N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

Théories spectrales

Chapitres 1 et 2

Springer

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

THÉORIES SPECTRALES

Chapitres 1 et 2

Springer

Réimpression inchangée de l'édition originale de 1967

ISBN-10 3-540-35330-5 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-35330-0 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: WMXDesign GmbH, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

CHAPITRE I*

Algèbres normées

§ 1. — Généralités sur les algèbres

1. Algèbres unifères

Soit K un corps commutatif. On appelle *algèbre unifère* sur K un couple (A, e) où A est une algèbre sur K à élément unité et e l'élément unité de A. Comme e est déterminé de manière unique par A, il nous arrivera de dire, par abus de langage, que A est une algèbre unifère. Si (A, e) et (A', e') sont deux algèbres unifères, on appelle *morphisme unifère* de (A, e) dans (A', e') un morphisme φ de A dans A' tel que $\varphi(e) = e'$. Une sous-algèbre unifère de (A, e) est un couple (A', e), où A' est une sous-algèbre de A contenant e.

On notera souvent 1 l'élément unité.

Soit A une algèbre sur K. Rappelons (*Alg.*, chap. VIII, App., n° 1) qu'on définit sur l'espace vectoriel $\tilde{A} = K \times A$ une structure d'algèbre telle que:

$$(\lambda, a)(\mu, b) = (\lambda\mu, \lambda b + \mu a + ab).$$

Soit $e = (1, 0)$. Alors $(\tilde{A}, e)$ est une algèbre unifère dite *déduite de* A *par adjonction d'un élément unité*. Si A' est une seconde algèbre sur K, $(\tilde{A}', e')$ l'algèbre unifère déduite de A' par adjonction d'un élément unité, et φ un morphisme de A dans A', il existe un morphisme unifère et un seul de $(\tilde{A}, e)$ dans $(\tilde{A}', e')$ qui prolonge φ.

---

* Les résultats des chap. I et II dépendent des Livres I à VI, et du fascicule de résultats du livre consacré aux *Variétés*.

2. *Spectre d'un élément dans une algèbre unifère*

DÉFINITION 1. — *Soient* A *une algèbre unifère sur* K, *et soit* e *son élément unité. Pour tout* $x \in A$, *on appelle spectre de* x *relativement à* A *l'ensemble des* $\lambda \in K$ *tels que* $x - \lambda e$ *ne soit pas inversible.*

Ce spectre sera noté $\mathrm{Sp}_A\, x$, ou $\mathrm{Sp}\, x$ si aucune confusion n'en résulte.

Remarques. — 1) Si $A = \{0\}$, on a $\mathrm{Sp}(0) = \varnothing$.

2) Pour tout $\lambda \in K$, $\mathrm{Sp}(\lambda e) = \{\lambda\}$ (si $A \neq \{0\}$).

3) Pour que $x \in A$ soit inversible, il faut et il suffit que $0 \notin \mathrm{Sp}\, x$.

4) Soient $x \in A$, et $P \in K[X]$. Si $\lambda \in K$, il existe un $P_1 \in K[X]$ tel que $P(x) - P(\lambda)e = (x - \lambda e)P_1(x)$; donc, si $\lambda \in \mathrm{Sp}\, x$, on a $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\, P(x)$; autrement dit, $P(\mathrm{Sp}\, x) \subset \mathrm{Sp}\, P(x)$. Réciproquement, soit $\mu \in \mathrm{Sp}\, P(x)$; supposons K *algébriquement clos* et $\deg P \geqslant 1$, et soit $P(X) - \mu = \alpha(X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_n)$ la décomposition de $P(X) - \mu$ en facteurs du premier degré; on a

$$P(x) - \mu e = \alpha(x - \lambda_1 e)\ldots(x - \lambda_n e),$$

donc $\lambda_i \in \mathrm{Sp}\, x$ pour un certain i, donc $\mu = P(\lambda_i) \in P(\mathrm{Sp}\, x)$. On en conclut que

$$P(\mathrm{Sp}\, x) = \mathrm{Sp}\, P(x).$$

Cette égalité reste vraie lorsque P est une constante, à condition que $\mathrm{Sp}\, x \neq \varnothing$.

5) Si $x \in A$ est nilpotent, on a $(\mathrm{Sp}\, x)^n \subset \{0\}$ pour un certain n d'après la *Remarque* 4, donc $\mathrm{Sp}\, x = \{0\}$ (si $A \neq \{0\}$).

6) Supposons K algébriquement clos. Soient $x \in A$, et $R = P/Q \in K(X)$, où P et Q sont des polynômes premiers entre eux. Supposons $Q(x)$ inversible, donc $0 \notin Q(\mathrm{Sp}\, x)$. Alors, on peut former $R(x) = P(x) \,.\, Q(x)^{-1} = Q(x)^{-1} \,.\, P(x)$. Si R n'est pas une constante, on a

$$\mathrm{Sp}(R(x)) = R(\mathrm{Sp}\, x).$$

En effet, en remplaçant R par $R - \mu$ (où $\mu \in K$), il suffit de prouver que

$$R(x) \text{ inversible} \Leftrightarrow 0 \notin R(\mathrm{Sp}\, x),$$

c'est-à-dire que

$$P(x) \text{ inversible} \Leftrightarrow 0 \notin P(\mathrm{Sp}\, x).$$

Or ceci résulte de la *Remarque* 4 si P n'est pas une constante, et est évident si P est une constante λ, car $\lambda \neq 0$ d'après l'hypothèse faite sur R.

7) Soient A et B deux algèbres unifères sur K, $\varphi : A \to B$ un morphisme unifère, et $x \in A$. Il est clair que $\mathrm{Sp}_B\, \varphi(x) \subset \mathrm{Sp}_A\, x$.

8) Soient A une algèbre unifère, $\mathfrak{R}$ son radical (*Alg.*, chap. VIII, § 5), φ le morphisme canonique de A sur $B = A/\mathfrak{R}$. Si $x \in A$, on a $\mathrm{Sp}_B\, \varphi(x) = \mathrm{Sp}_A\, x$. En effet, il suffit de prouver que si $\varphi(x)$ est inversible dans B, x est inversible dans A. Or, si $y \in A$ est tel que $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(e)$, on a $xy \in e + \mathfrak{R}$, $yx \in e + \mathfrak{R}$, donc xy et yx sont inversibles, et par suite x est inversible. En particulier, si $x \in \mathfrak{R}$, on a $\mathrm{Sp}\, x = \{0\}$ (si $A \neq \{0\}$).

9) Soit (B_i) une famille d'algèbres unifères, avec $B_i = (A_i, e_i)$. Posons $A = \prod_i A_i$, $e = (e_i)$. Alors (A, e) est une algèbre unifère appelée produit des B_i. Si $x = (x_i) \in A$, on a $\mathrm{Sp}_A\, x = \bigcup_i \mathrm{Sp}_{A_i}\, x_i$.

Exemples. — 1) Soit A l'algèbre des fonctions continues complexes sur un espace topologique. Le spectre d'un élément f de A est l'*ensemble des valeurs* de f.

2) Soit A une algèbre unifère de rang fini sur **C**. Pour que $x \in A$ soit inversible, il faut et il suffit que l'application linéaire $y \mapsto xy$ dans A soit de déterminant non nul. Il en résulte que le spectre de x est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique de x. Si A est l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel V de dimension finie sur **C**, le spectre de x est donc l'ensemble des *valeurs propres* de x. Il n'en est pas ainsi quand dim V est infini (exerc. 2).

DÉFINITION 2. — *Soient* A *une algèbre unifère sur* K, *et* $x \in A$. *On pose, pour tout* $\lambda \in K - \mathrm{Sp}\, x$,

$$R(x, \lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$$

et la fonction $\lambda \mapsto R(x, \lambda) \in A$ *s'appelle la résolvante de* x.

Pour x fixé, les valeurs de $R(x, \lambda)$ sont deux à deux permutables. Si $\lambda, \mu \in K$, on a :

$$(\lambda e - x) - (\mu e - x) = (\lambda - \mu)e$$

donc, si $\lambda, \mu \notin \mathrm{Sp}\, x$,

$$(\lambda - \mu)\, R(x, \lambda)\, R(x, \mu) = R(x, \mu) - R(x, \lambda). \tag{1}$$

Si $x, y \in \mathrm{A}$ et $\lambda \in \mathrm{K}$, on a:

$$(\lambda e - x) - (\lambda e - y) = y - x$$

donc, si $\lambda \notin \mathrm{Sp}\, x \cup \mathrm{Sp}\, y$,

$$\mathrm{R}(y, \lambda)(y - x)\mathrm{R}(x, \lambda) = \mathrm{R}(y, \lambda) - \mathrm{R}(x, \lambda). \tag{2}$$

3. Spectre d'un élément dans une algèbre

Soient A une algèbre sur K, et $x \in \mathrm{A}$. On appelle spectre de x relativement à A le spectre de x relativement à l'algèbre unifère $\tilde{\mathrm{A}}$ déduite de A par adjonction d'un élément unité.

Ce spectre sera noté $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{A}}\, x$, ou $\mathrm{Sp}'\, x$ si aucune confusion n'en résulte. On a $0 \in \mathrm{Sp}'_{\mathrm{A}}\, x$ quel que soit $x \in \mathrm{A}$.

Si φ est un morphisme de A dans une algèbre B, on a $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{B}}\, \varphi(x) \subset \mathrm{Sp}'_{\mathrm{A}}\, x$.

Remarques. — 1) Soit A une algèbre unifère. On peut considérer l'algèbre sous-jacente à A, qu'on notera encore A. Si $x \in \mathrm{A}$, on a:

$$\mathrm{Sp}'_{\mathrm{A}}\, x = \mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}\, x \cup \{0\}.$$

En effet, soient ε l'élément unité de A, et e celui de $\tilde{\mathrm{A}}$. On vérifie tout de suite que $(e - \varepsilon) . \mathrm{A} = \mathrm{A} . (e - \varepsilon) = 0$, donc que $\tilde{\mathrm{A}}$ est l'algèbre unifère produit de A et de $\mathrm{K}(e - \varepsilon)$. Notre assertion résulte donc du n° 1, *Remarque* 9.

2) Il résulte de la *Remarque* 1 que, si B est une algèbre sur K et si $x \in \mathrm{B}$, on a:

$$\mathrm{Sp}'_{\mathrm{B}}\, x = \mathrm{Sp}_{\tilde{\mathrm{B}}}\, x = \mathrm{Sp}_{\tilde{\mathrm{B}}}\, x \cup \{0\} = \mathrm{Sp}'_{\tilde{\mathrm{B}}}\, x.$$

3) Si x appartient au radical de A, on a $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{A}}\, x = \{0\}$. Ceci résulte du n° 1, *Remarque* 8.

PROPOSITION 1. — *Soient* A *une algèbre, et* $x, y \in \mathrm{A}$. *On a*:

$$\mathrm{Sp}'(xy) = \mathrm{Sp}'(yx).$$

En passant à $\tilde{\mathrm{A}}$, on se ramène au cas où A possède un élément unité e. Il suffit alors de prouver que, si $\lambda \neq 0$ est tel que $xy - \lambda e$ admette un inverse u, $yx - \lambda e$ est inversible. Or:

$$\begin{aligned}(yx - \lambda e)(yux - e) &= y(xyu)x - yx - \lambda yux + \lambda e \\ &= y(\lambda u + e)x - yx - \lambda yux + \lambda e = \lambda e\end{aligned}$$

et de même $(yux - e)(yx - \lambda e) = \lambda e$. Comme $\lambda \neq 0$, on voit que $yx - \lambda e$ est inversible.

Si A est une algèbre unifère et si $x, y \in A$, on peut avoir $\mathrm{Sp}(xy) \neq \mathrm{Sp}(yx)$ (exerc. 3).

4. *Sous-algèbres pleines*

DÉFINITION 3. — *Soit* A *une algèbre unifère. On appelle sous-algèbre pleine de* A *une sous-algèbre unifère* B *telle que tout élément de* B *inversible dans* A *soit inversible dans* B.

Alors, pour tout $x \in B$, on a $\mathrm{Sp}_B\, x = \mathrm{Sp}_A\, x$.

L'intersection d'une famille de sous-algèbres pleines de A est une sous-algèbre pleine de A. Si $M \subset A$, l'intersection B des sous-algèbres pleines de A contenant M est donc la plus petite sous-algèbre pleine de A contenant M; on l'appelle la sous-algèbre pleine de A *engendrée par* M. Le commutant M' de M dans A est une sous-algèbre pleine de A (car, si x est inversible dans A et permutable à M, x^{-1} est permutable à M). Donc le bicommutant M'' de M contient B. Si les éléments de M sont deux à deux permutables, l'algèbre M'' est commutative, donc B est commutative.

Une sous-algèbre commutative maximale de A est une sous-algèbre pleine, car elle est égale à son commutant.

Soient $x \in A$, et B la sous-algèbre pleine de A engendrée par x. Alors B est égale à l'ensemble B_1 des éléments de la forme $P(x)Q(x)^{-1}$, où $P \in K[X]$, $Q \in K[X]$, $Q(x)$ inversible dans A. En effet, B_1 est une sous-algèbre de A contenant e; si $P(x)Q(x)^{-1}$ est inversible dans A, $P(x)$ est inversible dans A, et l'inverse $P(x)^{-1}Q(x)$ de $P(x)Q(x)^{-1}$ appartient à B_1; donc B_1 est une sous-algèbre pleine, de sorte que $B \subset B_1$. D'autre part, si $P \in K[X]$, $Q \in K[X]$ et si $Q(x)$ est inversible dans A, on a $P(x) \in B$, $Q(x) \in B$, donc $Q(x)^{-1} \in B$ et $P(x)Q(x)^{-1} \in B$; donc $B_1 \subset B$.

5. *Caractères d'une algèbre unifère commutative*

DÉFINITION 4. — *Soit* A *une algèbre unifère commutative. On appelle caractère de* A *un morphisme unifère de* A *dans* K.

L'ensemble des caractères de A sera noté X(A).

Soient A et B deux algèbres unifères commutatives, h un morphisme unifère de A dans B. L'application $\chi \mapsto \chi \circ h$ de $X(B)$ dans $X(A)$ se note $X(h)$. Si k est un morphisme de B dans une algèbre unifère commutative, on a $X(k \circ h) = X(h) \circ X(k)$. Si 1_A désigne l'application identique de A, $X(1_A)$ est l'application identique de $X(A)$.

Si h est surjectif, $X(h)$ est une bijection de $X(B)$ sur l'ensemble des caractères de A qui s'annulent sur le noyau de h.

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des algèbres unifères commutatives, et A l'algèbre unifère $A_1 \times \ldots \times A_n$. Soit π_i l'application canonique de A sur A_i. Alors $X(\pi_i)$ est une bijection de $X(A_i)$ sur une partie X_i de $X(A)$, à savoir l'ensemble des caractères de A nuls sur $\prod_{j \neq i} A_j$. Il est clair que les X_i sont deux à deux disjoints. D'autre part, soit $\chi \in X(A)$; soit i un indice tel que $\chi(x) \neq 0$ pour un $x \in A_i$; pour tout $j \neq i$ et tout $y \in A_j$, on a

$$\chi(x)\chi(y) = \chi(xy) = \chi(0) = 0;$$

donc $\chi(A_j) = 0$; ainsi χ s'annule sur $\prod_{j \neq i} A_j$, de sorte que $X(A)$ est réunion des X_i.

Soit B l'algèbre unifère $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$. Alors

$$\chi \mapsto (\chi|A_1, \ldots, \chi|A_n)$$

est une application de $X(B)$ dans $X(A_1) \times \ldots \times X(A_n)$, et

$$(\chi_1, \ldots, \chi_n) \mapsto \chi_1 \otimes \ldots \otimes \chi_n$$

est une application de $X(A_1) \times \ldots \times X(A_n)$ dans $X(B)$. On vérifie aussitôt que les composées de ces applications sont les applications identiques de $X(B)$ et de

$$X(A_1) \times \ldots \times X(A_n).$$

On peut donc identifier $X(B)$ à $X(A_1) \times \ldots \times X(A_n)$.

Soit A une algèbre unifère commutative. Soit Y l'ensemble des idéaux de codimension 1 de A. Pour tout $\chi \in X(A)$, on a $\operatorname{Ker} \chi \in Y$. L'application $\chi \mapsto \operatorname{Ker} \chi$ est une bijection de $X(A)$ sur Y. En effet, si $\mathfrak{I} \in Y$, il existe un unique isomorphisme de la K-algèbre unifère $A/\mathfrak{I}$ sur K, et le morphisme composé

$$A \to A/\mathfrak{I} \to K$$

est l'unique caractère de A de noyau $\mathfrak{I}$.

Si $x \in A$ et si $\chi \in X(A)$, on a $\chi(x) \in \operatorname{Sp} x$; en effet, comme $\chi(x - \chi(x)e) = 0$, $x - \chi(x)e$ est non inversible.

Pour tout $x \in \mathrm{A}$, on note $\mathscr{G}_{\mathrm{A}}x$, ou simplement $\mathscr{G}x$, la fonction $\chi \mapsto \chi(x)$ sur X(A) et on l'appelle la *transformée de Gelfand* de x. L'application $\mathscr{G}$ est un morphisme unifère de A dans l'algèbre unifère A_1 des fonctions sur X(A) à valeurs dans K ; on l'appelle la *transformation de Gelfand.* Soient B une algèbre unifère commutative sur K, B_1 l'algèbre unifère des fonctions sur X(B) à valeurs dans K, h un morphisme unifère de A dans B; alors, $\mathrm{X}(h) : \mathrm{X}(\mathrm{B}) \to \mathrm{X}(\mathrm{A})$ définit un morphisme unifère $h_1 : \mathrm{A}_1 \to \mathrm{B}_1$, et le diagramme:

(3)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \xrightarrow{\mathscr{G}_{\mathrm{A}}} & \mathrm{A}_1 \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_1} \\ \mathrm{B} & \xrightarrow[\mathscr{G}_{\mathrm{B}}]{} & \mathrm{B}_1 \end{array}$$

est commutatif; en effet, pour tout $x \in \mathrm{A}$ et tout $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{B})$, on a:

(4)
$$\begin{aligned} \mathscr{G}_{\mathrm{B}}(h(x))(\chi) = \chi(h(x)) = (\mathrm{X}(h)(\chi))(x) &= \mathscr{G}_{\mathrm{A}}(x)(\mathrm{X}(h)(\chi)) \\ &= h_1(\mathscr{G}_{\mathrm{A}}(x))(\chi). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que K soit un corps topologique. On munit alors X(A) de la topologie de la convergence simple sur A, et l'espace topologique X(A) s'appelle *l'espace des caractères* de A. La topologie de X(A) est donc la moins fine pour laquelle les fonctions $\mathscr{G}_{\mathrm{A}}x$ pour $x \in \mathrm{A}$ soient continues. Si h est un morphisme unifère de A dans B, $\mathrm{X}(h) : \mathrm{X}(\mathrm{B}) \to \mathrm{X}(\mathrm{A})$ est continu. Si h est surjectif, l'image de X(h), à savoir l'ensemble des caractères de A nuls sur le noyau de h, est fermé dans X(A); d'autre part, la topologie sur X(h)(X(B)) déduite de celle de X(B) par la bijection X(h) est la topologie de la convergence simple dans A, c'est-à-dire la topologie induite par celle de X(A); autrement dit, X(h) est un *homéomorphisme* de X(B) sur une partie fermée de X(A). On déduit de là et de ce qu'on a vu plus haut que l'espace $\mathrm{X}(\mathrm{A}_1 \times \ldots \times \mathrm{A}_n)$ s'identifie à l'espace topologique somme de $\mathrm{X}(\mathrm{A}_1), \ldots, \mathrm{X}(\mathrm{A}_n)$. De même, $\mathrm{X}(\mathrm{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{A}_n)$ s'identifie à l'espace topologique produit $\mathrm{X}(\mathrm{A}_1) \times \ldots \times \mathrm{X}(\mathrm{A}_n)$.

6. *Cas des algèbres sans élément unité*

DÉFINITION 5. — *Soit* A *une algèbre commutative. On appelle caractère de* A *un morphisme de* A *dans* K.

L'ensemble des caractères de A sera noté $\mathrm{X}'(\mathrm{A})$. On posera $\mathrm{X}(\mathrm{A}) = \mathrm{X}'(\mathrm{A}) - \{0\}$. Si A possède un élément unité e, $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ est l'ensemble des caractères de l'algèbre unifère (A, e). En effet, pour qu'un $\chi \in \mathrm{X}'(\mathrm{A})$ soit non nul, il faut et il suffit que $\chi(e) = 1$.

Si $h : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme d'algèbres commutatives, on définit comme plus haut une application $\mathrm{X}'(h) : \mathrm{X}'(\mathrm{B}) \to \mathrm{X}'(\mathrm{A})$, qui transforme 0 en 0. On a $\mathrm{X}'(k \circ h) = \mathrm{X}'(h) \circ \mathrm{X}'(k)$. Si h est surjectif, $\mathrm{X}'(h)$ est une bijection de $\mathrm{X}'(\mathrm{B})$ sur l'ensemble des caractères de A nuls sur le noyau de h. Soient $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ des algèbres commutatives, $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \times \ldots \times \mathrm{A}_n$, et $\pi_i : \mathrm{A} \to \mathrm{A}_i$ le morphisme canonique; alors $\mathrm{X}'(\pi_i)$ est une bijection de $\mathrm{X}'(\mathrm{A}_i)$ sur une partie X'_i de $\mathrm{X}'(\mathrm{A})$, à savoir l'ensemble des caractères de A nuls sur $\prod_{j \neq i} \mathrm{A}_j$; on voit comme au n° 5 que $\mathrm{X}'(\mathrm{A})$ est réunion des X'_i; d'autre part, $\mathrm{X}'_i \cap \mathrm{X}'_j = \{0\}$ pour $i \neq j$; en particulier les $\mathrm{X}'_i - \{0\}$ forment une partition de $\mathrm{X}'(\mathrm{A}) - \{0\} = \mathrm{X}(\mathrm{A})$.

Pour tout $x \in \mathrm{A}$, soit $\mathscr{G}'_{\mathrm{A}}x$, ou simplement $\mathscr{G}'x$, la fonction $\chi \mapsto \chi(x)$ sur $\mathrm{X}'(\mathrm{A})$. L'application $\mathscr{G}'$ est un morphisme de A dans l'algèbre A_1 des fonctions $\mathrm{X}'(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}$ nulles en 0. Soient B une algèbre commutative, B_1 l'algèbre des fonctions $\mathrm{X}'(\mathrm{B}) \to \mathrm{K}$ nulles en 0, h un morphisme de A dans B; alors $\mathrm{X}'(h)$ définit un morphisme $h_1 : \mathrm{A}_1 \to \mathrm{B}_1$, et l'on a $h_1 \circ \mathscr{G}'_{\mathrm{A}} = \mathscr{G}'_{\mathrm{B}} \circ h$. On note $\mathscr{G}_{\mathrm{A}}x$, ou simplement $\mathscr{G}x$, la restriction de $\mathscr{G}'_{\mathrm{A}}x$ à $\mathrm{X}(\mathrm{A})$, et on l'appelle transformée de Gelfand de x.

Soit $\tilde{\mathrm{A}}$ l'algèbre unifère déduite de A par adjonction d'un élément unité. Tout caractère de $\tilde{\mathrm{A}}$ définit par restriction à A un caractère de A; tout caractère de A se prolonge de manière unique en un caractère de $\tilde{\mathrm{A}}$. D'où une bijection canonique de $\mathrm{X}'(\mathrm{A})$ sur $\mathrm{X}(\tilde{\mathrm{A}})$, par laquelle on identifie ces deux ensembles. Le caractère 0 de A s'identifie ainsi à l'unique caractère de $\tilde{\mathrm{A}}$ de noyau A.

L'application $\chi \mapsto \operatorname{Ker} \chi$ est une bijection de $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ sur l'ensemble des idéaux réguliers de codimension 1 de A (*Alg.*, Chap. VIII, App., n° 1); en effet, d'une part $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ s'identifie à l'ensemble des caractères de $\tilde{\mathrm{A}}$ non nuls sur A; d'autre part, $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a} \cap \mathrm{A}$ est une bijection de l'ensemble des idéaux maximaux de $\tilde{\mathrm{A}}$ distincts de A sur l'ensemble des idéaux maximaux réguliers de A (*Alg.*, Chap. VIII, App., prop. 4); il suffit alors d'appliquer ce qu'on a vu au n° 5.

Si $x \in \mathrm{A}$ et $\chi \in \mathrm{X}'(\mathrm{A})$, on a $\chi(x) \in \mathrm{Sp}_{\tilde{\mathrm{A}}}\, x$, donc $\chi(x) \in \mathrm{Sp}'_{\mathrm{A}}\, x$.

Supposons maintenant que K soit un corps topologique. On munit alors $X'(A)$ de la topologie de la convergence simple sur A; la notation $X'(A)$ désignera désormais l'espace topologique ainsi obtenu. Si h est un morphisme de A dans B, $X'(h) : X'(B) \to X'(A)$ est continu. Si h est surjectif, $X'(h)$ est un homéomorphisme de $X'(B)$ sur son image, et cette image est fermée dans $X'(A)$. Soit $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ et employons les mêmes notations que plus haut; $X'(\pi_i)$ est un homéomorphisme de $X'(A_i)$ sur X'_i, X'_i est fermé dans $X'(A)$, donc $X'_i - \{0\}$ est ouvert dans $X'(A)$; les $X'(\pi_i)$ définissent une application continue de l'espace somme S des $X'(A_i)$ sur $X'(A)$, et on vérifie facilement qu'une réunion de voisinages des points $0 \in X'(A_1), \ldots, 0 \in X'(A_n)$ a pour image un voisinage de $0 \in X'(A)$; de tout ceci résulte que $X'(A)$ s'identifie canoniquement à un espace quotient de S. En particulier, l'espace $X(A)$ s'identifie à l'espace somme des $X(A_i)$.

Si $x \in A$, la fonction $\mathscr{G}'_A x$ sur $X'(A)$ est continue.

La bijection canonique de $X'(A)$ sur $X(\tilde{A})$ est un homéomorphisme. Soient B une algèbre unifère sur K, B' l'algèbre sous-jacente; alors l'espace $X(B)$ s'identifie au sous-espace $X(B')$ de $X'(B')$.

7. *Idéaux primitifs*

Soient A une algèbre sur K, E un espace vectoriel sur K. On appelle *représentation* de A dans E un morphisme de A dans $\mathscr{L}(E)$. Deux représentations π_1 et π_2 de A dans des espaces E_1, E_2 sont dites *équivalentes* s'il existe un isomorphisme de E_1 sur E_2 transformant π_1 en π_2. Une représentation π de A dans E est dite *irréductible* si $E \neq \{0\}$ et si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables pour $\pi(A)$ sont $\{0\}$ et E. Supposons π irréductible non nulle. Si ξ est un élément non nul de E, $\pi(A)\xi$ est stable pour $\pi(A)$, et non nul (sinon $K\xi = E$, et $\pi(A) = \{0\}$), donc $\pi(A)\xi = E$. Donc l'annulateur $\mathfrak{N}$ de ξ dans A est un idéal à gauche régulier (*Alg.*, Chap. VIII, App., n° 2), et π est équivalente à la représentation définie par le A-pseudo-module $A/\mathfrak{N}$; comme π est irréductible, $\mathfrak{N}$ est un idéal à gauche maximal régulier. Réciproquement, si $\mathfrak{N}'$ est un idéal à gauche maximal régulier de A, la représentation de A définie par le A-pseudo-module $A/\mathfrak{N}'$ est irréductible non nulle.

DÉFINITION 6. — *Soit* A *une algèbre sur* K. *On appelle idéal primitif de* A *le noyau d'une représentation irréductible non nulle de* A.

Si A est commutative, les idéaux primitifs de A sont les idéaux maximaux réguliers de A. En effet, les représentations irréductibles non nulles de A sont, à une équivalence près, les représentations $\pi_{\mathfrak{N}}$ définies par les A-pseudo-modules $A/\mathfrak{N}$ (où $\mathfrak{N}$ est un idéal maximal régulier de A); et, d'après la commutativité de A, le noyau de $\pi_{\mathfrak{N}}$ est $\mathfrak{N}$.

Lemme 1. — *Soit* π *une représentation irréductible de* A *dans un espace vectoriel* E *sur* K.

(i) *Soit* $\mathfrak{I}$ *un idéal bilatère de* A. *Si* $\pi(\mathfrak{I}) \neq 0$, $\pi|\mathfrak{I}$ *est irréductible.*

(ii) *Soient* $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ *deux idéaux bilatères de* A *tels que* $\pi(\mathfrak{I}_1) \neq 0$, $\pi(\mathfrak{I}_2) \neq 0$. *Alors* $\pi(\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2) \neq 0$.

L'ensemble des éléments de E annulés par $\pi(\mathfrak{I})$ est stable pour $\pi(A)$ et distinct de E, donc égal à 0. Donc, si ξ est un élément non nul de E, on a $\pi(\mathfrak{I})\xi \neq 0$; comme $\pi(\mathfrak{I})\xi$ est stable pour $\pi(A)$, on a $\pi(\mathfrak{I})\xi = E$, ce qui prouve (i). D'autre part, ce qui précède prouve que $\pi(\mathfrak{I}_2)E = E$, $\pi(\mathfrak{I}_1)\pi(\mathfrak{I}_2)E = E$, donc $\pi(\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2) \neq 0$.

Lemme 2. — *Soient* $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ *deux idéaux bilatères de* A, $\mathfrak{I}$ *un idéal primitif de* A. *Si* $\mathfrak{I}$ *contient* $\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2$ (*en particulier, si* $\mathfrak{I}$ *contient* $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2$), $\mathfrak{I}$ *contient* $\mathfrak{I}_1$ *ou* $\mathfrak{I}_2$.

Soit π une représentation irréductible de noyau $\mathfrak{I}$. Si $\mathfrak{I} \not\supset \mathfrak{I}_1$ et $\mathfrak{I} \not\supset \mathfrak{I}_2$, le lemme 1 (ii) prouve que $\pi(\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2) \neq 0$, d'où $\mathfrak{I} \not\supset \mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2$.

Lemme 3. — *Supposons que* A *admette un élément unité. Soit* $\mathfrak{I}$ *un idéal bilatère maximal de* A. *Alors* $\mathfrak{I}$ *est un idéal primitif.*

Il existe un idéal à gauche maximal $\mathfrak{M}$ de A contenant $\mathfrak{I}$. Soit π la représentation canonique de A dans $A/\mathfrak{M}$, qui est irréductible non nulle. Comme $\mathfrak{I}A \subset \mathfrak{M}$, le noyau $\mathfrak{I}'$ de π contient $\mathfrak{I}$, donc $\mathfrak{I}' = \mathfrak{I}$ et $\mathfrak{I}$ est primitif.

Soit J(A) l'ensemble des idéaux primitifs de A. Pour toute partie M de A, nous noterons V(M) l'ensemble des idéaux primitifs de A contenant M; il est clair que, si $\mathfrak{I}$ est l'idéal bilatère de A engendré par M, on a $V(M) = V(\mathfrak{I})$; si M est réduit à un seul élément x, on écrira $V(x)$ au lieu de $V(\{x\})$. L'application

$M \mapsto V(M)$ est décroissante pour les relations d'inclusion. On a :

$$(5) \qquad V(0) = J(A) \qquad V(1) = \varnothing$$

$$(6) \qquad V\Big(\bigcup_{i \in I} M_i\Big) = V\Big(\sum_{i \in I} M_i\Big) = \bigcap_{i \in I} V(M_i)$$

pour toute famille $(M_i)_{i \in I}$ de parties de A. D'autre part, d'après le lemme 2,

$$(7) \qquad V(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) = V(\mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2) = V(\mathfrak{I}_1) \cup V(\mathfrak{I}_2)$$

pour tout couple d'idéaux bilatères $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ de A. Les formules (5) à (7) montrent que les parties V(M) de J(A) sont les parties fermées pour une certaine topologie sur J(A). Cette topologie s'appelle la *topologie de Jacobson* sur J(A).

Soient T une partie de J(A), et $\mathfrak{k}(T)$ l'intersection des éléments de T, de sorte que $\mathfrak{k}(T)$ est un idéal bilatère de A. Alors l'adhérence de T dans J(A) est la plus petite partie fermée de J(A) contenant T, c'est-à-dire $V(\mathfrak{k}(T))$.

PROPOSITION 2. — *Soient* $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ *deux points distincts de* J(A). *Alors l'un de ces deux points est non adhérent à l'autre.*

En effet, on a par exemple $\mathfrak{I}_1 \not\subset \mathfrak{I}_2$. L'ensemble des $\mathfrak{I} \in J(A)$ tels que $\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{I}$ est une partie fermée T de J(A) telle que $\mathfrak{I}_1 \in T$, $\mathfrak{I}_2 \notin T$.

PROPOSITION 3. — *Soit* $\mathfrak{I} \in J(A)$. *Pour que* $\{\mathfrak{I}\}$ *soit fermé dans* J(A), *il faut et il suffit que* $\mathfrak{I}$ *soit un idéal primitif maximal.*

En effet, l'adhérence de $\{\mathfrak{I}\}$ se compose des idéaux primitifs de A contenant $\mathfrak{I}$.

Soit $\hat{A}$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles non nulles de $\hat{A}$. Si, à toute $\pi \in \hat{A}$, on fait correspondre son noyau, on obtient une application surjective $\hat{A} \to J(A)$. On munit $\hat{A}$ de la topologie image réciproque de celle de J(A) pour l'application $\hat{A} \to J(A)$.

PROPOSITION 4. — *Si* A *possède un élément unité*, J(A) *et* $\hat{A}$ *sont quasi-compacts.*

Il suffit de faire la démonstration pour J(A). Soit (T_j) une famille de parties fermées de J(A), d'intersection vide. Si $\sum_j \mathfrak{k}(T_j) \neq A$,

$\sum_j \mathfrak{k}(T_j)$ est contenu dans un idéal bilatère maximal $\mathfrak{I}$, et $\mathfrak{I}$ est primitif (lemme 3); or $\mathfrak{I} \in T_j$ pour tout j puisque T_j est fermée, d'où absurdité. Donc $\sum_j \mathfrak{k}(T_j) = A$. Donc $1 = x_1 + \ldots + x_n$ avec $x_1 \in \mathfrak{k}(T_{j_1}), \ldots, x_n \in \mathfrak{k}(T_{j_n})$. Ceci entraîne $\mathfrak{k}(T_{j_1}) + \ldots + \mathfrak{k}(T_{j_n}) = A$, d'où $T_{j_1} \cap \ldots \cap T_{j_n} = \varnothing$.

Supposons A *commutative* unifère. La topologie de Jacobson sur J(A) est la topologie induite sur J(A) par la topologie de Zariski du spectre premier de A (*Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3, déf. 4).

Supposons A commutative et K topologique. L'isomorphisme canonique de K sur $\mathscr{L}(K)$ permet d'identifier un élément de X(A) à une représentation de A dans l'espace vectoriel K. D'où une application de X(A) dans $\hat{A}$, qui est évidemment injective. On peut donc identifier X(A) à une partie de $\hat{A}$.

PROPOSITION 5. — *La topologie induite sur* X(A) *par celle de* $\hat{A}$ *est moins fine que celle de* X(A).

En effet, soit T une partie fermée de $\hat{A}$. Alors T est l'ensemble des $\pi \in \hat{A}$ dont le noyau contient une partie M de A. Donc $T \cap X(A)$ est l'ensemble des $\chi \in X(A)$ qui s'annulent sur M, c'est-à-dire une partie fermée de X(A). D'où la proposition.

En général, X(A) n'est pas un sous-espace de $\hat{A}$ (cf. § 7, exerc. 6c).

§ 2. — Algèbres normées

1. Généralités

DÉFINITION 1. — *On appelle algèbre normée complexe une algèbre* A *sur* **C** *munie d'une norme* $x \mapsto \|x\|$ *telle que :*

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \, \|y\| \tag{1}$$

quels que soient $x, y \in A$. *Si* A *est complète, on dit que* A *est une algèbre de Banach.*

Cette définition diffère légèrement de celle de *Top. gén.*, chap. IX, 2e éd., § 3, n° 7, où l'on exigeait seulement que la norme vérifie la condition $\|xy\| \leqslant a\|x\| \, \|y\|$ (a étant une constante

$\geqslant 0$). Toutefois, on a vu (*loc. cit.*) qu'il existe alors une norme équivalente vérifiant (1). Dans tout ce chapitre, nous nous conformerons à la déf. 1. Nous sous-entendrons le mot complexe, le corps de base étant désormais toujours $\mathbf{C}$ sauf mention du contraire.

Soit A une algèbre normée. Toute sous-algèbre de A, munie de la norme induite, est une algèbre normée. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal bilatère fermé de A, l'algèbre $A/\mathfrak{m}$, munie de la norme:

$$\|\dot{x}\| = \inf_{x \in \dot{x}} \|x\| \qquad (\dot{x} \in A/\mathfrak{m})$$

est une algèbre normée. L'algèbre opposée à A, munie de la même norme, est une algèbre normée. L'algèbre complétée de A est une algèbre normée. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des algèbres normées, l'algèbre $A_1 \times \ldots \times A_n$, munie de la norme:

$$\|(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|$$

est une algèbre normée.

Soit (y_λ) un famille d'éléments de A; la plus petite sous-algèbre fermée B de A contenant les y_λ s'appelle la sous-algèbre fermée de A engendrée par les y_λ; si $B = A$, on dit que les y_λ *engendrent topologiquement* l'algèbre normée A, ou que (y_λ) est un *système générateur topologique* de l'algèbre normée A.

Soit A une algèbre normée. Sur $\tilde{A}$, définissons une norme en posant $\|(\lambda, x)\| = |\lambda| + \|x\|$. On a

$$\begin{aligned}\|(\lambda, x)(\mu, y)\| &= |\lambda\mu| + \|xy + \mu x + \lambda y\| \\ &\leqslant |\lambda| \cdot |\mu| + \|x\| \cdot \|y\| + |\mu| \cdot \|x\| + |\lambda| \cdot \|y\| \\ &= \|(\lambda, x)\| \cdot \|(\mu, y)\|.\end{aligned}$$

Donc $\tilde{A}$ devient une algèbre normée, appelée *algèbre unifère normée déduite de* A *par adjonction d'un élément unité.*

Soit A une algèbre normée. Pour $x \in A$, soient L_x, R_x les applications $y \mapsto xy$, $y \mapsto yx$ de A dans A. Alors $x \mapsto L_x$ (resp. $x \mapsto R_x$) est un morphisme de A (resp. de l'algèbre opposée) dans $\mathscr{L}(A)$ tel que:

$$\|L_x\| \leqslant \|x\| \qquad \|R_x\| \leqslant \|x\|. \tag{2}$$

Si A possède un élément unité e, on a $x = L_x e = R_x e$, donc:

$$\|x\| \leqslant \|L_x\| \cdot \|e\| \qquad \|x\| \leqslant \|R_x\| \cdot \|e\|. \tag{3}$$

Alors, $x \mapsto \|L_x\|$ et $x \mapsto \|R_x\|$ sont des normes équivalentes à $x \mapsto \|x\|$, qui vérifient encore (1). Si en outre $A \neq \{0\}$ (autrement dit, $e \neq 0$), (2) et (3) prouvent que $\|e\| \geqslant 1$; on a évidemment $\|L_e\| = \|R_e\| = 1$.

2. *Exemples*

1) Soient Ω un espace localement compact, A l'algèbre des fonctions complexes continues sur Ω tendant vers 0 à l'infini, munie de la norme

$$\|f\| = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

Alors A est une algèbre de Banach commutative.

2) Soit A l'algèbre des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbf{C}$ admettant des dérivées continues dans $[0, 1]$ justqu'à l'ordre n, munie de la norme

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f^{(k)}(t)|.$$

Si $f, g \in A$, on a :

$$\|fg\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sup|(fg)^{(k)}(t)| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sup\left| \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} f^{(s)}(t) g^{(k-s)}(t) \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!(k-s)!} (\sup|f^{(s)}(t)|) . (\sup|g^{(k-s)}(t)|) = \|f\| \, \|g\|,$$

donc A est une algèbre de Banach unifère commutative.

3) Soit G un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar. Alors $L^1(G)$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution (*Intégr.*, chap. VIII, § 4, n° 5, prop. 12). Si G est commutatif, cette algèbre de Banach est commutative.

4) Prenons $G = \mathbf{Z}$ dans l'exemple 3. Alors $L^1(G)$ est l'algèbre de Banach des suites $(c_n)_{-\infty < n < \infty}$ telles que $\sum_n |c_n| < +\infty$, pour le produit $(c_n) * (c'_n) = (d_n)$, où $d_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p c'_{n-p}$, et la norme $\|(c_n)\| = \sum |c_n|$. Cette algèbre admet pour élément unité la suite (e_n) telle que $e_n = 0$ pour $n \neq 0$ et $e_0 = 1$. Si $x = (c_n)$, soit $\varphi(x)$ la fonction continue sur $\mathbf{U}$ dont la valeur en e^{it} est $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$. On vérifie facilement que φ est un morphisme de $L^1(G)$ sur une

algèbre A de fonctions continues sur **U**, la multiplication dans A étant la multiplication usuelle. En intégrant terme à terme l'égalité

$$\left(\sum_p c_p e^{ipt}\right) . e^{-int} = (\varphi(x))(e^{it}) . e^{-int},$$

il vient :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (\varphi(x))(e^{it}) . e^{-int}\, dt,$$

donc le morphisme φ est injectif. L'algèbre A, munie de la norme déduite de celle de $L^1(G)$ par φ, s'appelle l'algèbre de Banach des séries de Fourier absolument convergentes. Elle admet pour élément unité la fonction 1. (Cf. chap. II, § 1, n^{os} 2 et 9.)

5) Soit Δ le disque $|z| \leqslant 1$ dans **C**. Soit A l'algèbre des fonctions continues sur Δ analytiques dans l'intérieur de Δ, munie de la norme $\|f\| = \sup_{t \in \Delta} |f(t)|$. Alors A est une algèbre de Banach unifère commutative.

6) Soit E un espace de Banach. Pour les opérations et la norme usuelle, $\mathscr{L}(E)$ est une algèbre de Banach unifère.

3. *Rayon spectral*

PROPOSITION 1. — *Soit* A *une algèbre normée. Pour tout* $x \in A$, *la suite* $(\|x^n\|^{1/n})$ *est convergente et sa limite est égale à* $\inf_n \|x^n\|^{1/n}$.

Posons $\alpha_n = \|x^n\|$. La proposition étant évidente si x est nilpotent, on supposera $\alpha_n > 0$ pour tout n. On a $\alpha_{n+n'} \leqslant \alpha_n \alpha_{n'}$. Fixons un entier $m > 0$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, soient $p(n)$, $q(n)$ les entiers tels que $n = p(n)m + q(n)$, $0 \leqslant q(n) < m$. On a

$$\alpha_n^{1/n} \leqslant \alpha_m^{p(n)/n} \alpha_{q(n)}^{1/n}.$$

Faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit $\limsup_{n \to +\infty} \alpha_n^{1/n} \leqslant \alpha_m^{1/m}$, d'où :

$$\limsup_{n \to +\infty} \alpha_n^{1/n} \leqslant \inf_{m > 0} \alpha_m^{1/m} \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \alpha_n^{1/n},$$

et ceci prouve la proposition.

DÉFINITION 2. — *Pour tout élément* x *d'une algèbre normée, le nombre* $\lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n > 0} \|x^n\|^{1/n}$ *est appelé le rayon spectral de* x *et est noté* $\rho(x)$.

Il est clair que:

$$\rho(x) \leqslant \|x\| \tag{4}$$

$$\rho(x^k) = \rho(x)^k \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Si $\rho(x) = \|x\|$ quel que soit $x \in \mathrm{A}$, on a $\|x^2\| = \|x\|^2$ quel que soit $x \in \mathrm{A}$, d'après (5). Réciproquement, supposons $\|x^2\| = \|x\|^2$ quel que soit $x \in \mathrm{A}$. Alors $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$, donc $\|x\| = \|x^{2^n}\|^{2^{-n}}$; quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\|x\| = \rho(x)$.

DÉFINITION 3. — *Un élément x de* A *est dit quasi-nilpotent si* $\rho(x) = 0$.

Ceci revient à dire que, quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}$, les nombres $\|(\lambda x)^n\|$ sont bornés; ou encore que, quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}$, $(\lambda x)^n$ tend vers 0.

Remarque. — La fonction $x \mapsto \rho(x)$ sur A, étant l'enveloppe inférieure des fonctions continues $x \mapsto \|x^n\|^{1/n}$, est semi-continue supérieurement; mais en général elle n'est pas continue; il peut même arriver (exerc. 5) qu'une suite d'éléments nilpotents de A tende vers un élément qui n'est pas quasi-nilpotent.

4. Inverses

PROPOSITION 2. — *Soient* A *une algèbre de Banach, et x un élément de* A. *La série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n$, considérée comme série entière en λ, admet $1/\rho(x)$ pour rayon de convergence. Si* A *admet un élément unité et si $\rho(x) < 1$, $1 - x$ est inversible et a pour inverse $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.*

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n$ a pour rayon de convergence

$$1/\limsup_{n \to +\infty} \|x^n\|^{1/n} = 1/\rho(x)$$

(*Var.*, R.). Si $\rho(x) < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est absolument convergente. Comme $(1 - x) \sum_{n=0}^{p} x^n = (\sum_{n=0}^{p} x^n)(1 - x) = 1 - x^{p+1}$, $(1 - x)^{-1}$ existe et est égal à $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

COROLLAIRE 1. — *Si* A *admet un élément unité, le groupe des éléments inversibles de* A *contient la boule ouverte de centre* 1 *et de rayon* 1.

C'est immédiat puisque $\|x\| < 1$ implique $\rho(x) < 1$.

Rappelons (*Top. gén.*, chap. IX, § 3, prop. 13) que ce groupe G est une partie *ouverte* de A, que la topologie induite sur G par celle de A est compatible avec la structure de groupe, et que le groupe topologique G est *complet*.

COROLLAIRE 2. — *Soient* A *une algèbre de Banach,* $\mathfrak{I}$ *un idéal à gauche* (resp. *à droite*) *maximal régulier de* A. *Alors* $\mathfrak{I}$ *est fermé.*

Soit $(\tilde{A}, e)$ l'algèbre de Banach unifère déduite de A par adjonction d'un élément unité. Il existe un idéal à gauche (resp. à droite) maximal $\tilde{\mathfrak{I}}$ de $\tilde{A}$ tel que $\tilde{\mathfrak{I}} \cap A = \mathfrak{I}$ (*Alg.*, chap. VIII, App., prop. 4). Alors $\tilde{\mathfrak{I}}$ est disjoint de la boule ouverte de centre e et de rayon 1 (cor. 1), donc $\bar{\tilde{\mathfrak{I}}} \neq \tilde{A}$, donc $\bar{\tilde{\mathfrak{I}}} = \tilde{\mathfrak{I}}$, et par suite $\mathfrak{I}$ est fermé.

COROLLAIRE 3. — *Le radical d'une algèbre de Banach est fermé.*

En effet le radical est l'intersection des idéaux à gauche maximaux réguliers (*Alg.*, chap. VIII, App., n° 3).

PROPOSITION 3. — *Soit* A *une algèbre de Banach unifère.*

(i) *Si* $x \in A$ *admet un inverse à gauche* (resp. *à droite*) y, *tout* $x' \in A$ *tel que* $\|x' - x\| < \|y\|^{-1}$ *admet un inverse à gauche* (resp. *à droite*).

(ii) *Soit* (x_n) *une suite d'éléments de* A *admettant des inverses à gauche* (resp. *à droite*) y_n, *et convergeant vers un* $x \in A$. *Si la suite des* y_n *est bornée,* x *est inversible à gauche* (resp. *à droite*).

Soient $x, y, x' \in A$ tels que $yx = 1$ et $\|x' - x\| < \|y\|^{-1}$. On a $\|1 - yx'\| = \|yx - yx'\| \leqslant \|y\| . \|x - x'\| < 1$, donc yx' est inversible, donc x' est inversible à gauche. On raisonne de même pour les inverses à droite.

Soient $x_n, y_n, x \in A$, tels que $y_n x_n = 1$, que x_n tende vers x, et $\|y_n\| \leqslant M < +\infty$. On a $\|x_n - x\| < M^{-1} \leqslant \|y_n\|^{-1}$ pour n assez grand, et (ii) résulte de (i).

DÉFINITION 4. — *Soient* A *une algèbre normée,* x *un élément de* A, L_x *et* R_x *les applications* $y \mapsto xy$ *et* $y \mapsto yx$ *de* A *dans* A. *On dit que* x *est un diviseur de zéro topologique à gauche* (resp.

à droite) si L_x (resp. R_x) n'est pas un homéomorphisme de A *sur* $L_x(A)$ (resp. $R_x(A)$).

D'après *Top. gén.*, chap. IX, 2[e] éd., § 3, th. 1, il revient au même de dire qu'il existe une suite (z_n) dans A telle que $\|z_n\| = 1$ et que xz_n tende vers 0 (resp. que $z_n x$ tende vers 0).

Un diviseur de zéro à gauche (resp. à droite) est un diviseur de zéro topologique à gauche (resp. à droite). Supposons que A admette un élément unité. Un diviseur de zéro topologique à gauche (resp. à droite) x est non inversible à gauche (resp. à droite); car, si par exemple $yx = 1$ et si xz_n tend vers 0, alors $z_n = y(xz_n)$ tend vers 0 et on ne peut avoir $\|z_n\| = 1$ pour tout n.

PROPOSITION 4.— *Soit* A *une algèbre de Banach unifère. Si un élément x de* A *est non inversible à gauche et est limite d'une suite (x_n) d'éléments inversibles à gauche, alors x est diviseur de zéro topologique à droite.*

Soit y_n un inverse à gauche de x_n. D'après la prop. 3 (ii), $\|y_n\|$ tend vers $+\infty$. Soit $z_n = \|y_n\|^{-1} y_n$. On a $\|z_n\| = 1$, et $z_n x_n = \|y_n\|^{-1}$ tend vers 0, donc $z_n x = z_n x_n + z_n(x - x_n)$ tend vers 0.

PROPOSITION 5.— *Soient* A *une algèbre normée unifère,* B *une sous-algèbre pleine de* A. *Alors* $\bar{B}$ *est une sous-algèbre pleine de* A.

En effet, soient x un élément de $\bar{B}$ inversible dans A, et (x_n) une suite de points de B tendant vers x. Alors, pour n assez grand, x_n est inversible dans A, et x_n^{-1} tend vers x^{-1}. Comme $x_n^{-1} \in B$, on a $x^{-1} \in \bar{B}$.

Si (y_λ) est une famille d'éléments de A, et si B est la sous-algèbre pleine de A engendrée par les y_λ, alors $\bar{B}$ est la plus petite sous-algèbre pleine fermée de A contenant les y_λ. On l'appelle *la sous-algèbre pleine fermée engendrée par les y_λ.*

5. *Spectre d'un élément dans une algèbre normée*

THÉORÈME 1.— *Soient* A *une algèbre de Banach unifère, et* $x \in A$.

(i) Sp x *est une partie compacte de* **C**.

(ii) *Le plus petit disque fermé de centre* 0 *dans* **C** *qui contient* Sp x *a pour rayon* $\rho(x)$.

(iii) *La résolvante* $\lambda \mapsto \mathrm{R}(\lambda, x)$ *de* x *est holomorphe dans* $\mathbf{C} - \operatorname{Sp} x$ *et nulle à l'infini. On a:*

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\mathrm{R}(\lambda, x) = (-1)^k k!\, \mathrm{R}(\lambda, x)^{k+1}.$$

Soit $\lambda_0 \in \mathbf{C} - \operatorname{Sp} x$. Soit $y = x - \lambda_0$. Si $\mu \in \mathbf{C}$ est tel que $|\mu| < \|y^{-1}\|^{-1}$, alors $x - (\lambda_0 + \mu) = y - \mu = y(1 - \mu y^{-1})$ est inversible et a pour inverse

$$(x - (\lambda_0 + \mu))^{-1} = y^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n y^n \tag{6}$$

d'après la prop. 2. Donc la résolvante de x est définie et holomorphe dans le disque ouvert de centre λ_0 et de rayon $\|y^{-1}\|^{-1}$. Ceci montre que $\mathbf{C} - \operatorname{Sp} x$ est ouvert et que la résolvante de x est holomorphe dans cet ensemble. La formule (1) du § 1, n° 2 donne $\dfrac{d}{d\lambda}\mathrm{R}(x, \lambda) = -\mathrm{R}(x, \lambda)^2$, d'où, par récurrence sur k,

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\mathrm{R}(x, \lambda) = (-1)^k k!\, \mathrm{R}(\lambda, x)^{k+1}.$$

Pour tout nombre $a \geqslant 0$, notons Δ_a le disque fermé de centre 0 et de rayon a dans $\mathbf{C}$. Soit λ un nombre complexe non nul tel que $|\lambda|\rho(x) < 1$. Alors, d'après la prop. 2, $x - \lambda^{-1} = \lambda^{-1}(\lambda x - 1)$ est inversible et

$$(\lambda^{-1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} x^n. \tag{7}$$

Ceci prouve que la résolvante de x est définie et holomorphe hors de $\Delta_{\rho(x)}$ et tend vers 0 à l'infini. S'il existait un nombre $a \in [0, \rho(x)[$ tel que $\operatorname{Sp} x$ soit contenu dans Δ_a, la fonction $\lambda \mapsto (\lambda^{-1} - x)^{-1}$ serait définie et holomorphe pour $0 < |\lambda| < a^{-1}$ et tendrait vers 0 quand λ tend vers 0, donc le rayon de convergence de la série (7) serait $\geqslant a^{-1} > \rho(x)^{-1}$; or ceci contredit la prop. 2.

COROLLAIRE 1. — *Soient* A *une algèbre normée unifère, et* $x \in \mathrm{A}$. *Si* $\mathrm{A} \neq \{0\}$, *on a* $\operatorname{Sp} x \neq \varnothing$.

Supposons d'abord A complète. Si $\operatorname{Sp} x = \varnothing$, la résolvante est holomorphe dans $\mathbf{C}$ et nulle à l'infini, donc identiquement nulle, d'où $1 = x \,.\, \mathrm{R}(x, 0) = 0$ et $\mathrm{A} = \{0\}$. Dans le cas général, la relation $\operatorname{Sp}_{\mathrm{A}} x = \varnothing$ entraîne $\operatorname{Sp}_{\hat{\mathrm{A}}} x = \varnothing$, d'où $\hat{\mathrm{A}} = \{0\}$ et $\mathrm{A} = \{0\}$.

COROLLAIRE 2 (*théorème de Gelfand-Mazur*). — *Soit* A *une algèbre normée sur* **C**. *Si* A *est un corps*, A = **C**.1.

Si $x \in$ A, il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $x - \lambda$ soit non inversible (cor. 1), d'où $x - \lambda = 0$ et $x \in \mathbf{C}.1$.

COROLLAIRE 3. — *Soient* A *une algèbre de Banach unifère, x un élément inversible de* A *tel que* $\|x\| = \|x^{-1}\| = 1$. *Alors* $\mathrm{Sp}\, x \subset \mathbf{U}$.

Soit Δ le disque $|z| \leqslant 1$ dans **C**. D'après le th. 1 (ii), on a $\mathrm{Sp}\, x \subset \Delta$ et $\mathrm{Sp}\, x^{-1} \subset \Delta$, d'où le corollaire (cf. § 1, n° 2, remarque 6).

COROLLAIRE 4. — *Soient* X *un espace de Banach complexe,* $\mathscr{L}(\mathrm{X})$ *l'algèbre des endomorphismes continus de* X, A *une sous-algèbre non nulle de* $\mathscr{L}(\mathrm{X})$ *telle que* X *soit un* A-*pseudo-module simple.*

(i) *Tout endomorphisme* (*non nécessairement continu*) *de* X *permutable à* A *est une homothétie.*

(ii) *Si u est un endomorphisme* (*non nécessairement continu*) *de* X *et si* $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathrm{X}$, *il existe un* $v \in \mathrm{A}$ *tel que* $v\xi_1 = u\xi_1, \ldots, v\xi_n = u\xi_n$.

Choisons un $\xi_0 \in \mathrm{X}$ tel que $\mathrm{A}\xi_0 \neq \{0\}$ (donc $\mathrm{A}\xi_0 = \mathrm{X}$). Soit B l'ensemble des endomorphismes de X permutables à A. Pour tout $u \in \mathrm{B}$, soit A_u l'ensemble (non vide) des $v \in \mathrm{A}$ tels que $v\xi_0 = u\xi_0$; posons $\|u\| = \inf \|v\|$. Il est clair que, si $u, u' \in \mathrm{B}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$, on a $\|u + u'\| \leqslant \|u\| + \|u'\|$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \, . \, \|u\|$. D'autre part, soit $\varepsilon > 0$; il existe $v, v' \in \mathrm{A}$ tels que $v\xi_0 = u\xi_0$, $v'\xi_0 = u'\xi_0$, $\|v\| \leqslant \|u\| + \varepsilon$, $\|v'\| \leqslant \|u'\| + \varepsilon$; alors $vv'\xi_0 = vu'\xi_0 = u'v\xi_0 = u'u\xi_0$, d'où $\|u'u\| \leqslant \|vv'\| \leqslant (\|u\| + \varepsilon)(\|u'\| + \varepsilon)$, et finalement

$$\|u'u\| \leqslant \|u\| \, . \, \|u'\|.$$

Donc B est une algèbre normée, et $1 \in \mathrm{B}$. Comme X est un A-pseudo-module simple, B est un corps (*Alg.*, chap. VIII, § 4, n° 3, prop. 2 et App., n° 2). Donc B = **C**.1 (cor. 2).

Pour prouver l'assertion (ii), il suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme 1. — *Soient* A *une algèbre sur un corps commutatif* K, M *un* A-*pseudo-module simple tel que* A . M $\neq \{0\}$. *Pour toute suite finie* $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *d'éléments de* M *et tout élément b du bicommutant de* M, *il existe un élément* $a \in \mathrm{A}$ *tel que* $ax_i = bx_i$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n$.

En examinant la démonstration du th. de densité (*Alg.*, chap. VIII, § 4, n° 2, th. 2), on constate qu'elle se transporte sans changement pour les pseudo-modules simples, à condition que le lemme 1 de *loc. cit.*, c'est-à-dire le cas particulier où $n = 1$ dans l'énoncé, soit vrai. Or, l'ensemble N des $x \in M$ tels que $A . x = \{0\}$ est un sous-pseudo-module de M, et comme il n'est pas égal à M par hypothèse, il est réduit à 0; alors, pour tout $x \in M$, on a nécessairement $A . x = M$, et en particulier, il existe $a \in A$ tel que $ax = bx$.

COROLLAIRE 5. — *Soient* A *une algèbre de Banach, et* $x \in A$.

(i) $\mathrm{Sp}' x$ *est une partie compacte de* $\mathbf{C}$.

(ii) *Le plus petit disque fermé de centre* 0 *de* $\mathbf{C}$ *qui contient* $\mathrm{Sp}' x$ *a pour rayon* $\rho(x)$.

(iii) *Pour que* x *soit quasi-nilpotent, il faut et il suffit que* $\mathrm{Sp}' x = \{0\}$.

Les assertions (i) et (ii) résultent aussitôt du th. 1 en considérant l'algèbre de Banach déduite de A par adjonction d'un élément unité. L'assertion (iii) résulte de (ii).

Remarques. — 1) Le spectre d'un élément dans une algèbre de Banach unifère peut être une partie compacte non vide quelconque de $\mathbf{C}$ (exerc. 6).

2) Soient A une algèbre de Banach unifère, et $x \in A$. D'après le th. 1, $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A x$ est une partie ouverte de $\mathbf{C}$, donc est localement connexe. Donc les composantes connexes de $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A x$ sont ouvertes. D'après le th. 1, l'une de ces composantes connexes contient l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $|\lambda| > \rho(x)$; toutes les autres composantes connexes sont évidemment bornées.

6. *Spectre relatif à une sous-algèbre*

PROPOSITION 6. — *Soient* A *une algèbre de Banach unifère,* B *une sous-algèbre fermée de* A *contenant* 1. *Pour tout* $x \in A$, *on a* $\mathrm{Sp}_B x \supset \mathrm{Sp}_A x$, *et la frontière de* $\mathrm{Sp}_A x$ *contient la frontière de* $\mathrm{Sp}_B x$.

On a $\mathrm{Sp}_B x \supset \mathrm{Sp}_A x$ (§ 1, n° 2, *Remarque* 7). Si λ est un point de la frontière de $\mathrm{Sp}_B x$, il existe une suite (λ_n) de points extérieurs à $\mathrm{Sp}_B x$ tendant vers λ. Alors $x - \lambda_n$ est inversible dans B et tend vers $x - \lambda$, qui n'est pas inversible dans B; donc $x - \lambda$ est diviseur de zéro topologique à gauche ou à droite dans B (prop. 4), donc dans A. Donc $\lambda \in \mathrm{Sp}_A x$. Puisque $\mathrm{Sp}_A x \subset \mathrm{Sp}_B x$, λ ne peut être intérieur à $\mathrm{Sp}_A x$.

COROLLAIRE. — *L'ensemble* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{B}}\, x$ *est la réunion de* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}\, x$ *et de certaines composantes connexes bornées de* $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}\, x$.

Soit U une composante connexe de $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}\, x$. Tout point frontière de $(\mathrm{Sp}_{\mathrm{B}}\, x) \cap \mathrm{U}$ dans l'espace U est aussi point frontière de $\mathrm{Sp}_{\mathrm{B}}\, x$ dans $\mathbf{C}$, donc point frontière de $\mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}\, x$ (prop. 6); comme $\mathrm{U} \cap \mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}\, x = \varnothing$, on voit que $(\mathrm{Sp}_{\mathrm{B}}\, x) \cap \mathrm{U}$ n'a aucun point frontière dans l'espace U. Comme U est connexe, on a $(\mathrm{Sp}_{\mathrm{B}}\, x) \cap \mathrm{U} = \varnothing$ ou U, ce qui prouve le corollaire.

Ce corollaire sera complété au § 3, cor. 1 et 2 de la prop. 9.

§ 3. — Algèbres de Banach commutatives

1. Caractères d'une algèbre de Banach commutative

Rappelons que le corps de base est toujours $\mathbf{C}$.

THÉORÈME 1. — *Si* A *est une algèbre de Banach commutative, tout caractère de* A *est continu de norme* $\leqslant 1$.

Soit $\chi \in \mathrm{X}'(\mathrm{A})$. Pour tout $x \in \mathrm{A}$, on a $\chi(x) \in \mathrm{Sp}'_{\mathrm{A}}\, x$ (§ 1, n° 6), donc $|\chi(x)| \leqslant \rho(x) \leqslant \|x\|$ (§ 2, cor. 5 du th. 1), d'où le théorème.

COROLLAIRE. — *Soit* A *une algèbre de Banach commutative. L'espace* $\mathrm{X}'(\mathrm{A})$ *est compact. L'espace* $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ *est localement compact, et est compact si* A *admet un élément unité.*

Soit A′ le dual de l'espace de Banach A. Sa boule unité A'_1 est faiblement compacte (*Esp. vect. top.*, chap. IV, § 5, prop. 4). D'après le th. 1, on a $\mathrm{X}'(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}'_1$, et il est clair que $\mathrm{X}'(\mathrm{A})$ est faiblement fermé dans A′. Donc $\mathrm{X}'(\mathrm{A})$ est compact et $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ est localement compact. Si A admet un élément unité 1, $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ est l'ensemble des $\chi \in \mathrm{X}'(\mathrm{A})$ tels que $\chi(1) = 1$, donc est une partie fermée et par suite compacte de $\mathrm{X}'(\mathrm{A})$.

On verra (n° 2) que tout espace compact est homéomorphe à $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ pour une algèbre de Banach unifère commutative A convenable.

THÉORÈME 2. — *Soit* A *une algèbre de Banach commutative. L'application* $\chi \mapsto \mathrm{Ker}\,\chi$ *est une bijection de* $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ *sur l'ensemble des ideaux maximaux réguliers de* A.

Soit $\mathfrak{I}$ un idéal maximal régulier de A. Il est fermé (§ 2, cor. 2 de la prop. 2), donc $\mathrm{A}/\mathfrak{I}$ est une algèbre de Banach. Comme c'est un corps (*Alg.*, chap. VIII, App., prop. 3), $\mathrm{A}/\mathfrak{I}$ est de dimension

1 sur **C** (§ 2, cor. 2 du th. 1), donc $\mathfrak{J}$ est de codimension 1 dans A. Alors, le théorème résulte de ce qu'on a dit au § 1, n° 6.

Il peut arriver qu'une algèbre de Banach commutative A sans élément unité n'ait aucun idéal maximal; alors X'(A) est réduit à $\{0\}$ (cf. exerc. 4).

Ainsi les ensembles J(A) et $\hat{\mathrm{A}}$ du § 1, n° 7, peuvent s'identifier à l'ensemble X(A). Il y a donc lieu de considérer sur X(A) la topologie faible, et la topologie de Jacobson qui est moins fine (§ 1, prop. 5). Quand on utilisera une notion topologique dans X(A) sans préciser de quelle topologie il s'agit, il s'agira toujours de la topologie faible.

2. *Exemple*

PROPOSITION 1. — *Soient Ω un espace localement compact, A l'algèbre des fonctions complexes continues tendant vers 0 à l'infini sur Ω, munie de la norme $\|f\| = \sup_{t\in\Omega} |f(t)|$. Pour toute partie fermée Φ de Ω, soit $\mathfrak{J}_\Phi$ l'ensemble des $f \in \mathrm{A}$ nulles sur Φ. Alors $\Phi \mapsto \mathfrak{J}_\Phi$ est une bijection de l'ensemble des parties fermées de Ω sur l'ensemble des idéaux fermés de* A.

Il est clair que $\mathfrak{J}_\Phi$ est un idéal fermé de A. Si $\Phi \neq \Phi'$, il existe par exemple un $t \in \Phi'$ tel que $t \notin \Phi$, donc une $f \in \mathrm{A}$ nulle sur Φ et non nulle en t; alors $f \in \mathfrak{J}_\Phi$ et $f \notin \mathfrak{J}_{\Phi'}$, donc l'application $\Phi \mapsto \mathfrak{J}_\Phi$ est injective. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal fermé de A. Soit Φ l'ensemble des $t \in \Omega$ tels que $f(t) = 0$ pour toute $f \in \mathfrak{J}$. Alors Φ est une partie fermée de Ω, et $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}_\Phi$. Soient $f \in \mathfrak{J}_\Phi$, $\varepsilon > 0$, et Ψ l'ensemble compact des $t \in \Omega$ tels que $|f(t)| \geqslant \varepsilon$. Pour tout $t \in \Psi$, il existe une $f_t \in \mathfrak{J}$ telle que $|f_t(t)| > 1$, donc telle que $|f_t(u)| > 1$ dans un voisinage V_t de t. Puis, il existe $t_1, \ldots, t_n \in \Psi$ tels que

$$\Psi \subset \mathrm{V}_{t_1} \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{t_n}.$$

Alors $g_\varepsilon = f_{t_1}\bar{f}_{t_1} + \ldots + f_{t_n}\bar{f}_{t_n} \in \mathfrak{J}$, et $g_\varepsilon > 1$ sur Ψ. On a $f\varepsilon^{-1}g_\varepsilon(1 + \varepsilon^{-1}g_\varepsilon)^{-1} \in \mathfrak{J}$, et cette fonction tend uniformément vers f quand ε tend vers 0. Ainsi, $f \in \bar{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}$, d'où $\mathfrak{J}_\Phi \subset \mathfrak{J}$ et finalement $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_\Phi$.

Remarque. — Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de A. Supposons que, pour tout $t \in \Omega$, il existe un élément de $\mathfrak{J}$ non nul en t. Alors toute fonction continue complexe f sur Ω à support compact K appartient à

$\mathfrak{I}$. En effet, la construction qui a permis d'obtenir g_ε dans la démonstration précédente prouve ici qu'il existe une $g \in \mathfrak{I}$ telle que $g \geqslant 0$ sur Ω et $g > 1$ sur K. Il existe ensuite $h \in \mathrm{A}$ telle que $f = gh$, d'où $f \in \mathfrak{I}$.

COROLLAIRE 1. — *Pour tout $t \in \Omega$, soit $\mathfrak{I}_t$ l'ensemble des $f \in \mathrm{A}$ nulles en t. Alors $t \mapsto \mathfrak{I}_t$ est une bijection de Ω sur l'ensemble des idéaux fermés maximaux de* A. *Ces idéaux sont réguliers.*

Ceci résulte aussitôt de la prop. 1.

Notons $\dot{\Omega}$ l'espace compact déduit de Ω par adjonction d'un point à l'infini ω; alors A s'identifie à l'algèbre de Banach des fonctions complexes continues sur $\dot{\Omega}$ nulles en ω. Ceci posé:

COROLLAIRE 2. — *Pour tout $t \in \dot{\Omega}$, soit ε_t le caractère de* A *défini par $\varepsilon_t(f) = f(t)$ pour toute $f \in \mathrm{A}$. Alors $t \mapsto \varepsilon_t$ est un homéomorphisme de $\dot{\Omega}$ sur* X'(A). *Sur* X(A), *la topologie faible et la topologie de Jacobson coïncident.*

Il est clair que $t \mapsto \varepsilon_t$ est une application continue injective de $\dot{\Omega}$ dans X'(A). Elle est surjective, donc est un homéomorphisme d'après le cor. 1 et le th. 2. Si F est une partie faiblement fermée de X(A), elle correspond à une partie fermée de Ω dans l'homéomorphisme précédent, donc elle est fermée pour la topologie de Jacobson d'après la prop. 1.

3. Transformation de Gelfand

Soit A une algèbre de Banach commutative. Rappelons que, pour tout $x \in \mathrm{A}$, on note $\mathscr{G}_{\mathrm{A}}x$, ou $\mathscr{G}x$, la fonction $\chi \mapsto \chi(x)$ sur X(A), que $\mathscr{G}x$ s'appelle la *transformée de Gelfand* de x, et que l'application $x \mapsto \mathscr{G}x$ s'appelle *transformation de Gelfand.* On a donc par définition:

$$(\mathscr{G}x)(\chi) = \chi(x).$$

Exemples. — 1) Dans l'*Exemple* 1 du § 2, n° 2, X(A) s'identifie à Ω (cor. 2 de la prop. 1), et la transformation de Gelfand s'identifie à l'application identique.

2) De même, dans l'*Exemple* 2 du § 2, n° 2, X(A) s'identifie à $[0, 1]$ et $\mathscr{G}$ à l'application identique (§ 7, n° 1, *Exemple*).

3) Dans l'*Exemple* 5 du § 2, n° 2, X(A) s'identifie à Δ et $\mathscr{G}$ à l'application identique (§ 7, exerc. 6).

4) Considérons, comme dans l'*Exemple* 4 du § 2, n° 2, l'algèbre de Banach A des séries de Fourier absolument convergentes. Pour tout $u \in \mathbf{U}$, l'application $f \mapsto f(u)$ est un caractère χ_u de A. Si $f_0 \in A$ est l'application identique de $\mathbf{U}$, on a $\chi_u(f_0) = u$, donc l'application $u \mapsto \chi_u$ de $\mathbf{U}$ dans X(A) est injective (et évidemment continue). Soit $\chi \in X(A)$. On a $\|f_0\| = \|f_0^{-1}\| = 1$, donc $|\chi(f_0)| \leqslant 1$ et $|\chi(f_0)^{-1}| \leqslant 1$, donc $\chi(f_0) \in \mathbf{U}$, donc il existe $u \in \mathbf{U}$ tel que $\chi(f_0) = \chi_u(f_0)$. Comme $\{f_0, f_0^{-1}\}$ engendre topologiquement A, on a $\chi = \chi_u$. Ainsi, l'application $u \mapsto \chi_u$ est un homéomorphisme de $\mathbf{U}$ sur X(A) par lequel on identifie ces deux espaces. Alors $\mathscr{G}_A$ s'identifie à l'application identique. Donc $X(L^1(\mathbf{Z}))$ s'identifie à $\mathbf{U}$, et, si $(c_n) \in L^1(\mathbf{Z})$, $\mathscr{G}_{L^1(\mathbf{Z})}((c_n))$ s'identifie à la fonction $e^{it} \mapsto \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ sur $\mathbf{U}$.

5) Soient Δ le disque $|z| \leqslant 1$ dans $\mathbf{C}$, Γ sa frontière, A l'algèbre de Banach des fonctions complexes f sur Γ qui se prolongent en fonctions continues sur Δ analytiques dans $\mathring{\Delta}$, avec la norme $\|f\| = \sup_{t \in \Gamma} |f(t)|$. En vertu du principe du maximum, A est canoniquement isomorphe à l'algèbre du § 2, n° 2, *Exemple* 5. Donc X(A) s'identifie à Δ, et, si $f \in A$, $\mathscr{G}f$ est le prolongement continu de f dans Δ analytique dans $\mathring{\Delta}$.

PROPOSITION 2. — *Soient* A *une algèbre de Banach commutative. Pour tout* $x \in A$, $\mathscr{G}x$ *est continue et tend vers* 0 *à l'infini sur* X(A).

On a vu au § 1, n° 6, que la fonction $\chi \mapsto \chi(x)$ est continue sur X'(A) et nulle en 0. Comme X'(A) s'identifie au compactifié d'Alexandroff de X(A) d'après le cor. du th. 1, la proposition en résulte.

PROPOSITION 3. — *Soient* A *une algèbre de Banach commutative, et* $x \in A$.

(i) *La réunion de l'ensemble des valeurs de* $\mathscr{G}x$ *et de* $\{0\}$ *est* $\mathrm{Sp}'\,x$.

(ii) *Si* A *admet un élément unité, l'ensemble des valeurs de* $\mathscr{G}x$ *est* $\mathrm{Sp}\,x$; *en particulier, pour que* x *soit inversible, il faut et il suffit que* $\mathscr{G}x$ *ne s'annule pas.*

Supposons que A admette un élément unité. On sait que, pour tout $\chi \in X(A)$, on a $\chi(x) \in \operatorname{Sp} x$. Réciproquement, soit $\lambda \in \operatorname{Sp} x$. Alors $x - \lambda$ n'est pas inversible, donc appartient à un idéal maximal de A; donc, il existe $\chi \in X(A)$ tel que $\chi(x - \lambda) = 0$ (th. 2), d'où (ii).

Passons au cas général. L'ensemble $\operatorname{Sp}'_A x$ est égal à $\operatorname{Sp}_{\tilde{A}} x$, c'est-à-dire à l'ensemble des valeurs de $\mathscr{G}_{\tilde{A}}x$ sur $X(\tilde{A}) = X'(A)$. D'où (i).

Corollaire. — *Soit* $f(e^{it}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ *une série de Fourier absolument convergente. Si f ne prend pas la valeur 0, f^{-1} est une série de Fourier absolument convergente.*

Ceci résulte de l'exemple 4 ci-dessus et de la prop. 3 (ii).

Proposition 4. — *Soient* A *une algèbre de Banach commutative,* B *l'algèbre des fonctions complexes continues tendant vers* 0 *à l'infini sur* X(A), *muni de la norme* $\|f\| = \sup_{t \in X(A)} |f(t)|$. *Alors:*

(i) $\mathscr{G}$ *est un morphisme de* A *dans* B *tel que* $\|\mathscr{G}x\| = \rho(x) \leqslant \|x\|$.

(ii) *Pour que* $\mathscr{G}$ *soit isométrique, il faut et il suffit que* $\|x^2\| = \|x\|^2$ *pour tout* $x \in A$.

$\mathscr{G}$ est un morphisme de A dans B d'après le § 1, nº 6; on a $\|\mathscr{G}x\| = \rho(x)$ d'après la prop. 3 et le § 2, cor. 5 du th. 1.

(ii) résulte de (i) et du § 2, nº 3.

Proposition 5. — *Soit* A *une algèbre de Banach commutative. Les quatre ensembles suivants sont égaux:*

1) *le noyau de la transformation de Gelfand;*

2) *l'ensemble des* x *tels que* $\operatorname{Sp}' x = \{0\}$;

3) *l'ensemble des éléments quasi-nilpotents de* A;

4) *le radical de* A.

Soient $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{N}_4$ ces ensembles. On a $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$ (prop. 3 (i)), et $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_3$ (§ 2, cor. 5 du th. 1). L'ensemble $\mathfrak{N}_4$ est l'intersection des idéaux maximaux réguliers de A, donc l'intersection des noyaux des caractères de A (th. 2), donc est égal à $\mathfrak{N}_1$.

Corollaire. — *Soient* A *une algèbre de Banach,* x *et* y *deux éléments permutables de* A.

(i) *On a* $\rho(xy) \leqslant \rho(x)\rho(y)$, $\rho(x + y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$.

(ii) *Si* y *est quasi-nilpotent,* $\operatorname{Sp}' x = \operatorname{Sp}'(x + y)$; *si de plus* A *a un élément unité,* $\operatorname{Sp} x = \operatorname{Sp}(x + y)$.

On se ramène aussitôt au cas où A admet un élément unité, puis, en considérant la sous-algèbre pleine fermée de A engendrée par x et y, au cas où A est commutative. Alors, (i) résulte de la prop. 3 et (ii) résulte des prop. 3 et 5.

Remarques. — 1) En général, $\mathscr{G}(A)$ n'est ni fermé dans B ni partout dense dans B (§ 7, exerc. 7).

2) $\mathscr{G}(A)$ sépare les points de $X(A)$: car si χ_1, χ_2 sont deux points distincts de $X(A)$, il existe $x \in A$ tel que $\chi_1(x) \neq \chi_2(x)$.

3) Si $\chi \in X(A)$, il existe un élément de $\mathscr{G}(A)$ qui ne s'annule pas en χ.

4) Si A possède un élément unité, $\mathscr{G}(A)$ est une sous-algèbre pleine de l'algèbre des fonctions continues sur $X(A)$ (prop. 3 (ii)).

5) Nous verrons (§ 4, th. 2), que $\mathscr{G}(A)$ est stable par composition avec les fonctions holomorphes.

4. *Morphismes d'algèbres de Banach commutatives*

PROPOSITION 6. — *Soient* A *et* B *deux algèbres de Banach commutatives, h un morphisme de l'algèbre sous-jacente à* A *dans l'algèbre sous-jacente à* B. *Si* B *est sans radical, h est continu.*

Soit $(a, b) \in A \times B$ un point adhérent au graphe G de h. Soit $\chi \in X'(B)$. La fonction $(x, y) \mapsto \chi(h(x)) - \chi(y) = (X'(h)(\chi))(x) - \chi(y)$ sur $A \times B$ est continue et nulle sur G, donc nulle en (a, b). Donc $\chi(h(a)) = \chi(b)$ pour tout $\chi \in X'(B)$. Comme B est sans radical, on a $h(a) = b$. Ainsi, G est fermé, donc h est continu (*Esp. vect. top.*, chap. I, § 3, cor. 5 du th. 1).

L'hypothèse que A est commutative n'est pas indispensable (exerc. 11).

COROLLAIRE. — *Sur une algèbre complexe commutative sans radical, deux normes définissant des structures d'algèbre de Banach sont équivalentes.*

Il suffit d'appliquer la prop. 6 à l'application identique de l'algèbre.

Soient A et B deux algèbres de Banach commutatives. D'après le § 1, n° 6, si $h : A \to B$ est un morphisme surjectif, $X'(h)$ est un homéomorphisme de $X'(B)$ sur un sous-espace fermé de X′(A) qui transforme 0 en 0. (En fait, X′(h) peut être injectif sous des hypothèses beaucoup plus faibles : cf. § 7, prop. 1 (iv).)

Soit maintenant $h : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un morphisme injectif. En général, X′(h) n'est pas surjectif; une condition nécessaire pour que X′(h) soit surjectif est fournie par la proposition suivante :

PROPOSITION 7. — *Soient* A *et* B *deux algèbres de Banach unifères commutatives,* $h : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un morphisme unifère (non nécessairement continu). Si* X(h) *est surjectif,* $h(\mathrm{A})$ *est une sous-algèbre pleine de* B.

Soit $x \in \mathrm{A}$ tel que $h(x)$ soit inversible dans B. Pour tout $\chi \in \mathrm{X(A)}$, on a $\chi = \mathrm{X}(h)(\xi)$ avec un $\xi \in \mathrm{X(B)}$, donc $\chi(x) = \xi(h(x)) \neq 0$; donc x est inversible dans A (prop. 3) et $h(x)$ est inversible dans $h(\mathrm{A})$.

Cette condition nécessaire n'est pas suffisante, même si h est isométrique (exerc. 14). On a toutefois le résultat suivant :

PROPOSITION 8. — *Soient* A *et* B *deux algèbres de Banach unifères commutatives,* $h : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un morphisme injectif unifère (non nécessairement continu),* a *un élément de* A. *On suppose que la sous-algèbre fermée pleine de* A *engendrée par* a *est égale à* A. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) X(h) *est surjectif ;*

b) $h(\mathrm{A})$ *est une sous-algèbre pleine de* B *;*

c) $\mathrm{Sp_A}\, a = \mathrm{Sp_B}\, h(a)$.

a) ⇒ *b)* résulte de la prop. 7.

b) ⇒ *c)* est évident puisque $\mathrm{Sp_A}\, a = \mathrm{Sp}_{h(\mathrm{A})}\, h(a)$.

c) ⇒ *a)* d'après le § 1, n° 5, formule (4), on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X(B)} \arrow[r, "\mathrm{X}(h)"] \arrow[d, "\mathscr{G}_\mathrm{B}(h(a))"'] & \mathrm{X(A)} \arrow[d, "\mathscr{G}_\mathrm{A}(a)"] \\ \mathrm{Sp_B}\, h(a) \arrow[r, "i"] & \mathrm{Sp_A}\, a \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales désignent des applications surjectives (prop. 3) et i l'injection canonique. L'hypothèse *c)* signifie que i est bijectif. L'hypothèse faite sur a dans l'énoncé entraîne que $\mathrm{X(A)} \to \mathrm{Sp_A}\, a$ est bijectif, car l'ensemble des points de A où sont égaux deux caractères est une sous-algèbre fermée pleine de A. Donc X(h) est surjectif.

5. *Spectre simultané*

Soit $B = \mathbf{C}[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ l'algèbre unifère des polynômes complexes par rapport à une famille d'indéterminées (X_λ). Pour tout $\chi \in X(B)$, on a $(\chi(X_\lambda))_{\lambda\in\Lambda} \in \mathbf{C}^\Lambda$; il est clair que $\chi \mapsto (\chi(X_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ est un homéomorphisme de $X(B)$ sur l'espace produit $\mathbf{C}^\Lambda$, par lequel on identifie ces deux espaces.

Soient d'autre part A une algèbre de Banach commutative unifère, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'éléments de A. Il existe un morphisme h et un seul de B dans A tel que $h(X_\lambda) = x_\lambda$ pour tout λ. L'application continue $X(h)$ de $X(A)$ dans $\mathbf{C}^\Lambda$ est l'application $\chi \mapsto (\chi(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$; on l'appelle *l'application de* $X(A)$ *dans* $\mathbf{C}^\Lambda$ *définie par* (x_λ). Son image est une partie compacte de $\mathbf{C}^\Lambda$ appelée *spectre simultané* de (x_λ) et noté $\mathrm{Sp}_A((x_\lambda))$, ou $\mathrm{Sp}((x_\lambda))$. Un point $(c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de $\mathbf{C}^\Lambda$ appartient à $\mathrm{Sp}((x_\lambda))$ si et seulement si les $x_\lambda - c_\lambda$ sont dans un même idéal maximal de A, autrement dit s'ils n'engendrent pas l'idéal A. Si la famille (x_λ) se réduit à un seul élément x, on retrouve le spectre $\mathrm{Sp}\,x$ (prop. 3 (ii)). Si $\Lambda' \subset \Lambda$, $\mathrm{Sp}((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda'})$ est l'image de $\mathrm{Sp}((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ par l'application canonique de $\mathbf{C}^\Lambda$ sur $\mathbf{C}^{\Lambda'}$. En particulier $\mathrm{Sp}((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Sp}\,x_\lambda$.

Soient z_λ $(\lambda \in \Lambda)$ les fonctions coordonnées sur $\mathbf{C}^\Lambda$. Si $\chi \in X(A)$, la valeur en χ de $z_\lambda \circ X(h)$ est $\chi(x_\lambda)$, donc $z_\lambda \circ X(h) = \mathscr{G}x_\lambda$.

Soient A et B deux algèbres de Banach commutatives unifères, φ un morphisme unifère de A dans B, (x_λ) une famille d'éléments de A. On a, pour tout $\chi \in X(B)$,

$$\chi(\varphi(x_\lambda)) = (X(\varphi)(\chi))(x_\lambda),$$

donc $\mathrm{Sp}_B((\varphi(x_\lambda))) \subset \mathrm{Sp}_A((x_\lambda))$ et le diagramme :

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} X(B) & \xrightarrow{X(\varphi)} & X(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sp}_B((\varphi(x_\lambda))) & \xrightarrow{i} & \mathrm{Sp}_A((x_\lambda)) \end{array}$$

où i désigne l'injection canonique, et où les flèches verticales désignent les applications définies par $(\varphi(x_\lambda))$ et (x_λ), est commutatif.

PROPOSITION 9. — (i) *On suppose que la sous-algèbre pleine de* A *engendrée par les* x_λ *est dense dans* A. *L'application de* $X(A)$ *dans* $\mathbf{C}^\Lambda$ *définie par* (x_λ) *est un homéomorphisme de* $X(A)$ *sur* $\mathrm{Sp}((x_\lambda))$.

(ii) *On suppose que la sous-algèbre unifère de* A *engendrée par les* x_λ *est dense dans* A. *Pour tout* $(c_\lambda) \in \mathbf{C}^\Lambda$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $(c_\lambda) \in \mathrm{Sp}((x_\lambda))$;

b) $|\mathrm{P}((c_\lambda))| \leqslant \|\mathrm{P}((x_\lambda))\|$ *pour tout* $\mathrm{P} \in \mathbf{C}[(\mathrm{X}_\lambda)]$;

c) $|\mathrm{P}((c_\lambda))| \leqslant \rho(\mathrm{P}((x_\lambda)))$ *pour tout* $\mathrm{P} \in \mathbf{C}[(\mathrm{X}_\lambda)]$.

(i) Soient $\chi, \chi' \in \mathrm{X}(\mathrm{A})$. Si $\chi(x_\lambda) = \chi'(x_\lambda)$ pour tout λ, χ et χ' sont égaux sur la sous-algèbre pleine de A engendrée par les x_λ, donc sur A puisque χ et χ' sont continus. Donc $\mathrm{X}(h)$ est une bijection continue de $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ sur $\mathrm{Sp}((x_\lambda))$ et par suite un homéomorphisme puisque $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ est compact.

(ii) Si $(c_\lambda) \in \mathrm{Sp}((x_\lambda))$ et si $\mathrm{P} \in \mathbf{C}[(\mathrm{X}_\lambda)]$, il existe $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{A})$ tel que $c_\lambda = \chi(x_\lambda)$ pour tout λ, d'où $|\mathrm{P}((c_\lambda))| = |\chi(\mathrm{P}((x_\lambda)))| \leqslant \rho(\mathrm{P}((x_\lambda)))$; donc *a)* $\Rightarrow$ *c)* ; *c)* $\Rightarrow$ *b)* est clair car $\rho(x) \leqslant \|x\|$. Soit maintenant $(c_\lambda) \in \mathbf{C}^\Lambda$ tel que $|\mathrm{P}((c_\lambda))| \leqslant \|\mathrm{P}((x_\lambda))\|$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbf{C}[(\mathrm{X}_\lambda)]$. Soit A′ la sous-algèbre unifère de A engendrée par les x_λ. La condition $\mathrm{P}((x_\lambda)) = 0$ entraîne $\mathrm{P}((c_\lambda)) = 0$, donc il existe un morphisme ξ de A′ dans $\mathbf{C}$ tel que $\xi(x_\lambda) = c_\lambda$ pour tout λ. Comme

$$|\mathrm{P}((c_\lambda))| \leqslant \|\mathrm{P}((x_\lambda))\|,$$

ce morphisme se prolonge par continuité en un caractère χ de $\bar{\mathrm{A}}' = \mathrm{A}$, d'où $(c_\lambda) = (\chi(x_\lambda)) \in \mathrm{Sp}((x_\lambda))$.

COROLLAIRE 1. — *Soient* A *une algèbre de Banach unifère commutative,* (x_λ) *une famille d'éléments de* A, A′ *la sous-algèbre de Banach unifère engendrée par les* x_λ. *Alors* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{A}'}((x_\lambda))$ *est l'enveloppe polynomialement convexe* (App.) *de* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}((x_\lambda))$.

En effet, $\mathrm{Sp}_{\mathrm{A}'}((x_\lambda))$ est, d'après la prop. 9, l'ensemble des $(c_\lambda) \in \mathbf{C}^\Lambda$ tels que $|\mathrm{P}((c_\lambda))| \leqslant \rho(\mathrm{P}((x_\lambda)))$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbf{C}[(\mathrm{X}_\lambda)]$. Or $\rho(\mathrm{P}((x_\lambda))) = \sup\limits_{\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{A})} |\chi(\mathrm{P}((x_\lambda)))| = \sup\limits_{\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{A})} |\mathrm{P}((\chi(x_\lambda)))| = \sup\limits_{c \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}((x_\lambda))} |\mathrm{P}(c)|$.

COROLLAIRE 2. — *Soit* K *une partie compacte de* $\mathbf{C}$. *Soit* K′ *la réunion de* K *et des composantes connexes bornées de* $\mathbf{C} - \mathrm{K}$. *Alors* K′ *est l'enveloppe polynomialement convexe de* K.

D'après l'Appendice, K′ est contenue dans cette enveloppe polynomialement convexe. D'autre part, l'ensemble $\mathbf{C} - \mathrm{K}'$ est l'unique composante connexe non bornée de $\mathbf{C} - \mathrm{K}$; il est ouvert et contient l'extérieur d'un disque, donc K′ est compact. Soit $\mathrm{A} = \mathscr{C}(\mathrm{K}')$, qui est une algèbre de Banach unifère commutative. Soit $x \in \mathrm{A}$ la fonction $t \mapsto t$ sur K′. On a $\mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}\, x = \mathrm{K}'$, donc

$\mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A x$ est connexe. Donc, si B désigne la sous-algèbre unifère fermée de A engendrée par x, on a $\mathrm{Sp}_B x = \mathrm{Sp}_A x$ (§ 2, cor. de la prop. 6). Or, d'après la prop. 9 (ii), $\mathrm{Sp}_B x$ est polynomialement convexe. Donc K′ est polynomialement convexe.

Le cor. 2 devient inexact si on remplace $\mathbf{C}$ par $\mathbf{C}^2$ (exerc. 23).

COROLLAIRE 3. — *Soit* K *une partie compacte polynomialement convexe de* $\mathbf{C}^\Lambda$. *Soient* $A = \mathscr{C}(K)$, A_1 *l'ensemble des restrictions à* K *des fonctions polynômes sur* $\mathbf{C}^\Lambda$, *et* A′ *l'adhérence de* A_1 *dans* A. *Pour tout* $z \in K$, *soit* χ_z *le caractère* $f \mapsto f(z)$ *de* A′.

(i) *L'application* $\psi : z \mapsto \chi_z$ *est un homéomorphisme de* K *sur* X(A′).

(ii) *Soit* $(z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *la famille des restrictions à* K *des fonctions coordonnées sur* $\mathbf{C}^\Lambda$. *Soit* φ *l'application de* X(A′) *dans* $\mathbf{C}^\Lambda$ *définie par* (z_λ). *Alors* $\varphi \circ \psi$ *est l'application identique de* K, *et* $K = \mathrm{Sp}_{A'}((z_\lambda))$.

Comme les z_λ engendrent topologiquement A′, φ est un homéomorphisme de X(A′) sur $\mathrm{Sp}_{A'}((z_\lambda))$ (prop. 9 (i)). Il est clair que $\varphi \circ \psi$ est l'application identique de K, donc ψ est injective (et évidemment continue), et $\mathrm{Sp}_{A'}((z_\lambda)) \supset K$. D'après le cor. 2 de la prop. 1, $\mathrm{Sp}_A((z_\lambda)) = K$. D'après le cor. 1 de la prop. 9, $\mathrm{Sp}_{A'}((z_\lambda)) = K$ puisque K est polynomialement convexe. Ainsi, ψ est surjectif, donc est un homéomorphisme de l'espace compact K sur X(A′).

§ 4. — Calcul fonctionnel holomorphe

Dans tout ce paragraphe, A désigne une algèbre de Banach unifère.

1. Enoncé du théorème principal

Soient E un espace de Banach complexe, et U une partie ouverte de $\mathbf{C}^n$. Nous noterons $\mathscr{O}(U; E)$ l'espace vectoriel complexe des fonctions holomorphes sur U à valeurs dans E, muni de la topologie de la convergence compacte. Soient K une partie compacte de $\mathbf{C}^n$, et $\mathfrak{U}$ l'ensemble filtrant décroissant des voisinages ouverts de K. Si $U, U' \in \mathfrak{U}$ et $U' \subset U$, on a une application de restriction de $\mathscr{O}(U; E)$ dans $\mathscr{O}(U'; E)$. La limite inductive des $\mathscr{O}(U; E)$ pour ces applications est un espace localement convexe noté $\mathscr{O}(K; E)$; ses éléments s'appellent les *germes* de fonctions holomorphes à valeurs dans E au voisinage de K ; on peut parler des *valeurs* d'un tel germe sur K.

Il est clair que $\mathcal{O}(\mathrm{U}\,;\mathrm{A})$, $\mathcal{O}(\mathrm{K}\,;\mathrm{A})$ sont des algèbres unifères, et qu'on peut, si $\mathrm{A} \neq \{0\}$, identifier canoniquement $\mathcal{O}(\mathrm{U}\,;\mathbf{C})$, $\mathcal{O}(\mathrm{K}\,;\mathbf{C})$ à des sous-algèbres de $\mathcal{O}(\mathrm{U}\,;\mathrm{A})$, $\mathcal{O}(\mathrm{K}\,;\mathrm{A})$. On posera $\mathcal{O}(\mathrm{U}\,;\mathbf{C}) = \mathcal{O}(\mathrm{U})$, $\mathcal{O}(\mathrm{K}\,;\mathbf{C}) = \mathcal{O}(\mathrm{K})$.

Soit M un ensemble. Si $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{M}^n$ et si $m \leqslant n$, on posera $\pi_{m,n}(\mathbf{a}) = (a_1, \dots, a_m)$. Si $\mathbf{a} \in \mathrm{A}^n$, on sait que

$$\pi_{m,n}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}) = \mathrm{Sp}(\pi_{m,n}(\mathbf{a}))\,;$$

d'où un morphisme $\pi^*_{m,n} : \mathcal{O}(\mathrm{Sp}(\pi_{m,n}(\mathbf{a}))) \to \mathcal{O}(\mathrm{Sp}(\mathbf{a}))$.

Nous désignerons par $\mathrm{A}^{(\infty)}$ l'ensemble somme des A^n pour $n = 1, 2, 3, \dots$.

THÉORÈME 1. — *Soit* A *une algèbre de Banach unifère commutative. Il existe une application* $\mathbf{a} \mapsto \Theta_{\mathbf{a}}$ *et une seule qui associe à tout* $\mathbf{a} \in \mathrm{A}^{(\infty)}$ *un morphisme unifère continu* $\Theta_{\mathbf{a}} : \mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}) \to \mathrm{A}$, *ces morphismes possédant les propriétés suivantes :*

(i) *Si* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, *et si* $z_1, \dots, z_n$ *désignent les germes au voisinage de* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ *des fonctions coordonnées sur* $\mathbf{C}^n$, *on a*

$$\Theta_{\mathbf{a}}(z_1) = a_1, \dots, \Theta_{\mathbf{a}}(z_n) = a_n\,;$$

(ii) *Si* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, *si* $m \leqslant n$, *et si* $f \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}(\pi_{m,n}(\mathbf{a})))$, *on a* $\Theta_{\mathbf{a}}(\pi^*_{m,n}(f)) = \Theta_{\pi_{m,n}(\mathbf{a})}(f)$.

La démonstration de ce théorème occupera les n^os 2 à 6.

2. *Construction de certaines formes différentielles*

Dans ce n°, on suppose A commutative.

Quand nous parlerons de fonctions indéfiniment différentiables sur une partie ouverte de $\mathbf{C}^n$, il s'agira de fonctions indéfiniment différentiables pour la structure sous-jacente de variété réelle. Les notions de calcul différentiel utilisées seront relatives à cette structure. Quand nous parlerons de formes différentielles, il s'agira de formes différentielles extérieures, et la multiplication de ces formes sera la multiplication extérieure.

Lemme 1. — *Soit* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{A}^n$. *Il existe des applications indéfiniment différentiables* $v_1, \dots, v_n$ *de* $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ *dans* A *telles que l'on ait, pour tout* $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$,

$$(z_1 - a_1)v_1(\mathbf{z}) + \dots + (z_n - a_n)v_n(\mathbf{z}) = 1.$$

1) Pour tout $\mathbf{z}_0 = (z_{01}, z_{02}, \ldots, z_{0n}) \in \mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, il existe des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$, à valeurs dans A, définies et indéfiniment différentiables dans un voisinage ouvert de $\mathbf{z}_0$, telles que $(z_1 - a_1)u_1(\mathbf{z}) + \ldots + (z_n - a_n)u_n(\mathbf{z}) = 1$ dans ce voisinage. En effet, il existe d'abord $b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{A}$ tels que

$$(z_{01} - a_1)b_1 + \ldots + (z_{0n} - a_n)b_n = 1$$

(§ 3, n° 5). L'élément $(z_1 - a_1)b_1 + \ldots + (z_n - a_n)b_n$ de A est inversible si $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ appartient à un voisinage ouvert suffisamment petit de $\mathbf{z}_0$: et il suffit de poser

$$u_j(\mathbf{z}) = b_j\left(\sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i)b_i\right)^{-1}$$

dans ce voisinage.

2) Il résulte de 1) qu'il existe un recouvrement ouvert $(\mathrm{V}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{L}}$ de $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, et, pour tout $\lambda \in \mathrm{L}$, des fonctions $u_{1\lambda}, \ldots, u_{n\lambda}$, à valeurs dans A, définies et indéfiniment différentiables dans V_λ, telles que $(z_1 - a_1)u_{1\lambda}(\mathbf{z}) + \ldots + (z_n - a_n)u_{n\lambda}(\mathbf{z}) = 1$ dans V_λ. D'après *Top. gén.*, chap. I, 4^e^ éd., § 9, th. 5, on peut supposer le recouvrement (V_λ) localement fini. Il existe une famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{L}}$ de fonctions $\geqslant 0$ dans $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, indéfiniment différentiables, telles que $\mathrm{Supp}(f_\lambda) \subset \mathrm{V}_\lambda$ et $\sum_{\lambda \in \mathrm{L}} f_\lambda = 1$ dans $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ (*Var.*, R.). En prolongeant $f_\lambda u_{i\lambda}$ par 0 dans $(\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}) - \mathrm{V}_\lambda$, on obtient une fonction $u'_{i\lambda}$ à valeurs dans A, définie et indéfiniment différentiable dans $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. Pour $i = 1, 2, \ldots, n$, la famille $(\mathrm{Supp}(u'_{i\lambda}))_{\lambda \in \mathrm{L}}$ est localement finie, donc $v_i = \sum_{\lambda \in \mathrm{L}} u'_{i\lambda}$ est indéfiniment différentiable dans $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. D'autre part, soit $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. Soit L' l'ensemble fini des $\lambda \in \mathrm{L}$ tels que $\mathbf{z} \in \mathrm{V}_\lambda$. On a

$$\sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i)v_i(\mathbf{z}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{L}'} \sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i)u'_{i\lambda}(\mathbf{z})$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathrm{L}'} f_\lambda(\mathbf{z}) \sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i)u_{i\lambda}(\mathbf{z}) = \left(\sum_{\lambda \in \mathrm{L}'} f_\lambda(\mathbf{z})\right) . 1 = 1.$$

Lemme 2. — Soient $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{A}^n$, *et h une application de* $\mathbf{C}^n$ *dans* $\mathbf{C}$, *indéfiniment différentiable, égale à* 1 *au voisinage de* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. *Il existe des applications indéfiniment différentiables* $u_1, \ldots, u_n$

de $\mathbf{C}^n$ *dans* A, *telles que l'on ait, pour tout* $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$

(1) $$(z_1 - a_1)u_1(\mathbf{z}) + \ldots + (z_n - a_n)u_n(\mathbf{z}) = 1 - h(\mathbf{z}).$$

Il existe des applications $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ dans A avec les propriétés du lemme 1. Posons:

$$u_i(\mathbf{z}) = (1 - h(\mathbf{z}))v_i(\mathbf{z}) \qquad \text{si } \mathbf{z} \in \mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$$

$$u_i(\mathbf{z}) = 0 \qquad \text{si } \mathbf{z} \in \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}.$$

Alors les u_i sont indéfiniment différentiables dans $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ et nulles dans un voisinage de $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, donc indéfiniment différentiables dans $\mathbf{C}^n$. L'égalité (1) est claire dans $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, et les deux membres de (1) sont nuls sur $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$.

Remarque. — Si $n = 1$, on a nécessairement

$$u_1(z) = (1 - h(z))(z - a_1)^{-1}$$

dans $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$.

Lemme 3. — *Soient* $\mathbf{a}, h, u_1, \ldots, u_n$ *avec les propriétés du lemme* 2. *Posons* $\omega = du_1dz_1 \ldots du_ndz_n$, *qui est une forme différentielle de degré* $2n$ *sur* $\mathbf{C}^n$, *à coefficients dans* A.

(i) *On a* $\mathrm{Supp}\,\omega \subset \mathrm{Supp}\,h$.

(ii) *Pour* $i = 1, 2, \ldots, n$, *il existe une forme différentielle* β_i *sur* $\mathbf{C}^n$, *de degré* $n - 1$, *à coefficients dans* A, *telle que*

$$(z_i - a_i)\omega = d(h\beta_i\, dz_1 \ldots dz_n).$$

(iii) *Il existe une forme différentielle* β *sur* $\mathbf{C}^n$, *de degré* $n - 1$, *à coefficients dans* A, *telle que* $(n + 1)h\omega - \omega = d(h\beta\, dz_1 \ldots dz_n)$.

En différentiant (1), on a

(2) $$\sum_{i=1}^{n} u_i\, dz_i + \sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i)\, du_i = -dh$$

d'où

(3) $$dh\, dz_i \prod_{j \neq i} (du_j\, dz_j) = -(z_i - a_i)\omega.$$

Alors $d(h(\prod_{j\neq i} \mathrm{d}u_j))dz_1 \ldots dz_n = dh(\prod_{j \neq i} du_j)dz_1 \ldots dz_n = \pm(z_i - a_i)\omega$, d'où (ii). On déduit de (ii);

$$(1 - h)\omega = \sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i)u_i\omega = \sum_{i=1}^{n} u_i\, d(h\beta_i\, dz_1 \dots dz_n)$$

d'où $\operatorname{Supp}(1 - h)\omega \subset \operatorname{Supp} h$, ce qui entraîne (i). Enfin, posons $\tau = \sum_{i=1}^{n} hu_i\, dz_i\left(\prod_{j\neq i} (du_j\, dz_j)\right)$. On a

$$d\tau = \sum_{i=1}^{n} u_i\, dh\, dz_i\left(\prod_{j\neq i} du_j\, dz_j\right) + nh\omega$$

ou, compte tenu de (3)

$$d\tau = -\sum_{i=1}^{n} u_i(z_i - a_i)\omega + nh\omega = -(1 - h)\omega + nh\omega$$
$$= (n + 1)h\omega - \omega$$

ce qui prouve (iii).

Nous nous proposons maintenant d'étudier comment change ω quand on modifie $h, u_1, \dots, u_n$ ($\mathbf{a}$ restant fixe). Commençons par une modification élémentaire:

Lemme 4. — *Soient* $\mathbf{a}, h, u_1, \dots, u_n$ *avec les propriétés du lemme* 2. *Soient* k *une application indéfiniment différentiable de* $\mathbf{C}^n$ *dans* A, i *et* j *deux entiers appartenant à* $[1, n]$. *Définissons* $u'_1, \dots, u'_n, \omega'$ *par*

$$u'_i = u_i + (z_j - a_j)k, \qquad u'_j = u_j - (z_i - a_i)k,$$
$$u'_l = u_l \qquad \text{pour } l \neq i, j,$$
$$\omega' = du'_1\, dz_1\, du'_2\, dz_2 \dots du'_n\, dz_n\,.$$

Alors on a $(z_1 - a_1)u'_1(\mathbf{z}) + \dots + (z_n - a_n)u'_n(\mathbf{z}) = 1 - h(\mathbf{z})$. *Il existe une forme différentielle* ψ *de degré* $n - 1$ *sur* $\mathbf{C}^n$, *à coefficients dans* A, *telle que* $\operatorname{Supp} \psi \subset \operatorname{Supp} h$ *et* $\omega - \omega' = d(\psi\, dz_1\, dz_2 \dots dz_n)$.

En effet

$$du'_i\, du'_j\, dz_1 \dots dz_n$$
$$= (du_i + k\, dz_j + (z_j - a_j)\, dk)(du_j - k\, dz_i - (z_i - a_i)\, dk)\, dz_1 \dots dz_n$$
$$= (du_i\, du_j - (z_i - a_i)\, du_i\, dk - (z_j - a_j)\, du_j\, dk)dz_1 \dots dz_n$$

donc

$$du'_i\, du'_j\Big(\prod_{l \neq i,j} du'_l\Big) dz_1 \dots dz_n - du_i\, du_j\Big(\prod_{l \neq i,j} du_l\Big) dz_1 \dots dz_n$$

$$= -\Big(\sum_{l=1}^{n} (z_l - a_l)\, du_l\, dk\Big)\Big(\prod_{l \neq i,j} du_l\Big)\, dz_1 \dots dz_n$$

et, compte tenu de (2), ceci est égal à

$$dh\, dk\Big(\prod_{l \neq i,j} du_l\Big)\, dz_1 \dots dz_n = d\Big(h\, dk\Big(\prod_{l \neq i,j} du_l\Big)\, dz_1 \dots dz_n\Big).$$

Lemme 5. — *Soient* $\mathbf{a}, h, u_1, \dots, u_n$ *avec les propriétés du lemme 2. Soit h' une application de* $\mathbf{C}^n$ *dans* $\mathbf{C}$, *indéfiniment différentiable, égale à* 1 *au voisinage de* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. *Soient* $u'_1, \dots, u'_n$ *des applications indéfiniment différentiables de* $\mathbf{C}^n$ *dans* A *telles que l'on ait*

$$(z_1 - a_1)u'_1(\mathbf{z}) + \dots + (z_n - a_n)u'_n(\mathbf{z}) = 1 - h'(\mathbf{z})$$

pour tout $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$. *Soit* $\omega' = du'_1\, dz_1 \dots du'_n\, dz_n$. *Alors il existe une forme différentielle* ψ *de degré* $n - 1$ *sur* $\mathbf{C}^n$, *à coefficients dans* A, *telle que* $\mathrm{Supp}\,\psi \subset (\mathrm{Supp}\,h) \cup (\mathrm{Supp}\,h')$ *et* $\omega - \omega' = d(\psi\, dz_1 \dots dz_n)$.

Pour tout $z \in \mathbf{C}^n$, posons

$$\alpha_{ij}(\mathbf{z}) = u'_i(\mathbf{z})u_j(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z})u'_j(\mathbf{z})$$

$$\beta_i(\mathbf{z}) = u'_i(\mathbf{z})h(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z})h'(\mathbf{z}),$$

de sorte que $\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$, et $\mathrm{Supp}\,\beta_i \subset (\mathrm{Supp}\,h) \cup (\mathrm{Supp}\,h')$. On a

$$u'_i(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z}) =$$

$$u'_i(\mathbf{z})\Big(\sum_{j=1}^{n} (z_j - a_j)u_j(\mathbf{z}) + h(\mathbf{z})\Big) - u_i(\mathbf{z})\Big(\sum_{j=1}^{n} (z_j - a_j)u'_j(\mathbf{z}) + h'(\mathbf{z})\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (z_j - a_j)\alpha_{ij}(\mathbf{z}) + \beta_i(\mathbf{z}).$$

Posons $u''_i(\mathbf{z}) = u'_i(\mathbf{z}) - \beta_i(\mathbf{z})$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{u}'' = (u''_1, \dots, u''_n)$. Alors

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{u} + \sum_{i<j} \mathbf{v}_{ij}$$

où $\mathbf{v}_{ij}$ est l'application de $\mathbf{C}^n$ dans A^n dont la i-ème composante est $(z_j - a_j)\alpha_{ij}$, dont la j-ème composante est

$$(z_i - a_i)\alpha_{ji} = -(z_i - a_i)\alpha_{ij},$$

et dont les autres composantes sont nulles. D'après le lemme 4, il existe une forme différentielle ψ_1 de degré $n-1$ sur $\mathbf{C}^n$, à coefficients dans A, telle que Supp $\psi_1 \subset$ Supp h et

$$\omega - du_1'' \, dz_1 \ldots du_n'' \, dz_n = d(\psi_1 \, dz_1 \ldots dz_n).$$

D'autre part,

$$du_1'' \, dz_1 \ldots du_n'' \, dz_n - \omega' =$$
$$d(u_1' - \beta_1) \, dz_1 \ldots d(u_n' - \beta_n) \, dz_n - du_1' \, dz_1 \ldots du_n' \, dz_n$$

est une somme de termes de la forme

$$\pm d\beta_{i_1} \ldots d\beta_{i_p} \, du_{j_1}' \ldots du_{j_{n-p}}' \, dz_1 \ldots dz_n \quad \text{où} \quad p \geqslant 1,$$

d'où le lemme.

3. Construction des applications $\Theta_{\mathbf{a}}$

Dans ce n°, on suppose A commutative.

Soient $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{A}^n$, U un voisinage ouvert de Sp **a**. Il existe une application h de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}$, indéfiniment différentiable, égale à 1 au voisinage de Sp **a**, telle que Supp h soit compact et contenu dans U. Puis il existe des applications $u_1, \ldots, u_n$ avec les propriétés du lemme 2. Soit

$$\omega = du_1 dz_1 \ldots du_n dz_n .$$

Alors Supp ω est compact et contenu dans U (lemme 3). Donc, pour toute $f \in \mathcal{O}(\mathrm{U}; \mathrm{A})$, on peut former l'élément $\int_{\mathrm{U}} f\omega$ de A. Cet élément ne dépend que de **a** et f, et non du choix de h, $u_1, \ldots, u_n$: ceci résulte du lemme 5 et de la formule de Stokes. On pose

(4) $$\Theta_{\mathbf{a}}^{\mathrm{U}}(f) = n!(2i\pi)^{-n} \int_{\mathrm{U}} f\omega.$$

Alors, l'application $f \mapsto \Theta_{\mathbf{a}}^{\mathrm{U}}(f)$ de $\mathcal{O}(\mathrm{U}; \mathrm{A})$ dans A est *linéaire*. Cette application est *continue*; en effet, avec les notations ci-dessus, il existe une constante $\mathrm{M} \geqslant 0$ telle que

$$\|\Theta_{\mathbf{a}}^{\mathrm{U}}(f)\| \leqslant \mathrm{M} \sup_{\mathbf{z} \in \mathrm{Supp}\, h} \|f(\mathbf{z})\|.$$

Par ailleurs, $\Theta_{\mathbf{a}}^{\mathrm{U}}(f)$ ne dépend que du *germe* de f au voisinage de Sp **a**. En effet, soient U, U' des voisinages ouverts de Sp **a**, et $f \in \mathcal{O}(\mathrm{U}; \mathrm{A})$, $f' \in \mathcal{O}(\mathrm{U}'; \mathrm{A})$; supposons que f et f' coïncident sur un voisinage ouvert U'' de Sp **a**; alors il existe une application h de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}$, indéfiniment différentiable, égale à 1 au voisinage de Sp **a**, et telle que Supp $h \subset \mathrm{U}''$; construisant ω à l'aide de h, il est clair que $\int_{\mathrm{U}} f\omega = \int_{\mathrm{U}'} f'\omega$, d'où notre assertion.

Si $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}\,;\mathrm{A})$, nous poserons $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = \Theta_{\mathbf{a}}^{\mathrm{U}}(f)$, où f est un représentant quelconque du germe $\tilde{f}$. Ce qui précède montre que $\Theta_{\mathbf{a}}$ est une application *linéaire et continue* de $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}\,;\mathrm{A})$ dans A.

4. Premières propriétés des applications $\Theta_{\mathbf{a}}$

On suppose toujours A commutative.

Lemme 6. — *Soient* $\mathbf{a} \in \mathrm{A}^n$, P *une fonction polynôme sur* $\mathbf{C}^n$ *à coefficients dans* A, $\tilde{\mathrm{P}}$ *le germe de* P *au voisinage de* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, *et*

$$\tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}\,;\mathrm{A}).$$

Alors $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{\mathrm{P}}\tilde{f}) = \mathrm{P}(\mathbf{a})\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f})$.

Notant toujours $z_1, \ldots, z_n$ les fonctions coordonnées sur $\mathbf{C}^n$, il suffit de prouver le lemme quand $\mathrm{P} = z_1^{e_1} \ldots z_n^{e_n}$, où $e_1, \ldots, e_n \in \mathbf{N}$. Procédant par récurrence sur $e_1 + \ldots + e_n$, on se ramène au cas où $\mathrm{P} = z_i$. Soit f un représentant de $\tilde{f}$; c'est une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert U de $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. Soit h une application de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}$, indéfiniment différentiable, égale à 1 au voisinage de $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, à support contenu dans U. Introduisons les notations $u_1, \ldots, u_n, \omega$ des lemmes 2 et 3. On a

$$\Theta_{\mathbf{a}}^{\mathrm{U}}(z_j f) = n!(2i\pi)^{-n} \int_{\mathrm{U}} z_j f\omega$$
$$a_j\Theta_{\mathbf{a}}^{\mathrm{U}}(f) = n!(2i\pi)^{-n} \int_{\mathrm{U}} a_j f\omega.$$

Introduisons la forme différentielle β_i du lemme 3 (ii); on a

$$\begin{aligned}(z_i - a_i)f\omega &= fd(h\beta_i dz_1 \ldots dz_n)\\ &= d(fh\beta_i dz_1 \ldots dz_n)\end{aligned}$$

(car $df\,dz_1 \ldots dz_n = 0$); donc $\int_{\mathrm{U}} (z_i - a_i)f\omega = 0$, ce qui achève la démonstration.

Rappelons maintenant les faits suivants (cf. *Var.*, R):

1) Soit V une partie ouverte de $\mathbf{C}$ dont la frontière F soit une sous-variété indéfiniment différentiable de dimension 1 de $\mathbf{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes: (i) la frontière de $\bar{\mathrm{V}}$ est égale à F; (ii) pour tout $z \in \mathrm{F}$, il existe un voisinage ouvert U de z dans $\mathbf{C}$, une application bijective φ de U sur le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$, telle que φ et φ^{-1} soient indéfiniment différentiables, et telle que

$$z \in \mathrm{U} \cap \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathscr{I}\varphi(z) > 0$$
$$z \in \mathrm{U} \cap \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathscr{I}\varphi(z) = 0$$
$$z \in \mathrm{U} \cap (\mathbf{C} - \bar{\mathrm{V}}) \Leftrightarrow \mathscr{I}\varphi(z) < 0.$$

2) Soit K une partie compacte de $\mathbf{C}$. Il existe un système fondamental de voisinages ouverts relativement compacts V de K tels que la frontière de V soit une sous-variété indéfiniment différentiable de dimension 1 de $\mathbf{C}$ égale à la frontière de $\bar{V}$.

3) Soit W une partie ouverte relativement compacte de $\mathbf{C}$ telle que la frontière F de W soit une sous-variété indéfiniment différentiable de dimension 1 de $\mathbf{C}$ égale à la frontière de $\overline{W}$. Il existe une orientation de F et une seule telle que, pour toute forme différentielle τ de degré 1 et indéfiniment différentiable dans un voisinage ouvert de W, on ait $\int_W d\tau = \int_F \tau$. La variété compacte F, munie de cette orientation, s'appelle le bord orienté de W et se note $\dot{W}$.

Revenons aux applications Θ_a, et d'abord lorsque $n = 1$:

Lemme 7. — Soient x *un élément de* A, U *un voisinage ouvert de* Sp x, *et* $f \in \mathcal{O}(U\,;A)$. *Soit* V *un voisinage ouvert relativement compact de* Sp x, *tel que* $\bar{V} \subset U$, *et tel que la frontière de* V *soit une sous-variété indéfiniment différentiable de dimension* 1 *de* $\mathbf{C}$ *égale à la frontière de* $\bar{V}$. *On a*

$$\Theta_x^U(f) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\dot{V}} f(z)(z-x)^{-1}\,dz.$$

Si $U = \mathbf{C}$ *et* $f(z) = 1$, *on a* $\Theta_x^U(f) = 1$.

En effet, il existe une application h de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, indéfiniment différentiable, égale à 1 au voisinage de Sp x, à support compact contenu dans V. Puis il existe une application u de $\mathbf{C}$ dans A, indéfiniment différentiable, telle que $(z-x)u(z) = 1 - h(z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. On a $f\,du\,dz = d(fu\,dz)$, et $u(z) = (z-x)^{-1}$ sur la frontière de V. Donc

$$2i\pi\Theta_x^U(f) = \int_V f\,du\,dz = \int_V d(fu\,dz) = \int_{\dot{V}} f(z)(z-x)^{-1}\,dz.$$

Supposons $U = \mathbf{C}$ et $f(z) = 1$. Prenons pour V un disque ouvert de centre 0 et de rayon $R > \|x\|$ (de sorte que Sp $x \subset V$). On a, dans $\mathbf{C} - V$,

$$\begin{aligned}(z-x)^{-1} &= z^{-1}(1 - z^{-1}x)^{-1}\\ &= z^{-1}\,.\,1 + z^{-2}\,.\,x + z^{-3}\,.\,x^2 + \ldots .\end{aligned}$$

Rappelons (*Var.*, R.) que $\int_{\dot{V}} z^n\,dz = 0$ pour $n \neq 1$ et $\int_{\dot{V}} z^{-1}\,dz = 2i\pi$. Donc $\int_{\dot{V}} (z-x)^{-1}\,dz = 2i\pi\,.\,1$.

Lemme 8. — (i) *Avec la notation* $\pi_{m,n}$ *du n°* 1, *on a*

$$\Theta_{\mathbf{a}} \circ \pi^*_{m,n} = \Theta_{\pi_{m,n}(\mathbf{a})}.$$

(ii) *Si* $\tilde{1}$ *est le germe de la fonction* 1 *au voisinage de* Sp $\mathbf{a}$, *on a* $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{1}) = 1$.

Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Il suffit de prouver (i) pour $m = n - 1$. Soit $\mathbf{a}' = (a_1, \dots, a_{n-1})$. Soient U un voisinage ouvert de Sp $\mathbf{a}'$ dans $\mathbf{C}^{n-1}$, et $f' \in \mathcal{O}(\mathrm{U}\,;\mathrm{A})$. Soit f l'application

$$f' \otimes 1 : (\mathbf{z}', z_n) \mapsto f'(\mathbf{z}')$$

de $\mathrm{U} \times \mathbf{C}$ dans A ; on a $f \in \mathcal{O}(\mathrm{U} \times \mathbf{C}\,;\mathrm{A})$. Il existe une application h' (resp. h'') de $\mathbf{C}^{n-1}$ dans $\mathbf{C}$ (resp. de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$), indéfiniment différentiable, égale à 1 au voisinage de Sp $\mathbf{a}'$ (resp. Sp a_n), à support compact contenu dans U (resp. dans $\mathbf{C}$). Puis il existe des applications $u_1, \dots, u_{n-1}$ de $\mathbf{C}^{n-1}$ dans A, indéfiniment différentiables, telles que

$$(z_1 - a_1)u_1(\mathbf{z}') + \dots + (z_{n-1} - a_{n-1})u_{n-1}(\mathbf{z}') = 1 - h'(\mathbf{z}')$$

pour tout $\mathbf{z}' \in \mathbf{C}^{n-1}$; et il existe une application u_n de $\mathbf{C}$ dans A, indéfiniment différentiable, telle que $(z_n - a_n)u_n(z_n) = 1 - h''(z_n)$ pour tout $z_n \in \mathbf{C}$. Alors la fonction $h = h' \otimes h''$ sur $\mathbf{C}^n$ est indéfiniment différentiable, égale à 1 au voisinage de Sp $\mathbf{a}$, à support compact contenu dans $\mathrm{U} \times \mathbf{C}$.

On a, pour tout $\mathbf{z} = (\mathbf{z}', z_n) \in \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned}(z_1 - a_1)(u_1 \otimes 1)(\mathbf{z}) + \dots + (z_{n-1} - a_{n-1})(u_{n-1} \otimes 1)(\mathbf{z})&\\ + (z_n - a_n)(h' \otimes u_n)(\mathbf{z})&\\ = 1 - h'(\mathbf{z}') + h'(\mathbf{z}')(1 - h''(z_n)) = 1 - h(\mathbf{z}).&\end{aligned}$$

D'autre part, $du_1\, dz_1 \dots du_{n-1}\, dz_{n-1}\, dh'$ est une forme différentielle de degré $2(n-1)+1$ sur $\mathbf{C}^{n-1}$, donc est nulle ; donc

$$\begin{aligned}&d(u_1 \otimes 1)\, dz_1\, d(u_2 \otimes 1)\, dz_2 \dots d(u_{n-1} \otimes 1)\, dz_{n-1}\, d(h' \otimes u_n)\, dz_n\\ &\quad = (h' \otimes 1)\, d(u_1 \otimes 1)\, dz_1 \dots d(u_{n-1} \otimes 1)\, dz_{n-1}\, d(1 \otimes u_n)\, dz_n.\end{aligned}$$

La définition de $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f})$ donne alors

$$\begin{aligned}&\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) =\\ &n!(2i\pi)^{-n}\int_{\mathrm{U}\times\mathbf{C}} (f' \otimes 1)(h' \otimes 1)\, d(u_1 \otimes 1)\, dz_1 \dots d(u_{n-1} \otimes 1)\, dz_{n-1}\, d(1 \otimes u_n)\, dz_n\\ &\quad = n!(2i\pi)^{-n}\left(\int_{\mathrm{U}} f'h'\, du_1\, dz_1 \dots du_{n-1}\, dz_{n-1}\right)\left(\int_{\mathbf{C}} du_n\, dz_n\right).\end{aligned}$$

D'après le lemme 7, on a $\int_{\mathbf{C}} du_n\, dz_n = 2i\pi.1$. D'après le lemme 3 (iii),

$$n \int_{\mathrm{U}} f'h'\, du_1\, dz_1 \ldots du_{n-1}\, dz_{n-1} = \int_{\mathrm{U}} f'\, du_1\, dz_1 \ldots du_{n-1}\, dz_{n-1}$$
$$= \frac{(2i\pi)^{n-1}}{(n-1)!}\Theta_{\mathbf{a}'}(\tilde{f}')$$

donc

$$\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = n!(2i\pi)^{-n}\frac{(2i\pi)^{n-1}}{n!}\Theta_{\mathbf{a}'}(\tilde{f}')2i\pi = \Theta_{\mathbf{a}'}(\tilde{f}').$$

On a donc prouvé (i), et (ii) résulte de (i) et du lemme 7.

Lemme 9. — *Soit* $\mathbf{a} \in \mathrm{A}^n$. *Si* f *est un polynôme sur* $\mathbf{C}^n$ *à coefficients dans* A, *on a* $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = f(\mathbf{a})$.

Ceci résulte des lemmes 6 et 8 (ii).

Le lemme 9 (et aussi le cor. de la prop. 1) justifient la notation suivante. Si $\mathbf{a} \in \mathrm{A}^n$, si U est un voisinage ouvert de $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, et si $f \in \mathcal{O}(\mathrm{U}\,;\mathrm{A})$, on pose

$$f(\mathbf{a}) = \Theta_{\mathbf{a}}^{\mathrm{U}}(f). \tag{5}$$

(Cette notation est cohérente avec la notation introduite en *Alg.*, chap. IV, si f est un polynôme). Si $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}\,;\mathrm{A})$, on pose de même

$$\tilde{f}(\mathbf{a}) = \Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}). \tag{6}$$

Proposition 1. — *Soient* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ *des nombres* > 0, Π *le polydisque dans* $\mathbf{C}^n$ *défini par* $|z_1| < \rho_1, \ldots, |z_n| < \rho_n$. *Soit* $u = \Sigma\, c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\mathrm{X}_1^{\alpha_1}\ldots\mathrm{X}_n^{\alpha_n} \in \mathrm{A}[[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]]$ *une série entière à coefficients dans* A *convergeant dans* Π ; *soit* f *la fonction holomorphe somme de cette série dans* Π. *Soit* $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathrm{A}^n$ *tel que* $\rho(a_1) < \rho_1, \ldots, \rho(a_n) < \rho_n$. *Alors la famille* $(c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}a_1^{\alpha_1}\ldots a_n^{\alpha_n})$ *d'éléments de* A *est absolument sommable, on a* $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}) \subset \Pi$, *et*

$$f(\mathbf{a}) = \sum c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}a_1^{\alpha_1}\ldots a_n^{\alpha_n}.$$

Pour tout caractère χ de A, on a $|\chi(a_i)| \leqslant \rho(a_i) < \rho_i$, donc $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}) \subset \Pi$. Soient $z_1,\ldots,z_n$ les restrictions à Π des fonctions coordonnées sur $\mathbf{C}^n$. Alors la famille $(c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}z_1^{\alpha_1}\ldots z_n^{\alpha_n})$ est sommable dans $\mathcal{O}(\Pi\,;\mathrm{A})$ et de somme f. Compte tenu du lemme 9 et de la continuité de l'application $f \mapsto f(\mathbf{a})$, la famille $(c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}a_1^{\alpha_1}\ldots a_n^{\alpha_n})$ est sommable dans A et de somme $f(\mathbf{a})$. Enfin, soit λ_i tel que $\rho(a_i) < \lambda_i < \rho_i$. Il existe une constante $k_i \geqslant 0$ telle que $\|a_i^n\| \leqslant k_i \lambda_i^n$ pour tout n, et $\sum \|c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\| \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_n^{\alpha_n} < +\infty$, donc la famille $(c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n})$ est absolument sommable.

COROLLAIRE. — *Supposons* $\mathrm{A} = \mathbf{C}$. *Soit* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n$, *de sorte que* $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{a}\}$. *Soit* $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\{\mathbf{a}\})$. *Alors* $\tilde{f}(\mathbf{a})$ *au sens de l'égalité* (6) *est la valeur de* $\tilde{f}$ *en* $\mathbf{a}$.

PROPOSITION 2. — *Soient* B *une algèbre de Banach unifère commutative, et* λ *un morphisme unifère continu de* A *dans* B. *Soient* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{A}^n$, $b_i = \lambda(a_i)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ *(de sorte que* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{b} \subset \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$). *Soient* U *un voisinage ouvert de* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, *et* $f \in \mathcal{O}(\mathrm{U}; \mathrm{A})$; *on a* $\lambda \circ f \in \mathcal{O}(\mathrm{U}; \mathrm{B})$. *Alors* $\lambda(f(\mathbf{a})) = (\lambda \circ f)(\mathbf{b})$.

Soient $h, u_1, \ldots, u_n$ avec les propriétés des lemmes 2 et 3 relativement à $\mathbf{a}$. On a, pour tout $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$,

$$\sum_{j=1}^{n} (z_j - b_j)\lambda(u_j(\mathbf{z})) = \lambda\Big(\sum_{j=1}^{n} (z_j - a_j)u_j(\mathbf{z})\Big) = 1 - h(\mathbf{z}).$$

Donc:

$$\begin{aligned}(\lambda \circ f)(\mathbf{b}) &= n!(2i\pi)^{-n} \int_{\mathrm{U}} \lambda(f(\mathbf{z}))\, d(\lambda \circ u_1)\, dz_1 \ldots d(\lambda \circ u_n)\, dz_n \\ &= n!(2i\pi)^{-n} \lambda\Big(\int_{\mathrm{U}} f(\mathbf{z})\, du_1\, dz_1 \ldots du_n\, dz_n\Big) \\ &= \lambda(f(\mathbf{a})).\end{aligned}$$

COROLLAIRE 1. — *Soient* $\chi \in \mathsf{X}(\mathrm{A})$ *et* $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a})$. *On a*

$$\chi(\tilde{f}(\mathbf{a})) = \tilde{f}(\chi(a_1), \ldots, \chi(a_n)).$$

Ceci résulte de la prop. 2 et du cor. de la prop. 1.

Remarque. — Soit $\mathbf{a} \in \mathrm{A}^n$. Si A est sans radical, l'application $\tilde{f} \mapsto \tilde{f}(\mathbf{a})$ de $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a})$ dans A est l'*unique* application φ de $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a})$ dans A telle que $\chi(\varphi(f)) = \tilde{f}(\chi(a_1), \ldots, \chi(a_n))$ pour tout $\chi \in \mathsf{X}(\mathrm{A})$.

COROLLAIRE 2. — *Si* $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a})$, *on a* $\mathrm{Sp}(\tilde{f}(\mathbf{a})) = \tilde{f}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a})$.
Ceci résulte du cor. 1 et de la définition du spectre simultané.

Exemple. — Soit $a(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$ la somme d'une série de Fourier absolument convergente (§ 2, n° 2). Soit S l'ensemble des valeurs de a. Soit f une fonction complexe holomorphe au voisinage de S. Alors $f \circ a$ est somme d'une série de Fourier absolument convergente: en effet, S est le spectre de a dans l'algèbre A des séries de Fourier absolument convergentes (§ 3, n° 3, *Exemple* 4), et il suffit d'appliquer le cor. 1 ci-dessus pour $n = 1$. Ce résultat généralise le § 3, cor. de la prop. 3.

5. *Deux résultats de densité*

PROPOSITION 3. — *Soient* K *une partie compacte polynomialement convexe* (App.) *de* $\mathbf{C}^n$, *et* P *l'ensemble des germes au voisinage de* K *de fonctions polynômes sur* $\mathbf{C}^n$ *à coefficients dans* A. *Alors* P *est dense dans* $\mathscr{O}(\mathrm{K}\,;\mathrm{A})$.

Soient U un voisinage ouvert de K, et $f \in \mathscr{O}(\mathrm{U}\,;\mathrm{A})$. Il existe (App., lemme 2) un voisinage compact V de K qui est polynomialement convexe et contenu dans U. Soit P′ (resp. P'_0) l'ensemble des restrictions à V des fonctions polynômes sur $\mathbf{C}^n$ à coefficients dans A (resp. dans $\mathbf{C}$). Soit B (resp. B_0) l'algèbre de Banach adhérence de P′ (resp. P'_0) dans $\mathscr{C}(\mathrm{V}\,;\mathrm{A})$. On va montrer que $f|\mathrm{V} \in \mathrm{B}$, ce qui achèvera la démonstration. Soient $z_1, \ldots, z_n$ les restrictions à V des fonctions coordonnées sur $\mathbf{C}^n$; ce sont des éléments de B_0, et $\mathrm{Sp}_{\mathrm{B}_0}(z_1, \ldots, z_n) = \mathrm{V}$ d'après le § 3, cor. 3 de la prop. 9. On peut identifier A à une sous-algèbre normée de P′ donc de B, donc f définit un élément f_{B} de $\mathscr{O}(\mathrm{U}\,;\mathrm{B})$; comme $\mathrm{Sp}_{\mathrm{B}}(z_1, \ldots, z_n) \subset \mathrm{Sp}_{\mathrm{B}_0}(z_1, \ldots, z_n) \subset \mathrm{U}$, on peut former l'élément $b = f_{\mathrm{B}}(z_1, \ldots, z_n)$ de B. Soient $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathrm{V}$, et λ le morphisme $g \mapsto g(\zeta)$ de B dans A. Alors $\lambda \circ f_{\mathrm{B}} = f$. D'après la prop. 2, on a $b(\zeta) = f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Ainsi, $f|\mathrm{V} = b \in \mathrm{B}$.

Pour $n = 1$, on a aussi le résultat suivant:

PROPOSITION 4.— *Soient* K *une partie compacte de* $\mathbf{C}$, *et* Q *l'ensemble des germes de fonctions rationnelles holomorphes au voisinage de* K. *Alors* Q *est dense dans* $\mathscr{O}(\mathrm{K})$.

Soit f une fonction complexe holomorphe dans un voisinage ouvert U de K. Il existe un voisinage compact V de K contenu dans U. Soit Q′ l'ensemble des restrictions à V des fonctions rationnelles sur $\mathbf{C}$ qui sont continues sur V, et soit C l'adhérence de Q′ dans $\mathscr{C}(\mathrm{V})$. Soit z l'application identique de V. Alors C est la sous-algèbre fermée pleine de $\mathscr{C}(\mathrm{V})$ engendrée par z. On a

$\mathrm{Sp}_C\, z = \mathrm{Sp}_{\mathscr{C}(V)} z = V$. On peut donc former l'élément $f(z)$ de C. D'après le cor. 1 de la prop. 2, cet élément de C n'est autre que $f|V$. Donc $f|V$ est limite uniforme d'éléments de Q', ce qui achève la démonstration.

6. *Démonstration du théorème 1*

On suppose toujours A commutative.

Lemme 10. — *Soient* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, *et* $U \subset \mathbf{C}^n$ *un voisinage ouvert de* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. *Il existe des éléments* $a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}$ *de* A *tels que l'enveloppe polynomialement convexe de* $\mathrm{Sp}(a_1, \ldots, a_{n+p})$ (*qui est une partie de* $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p$) *ait pour projection dans* $\mathbf{C}^n$ *une partie de* U.

Soit $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'éléments de A prolongeant la famille $(a_1, \ldots, a_n)$ et engendrant topologiquement A. Soit π la projection canonique de $\mathbf{C}^\Lambda$ sur $\mathbf{C}^n$, et soit $U' = \pi^{-1}(U)$. Alors U' est un voisinage de $\mathrm{Sp}((a_\lambda))$, et $\mathrm{Sp}((a_\lambda))$ est polynomialement convexe (§ 3, prop. 9). D'après le lemme 1 de l'Appendice, il existe une partie finie Λ_0 de Λ contenant $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $\mathrm{pr}_{\Lambda_0}(U')$ contienne l'enveloppe polynomialement convexe S de $\mathrm{pr}_{\Lambda_0}(\mathrm{Sp}((a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})) = \mathrm{Sp}((a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_0})$. Donc S a pour projection sur $\mathbf{C}^n$ une partie de U.

L'assertion d'existence du th. 1 sera établie quand nous aurons prouvé le résultat suivant:

Proposition 5. — *Soit* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. *L'application* $\tilde{f} \mapsto \tilde{f}(\mathbf{a})$ *de* $\mathscr{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}\,; A)$ *dans* A *est un morphisme unifère continu qui transforme les germes des fonctions coordonnées sur* $\mathbf{C}^n$ *au voisinage de* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ *en* $a_1, \ldots, a_n$.

Compte tenu du lemme 9, il ne reste plus à prouver que ceci: soient U un voisinage ouvert de $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, et $f \in \mathscr{O}(U\,; A)$, $g \in \mathscr{O}(U\,; A)$; alors

$$(fg)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})g(\mathbf{a}). \tag{7}$$

Il existe des éléments $a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}$ avec les propriétés du lemme 10. Soit π la projection canonique de $U \times \mathbf{C}^p$ sur U. Alors $f \circ \pi$, $g \circ \pi$, $(fg) \circ \pi$ sont holomorphes dans $U \times \mathbf{C}^p$, qui contient l'enveloppe polynomialement convexe K de $\mathrm{Sp}(a_1, \ldots, a_{n+p})$.

D'après la prop. 3, il existe des suites $(P_1, P_2, \dots)$, $(Q_1, Q_2, \dots)$ de polynômes sur $\mathbf{C}^{n+p}$, à coefficients dans A, telles que les germes de $P_1, P_2, \dots$ (resp. $Q_1, Q_2, \dots$) au voisinage de K tendent vers le germe de $f \circ \pi$ (resp. $g \circ \pi$) au voisinage de K. Alors les germes de P_1Q_1, $P_2Q_2, \dots$ au voisinage de K tendent vers le germe de $(fg) \circ \pi$ au voisinage de K. D'après le lemme 9, on a

$$(P_iQ_i)(a_1, \dots, a_{n+p}) = P_i(a_1, \dots, a_{n+p})Q_i(a_1, \dots, a_{n+p})$$

donc à la limite

$$(fg \circ \pi)(a_1, \dots, a_{n+p}) = (f \circ \pi)(a_1, \dots, a_{n+p})(g \circ \pi)(a_1, \dots, a_{n+p}).$$

D'après le lemme 8 (i), cette égalité se réduit à l'égalité (7).

Fin de la démonstration du théorème 1.

Soient $(\Theta_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in A(\infty)}$, $(\Theta'_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in A(\infty)}$ deux familles de morphismes avec les propriétés du th. 1. Il s'agit de prouver qu'elles sont égales. Soient $a_1, \dots, a_n \in A$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, et U un voisinage ouvert de Sp $\mathbf{a}$. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$. Il existe des éléments $a_{n+1}, \dots, a_{n+p}$ de A tels que $\pi(L) \subset U$, où π désigne la projection canonique de $\mathbf{C}^{n+p}$ sur $\mathbf{C}^n$, et L l'enveloppe polynomialement convexe de $\mathrm{Sp}(a_1, \dots, a_{n+p})$. Posons $g = f \circ \pi$; soit $\tilde{f}$ (resp. $\tilde{g}$) le germe de f (resp. g) au voisinage de Sp $\mathbf{a}$ (resp. $\mathrm{Sp}(a_1, \dots, a_{n+p})$); on a par hypothèse

$$\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = \Theta_{(a_1,\dots,a_{n+p})}(\tilde{g}) \quad , \quad \Theta'_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = \Theta'_{(a_1,\dots,a_{n+p})}(\tilde{g}).$$

Or $\Theta_{(a_1,\dots,a_{n+p})}$ et $\Theta'_{(a_1,\dots,a_{n+p})}$ coïncident sur l'ensemble des germes de polynômes en $n + p$ variables au voisinage de $\mathrm{Sp}(a_1, \dots, a_{n+p})$ donc coïncident en $\tilde{g}$ puisque le germe de g au voisinage de L est limite de germes de polynômes (prop. 3).

Remarquons que la prop. 3 entraîne aussi immédiatement le résultat d'unicité suivant:

PROPOSITION 6. — *Soit* $\mathbf{a} \in A^n$. *On suppose* Sp $\mathbf{a}$ *polynomialement convexe. Soient* $z_1, \dots, z_n$ *les germes au voisinage de* Sp $\mathbf{a}$ *des fonctions coordonnées sur* $\mathbf{C}^n$. *Alors l'application* $\tilde{f} \mapsto \tilde{f}(\mathbf{a})$ *est*

7. *Substitution dans le calcul fonctionnel*

THÉORÈME 2. — *Soient* A *une algèbre de Banach unifère commutative,* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{A}^n$, *et* $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_p$ *des éléments de* $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a})$; *soit* $\tilde{\mathbf{f}} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_p)$. *Posons* $b_i = \tilde{f}_i(a_1, \ldots, a_n)$, *et* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_p)$. *L'image de* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ *par l'application*

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\tilde{f}_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, \tilde{f}_p(z_1, \ldots, z_n))$$

est $\mathrm{Sp}\,\mathbf{b}$.

Soit alors $\tilde{g} \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{b}\,; \mathrm{A})$. *Le germe composé* $\tilde{h} = \tilde{g} \circ \tilde{\mathbf{f}}$ *est un élément de* $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}\,; \mathrm{A})$. *On a alors*

$$\tilde{g}(\mathbf{b}) = \tilde{h}(\mathbf{a}).$$

1) Soit K l'enveloppe polynomialement convexe de $\mathrm{Sp}\,\mathbf{b}$. D'après la prop. 5, l'application $\tilde{g} \mapsto (\tilde{g} \circ \tilde{\mathbf{f}})(\mathbf{a})$ est un morphisme unifère continu de $\mathcal{O}(\mathrm{K}\,; \mathrm{A})$ dans A qui transforme la $q^{\text{ème}}$ fonction coordonnée en $\tilde{f}_q(a_1, \ldots, a_n) = b_q$. On a donc $\tilde{g}(\mathbf{b}) = (\tilde{g} \circ \tilde{\mathbf{f}})(\mathbf{a})$ lorsque g est un polynôme, donc pour toute $\tilde{g} \in \mathcal{O}(\mathrm{K}\,;\mathrm{A})$ d'après la prop. 3.

2) Soit maintenant g holomorphe dans un voisinage ouvert Ω de $\mathrm{Sp}\,\mathbf{b}$. Il existe $b_{p+1}, \ldots, b_{p+q} \in \mathrm{A}$ avec la propriété suivante: si L désigne l'enveloppe polynomialement convexe de

$$\mathrm{Sp}(b_1, \ldots, b_{p+q}) \subset \mathbf{C}^{p+q},$$

et si π désigne la projection canonique de $\mathbf{C}^{p+q}$ sur $\mathbf{C}^p$, on a $\pi(\mathrm{L}) \subset \Omega$ (lemme 10). Soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions holomorphes dans un voisinage ouvert U de $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, telles que $(f_1, \ldots, f_p)(\mathrm{U}) \subset \Omega$. Alors $g \circ \pi$ est holomorphe dans $\pi^{-1}(\Omega)$, qui est un voisinage de L. Soit π' la projection canonique de $\mathbf{C}^{n+q}$ sur $\mathbf{C}^n$. En désignant par $z_{n+1}, \ldots, z_{n+q}$ les q dernières fonctions coordonnées sur $\mathbf{C}^{n+q}$, on a

$$\begin{aligned}(g \circ \pi) \circ (f_1 \circ \pi', \ldots, f_p \circ \pi', z_{n+1}, \ldots, z_{n+q}) &= g \circ (f_1 \circ \pi', \ldots, f_p \circ \pi') \\ &= h \circ \pi'.\end{aligned}$$

Cette formule, et la première partie de la démonstration, entraînent en posant

$$c = (a_1, \ldots, a_n, b_{p+1}, \ldots, b_{p+q})$$

$$(g \circ \pi)((f_1 \circ \pi')(c), \ldots, z_{n+1}(c), \ldots) = (h \circ \pi')(c)$$

c'est-à-dire, compte tenu du lemme 8,

$$g(f_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_p(a_1, \ldots, a_n)) = h(a_1, \ldots, a_n).$$

8. *Cas d'une seule variable*

THÉORÈME 3. — *Soient* A *une algèbre de Banach unifère (non nécessairement commutative),* x *un élément de* A, z *le germe de la fonction identique au voisinage de* $\mathrm{Sp}\, x$. *Il existe un morphisme unifère continu* φ *et un seul de* $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A\, x)$ *dans* A *tel que* $\varphi(z) = x$.

Soit B la sous-algèbre fermée pleine de A engendrée par x. Elle est commutative, et $\mathrm{Sp}_B\, x = \mathrm{Sp}_A\, x$ (§ 1, n° 4). Si $f \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A\, x)$, on peut donc former l'élément $f(x)$ de B, et l'application $f \mapsto f(x)$ est un morphisme unifère continu φ de $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A\, x)$ dans B (donc dans A) tel que $\varphi(z) = x$.

Soient φ, φ' deux morphismes unifères continus de $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A\, x)$ dans A tels que $\varphi(z) = \varphi'(z) = x$. Alors φ et φ' coïncident sur l'ensemble des germes de polynômes au voisinage de $\mathrm{Sp}_A\, x$, donc sur l'ensemble des germes de fractions rationnelles holomorphes au voisinage de $\mathrm{Sp}_A\, x$. Or ces germes sont partout denses dans $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A\, x)$ (prop. 4). Donc $\varphi = \varphi'$.

DÉFINITION 1. — *Si* $f \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A\, x)$, *l'élément* $\varphi(f)$ *du th. 3 se note* $f(x)$.

Remarque. — Si A est commutative, cette définition coïncide, d'après le th. 1, avec celle du n° 4. Dans le cas général, la démonstration du th. 3 prouve que $f(x)$ appartient à la sous-algèbre fermée pleine B de A engendrée par x, laquelle est commutative; et l'élément $f(x)$ de A (au sens de la déf. 1) coïncide avec l'élément $f(x)$ de B (au sens du n° 4).

PROPOSITION 7. — *Soient* A *et* A' *deux algèbres de Banach unifères,* λ *un morphisme unifère continu de* A *dans* A'. *Soient* $x \in A$ *et* $f \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A\, x)$. *Alors* $\lambda(f(x)) = f(\lambda(x))$.

Ceci résulte de la prop. 2 et de la remarque ci-dessus.

PROPOSITION 8. — *Soient* A *une algèbre de Banach unifère,* $x \in A$, $f \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}\, x)$, *et* $y = f(x)$. *L'image de* $\mathrm{Sp}\, x$ *par* f *est* $\mathrm{Sp}\, y$. *Soit* $g \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}\, y)$, *de sorte que* $h = g \circ f \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}\, x)$. *On a* $g(y) = h(x)$.

Ceci résulte du th. 2 et de la remarque ci-dessus.

PROPOSITION 9. — *Soient* A *une algèbre de Banach unifère,* $x \in A$, U *un voisinage ouvert de* $\mathrm{Sp}\, x$, *et* $f \in \mathcal{O}(\mathrm{U})$. *Soit* V *un voisinage ouvert relativement compact de* $\mathrm{Sp}\, x$, *tel que* $\bar{\mathrm{V}} \subset \mathrm{U}$, *et tel que la* *frontière de* V *soit une sous-variété de dimension* 1 *de* $\mathbf{R}^2$ *égale à la frontière de* $\bar{\mathrm{V}}$. *Soit* $\dot{\mathrm{V}}$ *le bord orienté de* V (n° 4). *On a, pour* $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\text{(8)} \qquad \frac{d^n f}{dz^n}(x) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\dot{\mathrm{V}}} f(z)(z-x)^{-n-1}\, dz.$$

Pour $n = 0$, ceci résulte du lemme 7 et de la remarque ci-dessus. Admettons la proposition pour l'entier n. Pour $z \notin \operatorname{Sp} x$, on a, d'après le § 2, th. 1 (iii):

$$\text{(9)} \qquad \frac{d}{dz}((z-x)^{-n-1}f(z)) = (z-x)^{-n-1}\frac{df}{dz} - (n+1)(z-x)^{-n-2}f(z).$$

Appliquant la formule de Stokes dans la variété compacte $\dot{\mathrm{V}}$, on a

$$\text{(10)} \qquad \int_{\dot{\mathrm{V}}} \frac{d}{dz}((z-x)^{-n-1}f(z))\, dz = \int_{\dot{\mathrm{V}}} d((z-x)^{-n-1}f(z)) = 0.$$

Les égalités (9) et (10) entraînent:

$$\int_{\dot{\mathrm{V}}} f'(z)(z-x)^{-n-1}\, dz = (n+1)\int_{\dot{\mathrm{V}}} f(z)(z-x)^{-n-2}\, dz$$

soit, compte tenu de l'hypothèse de récurrence (appliquée à df/dz):

$$\frac{2i\pi}{n!}\frac{d^{n+1}f}{dz^{n+1}}(x) = (n+1)\int_{\dot{\mathrm{V}}} f(z)(z-x)^{-n-2}\, dz$$

d'où la proposition pour l'entier $n + 1$.

PROPOSITION 10. — *Soient* A *une algèbre de Banach unifère,* U *une partie ouverte de* $\mathbf{C}$.

(i) *L'ensemble* Ω *des* $x \in \mathrm{A}$ *tels que* $\operatorname{Sp} x \subset \mathrm{U}$ *est ouvert dans* A.

(ii) *Soit* $f \in \mathcal{O}(\mathrm{U})$. *L'application* $x \mapsto f(x)$ *de* Ω *dans* A *est analytique* (cf. *Var.*, R), *et en particulier continue.*

Soit $x \in \Omega$. Il existe un voisinage ouvert V de $\operatorname{Sp} x$ dans $\mathbf{C}$ tel que $\bar{\mathrm{V}} \subset \mathrm{U}$ et tel que la frontière de V soit une sous-variété indéfiniment différentiable de dimension 1 de $\mathbf{C}$ égale à la frontière de $\bar{\mathrm{V}}$. Soient l la longueur de $\dot{\mathrm{V}}$, m la borne supérieure de $|f(\lambda)|$ sur $\dot{\mathrm{V}}$ et M la borne supérieure de $\|(\lambda - x)^{-1}\|$ sur $\mathbf{C} - \mathrm{V}$. Si $z \in \mathrm{A}$ est tel que $\|z\|\mathrm{M} \leqslant \frac{1}{2}$ et si $\lambda \in \mathbf{C} - \mathrm{V}$, on a

$$\lambda - x - z = (1 - z(\lambda - x)^{-1})(\lambda - x)$$

et $\|z(\lambda - x)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{2}$, donc $\lambda - x - z$ est inversible et

$$(\lambda - x - z)^{-1} = (\lambda - x)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (z(\lambda - x)^{-1})^n$$

avec $\|(z(\lambda - x)^{-1})^n\| \leqslant 2^{-n}$. Ceci prouve que Ω est ouvert, et en outre que

$$2i\pi f(x + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\dot{\mathrm{V}}} f(\lambda)(\lambda - x)^{-1}(z(\lambda - x)^{-1})^n \, d\lambda.$$

Or $\int_{\dot{\mathrm{V}}} f(\lambda)(\lambda - x)^{-1}(z(\lambda - x)^{-1})^n \, d\lambda$ est une fonction polynomiale homogène de degré n de z dont la norme est majorée par $ml\mathrm{M}^{n+1}$ Ceci prouve l'analyticité dans Ω de $y \mapsto f(y)$.

PROPOSITION 11. — *Soient* A *une algèbre de Banach unifère,* $x \in \mathrm{A}$, U *un voisinage ouvert de* $\mathrm{Sp}\, x, f \in \mathcal{O}(\mathrm{U})$, δ *la distance de* $\mathrm{Sp}\, x$ *à* $\mathbf{C} - \mathrm{U}$.

(i) *Pour tout* δ' *tel que* $0 < \delta' < \delta$, *il existe une constante* $k \geqslant 0$ *telle que* $\| f^{(n)}(x)\| \leqslant k\delta'^{-n}n!$ *pour* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(ii) *Si* $y \in \mathrm{A}$ *est permutable à* x *et si* $\rho(y) < \delta$, *on a* $\mathrm{Sp}(x + y) \subset \mathrm{U}$, *et*

$$f(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} f^{(n)}(x),$$

où la série converge absolument.

En remplaçant A par la sous-algèbre fermée pleine engendrée par x et y (ce qui ne change pas $\mathrm{Sp}\, x$, $\mathrm{Sp}(x + y)$), on se ramène au cas où A est commutative.

Soient $\delta' \in \left]0, \delta\right[$, $\varepsilon = \delta - \delta' > 0$, et K le voisinage compact de $\mathrm{Sp}\, x$ formé des points de $\mathbf{C}$ dont la distance à $\mathrm{Sp}\, x$ est $\leqslant \varepsilon/2$. Comme f est holomorphe dans tout disque ouvert de rayon $\delta' + \varepsilon/2$ dont le centre appartient à K, il existe, d'après les inégalités de Cauchy, une constante $l \geqslant 0$ telle que

$$\sup_{z \in \mathrm{K}} \frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \leqslant l\delta'^{-n}$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$. Alors (i) résulte du lemme 7.

Si $\rho(y) < \delta$, on peut choisir δ' tel que $\rho(y) < \delta' < \delta$. Soient V l'ensemble des points de $\mathbf{C}$ dont la distance à $\mathrm{Sp}\, x$ est $< \delta - \delta'$, et V′ le disque ouvert de centre 0 et de rayon δ' dans $\mathbf{C}$. Soit g l'application $(z, z') \mapsto z + z'$ de $\mathrm{V} \times \mathrm{V}'$ dans U. Alors $h = f \circ g$ est l'application $(z, z') \mapsto f(z + z')$ de $\mathrm{V} \times \mathrm{V}'$ dans $\mathbf{C}$. On a

$\mathrm{Sp}(x, y) \subset \mathrm{V} \times \mathrm{V}'$, donc $\mathrm{Sp}(x + y) \subset \mathrm{U}$. D'après le th. 2, $h(x, y) = f(x + y)$. Or, dans $\mathcal{O}(\mathrm{V} \times \mathrm{V}')$, h est la somme de la série

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} z'^n.$$

Donc la série

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} y^n$$

est convergente et de somme $h(x, y) = f(x + y)$. En outre, cette série est absolument convergente d'après (i).

9. Exponentielle et logarithme

Soient A une algèbre de Banach unifère, x un élément de A. Prenons $f(z) = \exp z$; d'après la prop. 1, on a:

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots. \tag{11}$$

Comme $\|x^n\| \leqslant \|x\|^n$, on voit que

$$\|\exp x\| \leqslant \exp\|x\|$$

et que la série (11) converge uniformément dans toute boule de A. L'application $x \mapsto \exp x$ de A dans A est donc *continue* (cf. aussi prop. 10). Si y est un élément de A permutable à x, la prop. 11 prouve que

$$\exp(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \exp x,$$

d'où

$$\exp(x + y) = \exp x \,.\, \exp y. \tag{12}$$

En particulier, $\exp x$ est inversible et

$$(\exp x)^{-1} = \exp(-x). \tag{13}$$

Soit Δ l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que $-\pi < \mathscr{I} z < \pi$. Soit Δ' l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ qui ne sont pas réels $\leqslant 0$. Alors $\exp|\Delta$ est une bijection de Δ sur Δ' (*Fonct. var. réelle*, chap. III, § 1, n° 7); la bijection réciproque sera notée log dans la fin de ce n°. Si $x \in \mathrm{A}$ est tel que $\mathrm{Sp}\, x \subset \Delta'$, on peut former l'élément $\log x$ de A; on a $\mathrm{Sp}(\log x) \subset \Delta$, et

$$\exp(\log x) = x \tag{14}$$

d'après la prop. 8. D'autre part, si $y \in A$ est tel que $\mathrm{Sp}\, y \subset \Delta$, on a $\mathrm{Sp}(\exp y) \subset \Delta'$ et

$$\log(\exp y) = y \tag{15}$$

d'après la prop. 8.

En particulier, si $u \in A$ est tel que $\rho(u) < 1$, on a $\mathrm{Sp}(1 - u) \subset \Delta'$ et on peut former $\log(1 - u)$. Comme

$$\log(1 - z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

pour $|z| < 1$, la prop. 1 et le th. 2 prouvent que:

$$\log(1 - u) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n}. \tag{16}$$

Soit G le groupe des éléments inversibles de A. Si A est *commutative*, les formules (12) et (13) prouvent que exp(A) est un sous-groupe de G. Ce sous-groupe contient, d'après (14), la boule ouverte de centre 1 et de rayon 1, donc est un sous-groupe ouvert (et par suite fermé) de G. Par ailleurs, exp(A) est connexe comme image continue de A qui est connexe. Donc exp(A) est la composante neutre de G.

10. Partitions de l'espace des caractères

PROPOSITION 12.— *Soit* A *une algèbre de Banach unifère commutative. On suppose que* X(A) *admet une partition en deux ensembles ouverts* U_1 *et* U_2. *Alors il existe un idempotent unique* j *de* A *tel que* $\mathscr{G}j$ *soit égal à* 1 *sur* U_1 *et à* 0 *sur* U_2.

L'espace X(A) s'identifie à une partie de $\mathbf{C}^A$ par l'application $\chi \mapsto (\chi(a))_{a \in A}$. Les parties U_1 et U_2 de l'espace uniforme $\mathbf{C}^A$ sont compactes disjointes, donc il existe une partie finie M de A et des parties ouvertes disjointes V_1, V_2 de $\mathbf{C}^M$ telles que

$$p(U_1) \subset V_1, p(U_2) \subset V_2,$$

en désignant par p la projection canonique de $\mathbf{C}^A$ sur $\mathbf{C}^M$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ les éléments distincts de M, et identifions $\mathbf{C}^M$ à $\mathbf{C}^n$. Soit f la fonction égale à 1 sur V_1 et à 0 sur V_2. On a $f \in \mathscr{O}(V_1 \cup V_2)$, et $\mathrm{Sp}(a_1, \ldots, a_n) \subset V_1 \cup V_2$. On peut donc former $j = f(a_1, \ldots, a_n)$. Comme $f^2 = f$, on a $j^2 = j$. D'après le cor. 1 de la prop. 2, on a $\chi(j) = 1$ si $\chi \in U_1$ et $\chi(j) = 0$ si $\chi \in U_2$. D'autre part, soit r un élément du radical de A tel que $j + r$ soit idempotent. L'égalité $(j + r)^2 = j + r$ donne $r(1 - 2j - r) = 0$. Or

$$\mathscr{G}(1 - 2j - r) = 1 - 2\mathscr{G}j$$

est partout différente de zéro, donc $1 - 2j - r$ est inversible. Donc $r = 0$, ce qui prouve l'unicité de j.

Remarque. — Avec les notations de la prop. 13, soient

$$\mathfrak{J}_1 = jA, \quad \mathfrak{J}_2 = (1 - j)A.$$

Alors $\mathfrak{J}_1$ et $\mathfrak{J}_2$ sont des idéaux de A, et $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = A$. D'autre part, $\mathfrak{J}_1$ (resp. $\mathfrak{J}_2$) est l'ensemble des $x \in A$ tels que $jx = x$ (resp. $(1 - j)x = x$), donc $\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2 = \{0\}$, et $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$ sont fermés. L'algèbre A s'identifie au produit des algèbres $A/\mathfrak{J}_1, A/\mathfrak{J}_2$. Si on identifie $X(A/\mathfrak{J}_1)$ et $X(A/\mathfrak{J}_2)$ à des parties de X(A) (§ 1, n° 5), on a $X(A/\mathfrak{J}_1) = U_2, X(A/\mathfrak{J}_2) = U_1$.

COROLLAIRE. — *Soit* A *une algèbre de Banach unifère commutative. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) X(A) *est connexe;*

(ii) *les seuls idempotents de* A *sont* 0 *et* 1;

(iii) A *n'est pas isomorphe au produit de deux algèbres de Banach non nulles.*

PROPOSITION 13. — *Soit* A *une algèbre de Banach commutative sans radical. Pour que* A *admette un élément unité, il faut et il suffit que* X(A) *soit compact.*

La condition est nécessaire (§ 3, cor. du th. 1). Supposons X(A) compact. Soit $\tilde{A}$ l'algèbre de Banach déduite de A par adjonction d'un élément unité, et identifions X'(A) à $X(\tilde{A})$. Alors le complémentaire de X(A) dans $X(\tilde{A})$ est l'unique caractère χ_0 de $\tilde{A}$ nul sur A. D'après la prop. 12, il existe un $j \in \tilde{A}$ tel que $\chi(j) = 1$ pour $\chi \in X(A)$, et $\chi_0(j) = 0$. On a donc $j \in A$, et $\chi(jx) = \chi(x)$ pour tout $x \in A$ et tout $\chi \in X(A)$, donc $jx = x$ puisque A est sans radical. Ainsi, j est élément unité de A.

PROPOSITION 14. — *Soient* A *une algèbre de Banach commutative,* $\mathfrak{J}_1$ *un idéal de* A, F_1 *l'ensemble des* $\chi \in X(A)$ *qui sont nuls sur* $\mathfrak{J}_1$, F_2 *une partie de* X(A) *disjointe de* F_1, *fermée pour la topologie de Jacobson, et compacte pour la topologie faible. Il existe un* $u \in \mathfrak{J}_1$ *tel que* $\mathscr{G}u = 1$ *sur* F_2.

Soit $\mathfrak{J}_2$ l'intersection des noyaux des caractères appartenant à F_2. Il est clair que $A/\mathfrak{J}_2$ est sans radical. Puisque F_2 est fermé pour la topologie de Jacobson, les seuls éléments de $X(A)$ nuls sur $\mathfrak{J}_2$ sont ceux de F_2. Donc F_2, muni de la topologie induite par la topologie faible de $X(A)$, s'identifie à $X(A/\mathfrak{J}_2)$ muni de la topologie faible (§ 1, n° 6). Comme F_2 est faiblement compact, $A/\mathfrak{J}_2$ possède un élément unité (prop. 13). Alors, si l'on avait $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 \neq A$, $(\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2)/\mathfrak{J}_2$ serait contenu dans le noyau d'un caractère non nul de $A/\mathfrak{J}_2$ (§ 3, th. 2), donc il existerait un caractère non nul de A qui s'annule sur $\mathfrak{J}_1$ et $\mathfrak{J}_2$, donc on aurait $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$ contrairement à l'hypothèse. Ainsi, $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = A$, et il existe $u \in \mathfrak{J}_1$ dont la classe dans $A/\mathfrak{J}_2$ est élément unité de $A/\mathfrak{J}_2$. Alors $\chi(u) = 1$ pour $\chi \in F_2$.

COROLLAIRE. — *Soient* A *une algèbre de Banach commutative,* F_1 *et* F_2 *deux parties disjointes de* $X(A)$ *fermées pour la topologie de Jacobson. On suppose* F_2 *faiblement compacte. Alors il existe* $u \in A$ *tel que* $\mathscr{G}u = 1$ *sur* F_2 *et* $\mathscr{G}u = 0$ *sur* F_1.

Il suffit d'appliquer la prop. 14 en prenant pour $\mathfrak{J}_1$ l'intersection des noyaux des caractères appartenant à F_1.

11. Partitions du spectre d'un élément

Remarque 1. — Soient A une algèbre de Banach unifère, $x \in A$, et $K = \operatorname{Sp} x$. Soit $\mathfrak{C}$ l'ensemble des parties de K qui sont à la fois ouvertes et fermées dans K. Pour tout $H \in \mathfrak{C}$, il existe un élément f_H de $\mathscr{O}(K)$ et un seul égal à 1 au voisinage de H et à 0 au voisinage de $K - H$. On posera $j_H = f_H(x)$. Alors, j_H est un idempotent de A, dit *associé à x et* H, et on a les formules suivantes:

(17) $$j_{H \cap H'} = j_H j_{H'} = j_{H'} j_H \qquad (H, H' \in \mathfrak{C})$$

(18) $$j_{H \cup H'} = j_H + j_{H'} - j_H j_{H'} \qquad (H, H' \in \mathfrak{C})$$

(19) $$j_{\varnothing} = 0 \qquad j_K = 1.$$

D'une manière générale, si j est un idempotent de A, jAj est l'ensemble des $x \in A$ tels que $xj = jx = x$, donc est une sous-algèbre de Banach de A, et admet l'élément unité j. En particulier, si $H \in \mathfrak{C}$, nous noterons A_H l'algèbre de Banach $j_H A j_H$, admettant l'élément unité j_H. Soit B la sous-algèbre fermée pleine de A engendrée par x; elle est commutative; si $K = H_1 \cup \ldots \cup H_n$ est une partition de K en éléments de $\mathfrak{E}$, $1 = j_{H_1} + \dots + j_{H_n}$ est une décomposition de 1 en idempotents de B deux à deux orthogonaux, donc l'algèbre B s'identifie canoniquement à l'algèbre produit $B_{H_1} \times \dots \times B_{H_n}$.

Remarque 2. — Si $H \in \mathfrak{E}$, on posera $x_H = xj_H = j_H x \in B_H$. On a $x_H = g_H(x)$, où g_H est l'élément de $\mathcal{O}(K)$ défini par $g_H(z) = z$ au voisinage de H et $g_H(z) = 0$ au voisinage de $K - H$ (en effet, $g_H(z) = f_H(z)z$). Il en résulte que, si $H \neq K$, on a

$$\mathrm{Sp}_A\, x_H = H \cup \{0\}. \tag{20}$$

Si $K = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n$ est une partition de K en éléments de $\mathfrak{E}$, on a:

$$x = x_{H_1} + x_{H_2} + \dots + x_{H_n} \tag{21}$$

$$x_{H_i} x_{H_j} = 0 \qquad \text{pour } i \neq j. \tag{22}$$

Remarque 3. — Soient encore $H \in \mathfrak{E}$, et $\lambda \in \mathbf{C} - H$. Soit $h_{H,\lambda}$ l'élément de $\mathcal{O}(K)$ égal à $(\lambda - z)^{-1}$ au voisinage de H et à 0 au voisinage de $K - H$. Alors $(\lambda f_H - g_H)h_{H,\lambda} = f_H$; donc, si on pose $R_H(\lambda, x) = h_{H,\lambda}(x) \in B_H$, on a:

$$R_H(\lambda, x)(\lambda j_H - x_H) = (\lambda j_H - x_H)R_H(\lambda, x) = j_H \tag{23}$$

$$R_H(\lambda, x) j_{K-H} = j_{K-H} R_H(\lambda, x) = 0. \tag{24}$$

Supposons que, pour un $\lambda \in H$, $\lambda j_H - x_H$ admette un inverse y dans A_H; alors $\lambda - x$ admettrait dans A l'inverse $y + R_{K-H}(\lambda, x)$, ce qui est absurde; donc $\lambda \in \mathrm{Sp}_{A_H} x_H$. Il résulte de là et de (23) que

$$\mathrm{Sp}_{A_H}\, x_H = H \tag{25}$$

donc que

$$H \neq \varnothing \Rightarrow j_H \neq 0. \tag{26}$$

La formule (23) prouve que la fonction $\lambda \mapsto R_H(\lambda, x)$, définie dans $\mathbf{C} - H$, est la résolvante de x_H relativement à A_H. Si

$$K = H_1 \cup \dots \cup H_n$$

est une partition de K en éléments de $\mathfrak{E}$, on a:

$$R(\lambda, x) = R_{H_1}(\lambda, x) + \dots + R_{H_n}(\lambda, x). \tag{27}$$

En particulier, si $H \in \mathfrak{E}$, la fonction $\lambda \mapsto R(\lambda, x)$ est égale au voisinage de H à la somme de $R_H(\lambda, x)$ et d'une fonction holomorphe.

PROPOSITION 15. — *Soit* μ *un point isolé de* $\mathrm{Sp}_A\, x$.

(i) $R(\lambda, x) = R_{\{\mu\}}(\lambda, x) + R_{\mathrm{Sp}_A x - \{\mu\}}(\lambda, x)$.

(ii) *La fonction* $\lambda \mapsto R_{\mathrm{Sp}_A x - \{\mu\}}(\lambda, x)$ *est holomorphe au voisinage de* μ; *la fonction* $\lambda \mapsto R_{\{\mu\}}(\lambda, x)$ *est holomorphe dans* $\mathbf{C} - \{\mu\}$.

(iii) $\|(x - \mu)^n j_{\{\mu\}}\|^{1/n}$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$, *et, pour* $\lambda \in \mathbf{C} - \{\mu\}$,

$$(28) \qquad R_{\{\mu\}}(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^{-n-1}(x - \mu)^n j_{\{\mu\}}.$$

Ce qui précède entraîne (i) et (ii). Prouvons (iii). En remplaçant x par $x - \mu$, on se ramène au cas où $\mu = 0$. Posons $H = \{0\} \subset \mathrm{Sp}_A\, x$. Alors le spectre de x_H dans A_H est $\{0\}$, donc x_H est quasi-nilpotent, c'est-à-dire que $\|x^n j_H\|^{1/n} = \|(x j_H)^n\|^{1/n}$ tend vers 0. En outre, on a dans A_H, pour $\lambda \neq 0$,

$$(\lambda j_H - x_H)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x_H^n$$

(§ 2, n° 5, formule (7)), d'où (28).

COROLLAIRE. — *Soient* μ *un point isolé de* $\mathrm{Sp}_A\, x$ *et* p *un entier* >0. *Pour que* μ *soit pôle d'ordre* p *de la résolvante de* x, *il faut et il suffit que* $(x - \mu)^{p-1} j_{\{\mu\}} \neq 0$, $(x - \mu)^p j_{\{\mu\}} = 0$.

Exemple. — Soient E un espace de Banach complexe, x un endomorphisme continu de E. On peut considérer le spectre $\mathrm{Sp}\, x$ de x relativement à l'algèbre de Banach unifère $A = \mathscr{L}(E)$. Soit H une partie de $\mathrm{Sp}\, x$ ouverte et fermée dans $\mathrm{Sp}\, x$. L'idempotent j_H associé à H est un projecteur sur un sous-espace vectoriel fermé E_H de E, dit *associé* à x et H. Soit E'_H le noyau de ce projecteur. Alors E est somme directe topologique de E_H et E'_H; et x, qui commute à j_H, laisse stables E_H, E'_H. L'algèbre A_H est ici l'algèbre des endomorphismes de E nuls sur E'_H et qui laissent stable E_H. Soit μ un endomorphisme continu de E laissant stables E_H et E'_H ; pour que $u|E_H$ soit inversible, il faut et il suffit que $u j_H$ soit inversible dans A_H, et on a un résultat analogue pour $u|E'_H$. Il résulte de là et de (25) que $\mathrm{Sp}(x|E_H) = H$, $\mathrm{Sp}(x|E'_H) = \mathrm{Sp}\, x - H$.

Si H se réduit à un point isolé μ de $\operatorname{Sp} x$, $x|\mathrm{E}'_{\{\mu\}}$ admet pour spectre $\operatorname{Sp} x - \{\mu\}$, et en particulier $(x - \mu)|\mathrm{E}'_{\{\mu\}}$ est un automorphisme de $\mathrm{E}'_{\{\mu\}}$. D'autre part, $(x - \mu)|\mathrm{E}_{\{\mu\}}$ est quasi-nilpotent. Pour que μ soit pôle d'ordre $p > 0$ de la résolvante de x, il faut et il suffit que $(x - \mu)^{p-1}|\mathrm{E}_{\{\mu\}} \neq 0$, $(x - \mu)^p|\mathrm{E}_{\{\mu\}} = 0$. Dans ce cas, $\mathrm{E}_{\{\mu\}} = \operatorname{Ker}(x - \mu)^p$ et $\mathrm{E}'_{\{\mu\}} = \operatorname{Im}(x - \mu)^p$.

Nous résumerons une partie de ces résultats de la manière suivante:

PROPOSITION 16. — *Soient* E *un espace de Banach complexe,* x *un endomorphisme continu de* E, μ *un point isolé de* $\operatorname{Sp} x$, K *le complémentaire de* $\{\mu\}$ *dans* $\operatorname{Sp} x$.

(i) *Soit* Γ *le bord orienté d'un disque ouvert* Δ *de centre* μ, *tel que* $\mathrm{K} \cap (\Gamma \cup \Delta) = \varnothing$. *Alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (z - x)^{-1}\, dz$$

est un idempotent j *qui ne dépend que de* x *et* μ.

(ii) $\mathrm{E}' = \operatorname{Im} j$ *et* $\mathrm{E}'' = \operatorname{Ker} j$ *sont stables par* x, $(x - \mu)|\mathrm{E}'$ *est quasi-nilpotent,* $(x - \mu)|\mathrm{E}''$ *est un automorphisme de* E''.

(iii) *Pour que* μ *soit pôle d'ordre* $p > 0$ *de la résolvante de* x, *il faut et il suffit que* $(x - \mu)^{p-1}|\mathrm{E}' = 0$, $(x - \mu)^p|\mathrm{E}' = 0$.

§ 5. Algèbres de Banach commutatives régulières

1. Définition et premières propriétés

PROPOSITION 1. — *Soit* A *une algèbre de Banach commutative. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *La topologie faible et la topologie de Jacobson sur* X(A) *coïncident.*

(ii) *Pour tout* $\chi \in \mathrm{X(A)}$ *et toute partie faiblement fermée* F *de* X(A) *telle que* $\chi \notin \mathrm{F}$, *il existe un* $x \in \mathrm{A}$ *tel que* $\mathscr{G}x$ *soit égale à* 1 *en* χ *et à* 0 *sur* F.

(iii) *Pour toute partie faiblement compacte* K *et toute partie faiblement fermée* F *de* X(A) *telles que* $\mathrm{K} \cap \mathrm{F} = \varnothing$, *il existe un* $x \in \mathrm{A}$ *tel que* $\mathscr{G}x$ *soit égale à* 1 *sur* K *et à* 0 *sur* F.

Soit $\mathrm{M} \subset \mathrm{X(A)}$. Dire que M est fermé pour la topologie de Jacobson signifie que, pour tout $\chi \in \mathrm{X(A)} - \mathrm{M}$, il existe un $x \in \mathrm{A}$ tel que $\mathscr{G}x$ s'annule sur M mais pas en χ. La condition (ii) signifie donc que toute partie de X(A) faiblement fermée est fermée pour la topologie de Jacobson. Donc (ii) $\Leftrightarrow$ (i). Il est clair que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Enfin (i) $\Rightarrow$ (iii) d'après le § 4, cor. de la prop. 14.

DÉFINITION 1. — *Soit* A *une algèbre de Banach commutative. Elle est dite régulière si elle vérifie les conditions équivalentes de la prop.* 1.

Remarque. — Soit $\tilde{A}$ l'algèbre de Banach déduite de A par adjonction d'un élément unité e. Utilisant la condition (ii) de la prop. 1, il est clair que si $\tilde{A}$ est régulière, A est régulière. Supposons A régulière et montrons que $\tilde{A}$ est régulière. Soient F et F′ des parties faiblement fermées (donc faiblement compactes) disjointes de $X(\tilde{A})$ et construisons un $x \in \tilde{A}$ tel que $\mathscr{G}x = 0$ sur F, $\mathscr{G}x = 1$ sur F′. Soit $\chi_0 \in X(\tilde{A})$ le caractère nul sur A. Si $\chi_0 \notin F'$, il existe, d'après la condition (iii) de la prop. 1, un $x \in A$ tel que $\mathscr{G}x = 0$ sur F, $\mathscr{G}x = 1$ sur F′. Si $\chi_0 \notin F$, il existe de même un $y \in A$ tel que $\mathscr{G}y = 0$ sur F′, $\mathscr{G}y = 1$ sur F, et on peut poser alors $x = e - y \in \tilde{A}$.

Exemples. — Reprenons les exemples du § 2, n° 2. Dans les exemples 1 (algèbre des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini sur un espace localement compact Ω) et 2 (algèbre des fonctions n fois dérivables sur $[0, 1]$), A est régulière (cf. § 3, n° 3, exemples). On verra (chap. II, § 3, prop. 1) qu'il en est de même dans l'exemple 4 (algèbre $L^1(\mathbf{Z})$). Dans l'exemple 5 (algèbre des fonctions continues dans le disque $|z| \leqslant 1$ et analytiques à l'intérieur), A n'est pas régulière (§ 7, exerc. 6).

PROPOSITION 2. — *Soit* A *une algèbre de Banach unifère commutative régulière. Soit* $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ *un recouvrement ouvert de* X(A). *Il existe des éléments* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *de* A *de somme* 1 *tels que* $\mathrm{Supp}(\mathscr{G}x_i) \subset U_i$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, n$.

La proposition est évidente si $n = 1$. Nous la supposerons établie pour $n - 1$.

Il existe un recouvrement ouvert $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ de X(A) tel que $\bar{V}_i \subset U_i$ pour tout i. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe ensuite $x, x_3, x_4, \ldots, x_n \in A$ tels que $x + x_3 + \ldots + x_n = 1$, $\mathrm{Supp}(\mathscr{G}x) \subset V_1 \cup V_2$, $\mathrm{Supp}(\mathscr{G}x_i) \subset V_i$ pour $i > 2$. Posons $K = \mathrm{Supp}(\mathscr{G}x)$. Soit K_1 (resp. K_2) l'ensemble des éléments de K qui n'appartiennent pas à V_1 (resp. V_2). Alors K_1 et K_2 sont des parties compactes disjointes de K. Il existe donc $y \in A$ tel que

$\mathscr{G}y = 1$ sur K_1, $\mathscr{G}y = 0$ sur K_2. Alors $\mathscr{G}(xy)$ est nulle sur $X(A) - K$ et sur K_2, donc $\operatorname{Supp}\mathscr{G}(xy) \subset \bar{V}_2 \subset U_2$. De même, $\mathscr{G}(x(1-y))$ est nulle sur $X(A) - K$ et sur K_1, donc

$$\operatorname{Supp}\mathscr{G}(x(1-y)) \subset \bar{V}_1 \subset U_1 .$$

On peut donc poser $x_1 = x(1-y)$, $x_2 = xy$, et on a les propriétés de la proposition.

COROLLAIRE 1.— *Soient* A *une algèbre de Banach unifère commutative régulière,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A, $f : X(A) \to \mathbf{C}$ *une fonction continue. On suppose que, pour tout* $\chi \in X(A)$, *il existe un* $y_\chi \in \mathfrak{J}$ *tel que* $f = \mathscr{G}y_\chi$ *au voisinage de* χ. *Alors il existe un* $y \in \mathfrak{J}$ *tel que* $f = \mathscr{G}y$ *sur* $X(A)$.

Comme $X(A)$ est compact, il existe un recouvrement ouvert fini $(U_1, \ldots, U_n)$ de $X(A)$, et des éléments $y_1, \ldots, y_n$ de $\mathfrak{J}$ tels que $f = \mathscr{G}y_i$ sur U_i. Il existe (prop. 2) des éléments $x_1, \ldots, x_n$ de A de somme 1 tels que $\operatorname{Supp}(\mathscr{G}x_i) \subset U_i$ pour tout i. Soit

$$y = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \in \mathfrak{J}.$$

Soient $\chi \in X(A)$, et Λ l'ensemble des $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $\chi \in U_i$. Si $i \in \Lambda$, on a $\mathscr{G}y_i(\chi) = f(y)$; si $i \notin \Lambda$, on a $\mathscr{G}x_i(\chi) = 0$; donc

$$\mathscr{G}y(\chi) = \sum_{i\in\Lambda} \mathscr{G}x_i(\chi)\mathscr{G}y_i(\chi) = f(y)\sum_{i\in\Lambda} \mathscr{G}x_i(\chi) = f(y)\sum_{i=1}^{n} \mathscr{G}x_i(\chi) = f(\chi).$$

COROLLAIRE 2.— *Soient* A *une algèbre de Banach commutative régulière,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A, $f : X'(A) \to \mathbf{C}$ *une fonction continue. On suppose que, pour tout* $\chi \in X'(A)$, *il existe un* $y_\chi \in \mathfrak{J}$ *tel que* $f = \mathscr{G}'y_\chi$ *au voisinage de* χ. *Alors il existe un* $y \in \mathfrak{J}$ *tel que* $f = \mathscr{G}'y$ *sur* $X'(A)$.

Soit $\tilde{A}$ l'algèbre de Banach déduite de A par adjonction d'un élément unité. Alors $\tilde{A}$ est régulière (remarque), et $X'(A) = X(\tilde{A})$; il suffit donc d'appliquer à $\tilde{A}$ et $\mathfrak{J}$ le cor. 1 de la prop. 2.

Si $\mathfrak{J}$ est un idéal d'une algèbre de Banach commutative, nous noterons $h(\mathfrak{J})$ l'ensemble des $\chi \in X(A)$ dont le noyau contient $\mathfrak{J}$, autrement dit l'ensemble des $\chi \in X(A)$ où s'annulent toutes les fonctions $\mathscr{G}x$ pour $x \in \mathfrak{J}$. C'est une partie de $X(A)$ fermée pour la topologie de Jacobson.

PROPOSITION 3.— *Soient* A *une algèbre de Banach commutative régulière,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A, K *une partie de* $X(A)$ *compacte et disjointe de* $h(\mathfrak{J})$. *Il existe un* $u \in \mathfrak{J}$ *tel que* $\mathscr{G}u = 1$ *sur* K.

C'est un cas particulier de la prop. 14 du § 4.

2. *Synthèse harmonique*

Soit A une algèbre de Banach commutative. Si M est une partie de X(A), nous noterons $\mathfrak{k}(M)$ l'intersection des noyaux des éléments de M.

PROPOSITION 4. — *Soit* A *une algèbre de Banach commutative régulière sans radical. Soit* F *une partie fermée de* X(A). *L'ensemble des idéaux* $\mathfrak{I}$ *de* A *tels que* $h(\mathfrak{I}) = F$ *admet un plus grand élément, à savoir* $\mathfrak{k}(F)$, *et un plus petit élément, à savoir l'ensemble* $\mathfrak{J}$ *des* $x \in A$ *tels que* $\mathscr{G}x$ *soit à support compact disjoint de* F.

L'assertion concernant le plus grand élément est évidente. Il est clair que $\mathfrak{J}$ est un idéal de A et que $h(\mathfrak{J}) \supset F$. Si $\chi \in X(A) - F$, il existe un voisinage compact V de χ ne rencontrant pas F, puis un $x \in A$ tel que $\mathscr{G}x$ soit égale à 1 en χ et à 0 hors de V; alors $x \in \mathfrak{J}$, donc $\chi \notin h(\mathfrak{J})$, donc $h(\mathfrak{J}) = F$. Enfin, soit $\mathfrak{I}$ un idéal de A tel que $h(\mathfrak{I}) = F$, et montrons que $\mathfrak{I} \supset \mathfrak{J}$. Soit C une partie compacte de X(A) disjointe de F, et soit x un élément de A tel que $\mathrm{Supp}(\mathscr{G}x) \subset C$. D'après la prop. 3, il existe un $u \in \mathfrak{I}$ tel que $\mathscr{G}u = 1$ sur C. Alors $\mathscr{G}x = \mathscr{G}(ux)$, donc $x = ux$ puisque A est sans radical, donc $x \in \mathfrak{I}$. Donc $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{I}$.

COROLLAIRE 1. — *Soient* A *une algèbre de Banach commutative régulière sans radical,* $\mathfrak{J}$ *l'ensemble des* $x \in A$ *tels que* $\mathscr{G}x$ *soit à support compact. On suppose* $\overline{\mathfrak{J}} = A$. *Alors tout idéal fermé de* A *distinct de* A *est contenu dans un idéal maximal régulier.*

Soit $\mathfrak{I}$ un idéal fermé de A qui n'est contenu dans aucun idéal maximal régulier. Alors $h(\mathfrak{I}) = \emptyset$, donc $\mathfrak{I} \supset \mathfrak{J}$ (prop. 4), d'où $\mathfrak{I} \supset \overline{\mathfrak{J}} = A$.

COROLLAIRE 2. — *Soit* A *une algèbre de Banach commutative régulière sans radical. Soient* $x, y \in A$. *Si le support de* $\mathscr{G}x$ *est compact et contenu dans l'ensemble des points où* $\mathscr{G}y \neq 0$, x *est multiple de* y *dans* A.

Soit $\mathfrak{I} = Ay$. Alors $h(\mathfrak{I})$ est l'ensemble F des zéros de $\mathscr{G}y$. Le support de $\mathscr{G}x$ est compact et disjoint de F. Donc $x \in \mathfrak{I}$ (prop. 4).

DÉFINITION 2. — *Soit* A *une algèbre de Banach commutative. On dit que* A *vérifie la condition de Ditkin si, pour tout* $\chi \in X'(A)$

et tout $x \in A$ *tel que* $\mathscr{G}'x$ *s'annule en* χ, *il existe une suite* $(x_1, x_2, \ldots)$ *dans* A *telle que* $x = \lim_{n\to\infty} (x_n x)$ *et que chaque* $\mathscr{G}'x_n$ *s'annule dans un voisinage* V_n *de* χ.

D'autre part, soient A une algèbre de Banach commutative, $\mathfrak{I}$ un idéal de A, $x \in A$, et $\chi \in X'(A)$; nous dirons que x *appartient à* $\mathfrak{I}$ *au voisinage de* χ s'il existe un $y \in \mathfrak{I}$ tel que $\mathscr{G}'y = \mathscr{G}'x$ au voisinage de χ.

Remarque. — Soient A une algèbre de Banach commutative régulière, $\mathfrak{I}$ un idéal de A, χ un élément de X(A) tel que $\chi \notin h(\mathfrak{I})$; alors tout $x \in A$ appartient à $\mathfrak{I}$ au voisinage de χ; en effet, d'après la déf. 1, il existe un $z \in A$ tel que $\mathscr{G}'z = 1$ au voisinage de χ, et $\mathscr{G}'z = 0$ au voisinage de $h(\mathfrak{I})$; on a $z \in \mathfrak{I}$ (prop. 4), donc $xz \in \mathfrak{I}$, et $\mathscr{G}'(xz) = \mathscr{G}'x$ au voisinage de χ.

Lemme 1. — *Soit* A *une algèbre de Banach commutative régulière sans radical, vérifiant la condition de Ditkin. Soient* $\mathfrak{I}$ *un idéal fermé de* A, x *un élément de* $\mathfrak{k}(h(\mathfrak{I}))$. *Soit* G *l'ensemble des* $\chi \in X'(A)$ *tels que* x *appartienne à* $\mathfrak{I}$ *au voisinage de* χ. *Alors* $X'(A) - G$ *est parfait* (c'est-à-dire, rappelons-le, fermé sans point isolé).

Il est clair que G est ouvert. Supposons que $X'(A) - G$ admette un point isolé χ_0. Nous allons aboutir à une contradiction, ce qui établira le lemme. Il existe un voisinage U de χ_0 tel que $U - \{\chi_0\} \subset G$. Si $\chi_0 \neq 0$, il existe un $u \in A$ tel que $\mathscr{G}'u = 1$ au voisinage de χ_0 et $\mathscr{G}'u = 0$ au voisinage de $X'(A) - U$; compte tenu de la *Remarque*, ux appartient à $\mathfrak{I}$ au voisinage de tout $\chi \neq \chi_0$, et n'appartient pas à $\mathfrak{I}$ au voisinage de χ_0. Si $\chi_0 = 0$, il existe un $v \in A$ tel que $\mathscr{G}'v = 0$ au voisinage de χ_0 et $\mathscr{G}'v = 1$ au voisinage de $X'(A) - U$; compte tenu de la *Remarque*, $x - vx$ appartient à $\mathfrak{I}$ au voisinage de tout $\chi \neq \chi_0$, et n'appartient pas à $\mathfrak{I}$ au voisinage de χ_0. Dans les deux cas, nous avons construit un $y \in A$ qui appartient à $\mathfrak{I}$ au voisinage de tout point de $X'(A)$ sauf χ_0 et tel que $\chi_0(y) = 0$. Puisque A vérifie la condition de Ditkin, il existe une suite $(x_1, x_2, \ldots)$ dans A telle que $x_n y$ tende vers y et que chaque $\mathscr{G}'x_n$ s'annule dans un voisinage de χ_0. Alors $x_n y$ appartient à $\mathfrak{I}$ au voisinage de tout point de $X'(A)$, donc $x_n y \in \mathfrak{I}$ (cor. 2 de la prop. 2). Donc $y \in \mathfrak{I}$ puisque $\mathfrak{I}$ est fermé. Mais alors y appartient à $\mathfrak{I}$ au voisinage de χ_0, et ceci est la contradiction annoncée.

PROPOSITION 5. — *Soit* A *une algèbre de Banach commutative régulière sans radical, vérifiant la condition de Ditkin. Soit* $\mathfrak{I}$ *un idéal fermé de* A *tel que la frontière de* $h(\mathfrak{I})$ *ne contienne aucun ensemble parfait non vide. Alors* $\mathfrak{I}$ *est l'ensemble des* $x \in \mathrm{A}$ *tels que* $\mathscr{G}x$ *s'annule sur* $h(\mathfrak{I})$. *En particulier, si* $h(\mathfrak{I})$ *se réduit à un point* χ, *on a* $\mathfrak{I} = \mathrm{Ker}\,\chi$.

Soit $x \in \mathfrak{k}(h(\mathfrak{I}))$. Il s'agit de prouver que $x \in \mathfrak{I}$. Soit G l'ensemble du lemme 1. Comme $\mathscr{G}'x = 0$ sur $h(\mathfrak{I})$, il est clair que G contient l'intérieur de $h(\mathfrak{I}) \cup \{0\}$. D'après la remarque précédant le lemme 1, G contient $\mathrm{X(A)} - h(\mathfrak{I})$. Donc $\mathrm{X'(A)} - \mathrm{G}$ qui est un ensemble parfait (lemme 1), est contenu dans la frontière de $h(\mathfrak{I}) \cup \{0\}$. D'après l'hypothèse faite sur $h(\mathfrak{I})$, $\mathrm{X'(A)} - \mathrm{G} \subset \{0\}$, donc $\mathrm{X'(A)} - \mathrm{G} = \varnothing$ puisque $\mathrm{X'(A)} - \mathrm{G}$ est parfait. Donc $x \in \mathfrak{I}$ (cor. 2 de la prop. 2).

§ 6. — Algèbres normées involutives

1. Algèbres involutives

DÉFINITION 1. — *Soit* A *une algèbre sur* **C**. *On appelle involution dans* A *une application* $x \mapsto x^*$ *de* A *dans* A *telle que :*

$$(x^*)^* = x \qquad (x + y)^* = x^* + y^* \qquad (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$$
$$(xy)^* = y^* x^*$$

quels que soient $x, y \in \mathrm{A}$ *et* $\lambda \in \mathbf{C}$. *Une algèbre sur* **C** *munie d'une involution est appelée une algèbre involutive.*

On dit souvent que x^* est l'*adjoint* de x. Un sous-ensemble de A stable pour l'involution est dit *auto-adjoint.*

Une involution est évidemment un isomorphisme de l'anneau A sur l'anneau opposé A^0. Si A possède un élément unité e, on a $e^* = e$; on dit que (A, e) est une algèbre unifère involutive.

Exemples. — 1) Soit A l'algèbre des fonctions complexes sur un ensemble. L'application $f \mapsto \bar{f}$ est une involution dans A.

2) Soient H un espace hilbertien complexe, et $\mathrm{A} = \mathscr{L}(\mathrm{H})$. L'application $x \mapsto x^*$ (*Esp. vect. top.*, chap. V, 2e éd., § 1) est une involution de A.

3) Soit G un groupe localement compact. On sait (*Intégr.*, chap. VIII, § 3, prop. 2) que $\mathscr{M}^1(\mathrm{G})$ est une algèbre de Banach admettant l'élément unité ε_e. L'application $x \mapsto x^{-1}$ de G sur G transforme toute $\mu \in \mathscr{M}^1(\mathrm{G})$ en $\check{\mu} \in \mathscr{M}^1(\mathrm{G})$ (*Intégr.*, chap. VII, § 1,

n° 1). On note μ^* la mesure complexe conjuguée de $\check{\mu}$. L'application $\mu \mapsto \check{\mu}$ est un isomorphisme de l'algèbre de Banach $\mathscr{M}^1(G)$ sur l'algèbre de Banach $\mathscr{M}^1(G^0)$. Donc $\mu \mapsto \mu^*$ est une involution isométrique de $\mathscr{M}^1(G)$. L'ensemble A des mesures bornées admettant une densité par rapport à une mesure de Haar est une sous-algèbre fermée de $\mathscr{M}^1(G)$ stable par l'involution (*Intégr.*, chap. VIII, § 5, n° 5). Soit β une mesure de Haar à gauche sur G. On munit $L^1(G, \beta)$ du produit $(f, g) \mapsto f *^{\beta} g$ et de l'involution $f \mapsto f^* = \tilde{f}. \Delta^{-1}$, où Δ est le module de G et où $\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$ pour tout $x \in G$. Alors l'application $f \mapsto f.\beta$ est un isomorphisme de l'algèbre involutive $L^1(G, \beta)$ sur A. Cet isomorphisme est isométrique.

Soit A une algèbre involutive. Un $x \in A$ est dit *hermitien* si $x = x^*$, *normal* si $xx^* = x^*x$. (Cette terminologie généralise celle d'*Alg.*, chap. IX, § 7, n° 3.) Tout élément hermitien est normal. L'ensemble des éléments hermitiens est un sous-espace vectoriel réel de A. Si x et y sont hermitiens et permutables, on a $(xy)^* = y^*x^* = yx = xy$, donc xy est hermitien. Pour tout $x \in A$, xx^* et x^*x sont hermitiens.

Tout $x \in A$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_1 + ix_2$ avec x_1, x_2 hermitiens. En effet, si on pose $x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*)$, $x_2 = (1/2i)(x - x^*)$, x_1 et x_2 sont hermitiens, et on a $x = x_1 + ix_2$. Réciproquement, si on a $x = x_1 + ix_2$ avec x_1, x_2 hermitiens, on a $x^* = x_1 - ix_2$, donc $x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*)$, $x_2 = (1/2i)(x - x^*)$. On a donc bien prouvé l'existence et l'unicité de x_1 et x_2. Remarquons que

$$xx^* = x_1^2 + x_2^2 + i(x_2x_1 - x_1x_2),$$
$$x^*x = x_1^2 + x_2^2 - i(x_2x_1 - x_1x_2);$$

donc x est normal si et seulement si x_1 et x_2 sont permutables.

Supposons que A admette un élément unité. Pour que $x \in A$ soit inversible, il faut et il suffit que x^* le soit, et on a alors $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$. Comme $(x - \lambda)^* = x^* - \bar{\lambda}$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on en déduit que $\mathrm{Sp}_A\, x^* = \overline{\mathrm{Sp}_A\, x}$. Un $x \in A$ est dit *unitaire* si $xx^* = x^*x = 1$, autrement dit, si x est inversible et que $x = x^{*-1}$.

Soient A une algèbre involutive, $\tilde{A}$ l'algèbre déduite de A par adjonction d'un élément unité. Il existe sur $\tilde{A}$ une involution et une seule prolongeant celle de A; elle est définie en posant $(\lambda, x)^* = (\bar{\lambda}, x^*)$ pour $\lambda \in \mathbf{C}$, $x \in A$. Si $x \in A$, on a $\mathrm{Sp}'_A\, x^* = \overline{\mathrm{Sp}'_A\, x}$.

Soient A et B deux algèbres involutives. On appelle *morphisme* de A dans B une application φ de A dans B telle que

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \qquad \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x),$$
$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \qquad \varphi(x^*) = \varphi(x)^*$$

quels que soient $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbf{C}$. On appelle sous-algèbre involutive de A une sous-algèbre auto-adjointe. Le centre de A est une sous-algèbre involutive. Si A_1 est un idéal bilatère auto-adjoint de A, l'involution de A définit par passage au quotient une involution dans l'algèbre A/A_1, et l'application canonique de A sur A/A_1 est un morphisme.

Le radical d'une algèbre involutive A est égal au radical de l'algèbre opposée, donc est auto-adjoint.

Soit A une algèbre involutive. Si $M \subset A$ est auto-adjoint, son commutant M' est une sous-algèbre involutive de A. Si $x \in A$, le bicommutant de $\{x, x^*\}$ est une sous-algèbre involutive contenant x et x^*, et cette sous-algèbre est commutative si et seulement si x est normal.

Soient A une algèbre involutive, B une sous-algèbre involutive commutative maximale de A. Alors B est une sous-algèbre commutative maximale (donc est pleine si A est unifère). Car si $x \in A$ est permutable à B, x^* est permutable à B; donc, si on écrit $x = x_1 + ix_2$ avec x_1, x_2 hermitiens, x_1 et x_2 sont permutables à B; mais alors la sous-algèbre de A engendrée par B et x_1 est commutative et involutive, donc égale à B, d'où $x_1 \in B$; de même $x_2 \in B$ et finalement $x \in B$.

Soit A une algèbre involutive. Si f est une forme linéaire sur A, la fonction $x \mapsto \overline{f(x^*)}$ sur A est une forme linéaire qu'on note f^* et qu'on appelle *adjointe* de f. On a

$$f^{**} = f, \qquad (f + f')^* = f^* + f'^*, \qquad (\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*.$$

On dit que f est *hermitienne* si $f = f^*$. Toute forme linéaire sur A se met de manière unique sous la forme $f_1 + if_2$ avec f_1, f_2 hermitiennes. Pour qu'une forme linéaire f soit hermitienne, il faut et il suffit qu'elle soit réelle sur l'ensemble A_h des éléments hermitiens de A. L'application $f \mapsto f|A_h$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel réel des formes hermitiennes sur l'espace vectoriel dual de l'espace vectoriel réel A_h. Si A est commutative et si χ est un caractère de A, χ^* est un caractère de A, et l'application $\chi \mapsto \chi^*$ est un homéomorphisme de $X'(A)$ sur $X'(A)$.

2. *Algèbres normées involutives*

DÉFINITION 2. — *On appelle algèbre normée* (resp. *algèbre de Banach*) *involutive une algèbre normée* (resp. *une algèbre de Banach*) *munie d'une involution $x \mapsto x^*$ telle que $\|x^*\| = \|x\|$ pour tout x.*

Exemples. — 1) Soient T un espace localement compact, A l'algèbre des fonctions complexes continues sur T tendant vers 0 à l'infini, munie de la norme $\|f\| = \sup_{t \in \mathrm{T}} |f(t)|$ et de l'involution $f \mapsto \bar{f}$. Alors A est une algèbre de Banach involutive.

2) L'algèbre involutive des endomorphismes continus d'un espace hilbertien (n° 1, *Exemple* 2), munie de la norme usuelle, est une algèbre de Banach involutive.

3) L'algèbre involutive $\mathscr{M}^1(\mathrm{G})$ des mesures bornées sur un groupe localement compact (n° 1, *Exemple* 3), munie de la norme usuelle, est une algèbre de Banach involutive.

Soient A une algèbre normée involutive, $\tilde{\mathrm{A}}$ l'algèbre normée déduite de A par adjonction d'un élément unité. Munie de l'involution définie au n° 1, $\tilde{\mathrm{A}}$ est une algèbre normée involutive.

Si A est une algèbre normée involutive, l'adhérence d'une sous-algèbre involutive est une sous-algèbre involutive. Si $\mathrm{M} \subset \mathrm{A}$, la plus petite sous-algèbre fermée involutive contenant M est appelée sous-algèbre fermée involutive *engendrée par* M ; c'est l'adhérence de la sous-algèbre engendrée par $\mathrm{M} \cup \mathrm{M}^*$; si M se réduit à un élément normal, elle est commutative. Le quotient d'une algèbre normée involutive par un idéal bilatère fermé auto-adjoint, le produit d'un nombre fini d'algèbres normées involutives, la complétée et l'opposée d'une algèbre normée involutive, sont de façon naturelle des algèbres normées involutives.

Si A est une algèbre normée involutive, et si f est une forme linéaire continue sur A, on a $\|f^*\| = \|f\|$. L'ensemble A_h des éléments hermitiens de A est un espace vectoriel normé réel. Soient f une forme linéaire continue hermitienne sur A, et $g = f|\mathrm{A}_h$. On a $\|f\| = \|g\|$; en effet, il est clair que $\|f\| \geqslant \|g\|$; d'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathrm{A}$ tel que $\|x\| \leqslant 1$ et $|f(x)| \geqslant \|f\| - \varepsilon$; en multipliant x par un scalaire de module 1, on peut supposer $f(x) \geqslant 0$; alors

$$|g(\tfrac{1}{2}(x + x^*))| = \tfrac{1}{2}|f(x) + f(x^*)| = f(x) \geqslant \|f\| - \varepsilon$$

et comme $\|\frac{1}{2}(x + x^*)\| \leqslant 1$, on voit que $\|g\| \geqslant \|f\| - \varepsilon$, d'où notre assertion. On identifiera donc les formes linéaires continues hermitiennes sur A et les formes linéaires continues réelles sur A_h.

3. *Algèbres stellaires*

DÉFINITION 3.— *On appelle algèbre stellaire une algèbre de Banach involutive* A *telle que* $\|x\|^2 = \|x^*x\|$ *pour tout* $x \in A$.

Les exemples 1 et 2 du n° 2 sont des exemples d'algèbres stellaires (*Esp. vect. top.*, chap. V, 2[e] éd., § 1). Par contre, l'exemple 3 n'est pas en général un exemple d'algèbre stellaire.

Remarques. — 1) Soit A une algèbre de Banach munie d'une involution satisfaisant à l'axiome :

$$\|x\|^2 \leqslant \|x^*x\|. \tag{1}$$

On en déduit $\|x\|^2 \leqslant \|x^*\| \,.\, \|x\|$, d'où $\|x\| \leqslant \|x^*\|$, et, changeant x en x^*, on voit que $\|x\| = \|x^*\|$. Alors (1) entraîne

$$\|x\|^2 \leqslant \|x^*x\| \leqslant \|x\|^2,$$

donc A est une algèbre stellaire.

2) Soit A une algèbre stellaire. Pour tout $x \in A$, on a

$$\|x\| = \sup_{\|x'\| \leqslant 1} \|xx'\|.$$

En effet, il est clair que $\|x'\| \leqslant 1$ entraîne $\|xx'\| \leqslant \|x\|$. Pour prouver que $\|x\| \leqslant \sup_{\|x'\| \leqslant 1} \|xx'\|$, on peut supposer $\|x\| = 1$. Alors, $\|x^*\| = 1$, et $\|xx^*\| = \|x\|^2 = 1$.

3) Soit A une algèbre stellaire, unifère. On a

$$\|1\|^2 = \|1^*1\| = \|1\|,$$

donc $\|1\| = 1$ ou 0. Si $A \neq \{0\}$, on en déduit $\|1\| = 1$, d'où, pour tout élément unitaire u, $\|u\| = \|u^*u\|^{1/2} = 1$.

4) Soit (A_i) une famille d'algèbres stellaires. Soit A l'ensemble des $(x_i) \in \Pi A_i$ tels que $\sup_i \|x_i\| < +\infty$. Pour les lois

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \lambda(x_i) = (\lambda x_i), (x_i)(y_i) = (x_i y_i), (x_i)^* = (x_i^*)$$

et la norme $\|(x_i)\| = \sup_i \|x_i\|$, on vérifie tout de suite que A est une algèbre stellaire appelée algèbre stellaire produit des A_i.

5) Soit A une algèbre normée involutive. Si $\|x\|^2 = \|x^*x\|$ pour tout $x \in A$, la complétée $\hat{A}$ de A est une algèbre stellaire.

Proposition 1. — *Soient* A *une algèbre de Banach involutive,* B *une algèbre stellaire,* π *un morphisme de l'algèbre involutive* A *dans l'algèbre involutive* B. *On a* $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$ *pour tout* $x \in \mathrm{A}$.

Observons que, pour tout élément hermitien y de B, on a $\|y^2\| = \|y^*y\| = \|y\|^2$, d'où $\|y^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|y\|$ et par suite:

$$\rho(y) = \|y\|. \tag{2}$$

Ceci posé, pour tout $x \in \mathrm{A}$, on a $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{B}}\,\pi(x) \subset \mathrm{Sp}'_{\mathrm{A}}\,x$, donc

$$\rho(\pi(x)) \leqslant \rho(x) \leqslant \|x\|,$$

donc, compte tenu de (2),

$$\|\pi(x)\|^2 = \|\pi(x^*x)\| = \rho(\pi(x^*x)) \leqslant \|x^*x\| \leqslant \|x\|^2.$$

Proposition 2. — *Soient* A *une algèbre stellaire,* $\tilde{\mathrm{A}}$ *l'algèbre involutive déduite de* A *par adjonction d'un élément unité. Il existe sur* $\tilde{\mathrm{A}}$ *une norme et une seule prolongeant celle de* A *et faisant de* $\tilde{\mathrm{A}}$ *une algèbre stellaire.*

L'unicité de cette norme résulte de la prop. 1.

Si A possède un élément unité e, $\tilde{\mathrm{A}}$ est produit des idéaux bilatères auto-adjoints A et $\mathbf{C}(\tilde{e} - e)$ ($\tilde{e}$ désignant l'élément unité de $\tilde{\mathrm{A}}$). Il suffit de poser, pour tout $x \in \mathrm{A}$ et tout $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$\|x + \lambda(\tilde{e} - e)\| = \sup(\|x\|, |\lambda|),$$

et $\tilde{\mathrm{A}}$ devient ainsi une algèbre stellaire (remarque 4).

Supposons désormais que A ne possède *pas* d'élément unité. Pour tout $x \in \tilde{\mathrm{A}}$, soit L_x l'opérateur de multiplication à gauche par x dans A, et posons $\|x\| = \|L_x\|$. Pour $x \in \mathrm{A}$, on retrouve bien, d'après la remarque 2, la norme donnée sur A. D'autre part, $x \mapsto \|x\|$ est une semi-norme sur $\tilde{\mathrm{A}}$, et $\|xy\| \leqslant \|x\| \,.\, \|y\|$. Cette semi-norme est une norme; car, soit $x = \lambda\tilde{e} - x'$ ($\lambda \in \mathbf{C}, x' \in \mathrm{A}$) un élément de $\tilde{\mathrm{A}}$ tel que $xy = 0$ pour tout $y \in \mathrm{A}$, et montrons que $x = 0$; si $\lambda \neq 0$, $\lambda^{-1}x'$ est unité à gauche dans A, donc $\bar{\lambda}^{-1}x^*$ est unité à droite, donc A possède un élément unité contrairement à l'hypothèse; donc $\lambda = 0$, et alors $\|-x'\| = 0$, donc $x' = 0$ et $x = 0$: on a bien prouvé que $x \mapsto \|x\|$ est une norme. Comme A est complet et de codimension 1 dans $\tilde{\mathrm{A}}$, $\tilde{\mathrm{A}}$ est complet. Reste à montrer (remarque 1) que $\|z\|^2 \leqslant \|z^*z\|$ pour tout $z \in \tilde{\mathrm{A}}$, et il suffit de le faire pour $\|z\| = 1$. Pour tout $r < 1$, il existe $y \in \mathrm{A}$ tel que $\|y\| \leqslant 1$ et $\|zy\|^2 \geqslant r$; alors, comme $zy \in \mathrm{A}$, on a:

$$\|z^*z\| \geqslant \|y^*(z^*z)y\| = \|(zy)^*(zy)\| = \|zy\|^2 \geqslant r;$$

d'où $\|z^*z\| \geqslant 1$.

On dit que $\tilde{A}$, munie de la norme de la prop. 2, est l'algèbre stellaire *déduite de* A *par adjonction d'un élément unité.* On notera que cette norme d'algèbre stellaire sur $\tilde{A}$ n'est pas celle considérée au n° 2.

PROPOSITION 3. — *Soit* A *une algèbre stellaire.*

(i) *Si h est un élément hermitien de* A, $\mathrm{Sp}'\, h \subset \mathbf{R}$.

(ii) *Si* A *possède un élément unité et si u est un élément unitaire de* A, $\mathrm{Sp}\, u \subset \mathbf{U}$.

En vertu de la prop. 2, on peut supposer, pour prouver les deux parties de l'énoncé, que A est unifère (et $A \neq \{0\}$). On a $\|u\| = \|u^{-1}\| = 1$ (remarque 3), donc $\mathrm{Sp}\, u \subset \mathbf{U}$ (§ 2, cor. 3 du th. 1). D'autre part,

$$(\exp(ih))^* = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n h^n}{n!}\right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n h^n}{n!} = \exp(-ih),$$

donc $\exp(ih)$ est unitaire; donc, si $z \in \mathrm{Sp}\, h$, on a $\exp(iz) \in \mathbf{U}$, de sorte que $z \in \mathbf{R}$.

PROPOSITION 4. — *Soient* A *une algèbre stellaire,* B *une sous-algèbre stellaire de* A, *et* $x \in B$.

(i) *On a* $\mathrm{Sp}'_{A}\, x = \mathrm{Sp}'_{B}\, x$.

(ii) *Si* A *possède un élément unité appartenant à* B, B *est une sous-algèbre pleine et on a* $\mathrm{Sp}_A\, x = \mathrm{Sp}_B\, x$.

Par adjonction d'un élément unité, on voit que (i) résulte de (ii). Prouvons (ii). Si x est hermitien, on a $\mathrm{Sp}_B\, x \subset \mathbf{R}$, donc $\mathrm{Sp}_B\, x = \mathrm{Sp}_A\, x$ (§ 2, prop 6). Dans le cas général, si $x \in B$ est inversible dans A, xx^* est inversible dans A, donc dans B d'après ce qui précède, donc x est inversible à droite dans B; on voit de même que x est inversible à gauche dans B, donc inversible dans B; donc B est une sous-algèbre pleine et par suite $\mathrm{Sp}_A\, x = \mathrm{Sp}_B\, x$.

4. *Algèbres stellaires commutatives*

THÉORÈME 1. — *Soient* A *une algèbre stellaire commutative,* B *l'algèbre stellaire des fonctions complexes continues sur* X(A) *tendant vers* 0 *à l'infini. Alors:*

(i) *tout caractère de* A *est hermitien;*

(ii) *la transformation de Gelfand est un isomorphisme de l'algèbre stellaire* A *sur l'algèbre stellaire* B.

Si $y \in A$ est hermitien, $\mathscr{G}y$ est réelle (prop. 3). Donc $\mathscr{G}x^* = \overline{\mathscr{G}x}$ pour tout $x \in A$, ce qui prouve (i). Comme les $\mathscr{G}x$ séparent les points de X(A), et qu'en tout point de X(A) il existe une fonction $\mathscr{G}x$ qui n'est pas nulle, $\mathscr{G}(A)$ est partout dense dans B (*Top. gén.*, chap. X, 2ᵉ éd., § 4, cor. 2 de la prop. 7). Pour achever la démonstration, il suffit maintenant de montrer que $\mathscr{G}$ est isométrique. Or $\|\mathscr{G}y\| = \|y\|$ pour y hermitien (formule (2)), d'où, pour tout $x \in A$, $\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|\mathscr{G}(x^*x)\| = \|\overline{\mathscr{G}x} \,.\, \mathscr{G}x\| = \|\mathscr{G}x\|^2$.

COROLLAIRE. — *Soient* A *une algèbre stellaire,* x *un élément normal de* A. *Alors* $\|x\| = \rho(x)$.

Comme x et x^* engendrent une sous-algèbre stellaire commutative de A, il suffit de faire la démonstration pour A commutative. Dans ce cas, le cor. résulte du th. 1.

5. *Calcul fonctionnel dans les algèbres stellaires*

PROPOSITION 5. — *Soient* A *une algèbre stellaire unifère,* $x \in A$ *un élément normal,* $S = \mathrm{Sp}_A\, x$, A′ *l'algèbre stellaire unifère des fonctions complexes continues sur* S. *Il existe un morphisme unifère* φ *et un seul de l'algèbre involutive* A′ *dans l'algèbre involutive* A *tel que* $\varphi(z) = x$, *en notant* z *la fonction* $\lambda \mapsto \lambda$ *sur* S. *Ce morphisme est isométrique. Son image est la sous-algèbre stellaire unifère de* A *engendrée par* x, *donc est composée d'éléments normaux.*

Les polynômes en z et $\bar{z}$ sont partout denses dans A′, et tout morphisme de A′ dans A est continu (prop. 1), d'où aussitôt l'unicité de φ. Soit B la sous-algèbre stellaire unifère de A engendrée par x. Elle est commutative. L'application $\chi \mapsto \chi(x)$ de X(B) sur $\mathrm{Sp}_B\, x = S$ est continue et injective (car deux caractères de B égaux en x sont identiques d'après le th. 1 (i)); cette application définit un isomorphisme $\psi : A' \to \mathscr{C}(X(B))$ qui transforme z en $\mathscr{G}_B\, x$. L'isomorphisme:

$$A' \xrightarrow{\psi} \mathscr{C}(X(B)) \xrightarrow{\mathscr{G}_B^{-1}} B,$$

composé avec l'injection $B \to A$, est le morphisme de la proposition.

DÉFINITION 4. — *Si* x *est un élément normal de* A *et si* $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A\, x)$, *l'élément* $\varphi(f)$ *de la prop. 5 se note* $f(x)$.

On a :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \tag{3}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \tag{4}$$

$$\bar{f}(x) = f(x)^* \tag{5}$$

$$\|f(x)\| = \|f\| \tag{6}$$

pour $f, g \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}\, x)$. Si f est la restriction à S d'un polynôme $\mathrm{P}(\lambda, \bar{\lambda})$, on a $f(x) = \mathrm{P}(x, x^*)$ au sens algébrique usuel.

Avec les notations ci-dessus,

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{A}} f(x) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{B}} f(x) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{A}'} f = f(\mathrm{S}),$$

autrement dit :

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}(f(x)) = f(\mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}\, x). \tag{7}$$

PROPOSITION 6. — *Soient* A *et* B *deux algèbres stellaires unifères,* φ *un morphisme de* A *dans* B, x *un élément normal de* A, *de sorte que* $\varphi(x)$ *est normal dans* B. *Soit* $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}\, x)$. *La restriction de* f *à* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{B}}\, \varphi(x)$ *étant encore notée* f, *on a* $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$.

Les applications $f \mapsto \varphi(f(x))$ et $f \mapsto f(\varphi(x))$ sont des morphismes unifères de $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}\, x)$ dans B qui prennent la même valeur pour $f(\lambda) = \lambda$ et pour $f(\lambda) = \bar{\lambda}$, donc ces deux applications sont égales.

COROLLAIRE 1. — *Soient* A *une algèbre stellaire unifère commutative,* $x \in \mathrm{A}$ *et* $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}\, x)$. *On a* $\mathscr{G}(f(x)) = f \circ \mathscr{G}x$.

COROLLAIRE 2. — *Soient* A *une algèbre stellaire unifère, et* $x \in \mathrm{A}$. *Soient* $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}\, x)$ *et* $g \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(f(x))) = \mathscr{C}(f(\mathrm{Sp}\, x))$. *Alors*

$$g \circ f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}\, x) \qquad \textit{et} \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

L'application $g \mapsto (g \circ f)(x)$ est un morphisme unifère de $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(f(x)))$ dans A qui transforme la fonction $\lambda \mapsto \lambda$ en $f(x)$. D'après l'assertion d'unicité de la prop. 5, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

PROPOSITION 7. — *Soient* A *une algèbre stellaire unifère,* $x \in \mathrm{A}$ *un élément normal, et* $f \in \mathscr{O}(\mathrm{Sp}\, x)$. *Les définitions de* $f(x)$ *données ci-dessus, et au* § 4, n° 8, *déf.* 1, *coïncident.*

Prenons $f(x)$ au sens de la déf. 4. L'application $f \mapsto f(x)$, restreinte à $\mathscr{O}(\mathrm{Sp}\, x)$, est un morphisme unifère continu de $\mathscr{O}(\mathrm{Sp}\, x)$

dans A qui transforme la fonction $\lambda \mapsto \lambda$ en x, donc est le morphisme du § 4, th. 3.

PROPOSITION 8.— *Soient* A *une algèbre stellaire,* $x \in \mathrm{A}$ *un élément normal,* $\mathrm{S} = \mathrm{Sp}' x$, A′ *l'algèbre stellaire des fonctions continues sur* S *nulles en* 0. *Il existe un morphisme* φ *et un seul de l'algèbre involutive* A′ *dans l'algèbre involutive* A *tel que* $\varphi(z) = x$. *Ce morphisme est isométrique. Son image est la sous-algèbre stellaire de* A *engendrée par* x, *donc est composée d'éléments normaux.*

Comme les polynômes en z et $\bar{z}$ sans terme constant sont partout denses dans A′, l'unicité de φ est immédiate. L'existence résulte de la prop. 5 en adjoignant à A un élément unité (prop. 2).

Si $f \in \mathrm{A}'$, l'image de f par φ se note $f(x)$.

Remarque. — Tous les résultats de ce n° s'étendent sans difficulté, *mutatis mutandis,* au morphisme de la prop. 8.

Soit x un élément hermitien de l'algèbre stellaire A. Son spectre est réel. Considérons les fonctions continues de variable réelle

$$t \mapsto f_1(t) = \sup(t, 0), \qquad t \mapsto f_2(t) = \sup(-t, 0), \qquad t \mapsto f_3(t) = |t|.$$

On pose $x^+ = f_1(x)$, $x^- = f_2(x)$, $|x| = \mathrm{abs}(x) = f_3(x)$. Comme les fonctions f_1, f_2, f_3 sont réelles, x^+, x^-, $|x|$ sont des éléments hermitiens de la sous-algèbre stellaire de A engendrée par x. Comme les f_i sont à valeurs $\geqslant 0$, on a

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{Sp}'(x^+) \subset \mathbf{R}_+, \qquad \mathrm{Sp}'(x^-) \subset \mathbf{R}_+, \qquad \mathrm{Sp}'(|x|) \subset \mathbf{R}_+.$$

Comme $f_1(t) - f_2(t) = t$, $f_1(t) + f_2(t) = f_3(t)$ et $f_1(t)f_2(t) = 0$, on a

$$\text{(9)} \qquad x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-, \qquad x^+x^- = x^-x^+ = 0.$$

La norme de $|x|$ est égale à celle de x, les normes de x^+ et x^- sont majorées par celle de x.

Supposons $\mathrm{Sp}' x \subset \mathbf{R}_+$. Soient $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, et g la restriction à $\mathrm{Sp}' x$ de la fonction $t \mapsto t^\alpha$. On pose $g(x) = x^\alpha$. Ainsi, x^α est un élément hermitien de la sous-algèbre stellaire de A engendrée par x. On a $\mathrm{Sp}' x^\alpha \subset \mathbf{R}_+$. Pour $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+^*$, il est immédiat que

$$\text{(10)} \qquad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

PROPOSITION 9. — *Soit x un élément hermitien de* A *tel que* $\mathrm{Sp}'\, x \subset \mathbf{R}_+$. *Soit* $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. *Alors* $x^{1/\alpha}$ *est l'unique élément hermitien* y *de* A *tel que* $\mathrm{Sp}'\, y \subset \mathbf{R}_+$ *et* $y^\alpha = x$.

On sait déjà que $\mathrm{Sp}'(x^{1/\alpha}) \subset \mathbf{R}_+$ et que $(x^{1/\alpha})^\alpha = x$. Soit y un élément hermitien de A tel que $\mathrm{Sp}'\, y \subset \mathbf{R}_+$ et $y^\alpha = x$, et prouvons que $y = x^{1/\alpha}$. En considérant la sous-algèbre stellaire de A engendrée par y (sous-algèbre stellaire qui contient x, donc $x^{1/\alpha}$), on est ramené au cas où A est commutative. Mais alors notre assertion est conséquence immédiate du th. 1.

6. *Algèbre stellaire enveloppante d'une algèbre de Banach involutive*

Lemme 1. — *Soit* A *une algèbre involutive sur* **C** *et soit p une semi-norme sur* A. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *On a* $p(xy) \leqslant p(x)p(y)$, $p(x^*) = p(x)$ *et* $p(x)^2 = p(x^*x)$ *quels que soient* $x, y \in \mathrm{A}$.

(ii) *L'ensemble* $\mathfrak{N}$ *des x tels que* $p(x) = 0$ *est un idéal bilatère auto-adjoint de* A, *et la norme déduite de p fait de* $\mathrm{A}/\mathfrak{N}$ *une algèbre normée involutive dont la complétée est une algèbre stellaire.*

(iii) *Il existe un morphisme d'algèbres involutives φ de* A *dans une algèbre stellaire tel que* $p(x) = \|\varphi(x)\|$.

Il est immédiat que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

Une semi-norme satisfaisant aux conditions du lemme sera appelée une *semi-norme stellaire* sur l'algèbre involutive A.

Supposons maintenant que A soit une *algèbre de Banach involutive* et soit S l'ensemble des semi-normes stellaires sur A. On a $p(x) \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{A}$ et tout $p \in \mathrm{S}$ (prop. 1). La fonction $x \mapsto \|x\|_* = \sup_{p \in \mathrm{S}} p(x)$ est une semi-norme stellaire sur A, qui est évidemment la plus grande semi-norme stellaire.

DÉFINITION 5. — *Soit* $\mathfrak{N}$ *l'ensemble des* $x \in \mathrm{A}$ *tels que* $\|x\|_* = 0$. *L'algèbre stellaire complétée de* $\mathrm{A}/\mathfrak{N}$ *pour la norme déduite de* $x \mapsto \|x\|_*$ *est appelée l'algèbre stellaire enveloppante de l'algèbre de Banach involutive* A *et est notée* Stell(A) *ou* St(A).

PROPOSITION 10. — *Soient* A *une algèbre de Banach involutive, j le morphisme canonique de* A *dans* St(A). *Pour tout morphisme φ d'algèbres involutives de* A *dans une algèbre stellaire* B, *il existe un morphisme φ' d'algèbres stellaires, et un seul, de* St(A) *dans* B *tel que* $\varphi = \varphi' \circ j$.

En effet, la fonction $x \mapsto \|\varphi(x)\|$ est une semi-norme stellaire sur A. On a donc $\|\varphi(x)\| \leqslant \|x\|_*$ pour tout $x \in A$; le morphisme définit par passage au quotient un morphisme continu de $A/\mathfrak{R}$ dans B, qui se prolonge par continuité à St(A). L'unicité de φ' est évidente.

Il est clair que si A est commutative (resp. possède un élément unité) alors St(A) est commutative (resp. possède un élément unité).

COROLLAIRE.— *Soient* A *une algèbre de Banach involutive commutative, j le morphisme canonique de* A *dans* St(A). *L'application* $\mathsf{X}(j)$ *est un homéomorphisme de* $\mathsf{X}(\mathrm{St}(A))$ *sur le sous-espace* H *de* $\mathsf{X}(A)$ *formé des caractères hermitiens.*

En effet, un caractère hermitien n'est pas autre chose qu'un morphisme d'algèbres involutives à valeurs dans l'algèbre stellaire C. Il résulte donc de la prop. 10 que $\mathsf{X}(j)$ est une bijection de $\mathsf{X}(\mathrm{St}(A))$ sur H. De plus, sur $\mathsf{X}(\mathrm{St}(A))$, les topologies de la convergence simple sur $j(A)$ ou sur St(A) sont les mêmes, car $j(A)$ est dense dans St(A) et $\mathsf{X}(\mathrm{St}(A))$ est équicontinu. Par suite, $\mathsf{X}(j)$ est un homéomorphisme.

Identifions $\mathsf{X}(\mathrm{St}(A))$ à H grâce à $\mathsf{X}(j)$. Alors, si $x \in A$, la fonction $\mathscr{G}_{\mathrm{St}(A)}(j(x))$ n'est autre que la restriction à H de $\mathscr{G}_A(x)$.

PROPOSITION 11.— *Soient* A *une algèbre de Banach involutive,* $\mathfrak{R}$ *le radical de* A. *Si* $x \in \mathfrak{R}$, *son image canonique* $j(x)$ *dans* St(A) *est nulle.*

En effet, on a $x^*x \in \mathfrak{R}$, donc $\mathrm{Sp}'_A(x^*x) = \{0\}$ (§ 1, n° 3, remarque 3), donc $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{St}(A)}(j(x)^*j(x)) = \{0\}$, donc $\|j(x)^*j(x)\| = 0$ (n° 3, formule (2)), donc $j(x) = 0$.

7. *Algèbre stellaire d'un groupe localement compact*

Soit G un groupe localement compact. Soit A l'algèbre de Banach involutive des mesures bornées sur G admettant une densité par rapport à une mesure de Haar. On appelle *algèbre stellaire de* G et on note Stell(G) ou St(G) l'algèbre stellaire enveloppante de l'algèbre de Banach involutive A. Si on choisit une mesure de Haar à gauche sur G, A s'identifie canoniquement à $L^1(G)$, et on peut donc définir St(G) comme l'algèbre stellaire enveloppante de $L^1(G)$.

Choisissons une mesure de Haar à gauche sur G. On sait (*Intégr.*, chap. VIII, § 4, prop. 6) que pour $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ et $f \in L^2(G)$, on a $\mu * f \in L^2(G)$. Si $\gamma(\mu)$ désigne l'endomorphisme $f \mapsto \mu * f$ de $L^2(G)$, on sait que γ est une représentation de l'algèbre $\mathscr{M}^1(G)$ dans l'algèbre de Banach $B = \mathscr{L}(L^2(G))$ des endomorphismes continus de $L^2(G)$ (*Intégr.*, chap. VIII, § 4, cor. de la prop. 6). D'autre part, on sait que $\gamma(\check{\mu})$ est le *transposé* de l'endomorphisme $\gamma(\mu)$ (*Intégr.*, chap. VIII, § 4, n° 3). Il en résulte aussitôt que $\gamma(\mu^*)$ n'est autre que l'*adjoint* de $\gamma(\mu)$, et γ est un morphisme d'algèbres involutives de $\mathscr{M}^1(G)$ dans l'algèbre stellaire B, appelé *représentation régulière gauche* de $\mathscr{M}^1(G)$ dans $L^2(G)$. D'après *Intègr.*, chap. VIII, § 4, n° 7, prop. 19, cette représentation est *injective.*

Par restriction à $L^1(G)$, γ définit un morphisme injectif d'algèbres involutives de $L^1(G)$ dans B (appelé représentation régulière gauche de $L^1(G)$ dans $L^2(G)$) et il existe un morphisme $\gamma' : St(G) \to B$ tel que $\gamma = \gamma' \circ j$, où j désigne l'application canonique de $L^1(G)$ dans St(G). On dit que γ' est la représentation régulière gauche de St(G) dans $L^2(G)$ (cette représentation n'est pas en général injective). Par abus de notation, nous poserons encore:

$$\varphi * f = \gamma'(\varphi)(f) \tag{11}$$

pour $f \in L^2(G)$ et $\varphi \in St(G)$. On a:

$$\|\varphi * f\|_2 \leqslant \|\varphi\|_* \|f\|_2 \, . \tag{12}$$

PROPOSITION 12. — *L'application canonique de* $L^1(G)$ *dans* St(G) *est injective.*

Puisque γ est injectif, ceci résulte aussitôt de l'égalité $\gamma = \gamma' \circ \varphi$.

COROLLAIRE. — *L'algèbre* $L^1(G)$ *est sans radical.*

Ceci résulte des prop. 11 et 12.

On identifie donc $L^1(G)$ à une sous-algèbre involutive dense de St(G). L'injection canonique de $L^1(G)$ dans St(G) est alors continue.

Supposons maintenant que G soit *unimodulaire.* On peut alors répéter les mêmes arguments à partir de l'application

$(f, \mu) \mapsto f * \check{\mu} = \delta(\mu)(f)$ de $L^2(G) \times \mathscr{M}^1(G)$ dans $L^2(G)$. On définit de même $f * \varphi$ pour $f \in L^2(G)$ et $\varphi \in St(G)$.

De plus, on a, pour $f \in L^2(G)$ et $\varphi, \psi \in St(G)$:

$$(\varphi * f) * \psi = \varphi * (f * \psi). \tag{13}$$

En effet, cette formule est vraie pour $\varphi, \psi \in L^1(G)$; et les applications $(\varphi, \psi) \mapsto (\varphi * f) * \psi$, $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi * (f * \psi)$ sont des applications bilinéaires continues de $St(G) \times St(G)$ dans $L^2(G)$.

8. Endomorphismes positifs des espaces hilbertiens

Soient E un espace hilbertien complexe, et $x \in \mathscr{L}(E)$. Rappelons (*Esp. vect. top.*, chap. V, 2ᵉ éd., § 1) que x est dit *positif* si $(x\xi|\xi) \geqslant 0$ pour tout $\xi \in E$, et qu'on écrit alors $x \geqslant 0$. Les éléments positifs de $\mathscr{L}(E)$ sont hermitiens (*loc. cit.*).

D'autre part, quand on parle du spectre d'un élément de $\mathscr{L}(E)$, il s'agit de son spectre relativement à l'algèbre unifère $\mathscr{L}(E)$.

PROPOSITION 13. — *Soit $x \in \mathscr{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *x est positif;*

(ii) *x est hermitien, et* $\mathrm{Sp}\, x \subset \mathbf{R}_+$ *;*

(iii) *il existe un élément hermitien y de $\mathscr{L}(E)$ tel que $x = y^2$;*

(iv) *il existe une application linéaire continue z de E dans un espace hilbertien telle que $x = z^*z$.*

(i) $\Rightarrow$ (ii): supposons $x \geqslant 0$. On sait que x est hermitien, donc $\mathrm{Sp}(x) \subset \mathbf{R}$. Montrons que $\mathrm{Sp}(x) \subset \mathbf{R}_+$, c'est-à-dire que $\lambda + x$ est inversible pour tout $\lambda > 0$. Si $\xi \in E$ et si $\|\xi\| = 1$, on a

$$\|(\lambda + x)\xi\| \geqslant ((\lambda + x)\xi|\xi) \geqslant \lambda(\xi|\xi) = \lambda.$$

Ceci prouve que $\lambda + x$ est une application bijective et bicontinue de E sur $\mathrm{Im}(\lambda + x)$, donc que $\mathrm{Im}(\lambda + x)$ est complet et par suite fermé. D'autre part, $\mathrm{Ker}(\lambda + x)^* = \mathrm{Ker}(\lambda + x) = 0$, donc $\mathrm{Im}(\lambda + x)$ est dense dans E (*Esp. vect. top.*, chap. V, 2ᵉ éd., § 1). Donc $\lambda + x$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): si x est hermitien et si $\mathrm{Sp}(x) \subset \mathbf{R}_+$, on peut former $y = x^{1/2}$, et on a $x = y^2$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): évident.

(iv) $\Rightarrow$ (i): si $x = z^*z$, on a, pour tout $\xi \in E$,

$$(x\xi|\xi) = (z^*z\xi|\xi) = (z\xi|z\xi) \geqslant 0.$$

COROLLAIRE. — *Si x, y sont deux éléments positifs* permutables *de $\mathscr{L}(E)$, on a $xy \geqslant 0$.*

En effet, $x^{1/2}$ et $y^{1/2}$ sont permutables, donc

$$xy = y^{1/2}xy^{1/2} = (x^{1/2}y^{1/2})^*(x^{1/2}y^{1/2}) \geqslant 0.$$

Rappelons (*Esp. vect. top.*, chap. V, 2ᵉ éd., § 1) que, pour tout élément hermitien x de $\mathscr{L}(E)$, on a posé

$$m(x) = \inf_{\xi \in E, \|\xi\| = 1} (x\xi|\xi), \qquad M(x) = \sup_{\xi \in E, \|\xi\| = 1} (x\xi|\xi).$$

PROPOSITION 14. — *Soit x un élément hermitien de $\mathscr{L}(E)$*

(i) *$m(x)$ est la borne inférieure de* $\operatorname{Sp} x$, *et $M(x)$ est la borne supérieure de* $\operatorname{Sp}(x)$.

(ii) *Si* $E \neq 0$, *on a* $\|x\| = \sup(|m(x)|, |M(x)|)$.

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Pour que λ minore $\operatorname{Sp}(x)$, il faut et il suffit que $\operatorname{Sp}(x - \lambda) \subset \mathbf{R}_+$, c'est-à-dire que $x \geqslant \lambda$, c'est-à-dire que $m(x) = \lambda$; donc $m(x)$ est la borne inférieure de $\operatorname{Sp}(x)$, et on voit de même que $M(x)$ est la borne supérieure de $\operatorname{Sp}(x)$. D'après (2), on a $\rho(x) = \|x\|$; si $E \neq 0$, $\operatorname{Sp}(x)$ est non vide et $\rho(x) = \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}(x)} |\lambda|$, donc (ii) résulte de (i).

Soient E, F des espaces hilbertiens complexes, et $z \in \mathscr{L}(E\,;F)$. On a $z^*z \in \mathscr{L}(E)$ et $z^*z \geqslant 0$, donc on peut former $(z^*z)^{1/2}$, qui est un élément positif de $\mathscr{L}(E)$.

DÉFINITION 6. — *On dit que $(z^*z)^{1/2}$ est la valeur absolue de z, et on la note $|z|$ ou* $\operatorname{abs}(z)$.

Lorsque $z \in \mathscr{L}(E)$ est normal, on a $|z| = f(z)$ en notant f la restriction à $\operatorname{Sp}(z)$ de la fonction $\zeta \mapsto |\zeta|$ (en effet, $|\zeta| = (\bar{\zeta}\zeta)^{1/2}$ pour tout nombre complexe ζ). En particulier, pour z hermitien, la déf. 6 redonne bien la définition adoptée au n° 5.

PROPOSITION 15. — *Soient $z \in \mathscr{L}(E; F)$,* M *le sous-espace initial de z (c'est-à-dire (Esp. vect. top., loc. cit.) le supplémentaire orthogonal de* $\operatorname{Ker} z$), *et* N *le sous-espace final de z (c'est-à-dire* $\overline{\operatorname{Im} z}$).

(i) *On a* $\operatorname{Ker}(\operatorname{abs} z) = \operatorname{Ker} z$, $\overline{\operatorname{Im}(\operatorname{abs} z)} = M$, $\|\operatorname{abs}(z)\| = \|z\|$.

(ii) *Il existe une application partiellement isométrique u de* E *dans* F *et une seule telle que* $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} z$ *et* $z = u(\operatorname{abs} z)$.

(iii) *u admet* M *pour sous-espace initial,* N *pour sous-espace final.*

(iv) *Soient z_1 un élément positif de* $\mathscr{L}$(E) *et u_1 un élément partiellement isométrique de* $\mathscr{L}$(E; F) *tels que* $\mathrm{Ker}(u_1) = \mathrm{Ker}(z_1)$ *et* $z = u_1 z_1$. *Alors* $z_1 = \mathrm{abs}\, z$ *et* $u_1 = u$.

On a, pour tout $\xi \in \mathrm{E}$,

$$(14) \qquad \|z\xi\|^2 = (z^*z\xi|\xi) = ((\mathrm{abs}\, z)^2\xi|\xi) = \|(\mathrm{abs}\, z)\xi\|^2.$$

Donc $\mathrm{Ker}(z) = \mathrm{Ker}(\mathrm{abs}\, z)$, et $\|\mathrm{abs}\, z\| = \|z\|$. Comme $\mathrm{abs}\, z$ est hermitien, $\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{abs}\, z)}$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Ker}(\mathrm{abs}\, z)$ (*Esp. vect. top.*, chap. V, 2e éd., § 1), d'où (i).

La formule (14) prouve qu'il existe une application isométrique v de $\mathrm{Im}|z|$ sur $\mathrm{Im}\, z$ telle que $z\xi = v(\mathrm{abs}\, z)\xi$ pour tout $\xi \in \mathrm{E}$. Soit u l'unique élément de $\mathscr{L}$(E; F) qui prolonge v et s'annule dans $\mathrm{Ker}\, z$. Alors u possède les propriétées de (ii). L'unicité énoncée dans (ii) est immédiate puisque $\mathrm{E} = (\mathrm{Ker}\, z) \oplus \overline{(\mathrm{Im}\, \mathrm{abs}\, z)}$.

Il est clair que M est le sous-espace initial de u. Son sous-espace final est $u(\mathrm{M}) = \overline{u(\mathrm{Im}\, \mathrm{abs}\, z)} = \overline{\mathrm{Im}\, z} = \mathrm{N}$.

Soient z_1 et u_1 avec les propriétés de (iv). On a

$$z^*z = z_1 u_1^* u_1 z_1,$$

$u_1^* u_1$ est l'orthoprojecteur de noyau $\mathrm{Ker}\, z_1$ (*Esp. vect. top.*, chap. V, 2e éd., § 1), donc d'image $\overline{\mathrm{Im}\, z_1}$. Donc $z^*z = z_1^2$ et par suite $z_1 = (z^*z)^{1/2}$ (prop. g). Alors u_1 coïncide avec u sur $\mathrm{Im}(\mathrm{abs}\, z)$ et sur $\mathrm{Ker}\, z$, donc $u_1 = u$.

On dit que le couple $(u, \mathrm{abs}\, z)$ est la *décomposition polaire* de z.

PROPOSITION 16. — *Soit $(u, |z|)$ la décomposition polaire de z.*
(i) *On a* $|z| = u^* . z$.
(ii) *On a* $|z^*| = u . |z| . u^*$.
(iii) *La décomposition polaire de z^* est* $(u^*, |z^*|)$.

Comme u^*u est l'orthoprojecteur de E sur $\overline{\mathrm{Im}\, |z|}$, on a $u^*z = u^* . u . |z| = |z|$, d'où (i). Ensuite,

$$z^* = |z| . u^* = (u^*u|z|) . u^* = u^* . (u . |z| . u^*).$$

D'autre part, $u|\mathrm{M}$ et $u^*|\mathrm{N}$ sont des isométries réciproques de M sur N et de N sur M ; donc $u . |z| . u^*$ a pour noyau le supplémentaire orthogonal de N, et est positif. Compte tenu de la prop.

15(iv), on voit que $(u^*, u\,.\,|z|\,.\,u^*)$ est la décomposition polaire de z^*, ce qui prouve à la fois (ii) et (iii).

PROPOSITION 17. — *Soit* $(u, |z|)$ *la décomposition polaire de* z. *Pour que* z *soit bijectif, il faut et il suffit que* $|z|$ *soit inversible dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et que* u *soit un isomorphisme de l'espace hilbertien* E *sur l'espace hilbertien* F.

La condition est évidemment suffisante. D'autre part, si z est bijectif, z^*z est inversible dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, et $(z^*z)^{1/2}$ également. En outre, $\mathrm{Ker}\, z = 0$ et $\mathrm{Im}\, z = \mathrm{F}$, donc u applique isométriquement E sur F.

PROPOSITION 18. — *Soient* $z \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, *et* $(u, |z|)$ *la décomposition polaire de* z. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) z *est normal ;*

(ii) u *et* $|z|$ *sont permutables ;*

(iii) *il existe un élément unitaire* v *de* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *permutable à* $|z|$ *tel que* $z = v\,.\,|z|$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : si z est normal, on a $|z^*| = (zz^*)^{1/2} = (z^*z)^{1/2} = |z|$, donc, compte tenu de la prop. 16 (ii),

$$|z|\,.\,u = |z^*|\,.\,u = u\,.\,|z|\,.\,u^*\,.\,u = u\,.\,|z|.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : si $u\,.\,|z| = |z|\,.\,u$, u laisse stables les sous espaces de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ qui coïncide avec u sur $\overline{\mathrm{Im}\,|z|}$ et avec l'identité sur $\mathrm{Ker}\, z$; alors v est unitaire, permutable à $|z|$, et $z = v\,.\,|z|$ supplémentaires orthogonaux $\mathrm{Ker}\,|z|$ et $\overline{\mathrm{Im}\,|z|}$; soit v l'élément.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : si les conditions de (iii) sont remplies, on a

$$zz^* = v\,.\,|z|^2\,.\,v^* = |z|^2\,.\,vv^* = |z|^2 = z^*z.$$

§ 7. — Algèbres de fonctions continues sur un espace compact

1. Sous-algèbres de $\mathscr{C}(\Omega)$ (Ω, *espace compact*)

PROPOSITION 1. — *Soient* Ω *un espace compact,* B *une sous-algèbre unifère de* $\mathscr{C}(\Omega)$. *On suppose* B *munie d'une norme qui fait de* B *une algèbre de Banach.*

(i) *L'injection canonique de* B *dans* $\mathscr{C}(\Omega)$ *diminue les normes.*

(ii) B *est sans radical.*

(iii) *Pour tout* $t \in \mathrm{X}$, *soit* $\varphi(t)$ *le caractère* $f \mapsto f(t)$ *de* B. *Alors* φ *est une application continue de* Ω *dans* $\mathrm{X(B)}$.

(iv) *Si* B *sépare les points de* Ω, φ *est un homéomorphisme de* Ω *sur une partie fermée de* $\mathsf{X}(\mathrm{B})$.

(v) *Si* $\mathsf{X}(\mathrm{B}) = \varphi(\Omega)$, B *est une sous-algèbre pleine de* $\mathscr{C}(\Omega)$.

(vi) *Si* B *est une sous-algèbre involutive pleine de* $\mathscr{C}(\Omega)$ *on a* $\mathsf{X}(\mathrm{B}) = \varphi(\Omega)$.

(vii) *Si* B *est une sous-algèbre pleine de* $\mathscr{C}(\Omega)$, *et s'il existe un* $a \in \mathrm{B}$ *tel que les éléments* $f(a)$ (f, *fonction rationnelle sans pôle sur* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{B}}\, a$) *soient partout denses dans* B, *on a* $\mathsf{X}(\mathrm{B}) = \varphi(\Omega)$.

Nous identifierons Ω à $\mathsf{X}(\mathscr{C}(\Omega))$ et $\mathscr{G}_{\mathscr{C}(\Omega)}$ à l'application identique (§ 3, n° 2). Alors $\varphi = \mathsf{X}(h)$ en désignant par h l'injection canonique de B dans $\mathscr{C}(\Omega)$, d'où (iii). Pour toute $f \in \mathrm{B}$ et tout $t \in \Omega$, on a $(\mathscr{G}_{\mathrm{B}} f)(\varphi(t)) = f(t)$, d'où :

$$\|f\|_{\mathrm{B}} \geqslant \sup|\mathscr{G}_{\mathrm{B}} f| \geqslant \|f\|_{\mathscr{C}(\Omega)} \tag{1}$$

et ceci entraîne (i) et (ii). Si B sépare les points de Ω, φ est injective, d'où (iv) puisque Ω est compact. L'assertion (v) résulte du § 3, prop. 7, et l'assertion (vii) du § 3, prop. 8. Enfin, supposons que B soit une sous-algèbre involutive pleine de $\mathscr{C}(\Omega)$. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal maximal de B et soit Φ l'ensemble des $t \in \Omega$ tels que $f(t) = 0$ pour toute $f \in \mathfrak{J}$. Si $\Phi = \varnothing$, il existe un recouvrement ouvert $(\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_n)$ de Ω et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, une $f_i \in \mathfrak{J}$ telle que $f_i(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathrm{V}_i$. Comme B est involutive, on a

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \bar{f}_i \in \mathfrak{J}.$$

Or $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i \bar{f}_i$ est inversible dans $\mathscr{C}(\Omega)$, donc dans B puisque B est pleine, d'où absurdité. Donc Φ possède au moins un point t_0. Le caractère correspondant de B a un noyau contenant $\mathfrak{J}$, donc égal à $\mathfrak{J}$. Ainsi tout point de $\mathsf{X}(\mathrm{B})$ est l'image par φ d'un point de Ω.

Exemple. — Soient $\Omega = [0, 1]$, B l'algèbre des fonctions $f : \Omega \to \mathbf{C}$ admettant des dérivées continues sur $[0, 1]$ jusqu'à l'ordre n, munie de la norme considérée au § 2, *Exemple* 2. Il est clair que B est une sous-algèbre involutive pleine de $\mathscr{C}(\Omega)$ séparant les points de Ω, donc $\mathsf{X}(\mathrm{B})$ s'identifie à Ω.

PROPOSITION 2. — *Soient* Ω *un espace compact*, B *une sous-algèbre de Banach unifère de* $\mathscr{C}(\Omega)$ (*pour la norme induite*), *séparant les points de* Ω. *On identifie* Ω *à une partie fermée de* $\mathsf{X}(\mathrm{B}) = \Omega'$.

(i) *Pour toute* $f \in \mathrm{B}$, $\mathscr{G}_{\mathrm{B}}f$ *prolonge* f *et on a* $\|f\| = \sup|\mathscr{G}_{\mathrm{B}}f|$, *de sorte que* $\mathscr{G}_{\mathrm{B}}$ *est un isomorphisme isométrique de* B *sur une sous-algèbre de Banach de* $\mathscr{C}(\Omega')$.

(ii) *Soit* B^* *l'ensemble des éléments inversibles de* B. *Pour tout* $\chi \in \Omega'$, *il existe une mesure positive* μ *de masse* 1 *sur* Ω *telle que, pour toute* $f \in \mathrm{B}^*$, *on ait*

$$\log|\chi(f)| = \int_\Omega \log|f(\omega)|\, d\mu(\omega).$$

(iii) *Si* χ *et* μ *possèdent les propriétés de* (ii), *on a, pour toute* $f \in \mathrm{B}$,

$$\chi(f) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega).$$

(iv) *Supposons que tout élément de* $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$ *soit limite uniforme de parties réelles de fonctions de* B. *Pour tout* $\chi \in \Omega'$, *il existe une mesure* $\mu_\chi \geqslant 0$ *et une seule sur* Ω *telle que*

$$\chi(f) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu_\chi(\omega)$$

pour toute $f \in \mathrm{B}$. *En outre, on a*

$$\log|\chi(f)| \leqslant \int_\Omega \log|f(\omega)|\, d\mu_\chi(\omega)$$

pour toute $f \in \mathrm{B}$.

(On convient que $\log 0 = -\infty$. La fonction $\log|f|$ est bornée supérieurement, de sorte que l'intégrale de droite est un nombre fini ou $-\infty$.)

L'assertion (i) résulte des inégalités (1).

Soient $\chi \in \Omega'$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ et $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{B}^*$. Montrons que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \log|\chi(f_i)| \leqslant \sup_{\omega\in\Omega} \sum_{i=1}^n \lambda_i \log|f_i(\omega)|.$$

Par raison de continuité, il suffit de le prouver quand les λ_i sont rationnels, donc, par réduction au même dénominateur, quand $\lambda_i \in \mathbf{Z}$ pour tout i. Mais l'inégalité s'écrit alors

$$\log|\chi(f_1^{\lambda_1} \cdots f_n^{\lambda_n})| \leqslant \sup_{\omega\in\Omega} \log|(f_1^{\lambda_1} \cdots f_n^{\lambda_n})(\omega)|,$$

et résulte du fait que $\|\chi\| = 1$.

Soit B' le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$ engendré par les $\log|f|$, où $f \in \mathrm{B}^*$. Ce qui précède prouve qu'il existe une forme linéaire h de norme $\leqslant 1$ sur B' telle que $\log|\chi(f)| = h(\log|f|)$ pour toute $f \in B^*$. Ensuite, h se prolonge en une forme linéaire μ de norme $\leqslant 1$ sur $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$, c'est-à-dire en une mesure réelle μ sur Ω telle que $\|\mu\| \leqslant 1$. En prenant pour élément f de B^* la constante e ($= \exp 1$), on voit que $1 = \mu(1)$. Donc

$$1 = \mu^+(1) - \mu^-(1) \leqslant \mu^+(1) + \mu^-(1) = \|\mu\| = 1$$

d'où $\mu = \mu^+ \geqslant 0$ et $\|\mu\| = 1$.

Supposons que χ et μ possèdent les propriétés de (ii). Pour toute $f \in B$, on a $\exp f \in B^*$, donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathscr{R}(f)\, d\mu &= \int \log|\exp f|\, d\mu = \log|\chi(\exp f)| \\ &= \log|\exp \chi(f)| = \mathscr{R}\chi(f).\end{aligned}$$

Changeant f en if, on en conclut que $\int_\Omega f\, d\mu = \chi(f)$ pour toute $f \in B$.

Plaçons-nous dans les hypothèses de (iv). L'existence de μ_χ résulte de (ii) et (iii). D'autre part, on a, pour toute $f \in B$, $\mu_\chi(\mathscr{R}f) = \mathscr{R}(\chi(f))$, donc μ_χ est déterminée de manière unique par χ puisque $\mathscr{R}(B)$ est partout dense dans $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$. Soit $f \in B$. Il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une fonction $g \in B$ telle que

$$\mathscr{R}g - \varepsilon \leqslant \log(|f| + \varepsilon) \leqslant \mathscr{R}g + \varepsilon. \tag{2}$$

Soit $h = \exp g \in B^*$. D'après (2), on a

$$|h|e^{-\varepsilon} \leqslant |f| + \varepsilon \tag{3}$$

$$|f| + \varepsilon \leqslant |h|e^{\varepsilon}. \tag{4}$$

D'après (4), on a $|fh^{-1}| \leqslant e^\varepsilon$, d'où $|\chi(fh^{-1})| \leqslant e^\varepsilon$, et par suite

$$\log|\chi(f)| \leqslant \log|\chi(h)| + \varepsilon = \int_\Omega \log|h|\, d\mu_\chi + \varepsilon. \tag{5}$$

D'après (3) et (5), on a

$$\log|\chi(f)| \leqslant \int_\Omega \log(|f| + \varepsilon)\, d\mu_\chi + 2\varepsilon. \tag{6}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que

$$\log|\chi(f)| \leqslant \int_\Omega \log|f|\, d\mu_\chi\,.$$

Nous nous proposons maintenant de réaliser « concrètement » les données Ω, B, Ω', $\mathscr{G}_B$ de la prop. 2.

Soient Λ un ensemble, Ω_1 une partie compacte de $\mathbf{C}^\Lambda$. On notera $\mathrm{P}(\Omega_1)$ la sous-algèbre de Banach unifère de $\mathscr{C}(\Omega_1)$ formée des fonctions sur Ω_1 qui sont limites uniformes sur Ω_1 de fonctions polynômes. Les fonctions coordonnées $z_\lambda|\Omega_1$ engendrent topologiquement $\mathrm{P}(\Omega_1)$, et $\mathrm{P}(\Omega_1)$ sépare les points de Ω_1. Soit Ω'_1 l'enveloppe polynomialement convexe de Ω_1. Comme

$$\sup_{z\in\Omega'_1} |p(z)| = \sup_{z\in\Omega_1} |p(z)|$$

pour tout $p \in \mathbf{C}[(\mathrm{X}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$, les suites de polynômes uniformément convergentes dans Ω_1 se prolongent de manière unique en suites de polynômes uniformément convergentes dans Ω'_1 ; il existe donc un isomorphisme isométrique et un seul de $\mathrm{P}(\Omega_1)$ sur $\mathrm{P}(\Omega'_1)$ qui, pour toute fonction coordonnée z_λ sur $\mathbf{C}^\Lambda$, transforme $z_\lambda|\Omega_1$ en $z_\lambda|\Omega'_1$. Cet isomorphisme sera dit canonique. Ceci posé:

PROPOSITION 3. — *Outre les données de la prop. 2, soit (x_λ) une famille d'éléments engendrant topologiquement l'algèbre unifère* B. *On pose* $\mathrm{A} = \mathscr{C}(\Omega)$. *On considère le diagramme commutatif:*

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Omega' \arrow[d, "\varphi'"] \\ \mathrm{Sp}_\mathrm{A}((x_\lambda)) \arrow[r, "j"'] & \mathrm{Sp}_\mathrm{B}((x_\lambda)) \end{tikzcd}$$

où φ, φ' sont les applications définies par (x_λ), i et j les injections canoniques. Alors:

(i) *φ et φ' sont des homéomorphismes;*

(ii) $\mathrm{Sp}_\mathrm{B}((x_\lambda))$ *est l'enveloppe polynomialement convexe de* $\mathrm{Sp}_\mathrm{A}((x_\lambda))$;

(iii) *φ transforme* A *en* $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_\mathrm{A}((x_\lambda)))$ *et* B *en* $\mathrm{P}(\mathrm{Sp}_\mathrm{A}((x_\lambda)))$;

(iv) *φ' transforme* $\mathscr{G}_\mathrm{B}(\mathrm{B})$ *en* $\mathrm{P}(\mathrm{Sp}_\mathrm{B}((x_\lambda)))$;

(v) *φ et φ' transforment $\mathscr{G}_\mathrm{B}$ en l'isomorphisme canonique de* $\mathrm{P}(\mathrm{Sp}_\mathrm{A}((x_\lambda)))$ *sur* $\mathrm{P}(\mathrm{Sp}_\mathrm{B}((x_\lambda)))$.

Rappelons que φ et φ' sont toujours continus et surjectifs. Ici, φ' est bijectif (§ 3, prop. 9 (i)), et i est injectif, donc φ est injectif. Donc φ et φ' sont des homéomorphismes. L'enveloppe polynomialement convexe de $\Omega_1 = \mathrm{Sp}_\mathrm{A}((x_\lambda))$ est $\Omega'_1 = \mathrm{Sp}_\mathrm{B}((x_\lambda))$ d'après le § 3, cor. 1 de la prop. 9. Notons z_λ ($\lambda \in \Lambda$) les fonctions coordonnées sur $\mathbf{C}^\Lambda$. Il est clair que φ transforme x_λ en $z_\lambda|\Omega_1$ et que φ' transforme $\mathscr{G}_{\mathrm{B}}x_\lambda$ en $z_\lambda|\Omega'_1$, donc φ et φ' transforment B en $\mathrm{P}(\Omega_1)$, $\mathscr{G}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B})$ en $\mathrm{P}(\Omega'_1)$ et $\mathscr{G}_{\mathrm{B}}$ en l'isomorphisme canonique de $\mathrm{P}(\Omega_1)$ sur $\mathrm{P}(\Omega'_1)$.

2. Cas où $\Omega \subset \mathbf{C}^\Lambda$

Soient Λ un ensemble, Ω une partie compacte de $\mathbf{C}^\Lambda$. Puisque $\mathrm{P}(\Omega)$ sépare les points de Ω, on identifiera Ω à une partie de $\mathrm{X}(\mathrm{P}(\Omega))$. Soient z_λ les fonctions coordonnées sur $\mathbf{C}^\Lambda$.

PROPOSITION 4. — (i) *L'application de* $\mathrm{X}(\mathrm{P}(\Omega))$ *sur* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{P}(\Omega)}((z_\lambda))$ *définie par* (z_λ) *est un homéomorphisme* θ *de* $\mathrm{X}(\mathrm{P}(\Omega))$ *sur l'enveloppe polynomialement convexe* Ω' *de* Ω, *qui se réduit à l'identité sur* Ω.

(ii) *Pour toute* $f \in \mathrm{P}(\Omega)$, *l'homéomorphisme* θ *transforme le prolongement* $\mathscr{G}_{\mathrm{P}(\Omega)}f$ *de* f *à* $\mathrm{X}(\mathrm{P}(\Omega))$ *en un prolongement* $\tilde{f}$ *de* f *à* Ω', *et* $f \mapsto \tilde{f}$ *est l'isomorphisme canonique de* $\mathrm{P}(\Omega)$ *sur* $\mathrm{P}(\Omega')$.

Dans la prop. 3, prenons $\mathrm{B} = \mathrm{P}(\Omega)$ et $x_\lambda = z_\lambda$. Alors φ devient l'application identique et l'énoncé de la prop. 3 se réduit à celui de la prop. 4.

COROLLAIRE. — *Si* Ω *est connexe, son enveloppe polynomialement convexe est connexe.*

Si Ω est connexe, les seuls idempotents de $\mathscr{C}(\Omega)$, donc de $\mathrm{P}(\Omega)$, sont 0 et 1. Donc $\mathrm{X}(\mathrm{P}(\Omega))$ est connexe (§ 4, prop. 12), donc l'enveloppe polynomialement convexe de Ω est connexe (prop. 4 (i)).

3. Cas où $\Omega \subset \mathbf{C}$

Soient Ω une partie compacte de $\mathbf{C}$, O_∞ la composante connexe non bornée de $\mathbf{C} - \Omega$, $(\mathrm{O}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ la famille des composantes connexes bornées (les O_i étant deux à deux distinctes). Soit enfin E une partie de $\mathbf{C} - \Omega$. On désignera par $\mathrm{R}_{\mathrm{E}}(\Omega)$ l'adhérence dans $\mathscr{C}(\Omega)$ de l'ensemble des $f|\Omega$, où f est une fonction rationnelle dont tous les pôles sont dans E. C'est une sous-algèbre de Banach unifère de $\mathscr{C}(\Omega)$ qui sépare les points de Ω. Soit z la fonction identique sur Ω. Alors la sous-algèbre fermée pleine de $\mathrm{R}_{\mathrm{E}}(\Omega)$ engendrée par z est $\mathrm{R}_{\mathrm{E}}(\Omega)$. Les éléments de $\mathrm{R}_{\mathrm{E}}(\Omega)$ sont holomorphes dans l'intérieur de Ω.

En particulier, $\mathrm{R}_{\varnothing}(\Omega) = \mathrm{P}(\Omega)$. On pose $\mathrm{R}_{\mathbf{C}-\Omega}(\Omega) = \mathrm{R}(\Omega)$. On notera $\mathrm{I}(\mathrm{E})$ l'ensemble des $i \in \mathrm{I}$ tels que $\mathrm{E} \cap \mathrm{O}_i = \varnothing$, et Ω_{E}

l'ensemble $\Omega \cup (\bigcup_{i \in I(E)} O_i)$; Ω_E est compact, car borné et fermé (son complémentaire dans $\mathbf{C}$ étant ouvert).

PROPOSITION 5. — (i) *L'application de restriction*

$$R_E(\Omega_E) \to R_E(\Omega)$$

est un isomorphisme isométrique de $R_E(\Omega_E)$ *sur* $R_E(\Omega)$.

(ii) $R_E(\Omega_E)$ *est une sous-algèbre pleine de* $\mathscr{C}(\Omega_E)$.

(iii) *Tout caractère de* $R_E(\Omega_E)$ *est défini par un point de* Ω_E.

(iv) *L'application* $\chi \mapsto \chi(z)$ *est un homéomorphisme de* $X(R_E(\Omega))$ *sur* Ω_E.

(v) *Si* E' *est une partie de* $\mathbf{C} - \Omega$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $R_E(\Omega) = R_{E'}(\Omega)$; *b*) $\Omega_E = \Omega_{E'}$; *c*) $I(E) = I(E')$.

Il est clair que l'application de restriction h de $R_E(\Omega_E)$ dans $R_E(\Omega)$ est un morphisme. Comme la frontière de Ω_E est contenue dans Ω, le principe du maximum montre que h est isométrique. Montrons que h est surjectif. Soit $g \in R_E(\Omega)$. Il existe une suite de fonctions rationnelles f_n dont les pôles appartiennent à E et qui convergent uniformément vers g sur Ω; les f_n sont holomorphes dans Ω_E et la frontière de Ω_E est contenue dans Ω, donc, d'après le principe du maximum, les f_n convergent uniformément sur Ω_E vers un élément f de $R_E(\Omega_E)$; et l'on a $g = f|\Omega$. D'où (i).

Soit z_E l'application identique de Ω_E. D'après le § 2, cor. de la prop. 6, $\mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)}\, z_E$ est réunion de $\mathrm{Sp}_{\mathscr{C}(\Omega_E)}\, z_E = \Omega_E$ et de certaines composantes connexes du complémentaire de Ω_E ; si O_i est l'une d'elles, il existe $\lambda \in E \cap O_i$; puisque $(\lambda - z_E)^{-1} \in R_E(\Omega_E)$, on a $\lambda \notin \mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)}\, z_E$, donc O_i n'est pas contenue dans $\mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)}\, z_E$. Ainsi, $\mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)}\, z_E = \Omega_E$. Par ailleurs, $\mathrm{Sp}_{R_E(\Omega)}\, z = \mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)}\, z_E$ d'après (i). Ceci prouve (iv), et (ii), (iii) résultent de la prop. 8 du § 3, appliquée à l'injection canonique de $R_E(\Omega_E)$ dans $\mathscr{C}(\Omega_E)$. Prouvons (v); (*b*) $\Leftrightarrow$ (*c*) est clair, et (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) d'après (iv). Supposons $\Omega_E = \Omega_{E'}$ et montrons que $R_E(\Omega) = R_{E'}(\Omega)$; comme $\Omega_E = \Omega_{E'} = \Omega_{E \cup E'}$, on peut supposer $E \subset E'$; d'après (ii) $R_E(\Omega_E)$ est une sous-algèbre fermée pleine de $\mathscr{C}(\Omega_E)$ donc de $R_{E'}(\Omega_E)$ contenant z_E, d'où

$$R_E(\Omega_E) = R_{E'}(\Omega_E)$$

et d'après (i)

$$R_E(\Omega) = R_{E'}(\Omega).$$

COROLLAIRE 1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) E *rencontre tous les* O_i.

b) *L'application* $\chi \mapsto \chi(z)$ *est un homéomorphisme de* $\mathsf{X}(R_E(\Omega))$ *sur* Ω.

c) $R_E(\Omega) = R(\Omega)$.

Soit $E' = \mathbf{C} - \Omega$. Les conditions *a*), *b*), *c*) sont respectivement équivalentes à $I(E) = I(E')$, $\Omega_E = \Omega_{E'}$ (d'après la prop. 5 (iv)), $R_E(\Omega) = R_{E'}(\Omega)$. Elles sont donc équivalentes entre elles d'après la prop. 5 (v).

COROLLAIRE 2. — *Pour tout* $i \in I$, *soit* λ_i *un point de* O_i. *Soit* f *une fonction complexe holomorphe dans un voisinage ouvert de* Ω. *Alors* $f|\Omega$ *est limite uniforme de restrictions à* Ω *de fractions rationnelles dont les pôles sont certains des* λ_i.

Ceci résulte du cor. 1, et de la prop. 4 du § 4.

APPENDICE

Soient Λ un ensemble, Φ une partie de $\mathbf{C}^\Lambda$. Il est clair que les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) Il existe une famille (P_i) d'éléments de $\mathbf{C}[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ et une famille (M_i) de nombres réels finis ou non telles que Φ soit l'ensemble des $(c_\lambda)\in\mathbf{C}^\Lambda$ vérifiant les inégalités $|P_i((c_\lambda))| \leqslant M_i$.

(ii) Pour qu'un point (c_λ) de $\mathbf{C}^\Lambda$ appartienne à Φ, il faut et il suffit que $|P((c_\lambda))| \leqslant \sup_{c\in\Phi}|P(c)|$ pour tout $P\in\mathbf{C}[(X_\lambda)]$.

Une telle partie de $\mathbf{C}^\Lambda$ est dite *polynomialement convexe.*

Toute intersection de parties polynomialement convexes de $\mathbf{C}^\Lambda$ est polynomialement convexe. Donc, étant donnée une partie quelconque Ψ de $\mathbf{C}^\Lambda$, il existe une plus petite partie polynomialement convexe Φ de $\mathbf{C}^\Lambda$ contenant Ψ. On dit que Φ est l'*enveloppe polynomialement convexe* de Ψ. C'est l'ensemble des $(c_\lambda)\in\mathbf{C}^\Lambda$ tels que $|P((c_\lambda))| \leqslant \sup_{c\in\Psi}|P(c)|$ pour tout $P\in\mathbf{C}[(X_\lambda)]$.

Si Ψ est fermé, $\mathbf{C}^\Lambda - \Psi$ est ouvert, donc localement connexe; donc chaque composante connexe de $\mathbf{C}^\Lambda - \Psi$ est ouverte. Si de plus Λ est fini, le principe du maximum montre que toute composante connexe bornée de $\mathbf{C}^\Lambda - \Psi$ est contenue dans Φ.

Soient Λ' une partie de Λ, $\Psi' = \mathrm{pr}_{\Lambda'}\Psi$, et Φ' l'enveloppe polynomialement convexe de Ψ' dans $\mathbf{C}^{\Lambda'}$. Comme tout élément de $\mathbf{C}[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda'}]$ s'identifie à un élément de $\mathbf{C}[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$, on a $\Phi' \supset \mathrm{pr}_{\Lambda'}\Phi$.

Lemme 1. — *Soient $\Phi \subset \mathbf{C}^\Lambda$ une partie compacte polynomialement convexe, Ω un voisinage de Φ. Il existe une partie finie Λ_0 de Λ telle que, pour toute partie Λ' de Λ contenant Λ_0, $\mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Omega)$ contienne l'enveloppe polynomialement convexe de* $\mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Phi)$.

Puisque Φ est compact, Φ est contenu dans un produit de disques compacts D_λ de centre 0 et de rayons R_λ ($\lambda\in\Lambda$). Pour tout $P\in\mathbf{C}[(X_\lambda)]$, soit Φ_P l'ensemble des $d\in\mathbf{C}^\Lambda$ tels que

$$|P(d)| \leqslant \sup_{c\in\Phi}|P(c)|.$$

On a:

$$\Phi = \Big(\prod_\lambda D_\lambda\Big)\cap\Big(\bigcap_P \Phi_P\Big) \subset \Omega. \tag{1}$$

Comme $\prod_\lambda D_\lambda$ est compact, il existe $P_1, \ldots, P_q \in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$ tels que:

$$\Big(\prod_\lambda D_\lambda\Big)\cap \Phi_{P_1}\cap\ldots\cap\Phi_{P_q} \subset \Omega. \tag{2}$$

Soit Λ_0 l'ensemble des indices des variables figurant effectivement dans $P_1, \ldots, P_q$. Soit Λ' une partie de Λ contenant Λ_0. Soit E la partie de $\mathbf{C}^{\Lambda'}$ définie par les inégalités $|c_\lambda| \leqslant R_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda')$ et $|P_i((c_\lambda))| \leqslant \sup_{c \in \Phi} |P_i(c)|$ $(i = 1, \ldots, q)$. Alors E est polynomialement convexe. D'après (1), $\mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Phi) \subset E$. D'autre part, soit $(c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'} \in E$; soit $(d_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ l'élément de $\mathbf{C}^\Lambda$ défini par $d_\lambda = c_\lambda$ pour $\lambda \in \Lambda'$, $d_\lambda = 0$ pour $\lambda \in \Lambda - \Lambda'$; alors, d'après (2), $(d_\lambda) \in \Omega$, donc $(c_\lambda) \in \mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Omega)$. Ainsi, $E \subset \mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Omega)$, ce qui achève la démonstration.

Lemme 2. — Soient n un entier >0, *et* Φ *une partie compacte polynomialement convexe de* $\mathbf{C}^n$. *Alors* Φ *admet un système fondamental de voisinages compacts polynomialement convexes.*

Il existe un polydisque compact Δ de $\mathbf{C}^n$ dont l'intérieur contient Φ, et une famille $(P_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbf{C}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$, tels que Φ soit l'ensemble des $(z_1, \ldots, z_n) \in \Delta$ vérifiant

$$|P_i(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant M_i$$

pour tout i. Pour toute partie finie J de I et tout $\varepsilon > 0$, soit $\Phi_{J,\varepsilon}$ l'ensemble des $(z_1, \ldots, z_n) \in \Delta$ tels que $|P_i(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant M_i + \varepsilon$ pour $i \in J$. Alors chaque $\Phi_{J,\varepsilon}$ est un voisinage compact polynomialement convexe de Φ, et l'intersection des $\Phi_{J,\varepsilon}$ est Φ. Donc les $\Phi_{J,\varepsilon}$ forment un système fondamental de voisinages de Φ (*Top. gén.*, chap. I, 4e éd., § 9, th. 1).

EXERCICES

§ 1

1) Soient (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{R}^2$, u l'élément de $A = \mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ défini par $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = -e_1$. Montrer que

$$\mathrm{Sp}_A(u) = \varnothing, \quad \mathrm{Sp}_A(u^2) = \{-1\}.$$

2) Soient μ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, H l'espace hilbertien $L^2_{\mathbf{C}}([0, 1], \mu)$, $A = \mathscr{L}(H)$, et $x \in A$ l'opérateur qui transforme la fonction $f(t)$ en la fonction $tf(t)$. Montrer que $\mathrm{Sp}_A\, x = [0, 1]$, mais que x n'admet aucune valeur propre.

3) *a*) Soient H un espace hilbertien admettant une base orthonormale $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, et $A = \mathscr{L}(H)$. Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ tel que $T\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ pour tout i. Soit $T' \in \mathscr{L}(H)$ tel que $T'\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1}$ pour $i \geqslant 1$, $T'\varepsilon_0 = 0$. Montrer que $T'T = 1$, mais que $TT'\varepsilon_0 = 0$, de sorte que $\mathrm{Sp}_A(T'T) \neq \mathrm{Sp}_A(TT')$.

b) Soit A une algèbre unifère noethérienne sur un corps commutatif. Si $x, y \in A$, on a $\mathrm{Sp}(xy) = \mathrm{Sp}(yx)$ (utiliser l'exerc. 8 *b*) d'*Alg.*, chap. VIII, § 2).

4) Soient A une algèbre commutative sur $\mathbf{C}$, $\mathfrak{J}$ un idéal de A, h l'injection canonique de $\mathfrak{J}$ dans A, S l'ensemble des $\chi \in X'(A)$ qui s'annulent sur $\mathfrak{J}$.

a) $X'(h)$ est surjectif.

b) $X'(h)|(X'(A) - S)$ est un homéomorphisme de $X'(A) - S$ sur $X(\mathfrak{J})$. (Soit $\chi_0 \in X'(A) - S$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in A$, $\varepsilon > 0$, et V le voisinage de χ_0 dans $X'(A)$ défini par $|(\chi - \chi_0)(x_i)| \leqslant \varepsilon, (i = 1, \ldots, n)$. Soit $u_0 \in \mathfrak{J}$ tel que $\chi_0(u_0) = 1$. On a $u_i = u_0 x_i \in \mathfrak{J}$. Alors si $|(\chi - \chi_0)(u_i)| \leqslant \delta$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ avec δ assez petit, on a $\chi \in V$.)

5) Dans l'exerc. 4, on prend $A = \mathbf{C}[X, Y]$, $\mathfrak{J} = AX$. L'espace $X(A)$ s'identifie à $\mathbf{C}^2$, $S - \{0\}$ s'identifie à $\{0\} \times \mathbf{C}$. Soit U l'ensemble des $(\xi, \eta) \in \mathbf{C}^2$ tels que $|\xi| < e^{-|\eta|}$. Montrer que $X'(h)(U)$ n'est pas un voisinage de 0 dans $X'(I)$. En déduire que $X'(I)$ ne s'identifie pas à l'espace quotient de $X'(A)$ par la relation d'équivalence que définit $X'(h)$. (A ce sujet, cf. § 3, exerc. 17.)

6) Soient A une algèbre commutative sur un corps commutatif, $\mathfrak{J}$ un idéal maximal de A. Montrer qu'on a $A^2 \subset \mathfrak{J}$ avec $\dim A/\mathfrak{J} = 1$, ou que $A/\mathfrak{J}$ est un corps. (Appliquer à $A/\mathfrak{J}$ l'exerc. 3 d'*Alg.*, chap. I, § 9.) En particulier, si $A^2 = A$, tout idéal maximal de A est régulier.

7) Soient A une algèbre commutative sur un corps commutatif K, $x \in A$ et $\alpha \in K$. L'ensemble des $\chi \in X(A)$ tels que $(\mathscr{G}x)(\chi) = \alpha$ est fermé pour la topologie de Jacobson. (Se ramener au cas où A possède un élément unité, puis au cas où $\alpha = 0$.)

¶ 8) Soient A une algèbre, $\mathfrak{J}$ un idéal bilatère de A, $J^{\mathfrak{J}}(A)$ l'ensemble des idéaux primitifs de A qui ne contiennent pas $\mathfrak{J}$, et $\hat{A}^{\mathfrak{J}}$ l'ensemble des $\pi \in \hat{A}$ telles que $\pi(\mathfrak{J}) \neq 0$.

a) Si $\pi \in \hat{A}^{\mathfrak{J}}$, on a $\pi|\mathfrak{J} \in \hat{\mathfrak{J}}$ (lemme 1 (i)). Si $\pi, \pi' \in \hat{A}$ sont telles que $\pi|\mathfrak{J}, \pi'|\mathfrak{J}$ soient équivalentes, alors π et π' sont équivalentes. (On peut supposer que $\pi(x) = \pi'(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{J}$. Alors, pour tout $y \in A$, $\pi(y)$ et $\pi'(y)$ coïncident sur $\sum_{x \in \mathfrak{J}} \mathrm{Im}\, \pi(x)$, et ce sous-espace est égal à l'espace de π.)

b) Si $\pi \in \hat{\mathfrak{J}}$, π se prolonge en un élément de $\hat{A}^{\mathfrak{J}}$. (Soit $\mathfrak{N}$ un idéal à gauche maximal régulier de $\mathfrak{J}$. Soit g une unité à droite de $\mathfrak{J}$ modulo $\mathfrak{N}$. Supposant que A admet un élément unité, montrer que la relation $A\mathfrak{N} + A(1 - g) = A$ entraînerait $g^2 \in \mathfrak{N}$. Donc $A\mathfrak{N} + A(1 - g)$ est contenu dans un idéal à gauche maximal $\mathfrak{M}$ de A. Montrer que $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{N}, \mathfrak{M} + \mathfrak{J} = A$.)

c) Déduire de *a*) et *b*) que l'application $\mathfrak{J}' \mapsto \mathfrak{J}' \cap \mathfrak{J}$ est un homéomorphisme de $J^{\mathfrak{J}}(A)$ sur $J(\mathfrak{J})$, et que l'application $\pi \mapsto \pi|\mathfrak{J}$ est un homéomorphisme de $\hat{A}^{\mathfrak{J}}$ sur $\hat{\mathfrak{J}}$.

§ 2

1) Soit A l'algèbre des fonctions complexes continues sur **R** tendant vers 0 à l'infini, munie de la norme $\|f\| = \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|$. Alors $\tilde{A}$ s'identifie à l'algèbre des fonctions complexes continues sur **R** tendant vers une limite finie à l'infini. Sur $\tilde{A}$, la norme $\|g\| = \sup_{t \in \mathbf{R}} |g(t)|$ diffère de la norme définie au nº 1.

2) Soient A une algèbre normée, et $b = \inf_{x \neq 0} \|x^2\|/\|x\|^2$. Alors

$$b \leqslant \inf_{x \neq 0} \rho(x)/\|x\| \leqslant \sqrt{b}.$$

3) Soient A une algèbre normée, et $x, y \in A$. On a $\rho(xy) = \rho(yx)$.

4) Soit H un espace hilbertien admettant la base orthonormale $(f_1, f_2, \ldots)$. Soit A l'algèbre normée $\mathscr{L}(H)$. Soit $x \in A$, défini par $x(f_i) = 2^{-i} f_{i+1}$. Montrer que x est quasi-nilpotent, mais non nilpotent.

¶ 5) Soit H un espace hilbertien admettant la base orthonormale $(f_1, f_2, \ldots)$. On définit les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ par $\alpha_m = e^{-k}$ si m est le produit de 2^k par un nombre impair. Soit $x \in \mathscr{L}(H)$ défini par

$$x(f_m) = \alpha_m f_{m+1}.$$

Montrer que x n'est pas quasi-nilpotent. (Observer que

$$\|x^n\| = \sup_m (\alpha_m \alpha_{m+1} \ldots \alpha_{m+n-1}),$$

et évaluer $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2^t - 1}$.) Soit $x_k \in \mathscr{L}(H)$ défini par $x_k(f_m) = 0$ si m est le produit de 2^k par un nombre impair, et $x_k(f_m) = \alpha_m f_{m+1}$ sinon. Montrer que x_k est nilpotent et que $\|x - x_k\|$ tend vers 0.

6) Soient K une partie compacte de **C**, A l'algèbre de Banach des fonctions continues sur K, munie de la norme $\|f\| = \sup_{t \in K} |f(t)|$, f_0 l'élément $z \mapsto z$ de A. Montrer que $\mathrm{Sp}_A f_0 = K$.

7) Soit A une algèbre de Banach unifère. Soit $x \in A$ tel que $\|x - 1\| < 1$. Il existe $y \in A$ tel que $y^2 = x$. (Utiliser un développement en série.)

8) Soit A une algèbre normée unifère. Si $\|x^{-1}\| = \|x\|^{-1}$ pour tout élément inversible x de A, on a $A = \mathbf{C}.1$. (Se ramener au cas où A est complète. Soit $x \in A$, à une distance $\alpha > 0$ de $\mathbf{C}.1$. Si $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ est tel que $x - \lambda_0$ soit inversible, alors $x - \lambda$ est inversible pour $|\lambda - \lambda_0| < \alpha$. En déduire que le spectre de x serait vide.)

9) Soit A une algèbre normée unifère dans laquelle le seul diviseur de zéro topologique à gauche est 0 et le seul diviseur de zéro topologique

à droite est 0. Alors $A = \mathbf{C}.1$. (Si $x \in A$, et si λ est point frontière de $\mathrm{Sp}_{\hat{A}}\, x$, $x - \lambda$ est diviseur de zéro topologique dans $\hat{A}$, donc dans A, donc $x = \lambda$.)

10) Soit A une algèbre normée. Pour tout $x \in A$, on pose :

$$\lambda(x) = \inf_{y \neq 0} \|xy\|/\|y\| \qquad \lambda'(x) = \inf_{y \neq 0} \|yx\|/\|y\|.$$

On a

$$|\lambda(x) - \lambda(y)| \leqslant \|x - y\|, \qquad |\lambda'(x) - \lambda'(y)| \leqslant \|x - y\|,$$

$$\lambda(x)\lambda(y) \leqslant \lambda(xy) \leqslant \|x\|\lambda(y), \qquad \lambda'(x)\lambda'(y) \leqslant \lambda'(xy) \leqslant \lambda'(x)\|y\|.$$

En déduire que l'ensemble des diviseurs de zéro topologiques à gauche (resp. à droite) est fermé.

11) Soit A une algèbre de Banach unifère. L'ensemble des x qui ne sont ni inversibles, ni diviseurs de zéro topologiques, est ouvert dans A.

12) Soient X un espace de Banach complexe, et $x \in A = \mathscr{L}(X)$. Si x est non inversible, x est diviseur de zéro topologique à gauche ou à droite. (Envisager successivement les cas suivants :

1°) x est non injectif;

2°) $\overline{x(X)} \neq X$;

3°) x est injectif, $x(X)$ est partout dense dans X et distinct de X.) Si x applique bicontinûment X sur un sous-espace vectoriel fermé de X distinct de X, ou si x est non injectif et d'image X, alors x est intérieur à l'ensemble des éléments non inversibles de A.

13) Dans l'algèbre A du n° 2, *Exemple* 5, la fonction z n'est ni inversible, ni diviseur de zéro topologique.

14) Soit A une algèbre normée unifère. Soit B l'algèbre normée $\mathscr{L}(A)$. Alors l'image de A par le morphisme $x \mapsto L_x$ est une sous-algèbre pleine de B. (Utiliser *Alg.*, chap. VIII, § 1, prop. 4.) Donc, si $x \in A$, $\mathrm{Sp}_A\, x = \mathrm{Sp}_B\, L_x$.

¶ 15) Soit A une algèbre de Banach.

a) Soit S l'ensemble des suites bornées d'éléments de A, avec la norme $\|(x_n)\| = \sup\|x_n\|$. Soit $\mathfrak{N}$ l'ensemble des $(x_n) \in S$ tels que $\|x_n\|$ tende vers 0. Alors S est une algèbre de Banach, $\mathfrak{N}$ est un idéal bilatère fermé de S. Soit $\varphi : S \mapsto S' = S/\mathfrak{N}$ le morphisme canonique. L'application $x \mapsto \varphi(x, x, x, \ldots) = \theta(x)$ est un isomorphisme isométrique de A sur une sous-algèbre de S'. Tout diviseur de zéro topologique à gauche dans S' est diviseur de zéro à gauche. Pour que $x \in A$ soit diviseur de zéro topologique à gauche, il faut et il suffit que $\theta(x)$ soit diviseur de zéro à gauche dans S'.

b) On suppose que A possède un élément unité. Montrer qu'il existe une algèbre de Banach B et un isomorphisme isométrique de A sur une sous-algèbre de B telle qu'un élément de A soit non inversible si et seulement si son image dans B est un diviseur de zéro à gauche ou à droite. (Utiliser *a*) et les exerc. 12 et 14.)

16) *a*) Soient A une algèbre normée, $\mathfrak{R}$ son radical. Si $x \in \mathfrak{R}$, x est quasi-nilpotent. (On a $\mathrm{Sp}'_A\, x = \{0\}$ et a fortiori $\mathrm{Sp}'_{\hat{A}}\, x = \{0\}$.)

b) Soient A une algèbre de Banach, $\mathfrak{R}$ son radical, $\mathfrak{J}$ un idéal à gauche de A dont tous les éléments sont quasi-nilpotents. Alors $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{R}$.

(On peut supposer que A admet un élément unité. Si $x \in \mathfrak{J}$ et $a \in A$, on a $\mathrm{Sp}(ax) = \{0\}$, donc $1 - ax$ est inversible; donc $x \in \mathfrak{R}$.)

17) Soient A une algèbre de Banach, B une algèbre sur **C** sans radical, φ un morphisme de A sur B. Le noyau de φ est fermé. (Ce noyau est une intersection d'idéaux à gauche maximaux réguliers.)

18) Soient A une algèbre de Banach, π une représentation irréductible non nulle de A dans un espace vectoriel complexe X. Soit ξ_0 un élément non nul de X.

a) L'annulateur $\mathfrak{J}$ de ξ_0 est un idéal à gauche maximal régulier de A; il est fermé.

b) L'application $x \mapsto x\xi_0$ définit par passage au quotient un isomorphisme φ du A-module $A/\mathfrak{J}$ sur le A-module X.

c) Si on transporte par φ la norme de l'espace de Banach $A/\mathfrak{J}$, X devient un espace de Banach, et $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in A$.

d) Si A est primitive (*Alg.*, chap. VIII, § 5, exerc. 5), $A = \{0\}$ ou $\mathbf{C}\,.\,1$ suivant que A possède ou non un élément unité. (Utiliser ce qui précède et le cor. 4 du th. 1.)

¶ 19) Soient A une algèbre de Banach, $\mathfrak{R}$ son radical.

a) Montrer que, si $r \in \mathfrak{R}$, la série

$$-\tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4r)^k$$

converge vers un $x \in \mathfrak{R}$ tel que $x^2 - x + r = 0$.

b) Soit u un élément de A dont la classe dans $A/\mathfrak{R}$ est idempotente. Il existe un idempotent de A congru à u modulo $\mathfrak{R}$. (On peut supposer que A admet un élément unité. Soient $q = u - u^2 \in \mathfrak{R}$, et $x \in \mathfrak{R}$ une solution, construite à l'aide de *a*), de $x^2 - x - q(1 - 4q)^{-1} = 0$. Alors $u - (2u - 1)x$ répond à la question.)

20) Soient A une algèbre de Banach unifère, $x \in A$, ζ un point frontière de $\mathrm{Sp}_A\, x$. La résolvante de x ne peut se prolonger en une fonction continue en ζ.

21) Soient A une algèbre de Banach unifère, Δ une partie ouverte de **C**, $\lambda \mapsto R(\lambda)$ une application de Δ dans A telle que:

$$R(\lambda) - R(\mu) = -(\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu) \tag{1}$$

quels que soient $\lambda, \mu \in \Delta$.

a) Soit $\lambda_0 \in \Delta$. Pour tout $\lambda \in \Delta$ tel que $|\lambda - \lambda_0|\,.\,\|R(\lambda)\| < 1$, on a:

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n\, R(\lambda_0)^{n+1}.$$

b) Pour tout $\lambda \in \Delta$, $(d^n/d\lambda^n)R(\lambda) = (-1)^n\, n!R(\lambda)^{n+1}$.

c) Si R est holomorphe à l'infini, il existe $z, j, x \in A$ tels que $z^2 = 0$, $j^2 = j$, $zj = jz = 0$, $x \in jAj$, et $R(\lambda) = z + jR(\lambda, x)$ pour $|\lambda|$ assez grand. (Ecrire $R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n}$ pour $|\lambda| > \lambda_0$, et exprimer que R satisfait à (1). On peut poser $c_0 = z, c_1 = j, c_2 = x$.)

d) Pour que R soit la restriction à Δ de la résolvante d'un élément de A, il faut et il suffit que $R(\lambda_0)$ soit inversible pour un $\lambda_0 \in \Delta$.

e) Pour tout $x \in A$, la fonction $\lambda \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n x^{n+1}$ satisfait à (1) pour $|\lambda - \lambda_0| \cdot \|x\| < 1$.

¶ 22) *a*) Soient B une algèbre de Banach unifère, $w \in B$, $C > 1$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que les conditions $u \in B$, $\|u\| < C$, $\|uw - w\| < \eta$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1/4C$ impliquent $\|yw - w\| < \varepsilon$, où $y = (1 - \gamma + \gamma u)^{-1}$.

b) Soit A une algèbre de Banach. On suppose qu'il existe une constante C telle que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $x_1, \ldots, x_n \in A$, il existe $u \in A$ avec $\|u\| < C$, $\|ux_1 - x_1\| < \varepsilon, \ldots, \|ux_n - x_n\| < \varepsilon$. Pour tout $z \in A$, il existe $x, y \in A$ tels que $z = xy$, $y \in \overline{Az}$, $\|z - y\| < \delta$. (On peut supposer $C > 1$. Soit $\gamma = 1/4C$. Appliquant *a*) dans $\tilde{A}$, déterminer par récurrence une suite $u_1, u_2, \ldots$ dans A telle que $\|u_n\| < C$, telle que

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma(1 - \gamma)^{k-1} u_k + (1 - \gamma)^n$$

admette un inverse t_n, et telle que $\|t_n z - t_{n-1} z\| < \delta/2^n$, $\|t_1 z - z\| < \delta/2$. Posant $y_n = t_n z$, les y_n tendent vers une limite $y \in A$, x_n tend vers $x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(1 - \gamma)^{k-1} u_k$; x et y ont les propriétés requises.)

c) Soit A une algèbre de Banach possédant la même propriété qu'en *b*). Soit $(z_1, z_2, \ldots)$ une suite d'éléments de A tendant vers 0. Il existe des éléments $x, y_1, y_2, \ldots$ de A tels que $z_n = xy_n$ pour tout n, et que y_n tende vers 0.

23) *a*) Soient E un espace de Banach, $f: \mathbf{C} \to E$ une fonction entière, et $\theta \mapsto P(\theta) = \sum_{\mu=k}^{m} c_\mu e^{\mu i\theta}$ un polynôme trigonométrique ($c_k \neq 0$). On suppose que $|P(\theta)| \cdot \|f(re^{i\theta})\| \leqslant Mr^\alpha$ pour $r \geqslant r_0$ (M, r_0, α étant des constantes $\geqslant 0$). Alors f est un polynôme de degré $\leqslant \alpha$. (Soient $f(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \zeta^\nu$, et $J(r, p) = r^{-p} \int_0^{2\pi} P(\theta) f(re^{i\theta}) e^{-(k+p)i\theta} \, d\theta$. Alors $J(r, p)$ tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$ si $p > \alpha$, et d'autre part $\lim_{r \to +\infty} J(r, p) = c_k a_p$.)

b) Prouver de même que, si α est entier et si $r^{-\alpha}|P(\theta)| \, \|f(re^{i\theta})\|$ tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$, f est un polynôme de degré $< \alpha$.

c) Soient A une algèbre de Banach unifère, x un élément quasi-nilpotent de A. On suppose que, pour un certain entier $n > 0$, $r^{-n}|\cos^n\theta| \cdot \|(1 - \lambda x)^{-1}\|$ tende vers 0 quand r tend vers $+\infty$ ($\lambda = re^{i\theta}$). Alors $x^n = 0$. (Utiliser *b*).)

¶ 24) *a*) Soient E un espace de Banach, $x: \mathbf{C} - \{1\} \to E$ une fonction entière de $1/(\zeta - 1)$, $x(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$, $x(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{-n}$ les développements de x pour $|\zeta| < 1$, $|\zeta| > 1$ respectivement. On suppose $\|a_n\| = o(n^\alpha)$, $\|b_n\| = o(n^\alpha)$ ($\alpha > 0$). Alors $x(\zeta)$ est un polynôme en $1/(\zeta - 1)$ de degré $< \alpha + 1$. (Soit $\varepsilon > 0$. On a $\|x(\zeta)\| \leqslant \varepsilon(1 - r)^{-1-\alpha}$ pour $r_\varepsilon \leqslant r = |\zeta| < 1$, $\|x(\zeta)\| \leqslant \varepsilon(1 - r^{-1})^{-1-\alpha}$ pour $1 < r \leqslant r'_\varepsilon$. Posant $1 - \zeta = (\omega + \frac{1}{2})^{-1}$, $\omega = Re^{i\theta}$, montrer que, pour $0 \leqslant r < 1$ et $R \geqslant 1$, on a

$$(1 - r)^{-1} \leqslant \frac{9}{4}\frac{R}{\cos\theta}$$

et que, pour $1 < r$ et $R \geqslant 1$,

$$(1 - r^{-1})^{-1} \leqslant \frac{9}{4}\frac{R}{\cos\theta}.$$

Poser $y(\omega) = x(\zeta)$ et montrer que $R^{-\alpha-1}|\cos\theta|^{\alpha+1}\|y(Re^{i\theta})\|$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, uniformément en θ. Appliquer alors l'exerc. 23 *b*).)

b) Soient A une algèbre de Banach unifère, $q \in A$ un élément quasi-nilpotent, et $x = 1 + q$. Pour que $q^N = 0$, il faut et il suffit que $\|x^{\pm n}\| = o(n^N)$ quand n tend vers $+\infty$. (Pour voir que la condition est suffisante, montrer, en appliquant *a*), que $R(\lambda, x)$ est un polynôme en $1/(\lambda - 1)$ de degré $\leqslant N$. D'autre part, $R(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n(\lambda - 1)^{-n-1}$.) En déduire que si $\mathfrak{P}$ est le radical de A et si G est un sous-groupe du groupe des éléments inversibles de A tel que $\|x^{\pm n}\| = o(n)$ pour tout $x \in G$, la restriction à G de l'application canonique $A \to A/\mathfrak{P}$ est injective.

25) *a*) Soient A une algèbre normée, et x, y deux éléments de A tels que $xy - yx = y$. Montrer que $y^n = 0$ pour $n > 2\|x\|$. (Utiliser la formule $xy^n - y^nx = ny^n$).

b) Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur **C**. Montrer que, si $\mathfrak{L}$ n'est pas nilpotente, elle contient deux éléments x, y non nuls tels que $[x, y] = y$. (Utiliser le fait qu'il existe un $x \in \mathfrak{L}$ tel que ad(x) soit non nilpotent.)

c) Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Lie réelle ou complexe de dimension finie telle que l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{L}$ possède une norme compatible avec sa structure d'algèbre. Montrer que $\mathfrak{L}$ est nilpotente. (Utiliser *a*) et *b*).)

d) Soient V un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, $\mathfrak{L}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ formée d'endomorphismes nilpotents, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathfrak{L}$. Soit $\alpha > 0$. Montrer qu'il existe une structure d'espace hilbertien sur V telle que $\|x_i\| \leqslant \alpha$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

e) Soient $\mathfrak{L}$ une algèbre de Lie réelle ou complexe, de dimension finie, nilpotente, et U son algèbre enveloppante. Montrer qu'il existe sur U une norme compatible avec sa structure d'algèbre. (En utilisant la méthode de *Groupes et alg. de Lie*, chap. I, § 3, exerc. 5 et § 7, exerc. 3, montrer qu'il existe une famille (π_λ) de représentations de $\mathfrak{L}$ dans des espaces V_λ de dimension finie, ayant la propriété suivante: pour tout $u \in U$, il existe un λ tel que $\pi_\lambda(u) \neq 0$, et $\pi_\lambda(\mathfrak{L})$ est formé pour tout λ d'endomorphismes nilpotents. En munissant chaque V_λ d'une structure hilbertienne fournie par *d*), on obtient dans l'espace hilbertien V somme hilbertienne des V_λ une représentation π de $\mathfrak{L}$ par des endomorphismes continus, d'où un morphisme injectif φ de U dans $\mathscr{L}(V)$. Poser $\|u\| = \|\varphi(u)\|$ pour tout $u \in U$).

f) Soient A une algèbre normée unifère, x et y des éléments de A. Si $A \neq \{0\}$, on a $xy - yx \neq 1$. (Première démonstration: on a

$$\mathrm{Sp}'(xy) = \mathrm{Sp}'(yx);$$

si $xy = yx + 1$, $\mathrm{Sp}(xy)$ se déduit de $\mathrm{Sp}(yx)$ par la translation $z \mapsto z + 1$; en déduire que $\mathrm{Sp}(xy)$ est non borné, ce qui est absurde. Deuxième démonstration: si $[x, y] = 1$, on a $[xy, y] = y$, d'où $y^n = 0$ pour n assez grand d'après *a*); comme $[x, y^p] = py^{p-1}$, en déduire que $y = 0$).

26) Soient A une algèbre normée, et $x \in A$. On dit que x est topologiquement nilpotent si x^n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour cela, il faut et il suffit que $\rho(x) < 1$.

27) Soit A une algèbre de Banach unifère commutative. On suppose que tout idéal fermé de A est de type fini (c'est-à-dire de la forme $Ax_1 + \ldots + Ax_n$ avec $x_1, \ldots, x_n \in A$).

a) Tout idéal $\mathfrak{J}$ de A est fermé. (Ecrivons $\overline{\mathfrak{J}} = Ax_1 + \ldots + Ax_n$ avec $x_1, \ldots, x_n \in A$. Soit $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots)$ une suite d'éléments de $\mathfrak{J}$ tendant vers x_i. Pour $(y_1, \ldots, y_n) \in A^n$, on pose

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \in \overline{\mathfrak{J}}$$
$$\varphi_p(y_1, \ldots, y_n) = x_{1p} y_1 + \ldots + x_{np} y_n \in \mathfrak{J}.$$

On a $\varphi \in \mathscr{L}(A^n, \overline{\mathfrak{J}})$, $\varphi_p \in \mathscr{L}(A^n, \overline{\mathfrak{J}})$, $\|\varphi - \varphi_p\|$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$, et φ est surjectif. En déduire que φ_p est surjectif pour p assez grand, en considérant les transposés de φ et φ_p. Donc $\mathfrak{J} = \overline{\mathfrak{J}}$.)

b) Si A est intègre, $A = \mathbf{C}\,.\,1$. (Utiliser *a*) et l'exerc. 9.)

c) Si le seul élément nilpotent de A est 0, il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que A soit isomorphe à $\mathbf{C}^n$. (Puisque A est noethérien, $\{0\}$ est intersection d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$; ceux-ci sont fermés d'après *a*), et les $A/\mathfrak{p}_i$ sont isomorphes à $\mathbf{C}$ d'après *b*).)

d) Dans le cas général, on a $\dim_{\mathbf{C}} A < +\infty$. (Soit $\mathfrak{R}$ l'ensemble des éléments nilpotents de A, qui est un idéal (fermé) de A. Alors $\dim(A/\mathfrak{R}) < +\infty$ d'après *c*). Comme $\mathfrak{R}$ est un idéal de type fini, $\mathfrak{R}^n = 0$ pour n assez grand. Enfin, chaque $\mathfrak{R}^i/\mathfrak{R}^{i+1}$ est un module de type fini sur $A/\mathfrak{R}$, donc $\dim(\mathfrak{R}^i/\mathfrak{R}^{i+1}) < +\infty$.)

28) Soit A une algèbre unifère sur $\mathbf{C}$, munie d'une topologie localement convexe séparée telle que la multiplication dans A soit séparément continue. Un $a \in A$ est dit régulier s'il existe $r \geqslant 0$ tel que $a - \lambda$ soit inversible pour $|\lambda| \geqslant r$, et tel que l'ensemble des $(a - \lambda)^{-1}$, pour $|\lambda| \geqslant r$, soit borné.

a) Si a est régulier, $\lambda(a - \lambda)^{-1}$ reste borné pour $|\lambda| \geqslant r$.

b) Si l'application $x \mapsto x^{-1}$ est définie dans un voisinage de 1 et continue au point 1, tout élément de A est régulier.

c) Pour tout $a \in A$, soit U_a l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $(a - \mu)^{-1}$ existe et soit borné pour tous les μ d'un voisinage de λ. Soit $S_a = \mathbf{C} - U_a$. Alors S_a est fermé; et, si a est régulier, S_a est compact non vide (pourvu que $A \neq \{0\}$).

d) Soit $a \in A$. La fonction $\lambda \mapsto (a - \lambda)^{-1}$ est holomorphe dans U_a.

e) Soit $a \in A$. Pour que $\lambda \in U_a$, il faut et il suffit que $a - \lambda$ possède un inverse régulier.

f) Si tout élément de A est régulier, et si A est un corps, on a $A = \mathbf{C}\,.\,1$.

29) Soit A une algèbre sur **R** qui soit un corps, munie d'une topologie localement convexe séparée telle que la multiplication dans A soit continue, et telle que l'application $x \mapsto x^{-1}$ soit continue en 1. Alors A est **R**-isomorphe soit à **R**, soit à **C**, soit à **H**. (Si A est commutative et qu'il existe $u \in A$ avec $u^2 = -1$, munir A d'une structure d'algèbre sur **C**, et appliquer l'exerc. 28 *f*). Si A est commutative et qu'il n'existe pas d'élément $u \in A$ tel que $u^2 = -1$, appliquer l'exerc. 28 *f*) à $A \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ qui est un corps. Si A est non commutative, raisonner comme dans *Alg. comm.*, chap. VI, § 6, nº 4, th. 1, troisième cas.)

¶ 30) Soit A l'algèbre sur **C** formée des restrictions à $[0, 1]$ des fonctions rationnelles en une variable à coefficients complexes. Cette algèbre est un corps.

a) On munit A de la topologie de la convergence en mesure (*Intégr.*, chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, nº 11). Alors les applications $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \mapsto xy$ de $A \times A$ dans A sont continues, et l'application $x \mapsto x^{-1}$ de A^* dans A est continue. La topologie de A n'est pas localement convexe.

b) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la suite $(w_{r,n})_{r \in \mathbf{Z}}$ par $w_{-r,n} = (r + 1)^{n(r+1)}$ si $r \geqslant 1$, $w_{0,n} = 1$, $w_{s,n} = (s + 1)^{-(s+1)/n}$ si $s \geqslant 1$. Si $f \in A$, on pose $p_n(f) = \sum_r w_{r,n}|a_r| < +\infty$, où $\sum a_r t^r$ est le développement de Laurent de $f(t)$ en 0. Alors les p_n sont des semi-normes qui définissent sur A une topologie localement convexe métrisable. L'application $(x, y) \mapsto xy$ de $A \times A$ dans A est continue. L'application $x \mapsto x^{-1}$ de A^* dans A n'est pas continue. Enfin, A n'est pas complète pour cette topologie.

31) *a*) Soit A une algèbre sur **C** munie d'une topologie localement convexe. Les conditions suivantes sont équivalentes: α) il existe un système fondamental (U_i) de voisinages convexes équilibrés de 0 tels que $U_i U_i \subset U_i$ pour tout i; β) A est isomorphe à une sous-algèbre d'un produit d'algèbres normées; γ) la topologie de A peut être définie par une famille de semi-normes p_i vérifiant $p_i(xy) \leqslant p_i(x)p_i(y)$ quels que soient $x, y \in A$. Si A vérifie ces conditions, on dit que A est localement *m*-convexe. L'application $(x, y) \mapsto xy$ de $A \times A$ dans A est alors continue. Si A admet un élément unité et si G désigne l'ensemble des éléments inversibles, l'application $x \mapsto x^{-1}$ de G dans A est continue.

b) Soit A une algèbre localement *m*-convexe à élément unité. Le spectre de tout élément de A est non vide. Si A est un corps, $A = \mathbf{C} . 1$.

c) Soit A une algèbre localement *m*-convexe complète. Il existe un ensemble ordonné filtrant croissant I, une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'algèbres de Banach, des morphismes continus $\pi_{ij} : A_j \mapsto A_i$ pour $i \leqslant j$, avec $\pi_{ij}\pi_{jk} = \pi_{ik}$, tels que A soit isomorphe à la sous-algèbre de $\prod_i A_i$ formée des (x_i) tels que $\pi_{ij}(x_j) = x_i$ pour $i \leqslant j$.

d) L'algèbre $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$, munie de la topologie de la convergence compacte, est localement *m*-convexe. L'ensemble des éléments inversibles de $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ et non ouvert.

e) Soient D une partie ouverte de **C**, A l'algèbre des fonctions complexes holomorphes dans D, munie de la topologie de la convergence compacte. Alors A est localement *m*-convexe. L'ensemble des éléments inversibles de A est fermé.

f) L'algèbre des fonctions complexes indéfiniment dérivables sur $[0, 1]$, munie de la topologie de la convergence uniforme de chaque dérivée, est localement *m*-convexe.

g) Soit A l'algèbre des (classes de) fonctions complexes f sur $[0, 1]$ telles que $f \in L^p([0, 1])$ pour tout $p > 1$. Munie des normes $f \mapsto \|f\|_p$ $(p > 1)$, A n'est pas localement *m*-convexe. L'application $(x, y) \mapsto xy$ de $A \times A$ dans A est continue.

§ 3

1) Soient A une algèbre de Banach commutative, $\mathfrak{J}$ un idéal maximal de A. Montrer qu'il n'y a que deux cas possibles: 1) $\mathfrak{J}$ est le noyau d'un caractère de A; 2) $\mathfrak{J}$ est un hyperplan contenant A^2. (Utiliser l'exerc. 6 du § 1.) En particulier, si $\mathfrak{J}$ est non fermé, $\mathfrak{J}$ est un hyperplan partout dense de A contenant A^2. (Pour obtenir un exemple de cette dernière situation, considérer l'exerc. 3.)

2) Soit A l'algèbre de Banach des suites $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ de nombres complexes tendant vers 0, avec $\|x\| = \sup_i |\xi_i|$. Soit $\mathfrak{J}$ l'ensemble des x n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. Alors $\mathfrak{J}$ est un idéal partout dense de A, et n'est contenu dans aucun idéal maximal. (Observer que $A^2 = A$, et utiliser l'exerc. 1.)

3) Soient Λ un ensemble, $p \in [1, +\infty[$, et $A = l^p(\Lambda)$ l'ensemble des $x = (\xi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, où $\xi_\lambda \in \mathbf{C}$ et $\|x\|_p = (\sum_\lambda |\xi_\lambda|^p)^{1/p} < +\infty$. Pour l'addition et la multiplication usuelle, A est une algèbre de Banach. (Si $\|(\xi_\lambda)\|_p \leqslant 1$ et $\|(\eta_\lambda)\|_p \leqslant 1$, on a:

$$\sum_\lambda |\xi_\lambda \eta_\lambda|^p \leqslant (\sum_\lambda |\xi_\lambda|^{p^2})^{1/p} (\sum_\lambda |\xi_\lambda|^{pq})^{1/q}$$

où q est l'exposant conjugué de p, d'où $\|(\xi_\lambda \eta_\lambda)\|_p \leqslant 1$.) On a $A^2 \neq A$ et A^2 est partout dense dans A. L'espace des caractères non nuls de A s'identifie naturellement à Λ muni de la topologie discrète. (Utiliser le fait que le dual de $l^p(\Lambda)$ est $l^q(\Lambda)$.) La transformation de Gelfand devient alors l'application identique et son image dans l'espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini sur Λ est partout dense et non fermée.

4) Soit A l'espace de Banach des fonctions complexes intégrables sur $[0, 1]$ pour la mesure de Lebesgue. Si on pose

$$(f \cdot g)(\omega) = \int_0^\omega f(\omega - \zeta) g(\zeta) \, d\zeta$$

pour $\omega \in [0, 1]$, $f \cdot g$ est définie presque partout et est un élément de A. (Prolonger f et g par 0 dans $\mathbf{R} - [0, 1]$, et utiliser *Intégr.*, chap. VIII, § 4, n° 5, prop. 12.) Alors, A devient une algèbre de Banach commutative. Soit $x \in A$ la fonction constante égale à 1. La fonction x^n est

$$\omega \mapsto \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}.$$

En déduire que A est engendrée par x, que x est quasi-nilpotent, puis que A est égale à son radical. Soit e_n $(n = 1, 2, \dots)$ l'élément de A défini par $e_n(t) = n$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1/n$, $e_n(t) = 0$ pour $t > 1/n$; en utilisant les e_n, montrer que A possède la propriété de l'exerc. 22 du § 2, et en particulier que $A^2 = A$. Combinant avec l'exerc. 1, on voit que A ne possède aucun idéal maximal (régulier ou non, fermé ou non.)

5) Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ une suite de nombres >0 tels que $\alpha_0 = 1$, $\alpha_{m+n} \leqslant \alpha_m + \alpha_n$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \alpha_k^{1/k} = 0$. Soit A l'ensemble des séries formelles $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \xi_k \zeta^k \in \mathbf{C}[[\zeta]]$ telles que $\|x\| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\xi_k| \alpha_k < +\infty$. Montrer que A est une algèbre de Banach commutative unifère engendrée par ζ, et que l'unique idéal maximal de A est l'ensemble des $x \in A$ sans terme constant. (Observer que ζ est quasi-nilpotent.)

6) Dans l'algèbre $\mathbf{C}(X)$ des fractions rationnelles sur $\mathbf{C}$, $\{0\}$ est idéal maximal, mais n'est pas de codimension 1.

7) Soient A une algèbre de Banach unifère commutative, et $\chi \in X(A)$. Pour tout $x \in A$, on pose $\|x\|_\chi = |\chi(x)| + \|x - \chi(x)\|$. Montrer que $x \mapsto \|x\|_\chi$ est une norme, que $\|xy\|_\chi \leqslant \|x\|_\chi \|y\|_\chi$, $\|e\|_\chi = 1$, et

$$\|x\| \leqslant \|x\|_\chi \leqslant 3\|x\| \qquad \text{si } \|e\| = 1.$$

8) Soit A une algèbre de Banach unifère commutative telle que $\|1\| = 1$. Soit N l'ensemble des normes équivalentes à la norme donnée, pour lesquelles A est encore une algèbre de Banach, et pour lesquelles 1 est de norme 1.

a) Soit $x_0 \in A$ tel que $\rho(x_0) < 1$. Pour tout $x \in A$, on pose:

$$\|x\|' = \inf \sum_n \|a_n\|$$

pour toutes les représentations de x sous la forme $a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n$ $(a_0, a_1, \ldots, a_n \in A)$. Montrer que $x \mapsto \|x\|'$ est un élément de N. (Comme $\rho(x_0) < 1$, on a $\|x_0^n\| \leqslant k$ pour tout n, d'où $\|x\| \leqslant k\|x\|'$.) Montrer que $\|x_0\|' \leqslant 1$.

b) Déduire de *a*) que, pour tout $x \in A$,

$$\rho(x) = \inf_{n \in N} n(x).$$

c) Si le seul élément de N est la norme donnée, on a $A = \mathbf{C} . 1$. (Utiliser *b*) et l'exerc. 7.)

9) Soient A une algèbre de Banach commutative, D une application linéaire continue de A dans A telle que $D(ab) = (Da)b + a(Db)$ pour $a, b \in A$.

a) Pour tout $\chi \in X'(A)$ et tout $\lambda \in \mathbf{C}$, la série $\varphi_\lambda(a) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda^n/n!)\chi(D^n a)$ converge; $\lambda \mapsto \varphi_\lambda(a)$ est une fonction entière, et $a \mapsto \varphi_\lambda(a)$ est un caractère de A.

b) Le nombre $\varphi_\lambda(a)$ est indépendant de λ. (Observer que $|\varphi_\lambda(a)| \leqslant \|a\|$ d'après *a*).) Donc $\chi(Da) = 0$.

c) D applique A dans le radical de A. En déduire une nouvelle démonstration de l'exerc. 25 *f*) du § 2.

10) Soit D l'algèbre des fonctions indéfiniment dérivables $f : [0, 1] \to \mathbf{C}$.

a) Soit A une sous-algèbre de D, munie d'une norme faisant de A une algèbre de Banach. Montrer qu'il existe une suite $(m_0, m_1, m_2, \ldots)$ de nombres $\geqslant 0$ finis tels que, pour tout $x \in A$, on ait

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(n)}(t)| = O(m_n).$$

(Soit D_n l'algèbre de Banach des fonctions n fois continûment dérivables sur $[0, 1]$. D'après la prop. 6, l'injection canonique $A \to D_n$ est continue; soit M_n sa norme; si $x \in A$, on a $(1/n!) \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(n)}(t)| \leqslant M_n \|x\|$.)

b) Il n'existe sur D aucune norme qui en fasse une algèbre de Banach. (Pour toute suite $(m_0, m_1, m_2, \ldots)$ de nombres $\geqslant 0$, il existe $f \in D$ telle que $f^{(n)}(0) = nm_n$ pour tout n. Utiliser alors *a*).)

11) *a*) Soient A une algèbre de Banach, χ un morphisme de A dans $\mathbf{C}$. Montrer que $|\chi(x)| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in A$. (Même démonstration que pour le th. 1.)

b) En déduire que la prop. 6 reste valable quand A n'est pas supposée commutative.

12) Soient A une algèbre de Banach unifère, (x_n) une suite d'éléments inversibles de A tendant vers un $x \in A$. Si la suite $(\rho(x_n^{-1}))$ est bornée, et si $x_n x = x x_n$ pour tout n, alors x est inversible. (D'après le cor. de la prop. 5, $\rho(1 - x_n^{-1}x) \leqslant \rho(x_n^{-1})\rho(x_n - x)$, donc $x_n^{-1}x$ est inversible pour n assez grand.)

¶ 13) Soit A l'algèbre de Banach $l^2(\mathbf{N})$ (exerc. 3). Soit A_0 la sous-algèbre formée par les suites qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls. Soit B la somme directe de A_0 et $\mathbf{C}$, avec la multiplication $(f, \alpha)(g, \beta) = (fg, 0)$ pour $f, g \in A_0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, et la norme

$$\|(f, \alpha)\| = \sup(\|f\|, |\alpha - \sum_n f(n)|).$$

Alors $\hat{B}$ est une algèbre de Banach commutative dont le radical $\mathfrak{R}$ est $\mathbf{C} . (0, 1)$, avec $\hat{B}/\mathfrak{R}$ isométriquement isomorphe à A. Soit $\pi : \hat{B} \to \hat{B}/\mathfrak{R}$ le morphisme canonique. Il n'existe aucune sous-algèbre B_1 de $\hat{B}$ supplémentaire de $\mathfrak{R}$ telle que $\pi|B_1 : B_1 \to \hat{B}/\mathfrak{R} = A$ soit un homéomorphisme. (Soit B_1 une telle sous-algèbre. Soit $u_k \in A$ tel que $u_k(k) = 1$, $u_k(k') = 0$ pour $k' \neq k$. Soit $e_k \in B_1$ tel que $\pi(e_k) = u_k$. Montrer que $e_k \in A_0$, que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k/k$ converge dans A mais que $\sum_{k=1}^{\infty} e_k/k$ ne converge pas dans $\hat{B}$.)

14) Dans $\mathbf{C}^2$, soit Ω l'ensemble compact défini par

$$\tfrac{1}{2} \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 \leqslant 1,$$

et soit A la sous-algèbre de $\mathscr{C}(\Omega)$ formée des fonctions qui sont holomorphes dans $\mathring{\Omega}$. Soit U l'ensemble ouvert défini par $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$. En vertu d'un théorème de Hartogs*, pour toute $f \in A$, il existe une fonction $\tilde{f} \in \mathscr{C}(\bar{U})$ et une seule qui est holomorphe dans U et coïncide

* Cf., par exemple, pp. 64–66 de S. BOCHNER et W. T. MARTIN, *Several complex variables*, Princeton Math. Series, Princeton, 1948. (La variable notée *u* dans cette référence est réelle, mais on peut aussi bien la supposer complexe.)

avec f sur Ω. L'injection canonique de A dans $\mathscr{C}(\Omega)$ est un morphisme isométrique h dont l'image est une sous-algèbre pleine de $\mathscr{C}(\Omega)$, mais $\mathsf{X}(h)$ n'est pas surjectif.

15) Soient A et B deux algèbres de Banach commutatives unifères, φ un morphisme unifère de A dans B, (x_λ) une famille d'éléments de A telle que la sous-algèbre pleine fermée de A engendrée par les x_λ soit A. Pour que $\mathsf{X}(\varphi)$ soit surjectif, il faut et il suffit que $\mathrm{Sp}_\mathrm{A}((x_\lambda)) = \mathrm{Sp}_\mathrm{B}((\varphi(x_\lambda)))$. (Utiliser le diagramme (1) du n° 5, où la flèche de droite est bijective d'après la prop. 9.)

16) Soient A une algèbre de Banach commutative, B l'algèbre de Banach des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini sur $\mathsf{X}(\mathrm{A})$. Les conditions suivantes sont équivalentes: (i) A est sans radical et $\mathscr{G}(\mathrm{A})$ est fermé dans B; (ii) $\mathscr{G}$ est un homéomorphisme de A sur $\mathscr{G}(\mathrm{A})$; (iii) il existe une constante $a > 0$ telle que $\|x\|^2 \leqslant a\|x^2\|$ pour tout $x \in \mathrm{A}$.

17) Soient A une algèbre de Banach commutative, $\mathfrak{J}$ un idéal fermé de A, h l'injection canonique de $\mathfrak{J}$ dans A. L'espace $\mathsf{X}'(\mathfrak{J})$ s'identifie à l'espace quotient de $\mathsf{X}'(\mathrm{A})$ par la relation d'équivalence que définit $\mathsf{X}'(h)$. (Utiliser l'exerc. 4*a*) du § 1.)

18) Soient A une algèbre de Banach commutative unifère, x un élément de A. On suppose que la sous-algèbre fermée pleine de A engendrée par x est égale à A, de sorte que l'application $\chi \mapsto \chi(x)$ permet d'identifier $\mathsf{X}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Sp}\, x$. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des fonctions $\mathscr{G}y$ sur $\mathrm{Sp}\, x$, pour y parcourant A. Alors $\check{\mathrm{S}}_{\mathscr{H}}(\mathrm{Sp}\, x)$ (*Intégr.*, chap. IV, 2e éd., § 7, n° 4) est la frontière de $\mathrm{Sp}\, x$ relativement à $\mathbf{C}$. (Pour montrer que $\check{\mathrm{S}}_{\mathscr{H}}(\mathrm{Sp}\, x)$ est contenu dans cette frontière, utiliser le principe du maximum. Réciproquement, soit z_0 un point de cette frontière; pour montrer que $z_0 \in \check{\mathrm{S}}_{\mathscr{H}}(\mathrm{Sp}\, x)$, considérer $(x - z_1)^{-1}$ pour z_1 assez voisin de z_0 dans $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}\, x$.)

19) Soient A une algèbre de Banach commutative unifère, B une sous-algèbre unifère fermée de A, T l'application $\chi \mapsto \chi|\mathrm{B}$ de $\mathsf{X}(\mathrm{A})$ dans $\mathsf{X}(\mathrm{B})$, R la relation d'équivalence dans $\mathsf{X}(\mathrm{A})$ définie par T. Alors T définit par passage au quotient un homéomorphisme de $\mathsf{X}(\mathrm{A})/\mathrm{R}$ sur $\mathrm{T}(\mathsf{X}(\mathrm{A}))$, et pour toute fonction $f = \mathscr{G}_\mathrm{B}(x)$ (où $x \in \mathrm{B}$), $|f|$ atteint son maximum sur $\mathrm{T}(\mathsf{X}(\mathrm{A}))$.

20) Soient Δ le disque $|z| \leqslant 1$ dans $\mathbf{C}$, A l'ensemble des $f \in \mathscr{C}(\Delta)$ qui sont holomorphes dans l'intérieur de Δ, A_1 la sous-algèbre de Banach de $\mathscr{C}(\Delta)$ engendrée par A et la fonction $z \mapsto |z|$. Montrer que $\mathsf{X}(\mathrm{A}_1)$ est homéomorphe à l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ tels que $x_1^2 + x_2^2 \leqslant x_3^2,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 1$.

21) *a*) Soit $(\mathrm{X}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'indéterminées. Pour toute série formelle $f \in \mathbf{C}[[(\mathrm{X}_\lambda)]]_{\lambda\in\Lambda}$, soit $\|f\|$ la somme des valeurs absolues des coefficients. Soit A l'ensemble des $f \in \mathbf{C}[[(\mathrm{X}_\lambda)]]_{\lambda\in\Lambda}$ telles que $\|f\| < +\infty$. Munie de l'addition et de la multiplication usuelle, A est une algèbre de Banach unifère commutative sans radical.

b) Pour toute algèbre de Banach unifère commutative B, il existe une algèbre du type A et un morphisme unifère continu de A sur B.

22) Soit Ω une partie compacte de $\mathbf{C}^n$. L'application

$$(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \mapsto (\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n)$$

est un homéomorphisme de Ω sur une partie compacte polynomialement convexe de $\mathbf{C}^{2n}$. (Soient $A = \mathscr{C}(\Omega)$, z_i les fonctions coordonnées sur $\mathbf{C}^n$. Alors $(z_i|\Omega, \bar{z}_i|\Omega)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système générateur topologique de A, et l'application considérée est l'application de $X(A) = \Omega$ dans $\mathbf{C}^{2n}$ définie par ce système générateur topologique.)

23) Soient $\alpha \in]0, 1[$, Ω l'ensemble des $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbf{C}^2$ tels que $|\zeta_1| \leqslant 1$, $|\zeta_2| \leqslant 1$, Ω_α l'ensemble des $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbf{C}^2$ tels que

$$|\zeta_1| \leqslant 1, \qquad |\zeta_2| \leqslant (1 - \alpha)|\zeta_1| + \alpha.$$

a) Les complémentaires de Ω et Ω_α dans $\mathbf{C}^2$ sont connexes.

b) Ω est l'enveloppe polynomialement convexe de Ω_α. (Si $(\zeta_1^0, \zeta_2^0) \in \Omega$ et si $P \in \mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2]$, il existe $\xi \in \mathbf{C}$ tel que $|\xi| = 1$ et $|P(\zeta_1^0, \zeta_2^0)| \leqslant |P(\xi, \zeta_2^0)|$; or $|P(\xi, \zeta_2^0)| \leqslant \sup\limits_{(\zeta_1, \zeta_2) \in \Omega_\alpha} |P(\zeta_1, \zeta_2)|$.)

24) Soit A une algèbre localement *m*-convexe complète commutative à élément unité.

a) Un élément x de A est inversible si et seulement si $\chi(x) \neq 0$ pour tout caractère continu χ de A. Le radical de A est l'intersection des noyaux des caractères continus de A, donc est fermé.

b) Dans l'exemple de l'exercice 31 *d*) du § 2, soit $\mathfrak{J}$ l'idéal formé des f telles que $f(n) = 0$ pour tout entier $n > 0$ assez grand. Alors tout idéal maximal contenant $\mathfrak{J}$ est dense et de codimension infinie.

§ 4

1) Soient A une algèbre de Banach unifère, G le groupe des éléments inversibles de A.

a) Le sous-groupe de G engendré par exp A est la composante neutre de G.

b) Pour qu'un $x \in A$ soit de la forme $\exp y$ ($y \in A$) il faut et il suffit qu'il soit contenu dans un sous-groupe connexe commutatif de G.

c) Pour qu'un $x \in A$ soit de la forme $\exp y$ ($y \in A$) il suffit que 0 appartienne à la composante connexe non bornée de $\mathbf{C} - \operatorname{Sp} x$.

2) Soient A une algèbre de Banach unifère, G le groupe des éléments inversibles de A, G_1 la composante neutre de G.

a) Soient $x \in A$ et n un entier $\geqslant 0$ tel que $x^n = e$. Montrer que $x \in G_1$. (Le spectre de x est fini. L'ensemble des $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $y(\lambda) = \lambda x + e - \lambda e$ soit inversible est de complémentaire fini, donc connexe. Or, $y(0) = e$, $y(1) = x$.)

b) On suppose A commutative. Tout élément de G/G_1 distinct de l'élément neutre est d'ordre infini. (Si $x \in G$ et $x^n \in G_1$, on a $x^n = \exp y$ avec un $y \in A$ d'après le n° 9, d'où $(x \exp(-y/n))^n = e$. Appliquer *a*).)

3) Soit A une algèbre de Banach commutative unifère.

a) Si j est un idempotent de A, on a $\exp(2i\pi j) = 1$.

b) Soit $p \in A$ tel que $\exp p = 1$. Alors $\operatorname{Sp} p$ se compose d'un nombre fini de points de la forme $2in\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, d'après la prop. 8. Pour $\lambda \notin \operatorname{Sp} p$, on a :

$$\int_0^1 \exp(\xi(p - \lambda 1))\, d\xi = (1 - \exp(-\lambda))(\lambda 1 - p)^{-1}.$$

En déduire que tout point de $\mathrm{Sp}\,p$ est pôle simple de $\mathrm{R}(\lambda, p)$. Appliquant le n° 11, en déduire que $p = 2i\pi \sum_{\nu=1}^{k} n_\nu j_\nu$, où $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{Z}$, et où les j_ν sont des idempotents deux à deux orthogonaux.

¶ 4) *a*) Soient B un espace de Banach complexe, e un point de B tel que $\|e\| = 1$. Pour tout $x \in \mathrm{B}$, la limite:

$$\lim_{\alpha > 0,\, \alpha \to 0} \alpha^{-1}(\|e + \alpha x\| - 1)$$

existe; notons-la $\varphi(x)$. Soit $\psi(x) = \sup_{\varepsilon \in \mathbf{C},\, |\varepsilon| = 1} \varphi(\varepsilon x)$. Alors ψ est une semi-norme majorée par la norme donnée. On a $\psi(x) = \sup_f |f(x)|$, f parcourant l'ensemble des $f \in \mathrm{B}'$ (dual de B) telles que $\|f\| = f(e) = 1$.

b) On suppose désormais que B est une algèbre de Banach dont e est élément unité. On a:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lim_{\alpha > 0,\, \alpha \to 0} \alpha^{-1} \log\|\exp(\alpha x)\| \\ &= \sup_{\alpha > 0} \alpha^{-1} \log\|\exp(\alpha x)\|.\end{aligned}$$

(Observer que $\log\|\exp(\alpha + \alpha')x\| \leqslant \log\|\exp \alpha x\| + \log\|\exp \alpha' x\|$.)

c) En utilisant *b*), montrer que $\|\exp(\lambda x)\| \leqslant \exp(|\lambda|\psi(x))$. En intégrant $\lambda \mapsto \lambda^{-2} \exp(\lambda x)$ sur le cercle $|\lambda| = \rho$, en déduire que

$$\|x\| \leqslant \rho^{-1} \exp(\rho\psi(x)),$$

d'où, en posant $\rho = \psi(x)^{-1}$,

$$\|x\| \leqslant e\psi(x)$$

(e désigne ici, bien entendu, la base des logarithmes népériens).

d) Pour tout x non nul de B, il existe une $f \in \mathrm{B}'$ telle que

$$f(e) = \|f\| = 1, \qquad f(x) \neq 0.$$

(Utiliser *a*) et *c*).)

5) Soient A une algèbre de Banach unifère, $x \in \mathrm{A}$, et B la sous-algèbre de A engendrée par x. Pour que $\mathrm{Sp}\,x$ se compose d'un nombre fini de points qui soient pôles de la résolvante, il faut et il suffit que $\dim \mathrm{B} < +\infty$. (Si $\mathrm{R}(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i(\lambda) a_i$, où $a_i \in \mathrm{A}$ et où F_i est une fonction rationnelle scalaire, le développement de $\mathrm{R}(x, \lambda)$ autour de $\lambda = \infty$ montre que les x^n sont combinaisons linéaires des a_i. Réciproquement, si $\dim \mathrm{B} < +\infty$, il existe un polynôme non nul $f \in \mathbf{C}[\mathrm{X}]$ tel que $f(x) = 0$. Alors $\mathrm{Sp}\,x$ est contenu dans l'ensemble des zéros de f. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,x$ un zéro d'ordre p de $f(\mathrm{X})$; soit $g(z) = f(z)(z - \lambda)^{-p}$ au voisinage de λ et $g(z) = 1$ au voisinage de $\mathrm{Sp}\,x - \{\lambda\}$; alors $g(x)$ est inversible dans A, et $0 = f(x)e_{\{\lambda\}} = g(x)(x - \lambda e)^p e_{\{\lambda\}}$, d'où $(x - \lambda e)^p e_{\{\lambda\}} = 0$ et λ est pôle de la résolvante.)

6) Soient A une algèbre de Banach unifère, $x \in \mathrm{A}$, U un voisinage ouvert de $\mathrm{Sp}\,x$ n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes U_i

($i \in \mathrm{I}$), et $f \in \mathscr{O}(\mathrm{U})$. Pour que $f(x) = 0$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées:

a) pour tout i tel que $\mathrm{Sp}\, x \cap \mathrm{U}_i$ soit infini ou contienne un point singulier essentiel de la résolvante, $f|\mathrm{U}_i = 0$;

b) tout pôle d'ordre p de la résolvante est un zéro d'ordre $\geqslant p$ de f. (Pour la nécessité de *b*), raisonner comme pour l'exerc. 5.)

7) Soit Δ le disque $|z| \leqslant 1$ dans $\mathbf{C}$. Pour toute suite $(c_n)_{n \geqslant 0}$ de nombres complexes tels que $\sum\limits_n |c_n| < +\infty$, soit $f(z) = \sum\limits_n c_n z^n$, qui est continue dans Δ et holomorphe dans $\mathring{\Delta}$. On pose $\|f\| = \sum\limits_n |c_n|$. On obtient ainsi une algèbre de Banach A de fonctions sur Δ, admettant le générateur z. Montrer que $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ s'identifie à Δ. Si $f \in \mathrm{A}$ et si g est holomorphe dans un voisinage ouvert de $f(\Delta)$, on a donc $g \circ f \in \mathrm{A}$.

8) Soient A une algèbre de Banach unifère commutative, et $x \in \mathrm{A}$. Soient S une partie de $\mathrm{X}(\mathrm{A})$ fermée pour la topologie de Jacobson, et f une fonction complexe holomorphe dans un voisinage de $(\mathscr{G}x)(\mathrm{S})$. Il existe un $y \in \mathrm{A}$ tel que $\mathscr{G}y = f \circ \mathscr{G}x$ sur S. (Soit $\mathfrak{J}$ l'intersection des noyaux des $\chi \in \mathrm{S}$. Utiliser le calcul fonctionnel dans $\mathrm{A}/\mathfrak{J}$.)

9) Soit Ω une partie ouverte non vide de $\mathbf{C}$. Montrer qu'il n'existe aucune norme sur $\mathscr{O}(\Omega)$ pour laquelle $\mathscr{O}(\Omega)$ soit une algèbre de Banach. (Utilisant le th. 1 du § 3, montrer que les fonctions de $\mathscr{O}(\Omega)$ seraient bornées.)

10) Soient A une algèbre de Banach unifère, $x \in \mathrm{A}$, et k un entier $\geqslant 0$.

a) On suppose que $\mathrm{Sp}\, x \subset \mathbf{U}$ et que $\|\mathrm{R}(\lambda, x)\| = O((1 - |\lambda|)^k)$ quand $|\lambda|$ tend vers 1. Montrer que $\|x^n\| = O(|n|^k)$ quand n tend vers $\pm\infty$. (Pour tout $\delta > 1$, on a, en utilisant l'intégrale de Cauchy donnant x^n:

$$2\pi\|x^n\| \leqslant \mathrm{M}\frac{\delta^n}{(\delta - 1)^k} + \mathrm{M}\frac{\delta^{-n}}{(1 - \delta^{-1})^k}$$

où M est indépendant de n et δ. Prendre $\delta = n/(n-k)$ quand n tend vers $+\infty$, $\delta = n/(n+k)$ quand n tend vers $-\infty$.)

b) On suppose que $\|x^n\| = O(|n|)^k)$ quand n tend vers $\pm\infty$. Montrer que $\mathrm{Sp}\, x \subset \mathbf{U}$ et que $\|\mathrm{R}(\lambda, x)\| = O((1 - |\lambda|)^{k+1})$ quand $|\lambda|$ tend vers 1. (On a $\rho(x) = \rho(x^{-1}) = 1$, donc $\mathrm{Sp}\, x \subset \mathbf{U}$. Pour $|\lambda| < 1$,

$$\mathrm{R}(\lambda, x) = -x^{-1}(1 + \lambda x^{-1} + \lambda^2 x^{-2} + \lambda^3 x^{-3} + \ldots).$$

En déduire une majoration de $\|\mathrm{R}(\lambda, x)\|$, et raisonner de manière analogue si $|\lambda| > 1$.)

11) Soit X_1 (resp. X_2) l'ensemble des $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$ tels que $\frac{1}{2} \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 \leqslant 1$ (resp. $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leqslant 1$). Soit $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \cup \{(0,0)\} \subset \mathbf{C}^2$. Soient $\mathrm{A} = \mathscr{C}(\mathrm{X})$, et a_1, a_2 les restrictions à X des fonctions coordonnées sur $\mathbf{C}^2$. Le spectre simultané $\mathrm{Sp}_{\mathrm{A}}(z_1, z_2)$ est X. Construire deux morphismes unifères continus distincts de $\mathscr{O}(\mathrm{X})$ dans A transformant z_1 en a_1, z_2 en a_2. (Le premier morphisme est fourni par le th. 1. Le second s'obtient en utilisant le théorème suivant: pour toute fonction f holomorphe dans un voisinage de X_1, il existe une fonction g holomorphe dans un voisinage de X_2 qui coïncide avec f dans un voisinage de X_1 (cf. § 3, exerc. 14).)

¶ 12) Soit A une algèbre de Banach unifère commutative.

a) Pour toute famille finie J d'éléments de A, soit $S(J) \subset \mathbf{C}^J$ le spectre simultané de J. Si J′ prolonge J, la surjection canonique $\mathrm{pr}_{J,J'}$ de $\mathbf{C}^{J'}$ sur $\mathbf{C}^J$ est telle que $\mathrm{pr}_{J,J'}(S(J')) = S(J)$. D'où un morphisme injectif $\varphi_{JJ'}$ de $\mathscr{O}(S(J))$ dans $\mathscr{O}(S(J'))$. Soit $\mathscr{O}(X(A))$ la limite inductive des $\mathscr{O}(S(J))$ relativement aux $\varphi_{JJ'}$ (on indexe les familles finies d'éléments de A par les parties finies de $A \times \mathbf{N}$). Les applications canoniques

$$\varphi_J : \mathscr{O}(S(J)) \to \mathscr{O}(X(A))$$

sont injectives. On munira $\mathscr{O}(X(A))$ de la topologie limite inductive de celles des $\mathscr{O}(X(J))$. Pour tout $a \in A$, la fonction coordonnée au voisinage de $S(a) \subset \mathbf{C}$ définit un élément z_a de $\mathscr{O}(X(A))$.

La surjection continue $X(A) \to S(J)$ définit un morphisme continu $\mathscr{C}(S(J)) \to \mathscr{C}(X(A))$. Les morphismes $\mathscr{O}(S(J)) \to \mathscr{C}(S(J)) \to \mathscr{C}(X(A))$ définissent un morphisme continu:

$$\varphi : \mathscr{O}(X(A)) \to \mathscr{C}(X(A)).$$

Ce morphisme est non injectif en général.

Il existe un morphisme unifère continu φ et un seul de $\mathscr{O}(X(A))$ dans A tel que $\varphi(z_a) = a$ pour tout $a \in A$. (Utiliser le th. 1.) Son composé avec la transformation de Gelfand est φ.

b) Soient E un espace localement convexe séparé, U une partie faiblement ouverte de E, $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction. On dit que f est faiblement holomorphe si, pour tout $u \in U$, il existe un voisinage faiblement ouvert V_u de u, un sous-espace vectoriel fermé F_u de codimension finie de E, et une fonction holomorphe g_u sur $p_u(V_u)$ (p_u désignant l'application canonique de E sur E/F_u) tels que $f|V_u = g_u \circ p_u$. S'il en est ainsi, et si K est une partie faiblement compacte de U, il existe un voisinage faiblement ouvert V_K de K dans U, un sous-espace vectoriel fermé F_K de codimension finie de E, et une fonction holomorphe g_K sur $p_K(V_K)$ (p_K désignant l'application canonique de E sur E/F_K) tels que $f|V_K = g_K \circ p_K$.

Montrer que $\mathscr{O}(X(A))$ est la limite inductive des $\mathscr{O}(S)$, où S parcourt l'ensemble des voisinages faiblement ouverts de X(A) dans le dual de A, et où $\mathscr{O}(S)$ désigne l'algèbre des fonctions faiblement holomorphes dans S, munie de la topologie de la convergence compacte.

§ 5

1) Soient A une algèbre de Banach commutative régulière, $\mathfrak{I}$ un idéal fermé de A. Alors $\mathfrak{I}$ et $A/\mathfrak{I}$ sont des algèbres de Banach commutatives régulières.

2) Soient A une algèbre de Banach commutative régulière sans radical, $\mathfrak{I}$ un idéal de A, χ un point de $h(\mathfrak{I})$, $\mathfrak{J}$ l'ensemble des $x \in A$ tels que $\mathscr{G}x$ soit à support compact disjoint de $\{\chi\}$. Alors $\mathfrak{I} + \mathfrak{J}$ est le plus petit des idéaux $\mathfrak{K}$ de A tels que $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{I}$ et $h(\mathfrak{K}) = \{\chi\}$.

3) Soient A une algèbre de Banach commutative, A′ l'espace de Banach dual de A. Pour tout $x \in A$, soit $\rho(x)$ l'opérateur linéaire dans A′

transposé de la multiplication par x dans A. Pour $x \in A$ et $x' \in A'$, on pose $x * x' = \rho(x) . x'$. Un sous-espace vectoriel de A' est dit invariant s'il est stable pour tous les $\rho(x)$.

a) Pour qu'un élément x' de A' soit proportionnel à un caractère non nul de A, il faut et il suffit que $\mathbf{C}x'$ soit invariant.

b) L'application $V \mapsto V^0$ est une bijection de l'ensemble des idéaux fermés de A sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels invariants faiblement fermés de A'.

c) Si W est un sous-espace vectoriel invariant de A', on note $\sigma(W)$ l'ensemble des caractères appartenant à W. Si W_1, W_2 sont invariants faiblement fermés, et si W est le sous-espace vectoriel faiblement fermé engendré par W_1 et W_2, on a $\sigma(W) = \sigma(W_1) \cup \sigma(W_2)$. (Utiliser *b*).)

d) Soit W un sous-espace vectoriel invariant faiblement fermé de A'. Alors $\sigma(W)$ est l'ensemble des $\chi \in \hat{A}$ tel que $x * x' = 0$ pour tout $x' \in W$ entraîne $\langle x, \chi \rangle = 0$.

e) Si A admet un élément unité, tout sous-espace vectoriel invariant faiblement fermé de A' contient un caractère non nul.

f) Dans la suite de cet exercice, on suppose que A est régulière sans radical et admet un élément unité. Si W est un sous-espace vectoriel invariant faiblement fermé de A', U un voisinage de $\sigma(W)$ dans X(A) alors W est contenu dans le sous-espace vectoriel faiblement fermé de A' engendré par les éléments de U.

g) Si $x' \in A'$, on pose $\sigma(x') = \sigma(W)$, W étant le sous-espace vectoriel invariant faiblement fermé de A' engendré par x'. Si $x \in A$ est tel que $\mathcal{G}x = 1$ sur un voisinage de $\sigma(x')$ on a $x * x' = x'$. (Utiliser *f*).)

h) Si $\sigma(x')$ est réunion de deux ensembles fermés disjoints σ_1 et σ_2, il existe $x'_1, x'_2 \in A'$ tels que $\sigma(x'_1) = \sigma_1$, $\sigma(x'_2) = \sigma_2$, $x' = x'_1 + x'_2$. (Prendre $x'_1 = u_1 * x'$, $x'_2 = u_2 * x'$, avec $\mathcal{G}u_1 = 1$ (resp. 0) au voisinage de σ_1 (resp. σ_2), et $\mathcal{G}u_2 = 1$ (resp. 0) au voisinage de σ_2 (resp. σ_1).)

4) Soient A une algèbre de Banach commutative régulière sans radical, vérifiant la condition de Ditkin, $\mathfrak{J}$ un idéal fermé de A, $x \in \mathfrak{k}(h(\mathfrak{J}))$, F la frontière de $h(Ax)$. Si $F \cap h(\mathfrak{J})$ ne contient aucun ensemble parfait non vide, on a $x \in \mathfrak{J}$. (Imiter le raisonnement de la prop. 5.)

5) Soit A une algèbre de Banach commutative régulière sans radical. On suppose que tout idéal fermé de A est intersection d'idéaux maximaux réguliers. Soit $x \in A$. Soit F l'ensemble des zéros de $\mathcal{G}'x$. Alors x est limite d'éléments $u_n x$, où $u_n \in A$ et $\mathcal{G}'u_n$ est nulle au voisinage de F. (Soit $\mathfrak{J}$ l'ensemble des $y \in A$ tels que $\mathcal{G}y$ soit à support compact disjoint de F. On a $x \in \overline{\mathfrak{J}}$. Utiliser la prop. 4.) En particulier, A vérifie la condition de Ditkin.

6) Soit B l'algèbre des fonctions complexes une fois continûment dérivables sur $[0, 1]$, munie de la norme $\|f\| = \sup|f| + \sup|f'|$. Soit A la sous-algèbre fermée de B formée des $f \in B$ tels que $f(\frac{1}{2}) = 0$. Soit $\mathfrak{J}$ l'idéal fermé de A formé des $f \in A$ tels que $f'(\frac{1}{2}) = 0$.

a) L'espace X(A) s'identifie à $[0, 1] - \{\frac{1}{2}\}$, et A est régulière.

b) $\mathfrak{J}$ est un idéal maximal de A non régulier.

7) *a*) Dans $\mathbf{C}^4$, soit R l'ensemble des points (z_1, z_2, z_3, z_4) tels que:

$$z_1 z_2 = 2, \qquad 1 \leqslant |z_1| \leqslant 2, \qquad z_3 = z_4 = 0.$$

Définissons de même T_1 et T_2 par les conditions

$$T_1: \quad z_1 z_2 = 2, \qquad |z_1| = 1, \qquad |z_3| \leqslant 1, \qquad z_4 = 0.$$

$$T_2: \quad z_1 z_2 = 2, \qquad |z_1| = 2, \qquad |z_3| \leqslant 1, \qquad z_4 = z_3^2.$$

Alors $X = R \cup T_1 \cup T_2$ est polynomialement convexe. (Montrer que X est l'ensemble des (z_1, z_2, z_3, z_4) tels que

$$z_1 z_2 = 2, \qquad |z_1| \leqslant 2, \qquad |z_2| \leqslant 2, \qquad |z_3| \leqslant 1, \qquad z_4(z_4 - z_3^2) = 0,$$

$$|z_4 z_2^k| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |z_1^k(z_4 - z_3^2)| \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots).$$

Soit A la sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}(X)$ engendrée par les restrictions à X des fonctions polynômes sur $\mathbf{C}^4$. Alors X s'identifie à X(A).

b) Soient $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbf{C}$ les cercles de centre 0 et de rayons 1, 2 orientés dans le sens positif. Soient μ_0, μ_1, ν les mesures sur $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_1$ définies par les formes dz/z, $-dz/z$, dz/z^2. Soit $\mu = \mu_0 + \mu_1$, de sorte que $\mu \otimes \nu$ est une mesure sur $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times \Gamma_1$. Soit B l'ensemble des $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in X$ tels que $(z_1, z_3) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times \Gamma_1$. L'application $z \mapsto (z_1, z_3)$ de B dans $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times \Gamma_1$ est un homéomorphisme φ. Soit ρ la mesure $\varphi^{-1}(\mu \otimes \nu)$. Montrer que ρ est orthogonale à A.

c) Soit g la fonction sur X qui est nulle sur $R \cup T_1$ et égale à z_3 sur T_2. Alors $\int g\, d\rho \neq 0$, donc $g \notin A$. Mais, pour tout $z \in X$, g coïncide au voisinage de z avec un élément de A.

§ 6

1) Soit A une algèbre normée, munie d'une involution continue. Si on pose $\|x\|' = \sup(\|x\|, \|x^*\|)$ pour tout $x \in A$, A devient une algèbre normée involutive, et la nouvelle norme est équivalente à l'ancienne.

2) Soit A une algèbre de Banach commutative sans radical. Toute involution de A est continue. (Utiliser le § 3, prop. 6.)

¶ 3) Soit A une algèbre de Banach unifère commutative involutive dont tout caractère est hermitien. On suppose que, pour tout $x \in A$ hermitien non inversible, on a $\|(x - \lambda)^{-1}\| = o(\mathscr{I}(\lambda)^{-2})$ quand λ tend vers 0 avec $\mathscr{I}(\lambda) \neq 0$. Alors tout idéal fermé $\mathfrak{J}$ de A est intersection d'idéaux maximaux. (Soit $\varphi : A \to A/\mathfrak{J}$ le morphisme canonique. Soit $x \in A$ tel que $\varphi(x)$ soit dans le radical de $A/\mathfrak{J}$. Il faut prouver que $\varphi(x) = 0$. Se ramener au cas où x est hermitien. Utiliser alors l'exerc. 23 *c*) du § 2.)

4) Soit A une algèbre de Banach unifère commutative involutive. Pour que tout caractère de A soit hermitien, il faut et il suffit que $1 + xx^*$ soit inversible pour tout $x \in A$. (Si tout caractère de A est hermitien, $\mathscr{G}(1 + xx^*)$ est partout > 0 sur X(A). Si un caractère χ de A est non hermitien, il existe un $x \in A$ hermitien tel que $\chi(x) = i$, d'où $\chi(1 + xx^*) = 0$ et $1 + xx^*$ n'est pas inversible.)

5) Soit A une algèbre de Banach commutative, munie d'une involution telle que $\|x^*x\| = \|x\| \,.\, \|x^*\|$ pour tout $x \in A$. Alors A est une algèbre stellaire. (On a $\|y^2\| = \|y\|^2$ pour y hermitien, d'où $\|y\| = \rho(y)$;

observant que $\mathrm{Sp}' x^* = \overline{\mathrm{Sp}' x}$ pour tout $x \in \mathrm{A}$, on a donc

$$\|x^*\| . \|x\| = \|x^*x\| = \rho(x^*x) \leqslant \rho(x^*)\rho(x) = \rho(x^2) \leqslant \|x\|^2,$$

d'où $\|x^*\| \leqslant \|x\|$ et $\|x^*\| = \|x\|$.)

6) Soient A une algèbre stellaire, N l'ensemble des éléments normaux de A, $x \in \mathrm{N}$, V un voisinage de 0 dans **C**. Il existe un voisinage U de x dans N tel que, pour tout $y \in \mathrm{U}$, on ait $\mathrm{Sp}\, y \subset \mathrm{Sp}\, x + \mathrm{V}$ et $\mathrm{Sp}\, x \subset \mathrm{Sp}\, y + \mathrm{V}$. (Utiliser le cor. du th. 1, la prop. 3 du § 2, et la prop. 10 du § 4.)

7) Soient A une algèbre stellaire commutative, et $x \in \mathrm{A}$. On suppose que la sous-algèbre stellaire de A engendrée par x est égale à A. Alors $\chi \mapsto \chi(x)$ est un homéomorphisme de $\mathrm{X}'(\mathrm{A})$ sur $\mathrm{Sp}' x$.

8) Soient A une algèbre de Banach unifère, $x \in \mathrm{A}$, et $\mathrm{S} = \mathrm{Sp}\, x$. On suppose qu'il existe un morphisme φ de $\mathscr{C}(\mathrm{S})$ dans A qui transforme 1 en 1 et z en x (en désignant par z l'application identique de S.) Alors $\|\varphi(f)\| \geqslant \|f\|$ pour toute $f \in \mathscr{C}(\mathrm{S})$. En particulier, si φ est continu, φ est bicontinu. (On peut supposer A commutative. Soit $\lambda \in \mathrm{S}$. Il existe $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{A})$ tel que $\lambda = \chi(x) = \chi(\varphi(z)) = (\mathrm{X}(\varphi)(\chi))(z)$. Donc $\mathrm{X}(\varphi)(\chi)$ est le caractère $f \mapsto f(\lambda)$ de $\mathscr{C}(\mathrm{S})$. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathrm{S})$. D'après ce qui précède, il existe $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{A})$ tel que $|f|$ atteigne son maximum en $\mathrm{X}(\varphi)(\chi)$. Alors $|\chi(\varphi(f))| = \|f\|$, donc $\|\varphi(f)\| \geqslant \|f\|$.)

9) Soit G un groupe localement compact. Si St(G) possède un élément unité, G est discret. (Utiliser le fait que, dans l'espace hilbertien $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$, l'application identique est limite en norme d'endomorphismes $\gamma(f)$, où γ est la représentation régulière gauche et où $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G})$.)

§ 7

1) Pour tout espace topologique Ω, on note $\mathscr{B}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions complexes continues bornées sur Ω, munie de la norme $\|f\| = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|$ et de l'involution $f \mapsto \bar{f}$.

a) $\mathscr{B}(\Omega)$ est une algèbre stellaire unifère commutative.

b) Pour tout $t \in \Omega$ et toute $f \in \mathscr{B}(\Omega)$, on pose $\chi_t(f) = f(t)$. Alors $t \mapsto \chi_t$ est une application continue φ, dite canonique, de Ω dans $\mathrm{X}(\mathscr{B}(\Omega))$.

c) Si Ω est complètement régulier, φ est un homéomorphisme de Ω sur un sous-espace partout dense de $\mathrm{X}(\mathscr{B}(\Omega))$. (Pour montrer que $\overline{\varphi(\Omega)} = \mathrm{X}(\mathscr{B}(\Omega))$, montrer qu'une fonction complexe continue sur $\mathrm{X}(\mathscr{B}(\Omega))$ nulle sur $\varphi(\Omega)$ est identiquement nulle.) Montrer que $\mathrm{X}(\mathscr{B}(\Omega))$ s'identifie au compactifié de Stone-Čech de Ω (*Top. Gén.*, chap. IX, § 1, exerc. 7).

d) Soient A une sous-algèbre de Banach unifère de $\mathscr{B}(\Omega)$, $\mathrm{R_A}$ la relation d'équivalence dans Ω:

$$f(t) = f(t') \qquad \text{pour toute } f \in \mathrm{A}.$$

Le saturé S pour $\mathrm{R_A}$ d'une partie compacte K de Ω est fermé. (Soit $t \in \bar{\mathrm{S}}$; pour toute $f \in \mathrm{A}$ et tout $\varepsilon > 0$, soit $\mathrm{V}_{f,\varepsilon}$ l'ensemble des $t' \in \Omega$ tels que $|f(t) - f(t')| \leqslant \varepsilon$; si $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{A}$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$,

$$\mathrm{V}_{f_1, \varepsilon_1} \cap \ldots \cap \mathrm{V}_{f_n, \varepsilon_n} \cap \mathrm{K} \neq \varnothing ;$$

donc $\big(\bigcap_{f \in \mathrm{A},\, \varepsilon > 0} \mathrm{V}_{f,\varepsilon}\big) \cap \mathrm{K} \neq \varnothing$, d'où $t \in \mathrm{S}$.)

e) On suppose Ω normal. Soient R une relation d'équivalence fermée dans Ω, $\mathrm{A} = \mathrm{A}_\mathrm{R}$ la sous-algèbre de $\mathscr{B}(\Omega)$ formée des fonctions constantes sur les classes suivant R. Montrer que $\mathrm{R} = \mathrm{R}_\mathrm{A}$. (Utiliser *Top. gén.*, chap. IX, § 4, exerc. 15.)

f) On suppose Ω compact. Alors $\mathrm{R} \mapsto \mathrm{A}_\mathrm{R}$ est une bijection de l'ensemble des relations d'équivalence séparées de Ω sur l'ensemble des sous-algèbres stellaires de $\mathscr{C}(\Omega)$. (Soient A une sous-algèbre stellaire de $\mathscr{C}(\Omega)$, et $\mathrm{R} = \mathrm{R}_\mathrm{A}$. Montrer que R est séparée, et appliquer le théorème de Stone-Weierstrass à l'algèbre de fonctions continues sur Ω/R déduite de A par passage au quotient.)

2) Soient Ω un espace compact, R une relation d'équivalence séparée dans Ω, B une sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}(\Omega)$ contenant A_R (notation de l'exerc. 1). Si $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ coïncide sur chaque classe c suivant R avec un élément g_c de B, alors $f \in \mathrm{B}$. (Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage ouvert saturé V_c de c tel que $|f\, g_c| \leqslant \varepsilon$ sur V_c. Soient $\mathrm{V}_{c_1}, \ldots, \mathrm{V}_{c_n}$ recouvrant Ω. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une partition de l'unité subordonnée à $(\mathrm{V}_{c_1}, \ldots, \mathrm{V}_{c_n})$ et formée de fonctions de A_R. Alors

$$g = u_1 g_{c_1} + \ldots + u_n g_{c_n} \in \mathrm{B},$$

et $|f - g| \leqslant \varepsilon$ partout.)

3) Soient Ω un espace compact, et, pour tout $\omega \in \Omega$, A_ω une algèbre de Banach commutative admettant un élément unité e_ω de norme 1. Soit B l'algèbre de Banach des $(x_\omega) \in \prod_{\omega \in \Omega} \mathrm{A}_\omega$ tels que

$$\|x\| = \sup_{\omega \in \Omega} \|x_\omega\| < +\infty.$$

Soit C une sous-algèbre de Banach de B possédant les propriétés suivantes :

(i) $e = (e_\omega)_{\omega \in \Omega} \in \mathrm{C}$;

(ii) si $x = (x_\omega) \in \mathrm{C}$ et $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, la fonction $\omega \mapsto f(\omega) x_\omega$ est un élément de C ;

(iii) pour tout $x = (x_\omega) \in \mathrm{C}$, la fonction $\omega \mapsto \|x_\omega\|$ est semi-continue supérieurement.

Soit X l'ensemble somme des $\mathrm{X}(\mathrm{A}_\omega)$. Pour tout $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{A}_{\omega_0})$, soit $\varphi(\chi)$ le caractère de C défini par $\varphi(\chi)((x_\omega)) = \chi(x_{\omega_0})$. Montrer que φ définit une bijection de X sur X(C). (Soit $\xi \in \mathrm{X(C)}$. Comme $\mathscr{C}(\Omega)$ peut être identifié à une sous-algèbre de Banach de C, ξ définit un caractère de $\mathscr{C}(\Omega)$, donc un $\omega_0 \in \Omega$. Soient $x = (x_\omega) \in \mathrm{C}$ et $y = (y_\omega) \in \mathrm{C}$, avec $x_{\omega_0} = y_{\omega 0}$; soit $\varepsilon > 0$; on a $\|x_\omega - y_\omega\| < \varepsilon$ dans un voisinage U de ω_0 ; soit $f : \Omega \to [0, 1]$, égale à 1 en ω_0 et à 0 hors de U ; on a $\|fx - fy\| \leqslant \varepsilon$, d'où $|\xi(fx - fy)| \leqslant \varepsilon$, d'où $|\xi(x) - \xi(y)| \leqslant \varepsilon$, d'où $\xi(x) = \xi(y)$. En déduire qu'il existe un $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{A}_{\omega_0})$ tel que $\xi = \varphi(\chi)$).

4) Soit Ω un espace compact tel que l'algèbre de Banach $\mathscr{C}(\Omega)$ soit engendrée par une suite $(j_1, j_2, \ldots)$ d'idempotents. La fonction

$$\omega \mapsto h(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}(2j_n(\omega) - 1)$$

sépare les points de Ω, donc engendre l'algèbre de Banach $\mathscr{C}(\Omega)$.

5) Soit A l'algèbre de Banach définie au § 2, n° 2, *Exemple* 2. Soit $\omega \in [0, 1] = X(A)$. Le plus petit idéal fermé $\mathfrak{J}_\omega$ de A tel que $h(\mathfrak{J}) = \{\omega\}$ est l'ensemble des $f \in A$ telles que $f, f', \ldots, f^{(n)}$ s'annulent en ω. (Utiliser le § 5, prop. 4.) Si $g \in A$, son image canonique dans $A/\mathfrak{J}_\omega$ a pour norme $\sum_{k=0}^{n} (|g^{(k)}(\omega)|/k!)$. L'algèbre $A/\mathfrak{J}_\omega$ est isomorphe à $\mathbf{C}[X]/(X^{n+1})$. Le seul idéal maximal de A contenant $\mathfrak{J}_\omega$ est l'ensemble des $f \in A$ telles que $f(\omega) = 0$.

6) Soient Δ le disque $|\zeta| \leqslant 1$ dans $\mathbf{C}$, et A l'algèbre de Banach définie au § 2, n° 2, *Exemple* 5.

a) Si $x \in A$, x est limite dans A des fonctions:

$$\zeta \mapsto x_n(\zeta) = x\left(\frac{n\zeta}{n+1}\right).$$

Or x_n est limite uniforme de polynômes. Donc ζ est un générateur de A.

b) X(A) s'identifie canoniquement à Δ. (Utiliser la prop. 1 (vii).)

c) Soit S une partie fermée de Δ. Si S possède dans Δ un point non isolé, l'adhérence de S pour la topologie de Jacobson est Δ.

d) Pour $x \in A$, posons $x^*(\zeta) = \overline{x(\bar{\zeta})}$. Alors $x \mapsto x^*$ est une involution isométrique de A, et les seuls caractères de A hermitiens pour cette involution sont définis par les éléments réels de Δ.

e) L'application $x \mapsto x|\mathbf{U}$ est un isomorphisme de A sur $P(\mathbf{U})$. Toute fonction de $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\mathbf{U})$ est limite uniforme de parties réelles de fonctions de $P(\mathbf{U})$.

7) Soient A_1 (resp. A_2) l'algèbre de Banach unifère considérée au § 2, n° 2, *Exemple* 2 (resp. 5), et $A = A_1 \times A_2$. Montrer que A est sans radical, mais que $\mathscr{G}_A(A)$ n'est ni fermé ni partout dense dans $\mathscr{C}(X(A))$. (Utiliser l'exerc. 6.)

¶ 8) Soient Ω un espace compact, B une sous-algèbre de Banach unifère de $\mathscr{C}(\Omega)$ (pour la norme induite), séparant les points de Ω. On identifie Ω à une partie fermée de $X(B) = \Omega'$. Soit B^* l'ensemble des éléments inversibles de B. On dit que B est *logmodulaire* si l'ensemble des fonctions $\log|f|$, pour $f \in B$, est dense dans $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$. (C'est le cas en particulier si l'ensemble des fonctions $\mathscr{R}f$, pour $f \in B$, est dense dans $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$: car $\log|e^f| = \mathscr{R}f$.) Dans la suite, on suppose que B est logmodulaire.

a) Pour tout $\chi \in \Omega'$, il existe une mesure $\mu_\chi \geqslant 0$ et une seule sur Ω telle que $\log|\chi(f)| = \int_\Omega \log|f(\omega)|\, d\mu_\chi(\omega)$ pour toute $f \in B^*$, donc telle que $\chi(f) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu_\chi(\omega)$ pour toute $f \in B$. On a

$$\log|\chi(f)| \leqslant \int_\Omega \log|f(\omega)|\, d\mu_\chi(\omega)$$

pour toute $f \in \mathrm{B}$. La condition $\chi(f) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu_\chi(\omega)$ pour toute $f \in \mathrm{B}$ définit μ_χ de manière unique.

b) Soient $\chi \in \Omega'$, μ une mesure positive sur Ω. Ecrivons $\mu = \mu_1 + \mu_2$ où μ_1 est de base μ_χ, et où μ_2 et μ_χ sont étrangères. Soit $\mathfrak{J}$ le noyau de χ. Alors

$$\inf_{f \in \mathfrak{J}} \int_\Omega |1 - f|^2\, d\mu = \inf_{f \in \mathfrak{J}} \int_\Omega |1 - f|^2\, d\mu_1\,.$$

c) Soient $\chi \in \Omega'$, et h une fonction $\geqslant 0$ de $\mathscr{L}^1(\mu_\chi)$. Soit $\mathfrak{J}$ le noyau de χ. Alors

$$\inf_{f \in \mathfrak{J}} \int_\Omega |1 - f|^2 h\, d\mu_\chi = \exp\left(\int_\Omega (\log h)\, d\mu_\chi\right).$$

d) Pour toute mesure positive μ sur Ω, et tout $p \in [1, +\infty[$, soit $\mathrm{H}^p(\mu)$ l'adhérence de l'image canonique de B dans $\mathrm{L}^p(\mu)$. Soient $\chi \in \Omega'$ et $\mathfrak{J}$ le noyau de χ. Alors $\mathrm{L}^2(\mu_\chi)$ est somme hilbertienne de $\mathrm{H}^2(\mu_\chi)$ et de l'adhérence dans $\mathrm{L}^2(\mu_\chi)$ de l'image canonique de $\overline{\mathfrak{J}}$ (ensemble des conjuguées des fonctions appartenant à $\mathfrak{J}$).

e) L'espace $\mathrm{H}^1(\mu_\chi)$ est l'ensemble des classes $\tilde{h}$ des $h \in \mathscr{L}^1(\mu_\chi)$ telles que $\int_\Omega fh\, d\mu_\chi = 0$ pour toute $f \in \mathfrak{J}$.

f) Soit h une fonction $\geqslant 0$ de $\mathscr{L}^1(\mu_\chi)$. Alors, on a $\tilde{h} = |\tilde{f}|$ avec $\tilde{f} \in \mathrm{H}^1(\mu_\chi)$ et $\int_\Omega f\, d\mu_\chi \neq 0$ si et seulement si $\log h \in \mathscr{L}^1(\mu_\chi)$.

¶ 9) Soient Ω un espace compact, B une sous-algèbre de Banach unifère de $\mathscr{C}(\Omega)$ (pour la norme induite). Tout élément ω de Ω définit un caractère χ_ω de B. Si $\omega, \omega' \in \Omega$, on écrit $\omega \sim \omega'$ lorsque $\|\chi_\omega - \chi_{\omega'}\| \neq 2$.

a) Soient $\omega, \omega' \in \Omega$. S'il existe une suite (f_n) d'éléments de B tels que $\|f_n\| \leqslant 1$, que $|f_n(\omega)|$ tende vers 1 et $\liminf_{n \to \infty} |f_n(\omega) - f_n(\omega')| > 0$, alors on n'a pas $\omega \sim \omega'$. (On peut supposer que $f_n(\omega)$ tend vers 1. Considérer $g_n = (f_n - \lambda_n)(1 - \lambda_n f_n)^{-1}$, où (λ_n) est une suite de nombres de $[0, 1[$ tendant vers 1. On a $\|g_n\| \leqslant 1$. Si la suite (λ_n) est bien choisie, $g_n(\omega)$ tend vers 1 et $g_n(\omega')$ tend vers -1.)

b) Soit R l'ensemble des parties réelles des éléments de B. Si $\omega \sim \omega'$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(\omega) \geqslant cf(\omega')$ pour toute $f \geqslant 0$ de R. (Sinon, il existe $f_1, f_2, \ldots \in \mathrm{R}$ avec $f_n \geqslant 0$, $f_n(\omega') = 1$, $f_n(\omega)$ tendant vers 0; soit $g_n \in \mathrm{B}$ avec $\mathscr{R}g_n = f_n$. Alors $e^{-g_n} \in \mathrm{B}$, $\|e^{-g_n}\| \leqslant 1$, $|e^{-g_n(\omega')}| = 1/e$, $|e^{-g_n(\omega)}|$ tend vers 1, ce qui contredit *a*).) On peut supposer qu'on a aussi $f(\omega') \geqslant cf(\omega)$ pour toute $f \geqslant 0$ de R. Il existe des mesures $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ sur Ω telles que $f(\omega) - cf(\omega') = \alpha(f)$ et $f(\omega') - cf(\omega) = \beta(f)$ pour $f \in \mathrm{R}$. Posant $\mu_\omega = (1 - c^2)^{-1}(c\beta + \alpha)$, $\mu_{\omega'} = (1 - c^2)^{-1}(c\alpha + \beta)$, on a $\mu_\omega(f) = f(\omega)$ et $\mu_{\omega'}(f) = f(\omega')$ pour toute $f \in \mathrm{B}$, et $c\mu_\omega \leqslant \mu_{\omega'}$, $c\mu_{\omega'} \leqslant \mu_\omega$.

c) On suppose encore $\omega \sim \omega'$. Montrer que si μ est une mesure positive sur Ω telle que $\mu(f) = f(\omega)$ pour toute $f \in \mathrm{B}$, il existe une mesure positive μ', sur Ω telle que $\mu'(f) = f(\omega')$ pour toute $f \in \mathrm{B}$ et $c\mu \leqslant \mu'$ pour un $c \in]0, 1[$. (Avec les notations de *b*), poser $\mu' = \mu_{\omega'} - c\mu_\omega + c\mu$.)

d) La relation $\omega \sim \omega'$ est une relation d'équivalence dans Ω. (Utiliser *c*).)

¶ 10) Soient Ω un espace compact, A une sous-algèbre de Banach unifère de $\mathscr{C}(\Omega)$ (pour la norme induite).

a) Une partie K de Ω est dite antisymétrique (relativement à A) si toute $f \in A$ qui est réelle sur K est constante sur K. Toute partie antisymétrique est contenue dans une partie antisymétrique maximale. Une partie antisymétrique maximale est fermée. L'ensemble $\mathfrak{K}$ des parties antisymétriques maximales est une partition de Ω.

b) Soit $A^{\perp}$ l'orthogonal de A dans l'espace de Banach des mesures complexes sur Ω. Soit μ un point extrémal de la boule unité de $A^{\perp}$. Montrer que le support de μ est antisymétrique.

c) Soit $f \in \mathscr{C}(\Omega)$. Si $f|K \in A|K$ pour toute $K \in \mathfrak{K}$, alors $f \in A$. (Appliquer *b*) et le théorème de Krein-Milman). Retrouver à partir de là le théorème de Stone-Weierstrass.

d) Une partie E de Ω est appelée un pic (relativement à A) s'il existe $f \in A$ telle que $\|f\| = 1$ et que E soit l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels $f(\omega) = 1$. On peut alors supposer $|f(x)| < 1$ pour $x \notin E$ (remplacer f par $\frac{1}{2}(1 + f)$). Toute intersection dénombrable non vide de pics est un pic. Si E_1, E_2 sont des pics, $E_1 \cup E_2$ est un pic. (Soient $f_1, f_2 \in A$ avec $f_i = 1$ sur E_i, $|f_i| < 1$ sur $\Omega - E_i$; soit $g_i = \frac{1}{4}(1 - f_i)^{1/3} \in A$; alors $1 - g_1 g_2 = 1$ sur $E_1 \cup E_2$, $|1 - g_1 g_2| < 1$ sur $\Omega - (E_1 \cup E_2)$.)

e) Soit E une intersection de pics. Soit $\mathfrak{J}$ l'ensemble des $f \in A$ nulles sur E. Alors $f \mapsto f|E$ définit une isométrie de $A/\mathfrak{J}$ sur $A|E$.

f) Soit E un pic. Soit $E' \subset E$ un pic relativement à $A|E$. Alors E' est un pic relativement à A.

g) Tout $K \in \mathfrak{K}$ est une intersection de pics. (Utiliser *d*) et *f*).)

h) Si $K \in \mathfrak{K}$, $A|K$ est fermé dans $\mathscr{C}(K)$. (Utiliser *e*) et *g*).)

i) Soit R l'ensemble des parties réelles des éléments de A. On suppose que $\Omega \in \mathfrak{K}$ et que R est stable par multiplication. Alors Ω est réduit à un point. (Soit $x_0 \in \Omega$. Pour $u \in R$, il existe une $f \in A$ et une seule telle que $u = \mathscr{R}f$ et $f(x_0) \in \mathbf{R}$; poser $N(u) = \|f\|$. Alors R est un espace de Banach réel pour N; le théorème du graphe fermé prouve que la multiplication dans R est séparément continue donc continue. En déduire sur $S = R + iR$ une structure d'algèbre de Banach. Soit $p \in R$ avec $p(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. Montrer que, pour tout caractère χ de S, on a $\mathscr{R}\chi(p) > 0$, et en déduire que $\log p \in R$. Supposant $\Omega \neq \{x_0\}$, on peut construire une $f \in A$ telle que $0 < \mathscr{R}f \leqslant 1$ sur Ω, $f(x_0) \in \mathbf{R}$, et telle que $\|f\|$ soit arbitrairement grand. D'après ce qui précède, il existe $V \in A$ avec $|V|^2 = \mathscr{R}f$. On a $\|V\| \leqslant 1$ donc $N(\mathscr{R}V) \leqslant 2$, mais

$$N((\mathscr{R}V)^2) \geqslant \tfrac{1}{2}(\|V^2 + f\| - |\mathscr{I}V^2(x_0)|)$$

est arbitrairement grand.)

j) Si R est stable par multiplication, $A = \mathscr{C}(\Omega)$. (Utiliser *a*), *c*), *h*), *i*).) Par suite, si $A \neq \mathscr{C}(\Omega)$, il existe $u \in R$ telle que $u^2 \notin R$.

CHAPITRE II

Groupes Localement Compacts Commutatifs

Dans tout ce chapitre, la lettre G *désigne un groupe localement compact commutatif muni d'une mesure de Haar notée, sauf mention du contraire,* dx*; les espaces* $L^p(G\,dx)$ *seront simplement notés* $L^p(G)$.

§ 1. — Transformation de Fourier

1. Caractères unitaires d'un groupe localement compact commutatif

DÉFINITION 1. — *On appelle caractère unitaire de* G *une représentation continue de* G *dans le groupe multiplicatif* **U** *des nombres complexes de module* 1.

Autrement dit, un caractère unitaire est une fonction continue χ sur G, à valeurs complexes, telle que :

$$\chi(xy) = \chi(x)\chi(y), \qquad |\chi(x)| = 1 \qquad (x, y \in G).$$

Remarquons que toute représentation continue *bornée* de G dans $\mathbf{C}^*$ est un caractère unitaire.

Il est immédiat que le produit de deux caractères unitaires, l'inverse d'un caractère unitaire, la fonction constante égale à 1 sont des caractères unitaires. Par suite, l'ensemble $\hat{G}$ des caractères unitaires de G est un *groupe* pour la multiplication, d'ailleurs *commutatif.* D'autre part, l'application $(\chi, \chi') \mapsto \chi\chi'^{-1} = \chi\bar{\chi}'$ est continue pour la topologie de la *convergence compacte* et $\hat{G}$ muni de la topologie de la convergence compacte est un *groupe topologique.*

DÉFINITION 2. — *Le groupe topologique* $\hat{G}$ *s'appelle le groupe dual de* G.

Puisque G est localement compact, l'application $(x, \hat{x}) \mapsto \hat{x}(x)$ est *continue sur* $G \times \hat{G}$ (*Top. gén.*, chap. X, 2[e] éd., § 2, th. 2).

Soit H un espace hilbertien de dimension 1, et soit χ un caractère unitaire de G. L'application qui à $x \in G$ fait correspondre l'homothétie de rapport $\chi(x)$ dans H est une représentation linéaire continue isométrique de G dans H. Réciproquement d'ailleurs, toute représentation linéaire continue isométrique de G dans H est obtenue par ce procédé. Posons alors pour $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$:

$$\chi(\mu) = \int_G \chi(x)\, d\mu(x). \tag{1}$$

Il résulte de la prop. 11 d'*Intégr.*, chap. VIII, § 3 que l'application $\mu \mapsto \chi(\mu)$ est un *caractère* $\neq 0$ de l'algèbre de Banach involutive $\mathscr{M}^1(G)$. On a ainsi défini une application, dite *canonique*, de $\hat{G}$ dans $X(\mathscr{M}^1(G))$. De plus, on a :

$$\chi(\mu^*) = \int_G \chi(x^{-1})\, d\bar{\mu}(x) = \int_G \overline{\chi(x)}\, d\bar{\mu}(x) = \overline{\chi(\mu)}$$

et le caractère $\mu \mapsto \chi(\mu)$ est *hermitien.*

Par restriction à la sous-algèbre de Banach involutive $L^1(G)$, on obtient un caractère hermitien ζ_χ de $L^1(G)$; on a pour $f \in L^1(G)$:

$$\zeta_\chi(f) = \int f(x)\chi(x)\, dx. \tag{2}$$

Remarquons que $\zeta_\chi \neq 0$: si $f \in \mathscr{K}(G)$ tend vers la mesure de Dirac ε_e dans $\mathscr{C}'(G)$ muni de la topologie faible (*Intégr.*, chap. VIII, § 2, cor. 1 du lemme 4), alors $\zeta_\chi(f)$ tend vers $\chi(\varepsilon_e) = 1 \neq 0$.

Proposition 1. — *L'application* $j : \chi \mapsto \zeta_\chi$ *est un homéomorphisme de* $\hat{G}$ *sur* $X(L^1(G))$.

Comme $\hat{G}$ est une partie bornée de $L^\infty(G)$, l'injection de $\hat{G}$ dans L^∞ muni de la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$ est continue. Donc j est *continue.* Si $\chi \in \hat{G}$, et si $f \in L^1(G)$, on a :

$$\zeta_\chi(\varepsilon_x * f) = \chi(x)\zeta_\chi(f)$$

ce qui montre (en prenant f telle que $\zeta_\chi(f) \neq 0$) que j est *injective.*

Soit $\zeta \in X(L^1(G))$ et soit $f \in L^1(G)$ telle que $\zeta(f) \neq 0$. Posons pour $x \in G$:

$$\chi(x) = \zeta(\varepsilon_x * f)/\zeta(f). \tag{3}$$

Comme l'application $x \mapsto \varepsilon_x * f$ de G dans $L^1(G)$ est continue (*Intégr.*, chap. VIII, § 2, prop. 8), la fonction χ est *continue.* Elle est *bornée* car

$$|\chi(x)| \leqslant \|\varepsilon_x * f\|/|\zeta(f)| = \|f\|/|\zeta(f)|.$$

Soit maintenant $\mathfrak{B}$ une base du filtre des voisinages de e, formée de voisinages compacts. Pour tout $V \in \mathfrak{B}$, soit g_V une fonction continue positive, nulle en dehors de V et d'intégrale égale à 1. On sait (*Intégr.*, chap. VIII, § 4, prop. 19) que

$$\varepsilon_x * f = \lim \varepsilon_x * g_V * f$$

(limite dans l'espace $L^1(G)$ suivant le filtre des sections de $\mathfrak{B}$). Comme $\zeta(\varepsilon_x * g_V * f) = \zeta(\varepsilon_x * g_V)\zeta(f)$, on a donc :

$$\chi(x) = \lim \zeta(\varepsilon_x * g_V)$$

et pour tout $h \in L^1(G)$

$$\zeta(\varepsilon_x * h) = \lim \zeta(\varepsilon_x * g_V * h) = (\lim \zeta(\varepsilon_x * g_V))\zeta(h) = \chi(x)\zeta(h).$$

Par suite, on a pour $x, y \in G$:

$$\chi(xy) = \zeta(\varepsilon_x * \varepsilon_y * f)/\zeta(f) = \chi(x)\zeta(\varepsilon_y * f)/\zeta(f) = \chi(x)\chi(y)$$

et χ est un *caractère unitaire* de G. De plus, si $g \in L^1(G)$, on a $g * f = \int (\varepsilon_x * f)g(x)\,dx$ dans $L^1(G)$ (*Intégr.*, chap. VIII, § 1, prop. 7), d'où :

$$\zeta(g)\zeta(f) = \zeta(g * f) = \int \zeta(\varepsilon_x * f)g(x)\,dx = \zeta(f)\int \chi(x)g(x)\,dx$$
$$= \zeta_\chi(g)\zeta(f)$$

d'où $\zeta = \zeta_\chi$. Par suite, j est *surjective*, donc bijective.

Enfin l'ensemble W des $\zeta' \in X(L^1(G))$ tels que $\zeta'(f) \neq 0$ est un *voisinage ouvert* de ζ dans $X(L^1(G))$. Si $\zeta' \in W$, on a d'après ce qui précède :

$$j^{-1}(\zeta')(x) = \zeta'(\varepsilon_x * f)/\zeta'(f).$$

Soit K une partie compacte de G. L'ensemble des $\varepsilon_x * f$ pour $x \in K$ est alors compact dans $L^1(G)$. Comme $X(L^1(G))$ est borné donc équicontinu dans $L^\infty(G)$, $\zeta'(\varepsilon_x * f)$ converge uniformément sur K vers $\zeta(\varepsilon_x * f)$ lorsque ζ' tend vers ζ dans W (*Top. gén.*, chap. X, 2ᵉ éd., § 2, th. 1). Il en résulte aussitôt que j^{-1} est *continue*, ce qui achève la démonstration.

Nous identifierons désormais tout caractère unitaire χ de G au caractère $f \mapsto \int f(x)\chi(x)\,dx$ de $L^1(G)$.

Remarques. — 1) Le fait que j soit *bijective* est un cas particulier de la correspondance, qui sera étudiée ailleurs, entre représentations continues d'un groupe localement compact quelconque H et représentations continues de l'algèbre $L^1(H)$.

2) L'application canonique de $\hat{\mathrm{G}}$ dans $\mathrm{X}(\mathscr{M}^1(\mathrm{G}))$ n'est pas en général surjective (§ 2, exerc. 14).

COROLLAIRE 1. — *Tout caractère de* $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ *est hermitien. L'application canonique de* $\mathrm{X}(\mathrm{St}(\mathrm{G}))$ (Chap. I, § 6, n° 7) *dans* $\mathrm{X}(\mathrm{L}^1(\mathrm{G}))$ *est un homéomorphisme.*

La première assertion résulte de ce qui précède. La seconde résulte de la première et du Chap. I, § 6, cor. de la prop. 10.

COROLLAIRE 2. — *Le groupe topologique* $\hat{\mathrm{G}}$ *est localement compact.*

Nous identifierons désormais $\hat{\mathrm{G}}$, $\mathrm{X}(\mathrm{L}^1(\mathrm{G}))$ et $\mathrm{X}(\mathrm{St}(\mathrm{G}))$. Pour $x \in \mathrm{G}$ et $\hat{x} \in \hat{\mathrm{G}}$, nous noterons $\langle \hat{x}, x \rangle$ le nombre complexe $\hat{x}(x)$. On dit que x et $\hat{x}$ sont *orthogonaux* si $\langle \hat{x}, x \rangle = 1$. Soit A une partie de G (resp. $\hat{\mathrm{G}}$); l'ensemble des éléments de $\hat{\mathrm{G}}$ (resp. G) orthogonaux à A est évidemment un *sous-groupe fermé* de $\hat{\mathrm{G}}$ (resp. G) qu'on appelle *orthogonal* de A et qu'on note $\mathrm{A}^{\perp}$.

Pour $x \in \mathrm{G}$, l'application $\hat{x} \mapsto \langle \hat{x}, x \rangle$ est un caractère unitaire $\eta(x)$ du groupe commutatif localement compact $\hat{\mathrm{G}}$: ceci résulte immédiatement de la définition même de la multiplication dans $\hat{\mathrm{G}}$ et du fait que l'application $(x, \hat{x}) \mapsto \langle \hat{x}, x \rangle$ est continue. Nous avons ainsi défini une application η de G dans son bidual $\hat{\hat{\mathrm{G}}}$, application dite *canonique*. De plus, on a $\eta(xy) = \eta(x)\eta(y)$ et η est continue : ceci résulte de la continuité de l'application $(x, \hat{x}) \mapsto \langle \hat{x}, x \rangle$ et de la prop. 9, *Top. gén.*, chap. X, 2ᵉ éd., § 2. Ainsi, *l'application canonique* η *de* G *dans* $\hat{\hat{\mathrm{G}}}$ *définie par :*

$$\langle \eta(x), \tilde{\mathrm{A}} \rangle = \langle \tilde{\mathrm{A}}, x \rangle \qquad (x \in \mathrm{G}, \tilde{\mathrm{A}} \in \hat{\mathrm{G}})$$

est un morphisme continu de G *dans* $\hat{\hat{\mathrm{G}}}$. Nous verrons (th. 2, n° 5) que η est en fait un *isomorphisme* de G sur $\hat{\hat{\mathrm{G}}}$.

2. Définition de la transformation de Fourier

DÉFINITION 3. — *On appelle transformée de Fourier de* $\mu \in \mathscr{M}^1(\mathrm{G})$ *la fonction* $\mathscr{F}_{\mathrm{G}}\mu = \mathscr{F}\mu$ (*notée parfois aussi* $\hat{\mu}$) *sur* $\hat{\mathrm{G}}$ *définie par :*

$$(\mathscr{F}\mu)(\hat{x}) = \int \overline{\langle \hat{x}, x \rangle}\, d\mu(x). \tag{4}$$

On appelle cotransformée de Fourier de μ *la fonction* $\bar{\mathscr{F}}\mu$ *sur* $\hat{\mathrm{G}}$

définie par :

$$(\bar{\mathscr{F}}\mu)(\hat{x}) = \int \langle \hat{x}, x \rangle \, d\mu(x). \tag{5}$$

PROPOSITION 2. — *La transformation de Fourier $\mathscr{F}$ et la cotransformation de Fourier $\bar{\mathscr{F}}$ sont des morphismes de l'algèbre involutive $\mathscr{M}^1(G)$ dans l'algèbre involutive des fonctions continues bornées sur $\hat{G}$.*

On a vu au n° 1 que l'application $\mu \mapsto \int \langle \hat{x}, x \rangle \, d\mu(x)$ est un caractère hermitien de $\mathscr{M}^1(G)$. Ceci entraîne aussitôt que $\mathscr{F}$ et $\bar{\mathscr{F}}$ sont des morphismes d'algèbres involutives de $\mathscr{M}^1(G)$ dans l'algèbre involutive des fonctions complexes sur $\hat{G}$. De plus, on a :

$$|(\mathscr{F}\mu)(\hat{x})| = \left|\int \overline{\langle \hat{x}, x \rangle} \, d\mu(x)\right| \leqslant \|\mu\|_1 \tag{6}$$

ce qui montre que $\mathscr{F}\mu$, et de même $\bar{\mathscr{F}}\mu$, sont bornées. Enfin si $\hat{x}$ tend vers $\hat{x}_0$ dans $\hat{G}$, la fonction $\hat{x}$ sur G tend vers $\hat{x}_0$ uniformément sur tout compact en restant bornée par 1. Il en résulte que $(\mathscr{F}\mu)(\hat{x})$ tend vers $(\mathscr{F}\mu)(\hat{x}_0)$ pour toute mesure bornée μ. Donc $\mathscr{F}\mu$ et de même $\bar{\mathscr{F}}\mu$ sont continues.

Notons quelques formules utiles :

$$(\bar{\mathscr{F}}\mu)(\hat{x}) = (\mathscr{F}\mu)(\hat{x}^{-1}) = \overline{(\mathscr{F}\bar{\mu})(\hat{x})}. \tag{7}$$

$$\|\mathscr{F}\mu\|_\infty = \|\bar{\mathscr{F}}\mu\|_\infty \leqslant \|\mu\|_1 . \tag{8}$$

$$\begin{cases} (\mathscr{F}\varepsilon_x)(\hat{x}) = \overline{\langle \hat{x}, x \rangle} \\ (\bar{\mathscr{F}}\varepsilon_x)(\hat{x}) = \langle \hat{x}, x \rangle \end{cases} \tag{9}$$

(en particulier $\mathscr{F}\varepsilon_e = \bar{\mathscr{F}}\varepsilon_e = 1$).

$$\begin{cases} (\mathscr{F}(\varepsilon_x * \mu))(\hat{x}) = \overline{\langle \hat{x}, x \rangle} \, (\mathscr{F}\mu)(\hat{x}) \\ (\bar{\mathscr{F}}(\varepsilon_x * \mu))(\hat{x}) = \langle \hat{x}, x \rangle \, (\bar{\mathscr{F}}\mu)(\hat{x}). \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \mathscr{F}(\hat{x} . \mu) = \varepsilon_{\hat{x}} * \mathscr{F}\mu \\ \bar{\mathscr{F}}(\hat{x} . \mu) = \varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \bar{\mathscr{F}}\mu. \end{cases} \tag{11}$$

Les seules formules que ne sont pas évidentes sont les formules (11). Mais on a :

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}(\hat{x} . \mu))(\hat{y}) &= \int \overline{\langle \hat{y}, x \rangle} \langle \hat{x}, x \rangle \, d\mu(x) = \int \overline{\langle \hat{y}\hat{x}^{-1}, x \rangle} \, d\mu(x) \\ &= (\mathscr{F}\mu)(\hat{y}\hat{x}^{-1}) = (\varepsilon_{\hat{x}} * \mathscr{F}\mu)(\hat{y}).\end{aligned}$$

Par restriction à la sous-algèbre $L^1(G)$, on obtient la définition de la transformation de Fourier et de la cotransformation de Fourier sur $L^1(G)$. On a donc pour $f \in L^1(G)$:

$$(12) \qquad \begin{cases} (\mathscr{F}f)(\hat{x}) = \int \overline{\langle \hat{x}, x \rangle} f(x)\, dx \\ (\bar{\mathscr{F}}f)(\hat{x}) = \int \langle \hat{x}, x \rangle f(x)\, dx. \end{cases}$$

L'application canonique de $\hat{G}$ dans $X(L^1(G))$ est un homéomorphisme (prop. 1), et *la cotransformation de Fourier n'est autre, une fois identifié* $\hat{G}$ *et* $X(L^1(G))$, *que la transformation de Gelfand*. Par contre, $X(\mathscr{M}^1(G))$ ne s'identifie pas à $\hat{G}$.

PROPOSITION 3. — *La transformation de Fourier et la cotransformation de Fourier sont des morphismes injectifs de l'algèbre involutive* $L^1(G)$ *dans l'algèbre involutive* $\mathscr{C}^0(\hat{G})$ *des fonctions continues nulles à l'infini sur* $\hat{G}$.

Ceci résulte des propriétés de la transformation de Gelfand (chap. I, § 3, prop. 2), de la prop. 2, et du fait que $L^1(G)$ est sans radical (chap. I, § 6, cor. de la prop. 12).

Remarque. — Contrairement à la transformation de Fourier sur $\mathscr{M}^1(G)$, la transformation de Fourier sur $L^1(G)$ dépend du choix de la mesure de Haar dx. Si l'on remplace dx par $a \, . \, dx$ (avec $a > 0$), la nouvelle transformée de Fourier de $f \in L^1(G)$ est $a \, . \, \mathscr{F}f$.

Considérons l'algèbre stellaire St(G) du groupe G et identifions $L^1(G)$ à une sous-algèbre dense de St(G). D'après le cor. 1 de la prop. 1, et le th. 1 du chap. I, § 6, la transformation de Fourier et la cotransformation de Fourier se prolongent par continuité en des *isomorphismes* d'algèbres stellaires (notés encore $\mathscr{F}$ et $\bar{\mathscr{F}}$) de St(G) sur $\mathscr{C}^0(\hat{G})$; l'isomorphisme $\bar{\mathscr{F}}$ n'est autre que la transformation de Gelfand pour St(G).

3. *Le théorème de Plancherel*

Nous noterons A(G), ou simplement A, le sous-espace vectoriel de $L^1(G)$ engendré par les fonctions $f * g$ pour $f, g \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Comme $L^1 \cap L^2$ est un idéal de L^1, A est un idéal de L^1 contenu dans $L^1 \cap L^2$. Comme $(\hat{x}f) * (\hat{x}g) = \hat{x}(f * g)$ pour $\hat{x} \in \hat{G}$, $f \in L^1$, $g \in L^1$ (*Intégr.*, chap. VIII, § 3, prop. 6), on a $\hat{x}h \in A$ pour tout $h \in A$.

Lemme 1. — *Il existe une base de filtre* $\mathfrak{B}$ *sur* $A \cap \mathcal{K}(G)$ *telle que :*

(i) *On a* $\varepsilon_e = \lim_{\mathfrak{B}} \varphi\, dx$ *dans l'espace* $\mathscr{C}'(G)$ *muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de* $\mathscr{C}(G)$ *;*

(ii) *on a* $\lim_{\mathfrak{B}} \mathscr{F}\varphi = 1$ *pour la topologie de la convergence compacte sur* $\hat{G}$, *et* $\|\mathscr{F}\varphi\|_\infty \leqslant 1$ *pour toute* φ *appartenant à un ensemble de* $\mathfrak{B}$;

(iii) *on a* $\lim_{\mathfrak{B}} \varphi * f = f$ *dans* $L^p(G)$ *pour tout* $p \in \left(1, +\infty\right($ *et toute* $f \in L^p(G)$.

Soit en effet $\mathfrak{B}_0$ une base du filtre des voisinages de e dans G formée de voisinages compacts symétriques contenus dans un ensemble compact fixé. Pour $X \in \mathfrak{B}_0$, soit X′ l'ensemble des $\psi \in \mathcal{K}_+(G)$ tels que $\operatorname{Supp} \psi \subset X$ et $\int \psi(x)\, dx = 1$; soit X″ l'ensemble des $\psi * \psi$ pour $\psi \in X'$. On a alors $X'' \subset A \cap \mathcal{K}(G)$, et l'ensemble $\mathfrak{B}$ des X″ est une base de filtre sur $A \cap \mathcal{K}(G)$. La propriété (i) (resp. (iii)) résulte de *Intégr.*, chap. VIII, § 2, n° 7, cor. 1 du lemme 4 (resp. § 4, n° 7, prop. 20). Une partie compacte de $\hat{G}$ est une partie compacte de $\mathscr{C}(G)$, donc (i) entraîne $\lim_{\mathfrak{B}} \mathscr{F}\varphi = 1$ pour la topologie de la convergence compacte sur $\hat{G}$. La deuxième assertion de (ii) est immédiate.

Soient $f, g \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Pour toute $\varphi \in St(G)$, on a $\varphi * f \in L^2(G)$, $\|\varphi * f\|_2 \leqslant \|\varphi\|_* \|f\|_2$, et $(\varphi * f) * g = \varphi * (f * g)$ (chap. I, § 6, n° 7, formule (13)). D'après *Intégr.*, chap. VIII, § 4, prop. 15, $\varphi * (f * g)$ est donc une fonction de $\mathscr{C}^0(G)$, et l'on a

$$\|\varphi * (f * g)\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_* \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

Par suite, pour $f \in A$ et $\varphi \in St(G)$, on a $\varphi * f \in \mathscr{C}^0(G)$, et $\varphi \mapsto (\varphi * f)(e)$ est une forme linéaire continue sur St(G). Comme $\mathscr{F}$ est un isomorphisme de St(G) sur $\mathscr{C}^0(\hat{G})$, on en déduit :

Lemme 2. — *Pour toute* $f \in A$, *il existe une mesure bornée* μ_f *et une seule sur* $\hat{G}$ *telle que :*

$$(\varphi * f)(e) = \int_{\hat{G}} (\mathscr{F}\varphi)\, d\mu_f \tag{13}$$

quelle que soit $\varphi \in St(G)$.

Soient maintenant $f, g \in A$. On a alors pour $\varphi \in L^1(G)$:

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}f \,.\, \mu_g)(\mathscr{F}\varphi) &= \int_{\hat{G}} (\mathscr{F}\varphi)(\mathscr{F}f)\, d\mu_g = \int \mathscr{F}(\varphi * f)\, d\mu_g \\ &= ((\varphi * f) * g)(e).\end{aligned} \tag{14}$$

Comme $(\varphi * f) * g = (\varphi * g) * f$ et que $\mathscr{F}(\mathrm{L}^1(\mathrm{G}))$ est dense dans $\mathscr{C}^0(\hat{\mathrm{G}})$ on déduit de (14):

$$(15) \qquad (\mathscr{F}f) \cdot \mu_g = (\mathscr{F}g) \cdot \mu_f \qquad (f, g \in \mathrm{A}).$$

Soit Ω_f l'ensemble ouvert dans $\hat{\mathrm{G}}$ formé des $\hat{x} \in \hat{\mathrm{G}}$ tels que $(\mathscr{F}f)(\hat{x}) \neq 0$. Soit φ la fonction caractéristique de $\hat{\mathrm{G}} - \Omega_f$. Pour toute $g \in \mathrm{A}$, on a, compte tenu de (15) et d'*Intégr.*, chap. V, § 5, n° 3, th. 1 :

$$\int (\mathscr{F}g)\, d(\varphi \cdot \mu_f) = \int \varphi(\mathscr{F}f)\, d\mu_g = 0.$$

D'après le lemme 1, A est dense dans St(G), donc $\mathscr{F}(\mathrm{A})$ dans $\mathscr{C}^0(\hat{\mathrm{G}})$; on déduit de là que $\varphi \cdot \mu_f = 0$, donc que μ_f *est concentrée sur* Ω_f. Soit ν_f la mesure sur Ω_f de densité $(\mathscr{F}f)^{-1}$ par rapport à $\mu_f|\Omega_f$. D'après (15), $\nu_f|(\Omega_f \cap \Omega_g) = \nu_g|(\Omega_f \cap \Omega_g)$. Comme $\mathscr{F}(\mathrm{A})$ est dense dans $\mathscr{C}^0(\hat{\mathrm{G}})$, les Ω_f, pour $f \in \mathrm{A}$, forment un recouvrement ouvert de $\hat{\mathrm{G}}$. Par suite, *il existe une mesure ν unique sur $\hat{\mathrm{G}}$ telle que, pour toute $f \in \mathrm{A}$, on ait $\nu_f = \nu|\Omega_f$.*

Si $f \in \mathrm{A}$, on a :

$$(16) \qquad \mu_f = (\mathscr{F}f) \cdot \nu.$$

En effet, les deux membres de l'égalité sont des mesures concentrées sur Ω_f, et leurs restrictions à Ω_f sont égales à $(\mathscr{F}f) \cdot \nu_f$. En particulier, $\mathscr{F}f \in \mathrm{L}^1(\hat{\mathrm{G}}, \nu)$. Rappelons d'autre part que $\mathscr{F}f \in \mathscr{C}^0(\hat{\mathrm{G}})$. Donc $\mathscr{F}f \in \mathrm{L}^2(\hat{\mathrm{G}}, \nu)$.

La formule (13) s'écrit maintenant, pour $\varphi \in \mathrm{St}(\mathrm{G})$ et $f \in \mathrm{A}$:

$$(17) \qquad (\varphi * f)(e) = \int_{\hat{\mathrm{G}}} (\mathscr{F}\varphi)(\mathscr{F}f)\, d\nu.$$

En particulier, pour $f, g \in \mathrm{A}$,

$$(18) \qquad \int_{\hat{\mathrm{G}}} (\mathscr{F}f)(\mathscr{F}g)\, d\nu = (f * g)(e) = \int_{\mathrm{G}} f(x)g(x^{-1})\, dx.$$

Nous allons en déduire que ν est invariante par translation. Soit $\hat{x} \in \hat{\mathrm{G}}$. Si on remplace les éléments f et g de A par $\hat{x} \cdot f$ et $\hat{x} \cdot g$, l'intégrale $\int_{\mathrm{G}} f(x)g(x^{-1})\, dx$ ne change pas. Donc, d'après (18),

$$\begin{aligned} \nu((\mathscr{F}f)(\mathscr{F}g)) &= \nu((\varepsilon_{\hat{x}} * \mathscr{F}f)(\varepsilon_{\hat{x}} * \mathscr{F}g)) = \nu(\varepsilon_{\hat{x}} * ((\mathscr{F}f)(\mathscr{F}g))) \\ &= (\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu)((\mathscr{F}f)(\mathscr{F}g)) \end{aligned}$$

autrement dit

$$\mu_f(\mathscr{F}g) = (\mathscr{F}f \cdot (\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu))(\mathscr{F}g).$$

Comme $\mathscr{F}(\mathrm{A})$ est partout dense dans $\mathscr{C}^0(\hat{\mathrm{G}})$, on en déduit

$$\mu_f = \mathscr{F}f.(\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu)$$

et ceci pour toute $f \in \mathrm{A}$. Ainsi, $\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu$ induit ν_f sur Ω_f, et on a bien $\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu = \nu$. La mesure ν est donc proportionnelle à une mesure de Haar sur $\hat{\mathrm{G}}$. La formule (18), qui se réduit pour $g = \tilde{f}$ à

$$\int_{\hat{\mathrm{G}}} |\mathscr{F}f|^2 \, d\nu = \int_{\mathrm{G}} |f|^2 \, dx, \tag{19}$$

prouve que le rapport de proportionnalité est > 0. Donc ν *est une mesure de Haar sur* $\hat{\mathrm{G}}$.

DÉFINITION 4. — *La mesure de Haar* ν *sur* $\hat{\mathrm{G}}$ *est dite associée à la mesure de Haar donnée sur* G.

Nous noterons désormais $d\hat{x}$ la mesure de Haar sur $\hat{\mathrm{G}}$ associée à dx.

Remarque. — Si l'on remplace dx par la mesure $a.\,dx$, le produit de convolution de deux éléments $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ est remplacé par $af * g$. Nous avons vu que $\mathscr{F}f$ est remplacée par $a.\mathscr{F}f$. Donc μ_f est inchangée et ν est remplacée par $a^{-1}\nu$. Donc la mesure $dx \otimes d\hat{x}$ sur $\mathrm{G} \times \hat{\mathrm{G}}$ est indépendante du choix de dx.

THÉORÈME 1 (Plancherel). — *Si* $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G}) \cap \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$, *on a* $\mathscr{F}f \in \mathrm{L}^2(\hat{\mathrm{G}})$. *L'application* $f \mapsto \mathscr{F}f$ *de* $\mathrm{L}^1(\mathrm{G}) \cap \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ *dans* $\mathrm{L}^2(\hat{\mathrm{G}})$ *se prolonge de manière unique en une isométrie de* $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ *sur* $\mathrm{L}^2(\hat{\mathrm{G}})$ (G *et* $\hat{\mathrm{G}}$ *étant munis des mesures* dx *et* $d\hat{x}$).

D'après (19), la restriction de $\mathscr{F}$ à A est une isométrie de $\mathrm{A} \subset \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ sur un sous-espace $\mathscr{F}(\mathrm{A})$ de $\mathrm{L}^2(\hat{\mathrm{G}})$. Comme A est partout dense dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ (lemme 1), $\mathscr{F}$ se prolonge de manière unique en une isométrie Φ de $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ sur un sous-espace de $\mathrm{L}^2(\hat{\mathrm{G}})$. Pour montrer que $\Phi(\mathrm{L}^2(\mathrm{G})) = \mathrm{L}^2(\hat{\mathrm{G}})$, il suffit de montrer que $\mathscr{F}(\mathrm{A})$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\hat{\mathrm{G}})$. Or, soit h un élément de $\mathrm{L}^2(\hat{\mathrm{G}})$ orthogonal à $\mathscr{F}(\mathrm{A})$. Pour $f, g \in \mathrm{A}$, on a $\mathscr{F}(f).(\mathscr{F}g) = \mathscr{F}(f * g) \in \mathscr{F}(\mathrm{A})$, donc $h.(\mathscr{F}f)$ est orthogonal à $\mathscr{F}g$. Donc $h.(\mathscr{F}f)$ est orthogonal à $\mathscr{F}(\mathrm{A})$ pour toute $f \in \mathrm{A}$. Mais $h.(\mathscr{F}f) \in \mathrm{L}^1(\hat{\mathrm{G}})$, et $\mathscr{F}(\mathrm{A})$ est partout dense dans $\mathscr{C}^0(\hat{\mathrm{G}})$, donc $h.(\mathscr{F}f)$ est localement négligeable pour $d\hat{x}$. Comme les Ω_f forment un recouvrement ouvert de $\hat{\mathrm{G}}$, on en déduit que $h = 0$, ce qui établit notre assertion.

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G}) \cap \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$. D'après le lemme 1, il existe un filtre $\mathfrak{B}$ sur A qui tend vers f à la fois dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$. On a

$\Phi(f) = \lim_{\mathfrak{B},g} \Phi(g) = \lim_{\mathfrak{B},g} \mathscr{F}g$ dans $L^2(\hat{G})$, et $\mathscr{F}f = \lim_{\mathfrak{B},g} \mathscr{F}g$ dans $\mathscr{C}^0(\hat{G})$, donc $\mathscr{F}f = \Phi f$, ce qui achève de prouver le théorème.

On note encore $\mathscr{F}$ l'isométrie de $L^2(G)$ sur $L^2(\hat{G})$ définie dans le th. 1, et on l'appelle encore *transformation de Fourier*. De même, le prolongement isométrique de $\bar{\mathscr{F}}$ à $L^2(G)$ se note encore $\bar{\mathscr{F}}$ et s'appelle encore cotransformation de Fourier.

4. *La formule d'inversion de Fourier (cas préliminaire)*

Puisque $\mathscr{F}$ est une isométrie de $L^2(G)$ sur $L^2(\hat{G})$, on a

$$(f|g) = (\mathscr{F}f|\mathscr{F}g) \qquad \text{pour } f, g \in L^2(G).$$

Autrement dit :

$$(f * \tilde{g})(e) = \int \mathscr{F}f(\hat{x})\overline{\mathscr{F}g(\hat{x})}\, d\hat{x}. \tag{20}$$

Prenons en particulier $f, g \in L^1(G) \cap L^2(G)$. On a alors

$$\mathscr{F}f \,.\, \overline{\mathscr{F}g} = \mathscr{F}(f * \tilde{g}) \in L^1(\hat{G}).$$

Proposition 4. — *Si* $f \in A$, *alors* $\mathscr{F}f \in L^1(\hat{G})$ *et on a pour tout* $x \in G$:

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \langle \hat{x}, x \rangle (\mathscr{F}f)(\hat{x})\, d\hat{x} \tag{21}$$

(« *formule d'inversion de Fourier* »).

En effet (20) entraîne aussitôt (21) pour $x = e$ et il suffit pour obtenir le cas général de remplacer f par $\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * f$.

Si nous considérons maintenant le bidual $\hat{\hat{G}}$ de G et l'application canonique η de G dans $\hat{\hat{G}}$, la formule (21) peut encore s'écrire :

$$f = (\bar{\mathscr{F}}\mathscr{F}f) \circ \eta \qquad \text{pour } f \in A. \tag{22}$$

Remarque. — Soit $F \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$ et posons $f = \bar{\mathscr{F}}F \circ \eta$: on obtient ainsi une fonction continue et bornée sur G. Pour toute $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_G g(x) f(x)\, dx &= \int_G g(x)\, dx \int_{\hat{G}} \langle \hat{x}, x \rangle F(\hat{x})\, d\hat{x} \\ &= \int_{\hat{G}} \bar{\mathscr{F}}g(\hat{x}) F(\hat{x})\, d\hat{x} \end{aligned} \tag{23}$$

en appliquant le théorème de Lebesgue–Fubini à la fonction $g(x)\mathrm{F}(\hat{x})\langle\hat{x}, x\rangle$ qui est intégrable sur $\mathrm{G} \times \hat{\mathrm{G}}$. Par suite, on a:

$$\left|\int g(x)f(x)\,dx\right| \leqslant \|\bar{\mathscr{F}}g\|_2 \,.\, \|\mathrm{F}\|_2 = \|g\|_2 \,.\, \|\mathrm{F}\|_2$$

et $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$. En appliquant le th. 1, on a d'autre part:

$$\int g(x)f(x)\,dx = \int \overline{\mathscr{F}\bar{g}(\hat{x})}\mathscr{F}f(\hat{x})d\hat{x} = \int \bar{\mathscr{F}}g(\hat{x})\mathscr{F}f(\hat{x})\,d\hat{x}$$

Comparant avec (23), on voit que $\mathrm{F} = \mathscr{F}f$ dans $\mathrm{L}^2(\hat{\mathrm{G}})$, et $f = \bar{\mathscr{F}}\mathscr{F}f \circ \eta$.

Inversement, si $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ est telle que $\mathscr{F}f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G})$, on peut appliquer ce qui précède à $\mathrm{F} = \mathscr{F}f$ et on en conclut que f est presque partout égale à la fonction *continue* $(\bar{\mathscr{F}}\mathscr{F}f) \circ \eta$. Autrement dit, *la formule* (22) *est valable pour les* $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ telles que $\mathscr{F}f \in \mathrm{L}^1(\hat{\mathrm{G}})$.

PROPOSITION 5. — *L'algèbre de Banach* $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ *est régulière.*

Il suffit de démontrer que si P est une partie fermée de $\hat{\mathrm{G}}$ et χ un point de $\hat{\mathrm{G}}$ n'appartenant pas à P, il existe une $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ telle que $\mathscr{F}f$ soit nulle sur P et non nulle en χ. Comme, d'après (11), on a $\mathscr{F}(\chi f) = \varepsilon_\chi * \mathrm{F}f$, on peut supposer que χ est l'élément neutre e de $\hat{\mathrm{G}}$. Il existe alors un voisinage compact symétrique U de e tel que $\mathrm{U}^2 \cap \mathrm{P} = \varnothing$. Soient F_1 et F_2 deux fonctions continues $\geqslant 0$ sur $\hat{\mathrm{G}}$, nulles en dehors de U et >0 en e. La fonction $\mathrm{F}_3 = \mathrm{F}_1 * \mathrm{F}_2$ est nulle sur P et >0 en e et il suffit de montrer que $\mathrm{F}_3 \in \mathscr{F}\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$. Or on a $\mathrm{F}_i \in \mathrm{L}^1(\hat{\mathrm{G}}) \cap \mathrm{L}^2(\hat{\mathrm{G}})$ pour $i = 1, 2, 3$ et on peut appliquer la *Remarque* ci-dessus. Posons $f_i = \bar{\mathscr{F}}\mathrm{F}_i \circ \eta$: on a $f_i \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ et $\mathrm{F}_i = \mathscr{F}f_i$. De plus, on a:

$$\begin{aligned} f_3 = \bar{\mathscr{F}}(\mathrm{F}_1 * \mathrm{F}_2) \circ \eta &= (\bar{\mathscr{F}}\mathrm{F}_1 \,.\, \bar{\mathscr{F}}\mathrm{F}_2) \circ \eta \\ &= (\bar{\mathscr{F}}\mathrm{F}_1 \circ \eta)\,.\,(\bar{\mathscr{F}}\mathrm{F}_2 \circ \eta) = f_1 f_2 \end{aligned}$$

d'où $f_3 \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ et $\mathrm{F}_3 = \mathscr{F}f_3 \in \mathscr{F}\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$.

5. *Le théorème de dualité*

THÉORÈME 2 (Pontryagin). — *Soit* $d\hat{\hat{x}}$ *la mesure de Haar sur* $\hat{\hat{\mathrm{G}}}$ *associée à* $d\hat{x}$. *L'application canonique* η *de* G *dans* $\hat{\hat{\mathrm{G}}}$ *est un isomorphisme de groupes topologiques qui transforme* dx *en* $d\hat{\hat{x}}$. *Si on identifie* G *et* $\hat{\hat{\mathrm{G}}}$ *par cet isomorphisme, la cotransformation de Fourier de* $\mathrm{L}^2(\hat{\mathrm{G}})$ *sur* $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ *et la transformation de Fourier de* $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ *sur* $\mathrm{L}^2(\hat{\mathrm{G}})$ *sont réciproques l'une de l'autre.*

Montrons d'abord que η est injective et est un homéomorphisme de G sur $\eta(G)$. Il suffit pour cela de montrer que pour tout voisinage U de e dans G, il existe un voisinage W de e dans $\hat{\hat{G}}$ tel que $\eta^{-1}(W) \subset U$. Or soit V un voisinage compact symétrique de e dans G tel que $V^2 \subset U$, soit f une fonction non nulle de $\mathscr{K}_+(G)$ à support contenu dans V, et posons $g = \tilde{f} * f$. Alors $g \in A$, $\operatorname{Supp} g \subset U$, et $g(e) > 0$. Comme la topologie de $\hat{\hat{G}}$ est celle de la convergence simple sur $L^1(\hat{G})$ (prop. 1), il existe un voisinage W de e dans $\hat{\hat{G}}$ tel que

$$\hat{\hat{x}} \in W \Rightarrow |\langle \mathscr{F}g, \hat{\hat{x}} \rangle - \langle \mathscr{F}g, e \rangle| < \tfrac{1}{2}g(e)$$

(rappelons que $\mathscr{F}g \in L^1(\hat{G})$ (prop. 4)), c'est-à-dire tel que

$$\hat{\hat{x}} \in W \Rightarrow |(\bar{\mathscr{F}}\mathscr{F}g)(\hat{\hat{x}}) - (\bar{\mathscr{F}}\mathscr{F}g)(e)| < \tfrac{1}{2}g(e).$$

Si $x \in \eta^{-1}(W)$, on a donc d'après (22)

$$|g(x) - g(e)| < \tfrac{1}{2}g(e)$$

d'où $g(x) \neq 0$ et $x \in U$ puisque $\operatorname{Supp} g \subset U$.

Par suite $\eta(G)$ est un sous-groupe localement compact de $\hat{\hat{G}}$, donc fermé dans $\hat{\hat{G}}$ (*Top. gén.*, chap. III, 3ᵉ éd., § 3, cor. 2 de la prop. 4). S'il existe un $\chi \in \hat{\hat{G}}$ tel que $\chi \notin \eta(G)$, il existe (prop. 5) une f non nulle dans $L^1(\hat{G})$ telle que $\int f(\hat{x})\overline{\langle \hat{x}, x \rangle}\, d\hat{x} = 0$ pour tout $x \in G$. D'après le th. de Lebesgue–Fubini, on a alors, pour toute $u \in L^1(G)$,

$$\int f(\hat{x})(\mathscr{F}u)(\hat{x})\, d\hat{x} = \int u(x)\, dx \int f(\hat{x})\overline{\langle \hat{x}, x \rangle}\, d\hat{x} = 0,$$

donc $f(\hat{x})\, d\hat{x} = 0$, ce qui est absurde. Donc $\eta(G) = \hat{\hat{G}}$. La formule (22) prouve alors ceci : 1) $\bar{\mathscr{F}}_{\hat{G}}$ est une isométrie de $L^2(\hat{G}, d\hat{x})$ sur $L^2(\hat{\hat{G}}, \eta(dx))$, donc $d\hat{\hat{x}} = \eta(dx)$; 2) si on identifie G et $\hat{\hat{G}}$ par η, $\bar{\mathscr{F}} \circ \mathscr{F}$ est l'application identique de $L^2(G)$.

Nous identifierons désormais G et $\hat{\hat{G}}$ par η.

Soient G, G′ deux groupes commutatifs localement compacts, φ une application de $G \times G'$ dans $\mathbf{U}$. Pour tout $x \in G$ (resp. tout $x' \in G'$), soit α_x (resp. $\beta_{x'}$) la fonction $x' \mapsto \varphi(x, x')$ (resp. $x \mapsto \varphi(x, x')$) sur G′ (resp. G). Supposons que l'application $x \mapsto \alpha_x$ soit un isomorphisme du groupe topologique G sur le groupe topologique $\hat{G}'$. Alors, d'après le th. 2, l'application $x' \mapsto \beta_{x'}$ est un isomorphisme du groupe topologique G′ sur le groupe topologique $\hat{G}$. Dans ces conditions, nous dirons que G *et G′ sont en dualité relativement à φ*, et nous identifierons chacun des groupes G, G′ au dual de l'autre.

6. Premières conséquences du théorème de dualité

Le théorème de Pontryagin montre que G et $\hat{G}$ jouent des rôles symétriques, et que, relativement aux espaces L^2, transformation de Fourier et cotransformation de Fourier sont *réciproques* l'une de l'autre. Par ailleurs, les transformations de Fourier de G et $\hat{G}$ sont *transposées* l'une de l'autre :

PROPOSITION 6. — *Soient $\alpha \in \mathcal{M}^1(G)$ et $\beta \in \mathcal{M}^1(\hat{G})$. On a :*

$$\int_G \mathscr{F}\beta(x)\, d\alpha(x) = \int_{\hat{G}} \mathscr{F}\alpha(\hat{x})\, d\beta(\hat{x}) \tag{24}$$

$$\mathscr{F}(\bar{\mathscr{F}}\beta\,.\,\alpha) = \beta * \mathscr{F}\alpha. \tag{25}$$

Démontrons (24). On a :

$$\int_G \mathscr{F}\beta(x)\, d\alpha(x) = \int_G d\alpha(x) \int_{\hat{G}} \overline{\langle \hat{x}, x\rangle}\, d\beta(\hat{x}).$$

Mais la fonction $\overline{\langle \hat{x}, x\rangle}$ est intégrable sur $G \times \hat{G}$ par rapport à $\alpha \otimes \beta$, et on peut appliquer le théorème de Fubini, qui donne immédiatement (24).

Démontrons (25). Soit $\hat{x} \in \hat{G}$. On a :

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}(\bar{\mathscr{F}}\beta\,.\,\alpha))(\hat{x}) &= \int_G \overline{\langle \hat{x}, x\rangle}\, \bar{\mathscr{F}}\beta(x)\, d\alpha(x)\\ &= \int_G \overline{\langle \hat{x}, x\rangle}\, d\alpha(x) \int_{\hat{G}} \langle \hat{y}, x\rangle\, d\beta(\hat{y}).\end{aligned}$$

Ici aussi la fonction $\overline{\langle \hat{x}\hat{y}^{-1}, x\rangle}$ est intégrable sur $G \times \hat{G}$ par rapport à $\alpha \otimes \beta$, et le théorème de Lebesgue–Fubini donne :

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}(\bar{\mathscr{F}}\beta\,.\,\alpha))(\hat{x}) &= \int_{\hat{G}} d\beta(\hat{y}) \int_G \overline{\langle \hat{x}\hat{y}^{-1}, x\rangle}\, d\alpha(x)\\ &= \int_{\hat{G}} \mathscr{F}\alpha(\hat{x}\hat{y}^{-1})\, d\beta(\hat{y}) = (\beta * \mathscr{F}\alpha)(\hat{x}).\end{aligned}$$

COROLLAIRE. — *$\mathscr{F}$ est injective sur $\mathcal{M}^1(G)$.*

En effet, si $\mathscr{F}\alpha = 0$, on a $\alpha(\mathscr{F}f) = 0$ pour toute $f \in L^1(\hat{G})$. Or $\mathscr{F}(L^1(\hat{G}))$ est dense dans $\mathscr{C}^0(G)$.

Il existe beaucoup d'autres espaces fonctionnels sur G et $\hat{G}$ (en plus des espaces L^2) sur lesquels $\mathscr{F}$ et $\bar{\mathscr{F}}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. Par exemple :

THÉORÈME 3. — *Soit* B(G) *l'ensemble des* $f \in L^1(G)$ *telles que* $\mathscr{F}f \in L^1(\hat{G})$. *Alors* $\mathscr{F}|B(G)$ *est une bijection de* B(G) *sur* $B(\hat{G})$, *et la bijection réciproque est* $\bar{\mathscr{F}}|B(\hat{G})$.

Soit $f \in B(G)$. On a $\mathscr{F}f \in L^1(\hat{G}) \cap \mathscr{C}^0(\hat{G}) \subset L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$. Posons $f' = \bar{\mathscr{F}}\mathscr{F}f \in L^2(G)$. Pour toute $g \in \mathscr{K}(\hat{G})$, on a

$$\langle f', \mathscr{F}g\rangle = (\mathscr{F}g|\bar{f}') = (g|\bar{\mathscr{F}}\bar{f}') = \langle \mathscr{F}f, g\rangle = \langle f, \mathscr{F}g\rangle$$

donc $f' = f \in L^1(G)$ et par suite $\mathscr{F}f \in B(\hat{G})$. En même temps, on a vu que $(\bar{\mathscr{F}}|B(\hat{G})) \circ (\mathscr{F}|B(G))$ est l'application identique de B(G). Echangeant les rôles de G et $\hat{G}$, on obtient le théorème.

Remarque 1. — On a :

$$f \in L^1(G) \text{ et } \mathscr{F}f \in L^1(\hat{G}) \quad \Leftrightarrow \quad f \in L^1(G) \cap \mathscr{F}(L^1(\hat{G})).$$

En effet, le théorème 3 prouve que :

$$f \in L^1(G) \text{ et } \mathscr{F}f \in L^1(\hat{G}) \quad \Rightarrow \quad f \in L^1(G) \cap \mathscr{F}(L^1(\hat{G})).$$

Réciproquement, si $f \in L^1(G)$ et $f = \mathscr{F}g$ avec $g \in L^1(\hat{G})$, alors $g \in B(\hat{G})$, donc $f \in B(G)$ d'après le th. 3.

Remarque 2. — B(G) est une algèbre à la fois pour la multiplication et pour la convolution. En effet, soient $f, g \in B(G)$. On a $f * g \in L^1(G)$ et $\mathscr{F}(f * g) = (\mathscr{F}f) \,.\, (\mathscr{F}g) \in L^1(\hat{G})$ puisque par exemple $\mathscr{F}f \in L^1(\hat{G})$ et $\mathscr{F}g \in \mathscr{C}^0(\hat{G})$. Donc $f * g \in B(G)$. D'autre part, $fg \in L^1(G)$ puisque $f \in L^1(G)$ et $g \in \mathscr{C}^0(G)$; et $f = \mathscr{F}f'$, $g = \mathscr{F}g'$ avec $f', g' \in B(\hat{G})$, donc $fg = \mathscr{F}(f' * g')$; donc $fg \in B(G)$.

De plus, $\mathscr{F}$ échange convolution et multiplication dans B(G) et $B(\hat{G})$.

La formule $\mathscr{F}(fg) = (\mathscr{F}f) * (\mathscr{F}g)$ est d'ailleurs valable dans bien d'autres cas que le cas $f, g \in B(G)$. Par exemple :

PROPOSITION 7. — *Si* $f, g \in L^2(G)$, *alors* $\mathscr{F}(fg) = (\mathscr{F}f) * (\mathscr{F}g)$.

L'égalité est vraie si $f, g \in B(G)$ (remarque 2), et en particulier si $f, g \in A(G)$. Or A(G) est dense dans $L^2(G)$ (lemme 1 (iii)). Il suffit alors de montrer que les deux membres de l'égalité sont des fonctions continues de $(f, g) \in L^2(G) \times L^2(G)$ à valeurs dans $\mathscr{C}^0(\hat{G})$. Or l'application $(f, g) \mapsto \mathscr{F}(fg)$ s'obtient en composant l'application $(f, g) \mapsto fg$ de $L^2(G) \times L^2(G)$ dans $L^1(G)$ et l'application $h \mapsto \mathscr{F}h$ de $L^1(G)$ dans $\mathscr{C}^0(\hat{G})$; l'application $(f, g) \mapsto (\mathscr{F}f) * (\mathscr{F}g)$ s'obtient en composant l'application $(f, g) \mapsto (\mathscr{F}f, \mathscr{F}g)$ de $L^2(G) \times L^2(G)$ dans $L^2(\hat{G}) \times L^2(\hat{G})$ et l'application $(h, h') \mapsto h * h'$ de $L^2(\hat{G}) \times L^2(\hat{G})$ dans $\mathscr{C}^0(\hat{G})$; et toutes ces applications sont continues.

7. Propriétés fonctorielles de la dualité

Soient G, H deux groupes localement compacts commutatifs, et $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de groupes topologiques. Si $\hat{x} \in \hat{\mathrm{H}}$, $\hat{x} \circ \varphi$ est un caractère de G noté $\hat{\varphi}(\hat{x})$. Cette définition se traduit par la formule :

$$\langle \hat{x}, \varphi(y) \rangle = \langle \hat{\varphi}(\hat{x}), y \rangle$$

quels que soient $\hat{x} \in \hat{\mathrm{H}}$ et $y \in \mathrm{G}$. On en déduit aussitôt que $\hat{\varphi}$ est un morphisme du groupe topologique $\hat{\mathrm{H}}$ dans le groupe topologique $\hat{\mathrm{G}}$; on dit que $\hat{\varphi}$ est le *dual* de φ.

Si $\varphi' : \mathrm{H} \to \mathrm{K}$ est un morphisme de groupes topologiques, la formule ci-dessus montre que $(\varphi' \circ \varphi)\hat{} = \hat{\varphi} \circ \hat{\varphi}'$. Si φ est l'application identique de G, $\hat{\varphi}$ est l'application identique de $\hat{\mathrm{G}}$.

La formule montre aussi que $\hat{\hat{\varphi}} = \varphi$ (si l'on identifie canoniquement G à $\hat{\hat{\mathrm{G}}}$ et H à $\hat{\hat{\mathrm{H}}}$).

THÉORÈME 4. — *Soient* G′ *un sous-groupe fermé de* G, G″ *le groupe quotient* G/G′, *i l'injection canonique de* G′ *dans* G, *p la surjection canonique de* G *sur* G″ :

$$\mathrm{G}' \xrightarrow{i} \mathrm{G} \xrightarrow{p} \mathrm{G}''$$

$$\hat{\mathrm{G}}' \xleftarrow{\hat{i}} \hat{\mathrm{G}} \xleftarrow{\hat{p}} \hat{\mathrm{G}}''.$$

Alors $\hat{p}$ *est un isomorphisme de* $\hat{\mathrm{G}}''$ *sur* $\mathrm{G}'^{\perp}$, *et* $\hat{i}$ *est un morphisme strict de* $\hat{\mathrm{G}}$ *sur* $\hat{\mathrm{G}}'$ *de noyau* $\mathrm{G}'^{\perp}$.

1) Il est clair que $\hat{p}(\hat{\mathrm{G}}'')$ est l'ensemble des caractères unitaires de G nuls sur G′, c'est-à-dire $\mathrm{G}'^{\perp}$. Si $\hat{x}'' \in \hat{\mathrm{G}}''$ est tel que $\hat{p}(\hat{x}'') = e$, on a, pour tout $x \in \mathrm{G}$, $1 = \langle x, \hat{p}(\hat{x}'') \rangle = \langle p(x), \hat{x}'' \rangle$, donc $\hat{x}'' = e$. Donc $\hat{p}$ est injectif. D'autre part, soit U un voisinage de e dans $\hat{\mathrm{G}}''$. Il existe une partie compacte K″ de G″ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que :

$$\hat{x}'' \in \hat{\mathrm{G}}'' \text{ et } |\langle \hat{x}'', x'' \rangle - 1| \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } x'' \in \mathrm{K}'' \quad \Rightarrow \quad \hat{x}'' \in \mathrm{U}.$$

D'après *Top. gén.*, chap. I, 4ᵉ éd., § 10, nº 4, prop. 10, il existe une partie compacte K de G telle que $p(\mathrm{K}) = \mathrm{K}''$. Alors :

$$\hat{x}'' \in \hat{\mathrm{G}}'' \text{ et } |\langle \hat{p}(\hat{x}''), x \rangle - 1| \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } x \in \mathrm{K} \quad \Rightarrow \quad \hat{x}'' \in \mathrm{U}.$$

Autrement dit, il existe un voisinage V de e dans $\hat{\mathrm{G}}$ tel que

$$\hat{x}'' \in \hat{\mathrm{G}}'' \text{ et } \hat{p}(\hat{x}'') \in \mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad \hat{x}'' \in \mathrm{U}.$$

Ainsi, $\hat{p}$ est un isomorphisme de $\hat{\mathrm{G}}''$ sur $\mathrm{G}'^{\perp}$.

2) Il est clair que le noyau de $\hat{i}$ est $G'^{\perp}$. Soit L le groupe dual de $\hat{G}/\hat{i}^{-1}(e)$, de sorte que $\hat{G}/\hat{i}^{-1}(e) = \hat{L}$. Il existe un morphisme $\psi : L \to G$ de groupes topologiques tel que $\hat{\psi}$ soit la surjection

$$G' \xrightarrow{\eta} L \xrightarrow{\psi} G$$

$$\hat{G}' \xleftarrow{\hat{\eta}} \hat{L} \xleftarrow{\hat{\psi}} \hat{G}$$

canonique de $\hat{G}$ sur $\hat{L}$. D'autre part, $\hat{i}$ peut se factoriser sous la forme $\hat{\eta} \circ \hat{\psi}$, où $\eta : G' \to L$ est un morphisme de groupes topologiques. On a $\psi \circ \eta = i$, donc $\psi(L) \supset G'$. D'autre part,

$$(\hat{\psi} \circ \hat{p})(\hat{G}'') = \{e\},$$

donc $(p \circ \psi)(L) = \{e\}$, donc $\psi(L) \subset G'$. Ainsi, $\psi(L) = G'$. D'après la première partie de la démonstration, ψ est un isomorphisme de L sur G'. Donc η est un isomorphisme de G' sur L, $\hat{\eta}$ est un isomorphisme de $\hat{L}$ sur $\hat{G}'$, et $\hat{i}$ est un morphisme strict de $\hat{G}$ sur $\hat{G}'$ de noyau $G'^{\perp}$.

COROLLAIRE 1. — *Soit* G' *un sous-groupe de* G. *On a* $(G'^{\perp})^{\perp} = \overline{G'}$.

Supposons d'abord G' fermé et utilisons les notations précédentes. Alors $\hat{i}$ est un morphisme strict de $\hat{G}$ sur $\hat{G}'$ de noyau $G'^{\perp}$, donc $\hat{\hat{i}}$ est un isomorphisme de $\hat{\hat{G}}'$ sur $(G'^{\perp})^{\perp}$. Si on identifie G' à $\hat{\hat{G}}'$, G à $\hat{\hat{G}}$ et i à $\hat{\hat{i}}$, on voit que i est un isomorphisme de G' sur $(G'^{\perp})^{\perp}$, d'où $G' = (G'^{\perp})^{\perp}$. Dans le cas général, on a

$$\overline{G'} \subset (G'^{\perp})^{\perp} = (\overline{G'}^{\perp})^{\perp} = \overline{G'}.$$

COROLLAIRE 2. — *Soit* (H_i) *une famille de sous-groupes fermés de* G. *L'orthogonal du sous-groupe fermé engendré par les* H_i *est* $\bigcap_i H_i^{\perp}$. *L'orthogonal de* $\bigcap_i H_i$ *est le sous-groupe fermé engendré par les* $H_i^{\perp}$.

La première assertion est évidente. La seconde en résulte en échangeant les rôles de G et $\hat{G}$, compte tenu du cor. 1.

COROLLAIRE 3. — *Soit* $\varphi : G \to H$ *un morphisme de groupes topologiques. Pour que* φ *soit un morphisme strict surjectif, il faut et il suffit que* $\hat{\varphi}$ *soit un morphisme strict injectif.*

Si φ est un morphisme strict surjectif, $\hat{\varphi}$ est un morphisme strict injectif (th. 4). Si φ est un morphisme strict injectif, φ est un isomorphisme de G sur un sous-groupe localement compact donc fermé de H, donc $\hat{\varphi}$ est un morphisme strict surjectif (th. 4).

COROLLAIRE 4. — *Soit* $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de groupes topologiques. Pour que* φ *soit un morphisme strict, il faut et il suffit que* $\hat{\varphi}$ *soit un morphisme strict.*

Ceci résulte aussitôt du cor. 3 et de la décomposition canonique d'un morphisme strict.

COROLLAIRE 5. — *Soient* $\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_n$ *des groupes commutatifs localement compacts et soit* λ_i *l'injection canonique de* G_i *dans* $\mathrm{G} = \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathrm{G}_j$. *L'application* $(\hat{\lambda}_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ *de* $\hat{\mathrm{G}}$ *dans* $\prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \hat{\mathrm{G}}_j$ *est un isomorphisme.*

Pour $n = 2$, cela résulte du th. 4. Il suffit ensuite de raisonner par récurrence sur n.

COROLLAIRE 6. — *Soit* $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de groupes topologiques. Alors le sous-groupe* $\overline{\mathrm{Im}\,\varphi}$ *de* H *et le sous-groupe* $\mathrm{Ker}\,\hat{\varphi}$ *de* $\hat{\mathrm{H}}$ *sont chacun l'orthogonal de l'autre. En particulier, pour que* $\hat{\varphi}$ *soit injectif, il faut et il suffit que* $\mathrm{Im}\,\varphi$ *soit dense dans* H.

Soit $\hat{y} \in \hat{\mathrm{H}}$. Pour que $\hat{y} \in \mathrm{Ker}\,\hat{\varphi}$, il faut et il suffit que $\langle \hat{\varphi}(\hat{y}), x \rangle = 1$ pour tout $x \in \mathrm{G}$, c'est-à-dire que $\langle \hat{y}, \varphi(x) \rangle = 1$ pour tout $x \in \mathrm{G}$, c'est-à-dire que $\hat{y} \in (\mathrm{Im}\,\varphi)^{\perp} = (\overline{\mathrm{Im}\,\varphi})^{\perp}$. Donc $\mathrm{Ker}\,\hat{\varphi} = (\overline{\mathrm{Im}\,\varphi})^{\perp}$, et $\overline{\mathrm{Im}\,\varphi} = (\mathrm{Ker}\,\hat{\varphi})^{\perp}$ d'après le cor. 1.

COROLLAIRE 7. — *Soit* $k \in \mathbf{Z}$. *Soient* $\mathrm{G}^{(k)}$ *et* $\mathrm{G}_{(k)}$ *l'image et le noyau du morphisme* $x \mapsto x^k$ *de* G *dans* G. *Alors* $\mathrm{G}_{(k)}$ *et l'adhérence de* $\hat{\mathrm{G}}^{(k)}$ *sont l'orthogonal l'un de l'autre.*

En effet, les morphismes $x \mapsto x^k$ de G dans G et $\hat{x} \mapsto \hat{x}^k$ de $\hat{\mathrm{G}}$ dans $\hat{\mathrm{G}}$ sont le dual l'un de l'autre.

Disons qu'un groupe commutatif C est *divisible* si, pour tout $x \in \mathrm{C}$ et tout $k \in \mathbf{Z}$, il existe un $y \in \mathrm{C}$ tel que $y^k = x$.

COROLLAIRE 8. — (i) *Si* G *est divisible,* $\hat{\mathrm{G}}$ *est sans torsion.*

(ii) *Si* $\hat{\mathrm{G}}$ *est sans torsion, et si* $k \in \mathbf{Z}$, *l'ensemble des* x^k *(où* x *parcourt* G*) est dense dans* G.

(iii) *Supposons* G *discret ou compact. Pour que* G *soit divisible, il faut et il suffit que* $\hat{\mathrm{G}}$ *soit sans torsion.*

Les assertions (i) et (ii) résultent du cor. 7. Si G est discret ou compact, l'image du morphisme $x \mapsto x^k$ de G dans G est fermée, et (iii) résulte de (i) et (ii).

8. Formule de Poisson

PROPOSITION 8. — *Soient* H *un sous-groupe fermé de* G, α *une mesure de Haar sur* H, β *une mesure de Haar sur* G, *et* $\gamma = \beta/\alpha$ *qui est une mesure de Haar sur* G/H. *Identifions* $(G/H)^\wedge$ *à* $H^\perp$, *et soit* $\hat{\gamma}$ *la mesure de Haar sur* $H^\perp$ *associée à* γ. *Soit* $f \in L^1(G)$, *et supposons que la restriction à* $H^\perp$ *de la fonction continue* $\mathscr{F}f$ *soit intégrable (pour* $\hat{\gamma}$*). Alors, pour presque tout* $x \in G$, *la fonction* $h \mapsto f(xh)$ *sur* H *est* α*-intégrable, et l'on a :*

$$\int_H f(xh)\, d\alpha(h) = \int_{H^\perp} \langle k, x\rangle (\mathscr{F}f)(k)\, d\hat{\gamma}(k).$$

On sait (*Intégr.*, chap. VII, § 2, prop. 5) que, pour presque tout $x \in G$, la fonction $h \mapsto f(xh)$ sur H est α-intégrable, et que la fonction $\dot{x} \mapsto F(\dot{x}) = \int_H f(xh)\, d\alpha(h)$, définie presque partout sur G/H, est γ-intégrable ($\dot{x}$ désigne l'image canonique de x dans G/H). La transformée de Fourier de F, considérée comme fonction sur $H^\perp$, est donnée par :

$$(\mathscr{F}F)(k) = \int_{G/H} \overline{\langle k, \dot{x}\rangle}\, d\gamma(\dot{x}) \int_H f(xh)\, d\alpha(h) \tag{26}$$

$$= \int_G \overline{\langle k, x\rangle} f(x)\, d\beta(x) = (\mathscr{F}f)(k).$$

D'après l'hypothèse faite sur f, on a donc $\mathscr{F}F \in L^1((G/H)^\wedge)$. Donc F est égale presque partout à $\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}F)$ (th. 3), c'est-à-dire que :

$$F(\dot{x}) = \int_{H^\perp} \langle k, x\rangle (\mathscr{F}F)(k)\, d\hat{\gamma}(k)$$

presque partout sur G/H. Compte tenu de (26), on obtient la proposition.

COROLLAIRE. — *On conserve les notations* H, α, β, γ, $\hat{\gamma}$ *de la prop.* 8. *Soit* $f \in L^1(G)$. *On suppose que :*

1) *la restriction de* $\mathscr{F}f$ *à* $H^\perp$ *est intégrable ;*
2) *pour tout* $x \in G$, *la fonction* $h \mapsto f(xh)$ *sur* H *est intégrable ;*
3) *l'intégrale* $\int_H f(xh)\, d\alpha(h)$ *est fonction continue de* x.

Alors (formule de Poisson) :

$$\int_H f(h)\, d\alpha(h) = \int_{H^\perp} (\mathscr{F}f)(k)\, d\hat{\gamma}(k). \tag{27}$$

En effet, reprenant les notations précédentes, les fonctions F et $\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}\mathrm{F})$ sont égales presque partout et continues, donc sont égales partout et en particulier en e, ce qui donne (27).

Remarque. — Nous verrons plus tard, quand nous aurons étendu la transformation de Fourier aux distributions, que la formule (27) peut encore s'exprimer en disant que la transformée de Fourier de la mesure de Haar α de H est la mesure de Haar $\hat{\gamma}$ de $\mathrm{H}^{\perp}$.

PROPOSITION 9. — *On conserve les notations* H, α, β, γ *de la prop.* 8. *Soient* $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, *et* $\hat{\gamma}$ *les mesures de Haar associées sur* $\hat{\mathrm{H}} = \hat{\mathrm{G}}/\mathrm{H}^{\perp}$, $\hat{\mathrm{G}}$, *et* $(\mathrm{G}/\mathrm{H})\hat{} = \mathrm{H}^{\perp}$. *Alors* $\hat{\alpha} = \hat{\beta}/\hat{\gamma}$.

Soit $f \in \mathscr{K}(\mathrm{G})$. Pour $x \in \mathrm{G}$ et $y \in \hat{\mathrm{G}}$, posons

$$\varphi(x, y) = \int_{\mathrm{H}} f(xh)\langle y, h\rangle\, d\alpha(h).$$

On a aussitôt les propriétés suivantes: *a*) pour x fixé, $\varphi(x, y)$ ne dépend que de la classe $\dot{y}$ de y dans $\hat{\mathrm{G}}/\mathrm{H}^{\perp}$; *b*) pour y fixé, $\langle y, x\rangle\varphi(x, y)$ ne dépend que de la classe $\dot{x}$ de x dans G/H; *c*) φ est continue sur $\mathrm{G} \times \hat{\mathrm{G}}$.

La fonction $\dot{y} \mapsto \varphi(x, y)$ est la cotransformée de Fourier de la fonction $h \mapsto f(xh)$ sur H, donc

$$\int_{\hat{\mathrm{G}}/\mathrm{H}^{\perp}} |\varphi(x, y)|^2\, d\hat{\alpha}(\dot{y}) = \int_{\mathrm{H}} |f(xh)|^2\, d\alpha(h). \tag{28}$$

La fonction $\dot{x} \mapsto \langle y, x\rangle\varphi(x, y)$, qui est continue à support compact sur G/H, admet pour cotransformée de Fourier la fonction sur $\mathrm{H}^{\perp}$:

$$\begin{aligned} k \mapsto & \int_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} \langle k, \dot{x}\rangle \langle y, x\rangle\varphi(x, y)\, d\gamma(\dot{x}) \\ & = \int_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} d\gamma(\dot{x}) \int_{\mathrm{H}} \langle yk, xh\rangle f(xh)\, d\alpha(h) \\ & = \int_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} d\gamma(\dot{x}) \int_{\mathrm{H}} \langle yk, x\rangle f(x)\, d\alpha(h) \\ & = \int_{\mathrm{G}} \langle yk, x\rangle f(x)\, d\beta(x) = \overline{\mathscr{F}}f(yk). \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} |\varphi(x, y)|^2\, d\gamma(\dot{x}) = \int_{\mathrm{H}^{\perp}} |\overline{\mathscr{F}}f(yk)|^2\, d\hat{\gamma}(k). \tag{29}$$

On déduit de (28) et (29)

$$\begin{aligned}\int_{\hat{G}} |(\bar{\mathscr{F}}f)(y)|^2\, d\hat{\beta}(y) &= \int_G |f(x)|^2\, d\beta(x)\\ &= \int_{G/H} d\gamma(\dot{x}) \int_H |f(xh)|^2\, d\alpha(h)\\ &= \int_{G/H} d\gamma(\dot{x}) \int_{\hat{G}/H^\perp} |\varphi(x, y)|^2\, d\hat{\alpha}(\dot{y})\\ &= \int_{\hat{G}/H^\perp} d\hat{\alpha}(\dot{y}) \int_{G/H} |\varphi(x, y)|^2\, d\gamma(\dot{x})\\ &= \int_{\hat{G}/H^\perp} d\hat{\alpha}(\dot{y}) \int_{H^\perp} |(\bar{\mathscr{F}}f)(yk)|^2\, d\hat{\gamma}(k).\end{aligned}$$

En prenant $f \neq 0$, on déduit de là que $\hat{\alpha} = \hat{\beta}/\hat{\gamma}$.

9. *Exemples de dualité*

PROPOSITION 10. — *Si* G *est fini,* $\hat{G}$ *est isomorphe (non canoniquement, en général) à* G.

Soient $x \in G$, $\hat{x} \in \hat{G}$, et $n = \text{Card } G$. On a $\langle \hat{x}, x \rangle^n = 1$. Un caractère de G est donc un homomorphisme de G dans le groupe des racines de l'unité de **C**. La proposition résulte alors d'*Alg.*, chap. VII, 2ᵉ éd., § 4, n° 8, prop. 8 et *Exemple.*

PROPOSITION 11. — *Pour que* $\hat{G}$ *soit compact, il faut et il suffit que* G *soit discret. Les mesures de Haar normalisées* (*Intégr.*, chap. VII, § 1, n° 3) *sur* G *et* $\hat{G}$ *sont alors associées.*

Supposons G compact. Il existe un voisinage V de e dans $\hat{G}$ possédant la propriété suivante: si $\chi \in V$, on a $|\chi(x) - 1| \leqslant 1$ quel que soit $x \in G$, donc $|\chi(x)^n - 1| \leqslant 1$ quels que soient $x \in G$ et $n \in \mathbf{Z}$, donc $\chi(x) = 1$ quel que soit $x \in G$; ainsi, $V = \{e\}$, ce qui prouve que $\hat{G}$ est discret. Par suite, si $\hat{G}$ est compact, G est discret.

Supposons G discret, et munissons G de la mesure de Haar normalisée α qui attribue la masse 1 à chaque point. Soit f la fonction caractéristique de e sur G. On a $\mathscr{F}f = 1$ sur $\hat{G}$, et $\mathscr{F}f$ tend vers 0 à l'infini, donc $\hat{G}$ est compact. En outre, pour la mesure de Haar $\hat{\alpha}$ associée à α, $\mathscr{F}f$ doit être d'intégrale 1. Donc $\hat{\alpha}(\hat{G}) = 1$, ce qui prouve que $\hat{\alpha}$ est la mesure de Haar normalisée de $\hat{G}$.

Remarque. — Rappelons que si G est un groupe fini à n éléments, la notion de mesure de Haar normalisée est ambiguë.

Dans ce cas, la prop. 11 signifie que, si α est la mesure de Haar sur G qui attribue la masse 1 à chaque point, la mesure de Haar associée $\hat{\alpha}$ sur $\hat{G}$ attribue la masse $1/n$ à chaque point.

COROLLAIRE 1. — *Soit* H *un sous-groupe fermé de* G. *Pour que* H *soit compact, il faut et il suffit que* $H^\perp$ *soit ouvert dans* $\hat{G}$.

En effet, dire que $H^\perp$ est ouvert revient à dire que $G/H^\perp$ est discret, et $G/H^\perp$ est isomorphe à $\hat{H}$.

COROLLAIRE 2. — *Soit* $(H_\alpha)_{\alpha\in I}$ *une famille filtrante décroissante de sous-groupes compacts de* G. *Pour que* G *s'identifie à la limite projective des* G/H_α, *il faut et il suffit que* $\hat{G}$ *soit réunion des sous-groupes ouverts* $H_\alpha^\perp$ (*isomorphes à* $(G/H_\alpha)\hat{}$).

Dire que G s'identifie à la limite projective des G/H_α revient à dire que $\bigcap_\alpha H_\alpha = \{e\}$ (*Top. gén.*, chap. III, 3^e éd., § 7, prop 2), c'est-à-dire que $\bigcup_\alpha H_\alpha^\perp$ est partout dense dans $\hat{G}$ (cor. 2 du th. 4). Or $\bigcup_\alpha H_\alpha^\perp$ est un sous-groupe ouvert, donc fermé, de $\hat{G}$.

COROLLAIRE 3. — *Le dual d'un produit de groupes compacts* H_α *s'identifie au groupe discret somme directe des* $\hat{H}_\alpha$.

C'est un cas particulier du cor. 2.

PROPOSITION 12. — *Soit* K *un corps localement compact non discret* (*non nécessairement commutatif*) *et prenons pour* G *le groupe additif de* K. *Fixons un caractère unitaire* χ *de* G *distinct de* 1. *Pour* $x, y \in G$, *posons* $\varphi(x, y) = \chi(xy)$. *Alors* G *est en dualité avec lui-même relativement à* φ.

Pour $x, y \in G$, posons $\chi_y(x) = \chi(xy)$. Il est immédiat que $\chi_y \in \hat{G}$, et que l'application $\theta : y \mapsto \chi_y$ est un homomorphisme injectif de G dans $\hat{G}$. De plus θ est continue car l'application $(x, y) \mapsto \chi_y(x)$ de $G \times G$ dans **C** est continue, et $\theta(G)$ est dense dans $\hat{G}$ car $\chi_y(x) = 1$ pour $y \in G$ implique $x = 0$. Soit $z \mapsto |z|$ une valeur absolue définissant la topologie de K (*Alg. comm.*, chap. VI, § 9, n° 1, prop. 1), et soit $x_0 \in K$ tel que $\chi(x_0) \neq 1$. Soit $M > 0$. Si l'on a $|\chi_y(x) - 1| < |\chi(x_0) - 1|$ pour $|x| \leqslant M$, alors $|y^{-1}x_0| > M$, d'où $|y| < M^{-1}|x_0|$. On en conclut que l'application $y \mapsto \chi_y$ est un homéomorphisme de G sur $\theta(G)$, donc que $\theta(G)$ est localement compact et par suite fermé dans $\hat{G}$, donc que $\theta(G) = \hat{G}$.

COROLLAIRE 1. — (i) *Le groupe* $\mathbf{R}$ *est en dualité avec lui-même relativement à l'application* $(x, y) \mapsto \exp(2\pi i x y)$. *Le groupe* $\hat{\mathbf{R}}$ *étant ainsi identifié à* $\mathbf{R}$, *la mesure de Lebesgue est sa propre associée.*

(ii) *Les groupes* $\mathbf{Z}$ *et* $\mathbf{T}$ *sont en dualité relativement à l'application* $(n, \dot{t}) \mapsto \exp(2i\pi n t)$ (*où* $\dot{t}$ *désigne l'image canonique dans* $\mathbf{T}$ *du nombre réel* t).

Le groupe $\mathbf{R}$ est en dualité avec lui-même relativement à l'application $(x, y) \mapsto \exp(2\pi i x y)$ (prop. 12). Identifions $\hat{\mathbf{R}}$ à $\mathbf{R}$. L'orthogonal de $\mathbf{Z}$ dans $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ est alors $\mathbf{Z}$, et (ii) résulte du th. 4. Soit α (resp. γ) la mesure de Haar normalisée sur $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{T}$). Si β désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, on a $\gamma = \beta/\alpha$. La mesure de Haar $\hat{\alpha}$ (resp. $\hat{\gamma}$) sur $\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{T}$ (resp. sur $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{Z}$) associée à α (resp. γ) est la mesure de Haar normalisée sur $\mathbf{T}$ (resp. $\mathbf{Z}$) (prop. 11). D'après la prop. 9, la mesure de Haar sur $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ associée à β est donc β.

Remarque 1. — On retrouve en particulier la détermination de $\mathrm{X}(\mathrm{L}^1(\mathbf{Z}))$ faite au Chap. I, § 3, n° 3, exemple 4. Sauf mention du contraire, on identifiera désormais $\hat{\mathbf{R}}$ à $\mathbf{R}$ conformément au cor. 1 (i).

COROLLAIRE 2. — *Soit* f *une fonction complexe intégrable sur* $\mathbf{R}$. *On suppose que, pour tout* $x \in \mathbf{R}$, *on ait* $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |f(x + n)| < +\infty$, *et que la fonction* $x \mapsto \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x + n)$ *est continue. On suppose aussi que* $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |(\mathscr{F} f)(n)| < +\infty$. *Alors:*

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} (\mathscr{F} f)(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n).$$

C'est un cas particulier du cor. de la prop. 8.

COROLLAIRE 3. — *Le groupe* $\mathbf{R}^n$ *est en dualité avec lui-même relativement à l'application* $((x_j), (y_j)) \mapsto \exp(2\pi i \sum_{j=1}^{n} x_j y_j)$. *Le groupe* $(\mathbf{R}^n)\hat{}$ *étant ainsi identifié à* $\mathbf{R}^n$, *la mesure de Lebesgue est sa propre associée*

Ceci résulte du cor. 1 (i).

Remarque 2. — Etant donné un sous-groupe H de $\mathbf{R}^n$, il lui correspond donc un sous-groupe orthogonal $\mathrm{H}^{\perp}$ de $(\mathbf{R}^n)\hat{} = \mathbf{R}^n$, qui n'est autre que le sous-groupe *associé* à H défini en *Top. gén.*, chap. VII, § 1, n° 3.

Soit p un nombre premier. Pour tout $x \in \mathbf{Q}_p$, il existe un $\lambda(x) \in \mathbf{Q}$ et un seul, de la forme q/p^ν avec $0 \leqslant q < p^\nu$, tel que $\lambda(x) - x \in \mathbf{Z}_p$ (*Alg.*, chap. VII, § 2, n° 2, th. 2); nous poserons $q/p^\nu = \lambda(x)$. Il est clair que $\lambda(x + x') \equiv \lambda(x) + \lambda(x') \pmod{\mathbf{Z}}$, et que la fonction λ est localement constante sur $\mathbf{Q}_p$. Donc la fonction $x \mapsto \exp(2\pi i\lambda(x))$ est un caractère unitaire de $\mathbf{Q}_p$. Son noyau est $\mathbf{Z}_p$.

COROLLAIRE 4. — (i) *Le groupe* $\mathbf{Q}_p$ *est en dualité avec lui-même relativement à l'application* $(x, y) \mapsto \exp(2\pi i\lambda(xy))$. *Le groupe* $\hat{\mathbf{Q}}_p$ *étant ainsi identifié à* $\mathbf{Q}_p$, *la mesure de Haar normalisée sur* $\mathbf{Q}_p$ (*Intégr.*, chap. VII, § 1, n° 6, exemple) *est sa propre associée.*

(ii) *Les groupes* $\mathbf{Z}_p$ *et* $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ *sont en dualité relativement à l'application* $(z, \dot{t}) \mapsto \exp(2i\pi\lambda(zt))$ *où* $\dot{t}$ *désigne l'image canonique dans* $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ *du nombre p-adique* t).

La démonstration suit pas à pas celle du cor. 1.

§ 2. — Structure des groupes localement compacts commutatifs

1. Groupes engendrés par une partie compacte

Lemme 1. — *Soit* H *un groupe localement compact, et soit* φ *un morphisme continu de* $\mathbf{R}$ (*resp.* $\mathbf{Z}$) *dans* H. *Si* φ *n'est pas un isomorphisme* (*topologique*) *de* $\mathbf{R}$ (*resp.* $\mathbf{Z}$) *sur un sous-groupe de* H, *alors* $\varphi(\mathbf{R})$ (*resp.* $\varphi(\mathbf{Z})$) *est relativement compact.*

Soit I l'image de φ. Quitte à remplacer H par $\bar{\mathrm{I}}$, on peut supposer que I est dense dans H.

Supposons qu'il existe un voisinage V de e dans H et un entier M > 0 tels que, pour tout $t >$ M dans $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{Z}$), on ait $\varphi(t) \notin$ V. Alors φ est injective, la restriction de φ à $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$ est un homéomorphisme, et la restriction de φ^{-1} à V $\cap$ I est continue, donc φ est un isomorphisme topologique de $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{Z}$) sur I.

Supposons que φ ne soit pas un isomorphisme topologique de $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{Z}$) sur I. Soient W un voisinage ouvert relativement compact de e dans H, et V un voisinage symétrique de e tel que $\mathrm{V}^2 \subset$ W. Pour tout $x \in \mathrm{H} = \bar{\mathrm{I}}$, il existe un $s \in \mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{Z}$) tel que $x \in \varphi(s)$V. D'après l'alinéa précédent, il existe $t \in \mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{Z}$) tel que $t > |s|$ et $\varphi(t) \in \mathrm{V}$. On a $x \in \varphi(t+s)\varphi(t)^{-1}\mathrm{V} \subset \varphi(t+s)\mathrm{W}$, et $t+s > 0$. Par suite, les ensembles ouverts $\varphi(u)\mathrm{W}$ pour $u > 0$ forment un recouvrement ouvert de H. Il existe $u_1, \ldots, u_n$ strictement positifs tels que $\overline{\mathrm{W}} \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi(u_i)\mathrm{W}$. Soit T le plus grand des u_i. Soit $x \in \mathrm{H}$ et soit $s = \inf\{t | t \geqslant 0, \varphi(t) \in \overline{\mathrm{W}}x\}$. On a alors $\varphi(s)x^{-1} \in \overline{\mathrm{W}}$, et il existe un i tel que $\varphi(s)x^{-1} \in \varphi(u_i)\mathrm{W}$, d'où $\varphi(s - u_i) \in \overline{\mathrm{W}}x$. La définition de s entraîne $s - u_i < 0$, d'où $s \leqslant \mathrm{T}$. Il en résulte que $\mathrm{H} = \varphi([0, \mathrm{T}])\overline{\mathrm{W}}$ est compact.

Lemme 2. — Si G *est engendré par un voisinage compact* V *de* e, *il existe un sous-groupe discret* D *de* G *isomorphe à un groupe* $\mathbf{Z}^n$, *tel que* G/D *soit compact.*

Comme V^2 est compact, il existe $x_1, \ldots, x_k \in \mathrm{G}$ tels que $\mathrm{V}^2 \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} x_i \mathrm{V}$. Soit D_0 le sous-groupe engendré par les x_i. On a $\mathrm{V}^2 \subset \mathrm{D}_0\mathrm{V}$, d'où par récurrence $\mathrm{V}^n \subset \mathrm{D}_0\mathrm{V}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{D}_0\mathrm{V}$. Soit alors J une partie de $\{1, 2, \ldots, k\}$ telle que le sous-groupe D engendré par les x_i $(i \in \mathrm{J})$ soit isomorphe topologiquement à $\mathbf{Z}^{\mathrm{Card}\,\mathrm{J}}$, et maximale pour cette propriété. Montrons que G/D est compact. Soit p la surjection canonique de G sur G/D. Soit $i \in \{1, 2, \ldots, k\} - \mathrm{J}$. Si le sous-groupe H_i de G/D engendré par $p(x_i)$ est topologiquement isomorphe à $\mathbf{Z}$, le sous-groupe de G engendré par D et x_i est discret et l'application $(d, n) \mapsto dx_i^n$ est un isomorphisme de $\mathrm{D} \times \mathbf{Z}$ sur ce sous-groupe, contrairement à la maximalité de J. Le lemme 1 entraîne donc que $\overline{\mathrm{H}_i}$ est compact. Donc $\mathrm{G/D} = \left(\prod_{i \notin \mathrm{J}} \overline{\mathrm{H}_i}\right)p(\mathrm{V})$ est compact.

PROPOSITION 1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est engendré par un voisinage compact de* e ;

(ii) G *est produit direct d'un groupe* $\mathbf{R}^p$, *d'un groupe* $\mathbf{Z}^q$, *et d'un groupe compact ;*

(iii) $\hat{\mathrm{G}}$ *est localement isomorphe à un groupe* $\mathbf{R}^n$;

(iv) $\hat{\mathrm{G}}$ *est produit direct d'un groupe* $\mathbf{R}^p$, *d'un groupe* $\mathbf{T}^q$, *et d'un groupe discret.*

(i) $\Rightarrow$ (iii) : si G possède la propriété (i), il existe un sous-groupe D de G isomorphe à $\mathbf{Z}^n$ tel que G/D soit compact (lemme 2). Alors $\mathrm{D}^\perp$ est discret, donc $\hat{\mathrm{G}}$ est localement isomorphe à $\hat{\mathrm{G}}/\mathrm{D}^\perp$, c'est-à-dire à $\hat{\mathrm{D}}$, c'est-à-dire à $\mathbf{T}^n$, donc à $\mathbf{R}^n$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : si $\hat{\mathrm{G}}$ est localement isomorphe à $\mathbf{R}^n$, la composante neutre $(\hat{\mathrm{G}})_0$ de $\hat{\mathrm{G}}$ est un sous-groupe ouvert isomorphe à $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^{n-p}$

(*Top. gén.*, chap. VII, § 2, th. 1), et par suite est un groupe divisible. Or :

Lemme 3. — *Soient* A *et* B *deux groupes commutatifs,* C *un sous-groupe de* B, *et* φ *un morphisme de* C *dans* A. *Si* A *est divisible, il existe un morphisme de* B *dans* A *qui prolonge* φ.

(Autrement dit, les groupes divisibles sont injectifs dans la catégorie des groupes commutatifs; cf. *Alg.*, chap. VII, 2[e] éd., § 2, exerc. 3).

Soit $\mathfrak{E}$ l'ensemble des couples (X, f), où X est un sous-groupe de B contenant C et f un morphisme de X dans A prolongeant φ. Ordonnons $\mathfrak{E}$ par la relation « $X \subset X'$ et f' prolonge f ». Il est immédiat que $\mathfrak{E}$ est inductif. Soit (X, f) un élément maximal de $\mathfrak{E}$. Si $X \neq B$, prenons un élément x de $B - X$ et soit X' le sous-groupe engendré par X et x. Si $x^n \notin X$ pour tout $n \neq 0$, on peut prolonger f à X', en prenant $f(x)$ arbitraire dans A. Dans l'autre cas, soit n le plus petit entier > 0 tel que $x^n \in X$. Puisque A est divisible, il existe $y \in A$ tel que $y^n = f(x^n)$ et on peut prolonger f à X' en posant $f(x) = y$. Dans les deux cas, (X, f) ne serait pas maximal. Donc $X = B$ et le lemme est démontré.

Appliquons le lemme 3 à l'application identique de $C = (\hat{G})_0$ dans $A = (\hat{G})_0$, avec $B = \hat{G}$. On obtient un projecteur π de $\hat{G}$ sur $\hat{G}_0$, qui est continu puisque sa restriction au sous-groupe groupe ouvert $\hat{G}_0$ l'est. Par suite, $\hat{G}$ est produit direct de $\hat{G}_0$ et du sous-groupe discret $\pi^{-1}(e)$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) : évident.

Corollaire 1. — *Supposons que* G *soit engendré par un voisinage compact de* e. *Alors* G *possède un plus grand sous-groupe compact* K, *et* G *est isomorphe à* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times K$.

D'après la prop. 1, G s'identifie à un groupe $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times K$ où K est un groupe compact. Soit p la surjection canonique de G sur $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q$. Si K' est un sous-groupe compact de G, $p(K')$ est un sous-groupe compact de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q$, donc est réduit à l'élément neutre. Donc $K' \subset K$ et K est le plus grand sous-groupe compact de G.

Remarque 1. — Dans la décomposition $G = \mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times K$ de la prop. 1 (ii), le sous-groupe K est déterminé de manière unique comme plus grand sous-groupe compact de G, et le sous-groupe $\mathbf{R}^p \times K$ est déterminé de manière unique puisque $\mathbf{R}^p$ est la composante neutre de G/K. Compte tenu de *Top. gén.*, chap. VII, § 2, prop. 1, l'entier p est déterminé de manière unique. Puisque $G/(\mathbf{R}^p \times K)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^q$, l'entier q est déterminé de manière unique. Par dualité, dans la décomposition

$$\hat{G} = \mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times D$$

de la prop. 1 (iv), les sous-groupes $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q$, $\mathbf{T}^q$, et les entiers p et q sont déterminés de manière unique.

Corollaire 2. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *et* $\hat{G}$ *sont engendrés par des voisinages compacts de* e ;

(ii) G *est localement isomorphe à un groupe* $\mathbf{R}^m$ *et* $\hat{G}$ *à un groupe* $\mathbf{R}^n$;

(iii) G *est isomorphe à un produit* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times \mathbf{Z}^r \times \Phi$, *où* Φ *est un groupe fini ;*

(iv) $\hat{G}$ *est isomorphe à un produit* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times \mathbf{T}^r \times \Phi$, *où* Φ *est un groupe fini.*

On a (i) $\Leftrightarrow$ (ii) d'après la prop. 1, et évidemment (iii) $\Leftrightarrow$ (iv), d'où (iii) $\Rightarrow$ (i). Si (i) est vrai, alors $\hat{G} = \mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^r \times D$ où D est discret et est engendré par une partie compacte ; alors D est de type fini, donc de la forme $\mathbf{Z}^q \times \Phi$ où Φ est un groupe fini (*Alg.*, chap. VII, § 4, n° 6, th. 3).

Remarque 2. — Avec les notations du cor. 2, identifiant G à $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times \mathbf{Z}^r \times \Phi$, $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q$ est la composante neutre de G, $\mathbf{T}^q \times \Phi$ est son plus grand sous-groupe compact, $\mathbf{T}^q$ est la composante neutre du plus grand sous-groupe compact ; les entiers p, q, r sont déterminés de manière unique par G d'après la remarque 1, et le groupe Φ est déterminé à un isomorphisme près par G.

Proposition 2. — *Supposons* G *compact. Il existe une famille filtrante décroissante de sous-groupes fermés* H_α *de* G *tels que :* 1) G *s'identifie à la limite projective des* G/H_α ; 2) *chaque* G/H_α *est isomorphe à un groupe* $\mathbf{T}^q \times \Phi$, *où* Φ *est un groupe fini.*

En effet, $\hat{G}$ est discret, donc réunion d'une famille filtrante croissante de sous-groupes de type fini D_α. Posant $H_\alpha = D_\alpha^\perp$, G s'identifie à la limite projective des G/H_α (§ 1, cor. 2 de la prop. 11). En outre, D_α est isomorphe à un groupe $\mathbf{Z}^q \times \Phi$ où Φ est un groupe fini, donc G/H_α est isomorphe à $\mathbf{T}^q \times \Phi$.

2. Cas général

PROPOSITION 3. — (i) *Tout groupe commutatif localement compact est produit direct d'un sous-groupe isomorphe à un groupe* $\mathbf{R}^n$ *et d'un sous-groupe admettant un sous-groupe ouvert compact.*

(ii) *Tout groupe commutatif localement compact est réunion d'une famille filtrante croissante de sous-groupes ouverts, qui sont limites projectives de groupes isomorphes à des groupes de la forme* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times \mathbf{Z}^r \times \Phi$ *où* Φ *est un groupe fini.*

L'assertion (ii) résulte des prop. 1 et 2, car G est réunion filtrante croissante des sous-groupes ouverts engendrés par les voisinages compacts de e.

Soit d'autre part H l'un de ces sous-groupes. Alors H est de la forme $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times \mathrm{K}$, où K est compact (prop. 1). La surjection canonique de H sur le groupe divisible $\mathbf{R}^p$ se prolonge (lemme 3) en un projecteur continu π de G sur $\mathbf{R}^p$. Donc G est produit direct de $\mathbf{R}^p$ et du noyau L de π, et $\mathbf{Z}^q \times \mathrm{K}$ est un sous-groupe ouvert de L. Donc L/K est discret.

PROPOSITION 4. — (i) *Soit* B *l'ensemble des éléments de* G *qui engendrent un sous-groupe relativement compact de* G. *Alors* B *est un sous-groupe fermé de* G.

(ii) *Soit* C *la composante neutre de* $\hat{\mathrm{G}}$. *Alors* $\mathrm{B}^\perp = \mathrm{C}$.

Comme le produit de deux parties compactes de G est compact, B est un sous-groupe. Tout élément de G appartient à un sous-groupe ouvert engendré par un voisinage compact de e. Pour prouver que tout élément de $\overline{\mathrm{B}}$ appartient à B, on est donc ramené (prop. 1) au cas où $\mathrm{G} = \mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times \mathrm{K}$, K étant un groupe compact. Mais, dans ce cas, il est clair que B = K.

Prouvons (ii). La prop. 3 (i) ramène au cas où G admet un sous-groupe ouvert compact H. Alors $\mathrm{H}^\perp$ est un sous-groupe ouvert compact de $\hat{\mathrm{G}}$. Donc C est la composante neutre de $\mathrm{H}^\perp$. D'autre part, $\mathrm{B} \supset \mathrm{H}$, et B/H est l'ensemble des éléments de G/H qui engendrent un sous-groupe relativement compact de G/H. Comme $\mathrm{H}^\perp$ s'identifie à $(\mathrm{G}/\mathrm{H})\hat{}$, on est ramené au cas où G est discret, donc $\hat{\mathrm{G}}$ compact. Alors C est l'intersection des sous-groupes ouverts de $\hat{\mathrm{G}}$ (*Top. gén.*, chap. III, 3[e] éd., § 4, n° 6, prop. 14); un sous-groupe fermé de $\hat{\mathrm{G}}$ est ouvert si et seulement si il est d'indice fini, ou encore si son orthogonal est fini; le cor. 2 du th. 4 du § 1 montre que $\mathrm{C}^\perp$ est la réunion des sous-groupes finis de G, c'est-à-dire B.

Corollaire 1. — *Supposons* G *compact. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est connexe ;*

(ii) $\hat{G}$ *est sans torsion ;*

(iii) G *est divisible.*

Ceci résulte de la prop. 4, et du § 1, cor. 8 du th. 4.

Corollaire 2. — *Supposons* G *compact. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est totalement discontinu ;*

(ii) $\hat{G}$ *est un groupe de torsion.*

C'est un cas particulier de la prop. 4.

Corollaire 3. — *Si* G *est connexe,* G *est divisible.*

En effet, G est isomorphe à un groupe $\mathbf{R}^n \times K$ où K est un groupe compact connexe (prop. 1). Il suffit alors d'appliquer le cor. 1.

§ 3. — Synthèse harmonique dans les espaces $L^1(G)$, $L^2(G)$, $L^\infty(G)$

1. Synthèse harmonique dans $L^1(G)$

D'après le § 1, prop. 5, *l'algèbre de Banach* $L^1(G)$ *est régulière.*

D'après le chap. I, § 5, ceci entraîne notamment les conséquences suivantes, que nous énoncerons sous forme de remarques :

1) Si F est une partie fermée de $\hat{G}$ et K une partie compacte de $\hat{G}$ telles que $F \cap K = \varnothing$, il existe une $f \in L^1(G)$ telle que $\mathscr{F}f$ soit égale à 0 sur F et à 1 sur K (chap. I, § 5, prop. 1).

2) Pour tout idéal $\mathfrak{I}$ de $L^1(G)$, soit $h(\mathfrak{I})$ l'ensemble des points de $\hat{G}$ où s'annulent toutes les transformées de Fourier de fonctions de $\mathfrak{I}$; cet ensemble est fermé. Pour toute partie M de $\hat{G}$, soit $\mathfrak{k}(M)$ l'idéal de $L^1(G)$ formé des fonctions dont la transformée de Fourier s'annule sur M ; cet idéal est fermé. Ceci posé, soit M une partie fermée de $\hat{G}$. L'ensemble des idéaux $\mathfrak{I}$ de $L^1(G)$ tels que $h(\mathfrak{I}) = M$ admet un plus grand élément, à savoir $\mathfrak{k}(M)$, et un plus petit élément, à savoir l'ensemble des $f \in L^1(G)$ dont la transformée de Fourier est à support compact disjoint de M (chap. I, § 5, prop. 4).

3) Soient $\mathfrak{I}$ un idéal de $L^1(G)$, et $g : \hat{G} \to \mathbf{C}$ une fonction

continue. On suppose que pour tout $\chi \in \hat{G}$, il existe une $f_\chi \in \mathfrak{J}$ telle que g soit égale à $\mathscr{F}(f_\chi)$ au voisinage de χ. On suppose en outre qu'il existe une $f_\infty \in \mathfrak{J}$ telle que g soit égale à $\mathscr{F}(f_\infty)$ dans le complémentaire d'une partie compacte de $\hat{G}$ (condition qui est trivialement satisfaite si G est discret). Alors il existe une $f \in \mathfrak{J}$ telle que $g = \mathscr{F}f$ (chap. I, § 5, cor. 2 de la prop. 2).

Lemme 1. — *Les fonctions de* $L^1(G)$ *dont la transformée de Fourier est à support compact forment un sous-espace dense de* $L^1(G)$.

Comme $\mathscr{K}(\hat{G})$ est dense dans $L^2(\hat{G})$, le sous-espace V de $L^2(G)$ formé des $f \in L^2(G)$ telles que $\mathscr{F}f \in \mathscr{K}(\hat{G})$ est dense dans $L^2(G)$. Soit alors $g \in L^1(G)$. Il existe $g_1, g_2 \in L^2(G)$ telles que $g = g_1 g_2$ (on peut par exemple prendre $g_1 = |g|^{1/2}$ et choisir g_2 convenablement). Donc g est limite dans $L^1(G)$ de fonctions de la forme $g'_1 g'_2$, où $g'_1 \in V$, $g'_2 \in V$. Or $\mathscr{F}(g'_1 g'_2) = (\mathscr{F}g'_1) * (\mathscr{F}g'_2)$ (§ 1, prop. 7), et $(\mathscr{F}g'_1) * (\mathscr{F}g'_2) \in \mathscr{K}(\hat{G})$.

Proposition 1. — *Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal fermé de* $L^1(G)$, *et soit* $f \in L^1(G)$. *Si* $\mathscr{F}f$ *s'annule sur un voisinage de* $h(\mathfrak{J})$ (*cf. remarque* 2 *ci-dessus*), *on a* $f \in \mathfrak{J}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction $g \in L^1(G)$ telle que $\|f - f * g\|_1 < \varepsilon$ (*Intégr.*, chap. VIII, § 4, prop. 20). D'après le lemme 1, on peut supposer que $\mathscr{F}g$ est à support compact. Alors $\mathscr{F}(f * g) = (\mathscr{F}f)(\mathscr{F}g)$ est à support compact disjoint de $h(\mathfrak{J})$, donc $f * g \in \mathfrak{J}$ (remarque 2). Comme ε est arbitrairement petit, on a $f \in \bar{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}$.

Théorème 1. — *Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal fermé de* $L^1(G)$ *distinct de* $L^1(G)$. *Il existe un* $\chi \in \hat{G}$ *tel que* $(\mathscr{F}f)(\chi) = 0$ *pour toute* $f \in \mathfrak{J}$.

D'après le lemme 1 et le chap. I, § 5, cor. 1 de la prop. 4, $\mathfrak{J}$ est contenu dans un idéal maximal régulier de $L^1(G)$, c'est-à-dire dans le noyau d'un caractère de $L^1(G)$.

Corollaire 1. — *Soit* $f \in L^1(G)$. *Si* $\mathscr{F}f$ *ne s'annule pas, les fonctions* $f * \varepsilon_x$, *où* x *parcourt* G, *forment un ensemble total dans* $L^1(G)$.

Soit V le sous-espace vectoriel fermé de $L^1(G)$ engendré par les $f * \varepsilon_x$. D'après *Intégr.*, chap. VIII, § 4, cor. de la prop. 20, V est un idéal fermé de $L^1(G)$. D'après le th. 1, $V = L^1(G)$.

Soient g une fonction complexe sur G, Φ un filtre sur G. Nous dirons que g est *lentement oscillante suivant* Φ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $M \in \Phi$ et un voisinage V de e dans G tels que

$$x \in M \text{ et } y \in V \quad \Rightarrow \quad |g(xy) - g(x)| \leqslant \varepsilon.$$

COROLLAIRE 2. — *Soit Φ un filtre sur G invariant par translation. Soit $f \in L^1(G)$, telle que $\mathscr{F}f$ ne s'annule pas et que $\int_G f(x)\,dx = 1$. Soit $g \in L^\infty(G)$. On suppose que $f * g$ a une limite finie α suivant Φ.*

(i) *Pour toute $f' \in L^1(G)$ telle que $\int_G f'(x)\,dx = 1$, $f' * g$ tend vers α suivant Φ.*

(ii) *Supposons de plus que g soit lentement oscillante suivant Φ. Alors g tend vers α suivant Φ.*

En remplaçant g par $g - \alpha$, on se ramène au cas où $\alpha = 0$.

Soit $\mathfrak{J}$ l'ensemble des $f' \in L^1(G)$ telles que $f' * g$ tende vers 0 suivant Φ. Il est clair que $\mathfrak{J}$ est un sous-espace vectoriel de $L^1(G)$ invariant par translation. L'inégalité $\|h * h'\|_\infty \leqslant \|h\|_1 \|h'\|_\infty$ pour $h \in L^1(G)$ et $h' \in L^\infty(G)$ prouve que $\mathfrak{J}$ est fermé. Donc $\mathfrak{J}$ est un idéal fermé de $L^1(G)$. On a $f \in \mathfrak{J}$ par hypothèse, donc $\mathfrak{J} = L^1(G)$ d'après le th. 1. Ceci prouve (i).

Plaçons-nous dans les hypothèses de (ii). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un $M \in \Phi$ et un voisinage compact V de e tels que

$$x \in M \text{ et } y \in V \quad \Rightarrow \quad |g(y^{-1}x) - g(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Soient h la fonction caractéristique de V et μ la mesure de V. D'après (i), $h * g$ tend vers 0 suivant Φ. Or on a :

$$\frac{1}{\mu}(h * g)(z) = \frac{1}{\mu}\int_V g(x^{-1}z)\,dx = g(z) + \frac{1}{\mu}\int_V (g(x^{-1}z) - g(z))\,dx.$$

Si $z \in M$ et $x \in V$, on a $|g(x^{-1}z) - g(z)| \leqslant \varepsilon$. Donc

$$z \in M \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{\mu}(h * g)(z) - g(z)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Donc $\lim.\sup_\Phi |g| \leqslant \varepsilon$. Vu l'arbitraire de ε, ceci prouve (ii).

Exemple. — Soient $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière à coefficients complexes, et A une constante telle que $n|a_n| \leqslant A$ pour tout n. Pour $z \in \mathbf{C}$ et $|z| < 1$, soit $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$. On suppose que $f(x)$ tend vers un nombre fini l quand x tend vers 1 par valeurs réelles

<1. Alors on va montrer que *la série* $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ *est convergente et de somme* l.

Plaçons-nous sur le groupe $\mathbf{R}_+^*$. Nous allons interpréter la fonction $\xi \mapsto f(e^{-\xi})$, où $\xi \in \mathbf{R}_+^*$, comme un produit de convolution. Pour $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, posons

$$g(\lambda) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant \lambda} a_n .$$

Si $0 < \lambda \leqslant \lambda'$, on a, en notant $[\lambda]$ la partie entière de λ

$$(1) \qquad |g(\lambda') - g(\lambda)| = \left| \sum_{\lambda < n \leqslant \lambda'} a_n \right| \leqslant |a_{[\lambda+1]}| + \left| \sum_{\lambda + 1 < n \leqslant \lambda'} a_n \right|$$

$$\leqslant |a_{[\lambda+1]}| + \mathrm{A} \int_{\lambda}^{\lambda'} \frac{dt}{t} = |a_{[\lambda+1]}| + \mathrm{A} \log \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

Ceci prouve que $g(\lambda)$ est lentement oscillante quand λ tend vers $+\infty$. D'autre part:

$$a_0(1 - z) + (a_0 + a_1)(z - z^2) + (a_0 + a_1 + a_2)(z^2 - z^3)$$
$$+ \ldots + (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)(z^n - z^{n+1})$$
$$= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n - z^{n+1}(a_0 + a_1 + \ldots + a_n).$$

On a

$$|z^{n+1}(a_2 + a_3 + \ldots + a_n)| \leqslant \mathrm{A}|z|^{n+1} \log n,$$

donc $z^{n+1}(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, si $|z| < 1$. Par suite, pour $0 < x < 1$:

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)(x^n - x^{n+1})$$

la série étant convergente; donc, pour $\xi \in \mathbf{R}_+^*$

$$(2) \qquad f(e^{-\xi}) = \sum_{n \geqslant 0} \int_{n\xi}^{(n+1)\xi} g\left(\frac{x}{\xi}\right) e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} g\left(\frac{x}{\xi}\right) e^{-x}\, dx$$

la fonction $x \mapsto g\left(\frac{x}{\xi}\right) e^{-x}$ étant intégrable d'après (1). On en déduit d'abord que

$$\left| f(e^{-\xi}) - g\left(\frac{1}{\xi}\right) \right| = \left| \int_0^{+\infty} \left(g\left(\frac{x}{\xi}\right) - g\left(\frac{1}{\xi}\right) \right) e^{-x}\, dx \right|$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{A}(1 + |\log x|) e^{-x}\, dx < +\infty$$

donc $g \in \mathrm{L}^{\infty}(\mathbf{R}_+^*)$.

Il s'agit de prouver que $\lim_{\lambda \to 0, \lambda > 0} g(1/\lambda) = l$. Or, d'après (2), *la fonction* $\xi \mapsto f(e^{-\xi})$ *sur le groupe* $\mathbf{R}_+^*$ (fonction qui tend vers l quand ξ tend vers 0) *est produit de convolution de* $\check{g}$ *et de la fonction* $x \mapsto xe^{-x}$ (si on prend pour mesure de Haar sur $\mathbf{R}_+^*$ la mesure dx/x). Il est clair que cette dernière fonction appartient à $L^1(\mathbf{R}_+^*)$ et que son intégrale est 1. D'après le corollaire 2, il suffit de prouver que sa transformée de Fourier n'est jamais nulle. Comme $x \mapsto \log x$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$, tout caractère de $\mathbf{R}_+^*$ est de la forme $x \mapsto e^{iy \log x} = x^{iy}$ avec un $y \in \mathbf{R}$. Il s'agit donc de prouver que $\int_0^{+\infty} xe^{-x}x^{iy}\,dx/x \neq 0$, c'est-à-dire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{iy}\,dx \neq 0.$$

Or, d'après *Fonct. var. réelle*, chap. VII, § 2, n° 1, la fonction $z \mapsto \Gamma(z)$ est holomorphe et non nulle pour $\mathscr{R}z > 0$; d'après *loc. cit.*, § 1, prop. 3, $\Gamma(z)$ est égal à $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt$ pour z réel > 0 donc pour $\mathscr{R}z > 0$ par prolongement analytique (cf. *Var.*, R.); donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{iy}\,dx = \Gamma(1 + iy) \neq 0.$$

Lemme 2. — *Soient* K *une partie compacte de* G, *et* $\eta > 0$. *Il existe une fonction* $j \in L^1(G)$ *possédant les propriétés suivantes:*

1) $\|j\|_1 \leqslant 2$;

2) $\mathscr{F}j = 1$ *au voisinage de l'élément neutre de* $\hat{G}$;

3) $\|j - j * \varepsilon_x\|_1 \leqslant \eta$ *pour tout* $x \in K$.

Il existe un voisinage U de e dans $\hat{G}$ tel que:

$$\hat{x} \in U \quad \Rightarrow \quad |1 - \langle x, \hat{x} \rangle| \leqslant \eta/4 \text{ pour tout } x \in K.$$

En diminuant U, on peut le supposer ouvert, symétrique, et intégrable pour la mesure de Haar m de $\hat{G}$ associée à dx. Il existe un voisinage compact symétrique V de e dans $\hat{G}$ tel que $V \subset U$ et $m(U) \leqslant 2m(V)$. Les fonctions caractéristiques de U et V peuvent s'écrire $\mathscr{F}u$ et $\mathscr{F}v$, où $u \in L^2(G)$, $v \in L^2(G)$. Nous allons montrer que la fonction $j = m(V)^{-1}uv$, qui appartient à $L^1(G)$, possède les propriétés du lemme.

1) On a

$$\begin{aligned}\|j\|_1 \leqslant m(V)^{-1}\|u\|_2\|v\|_2 &= m(V)^{-1}\|\mathscr{F}u\|_2\|\mathscr{F}v\|_2 \\ &= m(V)^{-1}m(U)^{1/2}m(V)^{1/2} \leqslant \sqrt{2}.\end{aligned}$$

2) Il existe un voisinage W de e dans $\hat{G}$ tel que $VW \subset U$ (*Top. gén.*, chap. II, § 4, prop. 4). Pour $\hat{x} \in W$, on a, d'après le § 1, prop. 7,

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}j)(\hat{x}) &= m(V)^{-1}(\mathscr{F}u * \mathscr{F}v)(\hat{x}) \\ &= m(V)^{-1} \int_{\hat{G}} (\mathscr{F}u)(\hat{y})(\mathscr{F}v)(\hat{y}^{-1}\hat{x})\, dm(\hat{y}).\end{aligned}$$

Or la condition $(\mathscr{F}v)(\hat{y}^{-1}\hat{x}) \neq 0$ entraîne $\hat{y}^{-1}\hat{x} \in V$, donc $\hat{y} \in V^{-1}\hat{x} \subset VW \subset U$, donc $(\mathscr{F}u)(\hat{y}) = 1$. Par conséquent

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}j)(\hat{x}) &= m(V)^{-1} \int_{\hat{G}} (\mathscr{F}v)(\hat{y}^{-1}\hat{x})\, dm(\hat{y}) \\ &= m(V)^{-1} \int_{\hat{G}} (\mathscr{F}v)(\hat{y})\, dm(\hat{y}) = 1.\end{aligned}$$

2) Si $x \in K$, on a

$$\|u - u * \varepsilon_x\|_2^2 = \int_{\hat{G}} |(\mathscr{F}u)(\hat{x})(1 - \overline{\langle x, \hat{x} \rangle})|^2\, dm(\hat{x}) \leqslant m(U)(\eta/4)^2$$

et de même $\|v - v * \varepsilon_x\|_2^2 \leqslant m(V)(\eta/4)^2$; donc

$$\begin{aligned}\|j - j * \varepsilon_x\|_1 &= m(V)^{-1}\|u(v - v * \varepsilon_x) + (v * \varepsilon_x)(u - u * \varepsilon_x)\|_1 \\ &\leqslant m(V)^{-1}\left(\|u\|_2 m(V)^{1/2}\frac{\eta}{4} + \|v\|_2 m(U)^{1/2}\frac{\eta}{4}\right) \\ &\leqslant 2m(V)^{-1}m(U)^{1/2}m(V)^{1/2}\frac{\eta}{4} \\ &= m(U)^{1/2}m(V)^{-1/2}\frac{\eta}{2} < \eta.\end{aligned}$$

PROPOSITION 2. — *L'algèbre* $L^1(G)$ *vérifie la condition de Ditkin* (chap. I, § 5, n° 2, déf. 2).

Soit $f \in L^1(G)$ telle que $\|f\|_1 = 1$. Soit χ un caractère de $L^1(G)$, et distinguons deux cas suivant que χ est nul ou non. Si χ est nul, il faut vérifier qu'il existe une suite $(g_1, g_2, \ldots)$ dans $L^1(G)$ telle que $\|f - g_n * f\|_1$ tende vers 0 et que $\mathscr{F}g_n$ s'annule hors d'une partie compacte de $\hat{G}$; or ceci résulte aussitôt du lemme 1. Maintenant, supposons $\chi \in \hat{G}$ et $(\mathscr{F}f)(\chi) = 0$. Il s'agit de prouver l'existence d'une suite $(f_1, f_2, \ldots)$ dans $L^1(G)$ telle que $\|f - f * f_n\|_1$ tende vers 0 et que $\mathscr{F}f_n$ s'annule au voisinage de χ. Par translation dans $\hat{G}$, on se ramène au cas où $\chi = e$. Il existe une fonction $u_n \in L^1(G)$ telle que $\|u_n\|_1 = 1$ et

$$\|f - f * u_n\|_1 \leqslant 1/n,$$

et une partie compacte K_n de G telle que $\int_{G-K_n} |f(x)|\,dx \leqslant 1/n$. D'après le lemme 2, il existe une fonction $j_n \in L^1(G)$ telle que $\|j_n\|_1 \leqslant 2$, $\mathscr{F}j_n = 1$ au voisinage de e, et $\|j_n - j_n * \varepsilon_x\|_1 \leqslant 1/n$ pour tout $x \in K_n$. Posons $f_n = u_n - j_n * u_n$, et montrons que la suite (f_n) possède les propriétés requises. D'abord

$$\mathscr{F}f_n = \mathscr{F}u_n - (\mathscr{F}j_n)(\mathscr{F}u_n)$$

s'annule au voisinage de e. D'autre part,

$$\begin{aligned}\|f * f_n - f\|_1 &\leqslant \|f * u_n - f\|_1 + \|f * j_n\|_1 \|u_n\|_1 \\ &\leqslant 1/n + \|f * j_n\|_1 .\end{aligned}$$

Or, pour presque tout $y \in G$, on a

$$(f * j_n)(y) = \int_G f(x) j_n(x^{-1}y)\,dx = \int_G f(x)(j_n(x^{-1}y) - j_n(y))\,dx$$

parce que $0 = (\mathscr{F}f)(e) = \int_G f(x)\,dx$; d'où

$$\begin{aligned}\|f * j_n\|_1 &\leqslant \int_G |f(x)| \cdot \|j_n * \varepsilon_x - j_n\|_1\,dx \\ &= \int_{K_n} |f(x)| \cdot \|j_n * \varepsilon_x - j_n\|_1\,dx \\ &\quad + \int_{G-K_n} |f(x)| \cdot \|j_n * \varepsilon_x - j_n\|_1\,dx \\ &\leqslant \frac{1}{n}\int_{K_n} |f(x)|\,dx + 4\int_{G-K_n} |f(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{n} + \frac{4}{n} = \frac{5}{n}.\end{aligned}$$

Finalement, $\|f * f_n - f\|_1 \leqslant 6/n$, ce qui prouve la proposition.

Appliquant le chap. I, § 5, prop. 5, on obtient alors le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit $\mathfrak{I}$ un idéal fermé de $L^1(G)$ tel que la frontière de $h(\mathfrak{I})$ (remarque 2) ne contienne aucun ensemble parfait non vide. Alors $\mathfrak{I}$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^1(G)$ telles que $\mathscr{F}f$ s'annule sur $h(\mathfrak{I})$.*

Par contre, pour un idéal fermé quelconque de $L^1(G)$, la conclusion du th. 2 est en général inexacte (cf. exerc. 9). Plus précisément, on peut montrer que, si G est non compact, il existe un idéal fermé de $L^1(G)$ qui n'est pas auto-adjoint (*).

---

* Voir par exemple W. RUDIN, *Fourier analysis on groups*, Interscience tracts in pure and applied mathematics, théorème 7.7.1.

COROLLAIRE. — *Si un idéal fermé* $\mathfrak{I}$ *de* $L^1(G)$ *est contenu dans un seul idéal régulier maximal,* $\mathfrak{I}$ *est lui-même régulier maximal.*

2. *Synthèse harmonique dans* $L^\infty(G)$

Dans ce n°, on identifiera $L^\infty(G)$ au dual de $L^1(G)$, et on le munira de la topologie faible $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$.

L'application $W \mapsto W^0$ est une bijection de l'ensemble des sous-espaces vectoriels faiblement fermés de $L^\infty(G)$ sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de $L^1(G)$.

D'autre part, si $f \in L^1(G)$ et $x \in G$, l'endomorphisme $g \mapsto f * g$ (resp. $g \mapsto \varepsilon_x * g$) de l'espace de Banach $L^1(G)$ a pour transposé l'endomorphisme $g' \mapsto \check{f} * g'$ (resp. $g' \mapsto \varepsilon_{x^{-1}} * g'$) de l'espace de Banach $L^\infty(G)$ (*Intégr.*, chap. VIII, § 4, n° 3, exemple 6). Pour qu'un sous-espace vectoriel fermé de $L^1(G)$ soit un idéal de $L^1(G)$, il faut et il suffit qu'il soit invariant par les translations de G. Donc, *pour qu'un sous-espace vectoriel faiblement fermé de* $L^\infty(G)$ *soit stable par convolution avec les éléments de* $L^1(G)$, *il faut et il suffit qu'il soit invariant par les translations de* G.

Soit U un sous-espace vectoriel faiblement fermé de $L^\infty(G)$. Supposons U (donc U^0) invariant par les translations de G. Soit $f \in L^1(G)$. Pour toute $g \in L^\infty(G)$, on a $(\check{f} * g)(x) = \langle \varepsilon_x * f, g \rangle$. Donc, *pour que f appartienne à* U^0, *il faut et il suffit que* $\check{f} * g = 0$ *pour toute* $g \in U$.

Si W est un sous-espace vectoriel de $L^\infty(G)$ faiblement fermé et invariant par translation, nous noterons A(W) l'ensemble des $\chi \in \hat{G}$ qui appartiennent à W ; c'est une partie fermée de $\hat{G}$. Si F est une partie fermée de $\hat{G}$, nous noterons V(F) le sous-espace vectoriel faiblement fermé de $L^\infty(G)$ engendré par les éléments de F ; comme toute translation de G transforme chaque caractère en une fonction proportionnelle à ce caractère, V(F) est invariant par translation. En utilisant les notations h et $\mathfrak{k}$ du n° 1, remarque 2, on a aussitôt :

$$A(W) = (h(W^0))^{-1} \tag{3}$$

$$V(F) = (\mathfrak{k}(F^{-1}))^0. \tag{4}$$

Les relations $h(\mathfrak{k}(F)) = F$, $\mathfrak{k}(h(I)) \supset I$ entraînent alors :

$$A(V(F)) = F \tag{5}$$

$$V(A(W)) \subset W. \tag{6}$$

PROPOSITION 3. — *Soit* W *un sous-espace vectoriel faiblement fermé de* $L^\infty(G)$, *invariant par translation, et non nul. Alors* W *contient au moins un caractère de* G.

En effet, $W^0 \neq L^1(G)$, donc $h(W^0) \neq \varnothing$ (th. 1), donc $A(W) \neq \varnothing$ (formule (3)).

PROPOSITION 4. — *Soit* W *un sous-espace vectoriel faiblement fermé de* $L^\infty(G)$, *invariant par translation.*

(i) *Quel que soit le voisinage* U *de* A(W) *dans* $\hat{G}$, *toute fonction de* W *est limite faible de combinaisons linéaires de caractères appartenant à* U.

(ii) *Si la frontière de* A(W) *ne contient aucun ensemble parfait non vide, toute fonction de* W *est limite faible de combinaisons linéaires de caractères appartenant à* W.

Pour prouver (i), il suffit de prouver ceci : soit f une fonction de $L^1(G)$ orthogonale aux éléments de U ; alors f est orthogonale à W. Or $\mathscr{F}f$ s'annule sur U^{-1}, qui est un voisinage de $h(W^0)$ (formule (3)), donc $f \in W^0$ (prop. 1). L'assertion (ii) s'établit de manière analogue, en employant le th. 2 au lieu de la prop. 1.

Soit W un sous-espace vectoriel faiblement fermé de $L^\infty(G)$ invariant par translation. La détermination des caractères appartenant à W s'appelle parfois « l'analyse harmonique » de W. La prop. 4 exprime qu'on peut, dans une certaine mesure, reconstituer les éléments de W à partir des caractères précédents, ou, comme on dit, effectuer la « synthèse harmonique » de W. Par extension, les solutions de problèmes analogues ou équivalents envisagés aux nos 1 et 3 prennent aussi le nom de « synthèse harmonique ».

3. *Synthèse harmonique dans* $L^2(G)$

Lemme 3. — *Soient* X *un espace localement compact,* μ *une mesure* $\geqslant 0$ *sur* X. *Pour toute* $f \in L^\infty(X, \mu)$, *soit* V_f *l'application* $\psi \mapsto \psi f$ *de* $L^2(X, \mu)$ *dans lui-même. Soit* T *un endomorphisme continu de l'espace hilbertien* $L^2(X, \mu)$ *permutable à* V_f *pour toute* $f \in \mathscr{K}(X)$. *Alors il existe une* $g \in L^\infty(X, \mu)$ *telle que* $T = V_g$.

1) Soit $f \in L^\infty(Y, \mu)$, et montrons que T commute à V_f. Quelles que soient $g, h \in L^2(X, \mu)$, on a

$$\begin{aligned}(TV_f g|h) - (V_f Tg|h) &= (fg|T^*h) - (f(Tg)|h)\\ &= \int f(x)g(x)(\overline{T^*h})(x)\,d\mu(x)\\ &\quad - \int f(x)(Tg)(x)\bar{h}(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

Or

$$g\,.\,(\overline{T^*h}) \in \mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu) \quad \text{et} \quad (Tg)\,.\,\bar{h} \in \mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu);$$

donc $(TV_f g|h) - (V_f Tg|h)$ est une fonction continue de f pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}, \mu), \mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu))$; cette fonction est nulle par hypothèse pour $f \in \mathscr{K}(\mathrm{X})$, donc identiquement nulle. Ceci prouve que $TV_f = V_f T$.

2) Soient Y une partie μ-mesurable de X, φ_{Y} sa fonction caractéristique, H_{Y} le sous-espace de $\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mu)$ formé des fonctions nulles dans X − Y. Alors, d'après 1), T commute à $V_{\varphi_{\mathrm{Y}}}$ et $V_{\varphi_{\mathrm{X}-\mathrm{Y}}}$, autrement dit laisse stables H_{Y} et $\mathrm{H}_{\mathrm{X}-\mathrm{Y}}$. Nous noterons T_{Y} la restriction de T à H_{Y}.

3) Supposons X compact. Alors $1 \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mu)$. Posons $g = T(1) \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mu)$. Soit Y l'ensemble des $x \in \mathrm{X}$ tels que $|g(x)| > \|T\|$. D'après 2), on a $T(\varphi_{\mathrm{Y}}\,.\,1) = \varphi_{\mathrm{Y}}\,.\,T(1) = \varphi_{\mathrm{Y}} g$, donc

$$\int_{\mathrm{Y}} |g(x)|^2\, d\mu(x) \leqslant \|T\|^2 \int_{\mathrm{Y}} d\mu(x).$$

Donc Y est μ-négligeable. Ainsi, $|g| \leqslant \|T\|$ presque partout. En outre, pour toute $f \in \mathscr{K}(\mathrm{X})$, on a

$$T(f) = T(V_f 1) = V_f(T1) = V_f g = fg = V_g f$$

d'où $T = V_g$.

4) Passons au cas général. Il existe une famille localement dénombrable (X_α) de parties compactes deux à deux disjointes de X telles que $\mathrm{X} - \bigcup_\alpha \mathrm{X}_\alpha$ soit localement négligeable (*Intégr.*, chap. IV, 2ᵉ éd., § 5, nᵒ 9, prop. 14). Appliquons 3) à chaque T_{K_α}. Il existe une fonction g_α mesurable sur K_α, telle que $|g_\alpha| \leqslant \|T\|$ sur K_α, et telle que $T_{\mathrm{K}_\alpha} f = g_\alpha f$ pour $f \in \mathrm{H}_{\mathrm{K}_\alpha}$. Soit g la fonction sur X, égale à g_α sur K_α pour chaque α et à 0 sur $\mathrm{X} - \bigcup_\alpha \mathrm{K}_\alpha$. Alors g est un élément de $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}, \mu)$. Les opérateurs V_g et T coïncident sur chaque $\mathrm{H}_{\mathrm{K}_\alpha}$, donc sur $\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mu)$.

PROPOSITION 5. — (i) *Soit* M *une partie mesurable de* $\hat{\mathrm{G}}$ (*pour la mesure de Haar*). *L'ensemble des* $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ *telles que* $\mathscr{F}f$ *soit nulle presque partout sur* M *est un sous-espace vectoriel fermé* E_{M} *de* $\mathrm{L}^2(\mathrm{G})$ *invariant par translation.*

(ii) *Soient* M, M′ *deux parties mesurables de* $\hat{\mathrm{G}}$. *Pour que* $\mathrm{E}_{\mathrm{M}} = \mathrm{E}_{\mathrm{M}'}$, *il faut et il suffit que* M *et* M′ *soient égales à un ensemble localement négligeable près.*

(iii) *Tout sous-espace vectoriel fermé de* $L^2(G)$ *invariant par translation est de la forme* E_M.

L'assertion (i) est immédiate compte tenu du th. de Plancherel.

Si M, M' sont égales à un ensemble localement négligeable près, il est clair que $E_M = E_{M'}$. Si M, M' ne sont pas égales à un ensemble localement négligeable près, il existe par exemple un ensemble compact K non négligeable tel que $K \subset M$, $K \subset \hat{G} - M'$; soit φ_K sa fonction caractéristique. On a $\varphi_K \in L^2(\hat{G})$, donc il existe $f \in L^2(G)$ telle que $\mathscr{F}f = \varphi_K$. Alors $f \in E_{M'}$, $f \notin E_M$, donc $E_M \neq E_{M'}$. Ceci prouve (ii).

Enfin, soit E un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(G)$ invariant par translation. Alors, pour toute $f \in L^1(G)$, E et le supplémentaire orthogonal de E sont stables par l'endomorphisme $\varphi \mapsto f * \varphi$ de $L^2(G)$ (*Intégr.*, chap. VIII, § 4, prop. 6 (iii)), donc le projecteur orthogonal P_E sur E commute à cet endomorphisme. Prenons pour f la transformée de Fourier d'une fonction de la forme $g_1 * g_2$, où $g_1, g_2 \in \mathscr{K}(\hat{G})$. Compte tenu du § 1, prop. 7, on voit que l'endomorphisme $\mathscr{F}P_E\mathscr{F}^{-1}$ de $L^2(\hat{G})$ (où $\mathscr{F} = \mathscr{F}_G$) commute à l'opérateur de multiplication par $g_1 * g_2$. Pour toute fonction $g \in L^\infty(\hat{G})$, notons V_g l'endomorphisme $\psi \mapsto g\psi$ de $L^2(\hat{G})$. Par continuité, le résultat précédent entraîne que $\mathscr{F}P_E\mathscr{F}^{-1}$ commute à V_g pour $g \in \mathscr{K}(G)$. D'après le lemme 3, $\mathscr{F}P_E\mathscr{F}^{-1}$ est de la forme V_h avec une $h \in L^\infty(\hat{G})$. Comme $P_E = P_E^* = P_E^2$, on a $V_h = V_h^* = V_h^2$, donc $h = \bar{h} = h^2$, de sorte que h est la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable M. Si $f \in L^2(G)$, on a

$$f \in E \iff P_E f = f \iff V_h\mathscr{F}f = \mathscr{F}f$$
$$\iff \mathscr{F}f \text{ nulle presque partout sur } \hat{G} - M \iff f \in E_{\hat{G}-M}$$

d'où (iii).

EXERCICES

Dans tous les exercices du Chap. II, G désigne, sauf mention du contraire, un groupe localement compact commutatif.

§1

1) Soit $G = \mathbf{R}$.

a) Soient $\omega, p, q \in \mathbf{R}$ avec $p \leqslant q$. On pose $f(x) = e^{i\omega x}$ pour $p \leqslant x \leqslant q$, $f(x) = 0$ pour $x > q$ ou $x < p$. Alors:

$$(\mathscr{F}f)(y) = i\frac{e^{ip(\omega - 2\pi y)} - e^{iq(\omega - 2\pi y)}}{\omega - 2\pi y}.$$

b) Soient $\omega \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$. On pose $f(x) = e^{(-\beta + i\omega)x}$ pour $x \geqslant 0$, $f(x) = 0$ pour $x < 0$. Alors:

$$(\mathscr{F}f)(y) = \frac{i}{\omega - 2\pi y + i\beta}.$$

c) Soit $a > 0$. On pose $f(x) = \frac{1}{a}e^{-a|x|}$. Alors:

$$(\mathscr{F}f)(y) = \frac{2}{4\pi^2 y^2 + a^2}.$$

d) On pose $f(x) = e^{-x^2/2}$. Alors:

$$(\mathscr{F}f)(y) = \sqrt{2\pi}\, e^{-2\pi^2 y^2}.$$

(Posant $g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x^2/2) - iyx}\, dx$, vérifier que $g'(y) = -yg(y)$. Puis utiliser la formule $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ de *Fonct. var. réelle*, chap. VII, § 1, n° 3).

¶ 2) *a*) Les fonctions $t \mapsto t^n e^{-\pi t^2}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) forment un ensemble total dans $L^2(\mathbf{R})$. (Soit $f \in L^2(\mathbf{R})$ un élément orthogonal aux $t^n e^{-\pi t^2}$. Pour $z \in \mathbf{C}$, poser $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\pi t^2} e^{2i\pi t z}\, dt$, et montrer que F est une fonction entière dont les dérivées en 0 sont toutes nulles. En déduire que $\mathscr{F}(fe^{-\pi t^2}) = 0$).

b) Soient $k \in \mathbf{N}$, $P \in \mathbf{C}[t]$, α le coefficient dominant de P. Alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} ((d^k/dt^k)e^{-2\pi t^2})P(t)\, dt$ est égale à 0 si $\deg P < k$, et à $(-1)^k k! 2^{-1/2}\alpha$ si $\deg P = k$.

c) On a $(d^k/dt^k)(e^{-2\pi t^2}) = P_k(t)e^{-2\pi t^2}$, où P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant $(-1)^k 2^{2k}\pi^k$.

d) Pour $m \in \mathbf{N}$ et $t \in \mathbf{R}$, on pose:

$$\mathscr{H}_m(t) = (-1)^m (m!)^{-1/2} 2^{(1/4) - m} \pi^{-m/2} e^{\pi t^2} \frac{d^m}{dt^m}(e^{-2\pi t^2}).$$

Les $\mathscr{H}_m$ s'appellent les *fonctions d'Hermite*. Elles forment une base orthonormale de $L^2(\mathbf{R})$. (Utiliser *a*), *b*), *c*)).

e) On a $\mathscr{F}(\mathscr{H}_m) = (-i)^m \mathscr{H}_m$.

3) *a*) Soient $\alpha > 0$, $h > 0$, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction nulle hors de $]-\alpha, \alpha[$, linéaire dans $[-\alpha, 0]$ et $[0, \alpha]$, égale à h en 0. On a:

$$(\mathscr{F}f)(t) = \frac{h}{\alpha\pi^2} \frac{\sin^2 \pi\alpha t}{t^2}.$$

b) Soit $g(x) = \sum_{n=-N}^{N} f(x+n)$. Alors:

$$(\mathscr{F}g)(t) = \frac{h}{\alpha\pi^2} \frac{\sin^2 \pi\alpha t}{t^2} \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t}.$$

c) Choisissons des suites (h_i), (α_i), (N_i), d'où, pour chaque i, une fonction g_i construite par le procédé de *b*). Prendre $\sum_i h_i < +\infty$, de sorte que $\sum_i g_i$ converge uniformément vers une fonction continue G. Si $\sum_i h_i \alpha_i N_i < +\infty$, $\sum_i \frac{h_i}{\alpha_i} \log N_i < +\infty$ et $\sum_i h_i N_i = +\infty$ (par exemple si $h_i = \frac{1}{i^2}$, $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{i}}$, $N_i = i$), alors G et $\mathscr{F}$G sont intégrables, mais $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(n) = +\infty$.

4) *a*) Soient G, G_1 deux groupes commutatifs localement compacts, $\varphi : G \to G_1$ un morphisme continu, $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$, et $\mu_1 = \varphi(\mu)$. Alors $\mathscr{F}\mu_1 = \mathscr{F}\mu \circ \hat{\varphi}$.

b) Soient σ un automorphisme de G, Δ son module, $f \in L^1(G)$, et $f' = f \circ \sigma$. Alors $(\mathscr{F}f')(\hat{x}) = \Delta(\sigma)^{-1}(\mathscr{F}f)(\hat{\sigma}^{-1}\hat{x})$.

5) Soit $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$. On suppose que $\mathscr{F}\mu \in L^1(\hat{G})$. Alors il existe $f \in L^1(G)$ telle que $d\mu(x) = f(x)\,dx$. (Utiliser le filtre $\mathfrak{B}$ du lemme 1. Suivant $\mathfrak{B}$, $\varphi * \mu$ tend vaguement vers μ, et $\mathscr{F}(\varphi * \mu) = (\mathscr{F}\varphi)(\mathscr{F}\mu)$ tend vers $\mathscr{F}\mu$ dans $L^1(\hat{G})$, donc $\varphi * \mu = \bar{\mathscr{F}}(\mathscr{F}(\varphi * \mu))$ tend vers $\bar{\mathscr{F}}(\mathscr{F}\mu)$ dans $\mathscr{C}^0(G)$. Donc $d\mu(x) = (\bar{\mathscr{F}}\mathscr{F}\mu)(x)\,dx$).

6) Soient H un sous-groupe de G, et $\mu \in \mathscr{M}^1(\hat{G})$. Pour que $\mathscr{F}\mu$ soit invariante par les translations que définissent les éléments de H, il faut et il suffit que le support de μ soit contenu dans $H^\perp$.

7) Soit $f \in L^1(G)$. Soit F une fonction holomorphe définie dans une partie ouverte U de $\mathbf{C}$, et possédant les propriétés suivantes: α) U contient l'ensemble des valeurs de $\mathscr{F}f$; β) si G n'est pas discret, $0 \in U$ et $F(0) = 0$. Alors il existe $g \in L^1(G)$ telle que $F \circ (\mathscr{F}f) = \mathscr{F}g$. (Appliquer le calcul fonctionnel holomorphe dans l'algèbre déduite de $L^1(G)$ par adjonction d'un élément unité).

8) Soient $p \in [1, 2]$ et $p' \in [2, +\infty]$ tels que $1/p + 1/p' = 1$. Soit $f \in \mathscr{K}(G)$. Montrer que $\|\mathscr{F}f\|_{p'} \leqslant \|f\|_p$. (Cette inégalité est connue pour $p = 1$ et $p = 2$. Dans le cas général, utiliser l'inégalité de M. Riesz (*Intégr.*, chap. IV, 2ᵉ éd., § 6, exerc. 18)). En déduire que l'application

$\mathscr{F}|\mathscr{K}(G)$ se prolonge en une application linéaire continue de $L^p(G)$ dans $L^{p'}(\hat{G})$, qui coïncide avec la transformation de Fourier sur $L^p(G) \cap L^1(G)$ et sur $L^p(G) \cap L^2(G)$.

¶ 9) Soit G un groupe localement compact (non nécessairement commutatif), muni d'une mesure de Haar à gauche.

a) Si $f \in L^1(G)$, il existe $f_1, f_2 \in L^1(G)$ tels que $f_1 * f_2 = f$. (Utiliser l'exerc. 22 *b*) du chap. I, § 2).

b) Soient $f_1, f_2 \in L^1(G)$, avec $f_1 \geqslant 0, f_2 \geqslant 0$. Montrer que $f_1 * f_2$ est presque partout égale à une fonction semi-continue inférieurement. (Considérer f_1 comme limite simple d'une suite croissante de fonctions $\geqslant 0$ de $L^\infty(G)$).

c) On prend $G = \mathbf{R}$. Pour tout intervalle ouvert $I = \left]a, b\right[$, posons $A(I) = \left]a, a + (b - a)/6\right[$, $A'(I) = \left]a + 5(b - a)/6, b\right[$. Soient $I'_0 = \left]0, 1\right[$, $I_1 = A(I'_0)$, $I'_1 = A'(I'_0)$, $I_2 = A(I'_1)$, $I'_2 = A'(I'_1), \ldots, I_n = A(I'_{n-1})$, $I'_n = A'(I'_{n-1}), \ldots$. Soit $F = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots$. Il n'existe aucun couple F_1, F_2 de parties de $\mathbf{R}$ telles que $F_1 + F_2 = F$. Si f est une fonction continue $\geqslant 0$ sur $\mathbf{R}$ telle que $F = \{x | f(x) > 0\}$, il n'existe aucun couple de fonctions $f_1, f_2 \in L^1(\mathbf{R})$ telles que $f_1 \geqslant 0, f_2 \geqslant 0, f = f_1 * f_2$. (Supposons une telle égalité. Soit E_i l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ tels que $f_i(x) > 0$. Soit F_i l'ensemble des points de densité de E_i (*Intégr.*, chap. V, § 6, exerc. 15). Montrer que $F = F_1 + F_2$).

10) Soit $k \in \mathbf{Z}$. Les conditions suivantes sont équivalentes: α) l'application $x \mapsto x^k$ de G dans G est injective; β) l'application $\hat{x} \mapsto \hat{x}^k$ de $\hat{G}$ dans $\hat{G}$ est surjective.

11) Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes commutatifs localement compacts. Pour tout $i \in I$, soit H_i un sous-groupe ouvert compact de G_i. Soit G le produit direct local des G_i relativement aux H_i (*Top. gén.*, chap. III, 3e éd., § 2, exerc. 26). Pour tout $\chi \in \hat{G}$, soit χ_i la restriction de χ à G_i. Montrer que $\chi \mapsto (\chi_i)_{i \in I}$ est un isomorphisme du groupe topologique $\hat{G}$ sur le produit direct local des $\hat{G}_i$ relativement aux $H_i^\perp$.

12) Soient G_d le groupe G muni de la topologie discrète, et χ un caractère unitaire de G_d. Quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\hat{x} \in \hat{G}$ tel que $|\hat{x}(x_i) - \chi(x_i)| \leqslant \varepsilon$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. (L'injection canonique de G_d dans G a pour dual un morphisme de $\hat{G}$ dans $(G_d)\hat{}$ dont l'image est dense d'après le cor. 6 du th. 4).

13) *a*) $L^1(G)$ est un idéal fermé dans $\mathscr{M}^1(G)$, donc $\hat{G}$ s'identifie à une partie ouverte de $X(\mathscr{M}^1(G))$ (cf. chap. I, § 3, exerc. 17).

b) Soit $\mathscr{M}_d(G)$ (resp. $\mathscr{M}_a(G)$) l'ensemble des $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ qui sont diffuses (resp. atomiques). Alors $\mathscr{M}_d(G)$ est un idéal fermé de $\mathscr{M}^1(G)$, et $\mathscr{M}_a(G)$ est une sous-algèbre fermée de $\mathscr{M}^1(G)$.

¶ 14) Soit $E \subset G$. On dit que E est *indépendant* si, étant donnés des éléments $x_1, \ldots, x_k$ deux à deux distincts de E, et des entiers rationnels $n_1, \ldots, n_k$, la relation $x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k} = e$ entraîne $x_1^{n_1} = \ldots = x_k^{n_k} = e$. On dit que E est un *ensemble de Kronecker* si toute fonction complexe continue sur E de valeur absolue 1 est limite uniforme sur E de caractères unitaires de G. Si $G = (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$, on dit que E est *de type* K_q si toute application continue de E dans l'ensemble des racines q-èmes de l'unité coïncide sur E avec un caractère unitaire de G.

a) Soit P un ensemble compact de Kronecker. Si $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ est concentrée sur P, on a $\sup|\mathscr{F}\mu| = \|\mu\|$. En déduire que toute fonction complexe continue sur P est de la forme $\mathscr{F}f|P$ avec $f \in L^1(\hat{G})$.

b) Soit $E \subset G$ un ensemble fini indépendant. Soit f une fonction complexe de valeur absolue 1 sur E. On suppose que, si $x \in E$ est d'ordre q, alors $f(x)^q = 1$. La fonction f est limite uniforme sur E de caractères unitaires de G. (Utiliser l'exerc. 12).

c) Tout ensemble de Kronecker est indépendant et ne contient que des éléments d'ordre infini.

d) Tout ensemble de type K_q dans $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$ est indépendant.

e) Soient $V_1, \ldots, V_k$ des parties ouvertes non vides disjointes de G. Si tout voisinage de e dans G contient un élément d'ordre infini, il existe $x_i \in V_i$ tel que $\{x_1, \ldots, x_k\}$ soit un ensemble de Kronecker. Si $G = (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$, il existe $x_i \in V_i$ tel que $\{x_1, \ldots, x_k\}$ soit de type K_q.

f) Soient $E \subset G$ un ensemble compact indépendant, $F = E \cup E^{-1}$, et $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ une mesure diffuse concentrée sur F. Alors les mesures ε_e, μ, μ^2, $\mu^3, \ldots$ sont deux à deux étrangères (on pose $\mu^n = \mu * \mu^{n-1}$). (Montrer que, si $m < n$, l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_n) \in G^n$ tels que $x_1 x_2 \ldots x_n \in F^m$ est négligeable pour $\mu \otimes \mu \otimes \ldots \otimes \mu$). En déduire que, si $\mu \geqslant 0$, on a $\|\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mu^k\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \,.\, \|\mu\|^k$ quels que soient les nombres complexes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

g) Soient $E \subset G$ un ensemble compact indépendant, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ des mesures $\geqslant 0$ diffuses de masse 1 concentrées sur des parties disjointes $E_1, \ldots, E_r$ de E. Soient $z_1, \ldots, z_r \in \mathbf{C}$ avec $|z_i| \leqslant 1$ pour tout i. Il existe un caractère χ de $\mathscr{M}^1(G)$ tel que $\chi(\mu_i) = z_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. (Montrer d'abord, en raisonnant comme dans *f*), que, si $(n_1, \ldots, n_r) \neq (m_1, \ldots, m_r)$, les mesures $\mu_1^{m_1} * \ldots * \mu_r^{m_r}$ et $\mu_1^{n_1} * \ldots * \mu_r^{n_r}$ sont étrangères. Ensuite, supposant $|z_i| = 1$ pour tout i, montrer que le rayon spectral de $\varepsilon_e + \bar{z}_1\mu_1 + \ldots + \bar{z}_r\mu_r$ est $r + 1$, d'où un caractère χ de $\mathscr{M}^1(G)$ tel que $\chi(\varepsilon_e + \bar{z}_1\mu_1 + \ldots + \bar{z}_r\mu_r) = r + 1$; ce caractère répond à la question. Dans le cas général, écrire $z_i = \frac{1}{2}(z_i' + z_i'')$ avec $|z_i'| = |z_i''| = 1$, et $\mu_i = \frac{1}{2}(\mu_i' + \mu_i'')$ où $\mu_1', \mu_1'', \ldots, \mu_r', \mu_r''$ vérifient les mêmes hypothèses que $\mu_1, \ldots, \mu_r$). Déduire de là que, si $\mathscr{M}_d(E)$ désigne l'espace de Banach des mesures diffuses concentrées sur E, toute forme linéaire continue de norme $\leqslant 1$ sur $\mathscr{M}_d(E)$ se prolonge en un caractère de $\mathscr{M}^1(G)$.

15) Soit $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ telles que le produit de toute dérivée de f et de tout polynôme soit borné. On a $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n) \subset L^1(\mathbf{R}^n)$, et $\mathscr{F}|\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ est un automorphisme de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. Si $x_1, \ldots, x_n$ désignent les fonctions coordonnées sur $\mathbf{R}^n$, et si $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, on a $(\partial/\partial x_j)(\mathscr{F}f) = -2i\pi\mathscr{F}(x_j f)$.

¶ 16) Soient H un sous-groupe fermé de G, g un élément de $L^1(G)$ tel que $\mathscr{F}g$ s'annule sur $H^\perp$, et $\varepsilon > 0$. Il existe une mesure $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$, concentrée sur H, telle que $\|\mu\| \leqslant 2$, $\|g * \mu\| \leqslant \varepsilon$, et $\mathscr{F}\mu = 1$ sur un voisinage de $H^\perp$.

§ 2

1) *a*) Pour que G soit à base dénombrable, il faut et il suffit que $\hat{G}$ soit à base dénombrable. (Si G est à base dénombrable, $L^1(G)$ est à base dénombrable, donc $X(L^1(G))$ est à base dénombrable).

b) Pour que G soit dénombrable à l'infini, il faut et il suffit que $\hat{G}$ admette un sous-groupe ouvert à base dénombrable, ou encore que $\hat{G}$ soit métrisable. (Utiliser la prop. 3).

c) Supposons G compact. Pour que G soit métrisable, il faut et il suffit que $\hat{G}$ soit dénombrable, ou encore que G soit isomorphe à un sous-groupe fermé de $\mathbf{T}^{\mathbf{N}}$. (Un groupe discret dénombrable est quotient de $\mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$).

2) *a*) Tout groupe commutatif infini Γ admet un groupe quotient infini dénombrable. (Plonger un sous-groupe infini dénombrable Δ de Γ dans un groupe divisible dénombrable Δ' en appliquant *Alg.*, chap. II, 3^e^ éd., § 2, exerc. 14; puis prolonger à Γ le morphisme identique de Δ dans Δ').

b) Tout groupe commutatif compact infini contient un sous-groupe fermé infini métrisable. (Utiliser *a*).)

3) *a*) Soient K un groupe compact, E_n l'ensemble des éléments de K d'ordre n. Si $K \neq E_n$ pour tout n, l'ensemble des éléments d'ordre infini de K est dense dans K. (Si E_n est d'intégrieur non vide, on a $E_m = K$ pour un entier $m \geqslant n$.)

b) Soit Γ un groupe discret commutatif dont les éléments ne sont pas d'ordre borné. Alors Γ admet un quotient dénombrable avec la même propriété. (Raisonner comme dans l'exerc. 2 *a*).)

c) Si tout voisinage de e dans G contient un élément d'ordre infini, G possède un sous-groupe fermé métrisable avec la même propriété. (Se ramener au cas où G est compact, et utiliser *a*) et *b*).) Sinon, et si G est non discret, il existe un entier $q > 1$ tel que G contienne un sous-groupe fermé isomorphe à $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$. (Utiliser *Alg.*, chap. VII, § 2, exerc. 4 *c*).)

4) Si G est compact et si $\hat{G}$ possède un élément d'ordre infini, il existe un morphisme continu non trivial de $\mathbf{R}$ dans G. (Comme $\mathbf{R}$ est divisible, il existe un morphisme non trivial de $\hat{G}$ dans $\mathbf{R}$.)

5) Soit p un nombre premier. Le groupe $\mathbf{Q}_p$ n'est pas produit d'un groupe compact et d'un groupe discret. (Tout sous-groupe compact de $\mathbf{Q}_p$ est de la forme $p^n\mathbf{Z}_p$ pour un $n \in \mathbf{Z}$.)

6) Si G est un groupe de torsion, G et $\hat{G}$ sont totalement discontinus. ($\hat{G}$ est totalement discontinu d'après le cor. 2 de la prop. 4. Pour prouver que G est totalement discontinu, se ramener au cas où G est compact en utilisant la prop. 3. Prouver alors que $\hat{G}$ est un groupe de torsion.)

7) Un élément x de G est dit de hauteur infinie si, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il existe $y \in G$ tel que $y^n = x$. Prouver que, si G est compact, l'ensemble des éléments de hauteur infinie est la composante neutre de G.

¶ 8) Les conditions suivantes sont équivalentes: α) G est localement connexe; β) G est isomorphe à un groupe $\mathbf{R}^n \times E \times \hat{D}$, où E et D sont discrets, et où tout sous-groupe de rang fini de D est libre.

9) *a*) Soit $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ une suite d'entiers > 1. On munit $\mathbf{Z}$ de la structure d'anneau topologique pour laquelle les $\mathbf{Z}a_0a_1\ldots a_n$

forment un système fondamental de voisinages de 0. On note $\Delta_{\mathbf{a}}$ le complété de cet anneau. Il est compact métrisable totalement discontinu. Si p est un nombre premier, et si $a_i = p$ pour tout i, on a $\Delta_{\mathbf{a}} = \mathbf{Z}_p$.

b) On note $\mathbf{Z}(\mathbf{a}^{\infty})$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de la forme $\exp(2i\pi l/(a_0 a_1 \dots a_r))$ ($l \in \mathbf{Z}, r \in \mathbf{N}$), muni de la topologie discrète. Alors $\chi \mapsto \chi(1)$ est un isomorphisme de $(\Delta_{\mathbf{a}})^{\wedge}$ sur $\mathbf{Z}(\mathbf{a}^{\infty})$.

c) Soit B le sous-groupe de $\mathbf{R} \times \Delta_{\mathbf{a}}$ formé des (n, n) pour $n \in \mathbf{Z}$; il est discret. On pose $\Sigma_{\mathbf{a}} = (\mathbf{R} \times \Delta_{\mathbf{a}})/\mathrm{B}$. C'est un groupe compact métrisable connexe. (Observer que l'image canonique de $\mathbf{R}$ dans $\Sigma_{\mathbf{a}}$ est dense, et utiliser le lemme 1.)

d) Soit $\Gamma_{\mathbf{a}}$ le sous-groupe additif du groupe discret $\mathbf{Q}$ formé des nombres rationnels de la forme $l/(a_0 a_1 \dots a_r)$ ($l \in \mathbf{Z}$, $r \in \mathbf{N}$). Si $\chi \in (\Sigma_{\mathbf{a}})^{\wedge}$, χ définit un caractère unitaire de $\mathbf{R} \times \Delta_{\mathbf{a}}$, donc un caractère unitaire de $\mathbf{R}$ de la forme $x \mapsto \exp(2i\pi\alpha_{\chi}x)$ où $\alpha_{\chi} \in \mathbf{R}$. Alors $\chi \mapsto \alpha_{\chi}$ est un isomorphisme de $(\Sigma_{\mathbf{a}})^{\wedge}$ sur $\Gamma_{\mathbf{a}}$.

e) Montrer que $\hat{\mathbf{Q}}$ est canoniquement isomorphe à $\Sigma_{\mathbf{a}}$ avec $\mathbf{a} = (2, 3, 4, 5, \dots)$.

f) Soit $\mathbf{R}_d$ le groupe $\mathbf{R}$ muni de la topologie discrète. Montrer que $(\mathbf{R}_d)^{\wedge}$ est isomorphe à $(\Sigma_{\mathbf{a}})^{\mathfrak{c}}$ où $\mathbf{a} = (2, 3, 4, 5, \dots)$ et où $\mathfrak{c}$ est la puissance du continu. (Considérer une base de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{Q}$.)

¶ 10) Un groupe topologique est dit *monothétique* s'il existe un élément du groupe dont les puissances sont denses dans le groupe, *solénoïdal* s'il existe un morphisme continu de $\mathbf{R}$ dans le groupe dont l'image est dense.

a) Avec les notations de l'exerc. 9, $\Delta_{\mathbf{a}}$ est monothétique. Tout groupe compact monothétique totalement discontinu est topologiquement isomorphe à un groupe $\Delta_{\mathbf{a}}$.

b) Supposons G compact. Pour que G soit monothétique, il faut et il suffit que $\hat{\mathrm{G}}$ soit isomorphe à un sous-groupe de $\mathbf{T}$ muni de la topologie discrète.

c) Supposons G compact. Les conditions suivantes sont équivalentes: α) G est solénoïdal; β) $\hat{\mathrm{G}}$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbf{R}$ muni de la topologie discrète; γ) $\hat{\mathrm{G}}$ est sans torsion, et $\mathrm{Card}\,\hat{\mathrm{G}} \leqslant \mathfrak{c}$ (puissance du continu); δ) G est quotient de $(\Sigma_{\mathbf{a}})^{\mathfrak{c}}$, avec $\mathbf{a} = (2, 3, 4, 5, \dots)$.

d) Si G est compact solénoïdal, G est monothétique.

11) On note L(G) l'ensemble des représentations continues de G dans $\mathbf{R}$. On appelle *sous-groupe à un paramètre* de G l'image d'un morphisme continu de $\mathbf{R}$ dans G.

a) Les conditions suivantes sont équivalentes: α) G est réunion de sous-groupes à un paramètre; β) tout morphisme de $\mathbf{Z}$ dans G se prolonge en un morphisme continu de $\mathbf{R}$ dans G; γ) tout morphisme continu de $\hat{\mathrm{G}}$ dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ provient par passage au quotient d'un élément de $\mathrm{L}(\hat{\mathrm{G}})$; δ) tout caractère unitaire de $\hat{\mathrm{G}}$ est de la forme $e^{i\lambda}$ où $\lambda \in \mathrm{L}(\hat{\mathrm{G}})$.

b) Si G est à base dénombrable, les conditions de *a*) sont équivalentes à: ε) $\mathrm{G} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^{\mathrm{I}}$ où I est un ensemble dénombrable.

c) La réunion des sous-groupes à un paramètre de G est un sous-groupe dense dans la composante neutre de G. (Utiliser l'exerc. 4.)

d) Soit $t \mapsto \chi_t$ une application continue de $[0, 1]$ dans $\hat{\mathrm{G}}$ telle que

$\chi_0 = e$. Il existe une application $t \mapsto \lambda_t$ de $[0, 1]$ dans L(G) telle que: α) pour tout $x \in G$, $\lambda_t(x)$ dépend continûment de t; β) $\chi_t = \exp(2i\pi\lambda_t)$; γ) $\lambda_0 = 0$.

e) La réunion des sous-groupes à un paramètre de G est aussi la réunion des arcs de G qui contiennent e (un *arc* de G étant l'image d'une application continue de $[0, 1]$ dans G). (Utiliser *d*).)

12) On emploie la notation L(G) de l'exerc. 11.

a) Soit H un sous-groupe fermé de G. Tout élément de L(H) se prolonge en un élément de L(G). (Se ramener d'abord au cas où $G = \mathbf{R}^n \times D$ avec D discret, puis au cas où l'élément donné de L(H) est trivial sur $\mathbf{R}^n$, puis au cas où G est discret. Utiliser alors le fait que $\mathbf{R}$ est divisible.)

b) Tout morphisme continu de H dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^I$ (I, ensemble quelconque) se prolonge en un morphisme continu de G dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^I$. (Utiliser *a*) et le th. 4 du § 1.)

c) Réciproquement, soit A un groupe commutatif localement compact. On suppose que, pour tout groupe commutatif localement compact G, pour tout sous-groupe fermé H de G, et tout morphisme continu φ de H dans A, φ se prolonge en un morphisme continu de G dans A. Alors il existe un entier n et un ensemble I tel que A soit isomorphe à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^I$. (Prenant $G = \mathbf{R}$, $H = \mathbf{Z}$, on voit que A est connexe, donc de la forme $\mathbf{R}^n \times \hat{D}$ avec D discret. Montrer que D est un $\mathbf{Z}$-module projectif, donc libre.)

13) Soient C une partie compacte de G et $\varepsilon > 0$.

a) Soit α la mesure de Haar de G. Il existe une partie compacte D de G telle que $\alpha(CD) \leqslant (1 + \varepsilon)\alpha(D)$. (Le cas où $G = \mathbf{R}^n$ étant immédiat, on est ramené au cas où G admet un sous-groupe ouvert compact H, et on peut supposer C saturé suivant H; on est alors ramené au cas où G est discret; on peut ensuite supposer G de type fini, et enfin $G = \mathbf{Z}^p$.)

b) Il existe $k \in L^1(\hat{G})$ telle que $\mathscr{F}k \in \mathscr{K}(G)$, $(\mathscr{F}k)(x) = 1$ pour $x \in C$, et $\|k\|_1 \leqslant 1 + \varepsilon$. (Prendre k de la forme λfg, où λ est une constante et où $f, g \in L^2(\hat{G})$ ont pour transformées de Fourier les fonctions caractéristiques d'ensembles convenables, en utilisant *a*).)

¶ 14) *a*) On suppose que tout voisinage de e dans G contient un élément d'ordre infini. Il existe une partie compacte métrique parfaite totalement discontinue P de G qui est un ensemble de Kronecker, et une mesure diffuse non nulle concentrée sur P. (Se ramener au cas où G est métrisable en utilisant l'exerc. 3 *c*). Imiter ensuite la construction de *Top. gén.*, chap. IX, 2ᵉ éd., § 6, lemme 3, et utiliser en même temps l'exerc. 14 *e*) du § 1.)

b) Si $G = (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$, il existe une partie compacte parfaite totalement discontinue P de G qui est de type K_q, et une mesure diffuse non nulle concentrée sur P.

c) On suppose G non discret. Il existe: α) un élément τ de $\mathscr{M}^1(G)$ tel que $\sup|\mathscr{F}\tau|$ soit strictement majoré par le rayon spectral de τ; β) un élément non inversible τ' de $\mathscr{M}^1(G)$ tel que $\mathscr{F}\tau' \geqslant 1$ partout sur $\hat{G}$; γ) un caractère non hermitien de $\mathscr{M}^1(G)$. (Utiliser *a*), *b*), l'exerc. 3 *c*), et l'exerc. 14 *f*) du § 1).

d) Déduire de *c*) que $\hat{G}$, qui est ouvert dans $X(\mathscr{M}^1(G))$, n'est pas dense dans $X(\mathscr{M}^1(G))$.

§ 3

1) Soient F une partie fermée de $\hat{G}$ et K une partie compacte de $\hat{G}$ telles que $F \cap K = \varnothing$. Montrer qu'il existe une $g \in L^1(G)$ continue telle que $\mathscr{F}g$ soit égale à 0 sur F et à 1 sur K. (Convoler la fonction f du n° 1, remarque 1, avec la transformée de Fourier d'une fonction de la forme $h * h'$ où $h \in \mathscr{K}(\hat{G}), h' \in \mathscr{K}(\hat{G})$ et où $h * h' = 1$ sur K.)

2) Soit g une fonction complexe définie sur $]0, +\infty[$, intégrable pour la mesure de Lebesgue. On suppose que $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = 1$ et que $\int_0^{+\infty} g(t)t^{ix}\,dt \neq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Soit f une fonction complexe mesurable et bornée dans $]0, +\infty[$, telle que $\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} g\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt$ tende vers une limite finie l quand x tend vers $+\infty$.

a) Pour toute fonction complexe h définie sur $]0, +\infty[$, intégrable pour la mesure de Lebesgue et d'intégrale 1,

$$\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} h\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt$$

tend vers l quand x tend vers $+\infty$. En particulier:

$$\frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)\,dt$$

tend vers l quand x tend vers $+\infty$. (Posant $g_1(t) = tg(t)$, $h_1(t) = th(t)$, on a $g_1 \in L^1(\mathbf{R}_+^*)$. $\mathscr{F}g_1$ est partout non nulle, et $\check{g}_1 * f$ tend vers l, donc $h_1 * f$ tend vers l).

b) Si $f(t)$ est lentement oscillante sur $\mathbf{R}_+^*$ quand t tend vers $+\infty$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = l$.

3) Soient $f \in L^\infty([0, +\infty[)$ et $k \in \mathbf{R}_+^*$. Si

$$\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t/x} f(t)\,dt$$

tend vers l quand x tend vers $+\infty$, alors:

$$\frac{k}{x^k}\int_0^{x} (x - t)^{k-1} f(t)\,dt$$

tend vers l quand x tend vers $+\infty$. (Utiliser les fonctions $g(t) = e^{-t}$, et $h(t) = k(1 - t)^{k-1}$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $h(t) = 0$ pour $t > 1$).

4) Soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ deux fonctions. On suppose $f \in L^\infty(\mathbf{R})$, $g \in L^1(\mathbf{R})$ et d'intégrale 1, $\mathscr{F}g$ partout non nulle. On suppose que f est *lentement décroissante*, c'est-à-dire que $\lim.\inf\,(f(y) - f(x)) \geqslant 0$ quand x tend vers $+\infty$, $y > x$, et que $y - x$ tend vers 0. Si $(g * f)(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$, alors $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$.

5) Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue telle que:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sup_{n \leqslant t \leqslant n+1} |g(t)| < +\infty.$$

On a $g \in L^1(\mathbf{R})$. Supposons que g soit d'intégrale 1 et que $\mathscr{F}g$ ne s'annule pas. Soit μ une mesure complexe sur $\mathbf{R}$ telle que $|\mu|([x, x+1])$ soit borné quand x parcourt $\mathbf{R}$. Si $(g * \mu)(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$, alors, pour toute fonction continue $h : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ telle que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sup_{n \leqslant t \leqslant n+1} |h(t)| < +\infty$$

et d'intégrale 1, $(h * \mu)(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$. (Montrer que $h * \mu$ est lentement oscillante et que $(g * (h * \mu))(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$).

6) Soit g une fonction sur laquelle on fait les mêmes hypothèses qu'à l'exerc. 2. En outre, on suppose $g \geqslant 0$ et $\liminf_{x \to 0} g(x) > 0$. Soit f une fonction réelle mesurable minorée sur $]0, +\infty[$. Si

$$\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} g\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt$$

tend vers l quand x tend vers $+\infty$, alors

$$\sigma(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$$

tend vers l quand x tend vers $+\infty$. (Montrer que σ est bornée pour $x \geqslant 1$, puis que σ est lentement décroissante, puis que

$$\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} g\left(\frac{t}{x}\right) \sigma(t)\, dt$$

tend vers l quand x tend vers $+\infty$).

¶ 7) *a*) On définit la *fonction de Möbius* μ sur $\{1, 2, 3, \ldots\}$ de la manière suivante: $\mu(n) = (-1)^k$ si n est le produit de k facteurs premiers deux à deux distincts (en particulier, $\mu(1) = 1$), et $\mu(n) = 0$ dans le cas contraire. Pour $x > 0$, posons $M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)$ et $f(x) = x^{-1} M(x)$. Alors f est bornée, et $f(y) - f(x) = O((y - x)/x)$ de sorte que f est lentement oscillante sur le groupe $\mathbf{R}_+^*$.

b) Pour $x > 0$, soit $[x]$ la partie entière de x. On pose $g_0(t) = [t^{-1}]$ et $g(t) = 2g_0(t) - ag_0(at) - bg_0(bt)\, (a, b \in \mathbf{R}_+^*)$. Alors $g(t)$ est bornée au voisinage de 0 et nulle pour t assez grand, donc g est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour la mesure de Lebesgue. Si $s \in \mathbf{C}$ et $\mathscr{R}s > 0$,

$$\int_0^{+\infty} g(t) t^s\, dt = (2 - a^{-s} - b^{-s}) \frac{\zeta(1+s)}{1+s},$$

avec $\zeta(1+s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+s)}$. Admettant que $\zeta(s) - 1/(s-1)$ se prolonge en une fonction entière et que la fonction $\zeta(s)$ ainsi prolongée ne s'annule pas pour $\mathscr{R}s = 1$[(*)] en déduire que $\int_0^{+\infty} g(t)t^{ix} \neq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

c) Montrer que $\int_0^{+\infty} g(t/x)f(t)\,dt = o(x)$ quand $x \to +\infty$. En déduire que $\mathrm{M}(x) = o(x)$ quand $x \to +\infty$.

8) Soit $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction $\geqslant 0$ croissante, telle que la fonction $t \mapsto e^{-\sigma t}\varphi(t)$ soit intégrable pour la mesure de Lebesgue lorsque $\sigma > 1$. Pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathscr{R}s > 1$, on pose $f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\varphi(t)\,dt$. On suppose qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathbf{C}$ avec la propriété suivante: lorsque σ tend vers 1 par valeurs > 1, la fonction

$$\tau \mapsto f(\sigma + i\tau) - \frac{\mathrm{A}}{\sigma + i\tau - 1} \qquad (\tau \in \mathbf{R})$$

converge uniformément sur toute partie compacte de $\mathbf{R}$ vers une fonction g. Alors

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t)e^{-t} = \mathrm{A}.$$

(On pose $a(t) = e^{-t}\varphi(t)$ pour $t > 0$, $a(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$, $\mathrm{A}(t) = \mathrm{A}$ pour $t > 0$, $\mathrm{A}(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$. Soit $\lambda > 0$. On pose:

$$k_\lambda(t) = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin 2\lambda t}{2\lambda t}\right)^2$$

$$\mathrm{K}_\lambda(t) = \begin{cases} 1 - \left|\dfrac{t}{2\lambda}\right| & \text{si } |t| \leqslant 2\lambda \\ 0 & \text{si } |t| > 2\lambda. \end{cases}$$

Utilisant l'exerc. 1 du § 1, le th. de Lebesgue-Fubini et le th. de Plancherel, montrer que:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_\lambda(x - t)(a(t) - \mathrm{A}(t))e^{-\varepsilon t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2\lambda}^{2\lambda} \mathrm{K}_\lambda(y)e^{-ixy}g(y)\,dy$$

et en déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} k_\lambda(x - t)a(t)\,dt = \mathrm{A}.$$

Prouver ensuite que a est bornée et lentement décroissante. On peut enfin appliquer l'exerc. 4, ou raisonner directement).

9) Soit $\mathfrak{J}$ l'ensemble des $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^3)$ (§ 1, exerc. 15) telles que $\mathscr{F}f$ s'annule sur la sphère $\mathbf{S}_2$. Soit $\mathfrak{I}$ l'ensemble des $f \in \mathfrak{J}$ telles que $(\partial/\partial y_1)(\mathscr{F}f)$ s'annule sur $\mathbf{S}_2$. Soient $\overline{\mathfrak{I}}$, $\overline{\mathfrak{J}}$ les adhérences de $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$ dans $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^3)$. Alors $h(\overline{\mathfrak{I}}) = h(\overline{\mathfrak{J}}) = \mathbf{S}_2$, mais $\overline{\mathfrak{I}} \neq \overline{\mathfrak{J}}$. (Soit μ la mesure positive de masse 1 sur $\mathbf{S}_2$ invariante par le groupe orthogonal de $\mathbf{R}^3$. Montrer

* Voir par exemple G. VALIRON, *Théorie des fonctions*, t. I, Paris, Masson, 1942, pp. 505–510.

que $(\mathscr{F}\mu)(y_1, y_2, y_3) = (\sin 2\pi r)/2\pi r$ où $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$. En déduire que la fonction f sur $\mathbf{R}^3$ définie par

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1(\mathscr{F}\mu)(y_1, y_2, y_3)$$

est un élément de $L^\infty(\mathbf{R}^3)$ orthogonal à $\mathfrak{I}$ mais pas à $\mathfrak{J}$).

10) On appelle *C-ensemble* dans $\hat{G}$ une partie fermée E de $\hat{G}$ possédant la propriété suivante: si $f \in L^1(G)$, si $\mathscr{F}f$ s'annule sur E, et si $\varepsilon > 0$, il existe $g \in L^1(G)$ telle que $\|f - f * g\| \leqslant \varepsilon$ et telle que $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}g)$ soit compact et disjoint de E.

a) Si E est un C-ensemble dans $\hat{G}$, il n'existe qu'un idéal fermé $\mathfrak{I}$ de $L^1(G)$ tel que $h(\mathfrak{I}) = E$.

b) Tout point de $\hat{G}$ est un C-ensemble.

c) La réunion de deux C-ensembles est un C-ensemble.

d) Tout ensemble déduit par translation d'un C-ensemble est un C-ensemble.

e) Soient H un sous-groupe fermé de $\hat{G}$, E une partie fermée de H, E′ la frontière de E relativement à H. Si E′ est un C-ensemble relativement à $\hat{G}$, E est un C-ensemble relativement à $\hat{G}$. (Utiliser l'exerc. 16 du § 1).

f) Dans $\mathbf{R}^n$, toute intersection E d'un nombre fini de demi-espaces fermés est un C-ensemble. (Raisonner par récurrence sur la dimension du sous-espace affine engendré par E, en utilisant *b*), *c*), *d*), *e*).)

11) Soit E une partie fermée de $\mathbf{R}^n$. On suppose qu'il existe un point intérieur p de E tel que toute droite passant par p rencontre la frontière de E en deux points au plus. Alors il n'existe qu'un idéal fermé $\mathfrak{I}$ de $L^1(\mathbf{R}^n)$ tel que $\mathscr{F}f$ s'annule sur E. (Considérer f comme limite dans $L^1(\mathbf{R}^n)$ de fonctions déduites de f par des homothéties de centre p).

¶ 12) On note α une mesure de Haar de G et $\mathfrak{B}$ le filtre des voisinages de e dans $\hat{G}$.

a) Soit U un voisinage ouvert intégrable de e dans G. Il existe une fonction $a \in L^1(G)$, $\geqslant 0$, d'intégrale 1, nulle hors de U, telle que $\mathscr{F}a \in L^1(\hat{G})$, et $\int_G a(x)^2\,dx \leqslant 2/\alpha(U)$. (Soit V un voisinage compact de e tel que $V \subset U$, $\alpha(U) < \sqrt{2}\alpha(V)$; soit W un voisinage compact symétrique de e tel que $VW^2 \subset U$; prendre $a = \lambda f * g$, où λ est une constante > 0, et où f, g sont les fonctions caractéristiques de VW, W).

b) Si $f \in L^\infty(G)$, on note $A(f)$ l'ensemble des éléments de $\hat{G}$ qui appartiennent au sous-espace vectoriel faiblement fermé de $L^\infty(G)$ invariant par translation engendré par f. Si $f, g \in L^\infty(G)$, on a

$$A(fg) \subset \overline{A(f)A(g)}.$$

(Soit U un voisinage de e. Montrer que fg est limite faible de combinaisons linéaires d'éléments de $\hat{G}$ appartenant à $A(f)UA(g)U$.)

c) Soient $g \in L^\infty(G)$, K une partie compacte de $\hat{G}$, f une fonction de $L^1(G)$ telle que $\mathscr{F}f$ soit nulle sur $A = A(g)$ et hors de K. Pour tout $V \in \mathfrak{B}$, soit $\omega(V)$ la borne supérieure de $|\mathscr{F}f|$ sur AV. Si

$$\lim.\inf_{\mathfrak{B}} \omega(V)^2 \alpha(V)^{-1} \alpha((AV - A) \cap K) = 0,$$

alors $\langle f, g\rangle = 0$. (Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une partie compacte H de G telle que $\int_{G-H} |f|\,dx \leqslant \varepsilon$. Puis il existe un voisinage ouvert U de e dans $\hat{G}$ tel que $|\langle x, \hat{x}\rangle - 1| \leqslant \varepsilon$ pour $x \in H$, $\hat{x} \in U$. Appliquant a) à $\hat{G}$ et U, on obtient une fonction $a \in L^1(\hat{G})$. Soit $b = \mathscr{F}a \in L^1(G)$. Utilisant b), montrer que $\mathscr{F}(bg)$ s'annule hors de AU. D'autre part,

$$\left|\int fg\,dx - \int fgb\,dx\right| \leqslant \varepsilon(\|f\|_1 + 2)\|g\|_\infty$$

et, comme $f, gb \in L^2(G)$,

$$\left|\int fgb\,dx\right| = \left|\int (\mathscr{F}f)(\mathscr{F}(gb))\,d\hat{x}\right| = \left|\int_{(AU-A)\cap K} (\mathscr{F}f)(\mathscr{F}(gb))\,d\hat{x}\right|.$$

Majorer cette dernière expression par :

$$2\|g\|_\infty \alpha(U)^{-1/2}\omega(U)\alpha((AU - A)\cap K)^{1/2}).$$

d) Soient $\mathfrak{J}$ un idéal fermé de $L^1(G)$, $A = h(\mathfrak{J})$, f une fonction de $L^1(G)$ telle que $\mathscr{F}f$ s'annule sur A, S l'ensemble des points où s'annule $\mathscr{F}f$, S′ la frontière de S, B le plus grand ensemble parfait contenu dans $S' \cap A$. Pour $V \in \mathfrak{B}$, soit $\omega(V)$ la borne supérieure de $|\mathscr{F}f|$ dans AV. On suppose que tout point de B possède un voisinage K dans $\hat{G}$ tel que

$$\lim.\inf_{\mathfrak{B}} \omega(V)^2\alpha(V)^{-1}\alpha((AV - A)\cap K) = 0.$$

Alors $f \in \mathfrak{J}$. (Utiliser le fait que $L^1(G)$ vérifie la condition de Ditkin, et raisonner comme au chap. I, § 5, prop. 5. Soit $\hat{G} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de $\hat{G}$, et soit N l'ensemble des $\chi \in \hat{G} \cup \{\infty\}$ tels que $\mathscr{F}f$ n'appartienne pas à $\mathscr{F}\mathfrak{J}$ au voisinage de χ. Montrer d'abord que $N \subset B \cup \{\infty\}$. Puis, utilisant c), montrer que $N \subset \{\infty\}$. Enfin, montrer que $N = \varnothing$.)

e) Soient $\mathfrak{J}$ un idéal fermé de $L^1(\mathbf{R}^n)$, $A = h(\mathfrak{J})$, f une fonction de $L^1(\mathbf{R}^n)$ telle que $\mathscr{F}f$ s'annule sur A. Pour $h > 0$, soit A_h l'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$ extérieurs à A et situés à une distance de A inférieure à h, et $\omega(h) = \sup_{x\in A_h} |(\mathscr{F}f)(x)|$. Si $\lim.\inf_{h\to 0} \omega(h)^2 h^{-n}\alpha(A_h) = 0$, on a $f \in \mathfrak{J}$. (Utiliser d).)

f) Soient $f \in L^1(\mathbf{R})$, $\alpha \in \left]0, 1\right[$, et supposons $\int_{-\infty}^{+\infty} |y|^\alpha |f(y)|\,dy < +\infty$. Alors il existe une constante k telle que $|(\mathscr{F}f)(x + h) - (\mathscr{F}f)(x)| \leqslant kh^\alpha$. (Montrer que, quel que soit $N > 0$,

$$|(\mathscr{F}f)(x+h) - (\mathscr{F}f)(x)| \leqslant 2\pi h\int_{-N}^{N} |yf(y)|\,dy + 2\int_{|y|\geqslant N} |f(y)|\,dy$$

$$\leqslant 2\pi h N^{1-\alpha}\int_{-N}^{N} |y^\alpha f(y)|\,dy + 2N^{-\alpha}\int_{|y|\geqslant N} |y^\alpha f(y)|\,dy$$

puis prendre $N = |h|^{-1}$).

g) Soient $\mathfrak{J}$ un idéal fermé de $L^1(\mathbf{R})$, f une fonction de $L^1(\mathbf{R})$ telle que $\mathscr{F}f$ s'annule sur $h(\mathfrak{J})$. Si $\int_{-\infty}^{+\infty} |y^{1/2}f(y)|\,dy < +\infty$, on a $f \in \mathfrak{J}$. (Utiliser e) et f).)

INDEX DES NOTATIONS

Les chiffres de référence indiquent successivement le chapitre, le paragraphe et le numéro (ou, exceptionnellement, l'exercice).

INDEX TERMINOLOGIQUE

Les chiffres de référence indiquent successivement le chapitre, le paragraphe et le numéro (ou, exceptionnellement, l'exercice).

TABLE