Par hypothèse, les équations linéaires homogènes (2) ont une solution $(\xi_{ij}) \in \mathrm{L}^{m^2}$ telle que $\det(\xi_{ij}) \neq 0$. Comme les coefficients du système (2) appartiennent à K, on sait (*Alg.*, chap. II, 3^e^ éd., § 8, n° 5, prop. 6) que ce système admet aussi des solutions non triviales dans K^{m^2}; soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_m(\mathrm{K}) = \mathrm{K}^{m^2}$, non réduit à 0, formé par ces solutions. Soit $(c_l)_{1 \leqslant l \leqslant p}$ une base de E, et posons $(\xi_{ij}) = \sum_l \eta_l c_l$ pour toute matrice $(\xi_{ij}) \in \mathrm{E}$; alors $\det(\xi_{ij})$ est un polynôme $\mathrm{P}(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ à coefficients dans K. En outre, on sait (*loc. cit.*) que les solutions de (2) dans L^{m^2} sont de la forme $\sum_l \zeta_l c_l$, avec cette fois $\zeta_l \in \mathrm{L}$; pour une telle solution, $\det(\xi_{ij})$ est égal à $\mathrm{P}(\zeta_1, \ldots, \zeta_p)$. Ceci posé, si on avait $\mathrm{P}(\eta_1, \ldots, \eta_p) = 0$ quels que soient $\eta_1, \ldots, \eta_p \in \mathrm{K}$, les coefficients de P seraient nuls puisque K est infini; on aurait alors $\mathrm{P}(\zeta_1, \ldots, \zeta_p) = 0$ quels que soient $\zeta_1, \ldots, \zeta_p \in \mathrm{L}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On peut donc trouver une matrice $(\xi_{ij}) \in \mathrm{E}$ telle que $\det(\xi_{ij}) \neq 0$, et l'application linéaire correspondante $\mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est un isomorphisme.

c) *Cas général*. Soient Ω une extension algébriquement close de L, K_0 la clôture algébrique de K dans Ω. L'hypothèse entraîne que $\mathrm{V} \otimes_{\mathrm{K}} \Omega$ et $\mathrm{W} \otimes_{\mathrm{K}} \Omega$ sont des $(\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{K}} \Omega)$-modules isomorphes. Comme K_0 est infini, la partie *b*) montre que $\mathrm{V} \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{K}_0$ et $\mathrm{W} \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{K}_0$ sont des $(\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{K}_0)$-modules isomorphes. Gardant les notations de *b*), le système (2) admet une solution $(\xi_{ij}) \in \mathrm{K}_0^{m^2}$ telle que $\det(\xi_{ij}) \neq 0$. Mais les ξ_{ij} appartiennent à une même extension algébrique K_1 de degré fini de K. Les $(\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{K}_1)$-modules $\mathrm{V} \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{K}_1$ et $\mathrm{W} \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{K}_1$ sont isomorphes, et on conclut à l'aide de *a*).

PROPOSITION 2 (Maschke). — *Soient* A *un anneau ayant un élément unité,* E *un* A-*module à gauche,* F *un sous-module facteur direct,* G *un groupe fini d'ordre* q, ρ *une représentation linéaire de* G *dans* E. *On suppose que* $q.1$ *est inversible dans* A *et que* F *est stable par* G. *Il existe alors un supplémentaire de* F *dans* E *stable par* G.

Soit p un projecteur de E sur F. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, posons

$$f(x) = q^{-1} \sum_{s \in \mathrm{G}} \rho(s)^{-1} p(\rho(s)x).$$

On a $f(x) \in \mathrm{F}$ et $f(y) = y$ pour tout $y \in \mathrm{F}$, donc f est un projecteur de E sur F. D'autre part, si $t \in \mathrm{G}$, on a

$$\begin{aligned}\rho(t) f(x) &= q^{-1} \sum_{s \in \mathrm{G}} \rho(st^{-1})^{-1} p(\rho(s)x) \\ &= q^{-1} \sum_{s \in \mathrm{G}} \rho(s)^{-1} p(\rho(st)x) \\ &= f(\rho(t)x).\end{aligned}$$

Donc f commute à $\rho(\mathrm{G})$, de sorte que $\operatorname{Ker} f$ est un supplémentaire de E stable par G.

COROLLAIRE. — *Soient* G *un groupe fini d'ordre* q, K *un corps commutatif dont la caractéristique ne divise pas* q. *Alors l'algèbre de* G *relativement à* K *est semi-simple.*

En effet, d'après la prop. 2, tout module sur cette algèbre est semi-simple.

PROPOSITION 3. — *Soient* A *un anneau commutatif,* M *un* A-*module,* G *un groupe fini opérant dans* M, *et* A′ *un* A-*module. On suppose que l'ordre* q *de* G *est inversible dans* A. *Soit* M^G *l'ensemble des éléments de* M *invariants par* G. *Alors l'homomorphisme canonique de* $M^G \otimes_A A'$ *dans* $M \otimes_A A'$ *définit un isomorphisme de* $M^G \otimes_A A'$ *sur le module* $(M \otimes_A A')^G$ *des éléments de* $M \otimes_A A'$ *invariants par* G.

En effet, soit Q le projecteur de M sur M^G défini par $Q(x) = q^{-1} \sum_{g \in G} g(x)$ pour tout $x \in M$. Si i désigne l'injection canonique de M^G dans M, $Q \circ i$ est l'application identique de M^G, donc $(Q \otimes 1_{A'}) \circ (i \otimes 1_{A'})$ est l'application identique de $M^G \otimes_A A'$. Comme $Q \otimes 1_{A'} = q^{-1} \sum_{g \in G} (g \otimes 1_{A'})$, l'image de $i \otimes 1_{A'}$ est $(M \otimes A')^G$. D'autre part, $i \otimes 1_{A'}$ est injectif d'après ce qui précède.

Remarque. — La proposition précédente s'applique notamment lorsque A′ est une A-*algèbre.* Dans ce cas, $M^G \otimes_A A'$ est un sous-A′-module de $M \otimes_A A'$.

Exercices

§ 2.

1) Soit K un anneau commutatif ayant un élément unité, soit E un A-module, et soit E* son dual. On note φ l'homomorphisme canonique de $E \otimes E^*$ dans End(E).

a) On appelle *pseudo-réflexion* de E tout élément distinct de 1 dans End(E) de la forme

$$s_{x,y^*} = 1 - \varphi(x \otimes y^*),$$

avec $x \in E$ et $y^* \in E^*$. Un tel élément s est appelé une réflexion si l'on peut choisir x, y^* de telle sorte que $\langle x, y^* \rangle = 2$; montrer que l'on a alors $s^2 = 1$ et $s(x) = -x$.

b) Soient $x \in E$, $y^* \in E^*$ tels que $\langle x, y^* \rangle = 1$ et soit s la réflexion correspondant au couple $(2x, y^*)$. Montrer que E est somme directe du sous-module Kx engendré par x et de l'orthogonal H de y^*. Montrer que Kx est libre de base x, et que s est égal à 1 sur H et à -1 sur Kx.

2) Les notations étant celles de l'exerc. 1, montrer que $\det(s_{x,y^*}) = 1 - \langle x, y^* \rangle$ si E est un K-module libre de type fini.

¶ 3) Soit V un espace hilbertien complexe de base $e_1, \ldots, e_l$. Pour $1 \leqslant i \leqslant l$, soit s_i une pseudo-réflexion unitaire, de vecteur e_i, telle que $s_i(e_i) = c_i e_i$, avec $c_i \neq 1$; un élément de V est invariant par s_i si et seulement si il est orthogonal à e_i. Soit W le sous-groupe de $\mathbf{GL}(V)$ engendré par les s_i.

a) Soit i un entier $\geqslant 1$. Montrer que tout élément de $\bigwedge^i V$ invariant par W est nul. (Raisonner par récurrence sur l; si V′ est le sous-espace de V engendré par $e_1, \ldots, e_{l-1}$, et si e est un vecteur non nul orthogonal à V′, on écrira tout élément de $\bigwedge^i V$ sous la forme $a + (b \wedge e)$, avec $a \in \bigwedge^i V'$ et $b \in \bigwedge^{i-1} V'$; si $a + (b \wedge e)$ est invariant par W, a et b sont invariants par le groupe W′ engendré par $s_1, \ldots, s_{l-1}$, ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence).

b) On suppose W *fini*. Montrer, en utilisant *a*), que, pour tout endomorphisme A de V, on a :

$$\sum_{w \in W} \det(A - w) = \mathrm{Card}(W) . \det(A)$$
$$\sum_{w \in W} \det(1 - Aw) = \mathrm{Card}(W).$$

En déduire que, pour tout $A \in \mathrm{End}(V)$, il existe $w \in W$ tel que Aw n'ait aucun point fixe non nul.

c) Soit Γ le graphe dont l'ensemble des sommets est $[1, l]$, les arêtes étant les ensembles $\{i, j\}$ tels que e_i et e_j ne soient pas orthogonaux. Montrer que V est un W-module simple si et seulement si Γ est connexe et non vide.

d) On suppose que V est un W-module simple. Montrer que les W-modules $\bigwedge^i V$ $(0 \leqslant i \leqslant l)$ sont simples. (Montrer qu'il existe un entier j tel que le graphe $\Gamma - \{j\}$ soit connexe. Raisonner par récurrence sur l, en appliquant l'hypothèse de récurrence au sous-espace V′ engendré par les e_i, $i \neq j$.) Montrer que ces modules sont deux à deux non isomorphes (*).

(*) Cet exercice, inédit, nous a été communiqué par R. Steinberg.

§ 3.

1) Les notations et hypothèses étant celles du n° 1, montrer que les chambres relatives à W sont des simplexes ouverts si et seulement si W est infini et irréductible. Montrer que E/W est compact si et seulement si W est produit de groupes infinis et irréductibles.

2) Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire, F un sous-groupe fini du groupe orthogonal de V engendré par des réflexions, Λ un sous-groupe discret de V stable par F, W le groupe de déplacements de V engendré par F et par les translations dont le vecteur appartient à Λ. Soit $\mathfrak{H}$ l'ensemble des hyperplans H de V tels que $s_H \in F$. Soit R l'ensemble des éléments de Λ qui sont orthogonaux à un élément de $\mathfrak{H}$.

a) Pour que W soit engendré par des réflexions, il faut et il suffit que R engendre Λ.

b) Dans $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire $((x, y), (x', y')) \longmapsto xx' + yy'$, soient

$$e_1 = (1, 0), \qquad e_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad e_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad \Delta_i = \mathbf{R}e_i,$$

F le groupe diédral engendré par les s_{Δ_i}, Λ le sous-groupe discret de $\mathbf{R}^2$ engendré par les e_i, sous-groupe qui est stable par F. Montrer que W n'est pas engendré par des réflexions.

3) Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie et W un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}(V)$ engendré par des réflexions. Montrer que tout élément d'ordre 2 de W est produit de réflexions appartenant à W et commutant deux à deux. (Raisonner par récurrence sur dim V, en utilisant la prop. 2.)

4) Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, W un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}(V)$ engendré par des réflexions, w un élément de W, V′ un sous-espace vectoriel de V stable par w, et k l'ordre de la restriction $w|V'$ de w à V′. Montrer qu'il existe $x \in W$ d'ordre k, laissant V′ stable, et tel que $x|V' = w|V'$. (Soit W′ l'ensemble des éléments de W laissant fixes les points de V′. Ce groupe est engendré par des réflexions, et w permute les chambres relatives à W′; en déduire qu'il existe $h \in W'$ tel que wh laisse stable une chambre de W′; montrer que l'on peut prendre $x = wh$.)

¶ 5) Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, W un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}(V)$ engendré par des réflexions, C une chambre de W et S l'ensemble des murs de C. Si $J \subset S$, soit W_J le sous-groupe de W engendré par les s_H pour $H \in S$, et soit $\varepsilon(J) = (-1)^{\mathrm{Card}(J)}$. Montrer que l'on a :

$$(*) \qquad \frac{1}{\mathrm{Card}(W)} = \sum_{J \subset S} \frac{\varepsilon(J)}{\mathrm{Card}(W_J)}.$$

(Soient $(x|y)$ un produit scalaire sur V invariant par W, Σ la sphère unité de V, μ une mesure positive sur Σ invariante par W et de masse totale 1. Si $H \in S$, soit D_H le demi-espace ouvert déterminé par H et contenant C. Soit $E_H = D_H \cap \Sigma$. On a

$$(-\overline{C}) \cap \Sigma = \bigcap_{H \in S} (\Sigma - E_H),$$

d'où

$$\frac{1}{\mathrm{Card}\,(W)} = \mu(\overline{C} \cap \Sigma) = \int_\Sigma \prod_{H \in S} (1 - \varphi_{E_H})\, d\mu$$

$$= \sum_{J \subset S} \varepsilon(J)\mu\Big(\bigcap_{H \in J} E_H\Big).$$

Conclure en remarquant que $\bigcap_{H \in J} E_H$ est l'intersection avec Σ d'une chambre de W_J, donc a une mesure égale à $1/\mathrm{Card}\,(W_J)$.)

Retrouver la formule (*) au moyen de l'exercice 26 *e*) du chap. IV, § 1 (faire $t = 1$ dans l'identité démontrée dans l'exercice en question).

6) *a*) Soient K un corps commutatif, V un espace vectoriel de dimension finie n sur K, φ une forme bilinéaire symétrique sur V, N le noyau de φ. On suppose $\dim N = 1$. Montrer que le noyau de l'extension de φ à $\bigwedge^{n-1} V$ est de dimension $n - 1$.

b) On suppose de plus $K = \mathbf{R}$ et φ positive. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V, et $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$. On suppose $a_{ij} \leqslant 0$ pour $i \neq j$. On suppose que $\{1, 2, \ldots, n\}$ n'admet pas de partition $I \cup J$ telle que $a_{ij} = 0$ pour $i \in I, j \in J$. Soit A_{ij} le cofacteur de a_{ij} dans la matrice (a_{ij}). Montrer que $A_{ij} > 0$ quels que soient i et j. (Soit $\zeta_1 e_1 + \cdots + \zeta_n e_n$ un vecteur à coordonnées toutes > 0 engendrant N. Montrer que chaque ligne et chaque colonne de (A_{ij}) est proportionnelle à $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. En déduire que $A_{ij} = \mu\zeta_i\zeta_j$ avec une constante μ. En considérant les A_{ii}, montrer que $\mu > 0$.)

c) Montrer que $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sont proportionnels à $\sqrt{A_{11}}, \ldots, \sqrt{A_{nn}}$.

7) Soit $q(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j$ $(a_{ij} = a_{ji})$ une forme quadratique positive dégénérée sur $\mathbf{R}^n$, telle que $a_{ij} \leqslant 0$ pour $i \neq j$. On suppose que $\{1, 2, \ldots, n\}$ n'admet pas de partition $I \cup J$ telle que $a_{ij} = 0$ pour $i \in J, j \in J$.

a) Montrer que, si on fait $\xi_i = 0$, on obtient une forme positive non dégénérée par rapport à $\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n$.

b) Montrer que $a_{ii} > 0$ pour tout i. (Soit $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ un élément du noyau de q, avec $\zeta_1 > 0, \ldots, \zeta_n > 0$. Utiliser l'égalité $a_{1i}\zeta_1 + \cdots + a_{ni}\zeta_n = 0$.)

c) Montrer que si on remplace un seul des a_{ij} par un $a'_{ij} < a_{ij}$, la nouvelle forme est non positive. (Utiliser l'égalité $\sum_{i,j} a_{ij}\zeta_i\zeta_j = 0$.)

8) Soit (a_{ij}) une matrice réelle symétrique à n lignes et n colonnes.

a) On pose $s_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}$. Quels que soient $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbf{R}$, on a

$$\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k = \sum_k s_k\xi_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(\xi_i - \xi_k)^2.$$

b) Soient $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathbf{R}^*$. Posons $\sum_i \zeta_i a_{ik} = t_k$. Alors

$$\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k = \sum_k \frac{t_k\xi_k^2}{\zeta_k} - \frac{1}{2}\sum_{i,k} \zeta_i\zeta_k a_{ik}\left(\frac{\xi_i}{\zeta_i} - \frac{\xi_k}{\zeta_k}\right)^2.$$

(Remplacer, dans *a*), ξ_i par $\dfrac{\xi_i}{\zeta_i}$ et a_{ik} par $\zeta_i\zeta_k a_{ik}$).

c) S'il existe des nombres $\zeta_1, \ldots, \zeta_n > 0$ tels que $\sum_i \zeta_i a_{ik} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, et si $a_{ij} \leqslant 0$ pour $i \neq j$, alors la forme quadratique $\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k$ est positive dégénérée. (Utiliser *b*).)

d) Soit $\sum_{i,j} q_{ij}\xi_i\xi_j$ une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ telle que $q_{ij} \leqslant 0$ pour $i \neq j$. On suppose que $\{1, 2, \ldots, n\}$ n'admet pas de partition $I \cup J$ telle que $q_{ij} = 0$ pour $i \in I$ et $j \in J$. Pour que la forme soit positive non dégénérée, il faut et il suffit qu'il existe $\zeta_1 > 0, \ldots, \zeta_n > 0$ tels que $\sum_i \zeta_i q_{ik} = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.

§ 4.

Dans les exercices ci-dessous, (W, S) désigne un système de Coxeter. On suppose S *fini;* son cardinal est appelé le *rang* de (W, S). On identifie W à un sous-groupe de **GL**(E) au moyen de σ (cf. nos 3 et 4).

1) Soit E^0 l'orthogonal de E vis-à-vis de la forme B_M. Montrer que E^0 est le radical du W-module E (*Alg.*, chap. VIII, § 6, no 2), et que E/E^0 est somme directe de modules absolument simples, deux à deux non isomorphes, en nombre égal au nombre des composantes connexes du graphe de S.

2) *a*) Soit Γ_w l'ensemble des génératrices extrémales du cône $w(C)$ et soit A la réunion des Γ_w pour $w \in W$. Montrer que A muni de l'ensemble $\mathfrak{C} = \{\Gamma_w | w \in W\}$ est un immeuble (chap. IV, § 1, exerc. 15). Montrer que l'application j de l'appartement A_0 associé au système de Coxeter (W, S) (chap. IV, § 1, exerc. 16) sur A qui transforme le point $wW^{(s)}$ de A_0 (pour $w \in W$ et $s \in S$) en la génératrice $w(\mathbf{R}e_s)$, est un isomorphisme de A_0 sur A, compatible avec l'action de W. Montrer que, si $t = wsw^{-1}$, avec $w \in W$ et $s \in S$, l'image par j du mur L_t défini par t (resp. d'une moitié de A_0 définie par L_t) (*loc. cit.*) est l'ensemble des éléments de A contenus dans l'hyperplan (resp. le demi-espace fermé) transformé par $\sigma^*(w)$ de l'hyperplan $e_s = 0$ (resp. d'un des demi-espaces fermés $e_s \geqslant 0$ ou $e_s \leqslant 0$).

b) Montrer que W est fini si et seulement si il existe un élément $w_0 \in W$ tel que $w_0(C) = -C$. Cet élément w_0 est alors unique et c'est l'élément de plus grande longueur de W (utiliser l'exerc. 22 du chap. IV, § 1). Montrer qu'on a alors $j(-a) = -j(a)$ pour tout $a \in A_0$ (cf. exerc. 22 *c*) du chap. IV, § 1).

c) Montrer que W est fini si et seulement si le cône U réunion des adhérences des cônes $w(\overline{C})$ pour $w \in W$ est égal à E^* tout entier (si W est fini, utiliser *b*) et la convexité de U. Si $U = E^*$, considérer un élément $w \in W$ tel que $w(\overline{C}) \cap (-C) \neq \varnothing$ et montrer que $w(C) = -C$).

d) Soit H un sous-groupe fini de W. Montrer qu'il existe une partie X de S telle que W_X soit fini et contienne un conjugué de H. (Raisonner par récurrence sur Card(S). Soient $x \in C$ et $\overline{x} = \sum_{h \in H} h(x)$. Montrer, en utilisant *c*) ci-dessus, que W est fini si $\overline{x} = 0$. Si $\overline{x} \neq 0$, il existe $w \in W$ et $Y \subset S$, $Y \neq S$, tels que $w(\overline{x})$ appartienne à C_Y (notation du no 6), d'où $H \subset w^{-1}W_Y w$; appliquer l'hypothèse de récurrence à Y.)

3) On suppose (W, S) irréductible.

a) Montrer que le commutant du W-module E est réduit aux homothéties.

b) Montrer que le centre de W est réduit à $\{1\}$ lorsque W est infini ou lorsque W est fini et que l'élément w_0 de plus grande longueur (cf. exerc. 2) est $\neq -1$. Si W est fini et si $w_0 = -1$, le centre de W est $\{1, w_0\}$.

c) Montrer que tout élément $w \neq 1$ de W tel que $wSw^{-1} = S$ transforme C en $-C$ (on montrera que $w(e_s) = -e_{wsw^{-1}}$ tout d'abord pour un $s \in S$, puis pour tout $s \in S$). En déduire (exerc. 2) qu'un tel élément n'existe que si W est fini et qu'il est alors égal à w_0.

4) On suppose que Card (S) = 3. Si $s \in S$, soit $a(s) = m(u, v)$, où $\{u, v\} = S - \{s\}$. Soit $A = \sum_{s \in S} 1/a(s)$.

a) Si $A > 1$, montrer que B_M est positive non dégénérée (auquel cas W est fini).

b) Si $A = 1$, montrer que B_M est positive dégénérée.

c) Si $A < 1$, montrer que B_M est non dégénérée, et de signature (2, 1) (cf. *Alg.*, chap. IX, § 7, no 2).

Montrer que, dans le cas *a*), l'ordre q de W est donné par la formule $q = 4/(A - 1)$ (utiliser l'exerc. 5 du § 3).

5) Soit A le sous-anneau de **R** engendré par les nombres $2.\cos(\pi/m(s, s'))$. Montrer que A est un **Z**-module libre de type fini, et que les matrices des $\sigma(w)$ pour $w \in W$ ont tous leurs

coefficients dans A. En déduire que les coefficients des polynômes caractéristiques des $\sigma(w)$ sont des entiers algébriques.

¶ 6) *a*) Soit m un entier $\geqslant 2$, ou $+\infty$. Montrer que « $4\cos^2 \frac{\pi}{m} \in \mathbf{Z}$ » équivaut à « $m \in \{2, 3, 4, 6, +\infty\}$ ».

b) Soit Γ un *réseau* de E, i.e. un sous-groupe discret de E de rang dim E. Montrer que, si Γ est stable par W, les entiers $m(s, s')$ pour $s \neq s'$ appartiennent tous à l'ensemble $\{2, 3, 4, 6, +\infty\}$. (Observer que l'on a alors $\operatorname{Tr}(\sigma(w)) \in \mathbf{Z}$ pour tout $w \in \mathrm{W}$; appliquer ce résultat à $w = ss'$, et utiliser *a*) ci-dessus.)

c) On suppose que $m(s, t) \in \{2, 3, 4, 6, +\infty\}$ pour $s \neq t \in \mathrm{S}$. Une famille $(x_s)_{s \in \mathrm{S}}$ de nombres réels positifs est dite *radicielle* si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
m(s,t) = 3 & \Longrightarrow x_s = x_t & & \\
m(s,t) = 4 & \Longrightarrow x_s = \sqrt{2}.x_t & \text{ou} \quad x_t = \sqrt{2}.x_s & \\
m(s,t) = 6 & \Longrightarrow x_s = \sqrt{3}.x_t & \text{ou} \quad x_t = \sqrt{3}.x_s & \\
m(s,t) = +\infty & \Longrightarrow x_s = x_t, & \text{ou} \quad x_s = 2x_t, & \text{ou} \quad x_t = 2x_s.
\end{array}$$

Si (x_s) est une telle famille, on pose $\alpha_s = x_s e_s$. Montrer que l'on a

$$\sigma_s(\alpha_t) = \alpha_t - n(s, t)\alpha_s, \qquad \text{avec } n(s, t) \in \mathbf{Z}.$$

En déduire que le réseau Γ de base $(\alpha_s)_{s \in \mathrm{S}}$ est *stable par* W.

d) Les hypothèses étant celles de *c*), on suppose que le graphe de (W, S) est une *forêt*. Montrer qu'il existe alors au moins une famille radicielle (x_s). (Raisonner par récurrence sur Card (S); appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathrm{S} - \{s_0\}$, où s_0 est un sommet terminal du graphe de S.)

e) Les hypothèses étant celles de *c*), on suppose que le graphe de (W, S) est un *circuit*. Soit n_4 (resp. n_6) le nombre d'arêtes $\{s, t\}$ de ce graphe dont le coefficient $m(s, t)$ est égal à 4 (resp. à 6). Montrer que, pour qu'il existe une famille radicielle, il faut et il suffit que n_4 et n_6 soient tous deux *pairs*. Si cette condition n'est pas réalisée, montrer qu'il n'existe *aucun réseau* de E qui soit stable par W (si $\mathrm{S} = \{s_1, \ldots, s_n\}$, avec s_i lié à s_{i+1} pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, et s_n lié à s_1, on posera $c = s_1 \ldots s_n$, et l'on montrera que $\operatorname{Tr}(\sigma(c))$ n'est pas un entier).

7) On suppose (W, S) irréductible et B_M positive.

a) Montrer que, pour toute partie T de S distincte de S, le groupe $\mathrm{W_T}$ est fini (utiliser le th. 2 ainsi que le lemme 4 du § 3, n° 5).

b) Montrer que, si Card (S) $\geqslant 3$, tous les $m(s, s')$ sont finis.

c) On suppose W infini. Montrer que, si $\mathrm{T} \subset \mathrm{S}$, $\mathrm{T} \neq \mathrm{S}$, le groupe $\sigma(\mathrm{W_T})$ laisse stable un réseau de $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$. En déduire que, si Card (S) $\geqslant 3$, tous les $m(s, s')$, $s \neq s'$, appartiennent à l'ensemble $\{2, 3, 4, 6\}$ (utiliser l'exerc. 6).

8) Soient $s \in \mathrm{S}$ et $w \in \mathrm{W}$. Montrer que, si $l(ws) > l(w)$, l'élément $w(e_s)$ est combinaison linéaire à coefficients $\geqslant 0$ des e_t pour $t \in \mathrm{S}$; montrer que, si $l(ws) < l(w)$, $w(e_s)$ est combinaison linéaire à coefficients $\leqslant 0$ des e_t. (Appliquer la propriété (P_n) du n° 4 à w^{-1}, et raisonner par polarité.)

9) Montrer que l'intersection des sous-groupes d'indice fini de W est réduite à l'élément neutre (utiliser l'exercice 5). En déduire qu'il existe un sous-groupe d'indice fini de W qui ne contient aucun élément d'ordre fini, à part l'élément neutre. (Utiliser l'exercice 2 *d*).)

¶ 10) Soit G un sous-groupe fermé de $\mathbf{GL}(\mathrm{E})$ contenant W. On suppose que G est unimodulaire (*Intégr.*, chap. VII, § 1, n° 3). Soit D une demi-droite de E^* contenue dans C, et soit $\mathrm{G_D}$ le stabilisateur de D dans G.

a) Soit Δ l'ensemble des éléments $g \in \mathrm{G}$ tels que $g(\mathrm{D}) \subset \mathrm{C}$. Montrer que Δ est ouvert, stable par multiplication à droite par $\mathrm{G_D}$, et que l'application composée $\Delta \to \mathrm{G} \to \mathrm{W}\backslash\mathrm{G}$ est injective, $\mathrm{W}\backslash\mathrm{G}$ désignant l'espace homogène des classes à droite de G suivant W.

b) Soit μ une mesure de Haar sur G. Montrer que, si $\mu(\Delta)$ est fini, le sous-groupe $\mathrm{G_D}$ est compact. (Soit K un voisinage compact de l'élément neutre contenu dans Δ; montrer qu'il existe un nombre fini d'éléments $h_i \in \mathrm{G_D}$ tels que tout ensemble de la forme $\mathrm{K}h$, avec $h \in \mathrm{G_D}$, rencontre l'un des Kh_i; en déduire que G_D est contenu dans la réunion des $K^{-1}.K.h_i$, donc compact.)

c) Soit ν une mesure sur $W\backslash G$ invariante par G. Montrer que, si $\nu(W\backslash G) < \infty$, alors G_D est compact.

¶ 11) Soit H le sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ formé des points $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ pour lesquels la forme

$$B(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$$

est < 0, et soit **PH** l'image de H dans l'espace projectif $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{R})$. Soit G le groupe orthogonal de la forme B.

a) Montrer que **PH** est un espace homogène de G, que le stabilisateur d'un point de **PH** est compact, et que G opère proprement sur **PH**.

b) Soient ω et Ω les formes différentielles sur H définies par les formules :

$$\omega = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x_i\, dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{(-B(x))^{n/2}}.$$

Montrer que Ω est l'image réciproque par la projection canonique $\pi : H \to \mathbf{PH}$ d'une forme différentielle $\tilde{\Omega}$ sur **PH**. Montrer que la mesure positive ν associée à $\tilde{\Omega}$ (*Var. diff.* R, 2e partie) est invariante par G, et que c'est la seule, à un facteur scalaire près.

c) Soit C un cône simplicial ouvert de sommet 0 dans $\mathbf{R}^n$ (§ 1, nº 6). On suppose C contenu dans H, et on note **PC** l'image de C par $\pi : H \to \mathbf{PH}$. Montrer que, si $n \geqslant 3$, on a $\nu(\mathbf{PC}) < \infty$ (identifier **PH** au sous-espace de $\mathbf{R}^{n-1}$ formé des $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ tels que $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < 1$, et déterminer la mesure correspondant à ν sur ce sous-espace). Montrer que **PC** est relativement compact dans **PH** si et seulement si $\overline{C}$ est contenu dans H.

¶ 12) On suppose que la forme $x.y = B_M(x, y)$ est *non dégénérée* et que W est *infini*. On identifie E à son dual E* au moyen de B_M; en particulier, on désigne par (e_s^*) la base de E duale de la base (e_s), et par C l'intérieur du cône simplicial $\overline{C}$ engendré par les e_s^*. Soit G le groupe orthogonal de B_M, et soit μ une mesure de Haar sur G; le groupe G est unimodulaire, et contient W.

a) Montrer que, si $\nu(W\backslash G) < \infty$ (où ν est une mesure invariante par G), la forme B_M est de signature $(n-1, 1)$, avec

$$n = \dim(E) = \operatorname{Card}(S),$$

et que l'on a $x.x < 0$ pour tout $x \in C$.

(Soit $x \in C$ tel que $x.x \neq 0$, et soit L_x l'hyperplan orthogonal à x. Montrer, en utilisant l'exerc. 10, que la restriction de B_M à L_x est, soit positive, soit négative; le second cas entraînerait que la forme B_M soit de signature $(1, n-1)$, et l'on montrera que c'est impossible. En déduire que $x.x \leqslant 0$ pour tout $x \in C$, d'où $x.x < 0$, puisque C est ouvert.)

b) Réciproquement, supposons B_M de signature $(n-1, 1)$ et $x.x < 0$ pour tout $x \in C$ (auquel cas on dit que W, ou (W, S), ou le graphe de Coxeter correspondant, est *de type hyperbolique*). Soit H l'ensemble des $x \in E$ tels que $x.x < 0$, et soit H_+ la composante connexe de H contenant C. Montrer que H est réunion disjointe de H_+ et de $H_- = -H_+$, et que H_- est contenu dans le cône simplicial engendré par $(e_s)_{s \in S}$ (utiliser le fait que H_- est le polaire de H_+). Montrer que H_+ et H_- sont stables par W.

c) On conserve les notations et hypothèses de *b*). Soit f la forme linéaire sur E définie par $f(e_s) = 1$ pour tout $s \in S$. Si $x \in H$, posons $\varphi(x) = f(x)^2/(x.x)$. Si **PH** désigne l'image du cône H dans l'espace projectif **P**(E), la fonction φ définit une fonction $\tilde{\varphi}$ sur **PH**. Montrer que l'application

$$\tilde{\varphi} : \mathbf{PH} \to \left]-\infty, 0\right]$$

est propre. En déduire que, pour tout $x \in H_+$, les fonctions $w \longmapsto \varphi(w.x)$ et $w \longmapsto f(w.x)$ atteignent leur maximum pour une valeur w_1 de W (utiliser le fait que G opère proprement sur **PH**, cf. exerc. 11, et que W est discret dans G) ; montrer que ces propriétés équivalent à $w_1(x) \in \overline{C}$. En déduire que $\overline{C} \cap H_+$ est un *domaine fondamental* pour l'action de W dans H_+, et que l'image de ce domaine fondamental dans **PH** a une mesure finie pour la mesure invariante ν de **PH** (utiliser l'exerc. 11). En conclure que l'on a $\nu(W\backslash G) < \infty$. Montrer que $W\backslash G$ est compact si et seulement si $\overline{C}$ est contenu dans H_+, i.e. si $e_s^*.e_s^* < 0$ pour tout $s \in S$ (on dit alors que W, ou (W, S), ou le graphe de Coxeter correspondant, est *de type hyperbolique compact*).

¶ 13) Montrer que, pour que (W, S) soit de type hyperbolique (cf. exerc. 12), il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

(H_1) La forme B_M n'est pas positive.

(H_2) Pour toute partie T de S distincte de S, la forme $B_{M(T)}$ associée au système de Coxeter (W_T, T) est positive.

(Si (W, S) est de type hyperbolique, on a vu que $e_s^*.e_s^* \leqslant 0$ pour tout $s \in S$, les notations étant celles de l'exerc. 12. La restriction de B_M à l'hyperplan $E(s)$ orthogonal à e_s^* est donc $\geqslant 0$; comme $E(s)$ est engendré par les e_t, $t \neq s$, on en déduit (H_2). Inversement, supposons (H_1) et (H_2) vérifiées; soit $x = \sum_s a_s e_s$ un élément de E tel que $x.x < 0$; soit x_+ (resp. x_-) la somme des $a_s e_s$ pour lesquels a_s est > 0 (resp. $\leqslant 0$) ; montrer que l'on a, soit $x_+.x_+ < 0$, soit $x_-.x_- < 0$. Si V désigne le cône simplicial ouvert engendré par les e_s, et H l'ensemble des $x \in E$ tels que $x.x < 0$, en déduire qu'il existe une composante connexe H_0 de H qui rencontre V; en utilisant (H_2), montrer que H_0 ne rencontre pas les murs de V, d'où $H_0 \subset V$. En déduire que la forme $B_M(x, y) = x.y$ est non dégénérée de signature $(n - 1, 1)$, et que C est contenu dans $- V^0$, d'où le fait que (W, S) est de type hyperbolique.)

14) Montrer que, pour que (W, S) soit de type hyperbolique compact (cf. exerc. 12), il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

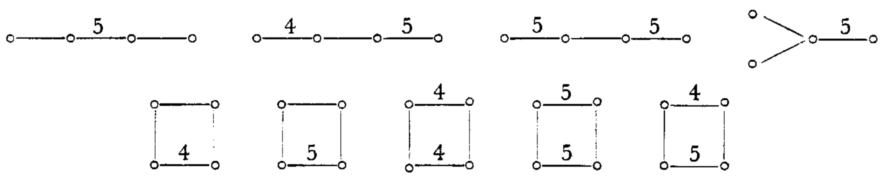
(H_1) La forme B_M n'est pas positive.

(HC) Pour toute partie T de S, distincte de S, le groupe W_T est fini (i.e. la forme $B_{M(T)}$ est positive non dégénérée).

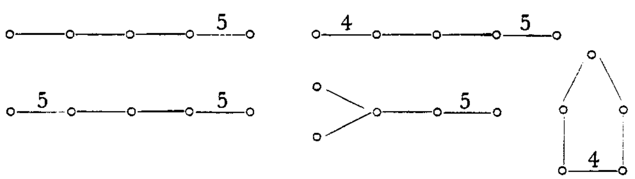
(Utiliser les exerc. 12 et 13.)

En particulier, un système de Coxeter de type hyperbolique de rang 3 est de type hyperbolique compact si et seulement si tous les $m(s, s')$ sont finis (cf. exerc. 4).

¶ 15) *a) Montrer que les neuf graphes de Coxeter ci-dessous (*) sont de type hyperbolique compact, et que ce sont, à isomorphisme près, les seuls graphes de rang 4 jouissant de cette propriété (utiliser la classification du chap. VI, § 4) :



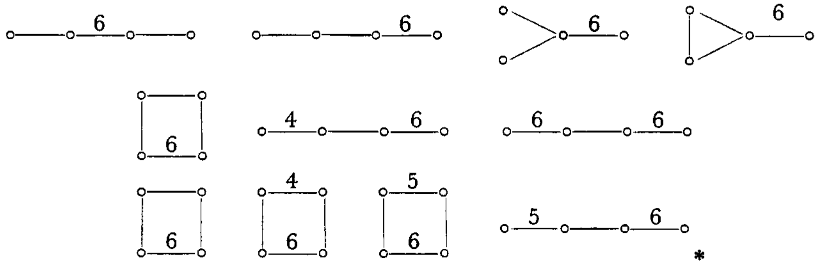
b) Même question pour le rang 5, la liste étant formée des cinq graphes suivants :



c) Montrer qu'il n'existe aucun graphe de type hyperbolique compact de rang $\geqslant 6$.*

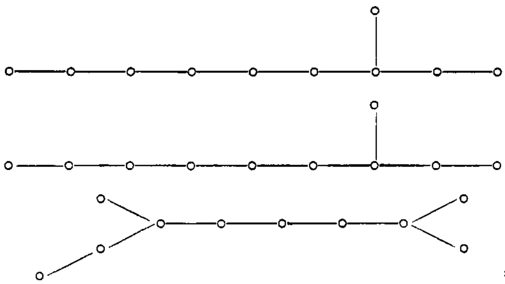
(*) Dans ces graphes, toute arête à côté de laquelle ne se trouve aucun chiffre doit être affectée du coefficient 3 (cf. chap. IV, § 1, n° 9).

16) *Montrer que tout graphe de Coxeter de type hyperbolique, de rang $\geqslant 4$, dont une arête est affectée du coefficient 6 est isomorphe à l'un des onze suivants (qui sont non compacts et de rang 4) :



*

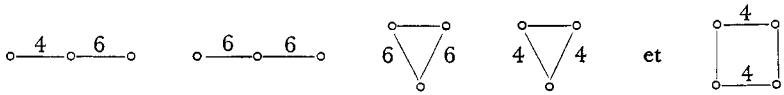
17) *Montrer que les graphes de Coxeter hyperboliques de plus haut rang sont les trois suivants (qui sont de rang 10) :



*

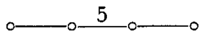
¶ 18) On suppose que (W, S) est de type hyperbolique, et que W laisse stable un réseau Γ de E. Soit G le groupe orthogonal de B_M, et soit $G(\Gamma)$ le sous-groupe des éléments $g \in G$ tels que $g\Gamma = \Gamma$. Montrer que $G(\Gamma)$ est un sous-groupe discret de G. Montrer que W est un sous-groupe d'indice fini de $G(\Gamma)$ (utiliser le fait que la mesure de $W\backslash G$ est finie).

*Lorsqu'en outre (W, S) est de type hyperbolique compact, montrer que le graphe de Coxeter correspondant est isomorphe à l'un des suivants (utiliser les exerc. 4, 6 et 15) :



Montrer que tous les groupes correspondant aux graphes de l'exerc. 16 (à l'exception des quatre derniers) laissent stable un réseau (utiliser la méthode de l'exerc. 6).$_*$

19) Soit (W, S) le système de Coxeter correspondant au graphe

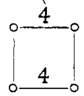


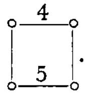
C'est un système de type hyperbolique compact (cf. exerc. 15). Les coefficients de la forme B_M par rapport à la base (e_s) appartiennent au sous-anneau A du corps $K = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$ formé des éléments de ce corps qui sont entiers sur $\mathbf{Z}$.

a) Soit σ le plongement de K dans $\mathbf{R}$ qui applique $\sqrt{5}$ sur $-\sqrt{5}$. Montrer que la forme $\sigma(B_M)$ transformée de B_M par σ est positive non dégénérée.

b) Soit G le groupe orthogonal de B_M, et soit G_σ celui de la forme $\sigma(B_M)$. Soit G_A le sous-groupe de G formé des éléments dont les matrices par rapport à (e_s) sont à coefficients dans A. Montrer que G_A s'identifie à un sous-groupe discret de $G \times G_\sigma$, puis, en utilisant *a*), montrer que G_A est un sous-groupe discret de G.

c) Montrer que W est un sous-groupe d'indice fini de G_A.

d) Démontrer les résultats analogues pour les autres graphes de l'exerc. 15 (le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ étant parfois remplacé par le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$), à l'exception du graphe 

traité dans l'exerc. 18, et du graphe (*) 

.

¶ 20) Pour toute partie $\{s, s'\}$ de S telle que $m(s, s') = \infty$, soit $r(s, s')$ un nombre réel $\leqslant -1$. Munissons E de la forme bilinéaire B_r telle que :

$$B_r(e_s, e_{s'}) = B_M(e_s, e_{s'}) = -\cos\frac{\pi}{m(s, s')} \qquad \text{si } m(s, s') \neq \infty,$$

$$B_r(e_s, e_{s'}) = r(s, s') \qquad \text{si } m(s, s') = \infty.$$

On définit, comme pour B_M, les réflexions σ_s de vecteur e_s, laissant invariante la forme B_r.

a) Montrer qu'il existe un homomorphisme $\sigma_r : W \to \mathbf{GL}(E)$ et un seul tel que $\sigma_r(g_s)$ soit égal à la réflexion σ_s définie ci-dessus.

b) Montrer que les énoncés de la prop. 4, du th. 1, de ses corollaires, et du lemme 1 restent vrais pour σ_r.

§ 5.

1) Déterminer l'algèbre des invariants symétriques d'un groupe diédral fini (pour sa représentation canonique de dimension 2, cf. § 4, nº 2).

2) Soient A un anneau principal, E un A-module libre de rang fini l, et G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}(E)$. On fait les deux hypothèses suivantes :

(i) Si $q = \mathrm{Card}(G)$, l'élément $q.1$ de A est inversible.

(ii) G est engendré par des pseudo-réflexions de E (i.e. par des éléments s tels que $(s - 1)(E)$ soit un sous-module monogène de E, cf. § 2, exerc. 1).

Soit $\mathsf{S}(E)$ l'algèbre symétrique de E, et soit $\mathsf{S}(E)^G$ la sous-algèbre de $\mathsf{S}(E)$ formée des éléments invariants par G. Montrer que, pour tout homomorphisme de A dans un corps k, $\mathsf{S}(E)^G \otimes k$ s'identifie à $\mathsf{S}(E \otimes k)^G$. En déduire, en appliquant le th. 4, que $\mathsf{S}(E)^G$ est une algèbre graduée de polynômes sur A.

¶ 3) Soient K un corps de caractéristique zéro, V un K-espace vectoriel de dimension finie l, et G un sous-groupe de $\mathbf{GL}(V)$ engendré par des pseudo-réflexions. On pose $q = \mathrm{Card}\,(G)$; on note S (resp. L) l'algèbre symétrique (resp. l'algèbre extérieure) de V. Si $x \in V$, on note x (resp. x') son image canonique dans S (resp. dans L).

a) Soit $E = S \otimes L$ l'algèbre produit tensoriel de S et de L. Montrer qu'il existe sur E une dérivation d et une seule telle que $dx = x'$ et $dx' = 0$ pour tout $x \in V$.

b) Soit S^G l'algèbre des invariants symétriques de G et soient $P_1, \ldots, P_l$ des éléments homogènes de S^G tels que $S^G = K[P_1, \ldots, P_l]$. Pour toute partie $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ avec $i_1 < \cdots < i_r$ de $[1, l]$ on pose :

$$\omega_I = dP_{i_1} \ldots dP_{i_r}.$$

(*) Comme l'a montré E. Vinberg, le groupe W correspondant à ce dernier graphe n'est pas un sous-groupe de type « arithmétique » du groupe G. La même situation se présente pour divers autres graphes de type hyperbolique (non compacts, cette fois), notamment pour les quatre derniers de l'exercice 16.

Montrer que les ω_I sont linéairement indépendants sur S, et qu'ils appartiennent à la sous-algèbre E^G formée des éléments de E invariants par G. En déduire que, pour tout $\omega \in E^G$, il existe a, $c_I \in S^G$, avec $a \neq 0$, tels que

$$a\omega = \sum_I c_I \omega_I.$$

c) Montrer que tout élément de E^G contenu dans $S \otimes \bigwedge^l V$ est de la forme $c.dP_1 \ldots dP_l$, avec $c \in S^G$. (Appliquer la prop. 5.)

d) Montrer que les ω_I forment une base du S^G-module E^G. (Avec les notations de *b*), on multiplie chaque membre de la relation $a\omega = \sum_I c_I \omega_I$ par un élément ω_J, et on applique *c*); on en déduit que, si I est le complémentaire de J, a divise c_I; d'où (*) le fait que les ω_I engendrent E^G.)

e) Soit S_n (resp. L_m) la composante homogène de degré n (resp. m) de S (resp. L). On pose :

$$E_{n,m} = S_n \otimes L_m, \qquad E^G_{n,m} = E^G \cap E_{n,m}, \qquad a_{n,m} = \dim E^G_{n,m},$$
$$a(X, Y) = \sum_{n,m \geqslant 0} a_{n,m} X^n Y^m.$$

En utilisant *d*), démontrer la formule :

$$a(X, Y) = \prod_{i=1}^{l} \frac{1 + Y.X^{p_i - 1}}{1 - X^{p_i}},$$

où $p_i = \deg(P_i)$.

f) Si $g \in G$, soit $\mathrm{Tr}_{n,m}(g)$ la trace de l'automorphisme de $E_{n,m}$ défini par g; on pose :

$$\mathrm{Tr}(X,Y)(g) = \sum_{n,m \geqslant 0} \mathrm{Tr}_{n,m}(g) X^n Y^m.$$

Montrer que l'on a :

$$\mathrm{Tr}(X,Y)(g) = \frac{\det(1 + Yg)}{\det(1 - Xg)}.$$

g) Soit $q = \mathrm{Card}(G)$. Montrer que

$$\frac{1}{q} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(X,Y)(g) = a(X,Y),$$

i.e.

$$\frac{1}{q} \sum_{g \in G} \frac{\det(1 + Yg)}{\det(1 - Xg)} = \prod_{i=1}^{l} \frac{1 + Y.X^{p_i - 1}}{1 - X^{p_i}}.$$

(On utilisera le résultat suivant : si G opère sur un espace vectoriel E de dimension finie, la dimension de l'espace des éléments de E invariants par G est égale à $\frac{1}{q} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}_E(g)$).

Que donne cette formule pour $Y = 0$?

h) Pour tout entier $p \geqslant 0$, soit H_p l'ensemble des éléments $g \in G$ qui admettent 1 pour valeur propre avec une multiplicité égale à p. Soit $h_p = \mathrm{Card}(H_p)$. Démontrer la formule :

$$\sum_{p=0}^{l} h_p T^p = \prod_{i=1}^{l} (p_i - 1 + T).$$

(Dans la formule de *g*) ci-dessus, remplacer Y par $-1 + T(1 - X)$, puis faire $X = 1$ dans le résultat. Si $g \in H_p$, le terme $\mathrm{Tr}(X,Y)(g)$ devient T^p.)

(*) Pour plus de détails, voir L. Solomon, Invariants of finite reflection groups, *Nagoya Math. Journal*, t. XXII (1963), p. 57-64.

¶ 4) *Soit $G_1 = \mathbf{SL}_3(\mathbf{F}_2)$.

a) Montrer que G_1 est un groupe simple non abélien, d'ordre 168, contenant 21 éléments d'ordre 2.

b) Montrer que les degrés des représentations complexes irréductibles de G_1 sont 1, 3, 3, 6, 7, 8.

c) Soit $\rho : G_1 \to \mathbf{GL}_3(\mathbf{C})$ une représentation irréductible de degré 3 de G_1 (*). Si $y \in G_1$ est d'ordre 2, montrer que $\mathrm{Tr}(\rho(y)) = -1$. En déduire que $-\rho(y)$ est une réflexion.

d) Soit G le sous-groupe de $\mathbf{GL}_3(\mathbf{C})$ engendré par les éléments $-\rho(y)$, pour y d'ordre 2 dans G_1. Montrer que G est isomorphe à $G_1 \times \{1, -1\}$, donc d'ordre 336.

e) Montrer que les degrés caractéristiques k_1, k_2, k_3 de l'algèbre des invariants symétriques de G sont égaux à 4, 6 et 14. (Utiliser les relations $\prod\limits_i k_i = 336$ et $\sum\limits_i (k_i - 1) = 21$).

f) Montrer que G n'est pas un groupe de Coxeter.*

5) *Soit K un corps et soit $S = K[X_1, \ldots, X_n]$ une K-algèbre graduée de polynômes, engendrée par des éléments algébriquement indépendants X_i, homogènes de degrés > 0.

a) Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des éléments homogènes de degrés > 0 de S, et soit $R = K[Y_1, \ldots, Y_n]$ la sous-algèbre de S engendrée par ces éléments. Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est une suite S-régulière.

(ii) S est entier sur R.

(iii) L'idéal de S engendré par $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est de codimension finie dans S.

(iv) Pour toute extension $\overline{K}$ de K, le système d'équations $Y_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i \in \overline{K})$ n'a que la solution triviale $(0, \ldots, 0)$.

((i) $\Longleftrightarrow$ (iii) résulte d'un théorème de Macaulay (*Alg. comm.*); (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) résulte du théorème des zéros (*Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 3, prop. 2); (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) est facile.)

Si ces propriétés sont vérifiées, montrer que les Y_i sont algébriquement indépendants sur K, et que S est un R-module libre de rang égal à $\prod\limits_i \deg(Y_i)/\prod\limits_i \deg(X_i)$.

b) Soit G un groupe fini d'automorphismes de l'algèbre graduée S, soit S^G la sous-algèbre de ses invariants, et soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des éléments de S^G vérifiant les conditions (i), ..., (iv) ci-dessus. Montrer que $S^G = K[Y_1, \ldots, Y_n]$ si et seulement si

$$\mathrm{Card}(G) = \prod_i \deg(Y_i)/\prod_i \deg(X_i).*$$

¶ 6) *Soient n un entier $\geqslant 1$, q une puissance d'un nombre premier, $K = \mathbf{F}_q$, $V = K^n$, $G = \mathbf{GL}(n, K)$ et $G_1 = \mathbf{SL}(n, K)$. On identifie G au groupe $\mathbf{GL}(V)$. D'autre part, on note S l'algèbre $S(V) = K[X_1, \ldots, X_n]$ et R (resp. R_1) la sous-algèbre de S formée des éléments invariants par G (resp. par G_1).

a) Soit $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une suite d'entiers $\geqslant 0$. On pose :

$$L_{\boldsymbol{e}} = \det(X_i^{q^{e_j}}).$$

C'est un élément de S.

Montrer que

$$g.L_{\boldsymbol{e}} = \det(g)L_{\boldsymbol{e}} \quad \text{pour tout} \quad g \in G.$$

(Remarquer que, si $g.X_i = \sum\limits_j a_{ij}X_j$, on a $g.X_i^{q^e} = \sum\limits_j a_{ij}X_j^{q^e}$.) En particulier, $L_{\boldsymbol{e}}$ appartient à R_1.

(*) On trouvera une étude détaillée d'une telle représentation dans H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. II, Abschn. 15.

b) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Posons

$$Z_j = \prod_{(a_{ij})} (X_j + \sum_{i>j} a_{ij} X_i),$$

le produit étant étendu à toutes les familles $(a_{ij})_{j<i\leqslant n}$ d'éléments de K. Soit

$$T = \prod_{j=1}^{n} Z_j.$$

Montrer que T divise tous les $L_{\boldsymbol{e}}$. En déduire que $T = L_{\boldsymbol{e}_n}$, avec $\boldsymbol{e}_n = (0, 1, \ldots, n-1)$, et que T est invariant par G_1.

c) On désigne par $\boldsymbol{e}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ la suite $(0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$, et l'on pose $Y_i = L_{\boldsymbol{e}_i}/T$, cf. *b*). Montrer que les Y_i appartiennent à R, et que l'on a $\deg(Y_i) = q^n - q^i$.

d) Soit $S' = K(X_1, \ldots, X_{n-1})$, et soient T', $Y'_1, \ldots, Y'_{n-2}$ les éléments de S′ définis comme T, $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ (en remplaçant n par $n-1$). Soit $f : S \to S'$ l'homomorphisme défini par :

$$f(X_i) = X_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1), \qquad f(X_n) = 0.$$

Montrer que l'on a :

$$f(T) = 0, \qquad f(Y_1) = T'^{q(q-1)}, \qquad f(Y_i) = Y'^{q}_{i-1} \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant i \leqslant n-1.$$

e) Montrer que la famille $(T, Y_1, \ldots, Y_{n-1})$ vérifie la condition (iv) de l'exerc. 5. (Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un zéro du système $(T, Y_1, \ldots, Y_{n-1})$ dans une extension $\overline{K}$ de K. Du fait que x annule T, les x_i vérifient au moins une relation linéaire non triviale à coefficients dans K. Quitte à transformer x par un élément de G_1, on peut donc supposer que $x_n = 0$. Conclure en appliquant *d*) et en raisonnant par récurrence sur n.)

f) Montrer que $R_1 = K[T, Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$, et que $T, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ sont algébriquement indépendants (« théorème de Dickson » — appliquer *e*) et l'exerc. 5 en remarquant que l'ordre de G_1 est égal à $\deg(T) = \sum_i \deg(Y_i)$).

g) Montrer que $R = K[T^{q-1}, Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$.$_*$

¶ 7) *Soit R un anneau local régulier (*Alg. comm.*), d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k. Soit G un groupe fini d'automorphismes de R, et soit $R' = R^G$ le sous-anneau de R formé des éléments invariants par G. C'est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \cap R'$. On fait les hypothèses suivantes :

(i) R′ est nœthérien, et R est un R′-module de type fini.

(ii) Le composé $R' \to R \to k$ est surjectif.

On pose $V = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$; c'est un k-espace vectoriel. L'action de G sur R définit un homomorphisme $\varepsilon : G \to \mathbf{GL}(V)$.

a) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de hauteur 1 de R (*Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 6) et soit $s \in G$ tel que $s(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ et que s opère trivialement dans $R/\mathfrak{p}$. Montrer que $\varepsilon(s)$ est une pseudo-réflexion de V. (Remarquer que l'image de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est de dimension 0 ou 1.)

b) Montrer que, si R′ est régulier, le sous-groupe $\varepsilon(G)$ de $\mathbf{GL}(V)$ est engendré par des pseudo-réflexions. (Soit H le sous-groupe de G engendré par les éléments dont l'image par ε est une pseudo-réflexion, et soit R^H le sous-anneau de R formé des éléments invariants par H. Montrer, grâce à *a*), qu'aucun idéal premier de hauteur 1 de R′ n'est ramifié dans R^H; comme R^H est intégralement clos, en déduire au moyen du théorème de pureté (*) que $R' = R^H$, d'où $H = G$.)

c) On suppose maintenant que l'ordre de G est premier à la caractéristique de k. Montrer que ε est injectif.

(*) Cf. M. Auslander, On the purity of the branch locus, *Amer. J. of Math.*, t. LXXXIV (1962), p. 116-125.

Soit $(\mathfrak{m}'_n)$ la filtration de R′ induite par la filtration $\mathfrak{m}$-adique $(\mathfrak{m}^n)$ de R, et soit

$$i : \mathrm{gr}(\mathrm{R}') \to \mathrm{gr}(\mathrm{R})$$

l'homomorphisme canonique du gradué associé à R′ dans celui associé à R (*Alg. comm.*, chap. III, § 2). Montrer que i est injectif, et que son image est le sous-anneau $\mathrm{gr}(\mathrm{R})^{\mathrm{G}}$ de gr(R) formé des éléments invariants par G.

d) On conserve les hypothèses et notations de *c*), et l'on suppose en outre que $\varepsilon(\mathrm{G})$ est engendré par des pseudo-réflexions. Si $l = \dim \mathrm{V}$, soient $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_l$ des générateurs homogènes algébriquement indépendants de la k-algèbre $\mathrm{gr}(\mathrm{R})^{\mathrm{G}}$ (de tels éléments existent, d'après le th. 4, et le fait que gr(R) s'identifie à l'algèbre symétrique de V); soient $p_1, \ldots, p_l$ leurs degrés. D'après *c*), on peut trouver des $x_i \in \mathfrak{m}'_{p_i}$ tels que $\mathrm{gr}(x_i) = \mathrm{P}_i$. Montrer que les x_i engendrent l'idéal $\mathfrak{m}'$ et en déduire que R′ est régulier.$_*$

¶ 8) *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, soit S l'algèbre symétrique de V, et soit G un sous-groupe fini de **GL**(V). On suppose que l'algèbre S^{G} des invariants symétriques de G est une algèbre graduée de polynômes.

a) Soit u un élément du dual V* de V, et soit G_u le sous-groupe de G formé des éléments laissant u invariant. Montrer que G_u est engendré par des pseudo-réflexions. (La forme linéaire u se prolonge en un homomorphisme $f_u : \mathrm{S} \to \mathrm{K}$. Si S_u désigne l'anneau local de S par rapport au noyau de f_u, l'anneau S_u est régulier. Conclure en appliquant l'exerc. 7 *b*) à G_u, considéré comme groupe d'automorphismes de S_u).

En particulier, G est engendré par des pseudo-réflexions.

b) Soit A une partie de V*, et soit $\mathrm{G}_{\mathrm{A}} = \bigcap_{u \in \mathrm{A}} \mathrm{G}_u$. Montrer que G_{A} est engendré par des pseudo-réflexions. (Quitte à étendre le corps de base, on peut supposer K infini. Montrer qu'il existe alors un élément v du sous-espace vectoriel de V* engendré par A tel que $\mathrm{G}_v = \mathrm{G}_{\mathrm{A}}$. Conclure en appliquant *a*) à v.)$_*$

9) Soit V un espace vectoriel de dimension 4 sur un corps fini K, de caractéristique différente de 2, et soit Q une forme quadratique non dégénérée sur V, d'indice 2 (*Alg.*, chap. IX, § 4, n° 2). Soit $\mathrm{G} = \mathbf{O}(\mathrm{Q})$ le groupe orthogonal de cette forme; c'est un groupe fini, engendré par des réflexions (*loc. cit.*, § 6, n° 4, prop. 5).

a) Soit E un sous-espace totalement isotrope maximal de V, et soit G_{E} le sous-groupe de G formé des éléments g tels que $g(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Montrer que G_{E} est isomorphe au groupe additif de K, et ne contient aucune pseudo-réflexion.

b) Montrer que l'algèbre des invariants symétriques de G n'est pas une algèbre graduée de polynômes (utiliser l'exercice précédent).

§ 6.

Dans les exercices ci-dessous (exerc. 3 excepté), les hypothèses et notations sont celles du § 6.

1) On suppose W irréductible. Soit c une transformation de Coxeter de W, soit Γ le sous-groupe de W engendré par c, et soit Δ l'ensemble des vecteurs unitaires orthogonaux à un élément de $\mathfrak{H}$. Montrer que Γ possède l orbites dans $\mathfrak{H}$, et que chacune de ces orbites a h éléments. (Raisonner comme dans la démonstration de la prop. 33 du chap. VI, § 1, n° 11.)

¶ 2) On suppose W irréductible. Soient C une chambre relativement à W, $(\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_l)$ ses murs, e_i un vecteur non nul orthogonal à H_i. On suppose que $e_1, \ldots, e_r$ (resp. $e_{r+1}, \ldots, e_l$) sont deux à deux orthogonaux (cf. n° 2). Pour tout $u \in \mathbf{Z}$, on définit H_u et s_u par $\mathrm{H}_u = \mathrm{H}_k$ si $u \equiv k \pmod{l}$ et $s_u = s_{\mathrm{H}_u}$.

a) Montrer que les éléments de $\mathfrak{H}$ sont les $s_1 s_2 \ldots s_{u-1} \mathrm{H}_u$ pour $u = 1, 2, \ldots, lh/2$.

b) Soient $s' = s_1 \ldots s_r$ et $s'' = s_{r+1} \ldots s_l$, de sorte que $c = s's''$ est la transformation de Coxeter associée à la chambre ordonnée C. Soit w_0 l'élément de W qui transforme C en $-$ C (cf. § 4, exerc. 2). Montrer que, si h est impair, on a :

$$w_0 = \underbrace{s's''s' \ldots s''s'}_{h \text{ termes}} = \underbrace{s''s's'' \ldots s's''}_{h \text{ termes}} = s''c^{(h-1)/2} = c^{(h-1)/2}s'.$$

c) Posons $S = \{s_1, \ldots, s_l\}$. Le couple (W, S) est un système de Coxeter. Si $w \in W$, on note $l_S(w)$ la longueur de w par rapport à S (chap. IV, § 1, nº 1). Montrer que l'on a :

$$l_S(s') = r, \qquad l_S(s'') = l - r, \qquad l_S(c) = l.$$

En déduire que, avec les hypothèses de *b*), on a :

$$l_S(w_0) \leqslant r + \frac{h-1}{2} l \qquad \text{et} \qquad l_S(w_0) \leqslant (l - r) + \frac{h-1}{2} l.$$

Montrer d'autre part que $l_S(w_0) = \text{Card}(\mathfrak{H}) = hl/2$ (utiliser l'exerc. 22 du chap. IV, § 1). En déduire que $r = l/2$, et que $(s_1, s_2, \ldots, s_{lh/2})$ est une décomposition réduite de w_0.

d) Montrer que, lorsque h est pair, $(s_1, \ldots, s_{lh/2})$ est une décomposition réduite de $w_0 = c^{h/2}$. (Même méthode.)

¶ 3) Soient K un anneau commutatif, E un K-module libre de base $(e_1, \ldots, e_l)$, et $f_1, \ldots, f_l$ des éléments du dual de E. On pose $a_{ij} = f_i(e_j)$. Si $1 \leqslant i \leqslant l$, soit s_i la pseudo-réflexion s_{e_i, f_i} (§ 2, exerc. 1). On a :

$$s_i(e_j) = e_j - a_{ij} e_i.$$

On pose $c = s_1 \ldots s_l$, et $z_i = c(e_i)$.

a) Pour $1 \leqslant i, k \leqslant l$, on pose :

$$y_i^k = s_1 \ldots s_k(e_i) \qquad \text{et} \qquad y_i = s_1 \ldots s_{i-1}(e_i) = y_i^{i-1}.$$

On a $y_i^0 = e_i$ et $y_i^l = z_i$.

Montrer que l'on a :

$$y_i^{k-1} - y_i^k = a_{ki} y_k.$$

En déduire les formules :

$$e_i = y_i + \sum_{k<i} a_{ki} y_k$$

$$z_i = y_i - \sum_{k \geqslant i} a_{ki} y_k.$$

b) Soit C la matrice de c par rapport à la base (e_i). Soient $U = (u_{ij})$ et $V = (v_{ij})$ les matrices définies par :

$$u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad v_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ a_{ij} & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice $I + U$ est inversible et de déterminant 1. Montrer que l'on a :

$$C = (I - V)(I + U)^{-1}.$$

En déduire que

$$\det(\lambda I - C) = \det((\lambda - 1)I + V + \lambda U),$$

autrement dit :

$$\det(\lambda I - C) = \begin{vmatrix} (\lambda-1)+a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \dots & \lambda a_{1l} \\ a_{21} & (\lambda-1)+a_{22} & \lambda a_{23} & \dots & \lambda a_{2l} \\ a_{31} & a_{32} & (\lambda-1)+a_{33} & \dots & \lambda a_{3l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} & \dots & (\lambda-1)+a_{ll} \end{vmatrix}$$

c) Soit $\Gamma = (\mathrm{I}, \mathrm{S})$ le graphe dont l'ensemble des sommets est $\mathrm{I} = [1, l]$ et dont l'ensemble S des arêtes est l'ensemble des parties $\{i, j\}$ à 2 éléments de I telles que $a_{ij} \neq 0$ ou $a_{ji} \neq 0$. Si $\alpha = \{i, j\}$ appartient à S, on note σ_α la transposition de i et de j (considérée comme élément du groupe symétrique $\mathfrak{S}_l$), et l'on pose $a_\alpha = -a_{ij}a_{ji}$.

Soit $\mathfrak{P}$ l'ensemble des parties de S formées d'arêtes dont les sommets sont disjoints. Si $\mathrm{X} \in \mathfrak{P}$, on note $\mathrm{C(X)}$ l'ensemble des $i \in \mathrm{I}$ qui ne sont sommets d'aucune arête de X, et l'on pose $\sigma_\mathrm{X} = \prod_{\alpha \in \mathrm{X}} \sigma_\alpha$, $a_\mathrm{X} = \prod_{\alpha\in\mathrm{X}} a_\alpha$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_l$, et soit d_σ le terme correspondant à σ dans le développement du déterminant de $(\lambda - 1)I + V + \lambda U$. Montrer que, si σ est de la forme σ_X, avec $\mathrm{X} \in \mathfrak{P}$, on a :

$$d_\sigma = a_\mathrm{X}\lambda^{\mathrm{Card(X)}} \prod_{i\in\mathrm{C(X)}} (\lambda - 1 + a_{ii}).$$

On suppose maintenant que Γ est une *forêt* (Chap. IV, Annexe, n° 3). Montrer que, si $\sigma \in \mathfrak{S}_l$ n'est pas de la forme σ_X avec $\mathrm{X} \in \mathfrak{P}$, on a $d_\sigma = 0$. En déduire la formule :

$$\det(\lambda - c) = \sum_{\mathrm{X}\in\mathfrak{P}} a_\mathrm{X}\lambda^{\mathrm{Card(X)}} \prod_{i\in\mathrm{C(X)}} (\lambda - 1 + a_{ii}).$$

d) On considère le polynôme

$$\mathrm{P(X)} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & \mathrm{X} & \dots & a_{l2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & \mathrm{X} \end{vmatrix}.$$

Aux hypothèses de *c*), on ajoute celle que $a_{ii} = 1$ pour tout i. Montrer que l'on a alors :

$$\det(\lambda^2 - c) = \lambda^l \mathrm{P}(\lambda + \lambda^{-1}).$$

4) Les hypothèses et notations étant celles du n° 1, on désigne par n_{ij} l'ordre de $s_{\mathrm{H}_i}s_{\mathrm{H}_j}$, et l'on pose $a_{ij} = -2\cos\frac{\pi}{n_{ij}}$. On a $a_{ii} = 2$ et $a_{ij} \leqslant 0$ si $i \neq j$, cf. § 3. Montrer, au moyen de l'exercice précédent, que l'on a :

$$\begin{vmatrix} \mathrm{X} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & \mathrm{X} & \dots & a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{l} (\mathrm{X} - 2\cos(\pi m_i/h)),$$

où $m_1, \dots, m_l$ désignent les exposants de W (*).

(*) Pour plus de détails, voir :
H. S. M. Coxeter, The product of the generators of a finite group generated by reflexions, *Duke Math. Journal*, t. XVIII (1951), p. 765-782.

CHAPITRE VI

SYSTÈMES DE RACINES

§ 1. Systèmes de racines

Dans ce paragraphe, k désigne un corps de caractéristique zéro. A partir du nº 3, on suppose que $k = \mathbf{R}$.

1. Définition d'un système de racines

Lemme 1. — *Soient* V *un espace vectoriel sur* k, R *une partie finie de* V *engendrant* V. *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$ *tel que* $\alpha \neq 0$, *il existe au plus une réflexion* s *de* V *telle que* $s(\alpha) = -\alpha$ *et* $s(\mathrm{R}) = \mathrm{R}$.

Soit G le groupe des automorphismes de V qui laissent R stable. Comme R engendre V, G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique de R, donc est fini. Soient s, s' deux réflexions de V telles que $s(\alpha) = s'(\alpha) = -\alpha$, $s(\mathrm{R}) = \mathrm{R}$, $s'(\mathrm{R}) = \mathrm{R}$. Alors $t = ss'$ appartient à G, donc est d'ordre fini m. D'autre part, on a :

$$t(\alpha) = \alpha \qquad \text{et} \qquad t(x) \equiv x \bmod. k\alpha \qquad \text{pour tout } x \in \mathrm{V}.$$

Il existe donc une forme linéaire f sur V telle que

$$t(x) = x + f(x)\alpha \qquad \text{pour tout } x \in \mathrm{V},$$

et l'on a $f(\alpha) = 0$. Par récurrence sur n, on en déduit que

$$t^n(x) = x + nf(x)\alpha \qquad \text{pour tout } x \in \mathrm{V}.$$

En prenant n égal à m, on voit que $mf(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{V}$, d'où $f = 0$, $t = 1$, et $s = s'$.

Définition 1. — *Soient* V *un espace vectoriel sur* k, *et* R *une partie de* V. *On dit que* R *est un système de racines dans* V *si les conditions suivantes sont vérifiées* :

($\mathrm{SR_I}$) R *est fini, ne contient pas* 0, *et engendre* V.

($\mathrm{SR_{II}}$) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, *il existe un élément* $\alpha^\vee$ *du dual* V* *de* V *tel que* $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ *et que la réflexion* $s_{\alpha, \alpha^\vee}$ (cf. chap. V, § 2) *laisse stable* R.

($\mathrm{SR_{III}}$) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, *on a* $\alpha^\vee(\mathrm{R}) \subset \mathbf{Z}$.

D'après le lemme 1, la réflexion $s_{\alpha,\alpha^\vee}$ (donc aussi la forme linéaire $\alpha^\vee$) est déterminée de manière unique par α, ce qui donne un sens à (SR$_{\text{III}}$). On posera $s_{\alpha,\alpha^\vee} = s_\alpha$. On a $s_\alpha(x) = x - \langle \alpha^\vee, x\rangle$ pour tout $x \in V$.

Les éléments de R sont appelés les *racines* (du système considéré). La dimension de V s'appelle le *rang* du système.

Les automorphismes de V qui laissent stable R s'appellent les automorphismes de R. Ils forment un groupe fini noté A(R). Le sous-groupe de A(R) engendré par les s_α s'appelle le *groupe de Weyl* de R et se note W(R), ou simplement W.

Remarque 1). — Soit k' une extension de k. Identifions canoniquement V à un sous-ensemble de $V \otimes k'$ et V^* à un sous-ensemble de $V^* \otimes k' = (V \otimes k')^*$. Alors, R est un système de racines dans $V \otimes k'$, et les $\alpha^\vee$ sont les mêmes que précédemment.

Lemme 2. — *Soit* R *un système de racines dans* V. *Soit* $(x|y)$ *une forme bilinéaire symétrique sur* V, *non dégénérée, invariante par* W(R). *Identifions* V *à* V^* *grâce à cette forme. Si* $\alpha \in R$, α *est non isotrope et*

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)}.$$

Cela résulte de la formule (4) du Chap. V, § 2, n° 3.

PROPOSITION 1. — *Soit* $V_{\mathbf{Q}}$ (resp. $V^*_{\mathbf{Q}}$) *le sous-*$\mathbf{Q}$*-espace vectoriel de* V (resp. V^*) *engendré par les* α (resp. *les* $\alpha^\vee$). *Alors* $V_{\mathbf{Q}}$ (resp. $V^*_{\mathbf{Q}}$) *est une* $\mathbf{Q}$*-structure sur* V (resp. V^*) (*Alg.*, chap. II, 3e éd., § 8, n° 1). *La restriction à* $V_{\mathbf{Q}} \times V^*_{\mathbf{Q}}$ *de la forme bilinéaire canonique de* $V \times V^*$ *permet d'identifier chacun des espaces* $V_{\mathbf{Q}}$, $V^*_{\mathbf{Q}}$ *au dual de l'autre. L'ensemble* R *est un système de racines dans* $V_{\mathbf{Q}}$.

Si $k = \mathbf{R}$, il existe un produit scalaire sur V invariant par W(R) (*Intégr.*, chap. VII, § 3, n° 1, prop. 1) ; le lemme 2 prouve alors que les $\alpha^\vee$ engendrent V^*. D'après la *Remarque* 1, les $\alpha^\vee$ engendrent encore V^* si $k = \mathbf{Q}$. Arrivons au cas général. Posons $E = V_{\mathbf{Q}}$. D'après (SR$_{\text{III}}$), chaque $\alpha^\vee$ applique E dans $\mathbf{Q}$, donc définit un élément $\tilde{\alpha}$ de E^*. Il est immédiat que R est un système de racines dans E, et que l'élément correspondant à α dans E^* est $\tilde{\alpha}$. D'après ce qui précède, les $\tilde{\alpha}$ engendrent l'espace vectoriel E^*. Considérons l'homomorphisme canonique $i : E \otimes_{\mathbf{Q}} k \to V$, et son transposé ${}^t i : V^* \to E^* \otimes_{\mathbf{Q}} k$. Puisque R engendre V, i est surjectif, donc ${}^t i$ est injectif; mais l'image de ${}^t i$ contient les $\tilde{\alpha}$, donc ${}^t i$ est surjectif. On en conclut finalement que i et ${}^t i$ sont des isomorphismes. On peut identifier V à $E \otimes k$, V^* à $E^* \otimes k$, $\alpha^\vee$ à $\tilde{\alpha}$ et $V^*_{\mathbf{Q}}$ à E^*. Ainsi $V_{\mathbf{Q}}$ (resp. $V^*_{\mathbf{Q}}$) est une $\mathbf{Q}$-structure sur V (resp. V^*). La restriction à $V_{\mathbf{Q}} \times V^*_{\mathbf{Q}}$ de la forme bilinéaire canonique de $V \times V^*$ s'identifie à la forme bilinéaire canonique sur $E \times E^*$, d'où la proposition.

Remarques 2). — Grâce à la prop. 1, on peut ramener l'étude des systèmes de racines au cas où $k = \mathbf{Q}$. La *Remarque* 1 permet ensuite de se ramener à un système de racines de l'espace vectoriel réel $V_{\mathbf{R}} = V_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$. Les groupes de Weyl associés à ces différents systèmes s'identifient canoniquement.

3) Puisque les $\alpha^\vee$ engendrent V^*, le groupe $W(R)$, considéré comme sous-groupe de $\mathbf{GL}(V_{\mathbf{R}})$, est *essentiel* (chap. V, § 3, nº 7). De plus, le cor. du th. 1 du chap. V, § 3, nº 2 montre que les seules réflexions appartenant à $W(R)$ sont les s_α.

PROPOSITION 2. — *Les* $\alpha^\vee$ *forment un système de racines dans* V^*, *et on a* $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$ *pour tout* $\alpha \in R$.

Les $\alpha^\vee$ vérifient (SR_I) d'après la prop. 1. Puisque $s_{\alpha, \alpha^\vee}$ est un automorphisme de l'espace vectoriel V muni du sous-ensemble R, ${}^t(s_{\alpha,\alpha^\vee})^{-1}$ laisse stable l'ensemble $R^\vee$ des $\alpha^\vee$; or ${}^t(s_{\alpha,\alpha^\vee})^{-1} = s_{\alpha^\vee,\alpha}$, ce qui prouve que $R^\vee$ vérifie (SR_{II}) et que $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$. Enfin, on a $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle \in \mathbf{Z}$ quels que soient $\alpha^\vee \in R$ et $\beta \in R$, donc $R^\vee$ vérifie (SR_{III}).

On dit que $R^\vee$ est le *système de racines inverse de* R. On voit que l'application $\alpha \longmapsto \alpha^\vee$ est une bijection de R sur $R^\vee$ appelée *bijection canonique de* R *sur* $R^\vee$. On prendra garde que, si α, β sont des éléments de R tels que $\alpha + \beta \in R$, alors $(\alpha + \beta)^\vee \neq \alpha^\vee + \beta^\vee$ en général.

Comme $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, l'axiome ($SR_{II}$) montre que $-R = R$. On a évidemment $(-\alpha)^\vee = -\alpha^\vee$ et $-1 \in A(R)$ (mais on n'a pas toujours $-1 \in W(R)$).

L'égalité ${}^t(s_{\alpha,\alpha^\vee})^{-1} = s_{\alpha^\vee,\alpha}$ prouve que l'application $u \longmapsto {}^t u^{-1}$ est un isomorphisme du groupe $W(R)$ sur le groupe $W(R^\vee)$. On identifie ces deux groupes par cet isomorphisme; autrement dit, on considère $W(R)$ comme opérant dans V et dans V^*. De même pour $A(R)$.

PROPOSITION 3. — *Pour* $x, y \in V$, *posons*

$$(x|y) = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha^\vee, x \rangle \langle \alpha^\vee, y \rangle.$$

Alors $(x|y)$ *est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur* V, *invariante par* $A(R)$. *Pour* $x, y \in V_{\mathbf{Q}}$, *on a* $(x|y) \in \mathbf{Q}$. *L'extension canonique de* $(x|y)$ *à*

$$V_{\mathbf{R}} = V_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$$

est positive non dégénérée.

Il est clair que $(x|y)$ est une forme bilinéaire symétrique sur V. Si $g \in A(R)$, on a

$$(g(x)|g(y)) = \sum_{\alpha \in R} \langle {}^t g(\alpha^\vee), x \rangle \langle {}^t g(\alpha^\vee), y \rangle = (x|y)$$

puisque $({}^t g)(R^\vee) = R^\vee$. Si $x, y \in V_{\mathbf{Q}}$, on a $(x|y) \in \mathbf{Q}$ d'après (SR_{III}). Si $z \in V_{\mathbf{R}}$, on a $(z|z) = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha^\vee, z \rangle^2 \geqslant 0$, et $(z|z) > 0$ si $z \neq 0$ d'après la prop. 1, donc l'extension canonique de $(x|y)$ à $V_{\mathbf{R}}$ positive est non dégénérée. La restriction de $(x|y)$ à $V_{\mathbf{Q}}$ est donc non dégénérée, et par suite la forme $(x|y)$ sur V est non dégénérée.

PROPOSITION 4. — (i) *Soit* X *une partie de* R, *soit* V_X *le sous-espace vectoriel de* V *engendré par* X, *et soit* V'_X *le sous-espace vectoriel de* V^* *engendré par les* $\alpha^\vee$, *où* $\alpha \in X$. *Alors* V *est somme directe de* V_X *et du sous-espace orthogonal à* V'_X, V^* *est somme directe de* V'_X *et du sous-espace orthogonal à* V_X, *et* V'_X *s'identifie au dual de* V_X.

(ii) $R \cap V_X$ *est un système de racines dans* V_X, *et la bijection canonique de* $R \cap V_X$ *sur le système inverse s'identifie à l'application* $\alpha \longmapsto \alpha^\vee$ *restreinte à* $R \cap V_X$.

Grâce à la *remarque* 2, on peut supposer que $k = \mathbf{R}$. Identifions V à V^* grâce à la forme bilinéaire symétrique de la prop. 3. On a $\alpha^\vee = \dfrac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)}$ pour tout $\alpha \in R$ (lemme 2). Tout sous-espace vectoriel de V est non isotrope, et la proposition est alors évidente.

COROLLAIRE. — *Soit* V_1 *un sous-espace vectoriel de* V, *et soit* V_2 *le sous-espace vectoriel engendré par* $R \cap V_1$. *Alors* $R \cap V_1$ *est un système de racines dans* V_2.

Cela résulte de (ii), appliqué à $X = R \cap V_1$.

Pour $\alpha \in R$ et $\beta \in R$, on pose :

(1) $$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = n(\alpha, \beta).$$

On a donc :

(2) $$n(\alpha, \alpha) = 2$$

(3) $$n(-\alpha, \beta) = n(\alpha, -\beta) = -n(\alpha, \beta).$$

D'après (SR_{III}),

(4) $$n(\alpha, \beta) \in \mathbf{Z}.$$

Par définition même de $n(\alpha, \beta)$,

(5) $$s_\beta(\alpha) = \alpha - n(\alpha, \beta)\beta.$$

La formule (1) et la prop. 2 entraînent

(6) $$n(\alpha, \beta) = n(\beta^\vee, \alpha^\vee).$$

Soit $(x|y)$ une forme bilinéaire symétrique sur V, non dégénérée et invariante par W(R) (prop. 3). On a, d'après le lemme 2,

(7) $$n(\alpha, \beta) = \frac{2(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)}.$$

On en déduit que

(8) $$n(\alpha, \beta) = 0 \Longleftrightarrow n(\beta, \alpha) = 0 \Longleftrightarrow (\alpha|\beta) = 0 \Longleftrightarrow s_\alpha \text{ et } s_\beta \text{ sont permutables.}$$

(9) Si $(\alpha|\beta) \neq 0$, on a $$\frac{n(\beta, \alpha)}{n(\alpha, \beta)} = \frac{(\beta|\beta)}{(\alpha|\alpha)}.$$

2. Somme directe de systèmes de racines

Soit V un espace vectoriel sur k, somme directe d'une famille $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de sous-espaces vectoriels. Identifions V^* à la somme directe des V_i^*. Pour tout i, soit R_i un système de racines dans V_i. Alors $R = \bigcup_i R_i$ est un système de racines dans V dont le système inverse est $R^\vee = \bigcup_i R_i^\vee$; la bijection canonique de R sur $R^\vee$ prolonge, pour tout i, la bijection canonique de R_i sur $R_i^\vee$. On dit que R est le *système de racines somme directe des* R_i. Soit $\alpha \in R_i$. Si $j \neq i$, le noyau de $\alpha^\vee$ contient V_j, donc s_α induit l'identité dans V_j; d'autre part, $k\alpha \subset V_i$, donc s_α laisse stable V_i. Ces remarques prouvent que W(R) *s'identifie à* $\prod_{i=1}^{r} W(R_i)$.

On dit qu'un système de racines R est *irréductible* si $R \neq \varnothing$ et si R n'est pas omme directe de deux systèmes de racines non vides.

Proposition 5. — *Soit* V *un espace vectoriel sur* k, *somme directe de sous-espaces vectoriels* $V_1, \ldots, V_r$. *Soit* R *un système de racines dans* V. *Posons* $R_i = R \cap V_i$. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *les* V_i *sont stables par* W(R);

(ii) $R \subset V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r$;

(iii) *pour tout* i, R_i *est un système de racines dans* V_i, *et* R *est somme directe des* R_i.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : ceci résulte de ce qu'on a dit au début de ce numéro.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : supposons les V_i stables par W(R). Soit $\alpha \in R$, et soit H le noyau de $\alpha^\vee$. D'après la prop. 3 du chap. V, § 2, nº 2, chaque V_i est somme d'un sous-espace de H et d'un sous-espace de $k\alpha$. Donc l'un des V_i contient $k\alpha$, d'où $\alpha \in V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : si la condition (ii) est remplie, R_i engendre V_i pour tout i, donc R_i est un système de racines dans V_i (prop. 4). Il est clair que R est la somme directe des R_i.

Corollaire. — *Soit* R *un système de racines dans* V. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) R *est irréductible*;

(ii) *le* W(R)-*module* V *est simple*;

(iii) *le* W(R)-*module* V *est absolument simple.*

(ii) $\Longleftrightarrow$ (i) : cela résulte de la prop. 5 et du th. de Maschke (chap. V, Annexe, prop. 2).

(iii) $\Longleftrightarrow$ (ii) : cela résulte de la prop. 1 du chap. V, § 2, nº 1.

Proposition 6. — *Tout système de racines* R *dans* V *est somme directe d'une famille* $(R_i)_{i \in I}$ *de systèmes de racines irréductibles, qui est bien déterminée à une bijection près sur l'ensemble d'indices.*

L'existence des R_i se démontre par récurrence sur Card R : si R est non vide et non irréductible, R est somme directe de deux systèmes de racines R', R'' tels que Card $R' <$ Card R, Card $R'' <$ Card R, et l'on applique l'hypothèse de récurrence à R' et R''. Pour prouver l'unicité, il suffit de prouver que, si R est somme directe de R' et R'', tout R_i est nécessairement contenu dans R' ou dans R''. Soient V', V'', V'_i, V''_i les sous-espaces vectoriels de V engendrés par R', R'', $R' \cap R_i$, $R'' \cap R_i$. Puisque la somme $V' + V''$ est directe, la somme $V'_i + V''_i$ est directe. On a $R_i \subset R' \cup R''$, donc R_i est somme directe des systèmes de racines $R' \cap R_i$ et $R'' \cap R_i$; d'où $R' \cap R_i = \varnothing$ ou $R'' \cap R_i = \varnothing$, ce qui établit notre assertion.

On dit que les R_i sont les *composants irréductibles* de R. Quels que soient les scalaires λ_i non nuls, la réunion des $\lambda_i R_i$ est un système de racines dans V, dont le système inverse est la réunion des $\lambda_i^{-1} R_i^\vee$, et dont le groupe de Weyl est W(R).

PROPOSITION 7. — *Soient* R *un système de racines dans* V, (R_i) *la famille de ses composants irréductibles,* V_i *le sous-espace vectoriel de* V *engendré par* R_i, B *la forme bilinéaire symétrique définie dans la prop.* 3, B' *une forme bilinéaire symétrique sur* V *invariante par* W(R). *Alors les* V_i *sont deux à deux orthogonaux pour* B', *et, pour tout* i, *les restrictions de* B *et* B' *à* V_i *sont proportionnelles.*

Si $v_i \in V_i$, $v_j \in V_j$, $i \neq j$, et si $w \in W(R_j)$, on a

$$B'(v_i, w(v_j)) = B'(v_i, v_j),$$

ce qui montre que $w(v_j) - v_j$ est orthogonal à v_i pour B'. Comme V_j est irréductible pour $W(R_j)$, il est engendré par les $w(v_j) - v_j$, et il est donc orthogonal à V_i.

Le fait que les restrictions de B et B' à chacun des V_i soient proportionnelles résulte de la prop. 1 du chap. V, § 2, n° 1.

Remarque. — Choisissons un produit scalaire sur $V_{\mathbf{R}}$ invariant par W(R). Cela permet de parler de la *longueur* d'une racine et de l'*angle* de deux racines. La prop. 7 montre que cet angle est indépendant du choix du produit scalaire, et qu'il en est de même du rapport des longueurs de deux racines, pourvu que celles-ci appartiennent à la *même* composante irréductible de R.

3. Relations entre deux racines

Rappelons que *l'on suppose désormais* $k = \mathbf{R}$. (Nous laissons au lecteur le soin d'étendre définitions et résultats au cas général, par la méthode indiquée dans la *Remarque* 2 du n° 1.)

Dans tout ce qui suit, R *désigne un système de racines dans un espace vectoriel* V; *on munit* V *d'un produit scalaire* $(x, y) \longmapsto (x|y)$ *invariant par* W(R), cf. prop. 3.

Soient α, $\beta \in R$. D'après la formule (7) du nº 1, on a

$$n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha) = 4\cos^2 (\widehat{\alpha, \beta}) \leqslant 4. \tag{10}$$

L'entier $n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha)$ ne peut donc prendre que les valeurs 0, 1, 2, 3, 4. Compte tenu du chap. V, § 2, nº 5, cor. de la prop. 6, et de la note de bas de page du chap. V, § 4, nº 8, on voit que les seules possibilités sont les suivantes, à l'échange près de α et β :

1) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 0$; $(\widehat{\alpha, \beta}) = \dfrac{\pi}{2}$; $s_\alpha s_\beta$ d'ordre 2;

2) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 1$; $(\widehat{\alpha, \beta}) = \dfrac{\pi}{3}$; $\|\alpha\| = \|\beta\|$; $s_\alpha s_\beta$ d'ordre 3;

3) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = -1$; $(\widehat{\alpha, \beta}) = \dfrac{2\pi}{3}$; $\|\alpha\| = \|\beta\|$; $s_\alpha s_\beta$ d'ordre 3;

4) $n(\alpha, \beta) = 1$, $n(\beta, \alpha) = 2$; $(\widehat{\alpha, \beta}) = \dfrac{\pi}{4}$; $\|\beta\| = \sqrt{2}\,\|\alpha\|$; $s_\alpha s_\beta$ d'ordre 4;

5) $n(\alpha, \beta) = -1$, $n(\beta, \alpha) = -2$; $(\widehat{\alpha, \beta}) = \dfrac{3\pi}{4}$; $\|\beta\| = \sqrt{2}\,\|\alpha\|$; $s_\alpha s_\beta$ d'ordre 4;

6) $n(\alpha, \beta) = 1$, $n(\beta, \alpha) = 3$; $(\widehat{\alpha, \beta}) = \dfrac{\pi}{6}$; $\|\beta\| = \sqrt{3}\,\|\alpha\|$; $s_\alpha s_\beta$ d'ordre 6;

7) $n(\alpha, \beta) = -1$, $n(\beta, \alpha) = -3$; $(\widehat{\alpha, \beta}) = \dfrac{5\pi}{6}$; $\|\beta\| = \sqrt{3}\,\|\alpha\|$; $s_\alpha s_\beta$ d'ordre 6;

8) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 2$; $\alpha = \beta$;
9) $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = -2$; $\alpha = -\beta$;
10) $n(\alpha, \beta) = 1$, $n(\beta, \alpha) = 4$; $\beta = 2\alpha$;
11) $n(\alpha, \beta) = -1$, $n(\beta, \alpha) = -4$; $\beta = -2\alpha$.

En particulier :

Proposition 8. — (i) *Si deux racines sont proportionnelles, le facteur de proportionalité ne peut être que* ± 1, $\pm \dfrac{1}{2}$, ± 2.

(ii) *Si* α, β *sont deux racines non proportionnelles, et si* $\|\alpha\| \leqslant \|\beta\|$, *alors* $n(\alpha, \beta)$ *prend l'une des valeurs* 0, 1, -1.

Si une racine $\alpha \in R$ est telle que $\dfrac{1}{2}\alpha \notin R$, on dit que α est une racine *indivisible.*

Théorème 1. — *Soient* α, β *deux racines.*

(i) *Si* $n(\alpha, \beta) > 0$, $\alpha - \beta$ *est une racine sauf si* $\alpha = \beta$.

(ii) *Si* $n(\alpha, \beta) < 0$, $\alpha + \beta$ *est une racine sauf si* $\alpha = -\beta$.

Si $n(\alpha, \beta) > 0$, les possibilités, d'après la liste ci-dessus, sont les suivantes :
1) $n(\alpha, \beta) = 1$; alors $\alpha - \beta = s_\beta(\alpha) \in R$;
2) $n(\beta, \alpha) = 1$; alors $\beta - \alpha = s_\alpha(\beta) \in R$, donc $\alpha - \beta \in R$;
3) $\beta = \alpha$.

Ceci prouve (i), et (ii) s'en déduit en changeant β en $-\beta$.

COROLLAIRE. — *Soient* α *et* β *deux racines.*

(i) *Si* $(\alpha|\beta) > 0$, $\alpha - \beta$ *est une racine sauf si* $\alpha = \beta$.

(ii) *Si* $(\alpha|\beta) < 0$, $\alpha + \beta$ *est une racine sauf si* $\alpha = -\beta$.

(iii) *Si* $\alpha - \beta \notin \mathrm{R} \cup \{0\}$ *et* $\alpha + \beta \notin \mathrm{R} \cup \{0\}$, *on a* $(\alpha|\beta) = 0$.

Les assertions (i) et (ii) résultent du th. 1 et de la formule (7) du nº 1. L'assertion (iii) résulte de (i) et (ii).

Il peut se faire que $\alpha + \beta \in \mathrm{R}$, $(\alpha|\beta) = 0$ (cf. planche X, système B_2). Lorsque $\alpha - \beta \notin \mathrm{R} \cup \{0\}$ et $\alpha + \beta \notin \mathrm{R} \cup \{0\}$, on dit que les racines α et β sont *fortement orthogonales.*

PROPOSITION 9. — *Soient* α *et* β *deux racines non proportionnelles.*

(i) *L'ensemble* I *des entiers rationnels* j *tels que* $\beta + j\alpha$ *soit une racine est un intervalle* $[-q, p]$ *de* $\mathbf{Z}$ *contenant* 0.

(ii) *Soit* S *l'ensemble des* $\beta + j\alpha$ *pour* $j \in \mathrm{I}$. *Alors*

$$s_\alpha(\mathrm{S}) = \mathrm{S} \qquad \textit{et} \qquad s_\alpha(\beta + p\alpha) = \beta - q\alpha.$$

(iii) *On a* $p - q = -n(\beta, \alpha)$.

Il est clair que $0 \in \mathrm{I}$. Soit p (resp. $-q$) le plus grand (resp. le plus petit) élément de I. Si tous les entiers de $[-q, p]$ n'appartiennent pas à I, il existe deux entiers r, s dans $[-q, p]$ possédant les propriétés suivantes : $s > r+1$, $s \in \mathrm{I}$, $r \in \mathrm{I}$, $r + k \notin \mathrm{I}$ pour $1 \leqslant k \leqslant s - r - 1$. Avec les notations du cor. du th. 1, on a $(\alpha|\beta + s\alpha) \leqslant 0$, $(\alpha|\beta + r\alpha) \geqslant 0$, ce qui est absurde car

$$(\alpha|\beta + s\alpha) > (\alpha|\beta + r\alpha).$$

Ceci prouve (i).

On a $s_\alpha(\beta + j\alpha) = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha - j\alpha = \beta + j'\alpha$ avec $j' = -j - n(\beta, \alpha)$. Donc $s_\alpha(\mathrm{S}) \subset \mathrm{S}$ et par suite $s_\alpha(\mathrm{S}) = \mathrm{S}$. En outre on voit que l'application $j \longmapsto -j - n(\beta, \alpha)$ est une bijection décroissante de I sur I. On en déduit que, pour $j = p$, on a $j' = -q$, de sorte que $-q = -p - n(\beta, \alpha)$. Ceci prouve (ii) et (iii).

On dit que S est la α-*chaîne de racines* définie par β, que $\beta - q\alpha$ est *l'origine* de la chaîne et $\beta + p\alpha$ son *extrémité*, et que $p + q$ est sa *longueur.*

COROLLAIRE. — *Soient* S *une* α-*chaîne de racines,* γ *l'origine de* S. *La longueur de* S *est* $-n(\gamma, \alpha)$; *elle est égale à* 0, 1, 2 *ou* 3.

La première assertion résulte de la prop. 9, (iii), appliquée à $\beta = \gamma$, compte tenu de ce que $p = 0$.

D'autre part, comme γ n'est pas proportionnelle à α, la liste donnée au début de ce nº montre que $|n(\gamma, \alpha)| \leqslant 3$, d'où le corollaire.

Remarque. — Gardons les notations du corollaire ci-dessus. Alors :

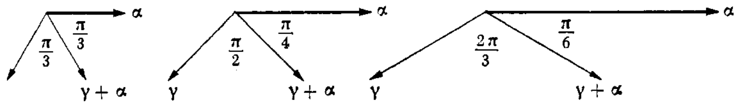
1) Si la longueur de S est 0, on a $(\alpha|\gamma) = 0$.

2) Si la longueur de S est 1, on a $n(\gamma, \alpha) = -1$, d'où trois cas:

$$n(\alpha, \gamma) = -1, \quad (\alpha|\alpha) = (\gamma|\gamma), \quad (\alpha|\gamma) = -\frac{1}{2}(\alpha|\alpha), \quad \widehat{(\alpha, \gamma)} = \frac{2\pi}{3}$$

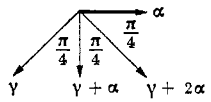
$$n(\alpha, \gamma) = -2, \quad (\alpha|\alpha) = 2(\gamma|\gamma), \quad (\alpha|\gamma) = -\frac{1}{2}(\alpha|\alpha), \quad \widehat{(\alpha, \gamma)} = \frac{3\pi}{4}$$

$$n(\alpha, \gamma) = -3, \quad (\alpha|\alpha) = 3(\gamma|\gamma), \quad (\alpha|\gamma) = -\frac{1}{2}(\alpha|\alpha), \quad \widehat{(\alpha, \gamma)} = \frac{5\pi}{6}$$



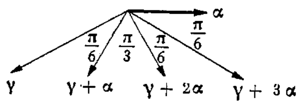
3) Si la longueur de S est 2, on a $n(\gamma, \alpha) = -2$, d'où

$$n(\alpha, \gamma) = -1, \quad (\alpha|\alpha) = \frac{1}{2}(\gamma|\gamma), \quad (\alpha|\gamma) = -(\alpha|\alpha), \quad \widehat{(\alpha, \gamma)} = \frac{3\pi}{4}.$$



4) Si la longueur de S est 3, on a $n(\gamma, \alpha) = -3$, d'où

$$n(\alpha, \gamma) = -1, \quad (\alpha|\alpha) = \frac{1}{3}(\gamma|\gamma), \quad (\alpha|\gamma) = -\frac{3}{2}(\alpha|\alpha), \quad \widehat{(\alpha, \gamma)} = \frac{5\pi}{6}.$$



Nous verrons (planche X, systèmes A_2, B_2, G_2) que tous ces cas peuvent effectivement se présenter.

PROPOSITION 10. — *Soient α, β deux racines non proportionnelles telles que $\beta+\alpha$ soit une racine. Soient p, q les entiers de la prop. 9. On a*

$$\frac{(\beta + \alpha|\beta + \alpha)}{(\beta|\beta)} = \frac{q + 1}{p}.$$

Soient S la α-chaîne définie par β, γ son origine; sa longueur l est $\geqslant 1$ puisque $\beta + \alpha$ est une racine. On peut avoir les cas suivants:

1) $l = 1$; alors $\beta = \gamma$, $q = 0$, $p = 1$, $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = (\beta|\beta)$.

2) $l = 2$, $\beta = \gamma$; alors $q = 0$, $p = 2$, $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = \frac{1}{2}(\beta|\beta)$.

3) $l = 2$, $\beta = \gamma + \alpha$; alors $q = 1$, $p = 1$, $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = 2(\beta|\beta)$.

4) $l = 3$, $\beta = \gamma$; alors $q = 0$, $p = 3$, $(\beta + \alpha|\beta + \alpha) = \frac{1}{3}(\beta|\beta)$.

5) $l = 3$, $\beta = \gamma + \alpha$; alors $q = 1$, $p = 2$, $(\beta + \alpha | \beta + \alpha) = (\beta|\beta)$.

6) $l = 3$, $\beta = \gamma + 2\alpha$; alors $q = 2$, $p = 1$, $(\beta + \alpha | \beta + \alpha) = 3(\beta|\beta)$.

Dans tous les cas, la formule à établir est vérifiée.

PROPOSITION 11. — *Supposons* R *irréductible. Soient* α *et* β *deux racines telles que* $\|\alpha\| = \|\beta\|$. *Il existe* $g \in W(R)$ *tel que* $g(\alpha) = \beta$.

Les transformés de α par W(R) engendrent V (n° 2, cor. de la prop. 5). Il existe donc $g \in W(R)$ tel que $(g(\alpha)|\beta) \neq 0$. On peut ainsi supposer désormais que $(\alpha|\beta) \neq 0$. D'après la formule (9) du n° 1, $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha)$. Remplaçant éventuellement β par $s_\beta(\beta) = -\beta$, on peut supposer $n(\alpha, \beta) > 0$. Alors, d'après la liste du début du n° 3, ou bien $\alpha = \beta$ (auquel cas la proposition est évidente), ou bien $n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 1$; dans ce cas

$$(s_\alpha s_\beta s_\alpha)(\beta) = s_\alpha s_\beta(\beta - \alpha) = s_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha.$$

4. Systèmes de racines réduits

On dit qu'un système de racines est *réduit* si toute racine du système est indivisible (n° 3).

PROPOSITION 12. — *Supposons* R *irréductible et réduit.*

(i) *Le rapport* $\frac{(\beta|\beta)}{(\alpha|\alpha)}$ *pour* $\alpha \in R$, $\beta \in R$ *ne peut prendre que les valeurs* $1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$.

(ii) *L'ensemble des* $(\alpha|\alpha)$ *pour* $\alpha \in R$ *a au plus deux éléments.*

Comme R est irréductible, les transformés d'une racine par W(R) engendrent V (n° 2, cor. de la prop. 5). Quelles que soient les racines α, β, il existe donc une racine β' telle que $(\alpha|\beta') \neq 0$ et $(\beta'|\beta') = (\beta|\beta)$. D'après la formule (9) du n° 1 et la liste du n° 3, $\frac{(\beta'|\beta')}{(\alpha|\alpha)}$ prend l'une des valeurs $1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$ (rappelons que le système est supposé réduit). En multipliant $(x|y)$ par un scalaire convenable, on peut supposer que $(\alpha|\alpha) = 1$ pour certaines racines et que les autres valeurs possibles de $(\beta|\beta)$ pour $\beta \in R$ sont 2 et 3. Les valeurs 2 et 3 ne peuvent être atteintes toutes les deux, car il existerait $\beta \in R$, $\gamma \in R$ tels que $\frac{(\gamma|\gamma)}{(\beta|\beta)} = \frac{3}{2}$, contrairement à ce qu'on a vu plus haut.

PROPOSITION 13. — *Supposons* R *irréductible, non réduit et de rang* $\geqslant 2$.

(i) *L'ensemble* R_0 *des racines indivisibles est un système de racines dans* V; *ce système est irréductible et réduit; on a* $W(R_0) = W(R)$.

(ii) *Soit* A *l'ensemble des racines* α *pour lesquelles* $(\alpha|\alpha)$ *prend la plus petite valeur* λ. *Alors deux éléments non proportionnels de* A *sont orthogonaux.*

(iii) *Soit* B *l'ensemble des* $\beta \in R$ *tels que* $(\beta|\beta) = 2\lambda$. *On a* $B \neq \emptyset$, $R_0 = A \cup B$, $R = A \cup B \cup 2A$.

Si $\alpha \in R - R_0$, on a $\frac{1}{2}\alpha \in R$, mais $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\alpha) \notin R$ (prop. 8), donc $\frac{1}{2}\alpha \in R_0$. Ceci prouve que R_0 vérifie (SR_I). Il est clair que, pour tout $\alpha \in R$, on a $s_{\alpha,\alpha^\vee}(R_0) = R_0$, donc R_0 vérifie (SR_{II}) et (SR_{III}). Comme $\alpha \in R - R_0$ implique $\frac{1}{2}\alpha \in R_0$ et que $s_\alpha = s_{\alpha/2}$, on a $W(R) = W(R_0)$. Donc R_0 est irréductible (cor. de la prop. 5), et est évidemment réduit.

Comme R est non réduit, il existe $\alpha \in R_0$ tel que $2\alpha \in R$. Comme R_0 est irréductible et que $\dim V \geqslant 2$, il n'est pas possible que α soit proportionnel ou orthogonal à toute racine. Soit $\beta \in R_0$ tel que $n(\beta, \alpha) \neq 0$ et que β soit non proportionnel à α. En changeant β en $-\beta$, on peut supposer $n(\beta, \alpha) > 0$. On a $\frac{1}{2}n(\beta, \alpha) = n(\beta, 2\alpha) \in \mathbf{Z}$, donc $n(\beta, \alpha) \in 2\mathbf{Z}$. D'après la liste du n° 3, on a $n(\beta, \alpha) = 2$, $(\beta|\beta) = 2(\alpha|\alpha)$. Comme R_0 est réduit, la prop. 12 montre que, pour tout $\gamma \in R_0$, on a $(\gamma|\gamma) = (\alpha|\alpha)$ ou $(\gamma|\gamma) = 2(\alpha|\alpha)$. Et ce qui précède montre que, pour tout $\gamma \in R - R_0$, le vecteur $\frac{1}{2}\gamma$ est un élément de R_0 tel que $(\frac{1}{2}\gamma|\frac{1}{2}\gamma) = (\alpha|\alpha)$. Ainsi, $\lambda = (\alpha|\alpha)$, $B \neq \emptyset$, $R_0 = A \cup B$, et $R \subset A \cup B \cup 2A$; d'autre part, si $\gamma \in A$, il existe $g \in W(R)$ tel que $\gamma = g(\alpha)$ (prop. 11), d'où $2\gamma = g(2\alpha) \in R$; donc $2A \subset R$ et $R = A \cup B \cup 2A$. Enfin, soient γ, γ' deux éléments non proportionnels de A. On a

$$n(2\gamma, \gamma') = 2n(\gamma, \gamma') = 4n(\gamma, 2\gamma') \in 4\mathbf{Z}, \qquad \text{et} \qquad |n(\gamma, \gamma')| \leqslant 1$$

puisque γ et γ' ont même longueur, d'où $n(\gamma, \gamma') = 0$ et $(\gamma|\gamma') = 0$.

PROPOSITION 14. — *Supposons que* R *soit irréductible et réduit, et que* $(\alpha|\alpha)$ *prenne les valeurs* λ *et* 2λ *pour* $\alpha \in R$. *Soit* A *l'ensemble des racines* α *telles que* $(\alpha|\alpha) = \lambda$. *On suppose que deux éléments de* A *non proportionnels sont orthogonaux. Alors* $R_1 = R \cup 2A$ *est un système de racines irréductible non réduit et* R *est l'ensemble des racines indivisibles de* R_1.

Il est clair que R_1 vérifie (SR_I) et (SR_{II}). Soient $\alpha, \beta \in R_1$ et montrons que $\langle\alpha^\vee, \beta\rangle \in \mathbf{Z}$. C'est évident si $\alpha, \beta \in R$. Comme $(2\alpha)^\vee = \frac{1}{2}\alpha^\vee$ pour $\alpha \in A$, c'est encore immédiat si $\alpha, \beta \in 2A$. Enfin, supposons $\beta \in R$ et $\alpha = 2\gamma$ avec $\gamma \in A$.

1) Si $\gamma = \pm\beta$, on a $\langle\alpha^\vee, \beta\rangle = \pm\frac{1}{2}\langle\gamma^\vee, \gamma\rangle = \pm 1$.

2) Si γ est non proportionnel à β et si $\beta \in A$, l'hypothèse faite sur A entraîne que $\langle\gamma^\vee, \beta\rangle = 0$, d'où $\langle\alpha^\vee, \beta\rangle = 0$.

3) Si $\beta \in R - A$, on a $(\beta|\beta) = 2\lambda = 2(\gamma|\gamma)$, donc $\langle\beta, \gamma^\vee\rangle$ est égal soit à 0, soit à 2, soit à -2 d'après la liste du n° 3. Donc $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle = \frac{1}{2}\langle\beta, \gamma^\vee\rangle \in \mathbf{Z}$.

Ainsi, R_1 est un système de racines dans V, et les autres assertions sont évidentes.

5. Chambres et bases d'un système de racines

Pour tout $\alpha \in R$, soit L_α l'hyperplan de V formé des points invariants par s_α. Les chambres déterminées dans V par l'ensemble des L_α (chap. V, § 1, nº 3) s'appellent les *chambres* de R. La bijection $V \to V^*$ définie par le produit scalaire $(x|y)$ transforme α en $\dfrac{2\alpha^\vee}{(\alpha^\vee|\alpha^\vee)}$ pour $\alpha \in R$, donc L_α en $L_{\alpha^\vee}$, donc les chambres de R en celles de $R^\vee$. Si C est une chambre de R, nous noterons $C^\vee$ la chambre correspondante de $R^\vee$. D'après la prop. 7 du nº 2, $C^\vee$ dépend uniquement de C, et non du choix de $(x|y)$.

THÉORÈME 2. — (i) *Le groupe* W(R) *opère de façon simplement transitive sur l'ensemble des chambres.*

(ii) *Soit* C *une chambre. Alors* $\overline{C}$ *est un domaine fondamental pour* W(R).

(iii) C *est un cône simplicial ouvert* (chap. V, § 1, nº 6).

(iv) *Soient* $L_1, L_2, \ldots, L_l$ *les murs de* C. *Pour tout* i, *il existe une racine indivisible* α_i *et une seule telle que* $L_i = L_{\alpha_i}$ *et telle que* α_i *soit du même côté de* L_i *que* C.

(v) *L'ensemble* $B(C) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ *est une base de* V.

(vi) C *est l'ensemble des* $x \in V$ *tels que* $\langle \alpha_i^\vee, x\rangle > 0$ *pour tout* i (ou, ce qui revient au même, l'ensemble des $x \in V$ tels que $(x|\alpha_i) > 0$ pour tout i).

(vii) *Soit* S *l'ensemble des* s_{α_i}. *Le couple* (W(R), S) *est un système de Coxeter* (chap. IV, § 1, nº 3).

Les assertions (i) et (vii) résultent du chap. V, § 3, nº 2, th. 1. L'assertion (ii) résulte du chap. V, § 3, nº 3, th. 2. L'assertion (iv) est évidente. La racine α_i est orthogonale à L_i, et $\alpha_i^\vee$ s'identifie à $2\alpha_i/(\alpha_i|\alpha_i)$. Comme W(R) est essentiel (nº 1, *Remarque* 3), les assertions (iii), (v), (vi) résultent du chap. V, § 3, nº 9, prop. 7.

Remarques. — 1) L'assertion (vii) montre en particulier que W(R) est *engendré* par les réflexions s_{α_i}.

2) Si $x, y \in C$, on a $(x|y) < 0$ (chap. V, § 3, nº 5, lemme 6), autrement dit l'angle $\widehat{(x, y)}$ est *aigu*.

3) Soit $m(\alpha, \beta)$ l'ordre de $s_\alpha s_\beta$ ($\alpha, \beta \in B(C)$). La matrice $(m(\alpha, \beta))$ s'identifie à la *matrice de Coxeter* (chap. IV, § 1, nº 9) de (W, S). Si $\alpha \neq \beta$, la prop. 3 du chap. V, § 3, nº 4, montre que l'angle $\widehat{(\alpha, \beta)}$ est égal à $\pi - \dfrac{\pi}{m(\alpha, \beta)}$; en particulier, cet angle est obtus ou droit, et l'on a $(\alpha|\beta) \leqslant 0$. En utilisant la liste du nº 3, *on voit que* $m(\alpha, \beta)$ *est égal à* 2, 3, 4 *ou* 6.

DÉFINITION 2. — *Une partie* B *de* R *est appelée une base de* R *s'il existe une chambre* C *de* R *telle que* $B = B(C)$. *Si* C *est une chambre, on dit que* B(C) *est la base de* R *définie par* C.

Remarques. — 4) L'assertion (vi) du th. 2 montre que l'application $C \longmapsto B(C)$ est une *bijection* de l'ensemble des chambres sur l'ensemble des bases. Par suite, W(R) opère de manière *simplement transitive* sur l'ensemble des bases.

5) Soit C une chambre de R, et soit B la base correspondante. Si $\alpha \in B$, posons $\varphi(\alpha) = \alpha^\vee$ si $2\alpha \notin R$ et $\varphi(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^\vee$ si $2\alpha \in R$. Alors $\varphi(B)$ *est la base de* $R^\vee$ *définie par* $C^\vee$; cela résulte du fait que les murs de $C^\vee$ sont les $L_{\alpha^\vee}$, pour $\alpha \in B$.

Définition 3. — *Soit* B *une base de* R. *On appelle matrice de Cartan de* R (*relativement à* B) *la matrice* $(n(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in B}$.

On a $n(\alpha, \alpha) = 2$ pour tout $\alpha \in B$. Pour α, $\beta \in B$, on a

$$n(\alpha, \beta) = 2\,\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} = -2\,\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\cos\frac{\pi}{m(\alpha, \beta)}, \tag{11}$$

où $m(\alpha, \beta)$ désigne comme précédemment l'ordre de $s_\alpha s_\beta$. Si $\alpha \neq \beta$, on a $n(\alpha, \beta) = 0, -1, -2$ ou -3 (cf. n° 3).

Remarques. — 6) On ne confondra pas la matrice de Cartan $(n(\alpha, \beta))$ et la matrice de Coxeter $(m(\alpha, \beta))$. Noter d'ailleurs que la matrice de Cartan n'est pas nécessairement symétrique.

7) *Indexations canoniques.* Si B et B′ sont deux bases de R, il existe un unique élément $w \in W$ tel que $w(B) = B'$. On a

$$n(w(\alpha), w(\beta)) = n(\alpha, \beta) \qquad \text{et} \qquad m(w(\alpha), w(\beta)) = m(\alpha, \beta)$$

pour α, $\beta \in B$. Par suite, les matrices de Cartan et de Coxeter associées à B se déduisent de celles associées à B′ par composition avec la bijection

$$\alpha \longmapsto w(\alpha)$$

de B sur B′.

On peut d'ailleurs définir des matrices de Cartan et de Coxeter *canoniques* de la manière suivante. Soit X l'ensemble des couples (B, α), où B est une base de R et où $\alpha \in B$. Le groupe W opère de manière évidente sur X et une orbite de W dans X rencontre chacun des ensembles $\{B\} \times B$ en un point et un seul. Si I est l'ensemble de ces orbites, chaque base B admet donc une *indexation canonique* $(\alpha_i)_{i \in I}$. De plus, il existe une matrice $N = (n_{ij})$ (resp. $M = (m_{ij})$) et une seule, de type $I \times I$, telle que pour toute base B, la matrice de Cartan (resp. de Coxeter) associée à B se déduise de N (resp. M) par composition avec l'indexation canonique de B; on l'appelle la *matrice de Cartan* (resp. *de Coxeter*) *canonique* de R.

Proposition 15. — *Soient* B *une base de* R *et* α *une racine indivisible. Il existe* $\beta \in B$ *et* $w \in W(R)$ *tels que* $\alpha = w(\beta)$.

Soit C la chambre telle que $B = B(C)$. L'hyperplan L_α est mur d'une chambre C' de R, et il existe un élément de W(R) qui transforme C' en C. On est donc ramené au cas où L_α est mur de C. Alors α est proportionnel à un élément β de B. Comme α et β sont indivisibles, on a $\alpha = \pm \beta$. Si $\alpha = -\beta$, on a $\alpha = s_\beta(\beta)$, d'où la proposition.

Corollaire. — *Soient* R_1 *et* R_2 *deux systèmes de racines réduits dans des espaces vectoriels* V_1 *et* V_2, *et soient* B_1 *et* B_2 *des bases de* R_1 *et* R_2. *Soit* $f: B_1 \rightarrow B_2$ *une bijection qui transforme la matrice de Cartan de* R_1 *en celle de* R_2. *Il existe alors un isomorphisme* $F: V_1 \rightarrow V_2$ *qui transforme* R_1 *en* R_2 *et* α *en* $f(\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in B_1$.

Soit F l'isomorphisme de V_1 sur V_2 qui transforme α en $f(\alpha)$ pour tout $\alpha \in B_1$. Alors F transforme s_α en $s_{f(\alpha)}$, donc $W(R_1)$ en $W(R_2)$ (th. 2), donc R_1 en R_2 (prop. 15).

Proposition 16. — *Soient* B *une base de* R, *et* G *le sous-groupe de* A(R) *formé des éléments laissant stable* B. *Alors* W(R) *est un sous-groupe distingué de* A(R) *et* A(R) *est produit semi-direct de* G *et* W(R).

Si $\alpha \in R$ et $t \in A(R)$, on a $ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}$; comme W(R) est engendré par les s_α, on voit que W(R) est un sous-groupe distingué de A(R). Par transport de structure, A(R) transforme une base de R en une base de R. Comme W(R) opère de façon simplement transitive sur l'ensemble des bases, tout élément de A(R) s'écrit de manière unique sous la forme $g_1 g_2$, où $g_1 \in W(R)$ et $g_2 \in G$.

Remarques. — 8) Soient $R_1, \ldots, R_p$ des systèmes de racines dans les espaces vectoriels $V_1, \ldots, V_p$, R la somme directe des R_i dans $V = \prod_i V_i$, C_i une chambre de R_i, $B_i = B(C_i)$. Il est immédiat que $C = \prod_i C_i$ est une chambre de R et que $B(C) = \bigcup_i B_i$. Il résulte du th. 2 que les chambres et les bases de R sont toutes obtenues par ce procédé.

6. Racines positives

Soit C une chambre de R, et soit $B(C) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ la base de R correspondante. On appelle *relation d'ordre définie par* C dans V (resp. V*) la relation d'ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel de V (resp. V*) pour laquelle les éléments $\geqslant 0$ sont les combinaisons linéaires des α_i (resp. des $\alpha_i^\vee$) à coefficients $\geqslant 0$. On dira qu'un élément positif pour l'une de ces relations d'ordre est *positif pour* C, ou *positif pour la base* B(C). Ces relations d'ordre sont aussi définies par $C^\vee$, comme on le voit en identifiant V à V* à l'aide d'un produit scalaire invariant par W(R). Compte tenu du th. 2, n° 5, un élément de V* est $\geqslant 0$ si et seulement si ses valeurs sur C sont $\geqslant 0$. Un élément x de V est $\geqslant 0$ si et seulement si ses valeurs sur $C^\vee$ sont $\geqslant 0$, ou, ce qui revient au même, si $(x|y) \geqslant 0$ pour tout $y \in C$.

Les éléments de $\overline{C}$ sont $\geqslant 0$ pour C d'après le lemme 6 du chap. V, § 3, n° 5. Mais l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ pour C est en général distinct de $\overline{C}$ (cf. planche X, systèmes A_2, B_2, G_2).

THÉORÈME 3. — *Toute racine est combinaison linéaire à coefficients entiers de même signe d'éléments de* B(C). *En particulier, toute racine est, soit positive, soit négative, pour* C.

Si $\alpha \in R$, le noyau L_α de α ne rencontre pas $C^\vee$, donc α est, soit > 0 sur $C^\vee$ tout entier, soit < 0 sur $C^\vee$ tout entier, d'où la deuxième assertion. Il reste à prouver que α est contenu dans le *sous-groupe* P de V engendré par B(C); on peut supposer α indivisible. Or le groupe P est évidemment stable par les s_γ, pour $\gamma \in B(C)$, donc aussi par W(R) d'après le th. 2. Comme α est de la forme $w(\beta)$, avec $w \in W(R)$ et $\beta \in B(C)$ (cf. prop. 15), on a bien $\alpha \in P$. C.Q.F.D.

On notera $R_+(C)$ l'ensemble des racines positives pour C. Ainsi,

$$R = R_+(C) \cup (-R_+(C))$$

est une partition de R.

COROLLAIRE. — *Soient γ une combinaison linéaire de racines à coefficients entiers, et α une racine indivisible. Si γ est proportionnelle à α, alors $\gamma \in \mathbf{Z}\alpha$.*

D'après la prop. 15 du n° 5, on peut choisir C de telle sorte que $\alpha \in B(C)$. D'après le th. 3, on a :

$$\gamma = \sum_{\beta \in B(C)} n_\beta \beta, \qquad \text{avec} \qquad n_\beta \in \mathbf{Z}.$$

Si γ est proportionnel à α, on a donc $\gamma = n_\alpha \alpha$, ce qui démontre le corollaire.

Soit maintenant S l'ensemble des réflexions s_α pour $\alpha \in B(C)$ et soit T la réunion des conjugués de S dans W. Pour $\alpha \in B(C)$ et $w \in W$, l'élément $t = w s_\alpha w^{-1}$ de T est la réflexion orthogonale s_β associée à la racine $\beta = w(\alpha)$; réciproquement, pour toute racine indivisible β, il existe un élément $w \in W$ tel que $\alpha = w^{-1}(\beta) \in B(C)$ (prop. 15) et on a $s_\beta = w s_\alpha w^{-1} \in T$. Il en résulte que l'on obtient une *bijection* ψ de l'ensemble des racines indivisibles sur $\{\pm 1\} \times T$ en associant à une racine indivisible β le couple (ε, s_β), où $\varepsilon = +1$ si β est positive et $\varepsilon = -1$ si β est négative.

D'autre part, (W, S) est un système de Coxeter (th. 2) et on peut lui appliquer les résultats du chap. IV, § 1, n° 4. Nous avons vu que, si w est un élément de W de longueur (par rapport à S) égale à q, il existe une partie T_w de T, à q éléments, telle que, si $w = s_1 \ldots s_q$ avec $s_i \in S$ et si l'on pose

$$t_i = s_1 \ldots s_{i-1} s_i s_{i-1} \ldots s_1$$

(pour $1 \leqslant i \leqslant q$), alors $T_w = \{t_1, \ldots, t_q\}$. Rappelons que l'on a également défini au n° 4 du § 1 du chap. IV un nombre $\eta(w, t)$ (pour $w \in W$ et $t \in T$) égal à $+1$ si $t \notin T_w$ et à -1 si $t \in T_w$. Enfin, rappelons que, si l'on définit l'application U_w de l'ensemble $\{\pm 1\} \times T$ dans lui-même par la formule

$$U_w(\varepsilon, t) = (\varepsilon\eta(w^{-1}, t), wtw^{-1}),$$

l'application $w \longmapsto U_w$ est un *homomorphisme* de W dans le groupe des permutations de l'ensemble $\{\pm 1\} \times T$ (chap. IV, § 1, n° 4, lemme 1).

PROPOSITION 17. — *Supposons* R *réduit et soient* $w \in W$ *et* $\alpha \in R$.

(i) *On a* $\psi(w(\alpha)) = U_w(\psi(\alpha))$.

(ii) *Supposons* α *positive. La racine* $w(\alpha)$ *est négative si et seulement si*

$$\eta(w^{-1}, s_\alpha) = -1,$$

autrement dit si $s_\alpha \in T_{w^{-1}}$.

(iii) *On a* $\eta(w, s_\alpha) = -1$ *si et seulement si les chambres* C *et* $w(C)$ *sont de part et d'autre de l'hyperplan* L_α. *Autrement dit, l'ensemble* T_w *se compose des réflexions par rapport aux murs séparant* C *et* $w(C)$.

Soit $\beta \in B(C)$ et posons $s = s_\beta$. On a évidemment $T_s = \{s\}$ et par suite :

$$U_s(\varepsilon, t) = \begin{cases} (\varepsilon, sts^{-1}) & \text{si } t \neq s \\ (-\varepsilon, s) & \text{si } t = s. \end{cases} \tag{12}$$

D'autre part, soit $\rho = \sum_{\gamma \in B(C)} n_\gamma(\rho)\gamma$ une racine positive. Posons

$$s(\rho) = \sum_{\gamma \in B(C)} n_\gamma(s(\rho))\gamma.$$

Si $\rho \neq \beta$, il existe un élément $\gamma \in B(C)$ avec $\gamma \neq \beta$, tel que $n_\gamma(\rho) > 0$, et l'on a $n_\gamma(s(\rho)) = n_\gamma(\rho) > 0$ (n° 1, formule (5)). Par suite $s(\rho)$ est *positive*. On en déduit aussitôt que :

$$\psi(s(\varepsilon . \rho)) = \begin{cases} (\varepsilon, ss_\rho s^{-1}) & \text{si } \rho \neq \beta \\ (-\varepsilon, s) & \text{si } \rho = \beta. \end{cases} \tag{13}$$

La comparaison de (12) et de (13) montre alors que $U_s(\psi(\gamma)) = \psi(s(\gamma))$ pour toute racine γ et tout $s \in S$. Comme S engendre W, on en déduit (i).

D'autre part, dire que $w(\alpha)$ est négative équivaut à dire que

$$\psi(w(\alpha)) = (-1, ws_\alpha w^{-1}),$$

ou encore d'après (i), que $U_w(\psi(\alpha)) = (-1, ws_\alpha w^{-1})$. Si de plus α est positive, on a $\psi(\alpha) = (+1, s_\alpha)$ et $U_w(\psi(\alpha)) = (\eta(w^{-1}, s_\alpha), ws_\alpha w^{-1})$, d'où (ii).

Enfin, on a, d'après (ii), $\eta(w, s_\alpha) = -1$ si et seulement si les racines α et $w^{-1}(\alpha)$ sont l'une positive et l'autre négative. Ceci équivaut à dire que $(\alpha|x).(w^{-1}(\alpha)|x) = (\alpha|x).(\alpha|w(x)) < 0$ pour tout $x \in C$, d'où la première assertion de (iii). La seconde assertion de (iii) en résulte immédiatement.

COROLLAIRE 1. — *Soient* $\beta \in B(C)$. *La réflexion* s_β *permute entre elles les racines positives non proportionnelles à* β.

On se ramène aussitôt au cas où R est réduit. Dans ce cas, notre assertion résulte de (ii) et du fait que $T_{s_\beta} = \{s_\beta\}$.

COROLLAIRE 2. — *Supposons* R *réduit. Soit* $w \in W$, *soit* q *la longueur de* w *par rapport à* S (chap. IV, § 1, n° 1), *et soit* $w = s_1 \ldots s_q$ *une décomposition réduite de* w. *Soient* $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ *les éléments de* B(C) *correspondant à* $s_1, \ldots, s_q$. *Posons :*

$$\theta_i = s_q s_{q-1} \ldots s_{i+1}(\alpha_i), \qquad i = 1, \ldots, q.$$

Les racines θ_i *sont* > 0, *deux à deux distinctes, on a* $w(\theta_i) < 0$, *et toute racine* $\alpha > 0$ *telle que* $w(\alpha) < 0$ *est égale à l'une des* θ_i.

Soit X l'ensemble des racines $\alpha > 0$ telles que $w(\alpha) < 0$. D'après (ii), on a

$$\text{Card}(X) = \text{Card}(T_{w^{-1}}) = l(w^{-1}) = l(w) = q.$$

D'autre part, si $\alpha \in X$, il est clair qu'il existe $i \in [1, q]$ tel que

$$s_{i+1} \ldots s_q(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad s_i s_{i+1} \ldots s_q(\alpha) < 0.$$

D'après le cor. 1, cela entraîne $s_{i+1} \ldots s_q(\alpha) = \alpha_i$, d'où $\alpha = \theta_i$. L'ensemble X est donc contenu dans l'ensemble des θ_i. Puisque Card (X) $= q$, ceci n'est possible que si X est égal à l'ensemble des θ_i, et si ceux-ci sont deux à deux distincts. D'où le corollaire.

COROLLAIRE 3. — *Supposons* R *réduit. Il existe dans* W *un unique élément* w_0 *de plus grande longueur. Sa longueur est égale au nombre des racines positives et* w_0 *transforme la chambre* C *en* — C. *On a* $w_0^2 = 1$ *et* $l(ww_0) = l(w_0) - l(w)$ *pour tout* $w \in W$.

Il est clair que — C est une chambre. Il existe donc un unique élément w_0 de W qui transforme C en — C. On a alors $w_0(\alpha) < 0$ pour toute racine positive α et les deux premières assertions du cor. 3 sont des conséquences immédiates du cor. 2. On a $w_0^2(C) = C$, d'où $w_0^2 = 1$. Enfin, si $w \in W$, la longueur $l(w)$ (resp. $l(ww_0)$) est égale, d'après la prop. 17 (iii), au nombre de murs séparant C et $w(C)$ (resp. $ww_0(C) = -w(C)$). Comme $w(C)$ et $-w(C)$ sont de part et d'autre de n'importe quel mur, la somme $l(w) + l(ww_0)$ est égale au nombre total de murs, c'est-à-dire à $l(w_0)$.

PROPOSITION 18. — *Soit* $x \in V$. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $x \in \overline{C}$.

(ii) $x \geqslant s_\alpha(x)$ *pour tout* $\alpha \in B(C)$ (au sens de la relation d'ordre définie par C).

(iii) $x \geqslant w(x)$ *pour tout* $w \in W$.

Comme $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$ et que $\overline{C}$ est l'ensemble des éléments $x \in V$ tels que $\langle x, \alpha^\vee \rangle \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in B(C)$, l'équivalence de (i) et (ii) est évidente. D'autre part, il est clair que (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Montrons que (i) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $x \in \overline{C}$, et soit $w \in W$. Raisonnons par récurrence sur la longueur $l(w)$ de w. Le cas $l(w) = 0$ est trivial. Si $l(w) \geqslant 1$, on peut écrire w sous la forme $w = w's_\alpha$, avec $\alpha \in B(C)$ et $l(w') = l(w) - 1$. On a alors

$$x - w(x) = x - w'(x) + w'(x - s_\alpha(x)).$$

L'hypothèse de récurrence montre que $x - w'(x)$ est positif. D'autre part, on a

$$w'(x - s_\alpha(x)) = w(s_\alpha(x) - x) = -\langle x, \alpha^\vee\rangle w(\alpha).$$

Or $s_\alpha \in T_{w^{-1}}$, et la prop. 17, (ii) montre que $w(\alpha) < 0$. D'où le résultat.

Corollaire. — *Pour que $x \in C$, il faut et il suffit que $x > w(x)$ pour tout $w \in W$ tel que $w \neq 1$.*

Proposition 19. — *Soit $(\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une suite de racines positives pour la chambre C telle que $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$ soit une racine. Il existe alors une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ telle que, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\beta_{\pi(1)} + \beta_{\pi(2)} + \cdots + \beta_{\pi(i)}$ soit une racine.*

Raisonnons par récurrence sur n, la proposition étant évidente pour $n \leqslant 2$. Posons $\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_n$. On a $\sum_{i=1}^{n} (\beta|\beta_i) = (\beta|\beta) > 0$, donc il existe un indice k tel que $(\beta|\beta_k) > 0$. Si $\beta = \beta_k$, on a $n = 1$ puisque $\beta_i > 0$ pour tout i. Sinon, $\beta - \beta_k$ est une racine (n° 3, cor. du th. 1); il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\beta - \beta_k = \sum_{i \neq k} \beta_i$.

Corollaire 1. — *Soit $\alpha \in R_+(C)$. Pour que $\alpha \notin B(C)$, il faut et il suffit que α soit somme de deux racines positives.*

Si α est somme de deux racines positives, le th. 3 montre que $\alpha \notin B(C)$. Si $\alpha \notin B(C)$, le th. 3 montre que $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$ avec $\beta_k \in B(C)$ pour tout k et $n \geqslant 2$. En permutant les β_k, on peut supposer que $\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k$ est une racine (prop. 19), donc α est somme des racines positives $\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k$ et β_n.

Corollaire 2. — *Soit φ une application de R dans un groupe commutatif Γ possédant les propriétés suivantes :*

1) $\varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha)$ pour $\alpha \in R$;

2) si $\alpha \in R$, $\beta \in R$ sont tels que $\alpha + \beta \in R$, on a $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$. Soit Q le sous-groupe de V engendré par R. Alors φ se prolonge en un homomorphisme de Q dans Γ.

Soit B une base de R. Soit ψ l'unique homomorphisme de Q dans Γ qui coïncide avec φ sur B. Il suffit de montrer que $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$ quand α est une racine positive pour B. On a $\alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_m$ avec $\beta_i \in B$ pour tout i, et $\beta_1 + \cdots + \beta_h \in R$ pour tout h (prop. 19). Montrons que $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$ par récurrence sur m. C'est évident si $m = 1$. L'hypothèse de récurrence donne

$$\psi(\beta_1 + \cdots + \beta_{m-1}) = \varphi(\beta_1 + \cdots + \beta_{m-1}),$$

et on a $\psi(\beta_m) = \varphi(\beta_m)$, d'où $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$, ce qui démontre le corollaire.

Pour toute racine $\alpha = \sum_{\beta \in B(C)} n_\beta \beta$ de R, notons $Y(\alpha)$ l'ensemble des $\beta \in B(C)$ tels que $n_\beta \neq 0$. Observons d'autre part que B(C) s'identifie à l'ensemble des sommets du *graphe* du système de Coxeter formé par W(R) et les s_{α_i} (cf. chap. IV, § 1, n° 9 et chap. V, § 3, n° 2).

COROLLAIRE 3. — *a) Soit* $\alpha \in R$. *Alors* $Y(\alpha)$ *est une partie connexe de* B(C) (chap. IV, Annexe).

b) Soit Y *une partie connexe non vide de* B(C). *Alors* $\sum_{\beta \in Y} \beta$ *appartient à* R.

Pour prouver *a*), on peut supposer α positive. Raisonnons par récurrence sur Card $(Y(\alpha))$, l'assertion étant triviale si Card $(Y(\alpha)) = 1$. D'après la prop. 19, il existe $\beta \in B(C)$ tel que $\alpha - \beta \in R$. Soit p le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $\gamma = \alpha - p\beta \in R$. Comme $\gamma - \beta \notin R$ et $\gamma + p\beta \in R$, on a $(\gamma|\beta) \neq 0$ (prop. 9); β est donc liée à au moins un élément de $Y(\gamma)$. Mais $Y(\alpha) = Y(\gamma) \cup \{\beta\}$, et $Y(\gamma)$ est connexe d'après l'hypothèse de récurrence. Donc $Y(\alpha)$ est connexe, ce qui prouve *a*).

Soit maintenant Y une partie connexe non vide de B(C) et montrons par récurrence sur Card (Y) que $\sum_{\beta \in Y} \beta$ est une racine. Le cas où Card $(Y) \leqslant 1$ est trivial. Supposons que Card $(Y) \geqslant 2$. Comme X est une forêt (chap. V, § 4, n° 8, prop. 8), Y est un *arbre* et possède un sommet terminal β (chap. IV, Annexe). L'ensemble $Y - \{\beta\}$ est connexe, et un de ses éléments est lié à β. Vu l'hypothèse de récurrence, on a $\alpha = \sum_{\gamma \in Y - \{\beta\}} \gamma \in R$, et comme $(\alpha|\beta) < 0$, on a bien $\alpha + \beta \in R$ (th. 1). C.Q.F.D.

7. Ensembles clos de racines

DÉFINITION 4. — *Soit* P *un sous-ensemble de* R.

(i) *On dit que* P *est clos si les conditions* $\alpha \in P$, $\beta \in P$, $\alpha + \beta \in R$ *impliquent* $\alpha + \beta \in P$.

(ii) *On dit que* P *est parabolique si* P *est clos et si* $P \cup (-P) = R$.

(iii) *On dit que* P *est symétrique si* $P = -P$.

Lemme 3. — *Soient* C *une chambre de* R *et* P *un sous-ensemble clos de* R *contenant* $R_+(C)$ (notation du n° 6). *Soient* $\Sigma = B(C) \cap (-P)$, *et* Q *l'ensemble des racines combinaisons linéaires à coefficients entiers* $\leqslant 0$ *des éléments de* Σ. *Alors* $P = R_+(C) \cup Q$.

Il s'agit de montrer que $P \cap (-R_+(C)) = Q$. Soit $-\alpha \in Q$. Alors α est somme de n éléments de Σ. Montrons que $-\alpha \in P$, par récurrence sur n. C'est évident si $n = 1$. Si $n > 1$, on peut écrire, d'après la prop. 19 du n° 6, $\alpha = \beta + \gamma$ avec $\gamma \in \Sigma$ et β somme de $n - 1$ éléments de Σ. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $-\beta \in P$; comme $-\gamma \in P$ et que P est clos, on a $-\alpha \in P$. Donc $Q \subset P \cap (-R_+(C))$. Réciproquement, soit $-\alpha \in P \cap (-R_+(C))$. Alors α est somme de p éléments de B(C). Montrons que $-\alpha \in Q$, par récurrence sur p. C'est évident si $p = 1$. Si $p > 1$, on peut écrire, d'après la prop. 19, $\alpha = \beta + \gamma$ avec $\gamma \in B(C)$ et β racine somme de $p - 1$ éléments de $B(C)$. Comme $-\gamma = \beta + (-\alpha)$ et que P est clos, on a $-\gamma \in P$, donc $\gamma \in \Sigma$. D'autre part, $-\beta = \gamma + (-\alpha)$ donc $-\beta \in P$ parce que P est clos. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $-\beta \in Q$, donc $-\alpha = -\beta - \gamma \in Q$. Donc $P \cap (-R_+(C)) \subset Q$.

Proposition 20. — *Soit* P *un sous-ensemble de* R. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) P *est parabolique ;*

(ii) P *est clos et il existe une chambre* C *de* R *telle que* $P \supset R_+(C)$;

(iii) *il existe une chambre* C *de* R *et une partie* Σ *de* $B(C)$ *telle que* P *soit la réunion de* $R_+(C)$ *et de l'ensemble* Q *des racines combinaisons linéaires à coefficients entiers* $\leqslant 0$ *des éléments de* Σ.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : ceci résulte du lemme 3.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : adoptons les hypothèses et les notations de (iii). Il est clair que $P \cup (-P) = R$. Soient $\alpha, \beta \in P$ tels que $\alpha + \beta \in R$, et montrons que $\alpha + \beta \in P$. C'est évident si la racine $\alpha + \beta$ est positive. Supposons $\alpha + \beta$ négative. On a donc $\alpha + \beta = \sum_{\gamma \in B(C)} n_\gamma \gamma$, avec $n_\gamma \leqslant 0$. Mais le coefficient de tout élément γ de $B(C) - \Sigma$ dans α ou β est $\geqslant 0$; on a donc $n_\gamma = 0$ si $\gamma \in B(C) - \Sigma$, d'où $\alpha + \beta \in Q \subset P$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : supposons P parabolique. Soit C une chambre telle que $\operatorname{Card}(P \cap R_+(C))$ soit le plus grand possible. Soit $\alpha \in B(C)$ et supposons que $\alpha \notin P$, donc que $-\alpha \in P$. Pour tout $\beta \in P \cap R_+(C)$, β est non proportionnel à α (car l'hypothèse $\beta = 2\alpha$ entraînerait $\alpha = 2\alpha + (-\alpha) \in P$ puisque P est clos). Donc $s_\alpha(\beta) \in R_+(C)$ (n° 6, cor. 1 de la prop. 17). Si on pose $C' = s_\alpha(C)$, on a donc $\beta = s_\alpha(s_\alpha(\beta)) \in s_\alpha(R_+(C)) = R_+(C')$. Ainsi, $P \cap R_+(C) \subset P \cap R_+(C')$. Par ailleurs, $-\alpha = s_\alpha(\alpha) \in s_\alpha(R_+(C)) = R_+(C')$, donc $-\alpha \in P \cap R_+(C')$, donc $\operatorname{Card}(P \cap R_+(C')) > \operatorname{Card}(P \cap R_+(C))$. Ceci est absurde, donc $\alpha \in P$. Donc $B(C) \subset P$, et par suite $R_+(C) \subset P$ d'après la prop. 19 et le fait que P est clos.

Corollaire 1. — *Soit* P *un sous-ensemble de* R. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe une chambre* C *telle que* $P = R_+(C)$;

(ii) P *est clos, et* $\{P, -P\}$ *est une partition de* R.

La chambre C *telle que* $P = R_+(C)$ *est alors unique.*

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : ceci résulte du th. 3 (n° 6).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : ceci résulte de l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) de la prop. 20.

Si $P = R_+(C)$, $C^\vee$ est l'ensemble des $x^* \in V^*$ tels que $\langle x^*, x\rangle > 0$ pour tout $x \in P$, d'où l'unicité de C.

Corollaire 2. — *Supposons* V *muni d'une structure d'espace vectoriel ordonné telle que, pour cette structure, toute racine de* R *soit positive ou négative. Soit* P *l'ensemble* *des racines positives pour cette structure. Alors il existe une chambre* C *de* R *et une seule telle que* $P = R_+(C)$.

En effet, P vérifie la condition (ii) du cor. 1.

Ce corollaire s'applique en particulier lorsque l'ordre considéré est total, la condition sur R étant alors automatiquement remplie. Rappelons qu'on obtient par exemple un tel ordre en choisissant une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans V et en prenant sur V l'ordre *lexicographique*, où $x = \sum_i \xi_i e_i$ est $\geqslant 0$ si tous les ξ_i sont 0, ou si $\xi_i > 0$ pour le plus petit indice i tel que $\xi_i \neq 0$.

Corollaire 3. — *Pour qu'une partie* B *de* R *soit une base de* R, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies* :

(i) *les éléments de* B *sont linéairement indépendants* ;

(ii) *toute racine de* R *est combinaison linéaire d'éléments de* B *à coefficients tous positifs ou tous négatifs*;

(iii) *toute racine de* B *est indivisible.*

On sait déjà que les conditions sont nécessaires (n° 5, th. 2, et n° 6, th. 3). Supposons les conditions (i), (ii), (iii) vérifiées. Soit P l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients $\geqslant 0$ des éléments de B. Puisque P vérifie la condition (ii) du cor. 1, il existe une chambre C telle que $P = R_+(C)$; soit $B' = B(C)$, et soient X et X′ les cônes convexes engendrés par B et B′. On a

$$B \subset P \subset X \qquad \text{et} \qquad B' \subset P \subset X',$$

ce qui montre que X et X′ sont tous deux engendrés par P, donc coïncident. Mais les demi-droites engendrées par les éléments de B (resp. de B′) sont les génératrices extrémales de X (resp. de X′); comme une telle demi-droite ne contient qu'une seule racine indivisible, on a donc $B = B'$.

Corollaire 4. — *Soient* B *une base de* R, B′ *une partie de* B, V′ *le sous-espace vectoriel de* V *engendré par* B′, *et* $R' = R \cap V'$. *Alors* B′ *est une base du système de racines* R′.

Ceci résulte aussitôt du cor. 3, et du cor. de la prop. 4.

On dit que R′ est le système de racines *engendré* par B′.

Corollaire 5. — *Soient* B *une base de* R, $A_1, A_2, \ldots, A_r$ *des parties de* B *deux à deux orthogonales, et* $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r$. *Alors toute racine* α *qui est combinaison linéaire d'éléments de* A *est déjà combinaison linéaire des éléments d'un des* A_i. *En particulier, si* R *est irréductible, il n'existe pas de partition de* B(C) *en deux ensembles orthogonaux.*

Soient $E_1, \ldots, E_r$, E les sous-espaces vectoriels de V engendrés respectivements par $A_1, \ldots, A_r$, A. Grâce au cor. 4, on peut supposer que $E = V$. Alors, d'après le th. 2 (vii) du n° 5, les E_i sont stables par W(R), donc R est réunion des $R \cap E_i$ (n° 2, prop. 5).

COROLLAIRE 6. — *Adoptons les hypothèses et les notations de la prop.* 20. *Soit* V_1 *le sous-espace vectoriel de* V *engendré par* Σ. *Alors* $P \cap (-P) = Q \cup (-Q) = V_1 \cap R$ *est un système de racines dans* V_1 *de base* Σ.

On a $P \cap (-P) = (R_+(C) \cup Q) \cap ((-R_+(C)) \cup (-Q)) = Q \cup (-Q)$. Le th. 3 prouve que $Q \cup (-Q) = V_1 \cap R$. Enfin, Σ est base du système de racines $V_1 \cap R$ d'après le cor. 4.

PROPOSITION 21. — *Soient* C (resp. C′) *une chambre de* R, Σ (resp. Σ') *une partie de* B(C) (resp. B(C′)), Q (resp. Q′) *l'ensemble des racines combinaisons linéaires à coefficients entiers négatifs des éléments de* Σ (resp. Σ'), *et* $P = Q \cup R_+(C)$ (resp. $P' = Q' \cup R_+(C')$). *S'il existe un élément du groupe de Weyl transformant* P *en* P′, *il existe un élément du groupe de Weyl transformant* C *en* C′ *et* Σ *en* Σ'.

On se ramène aussitôt au cas où $P = P'$. Soit V_1 le sous-espace vectoriel de V engendré par $P \cap (-P)$. Alors Σ et Σ' sont deux bases du système de racines $R_1 = P \cap (-P)$ dans V_1 (cor. 6 de la prop. 20). Il existe donc $g_1 \in W(R_1)$ tel que $g_1(\Sigma) = \Sigma'$. Il est clair que g_1 est induit par un élément g de W(R) qui est un produit de symétries s_σ, avec $\sigma \in \Sigma$. Soit $\gamma = \sum_{\beta \in B(C)} c_\beta \beta$ un élément de $P - R_1$. On a $c_\beta > 0$ pour au moins un $\beta \in B(C) - \Sigma$. D'autre part, si $\sigma \in \Sigma$, on a $s_\sigma(\gamma) - \gamma \in V_1$, donc $s_\sigma(\gamma)$ admet au moins une coordonnée > 0 par rapport à B(C) (n° 1, formule (5)), d'où $s_\sigma(\gamma) \in R_+(C)$ et finalement $s_\sigma(\gamma) \in P - R_1$. Il en résulte que $P - R_1$ est stable par les s_σ, $\sigma \in \Sigma$, donc par g, et l'on a $g(P) = P$. On est ainsi ramené à prouver la proposition lorsque $P = P'$ et $\Sigma = \Sigma'$. Dans ce cas, on a $Q = Q'$, donc $R_+(C) = P - Q = P - Q' = R_+(C')$, donc $C = C'$ (cor. 1 de la prop. 20).

COROLLAIRE. — *Soient* P, P′ *deux sous-ensembles paraboliques de* R *transformés l'un de l'autre par un élément du groupe de Weyl. S'il existe une chambre* C *de* R *telle que* $R_+(C) \subset P$ *et* $R_+(C) \subset P'$, *on a* $P = P'$.

Ceci résulte du lemme 3 et de la prop. 21 puisque le seul élément de W(R) transformant C en C est 1, cf. n° 5, th. 2.

PROPOSITION 22. — *Soit* P *un sous-ensemble clos de* R *tel que* $P \cap (-P) = \varnothing$. *Il existe alors une chambre* C *de* R *telle que* $P \subset R_+(C)$.

1) Compte tenu du cor. du th. 1, n° 3, les hypothèses $\alpha \in P$, $\beta \in P$, $(\alpha|\beta) < 0$ impliquent $\alpha + \beta \in P$.

2) Montrons qu'aucune somme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_q$ $(q \geqslant 1)$ d'éléments de P n'est nulle. On procède par récurrence sur q. L'assertion étant évidente pour $q = 1$, supposons $q \geqslant 2$. Si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_q = 0$, alors

$$-\alpha_1 = \alpha_2 + \cdots + \alpha_q,$$

donc $(-\alpha_1|\alpha_2 + \cdots + \alpha_q) > 0$, d'où l'existence d'un $j \in [2, q]$ tel que $(\alpha_1|\alpha_j) < 0$. D'après la partie 1) de la démonstration, on a $\alpha_1 + \alpha_j \in P$, et la relation $(\alpha_1 + \alpha_j) + \sum_{i \neq 1, j} \alpha_i = 0$ contredit l'hypothèse de récurrence.

3) Montrons qu'il existe un élément γ non nul dans V tel que $(\gamma|\alpha) \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in$ P. Dans le cas contraire, le résultat de 1) prouverait qu'on peut trouver une suite infinie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ d'éléments de P tels que

$$\beta_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_i \in \mathrm{P}$$

pour tout i; il existerait deux entiers distincts i, j tels que $\beta_i = \beta_j$, ce qui contredirait le résultat de 2).

4) Pour démontrer la proposition, il suffit (cor. 2 de la prop. 20) de montrer qu'il existe une base $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant l}$ de V telle que, pour la relation d'ordre lexicographique définie par cette base, tout élément de P soit > 0. Procédons par récurrence sur $l = \dim \mathrm{V}$, en supposant la proposition établie pour les dimensions $< l$. Soit $\gamma \in \mathrm{V}$ tel que $\gamma \neq 0$ et $(\gamma|\alpha) \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \mathrm{P}$ (cf. 3)). Soient L l'hyperplan orthogonal à γ, et V' le sous-espace de L engendré par $\mathrm{R} \cap \mathrm{L}$. Alors $\mathrm{R} \cap \mathrm{L}$ est un système de racines dans V' et $\mathrm{P} \cap \mathrm{L}$ est clos dans $\mathrm{R} \cap \mathrm{L}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(\beta_1, \ldots, \beta_{l'})$ de V' telle que les éléments de $\mathrm{P} \cap \mathrm{L}$ soient > 0 pour l'ordre lexicographique défini par cette base. Alors toute base de V dont les $l' + 1$ premiers éléments sont $\gamma, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{l'}$ et dont les éléments suivants sont dans L possède la propriété requise.

Proposition 23. — *Soient* P *un sous-ensemble de* R *et* V_1 (resp. Γ) *le sous-espace vectoriel* (resp. *le sous-groupe*) *de* V *engendré par* P. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) P *est clos et symétrique*;

(ii) P *est clos, et* P *est un système de racines dans* V_1;

(iii) $\Gamma \cap \mathrm{R} = \mathrm{P}$.

Supposons qu'il en soit ainsi. Pour tout $\alpha \in \mathrm{P}$, *soit* $\alpha_1^\vee$ *la restriction de* $\alpha^\vee$ *à* V_1. *Alors l'application* $\alpha \longmapsto \alpha_1^\vee$ *est la bijection canonique du système de racines* P *sur* $\mathrm{P}^\vee$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : évident.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : supposons P clos et symétrique. D'abord P vérifie $(\mathrm{SR_I})$ dans V_1. Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{P}$, et montrons que $s_\alpha(\beta) \in \mathrm{P}$. C'est évident si α et β sont proportionnels. Sinon, on a $s_\alpha(\beta) = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha$ et $\beta - p\alpha \in \mathrm{R}$ pour tout entier rationnel p compris entre 0 et $n(\beta, \alpha)$ (prop. 9, nº 3), donc

$$\beta - n(\beta, \alpha)\alpha \in \mathrm{P}$$

puisque P est clos et symétrique. Ainsi, $s_{\alpha, \alpha_1^\vee}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$, et P vérifie $(\mathrm{SR_{II}})$. Il est clair que P vérifie $(\mathrm{SR_{III}})$. Donc P vérifie (ii), et on a en même temps prouvé la dernière assertion de la proposition.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : supposons vérifiée la condition (ii), et prouvons que $\Gamma \cap \mathrm{R} = \mathrm{P}$. Il est clair que $\mathrm{P} \subset \Gamma \cap \mathrm{R}$. Soit $\beta \in \Gamma \cap \mathrm{R}$. Puisque $\beta \in \Gamma$ et que $\mathrm{P} = -\mathrm{P}$, on a $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathrm{P}$. Nous allons prouver que $\beta \in \mathrm{P}$.

C'est évident si $k = 1$. Raisonnons par récurrence sur k. On a

$$0 < (\beta|\beta) = \sum_{i=1}^{k} (\beta|\alpha_i),$$

donc $(\beta|\alpha_i) > 0$ pour un indice i. Si $\beta = \alpha_i$, on a $\beta \in \mathrm{P}$. Sinon, on a $\beta - \alpha_i \in \mathrm{R}$ (cor. du th. 1, n° 3), donc $\beta - \alpha_i \in \mathrm{P}$ d'après l'hypothèse de récurrence, donc $\beta \in \mathrm{P}$ puisque P est clos.

Les conditions de la prop. 23 peuvent être réalisées avec $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}$ et pourtant $\mathrm{P} \neq \mathrm{R}$. Par exemple, il peut arriver que R soit un système de type G_2 et P un système de type A_2; cf. planche X.

PROPOSITION 24. — *Soit* R′ *l'intersection de* R *avec un sous-espace vectoriel de* V, *de sorte que* R′ *est un système de racines dans le sous-espace vectoriel* V′ *qu'il engendre* (cf. cor. de la prop. 4, n° 1). *Soit* B′ *une base de* R′.

(i) *Il existe une base de* R *contenant* B′.

(ii) R′ *est l'ensemble des éléments de* R *qui sont combinaisons linéaires des éléments de* B′.

L'assertion (ii) est évidente. Prouvons (i). Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l)$ une base de V telle que $\mathrm{B}' = (\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \ldots, \varepsilon_l)$. L'ordre lexicographique sur V correspondant à cette base définit une chambre C de R. Il est clair que tout élément de B′ est minimal dans $\mathrm{R}_+(\mathrm{C})$. Donc $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B}(\mathrm{C})$.

8. Plus grande racine

PROPOSITION 25. — *Supposons* R *irréductible. Soit* C *une chambre de* R, *et soit* $\mathrm{B}(\mathrm{C}) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ *la base correspondante.*

(i) *Il existe une racine* $\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i$ *telle que, pour toute racine* $\sum_{i=1}^{l} p_i\alpha_i$, *on ait* $n_1 \geqslant p_1, n_2 \geqslant p_2, \ldots, n_l \geqslant p_l$. *En d'autres termes,* R *possède un plus grand élément* $\tilde{\alpha}$ *pour la relation d'ordre définie par* C.

(ii) *On a* $\tilde{\alpha} \in \overline{\mathrm{C}}$.

(iii) *On a* $(\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}) \geqslant (\alpha'|\alpha')$ *pour toute racine* α'.

(iv) *Pour toute racine positive* α' *non proportionnelle à* $\tilde{\alpha}$, *on a* $n(\alpha', \tilde{\alpha}) = 0$ *ou* 1.

1) Soient $\alpha = \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i$, $\beta = \sum_{i=1}^{l} p_i\alpha_i$ deux racines maximales pour l'ordre défini par C. On va prouver que $\alpha = \beta$, ce qui établira (i).

2) Si on avait $(\alpha|\alpha_i) < 0$ pour un indice i, on en déduirait que $\alpha + \alpha_i \in \mathrm{R}$ ou $\alpha = -\alpha_i$ (cor. du th. 1, n° 3), et ces deux éventualités sont absurdes d'après la maximalité de α. Donc $(\alpha|\alpha_i) \geqslant 0$ pour tout i.

3) Si $\alpha < 0$, on a $\alpha < -\alpha$, ce qui est absurde. Donc $n_i \geqslant 0$ pour tout i. Soit J l'ensemble des i tels que $n_i > 0$, et J′ le complémentaire de J dans $\{1, 2, \ldots, l\}$. On a $\mathrm{J} \neq \varnothing$. Si J′ était non vide, il existerait un $i \in \mathrm{J}$ et un

$i' \in J'$ tels que $(\alpha_i|\alpha_{i'}) < 0$ (cor. 5 de la prop. 20, nº 7); on aurait

$$(\alpha|\alpha_{i'}) = \sum_{i \in J} n_i(\alpha_i|\alpha_{i'}) < 0$$

puisque $(\alpha_j|\alpha_k) \leqslant 0$ quels que soient j et k distincts, et ceci contredirait 2). Donc $J' = \varnothing$ et $n_i > 0$ pour tout i.

4) On a $(\beta|\alpha_i) \geqslant 0$ pour tout i d'après 2). On ne peut avoir $(\beta|\alpha_i) = 0$ pour tout i puisque $\beta \neq 0$. On conclut alors de 3) que

$$(\beta|\alpha) = \sum_i n_i(\beta|\alpha_i) > 0.$$

Si $\gamma = \alpha - \beta \in R$, on a $\alpha > \beta$ ou $\beta > \alpha$ (th. 3, nº 6), ce qui contredit la maximalité de α et β. Donc $\alpha = \beta$ (cor. du th. 1, nº 3).

5) D'après 2), on a $\tilde{\alpha} \in \overline{C}$. Soit $\alpha' \in R$, et prouvons que $(\alpha'|\alpha') \leqslant (\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha})$. Puisque $\overline{C}$ est un domaine fondamental pour $W(R)$, on peut supposer que $\alpha' \in \overline{C}$. On a $\tilde{\alpha} - \alpha' \geqslant 0$, donc $(\tilde{\alpha} - \alpha'|x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \overline{C}$. En particulier $(\tilde{\alpha} - \alpha'|\tilde{\alpha}) \geqslant 0$ et $(\tilde{\alpha} - \alpha'|\alpha') \geqslant 0$, d'où $(\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}) \geqslant (\alpha'|\tilde{\alpha}) \geqslant (\alpha'|\alpha')$. Donc $n(\alpha', \tilde{\alpha})$ vaut 0 ou 1 ou -1 (prop. 8, nº 3) si α' est non proportionnel à $\tilde{\alpha}$. Si $\alpha' \geqslant 0$, on a $(\tilde{\alpha}|\alpha') \geqslant 0$ d'après 2), donc $n(\alpha', \tilde{\alpha}) \geqslant 0$, donc $n(\alpha', \tilde{\alpha})$ vaut 0 ou 1.

C.Q.F.D.

Remarque. — On dit que la racine

$$\tilde{\alpha} = \sum_i n_i \alpha_i$$

de (i) est *la plus grande racine* de R (vis-à-vis de C). On notera que, d'après (i), on a $n_i \geqslant 1$ pour tout i.

9. Poids, poids radiciels

Soit $l = \dim V$. On note $Q(R)$ le sous-groupe de V engendré par R; les éléments de $Q(R)$ s'appellent les *poids radiciels* de R. D'après le th. 3 du nº 6, $Q(R)$ est un sous-groupe discret de rang l de V, et toute base de R est une base de $Q(R)$.

De même, le groupe $Q(R^\vee)$ est un sous-groupe discret de rang l de V^*.

PROPOSITION 26. — *L'ensemble des $x \in V$ tels que $\langle x, y^* \rangle \in \mathbf{Z}$ pour tout $y^* \in Q(R^\vee)$ (ou, ce qui revient au même, pour tout $y^* \in R^\vee$) est un sous-groupe discret G de V contenant $Q(R)$. Si B' est une base de $R^\vee$, la base duale de B' dans V est une base de G.*

Soit $x \in V$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $\langle x, y^* \rangle \in \mathbf{Z}$ pour tout $y^* \in Q(R^\vee)$;
(ii) $\langle x, y^* \rangle \in \mathbf{Z}$ pour tout $y^* \in B'$;
(iii) les coordonnées de x par rapport à la base duale de B' sont dans $\mathbf{Z}$.

On en conclut que la base duale de B′ est une base de G. D'autre part, (SR_{III}) prouve que $R \subset G$, d'où $Q(R) \subset G$.
Le groupe G de la prop. 26 se note P(R), et ses éléments s'appellent les *poids* de R. On peut considérer aussi le groupe $P(R^\vee)$ des poids de $R^\vee$.

D'après *Alg.*, chap. VII, 2e éd., § 4, n° 8, les groupes

$$P(R)/Q(R), \qquad P(R^\vee)/Q(R^\vee)$$

sont des groupes finis en dualité sur $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, donc isomorphes. L'ordre commun de ces deux groupes s'appelle l'*indice de connexion* de R (ou de $R^\vee$).

Si R est somme directe de systèmes de racines R_i, le groupe Q(R) (resp. P(R)) s'identifie canoniquement à la somme directe des $Q(R_i)$ (resp. $P(R_i)$).

Proposition 27. — *Soient* R_1 *une partie de* R, Q_1 *le sous-groupe de* Q(R) *engendré par* R_1, *et* W_1 *le sous-groupe de* W(R) *engendré par les* s_α ($\alpha \in R_1$). *Si* $p \in P(R)$ *et* $w \in W_1$, *on a* $p - w(p) \in Q_1$.

Si $w = s_\alpha$ avec $\alpha \in R_1$, on a

$$p - w(p) = \langle p, \alpha^\vee \rangle \alpha \in \mathbf{Z}\alpha \subset Q_1.$$

Si $w = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_r}$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in R_1$, on a donc encore $p - w(p) \in Q_1$ comme on le voit par récurrence sur r.
Le groupe A(R) laisse invariants P(R) et Q(R), donc opère dans le groupe quotient P(R)/Q(R). D'après la prop. 27, le groupe W(R) opère trivialement dans P(R)/Q(R). Par passage au quotient, on voit que *le groupe quotient* A(R)/W(R) (cf. prop. 16, n° 5) *opère canoniquement dans* P(R)/Q(R).

10. Poids fondamentaux, poids dominants

Supposons R *réduit*. Soit C une chambre de R, et soit B la base de R correspondante. Comme R est réduit, $B^\vee = \{\alpha^\vee\}_{\alpha \in B}$ est une base de $R^\vee$. La *base duale* $(\varpi_\alpha)_{\alpha \in B}$ de $B^\vee$ est donc une base du groupe des poids; ses éléments s'appellent les *poids fondamentaux* (relativement à B, ou à C); lorsque les éléments de B sont numérotés $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, on note $(\varpi_1, \dots, \varpi_l)$ les poids fondamentaux correspondants.

Soit $x \in V$. Pour que $x \in C$, il faut et il suffit que $\langle x, \alpha^\vee \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in B$. Il s'ensuit que C est l'ensemble des combinaisons linéaires des ϖ_α à coefficients > 0, et $\overline{C}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des ϖ_α à coefficients $\geqslant 0$.

Les éléments $n(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ de la matrice de Cartan sont, pour α fixé, les coordonnées de α par rapport à la base $(\varpi_\beta)_{\beta \in B}$:

$$\alpha = \sum_{\beta \in B} n(\alpha, \beta) \varpi_\beta. \tag{14}$$

La matrice de Cartan est donc la transposée de la matrice de l'injection canonique

$$Q(R) \to P(R)$$

par rapport aux bases B et $(\varpi_\alpha)_{\alpha\in B}$ des $\mathbf{Z}$-modules $Q(R)$ et $P(R)$.

Un poids ϖ est dit *dominant* s'il appartient à $\overline{C}$, autrement dit si ses coordonnées par rapport à $(\varpi_\alpha)_{\alpha\in B}$ sont des entiers $\geqslant 0$, ou encore si $g(\varpi) \leqslant \varpi$ pour tout $g \in W(R)$ (n° 6, prop. 18). Puisque $\overline{C}$ est un domaine fondamental pour $W(R)$ (th. 2), il existe, pour tout poids ϖ, un poids dominant ϖ' et un seul tel que ϖ' soit transformé de ϖ par $W(R)$.

On a

$$\langle \varpi_\alpha, \beta^\vee \rangle = (\varpi_\alpha | \frac{2\beta}{(\beta|\beta)}) = \delta_{\alpha\beta}$$

pour $\alpha, \beta \in B$ ($\delta_{\alpha\beta}$ désignant le symbole de Kronecker), d'où

$$(15) \qquad s_\beta(\varpi_\alpha) = \varpi_\alpha - \delta_{\alpha\beta}\beta \qquad \text{et} \qquad (\varpi_\alpha|\beta) = \frac{1}{2}(\beta|\beta)\delta_{\alpha\beta}.$$

Autrement dit, ϖ_α *est orthogonal à* β *pour* $\beta \neq \alpha$, *et sa projection orthogonale sur* $\mathbf{R}\alpha$ *est* $\frac{1}{2}\alpha$. Puisque $\varpi_\alpha \in \overline{C}$, on a $(\varpi_\alpha|\varpi_\beta) \geqslant 0$ pour $\alpha, \beta \in B$, i.e. l'angle $\widehat{(\varpi_\alpha, \varpi_\beta)}$ est aigu ou droit. Les poids dominants sont les $\varpi \in V$ tels que $2(\varpi|\alpha)/(\alpha|\alpha)$ soit un entier $\geqslant 0$ pour tout $\alpha \in B$.

Proposition 28. — *Soient* B *une base de* R, B' *une partie de* B, V' *le sous-espace vectoriel de* V *engendré par* B', $R' = R \cap V'$ (*qui est un système de racines dans* V'), $R'^\vee$ *le système de racines inverse* (*qui s'identifie à l'image canonique de* R' *dans* $R^\vee$), V_1 *l'orthogonal de* $R'^\vee$ *dans* V, *et* p *le projecteur de* V *sur* V' *parallèlement à* V_1. *Alors,* $Q(R') = Q(R) \cap V'$, $P(R') = p(P(R))$. *L'ensemble des poids dominants de* R' *est l'image par* p *de l'ensemble des poids dominants de* R.

En effet, $Q(R)$ est le sous-groupe de V de base B, $Q(R')$ est le sous-groupe de V de base B' (n° 7, cor. 4 de la prop. 20) d'où aussitôt $Q(R') = Q(R) \cap V'$. Si $\varpi \in P(R)$ et $\alpha \in R'$, on a $\langle p(\varpi), \alpha^\vee \rangle = \langle \varpi, \alpha^\vee \rangle \in \mathbf{Z}$, donc $p(\varpi) \in P(R')$, donc $p(P(R)) \subset P(R')$. Si $\varpi' \in P(R')$, ϖ' se prolonge en une forme linéaire ϖ sur V^* nulle sur $(B - B')^\vee$; on a $\langle \varpi, \alpha^\vee \rangle \in \mathbf{Z}$ pour tout $\alpha \in B$, donc $\varpi \in P(R)$, et $\varpi' = p(\varpi)$; donc $P(R') \subset p(P(R))$. Ainsi $P(R') = p(P(R))$, et l'assertion relative aux poids dominants se démontre de la même façon.

Proposition 29. — *Soit* ρ *la demi-somme des racines* > 0.

(i) *On a* $\rho = \sum_{\alpha\in B} \varpi_\alpha$; *c'est un élément de* C.

(ii) $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ *pour tout* $\alpha \in B$.

(iii) *On a* $(2\rho|\alpha) = (\alpha|\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in B$.

Comme R est réduit, on a $s_\alpha(\mathrm{R}_+(\mathrm{C}) - \{\alpha\}) = \mathrm{R}_+(\mathrm{C}) - \{\alpha\}$ et $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ pour $\alpha \in \mathrm{B}$ (n° 6, cor. 1 de la prop. 17), d'où $s_\alpha(2\rho) = 2\rho - 2\alpha$. Comme $s_\alpha(\rho) = \rho - \langle \rho, \alpha^\vee \rangle \alpha$, on voit que

$$\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1 = \langle \sum_{\beta \in \mathrm{B}} \varpi_\beta, \alpha^\vee \rangle.$$

D'où $\rho = \sum\limits_\beta \varpi_\beta$, et par suite $\rho \in \mathrm{C}$. Enfin (iii) équivaut à $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$.

Corollaire. — *Soit σ la demi-somme des éléments >0 de $\mathrm{R}^\vee$ (pour $\mathrm{B}^\vee$). Pour tout $\alpha \in \mathrm{V}$, la somme des coordonnées de α par rapport à la base* B *est $\langle \alpha, \sigma \rangle$. Si $\alpha \in \mathrm{R}$, cette somme est aussi égale à* $\dfrac{1}{2} \sum\limits_{\beta \in \mathrm{R}_+(\mathrm{C})} n(\alpha, \beta)$.

Échangeant les rôles de R et $\mathrm{R}^\vee$ dans ce qui précède, on a $\langle \alpha, \sigma \rangle = 1$ pour tout $\alpha \in \mathrm{B}$, d'où le corollaire.

11. Transformation de Coxeter

Soit C une chambre de R, soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ la base de R correspondante, et soit $c = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_l}$. L'élément c de W s'appelle la *transformation de Coxeter* de W définie par C et la bijection $i \longmapsto \alpha_i$ (chap. V, § 6, n° 1). Son ordre h est appelé le *nombre de Coxeter* de W (ou de R).

Proposition 30. — *Supposons* R *irréductible. Soit m un entier compris entre* 1 *et* $h-1$, *et étranger à h. Alors* $\exp(\dfrac{2i\pi m}{h})$ *est une valeur propre de c de multiplicité* 1.

(En particulier, m est un *exposant* de W, cf. chap. V, § 6, n° 2).

Démontrons d'abord un lemme :

Lemme 3. — *Pour tout $w \in \mathrm{W}$, le polynôme caractéristique de w est à coefficients entiers.*

On sait (n° 6, th. 3) que le sous-groupe Q(R) de V engendré par R a pour base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Comme w laisse stable Q(R), sa matrice par rapport à $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ est à coefficients entiers; il en est donc de même de son polynôme caractéristique.

Soit P le polynôme caractéristique de c. Le lemme ci-dessus montre que les coefficients de P sont entiers. D'après le chap. V, § 6, n° 2, cor. 2 de la prop. 3, la racine primitive h-ème de l'unité $z = \exp(\dfrac{2i\pi}{h})$ est une racine simple de P. Tout *conjugué* de z sur **Q** est donc aussi racine simple de P. Mais on sait (*) que toutes les racines primitives h-èmes de l'unité sont conjuguées sur **Q**. Elles sont donc toutes racines simples de P, ce qui démontre la proposition.

Proposition 31. — *Supposons* R *irréductible et réduit, et soit $\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l$ la plus grande racine de* R (cf. n° 8). *On a alors $n_1 + \cdots + n_l = h - 1$.*

(*) Ce résultat figurera dans un chapitre d'*Alg. comm.* en préparation. En attendant, le lecteur pourra se reporter à D. Hilbert, *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, § 97 (*Gesamm. Abh.*, I, p. 63-363).

Soit R_+ l'ensemble des racines positives relativement à C. On a (nº 10, cor. de la prop. 29) :

$$n_1 + \cdots + n_l = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} n(\beta, \alpha)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+,\, \alpha \neq \beta} n(\beta, \alpha) = 1 + \sum_{\alpha \in R_+,\, \alpha \neq \beta} \frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)}.$$

D'après le nº 8, prop. 25 (iv), on a, pour $\alpha \in R_+$ et $\alpha \neq \beta$, $n(\alpha, \beta) = 0$ ou 1, donc $n(\alpha, \beta)^2 = n(\alpha, \beta)$, c'est-à-dire $\dfrac{4(\alpha|\beta)^2}{(\beta|\beta)^2} = \dfrac{2(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)}$. D'où :

$$n_1 + \cdots + n_l + 1 = 2 + 2 \sum_{\alpha \in R_+,\, \alpha \neq \beta} \frac{(\alpha|\beta)^2}{(\beta|\beta)(\alpha|\alpha)}$$
$$= 2 \sum_{\alpha \in R^+} \frac{(\alpha|\beta)^2}{(\beta|\beta)(\alpha|\alpha)} = (\beta|\beta)^{-1} \sum_{\alpha \in R} \left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|}\Big|\beta\right)^2.$$

D'après le chap. V, § 6, nº 2, cor. du th. 1, on a :

$$\sum_{\alpha \in R} \left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|}\Big|\beta\right)^2 = h(\beta|\beta)$$

d'où $n_1 + \cdots + n_l + 1 = h$.

PROPOSITION 32. — *Supposons que* R *soit irréductible, et que toutes les racines aient même longueur. Soit* $\alpha \in R$. *Le nombre d'éléments de* R *non orthogonaux à* α *est* $4h - 6$.

Soit R' l'ensemble des racines non proportionnelles et non orthogonales à α. D'après le chap. V, § 6, nº 2, cor. du th. 1, on a

$$(\alpha|\alpha)^2 + (\alpha|-\alpha)^2 + \sum_{\beta \in R'} (\alpha|\beta)^2 = h(\alpha|\alpha)^2,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{\beta \in R'} (\alpha|\beta)^2 = (h - 2)(\alpha|\alpha)^2.$$

Si $\beta \in R'$, on a $(\alpha|\beta) = \pm \frac{1}{2} (\alpha|\alpha)$ d'après la liste du nº 3. Donc

$$\frac{1}{4} \operatorname{Card} R' = h - 2, \qquad \operatorname{Card} R' = 4h - 8,$$

et le nombre de racines non orthogonales à α est $\operatorname{Card} R' + 2 = 4h - 6$.

PROPOSITION 33. — *Supposons* R *irréductible et réduit. Posons* $s_{\alpha_i} = s_i$, *et soit* Γ *le sous-groupe de* W *engendré par* $c = s_1 \ldots s_l$.

(i) *Soit* $\theta_i = s_l s_{l-1} \ldots s_{i+1}(\alpha_i)$ $(i = 1, \ldots, l)$. *On a* $\theta_i > 0$, $c(\theta_i) < 0$.

(ii) *Si* α *est une racine* > 0 *telle que* $c(\alpha) < 0$, α *est égale à l'une des* θ_i.

(iii) *La famille* $(\theta_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ *est une base de* $\mathbf{Q}(R)$.

(iv) *Soit* Ω_i *l'orbite de* θ_i *pour* Γ. *Les ensembles* Ω_i *sont deux à deux disjoints, constituent toutes les orbites de* Γ *dans* R, *et ont chacun* h *éléments.*

Observons d'abord que $(s_1, \ldots, s_l)$ est une *décomposition réduite* de c (chap. IV, § 1, n° 1) par rapport à l'ensemble S des s_i. En effet, sinon, il existerait une partie $X = S - \{j\}$ à $l-1$ éléments de S telle que $c \in W_X$; on aurait alors $s_j \in W_X$, ce qui contredirait le cor. 2 de la prop. 7 du chap. IV, § 1, n° 8.

En appliquant à $c = s_1 \ldots s_l$ le cor. 2 de la prop. 17 du n° 6, on obtient les assertions (i) et (ii).

Soit Q_i le sous-groupe de $Q(R)$ engendré par les α_j, $j > i$. On vérifie immédiatement que Q_i est stable par les s_j, $j > i$, et que $s_j(\alpha_i) \equiv \alpha_i \bmod. Q_i$ pour $j > i$. On a donc :

$$\theta_i = s_l \ldots s_{i+1}(\alpha_i) \equiv \alpha_i \bmod. Q_i.$$

En d'autres termes, il existe des entiers c_{ij} tels que :

$$\theta_i = \alpha_i + \sum_{j>i} c_{ij}\alpha_j.$$

D'où aussitôt (iii).

Enfin, soit α une racine. L'élément $\sum_{k=0}^{h-1} c^k(\alpha)$ est invariant par c, donc nul (chap. V, § 6, n° 2). Les $c^k(\alpha)$ ne peuvent donc pas être toutes de même signe, et il existe un k tel que $c^k(\alpha) > 0$ et $c^{k+1}(\alpha) < 0$. D'après (ii), $c^k(\alpha)$ est l'un des θ_i. Donc toute orbite de Γ dans R est l'une des Ω_i. Prolongeons alors $(x|y)$ en une forme hermitienne sur $V \otimes \mathbf{C}$. D'après la *Remarque* du chap. V, § 6, n° 2, il existe un élément $z \in V \otimes \mathbf{C}$ tel que $c(z) = \exp(\frac{2i\pi}{h})\, z$ et que $(\gamma|z) \neq 0$ pour tout $\gamma \in R$. Si $c^p(\alpha) = \alpha$, on a

$$(z|\alpha) = (z|c^p(\alpha)) = (c^{-p}(z)|\alpha) = \exp(\frac{-2i\pi p}{h})(z|\alpha),$$

d'où $\exp(\frac{-2i\pi p}{h}) = 1$, et $p \equiv 0 \bmod. h$. Cela prouve que l'orbite de α possède h éléments. D'après le th. 1 (ii) du chap. V, § 6, n° 2, le nombre total d'orbites de Γ dans R est donc $\frac{hl}{h} = l$. Il en résulte que les Ω_i sont deux à deux disjointes, ce qui achève de prouver (iv).

12. Forme bilinéaire canonique

On a vu (n° 1, prop. 3) que la forme bilinéaire symétrique

$$(x, y) \longmapsto B_R(x, y) = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha^\vee, x \rangle \langle \alpha^\vee, y \rangle$$

sur V est non dégénérée et invariante par A(R). Échangeant les rôles de R et $R^\vee$, on voit que la forme bilinéaire symétrique $(x^*, y^*) \longmapsto B_{R^\vee}(x^*, y^*) = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, x^* \rangle \langle \alpha, y^* \rangle$ sur V^* est non dégénérée et invariante par A(R).

La forme inverse de $B_{R^\vee}$ (resp. B_R) sur V (resp. V*) sera appelée la *forme bilinéaire canonique* sur V (resp. V*) et notée Φ_R (resp. $\Phi_{R^\vee}$). Elle est non dégénérée et invariante par A(R). Soit σ l'isomorphisme de V sur V* défini par $B_{R^\vee}$. On a, pour $x \in V$ et $y \in V$:

$$\Phi_R(x, y) = B_{R^\vee}(\sigma(x), \sigma(y)) = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, \sigma(x) \rangle \langle \alpha, \sigma(y) \rangle.$$

Mais $\langle \alpha, \sigma(x) \rangle = B_{R^\vee}(\sigma(\alpha), \sigma(x)) = \Phi_R(\alpha, x)$. D'où

$$\Phi_R(x, y) = \sum_{\alpha \in R} \Phi_R(\alpha, x)\Phi_R(\alpha, y). \tag{16}$$

Compte tenu de la prop. 7 du n° 2, Φ_R est la seule forme bilinéaire symétrique invariante par W(R) et non nulle qui vérifie l'identité (16).

Pour $\beta \in R$, (16) donne

$$\Phi_R(\beta, \beta) = \sum_{\alpha \in R} \Phi_R(\alpha, \beta)^2 = \frac{1}{4} \Phi_R(\beta, \beta)^2 \sum_{\alpha \in R} n(\alpha, \beta)^2$$

d'où

$$4\Phi_R(\beta, \beta)^{-1} = \sum_{\alpha \in R} n(\alpha, \beta)^2. \tag{17}$$

Par ailleurs, d'après le lemme 2 du n° 1, on a, pour $x, y \in V$:

$$\begin{aligned} B_R(x, y) &= \sum_{\alpha \in R} \Phi_R\left(\frac{2\alpha}{\Phi_R(\alpha, \alpha)}, x\right)\Phi_R\left(\frac{2\alpha}{\Phi_R(\alpha, \alpha)}, y\right) \\ &= 4 \sum_{\alpha \in R} \Phi_R(\alpha, x)\Phi_R(\alpha, y)\Phi_R(\alpha, \alpha)^{-2}. \end{aligned}$$

Si R est *irréductible*, il existe donc une constante $\gamma(R) > 0$ telle que

$$\sum_{\alpha \in R} \Phi_R(\alpha, x)\Phi_R(\alpha, y)\Phi_R(\alpha, \alpha)^{-2} = \gamma(R)\Phi_R(x, y). \tag{18}$$

Par définition de $\gamma(R)$, on a $B_R(x, y) = 4\gamma(R)\Phi_R(x, y)$, donc

$$\Phi_{R^\vee}(x^*, y^*) = (4\gamma(R))^{-1}B_{R^\vee}(x^*, y^*)$$

pour $x^*, y^* \in V^*$. Ceci prouve d'abord que $\gamma(R) = \gamma(R^\vee)$. D'autre part, pour $\beta \in R$,

$$\begin{aligned} \Phi_{R^\vee}(\beta^\vee, \beta^\vee) &= (4\gamma(R))^{-1} \sum_{\alpha \in R} \langle \beta^\vee, \alpha \rangle^2 \\ &= \gamma(R)^{-1} \sum_{\alpha \in R} \frac{\Phi_R(\alpha, \beta)^2}{\Phi_R(\beta, \beta)^2} \end{aligned}$$

soit, d'après (16)

$$\Phi_{R^\vee}(\beta^\vee, \beta^\vee) = \gamma(R)^{-1}\Phi_R(\beta, \beta)^{-2}\Phi_R(\beta, \beta)$$

ou finalement

$$\Phi_R(\beta, \beta)\Phi_{R^\vee}(\beta^\vee, \beta^\vee) = \gamma(R)^{-1}. \tag{19}$$

Si en outre toutes les racines de R ont la même longueur λ pour Φ_R, (16) et (18) montrent que

$$\gamma(R) = \lambda^{-4}. \tag{20}$$

De plus, si h est le nombre de Coxeter de W, le cor. du th. 1 du chap. V, § 6, n° 2 montre que :

$$h\Phi_R(x, x) = \sum_{\alpha \in R} \Phi_R(x, \frac{\alpha}{\lambda})^2 \quad \text{pour tout } x \in V.$$

En comparant avec (16), on en déduit :

$$\lambda = h^{-1/2} \qquad \text{et} \qquad \gamma(R) = h^2. \tag{21}$$

Enfin, la formule (19) montre que les racines de $R^\vee$ ont la longueur λ pour $\Phi_{R^\vee}$.

§ 2. Groupe de Weyl affine

Dans ce paragraphe (n° 5 excepté), on désigne par R un système de racines réduit dans un espace vectoriel réel V. On désigne par W le groupe de Weyl de R; on l'identifie à un groupe d'automorphismes du dual V* de V (§ 1, n° 1), et l'on munit V* d'un produit scalaire invariant par W. Soit E l'espace affine sous-jacent à V*; pour $v \in V^*$, on désigne par $t(v)$ la translation de E de vecteur v. Enfin, on désigne par P (resp. Q) le groupe des translations $t(v)$ dont le vecteur v appartient au groupe des poids $P(R^\vee)$ (resp. au groupe des poids radiciels $Q(R^\vee)$) du système de racines $R^\vee$ inverse de R.

1. Groupe de Weyl affine.

Pour $\alpha \in R$ et $k \in \mathbf{Z}$, soit $L_{\alpha, k}$ l'hyperplan de E défini par:

$$L_{\alpha, k} = \{x \in E \mid \langle \alpha, x \rangle = k\}$$

et soit $s_{\alpha, k}$ la réflexion orthogonale par rapport à $L_{\alpha, k}$. On a:

$$s_{\alpha, k}(x) = x - (\langle \alpha, x \rangle - k)\alpha^\vee = s_{\alpha, 0}(x) + k\alpha^\vee$$

pour tout $x \in E$. Autrement dit, on a :

$$s_{\alpha, k} = t(k\alpha^\vee) \circ s_\alpha, \tag{1}$$

où s_α est la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $L_\alpha = L_{\alpha,0}$, c'est-à-dire la réflexion associée à la racine α.

La formule (1) montre que $s_{\alpha,k}$ ne dépend pas du produit scalaire choisi.

Définition 1. — *On appelle groupe de Weyl affine du système de racines* R *et on note* $W_a(R)$ (*ou simplement* W_a) *le groupe de transformations affines de* E *engendré par les réflexions* $s_{\alpha, k}$ *pour* $\alpha \in R$ *et* $k \in \mathbf{Z}$.

Proposition 1. — *Le groupe* W_a *est produit semi-direct de* W *par* Q.

Comme W est engendré par les réflexions s_α, il est contenu dans W_a. D'autre part, on a $t(\alpha^\vee) = s_{\alpha,1} \circ s_\alpha$ si $\alpha \in R$, ce qui montre que $Q \subset W_a$.

Comme W laisse stable $Q(R^\vee)$ (§ 1, nº 9), le groupe de transformations affines G engendré par W et Q est le produit semi-direct de W par Q. On a $G \subset W_a$ d'après ce qui précède et $s_{\alpha,k} \in G$ quels que soient $\alpha \in R$ et $k \in \mathbf{Z}$ d'après (1). On en conclut que $W_a = G$.

PROPOSITION 2. — *Le groupe* W_a, *muni de la topologie discrète, opère proprement sur* E *et permute entre eux les hyperplans* $L_{\alpha,k}$ (*pour* $\alpha \in R$ *et* $k \in \mathbf{Z}$).

Comme $Q(R^\vee)$ est un sous-groupe discret de V^*, le groupe Q opère proprement sur E. Il en est donc de même de $W_a = W.Q$, puisque W est fini. De plus, on a, pour $\alpha, \beta \in R$ et $k \in \mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned} s_\beta(L_{\alpha,k}) &= L_{\gamma,k} \qquad \text{avec} \qquad \gamma = s_\beta(\alpha) \in R \\ t(\beta^\vee)(L_{\alpha,k}) &= L_{\alpha,k+n(\alpha,\beta)}, \end{aligned}$$

où $n(\alpha, \beta) = \langle \beta^\vee, \alpha \rangle$ est un entier, d'où la deuxième assertion.

On peut donc appliquer à W_a opérant sur E les résultats du chapitre V, § 3. Pour éviter toute confusion avec les chambres du groupe de Weyl W dans V^*, nous appellerons *alcôves* les chambres déterminées par le système des hyperplans $L_{\alpha,k}$ (pour $\alpha \in R$ et $k \in \mathbf{Z}$) dans E. *Le groupe* W_a *opère donc de façon simplement transitive sur l'ensemble des alcôves et l'adhérence d'une alcôve est un domaine fondamental pour* W_a *opérant sur* E (chap. V, § 3, nº 2, th. 1 et nº 3, th. 2). Il est clair que le groupe de Weyl W s'identifie à l'image canonique $U(W_a)$ de W_a dans le groupe orthogonal de V^* (cf. chap. V, § 3, nº 6). Il en résulte que W_a est *essentiel* (chap. V, § 3, nº 7) et que W_a est *irréductible* si et seulement si le système de racines R l'est (§ 1, nº 2, cor. de la prop. 5). Si R est irréductible, chaque alcôve est un simplexe ouvert (chap. V, § 3, nº 9, prop. 8). Dans le cas général, la décomposition canonique de l'espace affine E en produit (chap. V, § 3, nº 8) correspond à la décomposition de R en composants irréductibles. En particulier, les alcôves sont des produits de simplexes ouverts.

Notons encore que le cor. du th. 1 du chap. V, § 3, nº 2 montre que les $s_{\alpha,k}$ sont les seules réflexions appartenant à W_a.

2. Poids et points spéciaux

PROPOSITION 3. — *Les points spéciaux* (chap. V, § 3, nº 10, déf. 1) *de* W_a *sont les poids de* $R^\vee$.

Soit $x_0 \in E$ et soit $\alpha \in R$. L'hyperplan L parallèle à $\operatorname{Ker} \alpha$ et passant par x_0 a pour équation $\langle \alpha, x \rangle = \langle \alpha, x_0 \rangle$. Pour qu'il soit égal à $L_{\beta,k}$, il faut d'une part que α et β soient proportionnelles, ou encore, puisque R est réduit, que $\beta = \pm\, \alpha$, et d'autre part que $\langle \alpha, x_0 \rangle$ soit entier. On en déduit aussitôt que x_0 est un point spécial de W_a si et seulement si $\langle \alpha, x_0 \rangle \in \mathbf{Z}$ pour tout $\alpha \in R$, c'est-à-dire si et seulement si $x_0 \in P(R^\vee)$ (§ 1, nº 9).

COROLLAIRE. — (i) *Si* $\varpi \in P(R^\vee)$, *il existe une alcôve* C *telle que* ϖ *soit point extrémal de* $\overline{C}$.

(ii) *Si* C *est une alcôve,* $\overline{\mathrm{C}} \cap \mathrm{Q}(\mathrm{R}^\vee)$ *se réduit à un point et ce point est point extrémal de* $\overline{\mathrm{C}}$.

Cela résulte de la prop. 3, compte tenu du cor. de la prop. 11 du chap. V, § 3, n° 10 et de la prop. 12 du chap. V, § 3, n° 10.

PROPOSITION 4. — *Soit* C′ *une chambre de* $\mathrm{R}^\vee$.

(i) *Il existe une alcôve* C *et une seule contenue dans* C′ *et telle que* $0 \in \overline{\mathrm{C}}$.

(ii) *La réunion des* $w(\overline{\mathrm{C}})$ *pour* $w \in \mathrm{W}$ *est un voisinage de* 0 *dans* E.

(iii) *Tout mur de* C′ *est un mur de* C.

Cela résulte de la prop. 11 du chap. V, § 3, n° 10.

Supposons maintenant R *irréductible.* Soit $(\alpha_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une base de R (§ 1, n° 5, déf. 3), et soit $(\varpi_i)_{i \in \mathrm{I}}$ la base duale. Les ϖ_i sont les poids fondamentaux de $\mathrm{R}^\vee$ pour la chambre C′ de $\mathrm{R}^\vee$ correspondant à la base (α_i). Soit

$$\tilde{\alpha} = \sum_{i \in \mathrm{I}} n_i \alpha_i$$

la plus grande racine de R (§ 1, n° 8), et soit J l'ensemble des $i \in \mathrm{I}$ tels que $n_i = 1$.

PROPOSITION 5. — *Soit* C *l'alcôve contenue dans* C′ *à laquelle* 0 *est adhérent* (prop. 4).

(i) C *est l'ensemble des* $x \in \mathrm{E}$ *tels que* $\langle \alpha_i, x \rangle > 0$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$ *et que* $\langle \tilde{\alpha}, x \rangle < 1$.

(ii) *L'ensemble* $\overline{\mathrm{C}} \cap \mathrm{P}(\mathrm{R}^\vee)$ *se compose de* 0 *et des* ϖ_i *pour* $i \in \mathrm{J}$.

Soit D l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tels que $\langle \tilde{\alpha}, x \rangle < 1$ et posons $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}' \cap \mathrm{D}$. Comme $0 \in \overline{\mathrm{C}}$, on a $\mathrm{C} \subset \mathrm{D}$, d'où $\mathrm{C} \subset \mathrm{C}_1$. Nous allons montrer que, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$ et tout $k \in \mathbf{Z}$, les ensembles C et C_1 sont du même côté de l'hyperplan $\mathrm{L}_{\alpha, k}$. Ceci prouvera que $\mathrm{C}_1 \subset \mathrm{C}$ et établira l'assertion (i). Si $k = 0$, la chambre C′ est toute entière d'un même côté de $\mathrm{L}_{\alpha, 0}$, ce qui établit notre assertion dans ce cas. Si $k \neq 0$, on peut, quitte à changer α en $-\alpha$, supposer que $k > 0$. On a alors $\langle \alpha, x \rangle < k$ sur C, puisque $0 \in \overline{\mathrm{C}}$. D'autre part, $\tilde{\alpha} - \alpha$ est positive sur C′ (§ 1, n° 8, prop. 25). Pour $y \in \mathrm{C}_1$, on a donc $\langle \alpha, y \rangle \leqslant \langle \tilde{\alpha}, y \rangle < 1 \leqslant k$. Par suite, C et C_1 sont bien du même côté de $\mathrm{L}_{\alpha, k}$.

Soit maintenant $\varpi \in \mathrm{P}(\mathrm{R}^\vee)$. On a $\varpi = \sum_i p_i \varpi_i$, avec $p_i \in \mathbf{Z}$ (§ 1, n° 10). Pour que $\varpi \in \overline{\mathrm{C}'}$, il faut et il suffit que les entiers p_i soient tous *positifs*. Si $\varpi \in \overline{\mathrm{C}'}$, pour que $\varpi \in \overline{\mathrm{C}}$ il faut et il suffit que $\langle \tilde{\alpha}, \varpi \rangle = \sum_i n_i p_i$ soit $\leqslant 1$, d'où (ii).

COROLLAIRE. — *L'alcôve* C *est un simplexe ouvert de sommets* 0 *et les* ϖ_i / n_i, $i \in \mathrm{I}$.

Cela résulte de (i).

3. Le normalisateur de W_a

Dans ce n°, nous supposons le produit scalaire choisi sur V invariant non seulement par W, mais *par le groupe* A(R) *tout entier.* Nous identifierons A(R) et $\mathrm{A}(\mathrm{R}^\vee)$.

Soit G le normalisateur de W_a dans le groupe des déplacements de l'espace affine euclidien E. Si g est un déplacement de E, et s la réflexion orthogonale par rapport à un hyperplan L, le déplacement gsg^{-1} est la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $g(L)$. Il en résulte que G est l'ensemble des déplacements de E qui permutent entre eux les hyperplans $L_{\alpha,k}$ (pour $\alpha \in R$ et $k \in \mathbf{Z}$).

Or, le groupe des automorphismes de E est le produit semi-direct du groupe orthogonal U de V^* et du groupe T des translations. Si $u \in U$ et $v \in V^*$, le transformé de l'hyperplan $L_{\alpha,k}$ par $g = u \circ t(v)$ est l'hyperplan défini par l'équation

$$\langle {}^t u^{-1}(\alpha), x\rangle = k + \langle \alpha, v\rangle.$$

Par suite, on a $g \in G$ si et seulement si d'une part ${}^t u$ permute entre elles les racines, c'est-à-dire appartient à $A(R)$, d'autre part $\langle \alpha, v\rangle \in \mathbf{Z}$ pour tout $\alpha \in R$, c'est-à-dire si $v \in P(R^\vee)$. Autrement dit, *le groupe* G *est produit semi-direct de* $A(R)$ *par* P. Comme $Q \subset P$ et $W \subset A(R)$, on voit que *le groupe quotient* G/W_a *est produit semi-direct de* $A(R)/W$ *par* $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$; l'action correspondante de $A(R)/W$ sur $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ est l'action canonique (§ 1, nº 9), comme on le vérifie immédiatement.

Nous désignerons par W'_a le sous-groupe de G produit semi-direct de W par P. C'est un sous-groupe distingué de G, et G/W'_a est canoniquement isomorphe à $A(R)/W$; de plus, l'application canonique de $P(R^\vee)$ dans W'_a/W_a donne par passage au quotient un isomorphisme de $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ sur W'_a/W_a.

Soit maintenant C une alcôve de E, et soit G_C le sous-groupe formé des éléments $g \in G$ tels que $g(C) = C$. Comme W_a est simplement transitif sur les alcôves, *le groupe* G *est produit semi-direct de* G_C *et de* W_a. L'isomorphisme correspondant de G/W_a sur G_C fournit en particulier un isomorphisme canonique de $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ sur le groupe $\Gamma_C = G_C \cap W'_a$.

Supposons que R soit irréductible, et reprenons les notations de la prop. 5 du nº 2. Posons $R_0 = R$, et soit R_i ($i \in I$) le système de racines engendré par les α_j, pour $j \neq i$. Pour $i = 0$ (resp. $i \in I$), soit w_i l'unique élément de $W(R_i)$ (identifié à un sous-groupe de W) qui transforme les racines positives de R_i relativement à la base $(\alpha_j)_{j\neq i}$ en racines négatives (§ 1, nº 6, cor. 3 de la prop. 17).

Proposition 6. — *Pour tout* $i \in J$, *l'élément* $\gamma_i = t(\varpi_i)w_i w_0$ *appartient à* Γ_C *et l'application* $i \longmapsto \gamma_i$ *est une bijection de* J *sur* $\Gamma_C - \{1\}$.

Remarquons tout d'abord que la racine $w_i(\tilde{\alpha})$ est de la forme

$$n_i\alpha + \sum_{j\neq i} b_{ij}\alpha_j,$$

donc est *positive*.

Montrons que, si $i \in J$, on a $\gamma_i \in \Gamma_C$. Soient en effet $a \in C$ et $b = \gamma_i(a)$.

Pour $1 \leqslant j \leqslant l$ et $j \neq i$, on a :

$$(2) \qquad \begin{aligned} \langle b, \alpha_j \rangle &= \langle \varpi_i + w_i w_0(a), \alpha_j \rangle \\ &= \langle w_0(a), w_i(\alpha_j) \rangle > 0 \end{aligned}$$

puisque $w_0(a) \in -\mathrm{C}'$ et que $w_i(\alpha_j)$ est négative. D'autre part, on a :

$$(3) \qquad \langle b, \alpha_i \rangle = 1 + \langle w_0(a), w_i(\alpha_i) \rangle \geqslant 1 + \langle w_0(a), \tilde{\alpha} \rangle > 0$$

puisque $w_0(a) \in -\mathrm{C}'$, que $\tilde{\alpha} - w_i(\alpha_i)$ prend des valeurs négatives sur $-\mathrm{C}'$ et que $\langle w_0(a), \tilde{\alpha} \rangle > -1$. Enfin, on a :

$$(4) \qquad \langle b, \tilde{\alpha} \rangle = n_i + \langle w_0(a), w_i(\tilde{\alpha}) \rangle = 1 + \langle w_0(a), w_i(\tilde{\alpha}) \rangle < 1$$

puisque $w_0(a) \in -\mathrm{C}'$ et que $w_i(\tilde{\alpha})$ est une racine positive. Les relations (2), (3) et (4) entraînent alors que $b \in \mathrm{C}$, d'où $\gamma_i \in \Gamma_{\mathrm{C}}$. Il est clair que l'application $i \longmapsto \gamma_i$ est *injective*, puisque $\gamma_i(0) = \varpi_i$. Enfin, soit $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{C}}$, avec $\gamma \neq 1$ et posons $\gamma = tw$, avec $t \in \mathrm{P}$ et $w \in \mathrm{W}$. On a $t \neq 1$ puisque $\Gamma_{\mathrm{C}} \cap \mathrm{W} = \{1\}$. D'autre part, on a $t(0) = \gamma(0) \in \overline{\mathrm{C}} \cap \mathrm{P}(\mathrm{R}^\vee)$ et la prop. 5 entraîne qu'il existe $i \in \mathrm{J}$ tel que $t(0) = \varpi_i$. On a alors $\gamma_i^{-1}\gamma(0) = 0$, d'où $\gamma = \gamma_i$ puisque $\Gamma_{\mathrm{C}} \cap \mathrm{W} = \{1\}$. Ceci achève la démonstration.

Corollaire. — *Les* $(\varpi_i)_{i \in \mathrm{J}}$ *forment un système de représentants dans* $\mathrm{P}(\mathrm{R}^\vee)$ *des éléments non nuls de* $\mathrm{P}(\mathrm{R}^\vee)/\mathrm{Q}(\mathrm{R}^\vee)$.

En effet, si l'on identifie Γ_{C} à $\mathrm{P}(\mathrm{R}^\vee)/\mathrm{Q}(\mathrm{R}^\vee)$, l'élément γ_i est transformé en la classe de ϖ_i mod. $\mathrm{Q}(\mathrm{R}^\vee)$.

Remarques. — 1) L'application $\gamma \longmapsto \gamma(0)$ est une bijection de Γ_{C} sur $\overline{\mathrm{C}} \cap \mathrm{P}(\mathrm{R}^\vee)$.

2) Le groupe G est aussi le normalisateur de W_a dans le groupe des automorphismes de E muni seulement de sa structure affine (cf. exerc. 3).

4. Application : ordre du groupe de Weyl

Lemme 1. — *Soient* X *un espace localement compact dénombrable à l'infini,* G *un groupe discret opérant continûment et proprement dans* X, μ *une mesure* $\geqslant 0$ *sur* X *invariante par* G, G' *un sous-groupe de* G, U *et* U' *deux parties ouvertes de* X *de mesures finies* $\neq 0$. *On suppose que les* $s\mathrm{U}$ *pour* $s \in \mathrm{G}$ (resp. *les* $s'\mathrm{U}'$ *pour* $s' \in \mathrm{G}'$) *sont deux à deux disjoints et que leur réunion est de complémentaire négligeable. Alors* G' *est d'indice fini dans* G *et l'on a* $(\mathrm{G} : \mathrm{G}') = \mu(\mathrm{U}')/\mu(\mathrm{U})$.

Soit $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de représentants des classes à droite de G suivant G'. Soit U_1 la réunion des $s_\lambda \mathrm{U}$. Alors les $s'\mathrm{U}_1$, pour $s' \in \mathrm{G}'$, sont deux à deux disjoints et de réunion $\mathrm{M} = \bigcup_{s \in \mathrm{G}} s\mathrm{U}$. Soit $\mathrm{M}' = \bigcup_{s' \in \mathrm{G}'} s'\mathrm{U}'$. La réunion de U' (resp. U_1) et d'une partie convenable de $\mathrm{X} - \mathrm{M}'$ (resp. $\mathrm{X} - \mathrm{M}$) est un domaine fondamental, évidemment μ-mesurable, pour G'. D'après *Intégr.*, chap. VII, § 2, nº 10, cor. du th. 4, on a $\mu(U') = \mu(U_1)$. Ceci prouve que Card $\Lambda = (G:G')$ est fini, et que $\mu(U') = (\text{Card } \Lambda)\mu(U)$.

PROPOSITION 7. — *Supposons* R *irréductible. Soient* $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ *une base de* R, *f l'indice de connexion de* R (§ 1, nº 9) *et* $\tilde{\alpha} = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l$ *la plus grande racine de* R (*pour l'ordre défini par* B). *Alors l'ordre de* W *est égal à*

$$(l\,!)n_1n_2 \ldots n_l f.$$

Soit $(\varpi_1, \ldots, \varpi_l)$ la base de $P(R^\vee)$ duale de B. D'après le cor. de la prop. 5, le simplexe ouvert C de sommets $0, n_1^{-1}\varpi_1, \ldots, n_l^{-1}\varpi_l$ est une alcôve de E. Choisissons une mesure de Haar μ sur le groupe additif V^*. Soit A l'ensemble des éléments de V^* de la forme $\xi_1\varpi_1 + \cdots + \xi_l\varpi_l$, avec $0 < \xi_i < 1$ pour $i = 1, \ldots, l$. D'après le cor. 2 de la prop. 15 de *Intégr.*, chap. VII, § 1, nº 10, on a :

$$\mu(A)/\mu(C) = (l\,!)n_1n_2 \ldots n_l. \tag{5}$$

Soit d'autre part A′ l'ensemble des éléments de V^* de la forme

$$\xi_1\alpha_1^\vee + \cdots + \xi_l\alpha_l^\vee,$$

avec $0 < \xi_i < 1$ pour $i = 1, \ldots, l$. Comme $(\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_l^\vee)$ est une base du **Z**-module $Q(R^\vee)$, on peut appliquer le lemme 1 avec $X = V^*$, $G = W_a$, $G' = Q$, $U = C$ et $U' = A'$. On obtient :

$$\mu(A')/\mu(C) = (W_a : Q) = \text{Card } W. \tag{6}$$

Enfin, on peut appliquer une autre fois le lemme 1, en prenant $X = V^*$, $G = P$, $G' = Q$, $U = A$ et $U' = A'$. On obtient :

$$\mu(A')/\mu(A) = (P : Q) = (P(R^\vee) : Q(R^\vee)) = f. \tag{7}$$

La proposition résulte alors de la comparaison des formules (5), (6) et (7).

5. Systèmes de racines et groupes engendrés par des réflexions

PROPOSITION 8. — *Soit* F *un espace hilbertien réel de dimension finie l. Soient* $\mathfrak{H}$ *un ensemble d'hyperplans affines de* F *et* G *le groupe engendré par les réflexions orthogonales* s_H *par rapport aux hyperplans* $H \in \mathfrak{H}$. *On suppose que les conditions du chap.* V, § 3 *sont vérifiées* (i.e. *que* $g(H) \in \mathfrak{H}$ *pour tout* $H \in \mathfrak{H}$ *et* $g \in G$, *et que* G *opère proprement dans* F). *On suppose de plus que* 0 *est point spécial pour* G *et que le groupe* T *des translations appartenant à* G *est de rang l. Il existe alors un système de racines réduit* R *et un seul dans* $V = F^*$ *tel que l'isomorphisme canonique de* F *sur* V^* *transforme* G *en le groupe de Weyl affine* W_a *de* R.

Remarquons tout d'abord que l'hypothèse faite sur T entraîne que G est *essentiel*: sinon, l'espace affine F se décomposerait en produit $F_0 \times F_1$, avec $\dim F_1 < l$, le groupe G s'identifiant à un groupe de déplacements opérant proprement dans F_1 (chap. V, § 3, n° 8, prop. 6), et T ne serait pas de rang l.

Soit $\mathfrak{H}_0$ l'ensemble des $H \in \mathfrak{H}$ tels que $0 \in H$. Pour $H \in \mathfrak{H}_0$, soit $\mathfrak{H}_H$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{H}$ parallèles à H. Puisque 0 est point spécial, $\mathfrak{H}$ est la réunion des $\mathfrak{H}_H$ pour $H \in \mathfrak{H}_0$. Soit $H \in \mathfrak{H}_0$. Puisque T est de rang l, il existe un $v \in F$ tel que la translation de vecteur v appartienne à T et que $v \notin H$. Les hyperplans $H + kv$ pour $k \in \mathbf{Z}$ sont deux à deux distincts et appartiennent à $\mathfrak{H}_H$. Soit alors a un vecteur unitaire de F orthogonal à H : on a $H + (v|a)a \in \mathfrak{H}_H$ et comme $\mathfrak{H}$ est localement fini (chap. V, § 3, n° 1, lemme 1), il existe un plus petit nombre réel $\lambda > 0$ tel que $H + \lambda a \in \mathfrak{H}_H$. Nous allons montrer que $\mathfrak{H}_H$ est l'ensemble des hyperplans $H + k\lambda a$ pour $k \in \mathbf{Z}$. En effet,

$$H' = H + \lambda a \in \mathfrak{H}_H$$

et l'élément $s_{H'} \circ s_H$ de G est la translation de vecteur $2\lambda a$ (chap. V, § 2, n° 4, prop. 5). Par suite, $H + 2n\lambda a = (s_{H'}s_H)^n(H)$ et $H + (2n+1)\lambda a = (s_{H'}s_H)^n(H')$ appartiennent à $\mathfrak{H}_H$. D'autre part, si $L \in \mathfrak{H}_H$, il existe $\xi \in \mathbf{R}$ tel que $L = H + \xi\lambda a$ et il existe un entier n tel que

$$\text{ou bien} \quad 2n < \xi \leqslant 2n + 1, \qquad \text{ou bien} \quad 2n - 1 < \xi \leqslant 2n.$$

Dans le premier cas, on a $(s_H s_{H'})^n(L) = H + (\xi - 2n)\lambda a$ avec

$$0 < (\xi - 2n)\lambda \leqslant \lambda$$

et la définition de λ entraîne $\xi = 2n + 1$; dans le second cas, on a

$$s_H(s_H s_{H'})^n(L) = H + (2n - \xi)\lambda a \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant (2n - \xi)\lambda < \lambda$$

et la définition de λ entraîne que $\xi = 2n$.

Il en résulte que si α_H est la forme linéaire sur F telle que

$$H' = \{x \in F \mid \langle \alpha_H, x \rangle = 1\},$$

l'ensemble $\mathfrak{H}_H$ *est l'ensemble des hyperplans* $L_{\alpha_H, k} = \{x \in F \mid \langle \alpha_H, x \rangle = k\}$ *pour* $k \in \mathbf{Z}$, et les formes linéaires α_H et $-\alpha_H$ sont les seules à posséder cette propriété.

Par suite, la proposition sera démontrée si nous montrons que *l'ensemble* R *des éléments de* V *de la forme* $\pm\alpha_H$ *est un système de racines réduit dans* V.

a) Démontrons la condition (SR_I) : il est clair que R est fini (puisque $\mathfrak{H}_0$ est fini) et ne contient pas 0. De plus, R engendre V. En effet, si $x \in F$ est orthogonal à R, on a $x \in H$ pour tout $H \in \mathfrak{H}_0$ et la translation de vecteur x commute avec tout élément de G. Comme G est essentiel, ceci entraîne $x = 0$.

b) Démontrons (SR_{II}). Pour $v \in V$ et $r \in \mathbf{R}$, posons comme précédemment $L_{v,r} = \{x \in F \mid \langle v, x\rangle = r\}$; si $\alpha \in R$, posons $H_\alpha = L_{\alpha,0}$, et soit s_α le transposé de s_{H_α}. Il existe un élément $\alpha^\vee \in F$ et un seul orthogonal à H_α et tel que $\langle\alpha^\vee, \alpha\rangle = 2$. On a alors $s_{H_\alpha} = s_{\alpha^\vee, \alpha}$ et $s_\alpha = s_{\alpha, \alpha^\vee}$. Pour $\beta \in R$, on a

$$L_{s_\alpha(\beta),1} = s_{H_\alpha}(L_{\beta,1}) \in \mathfrak{H}$$

et il existe $\gamma \in R$ et $n \in \mathbf{N}^*$ tels que $L_{s_\alpha(\beta),1} = L_{\gamma,n}$. On a alors

$$s_{H_\alpha}(L_{\gamma,1}) = L_{\beta,1/n}$$

et par suite $1/n \in \mathbf{Z}$. On a donc $n = 1$ et $s_\alpha(\beta) = \gamma \in R$. Ceci démontre ($SR_{II}$).

c) Démontrons (SR_{III}). Soit $\alpha \in R$ et posons $H'_\alpha = L_{\alpha,1}$. On a

$$H'_\alpha = H_\alpha + (1/2)\alpha^\vee;$$

comme la translation $t(\alpha^\vee)$ de vecteur $\alpha^\vee$ est le produit $s_{H'_\alpha} s_{H_\alpha}$ (chap. V, § 2, n° 4, prop. 5), elle appartient à T et $\alpha^\vee = t(\alpha^\vee)(0)$ est un *point spécial* pour G. Par suite, pour tout $\beta \in \mathbf{R}$, il existe un hyperplan $L_{\beta,k}$ passant par $\alpha^\vee$, avec k entier, ce qui démontre que $\langle\beta, \alpha^\vee\rangle \in \mathbf{Z}$, c'est-à-dire ($SR_{III}$).

d) Enfin, il est évident que R est *réduit*, car si $H, H' \in \mathfrak{H}_0$, $H \neq H'$, les formes linéaires α_H et $\alpha_{H'}$ ne sont pas proportionnelles.

Remarque 1). — L'hypothèse que T est de rang l est en particulier vérifiée lorsque G est *irréductible et infini*. En effet l'espace vectoriel engendré par les vecteurs des translations de T est invariant par l'image canonique de G dans le groupe linéaire de F. Il est différent de $\{0\}$ si G est infini et est donc égal à F tout entier si G est infini et irréductible.

Un groupe fini engendré par des réflexions n'est pas toujours le groupe de Weyl d'un système de racines. Plus précisément :

PROPOSITION 9. — *Soit* V *un espace vectoriel réel de dimension finie* l, *et soit* G *un sous-groupe fini de* $\mathbf{GL}(V)$, *engendré par des réflexions et essentiel. Munissons* V *d'un produit scalaire invariant par* G. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Il existe un sous-groupe discret de rang* l *de* V *stable par* G.

(ii) *Il existe une* $\mathbf{Q}$-*structure sur* V (*Alg.*, chap. II, 3ᵉ éd., § 8, n° 1, déf. 1) *invariante par* G.

(iii) *Il existe un système de racines dans* V *dont le groupe de Weyl est* G.

(iv) *Il existe un groupe discret* G′ *de déplacements de* V, *opérant proprement dans* V, *engendré par des réflexions, tel que* G′ *soit produit semi-direct de* G *et d'un groupe de translations de rang* l.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : soit $V' \subset V$ une $\mathbf{Q}$-structure sur V invariante par G. Soit A une partie finie de V′ engendrant le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel V′. En remplaçant A par $\bigcup_{s \in G} s(A)$, on peut supposer A stable par G. Soit B le sous-groupe de V engendré par A. Alors B est stable par G, de type fini et sans torsion, donc admet une base sur **Z** qui est en même temps une base de V′ sur **Q**, donc une base de V sur **R**.

(iii) ⟹ (ii) : ceci résulte par exemple de la prop. 1 du § 1, n° 1.

(iv) ⟹ (iii) : soit G′ un groupe vérifiant la condition (iv). Le groupe des translations de G′ est de rang l, et 0 est point spécial pour G′ d'après la prop. 9 du chap. V, § 3, n° 10. La prop. 8 montre qu'il existe un système de racines réduit R_0 dans V^* tel que G′ s'identifie à $W_a(R_0)$; le groupe G est alors le groupe de Weyl du système de racines inverse de R_0.

(i) ⟹ (iv) : supposons que G laisse stable un sous-groupe discret M de V, de rang l. Munissons V d'un produit scalaire invariant par G. Pour toute réflexion $s \in G$, on a $s(x) - x \in M$ quel que soit $x \in M$, donc la droite D_s orthogonale à H_s rencontre M; soient α_s, $-\alpha_s$ les générateurs du groupe cyclique $D_s \cap M$. L'ensemble A des α_s et des $-\alpha_s$ est stable par G, donc engendre un sous-groupe M′ de M stable par G; le groupe discret M′ est de rang l parce que G est essentiel. Soit G′ le groupe de transformations affines de V produit semi-direct de G et du groupe des translations dont les vecteurs appartiennent à M′. Soit G'_1 le sous-groupe de G′ engendré par les réflexions de G′. On va montrer que $G'_1 = G'$, ce qui achèvera la démonstration. D'abord, $G'_1 \supset G$ puisque G est engendré par des réflexions. D'autre part, pour toute réflexion s de G, soit t_s la translation de vecteur α_s. La transformation $s \circ t_s$ est une réflexion, et $s \circ t_s \in G'$; donc t_s est un produit de deux réflexions de G′ ; ceci étant vrai pour toute réflexion s de G, les translations dont le vecteur appartient à M′ sont toutes dans G'_1.

DÉFINITION 2. — *Un groupe* G *vérifiant les conditions équivalentes de la prop.* 9 *est appelé un groupe cristallographique.*

Remarque 2). — Soit G un groupe fini engendré par des réflexions et essentiel. Pour que G soit cristallographique, il faut et il suffit que *tout élément de sa matrice de Coxeter soit l'un des entiers* 1, 2, 3, 4, 6. En effet, cette condition est nécessaire d'après la *Remarque* 3) du § 1, n° 5. Le fait qu'elle soit suffisante résultera de la classification des groupes de Coxeter finis donnée au § 4 (pour une démonstration directe, voir chap. V, § 4, exerc. 6).

§ 3. Invariants exponentiels

Dans ce paragraphe, la lettre A désigne un anneau commutatif, ayant un élément unité, non réduit à 0.

1. L'algèbre d'un groupe commutatif libre

Soit P un **Z**-module libre de rang fini l. Nous noterons A[P] l'algèbre du groupe additif P sur A (*Alg.*, chap. III, 3e éd., § 2, n° 6). Pour tout $p \in P$, notons e^p

l'élément correspondant de A[P]. Alors $(e^p)_{p\in P}$ est une *base* du A-module A[P], et, quels que soient p, $p' \in P$, on a :

$$e^p e^{p'} = e^{p+p'}, \qquad (e^p)^{-1} = e^{-p}, \qquad e^0 = 1.$$

Lemme 1. — *Supposons* A *factoriel* (*Alg. comm.*, chap. VII, § 3, n° 1, déf. 1).

(i) *L'anneau* A[P] *est factoriel.*

(ii) *Si u, v sont des éléments non proportionnels de* P, *les éléments* $1 - e^u$, $1 - e^v$ *de* A[P] *sont étrangers.*

Soient $(p_1, p_2, \ldots, p_l)$ une base de P, et $X_1, X_2, \ldots, X_l$ des indéterminées. L'application A-linéaire de $A[X_1, \ldots, X_l, X_1^{-1}, \ldots, X_l^{-1}]$ sur A[P] qui transforme $X_1^{n_1}X_2^{n_2} \ldots X_l^{n_l}$ (où $n_1, n_2, \ldots, n_l \in \mathbf{Z}$) en $e^{n_1p_1+\cdots+n_lp_l}$ est un isomorphisme d'anneaux. Or $A[X_1, \ldots, X_l]$ est un anneau factoriel (*Alg. comm.*, chap. VII, § 3, n° 5), et $A[X_1, \ldots, X_l, X_1^{-1}, \ldots, X_l^{-1}]$ est un anneau de fractions de $A[X_1, \ldots, X_l]$, donc est factoriel.

Soit P′ (resp. P″) l'ensemble des éléments de P dont un multiple appartient à $\mathbf{Z}u + \mathbf{Z}v$ (resp. à $\mathbf{Z}u$). Alors les groupes P/P′ et P′/P″ sont sans torsion, donc il existe un supplémentaire de P″ dans P′ et un supplémentaire de P′ dans P. Par suite, il existe une base $(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ du $\mathbf{Z}$-module P et des entiers rationnels j, m, n tels que $u = jz_1$, $v = mz_1 + nz_2$, $j > 0$, $n > 0$. Posant $X_i = e^{z_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant l$, on a donc $1 - e^u = 1 - X_1^j$, $1 - e^v = 1 - X_1^m X_2^n$. Soit K une clôture algébrique du corps des fractions de A, de sorte que A[P] s'identifie à un sous-anneau de l'anneau $B = K[X_1, \ldots, X_l, X_1^{-1}, \ldots, X_l^{-1}]$. Pour toute racine j-ème de l'unité z, $1 - zX_1$ est extrémal dans

$$K[X_1, \ldots, X_l];$$

de plus l'idéal engendré par $1 - zX_1$ ne contient aucun monôme en les X_i. On en conclut que l'idéal $(1 - zX_1)B$ de B est un idéal premier de hauteur 1 (*Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 6), donc que $1 - zX_1$ est extrémal dans B. Les facteurs extrémaux de $1 - X_1^j$ dans B sont donc de la forme $1 - zX_1$. Or aucun de ces facteurs ne divise $1 - X_1^m X_2^n$ dans B (car l'homomorphisme f de B dans B tel que $f(X_1) = z^{-1}$, $f(X_i) = X_i$ pour $i \geqslant 2$, vérifie

$$f(1 - zX_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(1 - X_1^m X_2^n) = 1 - z^{-m}X_2^n \neq 0).$$

Ainsi, $1 - X_1^j$ et $1 - X_1^m X_2^n$ sont étrangers dans B. Par suite un diviseur commun de $1 - X_1^j$ et $1 - X_1^m X_2^n$ dans A[P] est inversible dans B, donc, à la multiplication près par un élément de la forme $X_1^{k_1}X_2^{k_2} \ldots X_l^{k_l}$, est égal à un élément a de A; en outre, a doit diviser 1 dans A, donc être inversible dans A. En définitive, $1 - X_1^j$ et $1 - X_1^m X_2^n$ sont étrangers dans A[P].

2. Cas du groupe des poids; termes maximaux

Gardons les notations du numéro précédent et soit R un système de racines *réduit* dans un espace vectoriel réel V. Dans la suite de ce paragraphe, nous prendrons pour P le groupe des *poids* de R (§ 1, n° 9). Le groupe $W = W(R)$ opère dans P, donc aussi dans l'algèbre A[P]; on a $w(e^p) = e^{w(p)}$ pour $w \in W$ et $p \in P$.

Soit C une chambre de R (§ 1, n° 5) et soit $B = (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ la base correspondante de R. Nous munirons V (donc aussi P) de la structure d'ordre définie par C. Si $p, p' \in P$, on a $p \geqslant p'$ si et seulement si $p - p'$ est combinaison linéaire à coefficients positifs des α_i.

DÉFINITION 1. — *Soit* $x = \sum\limits_{p \in P} x_p e^p$ *un élément de* A[P]. *On appelle* support *de x l'ensemble* S *des* $p \in P$ *tels que* $x_p \neq 0$ *et* support maximal *de x l'ensemble* X *des éléments maximaux de* S. *On dit encore que le terme* $x_p e^p$ *pour* $p \in X$ *est un* terme maximal *de x.*

Lemme 2. — *Soit* $x \in A[P]$ *et soit* $(x_p e^p)_{p \in X}$ *la famille des termes maximaux de x. Soit* $q \in P$ *et soit* $y \in A[P]$ *tels que* e^q *soit l'unique terme maximal de y. Alors, la famille des termes maximaux du produit xy est* $(x_p e^{p+q})_{p \in X}$.

Posons $x = \sum\limits_p x_p e^p$, $y = \sum\limits_r y_r e^r$ et $xy = \sum\limits_t z_t e^t$. On a $r \leqslant q$ pour tout $r \in P$ tel que $y_r \neq 0$ et $z_t = \sum\limits_{p+r=t} x_p y_r$.

Si $t = p + q = p' + r$ avec $p \in X$ et $x_{p'} y_r \neq 0$, on a $r \leqslant q$, d'où $p' \geqslant p$ et par suite $p' = p$. On a donc $z_{p+q} = x_p y_q = x_p \neq 0$. Ceci montre que $X + q$ est contenu dans le support du produit xy.

D'autre part, si $t = p' + r$ avec $x_{p'} y_r \neq 0$, il existe $p \in X$ tel que $p' \leqslant p$ et on a $t \leqslant p + q$. Le support maximal de xy est donc contenu dans $X + q$. Comme deux éléments de $X + q$ ne sont pas comparables, il en résulte que $X + q$ est exactement le support maximal de xy et nous avons vu ci-dessus que $z_{p+q} = x_p$ pour $p \in X$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarque. — Comme $x \neq 0$ signifie que le support maximal de x est non vide, le lemme 2 montre que $x \neq 0$ entraîne $xy \neq 0$, toutes les fois que y admet un unique terme maximal de la forme e^q.

3. Éléments anti-invariants

On conserve les notations du numéro précédent. On note $\varepsilon(w)$ le déterminant d'un élément $w \in W$. On a

$$\varepsilon(w) = (-1)^{l(w)}$$

la longueur $l(w)$ étant prise relativement à la famille des réflexions s_{α_i}.

DÉFINITION 2. — *On dit qu'un élément* $x \in A[P]$ *est anti-invariant par* W *si*

$$w(x) = \varepsilon(w).x$$

pour tout $w \in W$.

Les éléments anti-invariants de A[P] forment un sous-A-module de A[P]. Pour tout $x \in A[P]$, on pose :

$$\text{(1)} \qquad J(x) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w).w(x).$$

Pour $x \in A[P]$ et $w \in W$, on a :

$$w(J(x)) = \sum_{v \in W} \varepsilon(v).wv(x) = \varepsilon(w) \sum_{v \in W} \varepsilon(v).v(x) = \varepsilon(w).J(x)$$

et $J(x)$ est anti-invariant. D'autre part, soit $q = \text{Card}(W)$. Pour tout élément anti-invariant x de A[P], on a $J(x) = q.x$. Il en résulte que, si q est inversible dans A, l'application $q^{-1}J$ est un *projecteur* de A[P] sur le sous-module des éléments anti-invariants.

Soient $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$ les poids fondamentaux correspondants à la chambre C. Les éléments de $P \cap \overline{C}$ (resp. $P \cap C$) sont les poids de la forme $n_1\varpi_1 + \cdots + n_l\varpi_l$ avec $n_i \geqslant 0$ (resp. $n_i > 0$) pour $1 \leqslant i \leqslant l$ (§ 1, nº 10). D'autre part,

$$\rho = \varpi_1 + \cdots + \varpi_l$$

est la demi-somme des racines positives (*loc. cit.*) et les éléments de $P \cap C$ sont encore les poids de la forme $\rho + p$ avec $p \in P \cap \overline{C}$. Enfin, si $p \in P \cap C$, on a $w(p) < p$ pour tout $w \neq 1$ (§ 1, nº 6, cor. à la prop. 18) et e^p est par suite l'unique terme maximal de $J(e^p)$.

PROPOSITION 1. — *Si 2 n'est pas diviseur de zéro dans* A, *les éléments* $J(e^p)$ *pour* $p \in P \cap C$ *forment une base du module des éléments anti-invariants de* A[P].

Les poids $w(p)$ pour $w \in W$ et $p \in P \cap C$ sont deux à deux distincts. Il en résulte que les $J(e^p)$ pour $p \in P \cap C$ sont linéairement indépendants.

Soit d'autre part $x = \sum_p x_p e^p$ un élément anti-invariant de A[P]. Si p_0 appartient à un mur, il est invariant par une réflexion $s \in W$ et l'on a

$$x = \sum_p x_p e^p = -s(x) = -\sum_p x_p e^{s(p)}.$$

On en déduit $2x_{p_0} = 0$, d'où $x_{p_0} = 0$. Comme tout élément n'appartenant à aucun mur s'écrit d'une façon unique sous la forme $w(p)$ avec $w \in W$ et $p \in P \cap C$, on a par suite :

$$\text{(2)} \qquad x = \sum_{p \in P \cap C} \sum_{w \in W} x_{w(p)} e^{w(p)}.$$

Comme $w(x) = \sum_{p} x_p e^{w(p)} = \varepsilon(w) \sum_{p} x_p e^p$, on a $x_{w(p)} = \varepsilon(w) x_p$ et on déduit de (2) que

$$x = \sum_{p \in \mathrm{P} \cap \mathrm{C}} x_p \mathrm{J}(e^p),$$

ce qui achève la démonstration.

Considérons maintenant l'élément d de l'algèbre $\mathrm{A}[\frac{1}{2}\mathrm{P}]$ défini par

$$(3) \qquad \begin{aligned} d &= \prod_{\alpha \in \mathrm{R},\, \alpha > 0} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) \\ &= e^{\rho} . \prod_{\alpha \in \mathrm{R},\, \alpha > 0} (1 - e^{-\alpha}) \\ &= e^{-\rho} . \prod_{\alpha \in \mathrm{R},\, \alpha > 0} (e^{\alpha} - 1). \end{aligned}$$

Puisque $\rho \in \mathrm{P}$, on a $d \in \mathrm{A}[\mathrm{P}]$.

Proposition 2. — (i) *L'élément d défini par* (3) *est un élément anti-invariant de* $\mathrm{A}[\mathrm{P}]$; *son unique terme maximal* (n° 2, déf. 1) *est e^{ρ} et l'on a $d = \mathrm{J}(e^{\rho})$.*

(ii) *Pour tout $p \in \mathrm{P}$, l'élément $\mathrm{J}(e^p)$ est divisible de façon unique par d et le quotient $\mathrm{J}(e^p)/d$ est un élément de* $\mathrm{A}[\mathrm{P}]$ *invariant par* W.

(iii) *Si 2 n'est pas diviseur de zéro dans* A, *la multiplication par d est une bijection de l'ensemble des éléments de* $\mathrm{A}[\mathrm{P}]$ *invariants par* W *sur l'ensemble des éléments anti-invariants de* $\mathrm{A}[\mathrm{P}]$.

On sait que, pour $1 \leqslant i \leqslant l$, la réflexion $s_i = s_{\alpha_i}$ laisse stable l'ensemble des racines positives distinctes de α_i et que $s_i(\alpha_i) = -\alpha_i$ (§ 1, n° 6, cor. 1 de la prop. 17). On a donc

$$\begin{aligned} s_i(d) &= (e^{-\alpha_i/2} - e^{\alpha_i/2}) . \sum_{\alpha \in \mathrm{R},\, \alpha > 0,\, \alpha \neq \alpha_i} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) \\ &= -d = \varepsilon(s_i) . d. \end{aligned}$$

Comme les s_i engendrent W, ceci démontre la première assertion de (i). La deuxième assertion de (i) résulte aussitôt de (3) et du lemme 2, compte tenu de ce que 1 est l'unique terme maximal de $1 - e^{-\alpha}$ pour $\alpha \in \mathrm{R}$, $\alpha > 0$.

Supposons maintenant que $\mathrm{A} = \mathbf{Z}$. D'après la prop. 1, on a :

$$(4) \qquad d = \sum_{p \in \mathrm{P} \cap \mathrm{C}} c_p \mathrm{J}(e^p) \qquad \text{avec} \qquad c_p \in \mathbf{Z}.$$

D'autre part, on vient de voir que

$$(5) \qquad d = e^{\rho} + \sum_{q < \rho} c'_q e^q.$$

Si $p \in \mathrm{P} \cap \mathrm{C}$ avec $p \neq \rho$, on a $p > \rho$ et le coefficient de e^p dans d est nul d'après (5). On a donc $c_p = 0$. De plus, la comparaison des coefficients de e^{ρ} dans (4) et (5) montre que $c_{\rho} = 1$ et par suite $d = \mathrm{J}(e^{\rho})$.

Supposons toujours $\mathrm{A} = \mathbf{Z}$. Soient $p \in \mathrm{P}$, $\alpha \in \mathrm{R}$ et M un système de représentants des classes à droite de W suivant le sous-groupe $\{1, s_\alpha\}$. On a :

$$\mathrm{J}(e^p) = \sum_{w \in \mathrm{M}} \varepsilon(w) e^{w(p)} + \sum_{w \in \mathrm{M}} \varepsilon(s_\alpha w) e^{s_\alpha w(p)}.$$

Or $s_\alpha w(p) = w(p) - \langle \alpha^\vee, w(p) \rangle \alpha = w(p) + n_w \alpha$, avec $n_w \in \mathbf{Z}$. Donc

$$\mathrm{J}(e^p) = \sum_{w \in \mathrm{M}} \varepsilon(w) e^{w(p)}(1 - e^{n_w \alpha}).$$

Si $n_w \geqslant 0$, il est clair que $1 - e^{n_w\alpha}$ est divisible par $1 - e^\alpha$ et ceci est encore vrai pour $n_w < 0$ puisque $1 - e^{n_w\alpha} = - e^{n_w\alpha}(1 - e^{-n_w\alpha})$. Par suite, $\mathrm{J}(e^p)$ est divisible par $1 - e^\alpha$ dans $\mathbf{Z}[\mathrm{P}]$.

D'après le lemme 1, $\mathbf{Z}[\mathrm{P}]$ est factoriel et les éléments $1 - e^\alpha$ pour $\alpha \in \mathrm{R}$ et $\alpha > 0$ sont deux à deux étrangers. Il s'ensuit que $\mathrm{J}(e^p)$ est divisible dans $\mathbf{Z}[\mathrm{P}]$ par le produit $\prod_{\alpha > 0} (1 - e^\alpha)$, donc aussi par $d = e^{-\rho} \prod_{\alpha > 0} (e^\alpha - 1)$.

Revenons maintenant au cas général : par extension des scalaires de $\mathbf{Z}$ à A, on déduit de ce qui précède que $d = \mathrm{J}(e^\rho)$ et que tout élément $\mathrm{J}(e^p)$ est divisible par d. Comme d admet e^ρ comme unique terme maximal, la *Remarque* du nº 2 montre qu'il existe un seul élément $y \in \mathrm{A}[\mathrm{P}]$ tel que $\mathrm{J}(e^p) = dy$ et il en résulte aussitôt que y est invariant par W, puisque d et $\mathrm{J}(e^p)$ sont anti-invariants. Ceci démontre (i) et (ii).

Enfin, si 2 n'est pas diviseur de zéro dans A, la *Remarque* du nº 2 et la prop. 1 entraînent (iii).

Remarques. — 1) Si 2 n'est pas diviseur de zéro dans A, on vérifie aisément que d est l'unique élément anti-invariant de $\mathrm{A}[\mathrm{P}]$ admettant e^ρ comme terme maximal.

2) Le lemme 2 du nº 2 montre que l'unique terme maximal du quotient $\mathrm{J}(e^p)/d$ (pour $p \in \mathrm{P} \cap \mathrm{C}$) est $e^{p-\rho}$.

4. Éléments invariants

Soit $\mathrm{A}[\mathrm{P}]^{\mathrm{W}}$ la sous-algèbre de $\mathrm{A}[\mathrm{P}]$ formée des éléments invariants par W. Pour $p \in \mathrm{P}$, notons $\mathrm{W}.p$ l'orbite de p par W, et soit $\mathrm{S}(e^p) = \sum_{q \in \mathrm{W}.p} e^q$ la somme des différents transformés de e^p par W ; c'est un élément invariant par W. Si $p \in \mathrm{P} \cap \overline{\mathrm{C}}$, on a $w(p) \leqslant p$ pour tout $w \in \mathrm{W}$ (§ 1, nº 6, prop. 18) et e^p est l'unique terme maximal de $\mathrm{S}(e^p)$.

Soit $x = \sum_p x_p e^p \in \mathrm{A}[\mathrm{P}]^{\mathrm{W}}$; on a $x_{w(p)} = x_p$ pour tout $p \in \mathrm{P}$ et tout $w \in \mathrm{W}$. D'autre part, toute orbite de W dans P rencontre $\mathrm{P} \cap \overline{\mathrm{C}}$ en un point et un seul (§ 1, nº 5, th. 2). Par suite, on a :

(6) $$x = \sum_{p \in \mathrm{P} \cap \overline{\mathrm{C}}} x_p \mathrm{S}(e^p).$$

On en déduit :

Lemme 3. — *Le* A-*module* $\mathrm{A[P]^W}$ *admet pour base la famille des* $\mathrm{S}(e^p)$ *pour* $p \in \mathrm{P} \cap \overline{\mathrm{C}}$.

Plus généralement :

PROPOSITION 3. — *Pour tout* $p \in \mathrm{P} \cap \overline{\mathrm{C}}$, *soit* x_p *un élément de* $\mathrm{A[P]^W}$ *ayant pour unique terme maximal* e^p. *La famille* $(x_p)_{p \in \mathrm{P}\cap\overline{\mathrm{C}}}$ *est une base du* A-*module* $\mathrm{A[P]^W}$.

Démontrons tout d'abord un lemme :

Lemme 4. — *Soit* I *un ensemble ordonné vérifiant la condition suivante* :

(MIN) *Toute partie non vide de* I *contient un élément minimal.*

Soient E *un* A-*module*, $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une base de* E *et* $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille d'éléments de* E *telle que*

$$x_i = e_i + \sum_{j<i} a_{ij} e_j,$$

pour tout $i \in \mathrm{I}$ (*avec* $a_{ij} \in \mathrm{A}$, *le support de la famille* (a_{ij}) *étant fini pour tout* i). *Alors* $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est une base de* E.

Pour toute partie J de I, soit $\mathrm{E_J}$ le sous-module de E de base $(e_i)_{i\in \mathrm{J}}$. Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties J de I possédant les deux propriétés suivantes :

(*a*) Si $i' \leqslant i$ et $i \in \mathrm{J}$, on a $i' \in \mathrm{J}$;

(*b*) $(x_i)_{i\in\mathrm{J}}$ est une base de $\mathrm{E_J}$.

On vérifie immédiatement que $\mathfrak{S}$, ordonné par inclusion, est inductif et non vide. Il possède donc un élément maximal J. Si $\mathrm{J} \neq \mathrm{I}$, soit i_0 un élément minimal de $\mathrm{I} - \mathrm{J}$ et posons $\mathrm{J}' = \mathrm{J} \cup \{i_0\}$. Tout élément $i \in \mathrm{I}$ tel que $i < i_0$ appartient alors à J : on en déduit que J′ satisfait à (*a*). D'autre part, J′ satisfait aussi à (*b*) ; en effet, on a

$$e_{i_0} = x_{i_0} - \sum_{j<i_0} a_{i_0 j} e_j$$

d'où (*b*). Par suite $\mathrm{J}' \in \mathfrak{S}$, d'où une contradiction. On a donc $\mathrm{J} = \mathrm{I}$, ce qui démontre le lemme.

Démontrons maintenant la prop. 3. Nous allons appliquer le lemme 4, avec $\mathrm{I} = \mathrm{P} \cap \overline{\mathrm{C}}$. Soit $q \in \mathrm{I}$, et soit I_q l'ensemble des $p \in \mathrm{I}$ tels que $p \leqslant q$. Si $p \in \mathrm{I}_q$, les relations

$$q - p \geqslant 0, \qquad p \in \overline{\mathrm{C}}, \qquad q \in \overline{\mathrm{C}}$$

entraînent

$$(q-p|p) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad (q-p|q) \geqslant 0,$$

d'où

$$(p|p) \leqslant (p|q) \leqslant (q|q).$$

L'ensemble I_q est donc *borné*. Comme I est discret, il s'ensuit que I_q est *fini*, et il est clair que I satisfait à la condition (MIN). D'autre part, pour tout $p \in \mathrm{I}$, on a

$$x_p = e^p + \sum_{q<p} c_{pq} e^q$$

d'où aussi d'après (6)

$$x_p = S(e^p) + \sum_{q<p,\, q\in I} c_{pq} S(e^q).$$

La proposition résulte alors des lemmes 3 et 4.

THÉORÈME 1. — *Soient $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$ les poids fondamentaux correspondant à la chambre* C *et, pour $1 \leqslant i \leqslant l$, soit x_i un élément de* $A[P]^W$ *admettant e^{ϖ_i} pour unique terme maximal. Soit*

$$\varphi : A[X_1, \ldots, X_l] \to A[P]^W$$

l'homomorphisme de l'algèbre de polynômes $A[X_1, \ldots, X_l]$ *dans* $A[P]^W$ *qui applique* X_i *sur* x_i. *L'application* φ *est un isomorphisme.*

Le lemme 2 entraîne que l'image par φ du monôme $X_1^{n_1} \ldots X_l^{n_l}$ est un élément admettant comme unique terme maximal $e^{n_1\varpi_1 + \cdots + n_l\varpi_l}$. Comme tout élément de $P \cap \overline{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $n_1\varpi_1 + \cdots + n_l\varpi_l$, la prop. 3 montre que les images par φ des monômes $X_1^{n_1} \ldots X_l^{n_l}$ forment une base de $A[P]^W$, d'où le théorème.

Exemples. — 1) On peut prendre $x_i = S(e^{\varpi_i})$.

2) D'après la *Remarque* 2 du nº 3, on peut prendre $x_i = J(e^{\rho+\varpi_i})/d$ (avec les notations du nº 3).

§ 4. Classification des systèmes de racines

1. Groupes de Coxeter finis

Nous nous proposons dans ce paragraphe de déterminer, à isomorphisme près, tous les systèmes de racines, et par conséquent tous les groupes cristallographiques (§ 2, nº 5). Plus généralement, nous allons commencer par déterminer tous les groupes finis engendrés par des réflexions dans des espaces vectoriels réels de dimension finie : il revient au même (chap. V, § 4, nº 8) de déterminer tous les groupes de Coxeter finis, ou encore (chap. V, § 4, nº 8, th. 2) toutes les matrices de Coxeter d'ordre fini telles que la forme bilinéaire associée soit positive non dégénérée.

Soit $M = (m_{ij})_{i,j\in I}$ une matrice de Coxeter d'ordre l fini. Posons

$$q_{ij} = -\cos(\pi/m_{ij}).$$

Rappelons que $q_{ii} = 1$ et que $q_{ij} = q_{ji}$ est nul ou $\leqslant -1/2$ pour $i \neq j$. Posons $E = \mathbf{R}^I$ et soit $(e_i)_{i\in I}$ la base canonique de E. Nous noterons $(x|y)$ la forme bilinéaire sur E associée à M (chap. V, § 4, nº 1) et q la forme quadratique $x \longmapsto (x|x)$ sur E. Pour $x = \sum_{i\in I} \xi_i e_i \in E$, on a

$$\|x\|^2 = q(x) = \sum_{i,j\in I} q_{ij}\xi_i\xi_j.$$

Nous désignerons par (X, f) le *graphe de Coxeter* de M (chap. IV, § 1, n° 9). Si a est une arête de X, nous dirons que $f(a)$ est l'*ordre* de a.

Dans toute la suite de ce numéro, nous supposerons que le groupe de Coxeter $W(M)$ défini par M (chap. V, § 4, n° 3) est *fini*, de sorte que q est positive non dégénérée et que X est une *forêt* (chap. V, § 4, n° 8, prop. 8). Nous supposerons de plus que X est *connexe* (autrement dit que le groupe de Coxeter $W(M)$ est *irréductible*), de sorte que X est un *arbre*.

En exprimant que q est positive non dégénérée, nous obtiendrons des conditions sur les m_{ij} qui permettront de dresser la liste des possibilités pour les graphes de Coxeter correspondants; il restera ensuite à voir que ces possibilités sont effectivement réalisées, c'est-à-dire que les groupes $W(M)$ correspondants sont finis.

Lemme 1. — *Pour tout i, on a* $\sum_{j \neq i} q_{ij}^2 < 1$.

Soit J l'ensemble des $j \in I$ distincts de i tels que $q_{ij} \neq 0$, c'est-à-dire tels que $\{i, j\}$ soit une arête de X. Si $j, j' \in J$ et $j \neq j'$, $\{j, j'\}$ n'est pas une arête (sinon i, j, j' formeraient un circuit), donc $(e_j|e_{j'}) = 0$. Soit $F = \sum_{j \in J} \mathbf{R}e_j$. Alors $(e_j)_{j \in J}$ est une base orthonormale de F. La distance d de e_i à F est donnée par $d^2 = 1 - \sum_{j \in J} (e_i|e_j)^2 = 1 - \sum_{j \in J} q_{ij}^2 = 1 - \sum_{j \neq i} q_{ij}^2$, d'où le lemme.

Lemme 2. — *Un sommet de* X *ne peut appartenir qu'à* 3 *arêtes au plus.*

En effet, si i est lié à h autres sommets, les relations $q_{ij}^2 \geqslant \frac{1}{4}$ pour ces autres sommets entraînent $\frac{h}{4} < 1$ d'après le lemme 1, donc $h \leqslant 3$.

Lemme 3. — *Si i appartient à* 3 *arêtes, ces arêtes sont d'ordre* 3.

Dans le cas contraire, on aurait, compte tenu de la relation $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\sum_{j \neq i} q_{ij}^2 \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

ce qui est impossible (lemme 1).

Lemme 4. — *S'il existe une arête d'ordre* $\geqslant 6$, *on a* $l = 2$.

Soit en effet $\{i, j\}$ cette arête. Si on avait $l > 2$, un des sommets i, j (par exemple i) serait lié à un troisième sommet j', puisque X est connexe. Compte tenu de la relation $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ on aurait

$$\sum_{k \neq i} q_{ik}^2 \geqslant \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

ce qui est impossible (lemme 1).

Lemme 5. — *Un sommet ne peut appartenir à deux arêtes distinctes d'ordre* $\geqslant 4$.

Soit i un tel sommet. On aurait $\sum_{j \neq i} q_{ij}^2 \geqslant (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1$, ce qui est impossible (lemme 1).

Soit $\{i, j\}$ une arête de X. Nous allons définir un nouveau graphe de Coxeter, qui sera dit déduit du graphe de *M par identification de i et j*. L'ensemble I' des sommets est l'ensemble quotient de I obtenu en identifiant i et j. Posons $p = \{i, j\}$, qui est un élément de I', et identifions les éléments de I distincts de i et j à leurs images canoniques dans I'. Soient k, k' deux éléments distincts de I'. Alors $\{k, k'\}$ est une arête du nouveau graphe dans les cas suivants :

1) k et k' sont distincts de p, et $\{k, k'\}$ est une arête de X; dans ce cas, on définit l'ordre de cette arête comme égal à $m_{kk'}$;

2) $k = p$, et l'un des ensembles $\{i, k'\}$, $\{j, k'\}$ est une arête de X; on définit l'ordre de $\{p, k'\}$ comme égal à $m_{ik'}$ si $\{i, k'\}$ est une arête de X, à $m_{jk'}$ si $\{j, k'\}$ est une arête de X (les deux éventualités ne peuvent se produire simultanément puisque X est un arbre).

Soit $M' = (m'_{ij})_{i,j \in \mathrm{I}'}$ la nouvelle matrice de Coxeter ainsi définie, et posons $q'_{ij} = -\cos \frac{\pi}{m'_{ij}}$. On a, pour $k \neq p$, $q'_{pk} = q_{ik} + q_{jk}$. Donc, si $(\xi_i) \in \mathbf{R}^{\mathrm{I}'}$,

$$\sum_{k, k' \in \mathrm{I}'} q'_{kk'} \xi_k \xi_{k'} = \sum_{k, k' \in \mathrm{I} - \{i, j\}} q_{kk'} \xi_k \xi_{k'} + 2 \sum_{k \in \mathrm{I} - \{i, j\}} (q_{ik} + q_{jk}) \xi_k \xi_p + \xi_p^2.$$

Posons $\xi_i = \xi_j = \xi_p$; on obtient

$$(1) \quad \sum_{k, k' \in \mathrm{I}'} q'_{kk'} \xi_k \xi_{k'} = \sum_{k, k' \in \mathrm{I}} q_{kk'} \xi_k \xi_{k'} + \xi_p^2 - \xi_i^2 - \xi_j^2 - 2 q_{ij} \xi_i \xi_j$$
$$= \sum_{k, k' \in \mathrm{I}} q_{kk'} \xi_k \xi_{k'} - (1 + 2 q_{ij}) \xi_p^2.$$

Lemme 6. — *Si* $\{i, j\}$ *est d'ordre* 3, $\mathrm{W}(M')$ *est un groupe de Coxeter fini.*

En effet, on a $q_{ij} = -\frac{1}{2}$, donc (1) devient

$$(2) \quad \sum_{k, k' \in \mathrm{I}'} q'_{kk'} \xi_k \xi_{k'} = \sum_{k, k' \in \mathrm{I}} q_{kk'} \xi_k \xi_{k'}$$

donc $(\xi_k)_{k \in \mathrm{I}'} \longmapsto \sum_{k, k' \in \mathrm{I}'} q'_{kk'} \xi_k \xi_{k'}$ est une forme quadratique positive non dégénérée. Il suffit alors d'appliquer le th. 2 du chap. V, § 4, n° 8.

Lemme 7. — *On a l'alternative suivante* :

a) X *possède un point de ramification* (chap. IV, Annexe, n° 1) *et un seul, et toutes les arêtes de* X *sont d'ordre* 3.

b) X *est une chaîne, et possède au plus une arête d'ordre* $\geqslant 4$.

Raisonnons par récurrence sur l.

a) Supposons que X possède un point de ramification i. Alors i appartient à 3 arêtes d'ordre 3, $\{i, k_1\}$, $\{i, k_2\}$, $\{i, k_3\}$ (lemmes 2 et 3). Si $l = 4$, le lemme est démontré. Sinon, k_1 par exemple appartient à une arête distincte des précédentes puisque X est connexe. Identifions i et k_1 dans le graphe de Coxeter de M. On obtient un nouveau graphe auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence grâce au lemme 6. Or l'image p de i est point de ramification du nouveau graphe X'. Donc X' n'a aucun autre point de ramification et a toutes ses arêtes d'ordre 3. Donc X a toutes ses arêtes d'ordre 3, et n'a aucun point de ramification distinct de i et k_1. Si k_1 était point de ramification dans X, p appartiendrait à au moins 4 arêtes dans X', contrairement au lemme 2.

b) Supposons que X ne possède aucun point de ramification. Alors X est une chaîne (chap. IV, Annexe, n° 3, prop. 3). Soit $\{i, j\}$ une arête d'ordre $\geqslant 4$. Si $l = 2$, le lemme est trivial. Sinon, i par exemple appartient à une arête $\{i, k\}$ avec $k \neq j$ (puisque X est connexe). Cette arête est d'ordre 3 (lemme 5). Identifions i et k dans le graphe de Coxeter de M. Grâce au lemme 6, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Soit p l'image de i dans le nouveau graphe X'. Dans X', $\{p, j\}$ est une arête d'ordre $\geqslant 4$, donc X' n'a aucune autre arête d'ordre $\geqslant 4$, donc $\{i, j\}$ est la seule arête d'ordre $\geqslant 4$ dans X.

Lemme 8. — *Soient* $i_1, i_2, \ldots, i_p$ *des sommets de* X *tels que* $\{i_1, i_2\}$, $\{i_2, i_3\}, \ldots, \{i_{p-1}, i_p\}$ *soient des arêtes d'ordre* 3. *Alors* $q\left(\sum_{r=1}^{p} re_{i_r}\right) = \frac{1}{2}p(p+1)$.

On a $(e_{i_r}|e_{i_r}) = 1$, $(e_{i_r}|e_{i_{r+1}}) = -\frac{1}{2}$, $(e_{i_r}|e_{i_s}) = 0$ si $s > r+1$. Donc

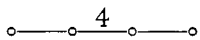
$$q\left(\sum_{r=1}^{p} re_{i_r}\right) = \sum_{r=1}^{p} r^2 - 2\sum_{r=1}^{p-1} \frac{1}{2} r(r+1) = p^2 - \sum_{r=1}^{p-1} r.$$

D'après *Ens.*, chap. III, § 5, n° 8, cor. de la prop. 14, ceci vaut

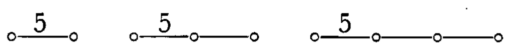
$$p^2 - \frac{1}{2}p(p-1) = \frac{1}{2}p(p+1).$$

Lemme 9. — *Supposons que* X *soit une chaîne ayant pour sommets* $1, 2, \ldots, l$ *et pour arêtes* $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{l-1, l\}$.

(i) *Si l'une des arêtes* $\{2, 3\}, \{3, 4\}, \ldots, \{l-2, l-1\}$ *est d'ordre* $\geqslant 4$, *cette arête est d'ordre* 4, *et le graphe est le suivant :*



(ii) *Si l'arête* $\{1, 2\}$ *est d'ordre* 5, *le graphe est l'un des suivants :*



On peut supposer $l > 2$ (lemme 4). Supposons que $\{i, i+1\}$ soit d'ordre $\geqslant 4$, avec $1 \leqslant i \leqslant l-1$. Posons

$$x = e_1 + 2e_2 + \cdots + ie_i, \qquad y = e_l + 2e_{l-1} + \cdots + (l-i)e_{i+1}, \qquad \text{et} \qquad j = l - i.$$

D'après le lemme 8, on a $\|x\|^2 = \frac{1}{2}i(i+1)$, $\|y\|^2 = \frac{1}{2}j(j+1)$. D'autre part, $(x|y) = ij(e_i|e_{i+1}) = -ij\cos\frac{\pi}{m}$ avec $m = 4$ ou 5 (lemme 4). On a

$$(x|y)^2 < \|x\|^2\|y\|^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{4}ij(i+1)(j+1) > i^2j^2\cos^2\frac{\pi}{m}$$

d'où

(3) $$(i+1)(j+1) > 4ij\cos^2\frac{\pi}{m} \geqslant 2ij.$$

Ceci donne d'abord $ij - i - j - 1 < 0$, ou $(i-1)(j-1) < 2$. Si

$$1 < i < l - 1,$$

on a $1 < j < l - 1$, donc $i = j = 2$, et en outre

$$9 > 16\cos^2\frac{\pi}{m}, \quad \text{donc} \quad \cos^2\frac{\pi}{m} < \cos^2\frac{\pi}{5}\,(*),$$

donc $m = 4$. Ceci prouve (i). Si $i = 1$ et $m = 5$, on a $2j + 2 > 4j\frac{3+\sqrt{5}}{8}$, ou $j\frac{\sqrt{5}-1}{2} < 2$, $j < \sqrt{5} + 1 < 4$, donc $l = j + 1 \leqslant 4$. Ceci prouve (ii).

Lemme 10. — *Si* X *admet un point de ramification* i, *le sous-graphe plein* $X - \{i\}$ *est réunion de trois chaînes, et si* $p - 1$, $q - 1$, $r - 1$ *sont les longueurs de ces chaînes, le triplet* (p, q, r) *est égal, à une permutation près, à l'un des triplets* $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 3,)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 1, m)$ (m *quelconque* $\geqslant 1$).

Le sommet i appartient à 3 arêtes (lemme 2), et il n'existe aucun autre point de ramification (lemme 7), donc le sous-graphe plein $X - \{i\}$ est somme de 3 chaînes X_1, X_2, X_3 dont chacune a un sommet terminal lié à i dans X. Soient $\{i_1, i_2\}$, $\{i_2, i_3\}$, ..., $\{i_{p-1}, i_p\}$ les arêtes de X_1, $\{j_1, j_2\}$, ..., $\{j_{q-1}, j_q\}$ celles de X_2, $\{k_1, k_2\}$, ..., $\{k_{r-1}, k_r\}$ celles de X_3, avec i, j_1, k_1 liés à i dans X. On peut supposer $p \geqslant q \geqslant r \geqslant 1$. Posons

$$\begin{aligned} x &= e_{i_p} + 2e_{i_{p-1}} + \cdots + pe_{i_1} \\ y &= e_{j_q} + 2e_{j_{q-1}} + \cdots + qe_{j_1} \\ z &= e_{k_r} + 2e_{k_{r-1}} + \cdots + re_{k_1}. \end{aligned}$$

(*) Les racines 5-èmes de 1 distinctes de 1 sont solutions de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Posant $x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, cette équation devient $(2x)^2 - 2 + 2x + 1 = 0$, ou $4x^2 + 2x - 1 = 0$, ou $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. D'où

$$2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{3+\sqrt{5}}{8} > \frac{5}{8} > \frac{9}{16}, \quad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Comme toutes les arêtes de X sont d'ordre 3 (lemme 7), le lemme 8 donne $\|x\|^2 = \frac{1}{2}p(p+1)$, $\|y\|^2 = \frac{1}{2}q(q+1)$, $\|z\|^2 = \frac{1}{2}r(r+1)$. D'autre part, e_i est orthogonal à $e_{i_2}, e_{i_3}, \ldots, e_{i_p}$, d'où $(e_i|x) = p(e_i|e_{i_1}) = -\frac{1}{2}p$; de même, $(e_i|y) = -\frac{1}{2}q$, $(e_i|z) = -\frac{1}{2}r$. Les vecteurs $\|x\|^{-1}x$, $\|y\|^{-1}y$, $\|z\|^{-1}z$ sont unitaires et deux à deux orthogonaux, et e_i n'appartient pas au sous-espace F qu'ils engendrent; le carré de la distance de e_i à F est

$$\begin{aligned}1 - \Big(e_i\Big|\frac{x}{\|x\|}\Big)^2 - \Big(e_i\Big|\frac{y}{\|y\|}\Big)^2 - \Big(e_i\Big|\frac{z}{\|z\|}\Big)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}\frac{p}{p+1} - \frac{1}{2}\frac{q}{q+1} - \frac{1}{2}\frac{r}{r+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{r+1}.\end{aligned}$$

Exprimant que cette quantité est > 0, il vient

$$(p+1)^{-1} + (q+1)^{-1} + (r+1)^{-1} > 1. \tag{4}$$

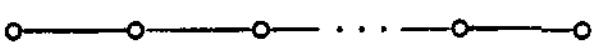
Donc $3(r+1)^{-1} > 1$, d'où $r < 2$ et finalement $r = 1$. Alors (4) donne

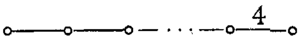
$$(p+1)^{-1} + (q+1)^{-1} > \frac{1}{2} \tag{5}$$

donc $2(q+1)^{-1} > \frac{1}{2}$, d'où $q \leqslant 2$. Enfin, si $q = 2$, (5) donne

$$(p+1)^{-1} > \frac{1}{6}, \qquad \text{d'où } p \leqslant 4.$$

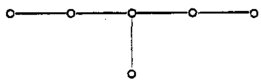
Théorème 1. — *Si* (W, S) *est un système de Coxeter fini irréductible, son graphe de Coxeter est isomorphe à l'un des suivants :*

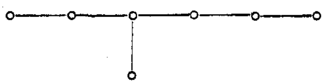
A_l  ($l \geqslant 1$ sommets)

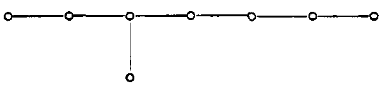
B_l 

($l \geqslant 2$ sommets)

D_l  ($l \geqslant 4$ sommets)

E_6 

E_7 

E_8 

F_4 $\quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\overset{4}{-\!\!\!-}\!\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$

G_2 $\quad \circ\overset{6}{-\!\!\!-}\!\circ$

H_3 $\quad \circ\overset{5}{-\!\!\!-}\!\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$

H_4 $\quad \circ\overset{5}{-\!\!\!-}\!\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$

$I_2(p)$ $\quad \circ\overset{p}{-\!\!\!-}\!\circ$ $(p = 5$ *ou* $p \geqslant 7)$.

Ces graphes de Coxeter sont deux à deux non isomorphes.

En effet, soit $M = (m_{ij})$ la matrice de Coxeter de (W, S), et soit $l = \text{Card}\,(S)$. Si l'un des m_{ij} est $\geqslant 6$, on a $l = 2$ (lemme 4) et le graphe de Coxeter de (W, S) est de type G_2 ou $I_2(p)$ avec $p \geqslant 7$. Supposons maintenant tous les $m_{ij} \leqslant 5$.

a) Si les m_{ij} ne sont pas tous égaux à 3, le graphe X de (W, S) est une chaîne et un seul des m_{ij} est égal à 4 ou 5 (lemme 7). Si l'un des m_{ij} est égal à 5, le lemme 9 montre que l'on a l'un des types H_3, H_4 ou $I_2(5)$. Si l'un des m_{ij} est égal à 4, le lemme 9 montre que l'on a l'un des types B_l, F_4.

b) Supposons tous les m_{ij} égaux à 3. Si X est une chaîne, le graphe de Coxeter est de type A_l. Sinon, le lemme 10 montre qu'il est de type E_6, E_7, E_8 ou D_l.

Le fait que les graphes de Coxeter énumérés soient deux à deux non isomorphes est évident.

Réciproquement :

Théorème 2. — *Les groupes de Coxeter définis par les graphes de Coxeter* $A_l, B_l, \ldots, I_2(p)$ *du th.* 1 *sont finis.*

C'est clair pour $I_2(p)$, le groupe correspondant étant le groupe diédral d'ordre $2p$ (chap. IV, § 1, n° 9).

Pour H_4 la forme quadratique correspondante est

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 - \xi_1\xi_2 - \xi_2\xi_3 - 2\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)\xi_3\xi_4$$
$$= \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 - \xi_1\xi_2 - \xi_2\xi_3 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\xi_3\xi_4$$
$$= \left(\xi_2 - \frac{\xi_1+\xi_3}{2}\right)^2 + \left(\xi_4 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\xi_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\xi_1 - \frac{1}{3}\xi_3\right)^2 + \frac{7-3\sqrt{5}}{24}\xi_3^2.$$

Comme $7 - 3\sqrt{5}$ est > 0, cette forme est positive non dégénérée, et le groupe de Coxeter correspondant est fini. Il en est de même de celui correspondant à H_3, puisqu'il est isomorphe à un sous-groupe du précédent (chap. IV, § 1, n° 8).

Pour les types A_l, B_l, $\ldots$, G_2, nous construirons, dans les n^{os} 5 à 13, des systèmes de racines ayant les groupes correspondants comme groupes de Weyl. On verra ainsi que ces groupes sont, non seulement finis, mais *cristallographiques* (§ 2, n° 5).

2. Graphes de Dynkin

Par abus de langage, nous appellerons *graphe normé* un couple (Γ, f) ayant les propriétés suivantes :

1) Γ est un graphe (dit *sous-jacent* à (Γ, f)).

2) Si E désigne l'ensemble des couples (i, j) tels que $\{i, j\}$ soit une arête de Γ, f est une application de E dans $\mathbf{R}$ telle que $f(i, j)f(j, i) = 1$ quel que soit $(i, j) \in \mathrm{E}$.

On a une notion évidente d'isomorphisme de graphes normés.

Soit R un système de racines réduit dans un espace vectoriel réel V. Nous allons lui associer un graphe normé (X, f), appelé *graphe de Dynkin* de R. Les sommets de X seront les éléments de l'ensemble I des orbites de W(R) dans la réunion des ensembles $\{\mathrm{B}\} \times \mathrm{B}$ (pour B décrivant l'ensemble des bases de R). Si $N = (n_{ij})_{i,j\in \mathrm{I}}$ (resp. $M = (m_{ij})_{i,j\in \mathrm{I}}$) est la matrice de Cartan (resp. la matrice de Coxeter) canonique de R (§ 1, n° 5, *Remarque* 7), deux sommets i et j de X seront liés si et seulement si $n_{ij} \neq 0$ et on pose alors :

$$f(i,j) = \frac{n_{ij}}{n_{ji}}.$$

Comme $n_{ij} = 0$ entraîne $n_{ji} = 0$, on a bien défini ainsi un graphe normé (X, f).

Soient $(x|y)$ un produit scalaire sur V, invariant par W(R), et $\mathrm{B} = (\alpha_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une base de R, indexée canoniquement. Les formules (7) et (9) du § 1, n° 1 montrent que les sommets i et j du graphe X sont liés si et seulement si

$$(\alpha_i|\alpha_j) \neq 0$$

et on a alors :

$$f(i,j) = \frac{(\alpha_i|\alpha_i)}{(\alpha_j|\alpha_j)}.$$

Compte tenu des résultats du § 1, n° 3 et 5, les seules possibilités sont les suivantes, à l'échange près de i et j :

1) i et j ne sont pas liés; $n_{ij} = n_{ji} = 0$; $m_{ij} = 2$;
2) $f(i, j) = f(j, i) = 1$; $n_{ij} = n_{ji} = -1$; $m_{ij} = 3$;
3) $f(i, j) = 2$, $f(j, i) = 1/2$; $n_{ij} = -2$; $n_{ji} = -1$; $m_{ij} = 4$;
4) $f(i, j) = 3$, $f(j, i) = 1/3$; $n_{ij} = -3$; $n_{ji} = -1$; $m_{ij} = 6$.

On voit donc que la connaissance du graphe de Dynkin de R détermine la matrice de Cartan et la matrice de Coxeter de R et par suite détermine R à isomorphisme près. Plus précisément, le cor. de la prop. 15 du § 1, nº 5 entraîne le résultat suivant :

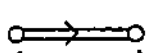
PROPOSITION 1. — *Soient* R_1 *et* R_2 *deux systèmes de racines réduits dans des espaces vectoriels réels* V_1 *et* V_2. *Soient* $B_1 = (\alpha_i)_{i \in I_1}$ *et* $B_2 = (\alpha_i)_{i \in I_2}$ *des bases de* R_1 *et* R_2, *indexées canoniquement. Soit* λ *un isomorphisme du graphe de Dynkin de* R_1 *sur le graphe de Dynkin de* R_2. *Il existe alors un unique isomorphisme de* V_1 *sur* V_2 *transformant* R_1 *en* R_2 *et transformant* α_i *en* $\alpha_{\lambda(i)}$ *pour tout* $i \in I_1$.

Il est clair qu'un automorphisme de R définit un automorphisme du graphe de Dynkin de R, d'où un homomorphisme φ du groupe A(R) dans le groupe des automorphismes du graphe de Dynkin de R.

COROLLAIRE. — *L'homomorphisme* φ *définit par passage au quotient un isomorphisme du groupe* A(R)/W(R) *sur le groupe des automorphismes du graphe de Dynkin de* R.

On a évidemment $\varphi(g) = \mathrm{Id}$ pour tout $g \in W(R)$. D'autre part, la prop. 1 montre qu'il existe un isomorphisme ψ du groupe des automorphismes du graphe de Dynkin de R sur le sous-groupe E des éléments de A(R) laissant fixe une base donnée B de R, tel que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$. Comme A(R) est le produit semi-direct de E et de W(R) (§ 1, nº 5, prop. 16), le corollaire en résulte.

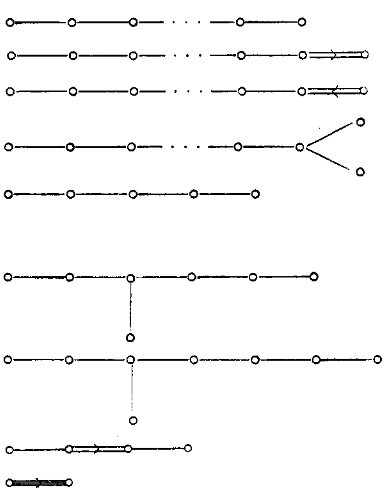
Dans la pratique, on représente le graphe de Dynkin (X, f) par un dessin composé de points et de traits de la manière suivante. Les points correspondent aux sommets de X; deux points correspondant à deux sommets distincts i et j sont liés par 0, 1, 2 ou 3 traits suivants que l'on est dans le cas 1), 2), 3) ou 4) ci-dessus (à l'échange près de i et j). De plus, dans les cas 3) et 4), c'est-à-dire lorsque $f(i, j) > 1$ ou encore lorsque les racines α_i et α_j ne sont pas orthogonales et ne sont pas de même longueur, on place sur les deux ou trois traits joignant les points correspondant à i et j un signe d'inégalité $>$ orienté vers le point correspondant à j (c'est-à-dire à la racine de plus petite longueur) :


i j (pour $f(i,j) = 2$), 
i j (pour $f(i,j) = 3$).

Il est clair que la donnée de ce dessin permet de reconstituer le graphe de Dynkin (X, f).

On remarquera que la figure associée au graphe de Coxeter de W(R) s'obtient à partir de la figure ainsi associée au graphe de Dynkin de R en conservant les points et les traits simples et en remplaçant les doubles traits (resp. triples traits) par un trait surmonté du nombre 4 (resp. 6). Inversement, si l'on connaît le graphe de Coxeter de W(R), l'opération inverse permet de reconstituer la figure associée au graphe de Dynkin de R, à l'exception des signes d'inégalité surmontant les doubles et triples traits. On déduit alors immédiatement du th. 1 la liste des graphes de Dynkin possibles. Plus précisément :

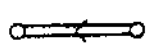
THÉORÈME 3. — *Si* R *est un système de racines réduit et irréductible, son graphe de Dynkin est isomorphe à l'un des graphes représentés par les figures suivantes :*



A_l $(l \geqslant 1$ sommets)
B_l $(l \geqslant 2$ sommets)
C_l $(l \geqslant 3$ sommets)
D_l $(l \geqslant 4$ sommets)
E_6
E_7
E_8
F_4
G_2

Ces graphes de Dynkin sont deux à deux non isomorphes et, pour chacun d'eux, il existe un système de racines irréductible et réduit l'admettant (à un isomorphisme près) comme graphe de Dynkin.

La première assertion résulte aussitôt du th. 1, compte tenu des remarques qui précèdent, du fait que les groupes de Coxeter de graphe H_3, H_4 et $I_2(p)$ (pour $p = 5$ ou $p \geqslant 7$) ne sont pas cristallographiques, et de ce que les deux inégalités possibles pour le double (resp. triple) trait du graphe de Dynkin associé au graphe de Coxeter F_4 (resp. G_2) donnent des graphes de Dynkin isomorphes. La deuxième assertion est évidente et la troisième résultera de la construction explicite d'un système de racines réduit et irréductible pour chacun des types, construction qui va être effectuée dans les n^{os} 5 à 13.

Remarques. — 1) Le graphe A_1 est réduit à un seul sommet; on le note aussi B_1 ou C_1. Le graphe B_2  est aussi noté C_2. Le graphe A_3 est aussi noté D_3. Enfin, on note D_2 le graphe composé de deux sommets non liés. (Ces conventions proviennent des propriétés des systèmes de racines correspondants, cf. n^{os} 5 à 8.)

2) Si (X, f) est le graphe de Dynkin d'un système de racines réduit R, le graphe de Dynkin du système inverse s'identifie à (X, f^{-1}). Autrement dit, la figure associée au graphe de Dynkin de $R^\vee$ s'obtient à partir de celle associée au graphe de Dynkin de R en renversant les signes d'inégalité. Si R est irréductible, on voit que R est isomorphe à $R^\vee$, sauf si R est de type B_l ou C_l, auquel cas $R^\vee$ est de type C_l ou B_l.

3. Groupe de Weyl affine et graphe de Dynkin complété

Soit R un système de racines réduit et irréductible et soit (X, f) son graphe de Dynkin. Nous allons définir un autre graphe normé $(\tilde{X}, \tilde{f})$ que nous appellerons le *graphe de Dynkin complété* de R. L'ensemble $\tilde{I}$ des sommets de $\tilde{X}$ se compose de l'ensemble I des sommets de X et d'un sommet noté 0, n'appartenant pas à I. Pour définir $\tilde{f}$, choisissons une base $B = (\alpha_i)_{i \in I}$ de R et un produit scalaire $(x|y)$ invariant par W(R). Soit α_0 l'*opposée de la plus grande racine* pour l'ordre défini par B. Deux sommets distincts, $i, j \in \tilde{I}$ sont liés si et seulement si $(\alpha_i|\alpha_j) \neq 0$ et on pose alors

$$\tilde{f}(i, j) = \frac{(\alpha_i|\alpha_i)}{(\alpha_j|\alpha_j)}.$$

On vérifie aussitôt que le graphe $\tilde{X}$ et l'application $\tilde{f}$ ainsi définis ne dépendent pas du choix de B ni du produit scalaire.

Si le rang l de R est égal à 1, on a $I = \{i\}$ et $\alpha_0 = -\alpha_i$; d'où $\tilde{f}(0, i) = 1$. Si $l \geqslant 2$, α_0 n'est proportionnelle à aucune des α_i et $(\alpha_0|\alpha_i)$ est $\leqslant 0$ (§ 1, nº 8, prop. 25). Pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\tilde{I}$, les seules possibilités sont celles notées 1), 2), 3), 4) au numéro précédent (en posant par exemple $n_{0i} = n(\alpha_0, \alpha_i)$ et m_{0i} = ordre de $s_{\alpha_0}s_{\alpha_i}$ pour tout $i \in I$).

Dans le cas $l \geqslant 2$, on représente le graphe de Dynkin complété par une figure avec les mêmes conventions qu'au numéro précédent, on indique parfois en pointillé les traits joignent le sommet 0 aux autres sommets. Remarquons que le signe d'inégalité > placé sur un tel trait, s'il existe, est toujours dirigé vers le sommet distinct de 0, puisque α_0 est une racine de la plus grande longueur possible (§ 1, nº 8, prop. 25). On identifie (X, f) au sous-graphe de $(\tilde{X}, \tilde{f})$ obtenu en supprimant le sommet 0.

L'action de A(R) sur (X, f) se prolonge en une action sur $(\tilde{X}, \tilde{f})$, laissant 0 fixe, et W(R) opère trivialement sur $(\tilde{X}, \tilde{f})$.

Reprenons les notations du § 2. La prop. 5 du § 2, nº 2, jointe au th. 1 du chap. V, § 3, nº 2, montre que le graphe de Coxeter Σ du groupe de Weyl affine $W_a(R)$ se déduit de $(\tilde{X}, \tilde{f})$ par les mêmes règles que celles permettant de passer de (X, f) au graphe de Coxeter de W(R). D'autre part, soit G le normalisateur de $W_a(R)$ (§ 2, nº 3). A tout $g \in G$ correspond un automorphisme $\varphi(g)$ de Σ et on a $\varphi(g) = \mathrm{Id}$ si $g \in W_a(R)$. Inversement, à tout automorphisme λ de Σ correspond, d'après la prop. 11 du chap. V, § 4, nº 9, un élément $g = \psi(\lambda)$ et un seul, conservant une alcôve C donnée et tel que $\varphi(g) = \lambda$. Comme G est produit semi-direct du sous-groupe G_C des éléments conservant C et de $W_a(R)$ (§ 2, nº 3), on en déduit que φ fournit par passage au quotient un *isomorphisme de* G/W_a (ou de G_C) *sur* $\mathrm{Aut}(\Sigma)$. On vérifie aussitôt que le composé de cet isomorphisme avec l'application canonique de $A(R)/W(R)$ dans G/W_a coïncide avec l'homomorphisme de $A(R)/W(R)$ dans $\mathrm{Aut}(\Sigma)$

déduit de l'homomorphisme de $A(R)/W(R)$ dans $\mathrm{Aut}(\tilde{X}, \tilde{f})$ défini plus haut. D'après le § 2, n° 3, le groupe $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ est isomorphe au produit semi-direct de $A(R)/W(R)$ par $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$, et $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ est isomorphe au groupe $\Gamma_C = G_C \cap W'_a$ (avec les notations du § 2, n° 3) ; l'élément de $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ correspondant à l'élément γ_i de Γ_C transforme le sommet 0 en le sommet i de Σ.

Remarque. — On peut montrer que l'application canonique

$$\mathrm{Aut}(\tilde{X}, \tilde{f}) \to \mathrm{Aut}(\Sigma)$$

est un isomorphisme.

Théorème 4. — *Soit* (W, S) *un système de Coxeter irréductible, avec* S *fini. Pour que la forme quadratique associée* (chap. V, § 4, n° 1) *soit positive et dégénérée, il faut et il suffit que le graphe de Coxeter de* (W, S) *soit isomorphe à l'un des suivants :*

$\tilde{A}_1$

$\tilde{A}_l$ $(l \geqslant 2)$ — (*circuit à* $l+1$ *sommets*)

$\tilde{B}_2$

$\tilde{B}_l$ $(l \geqslant 3)$ — ($l+1$ *sommets*)

$\tilde{C}_l$ $(l \geqslant 3)$ — ($l+1$ *sommets*)

$\tilde{D}_l$ $(l \geqslant 4)$ — ($l+1$ *sommets*)

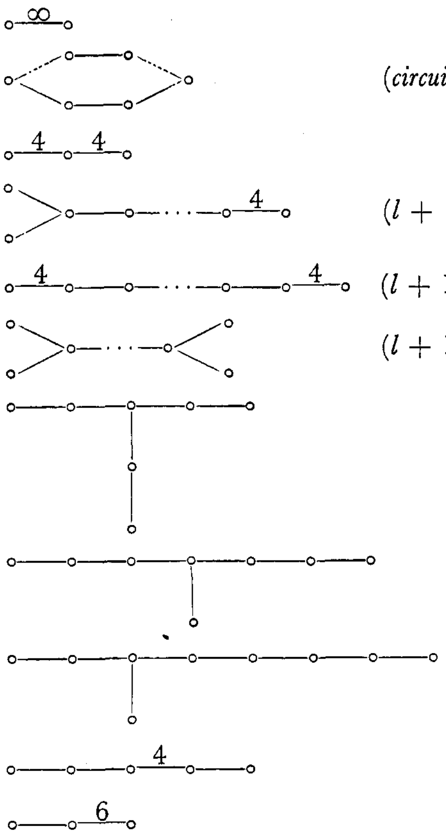
$\tilde{E}_6$

$\tilde{E}_7$

$\tilde{E}_8$

$\tilde{F}_4$

$\tilde{G}_2$



Ces graphes de Coxeter sont deux à deux non isomorphes.

D'après le chap. V, § 4, n° 9 et la prop. 8 du § 2, n° 5, les systèmes de Coxeter dont la forme quadratique est positive et dégénérée sont ceux qui correspondent aux groupes de Weyl affines des systèmes de racines réduits et irréductibles. Le théorème résulte alors de la détermination des graphes de Dynkin complétés faite dans les nos 5 à 13 ci-après.

4. Préliminaires à la construction des systèmes de racines

Soient V un espace vectoriel réel de dimension $l \geqslant 1$ muni d'un produit scalaire $(x|y)$, L un sous-groupe discret de V, Λ un ensemble fini de nombres >0, et R l'ensemble des $\alpha \in \mathrm{L}$ tels que $(\alpha|\alpha) \in \Lambda$. Supposons que R engendre V et que, pour tout couple (α, β) de points de R, le nombre $2\dfrac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)}$ soit entier. Alors, R *est un système de racines dans* V. En effet, R vérifie évidemment $(\mathrm{SR_I})$. Soit $\alpha \in \mathrm{R}$; soit s_α la réflexion orthogonale $x \longmapsto x - 2\dfrac{(x|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha$; alors, si $\beta \in \mathrm{R}$, on a $2\dfrac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbf{Z}$, donc $s_\alpha(\beta) \in \mathrm{L}$, et par ailleurs $\|s_\alpha(\beta)\| = \|\beta\|$, donc $s_\alpha(\beta) \in \mathrm{R}$; donc R vérifie $(\mathrm{SR_{II}})$ et $(\mathrm{SR_{III}})$, et est réduit si Λ ne contient pas deux nombres de la forme λ et 4λ.

Nous prendrons pour V un sous-espace de $\mathrm{E} = \mathbf{R}^n$. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ la base canonique de E; on munit E du produit scalaire $(x|y)$ pour lequel cette base est orthonormale et on identifie E^* à E (resp. V^* à V) au moyen de ce produit scalaire. Définissons dans E les sous-groupes $\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3$ comme suit :

1) L_0 est le $\mathbf{Z}$-module de base (ε_i). On a $(\alpha|\beta) \in \mathbf{Z}$ pour $\alpha, \beta \in \mathrm{L}_0$. Les vecteurs $\alpha \in \mathrm{L}_0$ pour lesquels $(\alpha|\alpha) = 1$ sont les $\pm\varepsilon_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; ceux pour lesquels $(\alpha|\alpha) = 2$ sont les $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ pour $i < j$ (les deux signes $\pm$, dans $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, sont choisis indépendamment l'un de l'autre; on adopte une convention analogue dans toute la fin de ce paragraphe).

2) L_1 est le sous-$\mathbf{Z}$-module de L_0 formé des $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\varepsilon_i \in \mathrm{L}_0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$ soit pair; comme ξ_i et ξ_i^2 ont même parité, il revient au même de dire que $(x|x)$ est pair. Soit L_1' le sous-module de L_1 engendré par les $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$; on a $\sum_{i=1}^{n} \xi_i\varepsilon_i \equiv (\sum_{i=1}^{n} \xi_i)\varepsilon_n \pmod{\mathrm{L}_1'}$, et comme $2\varepsilon_n = (\varepsilon_1 + \varepsilon_n) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_n) \in \mathrm{L}_1'$, on voit que $\mathrm{L}_1' = \mathrm{L}_1$. Comme L_0 est engendré par L_1 et ε_1, $\mathrm{L}_0/\mathrm{L}_1$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

3) $\mathrm{L}_2 = \mathrm{L}_0 + \mathbf{Z}(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i)$. Il est clair qu'un élément $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\varepsilon_i$ de V est dans L_2 si et seulement si

$$(6) \qquad 2\xi_i \in \mathbf{Z}, \qquad \xi_i - \xi_j \in \mathbf{Z} \quad \text{quels que soient } i \text{ et } j.$$

Comme $\left(\varepsilon_k \middle| \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right) = \frac{1}{2}$ pour tout k, et que $\left\|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right\|^2 = \frac{n}{4}$, on a

$(\alpha|\beta) \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ pour $\alpha, \beta \in L_2$ si n est pair. Le groupe L_2/L_0 est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

4) $L_3 = L_1 + \mathbf{Z}(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i)$. Si n est un multiple de 4, L_3 est l'ensemble des $\sum_{i=1}^{n} \xi_i\varepsilon_i$ qui vérifient (6) et en outre la condition $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \in 2\mathbf{Z}$; dans ce cas, on a $(\alpha|\beta) \in \mathbf{Z}$ quels que soient $\alpha, \beta \in L_3$.

Il est immédiat que le sous-groupe de E associé à L_0 (resp. L_1, L_2) est L_0 (resp. L_2, L_1). Le sous-groupe de E associé à L_3 est l'ensemble des

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\varepsilon_i \in L_2$$

tels que $(x|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i) \in \mathbf{Z}$, c'est-à-dire tels que $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \in 2\mathbf{Z}$; si $n \equiv 0 \pmod{4}$, ce sous-groupe associé est donc L_3.

Le groupe commutatif L_2/L_1 est d'ordre 4, donc isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ou à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ (*Alg.*, chap. VII, § 4, nº 6, th. 3). Si n est impair, on a

$$p(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i) \in L_1 \Longleftrightarrow p \equiv 0 \pmod{4}$$

donc L_2/L_1 est cyclique d'ordre 4. Si n est pair, on a

$$p(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i) \in L_1 \Longleftrightarrow p \equiv 0 \pmod{2}$$

donc L_2/L_1, qui contient deux éléments distincts d'ordre 2, est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

Nous utiliserons ces notations dans les neuf nºˢ suivants et dans les planches. Pour chaque type de graphe de Dynkin du th. 3, nous expliciterons :

(I) Un système de racines R et le nombre de racines.

(II) Une base B de R, et les racines positives correspondantes. La base B sera indexée par les entiers $1, \ldots, l$.

(III) Le nombre de Coxeter h (§ 1, nº 11).

(IV) La plus grande racine $\tilde{\alpha}$ (pour l'ordre défini par B) et le graphe de Dynkin complété (nº 3). Nous indiquerons à côté de chaque sommet la racine correspondante de B.

(V) Le système inverse $R^\vee$, la forme bilinéaire canonique et la constante $\gamma(R)$ (§ 1, nº 12).

(VI) Les poids fondamentaux relativement à B (§ 1, nº 10).

(VII) La somme des racines positives.

(VIII) Les groupes P(R), Q(R), P(R)/Q(R) et l'indice de connexion (§ 1, nº 9).

(IX) Les exposants de W(R) (chap. V, § 6, nº 2, déf. 2). Dans les cas A_l, B_l, C_l et D_l nous déterminerons les invariants symétriques.

(X) L'ordre de W(R) (et éventuellement sa structure).

(XI) le groupe A(R)/W(R), son action sur le graphe de Dynkin, et l'élément w_0 de W(R) qui transforme B en $-$B.

(XII) L'action de $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ sur le graphe de Dynkin complété et l'action de A(R)/W(R) sur $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$.

Pour chaque graphe de Dynkin du th. 3, ces données seront rassemblées dans les planches I à IX, en les ordonnant de façon uniforme comme ci-dessus. On y ajoute :

(XIII) La matrice de Cartan, qui se déduit du graphe de Dynkin comme on l'a expliqué au nº 2.

5. Systèmes de type B_l ($l \geqslant 2$)

(I) Considérons dans $V = \mathbf{R}^l$ le groupe L_0 (nº 4). Soit R l'ensemble des $\alpha \in L_0$ tels que $(\alpha|\alpha) = 1$ ou $(\alpha|\alpha) = 2$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $\pm\, \varepsilon_i$ ($1 \leqslant i \leqslant l$) et $\pm\, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ($1 \leqslant i < j \leqslant l$). Il est clair que R engendre V et que $2(\alpha|\beta)/(\alpha|\alpha) \in \mathbf{Z}$ quels que soient α, $\beta \in$ R. Donc R est un système de racines réduit dans V (nº 4). Le nombre de racines est $n = 2l + 4\dfrac{l(l-1)}{2} = 2l^2$.

(II) Posons

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \ldots,\ \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l,\ \alpha_l = \varepsilon_l.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_l && (1 \leqslant i \leqslant l)\\
&\varepsilon_i + \varepsilon_j = (\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_l) + (\alpha_j + \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_l) && (1 \leqslant i < j \leqslant l).\\
&\varepsilon_i - \varepsilon_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{j-1} && (1 \leqslant i < j \leqslant l).
\end{aligned}$$

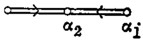
Donc $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ est une base de R (§ 1, nº 7, cor. 3 de la prop. 20). En outre, on a $\|\alpha_i\|^2 = 2$ pour $i < l$, $\|\alpha_l\|^2 = 1$, $(\alpha_i|\alpha_{i+1}) = -1$ pour $1 \leqslant i \leqslant l-1$, $(\alpha_i|\alpha_j) = 0$ pour $j > i+1$; le graphe de Dynkin de R est donc de type B_l, ce qui montre que R est irréductible. Les racines positives sont les ε_i et les $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ($i < j$).

(III) D'après le th. 1 (ii) du chap. V, § 6, nº 2, on a

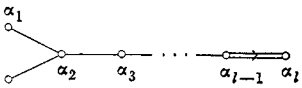
$$h = n/l = 2l.$$

(IV) Soit $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \cdots + 2\alpha_l$, qui est une racine. La somme de ses coordonnées relativement à la base (α_i) est $2l - 1 = h - 1$. Compte tenu de la prop. 31 du § 1, nº 11, $\tilde{\alpha}$ est la plus grande racine de R. On a $(\tilde{\alpha}|\alpha_i) = 0$ pour $i \neq 2$ et $(\tilde{\alpha}|\alpha_2) = 1$. Comme α_2 est de longueur 1 (resp. $\sqrt{2}$) quand $l = 2$ (resp. $l \geqslant 3$), on en déduit le graphe de Dynkin complété de R :

pour $l = 2$



pour $l \geqslant 3$



(V) La formule $\alpha^\vee = \dfrac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)}$ donne pour $R^\vee$ l'ensemble des vecteurs $\pm 2\varepsilon_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, $\pm\, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant l)$. Le graphe de Dynkin de $R^\vee$ se déduit de celui de R par le procédé expliqué au n° 2, et l'on voit que $R^\vee$ est du type C_l.

Les racines non orthogonales à $\beta = \varepsilon_1$ sont $\pm\, \varepsilon_1$ et $\pm\, \varepsilon_1 \pm \varepsilon_j$ pour $2 \leqslant j \leqslant l$, donc sont au nombre de $4l - 2$; pour chacune de ces racines α, on a $n(\alpha, \beta) = \pm\, 2$. La formule (17) du § 1, n° 12 montre que, pour Φ_R, le carré de la longueur de β est $(4l-2)^{-1}$; donc $\Phi_R(x, y) = (x|y)/(4l-2)$. Appliquons la formule (18) du § 1, n° 12 avec $x = y = \beta$. Il vient

$$2 + \frac{1}{4}(4l - 4) = \gamma(R)\,\frac{1}{4l-2}$$

d'où $\gamma(R) = (l+1)(4l-2)$.

(VI) On calcule aisément les poids fondamentaux ϖ_i $(1 \leqslant i \leqslant l)$ tels que $(\varpi_i|\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$, et l'on trouve

$$\begin{aligned} \varpi_i &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i \\ &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_l) \quad (i < l) \\ \varpi_l &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_l) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + l\alpha_l). \end{aligned}$$

(VII) La somme des racines positives est

$$\begin{aligned} 2\rho &= (2l-1)\varepsilon_1 + (2l-3)\varepsilon_2 + \cdots + 3\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l \\ &= (2l-1)\alpha_1 + 2(2l-2)\alpha_2 + \cdots + i(2l-i)\alpha_i + \cdots + l^2\alpha_l. \end{aligned}$$

(VIII) On a $Q(R) = L_0$ (n° 4), et $P(R)$ est engendré par $Q(R)$ et ϖ_l, donc est égal à L_2 (n° 4). Donc $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, et l'indice de connexion est égal à 2.

(IX) et (X) Dans $\mathbf{R}^l$, la réflexion orthogonale $s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ $(i \neq j)$ échange ε_i et ε_j et laisse invariants les ε_k d'indice k distinct de i et j. Les $s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ engendrent un groupe G_1 isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_l$. La réflexion orthogonale s_{ε_i} transforme ε_i en $-\,\varepsilon_i$ et laisse invariants les ε_k d'indice k distinct de i. Les s_{ε_i} engendrent un groupe G_2 isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l$. Le groupe de Weyl $W(R)$ est engendré par G_1 et G_2, et G_2 est distingué dans $W(R)$, donc $W(R)$

est isomorphe à un produit semi-direct de $\mathfrak{S}_l$ par $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l$. Son ordre est par suite $2^l.l!$

L'algèbre symétrique $\mathsf{S}(\mathbf{R}^l)$ s'identifie canoniquement à l'algèbre des fonctions polynômes $P(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ sur $\mathbf{R}^l$. Pour qu'un tel polynôme soit invariant par $W(R)$, il faut d'abord que

$$P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l) = P(\pm \xi_1, \pm \xi_2, \ldots, \pm \xi_l)$$

quels que soient les l signes du second membre, c'est-à-dire que

$$P(\xi_1, \ldots, \xi_l) = Q(\xi_1^2, \ldots, \xi_l^2)$$

où Q est un polynôme; il faut ensuite que Q soit une fonction polynôme symétrique; et ces conditions sont suffisantes. Par suite (*Alg.*, chap. V, App. I), $\mathsf{S}(\mathbf{R}^l)^{W(R)}$ est l'algèbre engendrée par les l fonctions polynômes

$$t_i = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_l} \xi_{\tau(1)}^2 \xi_{\tau(2)}^2 \ldots \xi_{\tau(i)}^2 \quad (1 \leqslant i \leqslant l).$$

Par ailleurs, le degré de transcendance sur $\mathbf{R}$ du corps des fractions de $\mathsf{S}(\mathbf{R}^l)^{W(R)}$ est l, donc les t_i sont algébriquement indépendants. Comme les t_i sont de degré 2, 4, ..., $2l$, on en conclut que les exposants de $W(R)$ sont (chap. V, § 6, nº 2, prop. 3) :

$$1, 3, 5, \ldots, 2l-1.$$

(XI) Le seul automorphisme du graphe de Dynkin est l'identité. On a donc $A(R) = W(R)$ et $-1 \in W(R)$. Comme -1 transforme B en $-B$, on en déduit que $w_0 = -1$.

(XII) Le groupe $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ est dual de $P(R)/Q(R)$, donc isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Son élément non trivial permute les sommets correspondants à α_0 et α_1 et laisse fixes les autres.

6. Systèmes de type C_l $(l \geqslant 2)$.

(I) L'existence de systèmes de racines de type C_l a été démontrée au nº 5, puisqu'on a vu que le système inverse d'un système de type B_l est de type C_l. Un système de racines R de type C_l est donc obtenu en prenant dans $\mathbf{R}^l$ les vecteurs $\pm 2\varepsilon_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, et $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant l)$. Le nombre de racines est $2l^2$.

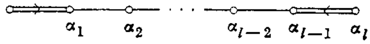
(II) On obtient une base de R en prenant l'image, par l'application $\alpha \longmapsto \frac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)}$, de la base du système considéré au nº 5. On obtient :

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \alpha_l = 2\varepsilon_l.$$

Les racines positives sont les $2\varepsilon_i$ et les $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(i < j)$.

(III) Le nombre de Coxeter est le même que pour le système inverse : $h = 2l$.

(IV) Soit $\tilde{\alpha} = 2\varepsilon_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l$, qui est une racine. La somme de ses coordonnées relativement à (α_i) est $2l - 1 = h - 1$. Donc $\tilde{\alpha}$ est la plus grande racine. On a $(\tilde{\alpha}|\alpha_i) = 0$ pour $i \neq 1$, $(\tilde{\alpha}|\alpha_1) = 2$.

D'où le graphe de Dynkin complété : 

(V) On a déjà déterminé $R^\vee$, qui est de type B_l. D'après la formule (19) du § 1, n° 12, et d'après le n° 5 (V), le carré de la longueur de $2\varepsilon_i$ pour Φ_R est

$$((l+1)(4l-2))^{-1}((4l-2)^{-1})^{-1} = (l+1)^{-1};$$

donc $\Phi_R(x, y) = (x|y)/4(l+1)$.

On a $\gamma(R) = \gamma(R^\vee) = (l+1)(4l-2)$.

(VI) On trouve facilement les poids fondamentaux :

$$\begin{aligned}\varpi_i &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i \\ &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (i-1)\alpha_{i-1} + i\left(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \frac{1}{2}\alpha_l\right) \qquad (i \leqslant l).\end{aligned}$$

(VII) La somme des racines positives est

$$\begin{aligned}2\rho &= 2l\varepsilon_1 + (2l-2)\varepsilon_2 + \cdots + 4\varepsilon_{l-1} + 2\varepsilon_l \\ &= 2l\alpha_1 + 2(2l-1)\alpha_2 + \cdots + i(2l-i+1)\alpha_i + \cdots \\ &\quad + (l-1)(l+2)\alpha_{l-1} + \frac{1}{2}l(l+1)\alpha_l.\end{aligned}$$

(VIII) D'après le n° 4, et le n° 5 (VIII), on a $Q(R) = L_1$, $P(R) = L_0$; $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, et l'indice de connexion est 2.

(IX) et (X) Ces questions ne concernent que $W(R)$, et les résultats sont donc les mêmes que pour le type B_l.

(XI) Le même raisonnement qu'au n° 6 montre que $A(R) = W(R)$ et $w_0 = -1$.

(XII) Le seul élément non neutre de $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ définit l'unique automorphisme non trivial du graphe de Dynkin complété : il échange les sommets correspondant à α_j et α_{l-j} pour $0 \leqslant j \leqslant l$.

7. Systèmes de type A_l ($l \geqslant 1$).

(I) et (II) Dans $E = \mathbf{R}^{l+1}$, soit V l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{l+1} \xi_i = 0$. En remplaçant l par $l+1$ dans le n° 5, on obtient un système R' de type B_{l+1} dans E, admettant la base

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \ldots,\ \alpha_l = \varepsilon_l - \varepsilon_{l+1},\ \alpha_{l+1} = \varepsilon_{l+1}.$$

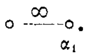
Comme $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ engendrent V, $R = R' \cap V$ est un système de racines dans

V, de base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ (§ 1, nº 7, cor. 4 de la prop. 20). D'après les calculs de produits scalaires du nº 5, il est immédiat que R est de type A_l. Les éléments de R sont les $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i \neq j,\ 1 \leqslant i \leqslant l+1,\ 1 \leqslant j \leqslant l+1)$. Leur nombre est $n = l(l+1)$. Les racines positives sont les $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ où $i < j$.

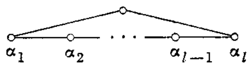
(III) On a $h = \dfrac{n}{l} = l + 1$.

(IV) Soit $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 - \varepsilon_{l+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l$, qui est une racine. La somme de ses coordonnées relativements à (α_i) est $l = h - 1$. Donc $\tilde{\alpha}$ est la plus grande racine.

Pour $l = 1$, on a $\tilde{\alpha} = \alpha_1$, d'où $(\tilde{\alpha}|\alpha_1) = 2$; le graphe de Coxeter du groupe $W_a(R)$ est



Pour $l \geqslant 2$, on a $(\tilde{\alpha}|\alpha_i) = 0$ pour $0 < i < l$ et $(\tilde{\alpha}|\alpha_1) = (\tilde{\alpha}|\alpha_l) = 1$. D'où le graphe de Dynkin complété :



(V) Identifiant V à son dual grâce au produit scalaire, on a $\alpha^\vee = \dfrac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)} = \alpha$ pour tout $\alpha \in R$, donc $R^\vee = R$.

Pour la forme Φ_R, la longueur des racines est $h^{-1/2} = (l+1)^{-1/2}$ (§ 1, nº 12); donc $\Phi_R(x, y) = (x|y)/2(l+1)$.

On a $\gamma(R) = (l+1)^2$ (§ 1, nº 12, formule (20)).

(VI) Soit $(\varpi_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ la famille des poids fondamentaux. Posons

$$\varpi_i = \sum_{j=1}^{l+1} \xi_{ij}\varepsilon_j, \qquad \text{avec } \xi_{ij} \in \mathbf{R}.$$

Exprimant que $(\varpi_i|\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$, et $\varpi_i \in V$, on a

$$\xi_{ii} - \xi_{i,i+1} = 1,\ \xi_{ij} - \xi_{i,j+1} = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq i, \quad \sum_{j=1}^{l+1} \xi_{ij} = 0,$$

ce qui donne aisément

$$\begin{aligned}\varpi_i &= \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i - \frac{i}{l+1}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{l+1}) \\ &= \frac{1}{l+1}\big((l - i + 1)(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (i-1)\alpha_{i-1}) \\ &\qquad + i((l - i + 1)\alpha_i + (l - i)\alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_l)\big).\end{aligned}$$

(VII) La somme des racines positives est

$$\begin{aligned}2\rho &= l\varepsilon_1 + (l-2)\varepsilon_2 + (l-4)\varepsilon_3 + \cdots - (l-2)\varepsilon_l - l\varepsilon_{l+1} \\ &= l\alpha_1 + 2(l-1)\alpha_2 + \cdots + i(l-i+1)\alpha_i + \cdots + l\alpha_l.\end{aligned}$$

(VIII) Introduisons dans $E = \mathbf{R}^{l+1}$ le sous-groupe L_0 du nº 4. Soit p le projecteur orthogonal de E sur V. D'après le § 1, nº 10, prop. 28, on a

$$Q(R) = Q(R') \cap V = L_0 \cap V, \text{ et } P(R) = p(P(R'));$$

tenant compte du fait que le dernier poids fondamental de R′ est orthogonal à V, on a $P(R) = p(Q(R')) = p(L_0)$. Ainsi, P(R) est le groupe engendré par les $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ et par $p(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 - (l+1)^{-1} \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon_i$, donc

$$P(R) = Q(R) + \mathbf{Z}(\varepsilon_1 - (l+1)^{-1} \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon_i).$$

Or $l+1$ est le plus petit entier $m > 0$ tel que $mp(\varepsilon_1) \in Q(R)$. Donc $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/(l+1)\mathbf{Z}$ et l'indice de connexion est $l+1$.

(IX) et (X) Pour tout automorphisme g de V, soit $\varphi(g)$ l'automorphisme de E qui prolonge g et laisse invariant $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_l$. Si on prend pour g la réflexion orthogonale $s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}|V$, $\varphi(g)$ est égal à $s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$, donc échange ε_i et ε_j et laisse fixes les ε_k d'indice k distinct de i et j. Soit

$$X = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{l+1}\}.$$

Alors $g \longmapsto \varphi(g)|X$ est un isomorphisme de W(R) sur le groupe symétrique de X. Ainsi, W(R) est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_{l+1}$, donc est d'ordre $(l+1)!$

L'algèbre symétrique S(E) s'identifie canoniquement à l'algèbre des fonctions polynômes $P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{l+1})$ sur E. Soit $G = \varphi(W(R))$. D'après ce qui précède, l'ensemble $S(E)^G$ des éléments de S(E) invariants par G est l'ensemble des polynômes symétriques (*Alg.*, chap. V, App. I), et par suite (*ibid.*) $S(E)^G$ est l'algèbre engendrée par les fonctions

$$s'_i = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{l+1}} \xi_{\tau(1)} \xi_{\tau(2)} \ldots \xi_{\tau(i)} \quad (1 \leqslant i \leqslant l+1).$$

L'algèbre S(V) s'identifie à l'algèbre des restrictions à V des fonctions polynômes sur E. Si $P \in S(E)^G$, la restriction de P à V est évidemment invariante par W(R). Réciproquement, si $Q \in S(V)^{W(R)}$, il existe $P \in S(E)$ prolongeant Q; remplaçant P par $((l+1)!)^{-1} \sum_{g \in G} g(P)$, qui a même restriction que P à V, on voit qu'on peut supposer $P \in S(E)^G$. Ainsi, $S(V)^{W(R)}$ est engendré par les $s_i = s'_i|V$. Or $s_1 = 0$. Par ailleurs, le degré de transcendance sur $\mathbf{R}$ du corps des fractions de $S(V)^{W(R)}$ est l, donc les s_i $(2 \leqslant i \leqslant l+1)$ sont algébriquement indépendants. Comme les s_i sont de degrés $2, 3, \ldots, l+1$, les exposants de W(R) sont:

$$1, 2, 3, \ldots, l.$$

(XI) Pour $l = 1$, on a $A(R) = W(R) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $w_0 = -1$.

Pour $l \geqslant 2$, soit $\varepsilon \in A(R)$ l'automorphisme qui transforme α_i en α_{l+1-i}. Il est clair que l'automorphisme du graphe de Dynkin induit par ε est l'unique automorphisme non trivial de ce graphe. Le groupe $A(R)/W(R)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Comme -1 est un élément de $A(R)$ qui n'appartient pas à $W(R)$ d'après (IX) et (X), on voit que $A(R)$ est isomorphe à $W(R) \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On a $w_0 = -\varepsilon$.

(XII) Le groupe $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ étant cyclique d'ordre $l + 1$, il opère sur le graphe de Dynkin complété par permutations circulaires. Si $l \geqslant 2$, l'unique élément non neutre de $A(R)/W(R)$ opère sur $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ par l'automorphisme $x \longmapsto -x$.

8. Systèmes de type D_l ($l \geqslant 3$).

(I) Considérons dans $V = \mathbf{R}^l$ le groupe L_0 (nº 4). L'ensemble R des $\alpha \in L_0$ tels que $(\alpha|\alpha) = 2$ est formé des vecteurs $\pm\, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant l)$. Il est clair que R engendre V et que $2(\alpha|\beta)/(\alpha|\alpha) \in \mathbf{Z}$ quels que soient α, $\beta \in R$. Donc R est un système de racines réduit dans V (nº 4). Le nombre de racines est $n = 2l(l-1)$.

(II) Posons

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \ldots, \quad \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \quad \alpha_l = \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l.$$

On a aussitôt les formules

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_i - \varepsilon_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{j-1} \quad (i < j)\\
&\varepsilon_i + \varepsilon_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + 2\alpha_{j+1} + \cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l \quad (i < j \leqslant l-2)\\
&\varepsilon_i + \varepsilon_{l-1} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_l \quad (i < l-1)\\
&\varepsilon_i + \varepsilon_l = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{l-2} + \alpha_l \quad (i < l-1)\\
&\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l = \alpha_l,
\end{aligned}$$

donc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ est une base de R (§ 1, nº 7, cor. 3 de la prop. 20). En outre, on a $\|\alpha_i\|^2 = 2$ pour tout i, $(\alpha_i|\alpha_j) = 0$ pour $i + 1 < j$ sauf pour $i = l-2$, $j = l$ qui donne $(\alpha_{l-2}|\alpha_l) = -1$, $(\alpha_i|\alpha_{i+1}) = -1$ pour $i \leqslant l-2$, et enfin $(\alpha_{l-1}|\alpha_l) = 0$; le graphe de Dynkin de R est donc de type D_l. Les racines positives sont les $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ pour $i < j$.

(III) On a $h = \dfrac{n}{l} = 2(l-1)$.

(IV) Soit $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l$, qui est une racine. La somme de ses coordonnées relativement à (α_i) est

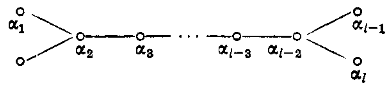
$$2l - 3 = h - 1.$$

Donc $\tilde{\alpha}$ est la plus grande racine.

Si $l = 3$, on a

$$(\tilde{\alpha}|\alpha_1) = 0, \qquad (\tilde{\alpha}|\alpha_2) = (\tilde{\alpha}|\alpha_3) = 1.$$

Si $l \geqslant 4$, on a $(\tilde{\alpha}|\alpha_i) = 0$ pour $i \neq 2$ et $(\tilde{\alpha}|\alpha_2) = 1$. D'où le graphe de Dynkin complété :



(V) Comme $(\alpha|\alpha) = 2$ pour tout $\alpha \in R$, on a $R^\vee = R$.

La longueur des racines pour Φ_R est $h^{-1/2} = (2l - 2)^{-1/2}$. D'où

$$\Phi_R(x, y) = (x|y)/(4l - 4) \qquad \text{et} \qquad \gamma(R) = 4(l - 1)^2.$$

(VI) Un calcul analogue à celui du nº 7 donne les poids fondamentaux :

$$\begin{aligned}\varpi_i &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i \\ &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{l-2}) \\ &\qquad + \frac{1}{2} i(\alpha_{l-1} + \alpha_l)\end{aligned}$$

pour $i < l - 1$,

$$\begin{aligned}\varpi_{l-1} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{l-2} + \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (l-2)\alpha_{l-2} + \frac{1}{2} l\alpha_{l-1} + \frac{1}{2}(l-2)\alpha_l). \\ \varpi_l &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{l-2} + \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (l-2)\alpha_{l-2} + \frac{1}{2}(l-2)\alpha_{l-1} + \frac{1}{2} l\alpha_l).\end{aligned}$$

(VII) La somme des racines positives est

$$\begin{aligned}2\rho &= 2(l-1)\varepsilon_1 + 2(l-2)\varepsilon_2 + \cdots + 2\varepsilon_{l-1} \\ &= \sum_{i=1}^{l-2} 2\left(il - \frac{i(i+1)}{2}\right)\alpha_i + \frac{l(l-1)}{2}(\alpha_{l-1} + \alpha_l).\end{aligned}$$

(VIII) Les $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ engendrent L_1 (nº 4), donc $Q(R) = L_1$. Donc $Q(R^\vee) = L_1$ et par suite $P(R) = L_2$ (nº 4). D'après le nº 4, $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ pour l impair, à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ pour l pair. Dans le premier cas, $P(R)/Q(R)$ est engendré par l'image canonique de ϖ_l (et aussi par celle de ϖ_{l-1}). Dans le second cas, $P(R)/Q(R)$ est engendré par les images canoniques de ϖ_{l-1} et ϖ_l. Dans les deux cas, l'indice de connexion est 4.

(IX) et (X) Dans $\mathbf{R}^l$, la réflexion orthogonale $s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ $(i \neq j)$ échange ε_i et ε_j, et laisse invariante les ε_k d'indice k distinct de i et j. Les $s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ engendrent un groupe G_1 isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_l$. D'autre part, $s_{ij} = s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} s_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}$ transforme ε_i en $-\varepsilon_i$, ε_j en $-\varepsilon_j$ et laisse invariants les ε_k d'indice k distinct de i et j. Les s_{ij} engendrent un groupe G_2, ensemble des automorphismes u de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^l$ tels que $u(\varepsilon_i) = (-1)^{\nu_i}\varepsilon_i$ avec $\prod_{i=1}^{l} (-1)^{\nu_i} = 1$. Le groupe G_2 est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{l-1}$, et G_2 est distingué dans $W(R)$, donc $W(R)$ est isomorphe à un produit semi-direct de $\mathfrak{S}_l$ par $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{l-1}$. Son ordre est par suite $2^{l-1}.l!$

Les fonctions polynômes t_i du n° 5 sont invariantes par $W(R)$, et il en est de même de $t = \xi_1\xi_2 \ldots \xi_l$; on a d'ailleurs $t_l = t^2$. Soit alors $P(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ une fonction polynôme invariante par $W(R)$. Soit $\xi_1^{\nu_1}\xi_2^{\nu_2} \ldots \xi_l^{\nu_l}$ un monôme figurant dans P tel que ν_i soit impair; alors ν_j est impair pour tout j, car dans $s_{ij}(P)$ figure le monôme $(-1)^{\nu_i+\nu_j}\xi_1^{\nu_1}\xi_2^{\nu_2} \ldots \xi_l^{\nu_l}$, d'où $\nu_i + \nu_j \equiv 0 \pmod{2}$ et $\nu_j \equiv 1 \pmod{2}$. Donc $P = P_1 + tP_2$, où tous les monômes figurant dans P_1 et P_2 possèdent uniquement des exposants pairs. Comme P est invariant par les permutations des ξ_i, P_1 et P_2 possèdent la même propriété, donc s'écrivent comme des polynômes par rapport à $t_1, t_2, \ldots, t_l$. Ceci prouve que l'algèbre $S(\mathbf{R}^l)^{W(R)}$ est engendrée par $t_1, t_2, \ldots, t_{l-1}, t$. Par ailleurs, le degré de transcendance du corps des fractions de $S(\mathbf{R}^l)^{W(R)}$ est l, donc $t_1, t_2, \ldots, t_{l-1}, t$ sont algébriquement indépendants. On en conclut que la suite des exposants, convenablement ordonnée, est :

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad \ldots, \quad 2l-5, \quad 2l-3, \quad l-1.$$

On notera que $l-1$ apparaît deux fois si l est pair, une seule fois si l est impair.

(XI) Les automorphismes du graphe de Dynkin sont ceux du graphe sous-jacent. Donc :

1) Si $l = 3$, $A(R)/W(R)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

2) Si $l = 4$, toute permutation des sommets terminaux définit un automorphisme du graphe, donc $A(R)/W(R)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

3) Si $l \geqslant 5$, les chaînes issues du point de ramification α_{l-2} ont pour longueur 1,1 et $l-3 \geqslant 2$. Le seul automorphisme du graphe distinct de l'identité correspond donc à l'automorphisme $\varepsilon \in A(R)$ qui permute α_{l-1} et α_l et laisse fixes les α_i pour $1 \leqslant i \leqslant l-2$. Donc $A(R)/W(R)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; de plus $A(R)$ est produit semi-direct du groupe $G_1 \simeq \mathfrak{S}_l$ défini dans (IX) par le groupe G_3 formé des automorphismes u de $\mathbf{R}^l$ tels que $u(\varepsilon_i) = \pm\varepsilon_i$ pour tout i.

Si l est pair, on a $-1 \in W(R)$, d'où $w_0 = -1$. Si l est impair, on a $-1 \notin W(R)$, d'où $A(R) = W(R) \times \{1, -1\}$ et $w_0 = -\varepsilon$.

(XII) Pour l pair, $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ a trois éléments d'ordre 2, ω_1, ω_{l-1} et ω_l. Comme ω_l (resp. ω_{l-1}) échange les sommets correspondant à α_0 et α_l (resp. α_{l-1}), il échange ceux correspondant à α_1 et α_{l-1} (resp. α_l) et aussi ceux correspondant à α_j et α_{l-j} pour

$$2 \leqslant j \leqslant l - 2.$$

On a $\omega_1 = \omega_l \omega_{l-1}$.

Pour l impair, $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ a deux éléments d'ordre 4 qui sont ω_{l-1} et ω_l, et un élément d'ordre 2, égal à ω_1. En effet ω_1 échange les sommets correspondant à α_0 et α_1, donc il laisse fixes les sommets correspondant aux α_j pour $2 \leqslant j \leqslant l - 2$ et est nécessairement d'ordre 2. Par suite ω_l est d'ordre 4 et transforme le sommet correspondant à α_0 (resp. α_l, resp. α_1, resp. α_{l-1}) en celui correspondant à α_l (resp. α_1, resp. α_{l-1}, resp. α_0), et échange les sommets correspondant à α_j et α_{l-j} pour $2 \leqslant j \leqslant l - 2$. On a $\omega_1 = \omega_l^2$ et $\omega_{l-1} = \omega_l^3$.

Pour $l \neq 4$, l'élément non neutre de $A(R)/W(R)$ échange les sommets correspondant à α_{l-1} et α_l, et par suite échange les éléments ω_{l-1} et ω_l de $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$. Pour l impair, l'automorphisme ainsi obtenu de $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ est l'application $x \longmapsto -x$.

Pour $l = 4$, $A(R)/W(R)$ s'identifie au groupe des permutations de $\{1, 3, 4\}$ et opère par permutation des indices sur $\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$.

9. Système de type F_4

(I) Considérons dans $\mathbf{R}^4$ le groupe L_2 (nº 4). Soit R l'ensemble des $\alpha \in L_2$ tels que $(\alpha|\alpha) = 1$ ou $(\alpha|\alpha) = 2$; il contient les vecteurs

$$\pm \varepsilon_i, \qquad \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (i < j), \qquad \frac{1}{2}(\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4).$$

Réciproquement, si $\alpha \in R$, les coordonnées de α ne prennent que les valeurs 0, $\pm \frac{1}{2}$, ± 1 (car $(\frac{3}{2})^2 > 2$); ces coordonnées sont, ou bien toutes entières, ce qui donne les vecteurs $\pm \varepsilon_i$, $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, ou bien toutes égales à $\pm \frac{1}{2}$, ce qui donne les vecteurs $\frac{1}{2}(\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$.

Soient $\alpha, \beta \in R$ et montrons que $2(\alpha|\beta)/(\alpha|\alpha) \in \mathbf{Z}$. Si $\alpha = \pm \varepsilon_i$, ou si $\alpha = \frac{1}{2}(\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$, on a $(\alpha|\alpha) = 1$, et on a vu au nº 4 que $(\alpha|\beta) \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}$ puisque $\alpha, \beta \in L_2$. Si $\alpha = \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, on a $(\alpha|\alpha) = 2$, et on a vu au nº 4 que $(\alpha|\beta) \in \mathbf{Z}$ puisque $\alpha \in L_1$ et $\beta \in L_2$. Donc R est un système de racines réduit dans $\mathbf{R}^4$ (nº 4). Le nombre de racines est $n = 8 + \binom{4}{2} 4 + 2^4 = 48$.

(II) Munissons $\mathbf{R}^4$ de l'ordre lexicographique défini par la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ (§ 1, nº 7). On a donc en particulier $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \varepsilon_4$. Les racines positives sont

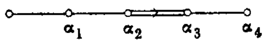
$$\varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (i < j), \qquad \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4).$$

La plus petite est $\alpha_3 = \varepsilon_4$. Parmi les racines positives appartenant à $\mathbf{R}\varepsilon_3 + \mathbf{R}\varepsilon_4$ mais non à $\mathbf{R}\varepsilon_4$, la plus petite est $\alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$. Parmi les racines positives appartenant à $\mathbf{R}\varepsilon_2 + \mathbf{R}\varepsilon_3 + \mathbf{R}\varepsilon_4$ mais non à $\mathbf{R}\varepsilon_3 + \mathbf{R}\varepsilon_4$, la plus petite est $\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$. Parmi les racines positives n'appartenant pas à $\mathbf{R}\varepsilon_2 + \mathbf{R}\varepsilon_3 + \mathbf{R}\varepsilon_4$, la plus petite est $\alpha_4 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$. Aucune α_i n'est somme de 2 racines positives. Donc $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ est une base de R (§ 1, n° 6, cor. 1 de la prop. 19). On a $\|\alpha_1\|^2 = \|\alpha_2\|^2 = 2$, $\|\alpha_3\|^2 = \|\alpha_4\|^2 = 1$, $(\alpha_1|\alpha_2) = (\alpha_2|\alpha_3) = -1$, $(\alpha_3|\alpha_4) = -\frac{1}{2}$, $(\alpha_1|\alpha_3) = (\alpha_1|\alpha_4) = (\alpha_2|\alpha_4) = 0$. On voit que R a un graphe de Dynkin de type F_4, donc est irréductible.

(III) On a $h = \frac{n}{l} = 12$.

(IV) Soit $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$. La somme des coordonnées de $\tilde{\alpha}$ par rapport à (α_i) est $11 = h - 1$, donc $\tilde{\alpha}$ est la plus grande racine. On a $(\tilde{\alpha}|\alpha_1) = 1$, $(\tilde{\alpha}|\alpha_2) = (\tilde{\alpha}|\alpha_3) = (\tilde{\alpha}|\alpha_4) = 0$.

Le graphe de Dynkin complété est :



(V) La formule $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)}$ donne pour $R^\vee$ l'ensemble des vecteurs $\pm 2\varepsilon_i$ $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4$. Le graphe de Dynkin de $R^\vee$ se déduit de celui de R par le procédé expliqué au n° 2, et l'on voit que $R^\vee$ est de type F_4.

Les racines non orthogonales à $\beta = \varepsilon_1$ sont $\pm \varepsilon_1$, $\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_j$ $(j \geqslant 2)$, et $\frac{1}{2}(\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$; le nombre $n(\alpha, \beta) = 2(\alpha|\beta)$ est égal à ± 2 pour les 14 premières de ces racines et à ± 1 pour les 16 dernières; donc, pour Φ_R, le carré de la longueur de β est $4(14.4 + 16.1)^{-1} = \frac{1}{18}$; donc

$$\Phi_R(x, y) = (x|y)/18.$$

Appliquons alors la formule (18) du § 1, n° 12, avec $x = y = \beta$; il vient

$$2 + 12.\frac{1}{4} + 16\frac{1/4}{1} = \gamma(R).\frac{1}{18}$$

d'où $$\gamma(R) = 2.3^4.$$

(VI) Le calcul des poids fondamentaux donne ici

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = \tilde{\alpha} \\
\varpi_2 &= 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 4\alpha_4 \\
\varpi_3 &= \frac{1}{2}(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 3\alpha_4 \\
\varpi_4 &= \varepsilon_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4.
\end{aligned}$$

(VII) La somme des racines positives est

$$2\rho = 11\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 16\alpha_1 + 30\alpha_2 + 42\alpha_3 + 22\alpha_4.$$

(VIII) On a $Q(R) = L_2$ (n° 4), et $P(R) = Q(R)$ d'après (VI). L'indice de connexion est donc 1.

(IX) La famille des exposants a 4 termes, et puisque $h = 12$, les entiers 1, 5, 7, 11, étrangers à 12, doivent figurer dans cette famille (§ 1, n° 11, prop. 30); ce sont par suite tous les exposants de $W(R)$.

(X) et (XI) Le seul automorphisme du graphe de Dynkin est l'identité, donc $A(R) = W(R)$ et $w_0 = -1$. Soit R' l'ensemble des éléments de R de plus grande longueur, c'est-à-dire les $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$: R' est le système de racines de type D_4 construit au n° 8. Tout élément de $A(R)$ est évidemment un élément de $A(R')$. Réciproquement, un élément de $A(R')$ laisse stable L_1 (qui est engendré par R'), donc son associé L_2, donc R. D'où $W(R) = A(R) = A(R')$. D'après le n° 8, $W(R)$ est donc produit semi-direct de $\mathfrak{S}_3$ et de $W(R')$, $W(R')$ étant lui-même produit semi-direct de $\mathfrak{S}_4$ et de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$. L'ordre de $W(R)$ est $3!\,4!\,2^3 = 2^7.3^2$.

10. Système de type E_8

(I) Considérons dans $\mathbf{R}^8$ le groupe L_3 (n° 4). Soit R l'ensemble des $\alpha \in L_3$ tels que $(\alpha|\alpha) = 2$; il contient les vecteurs

$$\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (i < j), \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i \qquad \Big(\sum_{i=1}^{8} \nu(i) \text{ pair}\Big).$$

Réciproquement, si un élément $\alpha \in L_3$ est tel que $(\alpha|\alpha) = 2$, ses coordonnées ne peuvent prendre que les valeurs 0, $\pm \frac{1}{2}$, ± 1; d'après le n° 4, ces coordonnées sont, ou bien toutes entières, ce qui donne les vecteurs $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, ou toutes égales à $\pm \frac{1}{2}$ et de somme paire, ce qui donne les vecteurs

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i$$

avec $\sum_{i=1}^{8} \nu(i)$ pair.

On a vu (n° 4) que $(\alpha|\beta) \in \mathbf{Z}$ quels que soient α, $\beta \in L_3$. Donc R est un système de racines réduit. Le nombre de racines est $n = \binom{8}{2} . 4 + 2^7 = 240$.

(II) Soit ρ le vecteur $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 23)$ de L_3. Aucun élément de R n'est orthogonal à ρ (c'est clair pour les $\pm\,\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$; si $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} (-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i$ était orthogonal à ρ, on aurait $\sum_{i=1}^{6} i(-1)^{\nu(i+1)} + 23(-1)^{\nu(8)} = 0$, ce qui est impossible puisque $\sum_{i=1}^{6} i < 23$). Donc (§ 1, n° 7, cor. 2 de la prop. 20) les $\alpha \in R$ telles que $(\alpha|\rho) > 0$ sont les racines positives relativement à une certaine chambre. Ces racines sont les $\pm\,\varepsilon_i + \varepsilon_j$ $(i < j)$, et les

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 + \sum_{i=1}^{7} (-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\right)$$

avec $\sum_{i=1}^{7} \nu(i)$ pair. On a $(\alpha|\rho) \in \mathbf{Z}$ pour tout $\alpha \in R$ (n° 4), et $(\alpha|\rho)$ est égal à 1 pour les racines suivantes :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7)$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \qquad \alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \qquad \alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \qquad \alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3,$$
$$\alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4, \qquad \alpha_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_5, \qquad \alpha_8 = \varepsilon_7 - \varepsilon_6$$

et ces huit vecteurs forment une base de $\mathbf{R}^8$. D'après le § 1, n° 6, cor. 1 de la prop. 19, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8)$ est la base de R pour laquelle les racines positives sont celles qui ont été définies plus haut. On a

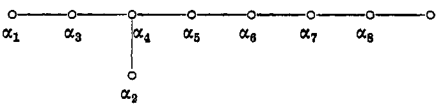
$$(\alpha_4|\alpha_5) = (\alpha_5|\alpha_6) = (\alpha_6|\alpha_7) = (\alpha_7|\alpha_8) = (\alpha_4|\alpha_2) = (\alpha_4|\alpha_3) = (\alpha_3|\alpha_1) = -1,$$

et $(\alpha_i|\alpha_j) = 0$ pour les autres couples d'indices. Le graphe de Dynkin de R est donc de type E_8, et R est irréductible.

(III) On a $h = \frac{n}{8} = 30$.
(IV) Soit

$$\tilde{\alpha} = \varepsilon_7 + \varepsilon_8 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8,$$

qui est une racine. La somme de ses coordonnées par rapport à (α_i) est $29 = h - 1$, donc $\tilde{\alpha}$ est la plus grande racine. Elle est orthogonale à tous les α_i sauf α_8, et $(\tilde{\alpha}|\alpha_8) = 1$. D'où le schéma de Dynkin complété :



(V) Comme $(\alpha|\alpha) = 2$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on a $\mathrm{R}^\vee = \mathrm{R}$.

Pour Φ_R, le carré de la longueur des racines est $\dfrac{1}{30}$ (§ 1, n° 12). Donc $\Phi_\mathrm{R}(x, y) = (x|y)/60$, et $\gamma(\mathrm{R}) = 900$ (§ 1, n° 12, formule (20)).

(VI) Le calcul des poids fondamentaux donne

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= 2\varepsilon_8 = 4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 + 10\alpha_4 + 8\alpha_5 + 6\alpha_6 + 4\alpha_7 + 2\alpha_8 \\
\varpi_2 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 5\varepsilon_8) \\
&= 5\alpha_1 + 8\alpha_2 + 10\alpha_3 + 15\alpha_4 + 12\alpha_5 + 9\alpha_6 + 6\alpha_7 + 3\alpha_8 \\
\varpi_3 &= \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 7\varepsilon_8) \\
&= 7\alpha_1 + 10\alpha_2 + 14\alpha_3 + 20\alpha_4 + 16\alpha_5 + 12\alpha_6 + 8\alpha_7 + 4\alpha_8 \\
\varpi_4 &= \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 5\varepsilon_8 \\
&= 10\alpha_1 + 15\alpha_2 + 20\alpha_3 + 30\alpha_4 + 24\alpha_5 + 18\alpha_6 + 12\alpha_7 + 6\alpha_8 \\
\varpi_5 &= \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 4\varepsilon_8 \\
&= 8\alpha_1 + 12\alpha_2 + 16\alpha_3 + 24\alpha_4 + 20\alpha_5 + 15\alpha_6 + 10\alpha_7 + 5\alpha_8 \\
\varpi_6 &= \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 3\varepsilon_8 \\
&= 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 12\alpha_3 + 18\alpha_4 + 15\alpha_5 + 12\alpha_6 + 8\alpha_7 + 4\alpha_8 \\
\varpi_7 &= \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 2\varepsilon_8 \\
&= 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 10\alpha_5 + 8\alpha_6 + 6\alpha_7 + 3\alpha_8 \\
\varpi_8 &= \varepsilon_7 + \varepsilon_8 \\
&= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 = \tilde{\alpha}.
\end{aligned}$$

(VII) La demi-somme des racines positives est la somme des poids fondamentaux (§ 1, n° 10, prop. 29) et vaut donc

$$\begin{aligned}
\rho &= \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + 4\varepsilon_5 + 5\varepsilon_6 + 6\varepsilon_7 + 23\varepsilon_8 \\
&= 46\alpha_1 + 68\alpha_2 + 91\alpha_3 + 135\alpha_4 + 110\alpha_5 + 84\alpha_6 + 57\alpha_7 + 29\alpha_8.
\end{aligned}$$

(VIII) Le groupe $\mathrm{Q}(\mathrm{R})$ est engendré par les $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ et $\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i$, et est égal à L_8 (n° 4). Donc $\mathrm{P}(\mathrm{R})$, qui est l'associé de $\mathrm{Q}(\mathrm{R}^\vee) = \mathrm{Q}(\mathrm{R}) = \mathrm{L}_8$, est L_8 (n° 4). L'indice de connexion est égal à 1.

(IX) La famille des exposants a 8 termes, et puisque $h = 30$, les entiers 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, étrangers à 30, doivent figurer dans cette famille; ce sont par suite tous les exposants de $\mathrm{W}(\mathrm{R})$.

(X) On déduit de (IX) et du chap. V, § 6, n° 2, cor. 1 de la prop. 3, que l'ordre de $\mathrm{W}(\mathrm{R})$ est

$$2.8.12.14.18.20.24.30 = 2^{14}.3^5.5^2.7.$$

(XI) Le seul automorphisme du graphe de Dynkin est l'identité puisque les trois chaînes issues du point de ramification sont de longueurs distinctes. Donc $\mathrm{A}(\mathrm{R}) = \mathrm{W}(\mathrm{R})$ et $w_0 = -1$.

11. Système de type E_7

(I) et (II) Soit $E = \mathbf{R}^8$, et soit R_8 le système de racines de E construit au n° 10. Soit V l'hyperplan de E engendré par les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_7$ de R_8; il est orthogonal au huitième poids fondamental $\omega = \varepsilon_7 + \varepsilon_8$ de R_8.

Soit $R = R_8 \cap V$. Alors R est un système de racines réduit de base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_7)$, cf. § 1, n° 7, cor. 4 de la prop. 20; ce système est donc de type E_7. Ses éléments sont:

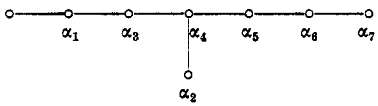
$$\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 6), \qquad \pm (\varepsilon_7 - \varepsilon_8),$$
$$\pm \frac{1}{2}(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i) \qquad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{6} \nu(i) \text{ impair.}$$

Le nombre de racines est $n = 2 + \binom{6}{2}.4 + 2^6 = 126$. Les racines positives sont

$$\pm \varepsilon_i + \varepsilon_j \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 6), \qquad -\varepsilon_7 + \varepsilon_8,$$
$$\frac{1}{2}(-\varepsilon_7 + \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i) \qquad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{6} \nu(i) \text{ impair.}$$

(III) On a $h = \dfrac{n}{l} = 18$.

(IV) Soit $\tilde{\alpha} = \varepsilon_8 - \varepsilon_7 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$, qui est une racine. La somme de ses coordonnées par rapport à (α_i) est $17 = h - 1$. C'est donc la plus grande racine. Elle est orthogonale à α_i pour $2 \leqslant i \leqslant 7$, et $(\tilde{\alpha}|\alpha_1) = 1$. Le graphe de Dynkin complété est



(V) Comme $(\alpha|\alpha) = 2$ pour tout $\alpha \in R$, on a $R^\vee = R$.

Pour Φ_R, le carré de la longueur des racines est $\dfrac{1}{18}$, donc

$$\Phi_R(x, y) = (x|y)/36, \qquad \text{et} \qquad \gamma(R) = 2^2.3^4$$

(§ 1, n° 12, formule (20)).

(VI) Le calcul des poids fondamentaux donne

$$\varpi_1 = \varepsilon_8 - \varepsilon_7 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 = \tilde{\alpha}$$
$$\varpi_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - 2\varepsilon_7 + 2\varepsilon_8)$$
$$= \frac{1}{2}(4\alpha_1 + 7\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 9\alpha_5 + 8\alpha_6 + 3\alpha_7)$$

$$\begin{aligned}
\varpi_3 &= \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - 3\varepsilon_7 + 3\varepsilon_8)\\
&= 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 8\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7\\
\varpi_4 &= \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + 2(\varepsilon_8 - \varepsilon_7)\\
&= 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 9\alpha_5 + 6\alpha_6 + 3\alpha_7\\
\varpi_5 &= \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \frac{3}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7)\\
&= \frac{1}{2}(6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 12\alpha_3 + 18\alpha_4 + 15\alpha_5 + 10\alpha_6 + 5\alpha_7)\\
\varpi_6 &= \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8\\
&= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7\\
\varpi_7 &= \varepsilon_6 + \frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7)\\
&= \frac{1}{2}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7).
\end{aligned}$$

(VII) La somme 2ρ des racines positives est $2\sum_{i=1}^{7}\varpi_i$ (§ 1, n° 10, prop. 29), d'où

$$\begin{aligned}
2\rho &= 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + 6\varepsilon_4 + 8\varepsilon_5 + 10\varepsilon_6 - 17\varepsilon_7 + 17\varepsilon_8\\
&= 34\alpha_1 + 49\alpha_2 + 66\alpha_3 + 96\alpha_4 + 75\alpha_5 + 52\alpha_6 + 27\alpha_7.
\end{aligned}$$

(VIII) D'après le n° 10 (VIII) et le § 1, n° 10, prop. 28, on a

$$Q(R) = Q(R_8) \cap V = L_3 \cap V \qquad \text{et} \qquad P(R) = p(P(R_8)) = p(L_3),$$

où p désigne la projection orthogonale de E sur V. Le groupe $Q(R)$ a pour base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_7)$; le groupe $P(R)$ est engendré par $Q(R)$ et

$$p(\alpha_8) = \alpha_8 - \frac{1}{2}\omega.$$

On a $\omega \in P(R_8)$, $\frac{1}{2}\omega \notin P(R_8)$, donc $2p(\alpha_8) \in Q(R)$ et $p(\alpha_8) \notin Q(R)$. On voit ainsi que $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et engendré, par exemple, par l'image de ϖ_7.

L'indice de connexion est 2.

(IX) La suite des exposants de W(R) a 7 termes. Les nombres 1, 5, 7, 11, 13, 17, étrangers à $h = 18$, figurent dans cette suite. Le dernier exposant m doit donc être que tel $m + m = 18$ (chap. V, § 6, n° 2, formule (2)). Donc la suite des exposants est

$$1,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 17.$$

(X) On déduit de (IX) et du chap. V, § 6, n° 2, cor. 1 de la prop. 3, que l'ordre de W(R) est

$$2.6.8.10.12.14.18 = 2^{10}.3^4.5.7.$$

(XI) Le seul automorphisme du graphe de Dynkin est l'identité, donc $A(R) = W(R)$ et $w_0 = -1$.

(XII) $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ a un seul élément non neutre. Il échange les sommets correspondant à α_0 et α_7, α_1 et α_6, α_3 et α_5 et laisse fixes α_2 et α_4.

12. Système de type E_6

(I) et (II) Soit $E = \mathbf{R}^8$, et soit R_8 le système de racines de E construit au nº 10. Soit V le sous-espace vectoriel de E engendré par les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ de R_8; c'est l'orthogonal du plan engendré par les deux derniers poids fondamentaux $\omega = \varepsilon_7 + \varepsilon_8$ et $\pi = \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 2\varepsilon_8$ de R_8.

Soit $R = R_8 \cap V$. C'est un système de racines réduit de base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$, donc de type E_6. Ses éléments sont :

$$\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 5)$$
$$\pm \frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i) \qquad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{5} \nu(i) \quad \text{pair.}$$

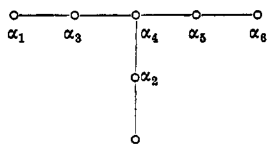
Le nombre de racines est $n = \binom{5}{2} \cdot 4 + 2^5 = 72$. Les racines positives sont

$$\pm \varepsilon_i + \varepsilon_j \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 5)$$
$$\frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i) \qquad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{5} \nu(i) \quad \text{pair.}$$

(III) On a $h = \dfrac{n}{6} = 12$.

(IV) Soit $\tilde{\alpha} = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8)$
$= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$,

qui est une racine. La somme de ses coordonnées par rapport à (α_i) est $11 = h - 1$, donc $\tilde{\alpha}$ est la plus grande racine. Elle est orthogonale à α_1, α_3, α_4, α_5, α_6, et $(\tilde{\alpha}|\alpha_2) = 1$. Le graphe de Dynkin complété est



(V) Comme $(\alpha|\alpha) = 2$ pour tout $\alpha \in R$, on a $R^\vee = R$.

Pour Φ_R, le carré de la longueur des racines est $\dfrac{1}{12}$, donc

$$\Phi_R(x, y) = (x|y)/24, \qquad \text{et} \qquad \gamma(R) = 144.$$

(VI) Le calcul des poids fondamentaux donne :

$$\varpi_1 = \frac{2}{3}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) = \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6)$$

$$\varpi_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8)$$
$$= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 = \tilde{\alpha}$$

$$\varpi_3 = \frac{5}{6}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) + \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5)$$
$$= \frac{1}{3}(5\alpha_1 + 6\alpha_2 + 10\alpha_3 + 12\alpha_4 + 8\alpha_5 + 4\alpha_6)$$

$$\varpi_4 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8$$
$$= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6$$

$$\varpi_5 = \frac{2}{3}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) + \varepsilon_4 + \varepsilon_5$$
$$= \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 10\alpha_5 + 5\alpha_6)$$

$$\varpi_6 = \frac{1}{3}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) + \varepsilon_5$$
$$= \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6).$$

(VII) La demi-somme ρ des racines positives est $\sum_{i=1}^{6} \varpi_i$, d'où

$$\rho = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + 4\varepsilon_5 + 4(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6)$$
$$= 8\alpha_1 + 11\alpha_2 + 15\alpha_3 + 21\alpha_4 + 15\alpha_5 + 8\alpha_6.$$

(VIII) D'après le n° 10 (VIII) et le § 1, n° 10, prop. 28, on a

$$Q(R) = Q(R_8) \cap V = L_3 \cap V \quad \text{et} \quad P(R) = p(P(R_8)) = p(L_3),$$

où p désigne la projection orthogonale de E sur V. On a

$$p(\alpha_7) = \alpha_7 - \frac{2}{3}\pi + \omega, \qquad p(\alpha_8) = \alpha_8 + \pi - 2\omega.$$

Le groupe $Q(R)$ a pour base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$. Le groupe $P(R)$ est engendré par $Q(R)$ et $p(\alpha_7)$, car $p(\alpha_8) \in P(R_8) \cap V = Q(R_8) \cap V = Q(R)$. On a $3p(\alpha_7) \in Q(R)$ et $p(\alpha_7) \notin Q(R)$. Le groupe $P(R)/Q(R)$ est donc isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$; il est engendré, par exemple, par l'image de ϖ_6.

L'indice de connexion est 3.

(IX) et (X) D'après le § 2, n° 4, prop. 7, l'ordre du groupe de Weyl est $6!1.2.2.3.2.1.3 = 2^7.3^4.5$. La suite des exposants a 6 termes compris entre 1 et 11, et comporte les entiers 1, 5, 7, 11 qui sont étrangers à 12. Les autres exposants m, m' sont des entiers tels que

$$m + m' = 12$$
$$(m + 1)(m' + 1)(1 + 1)(5 + 1)(7 + 1)(11 + 1) = 2^7.3^4.5$$

en vertu du chap. V, § 6, nº 2, formule (2) et cor. 1 de la prop. 3. La seconde relation donne $(m + 1)(m' + 1) = 45$, et comme $m + m' + 2 = 14$, on obtient $m = 4$, $m' = 8$. La suite des exposants est donc

$$1, \quad 4, \quad 5, \quad 7, \quad 8, \quad 11.$$

(XI) et (XII) Comme les racines ont toutes même longueur, les automorphismes du graphe de Dynkin sont ceux du graphe sous-jacent. A part l'identité, il n'y a que l'automorphisme ε qui transforme $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_2$ respectivement en $\alpha_6, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2$. Donc $A(R)/W(R)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; comme $-1 \notin W(R)$ (chap. V, § 6, nº 2, cor. 3 de la prop. 3), $A(R)$ est isomorphe à $W(R) \times \{1, -1\}$ et w_0 s'identifie à $-\varepsilon$. Il en résulte que l'élément non neutre de $A(R)/W(R)$ définit l'automorphisme $x \longmapsto -x$ de $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$.

De plus, $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ a deux éléments non neutres qui sont d'ordre 3. Ils définissent les deux seuls automorphismes d'ordre 3 du graphe de Dynkin complété.

13. Système de type G_2

(I) Dans $E = \mathbf{R}^3$, soit V l'hyperplan d'équation

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0.$$

Soit R l'ensemble des $\alpha \in L_0 \cap V$ tels que $(\alpha|\alpha) = 2$ ou $(\alpha|\alpha) = 6$. Les éléments de R sont

$$\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \pm(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad \pm(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3),$$
$$\pm(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \pm(2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Alors R engendre V, et $\dfrac{2(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)} \in \mathbf{Z}$ quels que soient $\alpha, \beta \in R$: c'est évident si $\beta = \pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$ avec $i \neq j$; si $\beta = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ par exemple, on a $(\alpha|\beta) \in 3\mathbf{Z}$ pour tout $\alpha \in R$, d'où encore notre assertion. Donc R est un système de racines réduit dans V. Le nombre de racines est $n = 12$.

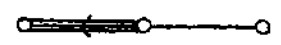
(II) Posons $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Les racines sont alors

$$\pm\alpha_1, \quad \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \pm(2\alpha_1 + \alpha_2), \quad \pm\alpha_2,$$
$$\pm(3\alpha_1 + \alpha_2), \quad \pm(3\alpha_1 + 2\alpha_2).$$

Donc (α_1, α_2) est une base de R. On a $\|\alpha_1\|^2 = 2$, $\|\alpha_2\|^2 = 6$, $(\alpha_1|\alpha_2) = -3$, donc R est un système de type G_2. Les racines positives sont α_1, $\alpha_1 + \alpha_2$, $2\alpha_1 + \alpha_2$, α_2, $3\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + 2\alpha_2$.

(III) On a $h = \frac{n}{2} = 6$.

(IV) La plus grande racine est $\tilde{\alpha} = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$. On a $(\tilde{\alpha}|\alpha_1) = 0$, $(\tilde{\alpha}|\alpha_2) = 3$. Le graphe de Dynkin complété est



α_1 α_2

(V) Le système inverse $R^\vee$ est l'ensemble des vecteurs suivants :

$$\pm\alpha_1, \qquad \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \qquad \pm(2\alpha_1 + \alpha_2), \qquad \pm\frac{1}{3}\alpha_2,$$
$$\pm\frac{1}{3}(3\alpha_1 + \alpha_2), \qquad \pm\frac{1}{3}(3\alpha_1 + 2\alpha_2).$$

Il existe 10 racines non orthogonales à α_1; on a $n(\beta, \alpha_1) = \pm 1$ pour 4 de ces racines, $n(\beta, \alpha_1) = \pm 3$ pour 4 autres, et $n(\beta, \alpha_1) = \pm 2$ pour $\beta = \pm\alpha_1$. Donc le carré de la longueur de α_1 pour Φ_R est $4(4.1 + 4.9 + 2.4)^{-1} = \frac{1}{12}$. Donc $\Phi_R(x, y) = (x|y)/24$. Appliquons alors la formule (18) du § 1, n° 12, avec $x = y = \alpha_1$; il vient :

$$2 + 4 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \gamma(R) \cdot \frac{1}{12}$$

d'où $\gamma(R) = 48$.

(VI) et (VII) La demi-somme des racines positives est

$$\rho = 5\alpha_1 + 3\alpha_2.$$

Les poids fondamentaux ϖ_1 et ϖ_2 sont orthogonaux à α_2 et α_1, donc proportionnels à $2\alpha_1 + \alpha_2$ et $3\alpha_1 + 2\alpha_2$. On a

$$\varpi_1 + \varpi_2 = \rho = 5\alpha_1 + 3\alpha_2 = (2\alpha_1 + \alpha_2) + (3\alpha_1 + 2\alpha_2).$$

Donc

$$\varpi_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \qquad \varpi_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = \tilde{\alpha}.$$

(VIII) $Q(R)$ est engendré par exemple par $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ et $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$. D'après (VI) et (VII), $P(R) = Q(R)$. L'indice de connexion est 1.

(IX) La famille des exposants a 2 termes; comme 1 et $h - 1 = 5$ sont des exposants, ce sont les seuls.

(X) On a $(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}) = \frac{5\pi}{6}$, donc $W(R)$ est isomorphe au groupe diédral d'ordre 12.

(XI) Le seul automorphisme du graphe de Dynkin est l'identité, donc $A(R) = W(R)$ et $w_0 = -1$.

14. Systèmes de racines irréductibles non réduits

Les systèmes de racines irréductibles non réduits se déduisent des systèmes irréductibles réduits grâce aux prop. 13 et 14 du § 1, n° 4. Pour chaque entier $l \geqslant 1$, il existe, à un isomorphisme près, un seul système de racines non réduit irréductible de rang l: soient R un système de racines de type B_l, A l'ensemble des racines de plus petite longueur de R; on prend la réunion de R et de 2A. Avec les notations du n° 5, on obtient les vecteurs

$$\pm\,\varepsilon_i,\quad \pm\,2\varepsilon_i,\quad \pm\varepsilon_i \pm\,\varepsilon_j\quad (i < j)$$

au nombre de $2l(l+1)$.

Exercices

§ 1.

Tous les systèmes de racines considérés ci-dessous sont relatifs à des espaces vectoriels *réels*. On désigne par $(x|y)$ un produit scalaire invariant par le groupe de Weyl (cf. n° 3).

1) Soient R un système de racines, $R = R_1 \cup R_2$ une partition de R. On suppose que, si x, y sont deux éléments de R_i et si $x + y$ (resp. $x - y$) est une racine, alors $x + y \in R_i$ (resp. $x - y \in R_i$), et ceci pour $i = 1, 2$. Alors R est somme directe de R_1 et R_2. (Montrer que si $x \in R_1$ et $y \in R_2$, on a $(x|y) = 0$, en utilisant le cor. du th. 1, n° 3.)
$x \in R_i \Rightarrow -x \in R_i$

2) Soient R un système de racines, α et β deux racines. Si t est un scalaire tel que $\beta + t\alpha \in R$, on a $2t \in \mathbf{Z}$. (Car $n(\beta + t\alpha, \alpha) = n(\beta, \alpha) + 2t$.) Si α est indivisible, on a $t \in \mathbf{Z}$. (Sinon, montrer, en utilisant la prop. 9, qu'il existe une racine γ orthogonale à α telle que $\gamma + \frac{1}{2}\alpha \in R$; on a $(\gamma + \frac{1}{2}\alpha|\alpha) > 0$, d'où $\frac{1}{2}\alpha \in R$.)

3) Soit R un système de racines dans V, irréductible et non réduit. Il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée Φ sur V telle que, si on identifie V à V^* à l'aide de Φ, on ait $R = R^\vee$. (Utiliser la prop. 13.)

4) Soient Γ un $\mathbf{Z}$-module libre de rang fini l, Γ^* le $\mathbf{Z}$-module dual, I un ensemble fini d'indices, $(x_i, x_i^*)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\Gamma \times \Gamma^*$ telle que $\langle x_i, x_i^* \rangle = 2$ pour tout $i \in I$, $s_i = s_{x_i, x_i^*}$. Soit V l'espace vectoriel réel $\Gamma \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, dont le dual V^* s'identifie à $\Gamma^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. Notons encore s_i la réflexion $s_i \otimes 1$ dans V. Soit R (resp. R$'$) l'ensemble des x_i (resp. x_i^*). Soit E (resp. E$'$) le sous-espace de V (resp. V^*) engendré par R (resp. R$'$). Supposons que $s_i(R) = R$ pour tout i. Alors R est un système de racines dans E, E$'$ s'identifie canoniquement au dual de E et x_i^* à $x_i^\vee$ pour tout i. Si F (resp. F$'$) est le sous-espace de V (resp. V^*) formé des points invariants par tous les s_i (resp. ${}^t s_i$), alors $\Gamma \cap F$ (resp. $\Gamma^* \cap F'$) engendre F (resp. F$'$). Si l'on pose $\Gamma_1 = (\Gamma \cap E) \oplus (\Gamma \cap F)$ (resp. $\Gamma_1^* = (\Gamma^* \cap E') \oplus (\Gamma^* \cap F')$), Γ/Γ_1 et Γ^*/Γ_1^* sont des groupes finis isomorphes.

5) Soit R un système de racines irréductible. Pour tout $\beta \in R$, on a

$$16\gamma(R) = \Big(\sum_{\alpha \in R} n(\alpha, \beta)^2\Big)\Big(\sum_{\alpha \in R} n(\beta, \alpha)^2\Big)$$

et par conséquent $\gamma(\lambda R) = \gamma(R)$ pour tout scalaire non nul λ. (Utiliser les formules (17) et (19) du n° 12.)

6) *a*) Soient A un groupe commutatif de type fini, et T une partie finie de A ne contenant pas 0. Il existe un sous-groupe d'indice fini H de A tel que $H \cap T = \emptyset$. (Soit $t \in T$. En utilisant la structure des groupes commutatifs de type fini, construire un sous-groupe d'indice fini de A ne contenant pas t. Puis raisonner par récurrence sur Card T.)

b) Soient R un système de racines, P un sous-ensemble de R clos et symétrique. Il existe un sous-groupe d'indice fini H de Q(R) tel que $P = H \cap R$. (Passer au quotient par le sous-groupe de Q(R) engendré par P, et utiliser *a*) et la prop. 23.)

7) L'indice de connexion d'un système de racines est égal au déterminant de sa matrice de Cartan. (Utiliser la formule (14) du n° 10. Montrer d'autre part que, dans un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, deux bases $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ telles que $(\varepsilon_i|\varepsilon'_j) = \delta_{ij}$ vérifient $\det_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)}(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n) > 0$.)

8) Soient R un système de racines réduit, C une chambre, 2σ la somme des éléments > 0 de $R^\vee$, P'(R) l'ensemble des $x \in P(R)$ tels que $\langle x, \sigma\rangle \in \mathbf{Z}$. On a $Q(R) \subset P'(R) \subset P(R)$, et $P(R)/P'(R)$ est d'ordre 1 ou 2. Soit $(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ la base de $R^\vee$ correspondant à C, et posons $2\sigma = n_1\beta_1 + \cdots + n_l\beta_l$ où les n_i sont des entiers > 0. Pour que $P'(R) = P(R)$, il faut et il suffit que tous les n_i soient pairs.

¶ 9) Soient R un système de racines, C une chambre. Posons $B(C) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$,

$$R_+(C) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_s\}$$

(les α_i étant deux à deux distincts), et $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$.

a) Pour $i = 1, 2, \ldots, s$, soit $\varepsilon_i = \pm 1$. Soit $\alpha^* = \varepsilon_1\alpha_1 + \cdots + \varepsilon_s\alpha_s$. Si $(\alpha^*|\alpha_i) > 0$ pour $i = 1, \ldots, l$, alors $\alpha^* = \alpha$ et $\varepsilon_i = 1$ pour tout i. (Soit γ (resp. δ) la somme des α_i pour lesquels $\varepsilon_i = 1$ (resp. -1). On a $(\gamma|\alpha_i) - (\delta|\alpha_i) > 0$, $(\gamma|\alpha_i) + (\delta|\alpha_i) = (\alpha_i|\alpha_i)$, d'où

$$2(\gamma|\alpha_i) > (\alpha_i|\alpha_i);$$

comme $2(\gamma|\alpha_i)/(\alpha_i|\alpha_i) \in \mathbf{Z}$, on a $(\gamma|\alpha_i) \geqslant (\alpha_i|\alpha_i) = (\alpha|\alpha_i)$, d'où $\gamma - \alpha \in \overline{C}$, $\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma = \alpha$ et $\delta = 0$.)

b) Pour $i = 1, 2, \ldots, s$, soit $\varepsilon_i = \pm 1$. Pour que l'ensemble des $\varepsilon_i\alpha_i$ soit l'ensemble des racines > 0 relativement à une chambre, il faut et il suffit que $\alpha^* = \sum_i \varepsilon_i\alpha_i$ appartienne à une chambre. (Pour la suffisance, soit $\mu_i = \pm 1$ tel que $(\alpha^*|\mu_i\alpha_i) > 0$. Il existe $w \in W(R)$ qui transforme l'ensemble des $\mu_i\alpha_i$ en l'ensemble des α_i, donc α^* en $\alpha^{**} = \sum_i \varepsilon_i\mu_i\alpha_{\sigma(i)}$ où $\sigma \in \mathfrak{S}_s$. Appliquant *a*), montrer que $\alpha^{**} = \alpha$, d'où $\mu_i\varepsilon_i = 1$.)

10) Soit α la plus grande racine d'un système irréductible réduit R relativement à une base. Pour que $\alpha^\vee$ soit la plus grande racine de $R^\vee$, il faut et il suffit que toutes les racines soient de même longueur.

11) Les notations étant celles de la prop. 33 du n° 11, montrer que $\theta_i + \theta_j$ n'est une racine pour aucun couple (i, j).

12) Soient R un système de racines dans V de rang $\geqslant 3$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ une base de R, V' (resp. V'') le sous-espace de V engendré par les α_i pour $i \geqslant 2$ (resp. $i \geqslant 3$), $R' = R \cap V'$, $R'' = R \cap V''$. Soit d (resp. d', d''), le déterminant de la matrice de Cartan de R (resp. R', R''). On suppose que α_1 est orthogonal à tous les α_i sauf α_2, et que $\|\alpha_1\| = \|\alpha_2\|$. Montrer que $d = 2d' - d''$.

13) Soient R un système de racines réduit, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ une base de R et $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_l\alpha_l$ une racine. Alors $\dfrac{c_i(\alpha_i|\alpha_i)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbf{Z}$ pour tout i. (Considérer le système inverse.)

14) Soient R un système de racines irréductible, λ la plus grande des longueurs des racines, S l'ensemble des parties de R formées de racines de longueur λ et deux à deux orthogonales. Alors deux éléments maximaux de S sont transformés l'un de l'autre par W(R). (Utiliser la prop. 11, et la prop. 1 du chap. V, § 3, n° 3.)

¶ 15) Soit R un système de racines de rang l.

a) Pour que $-1 \in W(R)$, il faut et il suffit que R contienne l racines deux à deux fortement orthogonales. (Pour la nécessité, raisonner par récurrence sur l en utilisant la prop. 1 du chap. V, § 3, nº 3.)

b) Si $w \in W(R)$ est d'ordre 2, il existe un ensemble S de racines deux à deux fortement orthogonales tel que w soit le produit des s_α $(\alpha \in S)$.

16) Soient R un système de racines, B une base de R, R_+ l'ensemble des racines positives pour cette base. Pour $w \in W(R)$ posons $F_w = R_+ \cap w(-R_+)$. Montrer que l'application $w \longmapsto F_w$ est une bijection de W(R) sur l'ensemble des parties F de R_+ telles que F et $R_+ - F$ soient clos. (Appliquer le cor. 1 de la prop. 20 à la partie $P = (R_+ - F) \cup (-F)$.)

¶ 17) Soient R un système de racines réduit et B une base de R. Pour toute partie J de B, soient W_J le sous-groupe de W(R) engendré par les réflexions s_α pour $\alpha \in J$ et w_J l'élément de plus grande longueur de W_J. Soit Φ l'ensemble des w_J.

a) Montrer que, pour qu'un élément $w \in W(R)$ appartienne à Φ, il faut et il suffit que

$$w(B) \subset R_+(B) \cup (-B).$$

(Pour montrer que la condition est suffisante, on désignera par J_1 l'ensemble des $\alpha \in B$ tels que $w(\alpha) \in -B$ et on posera $J = -w(J_1)$. Si $\alpha \in J_1$, on a $w(\alpha) \in -J$ et $w_J w(\alpha) \in B$; si $\alpha \in B - J_1$, on a $w_J w(\alpha) \in R_+$: sinon $w(\alpha)$ serait positive et $w_J w(\alpha)$ négative, ce qui entraînerait que $w(\alpha)$ appartient au sous-système engendré par les $\beta \in J$ et que α appartient au sous-système engendré par les $\beta \in J_1$, ce qui est absurde. En déduire que $w_J w = 1$.)

b) Montrer que, pour qu'un élément $w \in W(R)$ soit d'ordre 2, il faut et il suffit que w soit conjugué de l'un des w_J. (Pour montrer que la condition est nécessaire, on remarquera qu'un élément w d'ordre 2 de W(R) est la symétrie par rapport au sous-espace engendré par une facette F. Quitte à remplacer w par un conjugué, on peut supposer que $F \subset \overline{C}$, où C est la chambre définie par B. La facette F est alors l'intersection des hyperplans L_α pour α appartenant à une partie J de B, et on a $w = w_J$.)

18) Soit R un système de racines et soit P une partie parabolique de R. Montrer que le complémentaire de P dans R est clos.

19) Soit R un système de racines, et soit x un élément non nul de Q(R) de longueur minimale. Montrer que $x \in R$.

¶ 20) Soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ une base d'un système de racines irréductible et réduit R. Soient r et p deux entiers, avec $p \geqslant 2$, tels que :

$$(\alpha_1|\alpha_1) = \cdots = (\alpha_r|\alpha_r) = p.(\alpha_{r+1}|\alpha_{r+1}) = \cdots = p.(\alpha_l|\alpha_l).$$

a) Soit $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_l\alpha_l$ une racine. Montrer que $(\alpha|\alpha) = (\alpha_1|\alpha_1)$ (autrement dit que α est une racine longue) si et seulement si p divise $c_{r+1}, \ldots, c_l$.

b) Soit h le nombre de Coxeter de W(R). Montrer que le nombre des racines de R de plus grande (resp. de plus petite) longueur est égal à hr (resp. à $h(l-r)$).

21) Soient R un système de racines et B une base de R. Soient $\alpha, \beta \in B$ et $w \in W(R)$ tels que $\beta = w(\alpha)$. Montrer qu'il existe une suite $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ d'éléments de R et une suite $w_1, \ldots, w_{n-1}$ d'éléments de W(R) tels que :

(i) $$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_n = \beta.$$

(ii) $$w = w_{n-1} \ldots w_1.$$

(iii) $$w_i(\alpha_i) = \alpha_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

(iv) Pour tout $i \in [1, n-1]$, il existe $\beta_i \in B$ tel que w_i appartienne au sous-groupe de W engendré par les réflexions s_{α_i} et s_{β_i}.

¶ 22) Les hypothèses et notations étant celles de la prop. 33 du n° 11, on désigne par $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$ les poids fondamentaux de R.

a) Montrer que $c^{-1}(\varpi_i) = \varpi_i - \theta_i$. En déduire que $1 - c$ applique P(R) sur Q(R).

b) Soit f l'indice de connexion de R, et soient $m_1, \ldots, m_l$ les exposants de W(R). Montrer que l'on a :

$$f = \det(1 - c) = \prod_{j=1}^{l} (1 - w^{m_j}) = 2^l \prod_{j=1}^{l} \sin(m_j \pi / h)$$

avec $w = e^{2\pi i/h}$.

c) Soit p un nombre premier. Écrivons h sous la forme $h = p^a \mathrm{H}$, avec H non divisible par p. Montrer que, pour que p divise f, il faut et il suffit que H divise l'un des m_j (*).

23) Soit R un système de racines réduit, et soit X une partie de P(R). On dit que X est *saturée* si la condition suivante est vérifiée :

(S) Quels que soient $p \in X$, $\alpha \in R$, et $i \in \mathbf{Z}$ tels que i soit compris entre 0 et $\langle p, \alpha^\vee \rangle$, on a $p - i\alpha \in X$.

a) Montrer que toute partie saturée est stable par le groupe de Weyl W de R.

b) Montrer que, pour toute partie A de P(R), il existe une plus petite partie saturée S(A) de P(R) contenant A.

c) Soit C une chambre de R, et soit $p \in P(R) \cap \overline{C}$ un poids dominant. Soit $S(p)$ la plus petite partie saturée de P(R) contenant p. Soit $\Sigma(p)$ l'ensemble des éléments $p' \in P(R)$ tels que :

(i) $p' \equiv p \bmod. Q(R)$.

(ii) Pour tout $w \in W$, on a $w(p') \leqslant p$ (au sens de la relation d'ordre définie par C).

Montrer que $\Sigma(p)$ est fini, contient p, et est saturé. En conclure que $S(p)$ est contenu dans $\Sigma(p)$.

d) Montrer que, si α est un élément de R de longueur maximum, on a $S(\alpha) = R \cup \{0\}$.

24) On conserve les notations et les hypothèses de l'exercice précédent.

a) Soit $p \in P(R)$, et soit $W.p$ l'orbite de p par W. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $S(p) = W.p$.

(ii) $\langle p, \alpha^\vee \rangle = 0, 1$ ou -1 pour tout $\alpha \in R$.

(Si (ii) n'est pas vérifiée, on construira un élément $q \in S(p)$ tel que $(q|q) < (p|p)$, d'où $q \notin W.p$.)

b) Soit X une partie saturée non vide de P(R). Montrer que X contient un élément p vérifiant les conditions (i) et (ii) ci-dessus. (Prendre pour p un élément de X de longueur minimum.)

c) On suppose R irréductible. Soit C une chambre de R, soit $B = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ la base correspondante, et soit

$$\gamma^* = \sum_i n_i \alpha_i^\vee$$

la plus grande racine de $R^\vee$. Soit J l'ensemble des $i \in I$ tels que $n_i = 1$. Soit p un poids dominant $\neq 0$. Montrer que les conditions (i) et (ii) de *a*) équivalent à chacune des conditions suivantes :

(iii) $\langle p, \gamma^* \rangle = 1$.

(iv) Il existe $i \in J$ tel que p soit égal au poids fondamental ϖ_i correspondant.

Un poids p vérifiant ces conditions est appelé *minuscule*. Montrer que toute partie saturée non vide de P(R) contient, soit 0, soit un poids minuscule.

§ 2.

On désigne par R un système de racines réduit dans un espace vectoriel réel V.

1) Soit $x \in \mathrm{V}$, et soit $\mathrm{W}(x)$ le sous-groupe de $\mathrm{W(R)}$ formé des éléments w tels que

$$w(x) - x \in \mathrm{Q(R)}.$$

Montrer que $\mathrm{W}(x)$ est engendré par des réflexions. (Utiliser le groupe de Weyl affine de $\mathrm{R}^\vee$.)

2) On suppose R irréductible. Soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ une base de R, soit $\tilde{\alpha} = \sum_i n_i\alpha_i$ la plus grande racine de R et soit f l'indice de connexion de R. Montrer que $f - 1$ est égal au nombre des indices i tels que $n_i = 1$.

3) Les notations et hypothèses étant celles du nº 3, soit u un automorphisme de l'espace affine E qui permute entre eux les hyperplans $\mathrm{L}_{\alpha,k}$ ($\alpha \in \mathrm{R}$, $k \in \mathbf{Z}$). Montrer que u est un déplacement. (Si u_0 est l'application linéaire associée à u, on montrera que la transposée de u_0 laisse stable R, donc appartient au groupe A(R).) En déduire que G est le normalisateur de W_a dans le groupe des automorphismes de l'espace affine E.

4) Soit C′ une chambre relative à W(R) dans V^*, et soit C l'alcôve de sommet 0 contenue dans C′. Soit S_a (resp. S) l'ensemble des réflexions par rapport aux murs de C (resp. de C′). Les couples $(\mathrm{W}_a, \mathrm{S}_a)$ et (W, S) sont des systèmes de Coxeter, et l'on a $\mathrm{S} \subset \mathrm{S}_a$. Montrer que, pour qu'un élément $w \in \mathrm{W}_a$ soit $(\mathrm{S}, \varnothing)$-réduit (chap. IV, § 1, exerc. 3), il faut et il suffit que $w(\mathrm{C}) \subset \mathrm{C}'$.

¶ 5) On suppose R irréductible, et l'on choisit une chambre C de R dans V; on note B la base de R correspondante.

a) Montrer que les poids minuscules (§ 1, exerc. 24) de R forment un système de représentants dans P(R) des éléments non nuls de P(R)/Q(R). (Appliquer à $\mathrm{R}^\vee$ le corollaire de la prop. 6.)

b) Soit X une partie saturée (§ 1, exerc. 23) de Q(R). On suppose X non vide et non réduite à $\{0\}$. Soit p un élément non nul de X de longueur minimale. Montrer que $p \in \mathrm{R}$. (Vu *a*), p ne vérifie pas la condition (ii) de l'exerc. 24 du § 1; il existe donc $\alpha \in \mathrm{R}$ tel que $\langle p, \alpha^\vee \rangle \geqslant 2$, d'où $p - \alpha \in \mathrm{X}$. Comme $p - \alpha$ est de longueur strictement inférieure à la longueur de p, on a $p - \alpha = 0$, d'où $p \in \mathrm{R}$.)

c) Soit p un poids dominant n'appartenant pas à Q(R). Montrer que le saturé $\mathrm{S}(p)$ de p (cf. § 1, exerc. 23) contient un poids minuscule et un seul. (Remarquer que $\mathrm{S}(p)$ est contenu dans une classe non triviale mod. Q(R); conclure en appliquant *a*) et l'exerc. 24 *c*) du § 1.)

d) Soit p un poids dominant n'appartenant pas à Q(R). Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) p est minuscule.

(v) Il n'existe pas de poids dominant $q \neq p$ tel que $p - q$ soit combinaison linéaire à coefficients entiers $\geqslant 0$ des éléments de B.

(Si q vérifie les conditions de (v), soit p_1 un poids minuscule appartenant à $\mathrm{S}(q)$. On a $p_1 \equiv p$ mod. Q(R), $p_1 < p$, et *a*) montre que p n'est pas minuscule. Donc (i) $\Longrightarrow$ (v). Inversement, si p n'est pas minuscule, soit $q \in \mathrm{S}(p) - \mathrm{W}.p$; quitte à transformer q par W, on peut supposer que $q \in \overline{\mathrm{C}}$; d'après l'exerc. 23 du § 1, on a $q < p$, $q \neq p$, et $q \equiv p$ mod. Q(R). D'où (v) $\Longrightarrow$ (i).)

(*) Cet exercice, inédit, nous a été communiqué par R. Steinberg.

§ 3.

Les notations et hypothèses sont celles des nº 2, 3, 4.

1) *a*) Montrer que, pour tout i compris entre 1 et l, il existe une dérivation D_i et une seule de A[P] vérifiant les conditions suivantes :

a_1) D_i est A-linéaire.

a_2) $D_i(e^{\varpi_j}) = \delta_{ij}e^{\varpi_j}$ (δ_{ij} étant le symbole de Kronecker).

b) Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ une famille d'éléments de $A[P]^W$ vérifiant la condition du théorème 1. Montrer que l'on a :

$$\det(D_i(x_j)) = d.$$

(On prouvera que $\det(D_i(x_j))$ est anti-invariant et de terme dominant e^ρ, d'où le résultat lorsque 2 est non diviseur de zéro dans A. Traiter le cas général grâce au principe de prolongement des identités algébriques (*)).

2) Soit P′ un sous-groupe de P(R) contenant Q(R). Montrer que P′ est stable par W. Construire un exemple où l'algèbre $A[P']^W$ n'est pas isomorphe à une algèbre de polynômes (prendre pour R le produit de deux systèmes de rang 1).

§ 4.

Si R est un système de racines, on note $W^+(R)$ l'ensemble des éléments de W(R) de déterminant 1.

¶ 1) Soit R un système de racines de type E_8.

a) Montrer que si $\alpha, \beta \in R$ sont congrus modulo 2Q(R), on a $\beta = \pm \alpha$.

b) Déduire de *a*) que, si $w \in W(R)$ opère trivialement dans Q(R)/2Q(R), on a $w = \pm 1$.

c) Avec les notations du nº 10, montrer que la forme quadratique $\frac{1}{2}(x|x)$ sur Q(R) définit par passage au quotient une forme quadratique non dégénérée q_8 sur le $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel Q(R)/2Q(R). Montrer que le pseudo-discriminant de q_8 (cf. *Alg.*, chap. IX, § 9, exerc. 9) est nul, et que q_8 est d'indice 4.

d) Soit $\mathbf{O}(q_8)$ le groupe orthogonal de Q(R)/2Q(R) pour cette forme. Définir, par passage au quotient, un homomorphisme

$$h : W(R) \to \mathbf{O}(q_8).$$

Montrer (en comparant les ordres) que la suite

$$1 \to \{1, -1\} \to W(R) \xrightarrow{h} \mathbf{O}(q_8) \to 1$$

est exacte.

e) Montrer que l'image par h de $W^+(R)$ est le sous-groupe $\mathbf{O}^+(q_8)$ de $\mathbf{O}(q_8)$ défini dans *Alg.*, chap. IX, § 9, nº 5. En déduire que $W^+(R)/\{1, -1\}$ est un groupe simple non commutatif.

¶ 2) Soit R un système de racines de type E_6.

a) On pose E = Q(R)/3P(R). C'est un $\mathbf{F}_3$-espace vectoriel de dimension 5. Avec les notations du nº 12, montrer que le produit scalaire $(x|y)$ définit sur E une forme bilinéaire symétrique non dégénérée φ. Montrer que deux éléments distincts de R ont des images distinctes dans E.

b) Soit $\mathbf{O}(\varphi)$ le groupe orthogonal de φ. On a $\mathbf{O}(\varphi) = \{1, -1\} \times \mathbf{SO}(\varphi)$. La norme spinorielle définit un homomorphisme surjectif de $\mathbf{SO}(\varphi)$ sur $\{1, -1\}$ dont le noyau est noté

(*) Cet exercice, inédit, nous a été communiqué par R. Steinberg.

$\mathbf{SO}^+(\varphi)$. Le groupe $\mathbf{SO}^+(\varphi)$ est simple d'ordre 25920. Le quotient $\mathbf{O}(\varphi)/\mathbf{SO}^+(\varphi)$ est de type (2,2). En déduire que $\mathbf{O}(\varphi)$ contient un sous-groupe et un seul $\Omega(\varphi)$ d'indice 2, distinct de $\mathbf{SO}(\varphi)$ et ne contenant pas -1.

c) Tout élément de A(R) définit par passage au quotient un élément de $\mathbf{O}(\varphi)$. Montrer (en comparant les ordres) que l'on obtient ainsi un isomorphisme de A(R) sur $\mathbf{O}(\varphi)$. L'image de W(R) par cet isomorphisme est $\Omega(\varphi)$, celle de $W^+(R)$ est $\mathbf{SO}^+(\varphi)$. Ainsi W(R) est extension de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par un groupe simple d'ordre 25920.

d) Soit $F = Q(R)/2Q(R)$. C'est un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de dimension 6. Montrer que la forme quadratique $\frac{1}{2}(x|x)$ définit par passage au quotient une forme quadratique q_6 non dégénérée sur F, de pseudo-discriminant égal à 1. Si $\mathbf{O}(q_6)$ désigne le groupe orthogonal correspondant, définir, par passage au quotient, un homomorphisme

$$h : W(R) \to \mathbf{O}(q_6).$$

Montrer que h est injectif (noter que $-1 \notin W(R)$), puis que c'est un isomorphisme (comparer les ordres). En déduire un isomorphisme de $W^+(R)$ sur $\mathbf{O}^+(q_6)$ (cf. *Alg.*, chap. IX, § 9, nº 5).

e) En comparant *c*) et *d*), montrer (*) que $\mathbf{SO}^+(\varphi)$ est isomorphe à $\mathbf{O}^+(q_6)$.

¶ 3) Soit R un système de racines de type E_7.

a) On pose $E = Q(R)/2P(R)$. C'est un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de dimension 6. Avec les notations du nº 11, montrer que le produit scalaire $(x|y)$ définit sur E une forme bilinéaire alternée non dégénérée.

b) Déduire de *a*) l'existence d'une suite exacte

$$1 \to \{1, -1\} \to W(R) \xrightarrow{h} \mathbf{Sp}(6, \mathbf{F}_2) \to 1.$$

(Utiliser le fait que $\mathbf{Sp}(6,\mathbf{F}_2)$ est d'ordre $2^9.3^4.5.7$.)

c) Montrer que la restriction de h à $W^+(R)$ est un isomorphisme de $W^+(R)$ sur $\mathbf{Sp}(6, \mathbf{F}_2)$.

d) Donner une seconde démonstration de *b*) en utilisant la forme quadratique q_7 sur le $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel $Q(R)/2Q(R)$ déduite de $\frac{1}{2}(x|x)$ par passage au quotient, ainsi que l'isomorphisme

$$\mathbf{O}(q_7) \to \mathbf{Sp}(6, \mathbf{F}_2).$$

¶ 4) Soient R un système de racines irréductible et réduit dans V, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ une base de R, $\tilde{\alpha}$ la plus grande racine. On pose $\tilde{\alpha} = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l$. On se propose de déterminer les parties closes et symétriques de R, distinctes de R, et maximales pour ces propriétés.

a) Soit $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Soit R_i l'ensemble des $\alpha \in R$ qui sont combinaisons linéaires des α_j pour $j \neq i$. Montrer que R_i est maximal si et seulement si $n_i = 1$.

b) Soit $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ et supposons que $n_i > 1$. Soit S_i l'ensemble des racines $\sum_{j=1}^{l} m_j\alpha_j$ avec $m_i \equiv 0 \pmod{n_i}$. Montrer que S_i est maximal si et seulement si n_i est premier. (Si $n_i = ab$ avec $a > 1$, $b > 1$, considérer la partie S′ de R formée des racines $\sum_j m_j\alpha_j$ avec $m_i \equiv 0 \pmod{a}$, et montrer que S′ contient strictement S_i.) Montrer que les racines $-\tilde{\alpha}$, α_j $(j \neq i)$ forment une base de S_i (qui est de rang l). En déduire le graphe de Dynkin de S_i.

c) Toute partie close, symétrique et maximale de R est transformée par un élément de W(R) de l'une des parties décrites en *a*) ou *b*). (Soit Σ une telle partie. On a $\Sigma = R \cap H$, où H est

(*) M. Kneser a montré qu'une méthode analogue permet d'obtenir tous les isomorphismes « exceptionnels » entre groupes classiques finis. Cf. Über die Ausnahme-Isomorphismen zwischen endlichen klassischen Gruppen, *Hamburger Abh.*, t. XXXI (1967), p. 136-140.

un sous-groupe d'indice fini de Q(R) (§ 1, exerc. 6 *b*); on peut supposer que Q(R)/H est cyclique. Il existe donc un $u^* \in V^*$ tel que Σ soit l'ensemble des $\alpha \in R$ tels que $\langle u^*, \alpha\rangle \in \mathbf{Z}$. On ne change pas Σ en ajoutant à u un élément de $Q(R^\vee)$. Utilisant $W_a(R)$, montrer qu'on peut prendre u^* tel que $\langle u^*, \alpha_i\rangle \geqslant 0$, $\langle u^*, \tilde\alpha\rangle \leqslant 1$. Soit $u_i = \langle u^*, \alpha_i\rangle$. Si deux des u_i sont $\neq 0$, Σ n'est pas maximal.)

d) Donner la liste des parties closes symétriques maximales de R pour les différents types de systèmes de racines irréductibles réduits.

5) Soient R un système de racines, et P′(R) le sous-groupe de P(R) introduit au § 1, exerc. 8. Montrer que P′(R) = P(R) si R est de type A_l avec l pair, ou B_l avec $l \equiv 0, 3 \pmod 4$, ou D_l avec $l \equiv 0, 1 \pmod 4$, ou G_2, ou F_4, ou E_6, ou E_8. Montrer que P′(R) = Q(R) si R est de type C_l, ou B_l avec $l \equiv 1, 2 \pmod 4$, ou E_7, ou A_1. Si R est de type A_l avec l impair > 1, P′(R)/Q(R) est l'unique sous-groupe d'indice 2 du groupe cyclique P(R)/Q(R). Si R est de type D_l avec $l \equiv 2, 3 \pmod 4$, P′(R)/Q(R) est l'unique sous-groupe d'ordre 2 de P(R)/Q(R) stable par A(R).

¶ 6) Soient R un système de racines irréductible et réduit, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ une base de R, $p_1\alpha_1 + \cdots + p_l\alpha_l$ la plus grande racine, $a_1\alpha_1 + \cdots + a_l\alpha_l$ la somme des racines positives, $m_1, \ldots, m_l$ les exposants de W(R), g son ordre, f l'indice de connexion.

a) Vérifier dans chaque cas que

$$l!\,p_1p_2\ldots p_lm_1m_2\ldots m_l = a_1a_2\ldots a_l.$$

b) Montrer que

$$gm_1m_2\ldots m_l = fa_1a_2\ldots a_l.$$

(Utiliser *a*) et la prop. 7 du § 2, nº 4.)

c) Pour toute racine positive $\alpha = \sum_i c_i\alpha_i$, soit $e(\alpha) = \sum_i c_i$. Calculer dans chaque cas le polynôme

$$P(t) = \sum_{\alpha > 0} t^{e(\alpha)}.$$

Vérifier (*) que l'on a $P(t) = t \sum_{i=1}^{l} (1 + t + \cdots + t^{m_i - 1})$.

7) Soit R un système de racines irréductible et réduit.

a) Vérifier que l'homomorphisme canonique de A(R)/W(R) dans le groupe d'automorphismes de P(R)/Q(R) est injectif.

b) En déduire que -1 appartient à W(R) si et seulement si $Q(R) \supset 2P(R)$.

8) Soient R_1 et R_2 deux systèmes de racines irréductibles et réduits. Montrer que si $W(R_1)$ et $W(R_2)$ ont même ordre, R_1 est isomorphe à R_2 ou à $R_2^\vee$. (Utiliser la classification.) Ce résultat subsiste-t-il lorsqu'on ne suppose plus que R_1 est irréductible?

9) Soit R un système de racines de rang l, et soit p un nombre premier divisant l'ordre de A(R). Montrer que $p \leqslant l + 1$. (Se ramener au cas irréductible, et utiliser la classification.)

10) *a*) Soit (W, S) un système de Coxeter fini et irréductible. Posons :

$$W(t) = \sum_{w \in W} t^{l(w)} \quad \text{(cf. chap. IV, § 1, exerc. 26).}$$

(*) Pour une démonstration n'utilisant pas la classification, voir :
B. Kostant, The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group, *Amer. J. of Maths.*, t. LXXXI (1959), p. 973-1032.

Soient $m_1, \ldots, m_l$ les exposants de W (chap. V, § 6, n° 2). Vérifier, pour les petites valeurs de l, la formule :

$$W(t) = \prod_{i=1}^{l} (1 + t + \cdots + t^{m_i})$$

(utiliser le th. 1 et l'exerc. 26 du chap. IV, § 1) (*).

b) Soient R un système de racines réduit et irréductible et W (resp. W_a) le groupe de Weyl (resp. le groupe de Weyl affine) de R, muni de sa structure de groupe de Coxeter provenant du choix d'une alcôve. On définit $W(t)$ et les exposants m_i comme ci-dessus et l'on pose :

$$W_a(t) = \sum_{w \in W_a} t^{l(w)}.$$

Vérifier, pour les petites valeurs de l, la formule :

$$W_a(t) = W(t) \prod_{i=1}^{l} \frac{1}{1 - t^{m_i}} = \prod_{i=1}^{l} \frac{1 + t + \cdots + t^{m_i}}{1 - t^{m_i}}$$

(utiliser le th. 2 et l'exerc. 26 du chap. IV, § 1) (**).

¶ 11) Soit (W, S) un système de Coxeter de type H_3 (cf. th. 1).

a) Les notations étant celles du chap. V, § 6, n° 2, démonstration du lemme 2, montrer que $\widehat{(z', z'')} = \pi/5$; en déduire que le nombre de Coxeter h de W est égal à 10, et que les exposants de W sont 1, 5 et 9.

b) Montrer, en utilisant *a*), que Card(W) = 120, et que le nombre de réflexions de W est 15.

c) Retrouver la formule Card(W) = 120 en appliquant l'exerc. 5 du chap. V, § 3.

d) Soit $\mathfrak{A}_5$ le groupe alterné de $\{1, \ldots, 5\}$; si a, b, c, d sont des éléments distincts de $\{1, \ldots, 5\}$, notons (ab) la transposition de a et b, et $(ab)(cd)$ le produit des transpositions (ab) et (cd). Soient :

$$r_1 = (14)(23), \qquad r_2 = (12)(45), \qquad r_3 = (12)(34).$$

Montrer que $(r_1r_2)^5 = (r_2r_3)^3 = (r_1r_3)^2 = 1$. En déduire l'existence d'un homomorphisme $f : W \to \mathfrak{A}_5$ appliquant S sur $\{r_1, r_2, r_3\}$; montrer que f est surjectif.

e) Soit $\varepsilon : W \to \{\pm 1\}$ l'homomorphisme $w \longmapsto (-1)^{l(w)}$. Montrer que

$$(f, \varepsilon) : W \to \mathfrak{A}_5 \times \{\pm 1\}$$

est un isomorphisme. (Utiliser le fait que les deux groupes considérés ont même ordre.)

¶ 12) Soit $(1, i, j, k)$ la base canonique du corps **H** des quaternions, à l'aide de laquelle on identifie **H** à $\mathbf{R}^4$. On munit **H** du produit scalaire $\frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})$. Soit Γ le groupe multiplicatif des quaternions de norme 1.

a) Si $a \in \Gamma$, la réflexion orthogonale s_a dans **H** qui transforme a en $-a$ est l'application $x \longmapsto -a\bar{x}a$.

(*) Pour une démonstration de cette formule n'utilisant pas la classification et valable pour toutes les valeurs de l, voir :
L. Solomon, The orders of the finite Chevalley groups, *Journal of Algebra*, t. III (1966), p. 376-393.

(**) Pour une démonstration de cette formule n'utilisant pas la classification et valable pour toutes les valeurs de l, voir :
R. Bott, An application of the Morse theory to the topology of Lie groups, *Bull. Soc. Math. France*, t. LXXXIV (1956), p. 251-281;
N. Iwahori et H. Matsumoto, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups, *Publ. Math. Inst. Hautes Et. Sci.*, n° 25 (1965), p. 5-48.

b) Soient $q = \cos\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}i + (\cos\frac{3\pi}{5})j \in \Gamma$, et $r = \frac{1}{2}(1 + i + j + k) \in \Gamma$. Soit Q l'ensemble des quaternions déduits de 1, q, r par permutations paires sur les coordonnées et changements de signes quelconques sur les coordonnées. Alors Q est un sous-groupe de Γ d'ordre 120.

c) Soit W le sous-groupe de $\mathbf{GL}(\mathbf{H})$ engendré par les s_a pour $a \in \mathrm{Q}$. Montrer que W laisse stable Q, est fini, irréductible, et non cristallographique; en déduire que W est de type H_4 (cf. théorème 1).

d) Montrer que W opère transitivement sur Q (utiliser la prop. 3 du chap. IV, § 1.)

e) Soit $a_0 \in \mathrm{Q}$, soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbf{H}$ orthogonal à a_0, et soit W_0 le stabilisateur de a_0 dans W. Montrer que la restriction de W_0 à V est un groupe irréductible, engendré par des réflexions (chap. V, § 3, nº 3) et non cristallographique. En déduire que W_0 est un groupe de Coxeter de type H_3.

f) Montrer que Card (W) $= 2^6 3^2 5^2$ (utiliser *d*), *e*) et l'exercice 11).

g) Montrer que le nombre de Coxeter de W est égal à 30, et que ses exposants sont 1, 11, 19, 29.

13) Soit V l'hyperplan de $\mathbf{R}^9$ d'équation $x_1 + \cdots + x_9 = 0$. Soit R le sous-ensemble de V formé des points

$$(2, 2, 2, -1, -1, -1, -1, -1, -1), \qquad (-2, -2, -2, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$$
$$(3, -3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

et de ceux qu'on en déduit par permutation des coordonnées. Montrer que R est un système de racines de V, de type E_8.

14) Avec les notations du nº 7, montrer que l'automorphisme de $\mathbf{R}^{l+1}$ qui transforme ε_1 en ε_2, ε_2 en ε_3, ..., ε_l en ε_{l+1} et ε_{l+1} en ε_1 induit une transformation de Coxeter du système R de type A_l.

15) Déterminer les poids minuscules (§ 1, exerc. 24) pour chaque type de système de racines réduit irréductible. (On trouvera les poids fondamentaux $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$ pour A_l, le poids ϖ_l pour B_l, le poids ϖ_1 pour C_l, les poids $\varpi_1, \varpi_{l-1}, \varpi_l$ pour D_l, les poids ϖ_1 et ϖ_6 pour E_6, le poids ϖ_7 pour E_7, et aucun poids pour E_8, F_4 et G_2.)

¶ 16) Soit (W, S) un système de Coxeter fini et irréductible, et soit $n = $ Card (S).

a) Si (W, S) n'est pas de type F_4, montrer qu'il existe une partie X de S à $n - 1$ éléments telle que $(\mathrm{W}_\mathrm{X}, \mathrm{X})$ soit de type A_{n-1}.

b) On identifie W à un sous-groupe de $\mathbf{GL}(\mathbf{R}^{\mathrm{S}})$ au moyen de la représentation canonique (chap. V, § 4). Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{R}^{\mathrm{S}}$ telle que, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, l'automorphisme de $\mathbf{R}^{\mathrm{S}}$ transformant e_i en $e_{\sigma(i)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ appartienne à W (« théorème de Burnside »). (Lorsque (W, S) n'est pas de type F_4, utiliser *a*); lorsqu'il est de type F_4, remarquer que W contient un sous-groupe de type D_4 (cf. nº 9), ce qui ramène le problème au cas précédent.)

c) Soit E un sous-groupe du groupe d'automorphismes de (W, S). Montrer que le produit semi-direct E.W de E par W se plonge de façon canonique dans $\mathbf{GL}(\mathbf{R}^{\mathrm{S}})$. Montrer que le sous-groupe de $\mathbf{GL}(\mathbf{R}^{\mathrm{S}})$ ainsi défini est engendré par des réflexions, sauf dans les quatre cas suivants :

(i) (W, S) est de type A_n, $n \geqslant 4$; le groupe E est d'ordre 2.

(ii) (W, S) est de type D_4; le groupe E est d'ordre 3.

(iii) (W, S) est de type F_4; le groupe E est d'ordre 2.

(iv) (W, S) est de type E_6; le groupe E est d'ordre 2.

Montrer que, dans les cas (i) et (iv), on a $E.W = \{\pm 1\} \times W$. Montrer que, dans le cas (iii), le groupe $E.W$ ne laisse stable aucun réseau de $\mathbf{R}^5$.

d) Soit W_1 un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ engendré par des réflexions, irréductible et essentiel. Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ contenant W_1. Montrer que G est, soit engendré par des réflexions, soit de la forme E.W, où E et W sont de l'un des types (i), (ii), (iii), (iv) de *c*). (Soit W le groupe engendré par les réflexions appartenant à G. Le groupe G permute entre elles les chambres relatives à W. En déduire, comme au § 2, nº 3, que G est de la forme E.W comme ci-dessus.)

NOTE HISTORIQUE (chapitres IV, V et VI).

(N.B. — Les chiffres romains placés entre parenthèses renvoient à la bibliographie placée à la fin de cette note).

Les groupes étudiés dans ces chapitres sont apparus à propos de questions variées de Géométrie, d'Analyse et de Théorie des groupes de Lie, tantôt sous forme de groupes de permutations, tantôt sous forme de groupes de déplacements en géométrie euclidienne ou hyperbolique, et ces divers points de vue n'ont été coordonnés qu'à date récente.

Historiquement, les débuts de la théorie sont bien antérieurs à l'introduction du concept de groupe : elle prend en effet sa source dans les études sur la « régularité » ou les « symétries » des figures géométriques, et notamment dans la détermination des polygones et des polyèdres réguliers (remontant sans doute aux Pythagoriciens), qui constitue le couronnement des *Éléments* d'Euclide, et une des créations les plus admirables du génie grec. Plus tard, notamment chez les auteurs arabes du haut Moyen âge, puis chez Képler, apparaissent les débuts d'une théorie mathématique des « pavages » réguliers du plan ou de la sphère par des polygones congruents deux à deux (mais non nécessairement réguliers), sans doute liés à l'origine aux divers types d'ornements imaginés par les civilisations antiques et arabe (que l'on peut à bon droit considérer comme une partie authentique des mathématiques développées par ces civilisations (XII)).

Vers 1830-1840, les études de cristallographie (Hessel, Bravais, Möbius) conduisent à étudier un problème qui est exactement celui de la détermination des groupes finis de déplacements dans l'espace euclidien à 3 dimensions, bien que les auteurs précités n'usent pas encore du langage de la théorie des groupes; ce dernier n'entre guère dans l'usage que vers 1860, et c'est sous forme de classification de groupes que Jordan, en 1869 (VI), détermine les sous-groupes discrets de déplacements de $\mathbf{R}^3$ conservant l'orientation (et plus généralement, tous les sous-groupes *fermés* du groupe des déplacements conservant l'orientation).

Jusqu'aux dernières années du XIX^e siècle, ce courant d'idées se développe

dans plusieurs directions, dont les plus marquantes sont les suivantes : 1° Conformément à une tendance qui apparaît de très bonne heure dans la théorie des groupes finis, on cherche à « présenter » les groupes finis de déplacements par des générateurs et relations d'un type simple. C'est ainsi que Hamilton, dès 1856 (V), prouve que les groupes finis de rotations dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ sont engendrés par deux générateurs S, T liés par les relations $S^p = T^q = (ST)^3 = 1$ pour des valeurs convenables de p et q.
2° Les groupes discrets de déplacements peuvent ou non contenir des *réflexions*. Dès 1852, Möbius détermine en substance les groupes finis de déplacements en géométrie sphérique *engendrés par des réflexions* (ce qui est équivalent au même problème pour les groupes finis de déplacements euclidiens dans $\mathbf{R}^3$); il trouve qu'exception faite des groupes cycliques, un tel groupe a pour domaine fondamental un triangle sphérique ayant des angles de la forme π/p, π/q, π/r, où p, q, r sont trois entiers > 1 tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ (III) (cf. chap. V, § 4, exerc. 4). Il constate aussi que ces groupes contiennent tous les groupes finis de déplacements comme sous-groupes.
3° Ce dernier courant d'idées trouve une amplification nouvelle lorsqu'à la suite des travaux de Riemann et Schwarz sur les fonctions hypergéométriques et la représentation conforme, commence l'étude des « pavages » du plan complexe ou du demi-plan par des figures limitées par des arcs de cercle; Klein et Poincaré en font le fondement de la théorie des « fonctions automorphes », et y reconnaissent (pour le cas des arcs de cercle orthogonaux à une droite fixe) un problème équivalent à celui de la recherche des sous-groupes discrets du groupe des déplacements du plan non-euclidien hyperbolique (identifié au « demi-plan de Poincaré ») (X).
4° Les notions de polyèdre régulier et de pavage de $\mathbf{R}^3$ par de tels polyèdres sont étendues à tous les espaces euclidiens $\mathbf{R}^n$ par Schläfli, dans un travail qui remonte aux environs de 1850, mais ne fut publié que beaucoup plus tard et resta longtemps ignoré (IV); il détermine complètement les « polytopes » réguliers dans chaque $\mathbf{R}^n$, le groupe des déplacements laissant invariant un tel polytope, et un domaine fondamental de ce groupe, qui, comme dans le cas $n = 3$ étudié par Möbius, est une « chambre » dont la trace sur la sphère $\mathbf{S}_{n-1}$ est un simplexe sphérique. Toutefois, il n'aborde pas le problème inverse de la recherche des groupes finis de déplacements engendrés par des réflexions dans $\mathbf{R}^n$; ce problème ne sera résolu que beaucoup plus tard, par Goursat (VII) pour $n = 4$, et, pour n quelconque, sa solution devra attendre les travaux de E. Cartan (IX f)) et de Coxeter (XIV), sur lesquels nous reviendrons plus bas.

***

Vers 1890, avec les premiers travaux de Killing et de E. Cartan sur les groupes de Lie, débute un nouveau courant d'idées qui pendant longtemps se développera sans lien avec les précédents. Killing (VIII) et Cartan (IX *a*)), dans leur étude de la structure des algèbres de Lie semi-simples complexes, font tout de suite jouer un rôle primordial à certaines formes linéaires ω_α sur une « sous-algèbre de Cartan » $\mathfrak{h}$ d'une telle algèbre de Lie $\mathfrak{g}$; ce sont les « racines » relatives à $\mathfrak{h}$, ainsi nommées parce que chez Killing elles apparaissent comme les racines de l'équation caractéristique $\det(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) - \mathrm{T}) = 0$, considérées comme fonctions de $x \in \mathfrak{h}$. Les propriétés de ces « racines » établies par Killing et Cartan reviennent à affirmer que, dans le langage géométrique du chap. VI, elles forment un « système de racines réduit » (cf. chap. VI, § 1, nº 4); ils montrent ensuite que la classification des algèbres de Lie semi-simples complexes se ramène à celle des « systèmes de racines » associés, qui elle-même se réduit à la détermination de certaines matrices à coefficients entiers (appelées plus tard « matrices de Cartan »; cf. chap. VI, § 1, nº 5). Killing et Cartan mettent aussi en évidence, pour toute racine ω_α, l'existence d'une permutation involutive S_α de l'ensemble des racines (*); ils se servent de façon essentielle de la transformation $C = S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \ldots S_{\alpha_l}$, produit des permutations associées à l racines formant un système fondamental (transformation appelée à présent « transformation de Coxeter »); ils étendent même cette permutation en une transformation linéaire de l'espace vectoriel engendré par les racines fondamentales ω_{α_i} $(1 \leqslant i \leqslant l)$, et étudient ses valeurs propres ((VIII, II)), p. 20; (IX, *a*), p. 58). Mais ni Killing, ni tout d'abord Cartan, ne paraissent songer à considérer le groupe $\mathcal{G}'$ engendré par les S_α; et lorsque Cartan, un peu plus tard (IX *b*)), détermine le groupe de Galois $\mathcal{G}$ de l'équation caractéristique

$$\det(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) - \mathrm{T}) = 0$$

d'un « élément général » $x \in \mathfrak{h}$, il l'étudie d'abord sans faire intervenir les S_α; 30 ans plus tard, déjà sous l'influence des travaux de H. Weyl, il prouve (IX *c*)) que $\mathcal{G}$ a pour sous-groupe distingué le groupe $\mathcal{G}'$ et détermine dans tous les cas la structure du groupe quotient $\mathcal{G}/\mathcal{G}'$ qui (pour une algèbre simple $\mathfrak{g}$) est d'ordre 1 ou 2 sauf pour le type D_4 où il est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$; c'est aussi à cette occasion qu'il interprète $\mathcal{G}'$ comme groupe induit par les automorphismes intérieurs d'une algèbre de Lie semi-simple complexe, laissant stable une sous-algèbre de Cartan (**).

Les travaux de H. Weyl, auxquels nous venons de faire allusion, sont ceux qui inaugurent l'interprétation géométrique du groupe $\mathcal{G}'$ (appelé depuis « groupe de Weyl » de $\mathfrak{g}$); de même que Killing et Cartan l'avaient fait pour la transformation C, il a l'idée de considérer les S_α comme des réflexions dans l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathfrak{h}$. C'est aussi dans le mémoire de

(*) Les notations ω_α et S_α correspondent respectivement aux notations α et s_α du chap. VI, § 1.

(**) Les notations $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ correspondent respectivement aux notations A(R) et W(R) du chap. VI, § 1, nº 1.

H. Weyl (XIII) que l'on voit apparaître le domaine fondamental du « groupe de Weyl affine » (sans d'ailleurs que le lien avec le « groupe de Weyl » $\mathcal{G}'$ soit très clairement indiqué); Weyl l'utilise pour prouver que le groupe fondamental d'un groupe compact semi-simple est fini, point capital dans sa démonstration de la complète réductibilité des représentations linéaires d'une algèbre de Lie semi-simple complexe. Peu après, E. Cartan réalise la synthèse des points de vue globaux de H. Weyl, de sa propre théorie des algèbres de Lie semi-simples réelles ou complexes, et de la théorie des espaces riemanniens symétriques qu'il édifiait à cette époque. Dans le mémoire (IX *d*)), il complète la détermination des polytopes fondamentaux du groupe de Weyl et du groupe de Weyl affine, et introduit les réseaux des poids et des poids radiciels (chap. VI, § 1, nº 9); dans (IX *e*)), il étend cette discussion aux espaces symétriques, et rencontre ainsi notamment les premiers exemples de systèmes de racines non réduits (chap. VI, § 4, nº 1). Enfin l'article (IX *f*)) donne la première démonstration du fait que tout groupe fini engendré par des réflexions dans $\mathbf{R}^n$ et irréductible a un domaine fondamental ayant pour trace sur $\mathbf{S}_{n-1}$ un simplexe sphérique; c'est aussi dans ce travail qu'il prouve l'unicité de la plus grande racine (pour un ordre lexicographique quelconque sur un système de racines) par des considérations géométriques.

Un peu plus tard, van der Waerden (XVI), s'appuyant sur le mémoire de H. Weyl, montre que la classification des algèbres de Lie semi-simples complexes équivaut à celle des systèmes de racines réduits, qu'il effectue par des considérations géométriques élémentaires (alors que, chez Killing et Cartan, cette classification résulte de calculs compliqués de déterminants). A peu près en même temps, Coxeter détermine explicitement tous les groupes finis irréductibles de déplacements euclidiens qui sont engendrés par des réflexions (XIV *c*)); il complète ainsi les résultats du mémoire (IX *d*)) de E. Cartan, qui n'avait déterminé que les groupes « cristallographiques » (i.e. associés à un système de racines, ou encore susceptibles d'être plongés dans un groupe discret infini de déplacements). L'année suivante (XIV *d*)), Coxeter montre que les groupes finis engendrés par des réflexions sont les seuls groupes finis (à isomorphie près) admettant une présentation par des générateurs involutifs R_i soumis à des relations de la forme $(R_iR_j)^{m_{ij}} = 1$ (m_{ij} entiers), d'où le nom de « groupes de Coxeter » donnés depuis aux groupes (finis ou non) admettant une telle présentation.

***

Le premier lien entre les deux courants de recherche que nous avons décrits ci-dessus semble avoir été établi par Coxeter (XIV *bis*), puis par Witt (XVII). Ils constatent que les groupes irréductibles infinis de déplacements euclidiens engendrés par des réflexions correspondent biunivoquement (à isomorphisme près) aux algèbres de Lie simples complexes. Witt donne une nouvelle détermination des groupes discrets de ce type, et étend en outre le th. de Coxeter de (XIV *d*)) rappelé ci-dessus en caractérisant également les groupes de Coxeter isomorphes aux groupes discrets infinis de déplacements euclidiens. Ce résultat, et le fait que les groupes analogues en géométrie hyperbolique sont aussi des groupes de Coxeter (*) a conduit à aborder franchement l'étude de ces derniers, tout d'abord (cf. chap. V, § 4) en mettant l'accent sur une réalisation géométrique ((XV), (XXV)), puis, à la suite de J. Tits (XXV) dans le cadre purement algébrique adopté dans ce traité (chap. IV, § 1).

A partir des travaux de Witt, la théorie des groupes de Lie semi-simples et celles des groupes discrets engendrés par des réflexions ne vont cesser de réagir de façon extrêmement fructueuse l'une sur l'autre. Dès 1941, Stiefel (XVIII) remarque que les groupes de Weyl sont exactement les groupes finis engendrés par des réflexions, et qui laissent invariant un réseau. Chevalley (XIX *a*)) et Harish-Chandra (XX *a*)) donnent en 1948-51 des démonstrations *a priori* de la correspondance biunivoque entre groupes « cristallographiques » et algèbres de Lie semi-simples complexes; on ne savait jusque là que vérifier séparément cette correspondance sur chaque type d'algèbre de Lie simple.

Vers 1950, on remarque d'autre part que les polynômes invariants par le groupe de Weyl jouent un rôle important en théorie des représentations linéaires de dimension infinie (XX *a*)) et dans la topologie des groupes de Lie. De son côté, Coxeter (XIV *f*)), reprenant l'étude de la transformation C, produit des réflexions fondamentales d'un groupe fini W engendré par des réflexions, constate (par un examen séparé de chaque type) que l'algèbre des polynômes invariants par W est engendré par des éléments algébriquement indépendants, dont les degrés sont liés de façon simple aux valeurs propres de C (cf. chap. V, §§ 5 et 6). Des démonstrations *a priori* de ces résultats furent ensuite données par Chevalley (XIX *b*)) pour le premier, et par Coleman (XXIII) et Steinberg (XXIV) pour le second.

*
* *

Avec le travail de A. Borel sur les groupes algébriques linéaires (XXII) commencent de nouveaux développements de la théorie des groupes de Lie qui devaient conduire à un notable élargissement de celle-ci. A. Borel met en évidence l'importance des sous-groupes résolubles connexes maximaux (appelés depuis « sous-groupes de Borel ») dans un groupe de Lie, et en fait l'outil principal pour transposer une grande partie de la théorie classique aux groupes algébriques sur un corps algébriquement clos (sans toutefois obtenir encore une classification des groupes algébriques simples (**)). Les sous-groupes

(*) Ces groupes, étudiés à fond dans le cas de dimension 2, n'ont été considérés en dimension $\geqslant 3$ qu'incidemment jusqu'à ces dernières années.

(**) Un groupe algébrique de dimension > 0 est dit *simple* (au sens de la géométrie algébrique) s'il ne contient aucun sous-groupe distingué algébrique de dimension > 0 autre que lui-même. Il est dit *semi-simple* s'il est isogène à un produit de groupes simples non commutatifs.

de Borel (dans le cas des groupes classiques réels ou complexes) étaient déjà intervenus quelques années auparavant dans les travaux de Gelfand et Neumark sur les représentations de dimension infinie; et en 1954, F. Bruhat avait découvert le fait remarquable que, pour les groupes simples classiques, la décomposition du groupe en doubles classes suivant un groupe de Borel est indexée de façon canonique par le groupe de Weyl (XXI). Ce résultat fut ensuite étendu à tous les groupes semi-simples réels et complexes par Harish-Chandra (XX *b*)). D'autre part, en 1955, Chevalley (XIX *c*)) avait réussi à associer à toute algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$ et à *tout* corps commutatif k, un groupe de matrices à coefficients dans k, possédant une décomposition de Bruhat; et il utilisa ce dernier fait pour montrer qu'à un petit nombre d'exceptions près, le groupe ainsi défini était *simple* (au sens de la théorie des groupes abstraits). Il « expliquait » ainsi la coïncidence, déjà observée depuis Jordan et Lie, entre les groupes de Lie simples (au sens de la théorie des groupes de Lie) des types A, B, C, D et les groupes simples classiques définis de façon purement algébrique sur un corps quelconque (coïncidence qui n'avait pu jusque là être étendue qu'au type exceptionnel G_2 par Dickson (XI)). En particulier, en prenant un corps *fini* k, la construction de Chevalley fournit, pour chaque type d'algèbre de Lie simple complexe, une famille de groupes simples *finis*, contenant une grande partie des groupes simples finis connus jusqu'alors, ainsi que quatre nouvelles séries (correspondant aux types d'algèbres de Lie simples F_4, E_6, E_7 et E_8). Peu après, par divers procédés, utilisant des modifications des méthodes de Chevalley, plusieurs auteurs (Hertzig, Suzuki, Ree, Steinberg et Tits) d'une part montrèrent que l'on peut obtenir de façon analogue les autres groupes simples finis connus à cette époque, à l'exception des groupes alternés et des groupes de Mathieu, et d'autre part construisirent d'autres séries de nouveaux groupes simples finis (cf. (XXIX)).

Presqu'en même temps, Chevalley (XIX *d*)), utilisant toujours la technique des décompositions de Bruhat, jointe à un résultat clé sur le normalisateur d'un sous-groupe de Borel, reprenait l'étude des groupes linéaires algébriques et parvenait au résultat que sur un corps *algébriquement clos* k de caractéristique *quelconque*, la théorie des groupes linéaires algébriques semi-simples (*) conduit essentiellement aux mêmes types que dans la classification de Killing-Cartan pour $k = \mathbf{C}$. Par la suite, J. Tits (XXV *a*) et *b*)), en analysant les méthodes de Chevalley, est parvenu à une version axiomatisée (les « BN-paires ») des décompositions de Bruhat, sous une forme remarquablement souple, ne faisant intervenir que la structure de groupe; c'est cette notion qui a été exposée sous le nom de « système de Tits » au chap. IV, § 2. Tous les groupes simples (aux divers sens du mot) dont il a été question plus haut sont canoniquement munis de systèmes de Tits, et Tits lui-même (XXV *c*)) a prouvé que l'existence

(*) L'existence de nombreuses algèbres de Lie simples « pathologiques » sur un corps de caractéristique $p > 0$ avait pu faire douter certains du caractère universel de la classification de Killing-Cartan.

d'un tel système dans un groupe abstrait G, jointe à quelques propriétés supplémentaires de pure théorie des groupes, permet de démontrer que G est *simple*, théorème qui couvre la plupart des démonstrations de simplicité données jusque-là pour ces groupes (cf. chap. IV, § 2 nº 6). En collaboration avec A. Borel, il a d'autre part généralisé les résultats de Chevalley de (XIX *d*)), en montrant l'existence de systèmes de Tits dans le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique linéaire semi-simple sur un corps *quelconque* (XXVII).

Tous les systèmes de Tits rencontrés dans ces questions ont un groupe de Weyl fini. Une autre catégorie d'exemples a été découverte par Iwahori et Matsumoto (XXVI); ils ont montré que si, dans la construction de Chevalley de (XIX *c*)), k est un corps p-adique, alors le groupe obtenu a un système de Tits dont le groupe de Weyl est le groupe de Weyl *affine* de l'algèbre de Lie semi-simple complexe d'où l'on est parti. Ce résultat vient d'être étendu par Bruhat et Tits (XXVIII) à tous les groupes algébriques semi-simples sur un corps local.

BIBLIOGRAPHIE

(I) J. HESSEL, *Krystallometrie oder Krystallonomie und Krystallographie* (1830, repr. dans *Ostwald's Klassiker*, nos 88 et 89, Leipzig (Teubner), 1897).

(II) A. BRAVAIS, Mémoires sur les polyèdres de forme symétrique, *Journal de Math.*, (1), t. XIV (1849), p. 141-180.

(III) A. MÖBIUS : *a*) Ueber das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und die Anwendung dieses Gesetze auf die Eintheilung der Krystalle in Systeme, *J. de Crelle*, t. XLIII (1852), p. 365-374 (= *Gesammelte Werke*, t. II, Leipzig (Hirzel), 1886, p. 349-360) ; *b*) Theorie der symmetrischen Figuren, *Gesammelte Werke*, t. II, Leipzig (Hirzel), 1886, p. 561-708.

(IV) L. SCHLÄFLI, Theorie der vielfachen Kontinuität, *Denkschr. der Schweiz. naturforsch. Gesellschaft*, t. XXXVIII (1901), p. 1-237 (= *Ges. math. Abhandlungen*, t. I, Basel (Birkhäuser), 1950, p. 167-387).

(V) W. R. HAMILTON, Memorandum respecting a new system of roots of unity, *Phil. Mag.*, (4) t. XII (1856), p. 446.

(VI) C. JORDAN, Mémoire sur les groupes de mouvements, *Ann. di Mat.*, t. II (1868-69), p. 167-215 et 322-345 (= *Œuvres*, t. IV, Paris (Gauthier-Villars), 1964, p. 231-302).

(VII) E. GOURSAT, Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, (3), t. VI (1889), p. 9-102.

(VIII) W. KILLING, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen : I) *Math. Ann.*, t. XXXI (1888), p. 252-290; II), *ibid.*, t. XXXIII (1889), p. 1-48; III) *ibid.*, t. XXXIV (1889), p. 57-122; IV) *ibid.*, t. XXXVI (1890), p. 161-189.

(IX) E. CARTAN : *a*) Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Thèse), Paris (Nony), 1894 (= *Œuvres complètes*, Paris, (Gauthier-Villars), 1952, t. I_1, p. 137-287) ; *b*) Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu, *Amer. Journ. of Math.*, t. XVIII (1896), p. 1-46 (= *Œuvres complètes*, t. I_1, p. 293-353) ; *c*) Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples, *Bull. Sci. Math.*, t. XLIX (1925), p. 361-374 (= *Œuvres complètes*, t. I_1, p. 555-568) ; *d*) La géométrie des groupes simples, *Ann. di Mat.*, (4), t. IV (1927), p. 209-256 (= *Œuvres complètes*, t. I_2, p. 793-840) ; *e*) Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, (3), t. XLIV (1927), p. 345-467 (= *Œuvres complètes*, t. I_2, p. 867-989) ; *f*) Complément au mémoire « Sur la géométrie des groupes simples », *Ann. di Mat.*, (4), t. V (1928), p. 253-260 (= *Œuvres complètes*, t. I_2, p. 1003-1010).

(X) R. Fricke und F. Klein, *Theorie der automorphen Funktionen*, Leipzig (Teubner), 1897.

(XI) L. E. Dickson : *a*) Theory of linear groups in an arbitrary field, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. II (1901), p. 363-394; *b*) A new system of simple groups, *Math. Ann.*, t. LX (1905), p. 137-150.

(XII) A. Speiser, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, Berlin (Springer), 1924.

(XIII) H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen, *Math. Zeitschr.*, t. XXIII (1925), p. 271-309, t. XXIV (1926), p. 328-395 et 789-791 (= *Selecta*, Basel-Stuttgart (Birkhäuser), 1956, p. 262-366).

(XIV) H. S. M. Coxeter : *a*) Groups whose fundamental regions are simplexes, *Journ. Lond. Math. Soc.*, t. VI (1931), p. 132-136; *b*) The polytopes with regular prismatic figures, *Proc. Lond. Math .Soc.*, (2), t. XXXIV (1932), p. 126-189; *c*) Discrete groups generated by reflections, *Ann. of Math.*, (2), t. XXXV (1934), p. 588-621; *d*) The complete enumeration of finite groups of the form $R_i^2 = (R_i . R_j)^{k_{ij}} = 1$, *Journ. Lond. Math. Soc.*, t. X (1935), p. 21-25; *e*) *Regular polytopes*, New York (Macmillan), 1948 (2e éd., 1963); *f*) The product of generators of a finite group generated by reflections, *Duke Math. Journ.*, t. XVIII (1951), p. 765-782.

(XIV *bis*) H. S. M. Coxeter *in* H. Weyl, *The structure and representation of continuous groups* (Inst. for Adv. Study, notes miméographiées par N. Jacobson et R. Brauer, 1934-35) : *Appendix*.

(XV) H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, *Generators and relations for discrete groups*, Ergeb. der Math., Neue Folge, Bd. 14, Berlin (Springer), 1957 (2e éd., 1965).

(XVI) B. L. van der Waerden, Die Klassification der einfachen Lieschen Gruppen, *Math. Zeitschr.*, t. XXXVII (1933), p. 446-462.

(XVII) E. Witt, Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe, *Abh. Math. Sem. Hamb. Univ.*, t. XIV (1941), p. 289-322.

(XVIII) E. Stiefel, Ueber eine Beziehung zwischen geschlossenen Lie'sche Gruppen und diskontinuierlichen Bewegungsgruppen euklidischer Räume und ihre Anwendung auf die Aufzählung der einfachen Lie'schen Gruppen, *Comm. Math. Helv.*, t. XIV (1941-42), p. 350-380.

(XIX) C. Chevalley : *a*) Sur la classification des algèbres de Lie simples et de leurs représentations, *C.R. Acad. Sci.*, t. CCXXVII (1948), p. 1136-1138; *b*) Invariants of finite groups generated by reflections, *Amer. Journ. of Math.*, t. LXXVII (1955), p. 778-782; *c*) Sur certains groupes simples, *Tohôku Math. Journ.*, (2), t. VII (1955), p. 14-66; *d*) *Classification des groupes de Lie algébriques*, 2 vol., Paris (Inst. H. Poincaré), 1956-58.

(XX) Harish Chandra : *a*) On some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. LXX (1951), p. 28-96; *b*) On a lemma of Bruhat, *Journ. de Math.*, (9), t. XXXV (1956), p. 203-210.

(XXI) F. Bruhat, Représentations induites des groupes de Lie semi-simples complexes, *C.R. Acad. Sci.*, t. CCXXXVIII (1954), p. 437-439.

(XXII) A. Borel, Groupes linéaires algébriques, *Ann. of Math.*, (2), t. LXIV (1956), p. 20-80.

(XXIII) A. J. Coleman, The Betti numbers of the simple groups, *Can. Journ. of Math.*, t. X (1958), p. 349-356.

(XXIV) R. Steinberg, Finite reflection groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XCI (1959), p. 493-504.

(XXV) J. Tits : *a*) Groupes simples et géométries associées, *Proc. Int. Congress Math.*, Stockholm, 1962, p. 197-221 ; *b*) Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques, *C.R. Acad. Sci.*, t. CCLIV (1962), p. 2910-2912; *c*) Algebraic and abstract simple groups, *Ann. of Math.*, (2), t. LXXX (1964), p. 313-329.

(XXVI) N. Iwahori and H. Matsumoto, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups, *Publ. math. I.H.E.S.*, n° 25 (1965), p. 5-48.

(XXVII) A. Borel et J. Tits, Groupes réductifs, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 27 (1965), p. 55-150.

(XXVIII) F. Bruhat et J. Tits, Groupes algébriques simples sur un corps local, *Proc. Conf. on Local Fields*, p. 23-36, Berlin (Springer), 1967.

(XXIX) R. Carter, Simple groups and simple Lie algebras, *Journ. Lond. Math. Soc.*, t. XL (1965), p. 193-240.

INDEX DES NOTATIONS

Les chiffres de référence indiquent successivement le chapitre, le paragraphe et le numéro.

INDEX TERMINOLOGIQUE

Les chiffres de référence indiquent successivement le chapitre, le paragraphe et le numéro (ou, exceptionnellement, l'exercice).

PLANCHE I

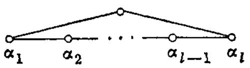
SYSTÈMES DE TYPE A_l $(l \geqslant 1)$

(I) V est l'hyperplan de $E = \mathbf{R}^{l+1}$ formé des points dont la somme des coordonnées est nulle.
Racines : $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i \neq j,\ 1 \leqslant i \leqslant l+1,\ 1 \leqslant j \leqslant l+1)$.
Nombre de racines : $n = l(l+1)$.

(II) Base : $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_l = \varepsilon_l - \varepsilon_{l+1}$.
Racines positives : $\varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum\limits_{i \leqslant k < j} \alpha_k$ $(1 \leqslant i < j \leqslant l+1)$.

(III) Nombre de Coxeter : $h = l + 1$.

(IV) Plus grande racine : $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 - \varepsilon_{l+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l = \varpi_1 + \varpi_l$.
Graphe de Dynkin complété $(l \geqslant 2)$:



Pour $l = 1$, le graphe de Coxeter du groupe de Weyl affine est :

(V) $R^\vee = R$,

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x|y)}{2(l+1)} \qquad \gamma(R) = (l+1)^2.$$

(VI) Poids fondamentaux :

$$\varpi_i = (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i) - \frac{i}{l+1} \sum_{j=1}^{l+1} \varepsilon_j$$
$$= \frac{1}{l+1} [(l-i+1)\alpha_1 + 2(l-i+1)\alpha_2 + \cdots + (i-1)(l-i+1)\alpha_{i-1}$$
$$+ i(l-i+1)\alpha_i + i(l-i)\alpha_{i+1} + \cdots + i\alpha_l].$$

(VII) Somme des racines positives :

$$\begin{aligned} 2\rho &= l\varepsilon_1 + (l-2)\varepsilon_2 + (l-4)\varepsilon_3 + \cdots - (l-2)\varepsilon_l - l\varepsilon_{l+1} \\ &= l\alpha_1 + 2(l-1)\alpha_2 + \cdots + i(l-i+1)\alpha_i + \cdots + l\alpha_l. \end{aligned}$$

(VIII) Q(R) : ensemble des vecteurs à coordonnées entières de somme nulle.
P(R) : engendré par Q(R) et $\varepsilon_1 - (l+1)^{-1}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{l+1})$.
P(R)/Q(R) isomorphe à $\mathbf{Z}/(l+1)\mathbf{Z}$.
Indice de connexion : $l+1$.

(IX) Exposants : $1, 2, \ldots, l$.

(X) $W(R) = \mathfrak{S}_{l+1}$, identifié au groupe des permutations des ε_i. Ordre de W(R) : $(l+1)!$

(XI) $l = 1$: $A(R) = W(R)$; $w_0 = -1$.
$l \geqslant 2$: $A(R) = W(R) \times \{1, -1\}$ et w_0 transforme α_i en $-\alpha_{l+1-i}$.

(XII) Le groupe $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ est cyclique d'ordre $(l+1)$; il opère sur le graphe de Dynkin complété par permutations circulaires. Si $l \geqslant 2$, l'unique élément non neutre de A(R)/W(R) opère sur P(R)/Q(R) par l'automorphisme $x \longmapsto -x$.

(XIII) Matrice de Cartan ($l \times l$) :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

SYSTÈME DE TYPE B_l $(l \geqslant 2)$

(I) $V = E = \mathbf{R}^l$.

Racines : $\pm\, \varepsilon_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, $\pm\, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant l)$.

Nombre de racines : $n = 2l^2$.

(II) Base : $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\ldots$, $\alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l$, $\alpha_l = \varepsilon_l$.

Racines positives
$$\begin{cases} \varepsilon_i = \sum\limits_{i \leqslant k \leqslant l} \alpha_k \quad (1 \leqslant i \leqslant l), \\ \varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum\limits_{i \leqslant k < j} \alpha_k \quad (1 \leqslant i < j \leqslant l), \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j = \sum\limits_{i \leqslant k < j} \alpha_k + 2 \sum\limits_{j \leqslant k \leqslant l} \alpha_k \quad (1 \leqslant i < j \leqslant l). \end{cases}$$

(III) Nombre de Coxeter : $h = 2l$.

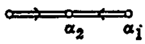
(IV) Plus grande racine :

$$\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \cdots + 2\alpha_l.$$

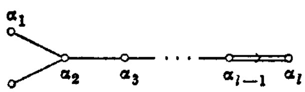
On a $\tilde{\alpha} = 2\varpi_2$ si $l = 2$, $\tilde{\alpha} = \varpi_2$ si $l \geqslant 3$.

Graphe de Dynkin complété :

pour $l = 2$



pour $l \geqslant 3$



(V) $R^\vee$ est l'ensemble des vecteurs

$$\pm\, 2\varepsilon_i\ (1 \leqslant i \leqslant l), \quad \pm\, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j\ (1 \leqslant i < j \leqslant l).$$

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x|y)}{4l - 2} \qquad \gamma(R) = (l + 1)(4l - 2)$$

(VI) Poids fondamentaux :

$$\begin{aligned}\varpi_i &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i \quad (1 \leqslant i < l)\\ &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_l)\\ \varpi_l &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_l)\\ &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + l\alpha_l).\end{aligned}$$

(VII) Somme des racines positives :

$$\begin{aligned}2\rho &= (2l-1)\varepsilon_1 + (2l-3)\varepsilon_2 + \cdots + 3\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l\\ &= (2l-1)\alpha_1 + 2(2l-2)\alpha_2 + \cdots + i(2l-i)\alpha_i + \cdots + l^2\alpha_l.\end{aligned}$$

(VIII) $Q(R) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbf{Z}\varepsilon_i$, $P(R) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbf{Z}\varepsilon_i + \mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i\right)$.
$P(R)/Q(R)$ isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, engendré par l'image de ϖ_l.
Indice de connexion : 2.

(IX) Exposants : 1, 3, 5, ..., $2l-1$.

(X) $W(R)$ est produit semi-direct du groupe $\mathfrak{S}_l$, opérant par permutation sur les ε_i, et du groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l$, opérant par $\varepsilon_i \longmapsto (\pm 1)_i\varepsilon_i$. Son ordre est $2^l.l!$

(XI) $A(R) = W(R)$, $w_0 = -1$.

(XII) L'unique élément non trivial de $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ définit l'unique automorphisme non trivial du graphe de Dynkin complété.

(XIII) Matrice de Cartan $(l \times l)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

SYSTÈMES DE TYPE C_l ($l \geqslant 2$)

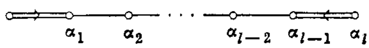
(I) $V = E = \mathbf{R}^l$.
Racines : $\pm 2\varepsilon_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant l)$.
Nombre de racines : $n = 2l^2$.

(II) Base : $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\ldots$, $\alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l$, $\alpha_l = 2\varepsilon_l$.

Racines positives
$$\begin{cases} \varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum\limits_{i \leqslant k < j} \alpha_k & (1 \leqslant i < j \leqslant l), \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j = \sum\limits_{i \leqslant k < j} \alpha_k + 2 \sum\limits_{j \leqslant k < l} \alpha_k + \alpha_l & (1 \leqslant i < j \leqslant l), \\ 2\varepsilon_i = 2 \sum\limits_{i \leqslant k < l} \alpha_k + \alpha_l & (1 \leqslant i \leqslant l). \end{cases}$$

(III) Nombre de Coxeter : $h = 2l$.

(IV) Plus grande racine : $\tilde{\alpha} = 2\varepsilon_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l$.
Graphe de Dynkin complété :



(V) $R^\vee$ est l'ensemble des vecteurs $\pm \varepsilon_i$, $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$.

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x|y)}{4(l+1)} \qquad \gamma(R) = (l+1)(4l-2).$$

(VI) Poids fondamentaux :

$$\begin{aligned} \varpi_i &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i \quad (1 \leqslant i \leqslant l) \\ &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{l-1} + \frac{1}{2}\alpha_l). \end{aligned}$$

(VII) Somme des racines positives :

$$\begin{aligned} 2\rho &= 2l\varepsilon_1 + (2l-2)\varepsilon_2 + \cdots + 4\varepsilon_{l-1} + 2\varepsilon_l \\ &= 2l\alpha_1 + 2(2l-1)\alpha_2 + \cdots + i(2l-i+1)\alpha_i + \cdots \\ &\quad + (l-1)(l+2)\alpha_{l-1} + \frac{1}{2}l(l+1)\alpha_l. \end{aligned}$$

(VIII) Q(R) : ensemble des points à coordonnées entières de somme paire.
$P(R) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbf{Z}\varepsilon_i$.
P(R)/Q(R) isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, engendré par l'image de ϖ_1.
Indice de connexion : 2.

(IX) Exposants : 1, 3, 5, ..., $2l-1$.

(X) W(R) est produit semi-direct du groupe $\mathfrak{S}_l$, opérant par permutations des ε_i, et du groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l$, opérant par $\varepsilon_i \longmapsto (\pm 1)_i \varepsilon_i$. Son ordre est $2^l . l!$

(XI) A(R) = W(R); $w_0 = -1$.

(XII) L'unique élément non trivial de $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ définit l'unique automorphisme non trivial du graphe de Dynkin complété.

(XIII) Matrice de Cartan ($l \times l$) :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

PLANCHE IV

SYSTÈME DE TYPE D_l ($l \geqslant 3$)

(I) $V = E = \mathbf{R}^l$.
Racines : $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ ($1 \leqslant i < j \leqslant l$; (ε_i) base canonique de $\mathbf{R}^l$).
Nombre de racines : $n = 2l(l-1)$.

(II) Base :

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \ldots, \quad \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \quad \alpha_l = \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l.$$

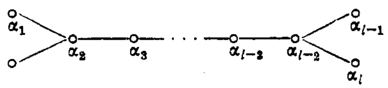
$$\text{Racines positives} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_i - \varepsilon_j = \sum\limits_{i<k<j} \alpha_k \quad (1 \leqslant i < j \leqslant l), \\ \varepsilon_i + \varepsilon_l = \sum\limits_{i \leqslant k \leqslant l} \alpha_l \quad (1 \leqslant i < l), \\ \varepsilon_i + \varepsilon_j = \sum\limits_{i \leqslant k < j} \alpha_k + 2 \sum\limits_{j \leqslant k < l-1} \alpha_k + \alpha_{l-1} + \alpha_l \\ \hfill (1 \leqslant i < j < l). \end{array} \right.$$

(III) Nombre de Coxeter : $h = 2l - 2$.

(IV) Plus grande racine :

$$\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l.$$

On a $\tilde{\alpha} = \varpi_2 + \varpi_3$ si $l = 3$ et $\tilde{\alpha} = \varpi_2$ si $l \geqslant 4$.
Graphe de Dynkin complété ($l \geqslant 4$) :



(V) $R^\vee = R$.

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x|y)}{4(l-1)}, \qquad \gamma(R) = 4(l-1)^2.$$

(VI) Poids fondamentaux :

$$\begin{aligned} \varpi_i &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i \quad (1 \leqslant i \leqslant l-2) \\ &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (i-1)\alpha_{i-1} + i(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{l-2}) + \frac{1}{2} i(\alpha_{l-1} + \alpha_l) \end{aligned}$$

$$\varpi_{l-1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{l-2} + \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l)$$
$$= \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (l-2)\alpha_{l-2} + \frac{1}{2} l\alpha_{l-1} + \frac{1}{2}(l-2)\alpha_l)$$
$$\varpi_l = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{l-2} + \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l)$$
$$= \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (l-2)\alpha_{l-2} + \frac{1}{2}(l-2)\alpha_{l-1} + \frac{1}{2} l\alpha_l).$$

(VII) Somme des racines positives :

$$2\rho = 2(l-1)\varepsilon_1 + 2(l-2)\varepsilon_2 + \cdots + 2\varepsilon_{l-1}$$
$$= 2(l-1)\alpha_1 + 2(2l-3)\alpha_2 + \cdots$$
$$+ 2(il - \frac{i(i+1)}{2})\alpha_i + \cdots + \frac{l(l-1)}{2}(\alpha_{l-1} + \alpha_l).$$

(VIII) $Q(R)$: ensemble des points à coordonnées entières de somme paire.

$$P(R) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbf{Z}\varepsilon_i + \mathbf{Z}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} \varepsilon_i\right)$$

l impair : $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, engendré par l'image de ϖ_l; on a $\varpi_1 \equiv 2\varpi_l$ et $\varpi_{l-1} \equiv 3\varpi_l \bmod Q(R)$.
l pair : $P(R)/Q(R)$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$; les trois éléments d'ordre deux sont les images de ϖ_1, ϖ_{l-1} et ϖ_l.
Indice de connexion : 4.

(IX) Exposants : 1, 3, 5, ..., $2l-5$, $2l-3$, $l-1$ (ce dernier apparaissant deux fois si l pair, une fois si l impair).

(X) $W(R)$ est produit semi-direct du groupe $\mathfrak{S}_l$, opérant par permutations des ε_i, et du groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{l-1}$, opérant par $\varepsilon_i \longmapsto (\pm 1)_i\varepsilon_i$ avec $\prod_i (\pm 1)_i = 1$. Son ordre est $2^{l-1}l!$

(XI) $l \neq 4$: $A(R)/W(R) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ opérant sur le graphe de Dynkin par transposition des sommets α_{l-1} et α_l.
$l = 4$: $A(R)/W(R) = \mathfrak{S}_3$, opérant sur le graphe de Dynkin par permutations des sommets α_1, α_3 et α_4.
$w_0 = -1$ si l est pair; $w_0 = -\varepsilon$ si l est impair, où ε est l'automorphisme qui permute α_{l-1} et α_l et laisse fixes les autres α_i.

(XII) Action de $P(R^\vee)/Q(R^\vee) = P(R)/Q(R)$ sur le graphe de Dynkin complété :
l impair : ω_l transforme α_0 en α_l, α_l en α_1, α_1 en α_{l-1} et α_{l-1} en α_0; il échange α_j et α_{l-j} pour $2 \leqslant j \leqslant l-2$.
l pair : ω_l (resp. ω_{l-1}) échange α_0 et α_l (resp. α_0 et α_{l-1}), α_1 et α_{l-1} (resp. α_1 et α_l) et échange α_j et α_{l-j} pour $2 \leqslant j \leqslant l-2$.

(XIII) Matrice de Cartan $(l \times l)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

SYSTÈME DE TYPE E_6

(I) V est le sous-espace de $E = \mathbf{R}^8$ formé des points dont les coordonnées (ξ_i) sont telles que $\xi_6 = \xi_7 = -\xi_8$.
Racines : $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 5)$,

$$\pm \frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i) \qquad \text{avec } \sum_{i=1}^{5} \nu(i) \text{ pair.}$$

Nombre de racines : $n = 72$.

(II) Base : $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7)$, $\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$, $\alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3$, $\alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4$.
Racines positives : $\pm \varepsilon_i + \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 5)$,

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i) \qquad \text{avec } \sum_{i=1}^{5} \nu(i) \text{ pair.}$$

Racines positives ayant un coefficient $\geqslant 2$ (*) (on note $\begin{smallmatrix} a\,c\,d\,e\,f \\ b \end{smallmatrix}$ la racine $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 + e\alpha_5 + f\alpha_6$) :

$$\begin{smallmatrix}01210\\1\end{smallmatrix},\quad \begin{smallmatrix}11210\\1\end{smallmatrix},\quad \begin{smallmatrix}01211\\1\end{smallmatrix},\quad \begin{smallmatrix}12210\\1\end{smallmatrix},\quad \begin{smallmatrix}11211\\1\end{smallmatrix},\quad \begin{smallmatrix}01221\\1\end{smallmatrix},\quad \begin{smallmatrix}12211\\1\end{smallmatrix},$$
$$\begin{smallmatrix}11221\\1\end{smallmatrix},\quad \begin{smallmatrix}12221\\1\end{smallmatrix},\quad \begin{smallmatrix}12321\\1\end{smallmatrix},\quad \begin{smallmatrix}12321\\2\end{smallmatrix}.$$

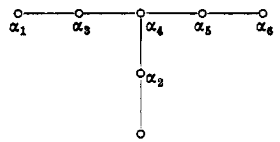
(III) Nombre de Coxeter : $h = 12$.

(IV) Plus grande racine :

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8)$$
$$= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 = \varpi_2.$$

(*) Les autres racines positives s'obtiennent en appliquant le cor. 3 de la prop. 19 du Chap. VI, § 1, n° 6.

Graphe de Dynkin complété :



(V) $R = R^\vee$.

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x|y)}{24}, \qquad \gamma(R) = 144.$$

(VI) Poids fondamentaux :

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= \frac{2}{3}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6)\\
&= \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6)\\
\varpi_2 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8)\\
&= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6\\
\varpi_3 &= \frac{5}{6}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) + \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5)\\
&= \frac{1}{3}(5\alpha_1 + 6\alpha_2 + 10\alpha_3 + 12\alpha_4 + 8\alpha_5 + 4\alpha_6)\\
\varpi_4 &= \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8\\
&= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6\\
\varpi_5 &= \frac{2}{3}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) + \varepsilon_4 + \varepsilon_5\\
&= \frac{1}{3}(4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 10\alpha_5 + 5\alpha_6)\\
\varpi_6 &= \frac{1}{3}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6) + \varepsilon_5\\
&= \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6).
\end{aligned}$$

(VII) Somme des racines positives :

$$\begin{aligned}
2\rho &= 2(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + 4\varepsilon_5 + 4(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6))\\
&= 2(8\alpha_1 + 11\alpha_2 + 15\alpha_3 + 21\alpha_4 + 15\alpha_5 + 8\alpha_6).
\end{aligned}$$

(VIII) $P(R)/Q(R)$ isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.
Indice de connexion : 3.

(IX) Exposants : 1, 4, 5, 7, 8, 11.

(X) Ordre de $W(R)$: $2^7.3^4.5$.

(XI) $A(R) = W(R) \times \{1, -1\}$; w_0 transforme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ respectivement en $-\alpha_6, -\alpha_2, -\alpha_5, -\alpha_4, -\alpha_3, -\alpha_1$.

(XII) L'élément non neutre de $A(R)/W(R)$ définit l'automorphisme $x \longmapsto -x$ de $P(R)/Q(R)$.

Le groupe des automorphismes du schéma de Dynkin complété est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$; ses éléments d'ordre 3 sont induits par les deux éléments non triviaux de $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$.

(XIII) Matrice de Cartan:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

SYSTÈME DE TYPE E_7

(I) V est l'hyperplan de $E = \mathbf{R}^8$ orthogonal à $\varepsilon_7 + \varepsilon_8$.
Racines : $\pm\, \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \leqslant i < j \leqslant 6)$, $\pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8)$,

$$\pm \frac{1}{2}\Big(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i\Big) \qquad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{6} \nu(i) \ \text{impair.}$$

Nombre de racines : $n = 126$.

(II) Base : $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7)$,

$\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$, $\alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3$,
$\alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4$, $\alpha_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_5$.

Racines positives :

$$\pm\, \varepsilon_i + \varepsilon_j \ (1 \leqslant i < j \leqslant 6), \qquad \varepsilon_8 - \varepsilon_7,$$

$$\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i\Big) \qquad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{6} \nu(i) \ \text{impair.}$$

Racines positives contenant α_7 et ayant un coefficient $\geqslant 2$ (*) (on note $\begin{smallmatrix} a\,c\,d\,e\,f\,g \\ b \end{smallmatrix}$ la racine $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 + e\alpha_5 + f\alpha_6 + g\alpha_7$) :

$$\begin{array}{cccccc}
\begin{matrix}012111\\1\end{matrix} & \begin{matrix}112111\\1\end{matrix} & \begin{matrix}012211\\1\end{matrix} & \begin{matrix}122111\\1\end{matrix} & \begin{matrix}112211\\1\end{matrix} & \begin{matrix}012221\\1\end{matrix} \\
\begin{matrix}122211\\1\end{matrix} & \begin{matrix}112221\\1\end{matrix} & \begin{matrix}122221\\1\end{matrix} & \begin{matrix}123211\\1\end{matrix} & \begin{matrix}123221\\1\end{matrix} & \begin{matrix}123211\\2\end{matrix} \\
\begin{matrix}123321\\1\end{matrix} & \begin{matrix}123221\\2\end{matrix} & \begin{matrix}123321\\2\end{matrix} & \begin{matrix}124321\\2\end{matrix} & \begin{matrix}134321\\2\end{matrix} & \begin{matrix}234321\\2\end{matrix}
\end{array}$$

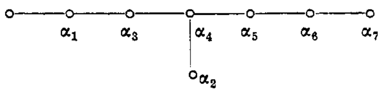
(III) Nombre de Coxeter : $h = 18$.

(*) Les racines positives ne contenant pas α_7 proviennent de E_6. Les racines positives dont tous les coefficients sont $\leqslant 1$ s'obtiennent en appliquant le cor. 3 de la prop. 19 du Chap. VI, § 1, n° 6.

(IV) Plus grande racine :

$$\tilde{\alpha} = \varepsilon_8 - \varepsilon_7 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 = \varpi_1.$$

Graphe de Dynkin complété :



(V) $R^\vee = R$.

$$\Phi_R(x,y) = \frac{(x|y)}{36}, \qquad \gamma(R) = 324.$$

(VI) Poids fondamentaux :

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= \varepsilon_8 - \varepsilon_7\\
&= 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7\\
\varpi_2 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - 2\varepsilon_7 + 2\varepsilon_8)\\
&= \frac{1}{2}(4\alpha_1 + 7\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 9\alpha_5 + 6\alpha_6 + 3\alpha_7)\\
\varpi_3 &= \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - 3\varepsilon_7 + 3\varepsilon_8)\\
&= 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 8\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7\\
\varpi_4 &= \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + 2(\varepsilon_8 - \varepsilon_7)\\
&= 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 9\alpha_5 + 6\alpha_6 + 3\alpha_7\\
\varpi_5 &= \frac{1}{2}(2\varepsilon_4 + 2\varepsilon_5 + 2\varepsilon_6 + 3(\varepsilon_8 - \varepsilon_7))\\
&= \frac{1}{2}(6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 12\alpha_3 + 18\alpha_4 + 15\alpha_5 + 10\alpha_6 + 5\alpha_7)\\
\varpi_6 &= \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8\\
&= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7\\
\varpi_7 &= \varepsilon_6 + \frac{1}{2}(\varepsilon_8 - \varepsilon_7)\\
&= \frac{1}{2}(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7).
\end{aligned}$$

(VII) Somme des racines positives :

$$\begin{aligned}
2\rho &= 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + 6\varepsilon_4 + 8\varepsilon_5 + 10\varepsilon_6 - 17\varepsilon_7 + 17\varepsilon_8\\
&= 34\alpha_1 + 49\alpha_2 + 66\alpha_3 + 96\alpha_4 + 75\alpha_5 + 52\alpha_6 + 27\alpha_7.
\end{aligned}$$

(VIII) $P(R)/Q(R)$ isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
Indice de connexion : 2.

(IX) Exposants : 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17.

(X) Ordre de $W(R)$: $2^{10}.3^4.5.7$.

(XI) $A(R) = W(R)$, $w_0 = -1$.

(XII) $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ a un seul élément non neutre; celui-ci définit l'unique automorphisme non trivial du graphe de Dynkin complété.

(XIII) Matrice de Cartan:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

SYSTÈME DE TYPE E_8

(I) $V = E = \mathbf{R}^8$.

Racines : $\pm\,\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \quad (i < j)$, $\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i$ avec $\sum_{i=1}^{8}\nu(i)$ pair.

Nombre de racines : $n = 240$.

(II) Base :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7),$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \qquad \alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \qquad \alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \qquad \alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3,$$

$$\alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4, \qquad \alpha_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_5, \qquad \alpha_8 = \varepsilon_7 - \varepsilon_6.$$

Racines positives :

$$\pm\,\varepsilon_i + \varepsilon_j \; (i < j), \quad \frac{1}{2}\Big(\varepsilon_8 + \sum_{i=1}^{7}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\Big) \qquad \text{avec } \sum_{i=1}^{7}\nu(i) \text{ pair.}$$

Racines positives contenant α_8 et ayant un coefficient $\geqslant 2$ (*) (on note $\begin{smallmatrix}a&c&d&e&f&g&h\\&&b\end{smallmatrix}$ la racine $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 + e\alpha_5 + f\alpha_6 + g\alpha_7 + h\alpha_8$) :

0121111 1	0122111 1	1121111 1	0122211 1	1221111 1	1122111 1
1222111 1	1122211 1	0122221 1	1232111 1	1222211 1	1122221 1
1232111 2	1232211 1	1222221 1	1232211 2	1233211 1	1232221 1
1233211 2	1232221 2	1233221 1	1243211 2	1233221 2	1233321 1
1343211 2	1243221 2	1233321 2	2343211 2	1343221 2	1243321 2
2343221 2	1343321 2	1244321 2	2343321 2	1344321 2	1354321 2
2344321 2	1354321 3	2354321 2	2354321 3	2454321 2	2454321 3
2464321 3	2465321 3	2465421 3	2465431 3	2465432 3	

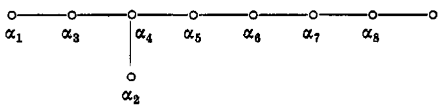
(*) Les racines positives ne contenant pas α_8 proviennent de E_7. Les racines positives dont tous les coefficients sont $\leqslant 1$ s'obtiennent en appliquant le cor. 3 de la prop. 19 du Chap. VI, § 1, nº 6.

(III) Nombre de Coxeter : $h = 30$.

(IV) Plus grande racine :

$$\tilde{\alpha} = \varepsilon_7 + \varepsilon_8 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 = \varpi_8.$$

Graphe de Dynkin complété :



(V) $R^\vee = R$.

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x|y)}{60}, \qquad \gamma(R) = 900.$$

(VI) Poids fondamentaux :

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= 2\varepsilon_8 \\
&= 4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 + 10\alpha_4 + 8\alpha_5 + 6\alpha_6 + 4\alpha_7 + 2\alpha_8 \\
\varpi_2 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 5\varepsilon_8) \\
&= 5\alpha_1 + 8\alpha_2 + 10\alpha_3 + 15\alpha_4 + 12\alpha_5 + 9\alpha_6 + 6\alpha_7 + 3\alpha_8 \\
\varpi_3 &= \frac{1}{2}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 7\varepsilon_8) \\
&= 7\alpha_1 + 10\alpha_2 + 14\alpha_3 + 20\alpha_4 + 16\alpha_5 + 12\alpha_6 + 8\alpha_7 + 4\alpha_8 \\
\varpi_4 &= \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 5\varepsilon_8 \\
&= 10\alpha_1 + 15\alpha_2 + 20\alpha_3 + 30\alpha_4 + 24\alpha_5 + 18\alpha_6 + 12\alpha_7 + 6\alpha_8 \\
\varpi_5 &= \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 4\varepsilon_8 \\
&= 8\alpha_1 + 12\alpha_2 + 16\alpha_3 + 24\alpha_4 + 20\alpha_5 + 15\alpha_6 + 10\alpha_7 + 5\alpha_8 \\
\varpi_6 &= \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 3\varepsilon_8 \\
&= 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 12\alpha_3 + 18\alpha_4 + 15\alpha_5 + 12\alpha_6 + 8\alpha_7 + 4\alpha_8 \\
\varpi_7 &= \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + 2\varepsilon_8 \\
&= 4\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 12\alpha_4 + 10\alpha_5 + 8\alpha_6 + 6\alpha_7 + 3\alpha_8 \\
\varpi_8 &= \varepsilon_7 + \varepsilon_8 \\
&= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8.
\end{aligned}$$

(VII) Somme des racines positives :

$$\begin{aligned}
2\rho &= 2(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + 4\varepsilon_5 + 5\varepsilon_6 + 6\varepsilon_7 + 23\varepsilon_8) \\
&= 2(46\alpha_1 + 68\alpha_2 + 91\alpha_3 + 135\alpha_4 + 110\alpha_5 + 84\alpha_6 + 57\alpha_7 + 29\alpha_8).
\end{aligned}$$

(VIII) $Q(R)$: ensemble des points de coordonnées ξ_i telles que $2\xi_i \in \mathbf{Z}$, $\xi_i - \xi_j \in \mathbf{Z}$, $\sum_{i=1}^{8} \xi_i \in 2\mathbf{Z}$.

$P(R) = Q(R)$.

Indice de connexion : 1.

(IX) Exposants : 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

(X) Ordre de W(R) : $2^{14}.3^5.5^2.7$.

(XI) et (XII) : $A(R) = W(R)$, $w_0 = -1$.

(XIII) Matrice de Cartan :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

PLANCHE VIII

SYSTÈME DE TYPE F_4

(I) $V = E = \mathbf{R}^4$.
Racines :

$$\pm \varepsilon_i \ (1 \leqslant i \leqslant 4), \qquad \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \leqslant i < j \leqslant 4),$$
$$\frac{1}{2}(\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4).$$

Nombre de racines : $n = 48$.

(II) Base :

$$\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ \alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \ \alpha_3 = \varepsilon_4, \ \alpha_4 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4).$$

Racines positives : $\varepsilon_i \ (1 \leqslant i \leqslant 4)$, $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \ (1 \leqslant i < j \leqslant 4)$,

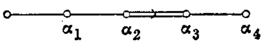
$$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4).$$

Racines positives ayant un coefficient $\geqslant 2$ (*) (on note $a\,b\,c\,d$ la racine $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4$) :

0120 1120 0121 1220 1121 0122 1221 1122
1231 1222 1232 1242 1342 2342

(III) Nombre de Coxeter : $h = 12$.

(IV) Plus grande racine : $\tilde{\alpha} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = \varpi_1$.
Graphe de Dynkin complété :



(*) Les autres racines positives s'obtiennent en appliquant le cor. 3 de la prop. 19 du Chap. VI, § 1, n° 6.

(V) $R^\vee$ est l'ensemble des vecteurs $\pm 2\varepsilon_i$, $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4$.

$$\Phi_R(x,y) = \frac{(x|y)}{18}, \qquad \gamma(R) = 162.$$

(VI) Poids fondamentaux :

$$\varpi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$$
$$\varpi_2 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 4\alpha_4$$
$$\varpi_3 = \frac{1}{2}(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 3\alpha_4$$
$$\varpi_4 = \varepsilon_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4.$$

(VII) Somme des racines positives :

$$2\rho = 11\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 16\alpha_1 + 30\alpha_2 + 42\alpha_3 + 22\alpha_4.$$

(VIII) $Q(R) = \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbf{Z}\varepsilon_i + \mathbf{Z}(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i)$.
$P(R) = Q(R)$.
Indice de connexion : 1.

(IX) Exposants : 1, 5, 7, 11.

(X) $W(R)$ produit semi-direct de $\mathfrak{S}_3$ par un groupe lui-même produit semi-direct de $\mathfrak{S}_4$ par $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$.
Ordre de $W(R)$: $2^7.3^2$.

(XI) et (XII) : $A(R) = W(R)$, $w_0 = -1$.

(XIII) Matrice de Cartan :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

PLANCHE IX

SYSTÈME DE TYPE G_2

(I) V est l'hyperplan de $E = \mathbf{R}^3$ d'équation $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$.
Racines : $\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, $\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$, $\pm(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$,

$$\pm(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad \pm(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \pm(2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Nombre de racines : 12.

(II) Base : $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.
Racines positives : α_1, α_2, $\alpha_1 + \alpha_2$, $2\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + 2\alpha_2$.

(III) Nombre de Coxeter : $h = 6$.

(IV) Plus grande racine : $\tilde{\alpha} = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = \varpi_2$.
Graphe de Dynkin complété :

α_1 α_2

(V) $R^\vee$ est l'ensemble des vecteurs $\pm\alpha_1$, $\pm(\alpha_1 + \alpha_2)$, $\pm(2\alpha_1 + \alpha_2)$, $\pm\frac{1}{3}\alpha_2$, $\pm\frac{1}{3}(3\alpha_1 + \alpha_2)$, $\pm\frac{1}{3}(3\alpha_1 + 2\alpha_2)$.

$$\Phi_R(x, y) = \frac{(x|y)}{24}, \qquad \gamma(R) = 48.$$

(VI) Poids fondamentaux :

$$\varpi_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \qquad \varpi_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

(VII) Somme des racines positives :

$$2\rho = 2(5\alpha_1 + 3\alpha_2).$$

(VIII) $P(R) = Q(R)$.
Indice de connexion : 1.

(IX) Exposants : 1, 5.

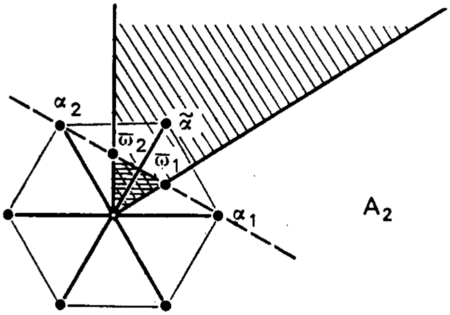
(X) W(R) : groupe diédral d'ordre 12.

(XI) et (XII) : $A(R) = W(R)$, $w_0 = -1$.

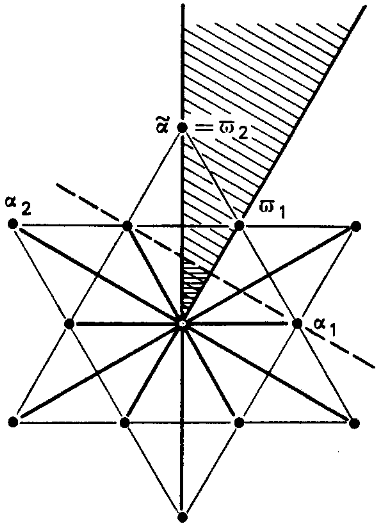
(XIII) Matrice de Cartan :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

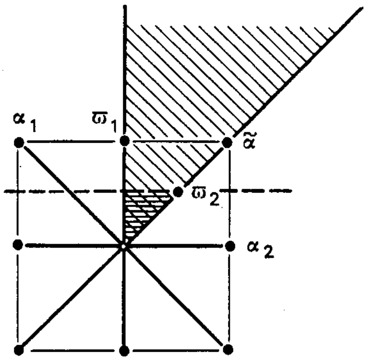
SYSTÈMES IRRÉDUCTIBLES DE RANG 2



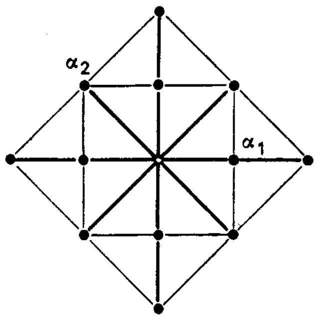
A_2



G_2



B_2



BC_2

Les trois premières figures ci-dessus représentent les systèmes de racines R de type A_2, B_2 et G_2. La région hachurée représente la chambre C correspondant à la base (α_1, α_2). On a tracé en tirets la droite $(x|\beta) = 1$, où β désigne la plus grande racine du système inverse $R^\vee$ et la région hachurée deux fois représente l'alcôve de $R^\vee$ de sommet 0 contenue dans C.

La dernière figure représente l'unique système de racines irréductible *non réduit* de rang 2.

RÉSUMÉ DES PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES DE RACINES

(Nous nous limitons dans ce résumé au cas du corps des nombres réels et aux systèmes de racines réduits.)

1) Soit V un espace vectoriel réel. On appelle système de racines réduit dans V un sous-ensemble R de V qui possède les propriétés suivantes :

(i) R est fini, et engendre V.

(ii) Pour tout $\alpha \in R$, il existe $\alpha^\vee \in V^*$ tel que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, et que l'application

$$s_\alpha : x \longmapsto x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

de V dans V transforme R en R.

(iii) Pour tout $\alpha \in R$, on a $\alpha^\vee(R) \subset \mathbf{Z}$.

(iv) Si $\alpha \in R$, on a $2\alpha \notin R$.

Compte tenu de (i), l'élément $\alpha^\vee$ dont l'existence est affirmée par (ii) est unique; ceci donne un sens à (iii). L'application s_α est une réflexion laissant fixes les points de $L_\alpha = \mathrm{Ker}(\alpha^\vee)$ et transformant α en $-\alpha$.

Les éléments de R s'appellent les racines. La dimension de V s'appelle le rang du système de racines.

2) Le groupe des automorphismes de V qui laissent stable R se note A(R). Les s_α ($\alpha \in R$) engendrent un sous-groupe W(R) de A(R), appelé groupe de Weyl de R; ce sous-groupe est distingué dans A(R). Les seules réflexions appartenant à W(R) sont les s_α.

3) L'ensemble $R^\vee$ des $\alpha^\vee$ (pour $\alpha \in R$) est un système de racines réduit dans V^*, appelé système inverse de R. L'application $\alpha \longmapsto \alpha^\vee$ est une bijection, dite canonique, de R sur $R^\vee$. On a $(R^\vee)^\vee = R$, et les bijections canoniques $R \to R^\vee$, $R^\vee \to R$ sont réciproques l'une de l'autre. L'application $u \to {}^t u^{-1}$ définit un isomorphisme de W(R) sur $W(R^\vee)$ par lequel on identifie ces deux groupes.

4) Soit V un espace vectoriel réel somme directe de sous-espaces vectoriels $V_1, \ldots, V_r$. Pour tout i, soit R_i un système de racines réduit dans V_i. Alors la réunion R des R_i est un système de racines dans V, appelé somme directe des R_i. Le groupe W(R) s'identifie au produit des $W(R_i)$. On dit que R est

irréductible si $R \neq \emptyset$ et si R n'est pas somme directe de deux systèmes de racines non vides. Il revient au même de dire que W(R) est irréductible. Tout système de racines réduit R est somme directe de systèmes de racines irréductibles réduits bien déterminés à une permutation près, et appelés les composants irréductibles de R.

5) Soit R un système de racines réduit dans V. Il existe des produits scalaires dans V invariants par W(R). Dans toute la suite, on note $(x|y)$ un tel produit scalaire. Si on identifie V à V* à l'aide de $(x|y)$, on a $\alpha^\vee = \dfrac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)}$. La réflexion s_α est la réflexion orthogonale qui transforme α en $-\alpha$. Le groupe de Weyl est transitif dans l'ensemble des racines de même longueur. Si R est irréductible, le produit scalaire $(x|y)$ est unique à la multiplication près par une constante.

6) Soit R un système de racines réduit. Pour $\alpha, \beta \in R$, on pose

$$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = n(\alpha, \beta) \in \mathbf{Z}.$$

On a

$$n(\alpha, \alpha) = 2$$
$$s_\beta(\alpha) = \alpha - n(\alpha, \beta)\beta.$$
$$n(\alpha, \beta) = \frac{2(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)}.$$

Les seules possibilités sont les suivantes, à l'échange près de α et β :

$n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 0$;	$\widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{\pi}{2}$;		$s_\alpha s_\beta$ d'ordre 2
$n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 1$;	$\widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{\pi}{3}$;	$\Vert\alpha\Vert = \Vert\beta\Vert$;	$s_\alpha s_\beta$ d'ordre 3
$n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = -1$;	$\widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{2\pi}{3}$;	$\Vert\alpha\Vert = \Vert\beta\Vert$;	$s_\alpha s_\beta$ d'ordre 3
$n(\alpha, \beta) = 1, \quad n(\beta, \alpha) = 2$;	$\widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{\pi}{4}$;	$\Vert\beta\Vert = \sqrt{2}\Vert\alpha\Vert$;	$s_\alpha s_\beta$ d'ordre 4
$n(\alpha, \beta) = -1, n(\beta, \alpha) = -2$;	$\widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{3\pi}{4}$;	$\Vert\beta\Vert = \sqrt{2}\Vert\alpha\Vert$;	$s_\alpha s_\beta$ d'ordre 4
$n(\alpha, \beta) = 1, \quad n(\beta, \alpha) = 3$;	$\widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{\pi}{6}$;	$\Vert\beta\Vert = \sqrt{3}\Vert\alpha\Vert$;	$s_\alpha s_\beta$ d'ordre 6
$n(\alpha, \beta) = -1, n(\beta, \alpha) = -3$;	$\widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{5\pi}{6}$;	$\Vert\beta\Vert = \sqrt{3}\Vert\alpha\Vert$;	$s_\alpha s_\beta$ d'ordre 6
$n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = 2$;	$\alpha = \beta$		
$n(\alpha, \beta) = n(\beta, \alpha) = -2$;	$\alpha = -\beta$.		

7) Soient $\alpha, \beta \in R$. Si $(\alpha|\beta) > 0$, $\alpha - \beta$ est une racine sauf si $\alpha = \beta$. Si $(\alpha|\beta) < 0$, $\alpha + \beta$ est une racine sauf si $\alpha = -\beta$.

8) Soient α, β deux racines non proportionnelles. L'ensemble I des $j \in \mathbf{Z}$ tels que $\beta + j\alpha \in \mathrm{R}$ est un intervalle $(-q, p)$ de $\mathbf{Z}$ contenant 0. On a

$$p - q = -n(\beta, \alpha), \quad \frac{q+1}{p} = \frac{(\beta + \alpha|\beta + \alpha)}{(\beta|\beta)}.$$

Soit S l'ensemble des $\beta + j\alpha$ pour $j \in \mathrm{I}$. Alors $s_\alpha(\mathrm{S}) = \mathrm{S}$ et $s_\alpha(\beta + p\alpha) = \beta - q\alpha$. On dit que S est la α-chaîne de racines définie par β, que $\beta - q\alpha$ est l'origine de la chaîne et $\beta + p\alpha$ son extrémité, et que $p + q$ est sa longueur.

Si T est une α-chaîne d'origine γ, la longueur de T est $-n(\gamma, \alpha)$.

9) Soit X la réunion des $\mathrm{Ker}\, \alpha^\vee$ ($\alpha \in \mathrm{R}$). Les composantes connexes de $\mathrm{V} - \mathrm{X}$ s'appellent les chambres de R dans V. Ce sont des cônes simpliciaux ouverts. Le groupe de Weyl opère de façon simplement transitive dans l'ensemble des chambres. Si C est une chambre, $\overline{\mathrm{C}}$ est un domaine fondamental pour W(R). On a $(x|y) > 0$ pour $x, y \in \mathrm{C}$. La bijection de V sur V* correspondant à $(x|y)$ définit une bijection de l'ensemble des chambres de R dans V sur l'ensemble des chambres de $\mathrm{R}^\vee$ dans V*; on note $\mathrm{C}^\vee$ la chambre image de C par cette bijection.

10) Soit C une chambre de R. Soient $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \ldots, \mathrm{L}_l$ les murs de C. Pour tout i, il existe une racine α_i et une seule telle que $\mathrm{L}_i = \mathrm{L}_{\alpha_i}$, et telle que α_i soit du même côté que C de H_i. La famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ est une base de V, et C est l'ensemble des $x \in \mathrm{V}$ tels que $\langle \alpha_i^\vee, x \rangle > 0$ pour tout i, c'est-à-dire tels que $(\alpha_i|x) > 0$ pour tout i. On dit que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ est la base B(C) de R définie par C. On a $(\alpha_i|\alpha_j) \leqslant 0$ lorsque $i \neq j$. Le groupe W(R) opère de façon simplement transitive sur l'ensemble des bases. Toute racine est transformée par un élément de W(R) d'un élément de B(C). On a $\{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_l^\vee\} = \mathrm{B}(\mathrm{C}^\vee)$.

11) Posons $s_{\alpha_i} = s_i$, soit S l'ensemble des s_i, et soit m_{ij} l'ordre de $s_i s_j$. Le couple (W(R), S) est un système de Coxeter de matrice (m_{ij}); autrement dit, W(R) est défini par la famille génératrice $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ et par les relations $(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$. Pour que s_i et s_j soient conjugués dans W(R), il faut et il suffit qu'il existe une suite d'indices $(i_1, i_2, \ldots, i_q)$ tels que $i_1 = i$, $i_q = j$ et que chacun des $m_{i_t i_{t+1}}$ soit égal à 3.

12) Soit $n_{ij} = n(\alpha_i, \alpha_j)$. La matrice $(n_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant l}$ s'appelle la matrice de Cartan de R. Elle est indépendante (à une permutation près de $1, 2, \ldots, l$) du choix de C. On a $n_{ii} = 2$, $n_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$ pour $i \neq j$. Si deux systèmes de racines ont même matrice de Cartan, ils sont isomorphes.

13) Soit G le sous-groupe de A(R) qui laisse stable B(C). Alors A(R) est produit semi-direct de G et de W(R).

14) On appelle relation d'ordre définie par C dans V (resp. V*) la relation d'ordre, compatible avec la structure d'espace vectoriel de V (resp. V*), pour laquelle les éléments $\geqslant 0$ sont les combinaisons linéaires des α_i

(resp. $\alpha_i^\vee$) à coefficients $\geqslant 0$. Ces éléments sont dits positifs pour C, ou pour B(C). Ces relations d'ordre sont aussi définies par $C^\vee$. Un élément de V est $\geqslant 0$ si et seulement si ses valeurs sur $C^\vee$ sont $\geqslant 0$. L'ensemble des éléments $\geqslant 0$ pour C contient $\overline{C}$ mais est en général distinct de $\overline{C}$. Soit $x \in V$. Pour que $x \in \overline{C}$, il faut et il suffit que $x \geqslant w(x)$ pour tout $w \in W(R)$. Pour que $x \in C$, il faut et il suffit que $x > w(x)$ pour tout $w \in W(R)$ distinct de 1.

15) Toute racine est soit positive, soit négative pour C. On note $R_+(C)$ l'ensemble des racines positives pour C, de sorte que $R = R_+(C) \cup (-R_+(C))$ est une partition de R. La réflexion s_i transforme α_i en $-\alpha_i$ et permute entre eux les éléments de $R_+(C)$ distincts de α_i.

16) Soit B une base de R. Toute racine positive (resp. négative) pour B est combinaison linéaire des éléments de B à coefficients entiers $\geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$).

17) Soit $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ une suite de racines positives pour C telles que $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$ soit une racine. Il existe une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ telle que, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\beta_{\pi(1)} + \beta_{\pi(2)} + \cdots + \beta_{\pi(i)}$ soit une racine.

18) Soit $\alpha \in R_+(C)$. Pour que $\alpha \in B(C)$, il faut et il suffit que α ne puisse pas s'écrire comme somme de deux racines positives.

19) Soient C une chambre, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ la base correspondante. Pour toute partie J de $I = \{1, 2, \ldots, l\}$, soit W_J le sous-groupe de W(R) engendré par les s_i tels que $i \in J$. Soit C_J l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients > 0 des α_j pour $j \notin J$, de sorte que C_J est une facette de C.

Soient $J \subset I$, $g \in W(R)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) g laisse invariant un point de C_J;

b) g laisse invariant tout point de C_J;

c) g laisse invariant tout point de $\overline{C}_J$;

d) $g(C_J) = C_J$;

e) $g(\overline{C}_J) = \overline{C}_J$;

f) $g \in W_J$.

Soient $J, J' \subset \{1, 2, \ldots, l\}$ et $g, g' \in W(R)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $g(C_J) = g'(C_{J'})$;

b) $g(C_J) \cap g'(C_{J'}) \neq \varnothing$;

c) $gW_J = g'W_{J'}$;

d) $J = J'$ et $g' \in gW_J$.

Soient $J_1, J_2, \ldots, J_r \subset I$ et $J = J_1 \cap \cdots \cap J_r$. Alors $W_J = W_{J_1} \cap \cdots \cap W_{J_r}$. Pour tout $g \in W(R)$, il existe $J \subset I$ tel que $\overline{C} \cap g(\overline{C}) = \overline{C}_J$ et que $g \in W_J$.

20) Soit P un sous-ensemble de R. On dit que P est clos si les conditions $\alpha \in P$, $\beta \in P$, $\alpha + \beta \in R$ impliquent $\alpha + \beta \in P$. On dit que P est parabolique

si P est clos et si $P \cup (-P) = R$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) P est parabolique;

b) P est clos et il existe une chambre C telle que $P \supset R_+(C)$;

c) il existe une chambre C et une partie Σ de $B(C)$ telle que P soit la réunion de $R_+(C)$ et de l'ensemble Q des racines combinaisons linéaires à coefficients entiers $\leqslant 0$ des éléments de Σ.

Supposons ces conditions vérifiées, et soit V_1 le sous-espace vectoriel de V engendré par Σ. On a

$$P \cap (-P) = Q \cup (-Q) = V_1 \cap R,$$

et $P \cap (-P)$ est un système de racines dans V_1 de base Σ.

Soient P', C', Σ' avec des propriétés analogues. S'il existe un élément de $W(R)$ transformant P en P', il existe un élément de $W(R)$ transformant C en C', Σ en Σ' et P en P'.

21) Soit P un sous-ensemble de R. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) il existe une chambre C telle que $P = R_+(C)$;

b) P est clos, et $\{P, -P\}$ est une partition de R.

La chambre C est alors unique.

Supposons V muni d'une structure d'espace vectoriel ordonné telle que toute racine soit positive ou négative. Soit R_+ l'ensemble des racines positives pour cette structure. Il existe une chambre C et une seule telle que $R_+ = R_+(C)$.

22) Pour qu'une partie B de R soit une base de R, il faut et il suffit que les éléments de B soient linéairement indépendants, et que toute racine soit combinaison linéaire d'éléments de B à coefficients tous $\geqslant 0$ ou tous $\leqslant 0$.

23) Soit P un sous-ensemble clos de R tel que $P \cap (-P) = \varnothing$. Il existe une chambre C telle que $P \subset R_+(C)$.

24) Un sous-ensemble P de R est dit symétrique si $P = -P$. Soient P un sous-ensemble de R, et V_1 (resp. Γ) le sous-espace vectoriel (resp. le sous-groupe additif) de V engendré par P. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) P est clos et symétrique;

b) P est clos et P est un système de racines dans V_1;

c) $\Gamma \cap R = P$.

25) On suppose R irréductible. Soit C une chambre; posons

$$B(C) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}.$$

Il existe un plus grand élément dans R (pour l'ordre défini par C), c'est-à-dire un élément $\tilde{\alpha} = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l$ de R tel que, pour toute racine

$$p_1\alpha_1 + \cdots + p_l\alpha_l,$$

on ait $n_1 \geqslant p_1, \ldots, n_l \geqslant p_l$. On a $\tilde{\alpha} \in \overline{C}$, et $\|\tilde{\alpha}\| \geqslant \|\alpha\|$ pour toute racine α.

26) On note $Q(R)$ le sous-groupe de V engendré par R; les éléments de $Q(R)$ s'appellent les poids radiciels de R. Le groupe $Q(R)$ est un sous-groupe discret de V de rang $l = \dim V$. Toute base de R est une base de $Q(R)$.

On note $P(R)$ le sous-groupe de V associé à $Q(R^\vee)$; les éléments de $P(R)$ s'appellent les poids de R. Le groupe $P(R)$ est un sous-groupe discret de V de rang l contenant $Q(R)$. Les groupes $P(R)/Q(R)$, $P(R^\vee)/Q(R^\vee)$ sont finis et isomorphes; leur ordre f s'appelle l'indice de connexion de R. Avec les notations de 25), l'ordre de $W(R)$ est $l!\,n_1 n_2 \ldots n_l f$.

Le groupe $A(R)$ laisse stables $P(R)$, $Q(R)$, donc opère dans $P(R)/Q(R)$. Le groupe $W(R)$ opère trivialement dans $P(R)/Q(R)$, donc $A(R)/W(R)$ opère dans $P(R)/Q(R)$.

27) Soit C une chambre. Soit $B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ la base de R correspondante. La base duale $(\varpi_1, \ldots, \varpi_l)$ de $(\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_l^\vee)$ est une base de $P(R)$. Les ϖ_i s'appellent les poids fondamentaux (pour C, ou pour B). L'ensemble des combinaisons linéaires des ϖ_i à coefficients > 0 (resp. $\geqslant 0$) est C (resp. $\overline{C}$). Les combinaisons linéaires des ϖ_i à coefficients entiers $\geqslant 0$ s'appellent les poids dominants. Tout élément de $P(R)$ est transformé par $W(R)$ d'un poids dominant et d'un seul. Les poids dominants sont les éléments ϖ de V tels que $\dfrac{2(\varpi|\alpha_i)}{(\alpha_i|\alpha_i)}$ soit un entier $\geqslant 0$ pour tout i.

28) Soit $\rho = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{\alpha \in R_+(C)} \alpha$. On a $\rho = \varpi_1 + \cdots + \varpi_l \in C$.

29) Soit T le groupe des translations de V^* dont les vecteurs appartiennent à $Q(R^\vee)$. Le groupe de transformations affines de V^* engendré par T et $W(R)$ est produit semi-direct de $W(R)$ et de T. Ce groupe s'appelle le groupe de Weyl affine de R et se note $W_a(R)$. Il opère proprement dans V^*. Pour $\alpha \in R$ et $\lambda \in \mathbf{Z}$, soit $s_{\alpha,\lambda}$ l'application $x^* \longmapsto x^* - \langle x^*, \alpha\rangle\alpha^\vee + \lambda\alpha^\vee$; c'est une réflexion affine, et l'ensemble $L_{\alpha,\lambda}$ de ses points invariants est défini par l'équation $\langle x^*, \alpha\rangle = -\lambda$; on a $L_{\alpha,\lambda} = L_\alpha - \dfrac{1}{2}\lambda\alpha^\vee$. Les $s_{\alpha,\lambda}$ sont les réflexions affines appartenant à $W_a(R)$, et engendrent le groupe $W_a(R)$.

30) Soit E la réunion des $L_{\alpha,\lambda}$ pour $\alpha \in R$ et $\lambda \in \mathbf{Z}$. Les composantes connexes de $V^* - E$ s'appellent les alcôves de R. Si R est irréductible, chaque alcôve est un simplexe ouvert; en général, une alcôve est un produit de simplexes ouverts. Le groupe $W_a(R)$ opère de façon simplement transitive sur l'ensemble des alcôves. Si C est une alcôve, $\overline{C}$ est un domaine fondamental pour $W_a(R)$. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q$ les réflexions de $W_a(R)$ correspondant aux murs de C; soit μ_{ij} l'ordre de $\sigma_i\sigma_j$. Alors $W_a(R)$ est défini par les générateurs σ_i et les relations $(\sigma_i\sigma_j)^{\mu_{ij}} = 1$.

31) Si $p \in P(R^\vee)$, il existe une alcôve C telle que p soit point extrémal de $\overline{C}$. Si C′ est une alcôve, $\overline{C}'$ admet un poids radiciel et un seul pour point extrémal.

Soit $x^* \in V^*$; les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $x^* \in P(R^\vee)$;

b) pour tout $\alpha \in R$, l'hyperplan parallèle à L_α et passant par x^* est un $L_{\alpha,\lambda}$.

Soit C' une chambre de $R^\vee$. Il existe une alcôve C et une seule contenue dans C' et telle que $0 \in \overline{C}$. Supposons R irréductible, et soit β la plus grande racine de R (pour C'); alors C est l'ensemble des $x^* \in C'$ tels que $\langle x^*, \beta \rangle < 1$.

32) Soient S l'algèbre symétrique de V, S^W la sous-algèbre formée des éléments invariants par $W = W(R)$, g l'ordre de W, $l = \dim V$. Il existe des éléments $I_1, I_2, \ldots, I_l$ de S^W, homogènes, algébriquement indépendants, qui engendrent S^W. Le S^W-module S admet une base formée de g éléments homogènes. Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de S engendré par les éléments homogènes de S^W de degré > 0; la représentation de W dans $S/\mathfrak{a}$ déduite par passage au quotient de la représentation de W dans S est isomorphe à la représentation régulière de W (sur $\mathbf{R}$).

33) Soient $I_1, I_2, \ldots, I_l$ des éléments de S^W, homogènes, algébriquement indépendants, engendrant S^W. Leurs degrés $k_1, k_2, \ldots, k_l$ sont déterminés de manière unique (à l'ordre près) par R. On a $g = k_1 k_2 \ldots k_l$. Le nombre de racines est $2 \sum_{i=1}^{l} (k_i - 1)$.

34) Un élément A de S est dit anti-invariant par W si $w(A) = \det(w).A$ pour tout $w \in W$. Soit $R = R_1 \cup (-R_1)$ une partition de R, et posons $\pi = \prod_{\alpha \in R_1} \alpha$. L'élément π de S est anti-invariant; les éléments anti-invariants de S sont les éléments de la forme πI, avec $I \in S^W$.

35) Soit E l'algèbre $\mathbf{Z}[P]$ du groupe des poids P de R. Si $p \in P$, on note e^p l'élément correspondant de E. On a $e^p e^{p'} = e^{p+p'}$ et les e^p forment une base de E. Le groupe W opère dans E de telle sorte que $w(e^p) = e^{w(p)}$ si $w \in W$ et $p \in P$. Un élément $z \in E$ est dit anti-invariant si $w(z) = \det(w).z$ pour tout $w \in W$. Pour tout $z \in E$, posons $J(z) = \sum_{w \in W} \det(w).w(z)$. Soit C une chambre. Les éléments $J(e^p)$, où $p \in P \cap C$, forment une base du groupe des éléments anti-invariants de E. Si ρ est la demi-somme des racines positives, on a :

$$J(e^\rho) = e^\rho \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-\alpha}) = \prod_{\alpha > 0} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}),$$

les produits étant pris sur l'ensemble des racines > 0.

36) Avec les notations de 35), posons

$$z_p = J(e^{p+\rho})/J(e^\rho) \qquad \text{pour} \quad p \in P.$$

Les z_p, pour $p \in P \cap \overline{C}$, forment une base du groupe E^W des éléments de E invariants par W. Si $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$ sont les poids fondamentaux de R, les éléments z_{ϖ_i}, $1 \leqslant i \leqslant l$, sont algébriquement indépendants et engendrent l'anneau E^W.

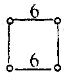
37) Soient C une chambre de R, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ la base correspondante. L'élément $c = s_1 s_2 \ldots s_l$ de W s'appelle une transformation de Coxeter de R. La classe de conjugaison de c dans W ne dépend ni de C ni de la numérotation des α_i. L'ordre h de c s'appelle le nombre de Coxeter de R. Les valeurs propres de c sont de la forme $\exp \dfrac{2i\pi m_j}{h}$, où les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_l$ (appelés exposants de R) sont tels que $1 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_l \leqslant h - 1$.
Supposons R irréductible. On a alors

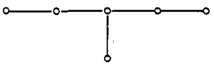
$$m_1 = 1, \quad m_l = h - 1.$$
$$m_j + m_{l+1-j} = h \quad (1 \leqslant j \leqslant l).$$
$$m_1 + m_2 + \cdots + m_l = \frac{1}{2} lh = \frac{1}{2} \operatorname{Card}(R).$$

Tout $m \in \{1, 2, \ldots, h - 1\}$ étranger à h est égal à l'un des m_j et à un seul. Les nombres $m_1 + 1, m_2 + 1, \ldots, m_l + 1$ coïncident, à l'ordre près, avec les entiers notés $n_1, n_2, \ldots, n_l$ dans 33). Avec les notations de 25), $n_1 + \cdots + n_l = h - 1$. Il existe l orbites de $\{1, c, c^2, \ldots, c^{h-1}\}$ dans R, et elles ont toutes h éléments.

Si h est pair, $c^{h/2}$ transforme C en $-$ C. Pour que $-1 \in W$, il faut et il suffit que les exposants de W soient tous impairs; lorsqu'il en est ainsi, h est pair et $c^{h/2} = -1$.

TABLE

p. 8, *l.* 5 *du bas, au lieu de* : (G, N, B, S), *lire* : (G, B, N, S).
p. 11, *l.* 17, *les deux relations doivent être séparées par une virgule.*
p. 12, *l.* 4 *du bas et l.* 3 *du bas, au lieu de* I, *lire* : S.
p. 14, *l.* 17, *au lieu de* distints, *lire* : distincts.
p. 16, *l.* 16, *au lieu de* : $0 \leqslant j \leqslant q$, *lire* : $0 \leqslant j \leqslant q + 1$.
p. 16, *l.* 21 *et* 23, *au lieu de* : $1 \leqslant k \leqslant q$, *lire* : $0 \leqslant k \leqslant q$.
p. 30, *l.* 10 *du bas, supprimer* « il en est... commutatif ».
p. 32, *l.* 3 *du bas, au lieu de* : adjoint *lire* : des automorphismes intérieurs.
p. 32, *l.* 2 *du bas, au lieu de* : chap. III, *lire* : chap. III, § 6, n° 2, prop. 2.
p. 33, *l.* 12 *du bas, au lieu de* : correspondants, *lire* : correspondant.
p. 38, *l.* 1 *de l'exercice* 10, *supprimer* « d'ordre n ».
p. 40, *note* (*) *de bas de page, première ligne, remplacer* : ensemble *par* : ensemble non vide.
p. 41, *l.* 3 *de l'exercice* 17, *au lieu de* : les éléments de H, *lire* : les éléments de $\mathfrak{H}$.
p. 43, *l.* 5 *de l'exercice* 23, *remplacer* A *par* Aut (A).
p. 47, *dernière ligne de l'exercice* 3, *au lieu de* : (G, N, B, S), *lire* : (G, B, N, S).
p. 49, *l.* 15 *du bas, au lieu de* : l'application $t(C, C')$, *lire* : l'application $C' \mapsto t(C, C')$.
p. 54, *exercice* 21, *c*), *deuxième ligne, remplacer* : $(H, N, B \cap H, \{ s \})$ *par* : $(H, B \cap H, N, \{ s \})$.
p. 55, *l.* 7, *au lieu de* : $f)^*$, *lire* : $^*f)$.
p. 67, *l.* 14 *du bas, remplacer* V_s *par* V_s^-.
p. 88, *énoncé de la proposition* 11, *dernière ligne, remplacer* C *par* C'.
p. 111, *l.* 2, *au lieu de* : $\dim_K S^G$, *lire* : $\dim_K S_n^G$.
p. 112, *l.* 14 *du bas, au lieu de* : biunivoque, *lire* : bijective.
p. 114, *l.* 12 *et* 11 *du bas, supprimer* « On sait que... Card (G) $= q$ (*Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 2) ; ».
p. 114, *l.* 8 *du bas, après* : est séparable, *insérer* : (*Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 2, cor. à la prop. 5).
p. 118, *lemme* 2, *ajouter l'hypothèse* : $\dim V \geqslant 2$.
p. 121, *l.* 6, *remplacer* : $D \cap C$ *par* $D \otimes C$.
p. 121, *proposition* 2, *ajouter l'hypothèse que* W *est irréductible.*
p. 128, *ligne* 3 *de l'exercice* 5, *au lieu de* : pour $H \in S$, *lire* : pour $H \in J$.
p. 132, *l.* 3, *remplacer* : mesure *par* : mesure positive non nulle.
p. 133, *exercice* 13, *dernière ligne, remplacer* $- V^0$ par $- H_0$.
p. 134, *l.* 5, *le premier graphe doit être*  .
p. 134, *exercice* 17, *premier graphe : la première arête doit être surmontée d'un* 4.
p. 143, *l.* 3, *au lieu de* : $s_\alpha(x) = x - \langle \alpha^\vee, x \rangle$, *lire* : $s_\alpha(x) = x - \langle \alpha^\vee, x \rangle \alpha$.
p. 144, *l.* 12, *au lieu de* : $\alpha^\vee \in R$, *lire* : $\alpha^\vee \in R^\vee$.
p. 146, *l.* 11, *au lieu de* : omme, *lire* : somme.
p. 149, *l.* 5 *du bas, remplacer* : $p = 0$ *par* : $q = 0$.
p. 150, *l.* 5, *dessin de gauche : la première flèche est affectée de la lettre* γ.
p. 152, *l.* 7 *du bas, au lieu de* : $\alpha, \beta \in R$, *lire* : $\alpha \in R$.
p. 153, *l.* 10 *du bas, remplacer* : $(x \mid y) < 0$ *par* : $(x \mid y) > 0$.
p. 169, *l.* 15 *du bas, remplacer* : *Lemme* 3 *par* : *Lemme* 4.
p. 169, *l.* 6 *du bas, au lieu de* : (*), *lire* : (*Alg.*, chap. V, nouvelle édition).
p. 169, *supprimer la note de bas de page.*
p. 171, *l.* 18 *à* 25 *remplacer* : D'après la *Remarque*... ce qui achève de prouver (iv), *par le texte suivant* : Chaque orbite de Γ dans R a au plus h éléments, et il y a au plus l orbites distinctes, d'après ce qui précède. Or (chap. V, § 6, n° 2, théorème 2, ii)), le cardinal de R est égal à hl, ce qui implique aussitôt (iv).
p. 175, *l.* 11, *au lieu de* : déf. 3, *lire* : déf. 2.
p. 176, *l.* 3 *du bas, remplacer* : $n_i \alpha$ *par* : $n_i \alpha_i$.
p. 181, *l.* 10, *supprimer* : Munissons... par G.
p. 185, *l.* 20, *remplacer* : $\sum$ *par* : $\prod$.
p. 192, *l.* 9 *du bas, au lieu de* : i, j_1, k_1, *lire* : i_1, j_1, k_1.

p. 197, *l.* 9, *le graphe doit être* : E_6 

p. 199, *l.* 1, *remplacer* A_1 *par* $\tilde{A}_1$.
p. 205, *l.* 11 *du bas, au lieu de* : n° 6, *lire* : n° 5.
p. 226, *l.* 8 *du bas, lire* : $\sum_i n_i \alpha_i^\vee$.
p. 227, *la note de bas de page se réfère à l'exercice* 22 *de la page précédente.*
p. 228, *l.* 9 *au lieu de* : dominant, *lire* : maximal.
p. 230, *l.* 1 *au lieu de* : *b*), *lire* : *b*)).
p. 238, *l.* 10, *au lieu de* : celles, *lire* : celle.
p. 239, *l.* 17, *au lieu de* : au type exceptionnel G_2, *lire* : aux types exceptionnels G_2 et F_4.
p. 239, *l.* 18, *au lieu de* : (XI), *lire* : (XI *b*) et *c*)).
p. 240, *l.* 4, *insérer une virgule après* : § 2.
p. 242, *l.* 5, *ajouter à la fin de la ligne* : *c*) A class of groups in an arbitrary realm connected with the configuration of the 27 lines on a cubic surface, *Quart. Journ. of Math.*, t. XXXIII (1901), p. 145-173, et t. XXXIX (1908), p. 205-209.
p. 252, *l.* 1 *du bas, insérer une virgule avant* : $\gamma(R)$.
p. 254, *l.* 4 *du bas, insérer une virgule avant* : $\gamma(R)$.
p. 256, *l.* 4 *de (II), au lieu de* : $\varepsilon_i + \varepsilon_l = \sum_{i \leqslant k \leqslant l} \alpha_l$, *lire* : $\sum_{i \leqslant k \leqslant l-2} \alpha_k + \alpha_l$.
p. 257, *lignes* 12 *du bas et* 10 *du bas, les signes* = *sont incorrects.*
p. 278, *lignes* 10 *et* 11, *remplacer* : Le groupe de Weyl... longueur *par* : Si R est irréductible, le groupe de Weyl opère transitivement dans l'ensemble des racines de longueur donnée.
p. 279, *troisième ligne de* 10), *remplacer* : H_i *par* : L_i.
p. 282, *ligne* 13 *du bas, les deux signes* − *doivent être des signes* +.
p. 284, *ligne* 5 *du bas, remplacer* : $n_1, n_2, \ldots, n_l$ *par* : $k_1, \ldots, k_l$ *et remplacer* : $n_1 + \cdots + n_l$ *par* : $k_1 + \cdots + k_l$.

MASSON, Éditeur.
120, boulevard Saint-Germain
75280 Paris Cedex 06
4e trimestre 1981

Imprimé en France

IMPRIMERIE BOUDIN