N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

Intégration

Chapitre 5

Springer

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

INTÉGRATION

Chapitre 5

Springer

Réimpression inchangée de la seconde édition de 1967

ISBN-10 3-540-35333-X Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-35333-1 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: WMXDesign GmbH, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

PRÉFACE À LA SECONDE ÉDITION

Les principales modifications apportées au texte du chapitre V portent sur les points suivants.

L'intégrale supérieure essentielle possédant, à bien des égards, des propriétés plus satisfaisantes que l'intégrale supérieure ordinaire (voir surtout la prop. 11 du § 1), le paragraphe qui lui est consacré a été développé. De même, on a traité avec plus de détail la théorie des familles sommables de mesures positives (§ 2).

La notion de *diffusion* a été introduite au paragraphe 3; celle de famille μ-adéquate de mesures positives a été légèrement généralisée, de manière à permettre la composition des diffusions.

Les mesures complexes ont été traitées de manière plus systématique; cela n'a exigé la plupart du temps que des changements mineurs, sauf au paragraphe 5, où l'on a dû abandonner partiellement le point de vue des espaces de Riesz.

Enfin, diverses démonstrations ont été modifiées, pour permettre l'extension ultérieure des resultats au cas des espaces séparés non nécessairement localement compacts, qui seront traités au chapitre IX.

Nancago, automne 1965

N. Bourbaki

CHAPITRE V

INTÉGRATION DES MESURES

Dans tout ce chapitre, on désigne par T *un espace localement compact, par* μ *une mesure positive sur* T. *Pour toute partie* A *d'un ensemble* E, *on désigne par* φ_{A} *la fonction caractéristique de* A (*si aucune confusion n'en résulte*). *Par fonction numérique, nous entendrons toujours une fonction prenant ses valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$, *donc pouvant prendre les valeurs* $+\infty$ *et* $-\infty$. *L'ensemble des fonctions numériques positives définies dans* E *sera désigné par* $\mathscr{F}_+(\mathrm{E})$, *ou simplement par* $\mathscr{F}_+$ *si aucune confusion n'en résulte. On convient de définir les produits* $0 \,.\, (+\infty)$ *et* $0 \,.\, (-\infty)$ *en leur donnant la valeur* 0; *si* f *est une fonction numérique définie dans* E, *et* A *une partie de* E, $f\varphi_{\mathrm{A}}$ *désigne donc la fonction qui coïncide avec* f *dans* A *et est égale à* 0 *dans* $\complement$A. *Pour tout point* a *d'un espace localement compact, on désigne par* ε_a *la mesure définie par la masse unité placée au point* a (chap. III, 2$^{\mathrm{e}}$ éd., § 1, n° 3).

La notion d'intégrale supérieure essentielle (resp. *de fonction essentiellement intégrable*), *qui sera définie au* § 1, *coïncide, comme on le verra, avec la notion d'intégrale supérieure* (resp. *de fonction intégrable*) *lorsque* T *est un espace localement compact* dénombrable à l'infini (*Top. gén.*, 4$^{\mathrm{e}}$ éd., chap. I, § 9, n° 9).

Le lecteur qui ne s'intéresse qu'à l'intégration dans les espaces localement compacts dénombrables à l'infini peut donc omettre la lecture des n$^{\mathrm{os}}$ 1 *à* 3 *du* § 1; *dans le reste du chapitre, il obtiendra des énoncés valables lorsque les espaces envisagés sont dénombrables à l'infini, en supprimant les mots «essentiel» et «essentiellement», et en remplaçant le signe* $\mu^\bullet$ *par* μ^* *et le signe* $\int^\bullet$ *par* $\int^*$.

Dans les paragraphes 1 *à* 4, *le mot* mesure *signifiera toujours* mesure positive; *les autres mesures seront appelées explicitement, suivant le cas,* mesures réelles non nécessairement positives *ou* mesures complexes.

§ 1. Intégrale supérieure essentielle

1. Définition de l'intégrale supérieure essentielle

DÉFINITION 1. — *Pour toute fonction* $f \in \mathscr{F}_+(\mathrm{T})$, *on appelle intégrale supérieure essentielle de f par rapport à* μ, *et on note* $\mu^\bullet(f)$, *la borne supérieure, finie ou non, de l'ensemble des nombres* $\mu^*(f\varphi_\mathrm{K})$ *où* K *parcourt l'ensemble des parties compactes de* T. *Pour toute partie* A *de* T, *on pose* $\mu^\bullet(\mathrm{A}) = \mu^\bullet(\varphi_\mathrm{A})$.

On utilise aussi les notations $\int^\bullet f\,d\mu$, $\int^\bullet f(t)\,d\mu(t)$, $\int^\bullet f\mu$.

Comme $f\varphi_\mathrm{K} \leqslant f$ pour toute partie compacte K de T, on a

$$\int^\bullet f\,d\mu \leqslant \int^* f\,d\mu. \tag{1}$$

On peut avoir $\mu^\bullet(f) \neq \mu^*(f)$; en effet, la condition $\mu^*(f) = 0$ signifie que f est *négligeable* tandis que la condition $\mu^\bullet(f) = 0$ signifie que f est *localement négligeable* (chap. IV, § 5, n° 2, prop. 5), et il peut exister des ensembles localement négligeables et non négligeables (chap. IV, § 1, exerc. 5).

L'application $\mu^\bullet$ de $\mathscr{F}_+(\mathrm{T})$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ coïncide avec μ sur $\mathscr{K}_+(\mathrm{T})$. Il en résulte que deux mesures μ_1 et μ_2 telles que $\mu_1^\bullet = \mu_2^\bullet$ sont égales.

PROPOSITION 1. — a) *Si f et g sont deux fonctions numériques* $\geqslant 0$, *égales localement presque partout, on a* $\mu^\bullet(f) = \mu^\bullet(g)$.

b) *Si f et g sont deux fonctions numériques* $\geqslant 0$, *telles que* $f \leqslant g$, *on a* $\mu^\bullet(f) \leqslant \mu^\bullet(g)$.

c) *Si f est une fonction numérique* $\geqslant 0$, *et* α *un nombre* $\geqslant 0$, *on a* $\mu^\bullet(\alpha f) = \alpha\mu^\bullet(f)$.

d) *Si f et g sont deux fonctions numériques* $\geqslant 0$, *on a* $\mu^\bullet(f+g) \leqslant \mu^\bullet(f) + \mu^\bullet(g)$.

e) *Si* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une suite croissante de fonctions numériques* $\geqslant 0$, *et si* $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, *on a* $\mu^\bullet(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu^\bullet(f_n)$.

Les propriétés a), b), c), d) se déduisent aussitôt des propriétés correspondantes de l'intégrale supérieure: a) de la proposition 6 du chap. IV, § 2, n° 3 et de la proposition 5 du chap. IV, § 5, n° 2; b), c), d) des propositions 10, 11, 12 du chap. IV, § 1, n° 3. Pour établir e), désignons par $\mathfrak{K}$ l'ensemble des parties compactes de T; nous avons, d'après le théorème 3 du chap. IV, § 1, n° 3:

$$\lim_{n\to\infty} \mu^\bullet(f_n) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\mathrm{K}\in\mathfrak{K}} \mu^*(f_n\varphi_\mathrm{K}) = \sup_{\mathrm{K}\in\mathfrak{K}} \sup_{n\in\mathbf{N}} \mu^*(f_n\varphi_\mathrm{K})$$
$$= \sup_{\mathrm{K}\in\mathfrak{K}} \mu^*(f\varphi_\mathrm{K}) = \mu^\bullet(f).$$

On a l'égalité dans la relation d) si f et g sont mesurables, d'après le cor. 4 du th. 5, chap. IV, § 5, n° 5. Plus généralement, on a le résultat suivant:

PROPOSITION 2. — *Soient f, g, h trois éléments de $\mathscr{F}_+$; si g et h sont mesurables, on a*:

$$\text{(2)} \qquad \int^\bullet f(g+h)\,d\mu = \int^\bullet fg\,d\mu + \int^\bullet fh\,d\mu.$$

On se ramène aussitôt à la démonstration de la formule analogue pour l'intégrale supérieure. Comme on a

$$f(g+h) = fg + fh$$

(avec la convention $0.(+\infty) = 0$), on a

$$\int^* f(g+h)\,d\mu \leqslant \int^* fg\,d\mu + \int^* fh\,d\mu;$$

il reste à établir l'inégalité inverse. Soit u une fonction semi-continue inférieurement telle qu'on ait $u \geqslant f(g+h)$. Posons $v = \dfrac{u}{g+h}$ dans l'ensemble où $g+h > 0$, $v = +\infty$ dans l'ensemble où $g+h = 0$; on a $v \geqslant f$ et $u \geqslant v(g+h)$, d'où

$$\int^* v(g+h)\,d\mu \leqslant \int^* u\,d\mu$$

et par conséquent, v étant mesurable (chap. IV, 2e éd., § 5, n° 6, cor. 4 du th. 5):

$$\int^* fg\,d\mu + \int^* fh\,d\mu \leqslant \int^* vg\,d\mu + \int^* vh\,d\mu$$
$$= \int^* v(g+h)\,d\mu \leqslant \int^* u\,d\mu,$$

ce qui entraîne l'inégalité cherchée, ε étant arbitraire.

COROLLAIRE. — *Soient f une fonction $\geqslant 0$, (g_n) une suite de fonctions mesurables $\geqslant 0$; on a* $\int^{\bullet} f(\sum_n g_n)\, d\mu = \sum_n (\int^{\bullet} fg_n\, d\mu)$.

Dans le cas d'une suite finie, c'est une conséquence immédiate de la prop. 2. Le cas d'une suite infinie s'en déduit au moyen de la prop. 1, e).

PROPOSITION 3. — *Pour tout nombre fini $\alpha \geqslant 0$ et tout couple de mesures μ, ν sur* T, *on a*

$$(\alpha\mu)^{\bullet} = \alpha\mu^{\bullet}$$

$$(\mu + \nu)^{\bullet} = \mu^{\bullet} + \nu^{\bullet}.$$

En outre, la relation $\mu \leqslant \nu$ entraîne $\mu^{\bullet} \leqslant \nu^{\bullet}$.

La démonstration est immédiate à partir de l'énoncé analogue du chapitre IV (§ 1, n° 3, prop. 15).

PROPOSITION 4. — *Pour toute fonction numérique $f \geqslant 0$, semi-continue inférieurement dans* T, *on a* $\mu^{\bullet}(f) = \mu^*(f)$.

En effet, soit g une fonction de $\mathscr{K}_+(\mathrm{T})$ telle que $g \leqslant f$. Si K est le support (compact) de g, on a $\mu(g) \leqslant \mu^*(f\varphi_{\mathrm{K}}) \leqslant \mu^{\bullet}(f)$. Il en résulte, d'après la définition de l'intégrale supérieure, que $\mu^*(f) \leqslant \mu^{\bullet}(f)$, donc $\mu^*(f) = \mu^{\bullet}(f)$ (formule (1)).

2. *Fonctions et mesures modérées*

PROPOSITION 5. — *Soit* A *une partie de* T; *les propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) *L'ensemble* A *est contenu dans la réunion d'une suite d'ouverts μ-intégrables.*

b) *L'ensemble* A *est contenu dans la réunion d'une suite d'ensembles μ-intégrables.*

c) *L'ensemble* A *est contenu dans la réunion d'une suite de compacts et d'un ensemble μ-négligeable.*

Il est clair que chacune des propriétés a) et c) entraîne b). Inversement, b) entraîne a), car tout ensemble de mesure extérieure finie est contenu dans un ouvert intégrable (chap. IV, § 1, n° 4, prop. 19), et b) entraîne c), car tout ensemble intégrable est réunion d'une suite de compacts et d'un ensemble négligeable (chap. IV, § 4, n° 6, cor. 2 du th. 4).

DÉFINITION 2. — *Une partie de* T *est dite μ-modérée si elle satisfait aux conditions équivalentes de la proposition 5. Une* *fonction définie sur* T, *à valeurs dans un espace vectoriel ou dans* $\bar{\mathbf{R}}$, *est dite* μ*-modérée si elle est nulle dans le complémentaire d'une partie* μ*-modérée de* T. *On dit que la mesure* μ *est modérée si* T *est un ensemble* μ*-modéré.*

Si μ est une mesure modérée, toute fonction sur T est μ-modérée et toute partie de T est μ-modérée.

Remarques. — 1) Si θ est une mesure complexe sur T, on dira qu'une fonction f est θ-modérée (resp. que θ est modérée) si f est $|\theta|$-modérée (resp. si $|\theta|$ est modérée).

2) Toute mesure bornée est modérée; si T est une réunion dénombrable de compacts, toute mesure sur T est modérée.

3) Soit (f_n) une suite de fonctions μ-modérées à valeurs dans $\bar{\mathbf{R}}$. Pour chaque n, soit U_n un ouvert, réunion dénombrable d'ouverts de mesure extérieure finie, tel que f_n soit nulle hors de U_n. La fonction $s = \sum_{n\in\mathbf{N}} |f_n|$ est alors nulle hors de $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{U}_n$; elle est donc μ-modérée, et il en est de même de toutes les fonctions majorées par s. Cela s'applique en particulier aux fonctions $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n$ (si cette somme est définie).

4) Une fonction égale presque partout à une fonction modérée est modérée.

PROPOSITION 6. — *Soit* f *une fonction numérique positive définie dans* T, μ*-mesurable et* μ*-modérée. Il existe alors une suite* $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *d'éléments de* $\mathscr{F}_+(\mathrm{T})$, *dont la somme est égale à* f, *possédant les propriétés suivantes*:

1) *La fonction* h_0 *est* μ*-négligeable.*

2) *Pour tout* $n \geqslant 1$, *il existe un compact* K_n *tel que* h_n *soit nulle hors de* K_n, *et que la restriction de* h_n *à* K_n *soit finie et continue.*

Supposons que f soit somme d'une suite (f_n) de fonctions mesurables positives, dont chacune possède la propriété de l'énoncé; il est clair que f la possède alors aussi. Posons

$$f_n = \inf(f, n+1) - \inf(f, n)$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$; f étant égale à la somme de la suite (f_n), il nous suffira donc d'établir la proposition en supposant f modérée et *bornée.* Désignons alors par A l'ensemble des $t \in \mathrm{T}$ tels que $f(t) > 0$; A est mesurable et modéré, et il existe donc une suite (A_n) d'ensembles intégrables, deux à deux disjoints, telle que

$A = \bigcup_n A_n$. On est ramené à démontrer l'énoncé pour les fonctions $f\varphi_{A_n}$; autrement dit, on peut supposer f bornée et nulle hors d'un ensemble intégrable I. Mais I est réunion d'un ensemble négligeable N et d'une suite (L_n) de compacts deux à deux disjoints (chap. IV, § 4, n° 6, cor. 2 du th. 4). On est donc ramené à traiter le cas où f est bornée, nulle hors d'un compact L.

Soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble des compacts K de T tels que $f|K$ soit continue; $\mathfrak{K}$ étant μ-dense (chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, n° 10, prop. 15), L est réunion d'un ensemble négligeable N, et d'une suite $(K_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathfrak{K}$ deux à deux disjoints (chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, n° 8, déf. 6). Les fonctions $h_0 = f\varphi_N$, $h_n = f\varphi_{K_n}$ pour $n \geqslant 1$, satisfont alors aux conditions de l'énoncé.

La proposition suivante permet de ramener l'étude de l'intégrale supérieure à celle de l'intégrale supérieure essentielle.

PROPOSITION 7. — *Soit f un élément de $\mathscr{F}_+(T)$.*

1) *Si la fonction f n'est pas μ-modérée, $\mu^*(f) = +\infty$.*

2) *Si la fonction f est μ-modérée, $\mu^*(f) = \mu^\bullet(f)$.*

3) *Si l'on a $\mu^\bullet(f) < +\infty$, il existe une partie μ-modérée A, réunion d'une suite de compacts de T, telle que $f = f\varphi_A$ localement presque partout.*

La première assertion résulte aussitôt du lemme 1 du chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, n° 6. Pour établir la seconde, désignons par A une partie modérée, telle que f soit nulle hors de A; A est réunion d'un ensemble négligeable A_0 et d'une suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ d'ensembles compacts, que l'on peut supposer croissante. La fonction f est alors presque partout égale à l'enveloppe supérieure des fonctions $f\varphi_{A_n}$ $(n \geqslant 1)$, et l'on a donc (chap. IV, § 1, n° 3, th. 3 et § 2, n° 3, prop. 6)

$$\mu^*(f) = \lim_{n \to \infty} \mu^*(f\varphi_{A_n}) \leqslant \mu^\bullet(f);$$

d'où l'égalité $\mu^*(f) = \mu^\bullet(f)$ en vertu de la formule (1). Enfin, supposons que $\mu^\bullet(f) < +\infty$; il existe une suite croissante (A_n) de compacts telle que

$$\mu^\bullet(f) = \sup_n \mu^*(f\varphi_{A_n}).$$

Posons $A = \bigcup_n A_n$; le second membre est égal à $\mu^*(f\varphi_A)$ (chap. IV, § 1, n° 3, th. 3), ou encore à $\mu^\bullet(f\varphi_A)$ (d'après la prop. 1, ou d'après 2) ci dessus). Comme on a $\mu^\bullet(f) = \mu^\bullet(f\varphi_A) + \mu^\bullet(f\varphi_{\complement A})$ (prop. 2), on a $\mu^\bullet(f\varphi_{\complement A}) = 0$, et 3) en découle.

COROLLAIRE 1. — *Pour que f soit négligeable, il faut et il suffit qu'elle soit localement négligeable et modérée.*

COROLLAIRE 2. — *Si μ est une mesure modérée (en particulier si μ est bornée, ou si* T *est dénombrable à l'infini), on a $\mu^* = \mu^\bullet$.*

PROPOSITION 8. — a) *Soit* H *un ensemble de fonctions $\geqslant 0$, semi-continues inférieurement, filtrant pour la relation $\leqslant$; on a alors :*

$$\mu^\bullet(\sup_{h \in \mathrm{H}} h) = \sup_{h \in \mathrm{H}} \mu^\bullet(h).$$

b) *Soit* H *un ensemble de fonctions $\geqslant 0$, semi-continues supérieurement, filtrant pour la relation $\geqslant$; s'il existe dans* H *une fonction h_0 telle que $\mu^\bullet(h_0) < \infty$, on a :*

$$\mu^\bullet(\inf_{h \in \mathrm{H}} h) = \inf_{h \in \mathrm{H}} \mu^\bullet(h).$$

L'assertion a), compte tenu de la prop. 4, est une répétition du théorème 1 du chap. IV, § 1, n° 1. Pour établir b), posons $\eta = \inf_{h \in \mathrm{H}} h$, et soit a un nombre > 0. Il existe un compact K tel que l'on ait (chap. IV, 2^e^ éd., § 4, n° 4, cor. 1 de la prop. 5) :

$$\mu^\bullet(h_0) - a \leqslant \mu^*(h_0\varphi_{\mathrm{K}}) = \mu(h_0\varphi_{\mathrm{K}}) \leqslant \mu^\bullet(h_0).$$

Les fonctions $h\varphi_{\mathrm{K}}$, où h parcourt H, forment un ensemble de fonctions semi-continues supérieurement, filtrant pour la relation $\geqslant$, et qui contient une fonction intégrable. On a donc (chap. IV, 2e éd., § 4, n° 4, cor. 2 de la prop. 5) :

$$\mu^*(\eta\varphi_{\mathrm{K}}) = \inf_{h \in \mathrm{H}} \mu^*(h\varphi_{\mathrm{K}}).$$

Mais on a (chap. IV, 2e éd., § 4, n° 4, cor. 1 de la prop. 5) $\mu^\bullet(h_0\varphi_{\complement \mathrm{K}}) \leqslant a$, d'où $\mu^\bullet(h\varphi_{\complement \mathrm{K}}) \leqslant a$ pour toute fonction $h \in \mathrm{H}$ majorée par h_0. On a donc finalement :

$$\mu^\bullet(\eta) \geqslant \mu^*(\eta\varphi_{\mathrm{K}}) = \inf_{h \in \mathrm{H}} \mu^*(h\varphi_{\mathrm{K}}) \geqslant \inf_{h \in \mathrm{H}} \mu^\bullet(h) - a.$$

L'inégalité $\mu^\bullet(\eta) \leqslant \inf_{h \in \mathrm{H}} \mu^\bullet(h)$ étant évidente, et a étant arbitraire, la proposition est établie.

3. Fonctions essentiellement intégrables

Soit F un espace de Banach *réel* ; rappelons que les éléments des espaces $\mathscr{F}^p_{\mathrm{F}}$ (chap. IV, § 3, n° 3) et $\mathscr{L}^p_{\mathrm{F}}$ (chap. IV, § 3, n° 4, déf. 2) sont des fonctions μ-modérées (chap. IV, 2e éd., § 5, n° 6, lemme 1); $\mathscr{N}_F$ désignant toujours l'espace des applications négligeables de T dans F, nous introduirons l'espace $\mathscr{N}_F^\infty$ des applications *localement négligeables* de T dans F.

Lemme 1. — *Soient* **g** *et* **g**′ *deux applications μ-modérées à valeurs dans* F ; *si* **g** *et* **g**′ *sont égales localement presque partout à une même fonction* **f**, *on a* **g** = **g**′ *presque partout.*

En effet, soit D l'ensemble des $t \in T$ tels que $\mathbf{g}(t) \neq \mathbf{g}'(t)$; D est localement négligeable et modéré, donc négligeable (cor. 1 de la prop. 7).

Nous désignerons par $\bar{\mathscr{F}}_F^p(T, \mu)$ (ou simplement $\bar{\mathscr{F}}_F^p(\mu)$, $\bar{\mathscr{F}}_F^p$, si aucune confusion n'en résulte) l'ensemble des applications **f** de T dans F, telles qu'il existe une fonction $\mathbf{g} \in \mathscr{F}_F^p$ égale à **f** localement presque partout. Le nombre $N_p(\mathbf{g})$ ne dépendant que de **f** d'après le lemme 1, nous poserons $\bar{N}_p(\mathbf{f}) = N_p(\mathbf{g})$. La fonction $\bar{N}_p$ est évidemment une semi-norme sur $\bar{\mathscr{F}}_F^p$, et nous supposerons toujours que $\bar{\mathscr{F}}_F^p$ est muni de la topologie définie par $\bar{N}_p$. L'adhérence de 0 pour cette topologie est l'espace $\mathscr{N}_F^\infty$; les relations $\bar{\mathscr{F}}_F^p = \mathscr{F}_F^p + \mathscr{N}_F^\infty$, $\mathscr{N}_F^\infty \cap \mathscr{F}_F^p = \mathscr{N}_F$ (lemme 1), montrent que l'espace normé $\bar{\mathscr{F}}_F^p/\mathscr{N}_F^\infty$ s'identifie canoniquement à $\mathscr{F}_F^p/\mathscr{N}_F$, qui est complet (chap. IV, § 3, n° 3, prop. 5); $\bar{\mathscr{F}}_F^p$ est donc lui-même complet.

Nous désignerons de même par $\bar{\mathscr{L}}_F^p(T, \mu)$ (ou $\bar{\mathscr{L}}_F^p(\mu)$, ou $\bar{\mathscr{L}}_F^p$) le sous-espace $\mathscr{L}_F^p + \mathscr{N}_F^\infty$ de $\bar{\mathscr{F}}_F^p$: on peut aussi caractériser $\bar{\mathscr{L}}_F^p$ comme le sous-espace de $\bar{\mathscr{F}}_F^p$ constitué par les applications *mesurables* (chap. IV, § 5, n° 6, th. 5). L'espace normé $\bar{\mathscr{L}}_F^p/\mathscr{N}_F^\infty$ s'identifie canoniquement à L_F^p ; $\bar{\mathscr{L}}_F^p$ est donc complet. Ses éléments sont appelés *fonctions de puissance p-ième essentiellement intégrable*, cette terminologie étant justifiée par la proposition suivante :

Proposition 9. — *Pour qu'une application* **f** *de* T *dans* F *appartienne à* $\bar{\mathscr{F}}_F^p$ (resp. *à* $\bar{\mathscr{L}}_F^p$) *il faut et il suffit que l'on ait* (resp. *que* **f** *soit mesurable et que l'on ait*)

$$\mu^\bullet(|\mathbf{f}|^p) < +\infty.$$

On a alors $\bar{N}_p(\mathbf{f}) = \mu^\bullet(|\mathbf{f}|^p))^{1/p}$.

On peut évidemment se limiter à l'assertion concernant $\bar{\mathscr{F}}_F^p$. Si **f** appartient à $\bar{\mathscr{F}}_F^p$, soit **g** une fonction appartenant à $\mathscr{F}_F^p$, égale à **f** localement presque partout; on a alors $|\mathbf{f}|^p = |\mathbf{g}|^p$

localement presque partout, donc $\mu^\bullet(|\mathbf{f}|^p) = \mu^\bullet(|\mathbf{g}|^p) = \mu^*(|\mathbf{g}|^p) < +\infty$ (prop. 1, a) et prop. 7), et d'autre part, par définition de $\overline{\mathrm{N}}_p$,

$$\overline{\mathrm{N}}_p(\mathbf{f}) = \mathrm{N}_p(\mathbf{g}) = (\mu^*(|\mathbf{g}|^p))^{1/p}.$$

Inversement, supposons que l'on ait $\mu^\bullet(|\mathbf{f}|^p) < +\infty$; il existe alors un ensemble modéré A tel que $\mathbf{f}$ soit nulle localement presque partout dans $\mathrm{T} - \mathrm{A}$ (prop. 7). La fonction $\mathbf{f}\varphi_{\mathrm{A}}$, égale localement presque partout à $\mathbf{f}$, est telle que $\mathrm{N}_p(\mathbf{f}\varphi_{\mathrm{A}}) = \overline{\mathrm{N}}_p(\mathbf{f}) < +\infty$; elle appartient donc à $\mathscr{F}^p_{\mathrm{F}}$, et on a $\mathbf{f} \in \overline{\mathscr{F}}^p_{\mathrm{F}}$.

COROLLAIRE. — *Pour que* $\mathbf{f}$ *appartienne à* $\mathscr{L}^p_{\mathrm{F}}$, *il faut et il suffit que* $\mathbf{f}$ *appartienne à* $\overline{\mathscr{L}}^p_{\mathrm{F}}$ *et soit modérée.*

DÉFINITION 3. — *Les éléments de* $\overline{\mathscr{L}}^1_{\mathrm{F}}$ *sont appelés* fonctions essentiellement μ-intégrables *à valeurs dans* F. *En composant l'application* $\tilde{f} \mapsto \mu(\tilde{f})$ *de* $\mathrm{L}^1_{\mathrm{F}}$ *dans* F *avec l'application canonique de* $\overline{\mathscr{L}}^1_{\mathrm{F}}$ *sur* $\mathrm{L}^1_{\mathrm{F}}$, *on obtient une application linéaire continue de* $\overline{\mathscr{L}}^1_{\mathrm{F}}$ *dans* F, *qui prolonge l'application* $\mathbf{f} \mapsto \int \mathbf{f}\, d\mu$ *de* $\mathscr{L}^1_{\mathrm{F}}$ *dans* F. *On note encore* $\int \mathbf{f}\, d\mu$ *ou* $\mu(\mathbf{f})$ *la valeur de cette application pour* $\mathbf{f} \in \overline{\mathscr{L}}^1_{\mathrm{F}}$, *et on dit que cet élément est l'*intégrale *de* $\mathbf{f}$ *par rapport à* μ.

Deux fonctions essentiellement intégrables et égales localement presque partout ont même intégrale. Pour toute fonction $f \geqslant 0$, finie et essentiellement intégrable, on a $\int^\bullet f\, d\mu = \int f\, d\mu$. Si A est un ensemble dont la fonction caractéristique est essentiellement intégrable, on dit que A est un *ensemble essentiellement μ-intégrable*; $\int \varphi_{\mathrm{A}}\, d\mu$ se note aussi $\mu(\mathrm{A})$ et s'appelle encore la *mesure* de A.

Si une fonction $\mathbf{f}$, à valeurs dans F, est définie localement presque partout dans T, on dit encore que $\mathbf{f}$ est *essentiellement intégrable* si elle est égale, localement presque partout, à une fonction $\mathbf{f}_1$ partout définie et intégrable; on pose alors

$$\int \mathbf{f}\, d\mu = \int \mathbf{f}_1\, d\mu,$$

et cette définition ne dépend pas de la fonction intégrable $\mathbf{f}_1$ partout définie et localement presque partout égale à $\mathbf{f}$ (lemme 1). On définit de même la notion de fonction essentiellement intégrable pour les fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, définies et finies localement presque partout.

Le lecteur n'aura aucune peine à étendre aux fonctions essentiellement intégrables les résultats du chap. IV, § 4 sur les fonctions intégrables, en remplaçant dans les énoncés «presque partout» par «localement presque partout». Signalons par exemple l'inégalité:

$$\left|\int \mathbf{f}\, d\mu\right| \leqslant \int |\mathbf{f}|\, d\mu \tag{3}$$

valable pour toute fonction essentiellement intégrable $\mathbf{f}$ à valeurs dans un espace de Banach.

Proposition 10. — *Soit $\mathfrak{K}$ un ensemble μ-dense de parties compactes de* T.

a) *Si f est une fonction numérique $\geqslant 0$, on a*:

$$\mu^{\bullet}(f) = \sup_{K \in \mathfrak{K}} \mu^*(f\varphi_K). \tag{4}$$

b) *Si $\mathbf{f}$ est une fonction à valeurs dans un espace de Banach* F, *essentiellement intégrable, on a*:

$$\int \mathbf{f}\, d\mu = \lim_{\mathfrak{K}} \int \mathbf{f}\varphi_K\, d\mu$$

la limite étant prise suivant l'ensemble filtrant (pour $\subset$) $\mathfrak{K}$.

Pour établir a), il suffit de montrer que pour toute partie compacte L de T, on a $\int^* f\varphi_L\, d\mu = \sup_K \int^* f\varphi_K\, d\mu$, où K parcourt l'ensemble des parties de L appartenant à $\mathfrak{K}$. Comme L est réunion d'un ensemble négligeable et d'une suite croissante (K_n) d'éléments de $\mathfrak{K}$ (chap. IV, 2^e^ éd., § 5, n° 8, prop. 12), cela résulte du théorème de passage à la limite dans les intégrales supérieures (chap. IV, § 1, n° 3, th. 3).

Supposons maintenant que $\mathbf{f}$ appartienne à $\mathscr{L}^1_F$; soit ε un nombre > 0, et soit K un élément de $\mathfrak{K}$ tel que

$$\int |f|\varphi_K\, d\mu \geqslant \int |f|\, d\mu - \varepsilon$$

(il en existe d'après a)). On a alors pour tout compact H contenant K:

$$\left|\int f\, d\mu - \int f\varphi_H\, d\mu\right| \leqslant \int |f|\varphi_{\complement H}\, d\mu \leqslant \int |f|\varphi_{\complement K}\, d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Extension aux espaces de Banach et aux mesures complexes. Soit F un espace de Banach complexe; par abus de notation, nous désignerons encore par F l'espace de Banach réel sous-jacent à F. L'espace de Banach $\mathscr{L}^p_F(T, \mu)$ peut alors être muni d'une structure d'espace de Banach complexe naturelle, et il conviendra de préciser si l'on utilise la structure réelle ou complexe de cet espace. Dans ce chapitre, et sauf mention expresse du contraire, il s'agira toujours de la structure *réelle*.

Soit θ une mesure complexe; on posera $\mathscr{L}^p_F(T, \theta) = \mathscr{L}^p_F(T, |\theta|)$; si F est un espace de Banach complexe, il y a lieu de faire les mêmes remarques que ci-dessus. En particulier, une fonction **f** à valeurs dans F sera dite essentiellement intégrable pour θ si elle est essentiellement intégrable pour $|\theta|$. L'assertion b) de la prop. 10 s'étend aussitôt aux mesures complexes.

4. Une propriété spéciale à l'intégrale supérieure essentielle

Le résultat suivant sera fréquemment utilisé dans la suite. On ne peut pas remplacer dans l'énoncé les intégrales supérieures essentielles par des intégrales supérieures ordinaires (voir l'exerc. 4).

PROPOSITION 11. — *Soit $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de mesures positives sur* T, *filtrante pour la relation $\leqslant$ et admettant dans $\mathscr{M}(T)$ une borne supérieure λ. On a alors pour toute fonction numérique $f \geqslant 0$*

$$\lambda^\bullet(f) = \sup_{\alpha\in A} \lambda_\alpha^\bullet(f). \tag{5}$$

Lorsque f appartient à $\mathscr{K}(T)$, cette relation se réduit à la définition de la borne supérieure d'un ensemble filtrant dans $\mathscr{M}(T)$ (chap. II, § 2, n° 2, lemme 1). Supposons ensuite que f soit majorée par une fonction $g \in \mathscr{K}_+$ (autrement dit, que f soit bornée et nulle hors d'un compact K); soit α un indice tel que l'on ait $\lambda_\alpha(g) \geqslant \lambda(g) - \varepsilon$, où ε est un nombre > 0; la mesure $\nu = \lambda - \lambda_\alpha$ étant positive, on a $\nu^*(f) \leqslant \nu(g) \leqslant \varepsilon$, ou $\lambda_\alpha^*(f) \geqslant \lambda^*(f) - \varepsilon$ (chap. IV, § 1, n° 3, prop. 15). Il en résulte (ε étant arbitraire) que le second membre de (6) majore le premier; l'inégalité inverse étant évidente, (6) est établie dans le cas particulier envisagé. Supposons ensuite que f soit nulle hors de K, mais non nécessairement bornée, et posons $f_n = \inf(f, n)$ pour tout entier n. On a :

$$\lambda^\bullet(f) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \lambda^\bullet(f_n) = \sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\alpha\in A} \lambda_\alpha^\bullet(f_n) = \sup_{\alpha\in A} \sup_{n\in\mathbf{N}} \lambda_\alpha^\bullet(f_n) = \sup_{\alpha\in A} \lambda_\alpha^\bullet(f).$$

Enfin, si l'on ne fait plus aucune restriction sur f, on a, en désignant par $\mathfrak{K}$ l'ensemble des parties compactes de T,

$$\begin{aligned}\lambda^\bullet(f) &= \sup_{K\in\mathfrak{K}} \lambda^\bullet(f\varphi_K) = \sup_{K\in\mathfrak{K}} \sup_{\alpha\in A} \lambda_\alpha^\bullet(f\varphi_K) \\ &= \sup_{\alpha\in A} \sup_{K\in\mathfrak{K}} \lambda_\alpha^\bullet(f\varphi_K) = \sup_{\alpha\in A} \lambda_\alpha^\bullet(f).\end{aligned}$$

COROLLAIRE 1. — *Pour qu'une partie* N *de* T *soit localement λ-négligeable, il faut et il suffit que* N *soit localement λ_α-négligeable pour tout* $\alpha \in A$.

COROLLAIRE 2. — *Pour qu'une application* g *de* T *dans un espace topologique* G *soit λ-mesurable, il faut et il suffit qu'elle soit λ_α-mesurable pour tout* $\alpha \in A$.

La condition est évidemment nécessaire, car $\lambda_\alpha \leqslant \lambda$ pour tout α (chap. IV, § 1, n° 3, prop. 15). Inversement, supposons que g soit λ_α-mesurable pour tout α, désignons par $\mathfrak{K}$ l'ensemble des compacts K de T tels que $g|K$ soit continue, et soit L un compact tel que $L \cap K$ soit λ-négligeable pour tout $K \in \mathfrak{K}$. L'ensemble $\mathfrak{K}$ étant λ_α-dense, L est λ_α-négligeable pour tout α (chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, n° 8, prop. 12), donc λ-négligeable (cor. 1). Il en résulte que $\mathfrak{K}$ est λ-dense, et que g est λ-mesurable (chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, n° 10, prop. 15).

§ 2. Familles sommables de mesures positives

1. Définition des familles sommables de mesures

Soit $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de mesures positives sur un espace localement compact X; on dit que la famille $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une *famille sommable de mesures* si elle est sommable dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}(X)$ des mesures réelles sur X, muni de la topologie vague (*Top. Gén.*, chap. III, 3ᵉ éd., § 5, n° 1). Cela revient à dire que, pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(X)$, la famille des nombres $\lambda_\alpha(f)$ est sommable dans **R**. En effet, cette condition est évidemment nécessaire; inversement, si elle est réalisée, la forme linéaire $f \mapsto \sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha(f)$ sur $\mathscr{K}(X)$ est positive, c'est donc une mesure positive ν (chap. III, 2ᵉ éd., § 3, th. 1), et l'on vérifie aussitôt que les sommes partielles finies de la famille (λ_α) convergent vaguement vers ν, suivant le filtre des sections de l'ensemble des parties finies de A (*Top. Gén.*, chap. III, 3ᵉ éd., § 5, n° 1, déf. 1).

Tout élément de $\mathscr{K}(X)$ étant différence de deux éléments de $\mathscr{K}_+(X)$, la famille (λ_α) est sommable si et seulement si l'on a

$$\sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha(f) < +\infty \tag{1}$$

pour toute fonction $f \in \mathscr{K}_+(X)$. Cette condition équivaut encore à la suivante:

$$\sum_{\alpha\in A} \lambda_\alpha(K) < +\infty \tag{2}$$

pour tout compact $K \subset X$.

En effet, (2) entraîne (1), car on a $f \leqslant \|f\| \cdot \varphi_S$, où S désigne le support compact de f. Inversement, si K est un compact, il existe une fonction $f \in \mathscr{K}_+(X)$ telle que $\varphi_K \leqslant f$ (chap. III, 2ᵉ éd., § 1, n° 2, lemme 1), et il en résulte que (1) entraîne (2).

Remarques. — 1) Il est immédiat que, lorsque la famille $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ est sommable, sa somme est la *borne supérieure*, dans $\mathscr{M}_+(X)$, des sommes partielles finies $\sum\limits_{\alpha \in J} \lambda_\alpha$, où J parcourt l'ensemble des parties finies de A.

2) Soit $(\theta_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de mesures complexes sur X ; on dira que la famille (θ_α) est *sommable* si la famille $(|\theta_\alpha|)$ de mesures positives est sommable ; *il ne suffit pas pour cela* que la famille (θ_α) soit sommable dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}(X ; \mathbf{C})$ muni de la topologie vague (cf. exerc. 3).

2. *Intégration par rapport à une somme de mesures positives*

Dans tout ce numéro, X *désigne un espace localement compact,* $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ *une famille sommable de mesures positives sur* X, *et* ν *la mesure* $\sum\limits_{\alpha \in A} \lambda_\alpha$.

PROPOSITION 1. — *Soit f une fonction numérique positive définie dans* X. *On a*

$$\nu^\bullet(f) = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha^\bullet(f). \tag{3}$$

Cela résulte aussitôt de la remarque 1, de la prop. 11 du § 1, n° 3 et de la prop. 3 du § 1, n° 1.

COROLLAIRE 1. — *Pour tout partie compacte* (resp. *ouverte et relativement compacte*) M *de* X, *on a*

$$\nu(M) = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha(M).$$

COROLLAIRE 2. — *Pour qu'une partie* N *de* X *soit localement ν-négligeable, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in A$,* N *soit localement λ_α-négligeable.*

COROLLAIRE 3. — *On a pour toute fonction $f \in \mathscr{F}_+(X)$*

$$\nu^*(f) \geqslant \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha^*(f). \tag{4}$$

Cette inégalité est évidente si f n'est pas ν-modérée, car alors $\nu^*(f) = +\infty$ (§ 1, n° 2, prop. 7). Si f est ν-modérée, f est λ_α-modérée pour tout $\alpha \in A$, car tout ouvert ν-intégrable est λ_α-intégrable ; la relation (4) résulte alors aussitôt de (3), et de la prop. 7 du § 1, n° 2.

Il peut arriver que les deux membres de (4) ne soient pas égaux, même lorsque A est dénombrable, et que chacune des mesures λ_α est ponctuelle (§ 1, exerc. 4a)).

Proposition 2. — *Soit f une application de X dans un espace topologique G. Pour que f soit ν-mesurable, il faut et il suffit que f soit λ_α-mesurable pour tout $\alpha \in A$.*

Cela résulte immédiatement du cor. 2 de la prop. 11 du § 1.

Proposition 3. — *Pour qu'une application $\mathbf{f}$ de X dans un espace de Banach F soit essentiellement ν-intégrable, il faut et il suffit que $\mathbf{f}$ soit essentiellement λ_α-intégrable pour tout $\alpha \in A$, et qu'on ait*

$$\sum_{\alpha \in A} \int^{\bullet} |\mathbf{f}| \, d\lambda_\alpha < +\infty. \tag{5}$$

La famille $(\int \mathbf{f} \, d\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ est alors absolument sommable dans F, et l'on a :

$$\int \mathbf{f} \, d\nu = \sum_{\alpha \in A} \int \mathbf{f} \, d\lambda_\alpha. \tag{6}$$

En effet, pour que $\mathbf{f}$ soit essentiellement ν-intégrable (resp. essentiellement λ_α-intégrable), il faut et il suffit que $\mathbf{f}$ soit mesurable pour la mesure ν (resp. λ_α), et qu'on ait $\nu^\bullet(|\mathbf{f}|) < +\infty$ (resp. $\lambda_\alpha^\bullet(|\mathbf{f}|) < +\infty$), en vertu de la prop. 9 du § 1, n° 3. La première partie de l'énoncé résulte donc aussitôt des prop. 2 et 1. Si $\mathbf{f}$ est essentiellement ν-intégrable, l'inégalité

$$\sum_{\alpha \in A} \left| \int \mathbf{f} \, d\lambda_\alpha \right| \leqslant \sum_{\alpha \in A} \int |\mathbf{f}| \, d\lambda_\alpha = \nu(|\mathbf{f}|)$$

entraîne que la famille $(\int \mathbf{f} \, d\lambda_\alpha)$ est absolument sommable dans F, et que la norme de sa somme est au plus égale à la norme de $\mathbf{f}$ dans $\mathscr{L}^1_F(\nu)$. L'ensemble des $f \in \mathscr{L}^1_F(\nu)$ qui satisfont à (6) est donc un sous-espace fermé $\mathscr{H}$ de $\mathscr{L}^1_F(\nu)$; or ce sous-espace est aussi dense dans $\mathscr{L}^1_F(\nu)$, car il contient les fonctions de la forme $f \, . \, \mathbf{a}$, où $\mathbf{a} \in F$, et où f désigne une fonction intégrable finie et positive (prop. 1). On a donc $\mathscr{H} = \mathscr{L}^1_F(\nu)$, et la proposition est établie.

La prop. 3 peut aussi se déduire du théorème général d'intégration qui sera prouvé au paragraphe 3 (n° 3, th. 1).

COROLLAIRE 1. — *Supposons que* **f** *soit* ν*-intégrable*; **f** *est alors* λ_α*-intégrable pour tout* $\alpha \in A$, *et on a la formule* (6). *Inversement, si l'ensemble* A *est* fini, *et si* **f** *est* λ_α*-intégrable pour tout* $\alpha \in A$, *la fonction* **f** *est* ν*-intégrable.*

Si **f** est ν-intégrable, **f** est essentiellement ν-intégrable et ν-modérée (§ 1, n° 3, cor. de la prop. 9); **f** est donc essentiellement λ_α-intégrable et λ_α-modérée, donc λ_α-intégrable, pour tout $\alpha \in A$. Inversement, si A est fini, et si **f** est λ_α-intégrable pour tout $\alpha \in A$, **f** est essentiellement ν-intégrable d'après la prop. 3, et il suffit de vérifier que $\nu^*(|\mathbf{f}|) < +\infty$; cela résulte aussitôt de la relation $\nu^* = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha^*$ (chap. IV, § 1, n° 4, prop. 15).

COROLLAIRE 2. — *Soit* θ *une mesure complexe sur* X; *on pose* $\theta_1 = (\mathscr{R}\theta)^+$, $\theta_2 = (\mathscr{R}\theta)^-$, $\theta_3 = (\mathscr{I}\theta)^+$, $\theta_4 = (\mathscr{I}\theta)^-$. *Pour qu'une application* f *de* X *dans un espace topologique* G (*resp. dans un espace de Banach* F) *soit mesurable* (*resp. essentiellement intégrable, intégrable*) *pour la mesure* θ, *il faut et il suffit qu'elle soit mesurable* (*resp. essentiellement intégrable, intégrable*) *pour chacune des mesures* θ_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Si f est mesurable (resp. essentiellement intégrable, intégrable) pour θ, f est par définition mesurable (resp. essentiellement intégrable, intégrable) pour la mesure $|\theta|$, donc aussi pour les mesures θ_i, qui sont majorées par $|\theta|$. Inversement, si f est mesurable (resp. essentiellement intégrable, intégrable) pour les mesures θ_i, la prop. 2 (resp. la prop. 3, le cor. 1 de la prop. 3) entraîne que f est mesurable (resp. essentiellement intégrable, intégrable) pour la mesure $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$, qui majore $|\theta|$.

3. *Décomposition d'une mesure en somme de mesures à supports compacts*

PROPOSITION 4. — *Soit* μ *une mesure positive sur un espace localement compact* T, *et soit* $\mathfrak{K}$ *un ensemble* μ*-dense de parties compactes de* T. *Il existe une famille sommable* $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ *de mesures positives sur* T, *telle qu'on ait* $\mu = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha$, *que les supports des mesures* μ_α *appartiennent à* $\mathfrak{K}$, *et forment une famille localement dénombrable de compacts deux à deux disjoints.*

Si la mesure μ *est modérée, l'ensemble d'indices* A *peut être supposé dénombrable.*

En effet, considérons une famille localement dénombrable $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'éléments de $\mathfrak{K}$ deux à deux disjoints, telle que l'ensemble $N = T - \bigcup_{\alpha\in A} K_\alpha$ soit localement μ-négligeable (chap. IV, 2[e] éd., § 5, n° 9, prop. 14). Pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(T)$, posons

$$\mu_\alpha(f) = \mu(f\varphi_{K_\alpha});$$

la forme linéaire μ_α sur $\mathscr{K}(T)$ est positive, c'est donc une mesure positive, de support contenu dans K_α. Comme tout compact contenu dans un élément de $\mathfrak{K}$ appartient à $\mathfrak{K}$, on a $\mathrm{Supp}(\mu_\alpha) \in \mathfrak{K}$ pour tout $\alpha \in A$. Il reste seulement à montrer que la famille (μ_α) est sommable, et que sa somme est égale à μ; autrement dit, qu'on a $\sum_{\alpha\in A} \mu_\alpha(f) = \mu(f)$ pour toute fonction $f \in \mathscr{K}_+(T)$. Or, soit S le support (compact) de f, et soit A' l'ensemble dénombrable constitué par les $\alpha \in A$ tels que $S \cap K_\alpha \neq \varnothing$. L'ensemble $N \cap S$ étant μ-négligeable, on a

$$\begin{aligned}\mu(f) = \mu(f\varphi_S) &= \sum_{\alpha\in A'} \mu(f\varphi_{S\cap K_\alpha}) = \sum_{\alpha\in A'} \mu(f\varphi_{K_\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha\in A} \mu(f\varphi_{K_\alpha}) = \sum_{\alpha\in A} \mu_\alpha(f).\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du cas général. Si μ est modérée, l'ensemble T est μ-modéré, et T est donc réunion d'une suite (L_n) de compacts et d'un ensemble négligeable (§ 1, n° 2, prop. 5); soit A' l'ensemble dénombrable des $\alpha \in A$ tels que K_α rencontre l'un des L_n. On a $\mu_\alpha = 0$ pour $\alpha \notin A'$, et la dernière phrase de l'énoncé en résulte immédiatement.

Remarque. — Une mesure positive peut être somme d'une suite de mesures à support compact, et ne pas être modérée (voir l'exerc. 4a) du § 1).

§ 3. Intégration de mesures positives

1. Fonctions à valeurs dans un espace de mesures

Soient X un espace localement compact, $\mathscr{M}_+(X)$ le cône convexe des mesures positives sur X. Dans toute la suite de ce chapitre, $\mathscr{M}_+(X)$ sera muni de la topologie induite par la topologie vague sur $\mathscr{M}(X)$ (chap. III, 2[e] éd., § 1, n° 9); dire qu'une application $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ de l'espace localement compact T dans $\mathscr{M}_+(X)$ est continue signifie donc que, pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(X)$, la fonction numérique $t \mapsto \lambda_t(f)$ est continue. Nous dirons encore dans ce cas que Λ est *vaguement continue* dans T. Dire qu'une application $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ est μ-mesurable signifie que l'ensemble des parties compactes K de T, telles que la restriction de Λ à K soit vaguement continue, est μ-dense (chap. IV, 2e éd., § 5, n° 10, prop. 15). On dira alors que Λ est *vaguement μ-mesurable.*

Soit $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ une application de T dans $\mathscr{M}_+(X)$; nous dirons que Λ est *scalairement essentiellement intégrable* pour la mesure μ si, pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(X)$, la fonction $t \mapsto \lambda_t(f)$ est essentiellement μ-intégrable. Si l'on pose $\nu(f) = \int \lambda_t(f)\, d\mu(t)$, il est clair que ν est une forme linéaire positive sur $\mathscr{K}(X)$, et par suite (chap. III, 2e éd., § 1, n° 6, th. 1) une mesure sur X. Nous dirons que ν est l'*intégrale* de la fonction Λ à valeurs dans $\mathscr{M}_+(X)$, et nous écrirons $\nu = \int \lambda_t\, d\mu(t)$.

La définition précédente est un cas particulier de la notion d'intégrale faible, qui sera traitée de façon générale au chap. VI.

Si f désigne un élément de $\mathscr{K}(X)$, l'intégrale $\int \lambda_t(f)\, d\mu(t)$ sera aussi notée, par abus de notation, $\int d\mu(t) \int f(x)\, d\lambda_t(x)$; la définition de l'intégrale $\nu = \int \lambda_t\, d\mu(t)$ s'écrit alors:

$$\int f(x)\, d\nu(x) = \int d\mu(t) \int f(x)\, d\lambda_t(x). \tag{1}$$

Nous ferons des abus de notation analogues dans la suite, pour les intégrales supérieures, les intégrales supérieures essentielles, les intégrales de fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Exemples. — 1) Supposons que T soit un espace discret, et que μ soit la mesure sur T définie par la masse $+1$ placée en chaque point de T (chap. III, 2e éd., § 1, n° 3). Soit h une fonction $\geqslant 0$ définie dans T: la fonction h étant semi-continue inférieurement (et même continue) dans T, on a $\mu^*(h) = \mu^\bullet(h) = \sum_{t \in T} h(t)$ (chap. IV, § 1, n° 1, *Exemple*). Pour la mesure μ, les notions de fonction intégrable et de fonction essentiellement intégrable sont donc identiques. Cela étant, dire qu'une application $t \mapsto \lambda_t$ de T dans $\mathscr{M}_+(X)$ est scalairement essentiellement μ-intégrable revient à dire que la famille $(\lambda_t)_{t \in T}$ est sommable (§ 2, n° 1), et on a alors $\int \lambda_t\, d\mu(t) = \sum_{t \in T} \lambda_t$. On notera que l'application $t \mapsto \lambda_t$ est vaguement continue.

2) L'application $t \mapsto \varepsilon_t$ de T dans $\mathscr{M}_+(T)$ est vaguement continue, scalairement essentiellement μ-intégrable pour toute mesure positive μ sur T, et on a $\int \varepsilon_t\, d\mu(t) = \mu$.

PROPOSITION 1. — *Supposons que μ soit la borne supérieure d'une famille filtrante croissante $(\mu_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de mesures positives sur* T; *pour que $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ soit scalairement essentiellement μ-intégrable, il faut et il suffit que Λ soit scalairement essentiellement μ_i-intégrable pour tout $i \in \mathrm{I}$, et que la famille $(\int \lambda_t \, d\mu_i(t))_{i \in \mathrm{I}}$ soit majorée dans $\mathscr{M}(\mathrm{X})$. On a dans ce cas*

$$\int \lambda_t \, d\mu(t) = \sup_{i \in \mathrm{I}} \int \lambda_t \, d\mu_i(t). \tag{2}$$

En effet, vérifier que Λ est scalairement essentiellement intégrable pour une mesure positive η sur T revient à vérifier que $t \mapsto \lambda_t(g)$ est η-mesurable et admet une intégrable supérieure essentielle finie par rapport à η, quelle que soit la fonction $g \in \mathscr{K}_+(\mathrm{X})$. La proposition résulte donc aussitôt de la prop. 11 du § 1, n° 4 et de son corollaire 2.

COROLLAIRE. — *Supposons que μ soit la somme d'une famille sommable $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de mesures positives sur* T; *pour que $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ soit scalairement essentiellement μ-intégrable, il faut et il suffit que Λ soit scalairement essentiellement μ_α-intégrable pour $\alpha \in \mathrm{A}$, et que la famille des mesures $\int \lambda_t \, d\mu_\alpha(t)$ soit sommable. On a alors*

$$\int \lambda_t \, d\mu(t) = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \int \lambda_t \, d\mu_\alpha(t). \tag{3}$$

Il en résulte immédiatement que toute application scalairement essentiellement μ-intégrable est aussi scalairement essentiellement μ'-intégrable pour toute mesure $\mu' \leqslant \mu$.

Nous nous bornerons dans ce paragraphe à l'étude des applications scalairement essentiellement intégrables de T dans $\mathscr{M}_+(\mathrm{X})$ qui possèdent la propriété envisagée dans la définition suivante.

DÉFINITION 1. — *Soient* X *un espace localement compact, $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ une application scalairement essentiellement μ-intégrable de* T *dans $\mathscr{M}_+(\mathrm{X})$, et ν l'intégrale de Λ.*

On dit que Λ est μ-pré-adéquate si, pour toute fonction semi-continue inférieurement $f \geqslant 0$ définie dans X, *la fonction $t \mapsto \int^\bullet f \, d\lambda_t$ est μ-mesurable dans* T, *et si l'on a*

$$\int^\bullet f(x) \, d\nu(x) = \int^\bullet d\mu(t) \int^\bullet f(x) \, d\lambda_t(x). \tag{4}$$

On dit que Λ est μ-adéquate si Λ est μ'-pré-adéquate pour toute mesure positive $\mu' \leqslant \mu$.*

On peut montrer que si Λ est μ-pré-adéquate, et si la mesure ν est modérée — en particulier si X est dénombrable à l'infini — alors Λ est μ-adéquate (exerc. 7); mais on ignore si ces notions sont équivalentes en général. Dans les énoncés des n$^{\text{os}}$ 2 et 3 ci-dessous, les assertions précédées d'un a) ou d'un b) s'étendent aussitôt aux applications pré-adéquates, tandis que celles qui sont précédées d'un c) valent seulement pour les applications adéquates.

La proposition suivante permet souvent de vérifier qu'une application donnée est μ-adéquate.

PROPOSITION 2. — *Soit $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ une application scalairement essentiellement intégrable de* T *dans $\mathscr{M}_+(\mathrm{X})$, et soit $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$.*

a) *Si Λ est vaguement continue, l'application $t \mapsto \lambda_t^\bullet(f)$ est semi-continue inférieurement pour toute fonction semi-continue inférieurement $f \geqslant 0$ définie dans* X, *Λ est μ-adéquate, et on a la relation*

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) = \int^* d\mu(x) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x). \tag{5}$$

b) *Si Λ est vaguement μ-mesurable, Λ est μ-adéquate.*

c) *Si la topologie de* X *admet une base dénombrable, Λ est vaguement mesurable (et donc aussi μ-adéquate).*

Soit f une fonction semi-continue inférieurement $\geqslant 0$ définie dans X. Soit F l'ensemble, filtrant pour la relation $\leqslant$, des fonctions $g \in \mathscr{K}(\mathrm{X})$ telles que $0 \leqslant g \leqslant f$. Pour $g \in \mathrm{F}$, notons h_g la fonction définie dans T par $h_g(t) = \lambda_t(g)$. Posons de même

$$h_f(t) = \lambda_t^*(f) = \lambda_t^\bullet(f) = \sup_{g \in \mathrm{F}} h_g(t)$$

(§ 1, n° 1, prop. 4). Faisons l'hypothèse suivante, plus faible que celle de a): supposons seulement que la restriction de Λ à S soit vaguement continue, S étant un fermé de T contenant le support de μ. Pour $g \in \mathrm{F}$, notons $\bar{h}_g$ la fonction numérique qui coïncide avec h_g dans S et qui vaut $+\infty$ dans $\complement \mathrm{S}$. Posons $\bar{h}_f = \sup_{g \in \mathrm{F}} \bar{h}_g$; on a $\bar{h}_f = h_f$ dans S. Pour toute $g \in \mathrm{F}$ la fonction $\bar{h}_g$ est semi-continue inférieurement; $\bar{h}_f$ est donc semi-continue inférieurement

* Dans la 1$^{\text{re}}$ édition, on appelait applications μ-adéquates les applications scalairement μ-intégrables et vaguement μ-mesurables. La définition qui est donnée ici est plus générale (prop. 2).

et on a, la famille $(\bar{h}_g)_{g \in F}$ étant filtrante

$$\mu^*(\bar{h}_f) = \sup_{g \in F} \mu^*(\bar{h}_g) = \sup_{g \in F} \mu^*(h_g) = \sup_{g \in F} \nu(g) = \nu^*(f)$$

(chap. IV, § 1, n° 1, th. 1 et § 2, n° 3, prop. 6). Comme $h_f = \bar{h}_f$ dans S, donc presque partout, ceci s'écrit aussi $\mu^*(h_f) = \nu^*(f)$, égalité identique à (5). De même, f et $\bar{h}_f$ étant semi-continues inférieurement, les relations précédentes donnent l'égalité $\mu^\bullet(\bar{h}_f) = \nu^\bullet(f)$ (§ 1, n° 1, prop. 4); comme $\bar{h}_f = h_f$ sur S, il vient $\mu^\bullet(h_f) = \nu^\bullet(f)$ (§ 1, n° 1, prop. 1), égalité identique à (4). L'application Λ est donc μ-pré-adéquate; mais on aurait pu remplacer partout dans ce raisonnement μ par $\mu' \leqslant \mu$, ν par $\nu' = \int \lambda_t \, d\mu'(t)$, car Λ est aussi scalairement essentiellement μ'-intégrable, et S contient le support de μ'. Il en résulte que Λ est μ-adéquate.

Supposons Λ vaguement continue; on peut prendre $S = T$; alors $h_f = \bar{h}_f$ est semi-continue inférieurement, ce qui achève de prouver la partie a) de l'énoncé.

Supposons Λ vaguement μ-mesurable, et démontrons b). L'ensemble $\mathfrak{K}$ des compacts K de T tels que la restriction de Λ à K soit continue étant μ-dense (chap. IV, 2[e] éd., § 5, n° 10, prop. 15), il existe une famille sommable $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ de mesures sur T, telle qu'on ait $\mu = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha$ et que le support S_α de chacune des mesures μ_α appartienne à $\mathfrak{K}$ (§ 2, n° 3, prop. 4). Pour tout $\alpha \in A$, l'application Λ est scalairement essentiellement μ_α-intégrable, et nous poserons $\nu_\alpha = \int \lambda_t \, d\mu_\alpha(t)$; la famille (ν_α) est sommable, et sa somme est égale à ν (cor. de la prop. 1). Si f est une fonction semi-continue inférieurement positive définie sur X, la première partie de la démonstration appliquée aux mesures μ_α et aux fermés S_α montre:

1° que h_f est μ_α-mesurable pour tout $\alpha \in A$, donc μ-mesurable (§ 2, n° 2, prop. 2);

2° que l'on a:

$$\int^\bullet f(x) \, d\nu_\alpha(x) = \int^\bullet d\mu_\alpha(t) \int^\bullet f(x) \, d\lambda_t(x).$$

La formule (4) s'en déduit en sommant sur α (§ 2, n° 2, prop. 1). En appliquant le raisonnement précédent à une mesure μ' quelconque majorée par μ (ce qui est légitime, car Λ est scalairement essentiellement μ'-intégrable et vaguement μ'-mesurable, cf. § 2, n° 2, prop. 2), on constate que Λ est μ-adéquate, et b) est démontrée.

Enfin, supposons que la topologie de X admette une base dénombrable, et montrons que toute application scalairement essentiellement μ-intégrable $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ de T dans $\mathscr{M}_+(\mathrm{X})$ est vaguement μ-mesurable. Cela résultera du lemme suivant:

Lemme 1. — *Soit* X *un espace localement compact ayant une base dénombrable. Il existe alors dans* $\mathscr{K}(\mathrm{X})$ *une partie dénombrable* S *possédant la propriété suivante: pour toute fonction* $f \in \mathscr{K}(\mathrm{X})$, *il existe une suite* (f_n) *d'éléments de* S, *une fonction positive* $\varphi \in \mathrm{S}$, *telles que, quel que soit le nombre* $\varepsilon > 0$, *l'on ait* $|f_n - f| \leqslant \varepsilon\varphi$ *dès que n est suffisamment grand.*

Soit X′ le compactifié d'Alexandroff de X, qui est un compact métrisable (*Top. gén.*, chap. IX, n° 9, prop. 16 et cor.); nous identifierons $\mathscr{K}(\mathrm{X})$ à une partie de $\mathscr{C}(\mathrm{X}')$. Soit S′ une partie dénombrable dense de l'espace de Banach $\mathscr{C}(\mathrm{X}')$ (*Top. gén.*, chap. X, 2ᵉ éd., § 3, th. 1); on peut supposer que S′ contient la fonction constante n pour tout $n \in \mathbf{N}$. Soit (U_n) une suite d'ouverts relativement compacts de X, de réunion X, tels que $\overline{\mathrm{U}}_n \subset \mathrm{U}_{n+1}$ pour tout n (*Top. gén.*, chap. I, 4ᵉ éd., § 9, prop. 15), et soit φ_n une fonction de $\mathscr{K}_+(\mathrm{X})$ égale à 1 sur $\overline{\mathrm{U}}_n$. Nous désignerons par S l'ensemble dénombrable des éléments de $\mathscr{K}(\mathrm{X})$ de la forme $\varphi_n g$ $(n \in \mathbf{N}$, $g \in \mathrm{S}')$. Si $f \in \mathscr{K}(\mathrm{X})$, soit (g_n) une suite d'éléments de S′ qui converge uniformément vers f, et soit k un entier tel que le support de f soit contenu dans U_k. Soit enfin m un entier qui majore les normes des fonctions g_n. Les fonctions $f_n = \varphi_k g_n$ appartiennent à S, et satisfont à l'énoncé, avec $\varphi = m\varphi_k$.

Ce lemme étant établi, et l'application $t \mapsto \lambda_t(g)$ étant scalairement essentiellement intégrable pour tout $g \in \mathrm{S}$, l'application $t \mapsto (\lambda_t(g))_{g \in \mathrm{S}}$ de T dans $\mathbf{R}^{\mathrm{S}}$ est μ-mesurable (chap. IV, § 5, n° 3, th. 1). L'ensemble $\mathfrak{K}$ des compacts K de T tels que la restriction de cette application à K soit continue est donc μ-dense, et il nous suffira de montrer que la restriction de Λ à tout $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}$ est continue. Or soient f un élément quelconque de $\mathscr{K}(\mathrm{X})$, f_n et φ des éléments de S satisfaisant à l'énoncé du lemme 1; la fonction $t \mapsto \lambda_t(f)$ est alors limite uniforme dans K des fonctions continues $t \mapsto \lambda_t(f_n)$; elle est donc continue dans K, et la proposition est démontrée.

2. *Intégrales superposées de fonctions positives*

Dans toute la suite de ce paragraphe, sauf mention expresse du contraire, nous désignons par X *un espace localement compact, par* $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ *une application μ-adéquate de* T *dans* $\mathscr{M}_+(\mathrm{X})$, *et par* ν *l'intégrale de* Λ.

PROPOSITION 3. — *Soit f une fonction numérique $\geqslant 0$ définie dans* X.

a) *On a l'inégalité*

$$(6)\quad \int^{*} f(x)\,d\nu(x) \geqslant \int^{\bullet} d\mu(t) \int^{*} f(x)\,d\lambda_t(x) \geqslant \int^{\bullet} d\mu(t) \int^{\bullet} f(x)\,d\lambda_t(x).$$

b) *Si* Λ *est vaguement continue, on a*

$$(7)\qquad \int^{*} f(x)\,d\nu(x) \geqslant \int^{*} d\mu(t) \int^{*} f(x)\,d\lambda_t(x).$$

c) *Si l'on a* $\lambda_t^{\bullet}(1) < +\infty$ *localement* μ*-presque partout, on a*

$$(8)\qquad \int^{\bullet} f(x)\,d\nu(x) \geqslant \int^{\bullet} d\mu(t) \int^{*} f(x)\,d\lambda_t(x)$$

$$= \int^{\bullet} d\mu(t) \int^{\bullet} f(x)\,d\lambda_t(x).$$

Soit g une fonction semi-continue inférieurement dans X telle que $f \leqslant g$. Pour tout $t \in$ T, on a

$$\int^{*} f(x)\,d\lambda_t(x) \leqslant \int^{*} g(x)\,d\lambda_t(x),$$

donc, d'après (4) et la prop. 4 du § 1,

$$\int^{\bullet} d\mu(t) \int^{*} f(x)\,d\lambda_t(x) \leqslant \int^{\bullet} d\mu(t) \int^{*} g(x)\,d\lambda_t(x) = \int^{*} g(x)\,d\nu(x).$$

La première des inégalités (6) résulte alors de la définition de $\int^{*} f(x)\,d\nu(x)$ (chap. IV, § 1, n° 3, déf. 3), et la seconde en résulte aussitôt. L'inégalité (7) se démontre de manière analogue si Λ est vaguement continue, en utilisant (5) au lieu de (4).

Passons à la démonstration de (8). L'application $t \mapsto \lambda_t^{*}(1)$ est mesurable, finie localement μ-presque partout. L'ensemble $\mathfrak{K}$ des compacts K de T tels que la restriction de $t \mapsto \lambda_t^{*}(1)$ à K soit finie et continue est donc μ-dense, et la prop. 4 du § 2, n° 3 entraîne l'existence d'une famille sommable $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de mesures positives, dont les supports appartiennent à $\mathfrak{K}$, telle que $\mu = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \mu_\alpha$. L'application Λ est μ_α-adéquate pour tout $\alpha \in$ A ; posons $\nu_\alpha = \int \lambda_t\,d\mu_\alpha(t)$. La prop. 1 montre que $\nu = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \nu_\alpha$, et la relation (4), appliquée à la mesure μ_α et à la fonction 1, montre que ν_α est une mesure bornée (car $\lambda_t^{*}(1)$ est borné sur $\mathrm{Supp}(\mu_\alpha)$). Écrivons alors la formule

(6) pour la mesure μ_α, en remplaçant le symbole $\int^*$ au premier membre par $\int^\bullet$, ce qui est légitime d'après la prop. 7 du § 1; il vient

$$\int^\bullet f(x)\, d\nu_\alpha(x) \geqslant \int^\bullet d\mu_\alpha(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x) = \int^\bullet d\mu_\alpha(t) \int^\bullet f(x)\, d\lambda_t(x)$$

(la dernière égalité provient de ce que λ_t est bornée localement presque partout, et de la prop. 7 du § 1). L'inégalité (7) s'obtient en sommant sur α (§ 2, n° 2, prop. 1).

Si l'on ne fait aucune hypothèse analogue à celle de c), l'inégalité (8) peut être mise en défaut (exerc. 2).

COROLLAIRE 1. — *Soit f une fonction $\geqslant 0$ définie dans* X, *et soit* H *l'ensemble des $t \in$* T *tels que f ne soit pas λ_t-négligeable.*

a) *Si f est ν-négligeable,* H *est localement μ-négligeable.*

b) *Si f est ν-négligeable, et si Λ est vaguement continue,* H *est μ-négligeable.*

c) *Si f est localement ν-négligeable, et si $\lambda_t^\bullet(1) < +\infty$ localement μ-presque partout,* H *est localement μ-négligeable.*

COROLLAIRE 2. — *Soit f une fonction $\geqslant 0$ définie dans* X *et ν-modérée. L'ensemble des $t \in$* T *tels que f ne soit pas λ_t-modérée est alors localement μ-négligeable (et même μ-négligeable si Λ est vaguement continue).*

En effet, f est la somme d'une suite de fonctions $f_n \geqslant 0$, telle que f_n soit nulle hors d'un compact K_n pour $n \geqslant 1$, et que f_0 soit ν-négligeable (§ 1, n° 2, prop. 6); f_0 est alors λ_t-négligeable, sauf pour des t qui forment un ensemble localement μ-négligeable (et même μ-négligeable si Λ est vaguement continue) d'après le cor. 1, et l'énoncé en résulte aussitôt.

PROPOSITION 4. — *Soit f une fonction ν-mesurable définie dans* X, *à valeurs dans un espace topologique* G, *et soit* M *l'ensemble des $t \in$* T *tels que f ne soit pas λ_t-mesurable.*

a) *Supposons que f soit constante dans le complémentaire d'une partie ν-modérée de* X; M *est alors localement μ-négligeable.*

b) *Supposons que f soit constante dans le complémentaire d'une partie ν-modérée de* X, *et que Λ soit vaguement continue;* M *est alors μ-négligeable.*

c) *Supposons qu'on ait* $\lambda_t^\bullet(1) < +\infty$ *localement* μ*-presque partout*; M *est alors localement* μ*-négligeable.*

Démontrons d'abord a) (resp. b)). Tout ensemble ν-intégrable étant contenu dans un ouvert ν-intégrable, la fonction f est constante dans le complémentaire B d'une réunion dénombrable d'ouverts ν-intégrables. Il existe une partition de $X - B$ formée d'un ensemble ν-négligeable N, et d'une suite (K_n) d'ensembles compacts tels que la restriction de f à chacun des K_n soit continue. Soit S l'ensemble des $t \in T$ tels que N ne soit pas λ_t-négligeable: S est localement μ-négligeable (resp. μ-négligeable) d'après le cor. 1 de la prop. 3. Les ensembles K_n, B, N sont mesurables pour toute mesure sur T, et la restriction de f à chacun d'eux est λ_t-mesurable pour tout $t \notin S$. La fonction f est donc λ_t-mesurable pour tout $t \notin S$ (chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, nº 10, prop. 6).

Pour établir c), reprenons les notations de la démonstration de la prop. 3; f étant ν-mesurable, est mesurable pour chacune des mesures $\nu_\alpha \leqslant \nu$. Or ces mesures sont bornées, donc modérées, et il résulte de a) que M est localement μ_α-négligeable pour tout $\alpha \in A$. Cela entraîne que M est localement μ-négligeable (§ 2, nº 2, cor. 2 de la prop. 1).

Proposition 5. — *Soit* f *une fonction numérique positive* ν*-mesurable définie dans* X, *et soit* N *l'ensemble des* $t \in T$ *tels que* f *ne soit pas* λ_t*-mesurable et* λ_t*-modérée.*

a) *Supposons que* f *soit* ν*-modérée. L'ensemble* N *est alors localement* μ*-négligeable, la fonction* $t \mapsto \int^\bullet f(x)\,d\lambda_t(x)$ *est* μ*-mesurable, et on a*

$$\int^\bullet f(x)\,d\nu(x) = \int^\bullet d\mu(t)\int^\bullet f(x)\,d\lambda_t(x). \tag{9}$$

b) *Supposons que* f *soit* ν*-modérée, et que* Λ *soit vaguement continue. L'ensemble* N *est alors* μ*-négligeable, la fonction* $t \mapsto \int^* f(x)\,d\lambda_t(x)$ *est* μ*-mesurable et* μ*-modérée, et on a*

$$\int^* f(x)\,d\nu(x) = \int^* d\mu(t)\int^* f(x)\,d\lambda_t(x). \tag{10}$$

c) *Supposons qu'on ait* $\lambda_t^\bullet(1) < +\infty$ *localement* μ*-presque partout. L'ensemble* N *est alors localement* μ*-négligeable, la fonction* $t \mapsto \int^\bullet f(x)\,d\lambda_t(x)$ *est* μ*-mesurable, et on a* (9).

Démontrons d'abord a) (resp. b)) en supposant que f soit ν-modérée. Les assertions concernant l'ensemble N ont déjà été établies (prop. 4, et cor. 2 de la prop. 3). D'après la prop. 6 du

§ 1, nous pouvons nous borner à prouver a) (resp. b)) dans chacun des cas particuliers suivants:

1) La fonction f est ν-négligeable.

2) Il existe un compact K tel que f soit nulle hors de K, et que la restriction de f à K soit continue.

Le cas particulier 1) a déjà été traité (cor. 1 de la prop. 3). Pour traiter le second, désignons par G un ouvert ν-intégrable contenant K, par M une constante qui majore f, par h la fonction semi-continue inférieurement $M\varphi_G$, et par g la fonction $h - f$. La fonction f étant semi-continue supérieurement dans X, g est semi-continue inférieurement et positive. En outre, f, g, h sont ν-intégrables.

Appliquons alors la formule (4) (resp. (5)) aux fonctions semi-continues inférieurement h et g. Il apparaît par différence que la fonction $t \mapsto \int^{\bullet} f(x)\, d\lambda_t(x)$ (resp. $\int^{*} f(x)\, d\lambda_t(x)$) est μ-mesurable, et qu'on a la formule (9) (resp. (10)). Enfin, sous l'hypothèse b), la fonction $t \mapsto \int^{*} f(x)\, d\lambda_t(x)$ a une intégrale supérieure finie: elle est donc bien μ-modérée.

Pour démontrer c), reprenons les mesures μ_α et ν_α de la démonstration de la prop. 3; f étant ν_α-mesurable et ν_α-modérée, l'assertion a) entraîne que $t \mapsto \int^{\bullet} f(x)\, d\lambda_t(x)$ est μ_α-mesurable, et que

$$\int^{\bullet} f(x)\, d\nu_\alpha(x) = \int^{\bullet} d\mu_\alpha(t) \int^{\bullet} f(x)\, d\lambda_t(x).$$

Il ne reste plus qu'à sommer sur α, en appliquant les prop. 1 et 2 du § 2, n° 2.

Si f n'est pas supposée ν-modérée, et si l'on ne fait pas l'hypothèse de c), la relation (9) peut être inexacte (exerc. 3).

COROLLAIRE. — *Soit* **f** *une fonction définie dans* X, *à valeurs dans un espace de Banach* F *ou dans* $\overline{\mathbf{R}}$, *ν-mesurable et ν-modérée. Pour que* **f** *soit ν-intégrable, il faut et il suffit que*

$$\int^{\bullet} d\mu(t) \int^{\bullet} |\mathbf{f}(x)|\, d\lambda_t(x) < +\infty.$$

Cela résulte aussitôt de la prop. 5 et du critère d'intégrabilité (chap. IV, § 5, n° 6, th. 5).

3. Intégrales superposées de fonctions à valeurs dans un espace de Banach

THÉORÈME 1. — *Soit* **f** *une fonction à valeurs dans un espace de Banach* F *ou dans* $\overline{\mathbf{R}}$, *et soit* H *l'ensemble des* $t \in$ T *pour lesquels* **f** *n'est pas λ_t-intégrable.*

a) *Si* **f** *est* ν*-intégrable,* H *est localement* μ*-négligeable, la fonction* $t \mapsto \int \mathbf{f}(x)\, d\lambda_t(x)$ (*définie pour* $t \notin \mathrm{H}$) *est essentiellement* μ*-intégrable, et on a*

$$(11) \qquad \int \mathbf{f}(x)\, d\nu(x) = \int d\mu(t) \int \mathbf{f}(x)\, d\lambda_t(x).$$

b) *Si* **f** *est* ν*-intégrable, et si* Λ *est vaguement continue,* H *est de plus* μ*-négligeable, et la fonction* $t \mapsto \int \mathbf{f}(x)\, d\lambda_t(x)$ (*définie pour* $t \notin \mathrm{H}$) *est* μ*-intégrable.*

c) *Si l'on a* $\lambda_t^{\bullet}(1) < +\infty$ *localement* μ*-presque partout, les conclusions de* a) *restent vraies pour une fonction* **f** *essentiellement* ν*-intégrable.*

Nous allons établir d'abord a) (resp. b)). Cet énoncé est vrai lorsque **f** est une fonction numérique positive (prop. 5); si **f** est une fonction intégrable à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, ce résultat s'applique aux fonctions positives $\mathbf{f}^+$ et $\mathbf{f}^-$, et s'étend donc à **f** par différence. Reste à traiter le cas des fonctions à valeurs dans F. Soit $\mathscr{H}$ le sous-espace de $\mathscr{L}^1_{\mathrm{F}}(\nu)$ constitué par les combinaisons linéaires, à coefficients dans F, de fonctions de $\mathscr{K}(\mathrm{X})$: le résultat relatif aux fonctions réelles entraîne aussitôt la validité de l'énoncé pour les éléments de $\mathscr{H}$. Or $\mathscr{H}$ est dense dans $\mathscr{L}^1_{\mathrm{F}}(\nu)$; pour tout $\mathbf{f} \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{F}}(\nu)$, il existe donc une suite $(\mathbf{f}_n)$ d'éléments de $\mathscr{H}$, qui possède les propriétés suivantes:

1) la suite $(\mathbf{f}_n)$ converge vers **f** en moyenne dans $\mathscr{L}^1_{\mathrm{F}}(\nu)$, et ν-presque partout;

2) la fonction $g = |\mathbf{f}_0| + \sum_{n \in \mathbf{N}} |\mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{f}_n|$ est telle que $\nu^*(g) < +\infty$ (chap. IV, § 3, n° 4, th. 3).

Soit N_1 l'ensemble des $t \in \mathrm{T}$ tels que $\lambda_t^*(g) = +\infty$: N_1 est localement μ-négligeable (resp. μ-négligeable) d'après la formule (6) (resp. (7)). Pour $t \notin \mathrm{N}_1$, les $\mathbf{f}_n$ appartiennent à $\mathscr{L}^1_{\mathrm{F}}(\lambda_t)$, la suite $(\mathbf{f}_n)$ converge λ_t-presque partout, ainsi que pour la topologie de la convergence en moyenne dans $\mathscr{L}^1_{\mathrm{F}}(\lambda_t)$ (chap. IV, § 3, n° 3, prop. 6). Soit M l'ensemble des $x \in \mathrm{X}$ tels que $\mathbf{f}_n(x)$ ne converge pas vers $\mathbf{f}(x)$: M étant ν-négligeable, l'ensemble N_2 des $t \in \mathrm{T}$ tels que M ne soit pas λ_t-négligeable est localement μ-négligeable (resp. μ-négligeable) d'après le cor. 1 de la prop. 3.

Supposons que t n'appartienne pas à $\mathrm{N}_1 \cup \mathrm{N}_2$; la suite $(\mathbf{f}_n)$ converge en moyenne dans $\mathscr{L}^1_{\mathrm{F}}(\lambda_t)$, et converge λ_t-presque partout vers **f**. On a donc $\mathbf{f} \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{F}}(\lambda_t)$, et $\int \mathbf{f}\, d\lambda_t = \lim_{n \to \infty} \int \mathbf{f}_n\, d\lambda_t$ (chap. IV, § 4, n° 1). L'ensemble H de l'énoncé est donc contenu dans $\mathrm{N}_1 \cup \mathrm{N}_2$;

il est par suite localement μ-négligeable (resp. μ-négligeable). D'autre part, la fonction $t \mapsto \int \mathbf{f}\, d\lambda_t$ est égale localement μ-presque partout à la limite d'une suite de fonctions μ-mesurables; elle est donc μ-mesurable. Enfin, on a pour tout $t \notin N_1 \cup N_2$ et tout n,

$$\left| \int \mathbf{f}_n(x)\, d\lambda_t(x) \right| \leqslant \int^* g(x)\, d\lambda_t(x)$$

en vertu de l'inégalité $|\mathbf{f}_n| \leqslant g$, et de la prop. 2 du chap. IV, § 4, n° 2. Or la fonction $t \mapsto \int^* g(x)\, d\lambda_t(x)$ est essentiellement μ-intégrable (resp. μ-intégrable) d'après la prop. 5. On peut donc appliquer le théorème de Lebesgue, et il vient:

$$\int d\mu(t) \int \mathbf{f}(x)\, d\lambda_t(x) = \lim_{n\to\infty} \int d\mu(t) \int \mathbf{f}_n(x)\, d\lambda_t(x) = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{f}_n(x)\, d\nu(x).$$

Comme $\int \mathbf{f}_n(x)\, d\nu(x)$ tend vers $\int \mathbf{f}(x)\, d\nu(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$, d'après les hypothèses faites sur la suite $(\mathbf{f}_n)$, la relation (11) en résulte, et on a prouvé a) (resp. b)).

Supposons maintenant que $\lambda_t^\bullet(1) < +\infty$ localement μ-presque partout, et que $\mathbf{g}$ soit une fonction essentiellement ν-intégrable. Soit $\mathbf{f}$ une fonction ν-intégrable telle que $\mathbf{g} = \mathbf{f}$ localement ν-presque partout (§ 1, n° 3). On a alors $\mathbf{g} = \mathbf{f}$ presque partout pour λ_t, sauf pour des t qui forment un ensemble localement μ-négligeable P (cor. 1 c) de la prop. 3). On a $\int \mathbf{g}\, d\lambda_t = \int \mathbf{f}\, d\lambda_t$ pour $t \notin P \cup H$, et cela achève la démonstration.

Remarque. — Soit $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ une application μ-adéquate de T dans $\mathscr{M}_+(X)$. Si une application $\Lambda' : t \mapsto \lambda'_t$ de T dans $\mathscr{M}_+(X)$ est égale à Λ localement μ-presque partout, il résulte aussitôt des définitions que Λ' est aussi μ-adéquate, et que Λ et Λ' ont même intégrale. Si maintenant $H : t \mapsto \eta_t$ est une fonction à valeurs dans $\mathscr{M}_+(X)$, définie localement μ-presque partout, nous dirons encore que H est μ-adéquate si elle est égale localement μ-presque partout à une application $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$, partout définie et μ-adéquate. On pose alors $\int \eta_t\, d\mu(t) = \int \lambda_t\, d\mu(t)$, définition qui ne dépend pas de la fonction Λ utilisée. Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que les propositions démontrées dans les numéros précédents s'étendent aux fonctions μ-adéquates définies localement μ-presque partout.

4. *Fonctions universellement mesurables*

DÉFINITION 2. — *On dit qu'une application f de* T *dans un espace topologique* F *est universellement mesurable si elle est μ-mesurable pour toute mesure positive μ sur* T.

Les sous-ensembles de T dont la fonction caractéristique est universellement mesurable sont appelés *ensembles universellement mesurables.* Ils forment une tribu sur T (chap. IV, 2^e^ éd., § 5, n° 4, cor. 2 du th. 2) qui contient les ensembles boréliens (même réf., cor. 3), et les ensembles sousliniens si T est métrisable (chap. IV, 2^e^ éd., § 5, n° 1, cor. 2 de la prop. 3). Pour qu'une application f de T dans un espace topologique F, métrisable de type dénombrable, soit universellement mesurable, il faut et il suffit que l'image réciproque par f de toute boule fermée de F soit une partie universellement mesurable de T (chap. IV, § 5, n° 5, th. 4).

PROPOSITION 6. — *Pour qu'une application f de* T *dans un espace topologique* F *soit universellement mesurable, il faut et il suffit que f soit mesurable pour toute mesure positive sur* T *à support compact.*

Cette condition est évidemment nécessaire; elle est d'autre part suffisante, car toute mesure positive μ est somme d'une famille de mesures à support compact (§ 2, n° 3, prop. 4): l'énoncé résulte alors de la prop. 2 du § 2, n° 2.

PROPOSITION 7. — *Soit μ une mesure positive sur* T, *et soit f une application μ-mesurable de* T *dans un espace topologique* F. *Il existe alors une application universellement mesurable f' de* T *dans* F, *telle que $f = f'$ localement μ-presque partout.*

Soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble des compacts de T tels que la restriction de f à K soit continue; $\mathfrak{K}$ étant μ-dense (chap. IV, 2^e^ éd., § 5, n° 10, prop. 13), il existe une famille $(K_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathfrak{K}$ deux à deux disjoints, localement dénombrable, telle que l'ensemble $N = T - \bigcup_{i\in I} K_i$ soit localement μ-négligeable (chap. IV, 2^e^ éd., § 5, n° 9, prop. 14). Soit x un élément de F; posons

$$f'(t) = f(t) \text{ si } t \in \bigcup_{i\in I} K_i,$$

$$f'(t) = x \quad \text{si } t \in N.$$

Les fonctions f et f' sont égales localement μ-presque partout.

D'autre part, $N \cap K$ est une partie borélienne de K pour tout compact K de T, du fait que la famille (K_i) est localement dénombrable. Il en résulte que N est un ensemble universellement mesurable, et que f' est une fonction universellement mesurable (chap. IV, 2e éd., § 5, n° 10, prop. 16).

5. *Diffusions*

Définition 3. — *Soit* X *un espace localement compact, et soit* $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ *une application de* T *dans* $\mathscr{M}_+(X)$. *On dit que* Λ *est une diffusion de* T *dans* X *si* Λ *est adéquate pour toute mesure positive sur* T *à support compact. On dit que la diffusion* Λ *est bornée si toutes les mesures* λ_t *sont bornées et si on a* $\sup_{t \in T} \|\lambda_t\| < +\infty$; *cette quantité est alors appelée la norme de* Λ, *et notée* $\|\Lambda\|$.

La proposition suivante ne fait que traduire la définition :

Proposition 8. — *Pour qu'une application* $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ *de* T *dans* $\mathscr{M}_+(X)$ *soit une diffusion, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites* :

1) *Pour toute fonction semi-continue inférieurement* $f \geqslant 0$ *définie dans* X, *la fonction* $t \mapsto \lambda_t^\bullet(f)$ *est universellement mesurable dans* T.

2) *Pour toute fonction* $g \in \mathscr{K}_+(X)$, *la fonction* $t \mapsto \lambda_t(g)$ *est localement bornée dans* T.

3) *Pour toute fonction semi-continue inférieurement* $f \geqslant 0$ *définie dans* X, *et toute mesure positive* μ *à support compact dans* T, *on a la relation suivante, où* ν *désigne* $\int \lambda_t \, d\mu(t)$:

$$\int^\bullet f(x)\, d\nu(x) = \int^\bullet d\mu(t) \int^\bullet f(x)\, d\lambda_t(x). \tag{12}$$

Supposons que Λ soit une diffusion. La condition 1) est alors satisfaite d'après la définition des applications adéquates (n° 1, déf. 1), et la prop. 6 ; la condition 3) est satisfaite d'après la formule (4), puisque Λ est μ-adéquate. Soit $g \in \mathscr{K}_+(X)$, et soit u la fonction $t \mapsto \lambda_t(g)$ (universellement mesurable d'après 1)) ; supposons que u ne soit pas localement bornée. Il existe alors un compact K tel que u ne soit pas bornée sur K, et il existe donc une suite (t_n) d'éléments de K telle que $u(x_n) \geqslant n^2$ pour tout $n \geqslant 1$; u n'est donc pas intégrable pour la mesure à support compact $\mu = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} \varepsilon_{t_n}$, en contradiction avec l'hypothèse faite sur Λ, qui entraîne que $t \mapsto \lambda_t(g)$ est intégrable pour toute mesure positive à support compact. Les trois conditions ci-dessus sont donc nécessaires. Inversement, les conditions 1) et 2) entraînent que Λ est scalairement essentiellement μ-intégrable pour toute mesure μ à support compact. Comme toute mesure $\mu' \geqslant 0$ majorée par une mesure μ à support compact a aussi un support compact, les conditions 1) et 3) expriment que Λ est μ-adéquate pour toute mesure positive à support compact, ce qui est bien le résultat cherché.

PROPOSITION 9. — *Soit* $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ *une application de* T *dans* $\mathscr{M}_+(\mathrm{X})$, *telle que la fonction* $t \mapsto \lambda_t(g)$ *soit universellement mesurable et localement bornée dans* T *pour tout* $g \in \mathscr{K}_+(\mathrm{X})$. *On peut affirmer que* Λ *est une diffusion dans chacun des cas suivants*:

a) *la topologie de* X *admet une base dénombrable*;

b) Λ *est universellement mesurable pour la topologie vague.*

En effet, soit μ une mesure positive à support compact dans T; l'application Λ est scalairement essentiellement μ-intégrable, donc μ-adéquate si a) ou b) est satisfaite (prop. 2).

Dans toute la fin de ce paragraphe, nous adopterons les notations suivantes: nous désignerons par $\langle \eta, h \rangle$ l'intégrale supérieure essentielle, pour une mesure positive η, d'une fonction positive η-mesurable h. L'application $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ sera une diffusion de T dans X. Si f est une fonction universellement mesurable positive définie dans X, nous noterons Λf l'application $t \mapsto \lambda_t^\bullet(f)$. Si μ est une mesure positive sur T telle que Λ soit scalairement essentiellement μ-intégrable, nous noterons $\mu\Lambda$ la mesure $\int \lambda_t \, d\mu(t)$. La définition de l'intégrale prend alors la forme

$$\langle \mu\Lambda, f \rangle = \langle \mu, \Lambda f \rangle \qquad \text{pour } f \in \mathscr{K}_+(\mathrm{X}).$$

Nous dirons qu'une mesure positive μ sur T *appartient au domaine de* Λ si Λ est μ-adéquate: cela revient à dire (compte tenu de la prop. 8) que Λ est scalairement essentiellement μ-intégrable et qu'on a $\langle \mu'\Lambda, f \rangle = \langle \mu', \Lambda f \rangle$ pour toute mesure positive $\mu' \leqslant \mu$ et pour toute fonction f positive semi-continue inférieurement.

PROPOSITION 10. — *Soient* f, g *deux fonctions universellement mesurables positives sur* X, *a un nombre* $\geqslant 0$, μ *et* ν *deux mesures positives sur* T.

a) *On a* $\Lambda(f + g) = \Lambda f + \Lambda g$, $\Lambda(af) = a\Lambda f$.

b) *Si* μ *et* ν *appartiennent au domaine de* Λ, *il en est de même de* $\mu + \nu$ *et de* $a\mu$, *et on a* $(\mu + \nu)\Lambda = \mu\Lambda + \nu\Lambda$, $(a\mu)\Lambda = a(\mu\Lambda)$.

Le seul point non évident est l'appartenance de $(\mu + \nu)$ au domaine de Λ, qui se traite en remarquant que toute mesure positive majorée par $\mu + \nu$ est de la forme $\mu' + \nu'$, où $\mu' \leqslant \mu$, $\nu' \leqslant \nu$ (« lemme de décomposition », chap. II, § 1, n° 1). Voir aussi la prop. 11 ci après.

PROPOSITION 11. — *Pour qu'une mesure positive* μ *sur* T *appartienne au domaine de* Λ, *il faut et il suffit que* Λ *soit scalairement essentiellement* μ*-intégrable.*

Cette condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons-la satisfaite, et soit f une fonction positive semi-continue inférieurement définie dans X. La fonction Λf est universellement mesurable, donc μ-mesurable. Nous allons prouver qu'on a $\langle \mu, \Lambda f \rangle = \langle \mu\Lambda, f \rangle$; comme cette égalité vaudra aussi pour toute mesure positive $\mu' \leqslant \mu$, puisque Λ est aussi scalairement essentiellement μ'-intégrable, il en résultera que Λ est μ-adéquate.

Soit $(\mu_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille sommable de mesures positives à support compact, telle que $\mu = \sum_{i \in \mathrm{I}} \mu_i$ (§ 2, n° 3, prop. 4); la famille des mesures $\mu_i\Lambda$ est alors sommable, et $\mu\Lambda = \sum_{i \in \mathrm{I}} \mu_i\Lambda$ (n° 1, cor. de la prop. 1). On a par conséquent $\langle \mu\Lambda, f \rangle = \sum_{i \in \mathrm{I}} \langle \mu_i\Lambda, f \rangle$ (§ 2, n° 1, prop. 1); mais Λ est μ_i-adéquate, de sorte qu'on a

$$\langle \mu_i\Lambda, f \rangle = \langle \mu_i, \Lambda f \rangle.$$

En appliquant de nouveau la prop. 1 du § 2, on obtient l'égalité cherchée :

$$\langle \mu\Lambda, f \rangle = \sum_{i \in \mathrm{I}} \langle \mu_i\Lambda, f \rangle = \sum_{i \in \mathrm{I}} \langle \mu_i, \Lambda f \rangle = \langle \mu, \Lambda f \rangle.$$

COROLLAIRE 1. — *Si* Λ *est une diffusion bornée, toute mesure positive bornée* μ *appartient au domaine de* Λ, *et on a*

$$\|\mu\Lambda\| \leqslant \|\mu\| \, \|\Lambda\|.$$

COROLLAIRE 2. — *Supposons que* μ *soit somme d'une famille sommable* $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *de mesures positives appartenant au domaine de* Λ. *Pour que* μ *appartienne au domaine de* Λ, *il faut et il suffit que* *la famille des mesures $\mu_\alpha\Lambda$ soit sommable, et on a dans ce cas*

$$\mu\Lambda = \sum_{\alpha\in A} \mu_\alpha\Lambda.$$

Il suffit d'appliquer le cor. de la prop. 1 du n° 1.

La proposition 5, exprimée dans le langage des diffusions, prend la forme suivante:

PROPOSITION 12.— *Soit μ une mesure positive sur* T *qui appartient au domaine de Λ, et soit f une fonction universellement mesurable $\geqslant 0$ définie dans* X. *Si f est modérée pour la mesure $\mu\Lambda$, ou si les mesures λ_t sont bornées, la fonction Λf est μ-mesurable et on a*

$$\langle\mu\Lambda, f\rangle = \langle\mu, \Lambda f\rangle. \tag{13}$$

COROLLAIRE.— *Si* X *est dénombrable à l'infini, ou si les mesures λ_t sont bornées, la fonction Λf est universellement mesurable dans* T *pour toute fonction universellement mesurable $f \geqslant 0$ définie dans* X, *et on a* (13).

6. *Composition des diffusions bornées*

PROPOSITION 13.— *Soient* T, X, Y *trois espaces localement compacts, $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ une diffusion bornée de* T *dans* X, $\mathrm{H} : x \mapsto \eta_x$ *une diffusion bornée de* X *dans* Y. *L'application $t \mapsto \lambda_t\mathrm{H}$ est alors une diffusion bornée de* T *dans* Y, *que l'on désigne par* $\Lambda\mathrm{H}$, *et on a*

$$\|\Lambda\mathrm{H}\| \leqslant \|\Lambda\|\,\|\mathrm{H}\|. \tag{14}$$

Soient f une fonction universellement mesurable $\geqslant 0$ définie dans Y, *μ une mesure sur* T. *Supposons que μ appartienne au domaine de Λ, et que $\mu\Lambda$ appartienne au domaine de* H; *alors μ appartient au domaine de $\Lambda\mathrm{H}$ et on a:*

$$\begin{gathered}\langle\mu(\Lambda\mathrm{H}), f\rangle = \langle\mu\Lambda, \mathrm{H}f\rangle = \langle\mu, \Lambda\mathrm{H}f\rangle;\\ (\mu\Lambda)\mathrm{H} = \mu(\Lambda\mathrm{H}); \qquad \Lambda(\mathrm{H}f) = (\Lambda\mathrm{H})f.\end{gathered} \tag{15}$$

Posons $\gamma_t = \lambda_t\mathrm{H}$; nous désignerons par Γ l'application $\Lambda\mathrm{H}$ de T dans $\mathscr{M}_+(\mathrm{Y})$, et par Γf la fonction $t \mapsto \langle\gamma_t, f\rangle$ (par abus de notation, car nous ignorons encore si Γ est une diffusion). On a $\langle\gamma_t, f\rangle = \langle\lambda_t\mathrm{H}, f\rangle = \langle\lambda_t, \mathrm{H}f\rangle$ d'après (13); la fonction $\mathrm{H}f$ étant positive et universellement mesurable dans X (cor. de la prop. 12), il en résulte d'abord que $\Gamma f = \Lambda(\mathrm{H}f)$, et ensuite que Γf est universellement mesurable dans T (même référence). Il est clair que toutes les mesures γ_t ont une masse totale au plus égale à $\|\Lambda\| \; \|\mathrm{H}\|$. Par conséquent, Γg est universellement mesurable et bornée pour toute fonction $g \in \mathscr{K}_+(\mathrm{Y})$; Γ est donc scalairement essentiellement intégrable pour toute mesure bornée sur T, et en particulier pour toute mesure à support compact. Plus généralement, si μ est une mesure du domaine de Λ, telle que $\mu\Lambda$ appartienne au domaine de H, on a, pour $g \in \mathscr{K}_+(\mathrm{Y})$,

$$\langle \mu, \Gamma g \rangle = \langle \mu, \Lambda(\mathrm{H}g) \rangle = \langle \mu\Lambda, \mathrm{H}g \rangle = \langle (\mu\Lambda)\mathrm{H}, g \rangle.$$

Cette dernière quantité étant finie, on voit que Γ est scalairement essentiellement μ-intégrable. Désignons par $\mu\Gamma$ l'intégrale $\int \gamma_t \, d\mu(t)$ (par abus de notation, car nous ignorons encore si Γ est une diffusion). Les relations précédentes s'écrivent alors

$$\langle \mu\Gamma, g \rangle = \langle (\mu\Lambda)\mathrm{H}, g \rangle,$$

ou encore $\mu\Gamma = (\mu\Lambda)\mathrm{H}$, car g est arbitraire dans $\mathscr{K}_+(\mathrm{Y})$.

Considérons à nouveau la fonction universellement mesurable $f \geqslant 0$. Nous avons

$$\langle \mu\Gamma, f \rangle = \langle (\mu\Lambda)\mathrm{H}, f \rangle = \langle \mu\Lambda, \mathrm{H}f \rangle = \langle \mu, \Lambda(\mathrm{H}f) \rangle = \langle \mu, \Gamma f \rangle.$$

Lorsque f est semi-continue inférieurement, et lorsque μ parcourt l'ensemble des mesures positives à support compact, ces relations expriment que Γ est une diffusion de T dans Y. L'énoncé ne fait alors qu'expliciter les relations obtenues au cours de la démonstration ci-dessus.

DÉFINITION 4.— *Les notations étant celles de la proposition* 13, *la diffusion* $\Lambda\mathrm{H}$ *est appelée la diffusion composée des diffusions bornées* H *et* Λ.

Soient $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4$ quatre espaces localement compacts, $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ trois diffusions bornées de X_1 dans X_2, X_2 dans X_3, X_3 dans X_4 respectivement. Il résulte aussitôt de la prop. 13 qu'on a

$$(\Lambda_1\Lambda_2)\Lambda_3 = \Lambda_1(\Lambda_2\Lambda_3).$$

On utilisera donc des notations sans parenthèses pour la composition des diffusions.

Exemple. — Soient u une application universellement mesurable de T dans X, v une application universellement mesurable de X dans Y; d'après la prop. 2b), on définit des diffusions Λ et H par les formules:

$$\lambda_t = \varepsilon_{u(t)}, \qquad \eta_x = \varepsilon_{v(x)}\ ;$$

la diffusion $\Gamma = \Lambda\mathrm{H}$ est alors définie par

$$\gamma_t = \varepsilon_{(v \circ u)(t)}$$

On prendra donc garde que l'ordre de composition des diffusions est l'opposé de l'ordre habituel de composition des fonctions.

§4. Intégration de mesures positives ponctuelles

1. Familles de mesures ponctuelles

Soient X et T deux espaces localement compacts, π une application de T dans X, g une fonction numérique *finie* et $\geqslant 0$, définie dans T; ces deux fonctions définissent une application $t \mapsto \lambda_t = g(t)\varepsilon_{\pi(t)}$ de T dans l'espace $\mathscr{M}(\mathrm{X})$ des mesures sur X, telle que pour tout $t \in \mathrm{T}$, λ_t soit une mesure *ponctuelle* (chap. III, 2[e] éd., §2, n[o] 4) ou soit égale à 0. Si f est une fonction numérique $\geqslant 0$ définie dans X, on a $\int^* f(x)\,d\lambda_t(x) = \int^\bullet f(x)\,d\lambda_t(x) = f(\pi(t))g(t)$ (rappelons qu'on a convenu de prendre ce produit égal à 0 lorsque $g(t) = 0$ et $f(\pi(t)) = +\infty$). Toute fonction (à valeurs dans un espace topologique) définie dans X, est λ_t-mesurable pour tout $t \in \mathrm{T}$. Toute application $\mathbf{f}$ de X dans un espace de Banach F est λ_t-intégrable pour tout $t \in \mathrm{T}$ et on a $\int \mathbf{f}(x)\,d\lambda_t(x) = \mathbf{f}(\pi(t))g(t)$. Enfin, si f est une fonction numérique quelconque définie dans X, pour que f soit λ_t-intégrable, il faut et il suffit que $f(\pi(t))g(t)$ soit fini, et on a alors $\int f(x)\,d\lambda_t(x) = f(\pi(t))g(t)$.

DÉFINITION 1. — *Soit μ une mesure positive sur* T. *On dit que le couple (π, g) est μ-adapté si les conditions suivantes sont satisfaites:*

1° *Les fonctions π et g sont μ-mesurables.*

2° *Pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(\mathrm{X})$, l'application $t \mapsto f(\pi(t))g(t)$ est essentiellement μ-intégrable.*

PROPOSITION 1. — *Si le couple (π, g) est μ-adapté, l'application $\Lambda : t \mapsto \lambda_t = g(t)\varepsilon_{\pi(t)}$ de* T *dans $\mathscr{M}_+(\mathrm{X})$ est scalairement essentiellement μ-intégrable, vaguement μ-mesurable et μ-adéquate. Inversement,* *si* Λ *est scalairement essentiellement* μ*-intégrable et vaguement* μ*-mesurable, la fonction* g *est* μ*-mesurable, et la restriction de* π *à l'ensemble* S *des* $t \in \mathrm{T}$ *tels que* $g(t) \neq 0$ *est* μ*-mesurable.*

En effet, supposons que le couple (π, g) soit μ-adapté; pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(\mathrm{X})$, la fonction $t \mapsto \langle f, \lambda_t \rangle = f(\pi(t))g(t)$ est alors essentiellement μ-intégrable. Montrons que $t \mapsto \lambda_t$ est vaguement μ-mesurable. En effet, notons d'abord que, si π et g sont *continues*, l'application $t \mapsto \lambda_t$ est *vaguement continue*. Dans le cas général, l'ensemble des parties compactes K de T telles que les restrictions de π et de g à K soient continues est μ-dense (chap. IV, 2^e éd., § 5, n° 10, prop. 15); si K est un tel ensemble, la restriction de $t \mapsto \lambda_t$ à K est vaguement continue, d'où la première assertion de l'énoncé. La prop. 2 du § 3, n° 1, montre que Λ est μ-adéquate.

Inversement, supposons que Λ soit scalairement essentiellement intégrable et vaguement μ-mesurable; elle est alors μ-adéquate (§ 3, n° 1, prop. 2). La fonction 1 étant semi-continue inférieurement dans X, la fonction $t \mapsto \lambda_t(1) = g(t)$ est μ-mesurable (§ 3, déf. 1). L'ensemble S est donc mesurable (chap. IV, 2^e éd., § 5, n° 5, prop. 7). L'ensemble $\mathfrak{K}$ des compacts $\mathrm{K} \subset \mathrm{S}$ tels que $g|\mathrm{K}$ soit continue et $\Lambda|\mathrm{K}$ vaguement continue est μ-dense dans S (chap. IV, 2^e éd., § 5, n° 10, prop. 15); si $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}$, la restriction à K de l'application $t \mapsto \varepsilon_{\pi(t)} = \dfrac{1}{g(t)}\lambda_t$ est donc vaguement continue, et cela entraîne la continuité de $\pi|\mathrm{K}$ (chap. III, 2^e éd., § 1, n° 9, prop. 13). Comme $\mathfrak{K}$ est μ-dense dans S, la restriction de π à S est mesurable.

Nous utiliserons le lemme suivant:

Lemme 1. — *Soient* T *et* X *deux espaces topologiques,* π *une application continue propre* (*Top. gén.*, chap. I, 4^e éd., § 10, déf. 1) *de* T *dans* X. *Soit* g *une fonction numérique semi-continue inférieurement, définie dans* T. *Pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *soit* $f(x)$ *la borne inférieure de la fonction* $g(t)$ *dans l'ensemble* $\overset{-1}{\pi}(x)$ (borne inférieure égale à $+\infty$ si $\overset{-1}{\pi}(x) = \varnothing$; cf. *Ens.*, chap. III, § 1, n° 9). *Alors* f *est semi-continue inférieurement dans* X.

Pour tout nombre réel (fini) a, notons B_a l'ensemble des $x \in \mathrm{X}$ tels que $f(x) \leqslant a$, A_a l'ensemble des $t \in \mathrm{T}$ tels que $g(t) \leqslant a$; tout revient à montrer que B_a est fermé (*Top. gén.*, chap. IV, § 6, n° 2, prop. 1). Or A_a est fermé (même réf.) et l'application propre π est fermée (*Top. gén.*, chap. I, 4^e éd., § 10, n° 1, prop. 1); on est donc ramené à prouver que $\pi(\mathrm{A}_a) = \mathrm{B}_a$. La relation évidente

$f(\pi(t)) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in \mathrm{T}$ entraîne que $\pi(\mathrm{A}_a) \subset \mathrm{B}_a$. Inversement, soit $x \in \mathrm{B}_a$; l'ensemble $\overset{-1}{\pi}(x)$ est quasi-compact (*Top. gén.*, chap. I, 4^e^ éd., § 10, n° 2, th. 1) et non vide, et il existe donc un $t \in \overset{-1}{\pi}(x)$ tel que $g(t) = \inf\limits_{u \in \overset{-1}{\pi}(x)} g(u) = f(x)$ (*Top. gén.*, chap. IV, § 6, n° 2, th. 3); on a alors $t \in \mathrm{A}_a$ et $\pi(t) = x$.

2. *Intégrales supérieures de fonctions positives par rapport à une intégrale de mesures ponctuelles*

Nous allons voir que, lorsque (π, g) est un couple μ-adapté, on peut préciser les résultats obtenus en appliquant les propositions du § 3 à la famille $t \mapsto \lambda_t = g(t)\varepsilon_{\pi(t)}$, qui est μ-adéquate d'après la prop. 1.

THÉORÈME 1. — *Soit* (π, g) *un couple* μ*-adapté, et soit* $\nu = \int g(t)\varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$. *Pour toute fonction numérique* $f \geqslant 0$ *définie dans* X, *on a*

$$\int^{\bullet} f(x)\, d\nu(x) = \int^{\bullet} f(\pi(t))g(t)\, d\mu(t). \tag{1}$$

A) Supposons d'abord que la mesure μ ait un support compact K, et que les restrictions à K des fonctions g et π soient continues. On a, d'après la formule (4) du § 3, n° 1, $\nu^{\bullet}(1) = \int_{\mathrm{K}} g(t)\, d\mu(t) < +\infty$, de sorte que toutes les mesures qui interviennent dans la formule (1) sont bornées. On peut donc remplacer au premier membre $\int^{\bullet}$ par $\int^{*}$. Compte tenu de la formule (6) du § 3, n° 2, tout revient à prouver que:

$$\int^{*} f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^{\bullet} f(\pi(t))g(t)\, d\mu(t) \tag{2}$$

où le symbole $\int^{\bullet}$ au second membre peut à son tour être remplacé par $\int^{*}$. D'après la définition de l'intégrale supérieure, il suffit de vérifier l'inégalité

$$\int^{*} f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^{*} h(t)\, d\mu(t) \tag{3}$$

pour toute fonction h, semi-continue inférieurement dans T, majorant la fonction $t \mapsto f(\pi(t))g(t)$. Or soit ε un nombre >0, et soit u la fonction $(h + \varepsilon)/g$, qui est semi-continue inférieurement dans K. Si l'on a $t \in \overset{-1}{\pi}(\{x\}) \cap \mathrm{K}$, on a $u(t) \geqslant f(x)$: c'est évident si $g(t) = 0$, car alors $u(t) = +\infty$; si $g(t) > 0$, on a

$$u(t)g(t) = h(t) + \varepsilon \geqslant f(\pi(t))g(t) = f(x)g(t),$$

d'où l'inégalité annoncée. Dans ces conditions soit $v(x)$, pour tout $x \in X$, la borne inférieure de $u(t)$ pour $t \in \overset{-1}{\pi}(\{x\}) \cap K$. La fonction v majore f d'après ce qui précède, elle est semi-continue inférieurement dans X d'après le lemme 1 (appliqué à la restriction de π à K), et on a $v(\pi(t))g(t) \leqslant h(t) + \varepsilon$ pour tout $t \in K$ (rappelons que le premier membre est nul par convention si $g(t) = 0$). Appliquons alors à v la formule (4) du § 3, n° 1. Il vient :

$$(4) \qquad \int^* f(x)\,d\nu(x) \leqslant \int^* v(x)\,d\nu(x)$$
$$= \int^* v(\pi(t))g(t)\,d\mu(t) \leqslant \int_K^* (h(t) + \varepsilon)\,d\mu(t)$$
$$= \int^* h(t)\,d\mu(t) + \varepsilon\mu(1).$$

La mesure μ étant bornée, et ε étant arbitraire, l'inégalité (3) en résulte.

B) Passons maintenant au cas général. L'application $t \mapsto (\pi(t), g(t))$ de T dans $X \times \mathbf{R}_+$ étant μ-mesurable (chap. IV, § 5, n° 3, th. 1), l'ensemble $\mathfrak{K}$ des compacts K de T tels que les restrictions de π et g à K soient continues est μ-dense (chap. IV, 2e éd., § 5, n° 10, prop. 15). D'après la prop. 4 du § 2, n° 3, μ est somme d'une famille sommable $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ de mesures portées par des éléments de $\mathfrak{K}$; le couple (π, g) étant μ_α-adapté pour tout $\alpha \in A$, soit ν_α la mesure $\int g(t)\varepsilon_{\pi(t)}\,d\mu_\alpha(t)$. On a alors d'après A)

$$(5) \qquad \int^\bullet f(x)\,d\nu_\alpha(x) = \int^\bullet f(\pi(t))g(t)\,d\mu_\alpha(t).$$

Mais les ν_α forment une famille sommable dont la somme est égale à ν (§ 3, n° 1, cor. de la prop. 1). On a donc d'après la prop. 1 du § 2, n° 1,

$$(6) \qquad \int^\bullet f(x)\,d\nu(x) = \sum_{\alpha \in A} \int^\bullet f(x)\,d\nu_\alpha(x).$$

On a une relation analogue pour le second membre de (5), et (1) résulte donc de (5) par sommation sur α.

COROLLAIRE. — *Pour qu'une partie* N *de* X *soit localement négligeable pour* ν, *il faut et il suffit que l'intersection de* $\overset{-1}{\pi}(N)$ *et* *de l'ensemble des points* $t \in \mathrm{T}$ *où* $g(t) > 0$, *soit localement négligeable pour* μ.

PROPOSITION 2. — *Soient* π *une application continue et propre* (*Top. gén.*, chap. I, 4^e^ éd., § 10, n° 1) *de* T *dans* X, g *une fonction numérique finie et continue dans* T, *telle que* $g(t) > 0$ *pour tout* $t \in \mathrm{T}$. *Alors le couple* (π, g) *est* μ*-adapté, et si on pose*

$$\nu = \int g(t)\varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t),$$

on a, pour toute fonction numérique $f \geqslant 0$ *définie dans* X,

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) = \int^* f(\pi(t))g(t)\, d\mu(t). \tag{7}$$

Il est clair que π et g sont μ-mesurables; en outre, pour toute fonction $\psi \in \mathscr{K}(\mathrm{X})$, $\psi \circ \pi$ est continue et à support compact, puisque π est propre; le couple (π, g) est donc μ-adapté, et en outre l'application $t \to g(t)\varepsilon_{\pi(t)}$ est *vaguement continue.*

Soit h une fonction semi-continue inférieurement dans T, telle que $f(\pi(t))g(t) \leqslant h(t)$ pour tout $t \in \mathrm{T}$. Nous allons montrer que

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^* h(t)\, d\mu(t). \tag{8}$$

Par définition de l'intégrale supérieure, il en résultera l'inégalité

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^* f(\pi(t))g(t)\, d\mu(t)$$

ce qui, joint à l'inégalité (7) du § 3, n° 2, démontrera (7).

Pour démontrer (8), définissons dans X une fonction $\bar{f}$ de la façon suivante: $\bar{f}(x)$ est la borne inférieure de $h(t)/g(t)$ dans l'ensemble $\overset{-1}{\pi}(x)$ (borne inférieure égale à $+\infty$ si $\overset{-1}{\pi}(x) = \varnothing$). La fonction $\bar{f}$ possède les propriétés suivantes:

1° $\bar{f}(x) \geqslant f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ (puisque $g(t) > 0$ pour tout $t \in \mathrm{T}$).

2° $\bar{f}(\pi(t))g(t) \leqslant h(t)$ pour tout $t \in \mathrm{T}$.

3° La fonction $\bar{f}$ est semi-continue inférieurement, en vertu du lemme 1, la fonction h/g étant semi-continue inférieurement dans T.

On a par suite, compte tenu de la prop. 2a) du § 3, n° 1:

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^* \bar{f}(x)\, d\nu(x) = \int^* \bar{f}(\pi(t))g(t)\, d\mu(t) \leqslant \int^* h(t)\, d\mu(t)$$

ce qui établit (8), et achève la démonstration.

3. *Mesurabilité par rapport à une intégrale de mesures ponctuelles*

PROPOSITION 3. — *Soit (π, g) un couple μ-adapté, et soit $\nu = \int g(t)\varepsilon_{\pi(t)}\,d\mu(t)$. Soient f une application de X dans un espace topologique G, S l'ensemble (μ-mesurable) des points $t \in \mathrm{T}$ tels que $g(t) > 0$. Pour que f soit ν-mesurable, il faut et il suffit que la restriction de $f \circ \pi$ à S soit μ-mesurable.*

Supposons d'abord que f soit ν-mesurable. Par hypothèse, l'ensemble $\mathfrak{K}$ des parties compactes K de S telles que la restriction de π à K soit continue, est μ-dense dans S (chap. IV, 2[e] éd., § 5, n° 10, prop. 15). Pour montrer que la restriction à S de $f \circ \pi$ est μ-mesurable, il suffit donc de prouver que, pour tout $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}$, l'ensemble des parties compactes H de K, telles que la restriction de $f \circ \pi$ à H soit continue, est μ-dense dans K (chap. IV, 2[e] éd., § 5, n° 8, prop. 13). Mais par hypothèse, il existe une partition de l'ensemble compact $\pi(\mathrm{K})$ formée d'un ensemble ν-négligeable N et d'une suite d'ensembles compacts (C_n) tels que la restriction de f à chacun des C_n soit continue. Dans ces conditions, $\mathrm{K} \cap \overset{-1}{\pi}(\mathrm{N})$ et les ensembles $\mathrm{K} \cap \overset{-1}{\pi}(\mathrm{C}_n)$ forment une partition de K; mais $\mathrm{K} \cap \overset{-1}{\pi}(\mathrm{N})$ est μ-négligeable en vertu du cor. du th. 1 du n° 2, les ensembles $\mathrm{K} \cap \overset{-1}{\pi}(\mathrm{C}_n)$ sont compacts et la restriction de $f \circ \pi$ à chacun de ces derniers est continue, ce qui prouve que la restriction à S de $f \circ \pi$ est μ-mesurable.

Inversement, supposons qu'il en soit ainsi; pour montrer que f est ν-mesurable, il suffit de prouver que l'ensemble $\mathfrak{L}$ des parties compactes L de X, telles que la restriction de f à L soit continue, est ν-dense (chap. IV, 2[e] éd., § 5, n° 10, prop. 15). Soit N une partie de X telle que $\mathrm{N} \cap \mathrm{L}$ soit ν-négligeable pour tout $\mathrm{L} \in \mathfrak{L}$, et montrons que N est localement ν-négligeable. Pour cela, nous devons montrer que $\overset{-1}{\pi}(\mathrm{N}) \cap \mathrm{S}$ est localement μ-négligeable (cor. du th. 1 du n° 2). Or, l'ensemble $\mathfrak{H}$ des parties compactes H de S, telles que les restrictions à H de π et de $f \circ \pi$ soient continues, est par hypothèse μ-dense dans S (chap. IV, 2 éd., § 5, n° 10, prop. 15). Il nous suffit donc de prouver que $\overset{-1}{\pi}(\mathrm{N}) \cap \mathrm{H}$ est μ-négligeable pour tout $\mathrm{H} \in \mathfrak{H}$. Or, $\pi(\mathrm{H})$ est compact et peut être identifié à l'espace quotient de H par la relation d'équivalence $\pi(t) = \pi(t')$, π étant identifiée à l'application canonique de H sur cet espace quotient (*Top. gén.*, chap. I, 4[e] éd., § 5, n° 2, prop. 3). Comme la restriction de $f \circ \pi$ à H est continue, la restriction de f à $\pi(\mathrm{H})$ est donc continue, autrement dit $\pi(\mathrm{H}) \in \mathfrak{L}$, et par suite $\mathrm{N} \cap \pi(\mathrm{H})$

est ν-négligeable. En vertu du cor. du th. 1 du n° 2, $\overset{-1}{\pi}(\mathrm{N} \cap \pi(\mathrm{H})) \cap \mathrm{S}$ est localement μ-négligeable; il en est donc de même de l'ensemble

$$\mathrm{H} \cap \overset{-1}{\pi}(\mathrm{N}) \subset \overset{-1}{\pi}(\mathrm{N} \cap \pi(\mathrm{H})) \cap \mathrm{S};$$

mais comme H est compact, $\mathrm{H} \cap \overset{-1}{\pi}(\mathrm{N})$ est μ-négligeable, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Si $\mathbf{f}$ est une application de X dans un espace de Banach F, il revient au même de dire que la restriction de $\mathbf{f} \circ \pi$ à S est μ-mesurable, ou que la fonction $(\mathbf{f} \circ \pi)g$ (définie dans T) est μ-mesurable, puisque g est μ-mesurable, ne s'annule pas dans S, et est nulle dans T — S (chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, n° 10, prop. 15).

4. *Intégration des fonctions à valeurs dans un espace de Banach, par rapport à une intégrale de mesures ponctuelles*

Théorème 2. — *Soit* (π, g) *un couple* μ*-adapté, et soit* $\nu = \int g(t)\varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$. *Soit* $\mathbf{f}$ *une fonction définie dans* X, *à valeurs dans un espace de Banach* F *ou dans* $\overline{\mathbf{R}}$. *Pour que* $\mathbf{f}$ *soit essentiellement* ν*-intégrable, il faut et il suffit que* $t \mapsto \mathbf{f}(\pi(t))g(t)$ *soit essentiellement* μ*-intégrable, et on a alors*

$$\int \mathbf{f}(x)\, d\nu(x) = \int \mathbf{f}(\pi(t))g(t)\, d\mu(t). \tag{9}$$

Supposons en outre que π *soit continue et propre, et que* g *soit continue et telle que* $g(t) > 0$ *pour tout* $t \in \mathrm{T}$. *Alors, pour que* $\mathbf{f}$ *soit* ν*-intégrable, il faut et il suffit que* $t \mapsto \mathbf{f}(\pi(t))g(t)$ *soit* μ*-intégrable.*

A) Nous commencerons par traiter le cas où la mesure μ est portée par un compact K, sur lequel g est bornée. Les mesures μ et ν sont alors bornées, et on peut remplacer dans l'énoncé « essentiellement intégrable » par « intégrable ». Supposons que $\mathbf{f}$ soit ν-intégrable : la fonction $\mathbf{f}(\pi(t))g(t)$ est alors μ-intégrable, et la relation (9) est vérifiée, d'après le th. 1 du § 3, n° 3. Inversement, supposons que $\mathbf{f}(\pi(t))g(t)$ soit μ-intégrable : $\mathbf{f}$ est alors ν-mesurable (n° 3, prop. 3 et *Remarque*), et on a

$$\int^{\bullet} |\mathbf{f}(x)|\, d\nu(x) = \int^{\bullet} |\mathbf{f}(\pi(t))| g(t)\, d\mu(t) < +\infty$$

(n° 2, th. 1) : f est donc essentiellement ν-intégrable (§ 1, n° 3, prop. 9), donc ν-intégrable. Le th. 1 du § 3, n° 3 entraîne alors (9).

B) Passons au cas général. Soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble des parties compactes K de T telles que $g|\mathrm{K}$ soit continue : $\mathfrak{K}$ est μ-dense (chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, n° 10, prop. 15), et la mesure μ est donc somme d'une famille $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ de mesures portées par des éléments de $\mathfrak{K}$ (§ 2, n° 3, prop. 4). Le couple (g, π) est évidemment μ_α-adapté pour tout $\alpha \in A$, et la mesure ν est somme de la famille des mesures $\nu_\alpha = \int \varepsilon_{\pi(t)} g(t)\, d\mu_\alpha(t)$ (§ 3, n° 1, prop. 12). Le raisonnement de A) s'appliquant aux mesures μ_α, ν_α, la première partie de l'énoncé résulte alors de la prop. 3 du § 2, n° 2.

Pour que la fonction $\mathbf{f}$ (resp. $t \mapsto \mathbf{f}(\pi(t))g(t)$) soit intégrable pour ν (resp. pour μ), il faut et il suffit qu'elle soit essentiellement intégrable, et qu'on ait

$$\int^* |\mathbf{f}(x)|\, d\nu(x) < +\infty \qquad (\text{resp.} \int^* |\mathbf{f}(\pi(t))| g(t)\, d\mu(t) < +\infty).$$

La seconde partie de l'énoncé résulte donc de la première partie, et de la proposition 2.

Remarque. — Soient (π, g) un couple μ-adapté, π' une application de T dans X, g' une fonction numérique finie et $\geqslant 0$ définie dans T, telles que π' (resp. g') soit égale à π (resp. g) localement presque partout pour μ. Alors le couple (π', g') est μ-adapté, les mesures $\lambda_t = g(t)\varepsilon_{\pi(t)}$ et $\lambda'_t = g'(t)\varepsilon_{\pi'(t)}$ sont égales localement presque partout, et on a $\int g(t)\varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t) = \int g'(t)\varepsilon_{\pi'(t)}\, d\mu(t)$. Si maintenant π' et g' sont seulement définies localement presque partout (pour μ), et s'il existe un couple μ-adapté (π, g) tel que π' (resp. g') soit égale à π (resp. g) localement presque partout, on dit encore que le couple (π', g') est μ-adapté, et on pose alors

$$\int g'(t)\varepsilon_{\pi'(t)}\, d\mu(t) = \int g(t)\varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$$

(cf. § 3, n° 3, *Remarque*). Les énoncés des th. 1 et 2 et de la prop. 3 restent valables lorsqu'on suppose seulement π et g définis localement presque partout.

§ 5. Mesures définies par des densités numériques

1. Fonctions localement intégrables

PROPOSITION 1. — *Soit* $\mathbf{g}$ *une fonction définie localement presque partout dans* T (*pour la mesure positive* μ), *à valeurs dans un espace de Banach* F (*resp. dans* $\overline{\mathbf{R}}$). *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout point* $t \in$ T, *il existe un voisinage* V *de* t *tel que la fonction* $\mathbf{g}\varphi_V$ *soit* μ*-intégrable.*

b) *La fonction* $\mathbf{g}$ *est* μ*-mesurable et, pour tout ensemble compact* $K \subset T$, *on a* $\int^* |\mathbf{g}|\varphi_K \, d\mu < +\infty$.

c) *Pour toute fonction numérique* $h \in \mathscr{K}(T)$, $\mathbf{g}h$ *est* μ*-intégrable.*

Montrons que *a*) entraîne *b*); la fonction $\mathbf{g}$ est en effet mesurable en vertu du principe de localisation (chap. IV, § 5, n° 2, prop. 4). D'autre part, pour tout $t \in K$, il existe par hypothèse un voisinage V_t de t dans T tel que $\mathbf{g}\varphi_{V_t}$ soit intégrable; on peut donc recouvrir K par un nombre fini de voisinages V_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que les fonctions $\mathbf{g}\varphi_{V_i}$ soient intégrables. Comme

$$|\mathbf{g}|\varphi_K \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{g}|\varphi_{V_i},$$

on a $\int^* |\mathbf{g}|\varphi_K \, d\mu < +\infty$.

En second lieu, *b*) entraîne *c*), car $\mathbf{g}h$ est alors mesurable, et si L est le support compact de h, on a $|\mathbf{g}h| \leqslant \|h\| \,.\, |\mathbf{g}|\varphi_L$, donc $\int^* |\mathbf{g}h| \, d\mu < +\infty$ par hypothèse; $\mathbf{g}h$ est par suite intégrable en vertu du critère d'intégrabilité (chap. IV, § 5, n° 6, th. 5).

Enfin, *c*) entraîne *a*). En effet, pour tout $t \in T$, soit V un voisinage compact de t. Il existe une application continue h de T dans $[0, 1]$, égale à 1 dans V et à support compact (chap. III, 2ᵉ éd., § 1, n° 2, lemme 1); par hypothèse $\mathbf{g}h$ est intégrable, donc il en est de même de $\mathbf{g}\varphi_V = (\mathbf{g}h)\varphi_V$ (chap. IV, § 5, n° 6, cor. 3 du th. 5).

DÉFINITION 1. — *On dit qu'une fonction* $\mathbf{g}$, *définie localement presque partout dans* T (*pour la mesure positive* μ), *à valeurs dans un espace de Banach* F (resp. *dans* $\overline{\mathbf{R}}$) *est localement intégrable pour* μ (*ou localement* μ*-intégrable*) *si elle satisfait aux conditions a*), *b*), *c*) *de la prop.* 1. *Si* θ *est une mesure complexe, on dit qu'une fonction* $\mathbf{g}$ *définie localement* θ*-presque partout est localement* θ*-intégrable si elle est localement intégrable pour la mesure positive* $|\theta|$.

Si $\mathbf{g}$ est localement θ-intégrable, toute fonction égale à $\mathbf{g}$ localement presque partout est localement intégrable. Il est clair que la somme de deux fonctions localement intégrables est localement intégrable. Les fonctions à valeurs dans F, *partout définies* et localement intégrables pour θ forment un espace vectoriel noté $\mathscr{L}^1_{\text{loc}}(T, \theta; F)$; lorsque $F = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, la mention de F est souvent omise s'il n'y a pas d'ambiguïté. Cet espace sera toujours muni (sauf mention expresse du contraire) de la topologie définie par les semi-normes $\mathbf{g} \mapsto \int |\mathbf{g}\varphi_K| \, d|\theta|$, où K parcourt l'ensemble des compacts de T. L'espace séparé associé, quotient de $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{T}, \theta; \mathrm{F})$ par le sous-espace $\mathscr{N}^\infty(\mathrm{F})$ des applications nulles localement presque partout, est noté $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{T}, \theta; \mathrm{F})$. Les espaces $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{T}, \theta; \mathrm{F})$ et $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{T}, |\theta|; \mathrm{F})$ sont identiques.

On peut montrer que les espaces vectoriels topologiques qui viennent d'être définis sont *complets* (exerc. 31).

Toute fonction mesurable $\mathbf{g}$ essentiellement bornée dans tout ensemble compact est localement intégrable. Pour tout nombre p tel que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, toute fonction $\mathbf{g} \in \mathscr{L}^p_{\mathrm{F}}$ est localement intégrable; en effet, pour toute fonction $h \in \mathscr{K}(\mathrm{T})$, h appartient à $\mathscr{L}^q$ (où q est l'exposant conjugué de p), donc $\mathbf{g}h$ est intégrable (chap. IV, 2e éd., § 6, n° 4, cor. 4 du th. 2).

Soient F, G, H trois espaces de Banach, et $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ une application bilinéaire continue de $\mathrm{F} \times \mathrm{G}$ dans H. Si $\mathbf{f}$ est localement intégrable et prend ses valeurs dans F, et si $\mathbf{g} \in \mathscr{L}^\infty_{\mathrm{G}}$, $\Phi(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ est localement intégrable (chap. IV, § 6, n° 4, cor. 1 du th. 2).

2. *Mesures définies par des densités numériques*

Soit g une fonction numérique positive définie localement μ-presque partout dans T, localement μ-intégrable; l'ensemble des t tels que $g(t) = +\infty$ est alors localement μ-négligeable, car $g\varphi_{\mathrm{K}}$ est μ-intégrable pour tout compact K (chap. IV, § 2, n° 3, prop. 7). Soit alors g' une fonction localement intégrable positive et *finie*, égale à g localement μ-presque partout; posons $\lambda'_t = g'(t)\varepsilon_t$. L'application $t \mapsto \lambda'_t$ de T dans $\mathscr{M}_+(\mathrm{T})$ est vaguement μ-mesurable et scalairement essentiellement intégrable (ou encore, le couple (I, g'), où I est l'application identique de T, est μ-adapté); l'intégrale $\nu = \int \lambda'_t \, d\mu(t)$ ne dépend pas de la fonction g', localement presque partout égale à g, utilisée dans la définition des mesures λ'_t. Cette mesure ν est définie par la condition

$$(1) \qquad \int f(t)\, d\nu(t) = \int f(t) g(t)\, d\mu(t) \qquad \text{pour } f \in \mathscr{K}(\mathrm{T}).$$

Si maintenant θ est une mesure complexe, et si u est une fonction complexe (ou une fonction à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$) définie localement θ-presque partout et localement intégrable pour θ, on peut écrire

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mu &= g_1 - g_2 + i(g_3 - g_4) \\ \theta &= \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)\cdot \end{aligned}$$

où $\mu_1 = (\mathscr{R}\theta)^+$, $\mu_2 = (\mathscr{R}\theta)^-$, $\mu_3 = (\mathscr{I}\theta)^+$, $\mu_4 = (\mathscr{I}\theta)^-$ (chap. III, 2^e^ éd., § 1), et où g_1, g_2, g_3, g_4 ont des significations analogues; $|\mu|$ étant localement $|\theta|$-intégrable, chacune des fonctions positives g_i ($i = 1, 2, 3, 4$) est localement intégrable pour chaque mesure positive μ_j ($j = 1, 2, 3, 4$), de sorte que l'application

$$f \mapsto \int f(t)u(t)\, d\theta(t)$$

sur $\mathscr{K}(\mathrm{T})$ est une mesure complexe.

Définition 2. — *Soit θ une mesure complexe, et soit u une fonction complexe (ou une fonction à valeurs dans $\bar{\mathbf{R}}$) définie localement θ-presque partout et localement θ-intégrable. On dit que la mesure complexe $f \mapsto \int fu\, d\theta$ sur T est le produit de la mesure θ par la fonction u, ou la mesure de densité u par rapport à θ, et on la note $u \,.\, \theta$.*

Toute mesure complexe, produit d'une mesure positive μ par une fonction localement μ-intégrable, est appelée mesure de base μ.

La relation $\eta = u \,.\, \theta$ s'écrit encore par convention

$$d\eta(t) = u(t)\, d\theta(t).$$

Lorsque u est partout définie et continue, on retrouve la définition donnée au chap. III, 2^e^ éd., § 1, n° 4. Il est clair que si u_1 et u_2 sont localement θ-intégrables, on a $(u_1 + u_2) \,.\, \theta = u_1 \,.\, \theta + u_2 \,.\, \theta$. De même, si θ_1 et θ_2 sont deux mesures sur T, et si u est une fonction localement intégrable pour θ_1 et θ_2, u est localement intégrable pour $\theta_1 + \theta_2$ et on a $u \,.\, (\theta_1 + \theta_2) = u \,.\, \theta_1 + u \,.\, \theta_2$.

Nous nous bornerons désormais au cas des fonctions partout définies; l'extension aux fonctions définies localement presque partout, toujours évidente, est laissée au lecteur.

La proposition suivante permet de ramener en grande partie le cas des mesures complexes à celui des mesures positives:

Proposition 2. — *Soient θ une mesure complexe, u une fonction complexe localement θ-intégrable; on a*

$$|u \,.\, \theta| = |u| \,.\, |\theta| \tag{3}$$

Nous commencerons par un résultat auxiliaire:

Lemme 1. — *Soit θ une mesure complexe, et soit f un élément* *de* $\mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(\mathrm{T}, \theta)$. *On a alors*

$$\langle|\theta|, |f|\rangle = \sup_{c \in \mathscr{K}_1} |\langle\theta, cf\rangle| = \sup_{c \in \mathscr{B}_1} |\langle\theta, cf\rangle| \tag{4}$$

où $\mathscr{K}_1$ (resp. $\mathscr{B}_1$) *désigne l'ensemble des fonctions complexes* c *continues à support compact* (resp. *boréliennes*) *telles que* $|c| \leqslant 1$.

Traitons d'abord le cas où $f \in \mathscr{K}(\mathrm{T}; \mathbf{C})$. On a évidemment $\sup_{c \in \mathscr{K}_1} |\langle\theta, cf\rangle| \leqslant \sup_{c \in \mathscr{B}_1} |\langle\theta, cf\rangle| \leqslant \langle|\theta|, |f|\rangle$ (chap. IV, § 4, n° 2, prop. 2). D'autre part, soit g un élément de $\mathscr{K}(\mathrm{T}; \mathbf{C})$ tel que $|g| \leqslant |f|$; g est limite uniforme d'une suite (g_n) d'éléments de $\mathscr{K}(\mathrm{T}; \mathbf{C})$, dont les supports sont contenus dans l'ouvert U formé des t tels que $f(t) \neq 0$, et l'on peut évidemment supposer que $|g_n| \leqslant |f|$ pour tout n. Posons $c_n(t) = g_n(t)/f(t)$ pour $t \in \mathrm{U}$, $c_n(t) = 0$ pour $t \notin \mathrm{U}$; on a $c_n \in \mathscr{K}_1$, $g = \lim_{n \to \infty} c_n f$, donc $|\langle\theta, g\rangle| = \lim_{n \to \infty} |\langle\theta, c_n f\rangle|$, et finalement $\sup_{|g| \leqslant |f|, g \in \mathscr{K}(\mathrm{T};\mathbf{C})} |\langle\theta, g\rangle| \leqslant \sup_{c \in \mathscr{K}_1} |\langle\theta, cf\rangle|$. On conclut en remarquant que le premier membre de cette inégalité est égal à $\langle|\theta|, |f|\rangle$ (chap. III, 2e éd., § 1, n° 6, formule (12)).

Désignons ensuite par f un élément de $\mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(\theta)$, et montrons que (4) est encore vraie: il suffit de vérifier que les trois membres de cette relation dépendent continûment de f pour la topologie de $\mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(\theta)$, puisqu'ils coïncident sur le sous-espace dense $\mathscr{K}(\mathrm{T}; \mathbf{C})$. Cela résulte aussitôt des inégalités suivantes, où f et f' désignent des éléments de $\mathscr{L}^1_{\mathbf{C}}(\theta)$:

$$|\langle|\theta|, |f|\rangle - \langle|\theta|, |f'|\rangle| \leqslant \langle|\theta|, |f - f'|\rangle = \mathrm{N}_1(f - f')$$

$$|\langle\theta, cf\rangle - \langle\theta, cf'\rangle| \leqslant \langle|\theta|, |c|\,|f - f'|\rangle \leqslant \mathrm{N}_1(f - f')$$

pour tout $c \in \mathscr{B}_1$. Le lemme est donc établi.

Passons à la démonstration de la proposition 2: appliquons le lemme à la fonction uh, où h appartient à $\mathscr{K}_+(\mathrm{T})$. Il vient:

$$\langle|\theta|, |uh|\rangle = \sup_{c \in \mathscr{K}_1} |\langle\theta, cuh\rangle| = \sup_{c \in \mathscr{K}_1} |\langle u \,.\, \theta, ch\rangle| = \langle|u \,.\, \theta|, h\rangle$$

Mais le premier membre est aussi égal à

$$\langle|\theta|, |u|h\rangle = \langle|u| \,.\, |\theta|, h\rangle.$$

Les deux mesures $|u| \,.\, |\theta|$ et $|u \,.\, \theta|$ sont donc égales.

Corollaire. — *Soient* g_1 *et* g_2 *deux fonctions numériques localement* μ*-intégrables; on a*

$$\inf(g_1 \,.\, \mu, g_2 \,.\, \mu) = \inf(g_1, g_2) \,.\, \mu; \quad \sup(g_1 \,.\, \mu, g_2 \,.\, \mu) = \sup(g_1, g_2) \,.\, \mu.$$

En particulier, si g est une fonction numérique localement μ-intégrable, on a

$$(g \cdot \mu)^+ = g^+ \cdot \mu ; \qquad (g \cdot \mu)^- = g^- \cdot \mu.$$

Cela résulte aussitôt de la prop. 2 et des formules (6) du chap. II, § 1, nº 1.

3. *Intégration par rapport à une mesure définie par une densité*

Dans les énoncés de ce numéro, g désigne une fonction numérique positive, partout définie et localement μ-intégrable, θ désigne une mesure complexe, et u une fonction complexe localement θ-intégrable.

Les remarques du nº 2 montrent que les résultats du § 4 sont applicables à la mesure $\nu = g \cdot \mu = \int g(t)\varepsilon_t \, d\mu(t)$ (bien que la mesure $g(t)\varepsilon_t$ ne soit définie que si $g(t) \neq +\infty$). On obtient ainsi l'énoncé suivant :

PROPOSITION 3. — *Pour toute fonction numérique $f \geqslant 0$, définie dans* T, *on a*

$$\int^{\bullet} f \, d\nu = \int^{\bullet} (fg) \, d\mu \tag{5}$$

Cela résulte du th. 1 du § 4, nº 2.

COROLLAIRE 1. — *Pour qu'une fonction* **f**, *à valeurs dans un espace de Banach ou dans* $\bar{\mathbf{R}}$, *soit localement négligeable pour la mesure $u \cdot \theta$, il faut et il suffit que u***f** *soit localement négligeable pour θ.*

Dire que **f** (resp. u**f**) est localement négligeable pour $u \cdot \theta$ (resp. pour θ) équivaut à dire que $|\mathbf{f}|$ (resp. $|u| \cdot |\mathbf{f}|$) est localement négligeable pour $|u \cdot \theta|$ (resp. pour $|\theta|$). On est donc ramené, compte tenu de la prop. 2 du nº 2, au cas où f, u, θ sont positives ; l'énoncé résulte alors aussitôt de la prop. 3.

COROLLAIRE 2. — *Soient u_1 et u_2 deux fonctions complexes localement θ-intégrables. Pour que $u_1 \cdot \theta = u_2 \cdot \theta$, il faut et il suffit que u_1 et u_2 soient égales localement presque partout.*

On se ramène aussitôt à montrer que $u \cdot \theta = 0$ entraîne $u(t) = 0$ localement presque partout ; mais $u \cdot \theta = 0$ signifie que la fonction 1 est localement négligeable pour la mesure $u.\theta$. On applique alors le corollaire 1.

COROLLAIRE 3. — *Soit u une fonction complexe localement intégrable pour la mesure positive μ. Pour que $u.\mu$ soit une mesure positive, il faut et il suffit que $u(t) \geqslant 0$ localement presque partout.*

En effet, $u.\mu$ est positive si et seulement si

$$u.\mu = |u.\mu| = |u|.\mu$$

(prop. 2), et cela équivaut à $u = |u|$ localement presque partout (cor. 2).

PROPOSITION 4. — *Pour qu'une application f de T dans un espace topologique G soit mesurable pour la mesure $u.\theta$, il faut et il suffit que la restriction de f à l'ensemble θ-mesurable S des t tels que $u(t) \neq 0$ soit θ-mesurable.*

Lorsque u et θ sont positives, cela résulte aussitôt de la prop. 3 du § 4, n° 3. Le résultat s'étend alors au cas où u et θ sont complexes grâce à la prop. 2.

COROLLAIRE. — *Soit $\mathbf{f}$ une fonction définie dans T, à valeurs dans un espace de Banach F ou dans $\bar{\mathbf{R}}$. Pour que $\mathbf{f}$ soit $(u.\theta)$-mesurable, il faut et il suffit que $u\mathbf{f}$ soit θ-mesurable.*

En effet, $u\mathbf{f}$ est le prolongement par 0 de $(u\mathbf{f})|\mathrm{S}$ à T.

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathbf{f}$ une fonction définie dans T, à valeurs dans un espace de Banach F ou dans $\bar{\mathbf{R}}$. Pour que $\mathbf{f}$ soit essentiellement intégrable pour la mesure $\eta = u.\theta$, il faut et il suffit que $u\mathbf{f}$ soit essentiellement θ-intégrable, et on a alors*

$$\int \mathbf{f}\, d\eta = \int (u\mathbf{f})\, d\theta. \tag{6}$$

Supposons en outre que u soit continue et que $u(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathrm{T}$; $\mathbf{f}$ est alors intégrable pour la mesure η si et seulement si $u\mathbf{f}$ est intégrable pour θ.

Le cas où u et θ sont positives résulte aussitôt du th. 2 du § 4, n° 4. La première et la dernière assertion de l'énoncé s'en déduisent aussitôt, car $\mathbf{f}$ est essentiellement intégrable (resp. intégrable) par rapport à $\eta = u.\theta$ si et seulement si elle est essentiellement intégrable (resp. intégrable) pour $|\eta| = |u|.|\theta|$. Enfin, supposons que $\mathbf{f}$ soit essentiellement intégrable pour η (donc pour $|\eta|$); utilisons la décomposition (2): $\mathbf{f}$ est essentiellement intégrable pour chacune des mesures $\eta_{ij} = g_i \cdot \mu_j$ ($i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3, 4$), car celles-ci sont majorées par $|\eta|$. On a

$$\int \mathbf{f}\, d\eta_{ij} = \int g_i \mathbf{f}\, d\mu_j.$$

La formule (6) s'en déduit immédiatement.

Corollaire. — *Pour que la mesure $u \cdot \theta$ soit bornée, il faut et il suffit que u soit essentiellement θ-intégrable.*

Exemple. — Soit A une partie de T; pour que φ_A soit localement μ-intégrable, il faut et il suffit que A soit *μ-mesurable.* Supposant cette condition remplie, posons $\nu = \varphi_A \cdot \mu$; pour toute fonction numérique $f \geqslant 0$ définie dans T, on a alors

$$\int^{\bullet} f\, d\nu = \int^{\bullet} f\varphi_A\, d\mu,$$

valeur que l'on note encore $\int_A^{\bullet} f\, d\mu$ (cf. chap. IV, § 5, n° 6). Pour qu'une application g de T dans un espace topologique G soit ν-mesurable, il faut et il suffit que la restriction de g à A soit μ-mesurable. Pour qu'une application $\mathbf{f}$ de T dans un espace de Banach F ou dans $\overline{\mathbf{R}}$ soit essentiellement ν-intégrable, il faut et il suffit que $\mathbf{f}\varphi_A$ soit essentiellement μ-intégrable, et on a

$$\int \mathbf{f}\, d\nu = \int \mathbf{f}\varphi_A\, d\mu,$$

expression qu'on note encore $\int_A \mathbf{f}\, d\mu$. On notera que, si deux applications de T dans G (resp. F, $\overline{\mathbf{R}}$) coïncident dans A, pour que l'une d'elles soit ν-mesurable (resp. essentiellement ν-intégrable) il faut et il suffit que l'autre le soit. Si maintenant g est une application dans G d'une partie quelconque $B \supset A$ de T, on dit que g est *μ-mesurable dans* A si un prolongement quelconque à T de la restriction de g à A est ν-mesurable, ce qui revient à dire que la restriction de g à A est μ-mesurable. On dit qu'une application $\mathbf{f}$ de B dans un espace de Banach F, ou dans $\overline{\mathbf{R}}$, est *essentiellement μ-intégrable dans* A si un prolongement $\bar{\mathbf{f}}$ à T de la restriction de $\mathbf{f}$ à A est essentiellement ν-intégrable; on pose alors

$$\int_A \mathbf{f}\, d\mu = \int_A \bar{\mathbf{f}}\, d\mu = \int \bar{\mathbf{f}}\varphi_A\, d\mu,$$

et on dit que $\int_A \mathbf{f}\, d\mu$ est l'*intégrale de* $\mathbf{f}$ *dans* A (ou *étendue à* A).

Si f est une fonction numérique $\geqslant 0$ définie dans $B \supset A$, on définit de même $\int_A^* f\,d\mu$ et $\int_A^\bullet f\,d\mu$. Enfin, on dit qu'une fonction numérique g définie dans $B \supset A$ est *localement μ-intégrable dans* A si un prolongement $\bar{g}$ à T de la restriction de g à A est localement ν-intégrable: cela équivaut à dire que, pour toute partie compacte K de T, $\bar{g}\varphi_{K \cap A}$ est μ-intégrable.

4. Comportement du produit par rapport aux opérations usuelles

PROPOSITION 5. — *Soit $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de mesures positives sur* T, *filtrante pour la relation $\leqslant$, admettant dans $\mathscr{M}(T)$ une borne supérieure λ. Pour qu'une fonction numérique positive g soit localement λ-intégrable, il faut et il suffit que g soit localement λ_α-intégrable pour tout $\alpha \in A$, et que la famille $(g \,.\, \lambda_\alpha)$ soit majorée dans $\mathscr{M}(T)$; on a alors*

$$g \,.\, \lambda = \sup_{\alpha \in A} g \,.\, \lambda_\alpha .$$

Il est clair que la condition est nécessaire. Inversement, supposons que g soit localement intégrable pour chaque mesure λ_α, et que la famille $(g \,.\, \lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ soit majorée; désignons par λ' sa borne supérieure. La fonction g est alors λ-mesurable (§ 1, n° 4, cor. 2 de la prop. 11); on a de plus, pour toute fonction $h \in \mathscr{K}_+(T)$

$$\int^\bullet (hg)\,d\lambda = \sup_{\alpha \in A} \int^\bullet (hg)\,d\lambda_\alpha = \sup_{\alpha \in A} \int^\bullet h\,d(g \,.\, \lambda_\alpha) = \int^\bullet h\,d\lambda'$$

(§ 1, n° 4, prop. 11). Cela entraîne d'abord que le premier membre est fini quel que soit h, de sorte que g est localement λ-intégrable; on peut donc remplacer le symbole $\int^\bullet$ par $\int$, et la formule s'écrit $\int h\,d(g \,.\, \lambda) = \int h\,d\lambda'$. Il en résulte que $g \,.\, \lambda = \lambda'$, et ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE. — *Supposons que μ soit la somme d'une famille $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ de mesures sur* T. *Pour qu'une fonction numérique positive g définie dans* T *soit localement μ-intégrable, il faut et il suffit que g soit localement μ_α-intégrable pour tout $\alpha \in A$, et que la famille $(g \,.\, \mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ soit sommable. On a dans ce cas*

$$g \,.\, \mu = \sum_{\alpha \in A} g \,.\, \mu_\alpha . \tag{7}$$

Soit $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de fonctions positives μ-mesurables définies dans T. Soit A_α l'ensemble des $t \in T$ tels que $g_\alpha(t) \neq 0$. Nous dirons que la famille (g_α) est *localement dénombrable* si la famille (A_α) est localement dénombrable (chap. IV, 2^e^ éd., § 5, n° 9); cela revient à dire que, pour tout compact K de T, l'ensemble des $\alpha \in A$ tels que $g_\alpha | K$ ne soit pas nulle est dénombrable.

PROPOSITION 6. — *Soit $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille localement dénombrable de fonctions numériques positives localement μ-intégrables définies dans* T. *Pour que la fonction $g = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha$ soit localement μ-intégrable, il faut et il suffit que la famille de mesures $(g_\alpha . \mu)_{\alpha \in A}$ soit sommable, et on a dans ce cas:*

$$g . \mu = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha . \mu. \tag{8}$$

Il est clair que g est μ-mesurable (chap. IV, 2^e^ éd., § 5, n° 10, prop. 16). Pour que g soit localement μ-intégrable, il faut et il suffit par conséquent que $\mu^\bullet(gf)$ soit fini pour tout $f \in \mathscr{K}_+(T)$. Or l'ensemble des $\alpha \in A$ tels que $g_\alpha f \neq 0$ étant dénombrable, on a $\mu^\bullet(gf) = \sum_{\alpha \in A} \mu^\bullet(g_\alpha f)$ (§ 1, n° 1, cor. de la prop. 2). Posons $\nu_\alpha = g_\alpha . \mu$; la condition $\mu^\bullet(gf) < +\infty$ équivaut à la condition $\sum_{\alpha \in A} \nu_\alpha(f) < +\infty$: autrement dit, g est localement μ-intégrable si et seulement si la famille (ν_α) est sommable. Si l'on désigne alors par ν la somme de cette famille, le calcul précédent donne l'égalité $\nu(f) = \mu^\bullet(gf)$, qui équivaut à (8).

COROLLAIRE. — *Soit (g_n) une suite de fonctions numériques localement μ-intégrables, et telle que la suite des mesures $g_n . \mu$ soit croissante. Pour que cette suite soit majorée dans l'espace vectoriel ordonné $\mathscr{M}(T)$ des mesures sur* T, *il faut et il suffit que la fonction $g = \sup g_n$ soit localement μ-intégrable; la borne supérieure dans $\mathscr{M}(T)$ de la suite $(g_n . \mu)$ est alors la mesure $g . \mu$.*

Il suffit d'appliquer la prop. 6 aux fonctions (positives localement presque partout) $g'_n = g_{n+1} - g_n$.

PROPOSITION 7. — *Soit* X *un espace localement compact* dénombrable à l'infini, *et soit $t \mapsto \lambda_t$ une application μ-adéquate de* T *dans $\mathscr{M}_+(X)$. Soit g une fonction numérique positive définie dans* X, *localement intégrable pour la mesure $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$. L'ensemble* *des $t \in \mathrm{T}$ tels que g ne soit pas localement λ_t-intégrable est alors localement négligeable pour μ, l'application $t \mapsto g \,.\, \lambda_t$ (définie localement μ-presque partout) est μ-adéquate, et on a :*

$$g \,.\, \nu = \int (g \,.\, \lambda_t)\, d\mu(t). \tag{9}$$

Soit $(\mathrm{K}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite croissante de compacts de X dont les intérieurs recouvrent X; si η est une mesure positive quelconque sur X, dire que g est localement η-intégrable équivaut à dire que $g\varphi_{\mathrm{K}_n}$ est η-intégrable pour tout n. Or soit H_n l'ensemble des $t \in \mathrm{T}$ tels que $g\varphi_{\mathrm{K}_n}$ ne soit pas λ_t-intégrable, et soit $\mathrm{H} = \bigcup\limits_n \mathrm{H}_n$; H_n étant localement μ-négligeable pour tout n (§ 3, n° 3, th. 1), il en est de même de H, ce qui établit la première assertion de l'énoncé. Quitte à remplacer λ_t par 0 sur H (ce qui ne change pas la mesure ν), on peut supposer que g est localement λ_t-intégrable pour tout $t \in \mathrm{T}$. On a pour toute fonction positive ν-mesurable h définie dans X, d'après la prop. 3, et la prop. 5 du § 3, n° 2,

$$\int^\bullet h\, d(g \,.\, \nu) = \int^\bullet (gh)\, d\nu = \int^\bullet d\mu(t) \int^\bullet (gh)\, d\lambda_t = \int^\bullet d\mu(t) \int^\bullet h\, d(g \,.\, \lambda_t).$$

Cette formule et la prop. 5 du § 3, n° 2 montrent d'abord (en prenant $h \in \mathscr{K}_+(\mathrm{T})$) que l'application $t \mapsto g \,.\, \lambda_t$ est scalairement essentiellement μ-intégrable, et que son intégrale est $g \,.\, \nu$; autrement dit, on a la relation (9). Ensuite, remplaçons μ par une mesure positive $\mu' \leqslant \mu$, et prenons pour h une fonction semi-continue inférieurement positive: il résulte aussitôt de ces relations que $t \mapsto g \,.\, \lambda_t$ est μ-adéquate (§ 3, n° 1, déf. 1).

PROPOSITION 8. — *Soient θ une mesure complexe sur* T, *g_1 une fonction complexe localement θ-intégrable, θ_1 la mesure $g_1 \,.\, \theta$. Pour qu'une fonction complexe g_2 définie dans* T *soit localement θ_1-intégrable, il faut et il suffit que $g_2 g_1$ soit localement θ-intégrable, et on a dans ce cas*

$$g_2 \,.\, \theta_1 = g_2 \,.\, (g_1 \,.\, \theta) = (g_2 g_1) \,.\, \theta \tag{10}$$

(« *formule d'associativité* »).

D'après le cor. de la prop. 4, dire que g_2 est θ_1-mesurable équivaut à dire que $g_2 g_1$ est θ-mesurable. Supposons que cette condition soit satisfaite. On a, pour toute fonction $f \in \mathscr{K}_+(\mathrm{T})$, en vertu des propositions 2 et 3

$$\int^\bullet |g_2| f\, d|\theta_1| = \int^\bullet |g_2| f |g_1| d|\theta| = \int^\bullet |g_2 g_1| f\, d|\theta|.$$

Dire que g_2 est localement θ_1-intégrable équivaut donc à dire que g_2g_1 est localement θ-intégrable. Cette condition étant supposée satisfaite, on a d'après le th. 1

$$\int f\,d(g_2\,.\,\theta_1) = \int fg_2\,d\theta_1 = \int fg_2g_1\,d\theta = \int f\,d(g_2g_1\,.\,\theta)$$

formule équivalente à (10).

5. *Caractérisation des mesures de base μ*

THÉORÈME 2 (Lebesgue–Nikodym). — *Soient μ et ν deux mesures positives sur* T. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) *ν est une mesure de base μ.*

2) *Tout ensemble localement μ-négligeable est localement ν-négligeable.*

3) *Tout compact μ-négligeable est ν-négligeable.*

Il est clair que 1) entraîne 2) (cor. 1 de la prop. 3), et que 2) entraîne 3). Nous allons montrer que 3) entraîne 1). Notons d'abord que, si la condition 3) est remplie, tout ensemble A, *universellement mesurable* et localement μ-négligeable, est localement ν-négligeable; on a en effet $\nu^\bullet(A) = \sup \nu(K)$, K parcourant l'ensemble des compacts contenus dans A (§ 1, n° 3, prop. 10, a) et chap. IV, 2^e^ éd., § 4, n° 6, cor. 2 du th. 4). Nous établirons ensuite deux lemmes.

Lemme 2. — *Soient α une mesure positive bornée sur* T, *β une mesure réelle sur* T *telle que $|\beta| \leqslant M\alpha$, où* M *est une constante positive. Il existe alors une fonction réelle u, α-intégrable, telle que $\beta = u\,.\,\alpha$.*

Soit g un élément de l'espace $\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(T, \alpha)$; g est β-mesurable et on a $\int^\bullet |g|^2\,d|\beta| \leqslant M \int^\bullet |g|^2\,d\alpha < +\infty$. La fonction g appartient donc à $\mathscr{L}^2(T, |\beta|)$, et aussi à $\mathscr{L}^1(T, |\beta|)$ puisque β est bornée. On a d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$|\beta(g)|^2 \leqslant \left(\int |g|d|\beta|\right)^2 \leqslant \left(\int d|\beta|\right)\left(\int |g|^2\,d|\beta|\right) \leqslant M^2\alpha(1)\alpha(|g|^2).$$

L'application $g \mapsto \beta(g)$ est donc une forme linéaire continue sur $\mathscr{L}^2(T, \alpha)$. L'espace séparé associé à $\mathscr{L}^2(T, \alpha)$ étant un espace hilbertien, il existe alors (*Esp. Vect. Top.*, chap. V, § 1, th. 3) une fonction réelle $u \in \mathscr{L}^2(T, \alpha)$, donc appartenant aussi à $\mathscr{L}^1(T, \alpha)$, telle que $\beta(g) = \alpha(ug)$ pour tout $g \in \mathscr{L}^2(T, \alpha)$. En appliquant cette relation pour $g \in \mathscr{K}(T)$, on voit que $\beta = u\,.\,\alpha$.

Lemme 3. — *Supposons que la mesure positive* ν *soit telle que tout compact* μ*-négligeable soit* ν*-négligeable. Soit* $\mathfrak{K}$ *l'ensemble des compacts* K *de* T *possédant la propriété suivante* :

(11) *Il existe une constante* $\mathrm{M} \geqslant 0$ *telle que* $\varphi_{\mathrm{K}} . \nu \leqslant \mathrm{M}\varphi_{\mathrm{K}} . \mu$.

L'ensemble $\mathfrak{K}$ *est alors* μ*-dense dans* T.

Si K satisfait à (11), et si A est une partie borélienne contenue dans K, il résulte aussitôt de la prop. 8 que $\varphi_{\mathrm{A}} . \nu \leqslant \mathrm{M}\varphi_{\mathrm{A}} . \mu$; on en déduit que la réunion de deux éléments K, K′ de $\mathfrak{K}$ appartient à $\mathfrak{K}$ car $\varphi_{\mathrm{K}\cup\mathrm{K}'} = \varphi_{\mathrm{K}} + \varphi_{\mathrm{A}}$, où $\mathrm{A} = \mathrm{K}' \cap \complement\mathrm{K}$. Pour établir le lemme, il reste à prouver que tout compact L tel que $\mu(\mathrm{L}) > 0$ contient un compact $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}$ tel que $\mu(\mathrm{K}) > 0$ (chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, n° 8, prop. 12). Choisissons un nombre $\mathrm{M} > \nu(\mathrm{L})/\mu(\mathrm{L})$, et appliquons le lemme 1 à la mesure positive bornée $\alpha = \varphi_{\mathrm{L}} . (\nu + \mathrm{M}\mu)$ et à la mesure $\beta = \varphi_{\mathrm{L}} . (\nu - \mathrm{M}\mu)$. Quitte à modifier la fonction u telle que $\beta = u . \alpha$ par une fonction qui lui est égale α-presque partout, on peut supposer que u est universellement mesurable (§ 3, n° 5, prop. 7), et nulle hors de L. L'ensemble H des $t \in \mathrm{T}$ tels que $u(t) < 0$, qui est contenu dans L, ne saurait être μ-négligeable, car il serait alors ν-négligeable (d'après la remarque faite au début de la démonstration du th. 2), donc α-négligeable, et on aurait $\beta(\mathrm{L}) > 0$, ce qui contredit le choix de M. Soit K un compact contenu dans H, tel que $\mu(\mathrm{K}) > 0$; montrons que $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}$, ce qui établira le lemme. On a d'après la prop. 8

$$\varphi_{\mathrm{K}} . (\nu - \mathrm{M}\mu) = \varphi_{\mathrm{K}} . \beta = \varphi_{\mathrm{K}} . (u . \alpha) = (\varphi_{\mathrm{K}} u) . \alpha.$$

La fonction $\varphi_{\mathrm{K}} u$ est négative, et on a bien par conséquent $\varphi_{\mathrm{K}} . \nu \leqslant \mathrm{M}\varphi_{\mathrm{K}} . \mu$.

Achevons alors la démonstration du théorème 2. On suppose la condition 3) vérifiée et on définit K comme dans le lemme 3. Soit $(\mathrm{K}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ une famille localement dénombrable d'éléments de $\mathfrak{K}$ deux à deux disjoints, telle que l'ensemble $\mathrm{N} = \mathrm{T} - \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{K}_\alpha$ soit localement μ-négligeable (chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, n° 9, prop. 14); la famille (K_α) étant localement dénombrable, N est universellement mesurable, et donc localement ν-négligeable. Posons $\mu_\alpha = \varphi_{\mathrm{K}_\alpha} . \mu$, $\nu_\alpha = \varphi_{\mathrm{K}_\alpha} . \nu$; les fonctions $\varphi_{\mathrm{K}_\alpha}$ formant une famille localement dénombrable, dont la somme est égale à 1 localement presque partout pour μ et pour ν, la proposition 6 entraîne que $\mu = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \mu_\alpha$, $\nu = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \nu_\alpha$. D'autre part, par définition de $\mathfrak{K}$, il existe pour tout α une constante M_α telle que $\nu_\alpha \leqslant \mathrm{M}_\alpha \mu_\alpha$; le lemme 2 entraîne donc l'existence d'une fonction g_α, que l'on peut supposer nulle hors de K_α et positive (cor. 3 de la prop. 3), telle que $\nu_\alpha = g_\alpha \cdot \mu_\alpha$. On a donc (n° 4, prop. 8)

$$\nu_\alpha = g_\alpha \cdot \mu_\alpha = g_\alpha \cdot (\varphi_{K_\alpha} \cdot \mu) = (g_\alpha \varphi_{K_\alpha}) \cdot \mu = g_\alpha \cdot \mu.$$

Posons $g = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha$; la famille (g_α) étant localement dénombrable, et la famille (ν_α) étant sommable, la proposition 6 entraîne que g est localement μ-intégrable, et que $\nu = g \cdot \mu$, ce qui établit le théorème.

Corollaire 1. — *Soit $\mathscr{N}$ un ensemble de mesures positives de base μ, admettant dans $\mathscr{M}(\mathrm{T})$ une borne supérieure ν; alors ν est une mesure de base μ.*

Le cor. de la prop. 2 permet de se ramener au cas où $\mathscr{N}$ est un ensemble filtrant croissant. On a alors, pour tout ensemble localement μ-négligeable A, d'après la prop. 11 du § 1, n° 4,

$$\nu^\bullet(\mathrm{A}) = \sup_{\lambda \in \mathscr{N}} \lambda^\bullet(\mathrm{A}) = 0.$$

Le théorème 2 entraîne donc que ν est une mesure de base μ.

Corollaire 2. — *Soit ν une mesure réelle sur* T. *Pour que ν appartienne à la bande engendrée par μ dans l'espace complètement réticulé* $\mathscr{M}(\mathrm{T})$ (chap. II, § 1, n° 5), *il faut et il suffit que ν soit une mesure de base μ.*

On se ramène aussitôt, en considérant ν^+ et ν^-, au cas d'une mesure ν *positive* (n° 2, cor. de la prop. 2). Posons alors $\nu_n = \inf(n\mu, \nu)$; ν appartient à la bande engendrée par μ si et seulement si $\nu = \sup_n \nu_n$ (chap. II, 2e éd., § 1, n° 5, cor. de la prop. 6). Or ν_n, majorée par $n\mu$, est une mesure de base μ d'après le th. 2; la relation $\nu = \sup_n \nu_n$ entraîne donc que ν est une mesure de base μ (cor. 1). Inversement, supposons que ν soit une mesure de base μ : $\nu = g \cdot \mu$, où g est localement μ-intégrable et positive. On a alors $\nu_n = \inf(g, n) \cdot \mu$ (cor. de la prop. 2), et il résulte aussitôt du théorème de Lebesgue (chap. IV, § 4, n° 3, prop. 4) que $\nu = \sup_n \nu_n$.

Corollaire 3. — *Soit θ une mesure complexe; il existe une fonction universellement mesurable v, telle que $|v| = 1$, et qu'on ait $\theta = v \cdot |\theta|$, $|\theta| = \bar{v} \cdot \theta$.*

Posons en effet $\theta = \theta_1 - \theta_2 + i(\theta_3 - \theta_4)$, où $\theta_1 = (\mathscr{R}\theta)^+$, $\theta_2 = (\mathscr{R}\theta)^-$, $\theta_3 = (\mathscr{I}\theta)^+$, $\theta_4 = (\mathscr{I}\theta^-)$; les mesures positives θ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, étant majorées par $|\theta|$ (chap. III, 2e éd., § 1, n° 6, formule (17)), sont des mesures de base $|\theta|$ d'après le théorème 2. Il en résulte qu'il existe une fonction localement $|\theta|$-intégrable v telle que $\theta = v \, . \, |\theta|$. La proposition 2 donne alors la relation $|\theta| = |v| \, . \, |\theta|$, ce qui entraîne que $|v| = 1$ localement $|\theta|$-presque partout (cor. 2 de la prop. 3). On a enfin, d'après la prop. 8, $\bar{v} \, . \, \theta = (v\bar{v}) \, . \, |\theta| = |\theta|$. La fonction v n'étant définie qu'à une fonction localement $|\theta|$-négligeable près, on peut supposer que v est universellement mesurable (§ 3, n° 4, prop. 7) et que $|v| = 1$ partout.

Remarques — 1) Supposons que λ soit une mesure positive, que v soit une fonction λ-mesurable telle que $|v| = 1$ localement λ-presque partout (ce qui entraîne que v est localement λ-intégrable), et qu'on ait $\theta = v \, . \, \lambda$. La prop. 2 montre aussitôt que $\lambda = |\theta|$; autrement dit, la propriété de l'énoncé précédent caractérise la mesure positive $|\theta|$.

2) Si $|\theta| \leqslant a\mu$, où μ est une mesure positive et a un nombre $\geqslant 0$, θ est une mesure de base μ.

COROLLAIRE 4. — *Soient ρ et θ deux mesures complexes. Pour qu'il existe une fonction u, localement θ-intégrable, telle que $\rho = u \, . \, \theta$, il faut et il suffit que tout compact θ-négligeable soit ρ-négligeable.*

Cette condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons que tout compact θ-négligeable soit ρ-négligeable; le théorème 2 entraîne l'existence d'une fonction localement $|\theta|$-intégrable g telle que $|\rho| = g \, . \, |\theta|$. Le cor. 3 entraîne d'autre part l'existence d'une fonction v_1 (resp. v_2), de valeur absolue 1, mesurable pour la mesure $|\rho|$ (resp. θ), telle que $\rho = v_1 \, . \, |\rho|$ (resp. $|\theta| = \bar{v}_2 \, . \, \theta$). D'après la prop. 8, on a alors $\rho = u \, . \, \theta$, où $u = v_1 g \bar{v}_2$.

COROLLAIRE 5. — *Soient μ et ν deux mesures positives sur* T. *Les conditions* 1), 2), 3) *du th.* 2 *sont encore équivalentes aux suivantes :*

4) *Pour toute fonction numérique $f \geqslant 0$ ν-intégrable et pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les relations $0 \leqslant h \leqslant f$ et $\int^* h \, d\mu \leqslant \delta$ entraînent $\int^* h \, d\nu < \varepsilon$.*

5) *Pour toute fonction $g \in \mathscr{K}_+(\mathrm{T})$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute $h \in \mathscr{K}_+(\mathrm{T})$ majorée par g et vérifiant $\int h \, d\mu \leqslant \delta$, on ait $\int h \, d\nu \leqslant \varepsilon$.*

6) *Pour tout ensemble compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{T}$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les relations $\mathrm{A} \subset \mathrm{K}$ et $\mu^*(\mathrm{A}) \leqslant \delta$ entraînent $\nu^*(\mathrm{A}) \leqslant \varepsilon$.*

Les implications 4) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 3) sont évidentes.

Supposons qu'il existe une fonction finie $k \geqslant 0$, universellement mesurable, localement μ-intégrable, telle que $\nu = k \cdot \mu$, et montrons que la condition 4) est remplie. Soient f une fonction $\geqslant 0$, ν-intégrable, et $\varepsilon > 0$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit A_n l'ensemble des $t \in T$ tels que $k(t) \geqslant n$. Les fonctions $f\varphi_{A_n}$ tendent simplement vers 0 en décroissant et sont majorées par f, donc il existe N tel que $\int f\varphi_{A_N}\,d\nu \leqslant \varepsilon/2$ (chap. IV, § 4, n° 3, prop. 4). Si h est une fonction sur T vérifiant $0 \leqslant h \leqslant f$ et $\int^* h\,d\mu \leqslant \varepsilon/2N$, on a

$$\begin{aligned}\nu^*(h) &\leqslant \nu^*(h\varphi_{A_N}) + \nu^*(h(1-\varphi_{A_N}))\\ &\leqslant \nu^*(f\varphi_{A_N}) + \mu^*(h(1-\varphi_{A_N})k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + N\mu^*(h) \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que les conditions 4) et 6) sont équivalentes aux conditions du th. 2.

Il est clair que 4) entraîne 5). Enfin, si la condition 5) est remplie, ν appartient à la bande engendrée par μ (chap. II, § 2, n° 2, prop. 4), donc est de base μ (cor. 2).

Scholie. — Pour tout $\dot{f} \in L^1_{loc}(T, \mu; \mathbf{B})$, posons $\varphi(\dot{f}) = f \cdot \mu$, où $f \in \dot{f}$; l'application φ est linéaire, croissante, injective (cor. 2 de la prop. 3), et admet pour image dans $\mathscr{M}(T)$ la bande B engendrée par μ (cor. 2 du th. 2). L'application φ permet donc d'*identifier* $L^1_{loc}(T, \mu; \mathbf{R})$ à un espace de mesures réelles sur T; comme tous les espaces $L^p_{\mathbf{R}}(T, \mu)$ sont des sous-espaces de $L^1_{loc}(T, \mu; \mathbf{R})$, ils peuvent eux aussi être identifiés à des sous-espaces de $\mathscr{M}(T)$. On a des considérations analogues pour les fonctions et mesures à valeurs complexes. On notera que l'application φ envisagée ci-dessus est un isomorphisme des structures d'espace vectoriel ordonné de L^1_{loc} et de B, mais n'est évidemment pas un isomorphisme pour les structures d'*espace vectoriel topologique* de ces espaces.

Comme toute bande dans un espace complètement réticulé est elle-même un espace complètement réticulé (chap. II, § 1, n° 5), on voit que l'espace L^1_{loc} est *complètement réticulé*; mais il convient de rappeler que la borne supérieure dans L^1_{loc} d'une famille non dénombrable $(\dot{f}_\alpha)$ de classes d'équivalence n'est pas nécessairement identique à la classe de l'enveloppe supérieure des fonctions f_α. Toutefois, nous avons vu que, pour une *suite croissante* (f_n) de fonctions localement μ-intégrables, dont l'enveloppe supérieure f

est localement μ-intégrable, $f \,.\, \mu$ est la borne supérieure de la suite de mesures $(f_n \,.\, \mu)$ dans $\mathscr{M}(\mathrm{T})$ (cor. de la prop. 6).

Voici une conséquence intéressante du corollaire 3 du th. 2:

PROPOSITION 9.— *Soit θ une mesure complexe bornée; pour que θ soit une mesure positive, il faut et il suffit qu'on ait $\|\theta\| = \theta(1)$.*

Cette condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons qu'on ait $\|\theta\| = \int d\theta$, et désignons par v une fonction $|\theta|$-mesurable, de valeur absolue 1, telle que $\theta = v \,.\, |\theta|$. Comme on a $\|\theta\| = \int d|\theta|$ (chap. III, 2ᵉ éd., § 1, n° 8, cor. 2 de la prop. 10), et $\int d\theta = \int v \,.\, d|\theta|$ (th. 1), l'hypothèse entraîne que $\int (1 - v)\, d|\theta| = 0$, et donc aussi que $\int \mathscr{R}(1 - v)\, d|\theta| = 0$. La fonction $\mathscr{R}(1 - v)$, étant positive, est donc nulle presque partout, ce qui entraîne que $v = 1$ presque partout, et achève la démonstration.

6. Mesures équivalentes

PROPOSITION 10.— *Soient μ et ν deux mesures positives sur* T. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *Les ensembles localement négligeables sont les mêmes pour μ et ν.*

b) *Les bandes engendrées par μ et ν dans $\mathscr{M}(\mathrm{T})$ sont identiques.*

c) *On a $\nu = g \,.\, \mu$, où g est localement μ-intégrable et $g(t) > 0$ localement presque partout pour μ.*

Les conditions a) et b) sont équivalentes en vertu du cor. du th. 2 du n° 5. Si elles sont remplies, on a $\nu = g \,.\, \mu$ et $\mu = h \,.\, \nu$, où g (resp. h) est positive et localement intégrable pour μ (resp. ν). Donc (n° 4, prop. 8) hg est localement μ-intégrable, et on a $\mu = (hg) \,.\, \mu$. Il en résulte (n° 3, cor. 2 de la prop. 3) que hg est égale à 1 localement presque partout pour μ, de sorte que $g(t) > 0$ et $h(t) = 1/g(t)$ localement presque partout pour μ. Réciproquement, supposons que $\nu = g \,.\, \mu$, avec $g(t) > 0$ localement presque partout pour μ; comme $(1/g)g$ est définie localement presque partout et est localement μ-intégrable, $1/g$ est localement ν-intégrable et $(1/g) \,.\, \nu = \mu$ (n° 4, prop. 8).

DÉFINITION 3.— *Sur un espace localement compact* T, *on dit que deux mesures complexes θ, θ' sont équivalentes si les mesures $|\theta|$ et $|\theta'|$ satisfont aux conditions* a), b), c) *de la prop.* 10.

Pour que θ et θ' soient équivalentes, il faut et il suffit donc que $|\theta|$ et $|\theta'|$ le soient.

Remarque. — Si μ et ν sont deux mesures positives équivalentes, les fonctions mesurables définies dans T, à valeurs dans un espace topologique quelconque G, sont *les mêmes* pour μ et ν, comme il résulte aussitôt de la prop. 4 du n° 3.

PROPOSITION 11. — *Soit μ une mesure positive sur* T. *Si* T *est dénombrable à l'infini, il existe une fonction continue h telle que $h(t) > 0$ pour tout $t \in$ T et que la mesure $\nu = h \cdot \mu$* (équivalente à μ) *soit bornée.*

En effet, soit (K_n) une suite d'ensembles compacts formant un recouvrement de T, et pour tout n, soit f_n une fonction de $\mathcal{K}(T)$ telle que $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ et $f_n(t) = 1$ dans K_n (chap. III, 2[e] éd., § 1, n° 2, lemme 1). Soit (a_n) une suite de nombres > 0 telle que $\sum_n a_n < +\infty$; la série $h = \sum_n a_n f_n$ est alors normalement convergente dans T, et h est par suite une fonction continue dans T, telle que $h(t) > 0$ pour tout $t \in$ T, par construction. En posant $\nu = h \cdot \mu$, on a alors (prop. 3 et chap. IV, § 1, n° 3, prop. 13)

$$\nu^*(1) = \int^* h \, d\mu \leqslant \sum_n a_n \int f_n \, d\mu.$$

En prenant par exemple $a_n = 2^{-n}(\int f_n \, d\mu)^{-1}$ lorsque $\int f_n \, d\mu > 1$, $a_n = 2^{-n}$ dans le cas contraire, on a $\sum_n a_n < +\infty$ et $\nu^*(1) < +\infty$, ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 12. — *Soit (μ_n) une suite de mesures positives bornées sur* T; *il existe une mesure positive bornée μ sur* T *telle que la relation $\mu^*(N) = 0$ soit équivalente à « quel que soit n, $\mu_n^*(N) = 0$ »; chacune des mesures μ_n est de base μ. En outre, si μ' est une seconde mesure positive sur* T *ayant cette propriété, μ et μ' sont équivalentes.*

La dernière partie de l'énoncé résulte aussitôt de la déf. 3. Pour démontrer l'existence de μ, on peut se borner au cas où $\mu_n \neq 0$ pour tout n; la famille de mesures $\mu_n / 2^n \|\mu_n\|$ est alors sommable dans $\mathcal{M}(T)$, et sa somme μ est telle que $\|\mu\| \leqslant 1$. En outre, comme $\mu_n \leqslant 2^n \|\mu_n\| \cdot \mu$, la relation $\mu(N) = 0$ entraîne $\mu_n(N) = 0$ pour tout n; inversement, si N est un ensemble négligeable pour toutes les μ_n, il est localement négligeable pour μ (§ 2, n° 2, cor. 2 de la prop. 1), et par suite μ-négligeable puisque μ est bornée (§ 1, n° 2, cor. 2 de la prop. 7).

7. *Mesures étrangères*

Étant données deux mesures réelles ρ, σ sur T, rappelons que l'on dit que ρ et σ sont *étrangères* si l'on a $\inf(|\rho|, |\sigma|) = 0$ dans $\mathscr{M}(T)$ (chap. II, § 1, n° 1). On sait que les mesures réelles étrangères à une mesure donnée forment une bande (chap. II, § 1, n° 5, th. 1). Cette définition s'étend aussitôt au cas des mesures complexes.

DÉFINITION 4. — *On dit qu'une mesure complexe θ sur* T *est concentrée sur une partie* M *de* T, *ou que* M *porte θ, si* $\complement$M *est localement négligeable pour θ.*

L'ensemble M porte θ si et seulement s'il porte $|\theta|$. Il est équivalent de dire que M porte θ, ou que M est θ-mesurable et $\theta = \varphi_M . \theta$. Si θ est concentrée sur M, toute mesure de base $|\theta|$ est concentrée sur M.

PROPOSITION 13. — *Pour que deux mesures complexes ρ et σ sur* T *soient étrangères, il faut et il suffit qu'il existe dans* T *deux ensembles* R *et* S *sans point commun, tels que ρ soit concentrée sur* R *et σ sur* S ; R *et* S *peuvent être supposés universellement mesurables.*

Posons $\mu = |\rho|$, $\nu = |\sigma|$, $\lambda = \mu + \nu$; μ et ν étant majorées par λ, il existe deux fonctions localement λ-intégrables u et v (que l'on peut supposer universellement mesurables (§ 3, n° 4, prop. 7)) telles que $\mu = u . \lambda$, $\nu = v . \lambda$. On a alors

$$\inf(|\rho|, |\sigma|) = \inf(\mu, \nu) = \inf(u, v) . \lambda$$

(n° 2, cor. de la prop. 2). Soit A (resp. B) l'ensemble des $t \in T$ tels que $u(t) > 0$ et $v(t) = 0$ (resp. $u(t) = 0$ et $v(t) > 0$). Si ρ et σ sont étrangères, on a $\inf(u, v) = 0$ localement λ-presque partout (n° 3, cor. 2 de la prop. 3), de sorte que les ensembles universellement mesurables disjoints A et B portent respectivement μ et ν. Inversement, supposons que μ et ν soient portées respectivement par des ensembles disjoints R et S ; φ_R est mesurable pour la mesure $\mu = u . \lambda$, et $\mu = \varphi_R . \mu$. D'après la prop. 8 du n° 4, la fonction $u' = u\varphi_R$ est λ-mesurable, et $\mu = u' . \lambda$. De même, si $v' = v\varphi_S$, on a $\nu = v' . \lambda$; on conclut en remarquant que $\inf(u', v') = 0$ (n° 2, cor de la prop. 2).

COROLLAIRE 1. — *Pour toute mesure réelle ν sur* T, *il existe deux ensembles disjoints* M, N *portant respectivement ν^+ et ν^-.*

☡ On aura soin de ne pas confondre la notion de *support* d'une mesure ν, et celle d'ensemble où ν est concentrée. Le support S de

ν est le plus petit ensemble *fermé* portant ν (chap. III, 2^e éd., § 2, n° 2, prop. 2 et chap. IV, § 2, n° 2, prop. 5). Mais il peut exister des parties de S, distinctes de S et portant ν. Plus précisément, on peut avoir $\inf(\mu, \nu) = 0$ pour deux mesures positives μ et ν de même support (exerc. 5).

On notera aussi que l'intersection des ensembles portant ν est l'ensemble des points $t \in T$ tels que $|\nu|(\{t\}) > 0$, et peut être vide (par exemple dans le cas de la mesure de Lebesgue); il n'y a donc pas en général de plus petit ensemble portant ν.

COROLLAIRE 2. — *Soient ρ et σ deux mesures complexes étrangères, et soient ρ' et σ' deux mesures complexes admettant des densités par rapport à ρ et à σ respectivement; ρ' et σ' sont alors étrangères.*

COROLLAIRE 3. — *Soient ρ et σ deux mesures complexes étrangères; on a alors $|\rho + \sigma| = |\rho| + |\sigma|$.*

Désignons en effet par v (resp. w) une fonction universellement mesurable de valeur absolue 1 telle que $\rho = v \, . \, |\rho|$ (resp. $\sigma = w \, . \, |\sigma|$) (cor. 3 du th. 2), par A un ensemble universellement mesurable portant ρ, tel que $B = \complement A$ porte σ (prop. 13); on a alors aussi $\rho + \sigma = (v\varphi_A + w\varphi_B) \, . \, (|\rho| + |\sigma|)$. La fonction $v\varphi_A + w\varphi_B$ ayant une valeur absolue égale à 1, le corollaire résulte de la prop. 2.

THÉORÈME 3 (Lebesgue). — *Toute mesure complexe θ sur* T *peut s'écrire d'une seule manière sous la forme $\theta = g \, . \, \mu + \theta'$, où g est localement μ-intégrable, et θ' est une mesure étrangère à μ. On a alors $|\theta| = |g| \, . \, \mu + |\theta'|$.*

Lorsque θ est positive, ceci résulte aussitôt du th. de F. Riesz (chap. II, § 1, n° 5, th. 1) appliqué à l'espace complètement réticulé $\mathscr{M}(T)$ des mesures réelles sur T, et à la bande engendrée par μ dans cet espace, compte tenu du n° 5, cor. 2 du th. 2; de plus, θ' et $g \, . \, \mu$ sont alors positives, ce qui entraîne que g est positive localement μ-presque partout (cor. 3 de la prop. 3). Pour traiter le cas où θ n'est pas positive, posons $\nu = |\theta|$, $\nu = f \, . \, \mu + \nu'$ (où f est positive, et où ν' et μ sont étrangères), et $\theta = v \, . \, \nu$, où v est une fonction universellement mesurable de valeur absolue 1 (cor. 3 du th. 2). Nous avons alors (prop. 8) $\theta = g \, . \, \mu + \theta'$, avec $g = vf$ (de sorte que $|g| = f$) et $\theta' = v \, . \, \nu'$ (de sorte que $|\theta'| = \nu'$ d'après la prop. 2); les mesures θ' et μ sont étrangères d'après le cor. 2 de la prop. 12. Il reste seulement à établir l'unicité de la décomposition. Supposons donc que $\theta = g.\mu + \theta' = g_1.\mu + \theta'_1$, où θ_1 et θ'_1 sont étrangères à μ; $|\theta' - \theta'_1|$ est majorée par $|\theta'| + |\theta'_1|$, donc $\theta' - \theta'_1$ est étrangère à μ, et par conséquent aussi à $(g_1 - g).\mu$. La relation $\theta' - \theta'_1 = (g_1 - g).\mu$ entraîne alors que les deux membres sont nuls, ce qui prouve l'unicité.

Rappelons (th. 2, *Scholie*) que l'espace $L^1_{loc}(T, \mu; \mathbf{C})$ peut être identifié (au moyen de l'application $\dot{g} \mapsto g.\mu$) à un sous-espace de $\mathscr{M}_{\mathbf{C}}(T)$. Avec cette convention, le théorème 3 prend la forme suivante:

Corollaire. — *Il existe un projecteur p de l'espace $\mathscr{M}_{\mathbf{C}}(T)$ sur l'espace $L^1_{loc}(T, \mu; \mathbf{C})$, dont le noyau $\overset{-1}{p}(0)$ est l'ensemble des mesures complexes étrangères à μ, tel que*

$$|\theta| = |p(\theta)| + |\theta - p(\theta)|, \qquad p(|\theta|) = |p(\theta)|$$

pour toute mesure complexe θ.

Si l'on restreint p à l'ensemble des mesures bornées, on obtient un projecteur p^1 de l'espace $\mathscr{M}^1_{\mathbf{C}}(T)$ sur l'espace $L^1_{\mathbf{C}}(T, \mu)$; la relation $\|\theta\| = |\theta|(1)$ entraîne que $\|\theta\| = \|p^1(\theta)\| + \|\theta - p^1(\theta)\|$ pour toute mesure complexe bornée θ.

8. Applications: I. Dualité des espaces L^p

Nous ne traiterons ici que le cas des espaces L^p réels.

Rappelons que deux nombres p, q tels que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, $1/p + 1/q = 1$, sont appelés des *exposants conjugués* (chap. IV, § 6, n° 4). Toute fonction $g \in \mathscr{L}^q$ définit une forme linéaire continue θ_g sur L^p, qu'on obtient par passage au quotient à partir de la forme linéaire $f \mapsto \int fg\, d\mu$ sur $\mathscr{L}^p$, et on a $N_q(g) = \|\theta_g\|$ (chap. IV, 2^e^ éd., § 6, n° 4, cor. de la prop. 3). Par passage au quotient, on déduit donc de l'application $g \mapsto \theta_g$ une application linéaire isométrique φ de L^q dans le dual $(L^p)'$ de L^p. Nous allons montrer que, pour $1 \leqslant p < +\infty$, φ applique L^q *sur* $(L^p)'$, de sorte que nous pourrons désormais identifier l'espace de Banach L^q à l'espace de Banach $(L^p)'$ par l'isomorphisme φ. En d'autres termes:

Théorème 4. — *Soient p et q deux exposants conjugués tels que $1 \leqslant p < +\infty$. Toute forme linéaire continue sur $\mathscr{L}^p(T, \mu)$ est du type $f \mapsto \int fg\, d\mu$, où g est une fonction de $\mathscr{L}^q(T, \mu)$ dont la classe dans L^q est bien déterminée.*

En effet, soit θ une forme linéaire continue sur $\mathscr{L}^p$; il existe donc un nombre $a \geqslant 0$ tel que $|\theta(f)| \leqslant a \,.\, \mathrm{N}_p(f)$ pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^p$. Considérons la restriction de θ à l'espace $\mathscr{K}(\mathrm{T})$ des fonctions continues à support compact: pour toute partie compacte K de T et toute fonction $f \in \mathscr{K}(\mathrm{T}, \mathrm{K})$ (espace des fonctions continues à support contenu dans K), on a $\mathrm{N}_p(f) \leqslant (\mu(\mathrm{K}))^{1/p} \|f\|$; donc la topologie induite sur $\mathscr{K}(\mathrm{T}, \mathrm{K})$ par celle de $\mathscr{L}^p$ est moins fine que la topologie de la convergence uniforme, et la restriction de θ à chaque $\mathscr{K}(\mathrm{T}, \mathrm{K})$ est par suite continue pour cette dernière topologie. Cela signifie que la restriction de θ à $\mathscr{K}(\mathrm{T})$ est une *mesure réelle* ν (chap. III, 2e éd., § 1, n° 3, déf. 2).

Montrons que $|\nu|(|f|) \leqslant a \,.\, \mathrm{N}_p(f)$ pour toute fonction f de $\mathscr{K}(\mathrm{T})$. Il suffit de prouver cette formule pour $f \geqslant 0$. Or, pour toute fonction ψ de $\mathscr{K}(\mathrm{T})$ telle que $|\psi| \leqslant f$, on a

$$|\nu(\psi)| \leqslant a \,.\, \mathrm{N}_p(\psi) \leqslant a \,.\, \mathrm{N}_p(f);$$

notre assertion résulte de l'expression de la valeur absolue d'une mesure donnée au chap. III, 2e éd., § 1, n° 6, formule (12). La relation $|\nu|(|f|) \leqslant a(\mu(|f|^p))^{1/p}$ s'étend aussitôt au cas où f est la fonction caractéristique d'un compact, grâce à un passage à l'enveloppe inférieure, et entraîne alors que tout compact μ-négligeable est ν-négligeable, de sorte que ν est une mesure *de base* μ (n° 5, th. 2).

Il existe donc une fonction positive localement μ-intégrable h_1 telle que $|\nu|(f) = \int f h_1 \, d\mu$ pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(\mathrm{T})$. Montrons que h_1 est localement presque partout égale à une fonction de $\mathscr{L}^q$. Si la fonction $f \geqslant 0$ de $\mathscr{K}(\mathrm{T})$ est telle que $\mathrm{N}_p(f) \leqslant 1$, on a $\int f h_1 \, d\mu = |\nu|(f) \leqslant a$. Pour toute application continue f_0 de T dans $(0, 1)$, à support compact, on a donc $\sup \int (f_0 h_1) f \, d\mu \leqslant a$ lorsque f parcourt l'ensemble des fonctions $\geqslant 0$ de $\mathscr{K}(\mathrm{T})$ telles que $\mathrm{N}_p(f) \leqslant 1$. D'après la formule (11) du chap. IV, § 6, n° 4, on en déduit que $\mathrm{N}_q(f_0 h_1) \leqslant a$. De là résulte que $\sup\limits_{\mathrm{K}} \mathrm{N}_q(\varphi_{\mathrm{K}} h_1) \leqslant a$ lorsque K parcourt l'ensemble des parties compactes de T, et cela prouve notre assertion (§ 1, prop. 9).

Soit v une fonction (réelle) de valeur absolue 1 universellement mesurable, telle que $\nu = v \,.\, |\nu|$ (cor. 3 du th. 2), et soit $g = v h_1$; on a $\nu = g \,.\, \mu$, et g appartient à $\mathscr{L}^q$. On a, pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(\mathrm{T}), \theta(f) = \nu(f) = \int f g \, d\mu$. Autrement dit, les formes linéaires continues θ et θ_g coïncident dans $\mathscr{K}(\mathrm{T})$; elles sont donc égales dans $\mathscr{L}^p$, puisque $\mathscr{K}(\mathrm{T})$ est partout dense dans $\mathscr{L}^p$, et cela achève la démonstration.

COROLLAIRE. — *Pour tout nombre p tel que $1 < p < \infty$, l'espace de Banach* $\mathrm{L}^p(\mathrm{T}, \mu)$ *est réflexif.*

En général, le dual de L^∞ n'est pas isomorphe à L^1, et par suite L^1 et L^∞ ne sont pas réflexifs (exerc. 10). Nous allons caractériser les formes linéaires continues sur L^∞ qui proviennent, par passage au quotient, d'une forme linéaire $f \mapsto \int fg \, d\mu$ sur $\mathscr{L}^\infty$, où $g \in \mathscr{L}^1$.

L'espace vectoriel ordonné $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{T}, \mu)$, qui est un sous-espace de $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{T}, \mu)$, est *complètement réticulé*; en effet, si (f_α) est une famille de fonctions positives de $\mathscr{L}^\infty$, dont l'ensemble des classes $(\dot{f}_\alpha)$ est majoré dans L^∞, il existe $a \geqslant 0$ tel que $\mathrm{N}_\infty(f_\alpha) \leqslant a$ pour tout α. Comme $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{T}, \mu)$ est complètement réticulé, la famille $(\dot{f}_\alpha)$ admet une borne supérieure $\dot{h}$ dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{T}, \mu)$; mais comme $\dot{a} \geqslant \dot{f}_\alpha$ pour tout α, on a $\dot{h} \leqslant \dot{a}$, et par suite $\mathrm{N}_\infty(h) \leqslant a$, d'où notre assertion.

PROPOSITION 14. — *Pour qu'une forme linéaire positive θ sur $\mathscr{L}^\infty$ soit du type $f \mapsto \int fg \, d\mu$, où $g \in \mathscr{L}^1$, il faut et il suffit que, pour toute famille filtrante croissante $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de fonctions positives de $\mathscr{L}^\infty$, dont l'ensemble des classes $(\dot{f}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ est majoré dans* L^∞ *et admet $\dot{h}$ comme borne supérieure dans cet espace, on ait*

$$\dot{\theta}(\dot{h}) = \sup_{\alpha \in \mathrm{A}} \dot{\theta}(\dot{f}_\alpha).$$

Montrons d'abord que la condition est nécessaire. En effet, la mesure $h \,.\, \mu$ est la borne supérieure dans $\mathscr{M}(\mathrm{T})$ de l'ensemble des mesures $f_\alpha \,.\, \mu$ (n° 5, *Scholie*); donc (chap. II, § 2, n° 2), pour toute fonction $\varphi \geqslant 0$ de $\mathscr{K}(\mathrm{T})$, on a $\int h\varphi \, d\mu = \sup_{\alpha \in \mathrm{A}} \int f_\alpha \varphi \, d\mu$. Si maintenant a est un nombre $\geqslant 0$ tel que $\mathrm{N}_\infty(f_\alpha) \leqslant a$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$ (ce qui entraîne $\mathrm{N}_\infty(h) \leqslant a$), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathscr{K}(\mathrm{T})$ telle que $\varphi \geqslant 0$ et $\mathrm{N}_1(g - \varphi) \leqslant \varepsilon$, d'où l'on tire $\int f_\alpha |g - \varphi| \, d\mu \leqslant a\varepsilon$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, et $\int h|g - \varphi| \, d\mu \leqslant a\varepsilon$. Comme $\sup_{\alpha \in \mathrm{A}} \int f_\alpha g \, d\mu \leqslant \int hg \, d\mu$, cela prouve que les deux membres de cette inégalité sont égaux.

Pour établir que la condition est suffisante, nous utiliserons le lemme suivant:

Lemme 4. — 1° *Soit f une fonction positive semi-continue inférieurement et bornée dans* T. *Alors sa classe $\dot{f}$ dans* L^∞ *est la borne supérieure de l'ensemble des classes $\dot{\varphi}$, où φ parcourt l'ensemble des fonctions de* $\mathscr{K}(T)$ *telles que* $0 \leqslant \varphi \leqslant f$.

2° *Soit f une fonction positive mesurable et bornée dans* T. *Alors sa classe $\dot{f}$ dans* L^∞ *est la borne inférieure de l'ensemble des classes $\dot{\psi}$, où ψ parcourt l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement et bornées dans* T, *qui sont* $\geqslant f$.

1° Soit f' une fonction de $\mathscr{L}^\infty$ telle que $\dot{f}'$ soit la borne supérieure dans L^∞ de l'ensemble des classes $\dot{\varphi}$ des fonctions φ de $\mathscr{K}(T)$ telles que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$; on a évidemment $\dot{f}' \leqslant \dot{f}$. Soit U une partie ouverte relativement compacte de T; pour toute fonction h de $\mathscr{K}(T)$ telle que $0 \leqslant h \leqslant f\varphi_U$, on a, par définition, $h(t) \leqslant f'(t)$ localement presque partout, donc $h(t) \leqslant f'(t)\varphi_U(t)$ presque partout; on en conclut que $\int h\,d\mu \leqslant \int f'\varphi_U\,d\mu$. Mais puisque $f\varphi_U$ est semi-continue inférieurement, $\int f\varphi_U\,d\mu = \sup \int h\,d\mu$, où h parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathscr{K}(T)$ telles que $0 \leqslant h \leqslant f\varphi_U$ (chap. IV, § 1, n° 1, déf. 1); on a donc

$$\int f\varphi_U\,d\mu \leqslant \int f'\varphi_U\,d\mu,$$

et comme $f'\varphi_U \leqslant f\varphi_U$ presque partout, on a nécessairement $f\varphi_U = f'\varphi_U$ presque partout, d'où $f = f'$ localement presque partout.

2° Soit f' une fonction de $\mathscr{L}^\infty$ telle que $\dot{f}'$ soit la borne inférieure dans L^∞ de l'ensemble des classes $\dot{\psi}$ des fonctions ψ semi-continues inférieurement, bornées et $\geqslant f$; on a $\dot{f}' \geqslant \dot{f}$. Soit K une partie compacte de T; pour toute fonction h, semi-continue inférieurement, bornée et majorant $f\varphi_K$, soit $\bar{h}$ la fonction égale à h dans K, à $\|f\| + \|h\|$ dans $T - K$. Alors $\bar{h}$ est semi-continue inférieurement et $\geqslant f$, donc par définition $\bar{h}(t) \geqslant f'(t)$ localement presque partout; on en conclut que $h(t) \geqslant f'(t)\varphi_K(t)$ presque partout, d'où $\int h\,d\mu \geqslant \int f'\varphi_K\,d\mu$. Mais $\int f\varphi_K\,d\mu = \inf \int h\,d\mu$, où h parcourt l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement, bornées et majorant $f\varphi_K$ (chap. IV, § 1, n° 3, déf. 3); on a donc

$$\int f\varphi_K\,d\mu \geqslant \int f'\varphi_K\,d\mu,$$

et comme $f\varphi_K \leqslant f'\varphi_K$ presque partout, on a nécessairement $f\varphi_K = f'\varphi_K$ presque partout, d'où $f = f'$ localement presque partout.

Ce lemme étant démontré, soit θ une forme linéaire positive sur $\mathscr{L}^\infty$ satisfaisant à la condition de l'énoncé de la prop. 14. La restriction de θ à l'espace $\mathscr{K}(\mathrm{T})$ est une mesure positive ν sur T. Nous allons montrer que, pour toute fonction positive $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathrm{T}, \mu)$, on a $\theta(f) = \nu^*(f)$. Supposons d'abord que f soit semi-continue inférieurement (et bornée); d'après le lemme 4, f est la borne supérieure de l'ensemble filtrant croissant des classes $\dot{\varphi}$, où φ parcourt l'ensemble filtrant Φ des fonctions de $\mathscr{K}(\mathrm{T})$ telles que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Comme par hypothèse $\theta(f) = \sup\limits_{\varphi \in \Phi} \theta(\varphi)$, et que $\nu^*(f) = \sup\limits_{\varphi \in \Phi} \nu(\varphi)$ par définition, notre assertion est démontrée dans ce cas. Supposons en second lieu que f soit μ-mesurable et bornée; on a alors, par définition, $\nu^*(f) = \inf\limits_{\psi \in \Psi} \nu^*(\psi)$, où ψ parcourt l'ensemble filtrant décroissant Ψ des fonctions semi-continues inférieurement, bornées et $\geqslant f$. Si $a \geqslant \|f\|$, en appliquant l'hypothèse de l'énoncé à l'ensemble filtrant croissant des classes des fonctions $a - \psi$, où $\psi \in \Psi$ et $\psi \leqslant a$, on voit, en vertu du lemme, que l'on a $\theta(f) = \inf\limits_{\psi \in \Psi} \theta(\psi)$, et on a donc bien $\theta(f) = \nu^*(f)$. En particulier, pour toute fonction μ-négligeable $f \geqslant 0$, on a $\theta(f) = 0$, donc $\nu^*(f) = 0$, et par suite (n° 5, th. 2) ν est une mesure *de base* μ; en outre, $\nu^*(1) = \theta(1) < +\infty$, et par suite (cor. du th. 1) $\nu = g \,.\, \mu$, où $g \in \mathscr{L}^1(\mathrm{T}, \mu)$. Enfin, toute fonction μ-mesurable étant ν-mesurable, toute fonction positive $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathrm{T}, \mu)$ est ν-intégrable, et on a $\int fg\, d\mu = \nu^*(f) = \theta(f)$, ce qui achève la démonstration.

On conclut de la prop. 14 que les formes linéaires sur $\mathscr{L}^\infty$ du type $f \mapsto \int fg\, d\mu$, où $g \in \mathscr{L}^1$, sont les différences $\theta_1 - \theta_2$, où θ_1 et θ_2 sont des formes linéaires positives satisfaisant à la condition de la prop. 14.

9. Applications: II. Fonctions de mesures

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ des mesures réelles sur T, et $u(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction numérique finie, définie dans $\mathbf{R}^n$, et *positivement homogène* (c'est-à-dire (chap. I, § 1, n° 1) telle que

$$u(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = \alpha u(x_1, \ldots, x_n) \tag{12}$$

pour tout scalaire $\alpha \geqslant 0$). Il existe des mesures positives λ sur T telles que $|\mu_i| \leqslant \lambda$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ (par exemple la somme

$\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$). Soient λ, λ' deux telles mesures sur T. On peut écrire $\mu_i = f_i \cdot \lambda = f'_i \cdot \lambda'$, où f_i (resp. f'_i) est mesurable et essentiellement bornée pour la mesure λ (resp. λ') (n° 5, th. 2). Nous allons établir le résultat suivant: *pour que la fonction numérique $u(f_1, \ldots, f_n)$ soit localement intégrable pour λ, il faut et il suffit que la fonction $u(f'_1, \ldots, f'_n)$ soit localement intégrable pour λ', et on a alors*

$$u(f_1, \ldots, f_n) \cdot \lambda = u(f'_1, \ldots, f'_n) \cdot \lambda'.$$

Comme on a $|\mu_i| \leqslant \inf(\lambda, \lambda')$, on peut se borner au cas où $\lambda \leqslant \lambda'$. On a alors $\lambda = g \cdot \lambda'$, où g est une fonction λ'-mesurable telle que $0 \leqslant g \leqslant 1$ (n° 5, th. 2); d'où (n° 4, prop. 8)

$$\mu_i = f_i \cdot (g \cdot \lambda') = (f_i g) \cdot \lambda';$$

on en conclut (n° 3, cor. 2 de la prop. 3) que $f_i g$ est égale à f'_i localement presque partout pour λ'. Par suite, on a, d'après (12),

$$u(f'_1, \ldots, f'_n) = u(f_1 g, \ldots, f_n g) = u(f_1, \ldots, f_n) g$$

localement presque partout pour λ'. Pour que $u(f'_1, \ldots, f'_n)$ soit localement λ'-intégrable, il faut et il suffit par conséquent que $u(f_1, \ldots, f_n)g$ soit localement intégrable pour λ', donc (n° 4, prop. 8) que $u(f_1, \ldots, f_n)$ soit localement intégrable pour λ; et l'on a (n° 4, prop. 8)

$$u(f'_1, \ldots, f'_n) \cdot \lambda' = (u(f_1, \ldots, f_n)g) \cdot \lambda' = u(f_1, \ldots, f_n) \cdot \lambda.$$

La mesure $u(f_1, \ldots, f_n) \cdot \lambda$ ne dépend donc que des mesures $\mu_1, \ldots, \mu_n$ et de la fonction u; aussi la note-t-on $u(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Cette mesure est par suite définie lorsque u est une fonction positivement homogène telle que, pour une mesure positive λ majorant toutes les $|\mu_i|$, $u(f_1, \ldots, f_n)$ soit localement λ-intégrable, en désignant par f_i la densité de μ_i par rapport à λ. On notera que cette condition est remplie lorsque u est positivement homogène et *continue*: on a en effet alors

$$|u(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant a(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)$$

(u étant bornée dans un voisinage assez petit de $(0, \ldots, 0)$), et comme $u(f_1, \ldots, f_n)$ est λ-mesurable (chap. IV, § 5, n° 3, th. 1), elle est localement λ-intégrable en vertu du critère d'intégrabilité (chap. IV, § 5, n° 6, th. 5).

Soient $u_1, \ldots, u_p$ des fonctions numériques positivement homogènes définies dans $\mathbf{R}^n$, et telles que les p fonctions $g_k = u_k(f_1, \ldots, f_n)$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ soient localement λ-intégrables. Soit v une fonction numérique positivement homogène définie dans $\mathbf{R}^p$, et telle que $v(g_1, \ldots, g_p)$ soit localement λ-intégrable. Posons

$$w(x_1, \ldots, x_n) = v(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_p(x_1, \ldots, x_n)).$$

Alors la fonction w est positivement homogène, $w(f_1, \ldots, f_n)$ est localement λ-intégrable, et on a par définition

$$w(\mu_1, \ldots, \mu_n) = v(u_1(\mu_1, \ldots, \mu_n), \ldots, u_p(\mu_1, \ldots, \mu_n)).$$

Dans le cas particulier des fonctions x^+, x^-, $|x|$, $x + y$, $\inf(x, y)$, $\sup(x, y)$, les mesures définies par le procédé qui vient d'être décrit coïncident respectivement avec celles qui ont été notées μ^+, μ^-, $|\mu|$, $\mu + \nu$, $\inf(\mu, \nu)$, $\sup(\mu, \nu)$; cela résulte aussitôt du cor. de la prop. 2 du n° 2. Si μ et ν sont deux mesures réelles, et $\theta = \mu + i\nu$, on a $|\theta| = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$; en effet, soient λ une mesure $\geqslant 0$ majorant $|\mu|$ et $|\nu|$, et f, g des fonctions localement λ-intégrables telles que $\mu = f \cdot \lambda$, $\nu = g \cdot \lambda$; on a

$$\sqrt{\mu^2 + \nu^2} = \sqrt{f^2 + g^2} \cdot \lambda,$$

$\theta = (f + ig) \cdot \lambda$, donc (n° 2, prop. 2) $|\theta| = \sqrt{f^2 + g^2} \cdot \lambda$.

On peut appliquer cette méthode à la fonction positivement homogène $(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, pour définir la longueur d'une courbe dans $\mathbf{R}^n$.

10. Mesures diffuses; mesures atomiques

DÉFINITION 5. — *On dit qu'une mesure θ sur* T *est diffuse si, pour tout $t \in$* T, *on a* $|\theta|(\{t\}) = 0$.

Exemple. — La mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ est diffuse (chap. IV, § 1, n° 3, *Remarque* 1).

Dire que θ est une mesure diffuse sur T revient à dire que tout ensemble de complémentaire fini porte $|\theta|$, ou encore que $|\theta|$ est étrangère à toute mesure ponctuelle. Les mesures réelles diffuses forment donc une bande dans $\mathscr{M}(\mathrm{T})$ (chap. II, § 1, n° 5, th. 1).

Rappelons (chap. III, 2ᵉ éd., § 1, n° 3) qu'une mesure complexe ρ sur T est dite *atomique* si elle est de la forme $\sum_{t \in \mathrm{T}} \alpha(t)\varepsilon_t$, où α est une fonction complexe sur T, telle que $\sum_{t \in \mathrm{K}} |\alpha(t)| < +\infty$ pour tout compact K de T, ce qui exprime que la famille $(\alpha(t)\varepsilon_t)_{t\in T}$ est sommable (§ 2, nº 1, remarque 2). Il résulte alors de la remarque suivant le cor. 3 du th. 2 du nº 5 que $|\rho| = \sum_{t\in T} |\alpha(t)|\varepsilon_t$. La fonction α qui intervient dans ces formules est uniquement déterminée, car $\alpha(t) = \rho(\{t\})$. Une mesure atomique et une mesure diffuse sont étrangères.

Proposition 15. — *Toute mesure complexe σ sur T peut s'écrire d'une seule manière sous la forme $\rho + \theta$, où ρ est une mesure atomique, θ une mesure diffuse; on a alors $|\sigma| = |\rho| + |\theta|$.*

L'unicité de la décomposition est évidente, car ρ étant atomique, et θ diffuse, on doit avoir $\rho = \sum_{t\in T} \rho(\{t\})\varepsilon_t = \sum_{t\in T} \sigma(\{t\})\varepsilon_t$, et $\theta = \sigma - \rho$. Pour établir l'existence, il suffit de remarquer que $\sum_{t\in K} |\sigma(\{t\})| \leqslant |\sigma|(K) < +\infty$ pour tout compact K, de sorte que l'on peut poser $\sum_{t\in T} \sigma(\{t\})\varepsilon_t = \rho$. La mesure $\sigma - \rho$ est évidemment diffuse, et la relation $|\sigma| = |\rho| + |\sigma - \rho|$ résulte aussitôt du cor. 3 de la prop. 13 du nº 8.

On notera que cette démonstration prouve que si σ est portée par un ensemble M et si $|\sigma|(\{t\}) > 0$ pour tout $t \in M$, σ est *atomique*.

§ 6. — Images d'une mesure

1. Image d'une mesure positive

Soient X un espace localement compact, π une application *μ-mesurable* de T dans X. Dire que le couple $(\pi, 1)$ est *μ-adapté* (§ 4, nº 1) équivaut à dire que pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(X)$ la fonction $f \circ \pi$ est *essentiellement μ-intégrable.*

Proposition 1. — *Soit π une application μ-mesurable de* T *dans un espace localement compact* X. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) *pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(X)$, $f \circ \pi$ est essentiellement μ-intégrable*;

b) *pour tout ensemble compact* $K \subset X$, $\overset{-1}{\pi}(K)$ *est essentiellement μ-intégrable.*

Nous venons de remarquer que *a*) entraîne que le couple $(\pi, 1)$ est μ-adapté. Par suite (§ 4, nº 4, th. 2), pour tout ensemble compact $K \subset X$, la fonction $\varphi_K \circ \pi = \varphi_A$, où $A = \overset{-1}{\pi}(K)$, est essentiellement μ-intégrable, autrement dit, *a*) entraîne *b*).

Inversement, supposons que $\overset{-1}{\pi}(\mathrm{K})$ soit essentiellement μ-intégrable pour toute partie compacte K de X, et montrons que *a*) est vérifiée. Soit en effet S le support de f; comme S est compact, on a, par hypothèse, en posant $\mathrm{A} = \overset{-1}{\pi}(\mathrm{S})$

$$\int^{\bullet} |f(\pi(t))|\, d\mu(t) \leqslant \|f\| \int^{\bullet} \varphi_{\mathrm{S}}(\pi(t))\, d\mu(t) = \|f\| \int^{\bullet} \varphi_{\mathrm{A}}(t)\, d\mu(t) < +\infty.$$

Comme $f \circ \pi$ est μ-mesurable (chap. IV, § 5, n° 3, th. 1), on voit que $f \circ \pi$ est essentiellement μ-intégrable (§ 1, n° 3, prop. 9).

La propriété *b*) est évidemment équivalente à la propriété suivante (qui équivaut donc aussi à *a*)):

c) *Pour tout point x de* X, *il existe un voisinage* V *de* X *tel que* $\overset{-1}{\pi}(\mathrm{V})$ *soit essentiellement μ-intégrable.*

DÉFINITION 1. — *Soit μ une mesure positive sur un espace localement compact* T. *On dit qu'une application π de* T *dans un espace localement compact* X *est μ-propre* (ou *propre pour la mesure μ*) *si le couple* $(\pi, 1)$ *est μ-adapté, c'est-à-dire* (§ 4, n° 1) *si π est μ-mesurable et satisfait aux conditions* (*équivalentes*) *de la prop.* 1. *La mesure* $\int \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$ *sur* X *s'appelle alors l'image de μ par π et se note $\pi(\mu)$.*

Si $\nu = \pi(\mu)$, on a donc, par définition, pour $f \in \mathscr{K}(\mathrm{X})$

$$\int f(x)\, d\nu(x) = \int f(\pi(t))\, d\mu(t). \tag{1}$$

Remarques. — 1) Si μ est *bornée* (et en particulier si μ a un support compact), toute application μ-mesurable de T dans X est μ-propre (chap. IV, § 5, n° 3, th. 1 et n° 6, th. 5).

2) Si π est μ-mesurable et si, pour toute partie compacte K de X, $\overset{-1}{\pi}(\mathrm{K})$ est relativement compact, π est μ-propre (chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, n° 5, prop. 7, et n° 6, th. 5); en particulier, toute application continue *propre* de T dans X (*Top. gén.*, chap. I, 4ᵉ éd., § 10, n° 2, th. 1) est μ-propre pour toute mesure positive μ sur T. Plus particulièrement, il en est ainsi de tout *homéomorphisme* π de T sur X; la mesure $\nu = \pi(\mu)$ n'est autre alors que la mesure sur X transportée de μ par π (chap. III, 2ᵉ éd., § 1, n° 3).

3) Supposons que la topologie de X admette une *base dénombrable*; alors toute application π de T dans X qui vérifie

la condition *b*) de la prop. 1 est μ-mesurable, et par suite μ-propre. Il suffit d'appliquer le th. 4 du chap. IV, § 5, n° 5, en remarquant que X est alors métrisable (*Top. gén.*, Chap. IX, 2^e^ éd., § 2, n° 9, cor. de la prop. 16) et que, pour une distance quelconque compatible avec la topologie de X, toute boule fermée est réunion dénombrable d'ensembles compacts.

2. *Intégration par rapport à l'image d'une mesure positive*

Soit π une application μ-propre de T dans X, et soit $\nu = \pi(\mu)$. En appliquant les résultats du § 4, on obtient les énoncés suivants :

PROPOSITION 2. — *Pour toute fonction numérique $f \geqslant 0$ définie dans* X, *on a*

$$\int^{\bullet} f(x)\, d\nu(x) = \int^{\bullet} f(\pi(t))\, d\mu(t). \tag{2}$$

Cela résulte du th. 1 du § 4, n° 2.

COROLLAIRE 1. — *Pour toute partie* A *de* X, *on a*

$$\nu^{\bullet}(A) = \mu^{\bullet}(\overset{-1}{\pi}(A)).$$

COROLLAIRE 2. — *Pour qu'une partie* A *de* X *soit localement négligeable pour* ν, *il faut et il suffit que* $\overset{-1}{\pi}(A)$ *soit localement négligeable pour* μ.

COROLLAIRE 3. — *Si la mesure μ est concentrée sur un ensemble* M, $\pi(\mu)$ *est concentrée sur* $\pi(M)$.

En effet, si $N = X - \pi(M)$, $\overset{-1}{\pi}(N)$ ne rencontre pas M, donc est localement μ-négligeable, et par suite (cor. 2) N est localement ν-négligeable.

COROLLAIRE 4. — *Soit* S *le support de μ. Si π est* continue, *le support de* $\pi(\mu)$ *est* $\overline{\pi(S)}$.

En effet, il résulte du cor. 3 que $\pi(\mu)$ est concentrée sur $\pi(S)$, donc, si S′ est le support de $\pi(\mu)$, on a $S' \subset \overline{\pi(S)}$. D'autre part,

$\overset{-1}{\pi}(X - S')$ est un ensemble ouvert localement μ-négligeable (cor. 2), donc μ-négligeable (chap. IV, § 5, n° 2, cor. 2 de la prop. 5). On a donc $\overset{-1}{\pi}(X - S') \subset T - S$ et par suite $\pi(S) \subset S'$, ce qui démontre le corollaire.

PROPOSITION 3. — *Pour qu'une application f de X dans un espace topologique G soit ν-mesurable, il faut et il suffit que $f \circ \pi$ soit μ-mesurable.*

C'est une conséquence immédiate de la prop. 3 du § 4, n° 3.

COROLLAIRE. — *Pour qu'une partie A de X soit ν-mesurable, il faut et il suffit que $\overset{-1}{\pi}(A)$ soit μ-mesurable.*

Par contre, l'image par π d'une partie μ-mesurable M de T n'est pas nécessairement ν-mesurable, même si π est continue et M μ-négligeable (exerc. 7 et § 8, exerc. 1).

THÉORÈME 1. — *Soit* $\mathbf{f}$ *une fonction définie dans X, à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *ou dans un espace de Banach F. Pour que* $\mathbf{f}$ *soit essentiellement ν-intégrable, il faut et il suffit que* $\mathbf{f} \circ \pi$ *soit essentiellement μ-intégrable, et l'on a alors*

$$\int \mathbf{f}(x)\, d\nu(x) = \int \mathbf{f}(\pi(t))\, d\mu(t). \tag{3}$$

Supposons en outre que π soit continue et propre. Pour que $\mathbf{f}$ *soit ν-intégrable, il faut et il suffit alors que* $\mathbf{f} \circ \pi$ *soit μ-intégrable.*

Il suffit d'appliquer le th. 2 du § 4, n° 4.

COROLLAIRE. — *Pour qu'une partie A de X soit essentiellement ν-intégrable, il faut et il suffit que $\overset{-1}{\pi}(A)$ soit essentiellement μ-intégrable, et on a alors $\nu(A) = \mu(\overset{-1}{\pi}(A))$.*

En particulier, pour tout ensemble compact $K \subset X$, on a $\nu(K) = \mu(\overset{-1}{\pi}(K))$. Il résulte de là et du cor. 3 de la prop. 2 que, si μ est *atomique* (§ 5, n° 10), il en est de même de $\pi(\mu) = \nu$. En effet, soit M l'ensemble des $t \in T$ tels que $\mu(\{t\}) \neq 0$; comme μ est portée par M, ν est portée par $\pi(M)$; en outre, pour tout $x \in \pi(M)$, on a $\nu(\{x\}) = \mu(\overset{-1}{\pi}(x)) > 0$, puisque $\overset{-1}{\pi}(x)$ contient au moins un point de M. Donc ν est atomique (§ 5, n° 10, prop. 15).

3. *Propriétés de l'image d'une mesure positive*

PROPOSITION 4. — *Soient* T, T′, T″ *trois espaces localement compacts, μ une mesure positive sur* T, *π une application μ-mesurable de* T *dans* T′, *π' une application de* T′ *dans* T″, *et $\pi'' = \pi' \circ \pi$.*

a) *Supposons que π soit μ-propre et soit $\mu' = \pi(\mu)$. Pour que π' soit μ'-propre, il faut et il suffit que π'' soit μ-propre, et on a alors* $\pi''(\mu) = \pi'(\pi(\mu))$ (« transitivité de l'image d'une mesure »).

b) *Supposons que π' soit continue, et que π'' soit μ-propre; π est alors μ-propre, π' est $\pi(\mu)$-propre, et on a $\pi''(\mu) = \pi'(\pi(\mu))$.*

Sous les hypothèses de *a*), pour que π'' soit μ-mesurable, il faut et il suffit que π' soit μ'-mesurable (n° 2, prop. 3). D'autre part, si K est une partie compacte de T″, on a $\overset{-1}{\pi''}(\mathrm{K}) = \overset{-1}{\pi}(\overset{-1}{\pi'}(\mathrm{K}))$; pour que $\overset{-1}{\pi''}(\mathrm{K})$ soit essentiellement μ-intégrable, il faut et il suffit que $\overset{-1}{\pi'}(\mathrm{K})$ soit essentiellement μ'-intégrable, en vertu du cor. du th. 1. Enfin, si π'' est μ-propre, en posant $\mu'' = \pi''(\mu)$, on a, pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(\mathrm{T}'')$,

$$\int f(t'')\,d\mu''(t'') = \int f(\pi''(t))\,d\mu(t)$$

$$= \int f(\pi'(\pi(t)))\,d\mu(t) = \int f(\pi'(t'))\,d\mu'(t')$$

en vertu du th. 1 du n° 2, ce qui achève la démonstration de *a*).

Sous les hypothèses de *b*), soit K′ une partie compacte de T′. Alors $\mathrm{K}'' = \pi'(\mathrm{K}')$ est compact, donc $\overset{-1}{\pi''}(\mathrm{K}'')$ est essentiellement μ-intégrable, donc $\overset{-1}{\pi}(\mathrm{K}') \subset \overset{-1}{\pi''}(\mathrm{K}'')$ est essentiellement μ-intégrable (chap. IV, 2[e] éd., § 5, n° 5, prop. 7), de sorte que π est μ-propre. On achève alors en appliquant la partie *a*) de l'énoncé.

COROLLAIRE. — *Soient* T *et* T′ *deux espaces localement compacts, μ une mesure positive sur* T, *π une application bijective de* T *sur* T′, *$\overset{-1}{\pi}$ l'application réciproque. Supposons que π soit μ-propre, et soit $\mu' = \pi(\mu)$. Alors $\overset{-1}{\pi}$ est μ'-propre et on a $\overset{-1}{\pi}(\pi(\mu)) = \mu$.*

PROPOSITION 5. — *Soient* T *et* X *deux espaces localement compacts, μ une mesure positive sur* T, *π une application μ-propre de* T *dans* X, *g une fonction numérique finie et $\geqslant 0$, définie dans* X *et telle que $g \circ \pi$ soit localement intégrable pour μ. Pour que g soit localement intégrable pour $\pi(\mu)$, il faut et il suffit que π soit propre pour la mesure $(g \circ \pi) \,.\, \mu$, et on a alors*

$$\pi((g \circ \pi) \,.\, \mu) = g \,.\, \pi(\mu). \tag{4}$$

Posons $\nu = \pi(\mu)$. Pour que g soit localement ν-intégrable, il faut et il suffit que gf soit ν-intégrable pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(\mathrm{X})$; comme gf a un support compact, il revient au même de dire que gf est essentiellement ν-intégrable, et cela équivaut à dire que $(g \circ \pi)(f \circ \pi)$ est essentiellement μ-intégrable (th. 1). Mais en vertu du th. 1 du § 5, n° 3, cela signifie que $f \circ \pi$ est essentiellement intégrable pour $\rho = (g \circ \pi) . \mu$, et, par définition, cela veut dire que π est ρ-propre (puisque π est évidemment ρ-mesurable). En outre, on a

$$\int fg\, d\nu = \int f(\pi(t)) g(\pi(t))\, d\mu(t) = \int f(\pi(t))\, d\rho(t)$$

(n° 2, th. 1 et § 5, th. 1), ce qui prouve la relation (4).

PROPOSITION 6. — *Soient* T *et* X *deux espaces localement compacts,* $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *une famille de mesures positives sur* T, *filtrante pour la relation* $\leqslant$, *admettant dans* $\mathscr{M}(\mathrm{T})$ *une borne supérieure* μ. *Pour qu'une application de* T *dans* X *soit* μ*-propre, il faut et il suffit qu'elle soit* λ_α*-propre pour tout* $\alpha \in \mathrm{A}$, *et que la famille* $(\pi(\lambda_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *soit majorée dans* $\mathscr{M}(\mathrm{X})$. *Dans ce cas, on a*

$$\pi(\mu) = \sup_\alpha \pi(\lambda_\alpha). \tag{5}$$

Pour que π soit μ-mesurable, il faut et il suffit que π soit λ_α-mesurable pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$ (§1, n° 4, cor. 2 de la prop. 11). Supposons cette condition satisfaite ; dire que π est μ-propre équivaut alors à dire qu'on a, pour toute fonction $f \in \mathscr{K}_+(\mathrm{T})$,

$$\mu^\bullet(f \circ \pi) < +\infty.$$

Or on a

$$\int^\bullet (f \circ \pi)\, d\mu = \sup_\alpha \int^\bullet (f \circ \pi)\, d\lambda_\alpha = \sup_\alpha \int^\bullet f\, d(\pi(\lambda_\alpha))$$

(§ 1, n° 4, prop. 11) ; le premier membre est donc fini pour toute $f \in \mathscr{K}_+(\mathrm{T})$ si et seulement si la famille $(\pi(\lambda_\alpha))$ admet une borne supérieure θ dans $\mathscr{M}(\mathrm{X})$, et on a alors $\int (f \circ \pi)\, d\mu = \int f\, d\theta$, relation équivalente à (5).

COROLLAIRE 1. — *Soit* $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *une famille sommable de mesures positives sur* T, *telle que* $\mu = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \mu_\alpha$; *pour qu'une application* π *de* T *dans un espace localement compact* X *soit* μ*-propre, il faut et il suffit qu'elle soit* μ_α*-propre pour tout* $\alpha \in \mathrm{A}$, *et que la famille*

$(\pi(\mu_\alpha))_{\alpha\in A}$ *soit sommable. On a dans ce cas*

$$\pi(\mu) = \sum_{\alpha\in A} \pi(\mu_\alpha). \tag{6}$$

COROLLAIRE 2. — *Soient* T *et* X *deux espaces localement compacts,* $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une suite finie de mesures positives sur* T, *et soit* $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. *Pour qu'une application* π *de* T *dans* X *soit* μ*-propre, il faut et il suffit qu'elle soit* λ_i*-propre pour chaque indice i, et on a alors*

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(\lambda_i) = \pi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right).$$

4. Image d'une mesure complexe

Soit θ une mesure complexe sur T, et soit π une application de T dans un espace localement compact X: supposons que π soit θ-mesurable, et que pour chaque $f \in \mathscr{K}(X;\mathbf{C})$, $f\circ\pi$ soit essentiellement θ-intégrable. Comme il est équivalent de dire qu'une fonction est mesurable (resp. essentiellement intégrable) par rapport à θ ou par rapport à $|\theta|$, cela signifie que π est $|\theta|$-propre. Si $f \in \mathscr{K}(X;\mathbf{C})$, on a

$$\left|\int (f\circ\pi)\, d\theta\right| \leqslant \int (|f|\circ\pi)\, d|\theta|\,; \tag{7}$$

il en résulte aussitôt que la forme linéaire $f \mapsto \int (f\circ\pi)\, d\theta$ sur $\mathscr{K}(X;\mathbf{C})$ est une *mesure complexe* sur X (chap. III, 2[e] éd., § 1, n° 3, prop. 6), et on peut poser la définition suivante:

DÉFINITION 2. — *Soit* θ *une mesure complexe sur un espace localement compact* T. *On dit qu'une application* π *de* T *dans un espace localement compact* X *est* θ*-propre si elle est* $|\theta|$*-propre. La mesure* $f \mapsto \int (f\circ\pi)\, d\theta$ *s'appelle alors l'image de* θ *par* π *et se note* $\pi(\theta)$.

La relation (7) se met alors sous la forme:

$$|\pi(\theta)| \leqslant \pi(|\theta|). \tag{8}$$

La mesure $\pi(\theta)$ peut être nulle sans que θ le soit, comme on le voit immédiatement en prenant pour T un espace réduit à deux points a, b, pour θ la mesure $\varepsilon_a - \varepsilon_b$, pour π une application constante.

Soient θ et θ' deux mesures complexes sur T ; si π est θ-propre et θ'-propre, il résulte du cor. 2 de la prop. 6 que π est $(\theta + \theta')$-propre, car on a $|\theta + \theta'| \leqslant |\theta| + |\theta'|$, et on a évidemment $\pi(\theta + \theta') = \pi(\theta) + \pi(\theta')$.

En particulier, si θ est une mesure réelle, et si π est θ-propre, on a

$$\pi(\theta) = \pi(\theta^+) - \pi(\theta)^-. \tag{9}$$

Plusieurs résultats établis plus haut s'étendent aussitôt aux mesures complexes ; nous citerons les plus importants.

PROPOSITION 7. — *Soient θ une mesure complexe sur* T, π *une application θ-propre de* T *dans un espace localement compact* X, ν *la mesure image* $\pi(\theta)$.

a) *Soit* A *une partie de* X ; *si* $\overset{-1}{\pi}(\mathrm{A})$ *est localement θ-négligeable,* A *est localement ν-négligeable.*

b) *Soit f une application de* X *dans un espace topologique ; si $f \circ \pi$ est θ-mesurable, f est ν-mesurable.*

c) *Soit* **f** *une fonction définie dans* X, *à valeurs dans un espace de Banach* F ; *si* $\mathbf{f} \circ \pi$ *est essentiellement θ-intégrable,* **f** *est essentiellement ν-intégrable et on a*

$$\int \mathbf{f}(\pi(t))\, d\theta(t) = \int \mathbf{f}(x)\, d\nu(x). \tag{10}$$

Compte tenu de la formule (8), ces résultats se déduisent du cor. 2 de la prop. 2, de la prop. 3, et du th. 1 du n° 2.

5. *Application: changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue*

Soient I un intervalle (borné ou non) de $\mathbf{R}$, a son origine, b son extrémité dans $\overline{\mathbf{R}}$, μ la mesure de Lebesgue dans I. Pour toute fonction μ-intégrable **f** et tout intervalle $\mathrm{H} \subset \mathrm{I}$, d'origine α et d'extrémité β, nous écrirons $\int_\alpha^\beta \mathbf{f}(t)\,dt$ au lieu de $\int_{\mathrm{H}} \mathbf{f}(t)\,dt = \int_{\mathrm{H}} \mathbf{f}\,d\mu$, et nous poserons $\int_\beta^\alpha \mathbf{f}(t)\,dt = -\int_\alpha^\beta \mathbf{f}(t)\,dt$; la signification ainsi donnée à ces symboles coïncide avec celle qui leur a été attribuée dans *Fonct. var. réelle*, chap. II, §§ 1 et 2, lorsque **f** est une fonction réglée à support compact (chap. IV, § 4, n° 4, *Exemple*).

Soient g une fonction numérique définie dans I et *localement μ-intégrable*, x_0 un point de I; pour tout $x \in \mathrm{I}$, posons

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{G}(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \qquad (c \text{ constante}).$$

La fonction numérique G est *continue* dans I; cela résulte aussitôt du th. de Lebesgue (chap. IV, § 4, n° 3, cor. 1 du th. 2), car le produit de g et de la fonction caractéristique de l'intervalle d'extrémités x et $x + h$ tend vers une fonction négligeable lorsque h tend vers 0. Donc G(I) est un *intervalle* de **R**. Dans tout ce n°, on considérera G comme une application de I sur l'espace localement compact G(I). On désignera par λ la mesure $g \cdot \mu$ sur I.

Supposons d'abord que g soit *μ-intégrable*. Alors, le même raisonnement que ci-dessus montre que les limites $\mathrm{G}(a+)$ et $\mathrm{G}(b-)$ existent et sont *finies*; en outre, la mesure $|\lambda|$ est *bornée* (§ 5, n° 3, cor. du th. 1), et l'application G de I dans G(I) est *λ-propre*.

PROPOSITION 8. — *Supposons g μ-intégrable. Si* J *désigne l'intervalle ouvert de* **R** *d'extrémités* $\mathrm{G}(a+)$ *et* $\mathrm{G}(b-)$, *l'image par* G *de la mesure* $g \cdot \mu$ *est la mesure* $\varphi_{\mathrm{J}} \cdot \nu$ *si* $\mathrm{G}(a+) \leqslant \mathrm{G}(b-)$ *et la mesure* $-\varphi_{\mathrm{J}} \cdot \nu$ *si* $\mathrm{G}(a+) \geqslant \mathrm{G}(b-)$ (ν *désignant la mesure de Lebesgue sur* G(I)).

Il suffit de prouver que, pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(\mathrm{G(I)})$, on a

$$\text{(12)} \qquad \int_{\mathrm{G}(a+)}^{\mathrm{G}(b-)} f(\xi)\,d\xi = \int_a^b f(\mathrm{G}(t))g(t)\,dt.$$

Or, cette formule a déjà été démontrée lorsque $g \in \mathscr{K}(\mathrm{I})$ (*Fonct. var. réelle*, chap. II, § 2, n° 1, formule (1)). Passons au cas général; il existe une suite (g_n) de fonctions de $\mathscr{K}(\mathrm{I})$ telle que: 1° la suite $(g_n(t))$ tende vers $g(t)$ presque partout dans I; 2° il existe une fonction μ-intégrable $h \geqslant 0$ telle que $|g_n| \leqslant h$ pour tout n (chap. IV, § 3, n° 4, th. 3). Il résulte aussitôt du th. de Lebesgue que, si on pose $\mathrm{G}_n(x) = c + \int_{x_0}^{x} g_n(t)\,dt$, la suite (G_n) converge *uniformément* vers G dans I, et que les nombres $\mathrm{G}_n(a+)$ et $\mathrm{G}_n(b-)$ tendent respectivement vers $\mathrm{G}(a+)$ et $\mathrm{G}(b-)$. Soit f' une fonction de $\mathscr{K}(\mathbf{R})$ prolongeant f; ce qui précède prouve que $f'(\mathrm{G}_n(t))$ tend vers $f'(\mathrm{G}(t)) = f(\mathrm{G}(t))$ pour tout $t \in \mathrm{I}$; appliquant le th. de

Lebesgue, on voit que la formule (12) résulte de la formule

$$\int_{G_n(a+)}^{G_n(b-)} f'(\xi)\,d\xi = \int_a^b f'(G_n(t))g_n(t)\,dt$$

par passage à la limite.

Corollaire. — *Si une fonction* $\mathbf{f}$ *définie dans* G(I), *à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *ou dans un espace de Banach, est telle que la fonction* $t \mapsto \mathbf{f}(G(t))g(t)$ *soit intégrable dans* I *pour la mesure de Lebesgue, alors* $\mathbf{f}$ *est intégrable dans* J *pour la mesure de Lebesgue et on a* (formule du changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue)

$$\int_{G(a+)}^{G(b-)} \mathbf{f}(\xi)\,d\xi = \int_a^b \mathbf{f}(G(t))g(t)\,dt. \tag{13}$$

En effet, $\mathbf{f}(G(t))$ est intégrable pour la mesure $|g|\,.\,\mu$, donc aussi pour les mesures $g^+\,.\,\mu$ et $g^-\,.\,\mu$; il résulte du th. 1 (n° 2) que $\mathbf{f}$ est intégrable pour les mesures images $G(g^+\,.\,\mu)$ et $G(g^-\,.\,\mu)$, donc aussi pour la mesure $\varphi_J\,.\,\nu$ et que l'on a (13), compte tenu de la prop. 8 et de la formule (9).

Il peut se faire que $\mathbf{f}$ soit intégrable dans J pour la mesure de Lebesgue, mais que $t \mapsto \mathbf{f}(G(t))g(t)$ ne soit pas intégrable dans I pour la mesure de Lebesgue (exerc. 10).

Supposons maintenant que g garde presque partout *un signe constant* (et soit localement μ-intégrable); on peut par exemple supposer $g(t) \geqslant 0$ presque partout dans I. Alors G est une fonction continue croissante dans I, donc $G(a+)$ et $G(b-)$ existent (mais peuvent être infinis). En outre, G est une application λ-*propre* de I dans G(I): en effet, si $G(b-) \in G(I)$, il y a un $x_1 \geqslant x_0$ tel que G soit constant pour $x \geqslant x_1$, et alors l'image réciproque par G de l'intervalle compact $[G(x_0), G(b-)]$ est λ-intégrable; si au contraire $G(b-) \notin G(I)$, l'image réciproque par G de tout intervalle compact d'origine $G(x_0)$, contenu dans G(I), est un intervalle compact. On raisonne de même pour les intervalles compacts d'extrémité $G(x_0)$, d'où notre assertion. En outre:

Proposition 9. — *Supposons* $g \geqslant 0$ *et localement* μ-*intégrable. Alors, l'image par* G *de la mesure positive* $g\,.\,\mu$ *est la mesure de Lebesgue sur* G(I). *Pour qu'une fonction* $\mathbf{f}$, *définie dans* G(I), *à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *ou dans un espace de Banach, soit intégrable dans* G(I) *pour la mesure de Lebesgue, il faut et il suffit que la fonction*

$t \mapsto \mathbf{f}(G(t))g(t)$ *soit intégrable dans* I *pour la mesure de Lebesgue, et on a la relation* (13).

La première partie de l'énoncé résulte de ce que la formule (12) est valable pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(G(I))$; en effet, le support de la fonction $t \mapsto f(G(t))$ est contenue dans un intervalle $K \subset I$ dans lequel g est intégrable, en vertu des remarques faites ci-dessus, et il suffit d'appliquer à K la prop. 8. La seconde partie est conséquence du th. 1 du n° 2.

6. *Décomposition en tranches. Image réciproque d'une mesure par un homéomorphisme local*

Soient X un espace localement compact, π une application de X dans un espace localement compact T, μ une mesure positive sur T, $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ une application scalairement essentiellement μ-intégrable et vaguement μ-mesurable de T dans $\mathscr{M}_+(X)$. Soit $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$. Si λ_t est *portée par* $\overset{-1}{\pi}(t)$ *pour tout* $t \in T$, on dit que l'égalité $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$ est une *décomposition en tranches* (ou une *désintégration*) de ν relativement à π. Cette notion sera étudiée de manière détaillée au chap. VI.

PROPOSITION 10. — *On conserve les notations ci-dessus, et on suppose que π est ν-mesurable. Soit g la fonction $t \mapsto \lambda_t^*(1)$ sur* T. *Pour que π soit ν-propre, il faut et il suffit que g soit localement μ-intégrable, et on a dans ce cas*

$$\pi(\nu) = g \, . \, \mu. \tag{14}$$

Nous commencerons par raisonner en supposant que g est finie localement μ-presque partout; nous nous débarrasserons de cette hypothèse auxiliaire à la fin de la démonstration. Comme π est ν-mesurable par hypothèse, dire que π est ν-propre équivaut à dire que $\nu^\bullet(f \circ \pi) < +\infty$ pour toute fonction $f \in \mathscr{K}_+(T)$; g étant finie localement presque partout, on est dans les conditions d'application de l'assertion *c*), prop. 5 du § 3, n° 2. On a donc

$$\int^\bullet (f \circ \pi) \, d\nu = \int^\bullet d\mu(t) \int^\bullet (f \circ \pi) \, d\lambda_t = \int^\bullet f(t) g(t) \, d\mu(t),$$

du fait que λ_t est concentrée sur $\overset{-1}{\pi}(t)$. On sait que g est μ-mesurable, puisque Λ est μ-adéquate (§ 3, n° 1, déf. 1). Dire que le premier membre est fini pour toute $f \in \mathscr{K}_+(T)$ équivaut donc à dire que g est localement μ-intégrable (§ 5, prop. 1), et (14) résulte aussitôt dans ce cas des relations ci-dessus.

Il nous reste donc seulement à éliminer l'hypothèse auxiliaire. Si g est localement μ-intégrable, g est finie localement μ-presque partout, et l'hypothèse est bien satisfaite. Supposons que π soit ν-propre, et montrons que g est finie localement presque partout. Soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble μ-dense des compacts K tels que $\Lambda|K$ soit vaguement continue; comme g est μ-mesurable, on est ramené à montrer que tout compact $K \in \mathfrak{K}$, tel que $g|K = +\infty$, est μ-négligeable. Or soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des fonctions $h \in \mathscr{K}_+(X)$ telles que $h \leqslant 1$; posons $g_h(t) = \lambda_t(h)$, désignons par Λ_h l'application μ-adéquate $t \mapsto h \,.\, \lambda_t$, par ν_h l'intégrale de Λ_h, par f un élément de $\mathscr{K}_+(T)$ tel que $f \geqslant \varphi_K$. Si nous appliquons la formule (14) à Λ_h, qui satisfait à l'hypothèse auxiliaire, nous obtenons:

$$\int (f \circ \pi)\, d\nu \geqslant \int (f \circ \pi)\, d\nu_h = \int f g_h . d\mu.$$

Mais les fonctions $fg_h|K$ forment un ensemble filtrant croissant de fonctions continues sur K, dont l'enveloppe supérieure vaut $+\infty$: d'après le th. de Dini (*Top. gén.*, chap. X, 2e éd., § 4, n° 1, th. 1), on peut choisir h de telle sorte que $fg_h|K$ soit supérieure à un nombre positif arbitraire n, et il vient $\int (f \circ \pi)\, d\nu \geqslant n\mu(K)$. Le premier membre étant fini du fait que π est ν-propre, on en déduit que $\mu(K) = 0$.

COROLLAIRE 1. — *Supposons que π soit ν-mesurable.*

a) Si $N \subset T$ *est localement μ-négligeable,* $\overset{-1}{\pi}(N)$ *est localement ν-négligeable.*

b) *Si f est une application μ-mesurable de* T *dans un espace topologique* G, *$f \circ \pi$ est ν-mesurable.*

Reprenons les notations Λ_h, ν_h, g_h de la fin de la démonstration précédente: ν_h étant une mesure bornée pour tout $h \in \mathscr{H}$, π est ν_h-propre, g_h est localement μ-intégrable, et $\pi(\nu_h) = g_h \,.\, \mu$, mesure de base μ. Il en résulte que N est localement négligeable (resp. que f est mesurable) pour la mesure $\pi(\nu_h)$ (§ 5, n° 3, cor. 1 de la prop. 3 et cor. de la prop. 4). Par conséquent, $\overset{-1}{\pi}(N)$ est localement négligeable (resp. $f \circ \pi$ est mesurable) pour la mesure ν_h (cor. 2 de la prop. 2, resp. prop. 3). On remarque enfin que les mesures ν_h forment une famille filtrante croissante de mesures positives, dont la borne supérieure est ν (§ 3, n° 1, prop. 1), et on applique le cor. 1 (resp. 2) de la prop. 11 du § 1, n° 4.

COROLLAIRE 2. — *Supposons que π soit ν-propre; soit* $\mathbf{f}$ *une application définie dans* T, *à valeurs dans un espace de Banach ou dans* $\bar{\mathbf{R}}$. *Pour que* $\mathbf{f} \circ \pi$ *soit essentiellement ν-intégrable, il faut et il suffit que* $g\mathbf{f}$ *soit essentiellement μ-intégrable.*

Cela résulte immédiatement, compte tenu de la prop. 10, du th. 1 du § 5, n° 3 et du th. 1 du n° 2.

Exemple. — Soient X et T deux espaces localement compacts, et soit π un *homéomorphisme local de* X *dans* T. Autrement dit (*Top. gén.*, chap. XI), nous supposons que tout point $x \in X$ admet un voisinage V tel que $\pi|V$ soit un homéomorphisme de V sur un voisinage de $\pi(x)$; quitte à remplacer V par un voisinage ouvert relativement compact W de x tel que $\overline{W} \subset V$, on en déduit que l'ensemble $\mathscr{U}$ des ouverts relativement compacts U de X, tels que $\pi|\overline{U}$ soit un homéomorphisme de $\overline{U}$ sur son image, est un *recouvrement ouvert* de X. Soit alors μ une mesure positive sur T; si U est un élément de $\mathscr{U}$, $\pi(U)$ est un ouvert de l'espace compact $\pi(\overline{U})$, donc un sous-espace localement compact de T, et on sait définir la mesure $\mu|\pi(U)$ induite par μ sur $\pi(U)$ (chap. IV, 2[e] éd., § 5, n° 7). Soit ν_U l'image de $\mu|\pi(U)$ par l'homéomorphisme réciproque de $\pi|U$; nous allons montrer qu'il existe sur X une mesure ν et une seule qui induit la mesure ν_U sur tout ouvert $U \in \mathscr{U}$. Cette mesure est appelée l'*image réciproque de μ par l'homéomorphisme local π*, et notée $\overset{-1}{\pi}(\mu)$.

L'unicité de ν résulte aussitôt du principe de localisation (chap. III, 2[e] éd., § 2, n° 1, cor. de la prop. 1). Pour établir l'existence notons que si $t \in T$, tout point $x \in \overset{-1}{\pi}(t)$ admet un voisinage qui ne rencontre $\overset{-1}{\pi}(t)$ qu'au point x, de sorte que $\overset{-1}{\pi}(t)$ est un sous-espace *discret* de X, et que la famille $(\varepsilon_x)_{x \in \overset{-1}{\pi}(t)}$ est sommable; désignons par λ_t sa somme. Montrons ensuite que l'application $t \mapsto \lambda_t$ est scalairement essentiellement μ-intégrable, et que son intégrale $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$ est l'image réciproque cherchée. Cela résultera aussitôt du lemme suivant:

Lemme 1. — a) *Soit f un élément de $\mathscr{K}_+(X)$; la fonction $t \mapsto \lambda_t(f)$ est positive, semi-continue supérieurement, à support compact, et sa restriction à $\pi(X)$ est continue.*

b) *Soient* U *un élément de $\mathscr{U}$, ν l'intégrale de la fonction scalairement essentiellement μ-intégrable $t \mapsto \lambda_t$; l'image de la mesure $\nu|U$ par $\pi|U$ est égale à $\mu|\pi(U)$,* Pour établir a), on peut se ramener au moyen d'une partition de l'unité (chap. III, 2^e éd., § 1, n° 2, lemme 1) au cas où le support S de f est contenu dans un ouvert $U \in \mathscr{U}$. Soit g l'application $t \mapsto \lambda_t(f)$; $\pi|U$ étant un homéomorphisme, $g|\pi(U)$ appartient à $\mathscr{K}_+(\pi(U))$, et par suite ($\pi(U)$ étant un ouvert de $\pi(X)$) la restriction de g à $\pi(X)$ est continue. Comme g est positive et que la restriction de g au compact $\pi(S)$ est continue, on voit que g est semi-continue supérieurement dans T. On en déduit que g est μ-intégrable.

Pour établir b), désignons par g un élément de $\mathscr{K}(\pi(U))$, par g° son prolongement par 0 à T, par f la fonction $g \circ (\pi|U)$, par f° la prolongement par 0 de f à X. L'assertion b) équivaut à l'égalité $\int g^\circ \, d\mu = \int f^\circ \, d\nu$. Mais on a $f \in \mathscr{K}(U)$, donc $f^\circ \in \mathscr{K}(X)$, et la seconde intégrale est donc égale à $\int \lambda_t(f^\circ) \, d\mu(t)$. On a enfin $\lambda_t(f^\circ) = g^\circ(t)$, ce qui achève la démonstration.

Notons maintenant que $\pi(X)$ est *ouvert* dans T, donc μ-mesurable; l'application $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ est vaguement μ-mesurable, car sa restriction à chacun des ensembles $\pi(X)$ et $\complement\pi(X)$ est vaguement continue. Dans ces conditions, la formule $\overset{-1}{\pi}(\mu) = \int \lambda_t \, d\mu(t)$ définit une décomposition en tranches de $\overset{-1}{\pi}(\mu)$ relativement à π, et la prop. 10 nous donne le résultat suivant:

PROPOSITION 11. — *Soit π un homéomorphisme local d'un espace localement compact* X *dans un espace localement compact* T, *et soit μ une mesure positive sur* T. *Soit n la fonction numérique qui associe à tout $t \in$ T le nombre des éléments de $\overset{-1}{\pi}(t)$, si ce nombre est fini, ou $+\infty$ dans le cas contraire. Pour que π soit $\overset{-1}{\pi}(\mu)$-propre, il faut et il suffit que n soit localement μ-intégrable, et on a dans ce cas*

$$\pi(\overset{-1}{\pi}(\mu)) = n \, . \, \mu. \tag{15}$$

§ 7. Intégration par rapport à une mesure induite

1. Intégration par rapport à une mesure induite

Soient X un sous-espace localement compact de T, μ une mesure positive sur T, μ_X la mesure induite sur X par μ (chap. IV, 2^e éd., § 5, n° 7). Pour tout $t \in$ T, définissons une mesure λ_t *sur* X de la façon suivante: $\lambda_t = \varepsilon_t$ si $t \in$ T, $\lambda_t = 0$ si $t \in \complement$X. Pour toute fonction numérique finie g définie dans X, on a $\int g(x)\, d\lambda_t(x) = g(t)$ si $t \in X$ et $\int g(x)\, d\lambda_t(x) = 0$ si $t \in \complement X$. Si g est une fonction de $\mathscr{K}(X)$, on a donc, par définition de μ_X

$$\mu_X(g) = \int \langle g, \lambda_t \rangle \, d\mu(t). \tag{1}$$

Cela signifie que l'on peut écrire

$$\mu_X = \int \lambda_t \, d\mu(t) \tag{2}$$

(§ 3, n° 1).

Définissons maintenant une application π de T dans X en posant $\pi(t) = t$ pour $t \in X$, et $\pi(t) = t_0$ pour $t \in \complement X$, t_0 étant un point arbitraire de X ; on peut écrire, pour tout $t \in T$, $\lambda_t = \varphi_X(t)\varepsilon_{\pi(t)}$. L'application π est μ-mesurable, car ses restrictions à X et à $\complement X$ le sont (chap. IV, 2^e^ éd., § 5, n° 10, prop. 16) ; il en résulte aussitôt que le couple (π, φ_X) est *μ-adapté* (§ 4, n° 1). On a par conséquent les résultats suivants :

PROPOSITION 1. — *Pour toute fonction numérique $g \geqslant 0$ définie dans* X, *on a*

$$\int^\bullet g \, d\mu_X = \int_X^\bullet g \, d\mu \tag{3}$$

(cf. § 5, n° 3, *Exemple*, pour la notation $\int_X^\bullet$).

Si on tient compte des remarques qui précèdent et de (2), la relation (3) résulte du th. 1 du § 4.

COROLLAIRE 1. — *Pour toute partie* B *de* X, *on a* $\mu_X^\bullet(B) = \mu^\bullet(B)$; *pour que* B *soit localement μ_X-négligeable, il faut et il suffit que* B *soit localement μ-négligeable.*

COROLLAIRE 2. — *Soit* M *une partie de* T. *Si μ est concentrée sur* M, *μ_X est concentrée sur* $M \cap X$.

COROLLAIRE 3. — *Pour que la mesure μ_X soit nulle, il faut et il suffit que* X *soit localement μ-négligeable.*

Remarque. — Si S est le support de μ, $S \cap X$ (qui est fermé dans X) contient le support de μ_X d'après le cor. 2, mais peut en être distinct. Par exemple, si μ est une mesure diffuse et X un sous-espace réduit à un point, la mesure induite μ_X est nulle, donc son support est vide. On notera cependant que le support de μ_X est égal à $S \cap X$ si X est *ouvert* dans T.

PROPOSITION 2. — *Pour qu'une application g de X dans un espace topologique soit μ_X-mesurable, il faut et il suffit que g soit μ-mesurable dans* X (§ 5, n° 3, *Exemple*).

Cela résulte de la prop. 3 du § 4.

COROLLAIRE. — *Pour qu'une partie* B *de* X *soit μ_X-mesurable, il faut et il suffit que* B *soit μ-mesurable.*

THÉORÈME 1. — *Soit* **g** *une fonction définie dans* X, *à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *ou dans un espace de Banach. Pour que* **g** *soit essentiellement μ_X-intégrable, il faut et il suffit que* **g** *soit essentiellement μ-intégrable dans* X (§ 5, n° 3, *Exemple*), *et on a alors*

$$\int \mathbf{g}\, d\mu_X = \int_X \mathbf{g}\, d\mu. \tag{4}$$

Cela résulte du th. 2 du § 4.

COROLLAIRE 1. — *Pour qu'une partie* B *de* X *soit essentiellement μ_X-intégrable, il faut et il suffit qu'elle soit essentiellement μ-intégrable, et on a* $\mu_X(B) = \mu(B)$.

COROLLAIRE 2. — *Soit g une fonction complexe définie dans* T *et localement μ-intégrable; la restriction g_X de g à* X *est alors localement μ_X-intégrable, et on a*

$$(g \,.\, \mu)_X = g_X \,.\, \mu_X \tag{5}$$

Cela résulte aussitôt du th. 1, appliqué aux fonctions fg ($f \in \mathscr{K}(T; \mathbf{C})$) et de la définition de la mesure induite par une mesure complexe sur X (chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, n° 7).

COROLLAIRE 3. — *Soit θ une mesure complexe sur* T; *on a*

$$|\theta|_X = |\theta_X| \tag{6}$$

Posons en effet $|\theta| = \mu$, et appliquons le cor. 2 en prenant pour g une fonction complexe de valeur absolue 1 telle que $\theta = g \,.\, \mu$ (§ 5, n° 5, cor. 3 du th. 2); il vient $\theta_X = g_X \,.\, \mu_X$; mais g_X est une fonction de valeur absolue 1, et la formule (6) résulte de la prop. 2 du § 5, n° 2.

Remarques. — a) Le cor. 3 a déjà été démontré par une autre méthode (chap. IV, 2[e] éd., § 7, lemme 3).

b) En vertu du cor. 3, les corollaires 1, 2, 3 de la prop. 1, la prop. 2, le théorème 1 et ses cor. 1, 2 s'étendent aussitôt à une mesure complexe.

Scholie. — Pour toute fonction $\mathbf{f}$ (resp. $\mathbf{g}$) définie dans X (resp. dans T) à valeurs dans l'espace de Banach F ou dans $\overline{\mathbf{R}}$, désignons par $\zeta(\mathbf{f})$ (resp. par $\rho(\mathbf{g})$) le prolongement par 0 de $\mathbf{f}$ à T (resp. la restriction de $\mathbf{g}$ à X). On a $\zeta(\rho(\mathbf{g})) = \varphi_X \cdot \mathbf{g}$, $\rho(\zeta(\mathbf{f})) = \mathbf{f}$. Désignons par μ' la mesure $\varphi_X \cdot \mu$ sur T. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, les propositions 1 et 2 entraînent que ζ applique $\mathscr{L}^p_F(X, \mu_X)$ dans $\mathscr{L}^p_F(T, \mu')$, que ρ applique $\mathscr{L}^p_F(T, \mu')$ sur $\mathscr{L}^p_F(X, \mu_X)$, avec conservation de la norme dans les deux cas, et de l'intégrale pour $p = 1$ (th. 1); par passage aux espaces séparés associés, on obtient deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre. De même, si l'on applique ζ et ρ à des fonctions numériques positives, il y a conservation de l'intégrale supérieure essentielle (prop. 1). Si l'on convient donc d'*identifier* une fonction sur X à une fonction sur T nulle sur X − T, et la mesure μ_X à la mesure μ', on ramène les problèmes concernant les mesures induites à des problèmes concernant les mesures définies par des densités, traités au § 5. Cette manière de raisonner s'applique d'ailleurs aussi aux mesures complexes, d'après le cor. 3 du th. 1.

2. *Propriétés des mesures induites*

PROPOSITION 3. — *Soient* X *un sous-espace localement compact de* T, *et* λ *une mesure complexe sur* X. *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

a) *l'injection canonique* $i : X \to T$ *est* λ-*propre* ;

b) *pour tout compact* K *de* T, $K \cap X$ *est essentiellement* λ-*intégrable* ;

c) *tout point* $t \in T$ *admet un voisinage* V *tel que* $V \cap X$ *soit essentiellement* λ-*intégrable* ;

d) *il existe une mesure* θ *sur* T *telle que* $\theta_X = \lambda$.

Si ces conditions équivalentes sont satisfaites, on a avec la notation de d),

$$(i(\lambda))_X = \lambda \qquad et \qquad i(\lambda) = i(\theta_X) = \varphi_X \cdot \theta. \tag{7}$$

L'injection i étant continue, l'équivalence des propriétés a), b) et c) résulte de la prop. 1 du § 6, et de la remarque qui la suit, appliquées à la mesure positive $|\lambda|$. Si λ est induite sur X par une mesure θ sur T, on a $|\lambda| = |\theta|_X$ (formule (6)), et par conséquent $|\lambda|(K \cap X) = |\theta|(K \cap X) \leqslant |\theta|(K) < +\infty$ (prop. 1) pour tout compact K de T, de sorte que d) entraîne b). Supposons que a) soit satisfaite, et montrons que $(i(\lambda))_X = \lambda$, ce qui entraînera d). Soit g un élément de $\mathscr{K}(X; \mathbf{C})$; on a, par définition de la mesure induite, puis par la prop. 7 du § 6, n° 4, g' désignant le prolongement par 0 de g à T,

$$\int g\, d(i(\lambda))_X = \int g'\, d(i(\lambda)) = \int (g' \circ i)\, d\lambda = \int g\, d\lambda.$$

Cela achève de prouver l'équivalence des quatre propriétés. Si $\lambda = \theta_X$, et si $g \in \mathscr{K}(T; \mathbf{C})$, on a

$$\int g\, d(i(\theta_X)) = \int (g \circ i)\, d(\theta_X) = \int g\varphi_X\, d\theta,$$

car $g\varphi_X$ est le prolongement par 0 de $g \circ i$ à T. Cela prouve la seconde formule (7).

Corollaire 1. — *Si* X *est fermé, toute mesure complexe* λ *sur* X *est induite par une mesure sur* T.

En effet, si K est un compact de T, $K \cap X$ est alors compact, donc λ-intégrable.

Corollaire 2. — *Soient* θ *une mesure complexe sur* T, π *une application* θ*-propre de* T *dans un espace localement compact* Y, *et* π_X *sa restriction à* X. *Alors* π_X *est* θ_X*-propre, et on a* $\pi_X(\theta_X) = \pi(\varphi_X \cdot \theta)$.

En effet, on a $\pi_X = \pi \circ i$, où i est l'injection canonique $X \to T$. Lorsque θ est positive le corollaire se déduit donc de la prop. 3 et de la transitivité des mesures images (§ 6, n° 3, prop. 4). Le cas d'une mesure complexe non positive en résulte par linéarité.

Proposition 4. — *Soient* X *et* Y *deux sous-espaces localement compacts de* T, *tels que* $Y \subset X$. *Si* θ *est une mesure complexe sur* T, *la mesure* $(\theta_X)_Y$ *induite par* θ_X *sur* Y *est égale à* θ_Y (« transitivité des mesures induites »).

Il suffit de remarquer que, si g est un élément de $\mathscr{K}(Y; \mathbf{C})$, le prolongement par 0 de g à T s'obtient en prolongeant par 0 le prolongement par 0 de g à X, ou encore, en utilisant les identifications du *Scholie*, que $\varphi_Y \cdot \theta = \varphi_Y(\varphi_X \cdot \theta)$ (§ 5, n° 4, prop. 8).

PROPOSITION 5.— *Soit* $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ *une famille filtrante croissante de mesures positives sur* T, *admettant une borne supérieure* λ, *et soit* X *un sous-espace localement compact de* T. *La famille des mesures induites* $\lambda_\alpha|X$ *est alors majorée dans* $\mathscr{M}(X)$, *et on a*

$$\sup_{\alpha\in A}(\lambda_\alpha|X) = \lambda|X. \tag{8}$$

Compte tenu des identifications du *Scholie*, cette proposition est un cas particulier de la prop. 5 du § 5, n° 4.

COROLLAIRE. — *Soit* $(\mu_i)_{i\in I}$ *une famille sommable de mesures positives sur* T, *de somme* μ. *La famille des mesures induites* $\mu_i|X$ *est alors sommable, et on a*

$$\sum_{i\in I}(\mu_i|X) = \mu|X. \tag{9}$$

PROPOSITION 6.— *Soit* $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ *une application* μ*-adéquate de* T *dans* $\mathscr{M}_+(X)$, *où* X *est un espace localement compact* dénombrable à l'infini, *et soit* Y *un sous-espace localement compact de* X. *Posons* $\int \lambda_t \, d\mu(t) = \nu$. *L'application* $t \mapsto \lambda_t|Y$ *de* T *dans* $\mathscr{M}_+(Y)$ *est alors* μ*-adéquate, et on a*

$$\int (\lambda_t|Y)\, d\mu(t) = \nu|Y. \tag{10}$$

Compte tenu des identifications du *Scholie*, cette proposition est un cas particulier de la prop. 7 du § 5, n° 4.

§ 8. — Produits de mesures

1. Interprétation de la mesure produit comme intégrale de mesures

Dans tout ce paragraphe on note T, T′ *deux espaces localement compacts,* μ *une mesure positive sur* T, μ' *une mesure positive sur* T′, $\nu = \mu \otimes \mu'$ *la mesure produit sur* $X = T \times T'$ (chap. III, 2[e] éd., § 4, n° 1).

Pour tout $t \in T$, l'application $t' \mapsto (t, t')$ de T′ dans X est continue et propre. Soit λ'_t l'image de μ' par cette application; λ'_t est une mesure positive sur X, et si $f \in \mathscr{K}(X)$, on a, en désignant par f_t l'application partielle $t' \mapsto f(t, t')$

$$\int f \, d\lambda'_t = \int f_t \, d\mu' \tag{1}$$

ce qui s'exprime encore par la relation $\lambda'_t = \varepsilon_t \otimes \mu'$.

En outre, l'application $t \mapsto \lambda'_t(f)$ est continue et à support compact (chap. III, 2[e] éd., § 4, n° 1, lemme 2), donc l'application $t \mapsto \lambda'_t$ de T dans $\mathscr{M}(\mathrm{X})$ est vaguement continue (et *a fortiori* vaguement μ-mesurable); par suite la famille de mesures $t \mapsto \lambda'_t$ est *μ-adéquate* (§ 3, n° 1, prop. 2a)). L'intégrale de f par rapport à la mesure $\int \lambda'_t \, d\mu(t)$ est par définition

$$\int \langle f, \lambda'_t \rangle \, d\mu(t) = \int d\mu(t) \int f_t(t') \, d\mu'(t') = \int f(t, t') \, d\nu(t, t')$$

(chap. III, 2[e] éd., § 4, n° 1, th. 2); on a donc $\nu = \int \lambda'_t \, d\mu(t)$.

De même, pour tout élément $t' \in \mathrm{T}'$, soit $\lambda_{t'}$ l'image de μ par l'application $t \mapsto (t, t')$ de T dans X. L'application $t' \mapsto \lambda_{t'}$ est μ'-adéquate et vaguement continue, et on a $\nu = \int \lambda_{t'} \, d\mu'(t')$. Nous aurons besoin des lemmes suivants:

Lemme 1. — *Pour toute fonction numérique $f \geqslant 0$ définie dans* X *on a*

$$\int^* f_t \, d\mu' = \int^* f \, d\lambda'_t. \tag{2}$$

Comme $t' \mapsto (t, t')$ est une application continue et propre, cela résulte de la prop. 2 du § 4, n° 2.

Lemme 2. — *Soit f une application de* X *dans un espace topologique. Pour que f soit λ'_t-mesurable, il faut et il suffit que f_t soit μ'-mesurable.*

C'est une conséquence de la prop. 3 du § 6, n° 2.

Lemme 3. — *Soit* $\mathbf{f}$ *une fonction définie dans* X, *à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *ou dans un espace de Banach. Pour que* $\mathbf{f}$ *soit λ'_t-intégrable, il faut et il suffit que* $\mathbf{f}_t$ *soit μ'-intégrable, et on a alors*

$$\int \mathbf{f}_t \, d\mu' = \int \mathbf{f} \, d\lambda'_t. \tag{3}$$

Cela résulte du th. 2 du § 4, n° 4, compte tenu de ce que $t' \mapsto (t, t')$ est continue et propre.

Remarque. — On peut démontrer fort simplement les lemmes 1, 2, 3 sans faire usage des résultats des §§ 4 et 6, par un raisonnement direct. Par exemple, la relation (2) est évidente par définition si $f \in \mathscr{K}(\mathrm{T} \times \mathrm{T}')$. Si f est semi-continue inférieurement dans $\mathrm{X} = \mathrm{T} \times \mathrm{T}'$, il suffit de remarquer que $t' \mapsto f_t(t')$ est l'enveloppe supérieure des fonctions $t' \mapsto g_t(t') = g(t, t')$, où g parcourt l'ensemble des fonctions de $\mathscr{K}(X)$ telles que $0 \leqslant g \leqslant f$. Enfin, pour f quelconque, on notera que si $h \geqslant f$ est semi-continue inférieurement dans X, $t' \mapsto h(t, t')$ est semi-continue inférieurement dans T'; et réciproquement, si $t' \mapsto u(t')$ est semi-continue inférieurement dans T' et telle que $u(t') \geqslant f(t, t')$ pour tout $t' \in T'$, la fonction h telle que $h(t, t') = u(t'), h(t_1, t') = +\infty$ pour $t_1 \neq t$, est semi-continue inférieurement dans X et telle que $h \geqslant f$. Une fois le lemme 1 démontré, on en déduit que l'ensemble $(T - \{t\}) \times T'$ est λ'_t-négligeable, et il est alors très facile de démontrer les lemmes 2 et 3.

La relation (3) permet de noter les deux membres $\int \mathbf{f}(t, t')\, d\mu'(t')$ sans risque de confusion. On a évidemment des résultats analogues pour les mesures $\lambda_{t'} = \mu \otimes \varepsilon_{t'}$.

A la place des notations $\int^* f(t, t')\, d\nu(t, t')$, $\int^\bullet f(t, t')\, d\nu(t, t')$, $\int \mathbf{f}(t, t')\, d\nu(t, t')$ nous utiliserons les notations $\iint^* f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t')$, $\iint^\bullet f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t')$, $\iint \mathbf{f}(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t')$, en accord avec les notations adoptées au chap. III, 2[e] éd., § 4, n° 1.

L'interprétation de la mesure ν comme une intégrale $\int \lambda'_t\, d\mu(t)$ va nous permettre de traduire dans le langage des mesures produit les résultats du § 3. D'autre part, la mesure λ'_t est portée par $\{t\} \times T' = \overset{-1}{\mathrm{pr}}_1(t)$, de sorte que cette intégrale définit une décomposition en tranches de ν, relativement à la projection pr_1 de $T \times T'$ sur T (§ 6, n° 6). Avant de donner une liste des résultats que l'on obtient ainsi, voici une propriété utile:

PROPOSITION 1. — *Soit* $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ (resp. $(\mu'_\beta)_{\beta \in B}$) *une famille sommable de mesures positives sur* T (resp. *sur* T') *dont on désigne la somme par* μ (resp. *par* μ'). *La famille* $(\mu_\alpha \otimes \mu'_\beta)_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$ *est alors sommable sur* $T \times T'$, *et on a*

$$\mu \otimes \mu' = \sum_{(\alpha,\beta) \in A \times B} \mu_\alpha \otimes \mu'_\beta. \tag{4}$$

Ces propriétés sont évidentes lorsque A et B sont finis. Il en résulte qu'on a, si A' (resp. B') est une partie finie de A (resp. de B),

$$\sum_{(\alpha,\beta) \in A' \times B'} \mu_\alpha \otimes \mu'_\beta \leqslant \mu \otimes \mu'.$$

La famille $(\mu_\alpha \otimes \mu'_\beta)$ est donc sommable. Pour montrer que les deux membres de (4) sont égaux, il suffit de prouver que le second membre satisfait à la propriété caractéristique des mesures produit (chap. III, 2ᵉ éd., § 4, n° 1, th. 1), ce que montre le calcul suivant.

Soient f un élément de $\mathscr{K}_+(\mathrm{T})$, f' un élément de $\mathscr{K}_+(\mathrm{T}')$; rappelons qu'on note $f \otimes f'$ la fonction $(t, t') \mapsto f(t)f'(t')$ sur $\mathrm{T} \times \mathrm{T}'$, qui appartient à $\mathscr{K}_+(\mathrm{T} \times \mathrm{T}')$ (*Alg.*, chap. II, 3ᵉ éd., § 7, n° 7). On a alors d'après la définition des produits de mesures:

$$\begin{aligned}\sum_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{A}\times\mathrm{B}} \langle \mu_\alpha \otimes \mu'_\beta, f \otimes f'\rangle &= \sum_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{A}\times\mathrm{B}} (\langle \mu_\alpha, f\rangle \langle \mu'_\beta, f'\rangle)\\ &= \Big(\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \langle \mu_\alpha, f\rangle\Big)\Big(\sum_{\beta\in\mathrm{B}} \langle \mu'_\beta, f'\rangle\Big)\\ &= \langle \mu, f\rangle \langle \mu', f'\rangle\\ &= \langle \mu \otimes \mu', f \otimes f'\rangle.\end{aligned}$$

2. *Fonctions mesurables par rapport à un produit de deux mesures*

PROPOSITION 2. — *Soit f une fonction ν-mesurable définie dans* $\mathrm{T} \times \mathrm{T}'$, *à valeurs dans un espace topologique* G, *et soit* M *l'ensemble des $t \in \mathrm{T}$ tels que l'application $t' \mapsto f(t, t')$ ne soit pas μ'-mesurable.*

a) *Si f est constante dans le complémentaire d'une partie ν-modérée de* $\mathrm{T} \times \mathrm{T}'$, M *est μ-négligeable.*

b) *Si μ' est modérée,* M *est localement μ-négligeable.*

L'assertion a) découle de la prop. 4b) du § 3, n° 2 et des remarques du n° 1. Pour traiter b), remarquons que μ' est somme d'une suite μ'_n de mesures bornées (§ 2, n° 3, prop. 4); f est mesurable par rapport à $\mu \otimes \mu'_n \leqslant \nu$, et l'ensemble M est réunion des ensembles M_n associés aux mesures μ'_n (§ 2, n° 2, prop. 2). On est donc ramené au cas où μ' est bornée, qui résulte de la prop. 4 c) du § 3, n° 2.

Cet énoncé s'étend immédiatement aux mesures complexes (chap. III, 2ᵉ éd., § 4, n° 2, prop. 3).

COROLLAIRE. — *Soit* A *une partie ν-mesurable de* $\mathrm{T} \times \mathrm{T}'$, *et soit* M *l'ensemble des $t \in \mathrm{T}$ tels que la coupe* A(t) *de* A *suivant t ne soit pas μ'-mesurable.*

a) *Si* A *est ν-modéré,* M *est μ-négligeable.*

b) *Si la projection de* A *sur* T′ *est μ-modérée,* M *est localement μ-négligeable.*

L'assertion a) découle immédiatement de la prop. 2. Pour établir b), désignons par B un ensemble, réunion d'une suite d'ouverts μ'-intégrables de T′, qui contient la projection de A sur T′, et désignons par μ'_1 la mesure modérée $\varphi_B \,.\, \mu'$; A étant mesurable par rapport à $\mu \otimes \mu'_1 \leqslant \mu \otimes \mu'$, la prop. 2 entraîne que $A(t)$ est μ'_1-mesurable, sauf pour des t qui forment un ensemble localement μ-négligeable. Mais comme $A(t) \subset B$, dire que $A(t)$ est μ'_1-mesurable équivaut à dire que $A(t)$ est μ'-mesurable (§ 5, n° 3, prop. 4).

PROPOSITION 3. — *Soit f une application de* T *dans un espace topologique* F. *Si f est μ-mesurable, l'application $(t, t') \mapsto f(t)$ est ν-mesurable. Inversement, si $\mu' \neq 0$, et si cette application est ν-mesurable, la fonction f est μ-mesurable.*

La première assertion résulte du cor. 1 de la prop. 10 du § 6, n° 6. Supposons qu'on ait $\mu' \neq 0$, désignons par μ'_1 une mesure à support compact non nulle majorée par μ', par ν_1 la mesure $\mu \otimes \mu'_1$, et posons $a = \|\mu'_1\|$. La projection pr_1 de $T \times T'$ sur T est alors ν_1-propre, et la mesure image $\mathrm{pr}_1(\nu_1)$ est égale à $a\mu$ (§ 6, n° 6, prop. 10). Si $(t, t') \mapsto f(t)$ est ν-mesurable, elle est aussi ν_1-mesurable, donc f est mesurable par rapport à la mesure $a\mu$ (§ 6, n° 2, prop. 3), d'où le résultat puisque $a \neq 0$.

L'énoncé précédent s'étend immédiatement aux mesures complexes (chap. III, § 4, n° 2, prop. 3), ainsi que les corollaires ci-dessous.

COROLLAIRE 1. — *Soient* F, F′ *et* G *trois espaces topologiques, et soit u une application continue de* $F \times F'$ *dans* G. *Soit f* (resp. f') *une fonction définie dans* T (resp. T′) *à valeurs dans* F (resp. F′) *et mesurable pour μ* (resp. μ'). *Alors la fonction $(t, t') \mapsto u(f(t), f'(t'))$ est mesurable pour $\mu \otimes \mu'$.*

Les applications $(t, t') \mapsto f(t)$, $(t, t') \mapsto f'(t')$ étant ν-mesurables d'après la prop. 3, cela résulte du th. 1 du chap. IV, § 5, n° 3.

COROLLAIRE 2. — *Si* $A \subset T$ *et* $A' \subset T'$ *sont mesurables* (*pour μ et μ' respectivement*), $A \times A'$ *est mesurable pour $\mu \otimes \mu'$.*

Cela résulte aussitôt du cor. 1.

COROLLAIRE 3. — *Considérons deux fonctions numériques positives* (resp. *à valeurs complexes*), *f définie dans* T, *f' définie dans* T′. *Si ces fonctions sont mesurables pour μ et μ' respectivement, la fonction $f \otimes f' : (t, t') \mapsto f(t) f'(t')$ est mesurable pour $\mu \otimes \mu'$.*

Le cas des fonctions complexes, ou des fonctions réelles finies, est une conséquence immédiate du cor. 1. Pour traiter le cas des fonctions numériques positives, on pose pour tout entier $n \geqslant 0$, $f_n = \inf(f, n)$, $f'_n = \inf(f', n)$ et on a (avec la convention habituelle $0.(+\infty) = 0$) $f \otimes f' = \sup_n (f_n \otimes f'_n)$, d'où le résultat.

PROPOSITION 4. — *Soit* A *une partie de* T. *Si* A *est localement μ-négligeable,* $A \times T'$ *est localement ν-négligeable. Inversement, si* $A \times T'$ *est localement ν-négligeable, et si $\mu' \neq 0$,* A *est localement μ-négligeable.*

La première assertion résulte du cor. 1 de la prop. 10 du § 6, n° 6. Pour établir la seconde assertion, reprenons les notations de la démonstration de la prop. 3; $A \times T' = \overset{-1}{\mathrm{pr}}_1(A)$ est localement négligeable pour la mesure ν_1, donc A est localement négligeable pour $a\mu$ (§ 6, n° 2, cor. 2 de la prop. 2), d'où le résultat puisque $a \neq 0$.

L'énoncé précédent s'étend aussitôt au produit de deux mesures complexes (chap. III, 2[e] éd., § 4, n° 2, prop. 3), ainsi que le corollaire ci-dessous.

COROLLAIRE. — *Si la mesure* μ (resp. μ') *est concentrée sur* M (resp. M′), $\mu \otimes \mu'$ *est concentrée sur* $M \times M'$.

En effet, $(T \times T') - (M \times M')$ est réunion de $(T - M) \times T'$ et de $T \times (T' - M')$ qui sont localement négligeables pour $\mu \otimes \mu'$ en vertu de la prop. 4.

3. *Intégration de fonctions positives*

Rappelons que nous avons convenu de définir le produit $0.(+\infty)$ comme égal à 0. Cette convention a en particulier la conséquence suivante: si f est une fonction numérique $\geqslant 0$ définie dans un espace localement compact muni d'une mesure positive λ, on a $\lambda^*(af) = a.\lambda^*(f)$ pour toute constante a telle que $0 \leqslant a \leqslant +\infty$. C'est évident si $a = 0$; si $a = +\infty$, on a $\lambda^*(af) = a.\lambda^*(f) = 0$ ou $\lambda^*(af) = a.\lambda^*(f) = +\infty$ suivant que f est ou n'est pas λ-négligeable; enfin, si $0 < a < +\infty$, on sait que $\lambda^*(af) = a.\lambda^*(f)$.

PROPOSITION 5. — *Soit f une fonction numérique $\geqslant 0$, semi-continue inférieurement dans* $T \times T'$. *Alors, la fonction*

$$t \mapsto \int^* f(t, t')\, d\mu'(t')$$

est semi-continue inférieurement dans T, *et on a*

$$(5)\qquad \iint^* f(t,t')\,d\mu(t)\,d\mu'(t') = \int^* d\mu(t)\int^* f(t,t')\,d\mu'(t').$$

C'est une conséquence de la prop. 2 du § 3, n° 1, compte tenu du lemme 1 du n° 1.

COROLLAIRE 1. — *Soit* f (resp. f') *une fonction semi-continue inférieurement* $\geqslant 0$ *définie dans* T (resp. *dans* T'); *la fonction* $f \otimes f' : (t, t') \mapsto f(t)f'(t')$ *est alors semi-continue inférieurement dans* T × T', *et on a*

$$(6)\qquad \iint^* f(t)f'(t')\,d\mu(t)\,d\mu'(t') = \left(\int^* f(t)\,d\mu(t)\right)\left(\int^* f'(t')\,d\mu'(t')\right).$$

Soit G (resp. G') l'ensemble des fonctions $g \in \mathscr{K}_+(\mathrm{T})$ (resp. $g' \in \mathscr{K}_+(\mathrm{T}')$) telles que $g \leqslant f$ (resp. $g' \leqslant f'$); on a

$$f \otimes f' = \sup_{g \in \mathrm{G},\, g' \in \mathrm{G}'} g \otimes g'.$$

Les fonctions $g \otimes g'$ appartenant à $\mathscr{K}_+(\mathrm{T} \times \mathrm{T}')$, $f \otimes f'$ est bien semi-continue inférieurement, et (6) résulte aussitôt de la prop. 5 (ou directement d'un passage à la limite à partir de la formule précédente).

COROLLAIRE 2. — *Soient* A *une partie* μ*-modérée de* T, A' *une partie* μ'*-modérée de* T'; A × A' *est alors* ν*-modérée dans* T × T'.

Compte tenu de la définition des ensembles modérés (§ 1, n° 2, prop. 5), il suffit de montrer que si B est un ouvert intégrable de T, et B' un ouvert intégrable de T', l'ouvert B × B' est intégrable. Cela résulte aussitôt du cor. 1.

COROLLAIRE 3. — *Soient* A *une partie* μ*-négligeable de* T, B' *une partie* μ'*-modérée de* T'; A × B' *est alors* ν*-négligeable.*

En effet, A × B' est localement ν-négligeable (prop. 4) et ν-modéré (cor. 2), donc ν-négligeable (§ 1, n° 2, cor. 1 de la prop. 7).

Les cor. 2 et 3 s'étendent au produit de deux mesures complexes, en appliquant l'énoncé à leurs valeurs absolues (chap. III, 2e éd., § 4, prop. 3).

PROPOSITION 6. — *Soit* f *une fonction numérique* $\geqslant 0$ *définie dans* $\mathrm{T} \times \mathrm{T}'$. *On a*

$$\iint^* f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') \geqslant \int^* d\mu(t) \int^* f(t, t')\, d\mu'(t').$$

Cela résulte de la prop. 3 du § 3, n° 2, compte tenu de (2).

PROPOSITION 7. — *Soit* f *une fonction numérique positive* ν*-mesurable définie dans* $\mathrm{T} \times \mathrm{T}'$.

a) *Si* f *est* ν*-modérée, les fonctions* $t \mapsto \int^* f(t, t')\, d\mu'(t')$, $t' \mapsto \int^* f(t, t')\, d\mu(t)$ *sont mesurables respectivement pour* μ *et* μ', *et on a*

$$\iint^* f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \int^* d\mu(t) \int^* f(t, t')\, d\mu'(t') \tag{7}$$

$$= \int^* d\mu'(t') \int^* f(t, t')\, d\mu(t).$$

b) *Si la mesure* μ' *est modérée, la fonction* $t \mapsto \int^\bullet f(t, t')\, d\mu'(t')$ *est* μ*-mesurable, et on a*

$$\iint^\bullet f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \int^\bullet d\mu(t) \int^\bullet f(t, t')\, d\mu'(t'). \tag{8}$$

L'assertion a), ainsi que l'assertion b) lorsque μ' est bornée, sont des conséquences de la prop. 5 du § 3, n° 2. Pour traiter le cas où μ' est modérée, représentons μ' comme une somme $\sum_{n \in \mathbf{N}} \mu'_n$ d'une suite de mesures bornées (§ 2, n° 3, prop. 4). La fonction $t \mapsto \int^\bullet f(t, t')\, d\mu'_n(t')$ est alors μ-mesurable, et on a

$$\iint^\bullet f(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'_n(t') = \int^\bullet d\mu(t) \int^\bullet f(t, t')\, d\mu'_n(t').$$

Mais on a $\mu \otimes \mu' = \sum_{n \in \mathbf{N}} (\mu \otimes \mu'_n)$ (prop. 1); l'assertion b) s'obtient alors en sommant sur n (§ 2, n° 2, prop. 1).

COROLLAIRE 1. — *Soit* H *une partie de* $\mathrm{T} \times \mathrm{T}'$, *et soit* A *l'ensemble des* $t \in \mathrm{T}$ *tels que la coupe* $\mathrm{H}(t)$ *de* H *suivant* t *ne soit pas* μ'*-négligeable.*

a) *Si* H *est* ν*-négligeable,* A *est* μ*-négligeable.*

b) *Si* H *est localement* ν*-négligeable, et si* μ' *est modérée,* A *est localement* μ*-négligeable.*

La propriété a) résulte aussitôt de la prop. 7 (ou de la prop. 6). Sous l'hypothèse de b), il revient au même de dire que $H(t)$ est localement μ'-négligeable, ou μ'-négligeable, puisque μ' est modérée (§ 1, n° 2, prop. 7). La propriété b) résulte donc de la formule (8).

Ce corollaire s'étend aussitôt, par passage aux valeurs absolues, au produit de deux mesures complexes. Il en est de même du corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. — *Si un ensemble* $A \subset T \times T'$ *est* ν*-intégrable, alors, pour presque tout* $t \in T$, *la coupe* $A(t)$ *de* A *suivant* t *est* μ'*-intégrable, la fonction* $t \mapsto \mu'(A(t))$ *est* μ*-intégrable, et on a*

$$\nu(A) = \int \mu'(A(t))\, d\mu(t). \tag{9}$$

PROPOSITION 8. — *Pour tout couple de fonctions numériques* $f \geqslant 0$, $f' \geqslant 0$, *définies respectivement dans* T *et dans* T', *on a*

$$\iint^{\bullet} f(t)f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \left(\int^{\bullet} f(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^{\bullet} f'(t')\, d\mu'(t')\right). \tag{10}$$

Nous commencerons par traiter le cas où μ et μ' sont des mesures *à support compact*; il en est alors de même pour $\mu \otimes \mu'$, et tous les symboles $\int^{\bullet}$, $\iint^{\bullet}$ peuvent être remplacés par des intégrales supérieures. Nous avons, d'après la prop. 6:

$$\iint^{*} f(t)f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') \geqslant \int^{*} d\mu(t) \int^{*} f(t)f'(t')\, d\mu'(t')$$

$$= \left(\int^{*} f(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int^{*} f'(t')\, d\mu'(t')\right).$$

Pour établir l'inégalité inverse, choisissons une fonction $h \geqslant f$ (resp. $h' \geqslant f'$), enveloppe inférieure d'une suite (h_n) (resp. (h'_n)) de fonctions semi-continues inférieurement, et telle que

$$\int^{*} h(t)\, d\mu(t) = \int^{*} f(t)\, d\mu(t)$$

(resp. $\int^{*} h'(t')\, d\mu'(t') = \int^{*} f'(t')\, d\mu'(t')$); l'existence de telles fonctions résulte immédiatement de la définition de l'intégrale supérieure (chap. IV, § 1, n° 3, déf. 4) et du théorème de Lebesgue. Si nous appliquons la prop. 7 à la fonction mesurable $h \otimes h'$, il vient :

$$\iint^* f(t)f'(t')\,d\mu(t)\,d\mu'(t') \leqslant \iint^* h(t)h'(t')\,d\mu(t)\,d\mu'(t')$$
$$= \left(\int^* h(t)\,d\mu(t)\right)\left(\int^* h'(t')\,d\mu'(t')\right)$$
$$= \left(\int^* f(t)\,d\mu(t)\right)\left(\int^* f'(t')\,d\mu'(t')\right),$$

qui est l'inégalité cherchée. La proposition est donc établie lorsque μ et μ' sont des mesures à support compact. Pour traiter le cas général, il suffit de représenter μ (resp. μ') comme la somme d'une famille $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ (resp. $(\mu'_\beta)_{\beta\in B}$) de mesures à support compact (§ 2, n° 3, prop. 4), d'écrire la formule (10) pour chaque mesure $\mu_\alpha \otimes \mu'_\beta$, et de sommer sur (α, β) en tenant compte de la prop. 1 (§ 2, n° 1, prop. 1).

Corollaire 1. — *Avec les mêmes notations que dans la prop. 8, on a*

$$\iint^* f(t)f'(t')\,d\mu(t)\,d\mu'(t') = \left(\int^* f(t)\,d\mu(t)\right)\left(\int^* f'(t')\,d\mu'(t')\right) \tag{11}$$

sauf au plus lorsque l'un des facteurs du second membre est égal à 0 *et l'autre égal à* $+\infty$.

Lorsque les deux facteurs du second membre sont finis, les fonctions f et f' sont modérées (§ 1, n° 2, prop. 7), la fonction $f \otimes f'$ est donc modérée (cor. 2 de la prop. 5); l'égalité ci-dessus se réduit donc à la formule (10) (§ 1, n° 2, prop. 7). Lorsque l'un des facteurs du second membre vaut $+\infty$, et que l'autre n'est pas nul, le second membre vaut $+\infty$, et l'égalité ci-dessus résulte de la prop. 6.

Corollaire 2. — *Soient f et f' deux fonctions à valeurs dans* $\mathbf{C}$ *ou dans* $\overline{\mathbf{R}}$, *définies respectivement dans* T *et dans* T', *essentiellement intégrables (resp. intégrables) pour les mesures μ et μ' respectivement. La fonction $f \otimes f'$ est alors essentiellement intégrable (resp. intégrable) pour la mesure $\mu \otimes \mu'$ et on a*

$$\iint f(t)f'(t')\,d\mu(t)\,d\mu'(t') = \left(\int f(t)\,d\mu(t)\right)\left(\int f'(t')\,d\mu'(t')\right) \tag{12}$$

Lorsque f et f' sont positives, $f \otimes f'$ est mesurable d'après le cor. 3 de la prop. 3, et l'énoncé résulte de la formule (10) (resp. (11)), et du critère d'intégrabilité essentielle (§ 1, n° 3, prop. 9) (resp. du critère d'intégrabilité du chap. IV, § 5, n° 6, th. 5). Le cas général en résulte immédiatement.

Le corollaire 2 s'étend aussitôt au produit de deux mesures complexes.

4. *Intégration de fonctions à valeurs dans un espace de Banach*

THÉORÈME 1 (Lebesgue–Fubini). — *Soit* $\mathbf{f}$ *une fonction définie dans* $T \times T'$, *à valeurs dans un espace de Banach* F *ou dans* $\overline{\mathbf{R}}$; *soit* N *l'ensemble des* $t \in T$ *tels que la fonction* $t' \mapsto \mathbf{f}(t, t')$ *ne soit pas* μ'*-intégrable.*

a) *Supposons que* $\mathbf{f}$ *soit* ν*-intégrable*; N *est alors* μ*-négligeable, la fonction* $t \mapsto \int \mathbf{f}(t, t')\, d\mu'(t')$ (*définie pour* $t \notin$ N) *est* μ*-intégrable, et on a*

$$\iint \mathbf{f}(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \int d\mu(t) \int \mathbf{f}(t, t')\, d\mu'(t'). \tag{13}$$

b) *Supposons que* $\mathbf{f}$ *soit essentiellement* ν*-intégrable, et que la mesure* μ' *soit modérée*; N *est alors localement* μ*-négligeable, la fonction* $t \mapsto \int \mathbf{f}(t, t')\, d\mu'(t')$ (*définie pour* $t \notin$ N) *est essentiellement* μ'*-intégrable, et on a* (13).

L'assertion a) résulte aussitôt du th. 1 du § 3, n° 3. Pour établir b), désignons par $\mathbf{g}$ une fonction ν-intégrable, égale à $\mathbf{f}$ localement presque partout, et par H l'ensemble des (t, t') tels que $\mathbf{f}(t, t') \neq \mathbf{g}(t, t')$. D'après le cor. 1 de la prop. 7, la coupe $H(t)$ est μ'-négligeable, sauf pour des $t \in T$ qui forment un ensemble localement μ-négligeable. Le résultat relatif à $\mathbf{f}$ se déduit donc de l'énoncé a), appliqué à $\mathbf{g}$.

Scholie. — *Soit* $\mathbf{f}$ *une fonction définie dans* $T \times T'$, *à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *ou dans un espace de Banach,* ν*-mesurable et* ν*-modérée. Pour que les trois intégrales*

$$\iint \mathbf{f}(t, t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t'), \quad \int d\mu(t) \int \mathbf{f}(t, t')\, d\mu'(t'), \quad \int d\mu'(t') \int \mathbf{f}(t, t')\, d\mu(t)$$

existent et soient égales, il faut et il suffit que l'un des deux nombres $\int^* d\mu(t) \int^* |\mathbf{f}(t, t')|\, d\mu'(t')$, $\int^* d\mu'(t') \int^* |\mathbf{f}(t, t')|\, d\mu(t)$ *soit fini.*

C'est une conséquence immédiate du th. 1, de la prop. 7 et du critère d'intégrabilité (chap. IV, § 5, n° 6, th. 5).

Remarques. — 1) Lorsque la mesure μ' n'est pas modérée, il se peut que $\mathbf{f}$ soit essentiellement ν-intégrable, et que la fonction $t \mapsto \mathbf{f}(t, t')$ ne soit essentiellement μ'-intégrable pour aucune valeur de $t \in \mathrm{T}$ (§ 3, exerc. 4).

2) Soient μ et μ' deux mesures complexes, et soit $\nu = \mu \otimes \mu'$. Si $\mathbf{f}$ est ν-intégrable (autrement dit, $|\nu|$-intégrable), le théorème appliqué aux mesures $|\mu|$ et $|\mu'|$, dont le produit est $|\nu|$ (chap. III, 2e éd., § 4, n° 2, prop. 3), entraîne que $t' \mapsto \mathbf{f}(t, t')$ est μ'-intégrable pour μ-presque tout t. On en déduit, en décomposant les mesures μ et μ' en combinaison linéaire de mesures positives, que l'énoncé de a) s'étend aux mesures complexes. On peut raisonner de même pour b).

PROPOSITION 9. — *Soient* F, F′ *et* G *trois espaces de Banach, et soit* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto [\mathbf{x} . \mathbf{y}]$ *une application bilinéaire continue de* $\mathrm{F} \times \mathrm{F}'$ *dans* G. *Soit* $\mathbf{f}$ (*resp.* $\mathbf{f}'$) *une fonction définie dans* T (*resp.* T′) *à valeurs dans* F (*resp.* F′) *et essentiellement intégrable pour* μ (*resp.* μ'). *Soit* $\mathbf{g}$ *la fonction* $(t, t') \mapsto [\mathbf{f}(t) . \mathbf{f}'(t')]$; $\mathbf{g}$ *est alors essentiellement intégrable pour* $\mu \otimes \mu'$, *et on a*

$$\iint [\mathbf{f}(t) . \mathbf{f}'(t')]\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \Big[\Big(\int \mathbf{f}(t)\, d\mu(t)\Big) . \Big(\int \mathbf{f}'(t')\, d\mu'(t')\Big)\Big]. \tag{14}$$

Si de plus $\mathbf{f}$ *et* $\mathbf{f}'$ *sont intégrables,* $\mathbf{g}$ *est intégrable.*

La fonction $(t, t') \mapsto [\mathbf{f}(t) . \mathbf{f}'(t')]$ est $(\mu \otimes \mu')$-mesurable d'après le cor. 1 de la prop. 3. D'autre part, si b désigne la norme de l'application bilinéaire $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto [\mathbf{x} . \mathbf{y}]$, on a

$$\begin{aligned}\iint^{\bullet} \|[\mathbf{f}(t) . \mathbf{f}'(t')]\|\, d\mu(t)\, d\mu'(t') &\leqslant b \iint^{\bullet} |\mathbf{f}(t)| . |\mathbf{f}'(t')|\, d\mu(t)\, d\mu'(t') \\ &= b\Big(\int^{\bullet} |\mathbf{f}(t)|\, d\mu(t)\Big)\Big(\int^{\bullet} |\mathbf{f}'(t')|\, d\mu'(t')\Big)\end{aligned}$$

en vertu de la prop. 8. Cela montre que $[\mathbf{f}(t) . \mathbf{f}'(t')]$ est essentiellement intégrable pour $\mu \otimes \mu'$ (§ 1, n° 3, prop. 9). Supposons que $\mathbf{f}$ et $\mathbf{f}'$ soient intégrables : $\mathbf{f}$ et $\mathbf{f}'$ sont alors modérées, $\mathbf{g}$ est modérée (cor. 2 de la prop. 5), donc intégrable (§ 1, n° 3, cor. de la prop. 9). Dans ce cas la formule (14) résulte du théorème de Lebesgue-Fubini et de la linéarité de l'intégrale (chap. IV, § 4, n° 2, th. 1). Pour achever de traiter le cas où $\mathbf{f}$ et $\mathbf{f}'$ sont essentiellement intégrables, on applique alors (14) à deux fonctions intégrables $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{f}'_1$, égales localement presque partout à $\mathbf{f}$ et $\mathbf{f}'_1$, en remarquant que $[\mathbf{f} . \mathbf{f}'] = [\mathbf{f}_1 . \mathbf{f}'_1]$ localement presque partout dans $\mathrm{T} \times \mathrm{T}'$ (prop. 4).

Ce résultat s'étend au produit de deux mesures complexes.

5. Opérations sur le produit de deux mesures

PROPOSITION 10. — *Soit g (resp. g') une fonction complexe (ou une fonction à valeurs dans $\bar{\mathbf{R}}$) définie dans* T *(resp.* T'*).*

a) *Si g (resp. g') est localement intégrable pour μ (resp. μ'), la fonction $g \otimes g'$: $(t, t') \mapsto g(t)g'(t')$ est localement intégrable pour $\nu = \mu \otimes \mu'$, et on a*

$$(g \cdot \mu) \otimes (g' \cdot \mu') = (g \otimes g') \cdot (\mu \otimes \mu'). \tag{15}$$

b) *Inversement, si $g \otimes g'$ est localement ν-intégrable, et si g' n'est pas localement μ'-négligeable, g est localement μ-intégrable.*

a) Soient K et K' deux parties compactes de T et de T' respectivement; le cor. 2 de la prop. 8 montre que la fonction $(t, t') \mapsto g(t)g'(t')\varphi_{K \times K'}(t, t')$, égale à $(g\varphi_K) \otimes (g'\varphi_{K'})$, est ν-intégrable. Par conséquent, $g \otimes g'$ est localement ν-intégrable. On vérifie alors aussitôt que le second membre de (15) satisfait à la propriété caractéristique des mesures produit (chap. III, § 4, n° 1, th. 1).

b) Supposons maintenant que $g \otimes g'$ soit localement ν-intégrable, et que g' ne soit pas localement μ'-négligeable. Soit μ_1 une mesure positive à support compact telle que $\mu_1 \leqslant \mu$; $g \otimes g'$ étant $(\mu_1 \otimes \mu')$-mesurable, $t \mapsto g(t)g'(t')$ est μ_1-mesurable, sauf pour un ensemble localement μ'-négligeable de valeurs de t' (prop. 2). Comme g' n'est pas nulle localement μ'-presque partout, on en déduit que g est μ_1-mesurable, puis μ-mesurable en décomposant μ en somme d'une famille de mesures à support compact (§ 2, n° 3, prop. 4 et § 2, n° 2, prop. 2). Ce point étant établi, en peut se ramener au cas où g et g' sont $\geqslant 0$, en remplaçant g et g' par leurs valeurs absolues si nécessaire. Soit K un compact quelconque de T, et soit K' un compact de T' tel que $\int g'\varphi_{K'}\, d\mu' \neq 0$. On a d'après la prop. 8

$$\left(\int^{\bullet} g\varphi_K \, d\mu\right)\left(\int^{\bullet} g'\varphi_{K'}\, d\mu'\right) = \iint^{\bullet} (g \otimes g')\varphi_{K \times K'}\, d\mu\, d\mu' < +\infty.$$

Le premier facteur du premier membre est donc fini, et cela achève la démonstration.

Cette proposition s'étend aux mesures complexes, grâce à la prop. 3 du chap. III, 2e éd., § 4, n° 2.

PROPOSITION 11. — *Soit π* (resp. π') *une application de* T (resp. T') *dans un espace localement compact* T_1 (resp. T'_1).

a) *Si π* (resp. π') *est μ-propre* (resp. *μ'-propre*), *l'application $\pi \times \pi'$ est $(\mu \otimes \mu')$-propre, et on a $(\pi \times \pi')(\mu \otimes \mu') = \pi(\mu) \otimes \pi'(\mu')$.*

b) *Inversement, si $\pi \times \pi'$ est $(\mu \otimes \mu')$-propre, et si $\mu' \neq 0$, π est μ-propre.*

a) En effet, $\pi \times \pi'$ est $(\mu \otimes \mu')$-mesurable en vertu du cor. 1 de la prop. 3 du n° 2. D'autre part, si K (resp. K') est une partie compacte de T_1 (resp. T'_1), $\overset{-1}{\pi}(K)$ et $\overset{-1}{\pi'}(K')$ sont essentiellement intégrables pour μ et μ' respectivement, donc $\overset{-1}{\pi}(K) \times \overset{-1}{\pi'}(K')$ est essentiellement intégrable pour $\mu \otimes \mu'$ (cor. 2 de la prop. 8). Ceci prouve que $\pi \times \pi'$ est $(\mu \otimes \mu')$-propre. Soient alors $\mu_1 = \pi(\mu)$, $\mu'_1 = \pi'(\mu')$, $\nu_1 = (\pi \times \pi')(\mu \otimes \mu')$; pour $f \in \mathscr{K}(T_1)$ et $f' \in \mathscr{K}(T'_1)$, on a

$$\iint f(\pi(t))f'(\pi'(t'))\,d\mu(t)\,d\mu'(t') = \left(\int f(\pi(t))\,d\mu(t)\right)\left(\int f'(\pi'(t'))\,d\mu'(t')\right)$$

(cor. 2 de la prop. 8), ce qui prouve que $\nu_1 = \mu_1 \otimes \mu'_1$ (chap. III, 2ᵉ éd., § 4, n° 1, th. 1).

b) Supposons maintenant que $\pi \times \pi'$ soit $\mu \otimes \mu'$-propre, et que $\mu' \neq 0$. Soit μ_1 une mesure à support compact majorée par μ. La fonction $\pi \times \pi'$ étant mesurable pour $\mu_1 \otimes \mu'$, l'application $t \mapsto (\pi(t), \pi'(t'))$ est μ-mesurable, sauf pour des t' qui forment un ensemble localement μ'-négligeable (n° 2, prop. 2). Comme $\mu' \neq 0$, il en résulte que π est μ_1-mesurable, et finalement que π est μ-mesurable (§ 2, n° 3, prop. 4 et § 2, n° 2, prop. 2). Reste à montrer qu'on a $\mu^\bullet(f \circ \pi) < +\infty$ pour toute fonction $f \in \mathscr{K}_+(T_1)$. Si μ est nulle, cette propriété est évidente. Si μ n'est pas nulle, $\mu \otimes \mu'$ ne l'est pas non plus, et on a par conséquent $(\pi \times \pi')(\mu \otimes \mu') \neq 0$ (§ 6, n° 2, prop. 2). D'après le lemme 1 du chap. III, 2ᵉ éd., § 4, il existe deux fonctions $g \in \mathscr{K}_+(T_1)$, $g' \in \mathscr{K}_+(T'_1)$, telles que

$$\langle (\pi \times \pi')(\mu \otimes \mu'), g \otimes g' \rangle \neq 0.$$

Cette expression étant égale à $\langle \mu \otimes \mu', (g \circ \pi) \otimes (g' \circ \pi') \rangle$ d'après la définition des mesures images, la prop. 8 entraîne que $\mu'^\bullet(g' \circ \pi') \neq 0$. Nous avons alors, d'après la prop. 8 et la prop. 2 du § 6, n° 2,

$$\begin{aligned}\left(\int^\bullet (f \circ \pi)\,d\mu\right)\left(\int^\bullet (g' \circ \pi')\,d\mu'\right) &= \iint^\bullet (f \circ \pi) \otimes (g' \circ \pi')\,d\mu\,d\mu' \\ &= \iint^\bullet (f \otimes g')\,d((\pi \times \pi')(\mu \otimes \mu')) < +\infty.\end{aligned}$$

La première intégrale au premier membre est donc finie, ce qui achève la démonstration.

Ce résultat s'étend aussitôt au produit de deux mesures complexes (appliquer l'énoncé à leurs valeurs absolues). Il en est de même de la proposition suivante.

PROPOSITION 12. — *Soit* X (resp. X′) *un sous-espace localement compact de* T (resp. T′). *Alors la mesure induite* $(\mu \otimes \mu')_{X \times X'}$ *sur le sous-espace localement compact* $X \times X'$ *de* $T \times T'$ *est égale au produit* $\mu_X \otimes \mu'_{X'}$ *des mesures induites sur* X *et* X′ *par* μ *et* μ' *respectivement.*

En effet, si $f \in \mathscr{K}(X)$ et $f' \in \mathscr{K}(X')$, on a

$$\iint_{X \times X'} f(t) f'(t')\, d\mu(t)\, d\mu'(t') = \left(\int_X f(t)\, d\mu(t)\right)\left(\int_{X'} f'(t')\, d\mu'(t')\right)$$

en vertu du cor. 2 de la prop. 8, ce qui prouve, par définition de la mesure induite (chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, nº 7) que

$$(\mu \otimes \mu')_{X \times X'} = \mu_X \otimes \mu'_{X'}$$

(chap. III, 2ᵉ éd., § 4, nº 1, th. 1).

6. Intégration par rapport à un produit fini de mesures

Les résultats précédents s'étendent sans peine à un produit d'un nombre fini de mesures. Par exemple, soient T_1, T_2, T_3 trois espaces localement compacts, μ_i une mesure positive sur T_i ($i = 1, 2, 3$) et soit $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$ la mesure produit sur $T = T_1 \times T_2 \times T_3$. Soit $\mathbf{f}$ une fonction ν-intégrable à valeurs dans $\bar{\mathbf{R}}$ ou dans un espace de Banach ; une première application du th. de Lebesgue-Fubini montre que, sauf en des points $(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2$ formant un ensemble négligeable (pour $\mu_1 \otimes \mu_2$), la fonction $t_3 \mapsto \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)$ est μ_3-intégrable, que la fonction $(t_1, t_2) \mapsto \int \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3)$, définie presque partout dans $T_1 \times T_2$, est $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-intégrable, et que l'on a

$$\iiint \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\nu(t_1, t_2, t_3) = \iint d\mu_1(t_1)\, d\mu_2(t_2) \int \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3).$$

Une seconde application du même théorème montre que, pour presque tout $t_1 \in T_1$, la fonction $t_2 \mapsto \int \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3)$ est définie presque partout dans T_2 et est μ_2-intégrable ; en outre, la fonction $t_1 \mapsto \int d\mu_2(t_2) \int \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3)$, définie presque partout dans T_1, est μ_1-intégrable, et on a

$$\iiint \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\nu(t_1, t_2, t_3) = \int d\mu_1(t_1) \int d\mu_2(t_2) \int \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_3(t_3).$$

On prouve de même que, pour presque tout $t_1 \in T_1$, la fonction $(t_2, t_3) \mapsto \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)$ est $(\mu_2 \otimes \mu_3)$-intégrable, que la fonction $t_1 \mapsto \int\int \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_2(t_2)\, d\mu_3(t_3)$, définie presque partout, est

μ_1-intégrable, et que l'on a

$$\iiint \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\nu(t_1, t_2, t_3) = \int d\mu_1(t_1) \iint \mathbf{f}(t_1, t_2, t_3)\, d\mu_2(t_2)\, d\mu_3(t_3).$$

Nous laissons au lecteur le soin de généraliser de la même manière les autres résultats démontrés ci-dessus pour le produit de deux mesures.

7. *Application: Mesure de la boule euclidienne dans* $\mathbf{R}^n$

Soient μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, μ_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$, produit de n facteurs égaux à μ. Proposons-nous de calculer la mesure $V_n = \mu_n(\mathbf{B}_n)$ de la boule euclidienne unité. D'après le cor. 2 de la prop. 7, on a

$$V_n = \int_{-1}^{+1} \mu_{n-1}(\mathbf{B}_n(z_n))\, dz_n. \tag{16}$$

Or, la coupe $\mathbf{B}_n(z_n)$ est la partie de $\mathbf{R}^{n-1}$ définie par la relation $\sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 \leqslant 1 - z_n^2$, autrement dit, c'est la transformée de la boule $\mathbf{B}_{n-1}$ par l'homothétie de rapport $\sqrt{1 - z_n^2}$. Mais il résulte immédiatement de la prop. 11 et de la formule

$$\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz$$

pour $f \in \mathscr{K}(\mathbf{R})$, que l'image de μ_{n-1} par une homothétie $\mathbf{x} \mapsto \alpha\mathbf{x}$ est la mesure $\alpha^{1-n}\mu_{n-1}$. On a donc

$$\mu_{n-1}(\mathbf{B}_n(z_n)) = (\sqrt{1 - z_n^2})^{n-1} V_{n-1}.$$

Portant dans (16), et faisant le changement de variable $z_n = \sin\varphi$ $\left(\text{avec } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$, il vient

$$V_n = V_{n-1} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^n\varphi\, d\varphi = 2V_{n-1} \int_0^{\pi/2} \cos^n\varphi\, d\varphi. \tag{17}$$

Mais on a (*Fonct. var. réelle*, chap. VII, § 1, n° 3, formule (20))

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}$$

et en portant dans la relation (17) et tenant compte de l'expression de $\Gamma(\frac{1}{2})$ (*Fonct. var. réelle*, chap. VII, § 1, n° 3, formule (21)), on obtient finalement

(18)
$$\mathrm{V}_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2} + 1\right)}$$

EXERCICES

§1

1) Montrer que, si f et g sont deux fonctions numériques $\geqslant 0$, on a $\mu^\bullet(\sup(f, g)) + \mu^\bullet(\inf(f, g)) \leqslant \mu^\bullet(f) + \mu^\bullet(g)$ (cf. chap. IV, 2^e^ éd., § 1, exerc. 1).

2) Montrer que, pour toute fonction $f \geqslant 0$ définie dans T, l'application $\mu \mapsto \mu^\bullet(f)$ de $\mathscr{M}_+(\mathrm{T})$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ est semi-continue inférieurement pour la topologie quasi-forte (chap. III, 2^e^ éd., § 1, exerc. 8; cf. chap. IV, 2^e^ éd., § 1, exerc. 6b)). A quelle condition cette application est-elle continue?

¶ 3) a) Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ une famille de fonctions numériques $\geqslant 0$, filtrante pour la relation $\leqslant$, et telle que l'application $t \mapsto (f_\alpha(t))$ de T dans $\mathbf{R}^{\mathrm{A}}$ soit μ-mesurable. Soit f l'enveloppe supérieure de la famille (f_α). Alors f est μ-mesurable et on a

$$\int^\bullet f\, d\mu = \sup_{\alpha \in \mathrm{A}} \int^\bullet f_\alpha\, d\mu. \tag{1}$$

b) Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ une famille de fonctions numériques $\geqslant 0$ définies dans T et ayant la propriété suivante: pour toute partie compacte K de T et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $\mathrm{K}' \subset \mathrm{K}$ tel que $\mu(\mathrm{K} - \mathrm{K}') \leqslant \varepsilon$ et que les restrictions à K′ de toutes les fonctions f_α soient semi-continues inférieurement. Soit f l'enveloppe supérieure de la famille (f_α). Montrer que f est mesurable et vérifie la relation (1).

Donner un exemple d'application $t \mapsto (f_\alpha(t))$ satisfaisant à la condition ci-dessus et qui ne soit pas μ-mesurable.

4) Soient T et μ l'espace localement compact et la mesure définis dans l'exerc. 5 du chap. IV, 2^e^ éd., § 1.

a) Montrer que μ est la borne supérieure d'une suite de mesures de supports finis, mais qu'on a $\mu^* \neq \mu^\bullet$, et que μ n'est pas modérée. En déduire que la prop. 11 devient fausse lorsqu'on y remplace le symbole $\int^\bullet$ par $\int^*$, même lorsque l'ensemble A est dénombrable.

b) Pour tout nombre réel y, soit f_y la fonction caractéristique de l'ensemble réduit au point $(0, y)$ de T. Montrer que l'application $t \mapsto (f_y(t))_{y \in \mathbf{R}}$ est μ-mesurable, mais que, si $f = \sup_{y \in \mathbf{R}} f_y$, on a $\mu^*(f) = +\infty$ et $\sup_{y \in \mathbf{R}} \mu^*(f_y) = 0$.

5) Soit (μ_n) une suite de mesures positives sur T, qui converge quasi-fortement vers μ dans $\mathscr{M}(\mathrm{T})$ (chap. III, 2^e^ éd., § 1, exerc. 8).

a) Montrer que, si une application f de T dans un espace topologique G est μ_n-mesurable pour tout n, elle est μ-mesurable (utiliser l'exerc. 6b) du chap. IV, 2^e^ éd., § 1).

b) Soit $\mathbf{f}$ une application de T dans un espace de Banach F, qui est essentiellement μ_n-intégrable pour tout n. Montrer que, si la suite $(\mu_n^\bullet(|f|))$ est bornée, $\mathbf{f}$ est essentiellement μ-intégrable (exerc. 2). Montrer par un exemple que l'on n'a pas nécessairement $\int \mathbf{f}\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int \mathbf{f}\, d\mu_n$ (prendre pour μ_n une mesure ponctuelle sur un espace compact, telle que $\lim \|\mu_n\| = 0$); toutefois cette relation a lieu lorsque $\mathbf{f}$ est bornée et à support compact.

6) Soit $\mathfrak{K}$ un ensemble μ-dense de parties compactes de T. Soit $\mathbf{f}$ une fonction définie sur T, à valeurs dans un espace de Banach F, telle que $\mathbf{f}\varphi_K$ soit μ-intégrable pour tout $K \in \mathfrak{K}$. Si les intégrales $\int \mathbf{f}\varphi_K \, d\mu$ ont une limite dans F suivant l'ensemble filtrant $\mathfrak{K}$ (pour $\subset$), alors $\mathbf{f}$ est essentiellement μ-intégrable.

§ 2

1) Soit (λ_α) une famille de mesures complexes *ponctuelles* sur T. Pour que la famille (λ_α) soit sommable dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}(T; \mathbf{C})$ muni de la topologie vague, il faut et il suffit que la famille $(|\lambda_\alpha|)$ le soit.

2) Soit (λ_n) une suite de mesures complexes sur T. Pour que la suite (λ_n) soit sommable dans $\mathscr{M}(T; \mathbf{C})$ muni de la topologie vague, il faut et il suffit que, pour toute fonction $f \in \mathscr{K}(T)$, la série de terme général $\lambda_n(f)$ soit absolument convergente (utiliser le théorème de Banach–Steinhaus; cf. *Esp. vect. top.*, chap. III, § 3, cor. du th. 2).

3) Soit T l'intervalle compact $(0, 1)$ de $\mathbf{R}$; pour tout entier $n > 0$, soit λ_n la mesure

$$f \mapsto \frac{1}{n}\int_0^1 f(x) \sin 2n\pi x \, dx$$

sur T. Montrer que, dans l'espace $\mathscr{M}(T)$ muni de la topologie vague (ou de la topologie quasi-forte (chap. III, 2ᵉ éd., § 1, exerc. 8)), la suite de mesures (λ_n) est sommable, mais que la suite $(|\lambda_n|)$ ne l'est pas. Remarquer que, si $\alpha_n = n \,.\, \lambda_n(f)$, on a $\sum_n \alpha_n^2 < +\infty$, en utilisant l'inégalité de Bessel, et en déduire que $\sum_n |\lambda_n(f)| < +\infty$ par l'inégalité de Cauchy–Schwarz.)

4) Soient μ une mesure positive sur T, et $(\nu_i)_{i \in I}$ une famille sommable de mesures positives sur T, telles que $\mu \leqslant \sum_i \nu_i$. Il existe une famille sommable $(\mu_i)_{i \in I}$ de mesures sur T telles que $\mu = \sum_i \mu_i$ et $\mu_i \leqslant \nu_i$ pour tout $i \in I$. (En utilisant la prop. 4, se ramener au cas où T est compact, puis au cas où $I = \mathbf{N}$. Construire alors les μ_i par récurrence.)

§ 3

1) Soit T l'intervalle compact $(0, 1)$ de $\mathbf{R}$, et soit μ la mesure de Lebesgue sur T. Soit X l'espace localement compact obtenu en munissant l'intervalle $(0, 1)$ de la topologie discrète. L'application $t \mapsto \lambda_t = \varepsilon_t$ de T dans $\mathscr{M}(X)$ est scalairement essentiellement intégrable, d'intégrale $\nu = 0$. Pour la fonction constante f égale à 1 dans X, la formule (6) de la prop. 3 est en défaut. En déduire que l'application $t \mapsto \lambda_t$ n'est pas μ-adéquate.

2) Soient T et μ l'espace localement compact et la mesure $\geqslant 0$ définis dans l'exerc. 5 du chap. IV, 2ᵉ éd., § 1. On prend pour X l'ensemble T muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^2$, de sorte que X est

localement compact et dénombrable à l'infini. Soit $t \mapsto \lambda_t$ l'application de T dans $\mathscr{M}(\mathrm{X})$ telle que, pour $t = (0, y)$, $\lambda_t = \varepsilon_t$, et pour $t = (1/n, k/n^2)$, $\lambda_t = \varepsilon_t/n^3$. Montrer que l'application $t \mapsto \lambda_t$ est μ-adéquate, vaguement μ-mesurable, non vaguement continue, et que, si $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$ et si $f = \varphi_{\mathrm{I}}$, où I est le pavé de centre 0 et de côté 2 dans $\mathbf{R}^2$, on a

$$\int^* f(x)\, d\nu(x) < \int^* d\mu(t) \int^\bullet f(x)\, d\lambda_t(x) = +\infty.$$

3) Soient T, T' deux espaces localement compacts, μ une mesure positive sur T, μ' une mesure positive sur T'. Sur l'espace produit $\mathrm{X} = \mathrm{T} \times \mathrm{T}'$, posons $\lambda_t = \varepsilon_t \otimes \mu'$, $\lambda'_{t'} = \mu \otimes \varepsilon_{t'}$ pour $t \in \mathrm{T}$, $t' \in \mathrm{T}'$. L'application $t \mapsto \lambda_t$ (resp. $t' \mapsto \lambda'_{t'}$) de T (resp. T') dans $\mathscr{M}(\mathrm{X})$ est vaguement continue et μ-adéquate (resp. μ'-adéquate), et on a

$$\nu = \mu \otimes \mu' = \int \lambda_t \, d\mu(t) = \int \lambda'_{t'} \, d\mu'(t')$$

(chap. III, 2ᵉ éd., § 4, nº 1 ; cf. § 8). On prend pour T l'intervalle $(0, 1)$ de **R**, pour μ la mesure de Lebesgue, pour T' l'intervalle $(0, 1)$ muni de la topologie *discrète*, pour μ' la mesure sur T' définie par la masse $+1$ en tout point de T'. Soit f la fonction caractéristique de la « diagonale » de X (ensemble des points (t, t), où t parcourt $(0, 1)$). Montrer que f est semi-continue supérieurement et que l'on a

$$1 = \int^* d\mu(t) \int^* f(x)\, d\lambda_t(x) < \int^* f(x)\, d\nu(x) = +\infty$$

et

$$0 = \int^\bullet f(x)\, d\nu(x) < \int^\bullet d\mu(t) \int^\bullet f(x)\, d\lambda_t(x) = 1.$$

¶ 4) Les espaces $\mathrm{T}, \mathrm{T}', \mathrm{X}$ et les mesures μ, μ', ν ayant la même signification que dans l'exerc. 3, on considère l'espace produit $\mathrm{Y} = \mathrm{T} \times \mathrm{X} = \mathrm{T} \times (\mathrm{T} \times \mathrm{T}')$, et sur Y la mesure produit $\varpi = \mu \otimes \nu$. Si, pour $t \in \mathrm{T}$, on pose $\rho_t = \varepsilon_t \otimes \nu$, on a $\varpi = \int \rho_t \, d\mu(t)$. Soit H une partie de T non mesurable pour μ (chap. IV, 2ᵉ éd., § 4, exerc. 8), et soit A la partie de Y formée des points (t_1, t_2, t_3) satisfaisant aux conditions $t_1 = t_3$, $t_2 \in \mathrm{H}$. Montrer que la fonction caractéristique φ_{A} est localement négligeable pour ϖ, mais que, pour *aucune* valeur de $t \in \mathrm{T}$, φ_{A} n'est ρ_t-mesurable.

5) Donner un exemple de famille μ-adéquate $t \mapsto \lambda_t$ et de fonction numérique f définie dans X, telle que f soit λ_t-mesurable pour tout $t \in \mathrm{T}$, mais ne soit pas mesurable pour la mesure $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$ (prendre $\mathrm{X} = \mathrm{T}$ et $\lambda_t = \varepsilon_t$ pour tout $t \in \mathrm{T}$).

6) a) Montrer que dans tous les résultats du § 3 où intervient la notion d'application $t \mapsto \lambda_t$ vaguement continue, on peut remplacer cette hypothèse par la suivante : pour toute fonction $g \in \mathscr{K}_+(\mathrm{X})$, la fonction $t \mapsto \lambda_t(g)$ est semi-continue inférieurement dans T.

b) On considère une application scalairement essentiellement intégrable $t \mapsto \lambda_t$ de T dans $\mathscr{M}_+(X)$ qui satisfait à la condition suivante:

Pour toute partie compacte K de T et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K_1 \subset K$ tel que $\mu(K - K_1) \leqslant \varepsilon$ et que les restrictions à K_1 de toutes les fonctions $t \mapsto \langle f, \lambda_t \rangle$, où f parcourt $\mathscr{K}_+(X)$, soient semi-continues inférieurement.

Montrer que l'application $t \mapsto \lambda_t$ est μ-adéquate.

7) a) Soit $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ une application scalairement essentiellement intégrable de T dans $\mathscr{M}_+(X)$, et soit $\nu = \int \lambda_t \, d\mu(t)$. Montrer qu'on a, pour toute fonction f semi-continue inférieurement $\geqslant 0$ définie dans X,

$$\int^\bullet f(x)\, d\nu(x) \leqslant \int^\bullet d\mu(t) \int^\bullet f(x)\, d\lambda_t(x).$$

b) On suppose que Λ est μ-pré-adéquate, on désigne par μ' une mesure positive $\leqslant \mu$, et on pose $\mu = \mu' + \mu''$, $\nu' = \int \lambda_t \, d\mu'(t)$. Déduire de a) qu'on a, pour toute fonction f semi-continue inférieurement $\geqslant 0$ *ν-intégrable*

$$\int^\bullet f(x)\, d\nu'(x) = \int^\bullet d\mu'(t) \int^\bullet f(x)\, d\lambda_t(x).$$

Etendre ce résultat à une fonction f semi-continue inférieurement $\geqslant 0$ et ν-modérée. En déduire que si ν est une mesure modérée (et en particulier si X est dénombrable à l'infini), Λ est μ-adéquate.

8) Soit $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ une application de T dans $\mathscr{M}_+(X)$.

a) Soient $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des mesures sur T et $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$. Pour que Λ soit μ-adéquate, il faut et il suffit que Λ soit μ_i-adéquate pour tout i (utiliser le lemme de décomposition).

b) Supposons que μ soit la borne supérieure d'une famille filtrante croissante $(\mu_i)_{i \in I}$. Pour que Λ soit μ-adéquate, il faut et il suffit que Λ soit μ_i-adéquate pour tout $i \in I$, et scalairement essentiellement μ-intégrable.

c) Supposons que μ soit somme d'une famille sommable $(\mu_j)_{j \in J}$ de mesures positives. Pour que Λ soit μ-adéquate il faut et il suffit que Λ soit μ_j-adéquate pour tout $j \in J$, et que Λ soit scalairement essentiellement μ-intégrable.

d) Pour que Λ soit μ-adéquate, il faut et il suffit que Λ soit scalairement essentiellement μ-intégrable, et que Λ soit μ'-pré-adéquate pour toute mesure $\mu' \leqslant \mu$ à support compact.

9) a) Soient T et X deux espaces localement compacts, $\mathscr{C}_+(T)$ le cône convexe de toutes les fonctions continues positives sur T, V une application de $\mathscr{K}_+(X)$ dans $\mathscr{C}_+(T)$ possédant les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} V(f+g) &= Vf + Vg \qquad \text{si } f, g \in \mathscr{K}_+(X) \\ V(tf) &= tV(f) \qquad \text{si } f \in \mathscr{K}_+(X), \quad t \in \mathbf{R}_+ . \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe alors une diffusion Λ unique de T dans X telle que $\Lambda f = Vf$ pour toute $f \in \mathscr{K}_+(X)$. Montrer que ce résultat est encore vrai si l'on remplace le cône $\mathscr{C}_+(T)$ par le cône des fonctions semi-continues inférieurement dans T, positives et localement bornées (cf. exerc. 6).

b) On suppose que la topologie de X admet une base dénombrable. Montrer que le résultat ci-dessus est encore vrai si l'on remplace le cône $\mathscr{C}_+(\mathrm{T})$ par le cône des fonctions universellement mesurables dans T, positives et localement bornées.

10) Soient T, X, Y trois espaces localement compacts dénombrables à l'infini, $\Lambda: t \mapsto \lambda_t$ une diffusion de T dans X, $\mathrm{H}: x \mapsto \eta_x$ une diffusion de X dans Y; on dit que Λ et H sont *composables* si la fonction $\Lambda(\mathrm{H}g)$ est localement bornée dans T pour toute $g \in \mathscr{K}_+(\mathrm{Y})$. Montrer que, si Λ et H sont composables, λ_t appartient au domaine de H pour tout $t \in \mathrm{T}$, et que l'application $t \mapsto \lambda_t \mathrm{H}$ est une diffusion de T dans Y. Etendre à cette situation les formules (15) (prop. 13).

11) Soit $t \mapsto \lambda_t$ une application μ-adéquate de T dans $\mathscr{M}_+(\mathrm{X})$, vérifiant la condition suivante: pour toute partie compacte K de T il existe une partie compacte $\mathrm{L_K}$ de X telle que $\mathrm{Supp}(\lambda_t) \subset \mathrm{L_K}$.

a) Montrer que pour toute fonction $f \geqslant 0$ définie dans X, on a

$$\int^{\bullet} f(x)\,d\nu(x) \geqslant \int^{\bullet} d\mu(t) \int^{*} f(x)\,d\lambda_t(x)$$

(utiliser la prop. 3 a)).

b) Si $f \geqslant 0$ est localement ν-négligeable, l'ensemble des $t \in \mathrm{T}$ tels que f ne soit pas λ_t-négligeable est localement μ-négligeable.

c) Si f est une application ν-mesurable de X dans un espace topologique, l'ensemble des $t \in \mathrm{T}$ tels que f ne soit pas λ_t-mesurable est localement μ-négligeable.

d) Pour toute fonction ν-mesurable $f \geqslant 0$, l'application $t \mapsto \int^{*} f\,d\lambda_t$ est μ-mesurable et l'on a

$$\int^{\bullet} f(x)\,d\nu(x) = \int^{\bullet} d\mu(t) \int^{*} f(x)\,d\lambda_t(x).$$

e) Soit **f** une fonction définie dans X, à valeurs dans un espace de Banach ou dans $\overline{\mathbf{R}}$, et essentiellement ν-intégrable. Montrer que l'ensemble des $t \in \mathrm{T}$ tels que **f** ne soit pas λ_t-intégrable est localement μ-négligeable, la fonction $t \mapsto \int \mathbf{f}(x)\,d\lambda_t(x)$ (définie localement presque partout pour μ) est essentiellement μ-intégrable et l'on a

$$\int \mathbf{f}(x)\,d\nu(x) = \int d\mu(t) \int \mathbf{f}(x)\,d\lambda_t(x).$$

§ 4

1) Soient T et X deux espaces compacts, π une application continue de T dans X, g une fonction numérique continue et finie, définie dans T. Pour tout $x \in \mathrm{X}$, soit $f(x)$ la borne inférieure de $g(t)$ dans l'ensemble $\overset{-1}{\pi}(x)$. Donner un exemple où f n'est pas continue. (Prendre $\mathrm{T} = (0, 1)$ dans $\mathbf{R}$, et pour π l'application canonique de T sur l'espace quotient X obtenu en identifiant 0 et 1 dans T).

2) Soient X et ν l'espace localement compact et la mesure définis dans l'exerc. 5 du chap. IV, 2[e] éd., § 1; soit f la fonction caractéristique de l'ensemble D des points $(0, y)$ dans X. Montrer que, dans les deux cas

suivants, on a $\nu = \int g(t)\varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$ et

$$\int^* f(\pi(t))g(t)\, d\mu(t) < \int^* f(x)\, d\nu(x) = +\infty.$$

a) On prend $\mathrm{T} = \mathrm{X}$, et pour μ la mesure définie par la masse $\log n/n^3$ en chacun des points $(1/n, k/n^2)$. On prend pour π l'application identique, et g définie par les conditions suivantes :

$$g(0, y) = 0, \qquad g(1/n, k/n^2) = 1/\log n;$$

g est continue, mais on n'a pas $g(t) > 0$ pour tout $t \in \mathrm{T}$.

b) On prend pour T l'ensemble X muni de la topologie discrète, et pour μ la mesure définie par les mêmes masses que ν. On prend $g(t) = 1$ pour tout t, et pour π l'application identique : cette dernière est continue, mais non propre.

§ 5

1) Soient T et X deux espaces localement compacts, μ une mesure $\geqslant 0$ sur T, $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ une application μ-adéquate de T dans $\mathscr{M}_+(\mathrm{X})$, g une fonction localement intégrable pour la mesure $\nu = \int \lambda_t\, d\mu(t)$. Donner un exemple montrant que, si X n'est pas dénombrable à l'infini, g peut n'être localement λ_t-intégrable pour aucune valeur de t (cf. § 3, exerc. 4).

2) Soit g une fonction positive sur T, mesurable et essentiellement bornée pour μ, et soit $\nu = g \cdot \mu$. Montrer que, si une fonction $\mathbf{f}$ définie dans T, à valeurs dans un espace de Banach ou dans $\overline{\mathbf{R}}$, est μ-intégrable, $\mathbf{f}$ est ν-intégrable. (Observer que $\nu \leqslant a\mu$ pour une constante $a > 0$, et utiliser la prop. 15 du chap. IV, § 1, n° 3.)

3) Soient X un espace localement compact, $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ et $\Lambda' : t \mapsto \lambda'_t$ deux applications μ-adéquates de T dans $\mathscr{M}_+(\mathrm{X})$, et soient $\nu = \int \lambda_t\, d\mu(t)$, $\nu' = \int \lambda'_t\, d\mu(t)$. Montrer que si, localement presque partout pour μ, λ'_t est une mesure de base λ_t, alors ν' est une mesure de base ν. (Considérer une partie compacte ν-négligeable K de X. Elle est λ_t-négligeable localement presque partout, donc λ'_t-négligeable localement presque partout. Appliquer la prop. 5 du § 3.)

4) a) Soit μ une mesure $\geqslant 0$ modérée sur T. Montrer qu'il existe une fonction $h \geqslant 0$, continue dans T, telle que $h \cdot \mu$ soit bornée et équivalente à μ (raisonner comme pour la prop. 11).

b) Soit (μ_n) une suite de mesures $\geqslant 0$ modérées sur T. Montrer qu'il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ sur T telle que chaque μ_n soit de base μ (se ramener au cas où chacune des μ_n est bornée).

5) Soient ρ, σ deux mesures atomiques sur T ; M, N les plus petits ensembles portant $|\rho|$ et $|\sigma|$ respectivement. Pour que ρ et σ soient étrangères, il faut et il suffit que $\mathrm{M} \cap \mathrm{N} = \varnothing$. En déduire un exemple de mesure atomique ν sur l'intervalle $\mathrm{I} = (0, 1)$ de $\mathbf{R}$, telle que I soit le support de ν^+ et de ν^-.

6) a) Soit μ une mesure positive sur T. Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{T}$ est universellement mesurable et n'est pas localement μ-négligeable, montrer qu'il existe une

mesure positive ν portée par A et telle que $\nu \neq 0$ et $\nu \leqslant \mu$. (Prendre $\nu = \varphi_K . \mu$, K étant une partie compacte de A qui n'est pas μ-négligeable.)

b) Soit M une partie universellement mesurable de T. Pour qu'une mesure positive λ sur T soit portée par M, il faut et il suffit que λ soit étrangère à toute mesure positive portée par $\complement$M (utiliser a)).

c) Déduire de b) que les mesures ρ sur T, telles que $|\rho|$ soit portée par M, forment une bande dans $\mathscr{M}(T)$. Cette bande est vaguement fermée dans $\mathscr{M}(T)$ si M est une partie fermée de T (chap. III, 2[e] éd., § 2, prop. 6).

d) Montrer que la mesure de Lebesgue sur $I = [0, 1]$ est limite vague d'une suite de mesures atomiques portées par un ensemble dénombrable fixe $A \subset I$ (cf. chap. III, 2[e] éd., § 2, th. 1 et prop. 13). La bande des mesures portées par A n'est donc pas vaguement fermée.

¶ 7) a) Soit μ une mesure positive sur T, et soit A un ensemble μ-intégrable tel que $\mu(A) > 0$. Montrer que si, pour tout ensemble μ-intégrable $B \subset A$, on a $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$, il existe un point $a \in A$ tel que $\mu(\{a\}) = \mu(A)$. (Considérer l'intersection des ensembles compacts $K \subset A$ tels que $\mu(K) = \mu(A)$; montrer qu'elle n'est pas vide, qu'elle a une mesure égale à $\mu(A)$ et qu'elle se réduit à un seul point.)

b) On suppose que μ soit une mesure diffuse. Pour tout ensemble μ-intégrable A tel que $\mu(A) > 0$, et tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une partie μ-intégrable B de A telle que $0 < \mu(B) \leqslant \varepsilon$ (remarquer à l'aide de a) qu'il existe une partie μ-intégrable C de A telle que $0 < \mu(C) \leqslant \frac{1}{2}\mu(A)$). En déduire que, lorsque X parcourt l'ensemble des parties μ-intégrables de A, l'ensemble des valeurs de $\mu(X)$ est l'intervalle fermé $[0, \mu(A)]$ (pour tout nombre β tel que $0 < \beta < \mu(A)$, soit γ la borne supérieure des mesures des parties mesurables X de A telles que $\mu(X) \leqslant \beta$; montrer d'abord qu'on a $\gamma = \beta$, en utilisant le résultat précédent, puis prouver qu'il existe une suite croissante (X_n) de parties mesurables de A telles que $\lim_{n \to \infty} \mu(X_n) = \beta$).

¶ 8) a) Soit ν une mesure atomique positive sur T, et soit A une partie ν-intégrable de T. Montrer que l'ensemble des valeurs de $\nu(X)$, lorsque X parcourt l'ensemble des parties ν-intégrables de A, est fermé dans $\mathbf{R}$. (Soit N le plus petit ensemble portant ν. En supposant $A \cap N$ infini et rangeant les points de $A \cap N$ en une suite (a_n), considérer l'application φ de l'espace produit $\{0, 1\}^N$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\varphi((\varepsilon_n)) = \sum_n \varepsilon_n \nu(\{a_n\})$, et montrer qu'elle est continue.)

b) Déduire de a) et de l'exerc. 7b) que, si μ est une mesure positive quelconque sur T, A une partie μ-intégrable de T, l'ensemble des valeurs de $\mu(X)$, lorsque X parcourt l'ensemble des parties μ-intégrables de A, est fermé dans $\mathbf{R}$. Étendre ce résultat au cas où μ est une mesure réelle quelconque sur T.

c) Déduire de l'exerc. 7b) que, si μ est une mesure réelle diffuse sur T, l'ensemble des valeurs de $\mu(X) = \mu^+(X) - \mu^-(X)$, où X parcourt l'ensemble des parties $|\mu|$-intégrables de T, est un intervalle fermé de $\mathbf{R}$ (borné ou non).

d) Donner un exemple de mesure positive atomique ν sur un espace localement compact et non compact T, telle que l'ensemble des valeurs de $\nu(X)$, où X parcourt l'ensemble des parties ν-intégrables de T, ne soit pas fermé (prendre ν telle que $\inf_{t \in T} \nu(\{t\}) > 0$).

9) Soient μ et ν deux mesures positives étrangères sur T. Montrer que, pour tout nombre p tel que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, l'espace vectoriel topologique $L^p(T, \mu + \nu)$ est isomorphe à l'espace produit des espaces vectoriels topologiques $L^p(T, \mu)$ et $L^p(T, \nu)$.

10) a) Soit μ une mesure positive diffuse $\neq 0$ sur un espace localement compact T. Montrer qu'il existe dans $\mathscr{L}^1(T, \mu)$ une suite de fonctions f_n telle que $N_1(f_n) = 1$ pour tout n et telle que la suite des mesures diffuses $f_n \cdot \mu$ converge vaguement vers une mesure ponctuelle ε_a. En déduire que $L^1(T, \mu)$ (et par suite aussi $L^\infty(T, \mu)$) n'est pas réflexif.

b) Soit ν une mesure positive atomique sur T, dont le support est infini. Soient A le plus petit ensemble portant ν, B une partie infinie dénombrable de A et λ la mesure $\varphi_B \cdot \nu$. Montrer que le dual de $L^\infty(T, \lambda)$ n'est pas de type dénombrable, et par suite ne peut être isomorphe à $L^1(T, \lambda)$ (cf. *Esp. vect. top.*, chap. I, 2ᵉ éd., § 2, exerc. 1).

c) Déduire de a) et b) que, pour qu'une mesure positive μ sur un espace localement compact T soit telle que $L^1(T, \mu)$ soit réflexif, il faut et il suffit que le support de μ soit fini (utiliser l'exerc. 9).

¶ 11) Soit S un espace compact stonien (chap. II, § 1, exerc. 13f)); on dit qu'une mesure positive μ sur S est *normale* si, pour toute famille filtrante croissante $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ de fonctions continues dans S, majorée dans $\mathscr{C}(S)$, et dont f est la borne supérieure dans l'espace complètement réticulé $\mathscr{C}(S)$ (borne supérieure non nécessairement égale à l'enveloppe supérieure de la famille (f_α)), on a $\mu(f) = \sup_{\alpha \in A} \mu(f_\alpha)$. On dit qu'une mesure réelle λ sur S est normale si les mesures positives λ^+ et λ^- sont normales.

a) Pour qu'une mesure positive μ sur S soit normale, il faut et il suffit que tout ensemble rare A soit μ-négligeable (pour voir que la condition est nécessaire, considérer les ensembles ouverts et fermés dans S qui contiennent A ; pour voir que la condition est suffisante, remarquer que l'enveloppe supérieure et la borne supérieure dans $\mathscr{C}(S)$ d'une famille filtrante croissante et majorée (f_α) sont égales dans le complémentaire d'un ensemble maigre (cf. chap. II, § 1, exerc. 13 f)). En déduire que le support de μ est à la fois ouvert et fermé.

b) Soient μ une mesure positive normale sur S, f une fonction numérique μ-mesurable, g la plus grande fonction semi-continue inférieurement dans S et $\leqslant f$. Montrer que f et g sont égales presque partout pour μ (cf. chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, exerc. 16b)). En déduire que, pour toute partie μ-mesurable A de S, $A - \mathring{A}$ et $\overline{A} - A$ sont μ-négligeables.

c) Montrer que, dans l'espace de Banach $\mathscr{M}(S)$ des mesures sur S, l'ensemble des mesures normales est un sous-espace vectoriel fermé, et une bande pour la structure d'espace complètement réticulé de $\mathscr{M}(S)$.

¶ 12) On dit qu'un espace compact stonien H est *hyperstonien* si la réunion des supports des mesures positives normales sur H (exerc. 11) est partout dense.

a) Soient T un espace localement compact, μ une mesure positive sur T. Montrer qu'il existe un isomorphisme $u \mapsto \theta_u$ de l'espace de Banach $L^{\infty}(T, \mu)$ sur l'espace $\mathscr{C}(H)$ des fonctions continues numériques sur un espace hyperstonien H, tel que $\theta_u^+ = \theta_{u^+}$ (cf. prop. 14 et chap. II, § 1, exerc. 13).

b) Soit H un espace compact hyperstonien, et soit $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de mesures positives normales sur H telle que la réunion des supports des μ_ι soit partout dense dans H. Montrer que, pour qu'un ensemble soit rare dans H, il faut et il suffit qu'il soit μ_ι-négligeable pour tout $\iota \in I$ (remarquer que, si A est μ_ι-négligeable, il en est de même de $\bar{A}$ (exerc. 11 b)). En déduire que, dans un espace hyperstonien, tout ensemble maigre est rare.

c) Les hypothèses étant les mêmes que dans b), montrer que, si f est une fonction numérique μ_ι-mesurable pour tout $\iota \in I$, il existe une fonction g continue dans H telle que f et g coïncident dans le complémentaire d'un ensemble rare (utiliser b) et l'exerc. 11 b)).

d) Soit H un espace hyperstonien. Montrer qu'il existe une famille $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ de parties ouvertes et fermées non vides de H, deux à deux disjointes, dont la réunion T est partout dense dans H, et telle que, pour tout $\alpha \in A$, il existe une mesure positive normale μ_α sur G_α, de support G_α (appliquer le th. de Zorn à l'ensemble des familles de mesures positives normales sur H, dont les supports sont mutuellement disjoints, et utiliser l'exerc. 11 a)). Soit μ la mesure sur T dont la restriction à chaque G_α est μ_α (chap. III, 2e éd., § 2, prop. 1). Montrer que l'application qui, à toute fonction $f \in \mathscr{C}(H)$, fait correspondre la classe dans $L^{\infty}(T, \mu)$ de sa restriction à T, est un isomorphisme de l'espace de Banach $\mathscr{C}(H)$ sur $L^{\infty}(T, \mu)$ (utiliser *c*) pour montrer que l'application est surjective).

¶ 13) Soient T un espace localement compact, μ une mesure positive sur T, (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{L}^1(T, \mu)$; on pose $\mu_n = f_n \cdot \mu$ et pour tout ensemble μ-mesurable A,

$$\mu_n(A) = \mu_n^+(A) - \mu_n^-(A) = \int_A f_n \, d\mu.$$

a) Montrer que, si T n'est pas compact, la suite (f_n) peut être non bornée dans $\mathscr{L}^1(T, \mu)$ mais telle que la suite des intégrales $\int f_n g \, d\mu$ soit bornée pour toute $g \in \mathscr{K}(T)$.

b) Montrer que, si la suite $(\mu_n(A))$ est bornée pour toute partie A de T réduite à un point et pour tout ensemble ouvert A tel que la mesure induite par μ sur la frontière de A ait un support fini, la suite (f_n) est bornée dans $\mathscr{L}^1$ ou, ce qui revient au même, la suite des normes $(\|\mu_n\|)$ est bornée. (On montrera d'abord que tout point t_0 de T admet un voisinage ouvert U tel que la suite des nombres $|\mu_n|(U)$ soit bornée. Pour cela, on raisonnera par l'absurde, en prouvant que, dans le cas contraire, on pourrait construire une suite strictement croissante (n_k)

d'entiers, une suite décroissante (U_k) de voisinages de t_0 et une suite (W_k) d'ensembles ouverts quarrables pour μ (chap. IV, 2e éd., § 5, exerc. 13) ayant les propriétés suivantes: $\overline{U}_k \subset U_{k-1}$, $\mu(U_k - \{t_0\}) \leqslant 1/k$, $|\mu_{n_i}|(U_k - \{t_0\}) \leqslant 1$ pour $i < k$, $\overline{W}_k \subset U_k - \overline{U}_{k+1}$ et finalement

$$|\mu_{n_k}(W_k)| > k + \sum_{i<k} |\mu_{n_k}(W_i)|.$$

Considérer enfin la réunion W des W_k, pour obtenir une contradiction (« méthode de la bosse glissante »). Montrer ensuite par un raisonnement analogue qu'il existe une partie compacte K de T telle que la suite des $|\mu_n|(T - K)$ soit bornée.)

c) Déduire de b) que si, pour tout ensemble ouvert A de T, la suite $(\mu_n(A))$ est bornée, la suite (f_n) est bornée dans $\mathscr{L}^1$.

d) Sur l'intervalle $(0, 1)$, si on prend pour μ_n la mesure définie par la masse n au point $t = 0$, la masse $-n$ au point $t = 1/n$, la suite $(\mu_n(A))$ est bornée pour tout ensemble ouvert A, quarrable pour toutes les mesures $|\mu_n|$; mais la suite des normes $\|\mu_n\|$ est non bornée. De même, si on prend pour μ_n la mesure définie par la masse n au point $t = 1/n$, la masse $-n$ au point $t = 1/(n+1)$, la suite $(\mu_n(A))$ est bornée pour tout intervalle contenu dans $(0, 1)$ (et par suite pour toute partie finie A), sans que la suite $(\|\mu_n\|)$ soit bornée.

14) Soit θ une forme linéaire sur l'espace $\mathscr{L}^\infty(T, \mu)$; pour que θ soit du type $f \mapsto \int fg\, d\mu$, où $g \in \mathscr{L}^1(T, \mu)$, il faut et il suffit que θ satisfasse aux conditions suivantes: 1° pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que la relation $\mu^*(A) \leqslant \delta$ entraîne $|\theta(h)| \leqslant \varepsilon$ pour toute fonction μ-mesurable h telle que $|h| \leqslant \varphi_A$; 2° pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact K tel que, pour tout ensemble μ-intégrable $B \subset T - K$, on ait $|\theta(\varphi_B)| \leqslant \varepsilon$. (Utiliser le th. de Lebesgue-Nikodym.)

¶ 15) Soit H une partie bornée de l'espace $\mathscr{L}^1(T, \mu)$, $\tilde{H}$ son image canonique dans l'espace de Banach $L^1(T, \mu)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

α) On a l'ensemble des deux conditions:

α_1) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $L \subset T$ tel que $\int_{T-L} |f|\, d\mu \leqslant \varepsilon$ pour toute $f \in H$;

α_2) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout ensemble ouvert U de T tel que $\mu^*(U) \leqslant \eta$, on ait $\int_U |f|\, d\mu \leqslant \varepsilon$ pour toute $f \in H$.

β) On a l'ensemble des deux conditions α_1) et

β_2): pour tout ensemble compact $K \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert U de K tel que $\int_{U-K} |f|\, d\mu \leqslant \varepsilon$ pour toute $f \in H$.

γ) Pour toute suite (g_n) de fonctions de $\mathscr{L}^\infty$, uniformément bornée et qui converge en mesure vers une fonction g, on a $\lim_{n\to\infty} \int fg_n\, d\mu = \int fg\, d\mu$ *uniformément* lorsque f parcourt H.

δ) Pour toute suite (h_n) de fonctions continues dans T et tendant vers 0 au point à l'infini, uniformément bornée et telle que $\lim_{n\to\infty} h_n(t) = 0$ pour tout $t \in T$, on a $\lim_{n\to\infty} \int f h_n\, d\mu = 0$ *uniformément* lorsque f parcourt H.

ζ) Pour toute suite infinie (U_n) d'ensembles ouverts de T deux à deux disjoints, on a $\lim_{n\to\infty} \int_{U_n} f\, d\mu = 0$ *uniformément* lorsque f parcourt H.

(Pour montrer que ζ) entraîne β) et que β) entraîne α), utiliser une « méthode de la bosse glissante » de la même façon que dans l'exerc. 13 b). Prouver ensuite que α) entraîne γ), que γ) entraîne δ) et que δ) entraîne ζ).)

Si on suppose en outre que, pour tout $t \in \mathrm{T}$ tel que $\mu(\{t\}) \neq 0$, l'ensemble des $f(t)$ est *borné* dans $\mathbf{R}$ lorsque f parcourt H, montrer que les conditions précédentes sont équivalentes à la condition :

θ) $\widetilde{\mathrm{H}}$ est une partie relativement compacte de L^1 pour la topologie affaiblie $\sigma(\mathrm{L}^1, \mathrm{L}^\infty)$.

(Pour montrer que θ) entraîne β), raisonner par l'absurde en utilisant le th. de Šmulian (*Esp. vect. top.*, chap. IV, § 2, exerc. 13) et une « méthode de la bosse glissante ». Pour montrer que α) entraîne θ), montrer que H est bornée dans $\mathscr{L}^1$, puis appliquer le th. d'Eberlein (*Esp. vect. top.*, chap. IV, § 2, exerc. 15), et utiliser l'exerc. 14.)

¶ 16) a) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{L}^1(\mathrm{T}, \mu)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

α) La suite $(\tilde{f}_n)$ est convergente dans L^1 pour la topologie affaiblie $\sigma(\mathrm{L}^1, \mathrm{L}^\infty)$.

β) L'ensemble des $\tilde{f}_n$ est relativement compact dans L^1 pour la topologie affaiblie, et la suite des mesures $f_n . \mu$ converge vaguement dans $\mathscr{M}(\mathrm{T})$.

γ) Pour toute partie ouverte U de T, la suite des nombres $\int_{\mathrm{U}} f_n \, d\mu$ est convergente dans $\mathbf{R}$.

(Pour prouver que β) entraîne α), utiliser le critère α) de l'exerc. 15 et la définition d'une fonction mesurable. Pour prouver que γ) entraîne β), considérer d'abord le cas particulier de l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbf{N})$ (mesure discrète définie par la masse $+1$ en chaque point) en utilisant l'exerc. 4 de *Esp. vect. top.*, chap. IV, § 5. Dans le cas général, appliquer le critère ζ) de l'exerc. 15 pour se ramener au cas de $\mathrm{L}^1(\mathbf{N})$, en associant à chaque f_n la suite sommable $(\int_{\mathrm{U}_m} f_n \, d\mu)_{m \in \mathbf{N}}$).

b) Déduire de ces résultats que, dans L^1, toute suite de Cauchy pour la topologie affaiblie est convergente pour cette topologie.

c) Sur l'intervalle $\mathrm{T} = [0, 1]$, soit μ la mesure de Lebesgue, et pour tout entier $n \geqslant 1$, soit μ_n la mesure définie par la masse $1/n$ en chacun des points k/n $(0 \leqslant k < n)$; soit ν une mesure positive sur T telle que $\mu = g . \nu$, $\mu_n = f_n . \nu$ (exerc. 4 *b*)). Montrer que la suite (μ_n) converge vaguement vers μ, $\mu_n(\mathrm{A})$ tend vers $\mu(\mathrm{A})$ pour toute partie finie A de T, et pour tout ensemble ouvert A tel que la mesure induite par ν sur la frontière de A ait un support fini, mais que $\mu_n(\mathrm{U})$ ne tend pas vers $\mu(\mathrm{U})$ pour tous les ensembles ouverts $\mathrm{U} \subset \mathrm{T}$ (cf. exerc. 13 *b*)).

17) a) Soit μ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $\mathrm{T} = [0, +\infty[$. Montrer que, si $1 \leqslant r < s < +\infty$, les topologies induites sur $\mathrm{L}^r \cap \mathrm{L}^s$ par les topologies affaiblies de L^r et L^s ne sont pas comparables (cf. chap. IV, § 6, exerc. 8). Si f_n est la fonction caractéristique de l'intervalle $[n, n+1]$, montrer que la suite $(\tilde{f}_n)$ tend vers 0 pour la topologie affaiblie de tous les L^p tels que $p > 1$, mais non pour la topologie affaiblie de L^1.

b) Soit λ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $\mathrm{T} = [0, 1]$. Montrer que, si $r < s$, la topologie affaiblie de L^s est strictement plus fine que la topologie induite sur L^s par la topologie affaiblie de L^r (cf. chap. IV, § 6, exerc. 8).

c) Soit μ la mesure positive sur un espace discret pour laquelle tout point est de mesure 1. Montrer que, si $1 \leqslant r < s < +\infty$, la topologie affaiblie de L^r est strictement plus fine que la topologie induite sur L^r par la topologie affaiblie de L^s (chap. IV, § 6, exerc. 9).

18) Soit A un ensemble contenu dans $L^r \cap L^s$ et borné à la fois dans L^r et dans L^s ($1 < r < s < +\infty$). Montrer que, pour tout p tel que $r \leqslant p \leqslant s$, A est borné dans L^p, et que les topologies induites sur A par les topologies affaiblies des L^p sont identiques (remarquer que $\mathscr{K}(T)$ est dense dans tous les espaces L^q où $1 \leqslant q < +\infty$). Montrer que la propriété cesse d'être valable si $r = 1$ (cf. exerc. 17 *a*)).

¶ 19) Soit μ une mesure positive sur T.

a) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{L}^p$ ($1 < p < +\infty$) bornée dans $\mathscr{L}^p$ et convergente en mesure vers 0. Montrer que la suite $(\tilde{f}_n)$ converge vers 0 dans L^p pour la topologie affaiblie.

b) Donner un exemple de suite (f_n) de fonctions de $\mathscr{L}^1$, bornée dans $\mathscr{L}^1$ et convergente en mesure vers 0, mais telle que la suite $(\tilde{f}_n)$ ne converge pas vers 0 pour la topologie affaiblie de L^1 (prendre pour μ la mesure de Lebesgue sur $T = (0, 1)$, et utiliser le critère α) de l'exerc. 15).

c) Soit μ la mesure de Lebesgue sur $T = (0, 1)$. Montrer que, si $f_n(t) = \sin nt$, la suite $(\tilde{f}_n)$ converge vers 0 pour la topologie affaiblie de tous les L^p tels que $1 \leqslant p < +\infty$, mais ne converge pas en mesure vers 0.

20) a) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{L}^1$ telle que: 1° la suite (f_n) converge en mesure vers 0; 2° pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que la relation $\mu^*(A) \leqslant \eta$ entraîne $\limsup_{n\to\infty} \int_A^* |f_n|\, d\mu \leqslant \varepsilon$; 3° pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble intégrable B tel que $\int_{T-B} |f_n|\, d\mu \leqslant \varepsilon$ pour tout n. Montrer que la suite (f_n) converge en moyenne vers 0.

b) Soit μ la mesure de Lebesgue sur $T = (0, 1)$. Pour $1 < p < +\infty$, on désigne par f_n la fonction égale à $n^{2/p}$ dans l'intervalle $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, à 0 ailleurs. Montrer que la suite (f_n) satisfait aux trois conditions de a), et que la suite $(\tilde{f}_n)$ converge vers 0 pour la topologie affaiblie de L^p, mais non pour la topologie de la convergence en moyenne d'ordre p.

¶ 21) a) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{L}^1$, telle que: 1° $\liminf_{n\to\infty} f_n(t) \geqslant 0$ presque partout dans T; 2° pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que la relation $\mu^*(A) \leqslant \eta$ entraîne $\limsup_{n\to\infty} \int_A^* |f_n|\, d\mu \leqslant \varepsilon$; 3° pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble intégrable B tel que

$$\int_{T-B} |f_n|\, d\mu \leqslant \varepsilon$$

pour tout n; 4° on a $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = 0$. Montrer que la suite (f_n) converge en moyenne vers 0. (Remarquer que, pour tout $\varepsilon > 0$, si C_m est l'ensemble des $t \in T$ tels que $f_n(t) \geqslant -\varepsilon$ pour un $n \geqslant m$ au moins, la suite (C_m) est décroissante et a une intersection négligeable.)

b) Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{L}^1$ telle que: 1° il existe une fonction intégrable g telle que $f_n \geqslant g$ pour tout n; 2° $\lim_{n\to\infty} . \inf f_n(t) \geqslant 0$ presque partout; 3° $\lim_{n\to\infty} . \sup \int f_n \, d\mu \leqslant 0$. Montrer que la suite (f_n) converge en moyenne vers 0. (Montrer d'abord que, pour tout ensemble mesurable A, on a $\lim_{n\to\infty} . \inf \int_A f_n \, d\mu \geqslant 0$; puis remarquer que, pour tout ensemble mesurable A, on a

$$\lim_{n\to\infty} . \sup \int f_n \, d\mu \geqslant \lim_{n\to\infty} . \sup \int_A f_n \, d\mu + \lim_{n\to\infty} . \inf \int_{T-A} f_n \, d\mu.)$$

¶ 22) Dans l'espace de Banach $E = \mathscr{M}^1(T)$ des mesures bornées sur un espace localement compact T, soit H un ensemble compact pour la topologie affaiblie.

a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une mesure positive μ_ε sur T telle que toute mesure $\nu \in H$ soit somme d'une mesure de base μ_ε et d'une mesure λ étrangère à μ_ε et de norme $\leqslant \varepsilon$. (Utiliser le fait que l'espace E, muni de sa norme et de sa structure d'ordre, est isomorphe à un espace $L^1(S, \rho)$ où S est réunion d'espaces compacts stoniens et ρ une mesure positive sur S (chap. IV, § 4, exerc. 10), et appliquer, dans $L^1(S, \rho)$, le critère α_1) de l'exerc. 15.)

b) Déduire de a) qu'il existe sur T une mesure positive μ telle que toutes les mesures $\nu \in H$ soient de base μ (utiliser l'exerc. 4 *b*)).

23) Soient μ une mesure positive sur un espace localement compact T, p un nombre tel que $1 \leqslant p < +\infty$, q l'exposant conjugué. Montrer que, si g est une fonction mesurable finie telle que, pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^p$, la fonction fg soit intégrable, alors g est localement presque partout égale à une fonction de $\mathscr{L}^q$. (Montrer que l'application $f \mapsto fg$ de $\mathscr{L}^p$ dans $\mathscr{L}^1$ est continue, en utilisant le th. du graphe fermé (*Esp. vect. top.*, chap. I, § 3, cor. 5 du th. 1).)

24) Soient p, q deux exposants conjugués. Si B (resp. C) est une partie bornée de L^p (resp. L^q), montrer que l'application de $B \times C$ dans L^1 déduite de $(f, g) \mapsto fg$ par passage aux quotients, n'est pas nécessairement continue lorsqu'on munit L^p, L^q et L^1 des topologies $\sigma(L^p, L^q)$, $\sigma(L^q, L^p)$ et $\sigma(L^1, L^\infty)$ respectivement (cf. exerc. 10 *d*)).

¶ 25) a) Si u et v sont deux nombres réels quelconques, démontrer, pour $1 < p < +\infty$, l'inégalité

$$|u + v|^p \leqslant |u|^p + pvu|u|^{p-2} + a \sum_{r=2}^{[p]} |v|^r |u|^{p-r} + b|v|^p$$

où a et b sont deux constantes ne dépendant que de p, et $[p]$ est la partie entière de p (*Fonct. var. réelle*, chap. III, § 2, exerc. 6).

b) Soit $(\tilde{f}_n)$ une suite qui converge vers 0 dans L^p pour la topologie affaiblie ($1 < p < +\infty$). Montrer qu'il existe une suite (f_{n_k}) extraite de

(f_n) telle que, si on pose $s_m = \sum_{k=1}^{m} f_{n_k}$, on ait

$$\left|\int s_{m-1}|s_{m-1}|^{p-2}f_{n_m}\,d\mu\right| \leqslant 1$$

(définir la suite (n_k) par récurrence). En déduire, en utilisant *a*) et l'inégalité de Hölder que, si $p > 2$, il existe deux constantes, a, b telles que

$$\mathrm{N}_1(|s_n|^p) \leqslant \mathrm{N}_1(|s_{n-1}|^p) + a + b\mathrm{N}_1(|s_{n-1}|^{p-2})$$

et que, si $1 < p \leqslant 2$, il existe une constante c telle que

$$\mathrm{N}_1(|s_n|^p) \leqslant \mathrm{N}_1(|s_{n-1}|^p) + c.$$

Conclure que l'on a

$$\mathrm{N}_p(s_n) = O(n^{1/2}) \qquad \text{pour} \quad p > 2$$
$$\mathrm{N}_p(s_n) = O(n^{1/p}) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant p \leqslant 2.$$

c) Montrer que les résultats précédents ne peuvent être améliorés en général (cf. exerc. 19 d) et 20 b)).

¶ 26) Soient $\mu_1, \ldots, \mu_m$ des mesures en nombre fini sur un espace localement compact T, qu'on écrit sous la forme $\mu_k = f_k \cdot \mu$ où μ est une mesure $\geqslant 0$ et $|f_k| \leqslant 1$ (n° 9).

a) Soit Φ un ensemble de fonctions définies et positivement homogènes dans $\mathbf{R}^m$ et telles que $u(f_1, \ldots, f_m)$ soit localement μ-intégrable pour toute fonction $u \in \Phi$. Montrer que, lorsqu'une suite (u_n) de fonctions de Φ converge uniformément dans toute partie compacte de $\mathbf{R}^m$ vers une fonction u, $u(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ est limite de la suite des mesures $u_n(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ pour la topologie quasi-forte sur $\mathscr{M}(\mathrm{T})$ (chap. III, 2^e^ éd., § 2, exerc. 8).

b) On suppose que $u \in \Phi$ est continue dans $\mathbf{R}^m$. Montrer que l'application $(\mu_1, \ldots, \mu_m) \mapsto u(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ de $(\mathscr{M}(\mathrm{T}))^m$ dans $\mathscr{M}(\mathrm{T})$ est continue pour la topologie quasi-forte (commencer par considérer le cas où u est lipschitzienne; utiliser ensuite *a*) et le th. de Weierstrass-Stone).

c) On suppose que u est continue dans $\mathbf{R}^m$. Soit g une fonction quelconque de $\mathscr{K}(\mathrm{T})$, et K son support. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un recouvrement ouvert fini (A_i) de K formé d'ensembles relativement compacts, tel que pour tout recouvrement ouvert fini (B_j) de K, plus fin que (A_i), et toute famille (h_j) d'applications continues de T dans $[0, 1]$ telles que h_j ait son support dans B_j et que $\sum_j h_j(t) = 1$ dans K, on ait

$$\left|\int g \cdot u(f_1, \ldots, f_m)\,d\mu - \sum_j u\left(\int gh_jf_1\,d\mu, \ldots, \int gh_jf_m\,d\mu\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

(considérer d'abord le cas où u est lipschitzienne et où les f_k sont continues, puis passer au cas où u est lipschitzienne et les f_k localement intégrables, et enfin au cas général en utilisant le th. de Weierstrass-Stone).

d) Dans $\mathbf{R}^2$, soit $u(x_1, x_2)$ la fonction positivement homogène égale à $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ quand x_1/x_2 est irrationnel, à 0 dans le cas contraire. Soit

μ la mesure de Lebesgue sur $T = [0, 1]$, et soit ν la mesure sur T définie par $d\nu(t) = t\,d\mu(t)$. Montrer que, si g est une fonction continue et $\geqslant 0$ dans T, $\sum_j u(\int gh_j\,d\mu, \int gh_j\,d\nu)$ ne tend vers aucune limite suivant l'ensemble filtrant des recouvrements ouverts finis du support de g.

27) Soient X un espace localement compact, $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ une application scalairement essentiellement μ-intégrable de T dans $\mathscr{M}_+(X)$. On suppose que Λ est pré-adéquate pour toute mesure $\varphi_K . \mu$, où K est compact.

a) Montrer que Λ est pré-adéquate pour toute mesure $\varphi_A . \mu$, où A est une partie μ-mesurable de T (considérer les parties compactes de A).

b) Montrer que Λ est pré-adéquate pour toute mesure $f . \mu$, où f est positive, μ-mesurable, et ne prend qu'on nombre fini de valeurs.

c) Montrer que Λ est pre-adéquate pour toute mesure $f . \mu$, où f est μ-mesurable, comprise entre 0 et 1. En déduire que Λ est μ-adéquate.

28) Soient X un espace localement compact, $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ une application μ-adéquate de T dans $\mathscr{M}_+(X)$. Soit $\mu' = g . \mu$ une mesure positive de base μ, telle que Λ soit scalairement essentiellement μ'-intégrable.

a) Montrer que Λ est μ'-intégrable (utiliser l'exerc. 27 b), ou la relation $\mu' = \sup_n (\inf(\mu', n\mu))$ et l'exerc. 9 du § 3).

b) Montrer que $\nu' = \int \lambda_t\,d\mu'(t)$ est une mesure de base $\nu = \int \lambda_t\,d\mu(t)$.

c) Montrer que l'application $t \mapsto g(t)\lambda_t$ est μ-adéquate, et que son intégrale est ν'.

29) Soit X un espace localement compact. Soit $\Lambda : t \mapsto \lambda_t$ une application μ-adéquate de T dans $\mathscr{M}_+(X)$. Soit g une fonction sur X, positive, universellement mesurable, et localement bornée. Montrer que la famille $t \mapsto g . \lambda_t$ est μ-adéquate, et qu'on a

$$\int (g . \lambda_t)\,d\mu(t) = g . \int \lambda_t\,d\mu(t)$$

sous chacune des hypothèses suivantes : a) g est modérée pour la mesure $\int \lambda_t\,d\mu(t)$; b) les mesures λ_t sont bornées.

30) a) Soit M une partie bornée de **C**. Montrer que l'enveloppe convexe fermée de M est l'intersection des disques fermés contenant M.

b) Soient X un espace localement compact, μ une mesure complexe sur X telle que $\|\mu\| = \mu(1) = 1$, f une fonction complexe continue bornée sur X. Montrer que $\mu(f)$ appartient à l'enveloppe convexe fermée de $f(X)$ dans **C**. (Utiliser a)). En déduire une nouvelle démonstration de la prop. 9.

31) Soient θ une mesure complexe sur T, et F un espace de Banach.

a) Montrer que l'espace $L^1_{loc}(T, \theta; F)$ est complet. (Ecrire $|\theta|$ sous la forme $\sum_\alpha \mu_\alpha$, où (μ_α) est une famille sommable de mesures $\geqslant 0$ sur T, dont les supports forment une famille localement dénombrable de parties compactes deux à deux disjointes. Ceci définit une application continue de $L^1_{loc}(T, \theta; F)$ dans $\prod_\alpha L^1_F(T, \mu_\alpha)$. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy sur

$L^1_{loc}(T, \theta; F)$. Son image dans $\prod_\alpha L^1_F(T, \mu_\alpha)$ converge vers un élément $(\mathbf{f}_\alpha)$. Montrer que les $\mathbf{f}_\alpha$ définissent une fonction θ-mesurable $\mathbf{f}$ sur T, puis que $\mathbf{f}$ est localement θ-intégrable, et que $\mathbf{f}$ est la limite de $\mathfrak{F}$ dans $L^1_{loc}(T, \theta; F)$).

b) Soit p un nombre réel > 1. On note $\mathscr{L}^p_{loc}(T, \theta; F)$ l'espace vectoriel des fonctions θ-mesurables $\mathbf{f}$ sur T à valeurs dans F, telles que $|\mathbf{f}|^p$ soit localement θ-intégrable. On le munit des semi-normes $\mathbf{f} \mapsto (\int |\mathbf{f}\varphi_K|^p \, d|\theta|)^{1/p}$, où K parcourt l'ensemble des parties compactes de T. Soit $L^p_{loc}(T, \theta; F)$ l'espace séparé associé. Montrer que cet espace est complet. (Même méthode que dans a)).

§ 6

1) Soient T et X deux espaces localement compacts, μ une mesure positive sur T, π une application *continue* et μ-propre de T dans X, et soit $\nu = \pi(\mu)$.

a) Montrer que, pour toute fonction numérique $g \geqslant 0$, définie et semi-continue inférieurement dans X, $g \circ \pi$ est semi-continue inférieurement dans T, et on a $\nu^*(g) = \mu^*(g \circ \pi)$.

b) Montrer que, si $\mathbf{f}$ est une fonction ν-intégrable à valeurs dans un espace de Banach, $\mathbf{f} \circ \pi$ est μ-intégrable, et on a $\int \mathbf{f} \, d\nu = \int (\mathbf{f} \circ \pi) \, d\mu$. La réciproque est-elle valable sans condition supplémentaire (cf. § 4, exerc. 2 b))?

¶ 2) Soient T et X deux espaces localement compacts, $\mathscr{P}$ l'ensemble des applications continues propres de T dans X, muni de la topologie de la convergence compacte. Soit H une partie de $\mathscr{P}$ telle que, pour toute partie compacte K de X, la réunion des ensembles $\overset{-1}{\pi}(K)$, où π parcourt H, soit relativement compacte dans T.

a) Montrer que l'application $(\pi, \lambda) \mapsto \pi(\lambda)$ de $H \times \mathscr{M}(T)$ dans $\mathscr{M}(X)$ n'est pas nécessairement continue lorsqu'on munit chacun des espaces $\mathscr{M}(T)$ et $\mathscr{M}(X)$ de la topologie quasi-forte (chap. III, 2e éd., § 1, exerc. 8).

b) Si B est une partie bornée de $\mathscr{M}(T)$, montrer que la restriction à $H \times B$ de l'application $(\pi, \lambda) \mapsto \pi(\lambda)$ est continue lorsqu'on munit chacun des espaces $\mathscr{M}(T)$, $\mathscr{M}(X)$ de la topologie vague (utiliser la prop. 15 du chap. III, 2e éd., § 1).

c) Montrer que l'application $(\pi, \lambda) \mapsto \pi(\lambda)$ de $H \times \mathscr{M}_+(T)$ dans $\mathscr{M}_+(X)$ est continue quand on munit $\mathscr{M}(T)$ et $\mathscr{M}(X)$ de la topologie vague (cf. chap. III, 2e éd., § 1, exerc. 10).

d) Donner un exemple où $T = X$ est compact et où l'application $(\pi, \lambda) \mapsto \pi(\lambda)$ de $\mathscr{P} \times \mathscr{M}(T)$ dans $\mathscr{M}(X) = \mathscr{M}(T)$ n'est pas continue, lorsque $\mathscr{M}(T)$ est muni de la topologie vague (prendre pour T le tore $\mathbf{T}$ et utiliser l'exerc. 2 b) du chap. III, 2e éd., § 4).

¶ 3) Soient T un espace localement compact non compact, μ une mesure positive sur T, $\mathscr{G}$ le groupe des homéomorphismes de T. Donner un exemple montrant que l'application $\pi \mapsto \pi(\mu)$ de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{M}(T)$ n'est pas nécessairement continue lorsqu'on munit $\mathscr{G}$ de la topologie de la convergence compacte et $\mathscr{M}(T)$ de la topologie vague (prendre pour T le sous-espace de **R** formé de 0 et des points n et $1/n$ (n entier $\geqslant 1$), et pour μ la mesure définie par $\mu(\{0\}) = 0$, $\mu(\{1/n\}) = 1/n^2$, $\mu(\{n\}) = 1$).

4) Pour tout espace localement compact T, soit $\mathscr{M}^c(\mathrm{T})$ le sous-espace de $\mathscr{M}(\mathrm{T})$ formé des mesures réelles à support compact. Si T et X sont deux espaces localement compacts, π une application continue de T dans X, π est λ-propre et on a $\pi(\lambda) \in \mathscr{M}^c(\mathrm{X})$ pour toute mesure $\lambda \in \mathscr{M}^c(\mathrm{T})$. Donner un exemple montrant que l'application $\lambda \mapsto \pi(\lambda)$ de $\mathscr{M}^c(\mathrm{T})$ dans $\mathscr{M}^c(\mathrm{X})$ n'est pas nécessairement continue lorsque l'on munit $\mathscr{M}^c(\mathrm{T})$ et $\mathscr{M}^c(\mathrm{X})$ de la topologie vague (ou de la topologie quasi-forte (chap. III, 2^e éd., § 1, exerc. 8)) et que π n'est pas une application propre (cf. chap. III, 2^e éd., § 2, exerc. 1).

5) a) Soient ρ et σ deux mesures positives sur **R**. Montrer que, si on a $\rho(]a, b]) = \sigma(]a, b])$ pour tout intervalle semi-ouvert $]a, b]$, on a $\rho = \sigma$.

b) Soit I un intervalle de **R**, d'origine α et d'extrémité β, et soit ψ une fonction numérique finie croissante définie dans I; on prolonge ψ à **R** de façon arbitraire. Pour que ψ soit propre pour la mesure $\varphi_{\mathrm{I}} . \mu$ (μ mesure de Lebesgue sur **R**), il faut et il suffit que l'on ait les deux conditions suivantes: 1° ou bien α est fini, ou bien $\alpha = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \psi(x) = -\infty$; 2° ou bien β est fini, ou bien $\beta = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty$.

Supposons ces conditions vérifiées. Pour tout $y \in \mathbf{R}$, soit $\theta(y)$ la borne supérieure de l'ensemble des $x \in \mathrm{I}$ tels que $\psi(x) \leqslant y$ (borne égale à α si cet ensemble est vide). Montrer que θ est une fonction numérique finie, croissante et continue à droite dans **R**. Si ν est l'image de $\varphi_{\mathrm{I}} . \mu$ par ψ, on a $\nu(]a, b]) = \theta(b) - \theta(a)$ pour tout intervalle semi-ouvert $]a, b]$ dans **R**.

c) Inversement, montrer que pour toute fonction numérique finie θ, croissante et continue à droite dans **R**, il existe sur **R** une mesure positive ν et une seule telle que $\nu(]a, b]) = \theta(b) - \theta(a)$ pour tout intervalle semi-ouvert $]a, b]$ de **R** (« mesure de Stieltjes sur **R** définie par θ »; on écrit $\int f d\theta$ au lieu de $\int f d\nu$); en outre, toute mesure positive sur **R** peut être obtenue de cette manière. A quelle condition la mesure ν est-elle diffuse? Quelle est alors l'image de ν par θ?

6) a) Soit K l'ensemble triadique de Cantor dans l'intervalle $\mathrm{I} = [0, 1]$ (*Top. gén.*, chap. IV, § 2, n° 5). Montrer qu'il existe sur **R** une mesure positive diffuse ν, de support K et de masse totale 1, et une fonction continue croissante θ, définie dans **R**, telle que $\theta(\mathbf{R}) = \mathrm{I}$ et $\theta(\nu) = \varphi_{\mathrm{I}} . \mu$ (μ mesure de Lebesgue; cf. *Top. gén.*, chap. IV, § 8, exerc. 16).

b) Déduire de a) qu'il existe sur **R** une mesure positive *diffuse*, étrangère à la mesure de Lebesgue, et dont le support est I tout entier (prendre dans chaque intervalle J contigu à K et contenu dans I une mesure proportionnelle à l'image de ν par une application affine de I sur J; puis procéder par récurrence).

7) Soient μ la mesure de Lebesgue sur **R**, I l'intervalle $[0, 1]$ de **R**. Si on pose $\theta(x) = |x|$, θ est propre pour la mesure $\varphi_{\mathrm{I}} . \mu$ et on a $\theta(\varphi_{\mathrm{I}} . \mu) = \varphi_{\mathrm{I}} . \mu$. Donner un exemple d'ensemble négligeable pour

$\varphi_I \cdot \mu$, dont l'image par θ n'est pas mesurable pour $\varphi_I \cdot \mu$ (cf. chap. IV, § 4, exerc. 8).

¶ 8) Soient T un espace compact, μ une mesure positive diffuse sur T, de masse totale 1.

a) Montrer qu'il existe une application continue π de T sur $E = [0, 1]$ telle que l'image de μ par π soit la mesure de Lebesgue λ sur E. (Procéder comme dans la démonstration du th. d'Urysohn (*Top. gén.*, chap. IX, § 4, th. 1) en définissant, pour tout t tel que $0 \leqslant t \leqslant 1$, un ensemble ouvert $U(t) \subset T$, quarrable pour μ (chap. IV, 2^e^ éd., § 5, exerc. 17), tel que $U(0) = \varnothing$, $U(1) = T$, $\overline{U(t)} \subset U(t')$ pour $t < t'$, et enfin $\mu(U(t)) = t$; on utilisera l'exerc. 7 du § 5 pour prouver que, si V, W sont deux ensembles ouverts quarrables dans T tels que $\overline{V} \subset W$ et $\mu(V) < \mu(W)$, il existe un ensemble ouvert quarrable U tel que $\overline{V} \subset U \subset \overline{U} \subset W$, et tel que

$$\tfrac{1}{3}\mu(W - V) \leqslant \mu(U - V) \leqslant \tfrac{2}{3}\mu(W - V).$$

On appliquera enfin l'exerc. 5 a)).

b) Déduire de a) qu'il existe des parties de T qui ne sont pas μ-mesurables (chap. IV, § 4, exerc. 8), qu'il existe dans $\mathscr{L}^p(T, \mu)$ des suites qui convergent en moyenne d'ordre p vers 0 mais qui ne convergent vers 0 en aucun point de T, pour $1 \leqslant p < +\infty$ (chap. IV, § 3, exerc. 1), et des suites (f_n) telles que $(\tilde{f}_n)$ converge vers 0 pour la topologie affaiblie de $L^p(T, \mu)$ mais qui ne convergent pas en mesure vers 0 (§ 5, exerc. 19).

c) On suppose en outre T *métrisable*. Montrer qu'il existe une partie μ-négligeable N de T, une partie λ-négligeable M de E et un *homéomorphisme* π de $E - M$ sur $T - N$ tel que, si on prolonge (arbitrairement) π en une application φ de E dans T, et $\overset{-1}{\pi}$ en une application ψ de T dans E, on ait $\varphi(\lambda) = \mu$ et $\psi(\mu) = \lambda$. (En utilisant l'exerc. 17 du chap. IV, 2^e^ éd., § 5, montrer que, pour tout entier $n > 0$, il existe une partition finie de T formée d'un ensemble μ-négligeable et d'ensembles ouverts quarrables, de diamètre $\leqslant 1/n$ (pour une distance compatible avec la topologie de T) et de mesure $\leqslant 1/n$. En procédant par récurrence, en déduire par passage à la limite l'existence d'une application continue f de $E - D$ dans T, où D est une partie dénombrable de E, telle que $f(\lambda) = \mu$; montrer qu'on peut faire en sorte que f soit un homéomorphisme de $E - D$ sur une partie de T de mesure 1) (cf. § 8, exerc. 14).

¶ 9) Soient μ et ν deux mesures positives diffuses sur un espace localement compact T. Montrer que, pour que ν soit une mesure de base μ, il suffit que toute partie μ-mesurable de T soit aussi ν-mesurable (raisonner par l'absurde en utilisant le th. 3 et la prop. 13 du § 5, et l'exerc. 8 b) du § 6).

10) Dans l'intervalle $I =]0, 1[$ de $\mathbf{R}$, on définit la fonction g par $g(t) = -\sqrt{n}$ pour $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right) < t \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $g(t) = \sqrt{n}$ pour $\dfrac{1}{n+1} < t \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, et on prolonge g par 0 dans

$\mathbf{R} - \mathrm{I}$; g est intégrable pour la mesure de Lebesgue. On pose

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt;$$

montrer que la fonction f, égale à $1/\sqrt{|x|}$ dans $\left[-1, +1\right]$, à 0 ailleurs, qui est intégrable pour la mesure de Lebesgue, est telle que $t \mapsto f(G(t))g(t)$ ne soit pas intégrable dans I.

¶ 11) Les notations sont celles du n° 5; g est une fonction numérique localement μ-intégrable dans I.

a) Pour que G soit une application λ-propre de I *dans* G(I), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies: 1° les limites $G(a+)$ et $G(b-)$ existent dans $\overline{\mathbf{R}}$; 2° si $G(a+) \in G(\mathrm{I})$, g est μ-intégrable dans l'intervalle $\left]a, x_0\right[$; 3° si $G(b-) \in G(\mathrm{I})$, g est μ-intégrable dans l'intervalle $\left]x_0, b\right[$.

b) On suppose que les limites $G(a+)$ et $G(b-)$ existent dans $\overline{\mathbf{R}}$. Montrer que, si $\mathbf{f}$ est telle que $t \mapsto \mathbf{f}(G(t))g(t)$ soit intégrable pour la mesure de Lebesgue dans I, alors $\mathbf{f}$ est intégrable dans l'intervalle d'extrémités $G(a+)$ et $G(b-)$ pour la mesure de Lebesgue, et on a la formule (13). (Se ramener au cas où x_0 est l'un des nombres a, b; si par exemple $x_0 = a$, remarquer qu'il existe dans I une suite strictement croissante (b_n) tendant vers b, telle que la suite $(G(b_n))$ soit, ou bien croissante, ou bien décroissante; appliquer la prop. 4 du chap. IV, § 4, n° 3, et le th. de Lebesgue.)

¶ 12) a) Soit g une fonction numérique finie définie dans un intervalle compact $\mathrm{I} = \left[a, b\right]$ de $\mathbf{R}$. On appelle *ensemble d'expansion à droite* (resp. *à gauche*) *de g dans* I l'ensemble des $x \in \mathrm{I}$ tels qu'il existe $y \in \mathrm{I}$ pour lequel $x < y$ (resp. $x > y$) et $g(x) < g(y)$. Montrer que, si g est continue, l'ensemble d'expansion à droite (resp. à gauche) de g dans I est ouvert dans I, et que, si $\left]\alpha, \beta\right[$ est une composante connexe de cet ensemble, on a $g(\alpha) = g(\beta)$ et $g(x) \leqslant g(\alpha)$ pour $\alpha < x < \beta$.

b) Soient r_1, r_2 deux nombres réels tels que $0 \leqslant r_1 < r_2$. Soit g une fonction continue *croissante* dans I; soit E′ l'ensemble d'expansion à gauche de $g(x) - r_1 x$ dans I, E″ la réunion des ensembles d'expansion à droite de $g(x) - r_2 x$ dans chacun des intervalles, adhérences des composantes connexes de E′. Si μ est la mesure de Lebesgue dans I, montrer, en utilisant a), que l'on a $\mu(\mathrm{E}'') \leqslant \frac{r_1}{r_2}\mu(\mathrm{E}')$.

c) On appelle *nombres dérivés supérieur et inférieur à droite* en un point $x \in \mathrm{I}$, d'une fonction numérique finie f définie dans I, les nombres respectifs

$$\mathrm{D}_d^+ f(x) = \limsup_{h \to 0, h > 0} (f(x+h) - f(x))/h$$

$$\mathrm{D}_d^- f(x) = \liminf_{h \to 0, h > 0} (f(x+h) - f(x))/h.$$

De même, on appelle *nombres dérivés supérieur et inférieur à gauche* de f au point x, les nombres respectifs

$$D_g^+ f(x) = \lim_{h\to 0,\, h<0} . \sup\,(f(x+h) - f(x))/h$$

$$D_g^- f(x) = \lim_{h\to 0,\, h<0} . \inf(f(x+h) - f(x))/h.$$

Montrer, si f est continue et *croissante*, que l'ensemble des $x \in I$ où $D_d^+ f(x) = +\infty$ et l'ensemble des $x \in I$ où $D_g^- f(x) < D_d^+ f(x)$ sont de mesure nulle pour μ (pour tout nombre rationnel $r > 0$ (resp. tout couple (r_1, r_2) de nombres rationnels tels que $0 \leqslant r_1 < r_2$), considérer l'ensemble des $x \in I$ tels que $D_d^+ f(x) > r$ (resp. $D_g^- f(x) < r_1$ et $D_d^+ f(x) \gtrsim r_2$ simultanément), et appliquer b)). En déduire que, pour presque tout $x \in I$, f admet une dérivée finie (« *théorème de Lebesgue* ») (appliquer aussi le résultat précédent à $-f(-x)$).

¶ 13) Dans un intervalle compact $I = [a, b]$ de $\mathbf{R}$, soit (f_n) une suite de fonctions continues croissantes finies, telle que $f_n(a) = 0$ pour tout n, et que la somme $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ soit finie dans I. Montrer qu'il existe un ensemble $N \subset I$, négligeable pour la mesure de Lebesgue, tel que, pour tout $x \in I - N$, les dérivées $f'_n(x)$ et $s'(x)$ existent et que $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ (« *théorème de Fubini* »). (Utiliser l'exerc. 12. Remarquer que la série de terme général $f'_n(x)$ est convergente presque partout ; posant

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

considérer ensuite une suite extraite (s_{n_k}) telle que la série de terme général $s(x) - s_{n_k}(x)$ soit convergente dans I, et appliquer à cette série la remarque précédente.)

14) Soit f une fonction numérique définie dans un intervalle compact $I = [a, b]$ de $\mathbf{R}$, intégrable dans I pour la mesure de Lebesgue. Si on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, montrer que F admet presque partout dans I une dérivée égale à f (se ramener au cas où $f \geqslant 0$; puis, en utilisant l'exerc. 13, considérer successivement le cas où f est semi-continue inférieurement puis le cas général (cf. chap. IV, § 4, n° 4, cor. du th. 3)).

15) Désignant par μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, on dit qu'un point $x \in \mathbf{R}$ est *point de densité* d'une partie A de $\mathbf{R}$, si, lorsque h et k tendent vers 0 par valeurs >0, le quotient $\mu^*(A \cap [x - h, x + k])/(h + k)$ tend vers 1. Montrer que l'ensemble des points d'une partie quelconque A de $\mathbf{R}$ qui ne sont pas des points de densité de A est négligeable pour μ. (Se ramener au cas où A est contenu dans un intervalle compact $[a, b]$, et considérer la fonction $s_A(x) = \mu^*(A \cap [a, x])$. Prendre une suite décroissante (A_n) d'ensembles ouverts contenant A, telle que la série de terme général $s_{A_n}(x) - s_A(x)$ soit convergente dans $[a, b]$, et utiliser l'exerc. 13.)

16) Soit g une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue dans $E = [0, 1]$. On pose $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$; montrer qu'en tout point $x \in E$ où g est continue, G admet une dérivée égale à g.

b) Donner un exemple de fonction g bornée et continue presque partout dans E, telle que G n'admette pas de dérivée à droite aux points d'une partie non dénombrable de E (cf. *Fonct. var. réelle*, chap. I, § 2, exerc. 9).

c) Montrer que la fonction égale à $x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$, à 0 pour $x = 0$, admet en tout point de E une dérivée, mais que cette dérivée n'est pas intégrable pour la mesure de Lebesgue dans E.

17) Soient T et X deux espaces localement compacts, π une application continue de T dans X. Montrer que, si π est μ-propre pour toute mesure positive μ sur T, alors π est propre. (Raisonner par l'absurde, en utilisant la prop. 7 de *Top. gén.*, 4^e éd., chap. I, § 10).

18) Dans la prop. 4 b), la conclusion devient inexacte si l'on supprime l'hypothèse que π' est continue. (Prendre $T = \mathbf{R}$, $T' = \bar{\mathbf{R}}$, $T'' = \mathbf{R}$; prendre pour μ la mesure de Lebesgue, pour π l'injection canonique ; poser $\pi'(x) = x$ pour $x \in \mathbf{R}$ et $\pi'(\pm\infty) = 0$).

19) Soient T, X, Y des espaces localement compacts, $\pi : T \to X$, $\pi' : X \to Y$ des applications, $\pi'' = \pi' \circ \pi$, μ une mesure réelle sur T. Il peut arriver que π soit μ-propre, que π' soit $\pi(\mu)$-propre, sans que π'' soit μ-propre. (Prendre $T = \mathbf{R} \times \{0, 1\}$, $X = \mathbf{R}$, $Y = \{0\}$, $\pi = \mathrm{pr}_1$; prendre pour μ la mesure qui induit la mesure de Lebesgue (resp. l'opposée de la mesure de Lebesgue) sur $\mathbf{R} \times \{0\}$ (resp. $\mathbf{R} \times \{1\}$) identifié canoniquement à $\mathbf{R}$).

20) Soient T, X, Y trois espaces localement compacts, $t \mapsto \lambda_t$ une application μ-adéquate de T dans $\mathscr{M}_+(X)$, $\nu = \int \lambda_t\, d\mu(t)$, π une application ν-propre de X dans Y. On fait l'*une* des hypothèses suivantes : a) Y est dénombrable à l'infini et ν est modérée ; b) Y est dénombrable à l'infini et λ_t est bornée localement presque partout sur T. Alors, π est λ_t-propre localement presque partout sur T, l'application $t \mapsto \pi(\lambda_t)$ est μ-adéquate, et son intégrale est égale à $\pi(\mu)$.

21) Soient T, X, Y trois espaces localement compacts, $\pi : T \to X$, $\pi' : X \to Y$ des applications universellement mesurables. Alors $\pi' \circ \pi$ est universellement mesurable. (Soit μ une mesure positive sur T. Pour prouver que $\pi' \circ \pi$ est μ-mesurable, se ramener au cas où T est compact et π continue, et utiliser le fait que π' est mesurable pour $\pi(\mu)$).

22) Soient X, Y deux espaces compacts, U une application linéaire continue de l'espace de Banach $\mathscr{C}(X ; \mathbf{R})$ dans l'espace de Banach $\mathscr{C}(Y ; \mathbf{R})$, $\pi : X \to Y$ une application continue. On suppose que pour tout $y \in Y$ et toute fonction $f \in \mathscr{C}(X ; \mathbf{R})$, on ait $\inf_{\pi(x) = y} f(x) \leqslant (U . f)(y) \leqslant \sup_{\pi(x) = y} f(x)$. Montrer que dans ces conditions il existe une application vaguement continue $\sigma : y \mapsto \sigma_y$ de Y dans $\mathscr{M}_+(X)$ telle que, pour tout $y \in Y$, σ_y soit portée par $\overset{-1}{\pi}(y)$ et que l'on ait $(U . f)(\pi(x)) = \langle f, \sigma_{\pi(x)} \rangle$ pour tout $x \in X$; réciproque. (Considérer la transposée ${}^tU$.)

§ 7

1) Soit X un sous-espace localement compact d'un espace localement compact T. Montrer que, pour toute mesure λ sur T, le support de la mesure λ_X est la trace sur X du support de la mesure $\varphi_X \cdot \lambda$.

2) Soient T un espace localement compact, X un sous-espace localement compact de T, μ une mesure positive sur T; on pose

$$\nu = \varphi_X \cdot \mu = j(\mu_X)$$

(j injection canonique de X dans T).

a) Montrer que toute partie μ_X-négligeable de X est ν-négligeable.

b) Pour toute fonction numérique $g \geqslant 0$ définie dans X, montrer que l'on a $\int^* g\, d\mu_X = \int_X^* g\, d\nu$ (utiliser a), ainsi que la formule (7) du § 3).

c) Soient $\mathbf{g}$ une fonction définie dans X, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou dans un espace de Banach, $\mathbf{g}'$ le prolongement de $\mathbf{g}$ à T, égal à 0 dans T $-$ X. Pour que $\mathbf{g}$ soit μ_X-intégrable, il faut et il suffit que $\mathbf{g}'$ soit ν-intégrable, et on a $\int \mathbf{g}\, d\mu_X = \int_X \mathbf{g}\, d\nu$ (utiliser b)).

3) Les notations étant les mêmes que dans l'exerc. 2, on suppose que X est une partie *ouverte* de T.

a) Pour toute fonction numérique $g \geqslant 0$ définie dans X, montrer que l'on a $\int^* g\, d\mu_X = \int_X^* g\, d\mu$ (utiliser l'exerc. 2, la prop. 3 du § 5 et la prop. 4 du § 1).

b) Soient $\mathbf{g}$ une fonction définie dans X, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou dans un espace de Banach, $\mathbf{g}'$ le prolongement de $\mathbf{g}$ à T, égal à 0 dans T $-$ X. Pour que $\mathbf{g}$ soit μ_X-intégrable, il faut et il suffit que $\mathbf{g}'$ soit μ-intégrable, et on a $\int \mathbf{g}\, d\mu_X = \int_X \mathbf{g}\, d\mu$ (utiliser a)).

4) Les notations étant celles de l'exercice 2, montrer que, si X est *fermé* dans T, pour toute fonction numérique $f \geqslant 0$ définie dans T, on a $\int^* (f \circ j)\, d\mu_X = \int^* f\, d\nu$ (remarquer que l'application j est propre, et utiliser la prop. 2 du § 4). Dans les mêmes conditions, si $\mathbf{f}$ est une application de T dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou dans un espace de Banach, pour que $\mathbf{f} \circ j$ soit μ_X-intégrable, il faut et il suffit que $\mathbf{f}$ soit ν-intégrable, et on a $\int (\mathbf{f} \circ j)\, d\mu_X = \int \mathbf{f}\, d\nu$ (§ 4, th. 2).

5) Soient T et μ l'espace localement compact et la mesure définis dans l'exerc. 5 du chap. IV, § 1, et soit D l'ensemble (fermé) des points de T de la forme $(0, y)$.

a) Montrer que la mesure μ_D induite sur D par μ est nulle; mais on a $\int^* \varphi_D\, d\mu = +\infty$ (cf. exerc. 3 a)).

b) Soit X $=$ T $-$ D, et soit j l'injection canonique de X dans T; on a $j(\mu_X) = \mu$, mais $\int^* (\varphi_D \circ j)\, d\mu_X = 0$, $\int^* \varphi_D\, d\mu = +\infty$ (cf. exerc. 4).

6) Soient T un espace localement compact, X un sous-espace localement compact de T, j l'injection canonique de X dans T. Soit λ une mesure positive sur X, telle que, pour tout ensemble compact $K \subset T$, $K \cap X$ soit essentiellement λ-intégrable. Montrer que la mesure $\nu = j(\lambda)$ est la plus petite des mesures positives ρ sur T telles que $\rho_X = \lambda$, et que son support est l'adhérence dans T du support de λ.

7) Soient X, Y deux espaces localement compacts, $\pi : X \to Y$ une application continue, T un sous-espace localement compact de Y, $S = \overset{-1}{\pi}(T)$, $\pi_T : S \to T$ l'application coïncidant avec π dans S, ν une mesure positive sur Y. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) Si ν_T est la mesure induite par ν sur T, il existe une mesure positive μ_T sur S telle que $\pi_T(\mu_T) = \nu_T$.

b) Il existe une mesure positive λ sur X telle que $\pi(\lambda) = \nu_T$.

c) Il existe une mesure positive λ_S sur S telle que $(\pi|S)(\lambda_S) = \nu_T$.

8) Soient X, Y deux espaces localement compacts, $\pi : X \to Y$ une application continue, ν une mesure positive sur Y, concentrée sur $\pi(X)$. On suppose que pour tout $y \in \pi(X)$, il existe un voisinage V de y dans Y et une mesure positive λ_V sur $\overset{-1}{\pi}(V)$ telle que l'image de λ_V par l'application $\pi_V : \overset{-1}{\pi}(V) \to V$ qui coïncide avec π, soit égale à la mesure induite ν_V. Montrer que dans ces conditions il existe une mesure positive μ sur X telle que $\pi(\mu) = \nu$. (Considérer l'ensemble $\mathfrak{G}$ des couples (G, λ), où $\mathfrak{G}$ est ouvert dans Y et λ une mesure positive sur X telle que $\pi(\lambda) = \nu_G$. On ordonne $\mathfrak{G}$ par la relation « $G_1 \subset G_2$ et $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ » entre (G_1, λ_1) et (G_2, λ_2). Montrer d'abord que l'ensemble ordonné $\mathfrak{G}$ est inductif, puis achever le raisonnement à l'aide du th. de Zorn et de l'exerc. 7).

9) Soient X, Y deux espaces localement compacts, $\pi : X \to Y$ une application continue. On dit que l'application π est *conservative* si, pour toute mesure positive ν sur Y, concentrée sur $\pi(X)$, il existe une mesure positive μ sur X telle que $\nu = \pi(\mu)$.

a) Soient X, Y, Z trois espaces localement compacts, $\pi : X \to Y$ et $\pi' : Y \to Z$ deux applications continues ; on pose $\pi'' = \pi' \circ \pi$, et on suppose l'application π *surjective.* Montrer que si π et π' sont conservatives, il en est de même de π'' ; inversement, si π'' est conservative, il en est de même de π'.

b) On suppose que pour tout $y \in \pi(X)$ il existe un voisinage ouvert V de y dans Y tel que, si $\pi_V : \overset{-1}{\pi}(V) \to V$ est l'application coïncidant avec π, il existe une section continue associée à π_V (*Top. gén.*, chap. I, 4^e éd., § 3, n° 5). Montrer que π est conservative (utiliser l'exerc. 8).

c) Soient Y l'intervalle $[0, 1]$ de R, X l'ensemble Y muni de la topologie discrète, $\pi : X \to Y$ l'application identique. Montrer que l'application π n'est pas conservative.

10) Soient X, Y deux espaces localement compacts. Montrer que toute application continue *propre* π de X dans Y est conservative. (L'hypothèse entraîne que l'application $f \mapsto f \circ \pi$ de $\mathscr{K}(Y)$ dans $\mathscr{C}(X)$ a son image E contenue dans $\mathscr{K}(X)$; pour toute mesure positive ν sur Y, appliquer alors au sous-espace E de $\mathscr{K}(X)$ et à la forme linéaire positive $f \circ \pi \mapsto \nu(f)$ sur E le cor. de la prop. 1 de *Esp. vect. top.*, chap. II, 2^e éd., § 3, n° 1).

11) Soient X, Y deux espaces localement compacts, $\pi : X \to Y$ une application continue, M une partie de Y telle que $\overset{-1}{\pi}(M)$ soit contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles compacts. Alors, pour toute mesure positive ν sur Y, concentrée sur M, il existe une mesure positive μ sur X telle que $\pi(\mu) = \nu$ (utiliser l'exerc. 10).

§ 8

1) Soient T, T′ deux espaces localement compacts, μ une mesure positive sur T, μ' une mesure positive sur T′. Montrer que, si la mesure μ' est bornée, la projection pr_1 de $\mathrm{T} \times \mathrm{T}'$ sur T est une application $(\mu \otimes \mu')$-propre et que l'on a $\mathrm{pr}_1(\mu \otimes \mu') = a \, . \, \mu$, où $a = \mu'(\mathrm{T}')$. En déduire un exemple de partie $(\mu \otimes \mu')$-négligeable de $\mathrm{T} \times \mathrm{T}'$ dont la projection sur T ne soit pas μ-mesurable.

2) Soient T l'intervalle $[0, 1]$ de **R**, muni de la topologie induite par celle de **R**, T′ l'intervalle $[0, 1]$ de **R**, muni de la topologie discrète; soient μ la mesure de Lebesgue sur T, μ' la mesure discrète sur T′ définie par la masse $+\ 1$ en tout point de T′, et $\nu = \mu \otimes \mu'$ la mesure produit sur $\mathrm{X} = \mathrm{T} \times \mathrm{T}'$.

a) Pour tout $t \in \mathrm{T}$, l'ensemble $\{t\}$ est μ'-négligeable, mais l'ensemble $\{t\} \times \mathrm{T}'$ n'est pas ν-négligeable.

b) La « diagonale » Δ de $\mathrm{T} \times \mathrm{T}'$ (ensemble des points (t, t), où t parcourt $[0, 1]$) est un ensemble fermé dans $\mathrm{T} \times \mathrm{T}'$, localement ν-négligeable mais non ν-négligeable, tel que, pour tout $t \in \mathrm{T}$, $\mu'(\Delta(t)) = 1$ et, pour tout $t' \in \mathrm{T}'$, $\mu(\overset{-1}{\Delta}(t')) = 0$ (cf. § 3, exerc. 3).

c) Sur l'espace $\mathrm{X} \times \mathrm{X} = \mathrm{Y}$, on considère la mesure produit $\rho = \nu \otimes \nu$. Montrer qu'il existe dans Y un ensemble A, localement ρ-négligeable, tel que, pour tout $x \in \mathrm{X}$, $\mathrm{A}(x)$ et $\overset{-1}{\mathrm{A}}(x)$ soient ν-mesurables et non localement négligeables. (Si $x = (t, t')$, où $t \in \mathrm{T}$, $t' \in \mathrm{T}'$, prendre A tel que $\mathrm{A}(x)$ contienne tous les points $(s, t) \in \mathrm{X}$, où $0 \leqslant s \leqslant 1$).

3) Soient T un espace localement compact, μ une mesure positive sur T, f une fonction numérique $\geqslant 0$ définie dans T. Dans l'espace produit $\mathrm{T} \times \mathbf{R}$, on désigne par D_f l'ensemble des points (t, x) tels que $0 \leqslant x \leqslant f(t)$; soit d'autre part ν la mesure de Lebesgue sur **R**.

a) Montrer que, pour que f soit μ-mesurable, il faut et il suffit que D_f soit un ensemble mesurable pour la mesure produit $\lambda = \mu \otimes \nu$. (Pour voir que la condition est nécessaire, prouver que, si f est μ-mesurable, pour toute partie compacte K de T, $\mathrm{D}_f \cap (\mathrm{K} \times \mathbf{R}_+)$ est réunion d'un ensemble λ-négligeable et d'une famille dénombrable d'ensembles de la forme $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$, où A est μ-mesurable et I un intervalle de $\mathbf{R}_+$. Pour montrer que la condition est suffisante, prouver que, si elle est satisfaite, pour toute partie compacte K de T, il existe un ensemble partout dense $\mathrm{H} \subset \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $\alpha \in \mathrm{H}$, $\mathrm{K} \cap \overset{-1}{f}([\alpha, +\infty])$ soit μ-mesurable, en utilisant le cor. 2 de la prop. 7).

b) Montrer que, pour que f soit μ-intégrable, il faut et il suffit que D_f soit λ-intégrable, et on a alors $\lambda(\mathrm{D}_f) = \int f \, d\mu$. En outre, si on désigne par g la fonction numérique décroissante dans $\mathbf{R}_+$, définie par $g(t) = \mu(\overset{-1}{f}([t, +\infty]))$ (éventuellement égale à $+\infty$ pour $t = 0$ (chap. IV, 2[e] éd., § 5, exerc. 29) on a $\int f \, d\mu = \int_0^{+\infty} g(t) \, dt$.

4) a) Soient T,T′ deux espaces localement compacts dénombrables à l'infini, μ une mesure positive sur T, μ' une mesure positive sur T′. Montrer que pour toute application $(\mu \otimes \mu')$-mesurable f de $\mathrm{T} \times \mathrm{T}'$ dans **R**, la fonction $\mathrm{F} : t \mapsto \int^* |f(t, t')| \, d\mu'(t')$ est μ-mesurable (considérer T′ comme réunion d'une suite croissante d'ensembles compacts).

b) On suppose en outre que, pour presque tout $t \in T$ (pour μ) la fonction $f(t, .)$ est μ'-intégrable et que pour presque tout $t' \in T'$ (pour μ') la fonction $f(., t')$ est μ-intégrable; enfin, on suppose que la fonction (définie presque partout pour μ) $t \mapsto \int f(t, t')\, d\mu'(t')$ est μ-intégrable. Montrer alors que la fonction (définie presque partout pour μ') $t' \mapsto \int f(t, t')\, d\mu(t)$ est μ'-intégrable et que l'on a

$$\int d\mu'(t') \int f(t, t')\, d\mu(t) = \int d\mu(t) \int f(t, t')\, d\mu'(t').$$

(En vertu de a), il y a une partition de T formée d'un ensemble μ-négligeable N et d'une suite (K_n) d'ensembles compacts telle que chacune des fonction $f\varphi_{K_n \times T'}$ soit $(\mu \otimes \mu')$-intégrable. Poser

$$g_n(t') = \sum_{j=1}^{n} \int_{K_j} f(t, t')\, d\mu(t)$$

et appliquer l'exerc. 20 du § 5).

c) Soient T l'intervalle $\left]0, 1\right]$ de $\mathbf{R}$, μ la mesure de Lebesgue sur T. Pour tout entier $n > 0$, soit $A'_n = \left[\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+1}}\right[$, $A''_n = \left[\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right[$, et, dans l'espace produit $T \times T$, soient $B'_n = A'_n \times A'_n$, $B''_n = A''_n \times A''_n$, $C'_n = A'_n \times A''_n$, $C''_n = A''_n \times A'_n$. On pose $f(t, t') = 4^{n+1}$ dans B'_n et B''_n, $f(t, t') = -4^{n+1}$ dans C'_n et C''_n, pour tout entier $n > 0$, et $f(t, t') = 0$ aux autres points de $T \times T$. Montrer que les deux intégrales $\int d\mu(t') \int f(t, t')\, d\mu(t)$ et $\int d\mu(t) \int f(t, t')\, d\mu(t')$ sont définies et égales, mais que la fonction f n'est pas intégrable pour la mesure $\mu \otimes \mu$.

¶ 5) Soient T, T' deux espaces localement compacts, μ une mesure positive sur T, μ' une mesure positive sur T'; on suppose que toute partie compacte de T soit métrisable. Soit f une application de $T \times T'$ dans un espace métrisable G, telle que: 1° pour tout $t \in T$, l'application $t' \mapsto f(t, t')$ soit μ'-mesurable; 2° pour tout $t' \in T'$, l'application $t \mapsto f(t, t')$ soit continue. Montrer que, dans ces conditions, f est $(\mu \otimes \mu')$-mesurable. (Remarquer (en utilisant le th. d'Egoroff) que, pour toute partie compacte K de T, la restriction de f à $K \times T'$ est limite d'une suite de fonctions $(\mu \otimes \mu')$-mesurables).

¶ 6) a) Soient T un espace localement compact, ν une mesure positive sur T, I un intervalle de $\mathbf{R}$, μ une mesure positive sur I. Soit A une partie du produit $I \times T$, telle que: 1° pour tout $x \in I$, la coupe $A(x) \subset T$ de A suivant x soit ν-mesurable; 2° la relation $x \leqslant y$ entraîne $A(x) \subset A(y)$. Montrer que A est $(\mu \otimes \nu)$-mesurable. (Se ramener au cas où I et T sont compacts et où μ est diffuse; considérer une suite croissante $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de points de I, x_0 et x_n étant les extrémités de I, telle que $\mu(\left]x_i, x_{i+1}\right[) \leqslant \varepsilon$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, et former deux parties B, C de $I \times T$, mesurables pour $\lambda = \mu \otimes \nu$ et telles que $B \subset A \subset C$ et $\lambda(C - B) \leqslant \varepsilon\nu(T)$).

b) Déduire de a) que, si f est une fonction numérique définie dans $I \times T$, telle que: 1° pour chaque $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ soit ν-mesurable; 2° pour chaque $t \in T$, $x \mapsto f(x, t)$ soit croissante, alors f est $(\mu \otimes \nu)$-mesurable.

c) Soit g une fonction numérique définie dans $I \times T$, telle que: 1° pour chaque $x \in I$, $t \mapsto g(x, t)$ soit ν-mesurable; 2° pour chaque $t \in T$, $x \mapsto g(x, t)$ soit monotone. Déduire de b) que g est $(\mu \otimes \nu)$-mesurable. (Soit $T_1 \subset T$ l'ensemble des $t \in T$ tels que l'application $x \mapsto g(x, t)$ soit croissante; montrer que T_1 est ν-mesurable. Pour cela, pour tout couple (r_1, r_2) de nombres rationnels appartenant à I et tels que $r_1 \leqslant r_2$, considérer l'ensemble D_{r_1, r_2} des points $t \in T$ tels que $g(r_1, t) \leqslant g(r_2, t)$ et exprimer T_1 comme intersection d'ensembles D_{r_1, r_2}).

¶ 7) a) Soient T, T′ deux espaces localement compacts; on suppose que T′ admet une base dénombrable. Soient μ une mesure positive sur T, μ' une mesure positive sur T′. Soit f une fonction numérique $\geqslant 0$ définie dans $T \times T'$, bornée dans toute partie compacte de $T \times T'$, et telle que: 1° pour presque tout $t \in T$, la fonction $t' \mapsto f(t, t')$ soit μ'-mesurable; 2° pour toute fonction $h \in \mathscr{K}(T')$, la fonction

$$t \mapsto \int f(t, t')h(t')\, d\mu'(t'),$$

définie presque partout, soit μ-mesurable. Montrer que, dans ces conditions, il existe une fonction g, mesurable pour $\mu \otimes \mu'$, telle que, pour tout $t \in T$, on ait $f(t, t') = g(t, t')$ sauf aux points d'un ensemble μ'-négligeable A_t (dépendant de t). (Montrer que, pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{K}(T \times T')$, la fonction $t' \mapsto f(t, t')\varphi(t, t')$ est μ'-intégrable pour presque tout $t \in T$, et que la fonction $t \mapsto \int f(t, t')\varphi(t, t')\, d\mu'(t')$, définie presque partout, est μ-intégrable; on utilisera le lemme 1 du chap. III, 2ᵉ éd., § 4, n° 1. Remarquer ensuite que $\varphi \mapsto \int d\mu(t) \int f(t, t')\varphi(t, t')\, d\mu'(t')$ est une mesure positive sur $T \times T'$, de base $\mu \otimes \mu'$, et appliquer le th. de Lebesgue-Nikodym; utiliser enfin le fait qu'il existe dans $\mathscr{K}(T')$ un ensemble dénombrable partout dense.)

b) On supposons en outre T métrisable. Montrer que les conditions de a) sont satisfaites si: 1° pour presque tout $t' \in T'$, la fonction $t \mapsto f(t, t')$ est μ-mesurable; 2° pour presque tout $t \in T$, la fonction $t' \mapsto f(t, t')$ est continue presque partout (pour μ'). (Utiliser l'exerc. 13 du chap. IV, § 5.)

c) On prend $T = T' = \left(0, 1\right)$. Admettant l'hypothèse du continu (*Ens.*, chap. III, § 6, n° 4), soit $x \prec y$ une relation de bon ordre sur T, pour laquelle il n'y a pas de plus grand élément, et telle que, pour tout $x \in T$, l'ensemble des $z \prec x$ soit dénombrable. Si on prend pour $\mu = \mu'$ la mesure de Lebesgue, montrer que la fonction caractéristique f de l'ensemble des couples (t, t') tels que $t \prec t'$ satisfait aux conditions de a), mais que l'on a $\int f(t, t')\, d\mu(t) = 0$ pour tout $t' \in T'$, et $\int f(t, t')\, d\mu'(t') = 1$ pour tout $t \in T$.

8) Soient T un espace localement compact, μ une mesure positive $\neq 0$ sur T, A une espace discret, λ la mesure sur A définie par la masse $+1$ en chaque point de A.

a) Pour qu'une application f de $A \times T$ dans un espace topologique soit $(\lambda \otimes \mu)$-mesurable, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in A$, l'application $t \mapsto f(\alpha, t)$ soit μ-mesurable.

b) Pour qu'une fonction $\mathbf{f}$ définie dans $A \times T$, à valeurs dans $\bar{\mathbf{R}}$ ou dans un espace de Banach, soit $(\lambda \otimes \mu)$-intégrable, il faut et il suffit que:

1° sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de $\alpha \in \mathrm{A}$, la fonction $t \mapsto \mathbf{f}(\alpha, t)$ soit identiquement nulle; 2° pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, la fonction $t \mapsto \mathbf{f}(\alpha, t)$ soit μ-intégrable; 3° on ait $\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \int |\mathbf{f}(\alpha, t)| \, d\mu(t) < +\infty$. Pour que $\mathbf{f}$ soit essentiellement $(\lambda \otimes \mu)$-intégrable, il faut et il suffit que: 1° pour chaque $\alpha \in \mathrm{A}$, la fonction $t \mapsto \mathbf{f}(\alpha, t)$ soit essentiellement μ-intégrable; 2° on ait $\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \int |\mathbf{f}(\alpha, t)| \, d\mu(t) < +\infty$; on a alors

$$\iint \mathbf{f} \, d\lambda \, d\mu = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \int \mathbf{f}(\alpha, t) \, d\mu(t).$$

c) Soient X un espace localement compact, $(\alpha, t) \mapsto \rho_{\alpha, t}$ une famille de mesures positives sur X ($\alpha \in \mathrm{A}$, $t \in \mathrm{T}$). Pour que la famille $(\alpha, t) \mapsto \rho_{\alpha, t}$ soit $(\lambda \otimes \mu)$-adéquate, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, la famille $t \mapsto \rho_{\alpha, t}$ soit μ-adéquate, et que la famille de mesures $(\int \rho_{\alpha, t} \, d\mu(t))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ soit sommable.

9) Soient u et v deux fonctions numériques croissantes et continues à droite dans $\mathbf{R}$, et telles que $u(x) = v(x) = 0$ pour $x < 0$. Soit w la fonction croissante et continue à droite dans $\mathbf{R}$, définie par $w(t) = u(t)v(t)$ pour $t \geqslant 0$, $w(t) = 0$ pour $t < 0$; soient λ, μ, ν les mesures de Stieltjes associées à u, v, w respectivement (§ 6, exerc. 5).

A toute fonction $\mathbf{f}$ définie dans $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou dans un espace de Banach F, on fait correspondre la fonction $\bar{\mathbf{f}}$ définie dans $\mathbf{R}^2$ par les conditions: $\bar{\mathbf{f}}(x, y) = \mathbf{f}(x)$ si $y < x$, $\bar{\mathbf{f}}(x, y) = \mathbf{f}(y)$ si $y \geqslant x$. Montrer que, pour que $\mathbf{f}$ soit ν-intégrable, il faut et il suffit que $\bar{\mathbf{f}}$ soit intégrable pour la mesure produit $\lambda \otimes \mu$, et qu'on a alors $\int \mathbf{f} \, d\nu = \iint \bar{\mathbf{f}} \, d\lambda \, d\mu$ (le démontrer d'abord pour les fonctions caractéristiques d'intervalles). En déduire la formule

$$\int \mathbf{f}(x) \, dw(x) = \int \mathbf{f}(x) v(x-) \, du(x) + \int \mathbf{f}(x) u(x+) \, dv(x).$$

En particulier, si u et v sont *continues* dans $\mathbf{R}$, on a la *formule d'intégration par parties*

$$\int_a^b u(x) \, dv(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x) \, du(x).$$

10) Soient T et X deux espaces localement compacts, λ une mesure positive sur T, μ une mesure positive bornée sur X telle que $\mu(\mathrm{X}) = 1$. Soit f une fonction numérique >0 en tout point de $\mathrm{T} \times \mathrm{X}$, intégrable ainsi que $\log f$ pour la mesure $\lambda \otimes \mu$. Démontrer l'inégalité

$$\log\left(\int \exp\left(\int \log f \, d\mu\right) d\lambda\right) \leqslant \int \left(\log \int f \, d\lambda\right) d\mu$$

et montrer que l'égalité ne peut avoir lieu que lorsque f est équivalente à une fonction de la forme $g \otimes h$ (appliquer l'inégalité de la moyenne géométrique (chap. IV, § 6, exerc. 7 d)) pour tout $t \in \mathrm{T}$, à la fonction $x \mapsto f(t, x)/(\int f(t, x) \, d\lambda(t))$).

11) Soient p un nombre réel fini et $\geqslant 1$, T et X deux espaces localement compacts, λ une mesure positive sur T, μ une mesure positive sur X, f une fonction $\geqslant 0$ définie dans $\mathrm{T} \times \mathrm{X}$, intégrable ainsi que f^p pour

la mesure $\lambda \otimes \mu$. Démontrer l'inégalité

$$\left(\int^* \left(\int f d\mu\right)^p d\lambda\right)^{1/p} \leqslant \int^* \left(\int f^p \, d\lambda\right)^{1/p} d\mu.$$

(Pour tout $t \in \mathrm{T}$, appliquer l'inégalité de Hölder à la fonction $x \mapsto f(t, x)$, mise sous la forme

$$f(t, x) = g(t, x)\left(\int f^p(t, x) \, d\lambda(t)\right)^{1/pq}$$

où q est l'exposant conjugué de p). Montrer que l'égalité ne peut avoir lieu que lorsque f est équivalente à une fonction de la forme $g \otimes h$.

¶ 12) Soient T_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n espaces localement compacts, μ_i une mesure positive sur T_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Pour chaque indice i, on désigne par E_i le produit $\prod_{j \neq i} \mathrm{T}_j$; soit f_i une fonction $\geqslant 0$, mesurable pour $\mu = \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$ dans $\mathrm{T} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{T}_i$, et *ne dépendant pas de* t_i ; montrer que si, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, la fonction f_k^{n-1} est intégrable pour la mesure $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_{k-1} \otimes \mu_{k+1} \otimes \ldots \otimes \mu_n$, alors $f_1 f_2 \ldots f_n$ est μ-intégrable, et on a

$$\int f_1 f_2 \ldots f_n \, d\mu_1 \, d\mu_2 \ldots d\mu_n \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{J}_k\right)^{1/(n-1)}$$

en posant, pour chaque indice k, $\mathrm{J}_k = \int f_k^{n-1} \, d\mu_1 \ldots d\mu_{k-1} \, d\mu_{k+1} \ldots d\mu_n$ (procéder par récurrence sur n, en appliquant le th. de Lebesgue-Fubini et l'inégalité de Hölder).

En déduire que, si A est une partie μ-mesurable de T, A_i sa projection sur E_i, et si A_i est intégrable et de mesure m_i (pour la mesure $\bigotimes_{j \neq i} \mu_j$ sur E_i), A est μ-intégrable, et on a

$$\mu(\mathrm{A}) \leqslant (m_1 m_2 \ldots m_n)^{1/(n-1)}.$$

Examiner les cas d'égalité dans ces deux inégalités.

Généraliser au cas où, au lieu de considérer les n produits de $n-1$ des T_i, on considère les $\binom{n}{p}$ produits de p des T_i, et où on intègre dans T un produit de $\binom{n}{p}$ fonctions $\geqslant 0$ dont chacune de dépend que de p des variables t_i. Par exemple, si $\mathrm{F}_{ij} = \mathrm{T}_i \times \mathrm{T}_j$ $(i < j)$, et si f_{ij} ne dépend que des variables t_i et t_j, montrer que

$$\int \left(\prod_{i<j} f_{ij}\right) d\mu_1 \, d\mu_2 \ldots d\mu_n \leqslant \left(\prod_{i<j} \int f_{ij}^{n-1} \, d\mu_i \, d\mu_j\right)^{1/(n-1)}.$$

¶ 13) Soit $(\mathrm{T}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ une famille d'espaces compacts, et pour chaque $\iota \in \mathrm{I}$, soit μ_ι une mesure positive sur T_ι, de masse totale égale à 1. Soient T l'espace produit $\prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{T}_\iota$ et μ la mesure produit $\bigotimes_{\iota \in \mathrm{I}} \mu_\iota$ sur T (chap. III, 2e éd., § 4, n° 5).

a) Pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, soit K_ι une partie compacte de T_ι ; montrer que, si $\mathrm{K} = \prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{K}_\iota$, on a $\mu(\mathrm{K}) = \prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mu_\iota(\mathrm{K}_\iota)$.

b) Soit M une partie compacte de T. Montrer qu'il existe une partie *dénombrable* J de I telle que, si on pose $\mathrm{H} = \mathrm{I} - \mathrm{J}$, $\mathrm{T}_\mathrm{J} = \prod_{\iota \in \mathrm{J}} \mathrm{T}_\iota$, $\mu_\mathrm{J} = \bigotimes_{\iota \in \mathrm{J}} \mu_\iota$, $\mathrm{T}_\mathrm{H} = \prod_{\iota \in \mathrm{H}} \mathrm{T}_\iota$, on a $\mathrm{M} \subset \mathrm{N} \times \mathrm{T}_\mathrm{H}$, où N est une partie μ_J-mesurable de T_J, telle que $\mu_\mathrm{J}(\mathrm{N}) = \mu(\mathrm{M})$. (Remarquer que, pour tout $n > 0$, il existe un voisinage ouvert de M, réunion d'un nombre fini d'ensembles élémentaires, dont la mesure diffère de $\mu(\mathrm{M})$ de moins de $1/n$.) En déduire que, pour presque tout $x \in \mathrm{N}$, la coupe $\mathrm{M}(x) \subset \mathrm{T}_\mathrm{H}$ (quand on identifie T au produit $\mathrm{T}_\mathrm{J} \times \mathrm{T}_\mathrm{H}$) contient le produit des supports des mesures μ_ι pour $\iota \in \mathrm{H}$ (utiliser le th. de Lebesgue-Fubini).

c) Montrer que, si I est *dénombrable* et si, pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, A_ι est une partie μ_ι-mesurable de T_ι, l'ensemble $\mathrm{A} = \prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_\iota$ est μ-mesurable, et on a $\mu(\mathrm{A}) = \prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mu_\iota(\mathrm{A}_\iota)$.

d) On suppose I non dénombrable. Pour tout $\iota \in \mathrm{I}$, soit A_ι une partie μ_ι-mesurable de T_ι. Pour que $\mathrm{A} = \prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_\iota$ soit μ-mesurable, il faut et il suffit que l'on soit dans l'un des deux cas suivants: 1° $\prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mu_\iota(\mathrm{A}_\iota) = 0$; 2° A_ι contient le support de la mesure μ_ι, sauf peut-être pour les indices ι d'une partie dénombrable de I. Dans chacun des deux cas, on a $\mu(\mathrm{A}) = \prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mu_\iota(\mathrm{A}_\iota)$. (Supposant qu'on n'est dans aucun des deux cas précédents, montrer qu'on peut se ramener au cas où $\mu_\iota(\mathrm{A}_\iota) = 1$ pour tout $\iota \in \mathrm{I}$. En utilisant b), montrer que ni A ni $\mathrm{T} - \mathrm{A}$ ne peut contenir d'ensemble compact de mesure non nulle.)

¶ 14) Soient K l'intervalle $(0, 1)$ de $\mathbf{R}$, λ la mesure de Lebesgue sur K, A un ensemble non dénombrable, μ la mesure sur $\mathrm{T} = \mathrm{K}^\mathrm{A}$ produit de la mesure λ sur chacun des facteurs.

a) Montrer que tout sous-espace fermé et *métrisable* X de T est μ-négligeable (utiliser l'exerc. 13 b) ci-dessus, et l'exerc. 11 de *Top. gén.*, chap. IX, § 2).

b) Soient Y un espace localement compact admettant une base dénombrable, ν une mesure positive sur Y, π une application ν-propre de Y dans T. Montrer que l'image $\pi(\nu)$ est étrangère à μ (en utilisant a), montrer que $\pi(\nu)$ est concentrée sur un ensemble μ-négligeable).

15) Soit $(\mathrm{T}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ une famille quelconque d'espaces compacts, et pour chaque $\iota \in \mathrm{I}$, soit μ_ι une mesure positive sur T_ι, de masse totale 1; soit μ la mesure produit $\bigotimes_{\iota \in \mathrm{I}} \mu_\iota$ sur $\mathrm{T} = \prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{T}_\iota$. Pour toute partition (L, M) de I en deux ensembles, on identifie T au produit $\mathrm{T}_\mathrm{L} \times \mathrm{T}_\mathrm{M}$ où $\mathrm{T}_\mathrm{L} = \prod_{\iota \in \mathrm{L}} \mathrm{T}_\iota$; pour tout $t \in \mathrm{T}$, on pose $t_\mathrm{L} = \mathrm{pr}_\mathrm{L}\, t$, de sorte que t est identifié à $(t_\mathrm{L}, t_\mathrm{M})$; soit μ_L la mesure $\bigotimes_{\iota \in \mathrm{L}} \mu_\iota$ sur T_L. Soit p un nombre réel fini et $\geqslant 1$; pour toute fonction $\mathbf{f}$ de $\mathscr{L}^p_\mathrm{F}(\mathrm{T}, \mu)$ (F espace de Banach ou $\mathrm{F} = \overline{\mathbf{R}}$), on pose $\mathbf{f}_\mathrm{L}(t) = \int \mathbf{f}(t_\mathrm{L}, t_\mathrm{M})\, d\mu_\mathrm{M}(t_\mathrm{M})$. Montrer que, suivant l'ensemble filtrant des

parties *finies* L de I, $\mathbf{f}_L$ tend *en moyenne d'ordre p* vers $\mathbf{f}$, et $\mathbf{f}_M$ tend *en moyenne d'ordre p* vers la fonction constante égale à $\int \mathbf{f}\, d\mu$. (Approcher $\mathbf{f}$ par une fonction continue ne dépendant que d'un nombre fini de variables.)

En déduire que, si une partie μ-mesurable A de T est telle que, pour tout $t \in A$, tout point t' de T, dont les coordonnées sont égales à celles de t sauf pour un nombre *fini* d'indices, appartient aussi à A, alors on a $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

¶ 16) Soit (T_n) une suite infinie d'espaces compacts, μ_n une mesure positive de masse totale égale à 1 sur T_n, μ la mesure produit $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n$ sur $T = \prod_{n=1}^{\infty} T_n$.

a) Soit f une fonction $\geqslant 0$, μ-intégrable dans T. Soit (L_n) une suite croissante de parties de $\mathbf{N}$, et en posant $M_n = \mathbf{N} - L_n$, soit $g = \sup_n f_{L_n}$, $h = \sup_n f_{M_n}$ (notations de l'exerc. 15). Pour tout $\alpha > 0$, soit A_α l'ensemble des points $t \in T$ où $g(t) > \alpha$, B_α l'ensemble des points $t \in T$ où $h(t) > \alpha$. Montrer que $\alpha \,.\, \mu(A_\alpha) \leqslant \int f\, d\mu$ et $\alpha \,.\, \mu(B_\alpha) \leqslant \int f\, d\mu$. (Remarquer que A_α est l'ensemble des $t \in T$ où au moins un des $f_{L_n}(t)$ est $> \alpha$, et l'exprimer comme réunion dénombrable d'ensembles G_n, deux à deux sans point commun, et tels que $\alpha \,.\, \mu(G_n) \leqslant \int_{G_n} f\, d\mu$).

b) On suppose que (L_n) est une suite croissante de parties finies de $\mathbf{N}$, dont la réunion est $\mathbf{N}$. Montrer que f_{L_n} tend presque partout vers f, et que f_{M_n} tend presque partout vers la constante $\int f\, d\mu$ dans T. (Pour tout $\varepsilon > 0$, considérer une fonction continue g ne dépendant que d'un nombre fini de variables et telle que $\int |f - g|\, d\mu \leqslant \varepsilon$, et appliquer a) à la fonction $|f - g|$).

¶ 17) Soit $(T_\iota)_{\iota \in I}$ une famille quelconque d'espaces compacts; pour chaque $\iota \in I$, soit μ_ι une mesure positive sur T_ι, de masse totale égale à 1, et soit μ la mesure produit $\bigotimes_{\iota \in I} \mu_\iota$ sur $T = \prod_{\iota \in I} T_\iota$. Pour tout $\iota \in I$, soit f_ι une fonction $\geqslant 0$, définie dans T_ι, μ_ι-intégrable et telle que $\int f_\iota\, d\mu_\iota \leqslant 1$; on pose $\mu'_\iota = f_\iota \,.\, \mu_\iota$, et $\mu' = \bigotimes_{\iota \in I} \mu'_\iota$ (chap. III, 2[e] éd., § 4, exerc. 6). On suppose $\mu' \neq 0$.

a) Pour toute partie finie J de I, on pose $T_J = \prod_{\iota \in J} T_\iota$, $\mu_J = \bigotimes_{\iota \in J} \mu_\iota$, $\mu'_J = \bigotimes_{\iota \in J} \mu'_\iota$, $f_J(t) = \prod_{\iota \in J} f_\iota(\mathrm{pr}_\iota t)$, $g_J = \sqrt{f_J}$, $\mu''_J = \sqrt{\mu_J \mu'_J}$ (§ 5, n° 9) et $\rho(\mu_J, \mu'_J) = \mu''_J(T_J) = \int g_J\, d\mu_J$. Montrer que, pour que les fonctions g_J convergent en moyenne quadratique vers une fonction de $\mathscr{L}^2(T, \mu)$, suivant l'ensemble ordonné filtrant des parties finies de I, il faut et il suffit que le produit des nombres $\rho(\mu_\iota, \mu'_\iota)$ soit convergent dans $\mathbf{R}_+^*$, c'est-à-dire > 0. (Pour deux parties finies J, L telles que $J \subset L$, évaluer la norme $N_2(g_J - g_L)$ au moyen des $\rho(\mu_\iota, \mu'_\iota)$). En déduire que les fonctions f_J convergent alors en moyenne vers une fonction $f \geqslant 0$ telle que $\mu' = f \,.\, \mu$.

b) Montrer que, si le produit $\prod_{\iota \in I} \rho(\mu_\iota, \mu'_\iota)$ est nul, les mesures μ et μ' sont étrangères (considérer l'ensemble A_J des points $t \in T$ tels que $g_J(t) > 1$, et évaluer les mesures $\mu(A_J)$ et $\mu'(T - A_J)$).

¶ 18) Les notations étant les mêmes que dans l'exerc. 17, soit ν_ι une mesure positive sur T_ι, de masse totale égale à 1, et soit $\nu = \bigotimes_{\iota \in I} \nu_\iota$.

a) Montrer que, si une des mesures ν_ι est étrangère à la mesure μ_ι de même indice, ν est étrangère à μ.

b) Pour tout $\iota \in I$, on pose $\nu_\iota = \mu'_\iota + \mu''_\iota$, où μ'_ι est de base μ_ι, et μ''_ι est étrangère à μ_ι (§ 5, th. 3); on suppose que $\mu'_\iota \neq 0$ pour tout $\iota \in I$. Montrer que, pour que ν ne soit pas étrangère à μ, il faut et il suffit que $\mu''_\iota = 0$ sauf pour une famille dénombrable d'indices, et que le produit $\mu' = \bigotimes_{\iota \in I} \mu'_\iota$ soit une mesure $\neq 0$ de base μ ; $\mu'' = \nu - \mu'$ est alors étrangère à μ. (Si $\mu''_\iota \neq 0$ pour une infinité non dénombrable d'indices, montrer qu'il existe un nombre α tel que $0 < \alpha < 1$ et que, pour une infinité dénombrable d'indices ι_n, on ait $\mu'_{\iota_n}(T_{\iota_n}) \leqslant \alpha$; montrer alors que μ est étrangère à ν en utilisant a); démontrer la seconde partie de la proposition en utilisant l'exerc. 17.)

19) Soient X un espace localement compact, Y un espace localement compact dénombrable à l'infini, A une partie universellement mesurable de $X \times Y$.

a) Pour tout $x \in X$, montrer que la coupe $A(x)$ est une partie universellement mesurable de Y. En outre, pour toute mesure positive μ sur Y, la fonction $x \mapsto \mu^*(A(x))$ est universellement mesurable dans X (utiliser le th. de Lebesgue–Fubini).

b) Soit μ une mesure positive sur Y, telle que, pour presque tout $y \in Y$ (pour μ), la coupe $\overset{-1}{A}(y)$ de A soit dénombrable. Montrer que l'ensemble N des $x \in X$ tels que $\mu^*(A(x)) > 0$ ne peut contenir aucun ensemble compact dénombrable.

20) a) Soient ν une mesure positive sur le cercle unité $\mathbf{U} : |z| = 1$ dans $\mathbf{C}$, et soit μ la mesure complexe $j \,.\, \nu$, où $j : z \mapsto z$ est l'injection canonique de $\mathbf{U}$ dans $\mathbf{C}$, de sorte que $|\mu| = \nu$. Soit ρ l'image réciproque de ν par l'homéomorphisme local canonique $\varphi : t \mapsto e^{it}$ de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{U}$ (§ 6, n° 6). Soit A une partie ν-mesurable de $\mathbf{U}$; si $\mu(A) = |\mu(A)| e^{i\omega}$, montrer que l'on a $|\mu(A)| \leqslant |\int_{\omega-\pi/2}^{\omega+\pi/2} e^{i\theta}\, d\rho(\theta)|$.

b) Déduire de a) que l'on a, lorsque A parcourt l'ensemble des parties μ-mesurables de $\mathbf{U}$,

$$\sup_A |\mu(A)| \geqslant \sup_\omega \left| \int_{\omega-\pi/2}^{\omega+\pi/2} \mathscr{R}(e^{i(\theta-\omega)})\, d\rho(\theta) \right|$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \int_{\omega-\pi/2}^{\omega+\pi/2} \mathscr{R}(e^{i(\theta-\omega)})\, d\rho(\theta)$$

et en conclure que l'on a

$$(*) \qquad \sup_{A} |\mu(A)| \geqslant \frac{1}{\pi} \|\mu\|$$

(évaluer la dernière intégrale à l'aide du th. de Lebesgue–Fubini).

c) Montrer que l'inégalité (*) est vraie pour *toute* mesure complexe μ bornée sur un espace localement compact X, A parcourant l'ensemble des parties μ-mesurables de X. (Soit $\mu = h \,.\, |\mu|$, où h prend ses valeurs dans U. Considérer la mesure image $\nu = h(|\mu|)$ sur **U** et montrer que l'on a $h(\mu) = j \,.\, \nu$; appliquer ensuite b) à $h(\mu)$).

21) On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$.

a) Soit C_0 un cube (*Top. gén.*, chap. VI, § 1, n° 1) dans $\mathbf{R}^n$, et soit u une fonction numérique intégrable (pour λ) dans C_0. Soit s un nombre réel tel que

$$s \geqslant \frac{1}{\lambda(C_0)} \int_{C_0} |u| \, d\lambda.$$

Montrer qu'il existe une suite (I_k) de cubes ouverts contenus dans C_0. deux à deux disjoints, et vérifiant les conditions suivantes :

1° $|u(x)| \leqslant s$ presque partout dans l'ensemble $C_0 - \bigcup_k I_k$;

2° si l'on pose

$$u_k = \frac{1}{\lambda(I_k)} \int_{I_k} |u(x)| \, d\lambda(x),$$

on a $u_k \leqslant 2^n s$ pour tout k;

3° $$\sum_k \lambda(I_k) \leqslant \frac{1}{s} \int_{C_0} |u(x)| \, d\lambda(x).$$

(En divisant en deux intervalles égaux chacune des projections de C_0, choisir parmi les 2^n cubes ouverts sans points communs les cubes I_{1i} tels que les « valeurs moyennes » correspondantes u_{1i} soient toutes $\geqslant s$, et en raison du choix de s, montrer que l'on a $u_{1i} \leqslant 2^n s$. Décomposer de même en 2^n cubes chacun des cubes de la première subdivision qui ne figure pas parmi les I_{1i}, ce qui donne une seconde famille finie de cubes I_{2i} choisie parmi tous les nouveaux cubes obtenus comme ceux pour lesquels la valeur moyenne correspondante u_{2i} est $\leqslant s$. Continuer par récurrence. Pour prouver que la condition 1° est vérifiée, raisonner par l'absurde, en notant que la partie B_m de $C_0 - \bigcup_k I_k$ où on a $|u(x)| \geqslant s + 1/m$ est, à un ensemble négligeable près, intersection d'une suite décroissante (U_r) d'ouverts, où U_r est la réunion des cubes de la r-ème subdivision qui ne figurent pas parmi les I_k et contiennent un point de B_m).

b) Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions numériques u intégrables dans C_0 ayant la propriété suivante : pour tout cube $C \subset C_0$, si $m_C(u)$ est la valeur moyenne

$$\frac{1}{\lambda(C)} \int_C u(x) \, d\lambda(x),$$

on a $\int_C |u(x) - m_C(u)|\, d\lambda(x) \leqslant \lambda(C)$; si $u \in \mathscr{F}$, il en est de même de $u - c$ pour tout nombre réel c. Pour toute fonction $u \in \mathscr{F}$, tout nombre $\sigma > 0$ et tout cube $C \subset C_0$, on note $S(\sigma, u, C)$ l'ensemble des $x \in C$ tels que $|u(x) - m_C(u)| \geqslant \sigma$. Enfin on désigne par $G(\sigma)$ le plus petit nombre tel que l'on ait

$$\lambda(S(\sigma, u, C)) \leqslant G(\sigma) \int_C |u(x) - m_C(u)|\, d\lambda(x)$$

lorsque u parcourt $\mathscr{F}$ et C l'ensemble des cubes contenus dans C_0; on a $G(\sigma) \leqslant 1/\sigma$. Montrer que si $\sigma/2^n > s \geqslant 1$, on a

$$G(\sigma) \leqslant \frac{1}{s} G(\sigma - 2^n s).$$

(On peut se borner à prouver que, pour un $u \in \mathscr{F}$, on a

$$\lambda(S(\sigma, u, C_0)) \leqslant \frac{1}{s} G(\sigma - 2^n s) \int_{C_0} |u(x) - m_{C_0}(u)|\, d\lambda(x)$$

et on peut pour simplifier supposer $m_{C_0}(u) = 0$. Utiliser alors la décomposition de C_0 en réunion de cubes I_k et en un ensemble où $|u(x)| \leqslant s$ presque partout, en notant que si $x \in I_k$ appartient à $S(\sigma, u, C_0)$, on a $|u(x) - m_{I_k}(u)| \geqslant \sigma - 2^n s$ et par suite

$$\lambda(I_k \cap S(\sigma, u, C_0)) \leqslant G(\sigma - 2^n s) \int_{I_k} |u(x) - m_{I_k}(u)|\, d\lambda(x)).$$

c) Déduire de b) qu'il existe deux constantes B, b ne dépendant que de n, telles que, pour toute fonction $u \in \mathscr{F}$ et tout nombre $\sigma > 0$, on ait $\lambda(S(\sigma, u, C_0)) \leqslant Be^{-b\sigma}\lambda(C_0)$ (Prendre $s = e$ dans b)).

NOTE HISTORIQUE

(Chapitres II à V)

(N.-B. — Les chiffres romains renvoient à la bibliographie placée à la fin de cette note.)

Le développement de la notion moderne d'intégrale est étroitement lié à l'évolution de l'idée de fonction, et à l'étude approfondie des fonctions numériques de variables réelles, qui s'est poursuivie depuis le début du XIXᵉ siècle. On sait qu'Euler concevait déjà la notion de fonction d'une manière assez générale, puisque pour lui la donnée d'une courbe « arbitraire » rencontrée en un seul point par toute parallèle à l'axe Oy définit une fonction $y = f(x)$ (cf. *Fonct. var. réelle*, Note hist. des chap. I-II-III, p. 173); mais, ainsi que la plupart de ses contemporains, il se refusait à admettre que de telles fonctions pussent s'exprimer « analytiquement ». Ce point de vue ne devait guère se modifier jusqu'aux travaux de Fourier; mais la découverte, par ce dernier, de la possibilité de représenter des fonctions discontinues comme sommes de séries trigonométriques*, allait exercer une influence décisive sur les générations suivantes. A vrai dire, les démonstrations de Fourier manquaient totalement de rigueur, et leur domaine de validité n'apparaissait pas clairement; toutefois, les formules intégrales

$$(1) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin nx\, dx \quad (n \geqslant 1)$$

donnant les coefficients du développement de φ en série de Fourier, avaient un sens intuitivement évident dès qu'on supposait φ continue et monotone par morceaux**. Aussi est-ce tout d'abord à ces fonctions que se borne Dirichlet, dans le célèbre mémoire (II) où il établissait la convergence de la série de Fourier; mais déjà, à la fin de son travail, il se préoccupe de l'extension de ses résultats à des classes de fonctions plus étendues. On sait que c'est à cette occasion que Dirichlet, précisant

---

* Il ne s'agit d'ailleurs de « découverte » qu'en un sens tout à fait relatif: Euler connaissait déjà les développements en série trigonométrique de fonctions non périodiques telles que x ou x^2, et les formules (1) se trouvent dans un travail de Clairaut dès 1754, et chez Euler dans un mémoire de 1777. Mais là où le XVIIIᵉ siècle, faute d'une conception claire de ce que signifie un développement en série, négligeait de tels résultats et gardait intacte la croyance à l'impossibilité d'obtenir de tels développements pour des fonctions « discontinues », Fourier, au contraire, proclame que ses développements sont convergents « *quelle que puisse être la courbe donnée qui répond à* $\varphi(x)$, *soit qu'on puisse lui assigner une équation analytique, soit qu'elle ne dépende d'aucune loi régulière* » (*Œuvres*, t. I, Paris (Gauthier-Villars), 1888, p. 210).

** Pour Fourier, l'intégrale est encore définie en faisant appel à la notion d'aire; la définition analytique de l'intégrale n'apparaît, rappelons-le, qu'avec Cauchy (cf. *Fonct. var. réelle*, Note hist. des chap. I–II–III, p. 174–175).

les idées de Fourier, définit la notion générale de fonction telle que nous l'entendons aujourd'hui; le premier point à élucider était naturellement de savoir dans quels cas il était encore possible d'attacher un sens aux formules (1). « *Lorsque les solutions de continuité* [de φ] *sont en nombre infini*... » dit Dirichlet ((II), p. 169), «*il est nécessaire qu'alors la fonction* $\varphi(x)$ *soit telle que, si l'on désigne par a et b deux quantités quelconques comprises entre* $-\pi$ *et* $+\pi$, *on puisse toujours placer entre a et b d'autres quantités r et s assez rapprochées pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de r à s. On sentira facilement la nécessité de cette restriction en considérant que les différents termes de la série* [de Fourier] *sont des intégrales définies et en remontant à la notion fondamentale des intégrales. On verra alors que l'intégrale d'une fonction ne signifie quelque chose qu'autant que la fonction satisfait à la condition précédemment énoncée.* »

En termes modernes, Dirichlet semble croire que l'intégrabilité équivaut au fait que les points de discontinuité forment un ensemble rare; il signale d'ailleurs, quelques lignes plus loin, le célèbre exemple de la fonction égale à c pour x rationnel, à une valeur différente d pour x irrationnel, et affirme que cette fonction « *ne saurait être substituée* » dans l'intégrale. Il annonçait d'ailleurs des travaux ultérieurs sur ce sujet, mais ces travaux ne furent jamais publiés*, et pendant 25 ans, personne ne semble avoir cherché à avancer dans cette voie, peut-être parce que la considération de fonctions aussi « pathologiques » paraissait à l'époque tout à fait dénuée d'intérêt; en tout cas, lorsque Riemann, en 1854 ((III), p. 227-264), reprend la question (toujours à propos des séries trigonométriques**), il éprouve le besoin de justifier son travail: « *Quelle que soit notre ignorance touchant la façon dont les forces et les états de la matière varient avec le temps et le lieu dans l'infiniment petit, nous pouvons pourtant tenir pour certain que les fonctions auxquelles les recherches de Dirichlet ne s'appliquent pas, n'interviennent pas dans les phénomènes naturels. Toutefois* », poursuit-il, « *il semble que ces cas non traités par Dirichlet méritent l'attention pour deux raisons. Premièrement, comme Dirichlet lui-même le remarque à la fin de son travail, ce sujet est en relation très étroite avec les principes du calcul infinitésimal, et peut servir à apporter plus de clarté et de certitude à ces principes. De ce point de vue, son étude a un intérêt immédiat. En second lieu, l'application des séries de Fourier n'est pas limitée aux recherches de physique; elles sont à présent appliquées aussi avec succès dans un domaine des mathématiques pures, la théorie des nombres, et là il semble que ce soient précisément les fonctions dont le développement en série trigonométrique n'a pas été étudié par Dirichlet, qui présentent de l'importance* » ((III), p. 237-238).

---

* Selon certaines indications (assez obscures) de Lipschitz (*J. de Crelle*, t. LXIII (1864), p. 296; traduit en français par P. Montel, dans *Acta Math.*, t. XXXVI (1912), p. 261-295), Dirichlet aurait peut-être cru que si l'ensemble des points de discontinuité est rare, son « dérivé » est fini, et aurait en tout cas limité ses investigations au cas où il en est ainsi.

** De Dirichlet et Riemann à nos jours, nous verrons se poursuivre cette étroite association entre l'intégration et ce que nous appelons maintenant l'« analyse harmonique », qui en constitue en quelque sorte la pierre de touche.

L'idée de Riemann est de partir du procédé d'approximation de l'intégrale, remis en honneur par Cauchy, et de déterminer quand les « sommes de Riemann » d'une fonction f, dans un intervalle borné (a, b), tendent vers une limite (la longueur maxima des intervalles de la subdivision tendant vers 0); problème dont il obtient sans peine la solution, sous la forme suivante: pour tout $\alpha > 0$, il y a une subdivision de (a, b) en intervalles partiels de longueur maxima assez petite pour que la somme des longueurs des intervalles de cette subdivision, où l'oscillation de f est $> \alpha$, soit arbitrairement petite. Il montre en outre que cette condition est vérifiée, non seulement pour des fonctions continues et monotones par morceaux, mais aussi pour des fonctions pouvant avoir un ensemble partout dense de points de discontinuité*.

Le mémoire de Riemann ne fut publié qu'après sa mort, en 1867. Mais cette fois, l'époque était plus favorable à ce genre de recherches, et l'« intégrale de Riemann » prit naturellement sa place dans le courant d'idées qui conduisait alors à une étude poussée du « continu » et des fonctions de variables réelles (Weierstrass, Du Bois-Reymond, Hankel, Dini) et allait aboutir, avec Cantor, à l'éclosion de la théorie des ensembles. La forme donnée par Riemann à la condition d'intégrabilité suggérait l'idée de « mesure » pour l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction dans un intervalle; mais près de 30 ans devaient s'écouler avant que l'on parvînt à donner une définition féconde et commode de cette notion.

Les premières tentatives dans cette direction sont dues à Stolz, Harnack et Cantor (1884–85); les deux premiers, pour définir la « mesure » d'une partie bornée E de $\mathbf{R}$, considèrent des ensembles $F \supset E$ qui sont réunions *finies* d'intervalles, prennent pour chaque F la somme des longueurs des intervalles correspondants, et appellent « mesure » de E la borne inférieure de ces nombres; tandis que Cantor, se plaçant d'emblée dans l'espace $\mathbf{R}^n$, considère pour un ensemble borné E et pour $\rho > 0$ le voisinage $V(\rho)$ de E formé des points dont la distance à E est $\leqslant \rho$, et prend la borne inférieure du « volume » de $V(\rho)$**. Avec cette définition, la « mesure » d'un ensemble était égale à celle de son adhérence, d'où résulte en particulier que la « mesure » de la réunion de deux ensembles sans point commun pouvait être strictement inférieure à la somme des « mesures » de ces deux ensembles. Sans doute pour pallier cette dernière difficulté, Peano (V) et Jordan (VI), quelques années plus tard, introduisent, à côté de la « mesure » de Cantor $\mu(A)$ d'un ensemble A contenu dans un pavé I, sa « mesure intérieure » $\mu(I) - \mu(I - A)$, et appellent « mesurables » les ensembles A (dits

* Par contre, H. J. Smith donna, dès 1875, le premier exemple d'une fonction non intégrable au sens de Riemann, et dont l'ensemble des points de discontinuité est rare (*Proc. Lond. Math. Soc.*, (1), t. VI (1875), p. 140–153).

** Cantor ne donne pas de définition précise de ce « volume » et se borne à dire qu'on peut le calculer par une intégrale multiple ((IV), p. 229–236 et 257–258). On voit facilement que sa définition équivaut à celle de Stolz-Harnack, par application du théorème de Borel-Lebesgue.

maintenant « quarrables ») pour lesquels ces deux nombres coïncident. La réunion de deux ensembles quarrables A, B sans point commun est alors quarrable et a pour « mesure » la somme des « mesures » de A et de B ; mais un ensemble ouvert borné n'est pas nécessairement quarrable, et l'ensemble des nombres rationnels contenus dans un intervalle borné ne l'est pas non plus, ce qui enlevait beaucoup d'intérêt à la notion de Peano-Jordan.

C'est à E. Borel (IX) que revient le mérite d'avoir su discerner les défauts des définitions antérieures et vu comment on pouvait y remédier. On savait depuis Cantor que tout ensemble ouvert U dans **R** est réunion de la famille dénombrable de ses « composantes », intervalles ouverts deux à deux sans point commun; au lieu de chercher à approcher U « par le dehors » en l'enfermant dans une suite finie d'intervalles, Borel, s'appuyant sur le résultat précédent, propose de prendre comme mesure de U (lorsque U est borné) la somme des longueurs de ses composantes. Puis il décrit très sommairement* la classe d'ensembles (appelés depuis « boréliens ») qu'on peut obtenir, à partir des ensembles ouverts, en itérant indéfiniment les opérations de réunion dénombrable et de « différence » A − B, et indique que, pour ces ensembles, on peut définir une mesure qui possède la propriété fondamentale d'*additivité complète*: si une suite (A_n) est formée d'ensembles boréliens deux à deux disjoints, la mesure de leur réunion (supposée bornée) est égale à la somme de leurs mesures.

Cette définition devait inaugurer une ère nouvelle en Analyse : d'une part, en liaison avec les travaux contemporains de Baire, elle formait le point de départ de toute une série de recherches de nature topologique sur la classification des ensembles de points; et surtout, elle allait servir de base à l'extension de la notion d'intégrale, réalisée par Lebesgue dans les premières années du XX^e siècle.

Dans sa thèse (X *a*)), Lebesgue commence par préciser et développer les indications succinctes d'E. Borel; imitant la méthode de Peano-Jordan, la « mesure extérieure » d'un ensemble borné $A \subset \mathbf{R}$ est définie comme borne inférieure des mesures des ensembles ouverts contenant A ; puis, si I est un intervalle contenant A, la « mesure intérieure » de A est la différence des mesures extérieures de I et de I − A ; on obtient ainsi une notion d'« ensemble mesurable » qui ne diffère de la définition « constructive » initiale de Borel que par adjonction d'une partie d'un ensemble de mesure nulle au sens de Borel. Cette définition s'étendait aussitôt aux espaces $\mathbf{R}^n$; la vieille conception de l'intégrale définie $\int_a^b f(t)\,dt$ d'une fonction bornée et $\geqslant 0$ comme « aire » limitée par la courbe $y = f(x)$, les droites $x = a$, $x = b$ et $y = 0$, fournissait donc une extension immédiate de l'intégrale de Riemann à toutes les fonctions f pour lesquelles la mesure de l'ensemble précédent se trouvait définie.

---

* La mesure n'est encore pour Borel, à ce moment, qu'un moyen technique en vue de l'étude de certaines séries de fonctions rationnelles, et il souligne lui-même que, pour le but qu'il se propose, l'utilité de la mesure tient surtout au fait qu'un ensemble de mesure non nulle n'est pas dénombrable ((IX), p. 48).

Mais l'originalité de Lebesgue ne réside pas tellement dans l'idée de cette extension*, que dans sa découverte du théorème fondamental sur le passage à la limite dans l'intégrale ainsi conçue, théorème qui apparait chez lui comme conséquence de l'additivité complète de la mesure**; il en aperçoit aussitôt toute l'importance, et en fait la pierre angulaire de l'exposé didactique de sa théorie qu'il donne, dès 1904, dans les célèbres « *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* » (X *b*))***.

Nous ne pouvons décrire ici dans le détail les innombrables progrès que les résultats de Lebesgue devaient entraîner dans l'étude des problèmes classiques du Calcul infinitésimal; nous aurons l'occasion d'insister sur certains d'entre eux dans des Livres ultérieurs. Lebesgue lui-même avait déjà, dans sa thèse, appliqué sa théorie à l'extension des notions classiques de longueur et d'aire à des ensembles plus généraux que les courbes et surfaces usuelles; sur le développement considérable de cette théorie depuis un demi-siècle, nous renvoyons le lecteur à l'exposé récent de L. Cesari (XXVI). Mentionnons aussi les applications aux séries trigonométriques, développées par Lebesgue presque aussitôt après sa thèse (X *c*)), et qui allaient ouvrir à cette théorie de nouveaux horizons, dont l'exploration est loin d'être terminée de nos jours (voir (XXV)). Enfin et surtout, la définition des espaces L^p et le théorème de Fischer-Riesz ((XIII), (XV *a*)) et (XV *b*)); cf. Note historique du Livre V) mettaient en lumière le rôle que pouvait jouer en Analyse fonctionnelle la nouvelle notion d'intégrale; rôle qui ne devait que grandir avec les généralisations ultérieures de cette notion, dont nous allons parler dans un moment.

Auparavant, nous nous arrêterons un peu plus longuement sur un des problèmes auxquels Lebesgue consacra le plus d'efforts, la liaison entre les notions d'intégrale et de primitive. Avec la généralisation de l'intégrale introduite par Riemann s'était naturellement posée la question de savoir si la correspondance classique entre intégrale et primitive, valable pour les fonctions continues, subsistait encore dans des cas plus généraux. Or, il est facile de donner des exemples de fonctions f, intégrables au sens de Riemann, et telles que $\int_a^x f(t)\,dt$ n'ait pas de dérivée (ni

---

* Indépendamment de Lebesgue, W. H. Young avait eu cette même idée pour les fonctions semi-continues (XI *a*)).

** Le cas particulier de ce théorème, où il s'agit d'une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann dans un intervalle compact, uniformément bornées, et dont la limite est intégrable au sens de Riemann, avait été démontré par Arzelà (VII).

*** Parmi les conséquences les plus importantes de ce théorème dans la théorie générale de l'intégration, il faut mentionner en particulier le théorème d'Egoroff sur la convergence des suites de fonctions mesurables (XVI), précisant des remarques antérieures de Borel et Lebesgue. D'autre part, les fonctions mesurables (numériques) avaient d'abord été définies par Lebesgue par la propriété que, pour une telle fonction f, l'image réciproque par f de tout intervalle de $\mathbf{R}$ est un ensemble mesurable. Mais, dès 1903, Borel et Lebesgue avaient attiré l'attention sur les propriétés topologiques de ces fonctions; elles furent mises sous leur forme définitive par Vitali, qui, en 1905 (XII *a*)), formula le premier la propriété des fonctions mesurables que nous avons prise comme définition au chap. IV, § 5 (théorème retrouvé en 1912 par N. Lusin et connu d'ordinaire sous son nom).

même de dérivée à droite ou de dérivée à gauche) en certains points (cf. *Fonct. Var. réelle*, chap. II, § 2, exerc. 1); inversement, Volterra avait montré, en 1881, qu'une fonction $F(x)$ peut avoir une dérivée bornée dans un intervalle I, mais non intégrable (au sens de Riemann) dans I. Par une analyse d'une grande subtilité (où le théorème de passage à la limite dans l'intégrale est loin de suffire), Lebesgue parvint à montrer que, si f est intégrable (à son sens) dans $\left[a, b\right]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ a presque partout une dérivée égale à $f(x)$ (X b)). Inversement, si une fonction g est dérivable dans $\left[a, b\right]$ et si sa dérivée $g' = f$ est *bornée*, f est intégrable et on a la formule $g(x) - g(a) = \int_a^x f(t)\,dt$. Mais Lebesgue constate que le problème est beaucoup plus complexe lorsque g' n'est pas bornée; g' n'est pas nécessairement intégrable dans ce cas, et le premier problème était donc de caractériser les fonctions continues g pour lesquelles g' existe presque partout et est intégrable. En se bornant au cas où un des nombre dérivés* de g est partout *fini*, Lebesgue montra que g est nécessairement une fonction *à variation bornée***. Enfin, il établit une réciproque de ce dernier résultat: une fonction à variation bornée g admet presque partout une dérivée, et g' est intégrable; mais on n'a plus nécessairement

$$g(x) - g(a) = \int_a^x g'(t)\,dt; \tag{2}$$

la différence entre les deux membres de cette relation est une fonction à variation bornée non constante et de dérivée nulle presque partout (fonction « singulière »). Il restait à caractériser les fonctions à variation bornée g telles que la relation (2) ait lieu. Lebesgue établit que ces fonctions (dites « absolument continues » par Vitali, qui en fit une étude détaillée) sont celles qui ont la propriété suivante: la variation totale de g dans un ensemble ouvert U (somme des variations totales de g dans chacune des composantes connexes de U) tend vers 0 avec la mesure de U.

Nous verrons ci-dessous comment, sous une forme affaiblie, ces résultats devaient plus tard acquérir une portée beaucoup plus générale. Sous leur forme initiale, leur champ d'application est demeuré assez restreint, et n'a pas dépassé le cadre de la théorie « fine » des fonctions de variables réelles; aussi restent-ils en dehors du plan de ce Traité***.

---

* Les nombres dérivés à droite de g au point x sont les deux limites

$$\limsup_{h\to 0,\, h>0}\,(g(x+h) - g(x))/h, \qquad \liminf_{h\to 0,\, h>0}\,(g(x+h) - g(x))/h.$$

On définit de même les nombres dérivés à gauche.

** Ces fonctions avaient été introduites par Jordan, à propos de la rectification des courbes (VI); il montra qu'on peut en donner les deux définitions équivalentes suivantes: *a*) f est différence de deux fonctions croissantes; *b*) pour toute subdivision de l'intervalle $\left[a, b\right]$ par une suite finie croissante de points $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, avec $a = x_0$, $b = x_n$, la somme $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ est bornée par un nombre indépendant de la subdivision considérée. La borne supérieure de ces sommes est la *variation totale* de f dans $\left[a, b\right]$.

*** Mentionnons toutefois que la théorie moderne des « martingales » dans le Calcul des probabilités utilise constamment des raisonnements présentant une grande analogie avec ceux que l'on emploie pour l'étude de la dérivation.

A plus forte raison en est-il de même des développements ultérieurs de la théorie des primitives; nous nous contenterons de mentionner ici les profonds travaux de Denjoy et de ses émules et continuateurs (Perron, de la Vallée-Poussin, Khintchine, Lusin, Banach, etc.); le lecteur en trouvera un exposé détaillé dans le livre de S. Saks (XXIV).

Un des progrès essentiels apportés par la théorie de Lebesgue concerne les intégrales multiples. Cette notion s'était introduite vers le milieu du XVIII^{e} siècle, et d'abord sous forme d'« intégrale indéfinie » (par analogie avec la théorie de l'intégrale des fonctions d'une seule variable, $\iint f(x, y)\,dx\,dy$ désigne une solution de l'équation $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x,y)$); mais, dès 1770, Euler a une conception fort claire de l'intégrale double étendue à un domaine borné (limité par des arcs de courbe analytiques), et écrit correctement la formule évaluant une telle intégrale au moyen de deux intégrales simples successives (I). Il n'était pas difficile de justifier cette formule en partant des « sommes de Riemann », tant que la fonction intégrée était continue, et le domaine d'intégration pas trop compliqué; mais dès qu'on voulait aborder des cas plus généraux, le procédé de Riemann rencontrait de sérieuses difficultés ($f(x, y)$ peut être intégrable au sens de Riemann, sans que $\int dx \int f(x, y)\,dy$ ait un sens lorsque les intégrales simples sont prises au sens de Riemann). Ces difficultés s'évanouissent quand on passe à la définition de Lebesgue; déjà ce dernier avait montré dans sa thèse que, lorsque $f(x, y)$ est une « fonction de Baire » bornée, il en est de même des fonctions $y \mapsto f(x, y)$ (pour tout x) et $x \mapsto \int f(x, y)\,dy$, et on a la formule

$$\iint f(x, y)\,dx\,dy = \int dx \int f(x, y)\,dy \tag{3}$$

(intégrale prise dans un rectangle). Un peu plus tard, Fubini (XIV) apporta à ce résultat un complément important en prouvant que, si on suppose seulement f intégrable, alors l'ensemble des x tels que $y \mapsto f(x, y)$ ne soit pas intégrable est de mesure nulle, ce qui permettait d'étendre aussitôt la formule (3) à ce cas.

Enfin, en 1910 (X *d*)), Lebesgue aborde l'extension aux intégrales multiples de ses résultats sur les dérivées des intégrales simples. Il est ainsi amené à associer à une fonction f, intégrable dans toute partie compacte de $\mathbf{R}^n$, la *fonction d'ensemble* $\mathrm{F(E)} = \int_{\mathrm{E}} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, définie pour toute partie intégrable E de $\mathbf{R}^n$, qui généralise le concept d'« intégrale indéfinie »; et il observe à cette occasion que cette fonction possède les deux propriétés suivantes: 1° elle est complètement additive; 2° elle est « absolument continue » en ce sens que F(E) tend vers 0 avec la mesure de E. La partie essentielle du mémoire de Lebesgue consiste à démontrer la réciproque de cette proposition*. Mais il ne s'en tient pas là et, dans la même direction, signale la possibilité de généraliser la notion de

---

* L'outil principal, dans cette démonstration, est un théorème de recouvrement, démontré quelque temps auparavant par Vitali (XII *b*)) et qui est resté fondamental dans ce genre de questions.

fonction à variation bornée, en considérant les fonctions d'ensemble mesurable F(E), complètement additives et telles que $\sum_n |F(E_n)|$ reste bornée pour toute partition dénombrable de E en parties mesurables E_n. Et, s'il se borne en fait à ne considérer de telles fonctions que dans l'ensemble des pavés de $\mathbf{R}^n$, il est bien clair qu'il ne restait plus qu'un pas à franchir pour aboutir à la notion générale de mesure que va définir J. Radon en 1913, englobant dans une même synthèse l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Stieltjes, dont il nous faut parler maintenant.

En 1894, T. Stieltjes publiait, sous le titre « *Recherches sur les fractions continues* » (VIII), un mémoire très original où, à partir d'une question en apparence bien particulière, se trouvaient posés et résolus, avec une rare élégance, des problèmes d'une nature toute nouvelle dans la théorie des fonctions analytiques et celle des fonctions d'une variable réelle*. Afin de représenter la limite d'une certaine suite de fonctions analytiques, Stieltjes y était amené, entre autres, à introduire, sur la droite, le concept d'une «distribution de masse» positive, notion familière depuis longtemps dans les sciences physiques, mais qui n'avait jusque-là été considérée en mathématiques que sous des hypothèses restrictives (en général, l'existence d'une « densité » en tout point, variant de façon continue); il remarque que la donnée d'une telle distribution équivaut à celle de la fonction croissante $\varphi(x)$ qui donne la masse totale contenue dans l'intervalle d'extrémités 0 et x pour $x > 0$, et cette masse changée de signe pour $x < 0$, les discontinuités de φ correspondant aux masses « concentrées en un point »**. Stieltjes forme alors, pour une telle distribution de masse dans un intervalle (a, b), les « sommes de Riemann » $\sum_i f(\xi_i)(\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i))$ et montre que, lorsque f est continue dans (a, b), ces sommes tendent vers une limite qu'il note $\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$. N'ayant besoin que d'intégrer des fonctions continues (et même des fonctions dérivables) Stieltjes ne poussa pas plus avant l'étude de cette intégrale*** et pendant une dizaine d'années cette notion ne parait pas avoir attiré l'attention****. Mais, en 1909, F. Riesz (XV *c*),

* C'est là entre autres qu'est formulé et résolu le célèbre « problème des moments » (cf. Note hist. du Livre V).

** Stieltjes ne fait pas encore de différence entre les diverses espèces d'intervalles ayant mêmes extrémités a, b, ce qui le conduit à concevoir qu'aux points de discontinuité c de φ, une partie de la masse concentrée en c appartient à l'intervalle d'origine c, et l'autre partie à l'intervalle d'extrémité c, suivant la valeur de $\varphi(c)$.

*** Il faut cependant noter la première apparition, chez Stieltjes, de l'idée de « convergence » d'une suite de mesures ((VIII), p. 95; il s'agit en fait de la limite *forte*).

**** Elle prend toutefois de l'importance avec le développement de la théorie spectrale des opérateurs, à partir de 1906, par Hilbert et son école. C'est à cette occasion que Hellinger, vers 1907, définit des intégrales telles que celle qu'il notait $\int \frac{(dg)^2}{df}$, et qui paraissaient au premier abord plus générales que celle de Stieltjes; mais en fait, Hahn montra, dès 1912, qu'elles se ramènent à cette dernière (ce sont des cas particuliers de la notion de « fonction de mesures »; cf. chap. V, § 5, n° 9).

résolvant un problème posé quelques années auparavant par Hadamard (cf. Note hist. du livre V) démontrait que les intégrales de Stieltjes $f \mapsto \int_a^b f\,d\varphi$ sont les fonctionnelles linéaires continues les plus générales sur l'espace $\mathscr{C}(\mathrm{I})$ des fonctions numériques continues dans $\mathrm{I} = [a, b]$ ($\mathscr{C}(\mathrm{I})$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme)*; et l'élégance et la simplicité de ce résultat en suscitèrent presque aussitôt diverses généralisations. La plus heureuse fut celle de J. Radon, en 1913 (XVII): combinant les idées de F. Riesz et de Lebesgue, il montra comment on pouvait définir une intégrale par les procédés de Lebesgue, en partant d'une « fonction complètement additive d'ensemble » quelconque (définie sur les ensembles mesurables pour la mesure de Lebesgue) au lieu de partir de la mesure de Lebesgue. Dans la notion de « mesure de Radon » sur $\mathbf{R}^n$, ainsi définie, se trouvait absorbée celle de fonction « à variation bornée »: la décomposition d'une telle fonction en différence de deux fonctions croissantes est un cas particulier de la décomposition d'une mesure en différence de deux mesures positives; de même, la « mesure de base μ » correspond à la notion de fonction « absolument continue », et la décomposition d'une mesure quelconque en une mesure de base μ et une mesure étrangère à μ, à la décomposition de Lebesgue d'une fonction à variation bornée en somme d'une fonction absolument continue et d'une fonction « singulière ». En outre, Radon montra que la « densité » par rapport à μ d'une mesure de base μ existe encore lorsque μ est une mesure ayant pour base la mesure de Lebesgue, en utilisant une idée antérieure de F. Riesz (reprise et popularisée plus tard par J. von Neumann entre autres), qui consiste à construire une image de la mesure μ par une application θ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, choisie de sorte que $\theta(\mu)$ soit la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ (cf. chap. V, § 6, exerc. 8 c)).

Presque aussitôt après la parution du mémoire de Radon, Fréchet remarquait que presque tous les résultats de ce travail pouvaient s'étendre au cas où la « fonction complètement additive d'ensemble », au lieu d'être définie pour les parties mesurables de $\mathbf{R}^n$, est définie pour certaines parties d'un ensemble E quelconque (ces parties étant telles que les opérations de réunion dénombrable et de « différence » donnent encore des ensembles pour lesquels la fonction est définie). Toutefois, l'expression d'une mesure de base μ sous la forme $g\,.\,\mu$ reposait, chez Lebesgue et Radon, sur des raisonnements faisant intervenir de façon essentielle la topologie de $\mathbf{R}^n$ (et nous avons vu que la démonstration de Radon ne s'applique que si μ est une mesure ayant pour base la mesure de Lebesgue); c'est seulement en 1930 que O. Nikodym (XX) obtint ce théorème sous sa forme générale, par un raisonnement direct (notablement simplifié quelques années plus tard par J. von Neumann, grâce à l'utilisation des propriétés des espaces L^2 ((XXII), p. 127–130)).

Avec le mémoire de Radon, la théorie générale de l'intégration pouvait être considérée comme achevée dans ses grandes lignes; comme

* C'est aussi dans ce travail qu'apparaît la notion de limite *vague* d'une suite de mesures ((XV *c*), p. 49).

acquisitions ultérieures substantielles, on ne peut guère mentionner que la définition du produit infini de mesures, due à Daniell (XIX *b*)), et celle de l'intégrale d'une fonction à valeurs dans un espace de Banach, donnée par Bochner en 1933 (XXI), et qui préludait à l'étude de l' « intégrale faible » dont nous traiterons au chap. VI. Mais il restait à populariser la nouvelle théorie, et à en faire un instrument mathématique d'usage courant, alors que la majorité des mathématiciens, vers 1910, ne voyait encore dans l'« intégrale de Lebesgue » qu'un instrument de haute précision, de maniement délicat, destiné seulement à des recherches d'une extrême subtilité et d'une extrême abstraction. Ce fut là l'œuvre de Carathéodory, dans un livre longtemps resté classique (XVIII) et qui enrichit d'ailleurs la théorie de Radon de nombreuses remarques originales.

Mais c'est avec ce livre aussi que la notion d'intégrale, qui avait été au premier plan des préoccupations de Lebesgue (comme le marquent suffisamment les titres de sa thèse (X *a*)) et de son principal ouvrage sur ces questions (X *b*))) cède le pas pour la première fois à celle de mesure, qui avait été chez Lebesgue (comme avant lui chez Jordan) un moyen technique auxiliaire. Ce changement de point de vue était dû sans doute, chez Carathéodory, à l'excessive importance qu'il semble avoir attachée aux « mesures p-dimensionnelles »*. Depuis lors, les auteurs qui ont traité d'intégration se sont partagés entre ces deux points de vue, non sans entrer dans des débats qui ont fait couler beaucoup d'encre sinon beaucoup de sang**. Les uns ont suivi Carathéodory; dans leurs exposés sans cesse plus abstraits et plus axiomatisés, la mesure, avec tous les raffinements techniques auxquels elle se prête, non seulement joue le rôle dominant, mais encore elle tend à perdre contact avec les structures topologiques auxquelles en fait elle est liée dans la plupart des problèmes où elle intervient. D'autres exposés, dont le présent Traité, suivent de plus ou moins près une méthode déjà indiquée en 1911 par W. H. Young, dans un mémoire malheureusement peu remarqué (XI *b*)), et développée ensuite par Daniell. Le premier, traitant de l'intégrale de Lebesgue, partait de l' « intégrale de Cauchy » des fonctions continues à support compact, supposée connue, pour définir successivement (comme nous l'avons fait au chap. IV, § 1) l'intégrale supérieure des fonctions semi-continues inférieurement, puis des fonctions numériques quelconques, d'où une définition des fonctions intégrables, calquée sur celle de Lebesgue pour les ensembles, par des moyens purement « fonctionnels ».

---

* Il s'agit là de la généralisation de la notion de « longueur d'une courbe plane » à des valeurs quelconques n et p de la dimension de l'espace ambiant et de la dimension de l'espace étudié; on suppose bien entendu qu'on a $0 \leqslant p \leqslant n$, mais on ne suppose pas toujours que p soit entier. Cette question a fait l'objet de travaux de nombreux auteurs depuis Minkowski, Carathéodory et Hausdorff; Lebesgue lui-même, qui en aborde des cas particuliers dans sa thèse, ne semble pas y avoir vu autre chose qu'une occasion de mettre à l'essai la puissance des outils qu'il venait de forger.

** Cf. les comptes rendus par P. Halmos du premier volume de ce Livre (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. LIX (1953), p. 249) et par J. Dieudonné du livre de Mayrhofer (*ibid.*, t. LIX (1953), p. 479).

Daniell, en 1918 ((XIX *a*)); cf. (XXVII)) étendit cet exposé, avec quelques variantes, à des fonctions définies sur un ensemble quelconque; son principal mérite fut d'apercevoir le rôle joué dans la théorie abstraite par la condition $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = 0$ pour toute suite décroissante (f_n) tendant simplement vers 0 (ce qui ne pouvait apparaître aussi clairement dans la théorie des mesures de Radon, où cette condition est automatiquement vérifiée en vertu du théorème de Dini). Dans le même ordre d'idées (et en liaison étroite avec les méthodes utilisées en théorie spectrale avant Gelfand), il nous faut aussi signaler le mémoire de F. Riesz (XV *d*)) qui met sous une forme concise et élégante les quelques résultats de la théorie des espaces ordonnés qui jouent un rôle dans la théorie de l'intégration; nous avons suivi d'assez près son exposé au chap. II.

Plutôt que dans des ouvrages d'exposition, plus ou moins agréables à lire, mais dont le contenu substantiel ne pouvait plus beaucoup varier, c'est du côté des applications qu'il faut chercher les progrès réalisés par la théorie de l'Intégration depuis 1920: théorie des probabilités (autrefois prétexte à devinettes et à paradoxes, et devenue une branche de la théorie de l'Intégration depuis son axiomatisation par Kolmogoroff (XXIII), mais branche autonome avec ses méthodes et ses problèmes propres); théorie ergodique; théorie spectrale et analyse harmonique, depuis que la découverte par Haar de la mesure qui porte son nom, et le mouvement d'idées provoqué par cette découverte, ont fait de l'intégrale l'un des plus importants outils en théorie des groupes. Avec ces questions, nous sortons du cadre de la présente Note; quelques-unes d'entre elles seront traitées dans des chapitres ou Livres ultérieurs.

BIBLIOGRAPHIE

(I) L. EULER, *Opera Omnia*: De formulis integralibus duplicatis (1), t. XVII, Leipzig-Berlin (Teubner), 1915, p. 289–315.

(II) G. LEJEUNE-DIRICHLET, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, *J. de Crelle*, t. IV (1829), p. 157–169 (= *Werke*, t. I, p. 118–132, Berlin (G. Reimer), 1889).

(III) B. RIEMANN, *Gesammelte Mathematische Werke*, 2e éd., Leipzig (Teubner), 1892.

(IV) G. CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin (Springer), 1932.

(V) G. PEANO, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, Turin, 1887.

(VI) C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. I, 2e éd., Paris (Gauthier-Villars), 1893.

(VII) C. ARZELÀ: *a*) Sulla integrabilità di una serie di funzioni, *Rendic. Acc. dei Lincei*, (4), t. I (1885), p. 321–326; *b*) Sulla integrazione per serie, *ibid.*, p. 532–537 et 566–569.

(VIII) T. STIELTJES, Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. de Toulouse*, t. VIII (1894), J. 1 à J. 122.

(IX) E. BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris (Gauthier-Villars), 1898.

(X) H. LEBESGUE: *a*) Intégrale, longueur, aire, *Annali di Mat.*, (3), t. VII (1902), p. 231–359; *b*) *Leçons sur l'Intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris (Gauthier-Villars), 1904; *c*) Sur les séries trigonométriques, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, (3), t. XX (1903), p. 453–485; *d*) Sur l'intégration des fonctions discontinues, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, (3), t. XXVII (1910), p. 361–450.

(XI) W. H. YOUNG: *a*) On upper and lower integration, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2), t. II (1905), p. 52–66; *b*) A new method in the theory of integration, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2), t. IX (1911), p. 15–50.

(XII) G. VITALI: *a*) Una proprieta delle funzioni misurabili, *R. Ist. Lombardo, Rendiconti*, (2), t. XXXVIII (1905), p. 599–603; *b*) Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali, *Rendic. Acc. Sci. di Torino*, t. XLIII (1908) p. 229–236.

(XIII) E. FISCHER, Sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci.*, t. CXLIV (1907), p. 1022–1024.

(XIV) G. FUBINI, Sugli integrali multipli, *Rendic. Acc. dei Lincei*, (5), t. XVI (1907), p. 608–614.

(XV) F. RIESZ: *a*) Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, *C. R. Acad. Sci.*, t. CXLIV (1907), p. 615–619; *b*) Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Ann.*, t. LXIX (1910), p. 449–497; *c*) Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, (3), t. XXVIII (1911), p. 33–62; *d*) Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, *Ann. of Math.*, (2), t. XLI (1940), p. 174–206.

(XVI) D. EGOROFF, Sur les suites de fonctions mesurables, *C. R. Acad. Sci.*, t. CLII (1911), p. 244.

(XVII) J. RADON, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, *Sitzungsber. der math. naturwiss. Klasse der Akad. der Wiss.* (*Wien*), t. CXXII, Abt. II *a* (1913), p. 1295–1438.

(XVIII) C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin (Teubner), 1918.

(XIX) P. J. DANIELL: *a*) A general form of integral, *Ann. of Math.*, (2), t. XIX (1918), p. 279–294; *b*) Integrals in an infinite number of dimensions, *Ann. of Math.*, (2), t. XX (1919), p. 281–288.

(XX) O. NIKODYM, Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, *Fund. Math.*, t. XV (1930), p. 131–179.
(XXI) S. BOCHNER, Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, *Fund. Math.*, t. XX (1933), p. 262–276.
(XXII) J. von NEUMANN, On rings of Operators III, *Ann. of Math.*, (2), t. XLI (1940), p. 94–161.
(XXIII) A. KOLMOGOROFF, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin (Springer), 1933.
(XXIV) S. SAKS, *Theory of the integral*, 2ᵉ éd., New York (Stechert), 1937.
(XXV) A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, Warszawa, 1935 (2ᵉ éd., Cambridge University Press, 1959).
(XXVI) L. CESARI, *Surface area*, Princeton, 1954.
(XXVII) L.-H. LOOMIS, *An introduction to abstract harmonic analysis*, London–New York–Toronto (van Nostrand), 1953.

INDEX DES NOTATIONS

Les chiffres de référence indiquent successivement le paragraphe et le numéro (ou, exceptionnellement, l'exercice).

INDEX TERMINOLOGIQUE

Les chiffres de référence indiquent successivement le paragraphe et le numéro (ou, exceptionnellement, l'exercice).

TABLE

TABLE DE CONCORDANCE DE LA PREMIÈRE ET DE LA SECONDE ÉDITION

1re édition	2e édition
§ 1, Déf. 1	Chap. IV, § 5, n° 7, déf. 4
§ 1, lemme 1	Chap. IV, § 5, n° 7, lemme 2
§ 1, prop. 1	Chap. IV, § 5, n° 8, prop. 12
§ 1, déf. 2	Chap. IV, § 5, n° 8, déf. 6
§ 1, prop. 2	Chap. IV, § 5, n° 8, prop. 13
§ 1, prop. 3	Chap. IV, § 5, n° 10, prop. 15
§ 1, déf. 3	Chap. IV, § 5, n° 9, déf. 7
§ 1, prop. 4	Chap. IV, § 5, n° 9, prop. 14
§ 1, prop. 5	Chap. IV, § 5, n° 10, prop. 16
§ 1, exerc. 1	Chap. IV, § 5, exerc. 21
§ 1, exerc. 2	Supprimé
§ 2, déf. 1	§ 1, déf. 1
§ 2, prop. 1	§ 1, prop. 10
§ 2, prop. 2	§ 1, prop. 4
§ 2, prop. 3	§ 1, prop. 7
§ 2, cor. de la prop. 3	§ 1, prop. 7 et *Remarque* 2 du n° 2
§ 2, prop. 4	§ 1, prop. 1
§ 2, prop. 5	§ 1, lemme 1
§ 2, lemme 1	Supprimé
§ 2, lemme 2	§ 1, prop. 2
§ 2, cor. de la prop. 5	§ 1, n° 3
§ 2, déf. 2	§ 1, n° 3
§ 2, prop. 6	§ 1, n° 3
§ 2, prop. 7	§ 1, prop. 9
§ 2, prop. 8	§ 1, prop. 10
§ 2, prop. 9	§ 1, exerc. 3 a)
§ 2, exerc. 1	§ 1, prop. 1
§ 2, exerc. 2	§ 1, exerc. 1
§ 2, exerc. 3	§ 1, exerc. 2
§ 2, exerc. 4	§ 1, prop. 3
§ 2, exerc. 5	§ 1, exerc. 4
§ 2, exerc. 6	§ 1, exerc. 3 b)
§ 2, exerc. 7	§ 1, exerc. 5

1re édition	2e édition
	§ 3
Déf. 1	Supprimée (remplacée par une définition plus générale)
Prop. 1	Supprimée
Cor. de la prop. 1	Prop. 2
Prop. 2	Prop. 3
Cor de la prop. 2	Cor. 1 de la prop. 3
Prop. 3	Prop. 4
Prop. 4	Prop. 5
Cor. de la prop. 4	Cor de la prop. 5
Prop. 5	§ 2, prop 1 et 3 et cor. 3 de la prop. 1
Cor. 1 de la prop. 5	§ 2, cor. 1 de la prop. 1
Cor. 2 de la prop. 5	§ 2, cor. 2 de la prop. 1
Prop. 6	§ 2, prop. 2
Cor. 1 de la prop. 6	§ 2, Cor. 1 de la prop. 3
Cor. 2 de la prop. 6	Supprimé
Exerc. 6	§ 1, exerc. 4 a)
Exerc. 7 a)	§ 2, exerc. 1
Exerc. 7 b)	§ 2, exerc. 2
Exerc. 7 c)	§ 2, exerc. 3
Exerc. 8	Exerc. 6 b)
	§ 4
Exerc. 1	Prop. 1
Exerc. 2	Exerc. 1
Exerc. 3	Exerc. 2
	§ 5
Prop. 2	Prop. 3
Prop. 3	Prop. 4
Prop. 4	Supprimée
Prop. 5	Cor. de la prop. 2
Cor. 1 de la prop. 5	Cor. 2 de la prop. 3
Cor. 2 de la prop. 5	Cor. 2 de la prop. 3

§ 5

1re édition	2e édition
Cor. 3 de la prop. 5	Cor. 3 de la prop. 3
Prop. 6	Cor. de la prop. 6
Prop. 7	Prop. 8
Prop. 8	Supprimée
Th. 2	Th. 2 et cor. 5 du th. 2
Cor. du th. 2	Cor. 2 du th. 2
Cor. de la prop. 13	Cor. 1 de la prop. 13
Lemme 1	Lemme 4
Déf. 6	Chap. III, § 1, n° 3, *Exemple* 1
Exerc. 5	Supprimé
Exerc. 6	Exerc. 5
Exerc. 7	Supprimé
Exerc. n $(8 \leqslant n \leqslant 28)$	Exerc. $n - 2$

§ 6

1re édition	2e édition
Prop. 6	Cor. 1 de la prop. 6
Cor. de la prop. 6	Cor. 2 de la prop. 6
Prop. 7	Prop. 8
Cor. de la prop. 7	Cor. de la prop. 8
Prop. 8	Prop. 9

§ 7

1re édition	2e édition
Cor. du th. 1	Cor. 1 du th. 1
Cor. de la prop. 3	Cor. 2 de la prop. 3
Prop. 5	Cor. 2 du th. 1
Prop. 6	Prop. 3
Cor. de la prop. 6	Cor. 1 de la prop. 3

§ 8

1re édition	2e édition
Prop. 1	Prop. 5
Prop. 2	Prop. 6
Cor. de la prop. 2	Cor. 1 de la prop. 7
Prop. 3	Prop. 2
Cor. du th. 1	Cor. 2 de la prop. 7
Prop. 4	Prop. 7
Prop. 5	Cor. 1 de la prop. 8
Cor. 1 de la prop. 5	Cor. 3 de la prop. 5
Cor. 2 de la prop. 5	Prop. 8
Cor. 3 de la prop. 5	Cor. 1 de la prop. 3
Cor. 4 de la prop. 5	Cor. 2 de la prop. 3
Cor. 5 de la prop. 5	Prop. 9
Cor. 6 de la prop. 5	Supprimé
Cor. 7 de la prop. 5	Prop. 9
Cor. 8 de la prop. 5	Prop. 4
Cor. 9 de la prop. 5	Cor. de la prop. 4
Prop. 6	Prop. 10
Prop. 7	Prop. 11
Prop. 8	Prop. 12
Exerc. 19	Chap. III, § 4, n° 5, prop. 8

IMPRIMÉ EN FRANCE, JOSEPH FLOCH, MAYENNE, 1967
NOUVEAU TIRAGE JOSEPH FLOCH, MAYENNE, 1968
DÉPOT LÉGAL PREMIER TRIMESTRE 1968
NUMÉRO D'ÉDITION 2226
HERMANN, ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS