COURS D'ANALYSE

Laurent Schwartz

Professeur à l'Ecole Polytechnique
et à la Faculté des Sciences de Paris

Analyse

MATHÉMATIQUE

Cours

professé à l'Ecole Polytechnique, Paris

II

TABLE

Chapitre VI

CALCUL DIFFERENTIEL EXTERIEUR

INDEX

DEFINITIONS ET AXIOMES

FORMES SYMETRIQUES ET ANTISYMETRIQUES : $E^N \xrightarrow{f} F$

- f symétrique si, pour toute permutation σ dans E^N :
  $\sigma \circ f = f$ ou $\left(f(x_{\sigma_i}) \right) = \left(f(x_i) \right)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$
- f antisymétrique si $f(x_{\sigma_i}) = \varepsilon_\sigma f(x_i)$

ORIENTATION

On dit qu'on a orienté l'espace vectoriel $\vec{E}$ si l'on a distingué l'une des classes de bases ordonnées de $\vec{E}$ comme étant la classe positive ou directe, (et l'autre comme étant la classe négative ou rétrograde).

FORME DIFFERENTIELLE

On appelle forme différentielle de degré p sur un ouvert Ω d'un espace affine E, à valeurs dans un espace vectoriel normé $\vec{F}$, une application $\vec{\omega}$ de Ω dans l'espace $\mathcal{L}_p^q(\vec{E}^p; \vec{F})$ des applications p - linéaires antisymétriques continues de $\vec{E}^p$ dans $\vec{F}$.

ORIENTATION ET ORIENTABILITE

- On appelle système d'orientations $\mathcal{C}$ d'une variété V un choix, pour chaque a de V, d'une orientation de l'espace vectoriel tangent $\vec{T}(a; V)$.

- On dit qu'il est continu en un point a, relativement à une carte Φ dont le but recouvre a, si la fonction θ (qui vaut $\pm$ 1 selon qu'à la classe positive de $\mathbb{R}^n$ correspond par Φ la classe positive ou négative de $\vec{T}(a; V)$) est continue au point $\alpha = \Phi^{-1}(a)$.

- On dit qu'une variété V , de classe C^1 , de dimension n est orientable, si elle possède au moins un système continu d'orientations. On dit qu'elle est orientée si on a fixé un tel système continu, qui s'appelle alors une orientation de V .

- On dit qu'un système $\mathcal{H}$ d'orientations transversales d'une variété Σ est continu en un point A de Σ si, pour tout champ de vecteurs $\vec{X} : x \longrightarrow \vec{X}(x)$ défini sur Σ , continu au point a et transversal, le signe du vecteur $\vec{X}(x)$, par rapport à l'orientation transversale $\mathcal{H}(x)$, est une fonction continue au point a , c'est-à-dire constante dans un voisinage de a .

PARTAGE EN REGIONS

- On dit qu'un espace topologique connexe E est partagé par un ensemble A en k régions, si le complémentaire de A a k composantes connexes .

VECTEUR TRANSVERSAL RENTRANT.

Σ hypersurface de classe C^1 d'un espace affine E , $\mathcal{V}$ ouvert de E tel que $\Sigma \cap \mathcal{V}$ soit fermé et partage $\mathcal{V}$ en deux régions $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$. Soit a un point de Σ adhérent à la fois à $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$.

- On dit qu'un vecteur $\vec{X}$ de $\vec{E}$, transversal en a à Σ est rentrant par rapport à la région $\mathcal{V}_1$ de $\mathcal{V}$ s'il est le vecteur "vitesse initiale" pour une trajectoire de classe C^1 , $M : t \longrightarrow M(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, entièrement située dans la région $\mathcal{V}_1$ de $\mathcal{V}$ pour $t > 0$, avec $M(0) = a$.

INTEGRABILITE D'UNE FORME DIFFERENTIELLE

Si $\tilde{V}$ est une variété de dimension n et de classe C^1 , orientée, et si $\vec{\omega}$ est une forme différentielle continue, de degré n , sur V , on dit que $\vec{\omega}$ est intégrable sur V si, $[\vec{\omega}]_{\tilde{V}}$ étant la mesure de Radon associée à V et $\vec{\omega}$, 1 est intégrable par rapport à $[\vec{\omega}]_{\tilde{V}}$; on note alors l'intégrale $\int_{\tilde{V}} \vec{\omega}$:

HOMOTOPIE

- On dit que deux applications sont homotopes s'il existe une déformation continue de l'une dans l'autre.

- On dit qu'une application est homotope à 0 si elle est homotope à une application constante.

ESPACE SIMPLEMENT CONNEXE

On dit qu'un espace topologique X est simplement connexe, si toute application continue d'une circonférence du plan dans X est homotope à 0.

TABLE

Chapitre VII

FONCTIONS DE VARIABLES COMPLEXES

INDEX

'Le chapitre XXII, quoiqu'incorporé au présent cours d'analyse, appartient en réalité à l'édition refondue et augmentée, préparée pour paraître ultérieurement sous forme de livre imprimé ; d'où sa numérotation spéciale".

Chapitre XXII

ESPACES HILBERTIENS

VI
CALCUL DIFFÉRENTIEL EXTÉRIEUR

§ 1 APPLICATIONS MULTILINÉAIRES ALTERNÉES

Soit J un ensemble fini, $\mathfrak{S}$ l'ensemble de ses permutations, c'est-à-dire des bijections de J sur lui-même.

Si l'on appelle $\sigma\tau$ la composée $\sigma \circ \tau$ des permutations σ et τ, on sait que la loi de composition $(\sigma, \tau) \longrightarrow \sigma\tau$ fait de $\mathfrak{S}$ un groupe, appelé groupe des permutations de J.

Théorème 1 - Il existe une application ε et une seule, $\sigma \longrightarrow \varepsilon_\sigma$, du groupe $\mathfrak{S}$ des permutations d'un ensemble fini J, dans l'ensemble à deux éléments $\{+1, -1\}$, ayant les propriétés suivantes :

1°) $\varepsilon_{\sigma\tau} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau$;

2°) $\varepsilon_I = +1$, si I est la permutation identique de J ;

3°) $\varepsilon_\sigma = -1$, si σ est une transposition, c'est-à-dire une permutation laissant tous les éléments invariants, sauf deux qu'elle échange l'un avec l'autre.

L'ensemble des deux éléments $+1$, -1, muni de la loi de multiplication, est un groupe dont l élément $+1$ est l'élément neutre. La condition 1°) et la condition 2°) expriment alors que l'application ε respecte les structures de groupe de $\mathfrak{S}$ et de $\{+1, -1\}$. Elle respecte en effet la loi de multiplication et l'élément neutre; elle respecte alors aussi le passage à l'inverse, car on a nécessairement :

(VI,1;1) $$\varepsilon_{\sigma^{-1}}\varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_{\sigma^{-1}\sigma} = \varepsilon_{I} = +1 ,$$

ce qui prouve que $\varepsilon_{\sigma^{-1}}$ et ε_{σ} sont inverses l'un de l'autre c'est-à-dire égaux).

Démonstration - Tout d'abord l'unicité de la fonction ε est évidente; elle est en effet connue sur tous les éléments σ qui sont des transpositions de J ; comme alors toute permutation est produit d'un nombre fini de transpositions, la condition 2°) montre que ε est connue pour tous les éléments de $\mathfrak{S}$, et par conséquent unique. Il nous reste donc à démontrer l'existence de la fonction ε .

Pour cela, nous pouvons toujours supposer que l'ensemble J est l'ensemble $\{1,2,\ldots,N\}$.

Considérons alors le produit :

(VI,1;2) $$P = \prod_{i,j\in J,\, i<j} (j-i)$$

Si $\sigma : i \longrightarrow \sigma_i = \sigma(i)$, est une permutation de J , nous poserons :

(VI,1;3) $$\sigma(P) = \prod_{i,j\in J,\, i<j} (\sigma_j - \sigma_i) = \prod_{i<j} (\sigma(j) - \sigma(i))$$

On a alors évidemment la relation

(VI,1;4) $$\sigma(P) = \varepsilon_{\sigma} P \quad , \text{ avec } \quad \varepsilon_{\sigma} = (-1)^{\nu(\sigma)} ,$$

où $\nu(\sigma)$ est ce qu'on peut appeler le nombre d'inversions de la permutation σ , c est-à-dire le nombre de couples (i,j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant N$ et que $\sigma_i > \sigma_j$

On en déduit alors que, si f est une application quelcon - que de l'ensemble des N premiers entiers $\geqslant 1$ dans lui-même, on a aussi :

$$\prod_{i<j}\left(f(\sigma_j)-f(\sigma_i)\right) = \varepsilon_\sigma \prod_{i<j}\left(f(j)-f(i)\right)^{*} \tag{VI,1;5}$$

Si alors σ, τ, sont deux permutations, on a les relations :

$$\varepsilon_{\sigma\tau} P = (\sigma\tau)(P) = \prod_{i<j}\left((\sigma\tau)_j-(\sigma\tau)_i\right) = \prod_{i<j}\left(\sigma(\tau_j)-\sigma(\tau_i)\right) \tag{VI,1;6}$$

$$= \varepsilon_\tau \prod_{i<j}\left(\sigma(j)-\sigma(i)\right)^{**} = \varepsilon_\tau\, \sigma(P) = \varepsilon_\tau\, \varepsilon_\sigma\, P ,$$

d'où l'on déduit la relation 1°).

La condition 2°) est trivialement vérifiée.

La condition 3°) l'est aussi. Si en effet σ est une transposition échangeant les deux entiers α et β et laissant tous les autres invariants, et si l'on suppose par exemple $\alpha < \beta$, on voit que σ n'introduit pas d'inversion pour le couple (i, j) si i et j sont tous les deux $\leqslant \alpha$ ou tous les deux $\geqslant \beta$; il introduit une inversion pour le couple (α, k) et pour le couple (k, β) si $\alpha < k < \beta$. Tout ceci, jusqu'ici, introduit donc un nombre pair d'inversions; si, enfin, nous considérons le couple α, β, il subit exactement une inversion puisqu'il devient le couple (β, α).

Il existe donc au total un nombre impair d'inversions, et ε_σ vaut bien -1, si σ est une transposition.

La quantité ε_σ s'appelle la signature de la permutation σ. C'est donc un nombre égal à ± 1 ; il vaut $+1$ ou -1, selon que σ peut s'exprimer comme produit d'un nombre pair ou d'un nombre impair de

* En prenant tous les termes du produit du ler membre, on obtient en effet une fois et une seule tous ceux du produit du 2ème membre, au signe près; le nombre des changements de signe est précisément $\nu(\sigma)$.

** En appliquant (VI,1;5), à condition d'y remplacer f par σ et σ par τ.

transpositions; ce qui prouve que la parité du nombre de transpositions dont la composition donne σ est, pour σ fixée, toujours la même * . Si $\varepsilon = +1$ (resp -1), on dit que σ est une permutation paire (resp impaire)

Applications symétriques et antisymétriques

Soient E et F deux ensembles quelconques, N un entier $\geqslant 1$, et f une application de E^N dans F . Si alors σ est une permutation de l'ensemble d'entiers 1, 2 ..., N , on appelle transformée de f par σ l'application σf de E^N dans F , définie par la formule :

(VI,1;7) $$\sigma f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = f(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N})$$

On a

(VI,1;7 bis) $$\sigma(\tau f) = (\sigma\tau) f$$

On dit que l'application f de E^N dans F est symétrique, si elle est invariante par toute permutation σ ; autrement dit, si, quelle que soit $\sigma \in \mathfrak{S}$, $\sigma f = f$; ou encore si, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_N$ de E , et $\sigma \in \mathfrak{S}$, on a :

(VI,1;8) $$f(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N) .$$

Si maintenant $\vec{F}$ est un espace vectoriel, on dit que l'application $\vec{f}$ de E^N dans $\vec{F}$ est antisymétrique, si l'on a la relation

(VI,1;9) $$\sigma\vec{f} = \varepsilon_\sigma \vec{f} \quad , \text{ quelle que soit } \sigma \in \mathfrak{S} ;$$

* Cela n'est pas du tout évident a priori; il n'est pas évident qu'on ne puisse pas obtenir l'identité comme produit d'un nombre impair de transpositions convenablement choisies; c'est seulement le théorème 1, c'est-à-dire l'existence de la fonction signature ε , qui le prouve !

ou encore, si l'on a, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_N$ dans E et $\sigma \in \mathfrak{S}$, la relation

$$(\mathrm{VI},1;10) \qquad \vec{f}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}) = \varepsilon_\sigma \vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_N).$$

Cela revient à dire que $\sigma\vec{f} = -\vec{f}$, pour toute transposition σ. Car alors, si σ est une permutation quelconque, elle est un produit de transpositions, et $\sigma\vec{f}$ est le produit de $\vec{f}$ par une puissance de (-1) égale au nombre de ces transpositions, c'est-à-dire précisément par ε_σ.

On appelle symétrisée $S\vec{f}$ d'une application $\vec{f}$ de E^N dans un espace vectoriel $\vec{F}$, la fonction définie par

$$(\mathrm{VI},1;11) \qquad S\vec{f} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \sigma\vec{f},$$

ou encore

$$(\mathrm{VI},1;12) \qquad (S\vec{f})(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \vec{f}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}).$$

On appelle antisymétrisée de l'application $\vec{f}$, la fonc - tion $A\vec{f}$ définie par :

$$(\mathrm{VI},1;13) \qquad A\vec{f} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \varepsilon_\sigma \sigma\vec{f},$$

ou encore :

$$(\mathrm{VI},1;14) \qquad (A\vec{f})(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \varepsilon_\sigma \vec{f}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}).$$

Théorème 2 - Pour qu'une application de E^N dans un espace vectoriel $\vec{F}$ soit symétrique (resp. antisymétrique), il faut et il suffit qu'elle soit la symétrisée (resp. l'antisymétrisée) d'une application de E^N dans $\vec{F}$.

Démonstration - Donnons par exemple la démonstration dans le cas antisymétrique. Tout d'abord une fonction antisymétrique est égale à $\frac{1}{N!}$ fois l'antisymétrisée d'elle-même.

On a en effet, pour toute permutation σ , la relation (VI,1;9), d'ou, en additionnant les formules correspondant aux $N\,!$ permutations, la formule

(VI,1;15) $$A\vec{f} = N!\,\vec{f}\;.$$

Montrons ensuite que l'antisymétrisée d'une fonction est toujours antisymétrique.

Si en effet τ est une permutation de l'ensemble des N premiers entiers, on a la formule :

(VI,1;16) $$\tau(A\vec{f}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}} \varepsilon_\sigma\, \tau(\sigma\vec{f})^{*} = \varepsilon_\tau \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}} \varepsilon_{\tau\sigma}\big((\tau\sigma)\vec{f}\big) = \varepsilon_\tau\, A\vec{f}^{\;**}$$

ce qui prouve notre affirmation.

On dit qu'une application de E^N dans $\vec{F}$ est alternée, si elle prend la valeur 0 pour tout système de N éléments $x_1, x_2, \ldots, x_N$, de E , dont deux coïncident.

<u>Théorème 3</u> - <u>Pour qu'une application multilinéaire de $\vec{E}^N$ dans $\vec{F}$, où $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ des réels ou des complexes, soit antisymétrique, il faut et il suffit qu'elle soit alternée</u>.

<u>Démonstration</u> - Montrons d'abord que toute application antisymétrique de E^N , où E est un ensemble quelconque, dans un espace vectoriel $\vec{F}$, est toujours alternée. Si en effet $x_1, x_2, \ldots, x_N$, sont des éléments de E , et si $x_i = x_j$, alors on a nécessairement la relation :

(VI,1;17) $$\vec{f}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}) = \vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_N)\;,$$

* L'opérateur $g \longrightarrow \tau g$ est linéaire, donc $\tau\left(\sum_\sigma \varepsilon_\sigma \sigma\vec{f}\right) = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \tau(\sigma\vec{f})$

** Car, lorsque σ parcourt $\mathfrak{S}$, $\tau\sigma$ parcourt $\mathfrak{S}$ une fois et une seule.

si l'on appelle σ la transposition échangeant les deux éléments i et j et laissant les autres entiers invariants; mais, d'après la relation d'antisymétrie, on doit avoir aussi

$$\vec{f}(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_N}) = -\vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_N) \quad \text{(VI,1;18)}$$

ce qui prouve que les deux membres sont nuls.

Montrons maintenant que toute application multilinéaire alternée de $\vec{E}^N$ dans $\vec{F}$, où $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont tous les deux des espaces vectoriels, est nécessairement antisymétrique.

Si en effet $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$, sont des vecteurs quelconques de $\vec{E}$, on a, en vertu de la multilinéarité de $\vec{f}$, la relation (où $i < j$):

$$\vec{f}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{i-1}, \vec{X}_i + \vec{X}_j, \vec{X}_{i+1}, \ldots, \vec{X}_{j-1}, \vec{X}_i + \vec{X}_j, \vec{X}_{j+1}, \ldots, \vec{X}_N) \quad \text{(VI,1;19)}$$

$$= \vec{f}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_N) + \vec{f}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_N)$$

$$+ \vec{f}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_N) + \vec{f}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_N)$$

Mais, puisque $\vec{f}$ est supposée alternée, un certain nombre des termes écrits sont nuls, et on en déduit la relation

$$\vec{f}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_N) + \vec{f}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_j, \ldots, \vec{X}_i, \ldots, \vec{X}_N) = \vec{0}, \quad \text{(VI,1;20)}$$

qui prouve que $\vec{f}$ change de signe quand on effectue une transposition sur les variables, donc que $\vec{f}$ est antisymétrique, ce qui démontre le théorème.

Si $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont des espaces vectoriels, et si $\vec{u}$ est une application p-linéaire antisymétrique de $\vec{E}^p$ dans $\vec{F}$, on prendra souvent l'habitude d'inscrire le nombre p au-dessus de $\vec{u}$, et de la noter ainsi $\overset{p}{\vec{u}}$. On dira aussi que $\overset{p}{\vec{u}}$ est une p-forme extérieure, ou forme, de degré p, sur $\vec{E}$, à valeurs dans $\vec{F}$ *.

Si $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont normés, l'ensemble $A\mathcal{L}_p(\vec{E}^p;\vec{F})$ des applications p-linéaires antisymétriques continues de $\vec{E}^p$ dans $\vec{F}$ est évidemment un espace vectoriel, qui est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{L}_p(\vec{E}^p;\vec{F})$ de toutes les applications p-linéaires continues de $\vec{E}^p$ dans $\vec{F}$.

Dans le cas particulier où $\vec{F}$ est le corps $\mathbb{K}$ des scalaires, au lieu de $A\mathcal{L}_p(\vec{E}^p;\mathbb{K})$ on écrit aussi $\Lambda^p\overleftarrow{E}'$; pour $p=1$, $\Lambda^1\overleftarrow{E}'$ n'est autre que $\overleftarrow{E}'$, dual de $\vec{E}$. Un élément de $\overleftarrow{E}'$ s'appelle aussi un co-vecteur sur $\vec{E}$.

Un élément de $\Lambda^p\overleftarrow{E}'$ s'appellera alors un p-covecteur sur $\vec{E}$; un élément de $A\mathcal{L}_p(\vec{E}^p;\vec{F})$ un p-covecteur sur $\vec{E}$ à valeurs dans $\vec{F}$.

Pour $p=0$, on conviendra que $A\mathcal{L}_0(\vec{E}^0;\vec{F})$ est l'espace vectoriel $\vec{F}$ lui-même, et par conséquent le corps des scalaires si $\vec{F}=\mathbb{K}$

Théorème 4 - Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel de dimension N, de base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$. Soit $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N)$ un élément de $\vec{E}^N$, et appelons $X_{i,j}$ la j-ième coordonnée du i-ième vecteur $\vec{X}_i$.

* forme est ici un abus de langage, puisqu'une forme est habituellement à valeurs scalaires. Pour $p=1$, cela revient à dire qu'on appelle 1-forme ou forme sur $\vec{E}$ à valeurs dans $\vec{F}$ un élément de $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$. Noter aussi qu'on dit p-forme .... sur $\vec{E}$, et non sur $\vec{E}^p$, ce qui est aussi une simplification de langage.

Alors l'antisymétrisée de la forme N -linéaire (scalaire)

(VI,1;21) $$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N) \longrightarrow X_{1,1}\, X_{2,2} \ldots X_{N,N}$$

n'est autre que la fonction déterminant, qui, à chaque système de N vecteurs, fait correspondre le déterminant de leurs coordonnées par rapport à la base considérée.

Démonstration - Cette antisymétrisée est définie par la formule :

(VI,1;22) $$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N) \longrightarrow \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \varepsilon_\sigma\, X_{\sigma_1,1}\, X_{\sigma_2,2} \ldots X_{\sigma_N,N},$$

qui est la définition même du déterminant, donnée en mathématiques spéciales. Dans la suite, nous noterons ce déterminant par $\det_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N}} (X_{i,j})$.

Théorème 5 - Si $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont des espaces vectoriels, si $\vec{E}$ est de dimension finie N et muni d'une base, une application $\vec{u}$ de $\vec{E}^p$ dans $\vec{F}$ est p-linéaire antisymétrique, si et seulement si elle s'exprime sous la forme :

(VI,1;23) $$u(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \cdots < j_p \leq N} \vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}\, \Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p)$$

où $$\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \begin{vmatrix} X_{1,j_1} & X_{1,j_2} \ldots & X_{1,j_p} \\ X_{2,j_1} & X_{2,j_2} & X_{2,j_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{p,j_1} & X_{p,j_2} \ldots & X_{p,j_p} \end{vmatrix} = \det_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq l \leq p}} (X_{k,j_l}),$$

et où les quantités $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ sont des éléments de $\vec{F}$. Cette expression est alors unique, et on a

(VI,1;24) $$\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} = \vec{u}\,(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_p}).$$

Les $\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ forment donc une base de l'espace $\Lambda^p \vec{F}$ des formes p-linéaires antisymétriques sur $\vec{E}^p$

Si $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont normés, la correspondance qui, au système des $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} \in \vec{F}$ (en nombre $\binom{n}{p} = C_n^p$) fait correspondre l'application $\vec{u}$ définie par (VI,1;23), est une bijection linéaire de $(\vec{F})^{\binom{n}{p}}$ sur $A\mathcal{L}_p(\vec{E}^p ; \vec{F})$, continue ainsi que sa bijection réciproque.

Démonstration - Le caractère multilinéaire de $\vec{u}$ permet d'écrire :

$$\text{(VI,1;24 bis)} \quad \vec{u}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \sum_{j'_1, j'_2, \ldots, j'_p} X_{1,j'_1} X_{2,j'_2} \ldots X_{p,j'_p} \, \vec{u}(\vec{e}_{j'_1}, \vec{e}_{j'_2}, \ldots, \vec{e}_{j'_p}),$$

où la somme est étendue à tous les systèmes $(j'_1, j'_2, \ldots, j'_p)$.

Mais, si deux de ces indices j'_k sont égaux, l'expression trouvée est nulle puisque $\vec{u}$ est alternée.

Donnons nous alors une suite où deux quelconques de ces indices sont inégaux et rangés par ordre de grandeur croissante : $j_1 < j_2 < \cdots < j_p$. Réunissons alors tous les termes pour lesquels $j'_1, j'_2, \ldots, j'_p$ est une permutation de $j_1, j_2, \ldots, j_p$; compte tenu de la relation (VI,1;10), tous les termes trouvés constituent la somme

$$\text{(VI,1;25)} \quad \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p}{}^{*} \varepsilon_\tau X_{1,j_{\tau_1}} X_{2,j_{\tau_2}} \ldots X_{p,j_{\tau_p}} \, \vec{u}(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_p})$$

$$= \vec{u}(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_p}) \det_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq l \leq p}} (X_{k,j_l})$$

En faisant ensuite varier le système $(j_1, j_2, \ldots, j_p)$, on obtient bien la formule (VI,1;23), avec la relation (VI,1;24).

Inversement d'ailleurs, toute fonction de la forme (VI,1;23), où les $\vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ sont arbitraires, est évidemment p-linéaire antisymétrique : elle est en effet une somme de fonctions, dont chacune est proportionnelle à un déterminant, et nous avons vu plus haut que le déterminant est une fonction multilinéaire antisymétrisée donc antisymétrique.

* où $\mathfrak{S}_p$ est le groupe des permutations de $\{1, 2, \ldots, p\}$.

Enfin une expression telle que (VI,1;23) est sûrement unique, autrement dit on a <u>nécessairement</u>(VI,1;24). Si, en effet, dans (VI,1;23) on fait $\vec{X}_i = \vec{e}_{k_i}$ pour $i = 1,2,\ldots,p$ $(k_1 < k_2 < \cdots < k_p)$, on voit que

$$\Delta_{j_1,j_2,\ldots,j_p}(\vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2},\ldots,\vec{e}_{k_p}) = \delta_{j_1,k_1}\delta_{j_2,k_2}\cdots\delta_{j_p,k_p}$$

(symboles de Kronecker), ce qui donne bien

$\vec{u}(\vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2},\ldots,\vec{e}_{k_p}) = \vec{a}_{k_1,k_2,\ldots,k_p}$, c'est-à-dire (VI,1;24).

Supposons $\vec{E}$ et $\vec{F}$ normés. Comme $\vec{E}$ est de dimension finie, toute application multilinéaire de $\vec{E}^p$ dans $\vec{F}$ est continue (page 104 du Cours de 2ème Division) . Donc $\vec{u} \in A\mathcal{L}_p(\vec{E}^p;\vec{F})$. Le nombre des $\vec{a}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}$ est le nombre des parties à p éléments de $\{1,2,\ldots N\}$, donc $C_N^p = \binom{N}{p}$. Un système de $\vec{a}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}$ est donc un élément de $(\vec{F})^{\binom{N}{p}}$ et la correspondance entre le système des $\vec{a}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}$ et $\vec{u}$

est donc bien une bijection de $(F)^{\binom{N}{p}}$ sur $A\mathcal{L}_p(\vec{E}^p;\vec{F})$

Cette bijection est trivialement linéaire.

Elle est continue, car

$$\text{(VI,1;25 bis)} \quad \|\vec{u}\| = \sup_{\|\vec{X}_i\|\leq 1} \|\vec{u}(\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_p)\| \leq \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_p} \|\vec{a}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}\| \, \|\Delta_{j_1,j_2,\ldots,j_p}\|$$

où $\|\Delta_{j_1,j_2,\ldots,j_p}\|$ est la norme de la forme p-linéaire $\Delta_{j_1,j_2,\ldots,j_p}$; cette norme est finie, car il s'agit d'une forme p-linéaire sur $\vec{E}^p$, de dimension finie, donc continue.

On a donc une majoration du type

$$\text{(VI,1;25 ter)} \quad \|\vec{u}\| \leq \text{constante} \times \sum \|a_{j_1,j_2,\ldots,j_p}\| ,$$

donc la bijection est continue.

La bijection réciproque est aussi continue, car

(VI,1;25 quarto) $$\|\vec{a}_{j_1,j_2,\dots,j_p}\| \leqslant \|\vec{e}_{j_1}\| \; \|\vec{e}_{j_2}\| \cdots \|\vec{e}_{j_p}\| \quad \|\vec{u}\|$$
$$\leqslant \text{constante} \times \|\vec{u}\| ,$$

et le théorème est démontré.

Remarque - Nous venons donc de montrer que, si l'on identifie $\vec{u}$ au système de ses coefficients $\vec{a}_{j_1,j_2,\dots,j_p}$, on définit une identification entre $A\mathcal{L}_p(\vec{E}^p;\vec{F})$ et $\vec{F}^{\binom{N}{p}}$ qui respecte les structures vectorielles, et les normes à une équivalence près.

Naturellement, cette identification n'est pas canonique, elle dépend du choix d'une base dans $\vec{E}$.

Exemple - Prenons le cas $p = 2$; en changeant les notations, on voit que l'expression la plus générale d'une application bi-linéaire antisymétrique de $\vec{E}^2$ dans $\vec{F}$ est, si $\vec{E}$ est muni d'une base :

(VI,1;26) $$\vec{u}(\vec{X},\vec{Y}) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \vec{a}_{i,j}\,(X_i Y_j - X_j Y_i)\ ,\ \vec{a}_{i,j} = \vec{u}(\vec{e}_i,\vec{e}_j).$$

Corollaire 1 - Toute application p-linéaire alternée de $\vec{E}^p$ dans $\vec{F}$ est nulle, si $p > n$; alors l'espace $A\mathcal{L}_p(\vec{E}^p;\vec{F})$ se réduit à l'élément $\vec{0}$.

Corollaire 2 - Toute forme N-linéaire antisymétrique de $\vec{E}^N$ dans $\vec{F}$ est le produit du déterminant (défini au théorème 4) par un vecteur fixe de $\vec{F}$. La fonction "déterminant d'un système de N vecteurs par rapport à une base" est la seule application N-linéaire antisymétrique de $\vec{E}^N$ dans le corps des scalaires, qui prenne la valeur 1 pour le système des N vecteurs de la base.

La dimension de l'espace $\Lambda^N \overleftarrow{E}'$ est égale à 1.

Corollaire 3 - La dimension de l'espace $\Lambda^p \overleftarrow{E}'$ est celle de $\mathbb{K}^{\binom{N}{p}}$, donc $\binom{N}{p} = C_N^p$ *.

Ainsi les dimensions successives des espaces $\Lambda^0 \overleftarrow{E}' = \mathbb{K}$, $\Lambda^1 \overleftarrow{E}' = \overleftarrow{E}', \ldots, \Lambda^p \overleftarrow{E}', \ldots, \Lambda^N \overleftarrow{E}', \ldots$ sont les nombres $1 = C_N^0$, $N = C_N^1, \ldots, C_N^p, \ldots 1 = C_N^N, 0, 0, \ldots$

Multiplication extérieure des formes multilinéaires antisymétriques

Supposons d'abord que $\vec{F}$ soit le corps des scalaires. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$, p formes linéaires sur $\vec{E}$.

On peut construire, à partir de ces formes, une forme p-linéaire antisymétrique sur $\vec{E}^p$, à savoir l'antisymétrisée de la forme p-linéaire

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) \longrightarrow u_1(\vec{X}_1)\, u_2(\vec{X}_2) \ldots u_p(\vec{X}_p). \tag{VI,1;27}$$

Cette antisymétrisée est définie par la formule :

$$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) \longrightarrow \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma\, u_1(\vec{X}_{\sigma_1})\, u_2(\vec{X}_{\sigma_2}) \ldots u_p(\vec{X}_{\sigma_p}) = \det_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq i \leq p}} (u_i(\vec{X}_j)) \tag{VI,1;28}$$

On conviendra de désigner cette forme par la notation de "produit extérieur ** $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p$, d'où la formule :

$$(u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \det_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} (u_i(\vec{X}_j)). \tag{VI,1;29}$$

* Nous avons utilisé, pour démontrer le corollaire 3, une base de $\vec{E}$, mais aucun changement de base; donc uniquement les propriétés résultant immédiatement de la définition des espaces vectoriels. Donc le corollaire 3 peut servir à démontrer que toutes les bases ont le même nombre d'éléments; ce nombre, la dimension N, est le plus petit entier tel que $\Lambda^{N+1} \overleftarrow{E}' = \{0\}$.

** Ce produit s'appelle produit extérieur, car il n'est pas dans l'espace $\overleftarrow{E}'$ des facteurs, mais dans un autre espace $\Lambda^p \overleftarrow{E}'$.

On a, en particulier, pour 2 formes linéaires u , v , sur $\vec{E}$, la formule :

$$(u \wedge v) \cdot (\vec{X}, \vec{Y}) = u(\vec{X})\, v(\vec{Y}) - u(\vec{Y})\, v(\vec{X}). \tag{VI,1;29bis}$$

Considérons maintenant $p + q$ formes linéaires $u_1, u_2, \ldots u_p$, $v_1, v_2, \ldots v_q$.

On peut alors définir les trois produits

$$\overset{p}{u} = u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p , \quad \overset{q}{v} = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q , \quad \text{et}$$

$$\overset{p+q}{w} = u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p \wedge v_1 \wedge v_2 \ldots \wedge v_q .$$

D'après la définition, on a :

$$\overset{p+q}{W}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p, \vec{X}_{p+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q}) \tag{VI,1;30}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon_\sigma\, u_1(\vec{X}_{\sigma_1})\, u_2(\vec{X}_{\sigma_2}) \ldots u_p(\vec{X}_{\sigma_p})\, v_1(\vec{X}_{\sigma_{p+1}}) \ldots v_q(\vec{X}_{\sigma_{p+q}})$$

Appelons $\mathfrak{S}'$ (resp $\mathfrak{S}''$) le sous-groupe de $\mathfrak{S}_{p+q}$ constitué par les permutations qui laissent invariants les q derniers nombres entiers, et ne permutent entre eux que les p premiers (resp. le sous-groupe de celles qui laissent invariants les p premiers entiers, et ne permutent entre eux que les q derniers). On dira alors qu'une permutation σ appartient à la classe d'une permutation τ , si elle peut s'écrire $\sigma = \tau\sigma'\sigma''$, où : $\sigma' \in \mathfrak{S}'$, $\sigma'' \in \mathfrak{S}''$.

Chaque classe ainsi constituée comprend $p!\, q!$ permutations; alors la somme $\sum\limits_{\sigma}$ peut aussi s'écrire $\sum\limits_{\tau,\sigma',\sigma''}$, où σ' parcourt $\mathfrak{S}'$, σ'' parcourt $\mathfrak{S}''$, et où τ parcourt un ensemble T de permutations, contenant une permutation et une seule dans chaque classe.

Mais alors on peut écrire, d'après la définition même de la forme p-linéaire u et de la forme q-linéaire v;

(VI,1;31)
$$W(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) =$$

$$\sum_{\tau \in T} \varepsilon_\tau \Big[\Big(\sum_{\sigma'} \varepsilon_{\sigma'} u_1(\vec{X}_{\tau(\sigma'_1)}) u_2(\vec{X}_{\tau(\sigma'_2)}) \ldots u_p(\vec{X}_{\tau(\sigma'_p)}) \Big)$$

$$\Big(\sum_{\sigma''} \varepsilon_{\sigma''} v_1(\vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+1})}) v_2(\vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+2})}) \ldots v_q(\vec{X}_{\tau(\sigma''_q)}) \Big) \Big]$$

$$= \sum_{\tau \in T} \varepsilon_\tau \, u(\vec{X}_{\tau_1}, \vec{X}_{\tau_2}, \ldots, \vec{X}_{\tau_p}) \, v(\vec{X}_{\tau_{p+1}}, \vec{X}_{\tau_{p+2}}, \ldots, \vec{X}_{\tau_{p+q}}).$$

Mais u, étant antisymétrique, vaut $\frac{1}{p!}$ fois son antisymétrisée, et v vaut aussi $\frac{1}{q!}$ fois son antisymétrisée.

On peut donc écrire :

(VI,1;32)
$$W(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) =$$

$$\frac{1}{p!} \frac{1}{q!} \sum_{\tau \in T} \varepsilon_\tau \Big[\Big(\sum_{\sigma'} \varepsilon_{\sigma'} u(\vec{X}_{\tau(\sigma'_1)}, \vec{X}_{\tau(\sigma'_2)}, \ldots, \vec{X}_{\tau(\sigma'_p)}) \Big)$$

$$\Big(\sum_{\sigma''} \varepsilon_{\sigma''} v(\vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+1})}, \vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+2})}, \ldots, \vec{X}_{\tau(\sigma''_{p+q})}) \Big) \Big] =$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \frac{1}{p!\,q!} \varepsilon_\sigma \, u(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_p}) \, v(\vec{X}_{\sigma_{p+1}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{p+q}}),$$

en utilisant de nouveau toutes les permutations.

Cela prouve que w est l'antisymétrisée de la forme $(p + q)$ linéaire

(VI,1;33) $$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p \;, \vec{X}_{p+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q}) \longrightarrow$$

$$\frac{1}{p!\,q!}\, u(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p)\, v(\vec{X}_{p+1}, \vec{X}_{p+2}, \ldots, \vec{X}_{p+q}).$$

Nous sommes donc amenés à poser la définition suivante : Si u (resp v) est une forme p-linéaire (resp q-linéaire) antisymétrique sur $\vec{E}^p$ (resp $\vec{E}^q$) , alors on appelle produit extérieur de ces formes, et on note $u \wedge v$, la forme ($p + q$)-linéaire w , définie comme l'antisymétrisée de la fonction (VI,1;33), c'est-à-dire définie par la formule (VI,1;32). Par convention, si $p = 0$, donc si u est un scalaire de $\mathbb{K}$, $u \wedge v$ est la forme uv , produit de la forme v par le scalaire u ; de même pour $q = 0$.

Il résulte de cette définition que, si u est un produit $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p$, et si v est un produit $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q$, alors $u \wedge v$ est tout simplement le produit, défini directement, $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q$.

De la même manière, si u, v, w, sont respectivement des formes p-linéaire , q-linéaire , r-linéaire, antisymétriques, on définira leur produit extérieur $u \wedge v \wedge w$, comme la forme ($p+q+r$) -linéaire, antisymétrisée de la fonction

(VI,1;34) $$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p, \vec{X}_{p+1}, \vec{X}_{p+2}, \ldots, \vec{X}_{p+q}, \vec{X}_{p+q+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q+r})$$

$$\longrightarrow \frac{1}{p!\,q!\,r!}\, u(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p)\, v(\vec{X}_{p+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q})\, w(\vec{X}_{p+q+1}, \ldots, \vec{X}_{p+q+r}),$$

et par conséquent définie par la formule

(VI,1;35) $$(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q+r}) \longrightarrow$$

$$\frac{1}{p!\,q!\,r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q+r}} u(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_p})\, v(\vec{X}_{\sigma_{p+1}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{p+q}})$$

$$w(\vec{X}_{\sigma_{p+q+1}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{p+q+r}}).$$

Supposons que $\vec{E}$ soit de dimension finie N , et soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$ une base de E . Appelons alors (ξ_i) la forme linéaire "i-ème coordonnée", qui fait correspondre, à tout vecteur de $\vec{E}$, sa i-ème coordonnée. Alors on voit que le produit extérieur $(\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j_p})$ n'est autre que la forme p-linéaire antisymétrique $\Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ de la formule (VI,1;23), qui, à chaque système de p vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$, fait correspondre le déterminant de leurs coordonnées de rangs $j_1, j_2, \ldots, j_p$:

(VI,1;35 bis) $$(\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j_p}) (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \underset{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq k \leq p}}{\det} (X_{i, j_k})$$

La forme p-linéaire, représentée à la formule (VI,1;23), peut désormais aussi s'écrire :

(VI,1;36) $$\vec{u} = \sum \vec{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} (\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \ldots \wedge (\xi_{j_p}) .$$

On dit qu'une forme de degré p est <u>décomposable</u>, si elle est un produit extérieur de p formes linéaires; on a alors :

<u>**Théorème 6**</u> - <u>Si $\vec{E}$ est de dimension finie, toute forme p-linéaire antisymétrique sur $\vec{E}^p$ est une combinaison linéaire finie de formes décomposables</u>. <u>Si les $\vec{e}_i$ forment une base de $\vec{E}$, les $\xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \ldots \wedge \xi_{j_p} = \Delta_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_p$ forment une base de $\Delta^p \vec{E}'$.</u>

Désignons par J une partie quelconque à p éléments de l'ensemble d'entiers $\{1, 2, \ldots, N\}$. Appelons (ξ_J) le produit extérieur $(\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \wedge \ldots \wedge (\xi_{j_p})$, avec $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$, tous éléments de J ; et appelons aussi a_J le coefficient $a_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$; la formule (VI,1;36) peut s'écrire sous la forme *

(VI,1;37) $$u = \sum_{J \in \mathcal{B}_p(\{1,2,\ldots,N\})} a_J (\xi_J) ,$$

* où $\mathcal{B}_p(A)$ est l'ensemble des parties à p éléments de l'ensemble A .

Théorème 7 - La multiplication extérieure des formes multilinéaires est une opération multilinéaire et associative.

Démonstration - Quand nous disons que l'application est multilinéaire, nous voulons dire, par exemple, que l'application $(u,v,w) \longrightarrow u \wedge v \wedge w$ de $(\Lambda^p E' \times \Lambda^q E' \times \Lambda^r E')$ dans le corps des scalaires $\mathbb{K}$, est une application trilinéaire; autrement dit, que l'on a les relations :

$$\text{(VI,1;37 bis)} \quad \begin{cases} (u_1 + u_2) \wedge v \wedge w = u_1 \wedge v \wedge w + u_2 \wedge v \wedge w. \\ u \wedge (v_1 + v_2) \wedge w = u \wedge v_1 \wedge w + u \wedge v_2 \wedge w. \\ u \wedge v \wedge (w_1 + w_2) = u \wedge v \wedge w_1 + u_2 \wedge v \wedge w_2. \\ \lambda u \wedge \mu v \wedge \nu w = \lambda\mu\nu(u \wedge v \wedge w); \lambda, \mu, \nu, \text{ scalaires.} \end{cases}$$

Cette propriété est évidente.

Quand nous voulons parler de l'associativité de la multiplication extérieure, nous voulons dire que l'on a, par exemple, si u, v, w, z, sont des formes multilinéaires antisymétriques, des formules du type suivant :

$$\text{(VI,1;38)} \quad \begin{aligned} & u \wedge v \wedge w \wedge z = (u \wedge v \wedge w) \wedge z = u \wedge (v \wedge w \wedge z) \\ & = (u \wedge v) \wedge (w \wedge z) = (u \wedge v) \wedge w \wedge z = u \wedge (v \wedge w) \wedge z \\ & = u \wedge v \wedge (w \wedge z) \end{aligned}$$

Cette formule est évidente si u, v, w, z, sont des formes décomposables, c'est-à-dire si chacune est un produit extérieur de formes linéaires du type :

$$\text{(VI,1;39)} \quad \begin{aligned} u &= u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p , \\ v &= v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q , \\ w &= w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_r , \\ z &= z_1 \wedge z_2 \wedge \ldots \wedge z_s . \end{aligned}$$

En effet, dans ce cas, tous les termes écrits dans (VI,1;38) sont égaux à

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_q \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_r \wedge z_1 \wedge z_2 \wedge \ldots \wedge z_s . \tag{VI,1;40}$$

Mais par ailleurs nous avons vu au théorème 6, dans le cas où $\vec{E}$ est de dimension finie, que toute forme multilinéaire antisymétrique est une combinaison finie de formes décomposables; or les différents membres de (VI,1;38) dépendent tous multilinéairement de u, v, w, z ; étant égaux lorsque ces formes sont décomposables, ils sont aussi égaux dans tous les cas. Nous ne donnerons pas la démonstration lorsque $\vec{E}$ est de dimension infinie; on se ramène très facilement au cas de la dimension finie.

Théorème 8 - Le produit extérieur des formes multilinéaires antisymétriques est anticommutatif : si u est p-linéaire et si v est q-linéaire, alors on a la formule

$$u \wedge v = (-1)^{pq}\, v \wedge u . \tag{VI,1;41}$$

Démonstration - Le premier membre est défini par la formule (VI,1;30). Mais, si nous appelons τ la permutation qui fait passer de $1,2,\ldots,p,p+1,\ldots,p+q$, à $q+1,q+2,\ldots,q+p,1,2,\ldots,q$, , on voit que cette permutation a la signature $(-1)^{pq}$, car elle possède pq inversions.

Il en résulte que l'on peut aussi définir le premier terme de (VI,1;41) autrement, en tenant compte de ce que si σ parcourt $\mathfrak{S}_{p+q}$, $\sigma\tau$ le parcourt une fois et une seule :

(VI,1;42)
$$(u \wedge v).(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) =$$

$$\frac{1}{p!\,q!}\, \varepsilon_\tau \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} u(\vec{X}_{\sigma(\tau_1)}, \vec{X}_{\sigma(\tau_2)}, \ldots, \vec{X}_{\sigma(\tau_p)})$$
$$v(\vec{X}_{\sigma(\tau_{p+1})}, \ldots, \vec{X}_{\sigma(\tau_{p+q})})$$
$$= \frac{1}{p!\,q!}(-1)^{pq} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} u(\vec{X}_{\sigma_{q+1}}, \vec{X}_{\sigma_{q+2}}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_{q+p}})$$
$$v(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_q})$$
$$= (-1)^{pq}(v \wedge u).(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}).$$

Corollaire 1 - Si u et v sont des formes linéaires, ou plus généralement si ce sont des formes p-linéaire et q-linéaire, où p et q sont impairs, on a la formule :

(VI,1;43)
$$u \wedge v = - v \wedge u^{*}.$$

Si, au contraire, l'un au moins des entiers p, q, est pair, on a la formule :

(VI,1;44)
$$u \wedge v = v \wedge u .$$

Corollaire 2 - Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$, p formes linéaires, et soit σ une permutation de l'ensemble $1,2,\ldots,p$. Alors on a la formule :

(VI,1;45)
$$u_{\sigma_1} \wedge u_{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge u_{\sigma_p} = \varepsilon_\sigma\, u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p .$$

* Pour $p = q = 1$, c'est une conséquence triviale de (VI,1;29 bis).

Démonstration - Supposons d'abord que σ soit une transposition de deux entiers consécutifs. Alors la formule (VI,1;45) s'écrit

(VI,1;46) $$u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_i \wedge u_{i+1} \wedge \ldots \wedge u_p = - u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_{i+1} \wedge u_i \wedge \ldots \wedge u_p ,$$

et elle est alors évidente, car, en vertu de l'associativité, elle revient à $u_{i+1} \wedge u_i = - u_i \wedge u_{i+1}$, ce qui n'est autre que la formule (VI,1;43).

On passe alors au cas d'une permutation quelconque σ , en remarquant qu'elle est toujours composée d'un nombre fini de transpositions de deux éléments consécutifs, et que la parité du nombre de ces transpositions est précisément la parité de σ . Le corollaire 2 complète le théorème 7, en exprimant que la multiplication extérieure des formes linéaires est une opération antisymétrique. Elle est donc alternée (théorème 3), donc :

Corollaire 3 - Un produit extérieur de plusieurs formes linéaires, dont deux sont proportionnelles, est nécessairement nul.

Naturellement ce résultat ne subsiste pas si l'on a affaire à un produit extérieur de formes de degrés $\neq 1$.

Par exemple, si nous considérons un espace de dimension $N = 4$, ayant pour base $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$, et si nous appelons u la 2 -forme définie par :

(VI,1;47) $$u = (\xi_1) \wedge (\xi_2) + (\xi_3) \wedge (\xi_4) ,$$

son carré extérieur n'est pas nul, et l'on a :

(VI,1;48) $$u \wedge u = 2 (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge (\xi_3) \wedge (\xi_4)$$

D'ailleurs, pour le degré 0 , $\Lambda^0 \overleftarrow{E}'$ est le corps des scalaires $\mathbb{K}$, et le carré d'un scalaire n'est pas toujours nul !

Théorème 9 - Pour que p formes linéaires sur un espace vectoriel $\vec{E}$ soient indépendantes, il faut et il suffit que leur produit extérieur soit $\neq 0$.

Démonstration - 1°) Supposons d'abord que ces formes $u_1, u_2, \ldots, u_p$, soient indépendantes. On peut alors trouver p vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$, de $\vec{E}$, tels que l'on ait les relations :

$$u_i(\vec{X}_j) = \delta_{i,j} \quad , \tag{VI,1;49}$$

où $\delta_{i,j}$ est le tenseur de Kronecker. On a alors, d'après (VI,1;29), la formule :

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = 1 \quad , \tag{VI,1;50}$$

qui prouve que le produit extérieur est $\neq 0$.

2°) Supposons, au contraire, les formes dépendantes. Alors l'une au moins d'entre elles, par exemple u_p , est une combinaison linéaire des autres, à savoir :

$$u_p = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_{p-1} u_{p-1} \tag{VI,1;51}$$

On a alors, d'après la formule de linéarité,

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_p = \sum_{i=1}^{p-1} c_i \, u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_{p-1} \wedge u_i \quad , \tag{VI,1;52}$$

et chacun des termes est nul, en vertu du corollaire 3 du théorème 8.

Produits extérieurs d'applications multilinéaires

Si maintenant nous supposons que u est une application p-linéaire antisymétrique de $\vec{E}^p$ dans $\vec{F}$, v une application q-linéaire antisymétrique de $\vec{E}^q$ dans $\vec{G}$, on peut effectuer leur produit extérieur $u \wedge_{(B)} v$, relativement à une application bilinéaire B de $\vec{F} \times \vec{G}$ dans un espace vectoriel $\vec{H}$; c'est une application $(p + q)$ -linéaire de $\vec{E}^{\,p+q}$ dans $\vec{H}$, définie comme l'antisymétrisée de la fonction :

$$(\text{VI},1;53) \quad (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) \longrightarrow \frac{1}{p!\,q!} B\left(\vec{u}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p), v(\vec{X}_{p+1}, \vec{X}_{p+2}, \ldots, \vec{X}_{p+q})\right)$$

c'est-à-dire définie par la formule :

$$(\text{VI},1;54) \qquad u \wedge_{(B)} v\,(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{p+q}) =$$

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \frac{\varepsilon_\sigma}{p!\,q!} B\left(u\,(\vec{X}_{\sigma_1}, \vec{X}_{\sigma_2}, \ldots, \vec{X}_{\sigma_p}), v\,(\vec{X}_{\sigma_{p+1}}, \ldots; \vec{X}_{\sigma_{p+q}})\right).$$

Il n'est plus question ici, en général, d'associativité, ni de règle d'anticommutativité de ce produit. Il en sera cependant ainsi dans les deux cas particuliers suivants, qui sont les plus importants dans la pratique :

1°/ Si $\vec{E}$ est un espace vectoriel sur le corps des réels $\mathbb{R}$, si $\vec{F}, \vec{G}, \vec{H}$ sont le corps des complexes $\mathbb{C}$, considéré comme espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, et si l'application linéaire B est la multiplication ordinaire du corps des complexes, alors on a l'associativité et l'anticommutativité comme précédemment; les produits extérieurs d'un nombre fini quelconque de formes multilinéaires antisymétriques à valeurs dans $\mathbb{C}$, satisfont à toutes les formules précédentes.

En outre, la multiplication extérieure est même multilinéaire par rapport au corps des complexes, en ce sens que la dernière formule (VI,1;37 bis) est encore vraie pour λ, μ, ν, complexes.

2°/ Supposons que $\vec{G}$ soit le corps des scalaires $\mathbb{K}$, que $\vec{H}$ soit identique à $\vec{F}$, et que l'application bilinéaire B soit la multiplication habituelle d'un vecteur par un scalaire. On voit alors qu'on peut effectuer un produit extérieur de plusieurs formes multilinéaires, l'une d'elles étant à valeurs dans $\vec{F}$, toutes les autres étant à valeurs scalaires, et que les produits ainsi formés satisfont aux formules précédentes.

Exemples - Donnons un exemple du premier cas, en prenant pour $\vec{E}$, aussi bien que pour $\vec{F}$, le corps des complexes $\mathbb{C}$, considéré comme espace vectoriel à deux dimensions sur $\mathbb{R}$.

Si alors on appelle ξ et η les formes "première et deuxième coordonnées", c'est-à-dire celles qui font correspondre a un nombre complexe $z = x + iy$, respectivement sa partie réelle x et sa partie imaginaire y, on peut aussi considérer les applications $\mathbb{R}$-linéaires dans $\mathbb{C}$: $\zeta = \xi + i\eta$ et $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$, qui sont définies par les formules :

(VI,1;55) $$\zeta(z) = z \;, \quad \bar{\zeta}(z) = \bar{z}\,^{*}$$

On a alors les formules suivantes :

(VI,1;56) $$\begin{cases} \xi \wedge \eta \;(z, z') = x y' - y x' . \\ \zeta \wedge \bar{\zeta} = (\xi + i\eta) \wedge (\xi - i\eta) = -2i\, \xi \wedge \eta \\ \zeta \wedge \bar{\zeta}(z, z') = z \bar{z}' - z' \bar{z} = -\, 2i\,(x y' - y x') . \end{cases}$$

Algèbre extérieure de $\vec{E}$

Nous avons défini $\Lambda^p \overleftarrow{E'}$, pour $\overleftarrow{E'}$ dual de $\vec{E}$. Mais, si $\vec{E}$ est un espace de dimension finie, il peut etre considéré comme le dual de $\overleftarrow{E'}$; on peut donc définir $\Lambda^p \vec{E}$ (qui sera l'espace des formes p-linéaires antisymétriques sur $\overleftarrow{E'}$). La structure algébrique de l'algèbre extérieure de $\vec{E}$ est analogue à celle de $\overleftarrow{E'}$. Un élément de $\Lambda^p \vec{E}$ s'appellera un p-vecteur.

Il y a lieu toutefois de porter une très grande attention au corps des scalaires. Si $\vec{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, il définit a fortiori un espace vectoriel $\vec{E}_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$ Mais le dual $\overleftarrow{E'}$ (espace des applications $\mathbb{C}$-linéaires de $\vec{E}$ dans $\mathbb{C}$) n'a pas de rapport avec $(\vec{E}_{\mathbb{R}})'$, (espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\vec{E}$ dans $\mathbb{R}$). Donc $\Lambda^p E$ et

* ζ est aussi $\mathbb{C}$-linéaire, mais $\bar{\zeta}$ ne l'est pas.

$\Lambda^r E_{\mathbb{R}}$ ne sont pas identiques, et même leurs dimensions ne sont pas les mêmes; par exemple, si $\vec{E}$ a la dimension complexe n, donc la dimension réelle $2n$, $\Lambda^2 \vec{E}$ a la dimension complexe $\frac{n(n-1)}{2}$ donc la dimension réelle $n(n-1)$, alors que $\Lambda^2 \vec{E}_{\mathbb{R}}$ a la dimension réelle $\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$. D'ailleurs, si $\vec{e} \in \vec{E}$, $\vec{e}$ et $i\vec{e}$ sont dépendants sur $\mathbb{C}$, donc $\vec{e} \wedge_{\mathbb{C}} i\vec{e} = \vec{0}$ (théorème 9); mais ils sont indépendants sur $\mathbb{R}$, donc $\vec{e} \wedge_{\mathbb{R}} i\vec{e} \neq \vec{0}$.

On utilise systématiquement les p-formes, mais peu les p-vecteurs.

§ 2 ORIENTATION D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE SUR R

Rappelons que, si u est une application linéaire d'un espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension n dans lui-même, on peut parler du déterminant de u ; si on considère une base quelconque de $\vec{E}$, l'application u est définie, relativement à cette base, par une matrice, et le déterminant de u est le déterminant de cette matrice, quelle que soit le base choisie.

Le déterminant du produit (ou composé) de 2 applications linéaires est le produit des déterminants; le déterminant de l'application identique est 1, et les déterminants de deux bijections réciproques sont inverses.

Tout ceci est valable, quel que soit le corps des scalaires.

Dans ce paragraphe, $\vec{E}$ est un espace vectoriel de dimension N sur le corps des réels $\mathbb{R}$. S'il est donné comme espace vectoriel de dimension n sur le corps des complexes $\mathbb{C}$, on le considèrera comme espace vectoriel de dimension $N = 2n$ sur le corps des réels $\mathbb{R}$.

Rappelons qu'on appelle base ordonnée de $\vec{E}$ une application e de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ dans $\vec{E}$, à savoir $i \longrightarrow \vec{e}_i$, telle que les vecteurs $(\vec{e}_i)_{i=1,2,\ldots,N}$ soient indépendants dans $\vec{E}$.

Nous établirons alors, dans l'ensemble de ces bases, une relation d'équivalence. Nous dirons que la base e' est équivalente à la base e, si le déterminant de e' par rapport à e est > 0 ; ce déterminant est le déterminant de l'unique application linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$, pour laquelle l'image de chaque $\vec{e}_i$ soit $\vec{e}_i'$. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

En effet :

1°) Elle est réflexive : si $e' = e$, le déterminant est $1 > 0$.

2°) Elle est symétrique : le déterminant de la base e' par rapport à la base e est l'inverse du déterminant de la base e par rapport à la base e' , puisque ce sont les déterminants de 2 applications réciproques; si l'un est > 0 , il en est donc de même de l'autre.

3°) Elle est transitive; si e, e', e'' , sont trois bases ordonnées de $\vec{E}$, l'application linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$ qui amène $\vec{e}_i$ sur $\vec{e}''_i$ est le produit de l'application linéaire qui amène $\vec{e}_i$ sur $\vec{e}'_i$ et de celle qui amène $\vec{e}'_i$ sur $\vec{e}''_i$; donc le déterminant de e'' par rapport à e est le produit du déterminant de e' par rapport à e , et du déterminant de e'' par rapport à e' . Si donc ces deux derniers déterminants sont > 0 , il en est de même du premier.

La relation d'équivalence précédente établit, dans l'ensemble de toutes les bases ordonnées de $\vec{E}$, exactement deux classes.

Tout d'abord, en effet, on peut trouver 2 bases e, e', non équivalentes ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N$, et $\vec{e}'_2, \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_N$); si ensuite e'' est une 3ème base, les déterminants de e'' par rapport à e et e' ont pour quotient le déterminant de e' par rapport à e , qui est < 0 , donc l'un au moins de ces deux déterminants est > 0 , e'' est équivalente, soit à e , soit à e' *.

<u>On dit qu'on a orienté l'espace vectoriel $\vec{E}$ si l'on a distingué l'une de ces classes de bases ordonnées de $\vec{E}$ comme étant la classe positive ou directe, et l'autre comme étant la classe négative ou rétrograde</u>.

<u>Remarques</u> 1°) Il existe deux orientations possibles de $\vec{E}$. Si une orientation de $\vec{E}$ est choisie, l'autre orientation, celle qui consiste à appeler positive la classe de bases qu'on appelait négative dans la première, s'appelle l'orientation opposée. Il est assez couramment dit, dans les livres élémentaires, que le choix de l'orientation de $\vec{E}$ est arbitraire, mais "qu'il est préférable, dans le cas d'un espace vectoriel de dimension 2, de choisir pour classe positive celle des bases ordonnées où le deuxième vecteur est placé à la gauche du premier"

* C'est là qu'intervient le fait que le corps des scalaires est $\mathbb{R}$.

Il est bien évident qu'il s'agit là d'une stupidité parfaite. La notion de droite et de gauche est une notion purement physique, ayant un sens dans une région relativement restreinte de l'univers où nous vivons * , mais, étant donné un espace vectoriel à deux dimensions sur le corps des réels, il n'existe dans cet espace ni droite ni gauche.

Si, par exemple, on considère l'espace vectoriel à deux dimensions des polynomes en x de degrés ≤ 1, il est evidemment impossible, si l'on considère le système des deux polynômes x, $1+x$, de dire si le deuxième est à la gauche ou à la droite du premier.

2°) Si σ est une permutation de l'ensemble d'indices $\{1, 2, \ldots, N\}$, la classe de la base $i \longrightarrow \vec{e}_{\sigma_i}$ est celle de la base $i \longrightarrow \vec{e}_i$, multipliée par la signature ε_σ de la permutation σ .

3°) Si u est une bijection linéaire de $\vec{E}$ sur lui-même, et si $(\vec{e}_i)_{i=1,2,\ldots,N}$ est une base de $\vec{E}$, la base $(u(\vec{e}_i))_{i=1,2,\ldots,N}$ est de même classe ou non, suivant que le déterminant de u est > 0 ou < 0 . On dit souvent que c'est là une "interprétation géométrique" du signe du déterminant; c'est assez inexact, car l'orientation n'est pas une notion géométrique qui va de soi, elle résulte justement des propriétés des déterminants des applications linéaires.

Autres méthodes d'orientation d'un espace vectoriel

Considérons d'abord un espace vectoriel de dimension 1 sur le corps des réels; alors deux éléments quelconques $\neq 0$ sont proportionnels , et leur rapport est > 0 ou < 0 .

On peut donc évidemment partager le complémentaire de 0 dans l'espace vectoriel, en deux classes, en disant que deux éléments sont équivalents ou de la même classe, si leur rapport est > 0 . Orienter l'espace vectoriel c'est choisir une de ces deux classes pour l'appeler la classe > 0 . On remarque alors que, si $\vec{E}$ est un espace vectoriel de dimension finie N quelconque, l'espace $\Lambda^N \vec{E}'$ des formes N-linéaires antisymétriques sur $\vec{E}$ est de dimension 1 (corollaire 2 du théorème 5), et qu'il peut en conséquence être orienté. Une orientation de $\vec{E}$ est alors, par définition, une orientation de l'espace vectoriel de dimension 1, $\Lambda^N \overleftarrow{E}'$.

* Si nous communiquions avec des Polytechniciens d'une planète distante de la nôtre de 1 milliard d'années-lumière, comment leur indiquerions-nous ce que nous entendons par droite et gauche ?

Orienter E , c'est fixer celles des formes N -linéaires antisymétriques $\neq 0$, qu'on considérera comme positives.

Montrons qu'il y a bien équivalence entre les deux méthodes indiquées pour orienter un espace vectoriel.

Soit en effet e une base; elle définit des fonctions coordonnées (ξ_i) , et par conséquent une N-forme produit extérieur $(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N)$. De la même manière, si e' est une autre base, on peut lui associer canoniquement une autre N -forme $(\xi'_1) \wedge (\xi'_2) \wedge \ldots \wedge (\xi'_N)$. Désignons par Δ le déterminant de la deuxième base par rapport à la première. D'après la définition même du produit extérieur des formes (formules VI,1;35 bis)), on a les deux formules :

$$(\text{VI},2;1) \qquad \begin{cases} (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N) \cdot (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_N) = \Delta \\ (\xi'_1) \wedge (\xi'_2) \wedge \ldots \wedge (\xi'_N) \cdot (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_N) = 1 \end{cases}$$

Ceci prouve que l'on a, entre les N -formes (nécéssairement proportionnelles) associées aux deux bases, la relation :

$$(\text{VI},2,2) \qquad (\xi'_1) \wedge (\xi'_2) \wedge \ldots \wedge (\xi'_N) = \frac{1}{\Delta} (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N) .$$

Alors deux bases sont équivalentes, au sens de la relation d'équivalence établie plus haut entre les bases, si et seulement si les N -formes correspondantes sont de rapport > 0 , donc équivalentes, au sens de la relation d'équivalence établie ultérieurement dans l'espace des N -formes. Orienter l'espace, au sens du choix de la classe positive des bases, revient donc à l'orienter, au sens du choix de la classe positive des N -formes; la N -forme $(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N)$ associée à une base e : $\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \ldots , \vec{e}_N$, appartient à la classe positive des N -formes, si et seulement si e appartient à la classe positive des bases.

Si u est une N-forme $\neq 0$, positive pour l'orientation de $\vec{E}$, on pourra écrire $u > 0$. On écrira alors $u \geq 0$, si $u = 0$ ou $u > 0$. Cette notion de signe d'une N-forme sur $\vec{E}$ n'a de sens que si $\vec{E}$ est orienté.

Nous avons vu plus haut que, sur un espace vectoriel, il existe deux orientations possibles, aucune n'étant privilégiée par rapport à l'autre; au contraire nous allons voir qu'il n'en est pas ainsi sur un espace vectoriel sur le corps des complexes.

Théorème 10 - Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel de dimension n sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. Soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, une $\mathbb{C}$-base de $\vec{E}$. Alors $\vec{e}_1, i\vec{e}_1, \vec{e}_2, i\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, i\vec{e}_n$ est une $\mathbb{R}$-base de $\vec{E}$ (considéré comme espace vectoriel de dimension $2n$ sur le corps des réels). La classe de cette $\mathbb{R}$-base est indépendante du choix de la $\mathbb{C}$-base initiale.

Avant de donner la démonstration du théorème, nous voyons qu'il signifie bien l'existence d'une orientation privilégiée sur un espace vectoriel sur le corps des complexes; à partir d'une $\mathbb{C}$-base on peut former une $\mathbb{R}$-base, et, la classe de toutes les $\mathbb{R}$-bases ainsi formées étant toujours la même, on peut la définir comme étant la classe positive. L'orientation ainsi définie s'appelle orientation canonique de l'espace vectoriel sur le corps des complexes. Cela revient naturellement à donner à un espace vectoriel de dimension 1 sur le corps des complexes, l'orientation dans laquelle la base $\vec{e}, i\vec{e}$, est positive, $\vec{e}$ étant un vecteur $\neq \vec{0}$ quelconque de l'espace vectoriel; en particulier, l'orientation du corps des complexes $\mathbb{C}$ lui-même est celle dans laquelle la base formée du nombre 1 et du nombre i est positive.

Démonstration - La $\mathbb{C}$-base considérée définit des fonctions coordonnées complexes, nous les appellerons $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. La $\mathbb{R}$-base associée définit des fonctions coordonnées réelles, que nous appellerons $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots, \xi_n, \eta_n$.
On a d'ailleurs $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $\overline{\zeta_j} = \xi_j - i\eta_j$.

Soit une deuxième base complexe $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$, définissant des coordonnées $\xi'_j, \eta'_j, \zeta'_j$.

Nous voulons alors démontrer que :

(VI,2;3) $$\frac{(\xi'_1)\wedge(\eta'_1)\wedge(\xi'_2)\wedge(\eta'_2)\ldots\wedge(\xi'_n)\wedge(\eta'_n)}{(\xi_1)\wedge(\eta_1)\wedge(\xi_2)\wedge(\eta_2)\ldots\wedge(\xi_n)\wedge(\eta_n)} = \frac{1}{D} > 0 ,$$

D étant le déterminant de la deuxième $\mathbb{R}$-base, associée à la deuxième $\mathbb{C}$-base, par rapport à la première.

Or, on peut l'écrire, d'après (VI,1;56) :

(VI,2;4) $$\frac{(\zeta'_1)\wedge(\zeta'_2)\wedge\ldots\wedge(\zeta'_n)\wedge(\overline{\zeta'_1})\wedge(\overline{\zeta'_2})\ldots\wedge(\overline{\zeta'_n})}{(\zeta_1)\wedge(\zeta_2)\wedge\ldots\wedge(\zeta_n)\wedge(\overline{\zeta_1})\wedge(\overline{\zeta_2})\ldots\wedge(\overline{\zeta_n})} .$$

Mais il se trouve que les formes linéaires ζ_j sont non-seulement $\mathbb{R}$-linéaires, mais $\mathbb{C}$-linéaires; il en résulte alors que les formes produits extérieurs $(\zeta'_1) \wedge (\zeta'_2) \wedge \ldots \wedge (\zeta'_n)$ et $(\zeta_1) \wedge (\zeta_2) \wedge \ldots \wedge (\zeta_n)$ sont proportionnelles, avec un rapport de proportionnalité complexe : le calcul qui a été fait à la formule (VI,2;1) peut encore se refaire, en raisonnant maintenant sur le corps des complexes comme nous avions raisonné sur le corps des réels, et l'on voit que :

(VI,2;5) $$(\zeta'_1) \wedge (\zeta'_2) \wedge \ldots \wedge (\zeta'_n) = \frac{1}{\Delta} (\zeta_1) \wedge (\zeta_2) \wedge \ldots \wedge (\zeta_n),$$

où Δ est le déterminant de la $\mathbb{C}$-base des $\vec{e}'_j$ par rapport à la $\mathbb{C}$-base des $\vec{e}_j$; on a donc finalement la formule

(VI,2;6) $$\frac{1}{D} = \frac{1}{\Delta} \frac{1}{\bar{\Delta}} \quad \text{ou} \quad D = \Delta \bar{\Delta} = |\Delta|^2 > 0 \quad ,$$

qui démontre notre affirmation.

<u>Remarque</u> - La formule $D = |\Delta|^2$ s'étend naturellement aux déterminants jacobiens. Soit f une application d'un espace affine E, de dimension m sur le corps des complexes, dans un espace affine F, de dimension m sur le corps des complexes; et supposons que f soit dérivable, par rapport au corps des complexes. Elle est alors aussi a fortiori dérivable par rapport au corps des réels.

Si, dans E et dans F, on a choisi des référentiels par rapport au corps des complexes, cela donne automatiquement des référentiels par rapport au corps des réels, d'après la méthode que nous avons définie pour associer une $\mathbb{R}$-base à une $\mathbb{C}$-base. Alors on peut considérer, d'une part le déterminant jacobien J_c de f en un point a, par rapport aux référentiels sur le corps des complexes, et d'autre part son déterminant jacobien J_R, par rapport aux référentiels sur le corps des réels. Ces déterminants sont les déterminants des images par $f'(a)$ des bases de $\vec{E}$, par rapport aux bases de $\vec{F}$.

Ce que nous venons donc de démontrer s'écrit ici :

(VI,2;7) $$J_R = |J_c|^2 \geq 0 \ ^*.$$

* Notre calcul antérieur était fait dans le cas $J_c \neq 0$. Mais, si $J_c = 0$, l'application $f'(a)$ applique $\vec{E}$ sur un sous-espace vectoriel de $\vec{F}$, distinct de $\vec{F}$, alors $J_R = 0$.

Propriétés particulières des p-formes antisymétriques sur un espace $\vec{E}$ de dimension N, euclidien, orienté

Soit e une base orthonormale positive de $\vec{E}$.

Elle définit une n-forme $(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N)$. Si e' est une autre base orthonormale positive de $\vec{E}$, la formule (VI,2;1) montre que l'on a :

$$(\xi'_1) \wedge (\xi'_2) \wedge \ldots \wedge (\xi'_n) = (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_n) \, . \tag{VI,2;8}$$

En effet, le déterminant de la deuxième base par rapport à la première vaut nécessairement $\pm$ 1, puisqu'il s'agit de deux bases orthonormales, donc + 1, puisqu'elles appartiennent toutes les deux à la classe positive.

Autrement dit, la N -forme $(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \ldots \wedge (\xi_N)$, associée à une base orthonormale positive de $\vec{E}$, est indépendante de cette base. Cette N -forme, déterminée une fois pour toutes par la seule donnée de la structure euclidienne et de l'orientation de $\vec{E}$, s'appelle la N -forme fondamentale de $\vec{E}$. Nous l'appellerons $\overset{N}{\xi}$. Il est d'ailleurs facile de préciser sa valeur sur un système de N vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$. Cette valeur est en effet, d'après (VI,1;35 bis), le déterminant des N vecteurs par rapport à n'importe quelle base orthonormale positive de $\vec{E}$. Sa valeur absolue n'est autre que le volume du parallélépipède de sommet origine défini par ces N vecteurs (corollaire 5 bis du théorème 102 du chapitre IV); et, si ce volume n'est pas nul, son signe n'est autre que la classe de la base définie par ces N vecteurs, par rapport à l'orientation donnée de $\vec{E}$. On dit souvent que cette valeur est le volume algébrique du parallélépipède défini par $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$, dans $\vec{E}$ orienté (mais un tel volume algébrique ne peut se définir qu'après une définition correcte de la notion d'orientation).

L'existence de la N -forme fondamentale va nous permettre d'établir des correspondances remarquables entre vecteurs et formes :

1°/ On peut établir une bijection linéaire de l'espace des N -formes sur $\vec{E}$ sur le corps des réels $\mathbb{R}$; il suffit de faire correspondre à toute N -forme le rapport de cette forme et de la N -forme fondamentale. On associe ainsi le nombre réel X et le N -covecteur $X \overset{N}{\xi}$.

2°/ A tout système de N vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$, on peut faire correspondre un nombre réel, appelé produit mixte de ces vecteurs; c'est tout simplement la valeur $\overset{N}{\xi}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N)$, sur le système de vecteurs donnés, de la N -forme fondamentale; c'est encore le déterminant du système des vecteurs par rapport à n'importe quelle base orthonormale positive, ou volume algébrique du parallélépipède des N vecteurs. L'application "produit mixte", qui, à $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N$, fait correspondre leur produit mixte, est une N -forme sur $\vec{E}$, qui n'est autre que $\overset{N}{\xi}$.

Plus généralement, étant donné un système de p vecteurs, $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$, de $\vec{E}$, on peut lui faire correspondre une $(N-p)$-forme $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$ définie comme suit :

La valeur de $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$ sur un système de $(N-p)$ vecteurs $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_{N-p}$, est le produit mixte des N vecteurs $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_{N-p}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ * :

$$\text{(VI,2;9)} \qquad \alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p} \cdot (\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_{N-p}) = \overset{N}{\xi} \cdot (\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_{N-p}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p).$$

La fonction $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$ ainsi définie sur $\vec{E}^{N-p}$ est bien une forme $(N-p)$-linéaire antisymétrique, donc $\alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$ est bien un élément de $\Lambda^{N-p} \overleftarrow{E}'$.

En outre, l'application α qui, aux p vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$, fait correspondre la forme associée, c'est-à-dire l'application $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p \longrightarrow \alpha_{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p}$ est une application p -linéaire antisymétrique de $\vec{E}^p$ dans $\Lambda^{N-p} \overleftarrow{E}'$.

* On aurait pu choisir l'ordre $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p, \vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_{N-p}$. Cela reviendrait à multiplier par $(-1)^{p(N-p)}$. Ce choix sera payé plus tard, par la présence de puissances de -1 dans certaines formules; mais l'autre choix donnerait des puissances de -1 dans d'autres formules !

Pour $p = N$, on obtient bien une application N-linéaire de $\vec{E}^N$ dans $\Lambda^0 \overleftarrow{E}'$, qui n'est autre que le corps des scalaires : c'est la correspondance qui, à N vecteurs, fait correspondre leur produit mixte, c'est-à-dire l'application fondamentale $\overset{N}{\xi}$. Si e est une base orthonormale positive de $\vec{E}$, et si l'on prend, pour p vecteurs, les vecteurs $\vec{e}_{N-p+1}, \vec{e}_{N-p+2}, \dots, \vec{e}_N$, de la base elle-même, la forme correspondante est définie, comme on le voit aisément d'après (VI,2;9), par :

$$\text{(VI,2;10)} \qquad \alpha_{\vec{e}_{N-p+1},\dots,\vec{e}_N} = (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \dots \wedge (\xi_{N-p}) .$$

Si J est une partie de $\{1, 2, \dots, N\}$, d'éléments $j_1 < j_2 < \dots < j_p$, et si $K = \complement J$, d'éléments $k_1 < k_2 < \dots < k_{N-p}$, alors :

$$\text{(VI,2;11)} \qquad \alpha_{\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \dots, \vec{e}_{j_p}} = \pm \left(\overset{N-p}{\xi_K}\right) = \pm (\xi_{k_1}) \wedge (\xi_{k_2}) \wedge \dots \wedge (\xi_{k_{N-p}}),$$

où $\pm$ est la signature de la permutation qui transforme $1, 2, \dots, N$, en $k_1, k_2, \dots, k_{N-p}, j_1, j_2, \dots, j_p$.

En particulier, pour $p = 1$, on a la formule :

$$\text{(VI,2;11bis)} \qquad \alpha_{\vec{e}_j} = (-1)^{N-j} (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \dots \wedge (\xi_{j-1}) \wedge (\xi_{j+1}) \wedge \dots (\xi_N) .$$

Si alors $\vec{X}$ est un vecteur de coordonnées X_j, on a :

$$\text{(VI,2;11ter)} \qquad \alpha_{\vec{X}} = \sum_{j=1}^{N} \left((-1)^{N-j} X_j (\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \dots \wedge (\xi_{j-1}) \wedge (\xi_{j+1}) \wedge \dots \wedge (\xi_N)\right)$$

<u>Cette formule montre que l'application α est, pour $p = 1$, une bijection linéaire de $\vec{E}$ sur $\Lambda^{N-1}\overleftarrow{E}'$.</u>

<u>Remarque</u> - <u>Les correspondances 1° et 2° ne dépendent pas, en fait, de la structure euclidienne et de l'orientation, mais de la donnée de la forme fondamentale $\overset{N}{\xi}$</u>. Si, sur un espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension N, on s'est donné <u>une forme fondamentale</u> $\overset{N}{\xi} \neq 0$ (c'est-à-dire une mesure des

volumes et une orientation sans structure euclidienne) 1° et 2° subsistent. Si on multiplie le N-covecteur fondamental par un nombre réel k, on multiplie l'opérateur α par k. Si on a choisi dans $\vec{E}$ un référentiel quelconque, et si on pose $\overset{N}{\xi}\cdot(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N) = \Delta$, ou $\overset{N}{\xi} = \Delta(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \cdots \wedge (\xi_N)$, les formules (VI,2;11;11 bis, 11 ter) restent exactes, à condition de multiplier le 2ème membre par Δ.

3°/ On sait qu'il est possible, dans un espace vectoriel euclidien orienté à trois dimensions, de faire correspondre, à tout système de deux vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$, un troisième vecteur, appelé produit vectoriel des deux premiers. Cette propriété se généralise comme suit :

Si $\vec{E}$ est un espace euclidien orienté de dimension N, on peut faire correspondre à tout système de $N-1$ vecteurs, $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}$, un nouveau vecteur $\vec{Z}$, appelé produit vectori des $N-1$ vecteurs, et que l'on pourra noter par $\vec{Z} = \left[\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{X}_{N-1}\right]$*.

Il se définit de la manière suivante : Au système des $N-1$ vecteurs correspond, d'après la correspondance indiquée à 2°, une 1-forme, c'est-à-dire une forme linéaire sur $\vec{E}$; et nous avons vu au chapitre II (formule (III,1;19)) qu'on peut alors faire correspondre à toute forme linéaire sur $\vec{E}$ ou élément du dual $\overleftarrow{E}'$, un élément bien déterminé $\vec{Z}$ de $\vec{E}$. C'est cet élément $\vec{Z}$ qu'on appelle le produit vectoriel des $N-1$ vecteurs. L'application qui, à $N-1$ vecteurs, fait correspondre leur produit vectoriel, est $(N-1)$-linéaire antisymétrique de $\vec{E}^{N-1}$ dans $\vec{E}$.

La forme $\alpha_{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{N-1}}$ est ici définie de la manière suivante : Si $\vec{Y}$ est un vecteur quelconque de $\vec{E}$, on a :

(VI,2;12) $$\alpha_{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{N-1}}(\vec{Y}) = \overset{N}{\xi}(\vec{Y}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}) .$$

Or le vecteur $\vec{Z}$ est défini par le fait que, si $\vec{Y}$ est un vecteur quelconque de $\vec{E}$, on a la formule (III,1;19) :

(VI,2;13) $$\alpha_{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}} \cdot (\vec{Y}) = (\vec{Z} | \vec{Y}) .$$

Cette formule signifie que la produit mixte de $\vec{Y}, \vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_{N-1}$ coïncide avec le produit scalaire de $\vec{Y}$ avec le produit vectoriel $\vec{Z} = \left[\vec{X}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{X}_{N-1}\right]$. En modifiant les notations, et compte tenu des règles d'anticommutation, on a :

* Cette notation est assez peu correcte. On ne doit, en principe, utiliser le produit extérieur $\wedge$ que pour des produits ne dépondant pas d'une structure euclidienne et d'une orientation.

$$\overset{N}{\xi}(\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots\vec{X}_N)=(\vec{X}_1\,|\,[\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_N])=(-1)^{N-1}\overset{N}{\xi}(\vec{X}_N,\vec{X}_1,\ldots,\vec{X}_{N-1})=(-1)^{N-1}([\vec{X}_1,\ldots,\vec{X}_{N-1}]\,|\,\vec{X}_N).$$

Donnons une construction géométrique de ce produit vectoriel. Tout d'abord, si les N -1 vecteurs considérés sont dépendants, la forme $\alpha_{\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_{N-1}}$ s'annule, car le deuxième membre de (VI,2;12) est nul quel que soit $\vec{Y}$; donc, dans ce cas, $\vec{Z}$ s'annule aussi. Et réciproquement, si $\vec{Z}$ est nul, c'est que $\alpha_{\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_{N-1}}$ est nulle * , et alors les vecteurs $\vec{X}_j$ sont nécessairement dépendants; si, en effet, ils étaient indépendants, on pourrait trouver une base de $\vec{E}$ formée des vecteurs $\vec{X}_j$ et d'un vecteur $\vec{Y}$; alors le second membre de la formule (VI,2;12) serait $\neq 0$, ce qui serait contradictoire avec le fait que $\alpha_{\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_{N-1}}$ est nulle. Ainsi le produit vectoriel de N -1 vecteurs est nul, si et seulement si ces vecteurs sont dépendants.

Supposons donc les vecteurs $\vec{X}_j$ indépendants.

Si $\vec{Y}$ est dans le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent, alors $\alpha_{\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_{N-1}}(\vec{Y})$ est nécessairement nulle, d'après (VI,2;12), donc aussi $(\vec{Z}\,|\,\vec{Y})$; donc $\vec{Z}$ est orthogonal au sous-espace vectoriel défini par les $\vec{X}_j$.

Choisissons alors le vecteur $\vec{\nu}$ orthogonal au sous-espace vectoriel défini par les $\vec{X}_j$, de longueur 1, et de telle manière que la base $\vec{\nu}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}$, soit positive par rapport à l'orientation de $\vec{E}$. Le déterminant de cette base (par rapport aux bases orthonormales positives), qui est donc > 0 , est alors le volume du parallélépipède défini par $\vec{\nu}$ et les $\vec{X}_j$ (corollaire 5 bis du théorème 102 du chapitre IV); c'est donc aussi le produit de l'aire de la base par la longueur de la hauteur (théorème 104 du chapitre IV). Comme, par hypothèse, $\vec{\nu}$ est unitaire, ce déterminant n'est autre que l'aire de la base. Or ce déterminant vaut $(\vec{Z}\,|\,\vec{\nu})$, ce qui montre que $\vec{Z}$ est égal au produit de $\vec{\nu}$ par un nombre > 0 , égal à la $(N-1)$ -aire du parallélépipède défini par les vecteurs $\vec{X}_j$.

Si nous considérons dans $\vec{E}$ une base orthonormale positive quelconque, il est facile de trouver les composantes du produit vectoriel de N -1 vecteurs. Si on désigne par Z_j ces composantes, et par Y_j les composantes d'un vecteur quelconque $\vec{Y}$, si d'autre part, comme toujours, on appelle $X_{i,j}$ les coordonnées de $\vec{X}_i$, on a la formule :

(VI,2;14) $$\sum_{j=1}^{N} Z_j\, Y_j = (\vec{Z}\,|\,\vec{Y}) = \alpha_{\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_{N-1}}(\vec{Y}) = \overset{N}{\xi}(\vec{Y},\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_{N-1});$$

* Nous avons vu, page 179 du Cours de 2ème Division, que la correspondance entre $\alpha_{\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_{N-1}}$ et $\vec{Z}$ est bijective.

ce qui montre que Z_j est le coefficient de Y_j dans le développement du déterminant

$$(\text{VI},2;15) \qquad \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_N \\ X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,N} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \dots & X_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{N-1,1} & X_{N-1,2} & \dots & X_{N-1,N} \end{vmatrix}$$

suivant les éléments de la première ligne. On a donc la formule :

$$(\text{VI},2;16) \qquad Z_j = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,j-1} & X_{1,j+1} & \dots & X_{1,N} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \dots & X_{2,j-1} & X_{2,j+1} & \dots & X_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{N-1,1} & X_{N-1,2} & \dots & X_{N-1,j-1} & X_{N-1,j+1} & \dots & X_{N-1,N} \end{vmatrix}$$

<u>Tous les résultats de 3° dépendent à la fois de la structure euclidienne et de l'orientation de $\vec{E}$.</u>

On peut résumer ce qui précède comme suit :

<u>Théorème 11</u> - <u>Si $\vec{E}$ est un espace euclidien orienté de dimension N , il existe dans $\vec{E}$ une N -forme fondamentale $\overset{N}{\xi}$, qui s'exprime par $(\xi_1) \wedge (\xi_2) \wedge \dots \wedge (\xi_N)$, où les (ξ_i) sont les formes coordonnées par rapport à n'importe quelle base orthonormale positive. Il existe une bijection linéaire de l'espace $\Lambda^n \vec{E}'$ des N -formes, sur le corps des scalaires, qui fait correspondre à toute N -forme son rapport avec $\overset{N}{\xi}$. Il existe une application p -linéaire antisymétrique de $\vec{E}^p$ dans $\Lambda^{N-p} \vec{E}'$, définie par (VI,2;9), (VI,2;10), (VI,2;11). Si $\vec{X}_1 , \vec{X}_2 , \dots , \vec{X}_N$ sont N vecteurs de $\vec{E}$, leur produit mixte est un nombre réel,</u>

égal à $\overset{N}{\xi}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_N)$, ou encore au déterminant des vecteurs par rapport à toute base orthonormale positive; l'application produit mixte est une forme linéaire antisymetrique sur $\vec{E}^N$, qui n'est autre que $\overset{N}{\xi}$. Le produit vectoriel de $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}$ est un vecteur $\vec{Z} = [\vec{X}_1 \wedge \vec{X}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{X}_{N-1}]$, nul si et seulement si ces vecteurs sont dépendants; s'ils sont indépendants, $\vec{Z}$ est orthogonal au sous-espace vectoriel qu'ils définissent, dans un sens tel que $\vec{Z}, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_{N-1}$ soit une base positive, et sa longueur est l'aire du parallélépipède défini par les N-1 vecteurs. L'application produit vectoriel est une application (N-1)-linéaire antisymétrique de $\vec{E}^{N-1}$ dans $\vec{E}$. Les composantes du produit vectoriel, par rapport à une base orthonormale positive, sont données par (VI,2;16).

Remarques 1°) Si, par exemple, $\vec{E}$ est un espace vectoriel de dimension 2 euclidien orienté, on peut faire le produit vectoriel $[\vec{X}]$ d'un seul vecteur $\vec{X}$ $(N-1=1)$; d'après la définition, c'est simplement un vecteur $\vec{Z}$ obtenu par rotation de $\vec{X}$ de $-\frac{\pi}{2}$ * .

2°) Ce qui a été défini dans ce paragraphe dépend, en général, non seulement de la structure euclidienne de $\vec{E}$, mais aussi de son orientation. Si on remplace l'orientation de $\vec{E}$ par son opposée, on change de signe la N-forme fondamentale, le produit mixte de N vecteurs, la $(N-p)$-forme associée à p vecteurs, le produit vectoriel de $N-1$ vecteurs. Au contraire, l'association entre vecteurs et formes (bijection linéaire de $\vec{E}$ sur $\vec{E}'$, vue page 179 du Cours de 2ème Division) ne dépend que de la structure euclidienne, et non de l'orientation; de même, plus simplement, le produit scalaire de 2 vecteurs ! On dit souvent que le produit scalaire de 2 vecteurs est une grandeur polaire, ou droite, ou d'espèce paire, tandis que le produit mixte de N vecteurs est une grandeur axiale , ou tordue (sic !), ou d'espèce impaire.

* Attention : la notion d'angle orienté repose sur l'orientation ! Si 2 vecteurs $\vec{U}$ $\vec{V}$, d'un plan euclidien orienté sont orthogonaux, on dit que l'angle $(\vec{U},\vec{V})$ est $+\frac{\pi}{2}$, si la base $\vec{U}, \vec{V}$, est positive.

§ 3 FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR UN ESPACE AFFINE

Soit Ω un ouvert d'un espace affine normé E, et soit $\vec{F}$ un espace vectoriel normé. On appelle forme différentielle de degré p sur Ω, à valeurs dans $\vec{F}$, une application $\vec{\omega}$ * de Ω dans l'espace $\mathcal{A}\mathcal{L}_p(\vec{E}^p;\vec{F})$ des applications p-linéaires antisymétriques continues de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$. Cette application fait donc correspondre, à tout point x de Ω, un élément $\vec{\omega}(x)$ de $\mathcal{A}\mathcal{L}^p(\vec{E}^p;\vec{F})$, c'est-à-dire un p-covecteur sur $\vec{E}$, à valeurs dans $\vec{F}$; on peut donc encore aussi dire qu'une forme différentielle de degré p est un champ de p-covecteurs sur $\vec{E}$ à valeurs dans $\vec{F}$, champ défini sur Ω. Pour $p = 0$, c'est donc un champ de vecteurs de $\vec{F}$, c'est-à-dire simplement une fonction sur Ω, à valeurs dans $\vec{F}$; si $\vec{F} = \mathbb{K}$, c'est un champ de scalaires ou une fonction scalaire. Pour $p = 1$, c'est un champ d'applications linéaires continues de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$, c'est-à-dire une application de Ω dans $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$. Si x est un point de Ω, et si $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ sont des vecteurs de $\vec{E}$, on notera par $\vec{\omega}(x)\cdot(\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_p)\in\vec{F}$ la valeur de $\vec{\omega}(x)\in\mathcal{A}\mathcal{L}_p(\vec{E}^p;\vec{F})$ sur $(\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_p)\in\vec{E}^p$. Si E est de dimension N, et si $p > N$, une forme différentielle de degré p est nécessairement identiquement nulle.

On abrège souvent "forme différentielle de degré p" par forme de degré p ou p-forme, de sorte que cela introduit une confusion entre les p-formes, définies au paragraphe 1, et les formes différentielles, qui sont des champs de telles p-formes ou applications de Ω dans un espace de p-formes. Pour éviter toute confusion, il sera en général préférable d'utiliser la dénomination de p-covecteurs pour les p-formes rencontrées au paragraphe 1, et de p-formes différentielles pour celles qui sont rencontrées au présent paragraphe.

* On met une flèche sur $\vec{\omega}$, parce que c'est une forme à valeurs dans $\vec{F}$; on n'en mettra pas si $\vec{F}$ est le corps des scalaires. Dans ce cas particulier ω est une fonction sur Ω à valeurs dans $\Lambda^p \vec{E}'$, ou un champ de p-covecteurs, défini dans Ω.

On dit qu'une p-forme différentielle est m fois dérivable (resp de classe C^m ($m \geq 0$)), si $\vec{\omega}$ est une fonction m fois dérivable (resp de classe C^m) sur Ω, à valeurs dans l'espace vectoriel normé $A\mathcal{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$.

<u>Théorème 12</u> - <u>Si E est de dimension finie N et muni d'un référentiel, et si l'on désigne par (ξ_i) la forme linéaire "i-ème coordonnée", alors toute p-forme différentielle s'exprime d'une manière unique par une formule</u>

$$(\mathrm{VI},3;1) \qquad \overset{p}{\vec{\omega}} = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq N} \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} (\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \ldots \wedge (\xi_{j_p}), \quad \text{ou}$$

$$\vec{\omega}(x) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq N} \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}(x) (\xi_{j_1}) \wedge (\xi_{j_2}) \ldots \wedge (\xi_{j_p}), \quad \text{ou}$$

$$\vec{\omega} = \sum_{J \in \mathfrak{P}_p(\{1,2,\ldots,N\})} \vec{\omega}_J (\xi_J) \quad ,$$

<u>dans laquelle les $\vec{\omega}_J$ sont des fonctions sur Ω à valeurs dans $\vec{F}$. Cette p-forme différentielle est m fois dérivable (resp de classe C^m), si et seulement si les fonctions $\vec{\omega}_J$, définies sur Ω à valeurs dans $\vec{F}$, sont m fois dérivables (resp de classe C^m).</u>

<u>Démonstration</u> - Il suffit d'écrire, pour tout point x, que $\vec{\omega}(x)$ est un p-covecteur à valeurs dans $\vec{F}$, et d'appliquer alors les formules (VI,1;23) et (VI,1;36). Ces formules, et la remarque qui suit le théorème 5, montraient précisément que l'espace vectoriel $A\mathcal{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$ peut être identifié au produit de $\binom{N}{p}$ espaces vectoriels normés identiques à $\vec{F}$; or on sait, d'après le théorème 8 quarto du chapitre III, qu'une fonction à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés est de classe C^m, si et seulement si chacune de ses composantes est de classe C^m ; cela signifie exactement que l'application $\vec{\omega}$ de Ω dans $A\mathcal{L}^p(\vec{E}^p; \vec{F})$ est de classe C^m, si et seulement si chacune des fonctions $\vec{\omega}_J$, définies sur Ω à valeurs dans $\vec{F}$, est de classe C^m. En outre, toujours

d'après le même théorème du chapitre III, toute dérivée de $\vec{\omega}$ a pour composantes les dérivées correspondantes des $\vec{\omega}_J$; autrement dit, si $D^{\vec{p}}$ est un symbole de dérivation d'indice $\vec{p}$ (formule (III,6;26)), alors on a la formule de dérivation

(VI,3;2)
$$D^{\vec{p}}\vec{\omega} = \sum_J D^{\vec{p}}\vec{\omega}_J(\xi_J) .$$

En particulier, on a, pour les dérivations partielles $\frac{\partial}{\partial x_k}$ par rapport aux coordonnées, la formule :

(VI,3;3)
$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial x_k} = \sum_J \frac{\partial\vec{\omega}_J}{\partial x_k}(\xi_J)$$

Au lieu de (ξ_i) et (ξ_J) on note, pour des raisons qui seront vues plus tard, dx_i et dx_J. Cette notation sera employée systématiquement. Cependant il faut bien voir qu'elle prête à une légère confusion. Jusqu'à présent, dx_i désignait la i-ème coordonnée d'un vecteur $\vec{dx}$ de l'espace vectoriel $\vec{E}$, alors que maintenant dx_i désigne la forme linéaire sur $\vec{E}$ qui, à chaque vecteur de $\vec{E}$, fait correspondre sa i-ième coordonnée; de sorte que l'on a la formule

(VI,3;4)
$$dx_i(\vec{X}) = X_i$$

Elle peut aussi, si l'on veut, désigner la forme différentielle de degré 1 sur E , dont la valeur, en tout point x, est la forme linéaire sur $\vec{E}$, faisant correspondre à tout vecteur de $\vec{E}$ sa i-ième coordonnée, de sorte que l'on a la formule :

(VI,3;5)
$$dx_i(x)\cdot\vec{X} = X_i$$

La confusion entre le premier sens de dx_i et les deux derniers, mènerait, dans tout le chapitre des formes différentielles, aux plus graves erreurs; la confusion entre le deuxième et le troisième n'est pas très grave, pas plus que ne l'est la confusion entre 1, désignant le nombre 1, et 1, désignant une fonction constante égale à 1.

Alors l'expression la plus générale d'une p-forme différentielle $\vec{\omega}$ sur $\Omega \subset E$, à valeurs dans $\vec{F}$, est la suivante :

(VI,3;6) $$\begin{cases} \overset{p}{\vec{\omega}} = \sum\limits_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq N} \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p} \, dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p} \,, \\ \overset{p}{\vec{\omega}}(x) = \sum\limits_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq N} \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}(x) \, dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p} \,, \end{cases}$$

que l'on écrit aussi :

(VI,3;7) $$\begin{cases} \overset{p}{\vec{\omega}} = \sum\limits_{J \in \mathcal{P}_p\{1,2,\ldots,N\}} \vec{\omega}_J \, dx_J \\ \overset{p}{\vec{\omega}}(x) = \sum\limits_{J} \vec{\omega}_J(x) \, dx_J \,. \end{cases}$$

Exemples de formes différentielles

1°/ Sur la droite réelle $\mathbb{R}$, une forme différentielle de degré 0 est une fonction sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\vec{F}$. Une forme différentielle de degré 1 s'écrit $\vec{A}\, dx$, où $\vec{A}$ est une fonction sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\vec{F}$, et l'on a, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}$, la formule :

(VI,3;8) $$\vec{A}(x)\, dx \,.\, X = X \vec{A}(x)^{*} \,.$$

2°/ Sur l'espace à deux dimensions $\mathbb{R}^2$, une forme différentielle de degré 0 est une fonction; une forme différentielle de degré 1 s'écrit :

(VI,3;8 bis) $$\vec{A}(x,y)\, dx + \vec{B}(x,y)\, dy \,, \quad \vec{A}(x,y) \in \vec{F} \,, \quad \vec{B}(x,y) \in \vec{F} \,.$$

Sa valeur au point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, sur le vecteur (X,Y) de $\mathbb{R}^2$, est donnée par :

(VI,3;9) $$\left(\vec{A}(x,y)\, dx + \vec{B}(x,y)\, dy\right) . (X,Y) = \vec{A}(x,y) X + \vec{B}(x,y) Y \,.$$

* Produit de $\vec{A}(x) \in \vec{F}$ par le scalaire réel X . Si $\vec{F} = \mathbb{R}$, corps des scalaires, c'est simplement $X A(x) \in \mathbb{R}$

Une forme différentielle de degré 2 s'écrit :

(VI,3;10) $$\vec{A}(x,y)\,dx \wedge dy \quad , \quad \vec{A}(x,y) \in \vec{F} \, ,$$

et sa valeur au point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, sur le couple de deux vecteurs (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) de $\mathbb{R}^2$, est donnée par la formule :

(VI,3;11) $$\vec{A}(x,y)\,dx \wedge dy \,.\, \big((X_1, Y_1),(X_2, Y_2)\big) = \vec{A}(x,y)(X_1Y_2 - X_2Y_1) \, .$$

On a naturellement la relation d'anticommutation

(VI,3;12) $$dx \wedge dy = - \, dy \wedge dx \, .$$

3°/ Sur l'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$, une forme différentielle de degré 0 est une fonction. Une forme différentielle de degré 1 s'écrit :

(VI,3;13) $$\vec{A}(x,y,z)\,dx + \vec{B}(x,y,z)\,dy + \vec{C}(x,y,z)\,dz \, .$$

Sa valeur au point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, sur le vecteur (X,Y,Z) de $\mathbb{R}^3$, est donnée par :

(VI,3;14) $$\big(\vec{A}(x,y,z)\,dx + \vec{B}(x,y,z)\,dy + \vec{C}(x,y,z)\,dz\big).(X,Y,Z) =$$

$$\vec{A}(x,y,z)\,X + \vec{B}(x,y,z)\,Y + \vec{C}(x,y,z)\,Z \, .$$

Une forme différentielle de degré 2 s'écrira généralement sous la forme suivante, utilisant les permutations circulaires :

(VI,3;15) $$\vec{A}(x,y,z)\,dy \wedge dz + \vec{B}(x,y,z)\,dz \wedge dx + \vec{C}(x,y,z)\,dx \wedge dy \, ^{*}$$

* La formule (VI,3:6) conduirait à utiliser $dx \wedge dy$, $dx \wedge dz$ et $dy \wedge dz$. On préfère ici utiliser plutôt $dz \wedge dx$ au lieu de $dx \wedge dz$, pour des raisons de symétrie circulaire.

Sa valeur au point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, sur le système de deux vecteurs (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) de $\mathbb{R}^3$, est donnée par la formule :

$$\text{(VI,3;16)} \quad \left\{ \begin{aligned} &[\vec{A}(x,y,z)\,dy \wedge dz + \vec{B}(x,y,z)\,dz \wedge dx + \vec{C}(x,y,z)\,dx \wedge dy].\big((X_1,Y_1,Z_1),(X_2,Y_2,Z_2)\big) \\ &= \vec{A}(x,y,z)(Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) + \vec{B}(x,y,z)(Z_1 X_2 - Z_2 X_1) \\ &+ \vec{C}(x,y,z)(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)\,. \end{aligned} \right.$$

On a naturellement les règles d'anticommutation

$$\text{(VI,3;17)} \qquad dx \wedge dy = -dy \wedge dx\,,\ dy \wedge dz = -dz \wedge dy\,,\ dz \wedge dx = -dx \wedge dz\,.$$

Enfin une forme différentielle de degré 3 est donnée par la formule :

$$\text{(VI,3;18)} \qquad \vec{A}(x,y,z)\,dx \wedge dy \wedge dz\,,\quad \vec{A}(x,y,z) \in \vec{F}\,.$$

Sa valeur au point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, sur un système de trois vecteurs :

(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) de $\mathbb{R}^3$,

est donnée par la formule :

$$\text{(VI,3;19)} \qquad \vec{A}(x,y,z)\,dx \wedge dy \wedge dz.\big((X_1,Y_1,Z_1),(X_2,Y_2,Z_2),(X_3,Y_3,Z_3)\big)$$

$$= \vec{A}(x,y,z) \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

Produit extérieur de formes différentielles

Les formes différentielles de degré p sur un ouvert Ω de E, à valeurs dans $\vec{F}$, forment elles-mêmes un espace vectoriel. C'est d'ailleurs dans le sens de l'addition dans cet espace vectoriel qu'est écrit le signe $\sum$ dans une formule telle que (VI,3;6)

Si $\vec{\omega}$ et $\vec{\varpi}$ sont deux formes différentielles de degré p sur Ω, et si E est muni d'un référentiel par rapport auquel ces formes s'expriment par $\sum\limits_J \vec{\omega}_J\, dx_J$, $\sum\limits_J \vec{\varpi}_J\, dx_J$, on a les formules évidentes :

$$\vec{\omega} + \vec{\varpi} = \sum_J (\vec{\omega}_J + \vec{\varpi}_J)\, dx_J,\quad k\vec{\omega} = \sum (k\vec{\omega}_J)\, dx_J,\ k \text{ scalaire.} \tag{VI,3;20}$$

Mais, en outre, il existe une opération de multiplication extérieure des formes différentielles. Nous allons nous borner, pour cette multiplication, aux cas qui ont déjà été étudiés au paragraphe 1; ou bien il s'agit de formes différentielles scalaires ($\vec{F}$ est le corps des scalaires $\mathbb{K}$); ou bien, le corps des scalaires étant $\mathbb{R}$, $\vec{F}$ est le corps des complexes $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel à deux dimensions sur $\mathbb{R}$; ou bien on effectue un produit extérieur de formes différentielles dont une est à valeurs vectorielles, toutes les autres étant à valeurs scalaires.

Nous écrirons les quelques formules suivantes en supposant, pour simplifier, les formes différentielles toutes scalaires.

Soient donc $\overset{p}{u}$ et $\overset{q}{v}$ des formes différentielles scalaires de degrés respectifs p et q sur Ω. On définit alors leur produit extérieur $\overset{p}{u} \wedge \overset{q}{v}$ comme suit :

On dit que sa valeur au point x est le $(p+q)$-covecteur égal au produit extérieur du p-covecteur $\overset{p}{u}(x)$ et du q-covecteur $\overset{q}{v}(x)$:

$$(u \wedge v)(x) = u(x) \wedge v(x). \tag{VI,3;21}$$

On voit que, dans ce sens là, ce que nous avons écrit $dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}$ est bien un produit extérieur, si on considère les dx_i comme des formes différentielles de degré 1 suivant le formule (VI,3;5).

On voit même que, dans la formule (VI,3;6), une expression telle que $\vec{\omega}_{j_1,j_2,\dots,j_p}\, dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$ peut bien s'interprêter comme un proauit extérieur de $p+1$ formes : $\vec{\omega}_{j_1,j_2,\dots,j_p}$, forme différentielle vectorielle de degré 0 , et $dx_{j_1}, dx_{j_2}, \dots, dx_{j_p}$, formes différentielles scalaires de degré 1. Ainsi les différents symboles de somme et de produit employés dans la formule (VI,3;6) sont maintenant entièrement justifiés, alors que jusqu'à présent ils n'avaient qu'une signification purement formelle. Par contre le symbole d ne sera vraiment justifié que plus tard (§ 4). Naturellement la multiplication extérieure des formes différentielles est une opération multilinéaire associative, et satisfaisant à la règle d'anticommutativité (théorèmes 7 et 8 et formule (VI,1;41)).

<u>Exemples</u> - Dans l'espace vectoriel à trois dimensions $\mathbb{R}^3$, on a les formules suivantes :

(VI,3;22)
$$(A\,dx + B\,dy + C\,dz) \wedge (A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz)$$
$$= (BC' - CB')\,dy \wedge dz + (CA' - AC')\,dz \wedge dx + (AB' - BA')\,dx \wedge dy;$$
$$(A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy) \wedge (A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz)$$
$$= (AA' + BB' + CC')\,dx \wedge dy \wedge dz \;;$$
$$(A\,dx + B\,dy + C\,dz) \wedge (A'\,dx + B'\,dy + C'\,dz) \wedge (A''\,dx + B''\,dy + C''\,dz)$$
$$= \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} dx \wedge dy \wedge dz .$$

Forme différentielle associée à la dérivée d'une fonction

Soit $\vec{f}$ une fonction dérivable sur $\Omega \subset E$, à valeurs dans $\vec{F}$. Alors ce que nous avons appelé sa dérivée au point a, $\vec{f}'(a)$, est un élément de $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$, c'est donc aussi ce que nous avons appelé, au paragraphe 1, une forme linéaire sur $\vec{E}$ à valeurs dans $\vec{F}$; et par suite la fonction dérivée $\vec{f}'$ définit une forme différentielle de degré 1 sur Ω, à valeurs dans $\vec{F}$, ou application de Ω dans $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$ (c'est bien ainsi que nous avons toujours considéré la fonction dérivée de $\vec{f}$!) *. Cette forme différentielle $\overset{1}{\vec{\omega}}$ est donc définie par la formule :

$$\overset{1}{\vec{\omega}}(x).\vec{X} = \vec{f}'(x).\vec{X}\,. \tag{VI,3;23}$$

Il est commode de noter par $\overrightarrow{df}$ cette forme différentielle. Si $\vec{E}$ est de dimension finie N, et s'il est muni d'un référentiel et de fonctions coordonnées, la différentielle $\overrightarrow{df}$ admet, suivant (VI,3;6), l'expression :

$$\left\{\begin{aligned} \overrightarrow{df} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_i}\, dx_i \\ \overrightarrow{df}(x) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_i}(x)\, dx_i \\ \overrightarrow{df}(x).\vec{X} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial x_i}(x)\, X_i\,. \end{aligned}\right. \tag{VI,3;24}$$

On retrouve donc la notation de la formule (III,3;18) du Calcul Différentiel; c'est ce qui explique la notation présente $\overrightarrow{df}$.

Avec cette notation l'expression dx_i apparait comme entièrement justifiée. Si l'on appelle x_i la fonction définie sur E, qui fait correspondre à chaque point de E sa i-ème coordonnée, alors la forme différentielle de degré 1 associée à sa fonction dérivée n'est autre que la forme différentielle dx_i, satisfaisant à la formule (VI,3;5). Nous étendrons cela au § 4. Naturellement cela nous suggère, au lieu d'écrire toujours une forme différentielle par une formule du type (VI,3;6), de pouvoir éventuellement utiliser des formules du type :

* Par contre, la dérivée d'ordre $p \geq 2$ de $\vec{f}$ est une application de Ω dans l'espace des applications p-linéaires <u>symétriques</u> de $\vec{E}^p$ dans $\vec{F}$, elle ne définit donc pas une forme différentielle.

$$(\text{VI},3;25)\qquad \overset{p}{\vec{\omega}} = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_p\leqslant N} \vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}\, df_{j_1}\wedge df_{j_2}\wedge\ldots\wedge df_{j_p}\,,$$

où $f_1, f_2, \ldots, f_N$, sont des fonctions scalaires dérivables sur Ω, dont les dérivées en chaque point soient des formes linéaires indépendantes sur E.

<u>Théorème 13</u> - <u>Si</u> $f_1, f_2, \ldots, f_p$, <u>sont des fonctions scalaires dérivables sur</u> Ω, <u>alors la forme différentielle</u> $df_1\wedge df_2\wedge\ldots\wedge df_p$ <u>peut, par rapport à un référentiel de</u> E, <u>s exprimer sous la forme</u>

$$(\text{VI},3;26)\qquad df_1\wedge df_2\wedge\ldots\wedge df_p = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_p} \frac{D(f_1,f_2,\ldots,f_p)}{D(x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_p})}\, dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\ldots\wedge dx_{j_p}$$

<u>Démonstration</u> - Il suffit en effet d'appliquer la formule (VI,1;23), en remplaçant $\Delta_{j_1,j_2,\ldots,j_p}$ par $dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\ldots\wedge dx_{j_p}$ (formule (VI,1;35 bis)); on a ici, d'après (VI,1;24) :

$$(\text{VI},3;27)\qquad a_{j_1,j_2,\ldots,j_p} = (df_1(x)\wedge df_2(x)\ldots\wedge df_p(x)).(\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_p})$$

$$= \underset{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant k\leqslant p}}{\text{dét}}\,(df_i(x).\vec{e}_{j_k})^{*} = \underset{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant k\leqslant p}}{\text{dét}}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{j_k}}(x)\right)$$

d'où le résultat.

On peut d'ailleurs le réobtenir directement : on remplace df_i par $\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_l}dx_l$, et on effectue le produit en appliquant les règles d'anticommutativité !

* D'après la définition même de la multiplication extérieure des formes, formule (VI,1;29).

<u>Exemples</u> - Expression d'une forme différentielle dans $\mathbb{R}^3$ en coordonnées polaires r, θ, φ.

Nous nous plaçons naturellement sur l'ouvert Ω complémentaire du demi-plan $y = 0, x \geqslant 0$. Nous prendrons $r > 0$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$. On peut considérer r, θ, φ, comme des <u>fonctions</u> de classe C^∞ sur Ω, et l'on sait comment on peut exprimer leurs différentielles dr, $d\theta$, $d\varphi$, en fonction de dx, dy, dz et vice versa. On a les formules :

$$(\text{VI},3;28)\qquad \begin{cases} dx = dr \sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi \\ dy = dr\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi \\ dz = dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta \end{cases}$$

On a alors, par exemple, la formule :

$$(\text{VI},3;29)\qquad dx \wedge dy \wedge dz = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = r^2 \sin\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi.$$

Dans cette formule, $dx \wedge dy \wedge dz$ est la 3-forme différentielle fondamentale.

Dans le troisième membre on a une expression dans laquelle r, θ, φ sont considérées comme des fonctions de x, y, z, et dans laquelle $dr, d\theta, d\varphi$, sont les formes différentielles de degré 1 définies par les dérivées des fonctions r, θ, φ de (x, y, z). Naturellement il importe de bien respecter l'ordre des termes écrits; ainsi $dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$ vaut $- d\theta \wedge dr \wedge d\varphi$. On remarquera combien facilement s'effectuent les calculs sur les formes différentielles, ils sont automatiques en utilisant la multilinéarité, l'associavité et l'anticommutativité de la multiplication extérieure.

Image réciproque d'une forme différentielle par une application

Soient Ω un ouvert de E, Ω_0 un ouvert d'un espace affine normé E_0, et H une application dérivable de Ω_0 dans Ω. On a alors vu qu on peut, pour toute fonction f définie sur Ω à valeurs dans un ensemble quelconque, en définir une image réciproque par H , soit $H^* f = f \circ H$, qui est une fonction sur Ω_0 à valeurs dans cet ensemble * . Mais, plus généralement, nous allons définir, pour toute forme différentielle $\vec{\omega}$ de degré p sur Ω à valeurs dans $\vec{F}$, une image réciproque $H^* \vec{\omega}$, forme différentielle de degré p sur Ω_0 à valeurs dans $\vec{F}$. Cette forme sera entièrement définie par sa valeur en un point x de Ω_0, sur un système de vecteurs $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$, de $\vec{E}_0$. Cette valeur sera, par définition, celle de $\vec{\omega}$ au point image $H(x)$, sur le système des images des $\vec{X}_i$ par l'application dérivée $H'(x)$:

$$(H^*\vec{\omega})(x).(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) = \vec{\omega}(H(x)).(H'(x).\vec{X}_1, H'(x).\vec{X}_2, \ldots, H'(x).\vec{X}_p). \tag{VI,3;30}$$

Vérifions qu'on définit bien ainsi $H^* \vec{\omega}$ comme une forme différentielle de degré p sur Ω_0 à valeurs dans $\vec{F}$.

Fixons x . Si $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ sont des vecteurs de $\vec{E}_0$, le second membre a bien un sens, on définit donc bien $(H^* \vec{\omega})(x)$ comme une fonction sur $\vec{E}_0^{\,p}$. Cette fonction est manifestement p-linéaire antisymétrique, parce que $\vec{\omega}(H(x))$ est une fonction p-linéaire antisymétrique sur $\vec{E}^{\,p}$, et que l'application $H'(x)$ est une application linéaire de $\vec{E}_0$ dans $\vec{E}$.

On a donc bien défini $(H^* \vec{\omega})(x)$ comme un p-covecteur sur Ω_0 à valeurs dans $\vec{F}$, et par conséquent on a défini $H^* \vec{\omega} : x \longrightarrow (H^* \vec{\omega})(x)$, comme une forme différentielle de degré p sur Ω_0 à valeurs dans $\vec{F}$.

Pour $p = 0$, on considère conventionnellement que cette formule se réduit à

$$H^* f(x) = f(H(x)) , \tag{VI,3;31}$$

* Pour cela, H peut être une application quelconque. Mais pour pouvoir calculer l'image réciproque d'une forme différentielle de degré > 0 , H doit être dérivable.

et redonne tout simplement l'image réciproque des fonctions. La notion d'image réciproque d'une forme différentielle se ramène d'ailleurs toujours à celle d'image réciproque d'une fonction. En effet H , application de Ω_0 dans Ω , définit aussi une application $\widetilde{H}$ de $\Omega_0 \times \vec{E}_0^p$ dans $\Omega \times \vec{E}^p$, par :

(VI,3;32) $$(x, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p) \longrightarrow (H(x), H'(x).\vec{X}_1, H'(x).\vec{X}_2, \ldots, H'(x).\vec{X}_p).$$

Si l'on associe à la forme différentielle $\vec{\omega}$ sur Ω, à valeurs dans $\vec{F}$, la fonction $\tilde{\vec{\omega}}$, définie sur $\Omega \times \vec{E}^p$, à valeurs dans $\vec{F}$, par la formule :

(VI,3;33) $$\tilde{\vec{\omega}}(y, \vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_p) = \vec{\omega}(y).(\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \ldots, \vec{Y}_p),$$

et à son image réciproque, forme différentielle $H^*\vec{\omega}$ définie sur Ω_0 à valeurs dans $\vec{F}$, la fonction analogue $(H^*\vec{\omega})^\sim$ définie sur $\Omega_0 \times \vec{E}_0^p$, à valeurs dans $\vec{F}$, alors $(H^*\vec{\omega})^\sim$ n'est autre que l'image réciproque de la fonction $\tilde{\vec{\omega}}$ par $\widetilde{H}$: $(H^*\vec{\omega})^\sim = \widetilde{H}(\tilde{\vec{\omega}})$.

<u>Remarque</u> - Si H est un C^1-difféomorphisme de Ω_0 sur Ω, on peut aussi définir l'<u>image directe</u> par H d'une forme différentielle $\vec{\omega}_0$ définie sur Ω_0 ; c'est une forme différentielle sur Ω , définie par

(VI,3;33 bis) $$H\vec{\omega}_0 = (H^{-1})^*\vec{\omega}_0 .$$

Alors, si $x \in \Omega_0$, et si $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$, sont des vecteurs de $\vec{E}_0$:

(VI,3;33 ter) $$H\vec{\omega}_0(H(x_0)).(H'(x_0).\vec{X}_1, H'(x_0).\vec{X}_2, \ldots, H'(x_0).\vec{X}_p)$$
$$= \vec{\omega}_0(x_0).(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p)$$

Théorème 14 - L'application $H^*: \vec{\omega} \longrightarrow H^*\vec{\omega}$ est une opération linéaire (autrement dit respecte l'addition des formes différentielles et leur multiplication par les scalaires). Elle respecte en outre la multiplication extérieure des formes différentielles, autrement dit :

$$H^*(u \wedge v) = H^*u \wedge H^*v \,. \tag{VI,3;34}$$

En outre, si f est une fonction dérivable sur Ω, et si l'on appelle df la forme différentielle de degré 1 définie par sa dérivée, H commute avec la différentiation, autrement dit :

$$H^* df = d\, H^* f \,. \tag{VI,3;35}$$

Enfin, si H est une application de classe C^1 de Ω_1 dans Ω_2, K une application de classe C^1 de Ω_2 dans Ω_3, et si $\vec{\omega}$ est une forme différentielle sur Ω_3, on a :

$$(K \circ H)^* \vec{\omega} = H^*(K^* \vec{\omega}) \tag{VI,3;35 bis}$$

Démonstration - La linéarité de l'opération H^* est évidente; montrons que H^* respecte la multiplication extérieure, en nous bornant, pour simplifier les notations, au cas des formes à valeurs scalaires. On a les formules suivantes, si u (resp. v) est de degré p (resp. q) :

(VI,3;36)
$$\left(H^*(u\wedge v)\right)(x).\left(\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_{p+q}\right)$$
$$=(u\wedge v)\left(H(x)\right).\left(H'(x).\vec{X}_1,\ldots,H'(x).\vec{X}_{p+q}\right)$$
$$=\frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+q}}\Big[u\left(H(x)\right).\left(H'(x).\vec{X}_{\sigma_1},H'(x).\vec{X}_{\sigma_2},\ldots,H'(x).\vec{X}_{\sigma_p}\right)$$
$$v\left(H(x)\right).\left(H'(x).\vec{X}_{\sigma_{p+1}},\ldots,H'(x).\vec{X}_{\sigma_{p+q}}\right)\Big]$$
$$=\frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p+q}}\Big[(H^*u)(x).\left(\vec{X}_{\sigma_1},\vec{X}_{\sigma_2},\ldots,\vec{X}_{\sigma_p}\right)$$
$$(H^*v)(x).\left(\vec{X}_{\sigma_{p+1}},\vec{X}_{\sigma_{p+2}},\ldots,\vec{X}_{\sigma_{p+q}}\right)\Big]$$
$$=(H^*u\wedge H^*v)(x).\left(\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_{p+q}\right),$$

ce qui prouve notre affirmation.

La formule (VI,3;35) résulte Immédiatement du calcul :

(VI,3;37)
$$(H^*df)(x).\vec{X}=df\left(H(x)\right).\left(H'(x).\vec{X}\right)\overset{*}{=}f'\left(H(x)\right).\left(H'(x).\vec{X}\right)$$
$$=\left(f'(H(x))\circ H'(x)\right).\vec{X}=(f\circ H)'(x).\vec{X}\overset{(**)}{=}(dH^*f)(x).\vec{X}$$

* D'après la définition même de la forme différentielle df de degré 1, formule (VI,3;23).

** D'après le théorème des fonctions composées, théorème 11 du chapitre III.

Enfin, pour démontrer (VI,3;35 bis), on remarquera que, si $x \in \Omega_1$, et. si $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p$ sont p vecteurs de $\vec{E}_1$, on a :

(VI,3;37 bis)
$$\left((K\circ H)^*\vec{\omega}\right)(x)\cdot\left(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p\right)$$

$$= \vec{\omega}\left((K\circ H)(x)\right)\cdot\left((K\circ H)'(x)\cdot\vec{X}_1, (K\circ H)'(x)\cdot\vec{X}_2, \ldots, (K\circ H)'(x)\cdot\vec{X}_p\right)$$

$$= \vec{\omega}\left(K(H(x))\right)\cdot\Big(K'(H(x))\cdot\left(H'(x)\cdot\vec{X}_1\right), K'(H(x))\cdot\left(H'(x)\cdot\vec{X}_2\right),$$
$$\ldots, K'(H(x))\cdot\left(H'(x)\cdot\vec{X}_p\right)\Big)$$

$$= (K^*\vec{\omega})(H(x))\cdot\left(H'(x)\cdot\vec{X}_1, H'(x)\cdot\vec{X}_2, \ldots, H'(x)\cdot\vec{X}_p\right)$$

$$= \left(H^*(K^*\vec{\omega})\right)(x)\cdot\left(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_p\right),$$

d'où la conclusion.

<u>Corollaire 1</u> - <u>SI une forme différentielle $\vec{\omega}$ s'exprime sous la forme (VI,3;25), où les f_i sont des fonctions scalaires dérivables, son Image réciproque s'exprime sous la forme</u> :

(VI,3;38)
$$H^*\left(\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_p} \vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}\, df_{j_1}\wedge df_{j_2}\wedge\cdots\wedge df_{j_p}\right)$$

$$= \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_p} \left(H^*\vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}\right) d\left(H^*f_{j_1}\right)\wedge d\left(H^*f_{j_2}\right)\wedge\cdots\wedge\left(dH^*f_{j_p}\right).$$

<u>où</u> $H^*\vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}$ <u>et</u> H^*f_i <u>sont les Images réciproques des fonctions</u> $\vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}$ <u>et</u> f_i , <u>c'est-a-dire sont simplement les fonctions</u> $\vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}\circ H$ et $f_i\circ H$.

Corollaire 2 - Soit H une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ définie par les formules :

(VI,3;39) $$y = H(x) \text{ , ou}$$

$$y_i = H_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; ; \; i = 1, 2, \ldots, m \, .$$

L'image réciproque de la forme différentielle

$\vec{\omega} = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_p} \omega_{j_1,j_2,\ldots,j_p}(y) dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge \ldots \wedge dy_{j_p}$ par H est donnée par la formule

(VI,3;40) $$H^*\vec{\omega} = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_p} \omega_{j_1,j_2,\ldots,j_p}(H(x))\, dH_{j_1} \wedge dH_{j_2} \wedge \ldots \wedge dH_{j_p}$$

$$= \sum_{\substack{j_1<j_2<\cdots<j_p \\ k_1<k_2<\cdots<k_p}} \omega_{j_1,j_2,\ldots,j_p}(x) \frac{D(H_{j_1}, H_{j_2}, \ldots, H_{j_p})}{D(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_p})} dx_{k_1} \wedge dx_{k_2} \wedge \ldots \wedge dx_{k_p} \, .$$

Démonstration - Cette image réciproque s'écrit en effet, compte tenu du corollaire 1, sous la forme (VI,3;38); mais, ici, $f_j = y_j$, alors $H^* f_j = H^*(y_j) = H_j$. On passe de la 2ème à la 3ème formule par la formule (VI,3;26).

On déduit de toutes ces remarques la règle suivante, pour former l'image réciproque d une forme différentielle :

Règle : Soit $\vec{\omega}$ une forme différentielle sur un ouvert Ω de **E** , exprimée en fonction des coordonnées y_i et de leurs différentielles dy_i . Pour prendre son image réciproque, on remplace les y_i par leurs expressions H_i en fonction de x d'après (VI,3;39), et les dy_i par les différentielles dH_i de ces expressions. Dans le résultat trouvé, on utilise les règles d associativité et d'anticommutativité des produits extérieurs. Cette règle assure un caractère simple et automatique à l'opération d'image réciproque des formes différentielles.

<u>Remarques</u> 1°/ On dit couramment, par abus de langage, comme on l'a déjà fait dans la théorie du changement de variables (page 217 du Cours de 2ème Division), que $H^*\vec{\omega}$ est la même forme différentielle que $\vec{\omega}$ (sic !), mais exprimée à l'aide des variables x_i au lieu des variables y_i. Au lieu d'image réciproque d'une forme différentielle, on dit souvent "transformée de la forme différentielle par le changement de variables $y = H(x)$".

2°/ Quand nous écrivons, par exemple, en coordonnées polaires, que l'on a la formule (VI,3;29), cela peut maintenant signifier deux choses :

a) ou bien que, dans cette formule, on considère comme nous l'avons dit, r, θ, φ, comme des fonctions sur $\mathbb{R}^3$, et $dr, d\theta, d\varphi$, comme leurs différentielles; il en est d'ailleurs de même de x, y, z ;

b) ou bien que $dx \wedge dy \wedge dz$ a pour <u>image réciproque</u> $r^2 \sin\theta \, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$, par l'application P de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par les formules $P(r,\theta,\varphi) = (x,y,z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

Le langage de la remarque 1°/ unifie ces deux significations, et par là même se justifie.

<u>Théorème 14 bis</u> - <u>SI H est de classe C^m et $\vec{\omega}$ de classe C^q, alors $H^*\vec{\omega}$ est de classe $C^{\min.(m-1,q)}$ (sauf pour le degré 0, où $H^*\vec{\omega}$ est de classe $C^{\min.(m,q)}$)</u>.

<u>Démonstration</u> - Le cas du degré 0 n'est autre que le théorème 19 du chapitre III (théorème des fonctions composées). Pour les autres degrés on remarquera, en utilisant ce qui a été dit à la formule (VI,3;33), que l'application $\mathbf{H}$ de $\Omega_0 \times \vec{E}_0^{\,r}$ dans $\Omega \times \vec{E}^{\,r}$, définie par (VI,3;32), est seulement de classe C^{m-1}, par suite de l'existence des dérivées H' dans cette formule; il suffit alors d'appliquer à nouveau, pour les fonctions ω et $\mathbf{H}\omega$, le théorème 19 du chapitre III.

On se rappellera en particulier que, <u>si H est de classe C^1, $\vec{\omega}$ continue, alors $H^*\vec{\omega}$ est continue; si H est de classe C^2 et $\vec{\omega}$ de classe C^1, $H^*\vec{\omega}$ est de classe C^1</u>.

Formes différentielles sur une variété abstraite

Soit V une variété, <u>**au moins de classe** C^1</u>, de dimension n, contenue dans un espace affine E de dimension N, ou même abstraite. On peut alors définir sur cette variété le notion de forme différentielle. on sait en effet ce que sont les vecteurs tangents à cette variété. En nous bornant par exemple au cas d une variété de E, on voit qu'on peut encore définir un p-covecteur en un point x de V, à valeurs dans $\vec{F}$, comme une application p-linéaire antisymétrique de $(\vec{T}(x;V))^p$ dans **F**, où $\vec{T}(x,V)$ est l'espace vectoriel tangent au point x à la variété **V**. On peut alors définir de la même manière une forme différentielle $\vec{\omega}$ de degré p sur **V**, à **valeurs** dans un espace vectoriel normé $\vec{F}$, **comme** un champ de+-covecteurs **sur V** à **valeurs** dans **F**, **c'est-u-dire comme** une application qui, à chaque point x de **V**, **fait correspondre** un p-covecteur $\vec{\omega}(x)$ au point x de **V**. à **valeurs** dans **F**.

Il n'y a aucune difficulté à définir alors la somme et le produit extérieur des formes différentielles,et la plupart des propriétés antérieurement vues s'étendent sans grande difficulté. Nous parlerons souvent, dans la suite, de formes différentielles sur une Variété V, sans spécifier sa nature.On pourra se borner à supposer **V** dans un espace affine **E**, et les formes définies sur un voisinage Ω de V dans E.

Formes différentielles et champs dans un espace euclidien orienté E de dimension N

1°) Donnons nous, dans un espace euclidien **E**, **une forme** différentielle réelle de degré 1; c'est un champ de covecteurs. Mais on a vu, page 178 du Cours de 2ème Division,qu'on peut faire correspondre bi-univoquement, a tout covecteur, un élément de $\vec{E}$; on peut donc faire correspondre, à la forme différentielle de degré 1, un champ de vecteurs. Par rapport à un référentiel orthonormal, si la forme différentielle est définie par $\sum A_i\, dx_i$, le champ de vecteurs est défini par $x \longrightarrow (A_1(x), A_2(x), \ldots, A_N(x))$

<u>Cette correspondance dépend seulement de la structure euclidienne de E et non de son orientation</u>

2°) Si maintenant E est orienté, on sait (théorème 11) qu'on peut établir une correspondance biunivoque entre les N-covecteurs et les scalaires. On peut donc établir une correspondance biunivoque entre les formes différentielles scalaires de degré N et les champs de scalaires, c'est-à-dire les fonctions scalaires. Par rapport à un référentiel orthonormal d'orientation positive, la forme différentielle $f\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_N$ est associée à la fonction f.

3°) Enfin on peut établir une correspondance biunivoque entre les (N-1)-covecteurs et les vecteurs de E (formule (VI,2;11 ter)) donc une correspondance biunivoque entre les formes différentielles réelles de degré $N-1$, et les champs de vecteurs. Par rapport à un référentiel orthonormal positif, la forme différentielle

(VI,3;41) $$\sum_{j=1}^{N} \omega_j\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_N,$$

est attachée au champ de vecteurs

(VI,3;42) $$x \longrightarrow \left((-1)^{N-1}\omega_1(x),\ (-1)^{N-2}\omega_2(x), \dots, (-1)^{N-j}\omega_j(x), \dots\ \omega_N(x)\right).$$

Dans le cas particulier de l'espace à 3 dimensions, à la forme $A\, dy \wedge dz + B\, dz \wedge dx + C\, dx \wedge dy$ est attaché le champ de vecteurs de composantes A, B, C.

Les correspondances 2° et 3° ne dépendent pas de la donnée d'une structure euclidienne et d'une orientation, mais de la donnée d'un N-covecteur fondamental $\overset{N}{\xi} \neq 0$, sur $\vec{E}$ (mesure des volumes et orientation). Les formules précédentes sont alors valables dans tout référentiel $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N$, tel que $\overset{N}{\xi} \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N) = 1$. Si on prend un référentiel <u>quelconque,</u> on aura $\overset{N}{\xi} \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N) = \Delta$, ou $\overset{N}{\xi} = \Delta\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_N$; alors, à f, est associée la forme $f \Delta\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_N$, et au champ (VI,3;42) est associée la forme

(VI,3;42bis) $$\Delta \sum_{j=1}^{N} \omega_j\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_N.$$

Si nous convenons de noter par $\sim$ * les correspondances ainsi établies entre formes différentielles et champs, on a :

(III,3;43)
$$\begin{cases} \overset{1}{\omega} = \sum_{i=1}^{N} A_i\, dx_i \sim \vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_N) \\ f\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N \sim f \\ \overset{N-1}{\omega} = \sum_{j=1}^{N} \left(\omega_j\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_N\right) \\ \sim \vec{A} = \left((-1)^{N-1}\omega_1, (-1)^{N-2}\omega_2, \ldots, (-1)^{N-j}\omega_j, \ldots \omega_N\right). \end{cases}$$

Remarques 1°) - La correspondance $\sim$ précédente commute avec la multiplication par une fonction scalaire. Par exemple, si $\overset{1}{\omega} \sim \vec{A}$, on a $g\overset{1}{\omega} \sim g\vec{A}$, si g est une fonction réelle sur $\Omega \subset E$.

2°) Il peut être utile, dans certains cas, d'étudier cette correspondance en prenant, pour chaque point de $\vec{E}$, une base variable avec ce point; c'est ce que nous ferons en coordonnées polaires, page

3°) Ces correspondances ont, partiellement, un caractère à la fois acrobatique et archaïque. Elles rendent souvent de grands services ~~mais moins qu'on~~ ne le croit, car elles sont aussi des restes de l'époque où la théorie des formes différentielles n'existait pas encore.

* La notation $\sim$ n'est pas courante, nous l'employons ici, sans souci de généralité. Cette notation peut même être dangereuse; si $N = 2$, on a $1 = N - 1$, donc la 1ère et la 3ème formule feront toutes les deux correspondre à une forme de degré 1 des champs de vecteurs, qui sont orthogonaux, et qu'il serait peu recommandé de noter de la même manière.

§ 4 COBORD OU DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE D'UNE FORME DIFFERENTIELLE EXTÉRIEURE

Soient Ω un ouvert d'un espace affine E de dimension finie N, et $\vec{\omega}$ une forme différentielle de degré p, dérivable, définie sur Ω, à valeurs dans $\vec{F}$; supposons choisi un référentiel $\mathcal{R}$ de E, elle peut alors s'exprimer par une formule (VI,3;7).

Nous appellerons <u>différentielle ou cobord de $\vec{\omega}$, relativement au référentiel $\mathcal{R}$,</u> la forme différentielle de degré $p+1$, définie sur Ω, à valeurs dans $\vec{F}$, par la formule :

(VI,4;1)
$$\begin{cases} d_{\mathcal{R}}\vec{\omega} = \sum_{J,\alpha} \dfrac{\partial \vec{\omega}_J}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \wedge dx_J = \sum_J d\vec{\omega}_J \wedge dx_J \quad \text{, ou} \\ d_{\mathcal{R}}\vec{\omega} = \sum_\alpha dx_\alpha \wedge \dfrac{\partial \vec{\omega}}{\partial x_\alpha} \end{cases}$$

Dans cette formule, on rappelle que $\vec{\omega}_J$ est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\vec{F}$; et par suite $d\vec{\omega}_J$ a un sens, comme la forme différentielle de degré 1 associée à la dérivée de cette fonction; dans ces conditions, $d\vec{\omega}_J \wedge dx_J$ est un produit extérieur d'une forme de degré 1 et d'une forme de degré p, et c'est donc bien une forme de degré $p+1$.

Bien noter qu'on a écrit $dx_\alpha \wedge dx_J$, et non l'opposé $dx_J \wedge dx_\alpha$. On aurait naturellement pu le faire; mais il est nécessaire de faire un choix une fois pour toutes, l'un est aussi bon que l'autre, et il y a lieu alors de se conformer aux habitudes courantes !

La décomposition ainsi obtenue n'est pas l'expression canonique (VI,3;7) relative à la forme $d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}$ de degré $p+1$, parce que les différentielles des coordonnées ne sont pas rangées dans leur ordre habituel; mais c'est ensuite une opération qu'il est facile de faire.

Donnons tout de suite quelques exemples :

Tout d'abord s'il s'agit d'une forme différentielle de degré 0, c'est-à-dire d'une fonction $\vec{f}$, alors $d_{\mathcal{R}}\vec{f}$ n'est autre que sa différentielle $d\vec{f}$.

Considérons maintenant une forme différentielle de degré 1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On aura :

$$(\mathrm{VI},4;2)\quad d_{\mathcal{R}}(\vec{A}\,dx+\vec{B}\,dy+\vec{C}\,dz)=d\vec{A}\wedge dx+d\vec{B}\wedge dy$$
$$+d\vec{C}\wedge dz=\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}dz\right)\wedge dx+$$
$$\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec{B}}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}dz\right)\wedge dy+\left(\frac{\partial\vec{C}}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec{C}}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec{C}}{\partial z}dz\right)\wedge dz$$
$$=\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\right)dx\wedge dy+\left(\frac{\partial\vec{C}}{\partial y}-\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}-\frac{\partial\vec{C}}{\partial x}\right)dz\wedge dx.$$

Si ensuite, nous considérons une forme différentielle de degré 2, on aura :

$$(\mathrm{VI},4;3)\quad d_{\mathcal{R}}(\vec{A}\,dy\wedge dz+\vec{B}\,dz\wedge dx+\vec{C}\,dx\wedge dy)$$
$$=d\vec{A}\wedge dy\wedge dz+d\vec{B}\wedge dz\wedge dx+d\vec{C}\wedge dx\wedge dy$$
$$=\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}dz\right)\wedge dy\wedge dz$$
$$+\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec{B}}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}dz\right)\wedge dz\wedge dx$$
$$+\left(\frac{\partial\vec{C}}{\partial x}dx+\frac{d\vec{C}}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec{C}}{\partial z}dz\right)\wedge dx\wedge dy=\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial y}+\frac{\partial\vec{C}}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz.$$

Naturellement le cobord d'une forme de degré N sur Ω, étant de degré $N+1$, est nécessairement identiquement nulle.

Théorème 15 - L'opération $d_{\mathcal{R}}$ définie par la formule (VI,4;1) possède les quatre propriétés suivantes :

1') Si $\vec{f}$ est une fonction dérivable sur Ω, considérée comme forme différentielle de degré 0, $d\vec{f}$ est la forme différentielle de degré 1, associée à la dérivée de $\vec{f}$ par la formule (VI,3,23).

2°) L'opération $d_{\mathcal{R}}$ est linéaire :

(VI,4;4) $$d_{\mathcal{R}}(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) = d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}_1 + d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}_2 \ ;$$

$$d_{\mathcal{R}}(k\vec{\omega}) = k\, d_{\mathcal{R}}\vec{\omega} \ , \qquad k \text{ scalaire.}$$

3") Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des formes différentielles de degrés respectifs p et q sur Ω, dérivables, à valeurs respectives dans des espaces vectoriels normés $\vec{F}$ et $\vec{G}$, et si B est application bilinéaire continue de $\vec{F} \times \vec{G}$ dans un espace vectoriel normé $\vec{H}$, alors on a la formule de cobord du produit :

(VI,4;5) $$d_{\mathcal{R}}(\overset{p}{\vec{u}} \wedge_{(B)} \vec{v}) = d_{\mathcal{R}}\overset{p}{\vec{u}} \wedge_{(B)} \vec{v} + (-1)^p \overset{p}{\vec{u}} \wedge_{(B)} d_{\mathcal{R}}\vec{v}\, .$$

En particulier, si u et v sont des formes différentielles scalaires, on a la formule :

(VI,4;6) $$d_{\mathcal{R}}(\overset{p}{u} \wedge v) = d_{\mathcal{R}}\overset{p}{u} \wedge v + (-1)^p \overset{p}{u} \wedge d_{\mathcal{R}} v \ ^* .$$

4°) Si $\vec{\omega}$ est une forme différentielle 2 fois dérivable sur Ω, on a la formule :

(VI,4;7) $$d_{\mathcal{R}}\, d_{\mathcal{R}}\, \vec{\omega} = \vec{0}\ .$$

* On retient facilement ce signe $(-1)^p$, en remarquant qu'on a fait "sauter" $d_{\mathcal{R}}$ par dessus une forme de degré p.

Démonstration - Les propriétés 1° et 2° sont évidentes. Avant de démontrer 3°, remarquons que la formule de définition (VI,4;1) est encore valable, si l'on suppose que $j_1, j_2, \dots, j_p$ est une suite d'éléments de $1,2,\dots,N$, non nécessairement croissante. Si en effet, dans ce cas, nous désignons par $j'_1, j'_2, \dots, j'_p$ la suite des mêmes éléments, mais rangés par ordre de grandeur croissante, et si nous appelons σ la signature de la permutation de l'ensemble d'éléments $j_1, j_2, \dots, j_p$, qui amène ces éléments respectivement sur $j'_1, j'_2, \dots, j'_p$, on a nécessairement

$$\vec{\omega}_{j_1,j_2,\dots,j_p}\, dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} = \varepsilon_\sigma \vec{\omega}_{j'_1,j'_2,\dots,j'_p}\, dx_{j'_1} \wedge dx_{j'_2} \wedge \dots \wedge dx_{j'_p} . \tag{VI,4;8}$$

L'application directe de la formule (VI,4;1) donne alors le résultat

$$d_{\mathcal{R}} \vec{\omega} = \sum_{j_1,j_2,\dots,j_p,\alpha} \frac{\varepsilon_\sigma\, \partial \vec{\omega}_{j_1,j_2,\dots,j_p}}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \wedge dx_{j'_1} \wedge dx_{j'_2} \wedge \dots \wedge dx_{j'_p} , \tag{VI,4;9}$$

mais ceci peut encore s'écrire

$$d_{\mathcal{R}} \vec{\omega} = \sum_{j_1,j_2,\dots,j_p,\alpha} \frac{\partial \vec{\omega}_{j_1,j_2,\dots,j_p}}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} , \tag{VI,4;10}$$

ce qui montre notre affirmation.

Démontrons maintenant 3°). Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des formes différentielles sur Ω dérivables, de degrés respectifs p et q, et s'écrivant sous la forme

$$\vec{u} = \sum_J \vec{u}_J\, dx_J , \qquad \vec{v} = \sum_K \vec{v}_K\, dx_K . \tag{VI,4;11}$$

Alors $\vec{u} \wedge_{(B)} \vec{v}$, qui est de degré $p+q$, s'écrit sous la forme :

$$\vec{u} \wedge_{(B)} \vec{v} = \sum_{J,K} B(\vec{u}_J, \vec{v}_K)\, dx_J \wedge dx_K . \tag{VI,4;12}$$

En vertu de la remarque faite ci-dessus, l'opération $d_{\mathcal{R}}$ s'effectue très simplement sur ce produit, bien que, quand on considère le produit $dx_J \wedge dx_K$, la suite des élé - ments $j_1, j_2, \dots, j_p, k_1, k_2, \dots, k_q$, de J U K, ne soit pas **rangée** par ordre de grandeur croissante. On a, de tnute façon, la formule :

$$(\mathrm{VI},4;13) \qquad d_{\mathcal{R}}(\vec{u} \wedge_{(B)} \vec{v}) = \sum_{J,K,\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \vec{B}(\vec{u}_J, \vec{v}_K)\, dx_\alpha \wedge dx_J \wedge dx_K .$$

Ceci s'écrit alors, en appliquant la formule de dérivation d'une fonction bllinéaire continue (théorème 12 du Chapitre III) :

$$(\mathrm{VI},4;14) \qquad \sum_{J,K,\alpha} \vec{B}\left(\frac{\partial \vec{u}_J}{\partial x_\alpha}, \vec{v}_K\right) dx_\alpha \wedge dx_J \wedge dx_K$$

$$+ \sum_{J,K,\alpha} B\left(\vec{u}_J, \frac{\partial \vec{v}_K}{\partial x_\alpha}\right) dx_\alpha \wedge dx_J \wedge dx_K$$

$$= \left(\sum_{J,\alpha} \frac{\partial \vec{u}_J}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \wedge dx_J\right) \wedge_{(B)} \sum_K \vec{v}_K\, dx_K$$

$$+ (-1)^p \left(\sum_J \vec{u}_J\, dx_J\right) \wedge_{(B)} \left(\sum_{K,\alpha} \frac{\partial \vec{v}_K}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \wedge dx_K\right) \; *$$

$$= d_{\mathcal{R}}\vec{u} \wedge_{(B)} \vec{v} + (-1)^p \vec{u} \wedge_{(B)} d_{\mathcal{R}}\vec{v} ,$$

et ceci démontre 3°).

Démontrons maintenant 4°).

Soit $\vec{\omega}$ une forme différentielle de **degré** p, deux fois **dérivable sur** Ω ; on a alors successivement les formules :

$$(\mathrm{VI},4;15) \qquad d_{\mathcal{R}}\vec{\omega} = \sum_{J,\alpha} \frac{\partial \vec{\omega}_J}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \wedge dx_J .$$

$$d_{\mathcal{R}}(d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}) = \sum_{J,\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \vec{\omega}_J}{\partial x_\beta \partial x_\alpha} dx_\beta \wedge dx_\alpha \wedge dx_J .$$

* Le signe $(-1)^p$ vient de ce que $dx_J \wedge dx_\alpha = (-1)^p dx_\alpha \wedge dx_J$ (formule d'anticommutativité **(VI,1;41)**).

Naturellement, dans cette somme, on ne conservera que les systèmes α, β, J, pour lesquels $\alpha \neq \beta$ et pour lesquels aucun des deux éléments α, β, n'appartient à J, sans quoi $dx_\beta \wedge dx_\alpha \wedge dx_J = 0$. Si pour un même système α, A, avec $\alpha < \beta$, nous réunissons les termes en $dx_\alpha \wedge dx_\beta \wedge dx_J$ et $dx_\beta \wedge dx_\alpha \wedge dx_J$ nous obtenons une expression qui est nulle, en vertu de la propriété de symétrie des dérivées partielles $\frac{\partial^2 \vec{\omega}_J}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{\partial^2 \vec{\omega}_J}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}$ (théorème 16 du chapitre III). Ceci achève la démonstration du théorème * .

<u>Corollaire 1 - Si u, v, w, sont des formes différentielles scalaires de degrés p, q, r, on a</u> :

(VI, 4;16)
$$d_{\mathcal{R}}(u \wedge v \wedge w) = d_{\mathcal{R}}u \wedge v \wedge w + (-1)^p u \wedge d_{\mathcal{R}}v \wedge w + (-1)^{p+q} u \wedge v \wedge d_{\mathcal{R}} w$$

On obtient en effet cette formule en posant $u \wedge v \wedge w = (u \wedge v) \wedge w$, et en appliquant 2 fois la propriété 3° du théorème.

<u>Corollaire 2 - Si $\vec{\omega}$ est une forme dérivable sur Ω, et s'exprimant sous la forme (VI, 3;25) où les $\vec{\omega}_{j_1, j_2, \dots, j_p}$ sont dérivables, et où les f_j sont des fonctions scalaires 2 fois dérivables, alors on a la formule</u> :

(VI, 4;17)
$$d_{\mathcal{R}}\vec{\omega} = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_p} d\vec{\omega}_{j_1, j_2, \dots, j_p} \wedge df_{j_1} \wedge df_{j_2} \wedge \dots \wedge df_{j_p}$$

* Par des méthodes plus délicates, on démontre la formule $d_{\mathcal{R}} d_{\mathcal{R}} \vec{\omega} = \vec{0}$, même quand $\vec{\omega}$ n'est pas 2 fois dérivable, pourvu que $\vec{\omega}$ et $d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}$ soient toutes deux de classe C^1.

Démonstration

On a en effet :

$$(\mathrm{VI},4;17) \qquad d_{\mathcal{R}}\vec{\omega} = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_p} \Big[d\vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p} \wedge df_{j_1} \wedge df_{j_2} \wedge \cdots \wedge df_{j_p}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p} df_{j_1} \wedge \cdots \wedge df_{j_{k-1}} \wedge d_{\mathcal{R}} df_{j_k} \wedge df_{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge df_{j_p} \Big],$$

d'après les propriétés 1°, 2°, 3"; mais on a en même temps $d_{\mathcal{R}} df_{j_k} = d_{\mathcal{R}} d_{\mathcal{R}} f_{j_k} = 0$ d'après la propriété 4°, ce qui démontre le corollaire.

Théorème 16 - (Réciproque du théorème 15) - L'opération $d_{\mathcal{R}}$, qui fait correspondre à toute forme différentielle $\vec{\omega}$, dérivable, définie sur Ω, à valeurs dans l'espace vectoriel normé $\vec{F}$, de degré p, une forme différentielle de degré $p+1$, est la seule opération à posseder les propriétés 1°, 2°, 3°, 4" du théorème **15.**

Démonstration - Soit en effet ∂ une opération quelconque possédant ces propriétés. Si $\vec{\omega}$ est une forme différentielle exprimée sous la forme (VI,3;6), par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, on a nécessairement, d'après la linéarité (propriété 2") :

$$(\mathrm{VI},4;18) \qquad \partial\vec{\omega} = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_p} \partial\Big[\vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}\Big].$$

D'autre part, d'après la formule relative au produit (propriété 3°), ceci peut nécessairement s'écrire

$$(\mathrm{VI},4;19) \qquad \partial\vec{\omega} = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_p} \Big[\partial\vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{k-1}} \wedge \partial dx_{j_k} \wedge dx_{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}\Big].$$

D'après la propriété 1°, les $\partial\vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ sont les formes différentielles $d\vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$ de degré 1 associées aux dérivées des fonctions $\vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_p}$; de même $dx_k = \partial x_k$.

Enfin, d'après la propriété 4°, les $\partial dx_k = \partial\partial x_k$ sont nulles. On en déduit bien que l'on a nécessairement $\partial\vec{\omega} = d_{\mathcal{R}}\vec{\omega}$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire - L'opération $d_{\mathcal{R}}$, définie à partir du référentiel $\mathcal{R}$, est indépendante de ce référentiel; c'est une opération intrinsèque d, qui, à toute forme différentielle $\vec{\omega}$ dérivable, définie sur $\Omega \subset E$, à valeurs dans $\vec{F}$, de degré p, fait correspondre une forme différentielle, définie sur Ω , à valeurs dans $\vec{F}$, de degré $p+1$, et satisfaisant à toutes les propriétés 1° , 2° , 3° , 4° du théorème 15.

Démonstration - Donnons nous deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ de E . Chacune des opérations $d_{\mathcal{R}}$ et $d_{\mathcal{R}'}$, satisfait aux propriétés 1° - 2° - 3° - 4° - du théorème 15; or le théorème 16 dit qu'il n'existe qu'une seule opération satisfaisant à ces propriétés, on a donc bien $d_{\mathcal{R}} = d_{\mathcal{R}'}$.

L'opération d s'appelle différentiation extérieure ou opération cobord des formes différentielles. Une forme de cobord nul s'appelle forme différentielle fermée * ou cocycle.

Théorème 17 - Soient Ω_0 un ouvert de E_0, Ω un ouvert de E, et H une application 2 fois dérivable de Ω_0 dans Ω . Soit $\vec{\omega}$ une forme différentielle dérivable sur Ω ; alors on a la formule de commutation de l'image réciproque H^* et du cobord d :

$$dH^*\vec{\omega} = H^*d\vec{\omega} \tag{VI,4;20}$$

* Si Ω est connexe, une forme de degré 0 est fermée, si et seulement si elle est une fonction constante (théorème 22 du chapitre III). Une forme dérivable de degré N , dimension de E , est toujours fermée.

Démonstration - Si $\vec{\omega}$ est de degré 0 , la formule n'est autre que (VI,3;35); elle est alors valable mêma si H n'est qu'une fois dérivable.

Soit alors $\vec{\omega}$ une forme différentielle de degré p dérivable quelconque. Elle peut toujours s'écrire sous forme d'une somme (VI,3;25), où les f_j sont des fonctions scalaires 2 fois dérivables, et les $\vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}$ des fonctions dérivables à valeurs dans $\vec{F}$; il suffit par exemple, de prendre pour f_j les x_j, fonctions coordonnées relatives à un référentiel de E . Alors on a la formule (VI,3;38). On en déduit :

$$(\mathrm{VI},4;21)\qquad dH^*\vec{\omega} = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_p}\Big[dH^*\vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}\wedge dH^*f_{j_1}\wedge\cdots\wedge dH^*f_{j_p}$$

$$+\sum_{k=1}^{p} H^*\vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}\,dH^*f_{j_1}\wedge\cdots\wedge dH^*f_{j_{k-1}}\wedge d\,dH^*f_{j_k}\wedge dH^*f_{j_{k+1}}\wedge\cdots\wedge dH^*f_{j_p}\Big].$$

Mais $dH^*\vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p} = H^*d\vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}$, puisque $\vec{\omega}_{j_1,j_2,\ldots,j_p}$ est une fonction dérivable, et $d\,dH^*f_j = 0$ (les f_j et **H** , donc H^*f_j , sont 2 fois dérivables), d'où le résultat.

Extension au cas abstrait

On peut démontrer, même si une forme $\vec{\omega}$ de degré p , est seulement définie sur une variété V de classe C^2 , de dimension n , contenue dans un espace affine normé E , ou même si c'est une variété abstraite de classe C^2 , qu'on peut définir une opération cobord ci , qui, à toute forme différentielle $\vec{\omega}$ définie sur **V** , de degré p , fait correspondre une forme différentielle $d\vec{\omega}$ de degré $p+1$, et vérifiant les quatre propriétés du théorème **15** (l'une des propriétés suppose ω de classe C^2 , donc V de classe C^3; il y a là une difficulté apparente sans importance). Nous ne détaillons pas cela ici, mais c'est ce qui fait un des plus grands intérêts de la théorie des formes différentielles.

Gradient, divergence, rotationnel, dans un espace affine euclidien orienté E de dimension N .

1°) L'opérateur gradient, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$.

Si f est une fonction réelle dérivable, elle possède un cobord df ; à celui-ci est associé un champ de vecteurs, d'après 1°) page ; c'est le gradient de f . Cette opération ne dépend pas de l'orientation, mais seulement de la structure euclidienne de $\vec{E}$, et elle a déjà été vue à la formule (III,3;23).

2°) La divergence d'un champ de vecteurs, div.

SI l'on considère un champ de vecteurs dérivable, on peut lui attacher une forme différentielle dérivable de degré $N-1$; celle-ci possède alors un cobord, qui est une forme différentielle de degré N à laquelle on peut enfin faire correspondre une fonction scalaire.

Cette fonction, multipliée par $(-1)^{N-1}$ * s'appelle la divergence du champ de vecteurs.

La divergence ne dépend ni de la structure euclidienne, ni de l'orientation, elle est associée directement a la structure affine de E. Pour la construire, on effectue en effet 2 opérations, dépendant du choix d'un N-covecteur fondamental $\overset{N}{\xi} \neq 0$ sur $\vec{E}$, et ces 2 opérations se neutralisent, comme nous le verrons à la formule (VI,4;24).

Par rapport à un référentiel quelconque si les composantes du champ de vecteurs sont les fonctions $x \longrightarrow A_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, la forme différentielle associée est donnée, d'après (VI,3;42 bis), par :

$$\text{(VI,4;22)} \quad \omega = \Delta \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} A_j \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_N$$

où Δ est la valeur de la N-forme $\overset{N}{\xi}$ sur le référentiel choisi :

$$\text{(VI,4;22bis)} \quad \Delta = \overset{N}{\xi}.(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N) \; ; \qquad \overset{N}{\xi} = \Delta \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_N$$

(On pourra se borner au cas où E est euclidien oriente, et le référentiel orthonormal positif, alors $\Delta = 1$).

Son cobord est donné par :

$$\text{(VI,4;23)} \quad d\omega = \Delta \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} dA_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_N$$

$$= \Delta \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_N$$

$$= \Delta (-1)^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots dx_N \;,$$

* La raison de ce $(-1)^{N-1}$ est dans le désir d'obtenir la formule (VI,4;24), sans signe $-$.

d'où **résulte** la formule de la fonction divergence :

$$\text{(VI,4;24)} \quad \operatorname{div}(A_1, A_2, \ldots, A_N) = \frac{1}{\Delta}\,\Delta \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial A_N}{\partial x_N}\,.$$

3") <u>Rotationnel d'un champ de vecteurs, dans le cas de la dimension 3</u>.

Il existe une autre opération remarquable qu'on ne peut définir que dans un espace euclidien orienté de dimension **N** = 3.

Partons d'un champ de vecteurs dérivable $\vec{A}$. On peut lui associer une forme différentielle de degré **1**; le cobord de cette forme est une forme différentielle de degré 2; mais comme alors 2 = N- 1 , on peut à nouveau lui associer un champ de vecteurs * .

On définit ainsi un opérateur qui, à un champ de vecteurs dérivable, fait correspondre un champ de vecteurs, et qu'on appelle l'opérateur rotationnel , noté $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$. Soient A, B, C les trois composantes de $\vec{A}$ par rapport à un référentiel orthonormal positif. La forme de degré **1** associée à $\vec{A}$ est

$$\text{(VI,4;25)} \qquad A\,dx + B\,dy \;\mathbf{t}\; C\,dz\,.$$

Son cobord est donné par (VI,4:2). Donc, d'après (VI,3. 42) (pour **N** = 3), le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ a pour composantes :

$$\text{(VI,4;26)} \quad A_1 = \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\,, \qquad B_1 = \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\,, \qquad C_1 = \frac{\partial B}{\mathbf{as}} - \frac{\partial A}{\partial y}\ {}^{**}\,.$$

<u>Remarque</u> - On étend souvent ces formules aux fonctions et champs complexes. Si f est une fonction complexe, $f = g + ih$, on appelle $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ le champ de vecteurs complexes $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g + i\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, h$. Si $\vec{A}$ est un champ de vecteurs complexes, $\vec{A} = \vec{V} + i\vec{W}$, on pose $\operatorname{div}\vec{A} = \operatorname{div}\vec{V} + i\operatorname{div}\vec{W}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} + i\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{W}$.

* Ici il n'y a qu'une opération dépendant de l'orientation, le passage d'une forme de degré 2 à un champ de vecteurs ; donc le champ obtenu est polaire, il dépend de l'orientation. Et il dépend, bien entendu, de la structure euclidienne.

** Le rotationnel mérite tout particulièrement qu'on lui applique la remarque 3° de la page ______

Théorème 18 - 1°/ Sur un ouvert d'un espace affine euclidien oriente de dimension 3, le rotatlonnel du gradient d'une fonction réelle 2 fois dérivable est nul, la divergence du rotationnel d'un champ de vecteurs 2 fois dérivable est nulle.

2°/ Si f est une fonction réelle 2 fois dérivable définie sur un ouvert d'un espace affine euclidien de dimension N , on a la formule :

(VI,4;27) $$\Delta f = \operatorname{div} . \overrightarrow{\operatorname{grad}} . f ,$$

où Δ est un opérateur différentiel du 2ème ordre, le laplacien, qui s'écrit, dans tout référentiel orthonormal :

(VI,4;28) $$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} .$$

3°/ Si A est un champ de vecteurs 2 fois dérivable défini sur un ouvert d'un espace affine euclidien orienté de dimension 3, on a la formule suivante; relative au même laplacien Δ :

(VI,4;29) $$\Delta \vec{A} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{A} - \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} .$$

Démonstration 1°) résulte immédiatement de $dd = 0$.

2°) et 3") sont évidentes, il suffit de prendre un référentiel orthonormal (positif si E doit être oriente), et d'appliquer les formules de définition du gradient, du rotatlonnel et de la divergence.

Remarque Pour résumer ce que nous avons vu :

a) la divergence d'un champ de vecteurs dépend de la structure affine de E;

b) le gradient d'une fonction dépend de la structure affine euclidienne de E ;

c) le laplacien Δ dépend de la structure affine euclidienne de E ;

d) le rotatlonnel d'un champ de vecteurs n'existe que si E a la dimension 3, et dépend de la structure affine euclidienne orientée de E .

Interprétation mécanique de la divergence

Considérons l'écoulement d un fluide dans un espace affine euclidien, à 3 dimensions, que nous Identifions à $\mathbb{R}^3$ en choisissant un référentiel orthonormal. La "particule'! qui, à l'instant t_0 , occupe la position (x_0, y_0, z_0) de $\mathbb{R}^3$, occupe, à l'instant t , la position

$$(\text{VI},4,29bis) \quad x = x(x_0, y_0, z_0, t), \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t), \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t).$$

La vitesse de cette particule à un instant donné t de son parcours est $\vec{v} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right) = (\xi, \eta, \zeta)$; elle est fonction de x_0 , y_0 , z_0 . Mais on pourrait aussi exprimer x_0 , y_0, z_0 , pour t donné, en fonction de x, y, z * ; en portant ces valeurs dans ξ, η , ζ on définirait, à l'instant considéré t le champ des vitesses, en exprimant ξ, η, ζ , en fonction de x, y, z.

Considérons l'ensemble des particules occupant, a l'instant t_0 , un ouvert donné Ω_0 . A l'instant t , il occupe un ouvert Ω_t , dont la mesure volumétrique est

$$(\text{VI},4;29ter) \quad V_t = \iiint_{\Omega_t} dx\, dy\, dz = \iiint_{\Omega_0} \left|\frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)}\right| dx_0\, dy_0\, dz_0 ,$$

d'après la formule du changement de variables des intégrales multiples (corollaire 3 du théorème 102 du chapitre IV).

La dérivée par rapport au temps de cette mesure volumétrique est tout simplement :

$$\frac{dV}{dt} = \iiint_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \left|\frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)}\right| dx_0\, dy_0\, dz_0 ,$$

* On suppose toujours que le passage de l'instant t_0 à l'instant t est un homdomorphisme (et même en général un C^1 -difféomorphisme).

par une dérivation sous le signe $\iiint$, manifestement légitime si Ω_0 est borné, et x, y, z, de classe C^2 avec $\dfrac{D(x,y,z)}{D(x_0,y_0,z_0)}$ partout $\neq 0$ (corollaire du théorème 115 du chapitre IV).

Calculons cette dérivée pour $t = t_0$. On a alors les formules suivantes, pour t voisin de t_0 :

$$\text{(VI,4;29quarto)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_0} &= 1 + \frac{\partial^2 x}{\partial x_0\,\partial t}(t-t_0) + \ldots &&= 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_0}(t-t_0) + \ldots \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} &= \frac{\partial^2 x}{\partial y_0\,\partial t}(t-t_0) + &&= \frac{\partial \xi}{\partial y_0}(t-t_0) + \ldots \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} &= \frac{\partial^2 x}{\partial z_0\,\partial t}(t-t_0) + \ldots &&= \frac{\partial \xi}{\partial z_0}(t-t_0) + \ldots \end{aligned}\right.$$

et des formules du même type pour y et z. Le déterminant jacobien, qui vaut 1 pour $t = t_0$, se développe donc d'après la formule suivante, pour $t - t_0$ infiniment petit :

$$\text{(VI,4;29quinto)}\quad \frac{D(x,y,z)}{D(x_0,y_0,z_0)} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_0}(t-t_0) + \ldots & \frac{\partial \xi}{\partial y_0}(t-t_0) + \ldots & \frac{\partial \xi}{\partial z_0}(t-t_0) + \ldots \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_0}(t-t_0) + \ldots & 1 + \frac{\partial \eta}{\partial y_0}(t-t_0) + \ldots & \frac{\partial \eta}{\partial z_0}(t-t_0) + \ldots \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x_0}(t-t_0) + \ldots & \frac{\partial \zeta}{\partial y_0}(t-t_0) + \ldots & 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z_0}(t-t_0) + \ldots \end{vmatrix}.$$

En ne retenant que les termes en $t - t_0$, on voit que

$$\text{(VI,4;29sexto)}\quad \frac{D(x,y,z)}{D(x_0,y_0,z_0)} = 1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_0} + \frac{\partial \eta}{\partial y_0} + \frac{\partial \zeta}{\partial z_0}\right)(t-t_0) + \ldots$$

d'où

$$\text{(VI,4;29septimo)}\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{D(x,y,z)}{D(x_0,y_0,z_0)}\right|\right)_{t=t_0} = \frac{\partial \xi}{\partial x_0} + \frac{\partial \eta}{\partial y_0} + \frac{\partial \zeta}{\partial z_0} = \operatorname{div} \vec{v}_0 .$$

On a donc finalement la formule

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=t_0} = \iiint_{\Omega_0} \operatorname{div} \vec{v}_0 \, dx_0 \, dy_0 \, dz_0 \ . \qquad \text{(VI,4;29 octavo)}$$

Mais l'instant t_0 ne joue aucun rôle particulier; la formule (VI,4;29 octavo) se transporte Immédiatement à un instant t quelconque :

$$\frac{\partial V}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \operatorname{div} \vec{v} \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Omega_t} \operatorname{div} \vec{v} \, d\tau \ , \qquad \text{(VI,4;29 noveno)}$$

$d\tau$ étant la mesure des volumes dans l'espace euclidien E.

On appelle <u>dilatation</u> du fluide, en <u>un point M de E , a l'instant t</u> , la limite de la dérivée logarithmique du volume, $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$, prise à cet instant t , lorsque l'ouvert Ω_t considéré "converge uniformément" vers ce point M .

La dilatation en M à l'instant t est donc donnée par :

$$\text{(VI,4;29 décimo)} \quad \left\{ \lim_{\Omega_t \to M} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \lim_{\Omega_t \to M} \frac{\iiint_{\Omega_t} \operatorname{div} \vec{v} \, d\tau}{\iiint_{\Omega_t} d\tau} = (\operatorname{div} \vec{v})(M)^{*} . \right.$$

C'est de là que vient le nom de "divergence". On exprimera que le fluide est <u>incompressible</u> en écrivant qu'à <u>chaque instant</u> t <u>le champ des vitesses a une divergence nulle.</u>

Ces résultats montrent bien de nouveau que la divergence ne dépend que de la structure affine de E . Car les volumes sont connus dès qu'on s'est fixé une forme fondamentale $\overset{N}{\xi}$ sur E , mais celle-ci s'élimine pour la considération de $\frac{dV}{V}$.

* Raisonnement déjà vu au corollaire 6 du théorème 102 du chapitre IV.

Calculs en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^3$

Considerons, comme toujours, l'application P de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par les formules (IV,9;93).

Les vecteurs $\frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial r}, \frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \theta}, \frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \varphi}$, ont été calculés page 672 du Cours de 2ème Division, et on a la formule (IV, 9;94). Gardons les mêmes notations. Soit alors f une fonction scalaire de classe C^1 dans $\mathbb{R}^3$. Si l'on appelle $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}$ $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$, les dérivées partielles en r, θ, φ de la composée $f \circ P$, ce sont aussi tout simplement les dérivées de f suivant les trois vecteurs $\vec{i}, r\,\vec{j}, r \sin\theta\,\vec{k}$.

En effet, le théorème des fonctions composées donne, par exemple :

$$\text{(VI,4;30)} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(m) = \frac{\partial}{\partial \varphi}\big(f \circ P\big)(m) = f'\big(P(m)\big) \cdot \frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \varphi}(m)$$

$$= \left(D_{\frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \varphi}(m)} f\right)(m) = \left(D_{r \sin\theta \vec{k}} f\right)(m) .$$

Mais alors ces dérivées ne sont autres, d'après la formule (III,3;21), que les produits scalaires de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ avec les vecteurs considérés: de sorte que finalement on a la formule :

$$\text{(VI,4;31)} \quad \frac{\partial f}{\partial r} = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f \,\middle|\, \vec{i}\right), \quad \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f \,\middle|\, \vec{j}\right), \quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f \,\middle|\, \vec{k}\right),$$

et par suite l'expression du gradient en coordonnées polaires:

$$\text{(VI,4;32)} \quad \overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{i} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{j} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{k} .$$

Cherchons maintenant les formes différentielles de degré 1 associées aux champs de vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, par la structure euclidienne de E . Les formes dr, $d\theta$, $d\varphi$, * sont associées, par définition, a $\overrightarrow{\text{grad}}\, r$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, \theta$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi$, c'est-a-dire, d'après (VI,4;32), à $\vec{i}$, $\frac{1}{r}\vec{j}$, $\frac{1}{r\sin\theta}\vec{k}$; on a donc :

$$(\text{VI},4;33) \qquad dr \sim \vec{i}\,, \qquad r\,d\theta \sim \vec{j}\,, \qquad r\sin\theta\, d\varphi \sim \vec{k}\,,$$

le symbole $\sim$ désignant l'équivalence entre forme différentielle de degré 1 et champ de vecteurs, définie par la structure euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

Comme alors $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ est une base orthonormale positive ** de l'espace $\mathbb{R}^3$, l'association entre les champs de vecteurs et les formes différentielles de degré 2, définie par la formule (VI,2;11 ter), s'écrit ici :

$$(\text{VI},4;34) \qquad \vec{i} \sim r^2 \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi\,, \quad \vec{j} \sim r\sin\theta\, d\varphi \wedge dr\,, \quad \vec{k} \sim r\, dr \wedge d\theta.$$

Enfin l'association entre les fonctions scalaires et les formes différentielles de degré 3 s'écrit ici :

$$(\text{VI},4;35) \qquad 1 \sim dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi\,.$$

Donnons-nous maintenant un champ de vecteurs par SIS trois composantes en coordonnées polaires, c'est-a-dire défini par :

$$(\text{VI},4;36) \qquad \vec{A} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}\,.$$

Il lui est associé, d'après (VI,4;34), la forme differentielle de degré 2 :

$$(\text{VI},4;37) \qquad A r^2 \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi + B r\sin\theta\, d\varphi \wedge dr + C r\, dr \wedge d\theta\,.$$

* On entend ici par dr , $d\theta$, $d\varphi$ les différentielles des fonctions r, θ , φ , sur $\mathbb{R}^3$. Par exemple, φ est la fonction $M \longrightarrow 3^e$ coordonnée de $P^{-1}(M)$, qui, à chaque point M , fait correspondre sa longitude.

** Nous l'admettons ici. Voir plus loin, note * page 137.

Son cobord est donné par :

$$(\text{VI},4;38)\quad \left[\left(2Ar + r^2\frac{\partial A}{\partial r}\right)\sin\theta + \left(B\cos\theta + \frac{\partial B}{\partial\theta}\sin\theta\right)r + r\frac{\partial C}{\partial\varphi}\right] dr\wedge d\theta\wedge d\varphi\,,$$

d'où la divergence * en utilisant la correspondance (VI,4;35) :

$$(\text{VI},4;39)\quad \operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{2A}{r} + \frac{B}{r}\operatorname{cotg}\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial C}{\partial\varphi}\,.$$

Calculons maintenant le laplacien d'une fonction scalaire.

On a la formule (VI,4;27) . Il suffit alors d'appliquer successivement les formules (VI,4;32) et (VI,4;39) pour trouver :

$$(\text{VI},4;40)\quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\operatorname{cotg}\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\,.$$

On voit que les méthodes Indiquées ici sont beaucoup plus commodes que celles qui ont été indiquées au chapitre III (Cours de 2ème Division, page 230); cela tient à ce qu'ici nous calculons le laplacien en utilisant son caractère Intrinsèquement lié à la structure euclidienne.

Primitive extérieure d'une forme différentielle

Soit $\vec{\omega}$ une forme différentielle continue de degré p sur $\Omega \subset E$, à valeurs dans $\vec{F}$ A quelle condition existe-t-il une primitive extérieure de $\vec{\omega}$, c'est-à-dire une forme différentielle $\vec{\varpi}$ de degré $p-1$ sur Ω , à valeurs dans $\vec{F}$, au moins de classe C^1 , telle que $d\vec{\varpi} = \vec{\omega}$?

Naturellement cela n'est possible que si le degré p de $\vec{\omega}$ est ≥ 1.

* Le facteur $(-1)^{N-1}$, qu'il faut prendre pour calculer la divergence (page 70), vaut $+1$ pour $N = 3$.

Supposons que $\vec{\omega}$ soit le cobord d'une forme $\vec{\varpi}$, non seulement de classe C^1, mais de classe C^2 ; alors on a nécessairement la condition $d\vec{\omega} = dd\vec{\varpi} = \vec{0}$; $\vec{\omega}$ doit être fermée. Cette condition apparaît donc au moins comme nécessaire pour que $\vec{\omega}$ soit le cobord d'une formez de classe C^2 Elle est automatiquement vérifiée si $p = N$, dimension de E *. Nous allons montrer la réciproque suivante :

Théorème (de Poincaré) 19 - Soit $\vec{\omega}$ une forme différentielle de degré $p \geq 1$ sur un ouvert Ω de E, à valeurs dans l'espace de Banach $\vec{F}$, de classe C^1, fermée, c'est-à-dire telle que $d\vec{\omega} = \vec{0}$. Supposons qu'il existe un référentiel de E, par rapport auquel Ω ait la propriété suivante : toute parallèle à l'un quelconque des vecteurs de la base de $\vec{E}$ rencontre Ω suivant un segment ouvert qui, s'il n'est pas vide, contient au moins un point dans l'hyperplan mené par l'origine parallèlement aux autres vecteurs de la base.

Alors il existe des formes différentielles $\vec{\varpi}$, de degré $p-1$, sur Ω, à valeurs dans $\vec{F}$, de classe C^1, telles que $d\vec{\varpi} = \vec{\omega}$; on les obtient toutes en ajoutant à l'une d'entre elles une forme différentielle arbitraire de degré $p-1$, sur Ω, à valeurs dans $\vec{F}$, de classe C^1, fermée, c'est-à-dire de cobord nul **.

Si $\vec{\omega}$ est de classe C^m, m fini ou infini ≥ 1, on peut choisir $\vec{\varpi}$ de classe C^m *** ; pour $p=0$, $\vec{\varpi}$ est nécessairement de classe C^{m+1}.

* Si $\vec{\omega}$ est de classe C^1 seulement, et si elle estcobord d'une forme $\vec{\varpi}$ de classe C^1seulement, on a encore $d\vec{\omega} = \vec{0}$, à cause de la note (*) page 66. Par contre, si $\vec{\omega}$ est seulement continue, il n'existe plus aucune propriété de ce genre; cependant, pour chercher si $\vec{\omega}$ est le cobord d'une forme $\vec{\varpi}$, il est naturel de supposer $\vec{\varpi}$ de classe-c', mais il n'y a aucune raison de supposer $\vec{\omega}$ dérivable. Nous verrons comment la théorie des distributions lève ces difficultés.

** Une telle forme fermée est donc une fonction constante, si $p-1=0$, un cobord d'une forme arbitraire de degré $p-2$ et de classe C^1, si $p-1 \geq 1$.

*** Mais toutes les solutions ne sont pas de classe C^m !

Les conditions que nous donnons pour Ω sont évidemment très restrictives; elles sont satisfaites, par exemple, si Ω est un pavé ouvert dont les côtés sont parallèles aux vecteurs de base d'un référentiel. ou si c'est une boule ouverte relativement à une norme raisonnable sur E .

On voit en tous cas facilement que, s'il est vrai que les restrictions précédentes sont beaucoup trop fortes, certaines restrictions de nature topologique sur Ω sont indispensables. Supposons par exemple que E soit le plan $\mathbb{R}^2$, que ω soit la forme différentielle de degré 1 couramment appelée $d\varphi$,"différentielle de l'argument ou angle polaire". c'est-à-dire

(VI,4;41)
$$d\varphi = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} .$$

Z

Alors ω est une forme différentielle de degré 1 de classe C^∞ , dans le complémentaire Ω de l'origine. Par ailleurs elle est fermée : $d\omega = 0$. Cependant on voit facilement qu'elle n'est pas, dans Ω , le cobord d'une fonction (autrement dit la différentielle ordinaire d'une fonction de classe C^1 sur Ω). Soit A un point de $\mathbb{R}^2$. Pour tout point M de $\mathbb{R}^2$, appelons $\Phi(A;M)$ l'angle dont il faut faire tourner A autour de l'origine, pour l'amener sur la demi-droite OM ; il est déterminé de manière unique si on lui impose la restriction $-\pi \leqslant \Phi(A;M) < \pi$

Appelons $\mathcal{V}$ l'ensemble des points M de Ω pour lesquels $-\pi < \Phi(A,M) < \pi$; c'est un voisinage ouvert de A dans Ω.

Dans ce voisinage de A , il y a des primitives de ω , à savoir les fonctions $\varphi(M) = \varphi_0 + \Phi(A;M)$; ce sont les seuls, $\mathcal{V}$ étant connexe. Mais il n'y a pas de primitive dans Ω tout entier, il n'y a pas de détermination uniforme et continue de l'angle polaire. En effet, toute primitive dans Ω est a fortiori une primitive dans $\mathcal{V}$; donc elle est dans $\mathcal{V}$ de la forme ci-dessus. Or, lorsque M tend, en restant dans $\mathcal{V}$ vers un point M_0 tel que $\Phi(A;M_0) = -\pi$, mais de part et d'autre de la demi-droite AM, , $\varphi(M)$ tend vers $\varphi_0 - \pi$ et $\varphi_0 + \pi$ respectivement, donc φ ne peut pas se prolonger en une fonction continue sur Ω .

Z

On voit, par cet exemple, que la dénomination $d\varphi$ est une erreur, puisque ω n'est pas le cobord d'une fonction; cette dénomination n'est valable que dans un ouvert plus petit, tel que $\mathcal{V}$, où une fonction φ est définissable. Naturellement, si Ω ne vérifie pas des propriétés suffisantes pour l'existence d'une primitive de la forme différentielle $\vec{\omega}$, on peut toujours affirmer que tout point a de Ω possède un voisinage $\mathcal{V}$ dans Ω , dans lequel une telle primitive existe; il suffit en effet de prendre pour voisinage un pavé ouvert ou une boule ouverte.

<u>Démonstration</u> - S'il existe une primitive extérieures, il est tout à fait évident qu'on obtient toutes les autres en lui ajoutant une forme fermée $\vec{\theta}$ arbitraire, car alors $d(\vec{\varpi}+\vec{\theta}) = d\vec{\varpi} = \vec{\omega}$. Il y aura donc une infinité de primitives (car il y a une infinité de formes fermées : toute forme différentielle à coefficients constants est fermée. Pour le degré 0, comme Ω est connexe, les seules fonctions fermées sont les constantes; pour les degrés supérieurs, il y a bien d'autres formes fermées !).

Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur la dimension N de E. L'énoncé est trivialement exact pour $N \leq p-1$, car alors la forme $\vec{\omega}$ est nécessairement identiquement nulle, puisqu'elle est de degré $p \geq N+1$.

Supposons donc le théorème démontré pour tous les espaces affines de dimension 1,2,..., $N-1$, et démontrons le pour les espaces de dimension N. Bien que, dans l'énoncé, le corps des scalaires puisse être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous ne donnerons ici la démonstration que si c'est $\mathbb{R}$. Le cas de $\mathbb{C}$ ne pourra être étudié qu'après la théorie des fonctions de variables complexes.

Nous pourrons naturellement choisir dans E un référentiel, et identifier ainsi E à $\mathbb{R}^N$.

Dans la forme $\vec{\omega}$ exprimée sous la forme (VI,3;6), mettons en évidence tous les'termes qui contiennent&, . On peut alors l'écrire :

$$\vec{\omega} = dx_1 \wedge \vec{L} + \vec{M}, \tag{VI,4;42}$$

où $\vec{L}$ et $\vec{M}$ sont des formes différentielles de degrés respectifs $p-1$ et p, et qui, lorsqu'on les exprime sous la forme (VI,3;6), ne contiennent pas la différentielle dx_1.

Nous allons alors considérer une forme différentielle $\vec{\Lambda}$, de degré $p-1$, vérifiant l'équation :

$$\frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial x_1} = \vec{L} \tag{VI,4;43}$$

Pour cela, nous remarquerons qu'il suffit de la définir, en vertu des hypothèses relatives à Ω, par l'intégrale

(VI,4;44) $$\vec{\Lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \int_0^{x_1} \vec{L}(\xi, x_2, \ldots, x_N)\, d\xi .$$

Cette intégrale possède bien un sens. En effet, pour tout point $x_1, x_2, \ldots, x_N$, de Ω, le segment joignant ce point au point $(0, x_2, \ldots, x_N)$, appartient entièrement à Ω, et en conséquence L y est parfaitement définie et continue. Pour $x_1, x_2, \ldots, x_N$, fixés, la quantité qui figure au 2ème membre sous le signe $\int$ est une fonction continue de ξ à valeurs dans $A\mathcal{L}_{p}(\vec{E}^{p-1}; \vec{F})$. Comme $\vec{F}$ est supposé complet, $A\mathcal{L}_{p-1}(\vec{E}^{p-1}; \vec{F})$ est un Banach, donc l'intégrale a un sens, et définit bien $\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ comme un élément de $A\mathcal{L}_{p-1}(\vec{E}^{p-1}; \vec{F})$, donc $\vec{\Lambda}$ comme une forme différentielle de degré $p-1$ sur Ω à valeurs dans F. On voit bien alors que $\vec{\Lambda}$ admet une dérivée partielle par rapport à x_1, qui n'est autre que $\vec{L}$.

On voit en outre que, si L est de classe C^m, $m \geq 1$, il en est de même de $\vec{\Lambda}$. En effet, toute dérivée partielle de $\vec{\Lambda}$, ne faisant pas intervenir la dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x_1}$, se fait directement sous le signe $\int$, en vertu du corollaire du théorème 115 du chapitre IV. Toute dérivée partielle contenant la dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x_1}$ s'obtient en dérivant par rapport aux variables $x_2, \ldots, x_N$, sous le signe $\int$, tandis qu'au contraire la dérivation partielle par rapport à x_1 se fait en utilisant la dérivée d'une intégrale par rapport à sa borne supérieure (théorème 89 du chapitre IV).

En particulier, $\vec{L}$ étant toujours supposée de classe C', $\vec{\Lambda}$ est aussi de classe C', et admet un cobord $d\vec{\Lambda}$, qui se calcule par la formule :

(VI,4;45) $$d\vec{\Lambda} = dx_1 \wedge \frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{N} dx_j \wedge \frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial x_j}$$
$$= dx_1 \wedge \vec{L} + d'\vec{\Lambda} ,$$

où d' est une opération cobord "par rapport à $x_2,\dots,x_N$", c'est-à-dire un cobord partiel qui vaut $d'=\sum_{j=2}^{N} dx_j \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$.
On a donc aussi :

$$(d\vec{\Lambda})(x_1,x_2,\dots,x_N) = dx_1 \wedge \vec{L}\ (x_1,x_2,\dots,x_N) + \int_0^{x_1}\Big((d'\vec{L})(\xi, x_2,\dots,x_N)\Big)\,d\xi \tag{VI,4;46}$$

Mais $\vec{\omega}$ n'est pas arbitraire, puisqu'elle est fermée.
On a donc la relation :

$$\begin{aligned}\vec{0} &= d\vec{\omega} = d\,(dx_1 \wedge \vec{L}\,) + d\vec{M} \\ &= \left(d\,dx_1 \wedge d\vec{L} - dx_1 \wedge d\vec{L}\right) + d\vec{M} \\ &= -\,dx_1 \wedge d'\vec{L} + dx_1 \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1} + d'\vec{M}.\end{aligned} \tag{VI,4;47}$$

Si en particulier nous réunissons tous les termes qui contiennent dx_1, puis tous ceux qui ne le contiennent pas, nous devons obtenir chaque fois $\vec{0}$, donc :

$$d'\vec{L} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1} \quad ; \quad d'\vec{M} = \vec{0}$$

$$dx_1 \wedge \left(-d'\vec{L} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1}\right) = 0 \ ; \quad d'\vec{M} = \vec{0} \tag{VI,4;48}$$

La parenthèse de la 1ère égalité ne contient aucun terme en dx_1 ; donc son produit extérieur par dx_1 ne peut être nul que si elle est nulle elle-même. D'où :

$$d'\vec{L} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1} \quad ; \quad d'\vec{M} = \vec{0} \tag{VI,4;48 bis}$$

On a donc, d'après (VI,4;46) et la. première formule (VI,4; 48 bis) :

(VI,4;49) $$\overrightarrow{d\Lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = dx_1 \wedge \vec{L}(x_1, x_2, \ldots, x_N) + \int_0^{x_1} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_N)\, d\xi$$
$$= dx_1 \wedge \vec{L}(x_1, x_2, \ldots, x_N) + \vec{M}(x_1, x_2, \ldots, x_N) - \vec{M}(0, x_2, \ldots, x_N).$$

Donc, non seulement $\vec{\Lambda}$ est de classe C^m, mais $d\Lambda$ aussi est de classe C^m (ce qui ne signifie nullement que $\vec{\Lambda}$ soit de classe C^{m+1} ! Le cobord $\overrightarrow{d\Lambda}$ ne fait Intervenir qu'une partie des dérivées partielles de $\vec{\Lambda}$! Par exemple une forme de degré maximum et de classe C^1 est toujours fermée. donc son cobord, nul, est de classe C^∞ , ce qui ne prouve rien sur la forme elle-même).

On a donc l'égalité suivante (à cause de (VI,4;42) et (VI,4;49)) :

(VI,4;50) $$(\vec{\omega} - \overrightarrow{d\Lambda})(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \vec{P}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \vec{M}(0, x_2, \ldots, x_N).$$

Si nous pouvons prouver que $\vec{P}$ est le cobord d'une forme différentielle de degré $p-1$, comme il en est de même de $\overrightarrow{d\Lambda}$, cobord de $\vec{\Lambda}$, il en sera de même de $\vec{\omega}$. De plus, $\vec{P}$ étant de classe C^m, nous devons montrer qu'il est le cobord d'une forme différentielle de classe C^m .

Mais $\vec{P}$ est une forme différentielle où n'interviennent ni x_1 ni ξ; en effet, dans $\vec{M}$, dx_1 n'intervient pas, et on prend sa valeur en $(0, x_2, \ldots, x_N)$, donc x_1 n'intervient. pas non plus. Elle est fermée, car, d'après la 2ème formule (VI,4;48) :

(VI,4;51) $$d\vec{P} = d'\vec{M} = \vec{0} .$$

On peut donc considérer $\vec{P}$ comme une forme différentielle fermée, de classe C^m, de degré p, sur un ouvert Ω_1 de l'espace $\mathbb{R}^{N-1}$, ayant les mêmes propriétés que l'ouvert initial Ω dans l'espace $\mathbb{R}^N$: à savoir la trace de Ω sur l'hyperplan $x_1 = 0$. Il résulte alors de l'hypothèse de récurrence qu'il existe bien une forme différentielle $\vec{\theta}$, de degré $p-1$, de classe C^m, sur cet ouvert Ω_1, admettant pour cobord $\vec{P}$, et ceci démontre l'existence de $\vec{\varpi}$.

Cette démonstration nous donne en même temps une manière pratique de procéder. Par récurrence, on se ramènera à des formes différentielles contenant un nombre de plus en plus petit de variables. A partir d'un certain moment, on arrivera à une forme différentielle a p variables et de degré p.

Naturellement le pas suivant nous mènerait à une forme de degré p -1 donc identiquement nulle. En fait, il n'est pas inutile de voir exactement comment les choses se passent à ce moment. Supposons donc que nous soyons parvenus à une forme différentielle $\vec{\omega}$, de classe C", de degré p, dépendant de p variables que nous appellerons, en changeant légèrement les notations, $y_1, y_2, \ldots, y_p$. Alors on peut l'écrire sous la forme (VI,4;42), avec dy_1 au lieu de dx_1; mais ici $\vec{\mathbf{M}} = \mathbf{0}$, autrement dit on a :

(VI,4;51 bis) $$\vec{\omega} = \vec{f}\, dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_p = dy_1 \wedge (\vec{f}\, dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_p) = dy_1 \wedge \vec{L}$$

Il suffit alors de déterminer $\vec{\Lambda}$ par la méthode précédente, et maintenant le problème est terminé, car on a exactement $\vec{\omega} = d\vec{\Lambda}$.

Pour $p = 1$, on voit que, si $\vec{\omega}$ est de classe C^m, la fonction obtenue $\vec{\varpi} = \vec{f}$ est trivialement de classe C^{m+1}, puisque c'est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\vec{F}$, et dont la dérivée est une application de classe C^m de Ω dans $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$. Ainsi le théorème est complètement démontré, Nous énoncerons d'ailleurs le cas particulier $p = 1$ sous forme d'un corollaire :

Corollaire 1 - Pour que des fonctions $A_1, A_2, \dots, A_N$, de classe C^1, définies sur un ouvert Ω d'un espace affine de dimension N ayant la propriété énoncée dans le théorème, à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$, soient les dérivées partielles $\vec{A}_i = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}$ d'une fonction $\vec{f}$ de classe C^1 définie sur Ω à valeurs dans $\vec{F}$, il est nécessaire et suffisant qu'elles vérifient les relations de compatibilité

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad . \tag{VI,4;52}$$

Dans ce cas, la fonction $\vec{f}$ est déterminée à une constante additive près et de classe C^2. En outre, si les fonctions $\vec{A}_i$ sont de classe C^m, la fonction $\vec{f}$ est de classe C^{m+1} *

Si E est un espace euclidien affine orienté de dimension 3, on a, en utilisant les champs de vecteurs, le corollaire suivant :

Corollaire 2 - Soit Ω un ouvert d'un espace affine euclidien oriente de dimension 3, ayant la propriété énoncée dans le théorème.

1°/ Pour qu'un champ de vecteurs, défini sur Ω et de classe C^1, soit le gradient d'une fonction réelle de classe C^1, il faut et il suffit que son rotationnel soit nul; dans ce cas, la fonction f est définie à une constante additive près.

* Comme nous l'avons dit, note * page 79, il n'est pas naturel du tout de supposer les $\vec{A}_i$ de classe C^1, Nous verrons, en théorie des distributions, ce qui remplace la condition de compatibilité (VI,4;52), si elles sont seulement continues.

2°/ Pour qu'un champ de vecteurs, défini sur Ω et de classe C^1, soit le rotationnel d'un champ de vecteurs de classe C^1, il faut et il suffit que sa divergence soit nulle; dans ce cas, le champ dont il est le rotationnel est défini à un champ de vecteurs près, qui est le gradient d'une fonction arbitraire de classe C^2.

3°/ Toute fonction de classe C^1, définie sur Ω, est la divergence d'un champ de vecteurs de classe C^1 ; ce champ de vecteurs est défini à un champ de vecteurs près, qui soit de classe C^1 et rotationnel d'un champ de vecteurs de classe C^1.

§ 5 ORIENTATION DES VARIETES DIFFERENTIABLES SUR LE CORPS DES REELS

Soit V une variété, de dimension n, de classe C^1, contenue dans un espace affine E de dimension N.

Qu'entendons-nous par orientation de la variété V ? Soit a un point de V ; alors V possède en a un sous-espace vectoriel tangent de dimension n, que nous avons noté $\vec{T}(a\,;V)$; c'est un espace vectoriel sur le corps des réels; il est donc susceptible d'une orientation.

Système continu d'orientations d'une variété

Nous appellerons alors système d'orientations $\mathscr{E}$ de la variété V un choix, pour chaque a de V, d'une orientation de son espace vectoriel tangent $\vec{T}(a\,;V)$. Un système d'orientations de V est donc une fonction $\mathscr{E}$, définie sur V, qui, en chaque point a de V, prend sa valeur $\mathscr{E}(a)$ dans un ensemble à deux éléments, à savoir les deux orientations possibles de $\vec{T}(a\,;V)$.

Nous devons maintenant dire ce que nous entendons par un système $\mathscr{E}$ continu d'orientations de V (ou d'une partie de V).

On conçoit tout de suite que ce n'est pas là la notion habituelle de fonction continue, car un système d'orientations n'est pas une fonction du type habituel, puisque l'ensemble dans lequel elle prend sa valeur, en chaque point a, dépend du point a.

Soit $\Phi : \vartheta \longrightarrow \Phi(\vartheta)$, une représentation paramétrique vraie, de classe C', de dimension n, d'un ouvert $\Phi(\vartheta)$ de V. Soit α le point de ϑ tel que $\Phi(\alpha) = a$. Nous savons que l'application dérivée $\Phi'(\alpha)$ établit une bijection linéaire de $\mathbb{R}^n$ sur $\vec{T}(a;V)$. Il en résulte qu'elle met en correspondance les deux classes de bases de $\mathbb{R}^n$, et les deux classes de bases de $\vec{T}(a;V)$ *. Nous appellerons alors $\theta(\alpha;\Phi;\mathcal{E}) = \theta(\alpha;\Phi) = \theta(\alpha)$ la quantité égale a $+1$ si Φ met en correspondance la classe positive de $\mathbb{R}^n$ (pour son orientation canonique habituelle) avec la classe positive de $\vec{T}(a;V)$ pour $\mathcal{E}(a)$, et égale à -1 dans le cas contraire. Ainsi la carte Φ définit une fonction $\theta : \alpha \longrightarrow \theta(\alpha;\Phi)$, définie sur l'ouvert ϑ, à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $+1$, -1. La connaissance de cette fonction θ sur l'ouvert ϑ détermine complètement le système d'orientations considéré sur la partie $\Phi(\vartheta)$ de V. Mais, cette fois ci, la fonction θ prend ses valeurs dans un ensemble à deux éléments qui est toujours le même, a savoir l'ensemble $\{+1, -1\}$

On dira alors qu'un <u>système $\mathcal{E}$ d'orientations de **V** est continu en un point</u> a, <u>relativement à uns carte Φ</u> dont **l'image recouvre a**, <u>si la fonction θ associée a ce système d'orientations et à</u> Φ <u>est continue au point</u> α. Comme cette fonction prend ses valeurs dans l'espace discret a deux éléments $\{+1, -1\}$, dire qu'elle est continue au point α, c'est dire qu'elle est constante dans tout un voisinage de α.

On dira que le système d'orientations $\mathcal{E}$ est continu, relativement à Φ, sur tout l'ouvert $\Phi(\vartheta)$, SI la fonction θ associée à Φ est continue sur tout l'ouvert ϑ.

* Il est en effet clair qu'une bijection linéaire u d'un espace vectoriel $\vec{E}$ sur un autre $\vec{F}$ transforme 2 bases e, e', de même classe (resp. de classes opposées) en 2 bases $u(e)$, $u(e')$, de même classe (resp. de classes opposées). En effet, le déterminant de $u(e')$ par rapport à $u(e)$ est égal à celui de e' par rapport à e.

Cela signifie que tout point de $\mathcal{O}$ possède un voisinage dans lequel θ est constante; ou encore que θ est constante sur tout ouvert connexe de $\mathcal{O}$, et en particulier sur 6 lui-même, s'il est connexe. En effet, chacun des deux points $+1$, -1, est un ensemble à la fois ouvert et fermé dans l'ensemble à deux éléments considéré, et par conséquent la continuité de θ revient à dire que l'image réciproque de chacun de ces deux éléments est à la fois ouverte et fermée dans l'espace topologique $\mathcal{O}$.

Théorème 20 - Si un système d'orientation6 de V est continu en un point a, relativement à une *carte* Φ dont l'image recouvre a, il est continu en a, ~~par rap~~port à toute autre carte dont l'image recouvre a.

Démonstration

Soient en effet $\Phi_1 : \mathcal{O}_1 \longrightarrow \Phi_1(\mathcal{O}_1)$ et $\Phi_2 : \mathcal{O}_2 \longrightarrow \Phi_2(\mathcal{O}_2)$, deux cartes dont les images recouvrent a, avec $\Phi_i(\alpha_i) = a$. Comme il s'agit de la continuité au point a lui-même, nous pouvons nous restreindre à des ouverts plus petits que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$. Comme il existe un même voisinage ouvert de a dans V, qui est recouvert à la fois par les Images de ces deux cartes, nous pourrons nous borner aux Images réciproques de cet ouvert; en les appelant encore $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ cela revient à nous placer dans le cas particulier où les images $\Phi_1(\mathcal{O}_1)$, $\Phi_2(\mathcal{O}_2)$, sont le même ouvert de V. On sait alors, d'après le corollaire 1 du théorème 33 du chapitre III, que l'application $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 = \Phi_{2,1}$ est un difféomorphlsme de classe C' de $\mathcal{O}_1$ sur $\mathcal{O}_2$,

Considérons alors une base de $\vec{T}(a\,;\,V)$, positive pour $\mathcal{E}(a)$; il lui correspond deux bases de $\mathbb{R}^n$, par les applications $(\Phi_1'(\alpha_1))^{-1}$ et $(\Phi_2'(\alpha_2))^{-1}$, dont les signes sont, pour l'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$, respectivement ceux de $\theta_1(\alpha_1) = \theta(\alpha_1\,;\,\Phi_1)$ et $\theta_2(\alpha_2) = \theta(\alpha_2\,;\,\Phi_2)$. Mals on passe de cette première base de $\mathbb{R}^n$ à la deuxième par la dérivée $\Phi'_{2,1}(\alpha_1)$, application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

Donc elles sont de même signe ou de signe contraire, suivant que le déterminant jacobien $\det \Phi'_{2,1}(\alpha_1)$ est > 0 ou < 0.

On a donc finalement la formule :

$$\text{(VI,5,1)} \qquad \theta_2(\alpha_2) = \theta_1(\alpha_1)\, sgn\left(\det(\Phi'_{2,1}(\alpha_1))\right)$$

Mais le signe du déterminant jacobien est évidemment constant au voisinage du point α_1, puisque la fonction $\Phi_{2.1}$ est de classe C^1, et que son déterminant jacobien. qui est donc continu, ne s'annule pas. Si donc le signe de θ_1 reste constant au voisinage de α_1, celui de θ_2 reste aussi constant au voisinage de α_2, ce qui démontre le théorème.

Ceci nous autorise alors à poser la définition suivante : On dit qu'un système $\mathcal{C}$ d'orientations de V est continu au point a, s il est continu au point a relativement à toute carte de la variété, dont l'image recouvre a ; un système $\mathcal{C}$ d'orientations de V est continu sur une partie **A** de **V** **ou** sur **V** elle-même, s'il est continu en tout point a de A ou de V.

Comparaison de 2 systèmes continus d'orientations

Considérons deux systèmes d'orientations $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, d'une variété V. Alors, en tout pointu, on pourra parler du rapport de ces deux systèmes d'orientations, égal à + 1 ou - 1, selon que les deux orientations $\mathcal{C}_1(a)$, $\mathcal{C}_2(a)$, de $\vec{T}(a\,;\,V)$, définies par ces deux systèmes, sont égales ou opposées.

Le rapport de deux systèmes d'orientations d'une variété V est donc une fonction définie sur la variété, à valeurs dans l'ensemble a deux éléments $\{+1, -1)$.

Théorème 21 - Si deux systèmes d'orientations $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, d'une variété V sont continus au point a, le rapport de ces deux systèmes d'orientations est une fonction constante dans tout un voisinage de a *. Réciproquement, si ce rapport est une fonction constante dans un voisinage de a, et si l'un des deux systèmes d'orientations est continu en a, l'autre est aussi continu en a.

* Ce n'est pas aussi évident qu'il le parait : un système d'orientations continu n'est pas une fonction continue au sens habituel, puisque sa valeur, en a, est dans un ensemble variable avec a. On ne sait donc pas immédiatement que le rapport de 2 telles "fonctions continues" soit continu.

Si en effet nous considérons une carte Φ dont l'image $\Phi(\mathcal{O})$ contienne le point a , le rapport des deux systèmes d'orientations au point x de V n est autre que

$$\theta_1(\Phi^{-1}(x);\Phi)\ \theta_2(\Phi^{-1}(x);\Phi) \tag{VI, 5;2}$$

θ_1 et θ_2 étant les fonctions attachées à Φ et aux 2 systèmes d'orientation. On en déduit Immédiatement les conclusions.

Corollaire 1 - Si deux systèmes d'orientations d'une variété V sont continue en a. et coïncident en a , ils coïncident dans tout un voisinage du point a .

Corollaire 2 - Si la variété V est connexe, deux systèmes continus d'orientations de V sont identiques sur V tout entiere, ou opposés sur V toute entière.

En effet, leur rapport est une fonction continue sur V, à valeurs dans $\{+1,-1\}$; l'image réciproque, par cette fonction de $\{1\}$ ou de $\{-1\}$ est à la fois ouverte et fermée, donc vide ou identique à V .

Orientabilité et orientation d'une variété

Définition - On dit qu'une variété V , de classe C^1 , de dimension n , est orientable, si elle possède au moins un système continu d'orientations. On dit qu'elle est orientée, si l'on a fixé un tel système continu, qui s'appelle alors une orientation de V . Si V est connexe et si elle est orientable, elle possède deux orientations possibles, et la fixation de l'orientation de l'espace vectoriel tangent, en un point particulier, fixe l'orientation de la variété toute entière. Par exemple, un espace affine est une variété orientable : orienter l'espace affine équivaut d'ailleurs ici à orienter son espace vectoriel associé, puisqu'il est l'espace vectoriel tangent en n'importe quel point de la variété.

Dans ce qui suit, nous allons donner certains exemples de variétés orientables, et de variétés non-orientables.

Par convention, si une variété est de dimension 0 , c'est-à-dire si c'est un espace de points isoles, on conviendra qu'orienter la variété signifie affecter chacun de ses points du signe + ou du signe – .

SI la variété est connexe, c'est-à-dire réduite à un seul point, elle possède bien encore deux orientations opposées

Si V est une variété orientable, on pourra noter par $\overset{\curvearrowright}{V}$ (V surmonté d'une flèche courbe) la variété munie d'une orientation. Par convention, $\overset{\curvearrowleft}{V}$ désigneta alors V munie de l'orientation opposée.

Orientation d'une variété par des cartes co-orientables

Soient Φ_1 et Φ_2 2 cartes d'un atlas d'une variété V. On dit qu'elles sont co-orientables, si, ou bien leurs images sont disjointes, ou bien l'application $\Phi_{2,1} = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ de Ω_1 sur Ω_2 (où Ω_i est l'image réciproque par Φ_i de l'intersection $\Omega = \Phi_1(\mathcal{O}_1) \cap \Phi_2(\mathcal{O}_2)$) a un déterminant jacobien partout > 0 .

Théorème 21 bis - Pour qu'une variété V soit orientable, il faut et il suffit qu Il en existe un atlas forme de cartes deux a deux co-orientables, la donnée d'un tel atlas fixe une orientation de V .

Démonstration - Supposons V orientée. Soit Φ une carte, telle que $\mathcal{O}$ soit connexe. La fonction θ relative à Φ est alors constante sur $\mathcal{O}$. Si cette constante est $+1$, ne changeons rien et posons $\Psi = \Phi$; si elle est -1, considérons la nouvelle carte Ψ définie par $\Psi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Phi(-u_1, u_2, \ldots, u_n)$; elle applique un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (qui n'est plus $\mathcal{O}$, mais son transformé par $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \to (-u_1, u_2, \ldots, u_n)$) sur le même ouvert de V , et sa fonction θ est maintenant identique à $+1$. Le système de toutes ces cartes Ψ est co-orientable, en vertu de (VI,5;1). Comme les $\Psi(\mathcal{O}) = \Phi(\mathcal{O})$ forment encore un recouvrement de V , elles forment bien un atlas de cartes deux à deux co-orientables.

Inversement, supposons donné un tel atlas. Pour un point x de V , si nous considérons une orientation $\mathcal{C}(x)$ de $\vec{T}(x; V)$, alors, pour toutes les cartes Φ dont l'image recouvre x , la quantité $\theta(\Phi^{-1}(x); \Phi)$ associée est la même, an vertu de (VI,5;1) et de l'hypothèse de co-orientabilité des cartes. On peut donc choisir $\mathcal{C}(x)$ de manière que cette quantité soit toujours $+1$. Alors on a défini un système d'orientation $\mathcal{C}$ de V; il est continu puisque θ est toujours t 1, donc on a bien orienté **V** à partir de l'atlas.

Orientation d'une variété par des champs de vecteurs continus

Théorème 22 - Soit V une variété de dimension n, munie d'un systeme d'orientations $\mathcal{C}$. Soient $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$ ($\vec{U}_i : x \to \vec{U}_i(x)$), n champs de vecteurs définis sur **V**, les $\vec{U}_i(x)$ étant tangents à la variété V en x, et indépendants. Si le système d'orientations $\mathcal{C}$ est continu au point a, alors, quel que soit le système de n champs de vecteurs considéré, pourvu qu'ils soient continus en a, le signe de la base $U_1(x), U_2(x), \ldots, U_n(x)$, pour l'orientation $\mathcal{C}(x)$, est constant pours assez voisin de a .

Réciproquement, si pour un système de n champs de vecteurs particuliers, continus en a, ce signe est constant au voisinage du point a, alors le systeme $\mathcal{C}$ d'orientations de V est continu au pointa .

Démonstration - Soit Φ une carte dont l'image $\Phi(\mathcal{O})$ recouvre un voisinage de a, . Soient $x = \Phi(\xi)$, $a = \Phi(\alpha)$.
Au vecteur $\vec{U}_i(x)$ correspond, par l'application $(\Phi'(\xi))^{-1}$, un vecteur $\vec{\mathfrak{U}}_i(\xi)$ de $\mathbb{R}^n$. On définit donc à partir du système des n champs de vecteurs indépendants $\vec{U}_i$ considérés, un système de n champs de vecteurs indépendants $\vec{\mathfrak{U}}_i$ sur 6.
Le corollaire 6 du théorème 33 quarto du chapitre III montre que, si $\vec{U}_i$ est continu au point $a = \Phi(\alpha)$, le champ correspondant $\vec{\mathfrak{U}}_i$ sur $\mathcal{O}$ est continu au point α. Le signe du système des n vecteurs $\vec{\mathfrak{U}}_i(x)$ en un point x de 6 (pour l'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$) n'est autre que le signe du déterminant de ces n vecteurs; mais ce déterminant est continu en α (puisque les champs sont continus) et toujours $\neq 0$, donc son signe est continu, c'est-a-dire constant, dans un voisinage du point ci Or le signe du système des $\vec{U}_i(x)$, pour $\mathcal{C}(x)$, est égal au produit du signe précédent par $\theta(\xi ; \Phi)$.

Il en résulte bien que le signe du système des $\vec{U}_i(x)$ est constant, pour x voisin de a , si et seulement si la fonction θ est constante au voisinage du point **a** c'est-à-dire si et seulement si le système $\mathcal{C}$ d'orientation; de V est continu au pointa relativement à la carte Φ, donc simplement continu au point a , d'après le théorème 20.

Remarque - Il existe toujours un système de n champs de vecteurs tangents indépendants, $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$, continus au point a de V. Il suffit de considérer une carte Φ, dont l'image recouvre a, et de prendre pour $\vec{U}_i(x)$ l'image par $\Phi'(\xi)$, $\xi = \Phi^{-1}(x)$, du i-ième vecteur de base de $\mathbb{R}^n$.

On construit ainsi, sur $\Phi(\mathcal{O})$, un système de n champs continus indépendants. Mais, en général, on ne peut pas construire un système de n champs continus indépendants sur V tout entière, ni même toujours un seul champ continu de vecteurs tangents partout $\neq \vec{0}$. Voir page

Z

Orientation d'une variété par le signe des formes différentielles réelles

Théorème 23 - Soit V une variété de classe C^1, de dimension n. Supposons V munie d'un système d'orientations $\mathcal{C}$, Considérons une forme différentielle réelle ω, de degré n, définie sur V, et dont la restriction, en chaque point x de V, définisse une forme n-linéaire antisymétrique non nulle sur $\vec{T}(x; V)$. Si le système $\mathcal{C}$ d'orientations de V est continu au point a, alors le signe du n-covecteur, défini par ω au point x sur $\vec{T}(x; V)$, relativement à l'orientation $\mathcal{C}(x)$ de cet espace, est constant pour x assez voisin de a, quelle que soit la forme ω continue en a.

Inversement si, pour une forme particulière ω continue en a, ce signe est constant au voisinage de a, alors le système d'orientations considéré $\mathcal{C}$ est continu au point a.

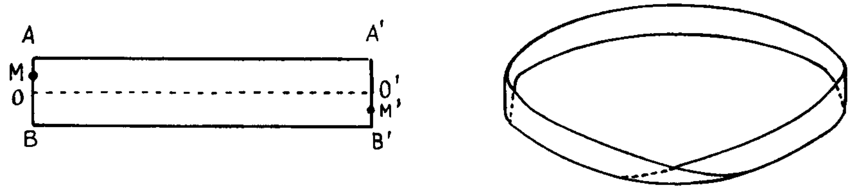
Démonstration - soit $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$ un système de n champs de vecteurs tangents à V, indépendants, continus en a ; nous avons vu, à la remarque qui précède, que de tels champs existent. Alors la fonction réelle $x \longrightarrow \omega(x) \cdot (\vec{U}_1(x), \vec{U}_2(x), \ldots, \vec{U}_n(x))$ est continue et $\neq 0$ au point a, donc de signe constant dans un voisinage de a. Or son signe est le produit du signe du n-covecteur $\omega(x)$ et du signe de la base $\vec{U}_1(x), \vec{U}_2(x), \ldots, \vec{U}_n(x)$ de $\vec{T}(x; V)$, par rapport à l'orientation $\mathcal{C}(x)$ de $\vec{T}(x; V)$. Le signe de la forme est donc constant au voisinage de a, si et seulement si le signe du système de n vecteurs l'est, c'est-à-dire, d'après le théorème 23, si le système d'orientations de V est continu au point a.

Remarque - Si, pour un système d'orientations de V, une forme différentielle réelle ω de degré n définie sur V, est telle que, en chaque point x de V, le n-covecteur $\omega(x)$ sur $\overset{*}{T}(x; V)$ soit $\geqslant 0$ (voir définition d'un n-covecteur $\geqslant 0$ page), on écrira $\omega \geqslant 0$. Cette notion de signe d'une forme différentielle de degré maximum n sur une variété V de dimension n, n'a de sens que, par rapport à un système d'orientations de V.

Exemple d'une variété non-orientable: la ceinture de Möbius

On obtient une ceinture habituelle en partant d'un rectangle A B B' A', et en unissant les deux côtés extrêmes AB et A'B', A venant sur A' et B venant sur B'.

La ceinture de Mobius est tordue; elle s'obtient bien en unissant les deux bords extrêmes comme précédemment, mais après avoir tordu la ceinture, c'est-à-dire en unissant A à B' et B à A', M venant sur M' si AM = B'M'. On peut définir une telle ceinture comme surface de classe C^∞ et dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$.

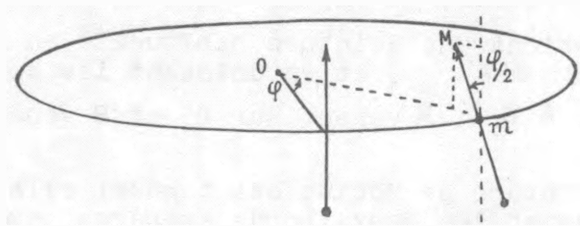


On prendra pour cercle moyen de la ceinture, le cercle Γ défini par les équations $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, et d'équations paramétriques 5 $= a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $z = 0$

En appelant $m(\varphi) = m$ le point correspondant au paramètre φ de ce cercle, on définira sur la ceinture une fibre, segment ouvert de longueur $\ell < a$, perpendiculaire au cercle moyen, par la formule

$$\text{(VI,5;3)} \qquad M(\varphi, \rho) = m(\varphi) - \rho \sin \frac{\varphi}{2} \vec{u} + \rho \cos \frac{\varphi}{2} \vec{e}_3 , \quad -\ell < \rho < \ell ,$$

<étant le vecteur unitaire de l'axe des z et $\vec{u}$ le vecteur unitaire de l'axe Om ; $\overrightarrow{Om} = a\vec{u}$. Pour $\varphi = 0$, ce segment est vertical; quand φ augmente, il "tourne autour de la tangente au cercle moyen", de l'angle $\frac{\varphi}{2}$ exactement; quand m revient à sa position initiale, avec $\varphi = 2\pi$, le segment est aussi revenu dans sa position initiale, mais s'est "retourné".



Ceci donne la représentation paramétrique de la ceinture de Möbius par les formules :

$$
(\text{VI},5;4)\qquad
\left.
\begin{aligned}
x &= \left(a - \rho \sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi \\
y &= \left(a - \rho \sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi \\
z &= \rho \cos\frac{\varphi}{2}
\end{aligned}
\right\}
\qquad
\begin{aligned}
&\varphi \in \mathbb{R}\,,\ -\ell < \rho < \ell\ ; \\
&a, \ell,\ \text{donnés},\ 0 < \ell < a.
\end{aligned}
$$

On remarque bien que, si l'on change φ en $\varphi + 2\pi$, et ρ en $-\rho$, on retombe sur le même point de la ceinture. La représentation précédente est donc une "représentation paramétrique impropre"; mals, localement, c'est une représentation paramétrique vraie, au sens du chapitre III, page 306. En effet, si l'on se borne à faire varier (φ, ρ) dans un rectangle ouvert $\mathcal{O}_{\varphi_0} = \mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$, défini par $\varphi_0 - \pi < \varphi < \varphi_0 + \pi$, $-\ell < \rho < +\ell$,(VI,5;4) définit un homéomorphisme Φ , de classe C^∞ , de $\mathcal{O}$ sur un ouvert de la ceinture. Il nous suffit de démontrer que l'application dérivée de Φ en n'importe quel point de $\mathcal{O}$ est de rang 2, pour avoir prouve que la représentation paramétrique Φ est vraie.

Or la dérivation de la formule (VI,5;3) par rapport à ρ nous donne :

$$
(\text{VI},5;5)\qquad \frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho} = -\sin\frac{\varphi}{2}\,\vec{u} + \cos\frac{\varphi}{2}\,\vec{e}_3\ :
$$

elle nous montre, comme il était évident, que le vecteur $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho}$ est $\neq \vec{0}_\varphi$ (ses composantes sur 2 axes rectangulaires sont $-\sin\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi}{2}$, jamais simultanément nulles), et dirigé suivant le segment mobile. La dérivation par rapport à φ donne

$$(\text{VI},5;6) \qquad \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = \left(a - \rho \sin\frac{\varphi}{2}\right)\frac{d\vec{u}}{d\varphi} - \frac{\rho}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,\vec{u} - \frac{\rho}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,\vec{e}_3 \ .$$

On vérifie bien, comme on pouvait le voir géométriquement, que le vecteur obtenu $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}$ est perpendiculaire au précédent (c'est immédiat, en utilisant le fait que $\frac{d\vec{u}}{d\varphi}$, $\vec{u}$, $\vec{e}_3$ sont 2 à 2 orthogonaux), et, d'autre part, qu'il est $\neq \vec{0}$, puisque ses composantes surüet $\vec{e}_3$ ne sont jamais simultanément nulles,

Ainsi les vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}$, sont bien indépendants, et la représentation paramétrique Φ est vraie; la ceinture de Möbius est bien une surface de dimension 2 et de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^3$.

<u>Théorème 23 bis</u> - <u>La ceinture de Mobius n'est pas orientable</u> -

<u>Démonstration</u> - Nous allons même montrer qu'il n'existe pas de système $\mathcal{C}$ d'orientations de **V** <u>dont la restriction au cercle moyen Γ</u> soit continue {c'est-à-dire qui varie continuement le long de Γ). Supposons qu'il existe un tel système $\mathcal{C}$, montrons qu'on en déduit une contradiction.

Considérons la carte Φ ci-dessus correspondant à l'ouvert $\mathcal{O}_{\varphi_0}$. Alors $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho}$, forment un systéme de 2 champs continus de vecteurs indépendants sur $\Phi(\mathcal{O})$; par rapport au système $\mathcal{C}$ d'orientations de **V**, supposé continu sur la courbe <u>connexe</u> $\Gamma \cap \Phi(\mathcal{O})$, il doit donc avoir un signe constant (théorème 22). Autrement dit, la base $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho}$, au point $M(\varphi, 0)$, a un signe constant lorsque φ varie dans l'intervalle $\varphi_0 - \pi < \varphi < \varphi_0 + \pi$. Comme φ_0 est quelconque, elle a un signe constant <u>pour φ réel</u>. Or ceci est impossible, car $M(\varphi + 2\pi, 0) = M(\varphi, 0)$, avec $\frac{\partial M}{\partial \varphi}(\varphi + 2\pi, 0) = \frac{\partial M}{\partial \varphi}(\varphi, 0)$, et $\frac{\partial M}{\partial \rho}(\varphi + 2\pi, 0) =$

$- \frac{\partial M}{\partial \rho}(\varphi, 0)$, les 2 bases correspondant à φ et à $\varphi + 2\pi$ ont sûrement des signes opposés. Nous aboutissons donc bien à une contradiction. Ceci traduit le fait que, si l'on "essaie" d'orienter la ceinture de Möbius, en fixant l'orientation en un point $(\varphi, 0)$, et en la déterminant ensuite "par continuité" lorsqu'on suit le cercle Γ, on tombe, après un tour (au point $(\varphi + 2\pi, 0)$), sur le point initial, avec une orientation opposée à l'orientation initiale; ce qui rend impossible une orientation de V .

La ceinture de Möbius à d'autres propriétés topologiques remarquables. Par exemple, si on la coupe longitudinalement suivant le cercle moyen, elle reste en un seul morceau. Cela revient encore à dire que, sur V . le complémentaire du cercle moyen est encore connexe et même connexe par arcs; ce qui ne serait pas vrai sur une ceinture ordinaire. Cette propriété est évidente. On trouve en effet facilement un chemin joignant. dans $V - \Gamma$, le point $M(\varphi_1, \rho_1)$ au point $M(\varphi_2, \rho_2)$, ρ_1 et $\rho_2 \neq 0$: il suffit de faire varier continûment φ de φ_1 à φ_2, et ρ de ρ_1 à ρ_2 sans passer par 0 , si ρ_1 et ρ_2 ont le même signe; ou, au contraire, φ de φ_1 à $\varphi_2 + 2\pi$, et ρ de ρ_1 à $-\rho_2$ sans passer par 0 , si ρ_1 et ρ_2 sont de signes contraires.

Exercice- Démontrer directement les propriétés précédentes, sur la ceinture de Möbius définie comme variété abstraite. On considérera le rectangle AB B'A' ; on identifiera les points de AB à ceux de B'A' , en identifiant deux points M, M' situés respectivement à la même distance de A et de B' . On'montrera qu'on établit facilement, sur l'ensemble quotient, une structure topologique et même une structure de variété abstraite, de dimension 2, et de classe C^∞ ; et on montrera, d'une part, que le complémentaire de 0 0' est connexe, et, d'autre part, qu'il n'existe pas de système d'orientations de la variété, qui varie continuement le long de OO'.

Naturellement il existe au contraire des exemples nombreux de variétés orientales. Par exemple une sphère d'un espace affine euclidien est orientable, les quadriques sont des variétés orientables. Nous le démontrerons plus loin (corollaire 2 du théorème 30). On pourra utilement le démontrer dès maintenant à titre d'exercice.

Orientabilité des variétés complexes

Théorème 24 - Toute variété V de classe C^1 sur le corps des complexes $\mathbb{C}$, est orientable, et admet une orientation canonique.

Démonstration - Soit n la dimension complexe de V, $2n$ sa dimension réelle. L'espace vectoriel tangent $\vec{T}(x;V)$ est un espace vectoriel sur le corps des complexes, de dimension complexe n, de dimension réelle $2n$. D'après le théorème 10, il a donc une orientation canonique $\mathcal{C}(x)$; on a donc, sur V, un système d'orientations canonique $\mathcal{C}$. Tout revient a prouver qu'il est continu; il définira alors bien une orientation canonique de **V**.

Or, de la même manière que dans la remarque qui suit le théorème 22, on peut trouver un système de n champs de vecteurs $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$, tangents à V, continus au pointa de V, et partout indépendants par rapport au corps des complexes. Alors $\vec{U}_1, i\vec{U}_1, \vec{U}_2, i\vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n, i\vec{U}_n$, forment un système de $2n$ champs de vecteurs tangents, continus au pointa, partout indépendants par rapport au corps des réels. Sa classe est partout positive, d'après la définition même de l'orientation canonique $\mathcal{C}(x)$ de l'espace complexe $\vec{T}(x;V)$ donc elle est de signe constant au voisinage de a ; d'après le théorème 22, le système d'orientations est donc continu au pointa ; et ceci quel que soit a, ce qui démontre le théorème.

Orientation transversale d'une variété Σ de dimension $n = N - 1$, dans un espace affine E de dimension N sur le corps des réels

Considérons, dans un espace affine **E**, de dimension N sur le corps des réels, une hypersurface Σ de classe C^1, c'est-à-dire une variété de classe C^1, et de dimension $n = N-1$. Nous avons une notion intuitive de ce que sont "les deux faces" de cette hypersurface. On voit bien par exemple qu'on pourrait peindre ces deux faces, l'une en rouge et l'autre en jaune (aucune supériorité n'étant attachée spécialement à l'une de ces couleurs). Il s'agit maintenant de donner une signification précise à cette notion.

Donnons-nous d'abord un point a de Σ. Son espace tangent $\vec{T}(a;\Sigma)$ est alors un hyperplan de $\vec{E}$; donc il partage $\vec{E}$ en deux demi-espaces ouverts; autrement-dit il définit 2 classes dans l'ensemble des vecteurs de E qui sont transversaux en a à Σ, c'est-à-dire qui ne sont pas dans $\vec{T}(a;\Sigma)$.

[Si l'équation de cet espace tangent est $F(x) = 0$, F est une forme linéaire sur E , alors ces deux demi-espaces seront définis respectivement par les inéquations $F(x) > 0$ et $F(x) < 0$. Ces deux demi-espaces ouverts sont donc les Images réciproques, par l'application continue F , des ouverts $\xi > 0$ et $\xi < 0$ de $\mathbb{R}$, donc ils sont ouverts dans $\vec{E}$, et aussi dans le complémentaire de l'hyperplan. Ce complémentaire n'est donc pas connexe. Au contraire, chacun des 2 demi-espaces ouverts est connexe, et même connexe par arcs. Si en effet deux points $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ appartiennent au même demi-espace, le segment qui les joint ne rencontre pas l'hyperplan; car, F étant linéaire, on a la relation :

$$F(t\vec{Y} + (1-t)\vec{Z}) = t\,F(\vec{Y}) + (1-t)\,F(\vec{Z}) \,,\; 0 \leq t \leq 1 \,, \tag{VI,5;7}$$

qui prouve que F garde un signe constant sur le segment considéré].

On dit alors qu'on a orienté transversalement Σ au point a , ou que l'on a fixé les signes respectifs des deux faces de Σ au point a , si l'un des deux demi-espaces, définis par $\vec{T}(a;\Sigma)$ dans l'espace $\vec{E}$, a été affecté du signe + , et l'autre affecté du signe $-$. D un vecteur transversal en a , de la classe positive, on dira aussi "qu'il traverse l'espace vectoriel tangent à Σ en a "dans le sens positif, ou qu'il est sur la face positive de Σ en a .

Naturellement cela revient aussi à dire que l'on considère l'espace vectoriel quotient de $\vec{E}$ par l'hyperplan $\vec{T}(a;\Sigma)$. Cet espace vectoriel quotient est un espace a une dimension sur le corps des réels; et dire que l'on a orienté transversalement V au point a, c'est dire que l'on a orienté cet espace vectoriel quotient, au sens antérieur.

On appelle système $\mathcal{N}$ * d'orientations transversales de Σ , une application qui, à chaque point x de Σ , fait correspondre une orientation transversale $\mathcal{N}(x)$ de Σ au point x . C est donc une fonction définie sur Σ , qui, en chaque point x , prend sa valeur dans un ensemble à deux éléments (dépendant du point x), à savoir l'ensemble des deux orientations possibles de l'espace vectoriel quotient de $\vec{E}$ par $\vec{T}(x;\Sigma)$.

Quand dira-t-on maintenant qu'un système d'orientations transversales $\mathcal{N}$ de Σ est continu en un point a de Σ ?

* Tangentiel et transversal commencent tous deux par la lettre t . Nous avons remplacé transversal par normal, et désigné par $\mathcal{C}$ un système d'orientationstangentielles et $\mathcal{N}$ un système d'orientations transversales ou normales; il n'existe de normales que s'il y a une structure euclidienne.

On dit qu'un champ X de vecteurs de $\vec{E}$, défini sur Σ, est transversal, si pour tout point x de Σ, $\vec{X}(x)$ est transversal en x à Σ. Il existe évidemment des champs transversaux continus en un point a de Σ. En effet, il existe un voisinage du point a où la variété admet une équation du type $x_1 = g(x_2, \dots, x_N)$, g de classe C^1, par rapport à un référentiel convenable, Alors, dans ce voisinage, le champ de vecteurs constant égal à $\vec{e}_1$ est continu et transversal.

Définition. - On dit qu'un système $\mathfrak{N}$ d'orientations transversales de Σ est continu en un point a de Σ, si, quel que soit le champ de vecteurs $\vec{X} : x \to \vec{X}(x)$, défini sur Σ, continu au point a et transversal, le signe du vecteur $\vec{X}(x)$, par rapport à l'orientation transversale $\mathfrak{N}(x)$, est une fonction continue de x au point a, c'est-à-dire constante dans un voisinage de a.

Théorème 25 - Si l'on s'est donné sur Σ deux systèmes d'orientations transversales continus au point a, leur rapport (fonction définie sur Σ, partout égale à +1 ou a -1 *) est continu au point a, c'est-a-dire constant dans un voisinage de a.

Réciproquement, si ce rapport est continu, et si l'un des deux systèmes d'orientations transversales est continu, il en est de même de l'autre.

Evident.

Corollaire-Si l'hypersurface Σ est connexe, deux systèmes d'orientations transversales de V, tous les deux continus, ou bien sont partout Identiques sur V, ou bien sont partout. opposes sur V.

* En un point de **V**, ce rapport est +1 si les classes positives de vecteurs transversaux définis par les 2 systèmes d'orientations transversales coïncident, -1 dans le cas contraire.

En effet, leur rapport est continu sur Σ, et ne peut prendre que les valeurs $+1$, -1: V étant connexe, il est constant.

On dit que l'hypersurface Σ de E est transversalement orientable, si elle admet un système continu d'orientations transversales: elle est dite transversalement orientée, si un tel système est donné.

Si Σ est connexe, et si elle est transversalement orientable: elle admet deux orientations transversales possibles, opposées l'une à l'autre, et une orientation transversale de Σ est entièrement fixée par l'orientation transversale en un point particulier de Σ *

Orientation transversale par les champs continus de vecteurs normaux

Donnons maintenant quelques théorèmes sur l'orientation transversale des hypersurfaces par l'orientation de leurs normales dans un espace affine euclidien.

Théorème 26 - Soit Σ une hypersurface de classe C^1, dans un espace affine euclidien E. Pour tout point a de Σ, il existe, dans un voisinage de a sur Σ, un champ continu de vecteurs unitaires normaux.

Un système d'orientations transversales $\mathcal{N}$ de Σ est continu au point a, si et seulement si un tel champ a un signe constant dans un voisinage de a, par rapport à l'orientation transversale $\mathcal{N}$.

Démonstration - D'après le corollaire du théorème 33 bis du chapitre III, il existe un voisinage de a où l'hypersurface est définie par une équation normale $f(x) = 0$, où f est une fonction de classe C^1. Alors le champ de vecteurs défini par $\vec{\nu}(x) = \dfrac{\overrightarrow{grad}\, f(x)}{\|\overrightarrow{grad}\, f(x)\|}$ est un champ continu de vecteurs unitaires normaux. Si un système d'orientations transversales continu $\mathcal{N}$ est fixé au voisinage de a, alors, d'après la définition même, un tel champ, qui est continu, doit avoir un signe constant dans un voisinage de a, par

* L'orientation tangentielle d'une variété, vue antérieurement, est une propriété intrinsèque; la variété peut être abstraite. L'orientation transversale est relative à la situation de la variété dans l'espace ambiant. On peut déterminer les 2 faces d'une courbe dans le plan; mais pas d'une courbe dans $\mathbb{R}^3$, ni d'une courbe abstraite.

rapport à $\mathcal{N}$. Réciproquement, supposons qu'un tel champ ait un signe constant au voisinage de a, par rapport à un système d'orientations transversales $\mathcal{N}$ de Σ au voisinage de a. Soit X n'importe quel champ transversal continu défini dans un voisinage de a. Alors le produit scalaire $(\vec{X}(x) \mid \vec{\nu}(x))$ est continu en a ; il est toujours $\neq 0$, donc son signe est constant au voisinage de a, ce qui signifie que, au voisinage du point a, $\vec{X}(x)$ et $\vec{\nu}(x)$ ont, ou toujours le même signe, ou toujours des signes contraires, par rapport à n'importe quel système d'orientations transversales, continu ou non. Si alors le système d'orientations% considéré est tel que le champ $\vec{\nu}$ ait un signe constant au voisinage de a, il en est de même du champ $\vec{X}$, et ceci, d'après la définition, entraîne que le système d orientations transversales considéré $\mathcal{N}$ soit continu au point a.

Corollaire 1 - Pour qu'un système $\mathcal{N}$ d'orientations transversales de Σ soit continu en un point a, il faut et il suffit que le champ $\vec{\nu}_+$ des vecteurs unitaires normaux à Σ, positifs par rapport à $\mathcal{N}$, soit continu au point a.

En effet, si le champ des vecteurs unitaires normaux, positif pour% est continu en a, nous avons un champ continu de vecteurs unitaires normaux qui est de signe constant, donc $\mathcal{N}$ est continue en a. Réciproquement, supposons que le système% d'orientations transversales soit continu en a ; nous avons vu qu'il existe un champ $\vec{\nu}$ de vecteurs unitaires normaux continu; ce champ garde donc un signe constant par rapport à $\mathcal{N}$ au voisinage de a ; donc le champ des vecteurs unitaires normaux positifs est, ou bien celui-là, ou bien son opposé, et il est bien encore continu au point a.

Corollaire 2 - Pour que l'hypersurface Σ de l'espace euclidien E soit transversalement orientable, il faut et il suffit qu'il existe sur Σ un champ continu de vecteurs unitaires normaux. Si Σ est transversalement orientée, le champ de vecteurs unitaires normaux, positifs pour l'orientation transversale, est continu.

Si en effet il existe un champ continu $\vec{\nu}$ de vecteurs unitaires normaux, et si, en chaque point x de la variété, nous fixons l'orientation transversale $\mathcal{N}(x)$ de façon que le vecteur $\vec{\nu}(x)$ soit positif pour $\mathcal{N}(x)$, il résulte du théorème que le système $\mathcal{N}$ d'orientations ainsi défini est continu, donc que Σ est transversalement orientable.

Réciproquement, si Σ est transversalement orientée, le champ des vecteurs unitaires normaux positifs est bien continu, d'après le corollaire 1.

Corollaire 3 - Toute hypersurface de classe C^1 d'un espace affine E de dimension finie, définie globalement par une seule équation normale $f(x) = 0$, f de classe C^1 dans E est transversalement orientable. Toute hypersurface fermée de classe C^1 d'un espace affine est transversalement orientable. Les sphères d'un espace euclidien sont transversalement orientables.

Dans la 1ère hypothèse, il existe, si l'on met sur E une structure euclidienne arbitraire, un champ continu de vecteurs unitaires normaux, à savoir $\dfrac{\overrightarrow{\text{grad}}\, f}{\|\overrightarrow{\text{grad}}\, f\|}$; il suffit donc d'appliquer le corollaire 2.

Nous avons vu (Cours de 2ème division, page 738, remarque 2° * que toute hypersurface fermée de classe C-pouvait être définie par une seule équation normale; elle est donc toujours transversalement orientable. On démontre que le résultat subsiste pour la classe C^1.

Les sphères d'un espace euclidien et les quadriques (sans point singulier) sont transversalement orientables, puisqu'elles ont une équation normale. Pour la sphère d'équation $\|x - O\|^2 - R^2 = 0$, le champ défini comme précédemment est $x \longrightarrow \dfrac{\overrightarrow{x - O}}{R}$, champ normal "sortant", dirigé suivant le prolongement du rayon vecteur Issu du centre. On dit encore qu'on a orienté transversalement la sphère de manière que les vecteurs sortants soient positifs.

Corollaire 4 - Soit $\mathfrak{N}$ un système d'orientations transversales sur une hypersurface Σ d'un espace affine quelconque E, de dimension N. Si, au voisinage du point a, il existe au moins un champ particulier continu $\vec{X}$ de vecteurs transversaux, qui soit de signe constant au voisinage de a par rapport à $\mathfrak{N}$, le système $\mathfrak{N}$ est continu au point a.

Démonstration - Fixons- nous arbitrairement sur E une structure euclidienne, par exemple en identifiant E à $\mathbb{R}^N$ par le choix d'un référentiel. Soit $\vec{\nu}$ un champ continu de vecteurs unitaires normaux au voisinage de a. Alors le signe du produit scalaire $(\vec{X} \mid \vec{\nu})$ est lui-même continu, et par consé-

* Il s'agit lb d'un résultat très difficile à démontrer et nous l'avons admis !

quent, comme nous l'avons ddjà vu dans le théorème, le champ $\vec{X}$ et le champ $\vec{\nu}$ sont, ou toujours de même signe, ou toujours de signe contraire, par rapport à n'importe quel système d'orientations transversales, continu ou non, au voisinage de a . Mais comme le champ $\vec{X}$ est de signe constant par rapport à $\mathcal{N}$ au voisinage de a, il en est de même du champ $\vec{\nu}$ et le théorème nous dit bien que le système $\mathcal{N}$ d'orientations transversales est continu au point a .

Remarque - Quand on parle, en physique, des 2 faces d'une hypersurface connexe Σ d'un espace euclidien, on imagine que Σ est 'épaisse", autrement dit on lui substitue un volume $\mathcal{U}$ limité par 2 hypersurfaces Σ', Σ'', "parallèles à Σ", obtenues en portant, sur la normale à Σ en chaque pointa, de Σ , 2 petits vecteurs $\pm\, \varepsilon \vec{\nu}(a)$, de part et d'autre de ce point. Localement, il n'y a pas de difficulté * . Mais, globalement, est-il sur que Σ' et Σ'' soient bien "distinctes" ? Elles le sont, autrement dit le bord de $\mathcal{U}$ a bien 2 composantes connexes et non 1 seule, si et seulement si Σ est transversalement orientable. Si elle ne l'est pas, $a + \varepsilon \vec{\nu}(a)$ et $a - \varepsilon \vec{\nu}(a)$ peuvent être joints par un chemin (ne restant pas au voisinage de a).

Nous avons ici remplacé l'épaisseur de $\mathcal{U}$, et l'étude des points $a \pm \varepsilon \vec{\nu}(a)$, par l'étude plus commode du champ des normales $\vec{\nu}$.

Partage de l'espace en régions par une hypersurface

Nous allons donner une autre définition des deux faces d'une hypersurface de E, en faisant appel, de manière plus directe, au partage de l'espace en deux régions par l'hypersurface.

Supposons, pour fixer les idées, que Σ soit simplement une sphère de l'espace euclidien. Alors elle partage l'espace E en deux réglons, appelées communément, de façon assez impropre, l'intérieur et l'extérieur de la sphère. On peut alors dire que les deux faces de la sphère sont d'une part celle qui 'regarde vers l'intérieur', et d'autre part celle qui "regarde vers l'extérieur". Mais, bien évidemment, cette situation ne se présentera pas dans le cas général.

* Encore faut-il que les points $x \pm \varepsilon \vec{\nu}(x)$ décrivent bien des variétés. On le démontre, si Σ est compacte de classe C^2 .

Supposons, par exemple, que, dans le plan $\mathbb{R}^2$, l'hypersurface Σ soit le segment ouvert $]0,1[$ de l'axe réel $\mathbb{R}$. Il est bien évident que cette hypersurface est encore transversalement orientable, mais Σ ne partage pas l'espace en deux régions, et la méthode employée pour les sphères ne peut plus réussir.

Par contre, localement, un tel segment partage encore l'espace en deux régions; autrement dit, si l'on prend un point quelconque du segment $]0;1[$ considéré, et un petit voisinage de ce point, ce petit voisinage est bien, s'il est convenablement choisi, partagé par le segment en deux régions.

Définition - On dit qu'un espace topologique connexe E est partagé par un ensemble A en k "régions", k fini ou infini, si le complémentaire de A a k composantes connexes; et ce sont ces composantes connexes qu'on appelle les régions définies par A dans E. Dans les cas que nous allons considérer, E sera localement connexe (espace affine normé ou ouvert d'un espace affine normé, variété), et A sera fermé dans E. Dans ce cas, $\complement A$ est ouvert dans E, et localement connexe; alors nous avons vu, dans les compléments de topologie sur les espaces connexes (théorèmes et remarque qui le suit) que chaque composante connexe de $\complement A$ est ouverte dans $\complement A$, donc dans E puisque $\complement A$ est ouverte dans E; alors tout revient à dire que $\complement A$ est réunion de k parties non vides, ouvertes, connexes, disjointes.

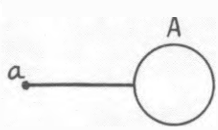
Théorème 27 - Soit Σ une hypersurface de classe C' dans E. Quel que soit le point a de Σ, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de a dans E, ayant les propriétés suivantes :

1°/ $\mathcal{V}$ est homkomorphe à uns boule ouverte;

2°/ $\Sigma \cap \mathcal{V}$ est fermé dans $\mathcal{V}$, et le partage en 2 réglons $\mathcal{V}_1$ $\mathcal{V}_2$; chaque point de $\Sigma \cap \mathcal{V}$ est adhérent à chacune de ces 2 régions * ;

3°/ Σ possède, dans $\mathcal{V}$, une équation normale $f(x) = 0$, et les 2 régions sont respectivement définies par les inégalités $(x) > 0$, $(x) < 0$.

- Ilest bon d'avoir cette dernière propriété. Si nous considérons l'ensemble fermé A de la figure, il partage le plan en 2 □↑♑♓□■⬩⬫ mais il y a des points de A, comme a, qui ne sont adhérents qu'à une de ces 2 régions.



Démonstration - D'après le corollaire 2 bis du théorème 32 du chapitre III, il existe un C^1-difféomorphisme Φ d'un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^N$ sur un voisinage $\Phi(\mathcal{O})$ de a dans E, de manière que $\Sigma \cap \Phi(\mathcal{O})$ soit l'image par Φ de l'intersection de $\mathcal{O}$ avec l'hyperplan $u_1 = 0$. Si alors $\Phi(\alpha) = a$, il suffira de choisir dans $\mathcal{O}$ une boule ouverte de centre α: c'est bien un ouvert de 6, partagé par l'hyperplan $u_1 = 0$ en deux régions.

Si alors on prend pour $\mathcal{V}$ l'image de cette boule par Φ, on a bien, puisque Φ est un homéomorphisme, un ouvert répondant à la question. La fonction f est ici la transformée par Φ de la fonction $u \longrightarrow u_1$ sur $\mathbb{R}^N$, c'est donc $f(x)$ = lère coordonnée de $\Phi^{-1}(x)$.

Voici maintenant un théorème global, valable quand Σ est fermée.

Théorème 28 - Toute hypersurface fermée non vide Σ, de classe C^1 d'un espace affine E, le partage en au moins 2 régions, et exactement 2 si Σ est connexe.

Démonstration -

1°/ Nous admettrons que $\Omega = \complement\, \Sigma$ a au moins 2 régions.

2°) Par contre, il est relativement simple de voir que, si Σ est connexe, il y a au plus 2 régions. Soient en effet $(\Omega_i)_{i\in I}$ les composantes connexes de $\Omega = \complement\,\Sigma$.

Montrons que l'ensemble des points de Σ , qui sont adhérents à 1 une d'entre elles Ω_i , est à la fois ouvert et fermé dans Σ . Il est évidemment fermé dans Σ , puisqu'il est l'intersection de Σ avec l'ensemble fermé $\bar{\Omega}_i$ de E . Montrons qu'il est ouvert dans Σ . soit en effet a un point de Σ adhérent à Ω_i . Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de a dans E , ayant les propriétés indiquées au théorème 27. Puisque a adhère à Ω_i , l'un au moins des 2 ouverts $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, rencontre Ω_i ; si, par exemple $\mathcal{V}_1$ rencontre Ω_i , $\mathcal{V}_1$ u Ω_i est réunion de 2 parties connexes d'intersection non vide, donc est connexe d'après le théorème 38 bis des compléments de topologie sur les espaces connexes. Mais Ω_i est une composante connexe de Ω , donc, il ne peut exister aucune partie de Ω , connexe, strictement plus grande que Ω_i ; donc $\Omega_i \cup \mathcal{V}_1 = \Omega_i$, ou $\mathcal{V}_1 \subset \Omega_i$. Mals alors tous les points voisins de a (ceux de $\Sigma \cap \mathcal{V}$) sont adhérents à $\mathcal{V}_1$, donc à Ω_i .

Comme alors Σ est supposé connexe, tout point de Σ est adhérent à Ω_i , ou aucun point de Σ .

Mais il est impossible qu' Ω_i ne soit adhérent à aucun point de Σ . Soit en effet m_i un point de Ω_i ; on sait (2ème Division, page 82) qu'il existe un point a; de Σ , dont la distance à Ω_i est minima. Alors le segment $]a_i , m_i]$ et Ω_i sont connexes, d'intersection non vide puisqu'ils oontiennent m_i ; donc encore une fois leur réunion est connexe, et, encore une fois parce que Ω_i est une composante connexe de Ω , on a nécessairement

$]a_i, m_i] \subset \Omega_i$. Mais alors $a_i \in \Sigma$ est adhérent à $]a_i, m_i]$, donc à Ω_i . On en déduit que tout ouvert Ω_i est adhérent à chaque point de Σ .

Mais un point de Σ ne peut pas être adhérent à plus de deux de ces ouverts. En reprenant en effet un point a de Σ et l'ouvert $\mathcal{V}$ déjà considéré, partagé par $\Sigma \cap \mathcal{V}$ en 2 ouverts $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, nous avons vu que, si a adhère à Ω_i , l'un au moins des ouverts $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, est tout entier dans Ω_i , ce qui montre bien notre assertion.

Finalement, un point a de Σ adhère à tout Ω_i , mais ne peut adhérer à plus de 2 d'entre eux; donc il n'y a pas plus de deux régions dansa . Ainsi le théorème est démontré.

Remarques - 1°/ On peut étendre le théorème à des hypersurfaces non différentiables, mais c'est encore plus délicat.

Par exemple, un ensemble d'un espace affine E de dimension N , homéomorphe à une sphère de $\mathbb{R}^N$, sans condition de différentiabilité, partage E en 2 régions (pour $N=2$, c'est le théorème de Jordan : une "courbe fermée, sans point double", c'est-à-dire un ensemble homéomorphe à un cercle, partage le plan en 2 régions; pour $N=3$, c est le théorème de Lebesgue).

2°/ Si Σ n'est pas fermée, son complémentaire dans E peut être connexe. C'est le cas, par exemple, si Σ est le segment ouvert $]0,1[$ de l'axe réel dans $\mathbb{R}^2$.

3°/ Si Σ , connexe, n'est pas compacte (par exemple si c'est un hyperplan) aucune des régions définie par Σ n'est privilégiée par rapport à l'autre.

Mais supposons Σ connexe compacte dans E . Alors Σ est bornée. Soit B une boule fermée contenant Σ . Le complémentaire de B est un ouvert connexe de E, sans point commun avec Σ , donc tout entier dans l'une des 2 régions Ω_1 , Ω_2 , définies par Σ dans E ; soit Ω_2 cette région. Elle est indépendante du choix de la boule B . Si en effet B' était une autre boule fermée contenant Σ , et si $\complement B'$ était contenu dans Ω_1 , on voit que, si B'' était une boule fermée contenant à la fois B et B', $\complement B''$ devrait être à la fois dans Ω_1 et Ω_2 , ce qui serait absurde.

La région Ω_2 s'appellera région des points à l'infini, ou composante connexe de l'infini dans $\complement\Sigma$, ou région extérieure définie par Σ, et la région Ω_1 s'appellera région intérieure; Ω_1 est bornée, puisque Contenue dans toute boule fermée contenant Σ.

Orientation transversale d'une hypersurface et partage de l'espace en régions.

Il nous est possible maintenant de définir une nouvelle sorte d'orientations transversales, à l'aide des deux régions définies par Σ localement dans E.

Définition - Soit Σ une hypersurface de classe C^1 d'un espace affine E, et soit $\mathcal{V}$ un ouvert de E, tel que $\Sigma \cap \mathcal{V}$ soit fermée, et qui soit partagé par $\Sigma \cap \mathcal{V}$ en deux régions $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$. Soit a un point de Σ, adhérent à la fois à $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$. On dit qu'un vecteur $\vec{X}$ de $\vec{E}$, transversal en a à Σ, est rentrant par rapport à la région $\mathcal{V}_1$ de $\mathcal{V}$, s il est le vecteur "vitesse Initiale pour une trajectoire de classe C^1, $M : t \to M(t), 0 \leq t \leq t_0$ entièrement située dans la région $\mathcal{V}_1$ de $\mathcal{V}$ pour $t > 0$, avec $M(0) = a$. (Si M est une trajectoire de classe C^1, rappelons que le vecteur vitesse en un point t est le vecteur dérivé $\frac{d\vec{M}}{dt}$; on suppose donc ici $M(0) = a$, $\frac{d\vec{M}}{dt}(0) = \vec{X}$). Un vecteur sortant par rapport à $\mathcal{V}_1$ est, par définition. un vecteur rentrant dans $\mathcal{V}_2$.(Il n'est pas évident qu'un vecteur transversal ne puisse pas être à la fois sortant et rentrant, ou aucun des deux ! Nous le verrons plus loin, théorème 29, 4°/).

Voici une autre définition des vecteurs rentrants et sortants :

Théorème 29 - Soit Σ une hypersurface de classe C^1 d'un espace affine E. Soit a un point de Σ, $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de a dans E ayant les propriétés indiquées dans le théorème 27.

1°/ Pour qu'un vecteur transversal? en un point 2 de $\Sigma \cap \mathcal{V}$ soit rentrant dans $\mathcal{V}_1$, il faut et Il suffit que, pour $t > 0$ assez petit, $x + t\vec{X}$ soit dans $\mathcal{V}_1$.

2°/ Si $f(x) = 0$ est une équation normale de Σ dans $\mathcal{V}$, telle que $\mathcal{V}_1$ soit définie par l'inéquation $f(x) > 0$, un vecteur $\vec{X}$ est transversal en $x \in \Sigma \cap \mathcal{V}$ et rentrant dans $\mathcal{V}_1$, si et seulement si $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$.

3°/ Si $\vec{X}$ est transversal en x, rentrant dans $\mathcal{V}_1$, alors, pour toute fonction φ réelle, de classe C^1, définie dans $\mathcal{V}$, nulle sur Σ, ≥ 0 sur $\mathcal{V}_1$, on a $\varphi'(x) \cdot \vec{X} \geq 0$. Réciproquement si $\vec{X}$ est transversal et si, pour une fonction φ particulière de ce type, on a $\varphi'(x) \cdot \vec{X} > 0$, $\vec{X}$ est rentrant dans $\mathcal{V}_1$ en x.

4°/ En chaque point x de $\Sigma \cap \mathcal{V}$, l'ensemble des vecteurs transversaux rentrants dans $\mathcal{V}_1$ et l'ensemble des vecteurs transversaux rentrant dans $\mathcal{V}_2$ sont exactement les 2 classes de vecteurs transversaux définies par l'hyperplan $\vec{T}(x; \Sigma)$ dans $\vec{E}$. Si on appelle positive la classe des vecteurs rentrants dans $\mathcal{V}_1$, on définit sur $\Sigma \cap \mathcal{V}$ un système continu d'orientations transversales.

Démonstration - 1°) a) - Soit $\vec{X}$ un vecteur transversal en x à Σ, tel que $x + t\vec{X}$ soit dans $\mathcal{V}_1$ pour $t > 0$. Alors nous avons une trajectoire dans $\mathcal{V}_1$, conformément à la définition précédente, dont $\vec{X}$ est la vitesse initiale, de sorte que $\vec{X}$ est bien rentrant dans $\mathcal{V}_1$. Nous verrons la réciproque tout à l'heure.

3°) a) - Si $\vec{X}$ est transversal en x à Σ, rentrant dans $\mathcal{V}_1$, et si φ est de classe C^1 nulle sur Σ, ≥ 0 dans $\mathcal{V}_1$, montrons que $\varphi'(x) \cdot \vec{X} \geq 0$. Soit M une trajectoire dans $\mathcal{V}_1$, dont $\vec{X}$ soit la vitesse initiale. Alors $\varphi \circ M$ est ≥ 0 pour $t \geq 0$, nulle pour $t = 0$, de classe C^1; donc sa dérivée pour $t = 0$ est ≥ 0; or, d'après le théorème des fonctions composées, c'est justement $\varphi'(x) \cdot \vec{X}$.

2°) a) - La fonction f est une fonction φ particulière. Donc, si $\vec{X}$ est transversal rentrant en x dans $\mathcal{V}_1$, on a nécessairement $f'(x) \cdot \vec{X} \geq 0$; mais $f'(x) \cdot \vec{X} = \vec{0}$ est l'équation de l'espace vectoriel tangent, où $\vec{X}$ ne se trouve pas puisqu'il est supposé transversal, donc $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$

2°) b) - Réciproquement, soit $\vec{X}$ un vecteur tel que $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$. Alors la fonction $t \to f(x+t\vec{X})$ est de classe C^1, nulle pour $t = 0$, de dérivée $f'(x).\vec{X} > 0$ pour $t = 0$; donc elle est > 0 pour $t > 0$ assez petit. Donc le point $x + t\vec{X}$ est dans $\mathcal{V}_1$ pour $t > 0$ assez petit, donc, d'après 1°) a), $\vec{X}$ est rentrant dans $\mathcal{V}_1$. Ainsi 2°) est démontré.

4°) En changeant $\mathcal{V}_1$ en $\mathcal{V}_2$, et f en $-f$, on voit. d'après 2°), que tout vecteur transversal est, ou bien rentrant dans $\mathcal{V}_1$, ou bien rentrant dans $\mathcal{V}_2$, les deux propriétés s'excluant : $\vec{X}$ est rentrant en x dans $\mathcal{V}_1$ (resp. dans $\mathcal{V}_2$) si $f'(x).\vec{X} > 0$ (resp. < 0). L'ensemble des vecteurs transversaux rentrant dans $\mathcal{V}_1$ et l'ensemble des vecteurs transversaux Entrant dans $\mathcal{V}_2$ sont les deux demi-espaces définis par $T(x; \Sigma)$ dans $\vec{E}$, puisque $\vec{T}(x ; \Sigma)$ a pour équation $f'(x).\vec{X} = \vec{0}$

Appelons positive la classe des vecteurs transversaux rentrant dans $\mathcal{V}_1$, ce qui définit un système% d'orientations transversales. Si $\vec{X} : x \longrightarrow \vec{X}(x)$, est un champ continu de vecteurs transversaux, $x \longrightarrow f'(x).\vec{X}(x)$ est une fonction réelle continue sur $\Sigma \cap \mathcal{V}$, toujours $\neq 0$, donc de signe constant au voisinage de chaque point; celà prouve que $\vec{X}$ est de signe constant pour $\mathcal{H}$; donc $\mathcal{H}$ est continu, et 4°) est démontré.

1°) b) - Si $\vec{X}$ est rentrant en x dans $\mathcal{V}_1$, on a $f'(x) \cdot \vec{X} > 0$ d'après 2°) a). Donc $x + t\vec{X}$ est dans $\mathcal{V}_1$ pour $t > 0$ assez petit, d'après ce qui a été démontré à 2°) b). Ceci achève de démontrer 1°).

3°) b) - Soit φ une fonction réelle de classe C^1, nulle sur $\Sigma \cap \mathcal{V}$, $\geqslant 0$ dans $\mathcal{V}_1$, et telle que $\varphi'(x) \cdot X > 0$ $\vec{X}$ est supposé transversal * ; donc $\vec{X}$ ou $-\vec{X}$ est rentrant dans $\mathcal{V}_1$, d'après 4°); dans le second cas, on aurait, d après 3°) a), $\varphi'(x).\vec{X} \leqslant 0$, ce

* On voit d'ailleurs facilement que l'hypothèse $\varphi'(x).\vec{X} \neq 0$ oblige $\vec{X}$ à être transversal.

qui est contraire à l'hypothèse; donc $\vec{X}$ est rentrant dans $\mathcal{V}_1$, et ceci achève la démonstration de 3°/ et du théorème.

Remarque 1") - Si $\mathcal{V}$ est un ouvert quelconque de E, dans lequel $\Sigma \cap \mathcal{V}$ soit fermée, et qui soit partagé par $\Sigma \cap \mathcal{V}$ en 2 régions $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, à chacune desquelles adhère tout point de $\Sigma \cap \mathcal{V}$, tout ce qui est dit dans 1°) 3") 4°) du théorème reste exact; et il en est de même de 2°) s'il existe une équation normale $f(x) = 0$ de $\Sigma \cap \mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$.

Supposons que E soit euclidien, et que Σ soit une sphère d'équation normale $\|x - O\|^2 - R^2 = 0$. On convient d'appeler "région intérieure" de $E - \Sigma$ celle qui contient le centre O, et "région extérieure" l'autre; leurs équations respectives sont $\|\overrightarrow{x-O}\|^2 < R^2$ et $\|\overrightarrow{x-O}\|^2 > R^2$.

On convient d'appeler vecteurs sortants (resp. rentrants), en un point de la sphère ceux qui sont sortants (resp. rentrants) par rapport à la région intérieure. On appelle orientation transversale canonique de la sphère celle pour laquelle les vecteurs sortants sont positifs.

2°) Si Σ est une hypersurface fermée connexe de E, elle le partage en 2 régions Ω_1, Ω_2 (théorème 28) ; Σ est donc transversalement orientable, et on pourra, par exemple, appeler positifs les vecteurs transversaux rentrant dans Ω_1. On retrouve ainsi le corollaire 3 du théorème 26. Si Σ est compacte, la remarque 3°) page 126 nous montre que Ω_1 et Ω_2 ne jouent pas le même rôle, Ω_1 étant la région intérieure (ou bornée) et Ω_2 la région extérieure (ou région de l'infini). On pourra donc, avec la remarque 1°), définir une orientation transversale privilégiée de Σ : celle pour laquelle les vecteurs rentrants par rapport à Ω_2 ou sortants par rapport à Ω_1, qu'on appellera simplement les vecteurs sortants, sont positifs,

Relation entre l'orientation transversale et l'orientation tangentielle -

Théorème 30 - Pour qu'une hypersurface Σ d'un espace affine soit orientable, il faut et il suffit qu'elle soit transversalement orientable. Si, de plus, l'espace E est orienté, il définit une correspondance canonique entre les orientations tangentielles de V, et ses orientations transversales.

Démonstration - Nous pouvons supposer tout de suite E orienté. Considérons alors un système $\mathcal{C}$ d'orientations tangentielles de V .

On en déduit un système $\mathcal{N}$ d'orientations transversales comme suit. Nous dirons qu'un vecteur transversal $\vec{X}$ en x est positif (resp. négatif) si, pour une base $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_n$ de $\vec{T}(x;\Sigma)$, positive pour $\mathcal{C}(x)$, la base $\vec{X}, \vec{U}_1, \dots, \vec{U}_n$ de $\vec{E}$ est positive (resp. négative) pour l'orientation de E. Si cette propriété est vraie pour une base positive particulière de $\vec{T}(x;\Sigma)$, elle est vraie pour toute autre base positive.

En effet, si U : $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_{N-1}$ est une base de $\vec{T}(x;\Sigma)$, et U' : $\vec{U}'_1, \vec{U}'_2, \dots, \vec{U}'_{N-1}$ une autre base, le déterminant de U' par rapport à U est égal à celui de la base $\vec{X}, \vec{U}'_1, \vec{U}'_2, \dots, \vec{U}'_{N-1}$ de $\vec{E}$ par rapport à la base $\vec{X}, \vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_{N-1}$. Ainsi la définition que nous venons de donner est indépendante de la base positive choisie dans $\vec{T}(x;\Sigma)$.

Ce que nous venons de définir est bien une orientation transversale de Σ au point x . Si en effet $\vec{Y}$ est un autre vecteur transversal quelconque au point x , on peut écrire $\vec{Y} = \lambda \vec{X} + \lambda_1 \vec{U}_1 + \dots + \lambda_{N-1} \vec{U}_{N-1}$; alors $\vec{Y}$ et $\vec{X}$ sont ou non dans le même demi-espace défini dans $\vec{E}$ par $\vec{T}(x;\Sigma)$, suivant que λ est > 0 , ou < 0 ; or λ n'est autre que le déterminant du système de vecteurs $\vec{Y}, \vec{U}_1, \dots, \vec{U}_{N-1}$ par rapport à la base $\vec{X}, \vec{U}_1, \dots, \vec{U}_{N-1}$. Donc tous les vecteurs d'un des deux demi-espaces sont du même signe pour la classification précédente, et deux vecteurs de demi-espaces différents sont de signes contraires, ce qui prouve bien que nous venons de définir la une orientation transversale de V au point x , et par conséquent un système $\mathcal{N}$ d'orientations transversales.

Inversement, si nous partons d'un système $\mathcal{N}$ d'orientations transversales de Σ , nous pourrons dire qu'une base $\vec{U}_1, \dots, \vec{U}_{N-1}$, de $\vec{T}(x;\Sigma)$, est positive, si la base $(\vec{X}, \vec{U}_1, \dots, \vec{U}_{N-1})$, de $\vec{E}$ est positive par rapport à l'orientation de $\vec{E}$, lorsque $\vec{X}$ est un vecteur transversal positif par rapport à $\mathcal{N}(x)$.

Un raisonnement analogue au précédent-montre que cette définition est Indépendante du choix de X , positif pour $\mathcal{N}(x)$, et que nous venons bien de définir la une orientation tangentielle de Σ au point x , donc un système $\mathcal{C}$ d'orientations tangentielles. En outre les correspondances $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{C}$ sont réciproques l'une de l'autre; et, si $\vec{X}$ est transversal en x à Σ , et si $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ est une base de $\vec{T}(x;\Sigma)$, le signe de $\vec{X}, \vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_{N-1}$, pour l'orientation de E , est le produit du signe de $\vec{X}$ pour $\mathcal{N}(x)$ par le signe de $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_{N-1}$ pour $\mathcal{C}(x)$.

Il nous reste à montrer que, si un système $\mathcal{C}$ d'orientations tangentielles est continu, le système associé $\mathcal{N}$ d'orientations transversales est continu, et vice-versa. Or, au voisinage d'un point a de Σ , il est possible de trouver un système de N-l champs de vecteurs tangents à la variété, continus, indépendants en tout point de la variété, soit $x \longrightarrow \vec{U}_i(x)$, $i = 1,2,\ldots, N-1$; il est possible aussi de trouver un champ continu de vecteurs transversaux, $x \to \vec{X}(x)$. Alors le système de vecteurs $\vec{X}(x), \vec{U}_1(x), \ldots, \vec{U}_{N-1}(x)$ est un système de N champs de vecteurs Indépendants, et continus en a . Il en résulte que son signe, par rapport à l'orientation de $\vec{E}$, est constant au voisinage de a , et, en changeant, si nécessaire, de signe, le champ $\vec{X}$, on peut supposer qu'il est constamment positif au voisinage de a par rapport à l'orientation choisie dans $\vec{E}$. Il résulte alors de ce que nous venons de voir que le signe du système des N - 1 vecteurs $\vec{U}_1(x), \vec{U}_2(x), \ldots, \vec{U}_{N-1}(x)$, par rapport à l'orientation tangentielle $\mathcal{C}(x)$, est le même que le signe du vecteur $\vec{X}(x)$ par rapport à l'orientation transversale associée $\mathcal{N}(x)$. Or ce premier signe est constant au voisinage de a , si et seulement si le système $\mathcal{C}$ d'orientations tangentielles est continu en a, d après le théorème 22, et le deuxième signe est constant au voisinage de a , si et seulement si le système $\mathcal{N}$ d'orientations transversales est continu en a , d'après le corollaire 4 théorème 26. Donc $\mathcal{C}$ est continu, si et seulement si $\mathcal{N}$ est continu. Ceci fournit bien les conclusions de l'énoncé.

<u>Remarques</u> 1°) Si nous considérons, comme hypersurface Σ , l'hyperplan $x_1 = 0$ l'orientation de cette variété, dans laquelle le systkme de vecteurs $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N$, est positif, est en correspondance avec l'orientation transversale où le champ de vecteurs $\vec{e}_1$ est positif.

Si nous considérons maintenant comme hypersurface, l'hyperplan $x_k = 0$, l'orientation dans laquelle le système de vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k-1}, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_N$ est positif, est en correspondance avec l'orientation transversale où le champ de vecteurs $(-1)^{k-1}\, \vec{e}_k$ est positif.

2°) Soit $U = \vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_{N-1}$ une base de $T(x; \Sigma)$. Si $\vec{E}$ est euclidien orienté, on peut définir un produit vectoriel $\vec{X} = [\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 \wedge \dots \wedge \vec{U}_{N-1}]$ (théorème 11). qui est normal en x à Σ. D'autre part, la base $\vec{X}$, $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_{N-1}$, est positive pour l'orientation de $\vec{E}$. Donc U est positive pour une orientation tangentielle, si et seulement si $\vec{X}$ est positif pour l'orientation transversale associée.

Soient Φ une carte de la variété, dont l'image recouvre le point a, avec $\Phi(\alpha) = a$, et $\mathcal{C}$ un système d'orientations de Σ. Le système des vecteurs $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u_i}(\alpha)$, $i = 1, 2, \dots N-1$, est l'image, par $\Phi'(\alpha)$, du système des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{N-1}$; donc son signe, dans $\vec{T}(a; V)$, est $\theta(\alpha; \Phi)$, si θ est la fonction associée (page 88) au système $\mathcal{C}$ d'orientations tangentielles

Donc le produit vectoriel de ces vecteurs est du même signe par rapport à l'orientation transversale associée; autrement dit, 1 orientation transversale% associée a une orientation tangentielle donnée $\mathcal{C}$, est celle pour laquelle le vecteur

$$\text{(VI;5;7)} \qquad \theta(\alpha; \Phi) \left[\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u_1}(\alpha) \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u_2}(\alpha) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u_{N-1}}(\alpha) \right]$$

est un vecteur normal, positif, pour touts carte Φ et tout α.

3°) Considérons le cas particulier de la dimension $N = 1$, et soit c un point de E, considéré comme hypersurface. La correspondance entre orientations tangentielles et transversales se définira conventionnellement comme suit.

Orienter c , tangentiellement, c'est l'affecter du signe + ou du signe − ; l'orienter transversalement, c'est donner les signes + et − aux deux demi-droites définies par l'origine dans E , c'est-à-dire simplement orienter $\vec{E}$. Si alors on suppose $\vec{E}$ muni d'une orientation donnée, nous établirons la correspondance entre l'orientation de c , dans laquelle il est affecté du signe + et l'orientation transversale de c , qui corresponde à l'orientation donnée de $\vec{E}$.

<u>Corollaire 1</u> − <u>La ceinture de Mobius n'est pas transversalement orientable dans</u> $\mathbb{R}^3$.

En effet, nous avons vu qu'elle n'est pas orientable (théorème 23 bis). On ne peut donc pas "fixer les deux faces" de cette ceinture. <u>La ceinture de Mobius est une hypersurface de</u> $\mathbb{R}^3$, <u>"à une seule face"</u>. Si, par exemple, on part du point $\varphi = 0$, $\rho = 0$, et qu'on appelle face positive, en ce point, celle qui est tournée vers l'origine, si l'on fait varier φ continuement, et qu'on revienne à l'origine avec les paramètres $\varphi = 2\pi$, $\rho = 0$, la face positive, suivie par continuité, est devenue celle qui regarde en sens inverse de l'origine. En un point donné, il y a bien toujours 2 faces, mais pas globalement, puisqu'on peut passer continuement de l'une des faces en un point à l'autre face au même point, en se déplaçant sur la surface *

<u>Corollaire 2</u> − <u>Toute hypersurface de classe</u> C^1 <u>d'un espace affine de dimension finie</u>, <u>définie tout entière par une équation normale</u> $f(x) = 0$, <u>est orientable</u>. ~~Toute hypersurface~~ <u>fermée de classe</u> C^1 <u>d'un espace affine de dimension finie est orientable</u>, <u>Les sphères d'un espace affine euclidien de dimension finie sont orientables</u>.

* On dit qu'un barbu, ne sachant s'il devait, la nuit, mettre sa barbe sur ou sous le drap, s'est acheté un drap en ceinture de Mobius, donc n'ayant qu'un seul côté. Visiblement, c'est là une solution inexacte du problème, car la barbe ne couvre pas la totalité du drap, et, <u>localement</u>, c'est-à-dire au voisinage d'un point, toute hypersurface est transversalement orientable, et a toujours 2 faces !

Il suffit d'appliquer le corollaire 3 du théorème 26* .

En particulier, si Σ est "ne hypersurface compacte de classe C', Σ admet "ne orientation transversale privilégiée (où les vecteurs sortants sont positifs. remarque 2') page 113), donc "ne orientation tangentielle privilégiée, si $\vec{E}$ est orienté. D'après la définition de la correspondance entre orientations transversale et tangentielle donnée dans la démonstration du théorème, on voit qu'un système de N-I vecteurs tangents en un point de Σ , et indépendants, est positif pour cette orientation tangentielle si, quand on fait précéder ce système de vecteurs par un vecteur "sortant:' on obtient une hase positive pour l'orientation de $\vec{E}$.

Si, en particulier, on fait $N = 2$, cela redonne bien l'orientation "directe" habituelle d'une courbe compacte de classe C^1 dans un plan orienté, et l'orientation "directe" du cercle trigonométrique dans $\mathbb{R}^2$.

<u>Remarques</u> 1°/ En résumant le théorème 28, le corollaire 3 du théorème 26, et le corollaire 2 du théorème 30, on voit que <u>toute hypersurface Σ fermée, connexe, de classe C^1 , d'un espace affine E de dimension finie, le partage en 2 régions, et est tangentiellement et transversalement orientable. Si Σ est compacte, les 2 régions jouent des rôles tres différents (l'une des deux est bornée), il y a "ne orientation transversale canonique (vecteurs sortants positifs), et "ne orientation tangentielle canonique si $\vec{E}$ est oriente</u>.

2°/ <u>Se donner "ne orientation tangentielle d'une courbe de classe, c'est se donner un sens de parcours de cette courbe</u>. On considérera comme sens de parcours positif celui pour lequel, en chaque point, le vecteur vitesse, s'il est $\neq 0$, est positif pour l'orientation en ce point.

* La ceinture de Mobius, définie par (VI,5;4), <u>n'est pas fermée</u> (on a pris une inégalité <u>stricte</u> $-\ell < \rho < \ell$. Si on avait pris une inégalité large $-\ell \leq \rho \leq \ell$, on n'aurait plus eu une variété, il y aurait eu un "bord"). Mais il peut naturellement exister, dans un espace affine E de dimension N , des variétés fermées et même compactes, de dimension $n < N - 1$ (donc qui ne soient pas des hypersurfaces), <u>non orientables</u>.

3°/ Orienter une variété V à deux dimensions, c'est se donner un sens de parcours pour les courbes compactes, au voisinage de chaque point. En effet, si, par exemple, nous prenons une structure euclidienne dans l'espace ambiant E, la projection orthogonale de la variété sur son sous-espace tangent au point a, restreinte à un voisinage $\mathcal{V}$ assez petit de a, est C^1-difféomorphisme; par conséquent un sens de parcours sur les courbes compactes de la variété, contenues dans le voisinage $\mathcal{V}$ du point a, est équivalent a un sens de parcours sur leur projection dans le plan tangent en a à la variété. Or, d'après l'orientation de V, le plan tangent est précisément muni d'une orientation, et nous venons de voir qu'une orientation d'un plan oriente ses courbes compactes, donc définit sur elles un sens de parcours * .

4°/ Soit V une variété de classe C^1, de dimension n et Σ une hypersurface, c'est-à-dire une sous-variété de dimension $n-1$, de classe C^1, de V. Alors tous les résultats locaux démontrés depuis le théorème 25 subsistent. Si V est orientable, Σ est tangentiellement orientable, si et seulement si elle l'est transversalement; si V est orientée, il y a correspondance biunivoque entre les orientations tangentielles de Σ et ses orientations transversales.

Mais les théorèmes globaux d'orientation ou de partage en réglons ne subsistent pas. Si Σ est fermée dans V, elle peut très bien avoir un complémentaire connexe. Par exemple, sur un tore, un cercle parallèle ou un cercle méridien est une hypersurface compacte qui ne partage pas le tore en plusieurs réglons ; il en est de même du cercle moyen dans la ceinture de Mobius (voir page 98). Dans le complémentaire V de l'origine dans $\mathbb{R}^2$, une demi-droite Issue de l'origine est une hypersurface fermée, qui ne partage pas V en plusieurs régions. Dans chacun de ces cas, l'hypersurface n est pas définissable par une seule équation normale $f(x) = 0$ (sans quoi, comme l'a prouvé la démonstration du théorème 28, elle partagerait V en au moins 2 régions) ; le cercle moyen de la ceinture de Mobius est tangentiellement orientable, mais non transversalement. Les théorèmes globaux énoncés sont très particuliers aux hypersurfaces fermées d'un espace affine. Toutes ces propriétés constituent ce qu'on appelle de la topologie algébrique.

* Ce résultat est purement local : pour tout a de V, on peut trouver un voisinage $\mathcal{V}$ de a, tel que l'orientation de V définisse un sens de parcours des courbes compactes contenues dans $\mathcal{V}$. Mais, si une sphère de $\mathbb{R}^3$ est orientée, celà ne donne pas un sens de parcours privilégié sur les 'grands cercles" de cette sphère.

Notre univers physique est-il une variété orientable ?

Laissons de côté le point de vue relativiste qui nous oblige à considérer un univers à quatre dimensions, mals qui n'introduit pas, pour l'orientation, de complications essentielles.

Prenons comme modèle du monde dans lequel nous vivons, uns variété à trois dimensions de classe C^∞ ; est-elle orientable, et peut-on, d'après certaines lois de la Physique, la munir d'une orientation canonique ?

Supposons, pour fixer les idées, qu'elle ne soit pas orientable. Cela signifierait qu'il existe certains chemins, analogues au cercle moyen de la ceinture de Mobius, tels qu'en, en partant d'une orientation initiale au point de départ, et en prolongeant continuement cette orientation le long de ces chemins, on arrive à l'orientation opposée en revenant au point Initial * . Un être humain qui suivrait un tel chemin , et. reviendrait sur terre, se trouverait, à son retour, avoir son coeur à droite, et son foie à gauche; les livres qu'il aurait emportés avec lui en langue française, seraient à son retour, écrits de droite à gauche; et , s'il avait emporté avec lui de l'acide tartrique gauche. il reviendrait avec de l'acide tartrique droit ** Et cela, naturellement, sans avoir jamais subi, en un point quelconque de son chemin, aucune transformation. Il se considérerait d'ailleurs comme absolument normal et inchangé, et c'est lui qui trouverait Inversés tous les phénomènes qu'il reverrait sur terre. Il lui suffirait de faire un deuxième tour pour remettre tout en équilibre. Ce simple exemple suffit à montrer sur quelles-bases fragiles reposent toutes les notions d'orientation données dans les livres d'enseignement élémentaire de mathématiques et de physique !

* On peut démontrer en effet que la circonstance rencontrée dans la ceinture de Möbius est générale : si une variété n'est pas orientable, il existe des "chemins de désorientation", courbes compactes le long desquelles n'existe aucun système continu d'orientations de la variété.

XX Procédé de fabrication sans valeur industrielle.

La règle du bonhomme d'Ampère, telle qu'elle est énoncée, est valable dans une variété à 3 dimensions orientée, mais n'a rigoureusement aucun sens si l'on n'admet pas une gauche et une droite universelles, c'est-a-dire une orientation. En regardant d'un peu plus près ce point de vue, on s'aperçoit qu'il existe, dans la définition du champ magnétique, une imperfection. L'être humain dont nous avons parlé plus haut, et qui ferait un très long voyage pour se désorienter, reviendrait, s'il avait emporté une boussole, avec une boussole inversée, dont le pôle nord serait marqué : S , et le pôle sud marqué : N (la définition de ces pôles est relative à la terre, qu'il n'aurait pas emportéeavec lui). Si cet homme avait emporté avec lui un fil électrique parcouru par un courant , et une boussole, rien n'ayant changé, pour lui, dans sa pérégrination, nous constaterions, à son retour, que sa boussole est orientée, apparemment, en sens inverse de la règle du bonhomme d'Ampère; mais ce ne serait qu'une apparence, puisque l'indication des pôles N et S de sa boussole serait erronée. Finalement on voit que le champ magndtique n'est pas un véritable vecteur, c'est un vecteur axial , analogue à un produit vectoriel. Il en résulte que notre voyageur, après son trajet de désorientation, ne trouverait quand même pas changéesles lois de l'électromagnétisme . Ces lois n'obligent pas l'espace physique à être orientable * .

Il existe cependant certains phénomènes récemment découverts de la physique, relatifs a la désintegration radioactive β qui semblent Indiquer que 1' espace est orientable.

Considérons un noyau atomique ayant un spin, c'est-a-dire une rotation propre donnée. Son vecteur moment cinétique est un produit vectoriel, donc un vecteur polaire, c'est-à-dire dépendant de l'orientation. Supposons ce noyau radioactif, et supposons prouvé par l'expérience que, dans sa désintégration β , il ait une probabilité plus grande d'éjecter un électron dans l'un des 2 demi espaces définis par le plan perpendiculaire à l'axe de sa rotation que dans l'autre; un tel phénomène est indépendant de toute orientation de l'espace. Alors on peut définir une orientation privilégiée de l'espace, par exemple celle pour laquelle le demi-espace à probabilité plus faible

* La relativité ne permet pas de séparer le champ électrique et le champ magnétique. Il y a un 'champ électromagnétique", tenseur antisymétrique du 2° ordre (donc à 6 composantes fondamentales), qui est, en réalité, une forme différentielle de degré 2, dans l'univers d'espace temps à 4 dimensions. On peut, dans un référentiel galiléen, faire correspondre à rette forme un vecteur polaire (le champ électrique), et un vecteur axial (le champ magnétique).

d'émission β est celui qui contient le moment cinétique du noyau (c'est cette orientation qui correspond, sur terre, à l'orientation droite-gauche basée sur le corps humain, dans l'expérience faite avec le cobalt 60 par la physicienne Wu , sur les suggestions théoriquesde Yang et Lee, en 1956).

Néanmoins ce phénomène physique n'est pas convainquant, car rien ne prouve que, dans des régions de l'univers très éloignées de la nôtre, il n existe pas un cobalt 60 "symétrique" par rapport au nôtre, et pour lequel ce soit le phénomène inverse qui se produise. Ajoutons à tout Cela que l'idée que nous pouvons nous faire de l'univers global est peut-être tellement loin de la réalité, que la question d'orientabilité n a peut-être aucun sens.

§ 6 INTÉGRATION D'UNE FORME DIFFÉRENTIABLE SUR UNE VARIÉTÉ ORIENTÉE

Mesure de Radon définie par une forme différentielle $\vec{\omega}$, de degré n , continue, sur une variété de classe C^1 . de dimension n, orientée.

Soit $\widehat{V}$ une variété de classe C^1 , de dimension n sur le corps des réels, orientée, (abstraite ou contenue dans un espace affine), et dénombrable à l'infini * .

soit $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \Phi(\mathcal{O})$ une carte de V . Soit $\vec{\omega}$ une forme différentielle, du degré maximum n , continue sur V, à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$ ** .

Considérons alors l'image réciproque de $\vec{\omega}$ par Φ , $\Phi^*\vec{\omega}$. C'est une forme différentielle continue sur l'ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$, parce que $\vec{\omega}$ est continue, et Φ de classe C^1 (théorème 14 bis). Elle a donc pour degré la dimension n de $\mathbb{R}^n$, de sorte qu'elle s'écrit sous la forme

$$\Phi^*\vec{\omega} = \vec{f}(u_1, u_2, \dots, u_n)\, du_1 \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_n \tag{VI,6;1}$$

* Nous supposerons, dans ce paragraphe, que toutes les variétés dont on parlera sont dénombrables à l'infini. Une variété contenue dans un espace affine est dénombrable à l'infini.

** On pourra, pour simplifier, prendre pour $\vec{F}$ le corps des scalaires.

Associons lui la mesure de Radon, à valeurs dans $\vec{F}$ *, définie sur l'ouvert $\mathcal{O}$ par

$$(\text{VI},6;2) \quad \vec{\mu} \text{ ou } \vec{\mu}_{\Phi} \text{ ou } \vec{\mu}_{\vec{\omega},\Phi} = \vec{f}(u_1,u_2,\dots,u_n)\,\theta(u_1,u_2,\dots,u_n;\Phi)\,du_1\otimes du_2\otimes\cdots\otimes du_n ,$$

où θ est la fonction associée à l'orientation de V par la carte Φ . Comme Φ est un homéomorphisme de $\mathcal{O}$ sur $\Phi(\mathcal{O})$, $\vec{\mu}_{\Phi}$ possède une image $\Phi\vec{\mu}_{\Phi}$ qui est une mesure sur l'ouvert $\Phi(\mathcal{O})$ de V .

Ainsi la donnée de la variété V d'une orientation de cette variété, de la forme différentielle $\vec{\omega}$ sur la variété, et de la carte Φ , définit une mesure de Radon $\Phi\vec{\mu}_{\Phi}$ sur $\Phi(\mathcal{O})$.

Théorème **31** - Soient $\overset{\curvearrowright}{V}$ une variété orientée, et $\vec{\omega}$ une forme différentielle continue définie sur V **

Soient $\Phi_1 : \mathcal{O}_1 \longrightarrow \Phi_1(\mathcal{O}_1)$ et $\Phi_2 : \mathcal{O}_2 \longrightarrow \Phi(\mathcal{O}_2)$ deux cartes de V , dont les images $\Phi_1(\mathcal{O}_1)$ et $\Phi_2(\mathcal{O}_2)$ ont une intersection Ω non vide.

Alors les deux mesures $\Phi_1\vec{\mu}_1$ et $\Phi_2\vec{\mu}_2$ définies par Φ_1 et Φ_2, à partir de la variété orientée $\overset{\curvearrowright}{V}$ et de la forme différentielle $\vec{\omega}$, coïncident dans l'ouvert Ω .

Démonstration - Soient Ω_1 et Ω_2 les images réciproques de Ω par Φ_1 et Φ_2 respectivement. Abandonnant $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$, nous nous restreindrons désormais à Ω_1 et Ω_2 . Comme d'autre part $\Phi_{2,1} = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ est un C^1-difféomorphisme de Ω_1 sur Ω_2 (corollaire 1 du théorème 33 du chapitre III), il donne à la fois des images directes et réciproques pour les fonctions, formes différentielles, mesures, etc..... Il sera commode d'employer le symbole $\sim$ pour des êtres mathématiques, respectivement sur Ω_1 et Ω_2 , qui se correspondent par $\Phi_{2,1}$.

* C'est parce que $\vec{F}$ est supposé complet que (VI,6;2) définit une mesure à valeurs dans $\vec{F}$, produit de la mesure de Lebesgue $du_1\otimes du_2\otimes \dots \otimes du_n$ par la fonction continue à valeurs dans $\vec{F}$: $\vec{f}\,\theta$. la définition est donnée à la formule (IV,5;6). Nous ne répéterons plus désormais que $\vec{F}$ est un espace de Banach.

** Très souvent , **V** sera dans un ouvert d'un espace affine, Comme on a $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Phi_{2,1}$, On aura certainement $\Phi_1 \vec{\mu}_1 = \Phi_2 \vec{\mu}_2$, si l'on a

$$(\text{VI},6;3) \qquad \vec{\mu}_2 = \Phi_{2,1} \vec{\mu}_1 \quad , \text{ ou } \quad \vec{\mu}_1 \sim \vec{\mu}_2 \ ;$$

c'est ce que nous allons montrer.

On a vu que $\Phi_{2,1}$ est de classe C^1. Supposons-là définie par

$$(\text{VI},6;4) \qquad u \longrightarrow v = \Phi_{2,1}(u) = v(u) \ , \text{ ou } v_i = v_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) \ ; \ i = 1,2,\ldots,n.$$

L'image réciproque par $\Phi_{2,1}$ de la forme différentielle $dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n$ est (formule (VI,3;40)) :

$$(\text{VI},6;5) \qquad \Phi^*_{2,1}(dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n) = \left(\det \Phi'_{2,1}(u)\right) du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots du_n$$

ou

$$(\text{VI},6;6) \qquad \left(\det \Phi'_{2,1}(u)\right) du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n \sim dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n \ .$$

Par ailleurs

$$(\text{VI},6;7) \qquad \vec{f}_1 \, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n = \Phi^*_1 \vec{\omega} = (\Phi_2 \circ \Phi_{2,1})^* \vec{\omega}$$

$$= \Phi^*_{2,1}(\Phi^*_2 \vec{\omega}) = \Phi^*_{2,1}(\vec{f}_2 \, dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n) \quad , \quad \text{ou}$$

$$(\text{VI},6;8) \qquad \vec{f}_1 \, du_1 \wedge du_2 \wedge \ldots \wedge du_n \sim \vec{f}_2 \, dv_1 \wedge dv_2 \wedge \ldots dv_n \ .$$

De (VI,6;6) et (VI,6:8) on déduit, par division :

(VI,6;9) $$\frac{\vec{f}_1(u)}{(\det \Phi'_{2,1}(u))} \sim \vec{f}_2(v)\ ^{*}$$

Entre les fonctions θ_1 et θ_2 , associées à 1 orientation de **V** et à Φ_1 et Φ_2 , on a, d'après (VI,5;1) :

(VI,6;10) $$\theta_1(u)\ \mathrm{sgn}(\det \Phi'_{2,1}(u)) \sim \theta_2(v)\ .$$

Alors (VI,6;9) et (VI,6;10) donnent, par multiplication:

(VI,6;11) $$\frac{\vec{f}_1(u)\ \theta_1(u)}{|\det\ \Phi'_{2,1}(u)|} \sim \vec{f}_2(v)\,\theta_2(v)\ .$$

Mais, d'après la formule du changement de variables dans les intégrales multiples (corollaire 1 du théorème 102 du chapitre IV), l'image directe par $\Phi_{2,1}$ de la mesure de $|\det \Phi'_{2,1}(u)|\, du$ est la mesure dv :

(VI,6;12) $$|\det\ \Phi'_{2,1}(u)|\, du_1 \otimes du_2 \otimes \cdots \otimes du_n \sim dv_1 \otimes dv_2 \otimes \cdots \otimes dv_n\ .$$

En multipliant membre à membre (VI,6;11) et (VI,6;12), on obtient

(VI,6;13) $$\vec{f}_1(u)\,\theta_1(u)\,du_1 \otimes du_2 \otimes \cdots \otimes du_n \sim \vec{f}_2(v)\,\theta_2(v)\,dv_1 \otimes dv_2 \otimes \cdots \otimes dv_n\ ,$$

ce qui est bien la relation cherchée $\vec{\mu}_1 \sim \tilde{\mu}_2$.

<u>Corollaire</u> - <u>Si</u> $\hat{V}$ <u>est une variété de **dimension** n,de classe</u> C^1, <u>**orientée,et si**</u> $\vec{\omega}$ <u>est une forme différentielle de **degré** n</u> <u>continue</u> sur V , <u>à valeurs dans un espace de Banach</u> $\vec{F}$, <u>**il** existe sur</u> V <u>une mesure de Radon</u> $[\vec{\omega}]_{\tilde{V}} = [\vec{\omega}]$. **

* Pour des **fonctions**,$\sim$ signifie que l'on a $=$, **si** l'on remplace v par $\Phi_{2,1}(u)$.

** Ce renvoi se trouve à la page suivante.

et une seule, à valeurs dans F , telle que, pour chaque carte Φ, $[\vec{\omega}]$ soit égale, dans l'ouvert $\Phi(\mathcal{O})$, à l'image $\Phi(\vec{\mu}_\Phi)$ de la mesure $\vec{\mu}_\Phi$ associée sur $\mathcal{O}$ à $\tilde{V}$ et $\vec{\omega}$ par Φ.

Démonstration - En effet, lorsque Φ parcourt toutes les cartes possibles de V, les $\Phi(\mathcal{O})$ forment un recouvrement ouvert de V. A chacune de ces cartes est associée une mesure $\Phi(\vec{\mu}_\Phi)$ dans l'ouvert $\Phi(\mathcal{O})$, et, dans l'intersection de deux de ces ouverts, les mesures qui leur sont associées coïncident. Il suffit alors d'appliquer le théorème de recollement des morceaux, théorème 17 du chapitre IV.

Remarques 1°/ La mesure $[\omega]$ trouvée est ≥ 0, si et seulement si la forme différentielle scalaire ω est ≥ 0, par rapport à l'orientation de V.

En effet, pour voir si $[\omega]$ est positive, il suffit de le voir dans chaque ouvert $\Phi(\mathcal{O})$; il suffit aussi, puisque Φ est un homéomorphisme, de voir si la mesure $\mu_{\omega,\Phi}$ est ≥ 0.

* Renvoi de la page 125 -

$[\vec{\omega}]$ n'est qu'une notation abrégée, car la mesure est définie par la donnée de $\vec{\omega}$, et de la variété orientée $\tilde{V}$.

En somme, la possibilité de définir une mesure de Radon $[\vec{\omega}]$ à partir de $\vec{\omega}$ et d'une orientation de V, et par là même de définir l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur $\tilde{V}$ (formule (VI,6;14)) vient de ce que le changement de variables dans une forme de degré n utilise le déterminant jacobien, que le changement de variables dans une intégrale multiple utilise le module du déterminant jacobien, et que le signe du déterminant jacobien est lié à l'orientation.

Bien noter que nous avons dû utiliser ici le théorème 102 du chapitre IV (changement de variables dans les intégrales multiples), et que la présente théorie ne permet donc pas de fournir une variante de la démonstration du théorème 102 du chapitre IV.

Pour cela, il faut et il suffit que la fonction $\mathfrak{f}\,\theta$ soit $\geqslant 0$ * .

Cela revient exactement à dire que la forme différentielle $\mathfrak{f}\theta\, du_1 \wedge du_2 \wedge \cdots \wedge du_n$ est ≥ 0 , par rapport à l'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$; mais $\mathfrak{f}\, du_1 \wedge$ . . . A $du_n = \Phi^* \omega$, alors, d'après la définition même de θ cela revient bien à dire que ω est 3 0 , par rapport'à l'orientation de la variété V .

Z 2°) Si l'on ne fixe pas d'orientation de la variété V , la forme différentielle $\vec{\omega}$ ne définit pas de mesure sur V · on peut encore que la forme $\vec{\omega}$ définit une mesure polairé sur **V** , c'est-à-dire qu elle associe à chaque orientation de V une mesure de Radon bien définie, et, à deux orientations opposées de **V** , deux mesures de Radon opposées.

3°) Si W est un ouvert de V et si on le munit de l'orientation $\tilde{W}$ définie par? , la'mesure $[\vec{\omega}]_{\tilde{W}}$ définie par $\vec{\omega}$ sur W est la restriction à l'ouvert **W** de la mesure $[\vec{\omega}]_{\tilde{V}}$.

Soit en effet Φ une carte telle que $\Phi(\mathcal{O}) \subset W$. Alors $[\vec{\omega}]_{\tilde{W}}$ et la restriction de $[\vec{\omega}]_{\tilde{V}}$ à w coïncident, dans $\Phi(\mathcal{O})$, avec $\Phi(\vec{\mu}_\Phi)$. Donc elles coïncident (théorème 13 du chapitre IV) dans la réunion des ouverts tels que $\Phi(\mathcal{O})$, c'est-à-dire dans **W** .

4”) La mesure $[\vec{\omega}]_{\tilde{V}}$ dépend linéairement de la forme différentielle $\vec{\omega}$:

(VI,6;13 bis)
$$[\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2]_{\tilde{V}} = [\vec{\omega}_1]_{\tilde{V}} + [\vec{\omega}_2]_{\tilde{V}}$$

$$[k\,\vec{\omega}]_{\tilde{V}} = k\,[\vec{\omega}]_{\tilde{V}} \quad , k \text{ constante scalaire.}$$

* En réalité, il faut et il suffit, d'après le corollaire du théorème 52 du chapitre IV, que $\mathfrak{f}\theta$ soit presque partout $\geqslant 0$ (presque par rapport à la mesure de Lebesgue). Comme $\mathfrak{f}\theta$ est continue, cela équivaut à dire qu'elle est partout $\geqslant 0$.

Intégrale d'une forme différentielle de degré n sur une variété de dimension n orientée

Définition - Si $\overset{\frown}{V}$ est une variété de dimension n et de classe C^1 orientée, et si $\vec{\omega}$ est une forme différentielle continue, de degré n, sur V, on dit que $\vec{\omega}$ est intégrable sur V si, $[\vec{\omega}]_{\overset{\frown}{V}}$ étant la mesure de Radon associée à $\overset{\frown}{V}$ et à $\vec{\omega}$, 1 est intégrable par rapport à $[\vec{\omega}]$; dans ce cas, son intégrale s'appelle intégrale de $\vec{\omega}$ sur $\overset{\frown}{V}$, et se note $\int_{\overset{\frown}{V}} \vec{\omega}$:

$$\int_{\overset{\frown}{V}} \vec{\omega} = \int_V [\vec{\omega}]_{\overset{\frown}{V}} = [\vec{\omega}]_{\overset{\frown}{V}}(1) = [\vec{\omega}]_{\overset{\frown}{V}}(V)\,.^{*} \qquad (\text{VI},6;14)$$

L'intégrale de $\vec{\omega}$ existe toujours si $\vec{\omega}$ est à support compact sur V, et à fortiori si V est compacte.

Elle existera si la norme de $[\vec{\omega}]_{\overset{\frown}{V}}$ est finie et $\vec{F}$ de dimension finie (Corollaire du théorème 54 bis du chapitre IV).

Propriétés élémentaires de l'intégrale

1°/ L'intégrale change de signe si l'on remplace; par $\overset{\frown}{V}$, la même variété munie de l'orientation opposée.

2°/ L'intégrale dépend linéairement de $\vec{\omega}$:

$$(\text{VI},6;15) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\overset{\frown}{V}} (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) = \int_{\overset{\frown}{V}} \vec{\omega}_1 + \int_{\overset{\frown}{V}} \vec{\omega}_2 \\[2ex] \displaystyle\int_{\overset{\frown}{V}} k\vec{\omega} = k \int_{\overset{\frown}{V}} \vec{\omega}\,, \qquad k \text{ constante scalaire;} \end{cases}$$

* C'est l'intégrale de 1 ou mesure de V par rapport à la mesure vectorielle $[\vec{\omega}]_{\overset{\frown}{V}}$. Nous supposons qu'elle a un sens suivant (IV,5;10) Cela suppose que la mesure $[\vec{\omega}]_{\overset{\frown}{V}}$ soit de base ≥ 0. C'est toujours vrai si $\vec{F}$ est le corps des scalaires, ou de dimension finie (théorème 54 du chapitre IV). Mais on peut même démontrer que c'est vrai ici quel que soit $\vec{F}$; si V est contenue dans un espace affine, on peut choisir dans ce dernier une structure euclidienne, et le théorème 32 montrera que $[\vec{\omega}]$ est de base dS, mesure des aires n-dimensionnelles sur V.

l'existence du deuxième membre entraîne celle du premier, pour la première formule, et lui est équivalente, pour la deuxième (sauf si $k = 0$, où elle l'entraîne mais ne lui est pas équivalente !).

Il suffit en effet d'utiliser (VI,6;13 bis), et, pour intégrer 1 par rapport aux mesures qui Interviennent dans ces formules, d'appliquer la formule (IV,5;16) (théorème **54** ter du chapitre IV).

Calcul pratique de l'intégrale

Supposons $\vec{\omega}$ à support compact K. On considérera un système fini de cartes Φ_i, tel que les ouverts $\Phi_i(\mathcal{O}_i)$ forment un recouvrement de **K** .

On désignera par α_i une partition de l'unité subordonnée On a alors $\vec{\omega} = \sum_i (\alpha_i \vec{\omega})$, et par suite la formule

$$\text{(VI,6;16)} \qquad \int_{\vec{V}} \vec{\omega} = \sum_i \int_{\vec{V}} \alpha_i \vec{\omega} .$$

Il suffira donc de calculer chacune des Intégrales du dernier membre. Pour cela on remarquera qu'elle peut s'écrire, d'après la définition même de la mesure μ_{Φ_i} par (VI,6;2), sous la forme de l'intégrale multiple habituelle

$$\text{(VI,6;17)} \qquad \int_{\vec{V}} \alpha_i \vec{\omega} = \int_{\Phi_i(\mathcal{O}_i)} \alpha_i \vec{\omega} = \int_{\mathcal{O}_i} \alpha_i (\Phi_i(u)) \vec{f}(u)\, \theta(u;\Phi)\, du_1 \otimes du_2 \otimes \cdots \otimes du_n .$$

Au lieu de la partition de l'unité, on peut naturellement aussi décomposer la variété **V** en une réunion (finie ou dénombrable) $\bigcup_i V_i$ d'ensembles disjoints $[\vec{\omega}]_{\vec{V}}$ - mesurables, et suffisamment petits pour que chacun d'eux soit contenu dans l'image d'une carte. SI alors V_i est contenue dans $\Phi_i(\mathcal{O}_i)$, on aura la formule

$$\text{(VI,6;18)} \qquad \int_{\vec{V}} \vec{\omega} = \int [\vec{\omega}]_{\vec{V}} = \sum_i \int_{V_i} [\vec{\omega}]_{\vec{V}} = \sum_i \int_{\Phi_i^{-1}(V_i)} f_i\, \theta_i\, du_1 \otimes \cdots \otimes du_n ,$$

qui nous ramène encore au calcul d'intégrales multiples habituelles. Nous donnerons plus loin des **exemples** plus précis (pages 134 et suivantes).

Remarque - Prenons le cas particulier où la variété V est de dimension 0 , c'est-h-dire formée de-points isolés. Alors $\vec\omega$, de degré 0 se réduit à une fonction f ; la mesure $[\vec\omega]$ sera alors, par Convention :

$$(\mathrm{VI},6;19)\qquad [\vec\omega]_{\tilde V} = \sum_\nu \pm \vec f(a_\nu)\,\delta_{(a_\nu)}\ , \qquad a_\nu \in V\ ;$$

le signe + ou - correspondant à l'orientation de chaque point a_ν, puisque nous avons vu qu'orienter un point c'est l'affecter d'un signe. L'intégrale est alors donnée par la formule :

$$(\mathrm{VI},6;20)\qquad \int_{\tilde V} \vec\omega = \sum_\nu \pm \vec f(a_\nu)\quad {}^*$$

Majoration de l'intégrale.

Théorème 32 - Si $\tilde V$ est une variété orientée de classe C' , de dimension n, contenue dans un esDace affine euclidien E de dimension N muni d'un référentiel orthonormal, si $\vec\omega$ est une forme différentielle de degré n , définie et continue sur V et mise sous la forme (VI,3;7) (où J parcourt l'ensemble de toutes les parties à n éléments de $\{1,2,\dots,N\}$) alors la mesure $[\vec\omega]$ définie par $\vec\omega$ sur $\tilde V$ est de base dS , mesure des aires n-dimensionnelles sur V ; on a :

$$(\mathrm{VI},6;21)\qquad \begin{cases} [\vec\omega] = \vec p(x)\,dS\ , & \vec p \text{ continue sur } V\ , \\ \|\vec p(x)\| \leqslant \sum_J \|\vec\omega_J(x)\| & \end{cases}$$

• Dans le cas de la dimension et de degré 0 , ces Signes ± paraissent, a priori, plus un embarras qu'autre chose; sur V sans orientation, $\vec\omega$ définit une mesure par (VI,6;19) avec + partout, et a une intégrale (VI,6;20), avec + partout. Mals les conventions adoptées pour $n = 0$ sont inévitables pour la formule de Stokes, que-nous verrons plus loin (théorèmes **37 et** 39).

Démonstration - Soit $\Phi : u \longrightarrow x = \Phi(u)$ une carte de V . Alors $\Phi^*\vec{\omega}$ est une forme différentielle de degré n sur un ouvert 6 de $\mathbb{R}^n$, qui s'écrit

$$\Phi^*\vec{\omega} = \vec{f}\, du_1 \wedge du_2 \wedge \cdots \wedge du_n \tag{VI,6;22}$$

$$= \left(\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq N} \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_n}(\Phi(u)) \frac{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \right)$$

$$du_1 \wedge du_2 \wedge \cdots \wedge du_n$$

d'après le corollaire 2 du théorème 14.

La mesure de Radon $\vec{\mu} = \vec{\mu}_{\vec{\omega},\Phi}$, associée à $\vec{\omega}$ par $\vec{V}$ et Φ, est donc définie sur $\mathcal{O}$ par :

$$d\vec{\mu} = \left(\theta \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq N} \vec{\omega}_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \frac{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \right) \tag{VI,6;23}$$

$$du_1 \otimes du_2 \otimes \ldots \otimes du_n .$$

D'autre part la mesure de Radon correspondant à l'aire n-dimensionnelle sur **V**, s'écrit, sur $\mathcal{O}$, $D(u)\, du$, où $D(u)$ est la n-aire du parallélépipède défini par les n vecteurs $\overrightarrow{\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}}(u)$, et $du = du_1 \otimes du_2 \otimes \cdots \otimes du_n$.

Cette aire est au moins égale à celle de sa projection orthogonale sur le sous-espace engendré par les vecteurs $\vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \ldots, \vec{e}_{j_n}$ de la base de $\vec{E}$ *, donc on a :

$$D(u) \geqslant \left| \frac{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \right| \tag{VI,6;24}$$

* Ceci résulte du théorème 100 du chapitre IV (projection des aires hyperplanes) si $n = N - 1$ Cela résulte, pour n quelconque, de l'exercice (non démontré) donné page 680 du Cours de 1ère Partie, puisque l'aire du parallélépipède est égale à la racine carrée de la somme des carrés des aires de ses projections sur les sous-espaces définis par n vecteurs de la base. De toute façon, le résultat énoncé ici est évident, par récurrence sur n, en exprimant l'aire comme produit de l'aire de la base par la longueur de la hauteur (théorème 104 du chapitre IV).

on peut alors écrire

$$\text{(VI,6;25)} \qquad \overrightarrow{d\mu} = \vec{q}(u)\big(D(u)\,du\big)$$

avec

$$\text{(VI,6;26)} \qquad \vec{q}(u) = \theta(u;\Phi)\left[\sum_{1\leq j_1<j_2<\dots<j_n\leq N} \vec{\omega}_{j_1,j_2,\dots,j_n}(\Phi(u)) \frac{1}{D(u)}\frac{D(x_{j_1},x_{j_2},\dots,x_{j_n})}{D(u_1,u_2,\dots,u_n)}\right].$$

La fonction $\vec{q}$ est continue sur $\mathcal{O}$, et admet, d'après (VI,6;24), la majoration :

$$\text{(VI,6;27)} \qquad \|\vec{q}(u)\| \leq \sum_J \|\vec{\omega}_J(\Phi(u))\|$$

Alors, Φ étant un homéomorphisme de $\mathcal{O}$ sur $\Phi(\mathcal{O})$, on peut écrire sur l'ouvert $\Phi(\mathcal{O})$ de V :

$$\text{(VI,6;28)} \qquad [\vec{\omega}] = \vec{\pi}(x)\,dS, \qquad \vec{\pi}(x) = \vec{q}(\Phi^{-1}(x))$$

La fonction $\vec{\pi}$ est bien continue et vérifie bien l'inégalité (VI,6;21).

La fonction $\vec{\pi}$ est ainsi définie sur $\Phi(\mathcal{O})$, relativement à la carte Φ. Mais, si Φ_1 et Φ_2 sont 2 cartes, et si $\Phi_1(\mathcal{O}_1)$ et $\Phi_2(\mathcal{O}_2)$ ont une intersection Ω non vide, les <u>fonctions</u> $\vec{\pi}_1$ et $\vec{\pi}_2$ <u>correspondantes coïncident sur</u> Ω. Pour le voir, nous devons montrer que, si l'on restreint Φ_1 et Φ_2 aux images réciproques Ω_1 et Ω_2 de Ω, on a, avec les notations de la démonstration du théorème 31 :

$$\text{(VI,6;29)} \qquad \theta_1(u)\frac{D(x_{j_1},x_{j_2},\dots,x_{j_n})}{D(u_1,u_2,\dots,u_n)}\frac{1}{D_1(u)} \sim \theta_2(v)\frac{D(x_{j_1},x_{j_2},\dots,x_{j_n})}{D(v_1,v_2,\dots,v_n)}\frac{1}{D_2(v)},$$

où D_1 et D_2 sont les facteurs définissant les aires n-dimensionnelles, relativement aux cartes Φ_1 et Φ_2 . Or c'est évident, car on a :

(VI,6;30) $$\theta_2(v) \sim \theta_1(u)\, sgn\left(d\acute{e}t\ \Phi'_{2,1}(u)\right) \qquad \text{(d'après (VI,6;10))}$$

$$\frac{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n})}{D(v_1, v_2, \dots, v_n)} \sim \frac{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n})}{D(u_1, u_2, \dots, u_n)} \ \frac{1}{d\acute{e}t\left(\Phi'_{2,1}(u)\right)}$$

$$\left(\text{avec } d\acute{e}t\ \Phi'_{2,1}(u) = \frac{D(v_1, v_2, \dots, v_n)}{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}\right)$$

$$D_2(v) \sim \frac{D_1(u)}{\left|d\acute{e}t\ \Phi'_{2,1}(u)\right|} \qquad \text{d'après (IV,10;9)}\ *$$

Alors les $\vec{\pi}_i$ correspondant aux diverses cartes Φ_i définissent une même fonctlnn $\vec{\pi}$ sur V , continue à valeurs dans $\vec{F}$, admettant la majoration (VI,6;28). D'autre part la mesure $[\vec{\omega}] - \vec{\pi}\, dS$ est nulle dans la famille d'ouverts $\Phi_i\ (\mathcal{O}_i)$, qui forment un recouvrement de V , donc nulle sur V (théorème 13 du chapitre IV), et le théorème est démontré.

* Cette démonstration de l'égalité de $\vec{\pi}_1$ et $\vec{\pi}_2$ dans Ω , par (VI,6;30), peut être remplacée par une application directe du théorème de Lebesgue-Nikodym (théorème 52 du chapitre IV). En effet, on doit avoir, dans Ω , $[\vec{\omega}] = \vec{\pi}_1 dS = \vec{\pi}_2 dS$, donc $\vec{\pi}_1$ et $\vec{\pi}_2$ doivent être dS-presque partout égales; comme elles sont toutes les deux continues,cela Implique qu'elles soient partout égales.

Corollaire 1 - Dans les conditions de l'énoncé du théorème, si les coefficients $\vec{\omega}_I$ de $\vec{\omega}$ sont bornés en norme sur V , et si V a une aire finie. alors 1 intégrale de $\vec{\omega}$ sur $\tilde{V}$ a un sens, et 1 on a la majoration

$$(\text{VI},6;31) \qquad \left\| \int_{\tilde{V}} \vec{\omega} \right\| \leqslant \left(\sum_J \left\| \vec{\omega}_J \right\| \right) S$$

où S est l'aire de V .

Démonstration - 1 est intégrable -par rapport à $[\vec{\omega}] = \vec{\mu}\, dS$, si et seulement si $\vec{\mu}$ est dS-intégrable (définition, formule (IV,5;10)); cela résulte alors du corollaire 2 du théorème 39 du chapitre IV.

Corollaire 2 - Si W est une sous-variété de V , de dimension $<n$, elle est de mesure nulle pour la mesure $[\vec{\omega}]_{\tilde{V}}$ associée à la forme différentielle $\vec{\omega}$ sur $\tilde{V}$.

Pour simplifier, supposons V contenue dans un espace affine E de dimension finie. Munissons E d'une structure euclidienne quelconque. Il résulte du corollaire 3 du théorème 107 du chapitre IV que W est de mesure nulle pour la n-aire dS

Application aux calculs pratiques

Soit à calculer 1 intégrale $\int \vec{\omega}$ d'une forme différentielle continue $\vec{\omega}$ de degré $N-1$, sur une sphère $\tilde{\Sigma}$ de centre origine et de rayon R dans $\mathbb{R}^N$, munie de son orientation canonique (correspondant a l'orientation transversale où les vecteurs sortants sont positifs; voir corollaire 2 du théorème 30). L'équateur $x_N = 0$ est une variété de dimension strictement inférieure à celle de la sphère, et par conséquent, d'après le corollaire 2. il peut être négligé dans l'intégrale. L'intégrale est donc la somme des deux intégrales correspondant respectivement à l'hémisphère supérieur $\tilde{\Sigma}_+$ et à l'hémisphère inférieur $\tilde{\Sigma}_-$

$$(\text{VI},6;32) \qquad \int_{\tilde{\Sigma}} \vec{\omega} = \int_{\Sigma} [\vec{\omega}] = \int_{\Sigma_+} [\vec{\omega}]_{\tilde{\Sigma}} + \int_{\Sigma_-} [\vec{\omega}]_{\tilde{\Sigma}}$$

$$= \int_{\tilde{\Sigma}_+} \vec{\omega} + \int_{\tilde{\Sigma}_-} \vec{\omega} \quad ,$$

où Σ_+ est définie par $x_N > 0$ et Σ_- par $x_N < 0$ (l'existence de l'intégrale de $[\vec{\omega}]_{\tilde{\Sigma}}$ sur Σ (parce que Σ est compacte) entraîne celle de ses intégrales sur toute partie dS-

Occupons nous par exemple d'abord de l'intégrale sur 1 hémisphère supérieur. On possède une carte de cet hémisphère, l'application Φ définie par :

$$\text{(VI,6;33)} \quad \begin{cases} (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}) \longrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_N), & \text{avec} \\ x_N = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{N-1}^2}, \end{cases}$$

où $\mathcal{O}$ est la boule ouverte $\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 < R^2$ de $\mathbb{R}^{N-1}$. On devra donc d abord chercher 1 image réciproque de $\vec{\omega}$ par cette carte. Pour cela il suffit d'écrire $\vec{\omega}$ sous la forme (VI,3;6), et de remplacer **respectivement** x_N **et** dx_N par la relation (VI,6;33) et la relation obtenue par différentiation, soit

$$\text{(VI,6;34)} \qquad dx_N = \frac{-x_1\,dx_1 - x_2\,dx_2 - \cdots - x_{N-1}\,dx_{N-1}}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{N-1}^2}}$$

On obtient ainsi une forme différentielle $\Phi^*\vec{\omega}$ ayant la forme

$$\text{(VI,6;35)} \qquad \vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{N-1},$$

où $\vec{f}$ est une fonction continue sur la boule ouverte $\mathcal{O}$. Il faut ensuite calculer la fonction $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}; \Phi)$. Le système de vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{N-1}$ est positif pour l'orientation canonique de $\mathbb{R}^{N-1}$; son image par $\Phi'(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$ est constituée par le système des vecteurs tangents à l'hémisphère supérieur au point $(x_1, x_2, \ldots x_{N-1}, x_N)$, ayant les précédents comme projections. Appelons les $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_{N-1}$. Nous remarquons que le vecteur $\vec{e}_N$, en chaque point de l'hémisphère supérieur, est sortant, Le signe de la base $\vec{e}_N, \vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_{N-1}$ dans $\mathbb{R}^N$ (qui est aussi le signe de la base $\vec{e}_N, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{N-1}$ *, c'est-à-dire $(-1)^{N-1}$) est donc aussi le signe de la base $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_{N-1}$ pour l'orientation tangentielle de la sphère. Finalement la fonction θ est donc égale à $(-1)^{N-1}$; on aura donc la formule :

$$\text{(VI,6;36)} \qquad \int_{\hat{\Sigma}_+} \vec{\omega} = (-1)^{N-1} \int_{\mathcal{O}} \vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})\, dx_1\, dz, \ldots dx_{N-1},$$

ramenant le calcul de l'intégrale de la forme différentielle à celui d'une intégrale multiple usuelle.

* On a $\vec{e}\,'_i = \vec{e}_i + \lambda_i \vec{e}_N$, donc le déterminant de l'une des bases par rapport à l'autre vaut 1.

Les calculs sont les mêmes en ce qui concerne l'hémisphère inférieur , mais, dans les formules (VI,6;33), (VI,6;34) , on doit écrire un signe- , à savoir

(VI,6;37) $$x_N = -\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{N-1}^2} \quad , \quad dx_N = t\,\frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + \cdots + x_{N-1}}{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdot - x_{N-1}^2} .$$

D'autre part, en un point de l'hémisphère inférieur, le vecteur $\vec{e}_N$ est rentrant, et par conséquent la fonction θ correspondante est $(-1)^N$.

Etudions le cas particulier de la dimension $N = 3$.

Supposons que $\vec{\omega}$ soit de la forme

(VI,6;38) $$\vec{\omega} = \vec{A}\, dy \wedge dz + \vec{B}\, dz \wedge dx + \vec{C}\, dx \wedge dy .$$

Avec les formules (VI,6;33 et 34), (VI,6;35) s'écrit ici :

(VI,6;39) $$\Phi^* \vec{\omega} = -\vec{A}\, dy \wedge \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} - \vec{B}\, \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \wedge dx + \vec{C}\, dx \wedge dy$$

$$= \left(\vec{C} + \frac{\vec{A}x + \vec{B}y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right) dx \wedge dy$$

Ici $\theta = (-1)^2 = +1$, donc

(VI,6;40) $$\int_{\tilde{\Sigma}_+} \vec{\omega} = \iint_{x^2+y^2<R^2} \left(\vec{C} + \frac{\vec{A}x + \vec{B}y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right) dx\,dy$$

Ensuite

(VI,6;41) $$\int_{\tilde{\Sigma}_-} \vec{\omega} = -\iint_{x^2+y^2<R^2} \left(\vec{C} - \frac{\vec{A}x + \vec{B}y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right) dx\,dy$$

On aura :

$$\int_{\tilde{\Sigma}} \vec{\omega} = \int_{\tilde{\Sigma}_+} \vec{\omega} + \int_{\tilde{\Sigma}_-} \vec{\omega} .$$

Il est bien entendu que, dans (VI,6;40) (resp. (VI,6;41)), on doit, dans les expressions de a , $\vec{B}$, $\vec{C}$, en fonction de x , y , z , remplacer z par $\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ (resp. $-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$).

En outre, on possède, par les coordonnées polaires, une carte particulière $\Phi = P$ de la sphère, définie par (IV,9;33). Ici $\mathcal{O}$ est le rectangle de $\mathbb{R}^2$ défini par $0<\theta<\pi$, $0<\varphi<2\pi$. (On a $r=R$). Le complémentaire de l'image $P(\mathcal{O})$ de cette carte est un demi-cercle méridien, il est donc encore de mesure nulle pour la mesure $[\vec{\omega}]$ associée à $\vec{\omega}$, d'après le corollaire précédent. L'intégrale peut donc simplement se calculer sur l'image de la carte. On remplacera alors, dans (VI,6;38), x, y, z par leurs expressions (IV,9;33), et dx, dy, dz , par leurs différentielles (avec $r=R$, $dr=0$) , ce qui permettra d'écrire $\vec{\omega}$ sous la forme

$$P^*\vec{\omega} = \vec{f}(\theta,\varphi)\, d\theta \wedge d\varphi \,. \tag{VI,6;42}$$

Il faut maintenant calculer la fonction d'orientation θ * . Pour cela, il nous faut, en un point déterminé (θ,φ) du rectangle $\mathcal{O}$, calculer l'orientation du système des deux vecteurs $\frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta,\varphi)$, $\frac{\partial P}{\partial \varphi}(\theta,\varphi)$ sur la sphère; or leur situation géométrique (étudiée page 672 du Cours de 1ère Partie (**) montre précisément que le système de ces deux vecteurs est positif pour l'orientation de la sphère, donc la fonction d'orientation vaut + 1. On est donc finalement ramené au calcul d'une intégrale double usuelle :

$$\int_{\hat{\Sigma}} \vec{\omega} = \iint_{\mathcal{O}} \vec{f}(\theta,\varphi)\, d\theta\, d\varphi \,. \tag{VI,6;43}$$

* Il s'agit ici de la fonction d'orientation $\theta(u;\Phi)$, <u>sans rapport</u> avec la colatitude θ l'une des coordonnées polaires ! Triste conséquence du'petit nombre de lettres de l'alphabet !

(**) Ce renvoi se trouve page suivante.

** Renvoi de la page 137.

A ce moment, nos lecteurs étant encore innocents et non Initiés aux mystères de l'orientation, nous n'avons pas regardé si le trièdre $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, était direct ou non. C'cst pourquoi nous avons seulement montré que $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}$ valait ± 1, ce qui nous suffisait pour le changement de variables des intégrales multiples.

<u>1ère démonstration</u> : On calcule directement, par différentiation de x, y, z, le jacobien, et on trouve $+ r^2 \sin\theta > 0$ donc $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ est une base positive. L'inconvénient de cette méthode est de perdre tous les avantages acquis lors de la détermination, par voie géométrique. du module du jacobien.

<u>2ème démonstration</u> : Raisonnons d'abord en coordonnées polaires <u>planes</u>, ρ, φ. D'après le choix même du sens positif de cercle trigonométrique dans un <u>plan orienté</u> (sens des angles), par l'orientation tangentielle de ce cercle associée à l'orientation transversale où les vecteurs sortants sont positifs, la base $\vec{u}$, $\vec{v}$, où ü est normal sortant, et $\vec{v}$ tangent dans le sens direct. est positive.

Si nous passons à $\mathbb{R}^3$, canoniquement orienté, on voit que le vecteur $\vec{i}$ est sortant par rapport à la boule, ainsi que le vecteur $\varepsilon \vec{e}_3$, où $\vec{e}_3$ est le 3ème vecteur de base (axe des z), et $\varepsilon =$ signe de z, $z \neq 0$. Donc, les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$ étant tangents à la sphère, la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ a le même signe que la base $\varepsilon \vec{e}_3, \vec{j}, \vec{k}$; mals alors celle-ci est de même signe que $\varepsilon \vec{e}_3, \vec{j}_0, \vec{k}_0$, ou encore $\vec{j}_0, \vec{k}_0, \varepsilon \vec{e}_3$, où $\vec{j}_0$ et $\vec{k}_0$ sont les projections horizontales de $\vec{j}$ et $\vec{k}$. Mais $\vec{j}_0$ et $\vec{k}_0$ sont, à des facteurs positifs près, $\varepsilon \vec{u}$ et $\vec{v}$,

(suite de ce renvoi page 139)

Prenons enfin, comme exemole tout-a-fait particulier, **l'intégrale**

(VI,6 ;44) $$\int_{\widehat{\Gamma}} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} ,$$

où $\widehat{\Gamma}$ est le cercle trigonométrique, muni de son orientation canonique. On possède évidemment une carte de ce cercle définie par $\Phi : \varphi \longrightarrow (\cos\varphi\ ,\ \sin\varphi)$; ici $\mathcal{O}$ est l'ouvert $0 < \varphi < 2\pi$ de la droite $\mathbb{R}$. L'image $\Phi(\mathcal{O})$ est, sur Γ, le complémentaire d'un point, donc d'un ensemble de mesure nulle pour $[\vec{\omega}]$ On voit alors que l'image réciproque de la forme différentielle n'est autre que la forme $d\varphi$ sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, il est Immédiat que la fonction θ d'orientation est égale à t 1, autrement dit que l'application Φ transporte le sens de parcours positif de $\mathbb{R}$ sur le sens de parcours positif du cercle trigonométrique; on a donc la formule :

(VI,6;45) $$\int_{\widehat{\Gamma}} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \int_{]0,2\pi[} d\varphi = 2\pi \qquad .$$

Ceci naturellement était très intuitif à l'avance ! Avec un peu d'habitude, on manie rapidement les opérations précédentes. Tout ce formalisme a un caractère à la fois intuitif et automatiaue très agréable. Il faut toutefois toujours porter une certaine attention aux questions de signe dûes aux orientations.

Suite du renvoi de la page 138

$\vec{u}$ et8 étant associés aux coordonnées polaires dans le plan des x , y . Finalement, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ a le signe de E ü , $\vec{v}$, $\varepsilon\vec{e}_3$ dans $\mathbb{R}^3$, ou de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{e}_3$ dans $\mathbb{R}^3$, ou de $\vec{u}$, $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^2$, donc est positive. Ce résultat, démontré seulement pour $z \neq 0$, reste valable par continuité pour $z = 0$.

Comme alors $\vec{i}$ est normal sortant, $\vec{j}$, $\vec{k}$ est bien une base positive pour l'orientation tangentielle de la sphère.

Corollaire 3 - Si, dans les conditions du théorème, une forme différentielle continue $\vec{\omega}_\nu$, converge pour ν infini vers une forme différentielle $\vec{\omega}$, uniformément sur tout compact de V, la mesure $[\vec{\omega}_\nu]$ associée à $\vec{\omega}_\nu$ converge, localement en norme, et a fortiori vaguement, vers la mesure $[\vec{\omega}]$ associée à $\vec{\omega}$.

Démonstration - Nous disons que ω_ν converge vers $\vec{\omega}$ si, dans l'expression (VI,3.7), chaque fonction $(\vec{\omega}_\nu)_J$ converge vers la fonction $(\vec{\omega})_J$. (Cette définition suppose V donnée dans un ouvert d'un espace affine, $\vec{\omega}$ définie et continue dans cet ouvert).

Alors la majoration (VI,6;21), appliquée à $\vec{\omega}_\nu - \vec{\omega}$, montre que la fonction $\vec{\pi}_\nu$, associée à $\vec{\omega}_\nu$, converge vers la fonction $\vec{\pi}$, associée à $\vec{\omega}$, uniformément sur tout compact de V. Donc, pour tout compact K de V,

$$(VI,6;46)\qquad \left\| \vec{\pi}_\nu\, dS - \vec{\pi}\, dS \right\|_K \leq \left(\sup_{x \in K} \left\| \vec{\pi}_\nu(x) - \vec{\pi}(x) \right\| \right) \int_K dS$$

converge bien vers 0. Le théorème de Lebesgue (théorème 35 du chapitre IV) donne d'ailleurs des conditions bien moins restrictives pour que cette conclusion subsiste (voir l'exemple, page 550 du Cours - 1ère partie) : si $\vec{\omega}_\nu$ converge simplement dS-presque partout vers $\vec{\omega}$, et admet une majoration $\sum_J \left\| (\vec{\omega}_\nu)_J(x) \right\| \leq g(x)$, où g est une fonction ≥ 0, localement dS-intégrable sur V, alors $[\vec{\omega}_\nu]$ converge localement en norme vers $[\vec{\omega}]$. Par ailleurs, si g est bornée sur V, et si V est d'aire finie, le théorème de Lebesgue montre que $\int_V \vec{\omega}_\nu$ converge vers $\int_V \vec{\omega}$.

Cas d'une hypersurface d'un espace euclidien

Nous allons calculer explicitement la fonction $\vec{\pi}$ de la formule (VI,6;21) dans le cas d'une hypersurface Σ d'un espace euclidien.

Théorème 33 - Soit E un espace affine euclidien orienté de dimension N, muni d'un référentiel orthonormal positif. Soit Σ une hypersurface de classe C^1 de E, orientée. Si alors $\vec{\omega}$ est une forme différentielle continue de degré $N-1$ dans E, définie par la formule :

(VI,6;47) $$\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\omega}_j(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_N ,$$

la mesure associée $[\vec{\omega}]$ sur $\overset{\frown}{\Sigma}$, est définie par la formule :

(VI,6;48) $$[\vec{\omega}] = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1}\, \vec{\omega}_j(x) \cos \alpha_j(x)\, dS ,$$

où $\alpha_j(x)$ est l'angle du j -ième vecteur de base de $\vec{E}$ avec la normale positive à Σ au point x (pour l'orientation transversale associée à l'orientation tangentielle par l'orientation de $\vec{E}$).

Démonstration - Soit Φ une carte de V . On connaît, d'après (VI,5;7) un vecteur porté par la normale et positif pour l'orientation transversale. Le vecteur unitaire correspondant de la normale est défini par la formule :

(VI,6;49) $$\vec{\nu} = \frac{\theta(u;\Phi)}{D(u)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}(u) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}(u) \right] ,$$

où $D(u)$ est précisément l'aire du parallélépipède des $\frac{\overrightarrow{\partial \Phi}}{\partial u_i}(u)$, c'est-à-dire la longueur de leur produit vectoriel.

D'après la formule (VI,2:16), ses coordonnées sont

(VI,6;50) $$\cos \alpha_j = \frac{\theta(u;\Phi)}{D(u)} (-1)^{j-1} \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{N-1})}$$

La formule (VI,6;26) donne donc

(VI,6;51) $$\vec{q}(u) = \sum \omega_j\big(\Phi(u)\big) (-1)^{j-1} \cos \alpha_j \quad .$$

d'où l'on déduit aussitôt (VI,6:48) d'après (VI,6;28).

Corollaire - Dans les conditions de l'énoncé du théorème, l'intégrale $\int_{\overset{\frown}{\Sigma}} \vec{\omega}$ se calcule comme une intégrale de surface

$$(VI,6;52^{bis})\qquad \int_{\hat{\Sigma}} \vec{\omega} = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \int_{\Sigma} \vec{\omega}_j \cos \alpha_j \, dS ,$$

l'existence de l'un des membres étant équivalente a celle de l'autre.

Exemple - Dans $\mathbb{R}^3$, on a la formule :

$$(VI,6;53)\qquad \int_{\hat{\Sigma}} (A\, dy \wedge dz + B\, dz \wedge dx + C\, dx \wedge dy)$$

$$= \int_{\Sigma} (A \cos\alpha + B \cos\beta + C \cos\gamma)\, dS .$$

Remarque - On préfère souvent écrire $\vec{\omega}$, quand elle est de degre N-l, sous la forme

$$(VI,6;53^{bis})\qquad \vec{\omega} = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} \vec{A}_j \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots dx_N$$

(à cause de la formule (VI,3;43)).

On a alors

$$(VI,6;53^{ter})\qquad \int_{\hat{\Sigma}} \vec{\omega} = (-1)^{N-1} \int_{\Sigma} \sum_{j=1}^{N} \vec{A}_j \cos \alpha_j \, dS .$$

Transformation par un difféomorphisme

Théorème 34 - Soient $\hat{V}$ et $\hat{V}'$ deux variétés orientées de dimension n et de classe C^1. Soit H un C^1-difféomorphisme de V sur V', transportant l'orientation de $\hat{V}$ sur celle de $\hat{V}'$ *. Si $\vec{\omega}$ est une forme différentielle continue de degré n sur V, et $H\vec{\omega}$ son image sur V' **, alors la mesure $[H\vec{\omega}]_{\hat{V}'}$ associée à $H\vec{\omega}$ est l'image par H de la mesure $[\vec{\omega}]_{\hat{V}}$ associée à ω ; et l'on a, entre les Intégrales, la formule":

* On entend par là que l'image par $H'(x)$ d'une base de $\vec{T}(x;V)$, positive pour l'orientation $\hat{V}$, est une base de $\vec{T}(H(x);V')$, positive pour l'orientation $\hat{V}'$.

** H étant un C^1-difféomorphisme, il y a des Images directes aussi bien que réciproques.

$$\int_{\vec{V}'} H\vec{\omega} = \int_{\vec{V}} \vec{\omega} \ , \tag{VI,fi;54}$$

l'existence de l'un des membres étant équivalente à celle de l'autre.

<u>Démonstration</u> - Il suffit de considérer une carte@ relative a V. , de sorte que $H \circ \Phi$ est une carte relative à V'. On a alors immédiatement les formules suivantes :

$$\Phi^* \vec{\omega} = \Phi^* H^* H\vec{\omega} = (H \circ \Phi)^* (H\vec{\omega}) \ , \tag{VI,6;55}$$

donc le $\vec{f}\, du_1 \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_n$ de (VI,6;1) est le **même** pour $\vec{\omega}$ sur V et $H\vec{\omega}$ sur V', et

$$\left(\theta(u;\Phi)\right)_V = \left(\theta(u; H\circ\Phi)\right)_{V'} \ , \tag{VI,6;56}$$

puisque H conserve les orientations.

Donc la mesure $\vec{\mu}_{\vec{\omega},\Phi}$ et la mesure $\vec{\mu}_{H\vec{\omega},H\circ\Phi}$ coïncident, d'après (VI,6;2). Alors

$$[H\vec{\omega}]_{\vec{V}'} = (H\circ\Phi)\vec{\mu}_{H\vec{\omega},H\circ\Phi} = (H\circ\Phi)\vec{\mu}_{\vec{\omega},\Phi} = H\left(\Phi\,\vec{\mu}_{\vec{\omega},\Phi}\right) = H\left([\vec{\omega}]_{\vec{V}}\right) \ , \tag{VI,6;57}$$

donc on a bien $[H\vec{\omega}]_{\vec{V}'}$ (Mesure associée a $H\vec{\omega}$ sur $\vec{V}'$) $= H([\vec{\omega}]_{\vec{V}})$ (image par **H** de la mesure associée à $\vec{\omega}$ sur $\vec{V}$). Alors les intégrales de **1** pour $[\vec{\omega}]$ et $[H\vec{\omega}]$ sont les **mêmes** (théorèmes **60** du chapitre IV), ce qui donne bien (VI,6;54).

On peut aussi partir d'une forme différentielle $\vec{\varpi}$ continue de degré n sur **V'**, et alors on aura :

$$\int_{\vec{V}} H^* \vec{\varpi} = \int_{\vec{V}'} \vec{\varpi} \tag{VI,6;58}$$

Les deux membres de cette formule conservent un sens, si H est seulement une application de classe C^1 et non un difféomorphisme; mais alors la formule cesse d'être vraie, les 2 membres sont en général distincts. (Ils le sont déjà si H est un C^1-difféomorphisme, mais ne conservant pas les orientations !). Par exemple, si $\vec{V} = \vec{V}'$ est le segment $]-1,+1[$ de $\mathbb{R}$ avec son orientation canonique, si H est $x \longrightarrow y = x^2$, et si $\varpi = dy$, alors $H^*\varpi = 2x\,dx$.

Z

On a :

$$\text{(VI,6;59)} \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\vec{V}'} \varpi = \int_{]-1,+1[} dy = 2 \\ \displaystyle\int_{\vec{V}} H^*\varpi = \int_{]-1,+1[} 2x\,dx = 0 \end{cases}$$

Intégrale d'une forme différentielle sur une variété paramétrique ou singulière orientée

Considérons, dans un ouvert Ω d'un espace affine E de dimension finie, une variété singulière ou paramétrique de classe C^1, de dimension n, définie par une application H de classe C^1 d'une variété vraie V, de classe C^1, de dimension n, dans Ω. Nous représenterons par $H|V$ cette variété singulière. Si V est munie d'une orientation $\vec{V}$ on dira qu'on a affaire à une variété singulière orientée, et on la notera $H|\vec{V}$.

Soit alors $\vec{\omega}$ une forme différentielle continue dans Ω, de degré n, à valeurs dans un espace de Banach. Elle a une image réciproque $H^*\vec{\omega}$, forme différentielle continue de degré n sur V; celle-ci définit une mesure de Radon $[H^*\vec{\omega}]_{\vec{V}}$ sur V, associée à l'orientation $\vec{V}$; il sera commode de la noter $[\vec{\omega}]_{H|\vec{V}}$ ou même $[\vec{\omega}]$, si aucune confusion n'est à craindre.

On appelle intégrale de $\vec{\omega}$ sur la variété singulière orientée $H|\vec{V}$, si elle existe, l'intégrale de l'image réciproque $H^*\vec{\omega}$ sur la variété orientée $\vec{V}$. On a donc la formule de définition

$$\text{(VI,6;60)} \quad \int_{H|\vec{V}} \vec{\omega} = \int_{\vec{V}} H^*\vec{\omega} = \int_{V} [H^*\vec{\omega}]_{\vec{V}}$$

Naturellement cette intégrale existe toujours si l'image réciproque par H du support de $\vec{\omega}$ est un compact de V.

Cela se produira sûrement si $\vec{\omega}$ est à support compact et H propre (voir 1ère Partie, page 536); ou si V est compacte.

Exemple - Reprenons l'exemple de la formule (VI,6;65). L'intégrale $\int_{\vec{V}} H^* \varpi = 0$ est, par définition, l'intégrale de $\varpi = dy$ sur la variété singulière définie par l'application $H : x \longrightarrow y = x^2$ de $]-1, +1[$ dans $\mathbb{R}$. On a donc toujours

$$(VI,6;66^{bis}) \qquad 0 = \int_{\overrightarrow{]-1,+1[}} 2\,x\,dx = \int_{H|\overrightarrow{]-1,+1[}} dy \;;$$

mais, dans le 2ème membre, il n'y a aucune raison de remplacer $H|]-1, +1[$, variété singulière, par la variété $]-1, +1[$.

Théorème 35 - Les intégrales d'une forme différentielle, sur deux variétés singulières orientées équivalentes, existent en même temps et sont égales.

Démonstration - Soient V_1 et V_2 deux variétés de dimension n et de classe C^1 H_1 et H_2 des applications respectives de V_1 et V_2 dans E, définissant deux variétés singulières de E.

On suppose que ces variétés sont équivalentes, autrement dit qu'il existe un C^1-difféomorphisme K de V_1 sur V_2, tel que l'on ait $H_1 = H_2 \circ K$.

D'autre part, V_1 et V_2 sont supposées orientées; et, pour que nous ayons deux variétés singulières orientées équivalentes, on suppose que K transporte l'orientation $\vec{V}_1$ sur l'orientation $\vec{V}_2$, au sens du théorème 34.

Soit alors $\vec{\omega}$ une forme différentielle continue de degré-n sur E ; elle admet une image réciproque $H_1^* \vec{\omega}$ sur V_1 qui, $\vec{V}_1$ étant orientée, définit sur V_1 une mesure de Radon $[\vec{\omega}]_{H|\vec{V}_1}$.

De la même manière $H_2^* \vec{\omega}$ définit une mesure de Radon $[\vec{\omega}]_{H|\vec{V}_2}$ sur V_2.

En outre, de la relation ci-dessus, on déduit que l'on a :

(VI,6;61) $H_1^* \vec{\omega} = (H_2 \circ K)^* \vec{\omega} = K^* (H_2^* \vec{\omega})$; ou $K(H_1^* \vec{\omega}) = H_2^* \vec{\omega}$.

Mais alors le théorème 34 nous prouve que la mesure $[H_2^* \vec{\omega}]_{\check{V}_2}$ est l'image directe de la mesure $[H_1^* \vec{\omega}]_{\check{V}}$ par K, et la formule (VI,6;54) nous dit bien que $\int_{\check{V}_1} H_1^* \vec{\omega} = \int_{\check{V}_2} H_2^* \vec{\omega}$, donc $\int_{H_1|\check{V}_1} \vec{\omega} = \int_{H_2|\check{V}_2} \vec{\omega}$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire - Soit H une application de classe C^1 d'une variété orientée $\check{V}$ de dimension n, dans un espace affine E, définissant une variété singulière orientée. Si l'image $H(V)$ est elle-même une variété V_0, de classe C^1, de dimension n, de E, et si H est un C^1-difféomorphisme de V sur V_0, alors l'intégrale, sur la variété singulière $H|\check{V}$, d'une forme différentielle $\vec{\omega}$ continue de degré n sur E, n'est autre que l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur l'image V_0, munie de l'orientation $\check{V}_0$, transportée par H de $\check{V}$.

Démonstration - La variété singulière $H|V$ est en effet équivalente à la variété singulière $I|V_0$, où I est l'application Identique; ici on prend $K = H$, alors $H = I \circ K$

Propriétés de l'intégrale d'une forme sur une variété singulière

1°/ L intégrale change de signe, si l'on remplace l'orientation de la variété singulière par l'orientation opposée, c'est-à-dire $\check{V}$ par $\hat{V}$.

2°/ L'intégrale dépend linéairement de $\vec{\omega}$.

3°/ Le théorème 32 est valable dans les conditions Suivantes. La variété singulière $H|V$ (H étant une application de V dans E) a une mesure des aires n-dimensionnelles, si E est euclidien; cette mesure $dS \geq 0$ est sur V (chapitre IV, théorème 107). Alors $[H^* \vec{\omega}]_{\check{V}}$, mesure sur V, est de base dS, égale à $\vec{\pi}\, dS$, $\vec{\pi}$ continue sur V, avec la majoration :

(VI,6;62) $$\|\vec{\pi}(\xi)\| \leq \sum_J \|\vec{\omega}_J(H(\xi))\| , \quad \xi \in V .$$

Il en résulte, en particulier, que $\int_{H|\vec{V}} \vec{\omega}$ existe sûrement si les coefficients $\vec{\omega}_J$ de $\vec{\omega}$ sont bornés et si V a une n-aire finie.

Si maintenant V, de dimension n, a une image $H(V)$ contenue dans une sous-variété de classe C^1 de dimension $< n$ de E, donc de n-aire nulle (corollaire 3 du théorème 107 du chapitre IV), l'intégrale de $\overset{n}{\vec{\omega}}$ sur la variété singulière $H|\vec{V}$ est forcément nulle.

On généralise aussi sans peine le théorème 33.

Intégrale de formes différentielles sur des variétés présentant des singularités

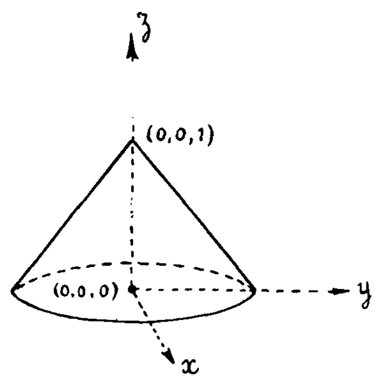
Considérons, par exemple, l'ensemble Σ de l'espace $\mathbb{R}^3$, réunion du disque d'équation

(VI,6;63) $$z = 0 , \quad x^2 + y^2 \leq 1 ,$$

et de la surface conique de révolution d'équation

(VI,6;64) $$x^2 + y^2 = (z-1)^2, \; 0 \leq z \leq 1 .$$

Cet ensemble compact Σ est représenté par la figure suivante



Bien entendu Σ n'est pas une hypersurface de classe C^1; elle est la réunion d'un disque ouvert Σ_1, hypersurface de classe C^∞, d'équation $z = 0$, $x^2 + y^2 < 1$, d'une surface conique (sans sommet ni base) définie par l'équation $x^2 + y^2 = (z-1)^2$, $0 < z < 1$, qui est aussi une hypersurface de classe C^∞, et enfin d'un point de coordonnée $(0,0,1)$, et du cercle, variété de classe C^∞ et de dimension 1 définie par les équations $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$. Il y a donc des "points singuliers", le sommet du cône et les points du cercle, qui empêchent Σ d'être une variété. On peut dire que Σ est une "variété avec points singuliers, ou pseudo-variété", de classe C^∞ , de dimension 2.

Tentons de donner une définition générale. On dit qu'une partie d'une variété de classe C^1 est n-dimensionnellement négligeable, si elle est la réunion d'un nombre fini, ou d une infinité dénombrable de sous-variétés (de classe C^1) de dimension $< n$. Pour $n = 1$, une partie 1-dimensionnellement négligeable est simplement un ensemble fini ou dénombrable; pour $n = 0$, une partie 0-dimensionnellement négligeable est vide. L'intérêt des parties n-dimensionnellement négligeables est que, si ω est une forme différentielle continue, de degré n , son intégrale sur toute partie n-dimensionnellement négligeable d'une variété V de classe C^1 et de dimension n est nécessairement nulle (Corollaire 2 du théorème 32). Soit alors $\tilde{V}$ une variété de classe C^m et de dimension quelconque. On dit qu'une partie V de $\tilde{V}$ est une pseudo-variété ou une variété à points singuliers, de classe C^m et de dimension n , s'il existe une partie de V, ouverte relativement à V , qui est une sous-variété de $\tilde{V}$, de classe C^m et de dimension n , et si le complémentaire $V - \mathcal{U}$ de $\mathcal{U}$ dans V est n-dimensionnellement négligeable . Naturellement le choix de cet ouvert $\mathcal{U}$ de V, est assez arbitraire, puisque, si l'on en a choisi un, on peut en choisir un plus petit en lui retranchant une sous-variété fermée de dimension $< n$. Il existe cependant un $\mathcal{U}$ qui est plus grand que tous les autres; l'ensemble des points de V au voisinage desquels V est une véritable variété de classe C^m et de dimension n. Cet ouvert $\mathcal{U}$ s'appelle la partie régulière de V, $V - \mathcal{U}$ est la partie singulière.

On dit qu'on a orienté la pseudo-variété V, si l'on en a orienté la sous-variété $\mathcal{U}$.

Dans le cas de la pseudo-variété Σ définie ci-dessus, $\mathcal{U} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$; la partie singulière $\Sigma - \mathcal{U}$ est réunion d'une circonférence et d'un point.

Nous pourrons, par exemple, orienter Σ comme suit.

En chaque point du disque Σ_1 , le sous-espace vectoriel tangent n'est autre que le sous-espace $\mathbb{R}^2$ défini par les deux premiers axes de coordonnées; nous prendrons comme orientation l'opposée de l'orientation canonique. En tout point de la surface conique Σ_2 , nous orienterons l'espace vectoriel tangent, en disant que deux vecteurs forment une base de signe. positif, si leur projection horizontale, sur l'espace $\mathbb{R}^2$ des deux premières coordonnées,est une base qui a le signe positif pour l'orientation canonique de $\mathbb{R}^2$. On voit que Σ partage l'espace en deux régions, qui peuvent être appelées la région intérieure (bornée) et la région extérieure (ou région de l'infini);l'orientation transversale de Σ , associée à l'orientation précédente, est celle pour laquelle sont positifs les vecteurs rentrant dans la région extérieure (ou sortant de la région intérieure); le vecteur $\vec{e}_3$, 3ème vecteur de la base, est transversal négatif en tout point de Σ_1,transversal positif en tout point de Σ_2 .

Comme il est dit plus haut, on ne définit l'orientation, transversale ou tangentielle, que sur la partie régulière de Σ . Aucune orientation n'a été définie aux points du cercle, ni au sommet du cône, ou il n'y a pas de plan tangent.

On appelle alors intégrale d'une forme différentiel12 $\vec{\omega}$ de degré n sur $\mathcal{V}$, 1 intégrale sur la partie régulière $\mathcal{U}$; c'est assez légitime, puisque $V - \mathcal{U}$ est n-dimensionnellement négligeable.

Dans l'exemple déjà étudié, ce sera donc l'intégrale sur $\tilde{\Sigma}_1 \cup \tilde{\Sigma}_2$. Si $\vec{\omega}$ est continue sur un voisinage de Σ dans $\mathbb{R}^3$, elle est bornée sur l'ensemble compact Σ , et, comme Σ_1 et Σ_2 ont une aire finie, 1 Intégrale a sûrement un sens.

Soient maintenant V une pseudo-variété de classe C^m et de dimension n , de partie régulière $\mathcal{U}$, et H une application continue de V dans un ouvert Ω d'un espace affine. On dira que $H|V$ est une pseudo-variété singulière de classe C^m de Ω, s'il existe un ouvert $\mathcal{U}_H$ de $\mathcal{U}$, sur lequel H soit de classe C^m ,et tel que $\mathcal{U} - \mathcal{U}_H$ soit n-dimensionnellement négligeable. Ici encore on peut choisir $\mathcal{U}_H$ assez arbitrairement, mais il y en a un qui est plus grand que tous les autres, c'est l'ensemble des points de $\mathcal{U}$ au voisinage desquels H est de classe C^m . Si alors V est orientée, on appellera intégrale de $\vec{\omega}$ sur $H|\vec{V}$, 1 intégrale, si elle existe, de $\vec{\omega}$ sur $H|\vec{\mathcal{U}}_H$, c'est-à-dire l'intégrale de $H^*\vec{\omega}$ sur $\vec{\mathcal{U}}_H$.

Intégrale curviligne

Soit $\vec{\omega}$ une forme différentielle de degré 1, définie et continue sur une variété, qui sera en général un ouvert Ω d'un espace affine E de dimension finie N. On peut l'intégrer sur une courbe paramétrique orientée de classe C' , si, par exemple, cette courbe est de longueur finie, et $\vec{\omega}$ borné sur cette courbe.

Par rapport à un référentiel arbitraire de **E**, **la forme** $\vec{\omega}$ s'écrit :

(VI,6;72) $$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{N} A_i(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_i \,,$$

où les A_i sont des fonctions sur Ω à valeurs dans **F**.

Prenons une variété singulière orientée définie comme suit. Soit $[\alpha, \beta]$ un intervalle compact de la droite réelle $\mathbb{R}$, $\beta - \alpha \neq 0$ de signe quelconque,

soit $t \longrightarrow M(t)$ un chemin sur Ω, défini par une application M de classe C^1 de $[\alpha, \beta]$ dans Ω. Choisissons sur $[\alpha, \beta]$ le sens de parcours $\alpha \longrightarrow \beta$, ce qui revient à lui donner l'orientation de $\mathbb{R}$ si $\alpha < \beta$, et l'orientation opposée si $\alpha > \beta$. Alors $[\widehat{\alpha, \beta}]$ est une pseudo-variété orientée de dimension 1, de partie régulière $]\alpha, \beta[$, et $M \mid [\widehat{\alpha, \beta}]$ est une pseudo-variété paramétrique $\vec{\Gamma}$ orientée de dimension 1, de longueur finie. Soient $x_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, les coordonnées de $M(t)$.

D'après la définition, on a :

(VI,6;73) $$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{\omega} = \int_{]\widehat{\alpha,\beta}[} M^* \vec{\omega} = \int_{]\widehat{\alpha,\beta}[} \vec{\omega}\,(M(t)) \,.\, \overrightarrow{M'(t)}\, dt$$

$$= \int_{]\widehat{\alpha,\beta}[} \left(\sum_{j=1}^{N} A_j\big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)\big)\, x_j'(t) \right) dt \,.$$

Expliquons en détail ces formules. Nous avons à chercher la forme différentielle $M^* \vec{\omega}$ (2ème membre de la formule précédente). Elle est définie par la formule (VI,3;30), qui donne

(VI,6;73 bis) $$(M^* \vec{\omega})(t) \cdot 1 = \vec{\omega}(M(t)) \cdot \overrightarrow{M'(t)} \quad (1 \in \mathbb{R}) \,,$$

où $\vec{\omega}(M(t)) \in \mathcal{L}(\vec{E}; \vec{F})$, $\overrightarrow{M'(t)} \in \vec{E}$, de sorte qu'on obtient bien aux 2 membres de (VI,6;73 bis) des éléments de $\vec{F}$ *

• Rappelons que, partout dans ce paragraphe, $\vec{\omega}$ est à valeurs dans un Banach $\vec{F}$.

L'image réciproque cherchée est donc la forme différentielle sur $]\alpha,\beta[$, à valeurs dans? , égale à $\vec{\omega}\,(M(t)).\overrightarrow{M'(t)}\,dt$.
En utilisant ensuite le référentiel, on obtient bien le dernier membre de (VI,6;73).

Dans ces formules, dt est considérée comme <u>une forme différentielle sur</u> $\mathbb{R}$, et l'intégrale se calcule sur $]\widehat{\alpha,\beta}[$ orienté .

Z La fonction d'orientation θ est ici + 1, si $\alpha < \beta$, et -1 , si $\alpha > \beta$. L'intégrale est donc $\pm\int_{]\alpha,\beta[} \ldots dt$,
où, cette fois, dt est <u>la mesure de Lebesgue sur</u> $\mathbb{R}$. Mais finalement ceci n'est autre chose que <u>l'intégrale définie</u> $\int_\alpha^\beta \ldots dt$, <u>relativement à la mesure de Lebesgue</u> dt <u>sur</u> $\mathbb{R}$, définie en Mathématiques Spéciales, ou à la formule (IV,9;1) * .

On a finalement :

$$\text{(VI,6;74)}\quad \int_{\hat{\Gamma}} \vec{\omega} = \int_\alpha^\beta \vec{\omega}\,(M(t))\,.\overrightarrow{M'(t)}\,dt = \int_\alpha^\beta \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{A}_i\left(x_1(t), x_2(t),\ldots,x_N(t)\right) x_i'(t)\right) dt$$

* Il y a inévitablement une grande confusion dans l'écriture de ces formules, à cause de l'habitude (regrettable !) de noter, par le même symbole dt , deux choses entièrement différentes : une forme différentielle de degré 1 (la différentielle de la fonction identique $t \to t$), et une mesure de Radon (la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). Si l'on effectue la transformation $t \to -t$, la 1ère se change en son opposée, la seconde reste invariante. La seconde est d'ailleurs associée à la première, suivant le corollaire du théorème 31, par l'orientation canonique de $\mathbb{R}$. On ferait mieux d'appeler $|dt|$ la mesure de Lebesgue (en conformité avec la formule du changement de variable (IV,9;72), symboliquement $dx = |\xi'(t)|\,dt$, qui s'écrirait mieux $|dx| = |\xi'(t)|\,|dt|$) . On voit aussi que le symbole $\int_\alpha^\beta$ est déja 1 intégrale d'une forme différentielle de degré 1 sur une variété orientée.

Cela rejoint bien le concept habituel d'intégrale curviligne, tel qu'il a été vu en Mathématiques Spéciales. On retrouve le fait qu uns telle intégrale curviligne ne peut se calculer que sur "ne courbe orientée. c'est-a-dire munie d'un sens de parcours. et q" un changement de l'orientation de la courbe change le signe de l'intégrale * .

Une intégrale curviligne peut se calculer sur un chemin de classe C^1 ; elle peut aussi se calculer sur un chemin de classe C^1 par morceaux (par exemple "ne ligne polygonale orientée) Nous appellerons ainsi "ne application M, continue de $[\alpha,\beta]$ dans Ω , telle qu'on puisse trouver un nombre fini de points $t_0=\alpha,\ t_1,\ t_2,\dots,t_i,\ t_{i+1},\dots\ t_n=$ fi, formant une suite finie (croissante ou décroissante, selon que a $<\beta$ ou $\alpha>\beta$) de manière que M soit de classe C^1 dans chaque intervalle $[t_i,\ t_{i+1}]$, $i=0,1,2,\dots,$ n-l . En chaque point t_i, **M** est donc continue, mais a "ne dérivée à gauche et "ne dérivée à droite, non nécessairement égales. Alors $M|[\alpha,\beta]$ est encore "ne pseudo-variété singulière. suivant la définition de la page 148 ; ici $\mathcal{U}_M$ est le complémentaire de $\{t_0,t_1,\dots,\ t_n\}$ dans $[\alpha,\beta]$. L'intégrale curviligne

$\int_{M|[\widehat{\alpha,\beta}]}\vec{\omega}$ sera alors, par définition :

(VI,6;75) $$\int_{M|[\widehat{\alpha,\beta}]}\vec{\omega}=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{M|]t_i,t_{i+1}[}\vec{\omega}\ ,$$

chaque terme étant "ne Intégrale sur "ne variété paramétrique orientée de classe **C'**. Le calcul fait à la formule (VI,6;73), pour chaque Intervalle $[t_i,t_{i+1}]$, nous redonne les mêmes expressions (VI,6;74), qui conservent bien un sens, la fonction $\vec{M}'$ étant définie partout sauf en un nombre fini de points, donc **dt** -presque partout, et réglée, donc dt -intégrable (et même intégrable-Riemann).

Intégrale curviligne sur un chemin arbitraire de longueur finie

1°/ Définition - Soit M un chemin défini par "ne application continue du segment $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$ dans un ouvert Ω d'un espace affine de dimension finie E . On suppose que ce chemin (non nécessairement de classe C' !) est de longueur finie, c'est-à-dire que la fonction M est à variation bornée (1ère partie, page 618). Soit d'autre part $\vec{\omega}$ "ne forme différentielle de degré 1 continue sur Ω . On définit alors l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur le chemin M orienté (où $[\alpha,\beta]$ à l'orientation définie page 150) par la formule

* Cela revient, dans (VI,6;74), à changer $\int_\alpha^\beta$ en $\int_\beta^\alpha$.

(VI,6;77) $$\int_{M|[\widehat{\alpha,\beta}]} \vec{\omega} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{\omega}(M) \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{\omega}\big(M(t)\big) \cdot \overrightarrow{dM}(t)$$

Il s'agit d'une expression $\int B(\vec{f}, \overrightarrow{d\mu})$ définie à (IV,5;13). Ici $t \to \vec{\omega}(M(t))$ est une application continue de $[\alpha,\beta]$ dans $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$; $\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{d\mu}$ est la mesure sur $[\alpha,\beta]$ dont la fonction M est l'intégrale indéfinie (théorème 88 du chapitre IV), mesure à valeurs das $\vec{E}$. Quant à B , c'est l'application bilinéaire continue canonique de $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F}) \times \vec{E}$ dans?, définie par $(u,\vec{X}) \to u \cdot \vec{X}$.

Si E est muni d'un référentiel par rapport auquel; admet l'expression (VI,6;72),et la fonction M admet les composantes $t \to x_i(t)$, alors l'intégrale cl-dessus peut s'écrire sous la forme

(VI,6;78) $$\int_{M|[\widehat{\alpha,\beta}]} \vec{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha}^{\beta} \vec{A}_j\big(M(t)\big)\, dx_j(t) \ ;$$

il s'agit des intégrales des fonctions continues $t \to \vec{A}_j(M(t))$, définies sur $[\alpha,\beta]$, à valeurs dans $\vec{F}$, par rapport aux mesures dx_j sur $[\alpha,\beta]$, associées aux fonctions à variation bornée $t \to x_j(t)$ par le théorème 88 du chapitre IV. S'il se trouve que M soit de classe C' , ou de classe C^1 par morceaux, on peut écrire $\overrightarrow{dM}(t) = \overrightarrow{M'}(t)\,dt$, $dx_j(t) = x'_j(t)\,dt$, d'après le corollaire 1 du théorème 89 du chapitre IV; on retrouve ainsi la formule (VI,6;74), ce qui prouve que la définition, que nous venons de donner, de l'intégrale d'une forme différentielle continue $\vec{\omega}$ de degré 1, sur un chemin de longueur finie, généralise l'intégrale,déjà connue,sur un chemin de classe C^1 ou de classe C' par morceaux.

2°/ Majoration - L'intégrale (VI,6;77) admet, si $\vec{E}$ est normé, la majoration

$$(VI,6;79)\qquad \left\| \int_{M|\overrightarrow{[\alpha,\beta]}} \vec{\omega} \right\| \leqslant \left(\operatorname*{Max}_{t\in[\alpha,\beta]} \left\| \vec{\omega}(M(t)) \right\| \right) L ,$$

où $\| \quad \|$ est la norme dans $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$, et où L est la variation totale de M sur $[\alpha,\beta]$, c'est-a-dire la longueur du chemin $M|[\alpha,\beta]$ de l'espace métrique E. En effet, d'après le corollaire 2 du théorème 90 et sa démonstration, on peut écrire $d\vec{M}(t) = \vec{q}(t)\,ds(t)$, où ds est la mesure des longueurs relative au chemin. mesure $\geqslant 0$ sur $[\alpha,\beta]$, et où $\vec{q}$ a la-norme 1; le chemin a ds-presque partout une tangente, et $\vec{q}(t)$ est le vecteur unitaire de la tangente au point $M(t)$, orientée dans le sens des t croissants (donc en sens Inverse du parcours du chemin, si $\alpha > \beta$).

Alors, d'après la définition (IV,5;13), on a :

$$(VI,6;80)\qquad \int_{M|\overrightarrow{[\alpha,\beta]}} \vec{\omega} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{\omega}(M(t))\cdot \vec{q}(t)\, ds(t) ;$$

comme $\|\vec{\omega}(M(t))\cdot\vec{q}(t)\| \leqslant \|\vec{\omega}(M(t))\|$ puisque $\|\vec{q}(t)\| = 1$, on en déduit bien (VI,6;79). Cette majoration est à rapprocher de (VI,6;31).

Si E est euclidien, on peut appeler $\cos\alpha_j(t)$ les cosinus directeurs de la tangente au point $M(t)$; on a donc $dx_j(t) = (\cos\alpha_j(t))\,ds(t)$. Alors, sous la forme (VI,6;78), on a la majoration :

$$(VI,6;81)\qquad \left\| \int_{M|\overrightarrow{[\alpha,\beta]}} \vec{\omega} \right\| \leqslant \left(\operatorname*{Max}_{t\in[\alpha,\beta]} \left\| \sum_{j=1}^{N} \vec{A}_j(M(t)) \cos\alpha_j(t) \right\| \right) L$$

qu'on peut, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, majorer par

$$(VI,6;82)\qquad \left\| \int_{M|\overrightarrow{[\alpha,\beta]}} \vec{\omega} \right\| \leqslant \left(\operatorname*{Max}_{t\in[\alpha,\beta]} \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \|\vec{A}_j(M(t))\|^2} \right) L$$

3°/ Calcul par passage à la limite.

Soit enfin Δ une subdivision $t_0 = \alpha$, t_1 , $t_2, \ldots$, $t_i, t_{i+1}, \ldots, t_n = \beta$ de $[\alpha, \beta]$, de finesse η .

Calculons la différence entre l'intégrale (VI,6;77), et

$$\text{(VI,6;83)} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \vec{\omega}(M(\theta_i)) \cdot \left(\overrightarrow{M(t_{i+1}) - M(t_i)}\right) , \quad \theta_i \in [t_i , t_{i+1}] .$$

L'expression (VI,6;83) peut s'écrire :

$$\text{(VI,6;84)} \quad \int_\alpha^\beta \vec{\varpi}(t) \cdot \overrightarrow{dM}(t)$$

où $\vec{\varpi}$ est une fonction sur $[\alpha, \beta]$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\vec{E}; \vec{F})$, égale, dans l'intervalle $]t_i , t_{i+1}[$, à $\vec{\omega}(M(\theta_i))$.

On a donc :

$$\text{(VI,6;85)} \quad \left\| \int_{M|\widehat{]\alpha,\beta[}} \vec{\omega} - \sum_{i=0}^{n-1} \vec{\omega}(M(\theta_i)) \cdot \left(\overrightarrow{M(t_{i+1}) - M(t_i)}\right) \right\|$$

$$\leq \left\| \int_\alpha^\beta \left(\vec{\omega}(M(t)) - \vec{\varpi}(t)\right) \cdot \overrightarrow{dM}(t) \right\|$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné . Si on choisit η assez petit pour que $|t'-t''| \leq \eta$ entraîne $\|\vec{\omega}(M(t')) - \vec{\omega}(M(t''))\| \leq \frac{\varepsilon}{L}$, L longueur du chemin (ce qui est possible, car la fonction $t \to \vec{\omega}(M(t))$, continue sur le compact $[\alpha, \beta]$, est uniformément continue), on aura $\|\vec{\omega}(M(t)) - \vec{\varpi}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{L}$, et le dernier membre de (VI,6;85) sera majoré par $\frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon$. On en déduit que l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur le chemin $M|\widehat{[\alpha, \beta]}$ est limite des sommes de Riemann (VI,6 83), lorsque la finesse η de Δ tend vers O . Sous cette forme là, on voit bien qu'elle est indépendante de la paramétrisation du chemin, deux paramétrisations équivalentes donnent la même intégrale, ce qui étend le théorème 35 au cas où M est seulement de longueur finie. On peut résumer tous ces résultats comme suit :

Théorème 36 - L'intégrale d'une forme différentielle $\vec{\omega}$ de degré 1, définie et continue sur un ouvert Ω d'un espace affine E de dimension finie, sur un chemin $M|[\alpha,\beta]$ de classe C^1 de Ω, s'exprime sous la forme (VI,6,74). On peut la généraliser, par les formules (VI,6;77 et 78), lorsque le chemin, non nécessairement de classe C^1, est de longueur finie. Cette intégrale est indépendante de la paramétrisation du chemin : 2 chemins équivalents donnent la même intégrale. Elle admet les majorations (VI,6;79, 81. 82). Elle est la limite de la somme de Riemann (VI,6;83), lorsque la finesse de la décomposition Δ de $[\alpha,\beta]$ tend vers o .

§ 7 FORMULE DE STOKES

Variétés avec bord

Nous allons d'abord introduire la notion de variété avec bord. Le prototype d'une telle variété est une boule fermée d'un espace affine euclidien; son bord est la sphère correspondante.

On appelle variété avec bord, de classe C" et de dimension n, une partie V d'une variété $\tilde{V}$ de classe C^m, et de dimension n, fermée, identique à l'adhérence de son intérieur, $V = \overline{\mathring{V}}$, et dont la frontière $\dot{V} = \Sigma$ soit une hypersurface de V, sous-variété de classe C^m et de dimension n -1. Cette frontière Σ s'appelle alors le bord de V, et se note aussi ∂V. V est en particulier une pseudo-variété de classe C^m, de dimension n, mais d'un type très spécial. La pseudo-variété de classe C^∞, de dimension 2, définie à (VI,6;63 et 64) n'est pas une variété avec bord. Certaines des propriétés topologiques relatives au cas où V est une boule d'un espace euclidien, et ∂V la sphère correspondante, s'étendent au cas général. Si Σ est vide, alors V est tout simplement une variété ordinaire ou sans bord. Occupons nous donc du cas où Σ n'est pas vide. Son complémentaire $\complement\Sigma$ dans $\tilde{V}$ est la réunion de deux ouverts disjoints, l'intérieur $\mathring{V}$ de V et le complémentaire $\complement V$, extérieur de V. Aucun de ces deux ouverts ne peut être vide. Si en effet $\mathring{V}$ était vide, alors $V = \overline{\mathring{V}}$ serait nécessairement vide aussi. Si d'autre part, $\complement V$ était vide, alors V serait identique à $\tilde{V}$, et par suite sa frontière Σ serait vide. Il en résulte que $\complement\Sigma$, réunion de deux ouverts disjoints et non vides, n'est sûrement pas connexe. Il contient au moins deux régions.

Si nous appelons $(\Omega_i)_{i\in I}$ les composantes connexes ou régions de $\complement\Sigma$, chacune d'elles, si elle a à la fois des points communs avec $\overset{\circ}{V}$ et avec $\complement V$, a des points communs avec Σ d'après le théorème 36 du Chapitre II, ce qui est impossible puisqu'elle est dans le complémentaire de Σ · donc nécessairement chacune des régions Ω_i est tout entière dans $\overset{\circ}{V}$ ou tout entière dans $\complement V$. Autrement dit on peut partager l'ensemble I en réunion de deux ensembles complémentaires J et K, et l'on a $\overset{\circ}{V} = \bigcup_{i\in J}(\Omega_i)$, et $\complement V = \bigcup_{i\in K}\Omega_i$; l'intérieur et l'extdrieur de V sont des réunions de régions du complémentaire de Σ. S'il se trouve que Σ partage V en exactement deux réglons, alors ces deux réglons sont nécessairement $\overset{\circ}{V}$ et $\complement V$. Le même raisonnement que celui qui a été fait au théorème 28 montre aussi que, si $\tilde{V}$ et Σ sont connexes, Σ partage nécessairement $\tilde{V}$ en au plus deux régions * ; mais comme, dans les présentes hypothèses (Σ bord de V) il y a aussi au moins deux réglons, Σ partage $\tilde{V}$ en exactement deux régions, $\overset{\circ}{V}$ et $\complement V$.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\tilde{V}$. Alors l'intersection $V \cap \mathcal{O}$ est encore, dans $\mathcal{O}$, une variété avec bord, et son bord n'est autre que $\Sigma \cap \mathcal{O}$.

[C'est là une propriété de pure topologie générale, résultant de ce que $\mathcal{O}$ est ouvert. Dire qu'un point a de $\mathcal{O}$ est intérieur à $V \cap \mathcal{O}$ relativement à $\mathcal{O}$, c'est dire que $V \cap \mathcal{O}$ est un voisinage de a dans $\mathcal{O}$. Mais comme $\mathcal{O}$ est ouvert, cela revient exactement à dire que V est un voisinage de a dans $\tilde{V}$, et que par suite a est dans l'intersection de l'intérieur $\overset{\circ}{V}$ de V, et de $\mathcal{O}$; autrement dit $(V \cap \mathcal{O})^\circ = \overset{\circ}{V} \cap \mathcal{O}$. D'autre part, pour qu'un point a de $\mathcal{O}$ appartienne à la frontière de $V \cap \mathcal{O}$, il faut et il suffit que tout voisinage de a dans $\mathcal{O}$ contienne des points de V, et des points de CV. Cela revient exactement à dire que tout voisinage de a, dans V a la même propriété, puisque $\mathcal{O}$ est ouvert; c'est-à-dire que a est dans la frontière de V, donc dans $\Sigma \cap \mathcal{O}$. On a donc $(V \cap \mathcal{O})^\bullet = \dot{V} \cap \mathcal{O} = \Sigma \cap \mathcal{O}$.

Mais $\Sigma \cap \mathcal{O}$ est une variété de classe C^m et de dimension $n-1$; enfin tout point de $V \cap \mathcal{O}$ est adhérent, dans $\tilde{V}$, à $\overset{\circ}{V}$, donc, dans $\mathcal{O}$, à $\overset{\circ}{V} \cap \mathcal{O}$; donc $V \cap \mathcal{O}$ est, dans $\mathcal{O}$, l'adhérence de son intérieur.]

* Dans la démonstration du théorème 28, $\tilde{V}$ était un espace affine, on pouvait utiliser un segment de droite joignant un point d'une région à un point de Σ. Ici $\tilde{V}$ est connexe, donc connexe par arcs (compléments de topologie sur les espaces connexes, théorème 36 septlmo); on peut donc toujours joindre par un chemin un point d'une région à un point de Σ et cela suffit.

Si alors il se trouve que Σ partage $\mathcal{O}$ en deux régions, ces deux régions sont nécessairement $\mathring{V} \cap \mathcal{O}$ et $\complement V \cap \mathcal{O}$. Nous avons vu, au théorème 27, que tout point a de Σ possède des voisinages ouverts $\mathcal{V}$ qui sont précisément partagés par Σ en deux régions, à chacune desquelles a est adhérent; il en résulte donc que tout point a de Σ est nécessairement adhérent à la fois à Y et à $\complement V$.

Variété avec pseudo-bord

On aura besoin, pour la formule de Stokes, d'ensembles qui sont seulement des variétés avec pseudo-bord.

On dira que V est une variété avec pseudo-bord de, classe C^m, de dimension n, si c'est une partie d une variété $\tilde{V}$ de classe C", de dimension n, fermée dans $\tilde{V}$, identique à l'adhérence de son intérieur, et dont la frontière Σ soit une pseudo-variété de classe C", de dimension $n-1$.

Si, par exemple, nous considérons dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble des points (x, y, z) qui vérifient les Inéquations

$$x^2 + y^2 \leq (1-z)^2, \quad 0 \leq z \leq 1, \tag{VI,7;1}$$

il constitue une variété avec pseudo-bord, de classe C^∞ et de dimension 3, dont l'intérieur $\mathring{V}$ est l'ensemble des points vérifiant les inéquations

$$x^2 + y^2 < (1-z)^2, \quad 0 < z < 1, \tag{VI,7;2}$$

et dont la frontière Σ est la pseudo-hypersurface définie à (VI,6;63 et 64). De même, si nous considérons, dans un plan, un polygone convexe, il constitue une variété avec pseudo-bord, de classe C^∞ et de dimension 2. dont l'intérieur est la région intérieure du polygone, et dont la frontière, contour du polygone, est la réunion d'un nombre fini de segments de droite, c'est-à-dire une pseudo-variété de classe C^∞ et de dimension 1. Plus généralement, un volume polyédral est une variété avec pseudo-bord.

Une variété avec pseudo-bord est encore une pseudo-variété d'un type particulier (la surface Σ définie par (VI,6;63 et 64) n'est pas une variété avec pseudo-bord; mais nous venons de voir qu'elle est pseudo-bord d'une variété avec pseudo-bord).

Si V est une variété avec bord, son bord Σ est une véritable variété, sans bord. On a donc $b\,b V = \emptyset$. Par contre, si V est une variété avec pseudo-bord , son pseudo-bord Σ est seulement une pseudo-variété.

En résumé, on a les **implications** suivantes * :

V est une variété : $bV = \emptyset$	→	V est une variété avec bord : bV est une variété $b\,bV = \emptyset$	→	V est une variété avec pseudo-bord; bV est une pseudo-variété.	→	V est une pseudo-variété

Si maintenant V est une variété avec pseudo-bord de classe C^m , de dimension n , et si H est une application de classe C^m d'un voisinage de V dans $\tilde V$, dans une variété Ω (qui sera ici, généralement, un ouvert d'un espace affine) alors $H \mid V$ est une variété singulière ou paramétrique avec pseudo-bord de Ω, de classe C^m , de dimension n . Son pseudo-bord est la pseudo-variété singulière $H \mid bV$, de classe C^m et de dimension $n-1$.

Orientation du pseudo-bord

Soit d'abord $V \subset \tilde V$ une variété avec bord de classe C^1. Supposons $\tilde V$ orientée. Alors V est orientée, au sens de l'orientation des pseudo-variétés : sa partie régulière $\mathring{V}$, ouvert de $\tilde V$, est orientée. Mais en outre on peut munir canoniquement le bord Σ d'une orientation.

On peut en effet le munir de l'orientation transversale dans laquelle les vecteurs sortant par rapport à $\mathring{V}$ sont positifs (théorème 29); après quoi on peut le munir de l'orientation tangentielle associée, puisque Σ est une hypersurface dans $\tilde V$ orientée (théorème 30, et remarque page). Une base de l'espace vectoriel tangent en un point x

* On n'introduit pas toutes ces notions barbares pour son plaisir ! La pratique la plus courante introduit la formule de Stokes pour des espaces analogues à des polyèdres, c'est-à-dire des variétés avec pseudo-bord.

de Σ est positive pour cette orientation, si, précédée d'un vecteur sortant en x par rapport à V, elle donne une base positive pour l'orientation de $\tilde{V}$. On écrira que la variété orientée Σ est le bord de la variété orientée-avec bord $\tilde{V}$, et l'on écrira $\Sigma = b\tilde{V}$. Si l'on remplace V par V', c'est-à-dire par V munie de l'orientation opposée, on remplace Σ par Σ'. 11 est bon de remarquer que $\complement \mathring{V}$ est aussi une variété avec bord, d'intérieur $\complement V$, et de même bord Σ. Si l'on oriente $\complement \mathring{V}$ par l'orientation de $\tilde{V}$, l'orientation de Σ, comme bord de $\complement \mathring{V}$, est opposée à son orientation comme bord de V. Si, par exemple, V est une boule fermée $\|x\| \leqslant R$ d'un espace affine euclidien, l'orientation de Σ comme bord de V est l'orientation canonique des sphères de l'espace euclidien (page); l'orientation de Σ comme bord de $\|x\| \geqslant R$ est l'orientation opposée.

Si maintenant on considère une variété singulière avec bord orientée H/V', définie par une application H de classe C' d'une variété orientée avec bord $\tilde{V}$, on appelle bord de cette variété singulière la restriction $H \mid bV = H \mid \Sigma$ de l'application H au bord Σ de $\tilde{V}$.

Si $\tilde{V}$ est seulement une variété avec pseudo-bord orientée, on peut, par la même méthode, orienter la partie régulière $\mathcal{U}$ du pseudo-bord Σ ; c'est cela même que nous appelé (page) orienter Σ, donc Ici encore le pseudo-bord d'une variété orientéeavec pseudo-bord est une pseudo-variété orientée. Par exemple, si V est un polyèdre, l'orientation de V définit une orientation des faces du polyèdre. SI $\tilde{V}$ est l'ensemble défini par (VI,7;1) dans $\mathbb{R}^3$, muni de l'orientation canonique de $\mathbb{R}^3$, son pseudo-bord est la pseudo-hypersurface Σ des formules (VI,6;63 et 64), munie de l'orientation que nous avons définie à ce moment.

On peut faire de même pour une variété paramétrique avec pseudo-bord.

Une variété (sans bord) orientée s'appelle aussi un cycle. Par exemple une sphère orientée d'un espace euclidien est un cycle compact. Une application H d'un cycle est un cycle paramétrique ou singulier. Ainsi le bord d'une variété (resp. variété singulière) avec bord est un cycle (resp. cycle singulier). Un cycle de dimension 1, s'appelle aussi un circuit.

Théorème de Stokes

Soit $\overset{\frown}{V} \subset \overset{\frown}{\tilde{V}}$ une variété de classe C' , orientée de dimension n , avec bord ou pseudo-bord; soit $\vec{\omega}$ une forme différentielle de degré **n-1**, de classe C^1 , sur **V** .

La formule de Stokes s'écrit :

$$\int_{\overset{\frown}{V}} d\vec{\omega} = \int_{b\overset{\frown}{V}} \vec{\omega} \qquad \text{(VI,7;3)}$$

Il y a échange entre l'opération "bord" sur la **variété,** et l'opération "cobord" sur la forme (C'est de là, d'ailleurs, que vient le nom de cobord, celui de bord **étant** tout naturel pour les **variétés**). On intègre $\vec{\omega}$, forme **différentielle** de degré $n-1$, sur $b\overset{\frown}{V}$, **pseudo-variété orientée** de dimension n -1; $d\vec{\omega}$, forme différentielle de **degré** n , sur $\overset{\frown}{V}$, pseudo-variété orientée de **dimension** n .

<u>Ce théorème n'est applicable que dans certaines conditions assez restrictives.</u> On peut naturellement l'étendre aux **variétés** parametriques avec bord ou pseudo-bord (voir formule (VI,7;4)).

Théorème de Stokes élémentaire

<u>Théorème 37</u> - <u>Soit</u> **V c** $\tilde{V}$ <u>une variété avec bord</u> Σ , <u>orientée, de classe</u> C^2, <u>de dimension n</u> . <u>Soit</u> **H** <u>une application de classe</u> C^2 , <u>d'un voisinage de V dans $\tilde{V}$, dans une variété Ω de classe</u> C^2 <u>définissant ainsi une variété paramétrique orientée avec bord H | $\overset{\frown}{V}$ de Ω</u> * <u>Soit $\vec{\omega}$ une forme différentielle de degré $n-1$, de classe</u> C^1 , <u>définie dans Ω , à valeurs dans un espace de Banach</u> $\vec{F}$.

* Généralement, dans la suite de ce **cours,** Ω sera un ouvert d'un espace affine de dimension finie. C'est aussi ce qui se passera **si** V est dans un tel espace affine et **si H** est l'identité.

Si alors V coupe l'image réciproque par H du support de $\vec{\omega}$ suivant un compact (ce qui se produira toujours si V est compacte * ou si $\vec{\omega}$ est à support compact et H propre sur V), on a la formule de Stokes :

$$(\text{VI},7;4) \qquad \int_{H|\mathring{V}} d\vec{\omega} = \int_{H|b\mathring{V}} \vec{\omega}$$

Ce théorème est dit théorème élémentaire de Stokes, parce que V a un bord, bV est une vraie variété.

Démonstration -

1er cas -

$\Omega = \tilde{V} = V = \mathbb{R}^n$ [donc $\Sigma = \emptyset$), H = identité;

$\vec{\omega}$ est à support compact. On suppose $\mathbb{R}^n$ muni de son orientation canonique.

Supposons $\vec{\omega}$ exprimée sous la forme habituelle (VI,3;41)

$$(\text{VI},7;5) \qquad \vec{\omega} = \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{\omega}_j \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \, dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots dx_n \right).$$

Alors

$$(\text{VI},7;6) \qquad d\vec{\omega} = \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \,.$$

Il suffit évidemment de montrer que, pour "ne somme Σ réduite à un seul terme, c'est-à-dire pour "ne forme $\vec{\omega} = \vec{\omega}_j \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \cdots dx_n$, la formule (VI,7;3) est vraie. C'est ce que nous allons faire.

Avec $V = \mathbb{R}^n$ muni de son orientation canonique, la fonction d'orientation θ de la page 88 vaut t 1, et

$$(\text{VI},7;6) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \iint \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \cdot \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n \,,$$

intégrale multiple habituelle. Les intégrales écrites ont un sens, puisque $\vec{\omega}$ est continue à support compact.

Comme Σ est vide, l'intégrale sur $\hat{\Sigma}$ est nulle, et la formule à démontrer s'écrit :

* C'est le cas que nous rencontrerons le plus souvent.

$$(\text{VI},7;8)\qquad \iint\cdots\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 0 .$$

Appliquons le théorème de Fubinl (théorème **77** du chapitre IV) :

$$(\text{VI},7;9)\qquad \iint\cdots\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int\cdots\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_1\, dx_2 \cdots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \cdots dx_n \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_j .$$

Le théorème de Fubinl Indique seulement que la dernière intégrale a un sens pour $(dx_1 \cdots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \cdots dx_n)$-presque toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots x_n$, et qu'elle définit une fonction $(dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \cdots dx_n)$ -intégrable. Mais de toute évidence, <u>la dernière intégrale existe toujours, et elle est nulle,</u> car, $\vec{\omega}$ ayant un support compact

$$(\text{VI},7;10)\qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_j$$

$$= \Big[\vec{\omega}_j(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, \ldots, x_n)\Big]_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} = \vec{0}$$

<u>2ème Cas</u>

V est le demi-espace fermé $x_1 \leq 0$ de $V = \Omega = \mathbb{R}^n$, H est l'identité; $\vec{\omega}$ est à support compact. On suppose $\mathbb{R}^n$ muni de l'orientation canonique; alors Σ est 1 hyperplan $x_1 = 0$, et, comme nous l'avons vu page , l'orientation de Σ est l'orientation canonique, où la base $\vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ est positive. Comme dans le ler cas, nous supposons $\vec{\omega}$ de'la forme (VI,7;6), avec une sommez réduite à un seul terme. Le premier membre de (VI,7;4) est l'intégrale qui est au premier membre de (VI,7;8), mals calculée sur **V**, demi-espace $x_1 \leq 0$, au lieu de $\mathbb{R}^n$. Le deuxième membre de (VI,7;4) se calcule comme suit. On prendra pour la variété Σ la carte identique; l'image réciproque de $\vec{\omega}$, forme sur $\mathbb{R}^n$, est la forme sur $\mathbb{R}^{n-1}$, obtenue en remplaçant, dans $\vec{\omega}$,

x_1 **et** dx_1 **par o ;** c'est donc la forme différentielle $\vec{\omega}_1(o, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \wedge dx_3 \ldots \wedge dx_n$.

Comme Σ a l'orientation canonique de $\mathbb{R}^{n-1}$, la fonction6 d'orientation vaut encore + 1, et

$$(\text{VI},7;11) \qquad \int_{\Sigma} \cdots\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int\cdots\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \ldots\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_n\,.$$

La formule de Stokes s'écrit donc :

$$(\text{VI},7;12) \qquad \iint\cdots\int_{x_1\leq 0} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 0 \qquad \text{pour } j \neq 1,$$

et

$$(\text{VI},7;13) \qquad \iint\cdots\int_{x_1\leq 0} \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int\cdots\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \vec{\omega}_1(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$$

La première formule se démontre comme celle du premier cas. D'après Fubini (formule (IV,8;35)), on peut écrire :

$$(\text{VI},7;14) \qquad \iint\cdots\int_{x_1\leq 0} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}\, dx_1 \ldots dx$$

$$= \int\cdots\int_{x_1\leq 0} dx_1 \cdot dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots dx_n \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j}\, dx_j\,,$$

et la dernière intégrale est nulle.

Pour la deuxième formule, on emploie encore Fubini, ce qui donne, avec cette fols des bornes d'intégration différentes :

$$(\text{VI},7;15) \qquad \iint\cdots\int_{x_1\leq 0} \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial x_1}\, dx_1 \ldots dx_n = \int\cdots\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_1 \cdots dx_n \int_{x_1\leq 0} \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial x_1}\, dx_1\,.$$

Mals la dernière intégrale vaut

$$(\text{VI},7;16) \qquad \int_{x_1\leq 0} \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial x_1}(x_1,x_2,\ldots x_n)\, dx_1 = \Big[\vec{\omega}_1(\xi, x_2,\ldots,x_n)\Big]_{\xi=-\infty}^{\xi=0} = \vec{\omega}_1(0,x_2,\ldots x_n)\,;$$

en portant dans (VI,7; 15), on obtient bien (VI,7;13).

3ème Cas -

V quelconque, $\Omega := \tilde{V}$, H est l'identité; le support de $\vec{\omega}$ coupe V suivant un compact.

Soit alors a un point de V. SI ce point se trouve dans $\mathring{V}$, il possède un voisinage connexe $\mathcal{V}_a$ dans $\mathring{V}$, qui soit l'image d'une carte Φ_a de $\mathring{V}$; Φ_a applique un ouvert $\mathcal{O}_a$ de $\mathbb{R}^n$ dans V, avec $\Phi_a(\mathcal{O}_a) = \mathcal{V}_a$.

Si au contraire a appartient à Σ, alors, d'après le corollaire 2 bis du théorème 32 du chapitre III, on peut trouver un C^2-difféomorphisme Φ_a d'une boule ouverte $\mathcal{O}_a$ de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert $\mathcal{V}_a$ de V contenant a, de manière que l'intersection $\Sigma \cap \mathcal{V}_a$ soit l'image par Φ_a de l'intersection de $\mathcal{O}_a$ avec l'hyperplan $u_1 = 0$ de $\mathbb{R}^n$. Cet hyperplan coupe la boule en 2 régions, $u_1 < 0$ et $u_1 > 0$, dont les images par Φ_a sont deux régions définies par Σ dans $\mathcal{V}_a$; nous avons vu, page , que ce sont nécessairement $\mathring{V} \cap \mathcal{V}_a$ et $\complement V \cap \mathcal{V}_a$. En remplaçant au besoin u_1 par $-u_1$ (ce qui signifie évidemment un changement de carte), on peut supposer que $u_1 < 0$ a pour image, par Φ_a, $\mathring{V} \cap \mathcal{V}_a$.

L'ensemble de tous les $\mathcal{V}_a$ ainsi formé est un recouvrement de V, donc a fortiori de l'intersection, supposée compacte, de V et du support de $\vec{\omega}$. Il suffit donc d'un nombre fini des $\mathcal{V}_a$, soit $(\mathcal{V}_i)_{i\in I}$, correspondant à des a_i, pour recouvrir cette Intersection. Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnke, et formée de fonctions de classe C^2 ce qui est possible d'aprés le théorème 11 du chapitre IV, puisque $\mathring{V}$ est supposée de classe C^2.

La formule de Stokes s'écrit :

$$\text{(VI,7;17)} \qquad \sum_{i\in I} \int_{\tilde{V}} d(\alpha_i \vec{\omega}) = \sum_{i\in I} \int_{\widehat{\partial V}} \alpha_i \vec{\omega} ,$$

car $\sum_{i\in I} \alpha_i$ vaut 1 sur l'intersection de V et du support de $\vec{\omega}$. Nous allons montrer l'égalité de chaque terme de la première somme avec le terme correspondant de la deuxième. Comme Φ est un C^2-difféomorphisme, il commute avec le oobord d (théorème 17) et $\Phi_i^*(\alpha_i \vec{\omega})$ est de classe C^1 dans $\mathcal{O}_i$ (théorème 14 bis), donc :

$$
(\text{VI},7;18)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\overset{\circ}{V}} d(\alpha_i \vec{\omega}) = \int_{\mathcal{O}_i} \Phi_i^* \, d(\alpha_i \vec{\omega}) = \int_{\mathcal{O}_i} d(\Phi_i^*(\alpha_i \vec{\omega})) \\ \displaystyle\int_{\widehat{bV}} \alpha_i \vec{\omega} = \vec{0} \quad , \end{cases}
$$

si $a_i \in \overset{\circ}{V}$, et

$$
(\text{VI},7;19)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\widehat{V}} d(\alpha_i \vec{\omega}) = \int_{\widehat{\mathcal{O}_i} \cap \{u_1 < 0\}} d(\Phi_i^*(\alpha_i \vec{\omega})) \\ \displaystyle\int_{\widehat{bV}} \alpha_i \vec{\omega} = \int_{\mathcal{O}_i \overrightarrow{\cap \{u_1 = 0\}}} \Phi_i^*(\alpha_i \vec{\omega}) \end{cases}
$$

si $a_i \in \Sigma$.

Prolongeons $\Phi_i^*(\alpha_i \vec{\omega})$, qui n'est définie que dans $\mathcal{O}_i$, par 0 dans $\complement \mathcal{O}_i$; en fait, elle est alors nulle dans $\complement K_i$, K_i étant le support de $\Phi_i^* \alpha_i$. La forme, ainsi prolongée sur $\mathbb{R}^n$, est encore de classe C^1 ; car elle l'est dans les 2 ouverts $\mathcal{O}_i$, $\complement K_i$, de réunion $\mathbb{R}^n$. si on convient de continuer à appeler $\Phi_i^*(\alpha_i \vec{\omega})$, la forme prolongée, on peut, dans (VI,7;18 et 19), remplacer $\mathcal{O}_i$ par $\mathbb{R}^n$.

L'orientation à prendre pour $\mathbb{R}^n$ est l'orientation canonique ou l'opposée (suivant le signe de la fonction d'orientation θ_i liée à Φ_i : signe constant, parce que $\mathcal{O}_i$ est supposé connexe).

De toute façon, c'est sans Importance, et on peut prendre l'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$, car cela conserve ou change les signes à la fois dans les 2 membres.

Mais alors l'égalité des 2 lignes de (VI,7;18) résulte du 1er cas démontré, l'égalité des 2 lignes de (VI,7;19) du 2ème cas. Ainsi (VI,7;17), donc le 3ème cas, est démontré.

4ème Cas : Cas général -

H est maintenant quelconque. D'après la définition de l'intégrale d'une forme différentielle sur une variété paramétrique, la formule de Stokes est équivalente à

(VI,7;20)
$$\int_{\widetilde{V}} H^* d\vec{\omega} = \int_{\widetilde{bV}} H^* \vec{\omega} .$$

Comme H est supposée de classe C^2 H^* commute avec le cobord d (théorbme 17), donc cela revient à :

(VI,7;21)
$$\int_{\widetilde{V}} d(H^*\vec{\omega}) = \int_{\widetilde{bV}} H^* \vec{\omega} .$$

Mals, d'après les hypothèses faites sur H, le support de $H^* \vec{\omega}$ coupe V suivant un compact, et cette formule n'est autre que celle du 3ème cas, relativement à $H^* \vec{\omega}$; et le théorème élémentaire de Stokes est ainsi démontré.

Remarque : Dans beaucoup de cas, on peut se borner à supposer H et $\widetilde{V}$ de classe C^1 au lieu de C^2. Nous ne donnerons pas d'énoncé précis à ce sujet. Parfois cela n'apporte aucune difficulté supplémentaire sérieuse; parfois le passage de C^2 à C' est, à lui seul, toute une théorie nouvelle et délicate.

Théorème de Stokes général

On ne connait pas de bonnes conditions d'applications de la formule de Stokes, lorsque V a un pseudo-bord Σ, de façon à être sûr de couvrir tous les cas rencontres même dans la pratique la plus courante.

Nous nous bornerons Ici à donner un cas d'une généralité à peu près satisfaisante.

Soit Σ une pseudo-hypersurface fermée de classe C' de $\mathbb{R}^n$ ou d'une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$. Pour $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, appelons3 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs de base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{j-1}, \vec{e}_{j+1}, \ldots, \vec{e}_n$.

Soit P_j l'opération $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, "projection sur F_j parallèlement à $\vec{e}_j$"; c'est une opération linéaire continue de $\mathbb{R}^n$ sur $F_j = \mathbb{R}^{n-1}$. Soit b un point de F_j.
Supposons qu'il existe un voisinage $\mathcal{B}$ de b dans $\vec{F}_j$, dont le cylindre projetant $P_j^{-1}\mathcal{B}$ coupe Σ en un nombre fini (éventuellement nul) ℓ de composantes connexes, Σ_k, $k = 1,2,\ldots,\ell$, ayant chacune une équation explicite en x_j : $x_j = F_k(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, F_k de classe C' sur $\mathcal{B}$. Cela implique que $P_j^{-1}\mathcal{B} \cap \Sigma$ soit dans la partie régulière $\mathcal{U}$ de Σ. On dira alors que le point b de F_j est P_j -regulier pour Σ.

Nous dirons que Σ est régulière pour la projection P_j, si tout point b de $\vec{F}_j$ est P_j-régulier pour Σ, sauf peut-être les points b d'un ensemble exceptionnel $\mathcal{F}_j$ de $\vec{F}_j$, de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de $\vec{F}_j$, et dont le cylindre projetant $P^{-1}\mathcal{F}_j$ coupe la partie régulière $\mathcal{U}$ de Σ suivant un ensemble d'aire $(n-1)$-dimensionnelle nulle. Parmi les points de cette dernière intersection, figurent ceux du "contour apparent" de $\mathcal{U}$, c'est-a-dl? les points de $\mathcal{U}$ où 1 hyperplan tangent est parallèle à e_j (et tous les points d'intersection de $\mathcal{U}$ avec le cylindre projetant du contour apparent); l'ensemble de ces points du contour apparent est donc en particulier supposé avoir "ne aire $(n-1)$-dimensionnelle nulle (Ce ne sera pas le cas, si, par exemple, Σ est le pseudo-bord d un cube à arêtes parallèles aux axes. Cependant, le théorème de Stokes est applicable à un cube ! Mais un simple changement de référentiel rendrait le pseudo-bord du cube P_j-régulier, pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$; et c'est ce qui nous suffira).

Théorème **38** - Soit $\widetilde{V}$ "ne variété avec oseudo-bord de classe C^1 d "ne variété $\widetilde{V}$ de classe C^1, de dimension n, orientée.

Supposons que, pour tout point a de la partie singulière du pseudo-bord Σ, il existe un C^1-difféomorphisme Φ_a d'une boule ouverte $\mathcal{O}_a$ de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{R}^n$ lui-même) sur un voisinage ouvert $\Phi_a(\mathcal{O}_a)$ de a dans $\widetilde{V}$, tel que $\Phi_a^{-1}(\Sigma)$ soit P_j-régulière dans $\mathcal{O}_a$, pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$, et de partie régulière $\Phi_a^{-1}(\mathcal{U})$ d'aire $(n-1)$ dimensionnelle finie.

Soit H "ne application de classe **C'** d'un voisinage ouvert de V dans?, dans "ne variété Ω de classe C^2.

Soit $\vec{\omega}$ "ne forme différentielle de degré $n-1$, de classe C' dans Ω, à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$. SI l'intersection de V et de 1 image réciproque par H du support de $\vec{\omega}$ est compacte, on a la formule de Stokes (VI,7;4).

Bien entendu, ce théorème contient comme cas particulier le précédent. On aurait pu le démontrer tout de suite. Nous avons préféré donner d'abord "ne démonstration élémentaire du cas élémentaire. De la même manière que pour le théorème précédent, nous donnerons "ne démonstration seulement dans le cas considérablement plus simple où C^1 est remplace partout par C^2.

Démonstration -

1er Cas - $\tilde{V}$ est une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, ou $\mathbb{R}^n$ lui-même ; pour simplifier quelques détails techniques de la démonstration, nous prendrons $\tilde{V} = \mathbb{R}^n$. La pseudo-bord Σ de V est P_j-régulier pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$, et sa partie régulière $\mathcal{U}$ est d aire $(n-1)$-dimensionnelle finie $\Omega = \tilde{V}$, H = identité. Le support de $\vec{\omega}$ est compact. Dans ce 1er cas, il n est pas plus compliqué de supposer seulement $\mathcal{U}$ de classe C^1. Nous supposerons toujours $\vec{\omega}$ donnée sous la forme (VI,7;5), avec un seul terme $\vec{\omega}_j$ dans la somme Σ.

Il suffit, pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$, de montrer que :

$$\text{(VI,7;22)} \quad \left\{ \begin{aligned} &(-1)^{j-1} \iint \cdots \int_V \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial x_j} \, dx_1 \, dx_2 \, \ldots \, dx_n \\ &\qquad = \int_{\hat{\Sigma}} \vec{\omega}_j \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \quad , \end{aligned} \right.$$

étant entendu que $\int_{\hat{\Sigma}}$ vaut $\int_{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U}$ Etant la partie régulière de Σ.

Les différentes valeurs de j jouent ici le même rôle, et, il nous suffit de faire la démonstration pour $j = 1$, par exemple.

A/- Le premier membre se calcule toujours d après Fubini, et vaut

$$\text{(VI,7;23)} \quad \int \cdots \int dx_2 \, dx_3 \ldots dx_n \int_{V(x_2, \ldots, x_n)} \vec{\omega}_1(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \quad ,$$

où $V(x_2, \ldots, x_n)$ est l'ensemble de $\mathbb{R}$ formé des x_1 tels que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V$ (trace de V sur la parallèle à l'axe des x_1, dont les autres coordonnées sont $x_2, \ldots, x_n$) (formule (IV,8;35)). Le théorème de Fubini nous dit seulement que la dernière intégrale a un sens pour $(dx_2 \, dx_3 \cdots dx_n)$-presque toutes les valeurs de $x_2, x_3, \ldots, x_n$, et définit une fonction $(dx_2 \, dx_3 \ldots dx_n)$-intégrable; ici, on ne pnurra pas dire mieux, comme cela se produisait dans le 1er ou le 2ème cas de la démonstration du théorème 37.

Appelons donc $J(x_2,\dots,x_n)$ la dernière intégrale: elle est $(dx_2\; dx_n)$ -intégrable, et par suite la mesure $\vec{J}(x_2\dots x_n)$ dz,... dx_n, sur $\mathbb{R}^{n-1}$,est de norme finie; appelons $\vec{\nu}$ cette mesure. Le premier membre de (VI,7;23) vaut donc $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{\nu}$.

Ecrivons donc :

$$(\text{VI},7;24)\quad \begin{cases} \vec{J}(x_2,\dots,x_n) = \displaystyle\int_{V(x_2,\dots,x_n)} \frac{\partial\vec{\omega}_1}{\partial x_1}(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1 \\ d\vec{\nu} = \vec{J}(x_2,\dots,x_n)\,dx_2\dots dx_n . \\ \displaystyle\int_{\mathcal{V}} d\vec{\omega} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{\nu} \end{cases}$$

B / -Considérons maintenant la forme différentielle $\vec{\omega}$ Elle définit sur la partie régulière $\mathcal{U}$ (orientée comme bord de V) de Σ une mesure $[\vec{\omega}] = [\vec{\omega}]_{\vec{\mathcal{U}}}$. Comme $\vec{\omega}$ est continue et à support compact,à valeurs dans $\vec{F}$, sa dorme est bornée; comme d autre part $\mathcal{U}$ est supposée d'aire $(n-1)$-dimensionnelle finie, le théorème 32 nous dit que $[\vec{\omega}]$ est une mesure de norme finie, de base dS , elle-même mesure ≥ 0 de norme finie. Alors, la projection $P_1 : (x_1,x_2,\dots,x_n) \longrightarrow (x_2,\dots,x_n)$, étant continue, l'image directe $\vec{\mu} = P[\vec{\omega}]$ existe, et elle est, elle aussi,une mesure de norme finie sur $\mathbb{R}^{n-1}$ (théorème 59 du chapitre IV, et son extension au cas des mesures vectorielles, Cours de 1ère partie, page 545 * .

Le deuxième membre de (VI,7;4) vaut $\int_{\vec{\mathcal{U}}} [\vec{\omega}]_{\vec{\mathcal{U}}}$.

* Contrairement à ce qui-est dit page 545, nous n'avons pas besoin, ici, de supposer F de dimension finie, car nous savons déjà que $[\vec{\omega}]_{\mathcal{U}}$ est de base dS , à densité bornée par $\|\vec{\omega}_1\| < +\infty$.

Par contre, nous ne savons pas si l'image $P_1[\vec{\omega}]$ de $[\vec{\omega}]$ par P_1 est encore de base ≥ 0 , donc on ne peut pas lui appliquer la théorie du prolongement de Lebesgue (1ère partie. page 531). et nous devrons donc faire attention à ne pas l'appliquer. Mais Il est fortement recommandé au lecteur de ne pas s'appesantir sur les difficultés provenant eventuellement de la dimension infinie ou même de la nature vectorielle de $\vec{F}$ En utilisant d'autres méthodes (Intégrale faible, théorème de Hahn-Banach), on ramène immédiatement le cas d'une forme $\vec{\omega}$ à valeurs vectorielles au cas d une forme à valeurs scalaires !

C / - Soit $b = (b_2, \dots, b_n)$ un point de $\vec{F}_1 = \mathbb{R}^{n-1}$, P_1 - régulier pour Σ , et soit $\mathcal{B}$ un voisinage ouvert connexe de b dans $\vec{F}_1$, ayant les propriétés indiquées page 167 .

Montrons que $\vec{\mu} = \vec{\nu}$ dans $\mathcal{B}$.

Si on ne s'occupe que de la valeur dans $\mathcal{B}$ de l'image de $[\vec{\omega}]_{\hat{\mathcal{U}}}$ par P_1 , on peut remplacer $[\vec{\omega}]_{\hat{\mathcal{U}}}$ par $[\vec{\omega}]_{P_1^{-1}\mathcal{B} \cap \hat{\mathcal{U}}}$, mesure associée à $\vec{\omega}$ par la variété orientée $P_1^{-1}\mathcal{B} \cap \hat{\mathcal{U}}$ * .

Mais $P_1^{-1}\mathcal{B} \cap \hat{\mathcal{U}} = \hat{\Sigma}_1 \cup \hat{\Sigma}_2 \cup \dots \cup \hat{\Sigma}_\ell$.

Considérons la mesure associée à $\vec{\omega}$ par $\hat{\Sigma}_k$, soit $[\vec{\omega}]_{\hat{\Sigma}_k}$.

La restriction $P_{1,k}$ de P_1 à Σ_k est un C^1- difféomorphisme de Σ_k sur $\mathcal{B}$, puisqu elle admet une application réciproque

(VI,7;26) $$P_{1,k}^{-1} : (x_2, \dots, x_n) \longrightarrow (x_1 = F_k(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$$

de classe C^1 de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}^n$.

On peut encore dire que $P_{1,k}^{-1} : \mathcal{B} \longrightarrow \Sigma_k$ est une carte de Σ_k . D'après ce que nous avons vu dans la. définitinn même de la mesure associée à une forme sur une variété orientée par une carte de cette variété (formule (VI,6;2)), $[\vec{\omega}]_{\hat{\Sigma}_k}$ est l'image par $P_{1,k}^{-1}$ de la mesure :

(VI,7;27) $$\vec{\mu}_k = \theta_k \vec{\omega}_1 (F_k(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n$$

définie sur $\mathcal{B}$; θ_k est la fonction d'orientation liée à la carte $P_{1,k}^{-1}$; elle est une constante (égale à ± 1), puisque $\mathcal{B}$ est supposée connexe, Donc 1 image par P_1 de $[\vec{\omega}]_{\hat{\Sigma}_k}$ est $\vec{\mu}_k$. Et finalement l'image par P_1 de $[\vec{\omega}]_{P_1^{-1}\mathcal{B} \cap \hat{\mathcal{U}}}$, c'est-à-dire la restriction de $\vec{\mu}$ à $\mathcal{B}$, est la mesure $\sum_k \vec{\mu}_k$. On a donc, dans $\mathcal{B}$:

* Ce n'est pas si évident qu'il paraît ! Nous avons vu, page que $[\vec{\omega}]_{P_1^{-1}\mathcal{B} \cap \mathcal{U}}$ est la restriction à $P_1^{-1}\mathcal{B} \cap \mathcal{U}$ de la mesure $[\vec{\omega}]_{\hat{\mathcal{U}}}$. D'autre part, on peut démontrer aisément une propriété des mesures images, que nous n'avons pas mentionnée au chapitre IV, § 6 : si P_1 est une application continue λ-propre de $X = \mathcal{U}$ dans $Y = \mathbb{R}^{n-1}$, et si $\mathcal{B}$ est un ouvert de Y , la restriction de la mesure image $P_1\lambda$ à l'ouvert $\mathcal{B}$ coïncide avec l'image par P_1 de la restriction de λ à l'ouvert $P_1^{-1}\mathcal{B}$.

$$(\text{VI},7;28)\quad \begin{cases} \vec{\mu} = \sum_{k=1}^{\ell} \vec{\mu}_k \\ = \left(\sum_{k=1}^{\ell} \theta_k \ \vec{\omega}_1 \left(F_k(x_2,\dots,x_n),\ x_2,\dots,x_n \right) \right) dx_2 \dots dx_n \end{cases}$$

Pour achever ce calcul de; dans $\mathcal{B}$, précisons θ_k. Considérons, en un point x de Σ_k, les vecteurs $\vec{e}'_2$, $\vec{e}'_3,\dots,\vec{e}'_n$ de l'hyperplan tangent $\vec{T}(x;\Sigma_k)$, dont les projections sur $\vec{F}_1$ sont e_2, $\vec{e}_3$, , , $\vec{e}_n$, vecteurs de la base de $\vec{F}_1$.

[Comme 1 hyperplan tangent $\vec{T}(x;\Sigma_k)$ a l'équation (formule (III,3;19 bis)):

$$(\text{VI},7;29)\qquad X_1 = c \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_j}\ c===* ,\dots, x_n) X_j \quad ,$$

et que $\vec{e}_j$ est le vecteur de j-ième composante 1 et dont toutes les autres composantes sont nulles, la première composante de $\vec{e}'_j$ sera $\frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_n)$, et on a :

$$(\text{VI},7;30)\qquad \vec{e}'_j = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x_1\ ,\ ,\ x_n)\ \vec{e}_1 + \vec{e}_j \ \Big] \ .$$

Par définition, θ_k est le signe de la base $\vec{e}'_2,\dots,\vec{e}'_n$, de $T(x;\Sigma_k)$.

Par ailleurs, la base $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2,\dots,\vec{e}'_n$ de $\mathbb{R}^n$, a même slgne que la base canonique $\vec{e}_1, \vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$, à cause de (VI,7;30), donc est positive. Donc θ_k est-aussi le signe de $\vec{e}_1$ pour l'orientation transversale de Σ_k, associée à son orientation tangentielle. Mals Σ_k a l'orlentation de bord de V ; donc θ_k est + 1 , SI $\vec{e}_1$ est <u>sortant de $\mathring{V}$</u> aux points de Σ_k, et -1 s'il est <u>rentrant dans $\mathring{V}$</u> aux points de Σ_k ; la formule (VI,7;28) est maintenant complètement explicitée.

Etudions maintenant $\vec{\nu}$ dans $\mathcal{B}$. Pour $(x_2, x_3,\dots,x_n) \in \mathcal{B}$, la parallèle $D = D_{x_2, x_3,\dots,x_n}$ à 1 axe des x_1, passant par ce point, coupe $\mathring{V}$ et $\tilde{V} - V = \complement V$ suivant. des ouverts. Les seuls points frontières possibles de ces ouverts sont des points des $D \cap \Sigma_k$ (ou de $D \cap \dot{\tilde{V}}$, $\tilde{V}$ étant la sphère frontière de *la* boule $\tilde{V}$, si $\tilde{V}$ était une boule. **Comme** nous l'avons dit plus haut, nous donnons la démonstration lorsque $\tilde{V} = \mathbb{R}^n$). Inversement, si $A_k \in D \cap \Sigma_k$, et si $\mathcal{W}_k$ est un voisinage de A_k dans $P^{-1}\mathcal{B}$, vérifiant les propriétés du théorème 27, relativement à Σ_k les deux régions définies par $\mathcal{W}_k$ dans Σ_k sont, **comme** nous l'avons vu page $Y \cap \mathcal{W}_k$ et $\complement V \cap \mathcal{W}_k$; D, transversale à Σ_k en A_k, passe de l'une à l'autre région en A_k, (théorème 29), donc A_k est bien un point frontière à la fois pour $D \cap \mathring{V}$ et pour $D \cap \complement V$ * . Rangeons les A_k par ordre de grandeur croissante de la coordonnée x_1.

Soient $A'_1, A'_2, \ldots, A'_\ell$ les points obtenus.

Ils partagent13 en $\ell + 1$ intervalles ouverts (dont 2 sont des demi-droites). Mais alors $D \cap \mathring{V}$ et $D \cap \complement V$ sont, chacun, réunion de certains de ces intervalles (raisonnement de la page); 2 intervalles consécutifs sont, l'un dans $D \cap \mathring{V}$, l'autre dans $D \cap \complement V$, *sans* quoi leur extrémité commune ne serait pas point frontière. Si on convient d'appeler $A'_{-\infty}$ le point de coordonnée $x_1 = -\infty$ de la droite achevée $\bar{D}$, on voit donc que $D \cap V$ est la réunion des intervalles $[A'_{-\infty}, A'_1]$, $[A'_2, A'_3]$, $[A'_4, A'_5]$, . . . , ou la réunion des intervalles $[A'$, $A',]$, $[A'_3, A'_4]$, ...

Alors le calcul de $\vec{J}(x_2, \ldots, x_n)$ (formule (VI,7;24)) est maintenant immédiat. Si $[A'_i, A'_{i+1}]$ est un intervalle de $V_{x_2, \ldots, x_n}$, on aura :

(VI,7;31)
$$\int \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1$$

$$= \vec{\omega}_1(x'_{i+1}, x_2, \ldots, x_n) - \vec{\omega}_1(x'_i, x_2, \ldots, x_n)$$

* Nous avons vu, page , que $\mathring{V} \cap \mathcal{O}$, $\complement V \cap \mathcal{O}$, $\Sigma \cap \mathcal{O}$, sont l'intérieur, 1 extérieur, et la frontière de $V \cap \mathcal{O}$ relativement à $\mathcal{O}$, si $\mathcal{O}$ est ouvert; propriété de pure topologie générale. Ici D n est pas un ouvert; mais la propriété subsiste, **comme** nous venons de le voir, parce que les Σ_k sont des hypersurfaces de classe C^1 auxquelles53 est transversale.

x_i' étant la 1ère coordonnée du point A_i' (avec $\vec{\omega}_1(x_i', x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$,

si $x_i' = \pm\infty$, puisque 3, est à support compact).

En sommant pour les divers intervalles, on obtient exactement

$$\text{(VI,7;32)} \qquad \vec{J}(x_2, \ , x_n) = \sum_{k=1}^{\ell} \eta_k \vec{\omega}_1 \left(F_k(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n \right)$$

où η_k vaut +1 si D franchit Σ_k en passant de $\overset{\circ}{V}$ à $\complement V$ lorsque x_1 croît, c'est-à-dire si le vecteur $\vec{e}_1$ est sortant de $\overset{\circ}{V}$ en A_k, et -1 dans le cas contraire; on a donc $\eta_k = \theta_k$ d'après ce que nous avons vu plus haut; et la comparaison-des formules (VI,7;32) et (VI,7;28) montre bien que $\mu = \vec{\nu}$ dans $\mathcal{B}$.

D / - Alors, d'après le théorème 13 du chapitre IV, la mesure $\vec{\mu} - \vec{\nu}$, nulle dans tous les ouverts de $\vec{F}_1$ telsque $\mathcal{B}$ est nulle dans leur réunion. Mais cette réunion est l'ensemble ouvert $\complement \mathcal{F}_1 = \mathcal{O}_1$ des points b de $\vec{F}_1$ qui sont P_1-réguliers pour Σ.

Donc, dans cet ouvert $\mathcal{O}_1$, $\vec{\mu}$ -3 est nulle.

Alors, dans $\mathcal{O}_1$, $\vec{\mu}$ est de base $dx_2\, dx_3 \cdots dx_n \geq 0$, puisqu'il en est ainsi de $\vec{\nu}$. On peut lui applique? la théorie du prolongement de Lebesgue et l'intégrer sur $\mathcal{O}_1$. et l'on a, puisque $\vec{\mu}$ est l'image $P_1[\vec{\omega}]_{\tilde{\mathcal{U}}}$:

$$\text{(VI,7;33)} \qquad \int_{\mathcal{O}_1} d\vec{\nu} = \int_{\mathcal{O}_1} d\vec{\mu} = \int_{P_1^{-1}\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{U}} [\vec{\omega}]_{\tilde{\mathcal{U}}} .$$

Mais alors ceci va nous permettre de démontrer la formule de Stokes. En effet, $\mathcal{F}_1 = \complement \mathcal{O}_1$ est supposé de mesure nulle pour $dx_2 \ldots dx_n$, puisque Σ est P_1-régulière; donc $\int_{\mathcal{F}_1} d\vec{\nu} = \vec{0}$, et, d'après (VI,7;24) :

$$\text{(VI,7;34)} \qquad \int_{\mathcal{O}_1} d\vec{\nu} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{\nu} = \int_{\overset{\circ}{V}} d\vec{\omega} ,$$

De même. $P^{-1}\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{U}$ est d'aire (n-1) - dimensionnelle nulle, puisque Σ est P_1-régulière, et comme $[\vec{\omega}]_{\tilde{\mathcal{U}}}$ est de base dS, $\int_{P_1^{-1}\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{U}} [\vec{\omega}]_{\tilde{\mathcal{U}}} = \vec{0}$, de sorte que

$$(\text{VI},7;35)\qquad \int_{P_1^{-1}\mathcal{O}_1\cap\mathcal{U}}[\vec{\omega}]_{\tilde{\mathcal{U}}} = \int_{\mathcal{U}}[\vec{\omega}]_{\tilde{\mathcal{U}}} = \int_{bV}\vec{\omega} \quad ;$$

et alors, en portant (VI,7;34 et 35) dans (VI,7;33), on a bien (VI,7;3).

2ème cas - $\tilde{V}$ quelconque, $\Omega = \tilde{V}$, H = identité; le support de $\vec{\omega}$ coupe V suivant un compact.

Alors, pour chaque point a de $\overset{\circ}{V}$ ou de la partie régulière $\mathcal{U}$ de Σ, on peut trouver un ouvert $\mathcal{O}_a$ de $\mathbb{R}^n$ et une application Φ_a ayant les propriétés indiquées dans la démonstration du 3ème cas du théorème de Stokes élémentaire. Si a est un point singulier de Σ, on peut trouver une boule $\mathcal{O}_a$ de $\mathbb{R}^n$ et une application Φ_a ayant les propriétés données dans l'énoncé du présent théorème. On achève alors la démonstration, à l'aide d'une partition de l'unité, comme dans le 3ème cas du théorème élémentaire; avec cette différence qu'ici on est ramené au 1er cas (pour $a \in \overset{\circ}{V}$) ou au 2ème cas (pour $a \in \mathcal{U}$) du théorème élémentaire, ou au 1er cas du présent théorème (pour $a \in \Sigma - \mathcal{U}$).

3ème Cas - Cas général - Comme le 4ème cas du théorème élémentaire. Ainsi le théorème général de Stokes est complètement démontré (au moins si l'on remplace partout C^1 par C^2).

Exercices - 1°) Montrer qu'un polyèdre compact V d'un espace affine de dimension finie vérifie les conditions données dans l'énoncé (On se ramène aussitôt au 1er cas de la démonstration, en choisissant un référentiel dont aucun vecteur de base n'est parallèle à l'une des faces du polyèdre. On peut d'ailleurs, dans ce cas, faire une démonstration directe, même avec un référentiel ayant des vecteurs de base parallèles à des faces du polyèdre : prendre, par exemple, pour V , un cube à arêtes parallèles aux vecteurs de base, et vérifier que le théorème de Stokes est alors immédiat par Fubini.

2°) Supposons que V soit une variété avec pseudo-bord compacte d'un plan $\tilde{V} = E$, ayant pour pseudo-bord une courbe "de classe C^1 par morceaux"; on entend par là une pseudo-variété Σ de classe C^1 n'ayant qu'un nombre fini de points singuliers, au voisinage de chacun desquels Σ soit la réunion d un nombre fini d'arcs de classe C^1 se coupant en ce point. Alors on se trouve dans les conditions d'application du

$V =$ partie hachurée

théorème (pour chaque point singulier de Σ , il suffit de prendre un référentiel dont les axes ne soient pas parallèles aux tangentes en ce point).

Examen du cas particulier $n = 1$

Théorème 39 - Si $M|[\alpha, \beta]$ est un chemin de longueur finie d'un ouvert Ω d'un espace affine E de dimension finie, orienté suivant le sens de parcours $\alpha \longrightarrow \beta$, et si $\vec{f}$ est une fonction de classe C^1 dans Ω , à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$, on a la formule de Stokes.

(VI,7;36) $$\int_{M|[\alpha,\beta]} \overrightarrow{df} = \vec{f}(M(\beta)) - \vec{f}(M(\alpha)) \; . \; *$$

Ici, la variété V est 1 intervalle $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ muni de l'orientation correspondant au sens de parcours $\alpha \longrightarrow \beta$, H est l'application M de $[\alpha, \beta]$ dans Ω .

Nous voyons que l'orientation transversale du bord $\{\alpha, \beta\}$ s'obtient en considérant comme positifs en d les vecteurs de sens $\beta \rightarrow$ a , et positifs en β , les vecteurs de sens $\alpha \rightarrow \beta$. L'orientation tangentielle associée, d'après ce qui a été vu page , consiste à affecter le point β du signe + , et le point α du signe- .La variété singulière, bord de $M|[\alpha, \beta]$, est donc $M|\{(\alpha,-),(\beta,+)\}$. L'intégrale de $\vec{f}$ sur cette variété singulière n'est alors autre! d'après la définition (VI,6;20), que le second membre de 1 égalité (VI,7;36).

Démonstration - Cette formule (VI,7;36) n'est pas un cas particulier de la formule générale de Stokes, car, dans ce cas $n = 1$, il s'agit (théorème 36) de l'intégrale d'une forme différentielle sur un chemin qui n'est pas nécessairement de classe C^1 ni même de classe C^1 par morceaux, mais seulement de longueur finie.

* En somme, la formule de Stokes est une généralisation de la formule bien classique $\int_\alpha^\beta \vec{f}'(x)\,dx = \vec{f}(\beta) - \vec{f}(\alpha)$,correspondant à $E = \mathbb{R}$, $M =$ Identité.

Choisissons dans $\vec{E}$ une norme quelconque. Appliquons à la fonction $\vec{f}$ la formule des accroissements finis, (corollaire 1 du Théorème 13 du chapitre III), relativement au point $x = M(t')$ et à l'accroissement $\vec{h} = M(t'') - M(t')$. On obtient alors la formule :

$$(\text{VI},7;37)\qquad \left\| \vec{f}(M(t'')) - \vec{f}(M(t')) - f'(M(t')) \cdot \overrightarrow{M(t'') - M(t')} \right\| \leqslant \delta \left\| \overrightarrow{M(t'') - M(t')} \right\|$$

où δ admet la majoration :

$$(\text{VI},7;38)\qquad \delta \leqslant \sup_{P \in [M(t'),M(t'')]} \| f'(P) - f'(M(t')) \| .$$

Si alors $\varepsilon > 0$ est donné, on peut trouver un nombre $\zeta > 0$, de manière que l'inégalité $\| P - M(t') \| \leqslant \zeta$ ($t \in [\alpha,\beta]$, $P \in \Omega$) entraîne l'inégalité :

$$(\text{VI},7;39)\qquad \| f'(P) - f'(M(t')) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2L} , \qquad L = \text{longueur du chemin } M .$$

Cela résulte du théorème de l'uniforme continuité des fonctions continues sur un compact (Théorème 31 du chapitre II, sous la forme renforcée qui a été donnée à la note ** de la page 355 du cours de Première Partie) à la fonction continue f', définie sur le compact $M([\alpha,\beta])$, image par M de $[\alpha,\beta]$, de l'espace métrique Ω.

En appliquant ensuite à la fonction continue M, sur le compact $[\alpha,\beta]$ le théorème 31 ordinaire du chapitre II, et d'autre part le théorème 36 du présent chapitre, on peut trouver $\eta > 0$ de manière que :

1°) $\qquad |t'' - t'| \leqslant \eta$ entraîne $\left\| \overrightarrow{M(t'') - M(t')} \right\| \leqslant \zeta$;

2°) la différence entre le premier membre de (VI,7;36) et (VI,6;83), avec $\theta_i = t_i$, $\vec{\omega} = d\vec{f}$, soit $\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, pour toute subdivision A de $[\alpha,\beta]$, de finesse $\leqslant \eta$.

Si alors nous choisissons une telle subdivision Δ de finesse $\leqslant \eta$, l'inégalité (VI,7;37) sera valable pour $t' = t_i$, $t'' = t_{i+1}$ avec $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2L}$

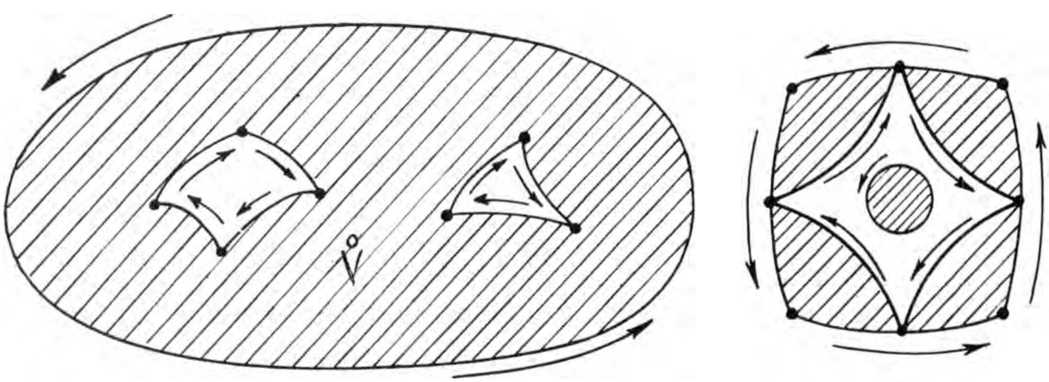
On aura alors :

$$(\text{VI},7;40)\quad \left\{\begin{aligned} &\left\| \int_{M|[\alpha,\beta]} \vec{df} - \left(\vec{f}(M(\beta)) - \vec{f}(M(\alpha))\right) \right\| \\ &\leq \left\| \int_{M|[\alpha,\beta]} \vec{df} - \sum_{i=0}^{n-1} f'(M(t_i)) \cdot \left(\overrightarrow{M(t_{i+1}) - M(t_i)}\right) \right\| \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \left(f'(M(t_i)) \cdot \overrightarrow{M(t_{i+1}) - M(t_i)}\right) - \left(\vec{f}(M(t_{i+1})) - \vec{f}(M(t_i))\right) \right\| \\ &\qquad\qquad \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2L} L = \varepsilon . \end{aligned}\right.$$

Cela montre que la différence entre les deux membres de (VI,7;36) est $\leqslant \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, ces deux membres sont bien égaux, et le théorème est démontré.

Examen du cas particulier $n = 2$ dans le plan $\mathbb{R}^2$
Formule Riemann

Soit V une variété compacte avec pseudo-bord de $\tilde{V} = \mathbb{R}^2$. Alors $\mathring{V}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Nous supposerons que le bord est une courbe Σ , de classe C' par morceaux (exemple 2° page 175),V sera par exemple muni de l'orientation canonique de $\mathbb{R}^2$, et Σ de l'orientation canonique de pseudo-bord de V . On pourra prendre les deux exemples définis sur la figure; nous avons hachuré $\mathring{V}$, et indiqué le sens de parcours de Σ comme pseudo-bord de V .



(Dans le premier exemple, $\overset{\circ}{V}$ est connexe, mais non dans le deuxième (où $\overset{\circ}{V}$ a 5 composantes connexes, et V en a 2). On peut d'ailleurs prendre pour V la réunion des 2 ensembles de la figure; alors $\overset{\circ}{V}$ a 6 composantes connexes, et V en a 3).

soit $\vec{\omega} = \vec{A}\,dx + \vec{B}\,dy$ une forme différentielle de classe C^1 défini-e dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, contenant V, à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$.

Alors la formule (VI,7;3) s'écrit ici, compte tenu de (VI,4;2) (adaptée à $\mathbb{R}^2$ au lieu de $\mathbb{R}^3$) :

$$\iint_{\overset{\circ}{V}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int_{\Sigma} \vec{A}\,dx + \vec{B}\,dy \,. \tag{VI,7;41}$$

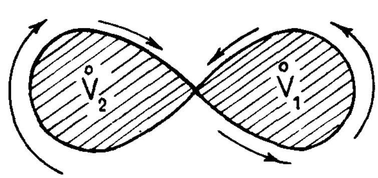
D'après la définition même de l intégrale d'une forme différentielle, $\iint_{\overset{\circ}{V}} \cdots dx \wedge dy$ peut se remplacer par l'intégrale double ordinaire $\iint_V \ldots dx\,dy$ (la fonction d'orientation θ de la page 88 vaut + 1, puisque nous avons orienté $\overset{\circ}{V}$ suivant l'orientation canonique de $\mathbb{R}^2$; on peut écrire indifféremment $\iint_{\overset{\circ}{V}}$ ou $\iint_V$, puisque Σ est de mesure nulle pour $dx\,dy$).

D'où la formule de Riemann, cas particulier de la formule de Stokes :

$$\iint_V \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\Sigma} \vec{A}\,dx + \vec{B}\,dy \tag{VI,7;42}$$

On pourrait chercher à étendre cette formule, lorsque Σ est seulement une courbe de longueur finie, et non plus C' par morceaux. On obtient alors des théorèmes spéciaux relatifs au cas $n = 2$, $n - 1 = 1$, ne rentrant plus dans le cadre du théorème général de Stokes; mais il y a beaucoup de complications, nous n en parlerons pas ici; si nous rencontrons des cas particuliers, ils seront traités par des méthodes appropriées.

Prenons maintenant pour V l'exemple de la figure suivante, où $\overset{\circ}{V}_1$ est muni de l'orientation canonique de $\mathbb{R}^2$, et $\overset{\circ}{V}_2$ de l'orientation opposée, Σ ayant toujours l'orientation de pseudo-bord :



La formule (VI,7;41) reste valable, mais la fonction d'orientation θ vaut + 1 dans $\overset{\circ}{V}_1$ et − 1 dans $\overset{\circ}{V}_2$, de sorte que $\iint_{\widehat{\overset{\circ}{V}}_1} dx \wedge dy$ vaut $\iint_{\overset{\circ}{V}_1} \ldots dx\, dy$, et $\iint_{\widehat{\overset{\circ}{V}}_2} \ldots dx \wedge dy$ vaut $-\iint_{\overset{\circ}{V}_2} \ldots dx\, dy$, et la formule de Riemann s'écrit :

(VI,7;43) $$\iint_{\overset{\circ}{V}_1} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \right) dx\, dy - \iint_{\overset{\circ}{V}_2} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{\widehat{\Sigma}} \vec{A}\, dx + B\, dy .$$

Formules intégrales remarquables en analyse vectorielle

1°/ Travail d'un charnu de vecteurs le long d'une courbe orientée d un espace affine euclidien.

soit $\vec{X} : x \longrightarrow \vec{X}(x)$, un champ de vecteurs continu sur un ouvert Ω d un espace affine euclidien E de dimension finie. Soit? une courbe orientée de Ω , de classe C' par morceaux. On appelle $\vec{t}(x)$, en un point x de Γ , le vecteur unitaire de la tangente, positif pour l'orientation $\widehat{\Gamma}$. On appelle travail ou circulation $\mathcal{C}$ du champ $\vec{X}$ le long de $\widehat{\Gamma}$ l'intégrale :

(VI,7;44) $$\mathcal{C} = \int_{\Gamma} \left(\vec{X}(x) \middle| F(x) \right) ds ,$$

où ds est la mesure des longueurs sur Γ , mesure $\geqslant 0$. Souvent on désigne par $\vec{ds}$ la mesure $\vec{t}\, ds$, mesure sur r A valeurs dans $\vec{E}$. Alors, d'après (IV,5;13), (VI,7;44) s'écrit :

(VI,7;45) $$\mathcal{C} = \int_{\Gamma} \left(\vec{X} \middle| \vec{ds} \right)$$

C'est l'application de (IV,5;13) A la fonction $\vec{X}$, continue sur Γ A valeurs dans $\vec{E}$, A la mesure $\vec{ds}$ (de base $ds \geqslant 0$) sur Γ A valeurs dans $\vec{E}$, et A la forme bilinéaire B , produit scalaire euclidien sur $\vec{E} \times E$. SI E est muni d'un référentiel orthonormé, et si nous appelons $\cos\alpha_j$, $j = 1, 2 \ldots N$, les cosinus directeurs de la demi-tangente positive à Γ et X_i les composantes du champ, on a :

(VI,7;46) $$\mathcal{C} = \int_{\Gamma} \left(\sum_{j=1}^{N} X_j \cos \alpha_j \right) ds \; .$$

Si ω est la forme **différentielle** (a valeurs réelles) de **degré** 1 associée au champ $\vec{X}$ par la structure euclidienne de E :

(VI,7;47) $$\begin{cases} \omega(x) \cdot \vec{Z} = (\vec{X}(x) \mid \vec{Z}) \\ \omega = \sum_{j=1}^{N} X_j \, dx_j \end{cases} ,$$

on a Immédiatement :

(VI,7;48) $$\mathcal{C} = \int_{\vec{\Gamma}} \omega \;{}^{*} \; .$$

La forme ω s'appelle, en mécanique, travail **élémentaire** du champ de vecteurs. On voit que le travail élémentaire n'est pas une quantité infinitésimale, mais une forme **différentielle**. On a tort de l écrire, trop souvent, $d\mathcal{C}$, car ce n'est **pas, en général,** la différentielle d'une fonction scalaire. Si $\vec{X}$ est de classe C^1, pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que $d\omega = 0$ (c'est-a-dire $\overrightarrow{rot}\, \vec{X} = \vec{0}$ si **E** est de dimension 3), ce qui se traduit par les conditions classiques (VI,4;52) (où les A_i sont remplacés par des X_j); et cette condition est suffisante, d'aprés le **théorème** 19 de Poincaré, **si** Ω a la forme Indiquée dans ce **théorème.** Lorsqu'il en est ainsi, on pose $\omega = - dU$, **ou** $\vec{X} = - \overrightarrow{grad}\, U$ **,et** la fonction scalaire **U** **,** définie **à** une constante **additive près,** est le potentiel **du** champ de vecteurs (corollaire 2 du théorème 19).

* Pour le voir, il suffit de montrer que les mesures de Radon $[\omega]_{\vec{\Gamma}}$ et $(\vec{X} \mid \vec{t}\,)\, ds$, sur Γ , **coïncident.**

D'après le principe du recollement des morceaux, **il** suffit de le voir au voisinage de chaque point **de** Γ . Au voisinage d'un tel point, si $t \longrightarrow M(t)$ est une carte (ne pas confondre le paramètre t avec le vecteur unitaire $\vec{t}$), dont on peut toujours supposer qu'elle conserve les orientations (fonction d'orientation $\theta = 1$), **ces deux** mesures sont égales **à** l'image par **M** de la mesure **sur** $\mathbb{R}$: $\sum_{j=1}^{N} X_j \, x'_j \, dt$, dt étant la **mesure** de Lebesgue **sur** $\mathbb{R}$.

On peut étendre les résultats précédents, en remplaçant Γ par un chemin orienté $M \mid [\widehat{\alpha, \beta}]$, de longueur finie, comme au théorème 36. On peut alors appliquer ce théorème directement, en définissant $\mathcal{C}$ par (VI,7;48). Si on appelle $\vec{dM}$ la mesure dont M est l'intégrale Indéfinie, mesure à valeurs dans $\vec{E}$, on aura, d'après les résultats du théorème 36 :

(VI,7;48bis)
$$\mathcal{C} = \int_\alpha^\beta (\vec{X} \mid \vec{dM}) = \int_\alpha^\beta (\vec{X} \mid \vec{q}\,)\, ds$$
$$= \int_\alpha^\beta \left(\sum_{j=1}^N X_j \cos\beta_j \right) ds = \int_\alpha^\beta \sum_{j=1}^N X_j\, dx_j \; {}^{(*)};$$

ici $\vec{q}$ est le vecteur unitaire correspondant au sens des t croissants, et $\cos\beta_j$ sont ses composantes (si $\alpha > \beta$, on a $\vec{q} = -\vec{t}$, $\cos\beta_j = -\cos\alpha_j$: comme $\int_\alpha^\beta = -\int_{[\alpha,\beta]}$, on retrouve bien le même résultat que dans (VI,7:44 et 46)).

La formule de Stokes s écrit alors, si $\vec{X} = \overrightarrow{grad}\, f = -\overrightarrow{grad}\, U$:

(VI,7;48ter)
$$\int_{M \mid [\widehat{\alpha,\beta}]} (\vec{X} \mid dM) = U(M(\alpha)) - U(M(\beta)) = f(M(\beta)) - f(M(\alpha)),$$

d'après (VI,7;36).

2°/ <u>Flux d'un champ de vecteurs à travers une hypersurface transversalement orientée dans un espace affine euclidien de dimension finie.</u>

Considérons toujours le même champ de vecteurs **X** et soit maintenant Σ une hypersurface avec bord de classe C^1, compacte dans Ω, et <u>munie d une orientation transversale.</u>

En chaque point 3 de Σ, appelons $\nu(x)$ le vecteur unitaire <u>positif</u> de la normale en x à Σ.

On définit alors le flux du champ X à travers Σ par la formule :

(VI,7;49)
$$\Phi = \int_\Sigma (\vec{X} \mid \vec{\nu}\,)\, dS \;,$$

* On intègre en t sur $[\alpha, \beta]$, donc $\int_\alpha^\beta$ veut dire $\int_{t=\alpha}^{t=\beta}$

où l'intégrale est prise par rapport à la mesure superficielle dS. Si l'on a pris un référentiel orthonormé, cette formule peut aussi s'ecrire sous la forme :

(VI,7;50) $$\Phi = \int_{\Sigma} \left(\sum_{j=1}^{N} X_j \cos \alpha_j \right) dS \ ,$$

où α_j est l'angle du j-ième axe de coordonnée avec la normale positive à Σ. Il est souvent commode de désigner par $\overrightarrow{dS}$ la mesure vectorielle $\vec{\nu}(x)\, dS$ portée par la surface Σ. Dans ces conditions, le flux du champ de vecteurs à travers Σ transversalement orientée peut s'écrire aussi :

(VI,7;51) $$\Phi = \int_{\Sigma} (\vec{X} \,|\, \overrightarrow{dS}\,) \ .$$

Ceci est alors une intégrale au sens de la formule (IV,5;13) : $\vec{X}$ est une fonction continue sur Σ à valeurs dans $\vec{E}$, $\overrightarrow{dS}$ est une mesure sur Σ à valeurs dans $\vec{E}$, et B est une forme bilinéaire, le produit scalaire sur $\vec{E} \times \vec{E}$. La définition (IV,5;13) montre alors immédiatement que (VI,7:51) n'est autre que (VI,7;49).

Enfin, si nous appelons ω la forme différentielle de degré $N-1$ associée au champ de vecteurs en vertu de la formule (VI,3:43), si E est orienté, alors, on voit, en utilisant les formules (VI,3;43) et (VI,6;52), que le flux du champ de vecteurs à travers Σ, munie de son orientation transversale, n'est autre que $(-1)^{N-1}$ fois l'intégrale de la forme différentielle associée ω sur $\hat{\Sigma}$, munie de l'orientation tangentielle associée à son orientation transversale par l'orientation choisie dans E.

(VI,7;51 bis) $$\Phi = (-1)^{N-1} \int_{\hat{\Sigma}} \omega \ .$$

La formule de Stokes, si Σ est le pseudo-bord d'un 'volume" (variété avec pseudo-bord) V de $\vec{V} = E$, nous donne alors, compte tenu de (VI,4;24) :

(VI,7;52) $$\int_{\Sigma} (\vec{X} \,|\, \vec{\nu}\,)\, dS = (-1)^{N-1} \int_{\hat{\Sigma}} \omega = (-1)^{N-1} \int_{V} d\omega$$

$$= \int_{V} (\operatorname{div} \vec{X}\,)\, dx \ .$$

C'est la formule d'Ostrogradsky . Par rapport à un référentiel orthonormal, on aura :

(VI,7;53)
$$\int \cdots \int_{\Sigma} (\vec{X} \mid \vec{\nu})\, dS = \int \cdots \int_{V} (\operatorname{div} \vec{X})\, dx$$
$$= \int \cdots \int_{\Sigma} \Big(\sum_{j=1}^{N} X_j \cos_j \Big)\, dS = \iint \cdots \int_{V} \Big(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial X_j}{\partial x_j} \Big)\, dx_1 \ldots dx_N .$$

Ici $\vec{\nu}$ est la "normale extérieure", sortant de **V** . **cette** formule d'Ostrogradsky ne dépend pas de l'orientation de **E** , car celle-ci est intervenue 2 fois : une fois pour passer de $\vec{X}$ à ω une fois pour repasser de $\vec{\omega}$ à $\vec{X}$. Naturellement la formulé de Riemann (VI,7;42) est un cas particulier de celle d Ostrogradsky, correspondant à N = 2, mais avec des notations différentes, puisqu'elles ne sont autres toutes les deux que la formule de Stokes pour une variété avec pseudo-bord V d'un espace affine V = E de dimension N .

3°/ Formule originelle de Stokes pour une surface bordée par une courbe dans un espace euclidien oriente à 3 dimensions.

Soit Σ une variété avec pseudo-bord d'une surface $\tilde{\Sigma}$ de classe C' d'un espace affine euclidien orienté E de dimension **3.** Soit Γ son pseudo-bord, courbe de classe C^1 par morceaux. Supposons E euclidien orienté et $\hat{\Sigma}$ orientée (donc aussi transversalement orientée). Soit? un champ de vecteurs de classe C^1 sur E .

Appelons ω la forme de degré 1 associée à $\vec{X}$ par la structure euclidienne de E ; à do est associée, puisque E est euclidien et orienté de dimension 3, le champ de vecteurs $\overrightarrow{rot}\,\vec{X}$ (3°, **page** 71). Des formules (VI,7;48),(VI,7;51 bis), on déduit

(VI,7;54)
$$\mathcal{C} = \int_{\Gamma} (\vec{X} \mid \vec{ds}) = \int_{\hat{\Gamma}} \omega = \int_{\hat{\Sigma}} d\omega$$
$$= \int_{\Sigma} (\overrightarrow{rot}\,\vec{X} \mid \vec{\nu})\, dS = \Phi :$$

le travail de $\vec{X}$ le long de Γ est le flux de $\overrightarrow{rot}\,\vec{X}$ à travers Σ . Si on prend un référentiel orthonormal positif, et si on appelle X , Y , Z , les composantes du champ $\vec{X}$, et $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, les cosinus directeurs de la normale positive à Σ, on aura :

(VI,7;55)
$$\int_{\hat{\Gamma}} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$
$$= \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] dS \,.$$

C'est cette formule qui a été démontrée par Stokes, et a donné son nom à la formule générale de Stokes (VI,7;3).

Nous résumerons les résultats de 1°, 2°, 3°, comme suit, sans préciser les conditions d'application :

Règles de transformations des intégrales en analyse vectorielle

1°) La variation d'une fonction d'un point à un autre, dans un espace affine euclidien, est égale au travail de son gradient le long d'un arc joignant le premier point au deuxième (formule (VI,7;48)).

2°) Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface Σ bordant un volume V traversée dans le sens sortant de V, dans un espace affiné euclidien, est égal à l'intégrale de la divergence du champ dans V.

3°) Le travail d'un champ de vecteurs le long du bord (orienté) $\hat{\Gamma}$ d'une surface orientée $\hat{\Sigma}$ d'un espace affine euclidien orienté de dimension 3, est égal au flux du rotationnel du champ à travers Σ, munie de l'orientation transversale associée à son orientation tangentielle.

On peut répéter ici ce que nous avons dit à la remarque 3°) de la page 60 : l'usage systématique des formes différentielles et de la formule de Stokes est préférable à cette multiplicité de formulessur les champs.

Voici quelques autres formules, où les notations se comprennent d'elles-mêmes, en fonction de ce qui a été dit antérieurement . E est un espace affine euclidien orienté de . dimension N :

(VI,7;56)
$$\int\!\!\int\cdots\int_V \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U \, dx = \int\cdots\int_{bV} U \, \overrightarrow{dS}$$

$$\int\!\!\int\!\!\int_V \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{X} \, dx = - \int\!\!\int_{bV} \left[\vec{X} \wedge \overrightarrow{dS}\right]^{*} \quad (N = 3)$$

$$\int\!\!\int_{\Sigma} \left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U \wedge \overrightarrow{dS}\right]^{*} = - \int_{b\Sigma} U \, \overrightarrow{ds} \quad (N = 3)$$

Les démonstrations sont évidentes, en prenant un référentiel orthonormal orienté. Prenons, par exemple, la deuxième. Elle s'écrit, pour la 1ère composante :

(VI,7;57)
$$\int\!\!\int\!\!\int \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = - \int\!\!\int \left(Y \cos\gamma - Z \cos\beta\right) dS \;;$$

c'est un cas particulier de la formule d'Ostrogradsky, où l'on a remplacé X, Y, Z, par $0, Z, -Y$.

Voici enfin les formules de Green, d'un usage constant en mécanique et en physique :

<u>Théorème 40 - Soit V une variété avec pseudo-bord de classe C^1, de dimension N, d'un ouvert $\overset{\circ}{V} = \Omega$ d'un espace affine euclidien E de dimension N. Soit U, W, des fonctions réelles, de classe C^2 dans Ω. En appelant Σ le pseudo-bord de V, et $\vec{\nu}(x)$ le vecteur unitaire normal à Σ, sortant de V au point x de Σ, on a, si les conditions du théorème 38, relativement à V et Σ, sont vérifiées, et si le support de U coupe V suivant un compact :</u>

(VI,7;58)
$$\int\cdots\int_{\Sigma} \frac{dW}{d\vec{\nu}}\, dS = \int\!\!\int\cdots\int_V \Delta W \, dx$$

(VI,7;59)
$$\int\cdots\int_{\Sigma} U \frac{dW}{d\vec{\nu}}\, dS = \int\!\!\int\cdots\int \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U \,\middle|\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, W\right) dx + \int\!\!\int\cdots\int U \, \Delta W \, dx .$$

(VI,7;60)
$$\int\cdots\int_{\Sigma} U \frac{dU}{d\vec{\nu}}\, dS = \int\!\!\int\cdots\int_V \left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U\right\|^2 + \int\!\!\int\cdots\int_V U \, \Delta U \, dx$$

(VI,7;61)
$$\int\cdots\int_{\Sigma} \left(U \frac{dW}{d\vec{\nu}} - W \frac{dU}{d\vec{\nu}}\right) dS = \int\!\!\int\cdots\int_V \left(U \, \Delta W - W \, \Delta U\right) dx$$

Dans ces formules, Δ est le laplacien, et $\frac{d}{d\vec{\nu}}$ est la dérivée suivant le vecteur $\vec{\nu}$ (notée $D_{\vec{\nu}}$ à la formule (III,3;4)).

Démonstration - Démontrons d'abord la formule (VI,7;59). Il suffit pour cela d'appliquer la formule d'Ostrogradsky (VI,7;52), relativement au champ de vecteurs défini par $U\,\overrightarrow{\text{grad}}\,W$. On a en effet immédiatement (formule (III, 3;21)) :

$$\text{(VI,7;62)} \quad \left(U\,\overrightarrow{\text{grad}}\,W \,\middle|\, \vec{\nu}\right) = U\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,W \,\middle|\, \vec{\nu}\right) = U\,\frac{dW}{d\vec{\nu}} \quad ,$$

et d'autre part, comme on le voit en prenant un référentiel orthonormal :

$$\text{(VI,7;63)} \quad \operatorname{div}\left(U\,\overrightarrow{\text{grad}}\,W\right) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(U\,\frac{\partial W}{\partial x_j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial x_j}\,\frac{\partial W}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} U\,\frac{\partial^2 W}{\partial x_j^2}$$

$$= \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,U \,\middle|\, \overrightarrow{\text{grad}}\,W\right) + U\,\Delta W \,,$$

donc Ostrogradsky donne bien le résultat.

La formule d'Ostrogradsky suppose le champ $U\,\overrightarrow{\text{grad}}\,W$ de classe C^1, ce qui aura lieu si U est de classe C^1 et W de classe C^2.

En appliquant (VI,7;59) à $U = 1$, on trouve immédiatement la formule (VI,7;58).

Si maintenant on l'applique à $W = U$, on trouve la formule (VI,7;60), si U est de classe C^2.

Par ailleurs si on applique la formule (VI,7;59) en intervertissant les rôles de U et de W, et si on soustrait, de la formule initiale, la nouvelle, on obtient (VI,7;61) si U et W sont de classe C^2.

On applique souvent les formules qui précèdent dans le cas de fonctions à valeurs complexes, comme il est dit à la remarque page 71. Alors, dans (VI,7;59), on remplace habituellement W par $\overline{W}$. Si on remplace W par $\overline{U}$ (au lieu de U) dans (VI,7;59), on obtient une égalité analogue à (VI,7;60), mais où $\|\overrightarrow{\text{grad}}\,u\|^2$ est remplacé par

$$\text{(VI,7;64)} \quad \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,U \,\middle|\, \overrightarrow{\text{grad}}\,\overline{U}\right) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial x_j}\,\frac{\partial \overline{U}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{N} \left|\frac{\partial U}{\partial x_j}\right|^2 \geqslant 0 \,,$$

On déduit de ces formules un très grand nombre de conséquences dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Par exemple, on en déduit le théorème suivant, que nous reverrons ultérieurement, pour des fonctions harmoniques, et qui peut s'énoncer comme suit : Si U est une fonction de classe C^2 dans E , harmonique, c'est-à-dire vérifiant l'équation de Laplace $\Delta U = 0$, et si elle est nulle sur le bord Σ de V , alors elle est identiquement nulle dans V .

Il suffit en effet d'appliquer la formule (VI,7;60), où U est remplacé par $\bar{U}$. L'intégrale de surface disparait, puisque U est supposée nulle sur Σ .

Le terme contenant ΔU disparait puisque U est supposée harmonique, et il reste finalement $\iint \cdots \int_V (\overrightarrow{grad}\, U | \overrightarrow{grad}\, \bar{U})\, dx$

Comme la fonction qu'on intègre est $\geqslant 0$, il résulte du théorème 26 du chapitre IV, que son intégrale ne peut être nulle sans qu'elle soit presque partout nulle (presque partout pour la mesure de Lebesgue); comme elle est continue, cela ne peut se produire que si elle est identiquement nulle, ce qui démontre notre affirmation.

§ 8 APPLICATION DE LA THEORIE DES FORMES DIFFERENTIELLES A LA TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

<u>Intégrales des formes différentielles fermées sur les variétés orientées compactes sans bord.</u>

Rappelons qu'on appelle cocycle, sur un ouvert Ω d'un espace affine E de dimension finie N, une forme différentielle $\vec{\omega}$ • , de classe C', fermée, c'est-à-dire telle que $d\vec{\omega} = \vec{0}$. On dit qu'une forme différentielle continue $\vec{\omega}$ de degré p est un cobord, s'il existe une forme différentielle $\vec{\varpi}$, de degré $p-1$, de classe C^1 , telle que $\vec{\omega} = d\vec{\varpi}$. Il résulte de la relation $d \circ d = 0$ qu'un cobord, si c'est encore une forme différentielle de classe C^1, est nécessairement un cocycle ** ; le théorème 19 de Poincaré indique que, si l'ouvert Ω vérifie certaines conditions topologiques <u>très particulières</u>, alors, réciproquement, un cocycle est un cobord.

• Comme toujours, il s'agit de formes différentielles à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$.

• * Ici $\vec{\omega}$ est supposée seulement <u>continue</u>; elle a beau être un cobord, si elle n'est pas dérivable, cela n'a pas de sens de voir si elle est un cocycle !

Nous avons appel6 (page 160) C^m-cycle singulier de l'ouvert Ω de E, une variété singulière sans bord, orlentée, de classe C^m, de Ω, c'est-à-dire une application H de classe C^m d'une variété V orientée de classe C^m, dans Ω *

Mais, dans tout ce paragraphe, nous n'étudierons que des cas où V est compacte. Nous abrègerons par C^m-cycle de Ω, une variété singulière $H | V$ de Ω, de classe C^m, orientée, compacte, c'est-à-dire telle que V soit compacte.

D'autre part, nous appellerons C^m-bord de Ω, de dlmension n, une variété singulière orientée compacte, de dlmension n, qui est le bord d'une variété singulière avec bord, orientée, compacte, de dimension $n+1$, de classe C^m, de Ω ** .

Un C^m-cycle (resp. C^m-bord) est a fortiori un C^l-cycle (resp. C^l-bord) pour $l \leq m$.

Un bord est nécessairement un cycle; par contre un cycle n'est pas nécessairement un bord. Par exemple, dans l'ouvert Ω complémentaire de l'origine dans un espace affine euclidien, considérons le cycle défini par une sphère de centre origine, orientée. Il est manifestement un bord dans l'espace entier E, soit le bord de la boule fermée, munie d'une orlentation convenable. Dans l'ouvert Ω, il serait bien encore le bord de la boule fermée privée de son centre, mals cette variété avec bord n'est pas-compacte; au sens précédent, la sphère, dans Ω, n'est pas un bord *** ,

Dans ces définitions, nous avions toujours *supposé* $m \geq 1$. Nous n'avons jamais défini les variétés topologiques ou variétés de classe C^0, ni a fortiori leur orientation. Néanmoins nous nous permettrons, dans la suite, de parler de C^0-cycles et de C^0-bords; pour cela, nous appellerons variété singulière avec bord, orientée, compacte, de classe C^0, une application H continue d'une variété V de classe C^1, avec bord, orientée, compacte. La classe C^0 de $H | V$ correspond à la classe C^0 de H ; V est toujours de classe C^1.

* Rappelons que la variété singulière $H | V$ est dite dans Ω, si l'image $H(V)$ est dans Ω ; V est n'importe où (éventuellement abstraite).

** Dans ce paragraphe, *nous* ne parlerons Jamais de variétés avec pseudo-bord.

*** Ceci nous montre qu'un cycle de Ω peut très bien être un bord dans E sans l'être dans Ω. Nous venons seulement de voir que la sphère n'a pas l'air d'être un bord dans Ω; pour une démonstration, voir plus loin, corollaire 2 du théorème 58.

Le bord de cette variété singulière est la restriction de H au bord de V , muni de l'orientation bord. Alors un C^0-cycle est une P-variété singulière, orientée, compacte, sans bord; et un C^0-bord est le bord d'une C^0 -variété singulière, avec bord, orientée, compacte. Les opérations bord , $\mathcal{b}$, et cobord, d, sont étroitement apparentées grâce à la formule de Stokes; d'autre part, on a $\mathcal{b} \circ \mathcal{b} = \emptyset$, et $d \circ d = 0$.

Intégrale d'un cocycle sur un cycle

<u>Théorème 41 - L'intégrale d'un cocycle sur un C^1-bord est nulle; l'intégrale d un cobord sur un C^1-cycle est nulle. A fortiori, l'intégrale d un cobord sur un C^1-bord est nulle,</u>

<u>Démonstration</u> - Cela résulte immédiatement du théorème 37 de Stokes.

1°/ Si $H \mid \vec{V}$ est un C^1-bord, il existe une variété singulière, orientée, compacte, $H \mid \vec{W}$, telle que $H \mid \vec{V} = H \mid \mathcal{b}\vec{W}$.

Si alors $\vec{\omega}$ est un cocycle, on a :

$$\int_{H \mid \widehat{\mathcal{b}W}} \vec{\omega} = \int_{H \mid \vec{W}} d\vec{\omega} = \vec{0} . \tag{VI,8;1}$$

2°/ Si ω est un cobord, alors il existe une forme différentielle $\vec{\varpi}$, de classe C^1 , telle que $\vec{\omega} = d\vec{\varpi}$, si alors $H \mid \vec{V}$ est un cycle, $\mathcal{b}V = \emptyset$, on a :

$$\int_{H \mid \vec{V}} d\vec{\varpi} = \int_{H \mid \widehat{\mathcal{b}V}} \vec{\varpi} = \vec{0} \tag{VI,8;2}$$

3°/ Un bord étant a fortiori un cycle, 3°/ résulte de 2°/

<u>Remarques</u> : 1°) Les hypothèses de compacité faites ici sur les cycles et les bords sont inévitables, parce que nous n'avons fait aucune hypothèse de compacité sur les supports des formes différentielles (dans l'énoncé du théorème de Stokes. on suppose que le support de l'image réciproque de la forme par H coupe la variété V suivant un compact). Naturellement il existerait une théorie analogue, où l'on ne ferait pas d'hypothèse de compacité sur les cycles et les bords, et où on en ferait sur les supports des formes différentielles.

2°) L'intégrale d'un cocycle sur un cycle n'est pas nécessairement nulle.

Considérons, par exemple, dans le plan, la forme différentielle de <u>l'angle polaire,</u> définie à (VI,4;41), nous avons vu que c'est un cocycle de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2 - 0$. Considérons d'autre part le cercle trigonométrique muni de son orientation canonique; c'est un C^∞-cycle de $\mathbb{R}^2 - 0$. Or l intégrale de ce cocycle sur ce cycle est $+ 2\pi \neq 0$. Ceci d'ailleurs, compte tenu du théorème que nous venons de démontrer, nous montre à nouveau que la forme différentielle considérée n'est pas un cobord; elle nous montre en même temps, au moins pour la dimension $N = 2$, ce que nous avons affirmé plus haut, à savoir que, dans l'ouvert complémentaire de l'origine dans un espace euclidien de dimension N , le cycle défini par une sphère orientée n'est pas un C^1-bord.

La démonstration donnée au corollaire2 du théorème 58 sera une extension de celle-ci à N quelconque. Ce résultat est typique de ceux que nous étudierons dans ce paragraphe : le fait que l'intégrale d'un certain cocycle sur un certain cycle n'est pas nulle, prouve à la fois que le cocycle n'est pas un cobord et que le cycle n est pas un bord.

3°) Si $\vec{\omega}$ est un cobord, son intégrale sur une variété singulière, orientée, avec bord, compacte, $H \mid \tilde{V}$, ne dépend que du bord $H \mid \tilde{b}V$ et non de $H \mid \tilde{V}$ elle-même. En effet, puisqu'on a $\vec{\omega} = d\vec{\varpi}$, la formule de Stokes donne :

$$(\mathrm{VI},8;3) \qquad \int_{H|\tilde{V}} \vec{\omega} = \int_{H|\tilde{b}V} \vec{\varpi} \;.$$

Bien noter que cette propriété est vraie si $\vec{\omega}$ est un cobord, et ne l'est pas nécessairement si $\vec{\omega}$ est seulement un cocycle. Le cas particulier où le bord de V est vide nous dit d'ailleurs que, dans ce cas, l'intégrale de $\vec{\omega}$ est nulle; or nous avons précisément vu que c'est vrai si $\vec{\omega}$ est un cobord, mais pas nécessairement si elle est seulement un cocycle.

4°) On n'a naturellement aucun résultat relatif aux C^0-cycles ou C0-bords, l'intégrale n'ayant d'ailleurs alors aucun sens. Rappelons aussi que nous n'avons donné la démonstration du théorème de Stokes que pour les variétés de classe C^2 ,et l'avons admis pour la classe C^1 .

Nous allons maintenant nous attacher à étudier certaines réciproques des théorèmes précédents. D'abord voici une réciproque de la lère partie du théorème 41 :

Théorème 42 - Soit $\vec{\omega}$ une forme différentielle de degré p, de classe C^1, d'un ouvert Ω d'un espace affine de dimension N ; si l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur tous les C^∞-bords de dimension p *, contenus dans Ω, est nulle, est un cocycle.

Démonstration - On a en effet, pour toute variété avec bord $\tilde{V}$, de classe C^∞, orientée, compacte, de dimension $p+1$, contenue dans Ω, $\int_{\tilde{V}} d\vec{\omega} = \int_{b\tilde{V}} \vec{\omega} = \vec{0}$. Notre affirmation résulte alors immédiatement du théorème suivant (appliqué à $\vec{\varpi} = d\vec{\omega}, n = p+1$) qui montre qu'une forme différentielle continue est entièrement déterminée par la connaissance de ses Intégrales sur les variétés avec bord, orientées, compactes, de classe C^∞ :

Détermination d'une forme différentielle continue par ses intégrales sur les variétés avec bord orientées compactes.

Théorème 43 - Soit Ω un ouvert d'un espace affine E de dimension finie N. Soit $\vec{\varpi}$ une forme différentielle continue sur Ω, de degré n. Si, pour toute variété avec bord $\tilde{V}$, orientée, compacte, de dimension n, de classe C^∞, contenue dans Ω, l'intégrale $\int_{\tilde{V}} \vec{\varpi}$ est nulle, alors $\vec{\varpi}$ est nulle.

Démonstration - Soient $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$ n vecteurs de $\vec{E}$, et a un point de Ω. Nous allons montrer que $\vec{\varpi}(a) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n) = \vec{0}$. Soit F le sous-espace affine de E, engendré par a et les $\vec{X}_i$. On peut le supposer de dimension n, sans quoi les $\vec{X}_i$ seraient dépendants, et le résultat serait évident. Prenons dans F le référentiel $a, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$. La forme $\vec{\varpi}$ définit sur F une forme différentielle de degré n, qui alors s'écrit $\vec{f}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$. On a

$$\vec{\varpi}(a) \cdot (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n) = \vec{f}(a) \tag{VI,8;4}$$

* En mettant C^∞-bords, nous prenons une hypothèse plus faible qu'en mettant C^1-bords; nous arrivons cependant à la bonne conclusion, donc notre énoncé est plus fort. On verra, dans la remarque qui suit le théorème 43, qu'on peut faire des hypothèses encore plus faibles.

Orientons $\vec{F}$ en considérant sa base comme positive. La mesure de Radon $[\vec{\varpi}]_{\tilde{F}}$ est alors $\vec{f}\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n = \vec{f}\, dx$. Si nous prenons, pour V, une boule $B(R)$ (pour la norme euclidienne définie par le référentiel), de centre a et de rayon R, de F, de volume $V(R)$, on a donc, par hypothèse :

$$\iint\cdots\int_{B(R)} \vec{f}(x)\, dx = \vec{0} \tag{VI,8;5}$$

Or on a la majoration :

$$\left\| \frac{\iint\cdots\int_{B(R)} \vec{f}(x)\, dx}{\iint\cdots\int_{B(R)} dx} - \vec{f}(a) \right\| \tag{VI,8;6}$$

$$\leq \frac{1}{V(R)} \iint\cdots\int_{B(R)} \left\| \vec{f}(x) - \vec{f}(a) \right\| dx$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{\|x-a\| \leq R} \left\| \vec{f}(x) - \vec{f}(a) \right\| ,$$

qui tend vers 0 avec R, en vertu de la continuité de $\vec{f}$ au point a. De (VI,8;5) on déduit donc bien, parpassage à la limite, $\vec{f}(a) = \vec{0}$, donc $\vec{\varpi} = \vec{0}$.

Remarque - Les boules euclidiennes ne jouent ici aucun role particulier. Il suffit que, pour tout point a de Ω, et tout sous-espace affine F de dimension n de Ç, contenant a, il existe une suite de variétés orientées avec bord ou pseudo-bord $\tilde{V}_j \subset V_j = F$, de dimension n, convergeant uniformément vers a pour j Infini, et telles que $\int_{\tilde{V}_j} \vec{\varpi} = 0$, pour que la conclusion $\vec{\varpi} = \vec{0}$ soit valable. Si les pseudo-bords sont tels qu'on puisse leur appliquer le théorème général.38 de Stokes, 1 hypothèse $\int_{\widetilde{bV}} \vec{\omega} = \vec{0}$ pour tous les V_j, entraînera aussi la conclusion du théorème 42 : $d\vec{\omega} = \vec{0}$.

Voici maintenant une réciproque de la **2ème** partie du théorème 41 :

Théorème de De Rham

<u>Théorème 44 - Si une forme différentielle $\vec{\omega}$, de classe C^1, d'un ouvert Ω d un espace affine, a une intégrale nulle ⋅◆□ ◆□◆⋅ ●♏⋅ C^∞-cycles • contenus dans Ω, alors elle est un cobord. Si en outre $\vec{\omega}$ est de classe C^m, $m \geq 1$, on peut en **trouver** une primitive extérieure qui soit aussi de classe C^m.</u>

Le théorème de De Rham **est un** des **résultats les** plus profonds de la topologie algébrique; il est à la source de tous les développements modernes de cette partie des mathématiques. Sa démonstration est très délicate, il n'est pas question de la donner ici. De toute façon, nous ne nous en servirons pas dans la suite. Bornons nous à montrer qu il explique d'une manière nouvelle le théorème 19 de Poincaré. Si $\vec{\omega}$ est une forme différentielle de classe C^1 de l'ouvert Ω, de degré $p \geq 1$, fermée, alors il résulte du théorème 41 que son intégrale sur **tous les** C^∞ bords est nulle; **mais** cela n entraîne pas nécessairement qu'elle soit un cobord, il faudrait pour cela pouvoir affirmer plus, à savoir que son intégrale sur tous les C^∞ -cycles est nulle. SI alors il se trouve que, dans l'ouvert Ω, tous les C^∞ -cycles de dimension $p \geq 1$ sont **aussi** des C^∞-bords, alors cette propriété sera vérifiée , et ω sera bien un cobord; de sorte que, dans ce cas là, dans l'ouvert Ω , tous les cocycles de degré > 0 seront aussi des cobords, et le théorème de Poincaré sera vrai dans Ω . Nous verrons plus loin que cette propriété des F-cycles. d'être tous des C^∞-bords, est précisément, à une petite modification près (voir corollaire 5 du théorème 54), réalisée pour les ouverts Ω vérifiant les conditions très restrictives de l'énoncé du théorème 19 ** ; mais il en existe bien d'autres où elle est aussi vraie. La propriété pour un ouvert Ω d'un espace affine **(ou une variété** Ω de classe C^2), que **tout** cocycle de degré > 0 de Ω soit un cobord, est évidemment conservée par C^2 -difféomorphisme (un tel C^2 -difféomorphisme

* Voir note * page 192

** Le théorème de Poincaré est donc un cas particulier du théorème de De Rham. Mais la démonstration du théorème de De Rham, que nous ne donnons pas ici, utilise le théorème de Poincaré, qui est donc un intermédiaire inévitable.

commute avec d, théorème 17); on démontre, et c'est la un résultat trés curieux et très remarquable, qu'elle est même conservée par simple **homéomorphisme**, **sans** condition de **différentiabilité.** Nous en verrons des **démonstrations** partielles (Corollaire 1 du **théorème** 53).

Nous allons démontrer le théorème de De Rham et en examiner certaines conséquences, dans le cas particulier des formes de degré 1. Nous allons même **faire** des hypothèses un peu plus faibles que celles qui précédent, et donner une démonstration qui n'utilise pas le **théorème** 19 :

Théorème 45 - Soient Ω un ouvert d'un espace affine de dimension finie, $\vec{\omega}$ une forme différentielle continue de degre 1 sur Ω, à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$, de classe C^m, $m \geqslant 0$. Si l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur tout C^∞-cycle, défini par une application H, ~~de classe~~ C^∞, du cercle trigonométrique orienté de $\mathbb{R}^2$, dans Ω, est nulle, alors il existe une fonction $\vec{f}$ de classe C^{m+1}, sur Ω, à valeurs dans $\vec{F}$, telle que $d\vec{f} = \vec{\omega}$. Si Ω est connexe, $\vec{f}$ est déterminée à une constante additive près.

Noter que, pour $m = 0$, nous **supposons** $\vec{\omega}$ **continue** et **non** de classe C^1. Dans le **théorème** 19 de Poincaré, il **était nécessaire** de'supposer $\vec{\omega}$ de classe C^1 pour pouvoir parler de $d\vec{\omega}$; nous avons signalé **à** ce moment'là qu'il n'était pas naturel de supposer une forme de classe C^1 pour voir **si** elle était la différentielle d'une autre forme. Nous avons **ici** une condition deqature intégrale et ***non* différentielle**, **qui** permet de supposer ω seulement continue.

Démonstration - Le fait que, si Ω est connexe $\vec{f}$, **soit** déterminée à une constante additive près, résulte du théorème 22 du chapitre III.

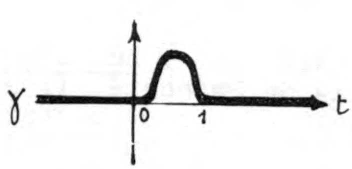
1ère étape - Démontrons que l'intégrale de $\vec{\omega}$ **est** encore nulle, sur toutes les pseudo-variétés singulières orientées **compactes**, **définies** par des applications H, de classe C^∞ **par** morceaux, du cercle trigonométrique orienté, dans Ω.

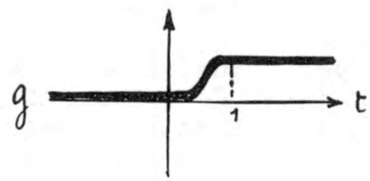
Paramétrons en effet le cercle trigonométrique par l'angle polaire θ, que nous ferons varier de 0 **à** 2π. Nous supposerons alors qu'on peut subdiviser **l'intervalle** $[0, 2\pi]$, **à** l'aide de points $\theta_0 = 0$, $\theta_1, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_n = 2\pi$, de manière que H soit de classe C^∞ **dans** chaque intervalle $[\theta_i, \theta_{i+1}]$. Montrons qu'il existe une application g_i, **de** l'intervalle $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ **de** $\mathbb{R}$ **sur** lui-même, qui soit de classe **C'**, strictement croissante, et dont **toutes les** dérivées successives soient nulles aux **extrémités** θ_i et θ_{i+1} **de** cet Intervalle.

Pour cela, construisons d'abord une telle fonction, correspondant à l'intervalle $[0,1]$. On va utiliser les méthodes de la démonstration du théorème de la partition de l'unité (théorème 11 du chapitre IV). Construisons la fonction G de la formule (IV,2;23), correspondant à $\eta = \frac{1}{2}$. On en déduit (page 439) la fonction γ_1 sur $\mathbb{R}$:

$$t \longrightarrow \gamma_1(t) = G\left((t-a_1)^2\right) = G\left(\left(t-\tfrac{1}{2}\right)^2\right),$$ correspondant à $a_1 = \frac{1}{2}$.

Elle est de classe C^∞, > 0 pour $\left|t-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ ou $0 < t < 1$, nulle pour $t \leqslant 0$ et $t \geqslant 1$. Appelons γ la fonction proportionnelle à γ_1, d'intégrale égale à 1. Alors $g(t) = \int_{-\infty}^{t} \gamma(\tau)\, d\tau$ répond à la question. Elle est de classe C^∞ comme primitive d'une fonction de classe C^∞, strictement croissante dans $[0,1]$ puisque sa dérivée γ est > 0, nulle pour $t \leqslant 0$, égale à $\int \gamma = 1$ pour $t \geqslant 1$; toutes ses dérivées sont nulles pour $t = 0$ et $t = 1$.





On définira alors g_i par :

$$(\text{VI},8;7) \qquad g_i(\theta) = g\left(\frac{\theta - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}\right).$$

Ces fonctions g_i étant construites, considérons l'application **K**, de l'intervalle $[0, 2\pi]$ dans Ω, définie par la formule :

$$(\text{VI},8;8) \qquad \mathbf{K}(\theta) = H(g_i(\theta)) \quad \text{pour } \theta_i \leqslant \theta \leqslant \theta_{i+1}.$$

Elle est alors encore de classe C^∞ dans chaque intervalle $[\theta_i, \theta_{i+1}]$; mais, comme toutes ses dérivées successives sont nulles aux extrémités de cet intervalle, on voit que les dérivées à droite et les dérivées à gauche de K en chacun des points θ_i, coïncident, et que, par conséquent, **K** est une application de classe C^∞, de $[0, 2\pi]$ dans Ω.

Comme en outre $K(0) = K(2\pi)$, et que toutes les dérivées successives de K au point 0 et au point 2π sont nulles, on peut considérer que K définit une application de classe C^∞ du cercle trigonométrique Γ dans Ω.

D'autre part, il est facile de voir que les intégrales de $\vec{\omega}$ sur $H|\Gamma$ et $K|\Gamma$ sont les mêmes. En effet, ces intégrales sont respectivement les sommes des intégrales sur les $H|[\theta_i, \theta_{i+1}]$ et $K|[\theta_i, \theta_{i+1}]$; mais les applications K et H, de $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ dans Ω, définissent deux chemins de classe C^∞ équivalents; nous savons par conséquent que les intégrales de $\vec{\omega}$ sur ces deux chemins sont bien égales (Théorème **35**). Comme alors l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur $K|\Gamma$ est nulle par hypothèse, il en est de même de l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur $H|\Gamma$.

2ème étape - On peut évidemment se borner à faire la démonstration en supposant Ω connexe, car, s'il ne l'est pas, on raisonnera séparément sur chacune de ses composantes connexes. Choisissons alors, une fois pour toutes, un point a de Ω, et la valeur $\vec{f}(a)$ de $\vec{f}$ au point a.

Définissons la fonction $\vec{f}$ par la formule :

$$\vec{f}(x) = \vec{f}(a) + \int_{\overrightarrow{[a,x]}} \vec{\omega} \quad , \tag{VI,8;9}$$

l'intégrale étant une intégrale curviligne sur n'importe quel chemin, de classe C^∞ par morceaux, situé dans Ω, d'origine a et d'extrémité x. Il existe sûrement un tel chemin; car Ω est connexe, et comme, en outre, c'est un ouvert d'un espace affine, il existe certainement une ligne polygonale joignant a à x (voir compléments de topologie générale sur les espaces connexes, page), et un tel chemin est bien de classe C^∞ par morceaux. Montrons que le résultat est indépendant du chemin choisi. SI, en effet, nous considérons deux de ces chemins, rien n'empêche, par un changement éventuel de paramètres, de supposer que le premier est défini par une application M, de classe C^∞ par morceaux, du segment $[0,\pi]$ de $\mathbb{R}$ dans Ω, et que le deuxième est défini par une application M, de classe C^∞ par morceaux, de $[2\pi, \pi]$ dans Ω.

Alors l'application M, définie sur l'intervalle $[0,2\pi]$, à valeurs dans Ω par les deux fonctions précédentes, (elles prennent la même valeur au point π, de sorte que M est continue'), définit une application de classe C^∞ par morceaux, de $[0,2\pi]$ dans Ω, c'est-à-dire, puisque $M(0) = M(2\pi) = a$, une application H, de classe C^∞ par morceaux, du cercle trigonométrique orienté dans Ω. Il résulte alors de 1°) que l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur la pseudo-variété singulière ainsi constituée est nulle, ce qui montre bien que les deux intégrales (VI,8;9), correspondant à ces deux chemins, sont égales.

3ème étape - Il nous reste à montrer que la fonction $\vec{f}$ répond bien à la question.

Choisissons un référentiel dans E. Alors $\vec{\omega}$ admet la représentation (VI,6;72) : $\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{N} \vec{A}_j \, dx_j$.

Si nous montrons que $\vec{f}$ est partiellement dérivable et que l'on a :

(VI,8;12)
$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j} = \vec{A}_j \;,$$

Comme les $\vec{A}_j$ sont supposées continues, $\vec{f}$ sera de classe C^1 d'après le théorème 15 du chapitre III, et on aura bien $d\vec{f} = \vec{\omega}$. Si $\vec{\omega}$, donc les $\vec{A}_j$, sont de classe C^m, $\vec{f}$ sera en outre de classe C^{m+1}, et le théorème sera démontré.

Faisons varier x au voisinage de x_0, sur la parallèle menée par x_0 au j-ième vecteur de base. Nous prendrons, dans la formule (VI,8;9), un chemin joignant a à x, formé de la succession d'un chemin fixe joignant a à x_0, et du chemin rectiligne $[x_0, x]$. On a donc

(VI,8;13)
$$\vec{f}(x) = \vec{f}(x_0) + \int_{[x_0,x]} \vec{\omega} =$$
$$\vec{f}(x_0) + \int_{(x_0)_j}^{x_j} \vec{A}_j(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, \ldots, x_N)\, d\xi$$

* On voit pourquoi nous avons d'abord dû passer des applications C^∞ aux applications C^∞ par morceaux : d'une part une ligne polygonale est C^∞ par morceaux, d'autre part nous obtenons ici une application du cercle trigonométrique dans Ω, qui est seulement C^∞ par morceaux. Naturellement, une fois le théorème démontré, nous saurons que $\vec{\omega} = d\vec{f}$, et l'application du théorème 39 et de la formule (VI,7;36), nous montrera que l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur $H \mid \Gamma$ est nulle dès que le chemin $H \mid [0, 2\pi]$ est de longueur finie; et on peut aussi calculer $\vec{f}(x)$ par l'intégrale (VI,8;9), sur tout chemin de longueur finie joignant a à x.

Alors le théorème 89 du chapitre IV, donnant la dérivée d'une intégrale indefinie par rapport a sa borne supérieure, donne Immédiatement, au point $\vec{x}_0$, la formule :

(VI,8;14) $$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \vec{A}_j(x_0),$$

ce qui démontre le théorème.

Corollaire 1 - Si $\vec{X}$ est un champ de vecteurs continu sur un **ouvert** Ω d'un **espace** euclidien de dimension finie, dont le travail est nul sur tout cycle, défini par une application de classe C^∞ du cercle trigonométrique oriente, alors $\vec{X}$ dérive d'un potentiel dans Ω.

Application aux fonctions "argument" dans $\mathbb{R}^2$

Dans un **ouvert** Ω du complémentaire de l'origine dans $\mathbb{R}^2$, on **appelle fonction-argument** toute fonction $\varphi : M \to \varphi(M)$, **qui**, en chaque point M , soit **égale** à l'une des **détermina**tions de l'argument $(\vec{Ox}, \vec{OM})$ en ce point (déterminations qui sont en nombre infini) la différence entre 2 d'entre elles étant un multiple entier de 2π). On ne s'intéresse dvldemment qu'aux fonctions-argument qui sont continues.

Corollaire 2 - Si une fonction-argument, dans-un **ouvert** Ω de $\mathbb{R}^2 - 0$, est continue, elle est de classe C^∞ , et sa **différentielle** est la forme ω de (VI,4;41) (Improprement **notée** $d\varphi$) .Pour qu'il existe une telle fonction dans Ω , **il faut** et **il** suffit que, pour toute **application** H , **de classe** C^∞, **du cercle trigonométrique** Γ **dans** Ω , **l'intégrale de** ω **sur** $H|\Gamma$ **soit nulle ou que la forme** ω **soit un cobord dans** Ω. **Dans ce cas, si** Ω **est connexe**, il y a une **infinité de fonctions-argument**, la **différence** entre deux d'entre **elles** est un multiple entier constant de 2π , et la fixation de l'argument en un point **de** Ω le fixe dans Ω tout entier.

Démonstration 1°/ Soit A un point **de** Ω. Introduisons la fonction $M \to \Phi(A;M)$ de la page 80; elle est C^∞ lorsque M est dans l'ouvert $|\Phi(A;M)| < \pi$, et elle y est une primitive de ω . Pour que φ soit une fonction-argument, il faut et il suffit que la différence

(VI,8;15) $$\varphi(M) - \varphi(A) - \Phi(A;M)$$

soit, en tout point M, un multiple entier de 2π, et qu'en un point M_0 particulier, $\varphi(M_0)$ soit l'un des arguments de M_0. Si alors φ est une fonction-argument continue dans Ω, ce multiple entier de 2π est continu pour M dans un voisinage de A, donc constant; donc φ est aussi C^∞ au voisinage de A et y admet ω comme différentielle; ceci étant vrai pour tout **A** de Ω, φ est C^∞ dans Ω et de cobord ω ; ω est bien un cobord dans Ω.

2°/ Pour que ω soit un cobord dans Ω, il est bien nécessaire (d'après le théorème 41) et suffisant (d'après le théorème **45) que** $\int_{H|\widetilde{\Gamma}} \omega = 0$ **, pour toute** application **H** de classe C^∞ du cercle trigonométrique dans Ω.

3°/ Il reste donc à montrer que, si ω est un cobord dans Ω, $\omega = d\Psi$, il existe des fonctions-argument dans Ω. Ici encore on peut supposer Ω connexe. Il n'y a aucune raison pour que Ψ soit une fonction-argument. Mais appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de Ω pour lesquels $\Psi(M)$ est l'un des arguments de M . Nous allons montrer que $\mathcal{E}$ est à la fois ouvert et fermé dans Ω. Alors il sera ou vide ou Identique à Ω, supposé connexe. Si donc on modifie Ψ d'une constante, de manière qu'en un point particulier de Ω, elle ait pour valeur 1 un des arguments de ce point, cela deviendra vrai pour tout point de Ω ; ce qui montrera bien qu'il existe dans Ω des fonctions argument continues. Il y en aura alors une infinité; la fixation d'une telle fonction en un point de Ω la fixera bien dans Ω tout entier; la différence entre deux d'entre elles sera une constante, et, en chaque point de Ω, un multiple entier de 2π, donc elle sera un multiple entier constant de 2π. Ainsi le théorème sera démontré dès que nous aurons prouvé que $\mathcal{E}$ est ouvert et fermé dans Ω.

Soit $A \in \Omega$. Appelons $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert connexe de **A** dans Ω, tel que; pour M dans $\mathcal{V}$, $|\Phi(A\,;M)| < \pi$. Alors, dans $\mathcal{V}$, les fonctions Ψ, et $M \longrightarrow \Psi(A) + \Phi(A\,;M)$ sont deux primitives de ω, égales en A ; comme $\mathcal{V}$ est connexe, elles coïncident dans $\mathcal{V}$ tout entier.

Alors, d'après ce que nous avons dit à propos de (VI,8;15), Ψ est une fonction-argument dans $\mathcal{V}$, si, en un point particulier de $\mathcal{V}$, elle a pour valeur l'un des arguments de ce point. Autrement dit, si $\mathcal{V}$ contient au moins un point de $\mathcal{E}$, $\mathcal{V}$ est tout entier dans $\mathcal{E}$. Alors :

a) $A \in \mathcal{E}$ entraîne $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}$; $\mathcal{E}$ est ouvert dans Ω ;

b) $A \in \Omega - \mathcal{E}$ entraîne $\mathcal{V} \subset \Omega - \mathcal{E}$; $\Omega - \mathcal{E}$ est ouvert dans Ω donc $\mathcal{E}$ est fermé dans Ω, et le corollaire est démontré.

En même temps nous savons comment déterminer $\varphi(M)$, si l'on a choisi $\varphi(A)$ pour un point A particulier, lorsque Ω est connexe. On aura :

(VI,8;18) $$\varphi(M) = \varphi(A) + \int_{\overset{\frown}{[A,M]}} \omega \quad ,$$

l'intégraie étant prise sur n'importe quel chemin de longueurfinle d'origine A et d'extrémité M.

En fait, nous verrons plus loin qu'on opère autrement : $\varphi(A)$ étant choisi, on suit, par continuité, la détermination de l'argument, le long de n'importe quel chemin joignant A à M. C'est là une notion assez intuitive, mais pas si facile à.expliciter rigoureusement; nous en reparlerons au chapitre VII.

Opération d'addition sur les cycles

Avant d'entrer à proprement parler dans les considérations d'homologie, nous allons définir une certaine opération d'addition sur les cycles.

Considérons deux C^m-cycles $H_1 | \vec{V}_1$ et $H_2 | \vec{V}_2$ de Ω, de même dimension. Supposons d'abord que V_1 et V_2 soient deux ensembles sans point commum. Si alors nous appelons V leur réunion, on peut facilement munir V d'une structure d'espace topologique, dans laquelle V_1 et V_2 sont à la fois ouverts et fermés. Il suffit d'appeler ouvert de V tout ensemble coupant à la fois V_1 et V_2 suivant des ouverts. On peut ensuite munir V d'une structure de variété de classe C^m orientée (si $m = 0$, de classe C^1) (en prenant, pour cartes de V, toutes les cartes de V_1, et les cartes de V_2). Si alors nous appelons H l'application de V dans Ω, prenant la valeur H_1 sur V_1 et la valeur H_2 sur V_2, on a défini un nouveau cycle dans Ω, qui peut être appel6 somme des deux cycles considérés.

SI au contraire il se trouve que V_1 et V_2 soient des parties d'un même ensemble et aient des points communs, (il peut même arriver que V_1 et V_2 soient identiques), on devra appeler V, non pas la réunion, mais une somme de V_1

Z

et V_2, c'est-à-dire n'importe quel ensemble réunion de deux parties disjointes, V'_1, V'_2, mises en correspondance biunivoque respectivement avec V_1 et V_2. On remplace alors V_1 et V_2 par V'_1 et V'_2, en transportant sur celles-ci les structures de variétés différentiables, et les applications H_1 et H_2, grâce aux correspondances biunivoques; on procédera ensuite de la même manière que précédemment avec $V = V'_1 \cup V'_2$. Le cycle somme n'est pas unique, puisqu'il dépend du choix de V ; toutefois il est toujours défini à une équivalence près, en ce sens que deux cycles définis de cette manière sont toujours équivalents, au sens des variétés singulières orientées équivalentes (voir page 145). On peut donc, dans tous les cas, définir la somme de deux cycles comme un cycle, défini seulement à une équivalence près. Si d ailleurs on remplace les deux cycles donnés par deux cycles équivalents, tout cycle égal à leur somme est remplacé par un équivalent. Au fond, ce que nous avons défini, ce n'est pas la somme de deux cycles, mais la somme de deux classes de cycles, qui est elle-même une classe de cycles; une classe de cycles étant une classe d'équivalence, pour la relation d'équivalence entre les variétés singulière orientées.

Quand on écrira une relation du type $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2$, où $\vec{\Gamma}, \vec{\Gamma}_1, \vec{\Gamma}_2$, seront des cycles, on entendra par là que $\vec{\Gamma}$, à une équivalence près, est la somme de $\vec{\Gamma}_1$ et de $\vec{\Gamma}_2$. On peut évidemment définir de même la somme d'un nombre fini quelconque de cycles; on peut donc aussi définir un multiple entier d'un cycle, $n\vec{\Gamma}$, où n est un entier. ≥ 1, comme étant la somme de n cycles équivalents à $\vec{\Gamma}$. Plus généralement, si $\vec{\Gamma}_1, \vec{\Gamma}_2, \ldots, \vec{\Gamma}_l$, sont tous des cycles de même dimension, on pourra parler de la combinaison $p_1\vec{\Gamma}_1 + p_2\vec{\Gamma}_2 + \cdots + p_l\vec{\Gamma}_l$, où les p_i sont des entiers ≥ 1. On pourra même convenir de prendre éventuellement des entiers nuls, à condition de considérer que le cycle $0\vec{\Gamma}$ est le cycle $\vec{0}$ ou cycle vide. En définissant toujours les cycles à une équivalence près, l'addition des cycles est associative et commutative.

Cycles homologues à 0

On va définir l'homologie des cycles, en Introduisant une nouvelle relation d'équivalence, dans laquelle on négligera les cycles dégénérés et les bords. On dit qu'un C^m-cycle $H \mid V$, de dimension n, d'un ouvert Ω d'un espace affine E, est dégénéré, s'il est vide, dans le cas de la dimension $n = 0$, et si, dans le cas de dimensions $n \geq 1$, l'image de V par H est un ensemble fini *.

* On ne verra l'intérêt de ces cycles dégénérés qu'au corollaire 2 du théorème 54.

On dit alors qu'un C^m-cycle $\vec{\Gamma}$ de Ω est C^m-homologue à 0 dans Ω s'il existe 2 C^m-bords, $\vec{A}$ et $\vec{B}$, et deux cycles dégénérés $\vec{A}'$ et $\vec{B}'$, tous dans Ω, tels que l'on ait la relation :

$$(\text{VI}, 8; 19) \qquad \vec{\Gamma} + \vec{A} + \vec{A}' = \vec{B} + \vec{B}'$$

Il résulte de cette définition qu'un cycle dégénéré et un C^m-bord sont C^m-homologues à 0. Un cycle équivalent à un cycle C^m-homologue à 0 est C^m-homologue à 0. Un cycle C^m-homologue à 0 est a fortiori C^ℓ-homologue à 0, pour $\ell \leq m$.

Théorème 46 - Si les cycles $\vec{\Gamma}_j$ sont homologues à 0, et si les μ_j sont des entiers ≥ 0, le cycle $\sum \mu_j \vec{\Gamma}_j$ est homologue à 0. Si $\vec{\Gamma}$ est homologue à 0, il en est de même de $\overleftarrow{\Gamma}$.

Evident (une somme de bords est un bord, et une somme de cycles dégénérés est un cycle dégénéré).

Théorème 47 - Si $\vec{\Gamma}$ est un C^m-cycle quelconque, le cycle $\vec{\Gamma} + \overleftarrow{\Gamma}$ est un C^m-bord.

Démonstration - Nous allons pour cela utiliser le lemme suivant :

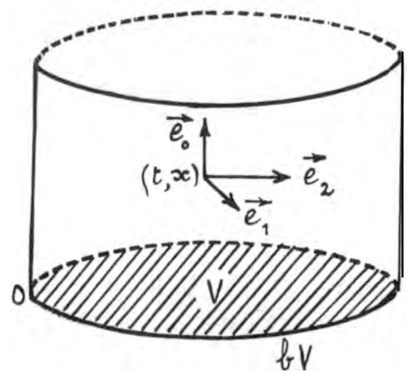
Lemme :

Si $\vec{V} \subset \tilde{V}$ est une variété avec bord orientée de dimension n, de classe C^m, alors $[0,1] \times \vec{V} \subset \mathbb{R} \times \tilde{V}$ est une variété de dimension $n+1$ de classe C^m, avec pseudo-bord*, la partie régulière de son pseudo-bord est la réunion des 3 variétés orientées disjointes : $]0,1[\times \overleftarrow{bV}$, $\{1\} \times \overset{\circ}{V}$ et $\{0\} \times \overset{\circ}{V}$.

Démonstration - Si V est une variété avec bord de $\tilde{V}$ (de dimension n), $[0,1] \times V$ est une partie de la variété $\mathbb{R} \times \tilde{V}$ de dimension $n+1$, et on voit immédiatement qu'elle en est une variété avec pseudo-bord. Le pseudo-bord est la réunion de $[0,1] \times bV$, $\{0\} \times V$, $\{1\} \times V$; la partie régulière de ce pseudo-bord est la réunion de $]0,1[\times bV$, $\{0\} \times \overset{\circ}{V}$, $\{1\} \times \overset{\circ}{V}$, et sa partie singulière est la réunion

* Bien noter les orientations !

de $\{0\} \times bV$ et de $\{1\} \times bV$. Tout ceci se voit géométriquement sur la figure (où nous avons pris pour V un disque fermé hachuré. Alors $[0,1] \times bV$ est la "surface latérale du cylindre", $\{0\} \times V$ et $\{1\} \times V$ en sont les bases) et se démontre immédiatement.



On orientera $\overset{\curvearrowright}{[0,1]} \times \overset{\curvearrowright}{V}$ de la façon suivante : en chaque point (t,x), l'espace vectoriel tangent est somme directe de la droite réelle $\mathbb{R}$, espace vectoriel tangent à $[0,1]$ en t, et de l'espace vectoriel tangent à V en x.

On considérera comme positive une base de cet espace tangent, au point (t,x) de $[0,1] \times V$, si elle est formée de la succession d'un vecteur positif $\vec{e}_0$ de $\mathbb{R}$ et d'une base positive $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ de $\vec{T}(x\,;\overset{\curvearrowright}{V})$. De la même manière on définira l'orientation de $[0,1] \times \overset{\curvearrowright}{bV}$, puisque $\overset{\curvearrowleft}{bV}$ est elle aussi orientée.

Quant aux variétés $\{0\} \times \overset{\curvearrowright}{V}$ ou $\{1\} \times \overset{\curvearrowright}{V}$, on définira leurs orientations de façon évidente, à partir de celle de V .

Démontrons alors ce qui est Indiqué dans le lemme pour les orientations.

Soit (t,x) un point de $]0,1[\times bV$. soit $\vec{e}_s$ un vecteur tangent en x à V , sortant de $\overset{\circ}{V}$. Soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$, une base positive de $\vec{T}(x\,;\overset{\curvearrowright}{bV})$. Alors $\vec{e}_s, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$, est une base positive de $\vec{T}(x\,;\overset{\curvearrowright}{V})$. Donc $\vec{e}_0, \vec{e}_s, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$ est une base positive de $\vec{T}((t,x)\,;\vec{R} \times \overset{\curvearrowright}{V})$; par suite $\vec{e}_s, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}$ est une base négative. Comme $\vec{e}_s$ est sortant de $]0,1[\times \overset{\circ}{V}$, au point (t,x), cela veut dire que la base $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$ est négative pour l'orientation-bord, dans $\vec{T}((t,x)\,;\,]0,1[\times bV)$, alors qu'elle est positive pour l'orientation $]\overset{\curvearrowright}{0,1}[\times \overset{\curvearrowright}{bV}$. Cela montre bien que, comme partie régulière du pseudo-bord de $\overset{\curvearrowright}{[0,1]} \times \overset{\curvearrowright}{V}$, $]0,1[\times bV$ doit avoir l'orientation $]\overset{\curvearrowright}{0,1}[\times \overset{\curvearrowleft}{bV}$.

Soit maintenant x un point de $\overset{\circ}{V}$, et soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, une base positive de $\vec{T}(x ; \overset{\frown}{\overset{\circ}{V}})$. Alors $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ est positive dans $\vec{T}\left((t,x) ; \vec{R} \times \overset{\frown}{V}\right)$, quel que soit t_0. Comme $\vec{e}_0$ est sortant relativement à $]0,1[\times \overset{\circ}{V}$, si $t = 1$, et rentrant si $t = 0$, on en déduit que $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, est une base positive de $\vec{T}\left((1,x) ; \{1\} \times \overset{\circ}{V}\right)$ et négative de $\vec{T}\left((0,x) ; \{0\} \times \overset{\circ}{V}\right)$, pour l'orientation comme bord de $[\overrightarrow{0,1}] \times \overset{\frown}{V}$: on doit donc considérer que, comme parties régulières du pseudo-bord, $\{1\} \times \overset{\circ}{V}$ et $\{0\} \times \overset{\circ}{V}$ doivent avoir les orientations $\{1\} \times \overset{\frown}{\overset{\circ}{V}}$ et $\{0\} \times \overset{\frown}{\overset{\circ}{V}}$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la démonstration du théorème.

Tout d'abord remarquons que, dans le lemme, si V est une variété sans bord ($bV = \emptyset$) alors $]\overrightarrow{0,1}[\times \overset{\frown}{V}$ est non seulement une variété avec pseudo-bord mais une variété avec bord, puisque la partie singulière du bord, $\{0,1\} \times bV$, est vide, et que son bord est la réunion de $\{1\} \times \overset{\frown}{V}$ et de $\{0\} \times \overset{\frown}{V}$.

Si maintenant $\overset{\frown}{\Gamma}$ est un cycle $H \mid \overset{\frown}{V}$, le cycle? est $H \mid \overset{\frown}{V}$

Considérons la variété singulière orientée, avec bord, compacte définie par l'application K de $[0,1] \times V$, où

$$K(t, x) = H(x) \tag{VI,8;20}$$

Ce que nous venons de voir montre que le bord de cette variété singulière n'est autre que

$$K \mid b\left([\overrightarrow{0,1}] \times \overset{\frown}{V}\right) = K \left|\left(\{1\} \times \overset{\frown}{V} + \{0\} \times \overset{\frown}{V}\right)\right. , \tag{VI,8;21}$$

qui est bien un cycle équivalent à $\overset{\frown}{\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma}$, ce qui démontre le théorème.

<u>Corollaire</u> - Si $\vec{\Gamma}_1$ et $\vec{\Gamma}_2$ sont deux C^m-cycles, et si $\vec{\Gamma}_2$ et $\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2$ sont C^m-homologues a 0, alors $\vec{\Gamma}_1$ est C^m-homologue à 0.

<u>Démonstration</u> - On a en effet la relation :

$$\vec{\Gamma}_1 + (\vec{\Gamma}_2 + \overleftarrow{\Gamma}_2) = (\vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2) + \overleftarrow{\Gamma}_2 \tag{VI,8;22}$$

Le second membre est la somme de deux cycles homologues à 0 , donc il est homologue à 0 , donc aussi le premier. On a donc :

$$\overrightarrow{\Gamma_1} + \left(\overrightarrow{\Gamma_2} + \overleftarrow{\Gamma_2} \right) + \text{bord} + \text{cycle dégénéré} \tag{VI,8;23}$$
$$= \text{bord} + \text{cycle dégénéré}.$$

Comme le théorème nous indique que $\overrightarrow{\Gamma_2} + \overleftarrow{\Gamma_2}$ est un bord, on voit bien que $\overrightarrow{\Gamma_1}$ est homologue à 0 .

Homologie des cycles.

Théorème 48 - La relation binaire entre C^m-cycles de Ω :

" $\overrightarrow{\Gamma_1} + \overleftarrow{\Gamma_2}$ est C^m-homologue à 0 dans Ω ", est une relation d'équivalence, compatible avec l'addition des cycles, et leur multiplication par des entiers ≥ 0.

Si $\overrightarrow{\Gamma_1} + \overleftarrow{\Gamma_2}$ est C^m-homologue à 0, on dira que $\overrightarrow{\Gamma_1}$ et $\overrightarrow{\Gamma_2}$ sont C^m-homologues dans Ω . Une classe d'équivalence, formée de tous les C^m-cycles C^m-homologues à l'un d'entre eux, s'appelle une classe de C^m-homologie dans Ω .

Démonstration - 1°) La relation est réflexive : $\overrightarrow{\Gamma} + \overleftarrow{\Gamma}$ est un bord (théorème 47), donc C^m-homologue à 0 .

2°) La relation est symétrique : si $\overrightarrow{\Gamma_1} + \overleftarrow{\Gamma_2}$ est homologue à 0 , il en est de même du cycle d'orientation opposée $\overrightarrow{\Gamma_2} + \overleftarrow{\Gamma_1}$.

3°) La relation est transtive. Soient $\overrightarrow{\Gamma_1}, \overrightarrow{\Gamma_2}, \overrightarrow{\Gamma_3}$, trois cycles, et supposons que $\overrightarrow{\Gamma_1} + \overleftarrow{\Gamma_2}$ et $\overrightarrow{\Gamma_2} + \overleftarrow{\Gamma_3}$ soient homologues à 0 . Il en est alors de même de leur somme. D'après l'associativité de la somme, cette somme peut s'écrire $\overrightarrow{\Gamma_1} + (\overleftarrow{\Gamma_2} + \overrightarrow{\Gamma_2}) + \overleftarrow{\Gamma_3}$. La parenthèse est homologue à 0 , d'après le théorème 47. Il résulte alors de son corollaire que $\overrightarrow{\Gamma_1} + \overleftarrow{\Gamma_3}$ est homologue à 0 , et ceci démontre la transitivité. Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence. L'homologie est trivialement compatible avec l'addition des cycles et leur multiplication par des entiers ≥ 0 : si $\overrightarrow{\Gamma_j}$ est homologue à $\overrightarrow{\Gamma'_j}$ pour $j = 1, 2, \dots, l$, et si les p_j sont des entiers ≥ 0 , $\sum_j p_j \overrightarrow{\Gamma_j}$ est homologue à $\sum_j p_j \overrightarrow{\Gamma'_j}$; en effet $\sum_j p_j (\overrightarrow{\Gamma_j} + \overleftarrow{\Gamma'_j})$ est homologue à 0 d'après le théorème 46.

Théorème 49 - Si $\vec{\omega}$ est une forme différentielle de classe C^1, fermée, dans un ouvert Ω d'un espace affine E, de dimension finie, son intégrale sur tout cycle C^1-homologue à 0 dans Ω est nulle, ses intégrales sur deux cycles C^1-homologues dans Ω sont égales.

Démonstration - Rappelons d'abord (théorème 35) que les intégrales de $\vec{\omega}$ sur 2 cycles équivalents sont égales. On en déduit immédiatement que l'intégrale de $\vec{\omega}$, sur une somme de 2 cycles, est la somme de ses intégrales sur ces 2 cycles.

Supposons que $\vec{\Gamma}$ soit homologue à 0, et soient A, B des Cl-bords, et $\vec{A}'$, $\vec{B}'$, des cycles dégénérés, tels que l'on ait la relation(VI,8;19). On a alors :

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{\omega} + \int_{\vec{A}} \vec{\omega} + \int_{\vec{A}'} \vec{\omega} = \int_{\vec{B}} \vec{\omega} + \int_{\vec{B}'} \vec{\omega} . \tag{VI,8;24}$$

Il résulte du théorème 41 que les intégrales du cocycle $\vec{\omega}$ sur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont nulles; d'autre part, ses intégrales sur $\vec{A}'$ et $\vec{B}'$ sont nulles d'après la remarque 3°), page 146-147; il en résulte alors que son intégrale sur $\vec{\Gamma}$ est nulle. Si maintenant $\vec{\Gamma}_1$ et $\vec{\Gamma}_2$ sont deux cycles C^1-homologues, $\vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2$ est C^1 homologue à 0, et l'on a par conséquent

$$\int_{\vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2} \vec{\omega} = \vec{0} \quad , \text{ donc } \quad \int_{\vec{\Gamma}_1} \vec{\omega} = \int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{\omega} . \tag{VI,8;25}$$

Si maintenant nous considérons, dans l'ensemble des cocycles ou formes différentielles fermées de classe C^1, dans Ω, à valeurs dans $\vec{F}$, la relation binaire : " $\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$ est un cobord", c'est encore évidemment une relation d'équivalence. (Contrairement à ce qui vient de se passer pour l'homologie, c'est ici tout-à-fait évident)

2 formes de la même classe seront dites cohomologues (une forme cohomologue à 0 est simplement une forme de classe C^1 qui est un cobord). Une classe d'équivalence s'appelle une classe de cohomologie à valeurs dans $\vec{F}$. La classe de cohomologie d'une forme fermée de classe C^1 est l'ensemble de toutes les formes qui lui sont cohomologues.

On a alors :

Corollaire - L'intégrale d'un cocycle sur un Cl-cycle ne dépend que de la classe de cohomologie du cocycle, et de la classe de C^1 homologie du cycle.

<u>Démonstration</u> - Soient $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ deux cocycles cohomologues, et $\vec{\Gamma}_1$ et $\vec{\Gamma}_2$ deux C^1-cycles C^1-homologues.

On a alors les relations :

$$\int_{\vec{\Gamma}_1} \vec{\omega}_1 - \int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{\omega}_2 = \int_{\vec{\Gamma}_1} \vec{\omega}_1 + \int_{\overleftarrow{\Gamma}_2} \vec{\omega}_1 + \int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{\omega}_1 - \int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{\omega}_2 \tag{VI, 8 ; 26}$$

$$= \int_{\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2} \vec{\omega}_1 + \int_{\vec{\Gamma}_2} (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) .$$

Mais la première intégrale est nulle d'après le théorème parce que $\vec{\omega}_1$ est un cocycle et $\vec{\Gamma}_1 + \overleftarrow{\Gamma}_2$ C^1-homologue à 0 , et la deuxième parce que $\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$ est un cobord et Γ_2 un C^1-cycle (théorème 41).

<u>Remarques</u> - 1°) Pour les formes différentielles, nous n'avons introduit que les cocycles et cobords, alors qu'on aurait aussi pu introduire les C^m-cocycles et les C^m-cobords. C'est dans un but de simplification que nous ne l'avons pas fait.

2°) Dans le même but de simplification, nous aurions pu ne pas le faire pour les cycles et les bords !

Mais nous avons absolument besoin des C^1-cycles et C^1-bords, faute de quoi l'intégrale, sur ces cycles, d'une forme différentielle, serait dénuée de sens. Mais nous démontrerons certaines propriétés où n'interviennent que les applications <u>continues</u> et la <u>topologie</u>, sans hypothèse de différentiabilité (voir théorèmes 59, 61, 69) . Pour les avoir, et c'est utile dans la pratique, nous aurons besoin des C^0-cycles et C^0-bords. Il est donc indispensable d'avoir les C^m-cycles et C^m-bords, au moins pour les 2 valeurs $m = 0$ et $m = 1$; alors ça ne coûte pas plus cher de prendre m quelconque. On aura des théorèmes intéressants qui feront passer d'une valeur de m à une autre (par exemple corollaire 4 du théorème 54).

3°) Le quotient de l'espace vectoriel des cocycles sur $\Omega \subset E$ à valeurs dans $\vec{F}$, par le sous-espace vectoriel de ceux qui sont des cobords, s'appelle <u>l'espace vectoriel de cohomologie de Ω à valeurs dans $\vec{F}$</u>. Ainsi <u>l'ensemble des classes de cohomologie à valeurs dans $\vec{F}$ admet une structure d'espace vectoriel</u> (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, suivant que $\vec{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

L'ensemble des classes de C^m-homologies de Ω admet une structure de groupe abélien

Si en effet α_1 et α_2 sont deux classes, et si $\vec{\Gamma}_1$ et $\vec{\Gamma}_2$ sont deux cycles quelconques appartenant à ces classes, $\vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2$ appartient toujours à la même classe, qu'on peut appeler $\alpha_1 + \alpha_2$. Cette addition est associative et commutative. Il y a un élément neutre, la classe 0 du cycle vide (ensemble de tous les C^m-cycles C^m-homologues à 0). Si α est une classe, et si $\vec{\Gamma}$ est un cycle de cette classe, la classe α' de $\overleftarrow{\Gamma}$ vérifie $\alpha + \alpha' = 0$ (théorème 47), donc α' est l'opposée $-\alpha$ de α ; et l'ensemble des classes de C^m homologies de Ω est bien un groupe abélien, appelé <u>groupe de</u> C^m <u>homologie de Ω</u> * .

Ceci suggère d'ailleurs une nouvelle notation. Si les $\vec{\Gamma}_j$, $j = 1, 2, \ldots, \ell$, sont des cycles, et les p_j des entiers de <u>signe quelconque</u>, on appellera $\sum_j p_j \vec{\Gamma}_j$ le cycle $\sum_j{}' |p_j| \vec{\Gamma}_j{}'$, (défini, comme toute somme, à une équivalence près), où $\vec{\Gamma}_j{}' = \vec{\Gamma}_j$ SI $p_j > 0$ et $= \overleftarrow{\Gamma}_j$ SI $p_j < 0$.
L'addition et la multiplication par des entiers de signe quelconque deviennent alors possibles et vérifient les règles habituelles, à condition de considérer le résultat, non plus à une équivalence près (au sens de l'équivalence des variétés singulières), mais à <u>une homologie près</u> :
$\sum_j p_j \vec{\Gamma}_j + \sum_j q_j \vec{\Gamma}_j$ <u>n'est pas égal ou équivalent</u> à $\sum_j (p_j + q_j) \vec{\Gamma}_j$, mais <u>il lui est homologue</u>; on calcule en réalité, non pas sur des cycles, mais sur des classes de C^m homologie, ou encore dans le groupe de C^m-homologie (Ainsi $\vec{\Gamma} + (-\vec{\Gamma}) = \vec{\Gamma} + \overleftarrow{\Gamma}$ est homologue à 0 , mais non équivalent au cycle vide.

4") Soit Ω' un ouvert de E, contenu dans Ω. Toute forme différentielle $\vec{\omega}$ sur Ω est a fortiori une forme différentielle sur Ω'. Si c'est un cocycle sur Ω, c'est un cocycle sur Ω' ; si c'est un cobord sur Ω, c'est un cobord sur Ω'. Au contraire, le passage de Ω' à Ω ne peut pas, en général, se faire. Un cocycle sur Ω' ne se prolonge pas nécessairement en un cocycle sur Ω (par exemple, si $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\Omega' = \mathbb{R}^2 - 0$, la forme ω de (VI,4;41) est

* Voir ce renvoi page 210

un cocycle sur Ω , mais il a une singularité à l'origine et ne se prolonge pas en un cocycle sur Ω); il peut également arriver qu'un cocycle sur Ω soit un cobord sur l'ouvert Ω' plus petit sans être un cobord sur Ω (par exemple, si $\Omega = \mathbb{R}^2 - 0$, et si Ω' est le complémentaire, dans $\mathbb{R}^2$, d'une demi-droite issue de l'origine, la même forme ω de (VI,4;41) est un cocycle dans Ω cobord dans Ω', mais non cobord dans Ω , comme nous l'avons vu après (VI,4;41)).

Pour les cycles, c'est la situation inverse. Un cycle dans Ω' est a fortiori un cycle dans Ω (car une application H, d'une variété orientée $\vec{V}$, dans Ω', est a fortiori une application H de $\vec{V}$ dans Ω); un cycle homologue à 0 dans Ω' est a fortiori homologue à 0 dans Ω . C'est ici le passage de Ω à Ω' qui en général ne sera pas possible. Un cycle de Ω n'est pas nécessairement dans Ω'. Et il pourra également arriver qu'un cycle dans Ω' soit homologue à 0 dans Ω sans l'être dans Ω' . Par exemple, si $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\Omega' = \mathbb{R}^2 - 0$, et si $\vec{\Gamma}$ est le cercle trigonométrique orienté, il est un C^∞ bord dans Ω , mais ne l'est pas et n'est pas homologue à 0 dans Ω' (voir remarque 2° Page 190).

* Renvoi de la page 209 -

- Notre définition de l'homologie et du groupe d'homologie de Ω n'est pas celle de la topologie algébrique moderne, qu'il serait hors de question de traiter ici. Aussi n'est-il pas garanti que, pour tous les Ω , on trouve les "bons" groupes d'homologie. C'est sans importance pour la suite. Nous cherchons seulement :

1°) à utiliser l'intégrale des formes différentielles et la formule de Stokes de manière à définir l'indice et le degré topologique (voir pages et) et à démontrer quelques théorèmes spectaculaires comme le corollaire 2 du théorème 68, ou le théorème 69;

2°) à posséder un bon cadre pour traiter les fonctions analytiques de variables complexes et leurs intégrales.

Homotopie

Definition - Soient f_1 et ${}_2$ deux applications continues d un espace topologique X d4ns un espace topologique Y . On dit que ces deux applications sont homotopes, s il existe une déformation continue de 1 une dans 1 autre, c'est-a-dire s' il existe une application F d un produit $[\alpha,\beta] \times X$ dans Y, où $[\alpha,\beta]$ est un segment de $\mathbb{R}$, telle que l'on ait, pour tout x de X :

$$F(\alpha,x) = f_1(x) \, , \qquad F(\beta,x) = f_2(x) \tag{VI,8;27}$$

Si alors, pour $t \in [\alpha,\beta]$, on considère l'application partielle $F_t : x \longrightarrow F(t,x)$, de X dans Y , on voit que, pour $t = \alpha$, elle est identique à l'application f_1 de X dans Y , et que, pour $t = \beta$, elle est identique à l'application f_2 de X dans Y Comme elle "varie continûment" avec t , puisque F est continue de $[\alpha,\beta] \times X$ dans Y , on a bien une "déformation continue" qui passe de f_1 à f_2 .

SI d'ailleurs X estcompact et Y métrique, le théorème 66 du chapitre IV dit que $t \longrightarrow F_t$ est continue de $[\alpha,\beta]$ dans $(Y^X)_{cb}$; on a donc un point de cet espace $(Y^X)_{cb}$, qui varie continuement avec t , et va de f_1 , pour t = α , à f_2 , pour $t = \beta$. On peut dire aussi qu'on a un chemin joignant f_1 à f_2 dans $(Y^X)_{cb}$, et que deux applications continues homotopes de X dans Y sont deux points de $(Y^X)_{cb}$ qu'on peut joindre par un chemin. Tous les cas que nous rencontrerons dans ce paragraphe correspondront effectivement à X compact et Y métrique.

Une application telle que F s'appelle une homotopie passant de f_1 à f_2 . Naturellement, si l on a une telle homotopie relativement à un segment $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$, on peut en trouver une autre, où le segment est remplacé par n'importe quel autre segment de $\mathbb{R}$, par exemple par le segment $[0,1]$. 11 suffit en effet de remplacer F par F_0 défini comme suit :

$$F_0(t,x) = F(\alpha + t(\beta-\alpha), x) \, , \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \, . \tag{VI,8;28}$$

L'homotopie est une propriété purement topologique, puisqu'elle fait seulement intervenir des applications continues

Toutefois on aura également besoin, dans l'étude de l'intégrale des formes différentielles où interviennent toujours des variétés de classe C^m, $m \geqslant 1$, d'une notion un peu plus restrictive, celle de C^m-homotopie.

<u>Définition</u> - Soient X et Y deux variétés de classe C^m, m fini ou infini. On dit que deux applications f_1 et f_2, de classe C^m, de X dans Y, sont C^m-homotopes, s'il existe une application F de $[\alpha,\beta] \times X$ dans Y, de classe C^m, vérifiant (VI,8;27) * .

Bien entendu, deux applications de classe C^m qui sont C^m-homotopes sont a fortiori de classe C^l et C^l-homotopes, pour $l \leqslant m$. Alors homotope veut dire C^0-homotope.

<u>Théorème 50</u> - <u>Si X et Y sont deux variétés</u> de classe C^m, <u>deux applications de classe C^m de X dans Y, qui sont C^m-homotopes à une troisième, sont aussi C^m-homotopes entre elles. Autrement dit la relation qui exprime que deux applications sont C^m-homotopes, est une relation d'équivalence dans l'ensemble des applications de classe C^m de X dans Y. Une classe d'équivalence s'appelle classe de C^m-homotopie.</u>

<u>Démonstration</u> - Soient f_0, f_1, f_2, trois applications de classe C^m de X dans Y, f_0 homotope à f_1, f_1 homotope à f_2. Soient G une homotopie passant de f_0 à f_1, et H une homotopie passant de f_1 à f_2. On peut toujours supposer que les intervalles de $\mathbb{R}$ correspondant à ces homotopies sont respectivement $[0,1]$ et $[1,2]$. Si $m = 0$ (<u>et alors on peut, pour X et Y, prendre des espaces topologiques quelconques, et non nécessairement des variétés</u>) on définira immédiatement une homotopie F passant de f_0 à f_2, et correspondant à l'intervalle $[0,2]$ de $\mathbb{R}$, par la formule

(VI,8;29) $$F(t,x) = G(t,x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1\,, \quad H(t,x) \;\text{pour}\; 1 \leqslant t \leqslant 2\,,$$

* $[\alpha,\beta] \times X$ n'est pas une variété, mais une variété avec bord de $\mathbb{R} \times X$. On peut néanmoins dire sans difficulté d'une application F de $[\alpha,\beta] \times X$ qu'elle est de classe C^m, en utilisant la note (*) page 187 du Cours de 1ère partie.

Z

(ce qui donne $F(1,x) = f_1(x)$), ce qui ddmontre le théorème pour $m = 0$. Si d'ailleurs X est compact et Y métrique, cela revient à dire que 2 points, qui peuvent être joints par des chemins à un troisième dans l'espace topologique $(Y^X)_{cb}$, peuvent être joints entre eux par un chemin; c'est tout à fait évident, et nous l'avons bien considéré comme évident , page 90 du Cours de lère partie. La démonstration n'est manifestement pas si simple pour $m \geq 1$. SI en effet nous appliquons la formule (VI,8;29), l'application F que nous formons n'est pas de classe C^m, car sa dérivée partielle par rapport à t n'existe pas au point correspondant à $t = 1$ où existent seulement une dérivée à gauche et une dérivée à'drolte par rapport à t (Cela revient à dire que la juxtaposition de 2 chemins de classe C^m est seulement C^m par morceaux; nous devrons donc procéder comme dans la démonstration du théorème 45, pour substituer un chemin C^m à un chemin C^m par morceaux).

Appelons g_0 une application de l'intervalle $[0,1]$ dans lui-même, strictement croissante et de classe C”, ayant de plus toutes ses dérivées successives nulles aux extrémités 0 et 1 de l'intervalle. Désignons par g_1 une application du même type de l'intervalle $[1,2]$ dans lui-même (Voir démonstration du théorème 45). Nous definirons alors la fonction F , par la formule modifiée suivante :

(VI,8;30) $$F(t,x) = G(g_0(t_0),x) \text{ pour } 0 \leq t \leq 1 \text{ , } H(g_1(t),x) \text{ pour } 4 \leq t \leq 2 .$$

Cette fois ci, la fonction F est de classe C^m. Elle est en effet de classe C^m dans $[0,1] \times X$ et $[1,2] \times X$. Mais ses diverses dérivées prennent la même valeur, à gauche et à droite,, pour $t = 4$. Si en effet nous considérons une dérivée telle que $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p D_x^{\vec{q}}$, $p \in \mathbb{N}$,$\vec{q} \in \mathbb{N}^n$ (n = dimension de X ; pour employer ce langage de dérivées partielles, on doit supposer que X et Y sont des ouverts d'espaces affines.Comme on raisonne seulement <u>au voisinage</u> de chaque point, on pourra toujours, par des cartes de X et Y , se ramener à cette situation), à gauche comme à droite, elle prend la même valeur : si $p = 0$, $D^{\vec{q}} f_1$, et0 si $p \geq 1$, en vertu des propriétés des fonctions g_0 et g_1 . Nous avons donc bien formé une homotopie de classe C^m passant de f_0 à f_2 , ce qui démontre le théorème.

Nous allons voir maintenant que ˘,ai l'espace objet est compact et si l'espace image est un ouvert d'un espace affine normé, <u>les applications "assez voisines" d'une application lui eont homotopes</u> :

Théorème 51 - Soit Ω un ouvert d'un espace affine normé E .

1°/ Si Ω est étoilé, en particulier s'il est convexe (ou si $\Omega = E$), ou s il possède les proprlétes énoncées dans le théorème 19 de Poincaré, 2 applications quelconques, de classe C^m, d une partie K quelconque d'une variété V de classe C^m (ou d un espace topologique K quelconque si $m = 0$), dans Ω , sont C^m-homotopes dans Ω * .

2°/ Si f est une application de classe C^m d'une partie K compacte d'une variété V de classe C^m (ou d'un espace topologique compact K quelconque, si $m = 0$), dans Ω , si on appelle $\delta > 0$ la plus courte distance $d(f(K), \complement\Omega)$ du compact $f(K)$ de E au fermé $\complement\Omega$, toute application g, de classe C^m , de K dans Ω , telle que $\| \overrightarrow{f-g} \| < \delta$ **, est C^m-homotope à f dans Ω .

* On ne peut (sauf cas exceptionnels, signalés à la note • page 187 du Cours de 1ère Partie) parler d'application C^m que dans le cas de variétés, ou de parties ouvertes de variétés. Si K est une partie de V , nous appellerons application C^m de K dans Ω la restriction f à K d'une application $\tilde{f}$ d'un voisinage ouvert $\mathcal{H}$ de K dans V, dans E . (On peut alors aussi lui imposer d'être C^m de $\mathcal{H}$ dans Ω ; car $\tilde{f}^{-1}(\Omega)$ est un ouvert $\mathcal{H}_1$ de $\mathcal{H}$, contenant K , et $\tilde{f}$ applique bien $\mathcal{H}$ dans Ω).

Si alors nous disons que 2 telles applications f et g de K dans Ω sont C^m-homotopes dans Ω , nous entendons qu'il existe une homotopie F entre f et g dans Ω , application continue de $[\alpha, \beta] \times K$ dans Ω , avec (VI,8;27), qui se prolonge en une homotopie de classe C^m entre $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ dans E , application de classe C^m de $[\alpha, \beta] \times \mathcal{H}$ dans E (ou, si l'on veut, dans Ω) . Dans les énoncés de théorèmes. on devrait préciser $\mathcal{H}$ et $\tilde{f}$ en même temps que K et f . Mais on ne parlera que de K et f , pour ne pas alourdir exagérément les énoncés et les démonstrations.

** Nous avons mis $\| \quad \|$; il s'agit bien de $\| \quad \|_0$, les dérivées n'interviennent pas. Il s'agit bien sûr de

$$\| \overrightarrow{f-g} \|_K = \operatorname*{Max}_{x \in K} \| \overrightarrow{f(x) - g(x)} \|$$

Demonstration - On utilisera un lemme :

Lemme - Soient f et g deux applications de classe C^m d'une partie K de V dans Ω, telles que, pour tout x de K, tout le segment $[f(x), g(x)]$ de E soit dans Ω. Alors f et g sont C^m-homotopes dans Ω.

On définira en effet 1 homotopie passant de f à g par :

(VI,8;31) $$F(t,x) = f(x) + t\left(\overrightarrow{g(x) - f(x)}\right) ;$$

elle est bien une application de classe C^m de $[0,1] \times K$ dans Ω, et $F(0,x) = f(x)$, $F(1,x) = g(x)$, ce qui démontre le lemme.

Or cette propriété du segment $[f(x), g(x)]$ d'être dans Ω pour tout x de K se produira quels que soient f et g si Ω est convexe.

On dit qu'une partie A de E est étoilée par rapport à un point a, si, quel que soit x de A, tout le segment $[a,x]$ est dans A. Une partie est dite étoilée s'il existe un point a telle qu'elle soit étoilée par rapport à a. Un convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points.

Si Ω est étoilé par rapport à a, toute application f de K dans Ω, de classe C^m, est, d'après ce qui précède, C^m-homotope à l'application constante $K \longrightarrow \{a\}$, donc 2 applications C^m sont C^m-homotopes à celle-ci et par suite C^m-homotopes entre elles.

Si K est compact, $f(K)$ est un compact de E, et on sait (cours de 1ère partie, page 82) que $\delta = d(f(K), \complement\Omega) > 0$. Si alors $|||\overrightarrow{f - g}||| < \delta$, le segment $[f(x), g(x)]$ est toujours dans Ω pour $x \in K$, f et g sont C^m-homotopes.

Supposons enfin que Ω possède les propriétés énoncées au théorème 19 de Poincaré. Si, pour tout x de Ω, nous appelons $P_1(x)$ la projection de x parallèlement au vecteur de base $\vec{e}_1$ sur le sous-espace F_1 engendré par l'origine et les vecteurs de base $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_N$, on voit que, pour tout x de K, le segment $[f(x), P_1(f(x))]$ est dans Ω ; alors les applications de classe C^m, f et $P_1 \circ f$ sont C^m-homotopes. De même, si g est une autre application de classe C^m de K dans Ω, g et $P_1 \circ g$ sont C^m-homotopes. Raisonnons alors par récurrence. Le théorème à démontrer, relativement à Ω, est évidemment vrai si la dimension de E est 0 (ou 1). Supposons-la montrée si E a la dimension $N-1$.

Alors $P_1 \circ f$ et $P_1 \circ g$ sont des applications C^m de K dans l'ouvert $P_1(\Omega) = \Omega \cap F_1$ de F_1, qui a encore les propriétés énoncées au théorème 19; donc elles seront C^m-homotopes, d'après l'hypothèse de récurrence, puisque F_1 à la dimension $N-1$. Alors on aura, dans Ω, des C^m-homotopies :

$f \longrightarrow P_1 \circ f \longrightarrow P_1 \circ g \longrightarrow g$, et le théorème **50** nous prouve bien que f et g sont C^m-homotopes si **E** a la dimension **N**, ce qui démontré par récurrence notre affirmation.

Nous allons maintenant donner un important théorème d'approximation d'une application continue par des applications de classe C^m.

Théorème 52 - Soit K un compact d'une variété **V** de classe C^m, et soit f une application continue de K dans un ouvert Ω d'un espace affine normé E. Alors, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe une application g, de classe C^m, de V dans **E**, telle que $g(K) \subset \Omega$ *, et que l'on ait, sur K, l'inégalité $|||f - g||| \leq \varepsilon$

Démonstration - Soit $\varepsilon_1 < \mathrm{Min}(\varepsilon, \delta)$, où δ est la distance du compact $f(K)$ et de $\complement\Omega$. Pour chaque point a de K, on peut trouver un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a dans V, tel que, pour tout x de $K \cap \mathcal{V}_a$, on ait l'inégalité

(VI,8;32) $$\|\overline{f(x) - f(a)}\| \leq \varepsilon_1$$

comme **K** est compact, un nombre fini des **ouverts** $\mathcal{V}_a$ suffit à le recouvrir, soit $(\mathcal{V}_i)_{i \in I}$; soient a_i les points a correspondants. Soit $(\alpha_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée, où les α_i sont de classe C^m sur V, ce qui est possible, comme nous l'avons vu au théorème de la partition de l'unité (théorème 11 du chapitre IV), puisque V **est** de classe C^m.

* Naturellement, $g^{-1}(\Omega)$ est un voisinage ouvert $\mathcal{H}$ de K, et g applique encore tout ce voisinage ouvert dans Ω .

Si alors O est un point quelconque de E, et si nous formons la fonction définie par :

(VI,8;33) $$g(x) = O + \sum_{i \in I} \alpha_i(x)\left(\overrightarrow{f(a_i) - O}\right) ,$$

elle est bien de classe C^m, de V dans E, puisque les α_i sont de classe C^m ; on a, d'autre part, les relations :

(VI,8;34) $$\begin{cases} f(x) = O + \sum\limits_{i \in I} \alpha_i(x)\left(\overrightarrow{f(x) - O}\right) \text{ pour } x \in K , \\ \left\|\overrightarrow{g(x) - f(x)}\right\| \leqslant \sum\limits_{i \in I} \alpha_i(x) \left\|\overrightarrow{f(x) - f(a_i)}\right\| \leqslant \varepsilon_1 \text{ pour } x \in K , \end{cases}$$

donc $\leqslant \varepsilon$, d'après le choix de ε_1 ; comme en outre $\varepsilon_1 < \delta$, $g(x)$ est nécessairement dans Ω pour tout x de K, ce qui démontre le théorème.

Ce théorème va nous servir à donner une relation entre les diverses C^m-homotopies :

<u>Théorème 53</u> - <u>Soit K un compact d'une variété V de classe C^m, et soient f_1 et f_2 deux applications, de classe C^m, de K dans un ouvert Ω d'un espace affine normé E. Si f et g sont C^0-homotopes, alors elles sont aussi C^m-homotopes.</u>

<u>Démonstration</u> - Soit en effet F une application de $[0,1] \times K$ dans Ω, définissant une homotopie topologique entre f_1 et f_2.

Alors nous voyons que F est une application continue d'un compact de la variété $\mathbb{R} \times V$ dans Ω ; d'après le théorème 52, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe une application G de $[0,1] \times K$ dans Ω, qui est de classe C^m, et telle que l'on ait $\left\|\left|\overrightarrow{F - G}\right|\right\| \leqslant \varepsilon$. Nous choisirons le nombre $\varepsilon < \delta$, où δ est la plus petite des distances δ_1 et δ_2 de $f_1(K)$ et $f_2(K)$ à $\complement\Omega$. Remarquons alors que G est une homotopie de classe C^m entre les deux applications g_1 et g_2 de K dans Ω définies par

(VI,8;35) $$g_1(x) = G(0, x) , \quad g_2(x) = G(1, x) .$$

Ainsi, à partir d'une C^0-homotopie entre f_1 et f_2, on a trouvé une C^m-homotopie entre g_1 et g_2, qui sont "très voisines" de f_1 et f_2.

Mais en vertu du théorème 51, comme f_1 et g_1 sont toutes les deux de classe C^m, et que l'on a $\||\overrightarrow{f_1 - g_1}\|| < \delta_1$, f_1 et g_1 sont C^m-homotopes.

De la même manière f_2 et g_2 sont C^m-homotopes.

Ainsi on a successivement trois C^m-homotopies, passant de f_1 à g_1, de g_1 à g_2, et de g_2 à f_2 ; il résulte alors bien du théorème 50 que f_1 et f_2 sont elles aussi C^m-homotopes.

Corollaire 1 - Soient K un compact d'une variété V de classe C^m, et Ω un ouvert d'un espace affine normé E. Si, pour un entier $l_0 \leq m$, particulier, deux applications quelconques de classe C^{l_0} de K dans Ω sont homotopes, alors, pour tout entier $l \leq m$, deux applications quelconques, de classe C^l, de K dans Ω sont C^l-homotopes. Cette propriété ne dépend que de la topologie de Ω ; autrement dit elle reste vraie si on remplace Ω par tout autre ouvert Ω' d'un espace affine normé, homéomorphe à Ω.

Démonstration - Prenons d'abord $l = 0$. Soient f_1 et f_2 deux applications continues de K dans Ω. Soit ε un nombre > 0, strictement plus petit que les distances de $f_1(K)$ et $f_2(K)$ à $\complement \Omega$. D'après le théorème 52, il existe des applications g_1 et g_2, de classe C^{l_0}, de K dans Ω, telles que $\||\overrightarrow{f_1 - g_1}\|| \leq \varepsilon$, $\||\overrightarrow{f_2 - g_2}\|| \leq \varepsilon$. D'après le théorème 51, elles sont homotopes à f_1 et f_2 respectivement. Mais, d'après l'hypothèse relative à l_0, g_1 et g_2 sont homotopes. Donc on a des homotopies $f_1 \longrightarrow g_1 \longrightarrow g_2 \longrightarrow f_2$; f_1 et f_2 sont bien homotopes, d'après le théorème 50.

Prenons maintenant $l \leq m$ quelconque. Deux applications de K dans Ω, de classe C^l, sont continues, donc homotopes d'après ce que nous venons de voir; elles sont donc C^l-homotopes d'après le théorème 53.

La propriété relative aux applications de classe C^l n'a aucune raison, a priori, de se conserver par homéomorphisme; elle ne devrait, semble-t-il, se conserver que par C^l-difféomorphisme. Mais, puisqu'elle est équivalente à la même propriété pour $l = 0$, elle se conserve bien par homéomorphisme.

Corollaire 2 - Soit Ω un ouvert d'un espace affine normé, homéomorphe à un ouvert convexe ou étoilé, ou à un ouvert ayant les propriétés du théorème 19 de Poincaré. Alors deux applications quelconques, de classe C^m, d'un compact K d'une variété de classe C^m, dans Ω, sont C^m-homotopes.

En effet, le corollaire 1 indique que la propriété est conservée par homéomorphlsme, et il suffit alors de se reporter au théorème 51.

Relations entre l'homotopie et l'homologie

Théorème 54 - Soient $\vec{\Gamma}_1$ et $\vec{\Gamma}_2$ deux cycles de classe C^m d'un ouvert Ω de E; si ces deux cycles sont homotopes dans Ω, alors ils sont C^m-homologues dans Ω.

Démonstration - Tout d'abord, on dit que deux C-cycles sont homotopes, s'il sont définis comme applications H_1 et H_2, de classe C^m, d'une même variété $\vec{V}$ (sans bord), compacte, orientée, et si H_1 et ont homotopes. D'après le théorème 53, elles sont alors aussi C^m-homotopes.

Soit K une C-homotople, C^m-application de $[0,1] \times V$, permettant de passer de 1 une à l'autre.

D'après la formule (VI,8;   ), puisque $b\vec{V} = \emptyset$,

$$\text{(}[,8;36)\qquad \begin{cases} b\left(K\,|\,\overrightarrow{[0,1]\times V}\right) = H_2|\vec{V} + H_1|\overleftarrow{V} \\ = \vec{\Gamma}_2 + \overleftarrow{\Gamma}_1 \end{cases}$$

Donc $\vec{\Gamma}_2 + \overleftarrow{\Gamma}_1$ est un C^m-bord, et par suite est C^m-homologue à 0, et $\vec{\Gamma}_1$ et $\vec{\Gamma}_2$ sont bien C^m-homologues.

Remarque - La réciproque est inexacte; deux cycles $H_1|\vec{V}$ et $H_2|\vec{V}$ peuvent être homologues, sans être homotopes, comme on le volt aisément. En outre, on ne peut parler d'homotopie de 2 cycles, que si ce sont 2 applications d'une même variété, alors qu'il n'en est nullement ainsi pour l'homologle.

<u>Corollaire 1 - Si $\vec{\Gamma}_1$ et $\vec{\Gamma}_2$ sont deux cycles de dimension n de classe C^1, d'un ouvert Ω de E, qui sont homotopes, et si $\vec{\omega}$ est une forme différentielle de degré n sur Ω, de classe C^1, fermée, les intégrales de $\vec{\omega}$ sur $\vec{\Gamma}_1$ et $\vec{\Gamma}_2$ sont égales.</u>

En effet, $\vec{\Gamma}_1$ et $\vec{\Gamma}_2$ sont alors C^1-homologues dans Ω, et il suffit d'appliquer le corollaire du théorème 49.

Ce corollaire exprime encore que l'intégrale d'un cocycle sur un C^1-cycle, n'est peut être pas nulle (voir page 190, rem.2°), mais ne varie pas quand ce cycle se déforme de façon continue.

Il est commode d'introduire la notion particulière d'application homotope à 0.

<u>Définition</u> - Si f est une application continue d'un espace topologique X dans un espace topologique Y, on dit <u>qu'elle est homotope à 0</u>, si elle est homotope à une application constante. Comme on sait alors que toute application constante d'une variété compacte de dimension n dans Ω est nécessairement un cycle homologue à 0, si la dimension n est > 0 *, on voit que :

<u>Corollaire 2 - Si Γ est un cycle de dimension $n > 0$ de classe C^m, d'un ouvert Ω de E, homotope à 0, alors ce cycle est C^m-homologue à 0 et, si $m \geqslant 1$, l'intégrale sur ce cycle de tout cocycle $\vec{\omega}$ de degré n est nulle.</u>

Naturellement ceci ne subsiste pas pour la dimension $n = 0$ (car une application constante n'est plus un cycle dégénéré). Si $m = 0$, l'intégrale de $\vec{\omega}$ n'a pas de sens.

<u>Corollaire 3 - Si Ω est un ouvert convexe ou étoilé d'un espace affine de dimension finie E, ou un ouvert ayant les propriétés énoncées dans le théorème 19, ou un ouvert homéomorphe à l'un de ceux-là, tout cycle de classe C^m de Ω, de dimension $n > 0$, est C^m-homologue à 0, et, si $m \geqslant 1$, l'intégrale sur un tel cycle de tout cocycle de degré n est nulle. Tout cocycle $\vec{\omega}$, de degré $n > 0$ sur Ω, est un cobord.</u>

* C'est ici que sont utiles les cycles dégénérés, introduits page 160 dans la définition de l'homologie.

En effet, si $H|\vec{V}$ est un C^m-cycle de Ω, il est C^m-homotope à tout autre C^m-cycle $H_0|\vec{V}$, où H_0 est une application C^m de V dans Ω ; en prenant H_0 constante, on voit que $H|\vec{V}$ est C^m-homotope à 0, donc C^m-homologue à 0 si $n > 0$.

Alors l'intégrale de tout cocycle $\vec{\omega}$ sur un tel cycle est nulle. Le théorème 44 de De Rham nous apprend alors que, dans Ω, tout cocycle de degré > 0 est un cobord : le théorème 19 de Poincaré est valable dans cet ouvert. On voit ainsi qu'il est valable, non seulement pour les ouverts ayant les propriétés énoncées dans le théorème 19, mals aussi pour les ouverts convexes ou étoilés, et aussi pour tous ceux qui leur sont homéomorphes. Nous avons, il est vrai, admis le théorème de De Rham. Notre conclusion est en tout cas démontré pour le degré $n = 1$, d'après le théorème 45.

Corollaire 4 - Tout C^1-cycle d'un ouvert Ω d'un espace affine E de dimension finie, C^0-homologue a 0, est C^1-homologue a 0 ; l'intégrale, sur ce cycle, de tout cocycle, est nulle.

La démonstration que nous allons donner n'est pas extensible à la classe C^m, malgré l'analogie de cet énoncé et de celui du théorème 53. Elle est valable a cause d'une circonstance particulière : une C^0-variété singulière est définie comme une application continue H d'une variété de classe C^1; on ne peut pas, ici, remplacer C^1 par C^m.

Démonstration - Soit $H|\vec{V}$ le C^1-cycle considéré. Dire qu'il est C^0-homologue à 0, c'est dire, d'après la définition (VI,8;), qu'on peut trouver une variété orientée $\vec{W}$, de classe C^1, et une application continue K de W dans Ω, avec les propriétés suivantes : A) W est réunion de 3 parties ouvertes disjointes, $\vec{V}, \vec{A}, \vec{B}$; $\vec{A}$ est le bord d'une variété avec bord $\vec{\mathfrak{A}}$ de classe C^1 ; K coïncide avec H sur V ; K est prolongeable en une application $\tilde{K}$ continue de $\mathfrak{A}$ dans Ω ; et K est dégénérée sur B (autrement dit $K(B)$ est un ensemble fini, si la dimension est > 0, et vide si elle est nulle; naturellement K est de classe C' sur B, car elle est constante sur chaque composante connexe de B); alors $K|\vec{W} = H|\vec{V} + \tilde{K}|b\,\vec{\mathfrak{A}} + K|\vec{B}$;

B) $\vec{W}$ est, d'une autre manière, réunion de 2 ouverts disjoints $\vec{A'}$, $\vec{B'}$; $\vec{A'}$ est le bord d'une variété avec bord $\vec{\mathfrak{A}'}$; K est prolongeable en une application continue $\widetilde{K}'$ de $\mathcal{A}'$ dans Ω ; et K est dégénérée sur B' ; alors $K|\overrightarrow{W} = \widetilde{K}'|\overrightarrow{b\mathcal{A}'} + K|B'$ *

Le fait que $H|\overrightarrow{V}$ est homologue à **0** vient alors de ce qu'on a :

$$H|\overrightarrow{V} + \widetilde{K}|\overrightarrow{b\mathcal{A}} + K|\overrightarrow{B} = \widetilde{K}'|\overrightarrow{b\mathcal{A}'} + K|\overrightarrow{B}' \tag{VI,8;37}$$

Soit ε un nombre > 0 , strictement inférieur aux distances des compacts $\widetilde{K}(\mathcal{A})$ et $\widetilde{K}'(\mathcal{A}')$ à $\complement\Omega$. D'après le théorème 52, comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont de classe C' , on peut trouver des applications $\widetilde{K}_1$ et $\widetilde{K}_1'$, de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ dans Ω , de classe C^1 , telles que $\|\widetilde{K}_1 - \widetilde{K}\| \leqslant \varepsilon$ et $\|\widetilde{K}_1' - \widetilde{K}'\| \leqslant \varepsilon$; d'après le théorème 51, elles sont C^0-homotopes à $\widetilde{K}$ et $\widetilde{K}'$ respectivement.

On a alors des C^0-homotopies des cycles suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} H|\overrightarrow{V} + K_1|\overrightarrow{A} + K|\overrightarrow{B} \longrightarrow H|\overrightarrow{V} + K|\overrightarrow{A} + K|\overrightarrow{B} \\ = K|\overrightarrow{W} = K|\overrightarrow{A}' + K|\overrightarrow{B}' \longrightarrow K_1'|\overrightarrow{A}' + K|\overrightarrow{B}' . \end{array}\right. \tag{VI,8;38}$$

Mais le premier et le dernier membres de ces égalités sont des cycles de classe C^1 ; étant C^0-homotopes, ils sont C^1-homotopes d'après le théorème 53. D'après le théorème 54, ils sont alors C^1-homologues. Mais $K_1|\overrightarrow{A} = \widetilde{K}_1|\overrightarrow{b\mathcal{A}}$ et $K_1'|\overrightarrow{A}' = \widetilde{K}_1'|\overrightarrow{b\mathcal{A}'}$ sont des C^1-bords, $K|\overrightarrow{B}$ et $K|\overrightarrow{B}'$ sont dégénérés, donc tous C^1-homologues à 0 ; donc $H|\overrightarrow{V}$ est bien C^1-homologue à 0 , d'après le théorème 47.

Si $\overrightarrow{\omega}$ est un cocycle sur Ω , le fait que $H|\overrightarrow{V}$ soit seulement C^0-homologue à 0 n'impliquait pas, a priori, $\int_{H|\overrightarrow{V}} \overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$; il l'implique bien maintenant, puisque $H|\overrightarrow{V}$ est C^1-homologue à 0 . ■

* $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ ne sont pas dans **W** .

** Nous avons énoncé le théorème 37 de Stokes pour la classe C' ; mais nous avons dit à ce moment que la démonstration était délicate, et nous ne l'avons donnée que pour la classe C^2. Nous nous appuyons donc ici sur une propriété admise.

L'importance de propriétés comme les corollaires 1. 2.4 est de montrer que l'intégrale d'un cocycle sur un cycle ne dépend que de propriétés topologiques du cycle relativement à l'ouvert Ω .

Corollaire 5 - Soit Ω un ouvert d'un espace affine E de dimension finie. Il est équivalent de dire que, dans Ω, tous les C^0-cycles sont C^0-homologues à 0, ou que tous les C^1-cycles sont C^1-homologues à 0. Si ces propriétés sont vraies pour Ω, elles sont vraies pour tout ouvert homéomorphe à Ω.

Démonstration - 1°/ Supposons que tout C^0-cycle soit C^0-homologue à 0. Alors un C^1-cycle, étant C^0-homologue à 0, est C^1-homologue à 0, d'après le corollaire 4.

2°/ Supposons que tout C^1-cycle soit C^1-homologue à 0. Soit $H \mid \vec{V}$ un C^0-cycle. Si H_1 est une application C^1 de V dans Ω, telle que $\| H - H_1 \| < d(H(V), \complement\Omega)$, $H|\vec{V}$ est C^0-homotope à $H_1|\vec{V}$, donc C^0-homologue; d'après l'hypothèse, $H_1 | \vec{V}$, de classe C^1, est C^1-homologue à 0, donc a fortiori C^0-homologue à 0, et $H|\vec{V}$ est alors aussi C^0-homologue à 0.

La propriété relative à C^0 est évidemment conservée par homéomorphisme, donc aussi la propriété relative à C^1, puisque c'est la même. Pour tous les ouverts ayant cette propriété, le théorème de Poincaré est valable. Voir ce que nous avons dit à ce sujet, page , sur la conservation par homéomorphisme des ouverts où le théorème de Poincaré est valable.

Corollaire 6 - Soient $\vec{\omega}$ un cocycle de degré 1 d'un ouvert Ω d'un espace affine E de dimension finie, et $H \mid \vec{\Gamma}$ un C^0-cycle de longueur finie, C^0-homologue à 0. Alors l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur $H \mid \vec{\Gamma}$ est nulle.

Démonstration - Pour simplifier des détails techniques, nous supposerons que $\vec{\Gamma}$ est le cercle trigonométrique de $\mathbb{R}^2$.

Nous saurions évidemment que l'intégrale est nulle, si H était de classe C^1, et le cycle $H \mid \vec{\Gamma}$ C^0-homologue à 0, d'après le corollaire 4. Mais nous supposons seulement le cycle de longueur finie, et utilisons la définition de l'intégrale donnée au théorème 36.

1°/ Soit δ la distance de $H(\Gamma)$ à $\complement\Omega$, pour une norme euclidienne quelconque sur E. Comme H est continue sur le compact? , elle est uniformément continue; si on suppose Γ paramétré par $\theta \in [0, 2\pi]$, on peut trouver $\eta > 0$ de manière que $|\theta' - \theta''| \leqslant \eta$ entraîne $\| H(\theta') - H(\theta'') \| < \frac{\delta}{2}$. Soit Δ : $\theta_0 = 0$, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_n = 2\pi$, une subdivision de $[0, 2\pi]$, de finesse $\leqslant \eta$. La boule ouverte B_i, de de centre **H** (θ_i) **, et** de rayon $\frac{\delta}{2}$, satisfait aux conditions du théorème 19 de Poincaré; donc $\vec{\omega}$ a une primitive extérieure $\vec{f}_i$ dans B_i , $\vec{\omega} = d\vec{f}_i$. Naturellement $\vec{f}_i$ dépend de l'indice i . Tout le chemin $M \,|\, [\theta_i, \theta_{i+1}]$ est dans cette boule ouverte, et on a donc

$$\text{(VI,8;39)} \qquad \int_{H|\overrightarrow{[\theta_i,\theta_{i+1}]}} \vec{\omega} = \vec{f}_i(H(\theta_{i+1})) - \vec{f}_i(H(\theta_i)) \,,$$

d'après le théorème 39.

Appelons H_1 l'application de Γ dans Ω définie par :

$$\text{(VI,8;40)} \quad \begin{cases} H_1(\theta) = H(\theta_i) + \dfrac{\theta-\theta_i}{\theta_{i+1}-\theta_i}\, \overrightarrow{H(\theta_{i+1}) - H(\theta_i)} \\ \text{pour } \theta_i \leqslant \theta \leqslant \theta_{i+1} \,. \end{cases}$$

H, est simplement une application polygonale, ayant pour sommets successifs les $H(\theta_i)$.

Alors on a. pour $\theta_i \leqslant \theta \leqslant \theta_{i+1}$:

$$\text{(VI,8;41)} \quad \begin{cases} \| \overrightarrow{H(\theta) - H(\theta_i)} \| < \dfrac{\delta}{2} \\ \| \overrightarrow{H_1(\theta) - H(\theta_i)} \| \leqslant \| \overrightarrow{H(\theta_{i+1}) - H(\theta_i)} \| < \dfrac{\delta}{2} \end{cases}$$

donc, pour tout θ :

$$\text{(VI,8;42)} \qquad \| \overrightarrow{H(\theta) - H_1(\theta)} \| < \delta \quad ; \text{donc } \| \overrightarrow{H - H_1} \| < \delta \,.$$

Cela prouve. d'après le théorème **51, que H** $|\, \overrightarrow{\Gamma}$ **et** $H_1 \,|\, \overrightarrow{\Gamma}$ sont C^0-homotopes, donc C^0 -homologues d'après le théorème **54.** Comme $H \,|\, \overrightarrow{\Gamma}$ est supposé C^0 -homologue à **0** , il en est donc de **même** de **H,** $|\, \overrightarrow{\Gamma}$. Par ailleurs on a, encore d'après le théorème 39 :

$$\text{(VI,8;43)} \qquad \int_{H_1|\overrightarrow{[\theta_i,\theta_{i+1}]}} \vec{\omega} = \vec{f}_i(H_1(\theta_{i+1})) - \vec{f}_i(H_1(\theta_i)) \,,$$

donc les Intégrales de $\vec{\omega}$ sur **H** $|\, \overrightarrow{\Gamma}$ et **H,** $\overrightarrow{\Gamma}$ sont égales.

2°/ Pour démontrer le théorème, il suffit donc de montrer que l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur $H_1 | \vec{\Gamma}$ est nulle; mais $H_1 | \vec{\Gamma}$ est maintenant un cycle de classe C^1, et même ici C^∞, par morceaux, et C^0-homologue à 0.

On a construit, dans la démonstration de la 1ère étape du théorème 45, une application H_2 de Γ dans Ω, de classe C^∞, et non plus seulement C^∞ par morc.ux, telle que les intégrales de $\vec{\omega}$ sur les 2 cycles $H_1 | \vec{\Gamma}$ et $H_2 | \vec{\Gamma}$ soient les mêmes. Dans chaque intervalle $[\theta_i, \theta_{i+1}]$, on a une expression (VI,8;) : $H_2(\theta) = H_1(q_i(\theta))^{i+1}$. Alors le segment $[H_1(\theta), H_2(\theta)]$ est contenu dans le segment $[H(\theta_i), H(\theta_{i+1})]$, donc dans Ω : le lemme du théorème 51 nous dit donc que H_1 et H_2 sont homotopes, donc $H_1 | \vec{\Gamma}$ et $H_2 | \vec{\Gamma}$ C^0-homologues; donc $H_2 | \vec{\Gamma}$ est encore C^0-homologue à 0.

3°/ Il nous suffit donc finalement de montrer que l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur le C^∞-cycle $H_2 | \vec{\Gamma}$, C^0-homologue à 0, est nulle; mais ceci résulte du corollaire 4, car alors $H_2 | \vec{\Gamma}$ est C^1-homologue à 0.

Espaces simplement connexes

On dit qu'un espace topologique X est simplement connexe, si toute application continue d'une circonférence du plan dans X est homotope à 0. Naturellement on peut toujours supposer que cette circonférence est le cercle trigonométrique de $\mathbb{R}^2$. La simple connexité est une propriété topologique de X, invariante par homéomorphisme.

Appelons Δ le disque unité de $\mathbb{R}^2$.

L'application $(t, \vec{m}) \longrightarrow t\vec{m}$ de Γ dans Δ est continue. Tout point de Δ s'écrit, d'une manière unique, $t\vec{m}$, $0 \leq t \leq 1$, $\vec{m} \in \Gamma$, sauf l'origine $\vec{0}$, qui s'écrit $0\vec{m}$, $\vec{m}$ arbitraire dans Γ.

Théorème 55 - Pour qu'une application f du cercle trigonométrique Γ dans l'espace topologique X soit homotope à 0, il faut et il suffit que f puisse se prolonger en une application continue $\tilde{f}$ du disque unité Δ dans X.

<u>Démonstration</u> - 1°/ Supposons d abord que f admette un tel prolongement $\tilde{f}$. Alors nous pouvons définir une homotopie **F**, entre f et une application constante de Γ dans X en posant

$$F(t,\vec{m}) = \tilde{f}(t\vec{m}) \;,\; 0 \leq t \leq 1 \;,\; \vec{m} \in \Gamma \tag{VI,8;44}$$

F est bien continue de $[0,1] \times \Gamma$ dans X ; on a $F(1,\vec{m}) = \tilde{f}(\vec{m}) = f(\vec{m})$, et $F(0,\vec{m}) = \tilde{f}(\vec{0})$.

Donc f est bien homotope à 0.

2°/ Supposons maintenant que f soit homotope à 0, et soit **F** une homotopie correspondant à une application de $[0,1] \times \Gamma$ dans X, avec $F(1,\vec{m}) = f(\vec{m})$, $F(0,\vec{m})$ = a constant. On définira alors comme suit le prolongement $\tilde{f}$ de f :

$$\tilde{f}(t\vec{m}) = F(t,\vec{m}) \;,\; 0 \leq t \leq 1 \;,\; \vec{m} \in \Gamma \tag{VI,8;45}$$

Cette formule <u>ne présente pas d'ambiguité</u>, car, pour le centre du disque, on peut prendre t = 0 et $\vec{m}$ arbitraire, mais **F** $(0,\vec{m})$ prend toujours la même valeur $a \in$ X ,

D'autre part, la fonction $\tilde{f}$, définie ci-dessus, est continue. Pour le voir, supposons, pour simplifier, X métrique.

La fonction **F** étant continue sur le compact $[0\,1] \times \Gamma$, est uniformément continue; alors, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $\eta > 0$, tel que $|t'-t''| \leq \eta$, $\|\vec{m}'-\vec{m}''\| \leq \eta$, entraîne

$$d(F(t',m'),\; F(t'',m'')) \leq \varepsilon \tag{VI,8;46}$$

Si alors $t_0\vec{m}_0$ est un point de A, distinct de l'origine, l'ensemble des $t\vec{m}$ tels que $|t-t_0| \leq \eta$, $\|\vec{m}-\vec{m}_0\| \leq \eta$, est un voisinage de ce point, dans lequel on aura

$$d\left(\tilde{f}(t\vec{m}),\; \tilde{f}(t_0\vec{m}_0)\right) \leq \varepsilon \;; \tag{VI,8;47}$$

donc $\tilde{f}$ est continue en $t_0\vec{m}_0 \neq \vec{0}$.

D'autre part, l'ensemble des $t\vec{m}$ tels que $|t| \leq \eta$, $\vec{m}$ quelconque, est un voisinage de l'origine, où l'on a :

$$d\left(\tilde{f}(t\vec{m}),\; \tilde{f}(\vec{0})\right) = d\left(F(t,\vec{m}),\; F(0,\vec{m})\right) \leq \varepsilon \;, \tag{VI,8;48}$$

ce qui démontre la continuité de $\tilde{f}$ en $\vec{0}$, donc partout. Comme $\tilde{f} = f$ sur Γ, $\tilde{f}$ est bien un prolongement de f à A.

Corollaire 1 - Un espace topologique X est simplement connexe, si et seulement si toute application continue d'un cercle Γ, bord d'un disque Δ dans X, admet un prolongement en une application continue $\tilde{f}$ de Δ dans X.

Z

Signalons que la simple connexité n'a rien à voir avec la connexité. Un espace peut être connexe, et non simplement connexe; par exemple nous verrons page 233 * que le complémentaire Ω de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas simplement connexe (parce que le cercle trigonométrique ne peut pas se réduite à un point, dans Ω, par une déformation continue) alors que pourtant il est connexe. Inversement X peut être simplement connexe sans être connexe. Par exemple, si nous supposons que X n'est pas connexe, mais qu'il est la réunion de deux ouverts disjoints X_1 et X_2, alors X est simplement connexe, si et seulement si X_1 et X_2 le sont. En effet, toute application continue d'un cercle ou d'un disque dans X, a certainement son image dans l'un des deux ouverts, X_1, X_2, car cette image est connexe (théorème 33 du chapitre II). On peut d'ailleurs, pour tout entier $n \geq 0$, Introduire la notion de n-connexité. Un espace topologique X sera dit n-connexe, si toute application continue de la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans X est homotope à 0, ou encore prolongeable en une application continue de la boule unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans X. C'est encore une propriété purement topologique de X. X est alors simplement connexe, s'il est 1-connexe. Comme la sphère unité de $\mathbb{R}$ est l'ensemble à 2 éléments $\{-1, +1\}$, et la boule unité le segment $[-1, +1]$, on voit immédiatement que X est 0-connexe, si et seulement si 2 points quelconques de X peuvent être joints par un chemin, c'est-à-dire si X est connexe par arcs. C'est donc la 0-connexité qui est en liaison avec la connexité étudiée au § 10 du chapitre II, et non la simple connexité ou 1-connexité. Les n-connexités, pour les diverses valeurs de n, sont tout à fait Independantes les unes des autres. SI, ici, nous ne parlons que du cas $n = 1$, c'est à cause du rôle exceptionnel que joueront les intégrales curvilignes de formes différentielles de degré 1, dans le chapitre VII. Le théorème 51 donne immédiatement :

Théorème 56 - Un ouvert Ω d'un espace affine E, convexe, ou étoilé, ou satisfaisant aux conditions du théorème 19 de Poincaré, ou homéomorphe à un espace de ce type, est n-connexe pour tout $n \geq 0$.

* Corollaire 3 du théorème 58

Théorème **57** - Une sphère, le complémentaire d'un point, une couronne, dans un espace euclidien E de dimension N, sont k-connexes, pour $0 \leqslant k \leqslant N-2$. Ils sont donc simplement connexes pour $N > 2$ (et aussi trivialement pour $N = 1$ *, donc finalement pour $N \neq 2$).

Par contre, nous verrons au corollaire **3** du théorème **58** qu'ils ne sont pas (N-l) -connexes; en particulier, un cercle d'un plan euclidien ($N=2$) n'est pas simplement connexe.

Démonstration - 1°/ Donnons d'abord la démonstration pour l'espace $\complement_0$, 0 étant un point de E Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^{k+1}$, f une application continue de S dans $\complement_0$.
On peut l'approcher par une application g de classe C^1, qui lui est homotope (théorèmes 52 et **51).**

Mais, dans **E**, g est C^1 -homotope à 0 (théorème **51);** soit G une homotopie entre et une application constante, application C'de $[0,1] \times S$ dans **E.** $[0,1] \times S$ est de dimension $< N$; alors l'image $G([0,1] \times S)$ est de mesure nulle, pour la mesure de Lebesgue relative à un référentiel quelconque (corollaire 1 du théorème 102 bis du chapitre IV). Donc, pour presque tous les vecteurs $\vec{u}$ de E, $G([0,1] \times S)$ ne contient pas $0 - \vec{u}$; l'application $G + \vec{u}$: $x \longrightarrow G(x) + \vec{u}$, de $[0,1] \times S$ dans E, est en fait une application dans $\complement_0$. Alors $g + \vec{u}$, est homotope à **0** dans $\complement_0$; pour $\|\vec{u}\| < d(g(S), 0)$, elle est homotope à g dans $\complement_0$ (toujours d'après le théorème 51). donc g elle-même est homotope à **0** dans $\complement_0$, donc aussi f, et $\complement_0$ est bien k-connexe.

Remarque - La sphère **S** peut être remplacée par n'importe quelle variété compacte de dimension $<$ **N** $- 1$; et $\complement_0$ par $\complement_A$, où A est un ensemble fermé dénombrable quelconque de **E** (dans ce cas, on saura que, pour presque tout $\vec{u}$ de **E** ,$(G + \vec{u})([0,1] \times S)$ ne contient pas un point a_i de **A** ; d'après le théorème 21 du chapitre IV (relatif à une infinité dénombrable de propriétés presque sûres) , on saura que, pour presque tous les $\vec{u}$, $(G + \vec{u})([0,1] \times S)$ ne contient aucun des points de **A** , donc $g + \vec{u}$ est encore homotope à 0 dans $\complement_A$).

* Car, sur $\mathbb{R}$, chacun de ces 3 ensembles est réunion de 2 ouverts disjoints simplement connexes.

2°/ Maintenant considérons le cas d'une sphère Σ. On peut toujours se ramener au cas où Σ est la sphère unité de $\vec{E}$. Soit $\vec{f}$ une application continue de S dans Σ. D'après ce que nous venons de voir à 1°/, il existe dans $\complement \vec{0}$, une homotopie F (application continue de $[0,1] \times S$ dans $\complement \vec{0}$) de $\vec{f}$ sur une application constante.

Alors $(t,x) \longrightarrow \dfrac{\vec{F}(t,x)}{\|\vec{F}(t,x)\|}$ est une homotopie, sur la sphère unité Σ, entre $\vec{f}$ et une application constante. Donc Σ est bien k-connexe.

3°/ Considérons enfin, dans $\vec{E}$ une couronne Ω de centre $\vec{0}$. Si $\vec{f}$ est une application continue de S dans Ω, et si Σ est une sphère, de centre 0 et de rayon R, contenue dans Ω, le segment $\left[\vec{f}(x), R\dfrac{\vec{f}(x)}{\|\vec{f}(x)\|}\right]$ est dans Ω, pour tout x de S ; donc $\vec{f}$ est homotope, dans Ω, à l'application continue $x \longrightarrow \dfrac{\vec{f}(x)}{\|\vec{f}(x)\|}$ de S dans Σ. Mais nous venons de voir, à 2°/, que cette application est homotope à 0 dans Σ ; donc elle l'est a fortiori dans Ω, qui est bien k-connexe.

Il est clair que l'application identique, du cercle trigonométrique de $\mathbb{R}^2$, dans le complémentaire $\complement 0$ de l'origine, n'est pas homotope a 0. Sans quoi, le cercle trigonométrique canoniquement orienté serait C^0-homologue à 0 dans $\complement 0$ (théorème 54), donc C^1-homologue à 0 (corollaire 4 du théorème 54); or l'intégrale sur ce cercle du cocycle $d\varphi$ de (VI,4;41) vaut $2\pi \neq 0$. Donc, a fortiori, un cercle n'est pas homotope à 0 dans un sous-espace du plan, contenant ce cercle et ne contenant pas son centre. Ainsi <u>une circonférence, une couronne circulaire</u> $R_1 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < R_2$, <u>le complémentaire d'un point ou d'un compact non vide, un sous-espace quelconque d'un plan euclidien, contenant un cercle et ne contenant pas son centre, ne sont pas simplement connexes</u>.

Nous allons étendre cette propriété à la $(N-1)$ connexion dans un espace affine euclidien de dimension N.

Nous allons, pour cela, introduire, dans un espace euclidien de dimension N , orienté, une forme différentielle remarquable de degré $N-1$, l'angle solide, qui sera celle de (VI,4;41) relative à $N=2$. Soit E un espace affine euclidien de dimension N, et soit 0 un point de E . Soit Σ une hypersurface de classe C^1 de E, ne passant pas par 0 , transversalement orientée. Si cette orientation est telle que, en chaque point M de Σ , le rayon vecteur OM soit transversal et positif, il sera naturel d'appeler angle solide algébrique sous lequel de 0 on voit Σ , l'angle solide $\geqslant 0$ défini au chapitre IV, par l'intégrale (IV,10;25) (où V est remplacé par Σ). Dans cette formule, rappelons que r est la distance OM, θ l'angle aigu de OM avec la normale; θ est aussi l'angle de OM avec le vecteur unitaire normal positif3 , en vertu des hypothèses particulières faites sur l'orientation transversale de Σ . Cette intégrale peut, d'après (VI, 7 ; 49), s'exprimer comme flux, à travers Σ , du champ de vecteurs

$$\vec{X} = \frac{\vec{u}}{r^{N-1}} \,, \tag{VI,8;49}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la demi-droite OM.

Alors, plus généralement, pour n'importe quelle hypersurface Σ de $E-0$, de classe C^1 , munie d'une orientation transversale quelconque, nous appellerons angle solide algébrique * sous lequel du point 0 on voit Σ , le flux à travers Σ du champ de vecteurs (VI,8;49).

Il ne dépend que de Σ , de son orientation transversale, et de la structure euclidienne de E .

Par rapport à un référentiel orthonormal de E d'origine 0 , les composantes du champ $\vec{X}$ sont données par :

$$X_j = \frac{x_j}{r^N} \,, \quad j = 1, 2, \ldots, N \,. \tag{VI,8;50}$$

* L'opposition entre l'angle solide algébrique (de signe quelconque) défini ici, dépendant de l'orientation transversale de Σ , et l'angle solide absolu du chapitre IV (toujours $\geqslant 0$), Indépendant de toute orientation, est très claire . Si Σ est la réunion de 2 sphères de centre 0 , d'orientations opposées, l'angle solide absolu vaut 2 S_N , l'angle solide algébrique vaut 0 .

→ Si maintenant **E** est orienté, on peut associer au champ $\vec{X}$ une forme différentielle d'après (VI,3;42); en la multipliant par $(-1)^{N-1}$, on obtiendra une <u>forme différentielle angle solide</u> $\omega=\omega_0$ de degré $N-1$, dont l'intégrale sur $\vec{\Sigma}$, munie de l'orientation tangentielle associée par $\vec{E}$ à son orientation transversale, sera égale à l'angle solide algébrique sous lequel, de 0, on voit Σ (formule (VI,7; 51 bis)); dans un référentiel orthonormal positif d'origine **0**, on aura :

(VI,8;51)
$$\omega = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \frac{x_j}{r^N} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \ldots \wedge dx_N \, .^*$$

Pour la définir, on doit, redisons-le, supposer **E** euclidien, <u>orienté</u>. Si, sans changer la structure euclidienne, on change l'orientation de E, le champ de vecteurs (VI,8;49) n'en reste pas moins invariable, et par conséquent <u>la forme différentielle ω_0 doit être changée de signe.</u>

<u>Exemples particuliers</u> : 1°/ Supposons que E soit le plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$. Alors la forme différentielle n'est autre que celle qu'on appelle couramment, et comme nous l'avons vu, improprement, $d\varphi$ définie par (VI,4;41). La forme ω_0 est celle qui, pour une dimension **N** quelconque, généralise $d\varphi$.

2°/ Supposons maintenant que E soit $\mathbb{R}^3$, et munissons le de ses coordonnées polaires, r, θ, φ. Compte tenu de la correspondance entre champs de vecteurs, et formes différentielles de degré 2, définie à la formule (VI,4;34), au champ de vecteurs (VI,8;41) correspond la forme différentielle définie par

(VI,8;52)
$$\omega = \sin\theta \;\; d\theta \wedge d\varphi \, ,$$

qui est la forme cherchée, puisqu'ici $N-1=2$, $(-1)^{N-1}=1$.

3°/ Pour $N=1$, ω_0 est une forme de degré 0 ou fonction : la formule (VI,8;51) montre que cette fonction vaut $\operatorname{sgn} x$, $+1$ pour $x>0$, -1 pour $x<0$.

* Nous la donnons ici dans un référentiel, mais ω_0 ne dépend que de la structure euclidienne et de l'orientation, puisque $\vec{X}$, donné par (VI,8;49), ne dépend que de la structure euclidienne.

Théorème 58 - Si $\vec{E}$ est un espace euclidien orienté de dimension N, O un point de E, la forme différentielle angle solide ω_O est de classe C^∞ et fermée dans le complémentaire de O. En outre son intégrale sur n'importe quelle sphère $\vec{\Sigma}$ de centre O, orientée comme bord de la boule correspondante, est égale à S_N, aire $(N-1)$-dimensionnelle de la sphère unité de $\vec{E}$:

$$\int_{\vec{\Sigma}} \omega_o = S_N \tag{VI,8;53}$$

Démonstration - Le fait que ω_o soit de classe C^∞ dans $E-O$ résulte de son expression (VI,8;51). Son cobord s'obtient immédiatement, et l'on a :

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{r^N}\right)\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_N \;; \tag{VI,8;54}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{r^N}\right) = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{r^N} - \frac{N x_j}{r^{N+1}}\,\frac{x_j}{r}\right) = \frac{N}{r^N} - \frac{N r^2}{r^{N+2}} = 0\,,$$

ce qui montre bien que ω_O est fermée.

D'autre part, si nous considérons son intégrale sur n'importe quelle sphère de centre O, de rayon R, munie de son orientation canonique, alors elle est égale au flux du champ de vecteurs (VI,8;49), qui vaut $\dfrac{S_N R^{N-1}}{R^{N-1}}$ c'est-à-dire l'aire de la sphère unité * .

Remarque - Puisque ω_O est fermée dans $E-O$, son intégrale sur deux cycles C^1-homologues de $E-O$ est nécessairement la même; par contre, il est naturellement impossible de remplacer $E-O$ par E, la forme différentielle ω_O présente une singularité à l'origine comme le montre immédiatement la formule (VI,8;51).

• Ici l'angle solide algébrique est égal à l'angle solide absolu, puisque le rayon sortant est transversal positif; et alors ce résultat est une conséquence immédiate de la définition même de l angle solide absolu , lère partie, page 692. Pour $N=1$, l'intégrale de $sgn\, x$ sur la sphère orientée (formée de $\{+1,+\}$ et $\{-1,-\}$ (page 176)) vaut $+2$, aire de la sphère unité ou nombre de ses points (lère partie, remarque 5° page 689).

Corollaire 1 -

Le cocycle ω_0 n'est pas un cobord dans $E - 0$.

En effet, s'il l'était, son intégrale sur le cycle $\overset{\frown}{\Sigma}$ serait nulle.

Cette propriété étend celle que nous connaissions déjà pour la forme de (VI,4;41).

si nous considérons la formule (VI,8;52), on a $\omega = d\left[-\cos\theta\, d\varphi\right]$; mais les fonctions θ et φ sont définies et dérivables, par exemple dans le complémentaire du demi-plan méridien fermé passant par $z'z$ et $0x$, mais pas dans $\mathbb{R}^3 - 0$.

Corollaire 2 - Une sphère orientée d'un espace affine euclidien de dimension finie n'est pas homologue à 0 dans le complémentaire de son centre, et a fortiori pas homotope à 0.

Si en effet elle l'était, le corollaire 4 du théorème 54 dit que, sur ce cycle, l'intégrale du cocycle ω_0 serait nulle.

Corollaire 3 - Dans un espace euclidien de dimension N, une sphère, le complémentaire d'un point, une couronne sphérique, ou plus généralement une partie contenant une sphère et ne contenant pas son centre, ne sont pas $(N-1)$ connexes.

En effet, la sphère n'est pas homotope à 0 dans un tel sous-espace, puisqu'elle ne l'est même pas dans le complémentaire de son centre.

Ceci complète ce que nous avions indiqué au théorème 57. Cela laisse ouvert le problème de la k-connexion d'une sphère d'un espace de dimension N , pour $k \geq N$: c'est là un problème très délicat, et pas encore définitivement réglé.

Corollaire 4 - Il n'existe pas d'application continue d'une boule B d'un espace euclidien de dimension finie sur la sphère S qui la borde, égale à l'identité sur cette sphère.

S'il en existait, cela voudrait dire que l'application identique de la sphère S sur elle-même se prolongerait en une application continue de la boule B sur la sphères , donc (théorème 55) S serait homotope à 0 dans S donc a fortiori dans le complémentaire de son centre, ce qui serait contraire au corollaire 2.

Corollaire 5 - 2 sphères euclidiennes de dimensions finies différentes ne sont pas homéomorphes. 2 espaces affines de dimensions finies différentes ne sont pas homéomorphes.

Soient en effet N et N' 2 entiers > 0 différents, $N' > N$. Une sphère d'un espace affine euclidien de dimension N' est $(N-1)$-connexe (théorème 57), une sphère d'un espace euclidien de dimension N ne l'est pas (corollaire 3); elles ne peuvent donc pas être homéomorphes.

Si maintenant 2 espaces affines de dimensions N et N' étaient homéomorphes, les complémentaires d'un point dans ces espaces le seraient aussi, ce qui est impossible, car l'un est encore $(N-1)$-connexe et pas l'autre.

Ces résultats avaient été annoncés page 92 du cours de lère partie. On voit combien de théorèmes ont été utilisés pour les démontrer ! Si on remplaçait "homéomorphe" par "C^1-difféomorphe", ce serait 1 invariance de la dimension très élémentaire, et déjà vue au chapitre III (corollaire 4 du théorème 11, et note (*) page 218).

Nous pouvons maintenant apporter un complément au théorème 19 de Poincaré :

Théorème 59 - Si Ω est un ouvert simplement connexe d'un espace affine E de dimension finie, $\vec{\omega}$ une forme différentielle fermée de degré 1 sur Ω de classe C^m $(m \geq 1)$, à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$, alors $\vec{\omega}$ est la différentielle d'une fonction, de classe C^{m+1}, définie sur Ω, à valeurs dans $\vec{F}$.

Démonstration - Nous allons appliquer le critère du théorème 45. Soit H une application C^∞ du cercle trigonométrique orienté Γ dans Ω. Comme Ω est supposé simplement connexe, H est homotope à 0, donc C^∞-homotope à 0 (théorème 53), donc $H|\Gamma$ est C^∞-homologue à 0 (théorème 54), et alors l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur $H|\vec{\Gamma}$ est nulle; le théorème 45 nous dit donc bien que $\vec{\omega}$ est un cobord.

<u>Remarque</u> - Ce résultat va évidemment beaucoup plus loin que le théorème 19. Par exemple, dans le complémentaire d'un point dans un espace affine de dimension $N \geq 2$, le théorème de Poincaré est valable pour le degré 1 parce que $\complement 0$ est simplement connexe (théorème 57). Pourtant <u>un tel ouvert n'a aucun rapport avec ceux du théorème 19</u>. Les ouverts du théorème 19 étaient k-connexes, pour tout $k \geq 0$ (théorème 51), alors qu'ici $\complement 0$, pour $N \neq 2$, est bien simplement connexe, mais pas $(N-1)$-connexe (corollaire 3 du théorème 58). D'ailleurs nous ne donnons ici l'existence d'une primitive extérieure que pour le degré 1, en liaison avec la simple connexité; mais, dans $\complement 0$, ω_0 est un cocycle de degré $N-1$ qui n'est pas un cobord (corollaire 1 du théorème 58); le théorème 19 était valable pour tous les degrés ≥ 0. Le théorème 59 ne s'étend pas aux degrés $\neq 1$; un ouvert Ω d'un espace affine peut être k-connexe, sans que tous les cocycles de degré k soient des cobords. Le théorème 44 de De Rham nous permet de dire que tous les cocycles de degré k seront des cobords, si tout cycle de dimension k est homologue à 0, ce qui n'est pas équivalent à la k-connexité.

Pour $N = 2$, $\complement 0$ n'est pas simplement connexe et nous avons vu que le théorème de Poincaré n'y était pas valable pour le degré 1 (formule (VI,4;41)).

<u>Corollaire 1</u> - <u>Soit</u> $\vec{X}$ <u>un champ de vecteurs de classe</u> C^m $(m \geq 1)$, <u>défini dans un ouvert Ω simplement connexe d'un espace affine euclidien E de dimension N. On suppose que, par rapport à un référentiel orthonormal, les composantes X_i de ce champ de vecteurs vérifient les relations</u> (VI,4;52) :

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_j}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, N. \tag{VI,8;55}$$

(<u>qui expriment, dans le cas de la dimension</u> $N = 3$, <u>que le rotationnel du champ de vecteurs est nul</u>). <u>Alors ce champ de vecteurs dérive d'un potentiel</u> U, <u>de classe</u> C^{m+1}.

<u>Corollaire 2</u> - <u>Si Ω est un ouvert simplement connexe de</u> $\mathbb{R}^2 - 0$, <u>il existe dans Ω des fonctions-argument de classe</u> C^∞.

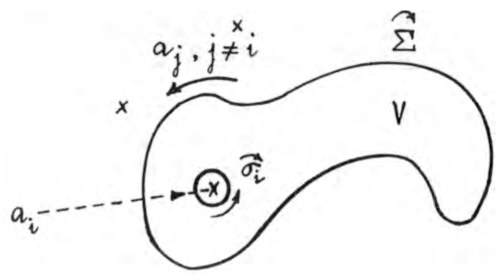
Si Ω est simplement connexe, le cocycle ω de (VI,4;41) est un cobord d'après le théorème, et alors nous savons qu'il y a dans Ω des fonctions-argument continues, d'après le corollaire 2 du théorème 45.

Homologie dans le complémentaire d'un ensemble fini d'un espace affine

NOUS avons vu (Corollaire 3 du théorème 54) que, dans E ou dans un ouvert étoilé de E, tout C^∞-cycle de dimension > 0 est C^m-homologue à 0. Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'étudier la C^m-homologie dans le complémentaire d'un ensemble fini d'un espace affine E de dimension N. Nous avons déjà indiqué, sans démonstration, qu'une sphère orientée n'est pas homologue à 0 dans le complémentaire de son centre.

Théorème 60 - Soit Ω un ouvert d'un espace affine $\vec{E}$ orienté, de dimension N sur le corps des réels; soit $A = \{a, a_2, \ldots, a_l\}$ un ensemble fini de Ω soit $V \subset \tilde{V} = \Omega$ une variété avec bord, compacte, de dimension N, de classe $C^m (m \geq 1)$, munie de l'orientation par $\vec{E}$, et telle que $a_i \in \mathring{V}$, et $a_j \notin V$ pour $j \neq i$. La classe de C^m-homologie de $\vec{\Sigma} = b\vec{V}$, dans l'ouvert $\Omega - A$, est indépendante du choix de V.

Démonstration - Introduisons sur E une structure euclidienne quelconque, et désignons par B_i une boule fermée, de centre a_i, assez petite pour ne contenir aucun des points a_j, $j \neq i$, et pour être contenue dans l'ouvert $\mathring{V}$. Orientons la par l'orientation de $\vec{E}$. Posons $\vec{\sigma_i} = b\vec{B_i}$. $V - \mathring{B}_i$ maintenant ne contient plus a_i, c'est une variété avec bord, orientée (par l'orientation de $\vec{E}$), compacte, de classe C^m, de $\Omega - A$, de bord $\vec{\Sigma} + \vec{\sigma_i}$; donc, dans $\Omega - A$, $\vec{\Sigma}$ est C^m-homologue à $\vec{\sigma_i}$. Si alors onconsidère deux hypersurfaces de ce type, $\vec{\Sigma}_1$, $\vec{\Sigma}_2$, et si l'on désigne par B_i une boule assez petite pour être contenue à la fois dans les ouverts $\mathring{V}_1$ et $\mathring{V}_2$ correspondants, alors $\vec{\Sigma}_1$ et $\vec{\Sigma}_2$ sont toutes les deux homologues, dans $\Omega - A$ à $\vec{\sigma_i}$, et sont bien par conséquent homologues entre elles.



Remarques - 1°/ Quelle que soit la classe C^m considérée, le cycle $\vec{\sigma}_i$ défini par une sphère euclidienne de centre a_i, parcourue dans le sens direct, est toujours C^∞.

2°/ Le théorème n'aurait pas de sens pour $m = 0$, puisque nous n'avons pas défini les variétés avec bord de classe C^0.

Considérons toutes les hypersurfaces $\vec{\Sigma}$ de classe C^∞ du type énoncé dans le théorème (par exemple des sphères euclidiennes telles que $\vec{\sigma}_i$). Elles sont, 2 à 2, C^∞-homologues dans Ω - A, donc aussi C^k-homologues pour tout k fini, y compris $k = 0$. Elles définissent donc une même classe ~~de~~ C^k-homologie de Ω - A, que nous appellerons $(a_i^{(k)})$.

Si d'ailleurs $\vec{\Sigma}$ est seulement de classe C^m, $m \geq 1$, et vérifie les conditions de l'énoncé, elle est aussi dans la classe de C^m-homologie $(a_i^{(m)})$, et dans la classe de C^k homologie $(a_i^{(k)})$, pour $0 \leq k \leq m$; ceci n'ayant pas de sens pour $m = 0$.

Naturellement, les $\vec{\sigma}_i$ ou les $\vec{\Sigma}$ sont des bords dans Ω, donc sont C^m-homologues à 0 dans Ω ; donc tous les C^m-cycles de la classe $(a_i^{(m)})$ de Ω - A sont C^m-homologues à 0 dans Ω ; et ils ne le sont pas dans Ω-A (corollaire 2 du théorème 58).

Expression générale des classes d'homologie de Ω - A, homologues à 0 dans Ω

Théorème 61 - Soit Ω un ouvert d'un espace affine orienté $\vec{E}$ de dimension N. Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_\ell\}$ une partie finie de Ω. Soit $\vec{\Gamma}$ un C^m-cycle $(m \geq 0)$ de Ω-A, C^m homologue à 0 dans Ω. Si sa dimension est < N - 1, il est encore C^m-homologue à 0 dans Ω-A. Si sa dimension est < N-1, il est encore C^m-homologue à 0 dans Ω - A. Si sa dimension est N - 1, il n'en est plus ainsi en général; mais il existe des entiers $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$, de signes quelconques déterminés d'une manière unique, tels qu'il appartienne à la classe de C^m-homologie $\sum_i p_i (a_i^{(m)})$ de Ω - A.

En outre, si E est euclidien, si ω_{a_i} est la forme différentielle angle solide relative au point a_i (formule (VI,8;51)), et si $\vec{\Gamma}$ est de classe C^1, ou de classe C^0 et de longueur finie pour $N = 2$, on a :

(VI,8;56) $$p_i = \frac{1}{S_N}\int_{\vec{\Gamma}} \omega_{a_i}$$

Si $\hat{E}$ est le corps des complexes $\mathbb{C}$, considéré comme espace à 2 dimensions euclidien orienté sur $\mathbb{R}$, on a aussi, si $\vec{\Gamma}$ est de classe C^0 et de longueur finie :

(VI,8;57) $$p_i = \frac{1}{2i\pi}\int_{\vec{\Gamma}} \frac{dz}{z-a_i}\ ^{(1)}$$

Avant de démontrer ce théorème, remarquons qu'on doit. pour aboutir au dernier résultat, considérer seulement les cycles de $\Omega - A$, homologues à 0 dans Ω ; nous venons en effet de voir que tout cycle de la classe $(a_i^{(m)})$ est homologue à 0 dans Ω. Les cycles de dimension N-1 de $\Omega - A$, qui ne sont même pas homologues à 0 dans Ω, ne s'expriment sûrement pas sous la forme précédente. si Ω est convexe, ou étoilé, ceci n'est pas une restriction et sera valable pour tout cycle de $\Omega - A$. D'autre part, l'addition des classes est prise au sens de la loi de groupe d'homologie, définie à la remarque 3° après le théorème

Démonstration - Dans une première partie, nous étudierons le cas difficile, celui de la dimension $N-1$, et démontrerons l'existence des p_i ; dans une deuxième partie, leur unicité; dans une troisième partie, le cas des dimensions $k < N-1$

Première partie - Etudions d'abord le cas difficile, celui de la dimension $N-1$, et montrons l'existence des p_i.

1er Cas : Nous supposerons que le C-cycle singulier Γ, dans $\Omega - A$, de dimension $N-1$, est de la forme $H \mid \vec{b}\vec{V}$, où $\vec{V} \subset \tilde{\vec{V}}$ est une variété avec bord, orientée, compacte, de dimension N, de classe C^m (de classe C^1 si $m = 0$), H une application de classe C^m de cette variété V dans Ω ** de manière que les

* Dans cette formule, i a 2 significations différentes : c'est un Indice entier dans p_i ou a_i, c'est $\sqrt{-1}$ dans $2i\pi$

** Rappelons que? est supposé C^m-homologue à 0 dans Ω ; nous le supposons ici C^m-bord, d'un type très particulier.

images réciproques de chacun des points a_i de A par H soient des points $\alpha_{i,\nu}$ de $\overset{\circ}{V}$ (ils ne peuvent pas être sur bV, puisque Γ est dans $\Omega - A$), en nombre fini, que chacune de ces images réciproques $\alpha_{i,\nu}$ ait un voisinage dans V où H soit au moins de classe C^1 (ceci pour le cas où $\tilde{m} = 0$) et enfin que l'application dérivée $H'(\alpha_{i,\nu}; V)$ soit <u>injective</u> de $\vec{T}(\alpha_{i,\nu}; \tilde{V})$ dans $\vec{E}$, autrement dit soit exactement du rang maximum N, ou bijective; alors (théorème 29 et corollaire 2 du théorème 31 du chapitre III) il existe un voisinage ouvert connexe $\mathcal{V}_{i,\nu}$ de $\alpha_{i,\nu}$ dans V tel que $H(\mathcal{V}_{i,\nu})$ soit un ouvert de E, et que la restriction de H à $\mathcal{V}_{i,\nu}$ soit un C^m-difféomorphisme (C^1-difféomorphisme si $m=0$) de $\mathcal{V}_{i,\nu}$ sur $H(\mathcal{V}_{i,\nu})$. Certainement $\mathcal{V}_{i,\nu}$ ne contient aucune autre image réciproque de a_i que $\alpha_{i,\nu}$; nous pouvons le choisir assez petit pour qu'il ne contienne aucune image réciproque des a_j, $j \neq i$. Désignons alors par $\beta_{i,\nu}$ une variété avec bord de $\tilde{\beta}_{i,\nu} = \mathcal{V}_{i,\nu}$ de classe C^m (de classe C^1 si $m = 0$) contenant $\alpha_{i,\nu}$, et compacte. Il suffira, pour en obtenir une, de prendre pour $\beta_{i,\nu}$ l'image réciproque, par la restriction de H à $\mathcal{V}_{i,\nu}$, d'une boule $B_{i,\nu}$ de centre a_i, contenue dans $H(\mathcal{V}_{i,\nu})$. Comme $\mathcal{V}_{i,\nu}$ est connexe, le C^1-difféomorphisme H, transportant $\mathcal{V}_{i,\nu}$ sur son image, conserve partout l'orientation ou inverse partout l'orientation (l'orientation de V et de $\vec{E}$); nous appellerons $\varepsilon_{i,\nu}$ la quantité égale à + 1 ou à − 1, selon qu'on se trouve dans le premier ou dans le deuxième cas. Cela revient à dire que $\varepsilon_{i,\nu}$ est le signe, dans E, d'une base, image, par $H'(\alpha_{i,\nu})$ d'une base positive de $\vec{T}(\alpha_{i,\nu}; \tilde{V})$. Si, par des Cartes locales <u>conservant les orientations,</u> on ramène $\mathcal{V}_{i,\nu}$ et $H(\mathcal{V}_{i,\nu})$ à être des ouverts de $\mathbb{R}^N$, $\varepsilon_{i,\nu}$ est le signe du déterminant jacobien de H.

Nous orienterons $\beta_{i,\nu}$ par l'orientation de V, $B_{i,\nu}$ par celle de $\vec{E}$. Alors $H|\overrightarrow{\beta_{i,\nu}}$ est une variété singulière équivalente à $\overrightarrow{B_{i,\nu}}$ ou $\overleftarrow{B_{i,\nu}}$, selon que $\varepsilon_{i,\nu} = +1$ ou − 1; le cycle $\left(H|\overrightarrow{b\beta_{i,\nu}}\right)$ est équivalent au cycle $\varepsilon_{i,\nu}\overrightarrow{bB_{i,\nu}}$, qui appartient à la classe de C^m-homologie $\varepsilon_{i,\nu}(a_i^{(m)})$ dans $\Omega - A$.

Alors la variété avec bord $V - \bigcup_{i,\nu} \overset{\circ}{\beta}_{i,\nu}$ de classe C^1, avec l'orientation de $\vec{V}$, a pour bord la réunion de $\overrightarrow{bV}$ et des $\overleftarrow{b\beta_{i,\nu}}$; donc la variété singulière $H|\overrightarrow{V - \bigcup_{i,\nu}\beta_{i,\nu}}$, <u>contenue dans</u> $\Omega - A$, a pour bord le cycle $H|\overrightarrow{bV} + \sum_{i,\nu} H|\overleftarrow{b\beta_{i,\nu}}$.

Donc :

Résultat : $H|\overrightarrow{bV}$ est C^m-homologue, dans $\Omega - A$, à $\sum_{i,\nu} H|\overrightarrow{b\beta_{i,\nu}}$, équivalent à $\sum_{i,\nu} \varepsilon_{i,\nu} \overrightarrow{B_{i,\nu}}$; sa classe de C^m-homologie est donc $\sum_i p_i(a_i^{(m)})$, où $p_i = \sum_\nu \varepsilon_{i,\nu}$, est la différence entre le nombre des images réciproques de a_i où H conserve l'orientation et le nombre des images réciproques où H inverse l'orientation.

Le théorème est bien démontré dans le cas particulier considéré, et en outre on a une interprétation géométrique des coefficients p_i.

Deuxième cas; $\overrightarrow{\Gamma}$ est un C-cycle quelconque de $\Omega - A$, C^m-homologue à 0 dans Ω, $m \geq 1$.

On a, dans Ω, la formule :

$$(\text{VI},8;58)\quad \begin{cases} \overrightarrow{\Gamma} = H|\overrightarrow{\Sigma}, \\ H|\overrightarrow{\Sigma} + H|\overrightarrow{V} + H|\overrightarrow{W} = H|\overrightarrow{V'} + H|\overrightarrow{W'} \end{cases}$$

Les cycles $H|\overrightarrow{V}$, $H|\overrightarrow{W}$, $H|\overrightarrow{V'}$, $H|\overrightarrow{W'}$ sont dans Ω, non nécessairement dans $\Omega - A$. $H(W)$ et $H(W')$ sont des ensembles finis (qui peuvent contenir certains des a_i). D'autre part, $H|\overrightarrow{V} = \tilde{H}|\overrightarrow{b\mathcal{V}}$, $H|\overrightarrow{V'} = \tilde{H}|\overrightarrow{b\mathcal{V}'}$ où $\tilde{H}$ et $\tilde{H}'$ sont des applications C^m de variétés avec bord orientées compactes, $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ de dimension N, dans Ω ; les propriétés très particulières du 1er cas ne sont plus supposées vérifiées.

Mais alors soit $\vec{u}$ un vecteur de **E** ; à la place de l'application $\tilde{H}$, considérons l'application $\tilde{H} + \vec{u}$, définie par $\xi \longrightarrow H(\xi) + \vec{u}$, de $\mathcal{V}$ dans **E**. Nous allons montrer que, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, pour presque tous les vecteurs $\vec{u}$ tels que $\|\vec{u}\| \leq \varepsilon$ (pour une norme quelconque choisie sur E une fois pour toutes) l'application $\tilde{H} + \vec{u}$ de $\mathcal{V}$ dans Ω vérifie les propriétés supposées dans le 1er cas.

Choisissons une fois pour toutes, dans E , un référentiel, et considérons la mesure de Lebesgue associée à ce référentiel. Soit alors α un point quelconque de $\mathcal{V}$; choisissons un voisinage $\mathcal{V}_\alpha$ de α dans $\mathcal{V}$, qui soit l'image par une carte Φ_α d'un ouvert $\mathcal{O}_\alpha$ de $\mathbb{R}^N$. Alors $H \circ \Phi_\alpha$ est une application de classe C^m, de $\mathcal{O}_\alpha$ dansa. Il est équivalent de dire qu'en un point ξ de $\mathcal{V}_\alpha$, le rang de $\tilde{H}'(\xi)$ est $< N$, ou de dire que le déterminant jacobien de $\tilde{H} \circ \Phi_\alpha$ est nul au point $\Phi_\alpha^{-1}(\xi)$. Il résulte alors du théorème 102 bis du chapitre IV que, si nous considérons l'ensemble des points de Ω où le déterminant jacobien de $\tilde{H} \circ \Phi_\alpha$ est nul, son image par $\tilde{H} \circ \Phi_\alpha$ est de mesure nulle dans E, par rapport à la mesure de Lebesgue. Cela signifie que, si nous considérons l'ensemble des points ξ de $\mathcal{V}_\alpha$ où le rang de $\tilde{H}'$est $< N$, son image par $\tilde{H}$ est de mesure nulle dans E ,

Ainsi tout point α de $\overset{\circ}{V}$ possède un voisinage $\mathcal{V}_\alpha$, tel que l'ensemble des points de ce voisinage où $\tilde{H}'$ soit de rang $< N$, ait une Image par $\tilde{H}$ de mesure nulle. Comme $\mathcal{V}$ est compacte, on peut la recouvrir par un nombre fini de ces voisinages; et, par conséquent, l'ensemble des points ξ de $\mathcal{V}$ tels que $H'(\xi)$ soit de rang $< N$, a une image par $\tilde{H}$ qui est de mesure nulle dans E .

SI donc nous considérons l'ensemble des $\vec{u}$, tel que $\|\vec{u}\| \leqslant \varepsilon$, on voit que, pour presque toutes ces valeurs de u , le point $a_i - \vec{u}$ n'appartient pas à cette Image; cela revient encore a dire que pour presque toutes les valeurs de u , dans $\|\vec{u}\| \leqslant \varepsilon$, le point a_i est un point dont toutes les images réciproques, par l'application $\tilde{H} + \vec{u}$, sont des points $\alpha_{i,\nu}$ de $\mathcal{V}$ où l'application dérivée de $\tilde{H} + \vec{u}$ a un rang égal à N. Ces images réciproques sont alors nécessairement Isolées (dans un voisinage $\mathcal{V}_{i,\nu}$ de chacun d'eux $\alpha_{i,\nu}$, H est un homéomorphisme, et a_i n a pas d'autre image réciproque que $\alpha_{i,\nu}$), donc en nombre fini puisque $\mathcal{V}$ est compact ($H^{-1}(a_i)$ est discret, puisque les points sont isoles, et fermé dans $\mathcal{V}$, donc compact; un compact discret est fini * . D'autre part, $H(V) = \tilde{H}(\mathcal{V})$,

* SIK est compact et discret, chaque point est un ouvert, ces ouverts forment un recouvrement; il en existe un sous-recouvrement fini, donc K est fini.

est l'image, par "ne application a" moins de classe C^1, d'une variété de dimension N-1 , elle est donc aussi de mesure nulle dans E . Donc, pour presque tous les $\vec{u}$ de norme $\leq \varepsilon$, $a_i - \vec{u}$ n'est pas dans cette image, ou encore $(H+\vec{u})(V)$ ne contient pas a_i , et les images réciproques de a_i , par $H+\vec{u}$ sont dans l'intérieur $\mathring{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$.

Ceci est vrai pour tout a_i de **A** .

Alors "ne application immédiate du théorème 21 du chapitre IV montre que, pour presque toutes les valeurs de $\vec{u}$ telles que $\|\vec{u}\| \leq \varepsilon$, l'un quelconque des points a_i , $i = 1, 2, \ldots, \ell$, a toutes ses images réciproques par $\tilde{H} + \vec{u}$ en dehors du bord de $\mathcal{V}$, en nombre fini, et qu'en chacune de ces Images réciproques, le rang de $(fi + \vec{u})'$ est égal à N . On se trouve alors exactement dans les conditions d'application de la partie 2°/ du théorème.

Cela démontre donc qu'il existe des entiers $q_1, q_2, \ldots, q_\ell$, tels q"e$(H + \vec{u}) | b\mathcal{V} = (H + \vec{u}) | \vec{V}$ soit un C^m-cycle dans l'ouvert percé $\Omega - A$, appartenant à la classe de C^m-homologie $q_1 (a_1^{(m)}) + q_2 (a_2^{(m)}) + \cdots q_\ell \, (a_\ell^{(m)})$. *

Ce que nous venons de faire pour le C^m-cycle $H | \vec{V}$ de (VI,8;58) peut être fait aussi pour le cycle $H | \vec{V'}$. D'autre part , même si le cycle dégénéré $H | \vec{W}$ ou $H | \vec{W'}$ a "ne Image contenant certains des points a_i , le translaté par $\vec{u}$ ne les contient plus, pour toutes les valeurs de $\vec{u}$ sauf un nombre fini, c'est-à-dire pour presque toutes les valeurs de $\vec{u}$; ce translate est alors un cycle dégénéré de Ω - **A** , homologue à **0** dans $\Omega - A$.

En appliquant encore "ne fois le théorème 21 du chapitre IV, on voit que :

pour presque toutes les valeurs de $\vec{u}$ telles que $\|\vec{u}\| \leq \varepsilon$, les translates par u des cycles $H | \vec{V}$ et $H | \vec{V'}$ sont dans Ω - **A** , et appartiennent à des classes de C^m-homologies qui sont des combinaisons finies du type $\sum_i q_i (a_i^{(m)})$, $\sum_i r_i \, (a_i^{(m)})$ ** , et les translatés de $H | \vec{W}$, $H | \vec{W'}$ sont des cycles dégénérés dans Ω - A.

Alors, pour presque toutes ces valeurs de $\vec{u}$, le translate par $\vec{u}$ du cycle Γ est dans Ω - A , et sa classe de C^m-homologie dans Ω - A est $\sum_i p_i (a_i^{(m)})$, $p_i = r_i - q_i$, d'après l'expression (VI,8;58) de Γ .

* Le cycle $H + \vec{u} | \vec{V}$ peut s'appeler translate par $\vec{u}$ du cycle $H | \vec{V}$.

** q_i et r_i peuvent dépendre de u .

Mals, si ε est choisi strictement inférieur à la distance δ de l'image de $\vec{\Gamma}$ (qui est dans $\Omega - A$) à $\complement(\Omega - A)$, le translaté de $\overset{\frown}{\Gamma}$ par $\vec{u}$ est C^m-homologue à $\overset{\frown}{\Gamma}$ dans $\Omega - A$ (théorèmes 51 et 54). Donc Γ , lui-aussi, appartient à une classe $\sum_i p_i\, a_i^{(m)}$, et le théorème est encore démontré dans ce cas.

On ne possède pas ici d'interprétation géométrique directe des p_i . Mais une translation u assez petite du cycle $\vec{\Gamma}$ nous permet d'en retrouver une, pour presque toutes les valeurs de $\vec{u}$.

Troisième Cas, cas général - Il ne nous reste à traiter que le cas $m = 0$. soit alors $\vec{\Gamma} = H \mid \overset{\frown}{\Sigma}$ un C^0-cycle de $\Omega - A$, C^0 -homologue à 0 dans Ω . Σ est de classe C^1 , mais H seulement continue. Soit H_1 une application de classe C^1 de $\overset{\frown}{\Sigma}$ dans $\Omega - A$, telle que $\overrightarrow{\|\| H - H_1 \|\|} < d\,(H(\Sigma), \complement(\Omega - A))$ (théorème 52); alors le C^1-cycle $H_1 \mid \overset{\frown}{\Sigma}$ est C^0-homologue à $H \mid \overset{\frown}{\Sigma}$ (théorèmes 51 et 54) dans $\Omega - A$, et a fortiori dans Ω . Il est donc C^0-homologue à 0 dans Ω ; comme c'est un Cl-cycle, il est C^1 -homologue à 0 dans Ω (corollaire 4 du théorème 54); le 2ème cas nous indique qu'il est C^1 -homologue, dans $\Omega - A$, à une combinaison $\sum_i p_i\, \overset{\frown}{\sigma_i}$, où $\overset{\frown}{\sigma_i}$ est un C^∞-cycle de la classe a_i^∞ . Alors $H \mid \overset{\frown}{\Sigma}$, C^0homologue à $H_1 \mid \overset{\frown}{\Sigma}$ dans $\Omega - A$, est C^0-homologue à $\sum_i p_i\, \overset{\frown}{\sigma_i}$,donc sa classe de C^0 -homologie est bien $\sum_i p_i\, (a_i^{(0)})$, ce qui achève la démonstration du théorème, pour la dimension $N-1$.

Dans le cas $m = 0$, pour interpréter les p_i , on doit donc d'abord approcher **H** par une application H_1 de classe C^1, ce qui ramène au 2ème cas * .

Deuxième partie - Toujours pour la dimension N -1, montrons 1 unicité des p_i , et les formules (VI,8;56 et 57).

Prenons sur E une structure euclidienne arbitraire. soit $\overset{\frown}{\sigma_i}$ une sphère de centre a_i , bord d'une poule contenue dans Ω, et ne contenant aucun des points a_j , $j \neq i$. Alors $\overset{\frown}{\sigma_i}$ est dans la classe ($a_i^{(m)}$) , pour tout m.

1°/ Supposons d'abord $m \geq 1$; ou $N = 2$, m 0 et $\vec{\Gamma}$ de longueur finie.

* Rappelons que l'image continue d'un segment peut remplir tout un cube (lère partie, page 92) ! Un C^0 -cycle est une chose affreuse; il est miraculeux d'obtenir de tels théorèmes sur les CO-cycles !

Puisque la forme différentielle ω_{a_i} est de classe C^1, et fermée, dans $\Omega - a_i$, elle l'est a fortiori dans $\Omega - A$.

Comme alors le cycle Γ est supposé homologue au cycle $p_1 \vec{\sigma}_1 + p_2 \vec{\sigma}_2 + \cdots + p_\ell \vec{\sigma}_\ell$, les intégrales de ω_{a_i} sur ces deux cycles sont nécessairement les mêmes (corollaire du théorème 49, si $m \geq 1$; corollaire 6 du théorème 54 pour $N = 2$, $m = 0$, $\vec{\Gamma}$ de longueur finie) . Or l'intégrale sur $\vec{\sigma}_i$ est égale à S_N, d'après la formule (VI,8;53), et l'intégrale sur l'une quelconque des sphères $\vec{\sigma}_j$, $j \neq i$, est nulle, car une telle sphère est bord d'une boule dans $\Omega - a_i$. Ceci démontre, d'une part, la formule (VI,8;56), et, d'autre part, l'unicité des coefficients p_i lorsque $\vec{\Gamma}$ est de classe C^m, pour $m \geq 1$, puisque les intégrales définies dans cette formule sont bien déterminées par la seule connaissance de $\vec{\Gamma}$.

Dans le cas particulier où $E = \mathbb{C}$, on a :

$$\text{(VI,8;59)} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2i\pi}\,\dfrac{dz}{z} = \dfrac{1}{2i\pi}\,\dfrac{dx + i\,dy}{x + i\,y} \\[2ex] = \dfrac{1}{2i\pi}\,\dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \\[2ex] = \dfrac{1}{2i\pi}\,d\left(\log\sqrt{x^2 + y^2}\right) + \dfrac{1}{2\pi}\,\omega_0 \end{cases}$$

ω_0 étant la forme (VI,4 41) * . Comme $\log\sqrt{x^2+y^2}$ est une fonction C^∞ dans $\complement 0$, sa différentielle a une intégrale nulle sur $\vec{\Gamma}$ (formule de Stokes spéciale au cas $n = 1$, théorème 39). Alors de (VI,8;56) on déduit aussitôt (VI,8;57).

* On a, directement, $\dfrac{dz}{z} = d(\log z) = d\log|z| + i\,d\varphi$.

Mais $\log z$ et φ ne sont pas des fonctions bien définies, et ce raisonnement demanderait une justification spéciale. Cette justification n'est pas bien terrible, mais plus longue que le calcul ci-dessus.

2°/ Une démonstration spéciale de l'unicité est nécessaire, si $\vec{\widehat{\Gamma}}$ est un cycle de classe C^0 ; N est quelconque (et, si N = 2, $\vec{\widehat{\Gamma}}$ n'est plus nécessairement de longueur finie). Il n'est plus question ici de calcul de l'intégrale $\int_{\vec{\widehat{\Gamma}}} \omega_{a_i}$. Mais supposons que l'on ait pu trouver des entiers p_i et des entiers q_i, tels que $\vec{\widehat{\Gamma}}$ soit C^0-homologue, dans $\Omega - A$, a $\sum_i p_i \vec{\widehat{\sigma_i}}$ et à $\sum_i q_i \vec{\widehat{\sigma_i}}$. Alors ces deux derniers cycles sont C^0-homologues. Mais, comme il s'agit de deux cycles de classe C^1 et même C^∞ (puisque les sphères euclidiennes sont des hypersurfaces de classe C^∞), le corollaire 4 du théorème 54 montre que ces 2 derniers cycles sont aussi C^1-homologues. Ce que nous venons alors de voir dans 1°/ montre que l'on a $p_i = q_i$, et ceci démontre encore l'unicité pour $m = 0$,

Troisième partie

Ces des dimensions $k < N-1$. On peut suivre les mêmes étapes, mals tout est beaucoup plus facile :

Premier cas - $\vec{\Gamma} = H \,|\, \vec{\widehat{bV}}$, où H et V sont de classe C^m (V de classe C^1 si $m = 0$), et où $H(V) \subset \Omega - A$. Le résultat est alors évident : $\vec{\Gamma}$ est C^m-homologue à 0 dans $\Omega - A$.

Deuxième cas - $\vec{\Gamma} = H \,|\, \vec{\widehat{\Sigma}}$, H est au moins de classe C'. Comme $H \,|\, \vec{\widehat{\Sigma}}$ est supposé C^1-homologue à 0 dans Ω, on a (VI,8;58). Comme alors $\mathcal{V}$ est de dimension $< N$, $\tilde{H} \,|\, \vec{\widehat{\mathcal{V}}}$ est de mesure nulle; pour presque *tous* les $\vec{u}$ de $\vec{E}$, $\tilde{H} + \vec{u}\,(\mathcal{V})$ est dans $\Omega - A$, et on est ramené au ler cas.

Troisième cas - On se ramène au 2ème cas, comme dans la lère partie.

Remarques - 1°/ si $\vec{\Gamma}$ est un C^0-cycle, les entiers p_i ne peuvent en général pas se calculer par des intégrales sur $\vec{\widehat{\Gamma}}$; mais ils peuvent toujours se calculer par, des intégrales sur un C^1-cycle de $\vec{\Gamma}_1$, assez voisin de Γ pour lui être C^0-homologue.

2°/ Il est remarquable que p_i se calcule dès qu'on connaît Γ et a_i, sans que la connaissance des autres a_j, $j \neq i$, soit nécessaire.

3°/ Si on change l'orientation de E, la classe d'homologie de Γ dans $\Omega - A$ ne change pas; mais les classes $(a_i^{(m)})$ qui servent de référence changent de signe, car on doit changer l'orientation des boules donc des sphères; donc les p_i changent de signe. Cela se voit aussi dans (VI,8;56), puisque ω_{a_i} est remplacée par son opposée.

Corollaire - Soit E un espace affine de dimension N sur $\mathbb{R}$, et soit A une partie finie de E, à ℓ élément. Le groupe de C^m-d'homologie de $E - A$ pour les dimensions strictement comprises entre o et $N - 1$ est réduit à $\{0\}$. Pour la dimension 0, il est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}$ des entiers de signe quelconque; pour la dimension $N - 1$, il est isomorphe à la puissance $\mathbb{Z}^\ell$ de $\mathbb{Z}$.

1°) Soit $\vec{\Gamma}$ un C-cycle de $E - A$, de dimension k, $0 < k < N - 1$. Il est C^m-homologue à 0 dans E (corollaire 3 du theorème 54); donc dans $E - A$, d'après le theorème 61. Le groupe de C^m-homologie de dimension k est donc bien réduit à $\{0\}$.

2°) Orientons E Dans le groupe de C^m-homologie de dimension $N - 1$, figurent les classes de la forme $\sum_{i=1}^{\ell} p_i (a_i^{(m)})$; deux de ces classes, ne correspondant pas au même système d'entiers p_i, sont distinctes. Par ailleurs, d'après le theorème, il n'y a pas d'autres classes que celles-la, car tout cycle de $E - A$ est homologue à 0 dans E (corollaire 3 du theorème 54). Il y a donc correspondance biunivoque entre le groupe d'homologie et l'ensemble $\mathbb{Z}^\ell$ des systèmes $p = (p_1, p_2, \ldots, p_\ell)$ de ℓ entiers de signe quelconque. Par ailleurs la somme de la classe $\sum_{i=1}^{\ell} p_i (a_i^{(m)})$ et de la classe $\sum_{i=1}^{\ell} q_i (a_i^{(m)})$ est la classe $\sum_{i=1}^{\ell} (p_i + q_i)(a_i^{(m)})$; l'addition des classes correspond donc exactement à l'addition dans $\mathbb{Z}^\ell$, considéré comme groupe produit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$.

Z

Il faut remarquer que la correspondance entre le groupe d'homologie de dimension $N-1$ et $\mathbb{Z}^{\ell}$ n'est pas canonique; elle ne l'est que si on a orienté E. Si, pour une orientation $\vec{E}$, une classe correspond à $p \in \mathbb{Z}^{\ell}$, alors, pour l'orientation opposée $\overleftarrow{E}$, la même classe correspond à $-p = (-p_1, -p_2, \dots, -p_{\ell})$.

3°) Nous laisserons au lecteur le cas de la dimension 0. On montrera successivement :

a) que tous les cycles $\{x, +\}$, $x \in E - A$, sont de la même classe d'homologie. Appelons $\mathbb{1}$ cette classe (Cela résulte de ce que $E - A$ est connexe par arcs)

b) que tout cycle $H | \vec{\Sigma}$, de dimension 0, est dans une classe $p\mathbb{1}$ $p \in \mathbb{Z}$ (C'est évident, car $\vec{\Sigma}$ est un ensemble d'un nombre fini de points affectés de signe $\pm$. Alors p est le nombre des signes $+$, diminué du nombre des signes $-$).

c) que les classes $p\mathbb{1}$, $p'\mathbb{1}$, ne coïncident que si $p = p'$ (La constante 1 est un cocycle de degré 0, son intégrale sur 2 cycles homologues de dimension 0 est la même; son intégrale sur $p\{x, +\}$ est p).

Alors il y a correspondance biunivoque entre le groupe d'homologie pour la dimension 0 et le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers de signe quelconque; et cette correspondance respecte les lois d'addition. Ici, contrairement à 2°), la correspondance est canonique, elle ne dépend pas de l'orientation de E. Le résultat 3°) est valable, non seulement pour $E - A$, mais pour tout ouvert connexe d'un espace affine.

Indice d'un cycle de dimension N - 1 par rapport à un point dans un espace affine orienté de dimension N

Définition - Soit $\vec{E}$ un espace affine orienté, de dimension finie N, a un point de E, $\vec{\Gamma}$ un cycle de dimension $N-1$ de $E - a$.

On appelle indice de ce cycle par rapport à a, le nombre entier p, de signe quelconque, déterminé d'une manière unique, par la condition que $\vec{\Gamma}$ ait la classe de C°-homologie $p\ (a^{(0)})$ dans $E - a$.

Cette définition est légitime, parce que, dans E, $\vec{\Gamma}$ est toujours C°-homologue à 0, et on peut appliquer le théorème 61.

Si p est cet indice, il est naturel de dire que le cycle $\vec{\Gamma}$ entoure algébriquement p fois le point a, ou encore fait algébriquement p fois le tour du point a. En effet, si $\vec{\sigma}$ est une sphère de centre a, d'orientation directe, il est naturel de dire qu'elle entoure +1 fois a, et $p\vec{\sigma}$ a l'indice p. Il résulte alors du théorème 61 que, si A est une partie finie de Ω, et si Γ est un cycle de $\Omega - A$, homologue à 0 dans Ω, les nombres p_i qui interviennent sont les indices de $\vec{\Gamma}$ par rapport aux points a_i. Il en résulte aussi que, si E est en outre muni d'une structure euclidienne, et si le cycle $\vec{\Gamma}$ est en outre de classe C^1 (ou de classe C^0 et de longueur finie, si $N = 2$), son indice est égal à $\frac{1}{S_N}$ fois l'intégrale sur $\vec{\Gamma}$ de la forme différentielle angle solide ω_a, ou encore à $\frac{1}{S_N}$ fois l'angle solide algébrique sous lequel du point a on voit le cycle $\vec{\Gamma}$. Si E est le corps des complexes $\mathbb{C}$, l'indice vaut aussi $\frac{1}{2i\pi}\int_{\vec{\Gamma}} \frac{dz}{z-a}$, d'après (VI,8;57).

Nous désignerons cet indice par $I(\vec{\Gamma};a)$; il dépend essentiellement de l'orientation de $\vec{E}$, et change de signe si l'on change cette orientation. Plus généralement, si K est un C^1-difféomorphisme de Ω sur un ouvert Ω' de E, respectant (resp. inversant) les orientations, c'est-à-dire de déterminant jacobien > 0 (resp < 0), le cycle image

$K\vec{\Gamma}$ (si $\vec{\Gamma} = H|\vec{\Sigma}$, $K\vec{\Gamma}$ est $K \circ H|\vec{\Sigma}$) a pour indice par rapport au point image $a' = K(a)$, l'indice (resp. l'opposé de l'indice) de $\vec{\Gamma}$ par rapport à a. En effet, soit $\vec{\sigma}$ le bord d'une boule euclidienne B de centre a. Alors $\vec{\sigma}' = K(\vec{\sigma})$ est le bord de $\vec{B}' = K(\vec{B})$; comme K conserve (resp. inverse) les orientations dans $\vec{E}$, $\vec{B}'$ a l'orientation de $\vec{E}$ (resp. l'orientation opposée), donc $\vec{\sigma}'$ a la classe de C^0-homologie (a'^0) (resp $-(a'^0)$). Comme K est un homéomorphisme, il conserve les C^0-homologies; donc, si $\vec{\Gamma}$ est C^0-homologue à $p\vec{\sigma}$, $p = I(\vec{\Gamma};a)$, $K\vec{\Gamma}$ est C^0-homologue à $pK\vec{\sigma} = p\vec{\sigma}'$, donc on a bien $I(K\vec{\Gamma};K(a)) = p$ (*resp.* $-p$).

Remarque - Il n'était nullement évident a priori :

1°) que l'intégrale $\frac{1}{S_N}\int_{\vec{\Gamma}} \omega_a$ fût un nombre entier ;

2°) que cette intégrale fût indépendante de la structure euclidienne (dont dépend pourtant ω_a), et ne dépendît que de $\vec{\Gamma}$, de l'orientation de $\vec{E}$, et de a. C'est naturellement très intuitif, et on trouvera beaucoup de traités anciens de mathématiques, où tout cela est admis d'emblée; nous avons cependant vu toutes les difficultés qui devaient être vaincues pour le montrer.

Pour N= 2, $N-1=1$, $\omega = d\varphi$ "différentielle" de l'angle polaire, on 'sent bien" que le nombre algébrique de fois que Γ entoure l'origine vaut $\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d\varphi$, et est un nombre entier.

Invariance de l'indice par déformation continue

Nous allons d'abord ddmontrer que l'indice d'un cycle? de E, par rapport à un point a de E, ne change pas quand Γ et a varient continuement, sans que jamais a appartienne à l'image du cycle Γ. De façon précise on a :

Théorkme 62 - Soient $H|\vec{\Sigma}$, $H'|\vec{\Sigma}$ deux cycles de dimension $N-1$ d'un espace affine normé orienté $\vec{E}$ de dimension N, et a, a', 2 points de E, $a \notin H(\Sigma)$.

Si $\|\overrightarrow{a-a'}\| + |||\overrightarrow{H-H'}||| < d(H(\Sigma), a)$, alors $a' \notin H(\Sigma')$, et l'indice de $H'|\vec{\Sigma}$ par rapport à a' est égal à l'indice de $H|\vec{\Sigma}$ par rapport à a.

Démonstration - Par translation (qui est un C^1-difféomorphlsme de jacobien > o), l'indice de $H'|\vec{\Sigma}$ par rapport à a' est l'indice du cycle translaté $H' + \overrightarrow{a-a'} \,|\, \vec{\Sigma}$ par rapport à $a' + \overrightarrow{a-a'} = a$. Or, les deux cycles $H' + d\text{-}d' \,|\, \vec{\Sigma}$ et $H|\vec{\Sigma}$ sont homotopes dans C_a, car on a $|||\overline{(H' + \overrightarrow{a-a'}) - H}||| < d(H(\Sigma), a)$ (théorème 51); donc ils sont homologues dans C_a, (théorème 54), donc ont le même indice en a.

Corollaire 1 - Soit $\hat{E}$ un espace affine, de dimension N, orienté. Soit $\vec{\Sigma}$ une variété compacte sans bord, de dimension N-l, orientée. Soit d'autre part Λ un espace topologique, et soit H_λ une application continue de Σ dans E, dépendant continuement du paramètre λ de Λ, c'est-à-dire telle que $\lambda \longrightarrow H_\lambda$ soit continue de Λ dans $(E^\Sigma)_{cb}$ *.

* Cela signifie que, quand λ tend vers λ_0 dans Λ, H_λ converge vers H_{λ_0}, uniformément sur Σ. On suppose prise une norme quelconque sur E.

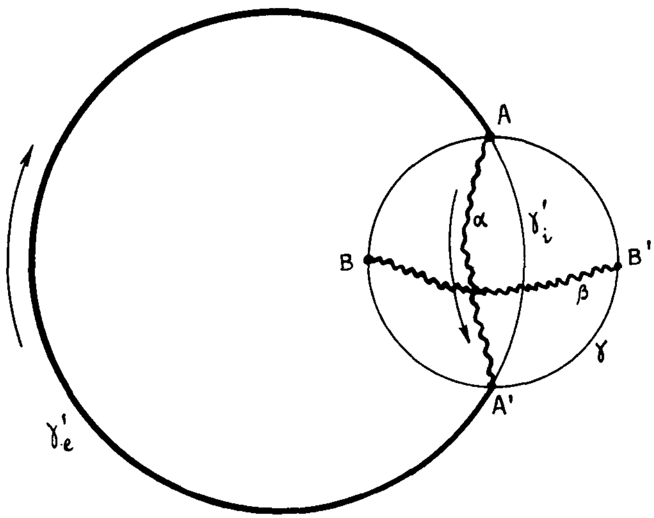
Soit d'autre part $a_\lambda : \lambda \longrightarrow a_\lambda$ une application continue de Λ dans E . Si alors, pour toute valeur de λ, a_λ n'appartient pas à l'image $H_\lambda(\Sigma)$, l'indice du cycle $H_\lambda|\hat{\Sigma}$ par rapport au point a_λ varie continuement avec λ ; par conséquent, tout point λ possède un voisinage dans lequel cet indice reste constant; en particulier il reste constant sur toute composante connexe de A , et sur A tout entier si Λ est connexe.

Corollaire 2 - Soit $H_0, H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$, une suite d'applications continues de $\hat{\Sigma}$ dans $\hat{E}$, convergeant, pour n infini, vers une application H , uniformément sur Σ ; et soit $a_0, a_1, a_2, \dots, a, \dots$, une suite de points de E , convergeant vers un point a , pour n infini. Si $a \notin H(\Sigma)$, alors, pour n assez grand, $a_n \notin H_n(\Sigma)$, et l'indice de $H_n|\hat{\Sigma}$ en a_n est égal à l'indice de $H|\hat{\Sigma}$ en a .

Corollaire 3 - Soit $H|\hat{\Sigma}$ un cycle de dimension N - 1 d'un espace affine orienté $\hat{E}$. Alors l'indice de ce cycle par rapport à un point a , appartenant à E - $H(\Sigma)$, est le même lorsque a parcourt une composante connexe de cet ouvert; il est le même en deux points qui peuvent être joints par un chemin ne rencontrant pas l'image $H(\Sigma)$. Si en deux points a et b , l'indice& H $|\hat{\Sigma}$ n'est pas le même, il n'existe aucun chemin joignant ces 2 points sans rencontrer l'image H(Z).

Ce corollaire, qui résulte immédiatement du corollaire 1, est un des plus puissants outils pour montrer que 2 ensembles ont un point commun.

Soit, par exemple, à traiter l'exercice suivant (dont une démonstration directe serait très délicate). Soient γ une circonférence de $\mathbb{R}^2$, AA' et BB' 2 diamètres perpendiculaires. Appelons α (resp. β) un chemin joignant A à A' (resp. B à B'), en restant (sauf en ses extrémités) toujours dans la région intérieure à γ . Montrer que ces chemins se rencontrent nécessairement.



Considérons le chemin α comme défini par une application continue H du segment $[0,\pi]$ de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}^2$; $H(0) = A$, $H(\pi) = A'$.

Soit d'autre part γ' une circonférence passant par A et A' · appelons γ'_i (resp. γ'_e), sa portion située dans la région intérieure (resp. extérieure) de γ ·

Nous formerons une application continue $\tilde{H}$ du cercle trigonométrique Γ dans $\mathbb{R}^2$, comme suit : $\tilde{H} = H$ Ctant connu pour le demi-cercle $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, nous prendrons;, dans $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, comme la restriction à $[\pi , 2\pi]$ d'un homéomorphisme évident $\tilde{H}'$, du cercle trigonométrique sur *le cercle* γ' , *tel* que $\tilde{H}'(\pi) = A'$, $H'(2\pi) = A$.

Cherchons les indices de B et B' par rapport au cycle $\tilde{H} \mid \vec{\Gamma}$. Ce cycle est homotope à $\tilde{H}' \mid \vec{\Gamma}$, dans $\mathbb{R}^2 - B - B'$, parce que chaque segment $[\tilde{H}(\theta) , \tilde{H}'(\theta)]$ est dans cet ouvert (c'est évident pour $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$; pour $0 < \theta < \pi$, $\tilde{H}(\theta)$ et $\tilde{H}'(\theta)$ sont tous deux dans le disque ouvert bordé par γ, et ce disque est convexe). Donc les indices cherchés sont nécessairement aussi les Indices de B et B' par rapport à $H' \mid \vec{\Gamma}$,ou par rapport au cycle équivalent $\hat{\gamma}'$, oriente dans le sens rétrograde. Ce sont donc respectivement -1 et 0 , qui ne sont pas égaux, Donc le chemin β joignant B à B' rencontre l'image $H(\Gamma)$. Comme il ne peut pas rencontrer $H([\pi, 2\pi])$, il rencontre a , ce que nous voulions démontrer.

Corollaire 4 - Soit $H|\hat{\Sigma}$ un cycle, de dimension $N-1$, d'un espace affine orienté euclidien E de dimension N , contenu dans une boule ouverte B ,de centre 0 et de rayon R . Alors son Indice par rapport à tout point a qui n'est Pas dans cette boule est nécessairement nul. Si b est un point par rapport auquel l'indice du cycle est $\neq 0$, il n'existe aucun chemin généralisé * joignant b à l'infini, et ne rencontrant pas l'image du cycle.

Démonstration - Le cycle, appartenant à la boule ouverte B , qui est convexe est,nécessairement homologue à 0 dans cette boule ouverte (corollaire 3 du théorème 54) et par conséquent dans $E - a$, si a n'appartient pas à la boule ouverte. Il en résulte bien que son indice, par rapport à a , est nul. Il était d'ailleurs intuitif qu'un tel cycle ne pourrait Pas "entourer" a .

Supposons qu'il existe un chemin généralisé $M \mid [0, +\infty[$ joignant b à l'infini dans E , et dont l'image ne rencontre pas l'image $H(\Sigma)$ du cycle; alors, nécessairement. l'indice du cycle Par rapport au point $M(t)$ doit être constant lorsque t varie de 0 à $+\infty$. Or, à partir de t suffisamment grand, cet indice est nul; donc l'indice par rapport au point b est également nul. Cela montre bien que. si l'indice au point& n est pas nul, il ne peut exister de chemin généralisé joignant b à l'infini et ne rencontrant pas $H(\Sigma)$.

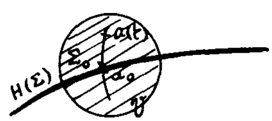
Variation de l'indice d'un cycle quand on traverse l'image du cycle

Noua venons de voir que l'indice d'un cycle au point a ne peut varier que quand a traverse l'image du cycle. Si a la traverse en un point suffisamment régulier, nous allons voir qu'on peut savoir comment varie 1 indice à la traversée.

* Un chemin généralisé joignant b à l'infini est une application continue M d'une demi-droite de $\mathbb{R}$, $[0, +\infty[$ Par exemple,dans E , avec $M(o) = b$; et $\lim_{t \to +\infty} \|M(t) - b\| = +\infty$.

Soit $H|\vec{\Sigma}$ un cycle de dimension $N-1$, dans un espace affine orienté $\vec{E}$ de dimension N. Soit a_0 un point de $H(\Sigma)$. On dira que $a_0 \in H(\Sigma)$ est régulier sur l'image du cycle, s'il n'a qu'une seule image réciproque α_0 par H, et s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de a_0 dans E et un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de α_0 dans Σ, tels que $H^{-1}(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$, et que H soit un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur une hypersurface de classe C^1, $H(\mathcal{U}) = \Sigma_0$, de $\mathcal{V}$. En utilisant les théorèmes des fonctions réciproques et du rang constant (théorème 29 et 33 quinto du chapitre III) et la compacité de Σ, on démontre que ces propriétés sont vérifiées, dès que a_0 n'a qu'une image réciproque α_0 dans Σ, que H est C^1 au voisinage de α_0, et que $H'(\alpha_0)$ est une application injective, ou de rang $N-1$, de $\vec{T}(\alpha_0\,;\Sigma)$ dans $\vec{E}$.

Alors H transporte l'orientation de $\mathcal{U}$ (définie par $\vec{\Sigma}$) sur une certaine orientation de la variété $\Sigma_0 = H(\mathcal{U})$; d'où une orientation transversale de cette hypersurface, associée à son orientation par l'orientation donnée dans $\vec{E}$. On pourra alors dire qu'un point variable a traverse le cycle en a_0 dans le sens positif, s'il décrit une trajectoire de classe C^1, $t \to a(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $a(t_0) = a_0$, $a(t) \notin H(\Sigma)$ pour $t \neq t_0$, et si le vecteur vitesse à l'instant t_0 est transversal positif pour Σ_0.



Théorème 63 - <u>Soit $H|\vec{\Sigma}$ un cycle, de dimension $N-1$ dans un espace affine orienté $\vec{E}$ de dimension N. Lorsqu'un point a de E traverse l'image du cycle en un point régulier dans le sens positif, l'indice du cycle par rapport à a diminue d'une unité.</u>

<u>Démonstration</u> - Conservons les notations introduites avant l'énoncé du théorème. Considérons les 2 extrémités $a_1 = a(t_1)$, $a_2 = a(t_2)$, de la trajectoire considérée. Nous voulons montrer que

$$(\text{VI},8;60)\qquad \begin{cases} I(H|\vec{\Sigma}\,;\,a_2) = I(H|\vec{\Sigma}\,;\,a_1) - 1 \quad \text{ou} \\ I_2 = I_1 - 1\,. \end{cases}$$

En utilisant des translations, cela revient à dire que :

(VI,8;61) $$I\left(H+\overrightarrow{a_1-a_2}\,\middle|\,\vec{\Sigma}\,;a_1\right) = I\left(H\,\middle|\,\vec{\Sigma}\,;a_1\right)-1$$

Nous avons maintenant à comparer les indices I_2 et I_1 de 2 cycles différents, par rapport au même point a_1 .

Mais il existe une homotopie dans E qui fait passer d'un cycle à l'autre : l'application $\tilde{H}$ de $[t_1,t_2]\times\Sigma$ dans E définie par

(VI,8;62) $$(t,x)\to\tilde{H}(t,x) = H(x)+\overrightarrow{a_1-a(t)}$$

On peut, pour calculer les Indices I_2 et I_1 , remplacer $H+\overrightarrow{a_1-a_2}\,|\,\vec{\Sigma}$ et $H\,|\,\vec{\Sigma}$ par les cycles équivalents $\tilde{H}\,|\,\{t_2\}\times\vec{\Sigma}$ et $\tilde{H}\,|\,\{t_1\}\times\vec{\Sigma}$, et appliquer la formule (VI,8;) (où $[0,1]$ est remplacé par $[t_1,t_2]$) :

(VI,8;63) $$\left\{\begin{aligned} &\tilde{H}\,|\,\{t_2\}\times\vec{\Sigma}+\tilde{H}\,|\,\{t_1\}\times\vec{\Sigma}\\ &\quad=\tilde{H}\,|\,b\left([t_1,t_2]\times\vec{\Sigma}\right)\end{aligned}\right.$$

La différence cherchée I_2-I_1 étant l'indice en a_1 du cycle du premier membre.

Mais nous nous trouvons exactement dans les conditions d'application du premier cas de la première partie de la démonstration du théorème 61.

Le cycle écrit au 2ème membre est un bord dans E. En outre, l'image réciproque de a_1 par $\tilde{H}$ est l'unique point (t,x) de $[t_1,t_2]\times\Sigma$ tel que

(VI,8;64) $$\overrightarrow{H(x)-a(t)} = \vec{0}\ ,$$

c'est-à-dire le point (t_0,α_0) $(H(\alpha_0)=a_0)$, puisque la trajectoire est supposée rencontrer Σ au seul point a_0 , correspondant à l'instant t_0 . Au voisinage de ce point, $\tilde{H}$ est de classe C^1 , puisque la trajectoire est de classe C^1 , et que H est C^1 au voisinage de α_0 . D'autre part, $\tilde{H}'(t_0,\alpha_0)$ se calcule aisément; en notation différentielle, elle s'écrit :

$$
(\text{VI},8;65)\quad \left\{ \begin{aligned} &(dt, d\vec{\xi}) \to \frac{\partial \tilde{H}'}{\partial t}(t_0,\alpha_0)\,dt + \frac{\partial \tilde{H}'}{\partial \xi}(t_0,\alpha_0)\cdot \vec{d\xi} \\ &\qquad = -\vec{a}'(t_0)\,dt + H'(\alpha_0)\cdot \vec{d\xi} \end{aligned} \right.
$$

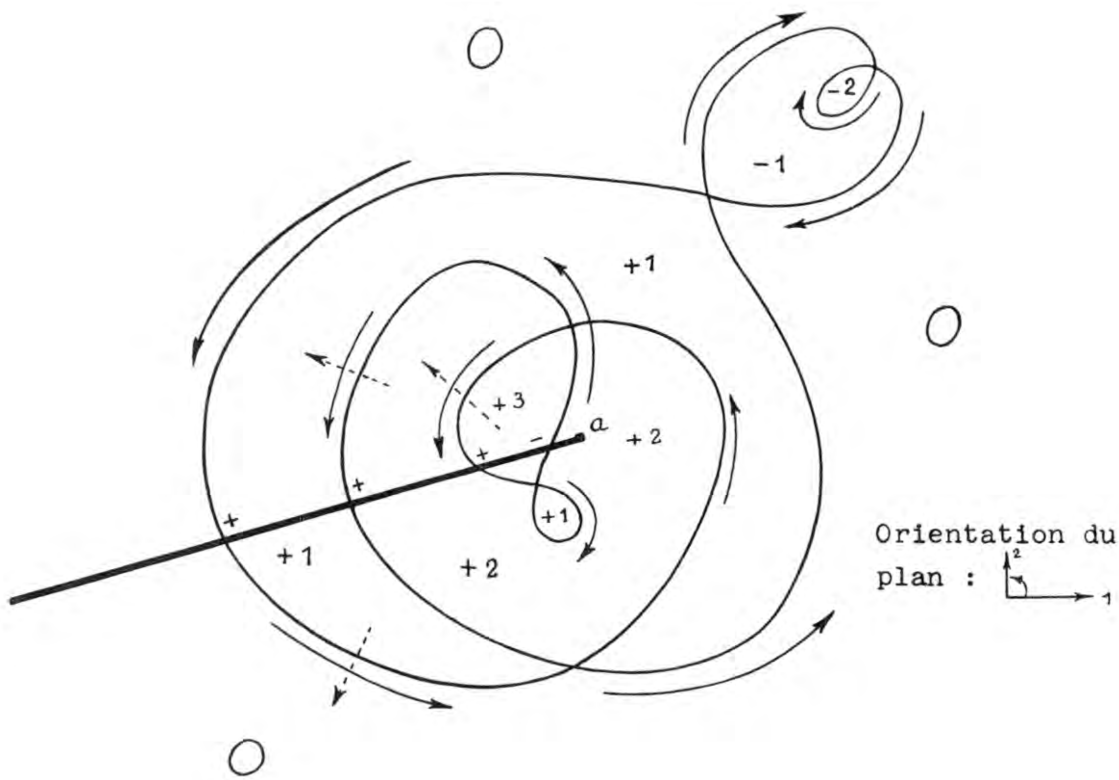
Comme $H'(\alpha_0)$ est de rang $\dot{N}-1$, $H'(\alpha_0)$ transforme $\vec{T}(\alpha_0;\Sigma)$ en $\vec{T}(a_0;\Sigma_0)$; comme $\vec{a}'(t_0)$ est transversal à $\vec{T}(a_0;\Sigma)$, $\tilde{H}'(t_0,\alpha_0)$ transforme $\vec{T}\big((t_0,\alpha_0);[t_1,t_2]\times\Sigma\big)$ en $\vec{E}$, donc elle est biendérang N. En outre, elle transforme le vecteur unitaire positif tangent à $[t_1,t_2]$ en le vecteur $-\vec{a}'(t_0)$, transversal négatif par rapport à Σ_0 ; et une base positive de $\vec{T}(\alpha_0;\hat{\Sigma})$ en une base positive de $\vec{T}(a_0;\hat{\Sigma}_0)$, puisque l'orientation de $\hat{\Sigma}_0$ est transportée de celle de $\hat{\Sigma}$ par H . Donc elle transforme une base positive de $\vec{T}\big((t,\alpha_0);[\overrightarrow{t_1,t_2}]\times\hat{\Sigma}\big)$ **en une base** **négative** de $\hat{\vec{E}}$.

Ce qui a été dit, dans le Résultat à la fin du ler cas de la lère partie de la démonstration du théorème 61, nous indique alors que le cycle écrit au 2ème membre de (VI,8;63) appartient, dans $E - a$, a la classe de **C°-homologie** $-(a_1^{(o)})$; donc son indice par rapport à a_1 est -1, et comme cet indice vaut $I_2 - I_1$, le théorème est démontré.

Application à la détermination [illegible] rég[illegible] l'espace définies par un cycle

Considérons, par **exemple,le** cycle **défini** par la figure qui suit. Nous le considérerons comme un cycle singulier, image d'un cercle trigonométrique. Ce cercle trigonométrique ayant l'orientation canonique habituelle, le cycle peut être considéré comme une courbe ayant un sens de parcours indiqué par les flèches. Alors, dans chaque région de son complémentaire, l'indice est une constante; naturellement cet indice au point a n'est pas bien difficile à connaître, en calculant $\frac{1}{2\pi}\int d\varphi_a$

ou la variation de l'argument (d'origine a). Mais on le fait de manière particulièrement rapide, en remarquant que, dans la composante connexe de l'infini, c'est-k-dire pour les points suffisamment éloignés, l'indice est nul, et en utilisant le fait qu'à chaque fois qu'on traverse la courbe dans le sens positif (resp. négatif) l'indice augmente de -1 (resp. $+1$).



- Les flèches indiquent le sens de parcours, les flèches pointillées le sens transversal > 0 (Rappelons qu'un vecteur transversal positif, suivi d'un vecteur tangent positif, donne une base positive du plan orienté !)

Il nous suffira dans le cas de la figure, pour nous trouver dans les conditions d'application du théorème, d'éviter de franchir la courbe en des points singuliers.

Corollaire 1 - Soit $H \,|\, \widetilde{\Sigma}$ Un cycle d'un espace affine orienté E, et a un point n'appartenant pas a son image. Supposons qu'on puisse construire un chemin allant du point a à l'infini, qui ne rencontre qu'un nombre fini de fois l'image du cycle, que chacun de ces points de rencontre soit régulier pour l'image du cycle, et que le chemin la traverse transversalement. Alors l'indice $I(a)$ du cycle par rapport au point a est le nombre algébrique d'intersections du chemin et du cycle, en appelant ; nombre algébrique de point d'intersections, le nombre des points d'intersection où le chemin traverse le cycle (en allant de a à l' ∞) dans le sens positif, diminué du nombre des points d'intersection où le chemin traverse le cycle dans le sens négatif.

La chose est évidente, puisqu'à chaque traversée, l'indice augmente de + 1 ou - 1 dans les conditions indiquées par le théorème, et que, pour les points suffisamment éloignés , l'indice est nul. Si donc i est le nombre algébrique d'intersections, on a $I(a) - i = 0$ ou $I(a) = i$. On peut traduire

ce procédé précisément en calculant, sur la figure, l'indice du point a , à l'aide du chemin marqué en traits gras, allant de a à l'infini. Le résultat est évidemment indépendant du chemin choisi.

Corollaire 2 - Soit Σ une hypersurface connexe, compacte, orientable, de classe C^1 d'un espace affine E de dimension finie. Alors Σ partage l'espace en 2 régions; l'une, la composante connexe de l'infini, où l'indice de Σ est nul, l'autre, bornée, où l'indice de Σ vaut ± 1, suivant l'orientation de Σ et de E .

D'après la remarque 3° après le théorème 28, Σ partage bien E en 2 régions, l'une reliée à l'infini et l'autre bornée. Si $\mathring{V}$ est la région bornée, $V = \mathring{V} \cup \Sigma$ est une variété avec bord, orientée si on oriente E , de bord Σ . Si on applique le théorème 60, on voit alors que $\widetilde{\Sigma}$ est dans la classe de C^1-homologie de $E - a$: 0 si $a \in \complement V$, $(a^{(1)})$ si $a \in \mathring{V}$ et si $\widetilde{\Sigma}$ a l'orientation $\widetilde{b}V$, $-(a^{(1)})$ si $a \in \mathring{V}$ et si $\widetilde{\Sigma} = \widetilde{b}V$. Donc tout résulte de ce qui a Bté dit bien auparavant.

Mais, dans le fait que Σ partageait E en 2 régions, nous avons démontré, au théorème 28, Σ étant connexe, qu'il y avait au plus 2 régions; pour montrer qu'il y en avait au moins 2, nous avons utilisé le fait que Σ avait une équation normale, d'après une remarque non démontrée et, en fait très difficile a démontrer, du cours de 1ère partie. Or ici nous avons de quoi donner maintenant une démonstration du corollaire qui ne s appuie pas sur cette remarque.

Nous garderons, de la démonstration du théorème 28, ce qui a été complètement montré, a savoir qu'il y a au plus 2 régions. Ensuite, Σ étant de classe C' , et supposée orientée dans $\vec{E}$ orienté, elle a une orientation transversale, et on peut la traverser transversalement en l'un quelconque de ses points. On fait alors changer l'indice de Σ d'une unité. Il y a donc au moins 2 valeurs de l'indice pour les points a de $\complement\Sigma$. Donc il y a au moins 2 régions. donc exactement 2. Le raisonnement de la page 109 montre alors bien qu'il y a une région contenant le complémentaire de toute boule fermée contenant Σ, ou composante connexe de l'infini; l'indice y est nul, d'après le corollaire 4 du théorème 62. L'autre région est alors bornée et l'indice y vaut $\pm$ 1.

Nous avons démontré moins que ce que nous avions admis auparavant; nous supposons ici Σ compacte et orientable, alors qu'avant nous la supposions seulement fermée et nous démontrions qu'elle était orientable. On fait ce qu'on peut !

Mais, lorsque Σ est compacte et non seulement fermée, on peut parler d'indices, et notre résultat actuel, sur les Indices 0 et $\pm$ 1 des 2 régions, est un complément intéressant.

Classes résiduelles d'un cocycle à singularités isolées :

Soient Ω un ouvert d'un espace affine orienté $\vec{E}$ de dimension N , $A=\{a_1, a_2, \dots, a_\ell\}$ un ensemble fini de Ω , et $\vec{\omega}$ un cocycle de degré N-1 de $\Omega - A$, a valeurs dans un Banach $\vec{F}$.

On appelle alors classe résiduelle de $\vec{\omega}$, au point a_i de A l'intégrale de $\vec{\omega}$ sur n'importe quel $\mathcal{C}$-cycle de la classe de C^1-homologie $(a_i^{(1)})$ dans $\Omega - A$ (tous ces cycles étant C^1-homologues, l'intégrale est la même). Cette classe résiduelle est un vecteur de $\vec{F}$ (un scalaire, si ω est à valeurs scalaires). Elle dépend de l'orientation de $\vec{E}$, et change de signe en même temps que cette orientation.

Cette classe ne dépend naturellement que du comportement de la forme $\vec{\omega}$ au voisinage de a_i, puisqu'on peut trouver de tels cycles $\vec{\sigma}_i$ arbitrairement voisins de a_i. On voit en particulier que, si $\vec{\omega}$ est bornée au voisinage du point a_i, ou plus généralement si sa norme $\|\vec{\omega}(x)\|$ est infiniment petite devant $\frac{1}{\|x - a_i\|^{N-1}}$ lorsque x tend vers a_i (pour n'importe quelle norme dans E), sa classe résiduelle est nécessairement nulle au point a_i.

En effet, si nous prenons une sphère $\vec{\sigma}_i$ de centre a_i et de rayon ρ, munie de son orientation canonique, on a, pour ρ assez petit (pour que $\vec{\sigma}_i$ soit dans la classe (a"))), la formule de majoration (VI,6;31) :

$$\left\| \int_{\vec{\sigma}_i} \vec{\omega} \right\| \leqslant \left(\operatorname*{Max}_{\|x - a\| = \rho} \|\vec{\omega}(x)\| \right) S_N \, \rho^{N-1} \quad . \tag{VI,8;66}$$

Cette formule montre, en vertu des hypothèses faites sur le comportement de ω au voisinage de a_i, que l'intégrale sur $\vec{\sigma}_i$ tend vers 0 lorsque ρ tend vers 0 ; or elle est constante et égale à la classe résiduelle, donc cette classe résiduelle est bien nulle. Si nous prenons comme forme différentielle ω la forme différentielle ω_a définissant les angles solides relativement au point a, alors sa classe résiduelle en a est l'aire S_N des sphères de rayon 1 dans E.

Théorème 64 - Soit $\vec{E}$ un espace affine orienté de dimension N. Soit Ω un ouvert de E, A un ensemble fini de points de Ω. Soit d'autre part $\vec{\omega}$ un cocycle de degré N-1 dans $\Omega - A$, et soit $\vec{\Gamma}$ un C^1-cycle de $\Omega - A$, ou un C^0-cycle de longueur finie si $N=2\ (N-1=1)$, C^0-homologue à 0 dans Ω.

Alors, si l'on appelle R_i la classe résiduelle de $\vec{\omega}$ au point a_i, et μ_i l'indice du cycle $\vec{\Gamma}$ par rapport à a_i, on a la formule

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{\omega} = \sum_{i=1}^{l} \mu_i R_i \ * \tag{VI,8;67}$$

Démonstration - D'après le théorème 61, $\vec{\Gamma}$ est C^0-homologue à une combinaison $\sum \mu_i \vec{\sigma}_i$, dans $\Omega - A$. Comme alors $\vec{\omega}$ est fermée, son intégrale sur $\vec{\Gamma}$ est égale à son intégrale sur le C^∞-cycle $\sum \mu_i \vec{\sigma}_i$ (d'après le corollaire 4 du théorème 54, si $\vec{\Gamma}$ est de classe C^1, et le corollaire 6 si $\vec{\Gamma}$ est un C^0-cycle de longueur finie et $N=2$), et, d'après la définition même des classes résiduelles, cette intégrale est égale au deuxième membre de (VI,8;67).

* Si on change l'orientation de E, on change de signe les

Degré topologique d'une application continue

Soit $\overset{\circ}{V} \subset \overset{\approx}{V}$ une variété de classe C^1, avec bord compacte, orientée de dimension N, et soit H une application continue de V dans un espace affine orienté E, de même dimension N. On appelle degré topologique de H, en un point a de E, n'appartenant pas à l'image $H(\mathscr{b}V)$ du bord $\mathscr{b}V$ de V, l'indice du cycle $H|\mathscr{b}V$ par rapport au point a * Il résulte du théorème 61 (1er cas de la 1ère partie de la démonstration) qu'on possède une interprétation géométrique simple de ce degré topologique, si l'image réciproque du point a ne contient qu'un nombre fini de points de $\overset{\circ}{V}$, au voisinage de chacun desquels H est de classe C^1, et en chacun desquels l'application dérivée de H est du rang maximum N. Dans ce cas, en effet, le degré topologique de l'application est le nombre des images réciproques de a, au voisinage desquelles H conserve l'orientation, diminué du nombre des images réciproques de a au voisinage desquelles H inverse l'orientation. Il n'existe aucune interprétation de ce genre dans les autres cas. Toutefois, ce degré topologique est constant lorsque a varie continûment sans rencontrer $H(\mathscr{b}V)$. Or, d'après ce que nous avons vu dans la démonstration du théorème 61 (2ème cas de la 1ère partie), si l'on suppose simplement que H est de classe C', et si a est un point quelconque n'appartenant pas à $H(\mathscr{b}V)$, pour tous les points suffisamment voisins de a, le degré topologique est le même, et, pour presque tous ces points, il admet l'interprétation géométrique précédente. Si H est seulement continue, on l'approche par une application C^1, et on retombe dans la situation précédente. D'autre part, un point important reste toujours vrai :

* Si on change une des deux orientations, celle de V ou celle de E, le degré topologique change de signe; si on change les deux, il ne change pas.

Si V n'a pas de bord, $\mathscr{b}V = \emptyset$, le degré topologique est forcément nul.

Théorème **65** - Si a n'est pas recouvert par l'image **H(V)**, alors le degré topologique de **H** au point a est certainement nul.

En effet, dans ce cas là, $H|\hat{bV}$ est le bord de $H|\hat{V}$, et par conséquent C°-homologue à **0** dans le complémentaire de a ; donc son Indice au point a est nul.

La réciproque est évidemment fausse. Il suffit, par exemple, que a ait **2** images réciproques, au voisinage de chacune desquelles H soit C^1 et de dérivée de rang **N**, et que **H** conserve les orientations au voisinage de l'une et les inverse au voisinage de l'autre, pour que le degré topologique de H en a soit nul. D'ailleurs, si **V** n'a pas de bord, $bV = \emptyset$, le degré topologique est nul en tout point a, même si a est dans $H(V)$. Il peut d'ailleurs arriver, pour un degré topologique quelconque et en particulier nul, que a ait tout un continu d'images réciproques !

Par contre, d'après le théorème, si le degré topologique en a est $\neq 0$, a possède une image réciproque non vide : l'équation $H(x) = a$ a au moins une solution dans $\hat{V}$ (Si le degré topologique est $m \neq \pm 1$, et $\neq 0$, il se peut que cette équation n'ait quand même qu'une seule solution α, qui est alors en quelque sorte "multiple"; si H est C^1 au voisinage de α, $H'(\alpha)$ est alors certainement de rang< N).

L'existence d'un degré topologique $\neq 0$ est un puissant outil pour montrer l'existence de solutions d'une équation. Nous en verrons des exemples plus loin.

Le degré topologique de l'application **H** de $\hat{V}$ dans $\hat{E}$, au point a, s'appelle aussi nombre algébrique de fois que l'image de V par H recouvre a, à cause de l'interprétation géométrique donnée ci-dessus.

Théorème **66** - Si l'application H_λ dépend d'un paramètre λ, et varie continuement avec λ dans les conditions indiquées au corollaire 1 du théorème **62**, si le point a_λ dépend du même paramètre λ et varie continuement avec λ, et si, pour aucune valeur de λ, le point a_λ n'appartient à l'image par H_λ du bord bV, alors le degré topologique de l'application H_λ de $\hat{V}$ au point a_λ dépend continuement de λ ; il reste constant si λ varie dans une partie connexe.

Conséquence évidente du théorème **62**.

Voyons maintenant comment, pour H et a fixés, le degré topologique dépend de V. On se rend compte que, si on fait varier V dans $\mathcal{V}$ de manière que l'image réciproque $H^{-1}(\{a\})$ dans V ne varie pas, le degré topologique ne varie pas.

Théorème 67 - Soit H une application continue d'une variété orientée $\mathcal{V}$, de dimension N, dans un espace affine orienté $\vec{E}$ de dimension N. Soient V_1 et V_2 deux variétés avec bord, compactes, de $\mathcal{V}$. Si les images réciproques $H^{-1}(\{a\}) \cap V_1$ et $H^{-1}\{a\} \cap V_2$ coïncident, et ne rencontrent pas ∂V_1 et ∂V, alors les degrés topologiques, au point a de $\vec{E}$, des applications H de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ dans $\vec{E}$, sont égaux.

Démonstration - Posons $W = V_1 \cup V_2$, $K_1 = H(W - \overset{\circ}{V}_1)$, $K_2 = H(W - \overset{\circ}{V}_2)$.

W est un compact de V, K_1 et K_2 sont des compacts de E, comme images de compacts par H. Appelons δ le minimum des distances (pour une norme quelconque sur E) de a à K_1 et K_2. Si nous remplaçons l'application H du compact W dans E par une autre H_0, et a par un autre point a_0, avec $|||\overrightarrow{H - H_0}||| < \frac{\delta}{2}$, $\|\overrightarrow{a - a_0}\| < \frac{\delta}{2}$, alors $H_0(W - \overset{\circ}{V}_1)$ et $H_0(W - \overset{\circ}{V}_2)$ ne contiendront toujours pas a_0 ; donc $H_0^{-1}(\{a_0\})$, dans W, reste dans $\overset{\circ}{V}_1 \cap \overset{\circ}{V}_2$; ou encore, les images réciproques par H_0, de a_0, dans $\overset{\circ}{V}_1$ et $\overset{\circ}{V}_2$, coïncident.

Mais, dans ce cadre, on peut choisir H_0 de classe C^1 sur W (théorème 52), de manière que $H_0^{-1}(\{a_0\})$ soit un ensemble fini, et qu'en chaque point de cet ensemble, H_0' soit de rang N. (2ème cas de la 1ère partie de la démonstration du théorème 61). Alors l'expression des indices de $H_0|\overrightarrow{\partial V_1}$ et $H_0|\overrightarrow{\partial V_2}$ au point a_0, par le 1er cas de la 1ère partie de la démonstration du même théorème, comme nombre de points de l'image réciproque par H_0, de a_0, dans $\overset{\circ}{V}_1$ et $\overset{\circ}{V}_2$, où H_0' conserve l'orientation, diminué du nombre de points de l'image réciproque où elle l'inverse, montre bien que ces deux indices sont égaux. Les indices de $H_0|\overrightarrow{\partial V_1}$ et $H_0|\overrightarrow{\partial V_2}$ en a_0, sont les mêmes que ceux de $H|\overrightarrow{\partial V_1}$ et $H|\overrightarrow{\partial V_2}$ en a (théorème 62); et ce sont précisément les degrés topologiques de $H|\vec{V}_1$ et $H|\vec{V}_2$ en a.

Théorème de Rouché - 68 - Soit H une application continue d'une variété compacte orientée avec bord $\mathcal{V}$, de dimension N, dans un ouvert Ω d'un espace affine normé orienté $\vec{E}$ de dimension N. Soit d'autre part K une application continue de V dans l'espace vectoriel associé $\vec{E}$. Si l'image par H du bord ℓV ne contient pas a ~~, et si~~ en tout point x du bord, on a l'inégalité :

$$\text{(VI,8;68)} \qquad \|\vec{K}(x)\| < \|\overrightarrow{H(x) - a}\| ,$$

alors $(H+\vec{K})(\ell V)$ ne contient pas a, et l'application $H+\vec{K}$ admet, au point a, le même degré topologique que l'application H.

Si on a seulement une inégalité (VI,8;68) avec $\leq$ au lieu de $<$, il n'est plus certain que $(H+\vec{K})(\ell V)$ ne contienne pas a, mais, si c'est vrai, la conclusion subsiste.

Démonstration Supposons d'abord une inégalité stricte $<$.

D'âpres (VI,8;48), pour tout x de ℓV, le segment $[H(x), H(x)+\vec{K}(x)]$ est tout entier dans $\complement a$; le lemme du théorème 51 nous montre alors que les cycles $H|\vec{\ell V}$ et $H+\vec{K}|\vec{\ell V}$ sont homotopes dans $\complement a$, donc homologues, et ont même Indice en a, d'où le résultat.

Supposons maintenant une inégalité large. $\leq$. Alors $(H+\vec{K})(\ell V)$ peut contenir a (exemple : $\vec{E}$ est un espace vectoriel, $\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{K}=-\vec{H}$), et alors le degré topologique n'a plus ie sens. Mais, s'il ne le contient pas, le degré topologique est le même que celui de $H+(1-L)\vec{K}$ pour $\varepsilon>0$ assez faible (théorème 66), et, avec $(1-\varepsilon)\vec{K}$, on a l'inégalité stricte $<$, donc le degré topologique est encore le même que celui de H.

Corollaire 1 - Théorème de d'Alembert - Tout polynome d'une variable complexe, à coefficients complexes, de degré m, admet m racines, si l'on compte chacune avec son ordre de multiplicité.

Avant de démontrer ce corollaire, nous voyons bien que, comme il est indiqué plus haut, nous appliquons la théorie du degré topologique à la démonstration de l'existence de racines d'une équation.

Démonstration - Comme toujours, il suffit naturellement de démontrer que le polynôme admet au moins une racine, si $m \geqslant 1$. On peut trouver un nombre $R > 0$ tel que, si a_0 est le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme, on ait, pour $|z| \geqslant R$, l'inégalité :

(VI,8;69) $$\left|P(z) - a_0 z^m\right| < \left|a_0 z^m\right| .$$

Le théorème de Rouché est donc applicable, avec $H(z) = a_0 z^m$, $K(z) = P(z) - a_0 z^m$. Il nous montre que l'application, définie par le polynôme P, du disque $|z| \leqslant R$ dans le plan complexe, a le même degré topologique, au point 0, que l'application $z \to a_0 z^m$. Or, d'après la définition même de ce degré, celui-ci est l'indice, par rapport à 0 du cycle défini par l'application $H : z \longrightarrow Z = a_0 z^m$, du cercle $\vec{\Gamma}$: $|z| = R$, muni de son orientation canonique, dans $\mathbb{C}$. Cet indice, d'après (VI,8;57), vaut :

(VI,8;70) $$\frac{1}{2i\pi}\int_{H|\vec{\Gamma}} \frac{dZ}{Z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\vec{\Gamma}} m \frac{dz}{z}$$

c'est-à-dire m fois l'indice de $\vec{\Gamma}$, donc m.

Nous avons donc démontré que l'application définie par P, du disque $|z| \leqslant R$, dans le plan complexe $\mathbb{C}$, a le degré topologique m au point 0. Comme $m \neq 0$, il existe bien au moins une racine dans ce disque. Une récurrence permet, à partir de l'existence d'une racine, de montrer l'existence de m racines; mais nous avons bien aussi le soupçon qu'on peut directement aboutir à ce résultat, en utilisant le fait que le degré topologique est m.

C'est bien ce que nous verrons au théorème ? du chapitre VII.

Corollaire 2 - Soit E un espace affine normé de dimension finie sur le corps des réels. Toute application continue, d'une boule fermée de cet espace dans elle-même, admet au moins un point fixe.

Ici encore, nous avons une application du degré topologique à la démonstration de l'existence de racines d'une équation.

Démonstration - 1°/ Supposons d'abord que la norme de E soit euclidienne.

Soit f l'application continue donnée, de la boule B de centre b et de rayon R, dans elle-même. Orientons $\vec{E}$ n'importe comment, ce qui oriente E et B . Appe'lons $\vec{H}$ l'application $x \to \overrightarrow{x-a}$ de $\hat{B}$ dans $\vec{E}$, de degré topologique 1 en $\vec{o}$ (car $\vec{o}$ a une seule image réciproque, a., où le jacobien de $\vec{H}$ est $1 > 0$), et $\vec{K}$ l'application $x \to -(\overrightarrow{f(x)-a})$ de $\hat{B}$ dans? *

On a, avec H et $\vec{K}$, et $\vec{a} = \vec{o} \in \hat{\vec{E}}$, l'inégalité (VI,8;68) avec $\leqslant$, pour $x \in \mathring{b} B$, puisque f applique B dans B : $\|\overrightarrow{f(x)-a}\| \leqslant R = \|\overrightarrow{x-a}\|$. Ici, $(H+\vec{K})(x) = \overrightarrow{x-f(x)}$

Donc; d'après le théorème de Rouché :

a) ou bien l'image de $\mathring{b} B$ par $H+\vec{K}$ contient $\vec{o}$, et il existe un point x de $\mathring{b} B$, donc de B , tel que $(H+\vec{K})(x) = \vec{o}$ ou $x = f(x)$;

b) ou bien il n'en est pas ainsi, alors le degré topologique de $(H+K)(\vec{x})$ en $\vec{o}$ est +1, et il existe un point x de $\hat{B}$, donc de B , tel que $x = f(x)$.

Dans les 2 cas, le corollaire est démontré.

2°/ Supposons maintenant la norme de E arbitraire. La méthode précédente n'est plus applicable, car la sphère n'est plus nécessairement une variété ** .

On remarquera alors que la propriété à démontrer est de nature purement topologique. Vraie pour une boule euclidienne, elle l'est pour tout espace topologique homéomorphe à une boule euclidienne. Or les boules relatives à 2 normes quelconques de E sont homéomorphes, donc toute boule est homdomorphe à une boule euclidienne. Soient en effet $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ 2 normes quelconques de $\vec{E}$. Considérons l'application h de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$:

(VI,8;71) $$\vec{x} \longrightarrow h(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2} \vec{x} \text{ pour } \vec{x} \neq \vec{o}, \ \vec{o} \text{ pour } \vec{x} = \vec{o}.$$

* Les degrés topologiques sont,ici, indépendants de l'orientation choisie pour $\vec{E}$, car, si on change celle de $\vec{E}$, on change en même temps celle de E donc de B .

** Pour la norme $\|(x_1, x_2, \cdots, x_N)\| = \underset{i=1,2,\dots,N}{\mathrm{Max}} |x_i|$ dans $\mathbb{R}^N$,la boule est un cube. Mals elle peut encore être bien plus compliquée !

C'est une application continue en tout point $\neq \vec{0}$ car les normes sont continues et qu"alors le dénominateur n'est pas nul. Elle est aussi continue à l'origine, car 2 normes quelconques de $\vec{E}$ sont équivalentes (théorème 13 du chapitre II), alors $\frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2}$ est borné (théorème 12 du chapitre II) et $\vec{h}(\vec{x})$ tend vers $\vec{0}$ quand $\vec{x}$ tend vers $\vec{0}$, On a :

$$\|\vec{h}(\vec{x})\|_2 = \|\vec{x}\|_1 \quad \left(\text{et } \|\vec{h}(\vec{x})\|_1 = \frac{\|\vec{x}\|_1^2}{\|\vec{x}\|_2} \right); \tag{VI, 8; 72}$$

donc $\vec{h}$ applique la boule unité B_1, pour la norme $\| \quad \|_1$, dans la boule unité B_2 pour la norme $\| \quad \|_2$.

Mais $\vec{h}$ a une application réciproque $\vec{k}$:

$$\vec{y} \to \vec{k}(\vec{y}) = \frac{\|\vec{y}\|_2}{\|\vec{y}\|_1} \vec{y} \quad ^* \quad , \tag{VI, 8; 73}$$

qui est aussi continue de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$ et applique B_2 dans B_1, donc $\vec{h}$ est un homéomorphisme de B_1 sur B_2, ce qui achève la démonstration du corollaire dans le cas général.

Remarques - 1°/ Cette démonstration suppose essentiellement que F soit de dimension finie, d'une part pour 1 application de la théorie du degré topologique, d'autre part, dans 2°, pour que toutes les normes soient équivalentes. On peut démontrer qu'un théorème analogue serait inexact si E est un espace affine normé, de dimension infinie. Mais on a le remarquable théorème suivant. que nous admettrons :

Théorème 68 bis - (Théorème du point fixe de Schauder):

Boit E un Banach. Toute application continue d'un compact convexe K de E dans lui-même admet au moins un point fixe.

Si E est de dimension finie, les boules sont bien compactes convexes.

* Il suffit, pour le voir, de montrer que $\vec{h} \circ \vec{k}$ et $\vec{k} \circ \vec{h}$ sont l'identité. Or on a, par exemple :

$$\vec{k} \circ \vec{h}(\vec{x}) = \vec{k}\left[\frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2} \vec{x}\right] = \frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2} \vec{k}(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2} \frac{\|\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_1} \vec{x} = \vec{x}$$

2°/ Ce tneorème du point fixe est sans rapport avec le théorème 46 du chapitre II. Il suppose des conditions bien moins restrictives, car H n'est pas nécessairement une contraction. Par contre, évidemment, il montre l'existence d'un point fixe, mais non pas son unicité; d'ailleurs, si H est l'application identique, tous l'es points de la boule sont fixes.

Théorème 69 - Soit $X : x \longrightarrow \vec{X}(x)$, un champ continu de vecteurs tangents sur une sphère d'un espace euclidien E de dimension finie N . Alors, si N est impair, il existe au moins un point x de la sphère, 0-L le vecteur $\vec{X}(x)$ est nul.

Démonstration - Orientons $\vec{E}$ n'importe comment. On peut toujours supposer que Σ est la sphère unité de E . Comme la sphère Σ est une variété compacte de $\vec{E}$, que nous pouvons munir de son orientation canonique dans $\vec{E}$, $\vec{X}$ peut être considéré comme définissant une application continue de cette sphère $\hat{\Sigma}$ dans $\vec{E}$, donc un cycle $\vec{X}\,|\,\hat{\Sigma}$ de $\vec{E}$. Supposons que le champ $\vec{X}$ ne soit jamais nul; alors l'image de ce cycle ne contient pas l'origine, et il a un indice en $\vec{0}$. Désignons par $\vec{Y}$ le champ des vecteurs unitaires normaux sortant de la sphère. Il définit lui aussi un cycle $\vec{Y}\,|\,\hat{\Sigma}$ de $\vec{E}$, et l'on sait que l'indice de ce cycle par rapport à l'origine est égal à + 1, puisque Y est l'application identique de Σ dans $\vec{E}$, Par ailleurs, quel que soit t , tel que $0 \leqslant t < 1$, le vecteur $t\vec{X}(\vec{x}) + (1-t)\,\vec{Y}(\vec{x})$ est $\neq \vec{0}$. Si donc on considère l'application de $[0,1] \times \Sigma$ dans $\vec{E}$, définie par

(VI,8;74) $$(t,\vec{x}) \to t\,\vec{X}(\vec{x}) + (1-t)\,\vec{Y}(\vec{x}) \,,$$

elle définit une homotopie entre le cycle $\vec{X}\,|\,\hat{\Sigma}$ et le cycle $\vec{Y}\,|\,\hat{\Sigma}$ dans $\complement\vec{0}$. Il en résulte que l'indice par rapport à $\vec{0}$ du cycle $\vec{X}\,|\,\hat{\Sigma}$ est aussi égal à + 1.

Appelons maintenant $\vec{Z}$ le champ continu des vecteurs unitaires normaux rentrant dans la sphère. L'application?? de $\hat{\Sigma}$ dans $\vec{E}$ définit encore un cycle. Son indice peut se calculer par l'intégrale de l'angle solide ω_0 , par rapport au point0 , sous la forme :

(VI,8;75) $$I\left(\vec{Z}\,|\,\hat{\Sigma}\,;\vec{0}\right) = \frac{1}{S_N}\int_{\vec{Z}|\hat{\Sigma}} \omega_0 = \frac{1}{S_N}\int_{\hat{\Sigma}} \vec{Z}^*\omega_0 \,.$$

Mais $\vec{Z}$ n'est autre que la symétrie $\vec{x} \to -\vec{x}$ par rapport à l'origine. La formule (VI,8;51) montre alors immédiatement que $\vec{Z}^* \omega = (-1)^N \omega$, de sorte que l'on trouve la relation :

(VI,8;76) $$I(\vec{Z} \,|\, \hat{\Sigma} \,;\, \vec{0}) = \frac{(-1)^N}{S_N} \int_{\hat{\Sigma}} \omega_0 = (-1)^N$$

Alors si, maintenant, on utilise l'homotopie définie par

(VI,8;77) $$(t, \vec{x}) \to t\vec{X}(\vec{x}) + (1-t)\vec{Z}(\vec{x}),$$

le raisonnement déjà fait ci-dessus montre que le cycle $\vec{X}|\hat{\Sigma}$ a même indice, au point O, que le cycle $\vec{Z}|\hat{\Sigma}$, c'est-à-dire $(-1)^N$. Or, si N est supposé impair, on ne peut avoir $1 = (-1)^N$. Nous aboutissons donc à une contradiction, ce qui signifie que, contrairement à ce que nous avons supposé au début de la démonstration, le champ $\vec{X}$ s'annule nécessairement en au moins un point de la sphère, ce qui démontre le théorème.

Remarque - Cette démonstration ne serait évidemment plus valable pour N pair, car alors le champ sortant $\vec{Y}$ et le champ rentrant $\vec{Z}$ définissent deux cycles $\vec{Y}|\hat{\Sigma}$ et $\vec{Z}|\hat{\Sigma}$, de même Indice + 1 au point $\vec{0}$. D'ailleurs, dans ce cas, le théorème n'est plus vrai, et il existe des champs de vecteurs continus, ne s'annulant jamais sur le sphère. Si, par exemple, on considère le cercle trigonométrique $(N = 2)$, et si, en chaque point du cercle, on construit le vecteur unitaire de la demi-tangente positive, on définit bien un champ de vecteurs continu partout $\neq \vec{0}$ sur le cercle. Par des méthodes beaucoup plus compliquées, on peut construire de tels champs sur les sphères, dans des espaces euclidiens de dimension paire quelconque.

Corollaire - Soit f une application continue d'une sphère Σ d'un espace affine euclidien E , de dimension N , dans elle-même. Si N est impair, il existe au moins un point x de Σ , dont l'image par f soit x ou le point diamétralement opposé à x sur Σ .

Démonstration - Considérons le champ continu de vecteurs $x \to \overrightarrow{f(x) - x}$. Ce n'est naturellement pas un champ de vecteurs tangents.

Mais si, en chaque point ae la sphère, nous projetons orthogonalement le champ sur le plan tangent, on définit un champ continu de vecteurs tangents à la sphère. Comme alors N est impair, il existe au moins un point où cette projection est nulle, c'est-&-dire où le vecteur $\overrightarrow{f(x)-x}$ est normal. Comme $f(x)$ est un point de la sphère, cela ne peut se produire que si ce point est, ou bien x , ou bien le point diamétralement opposé à x .

Extension de la théorie du degré topologique

On peut faire une extension considérable de la théorie du degré topologique.

Soient $\hat{V}$ et $\hat{W}$ deux variétés de même dimension N , toutes les deux orientées, V étant éventuellement avec bord, mals toujours compacte, et W sans bord. Soit H une application continue de V dans W , telle que l'image par H de $\dot{b}V$ ne rencontre pas le point a de W . alors il est possible de définir le degré topologique de l'application H , au pointa; ce degré topologique possède des propriétés analogues à celles que nous avons vues plus haut. Un cas intéressant sera celui où V est une variété compacte sans bord. Alors on peut, sans restriction, définir le degré topologique de l'application H de $\hat{V}$ dans $\hat{W}$, en tout point a de W . ce degré topologique varie continuement avec a et par suite'est constant sur toute composante connexe de W .

VII
FONCTIONS DE VARIABLES COMPLEXES

§ 1 DÉRIVABILITÉ PAR RAPPORT AU CORPS DES RÉELS ET AU CORPS DES COMPLEXES

Tout ce qui a été traité dans le chapitre III du calcul différentiel était valable aussi bien par rapport au corps des réels que par rapport au corps des complexes, à l'exception de la théorie des maxima et des minima (et en particulier du calcul des variations), qui supposait essentiellement la fonction considérée à valeurs réelles. D'autre part, dans le chapitre V des équations différentielles, on considère toujours des fonctions d'une variable réelle, c'est-&-dire définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach F sur le corps des réels ou des complexes.

Comme nous l'avons dit, au début du paragraphe du Chapitre III, si E et F sont des espaces affines normés sur $\mathbb{C}$, ils sont a fortiori des espaces affines normés sur $\mathbb{R}$, et toute application d'un ouvert Ω de E dans F, dérivable par rapport à $\mathbb{C}$, est à fortiori dérivable par rapport à $\mathbb{R}$; mais, dans ce cas, l'application dérivée $'(a) en un point a de Ω se trouve être une application de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$, non seulement $\mathbb{R}$-linéaire mais aussi c-linéaire.

Inversement d'ailleurs, si f est une application de Ω dans F, qui, en un point a, est $\mathbb{R}$-dérivable, et si sa dérivée $'(a) est non seulement $\mathbb{R}$-linéaire mais aussi $\mathbb{C}$-linéaire, elle est@-dérivable de même dérivée $f'(a)$: c'est ce que montre immédiatement la définition (III,3;13).

Théorème 1

Soient $\vec{E}$ et $\vec{F}$ deux espaces vectoriels sur le corps des complexes. Pour qu'une application L de E dans $\vec{F}$, $\mathbb{R}$-linéaire, soit $\mathbb{C}$-linéaire. il faut et il suffit que, pour tout vecteur X de $\vec{E}$, on ait

(VII,1;1) $$L(i\vec{X}) = i\,L(\vec{X})$$

Si $\vec{E}$ est de dimension finie, et si $(\vec{e}_j)_{j=1,2,\ldots,n}$ est une $\mathbb{C}$-base de $\vec{E}$, il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que l'on ait, pour chacun des éléments de cette base, la relation

(VII,1;2) $$L(i\vec{e}_j) = i\,L(\vec{e}_j)$$

Démonstration

Les conditions écrites sont évidemment nécessaires, et nous devons démontrer qu'elles sont suffisantes.

Si (VII,1;1) est réalisée, et si $\lambda + i\mu$ est un nombre complexe quelconque, on aura bien

(VII,1;3) $$L((\lambda + i\mu)\vec{X}) = \lambda L(\vec{X}) + \mu L(i\vec{X}) = (\lambda + i\mu)\,L(\vec{X}),$$

ce qui prouvera bien que L est $\mathbb{C}$-linéaire.

D'autre part, pour que (VII,1;1)

soit réalisée si E est de dimension finie, il est bien suffisant, puisque L est $\mathbb{R}$-linéaire, qu'elle soit réalisée pour les éléments d'une $\mathbb{R}$-base de $\vec{E}$. Or si elle est réalisée pour les éléments $\vec{e}_j$ d'une $\mathbb{C}$-base, elle est aussi réalisée pour les éléments $i\vec{e}_j$, car celà s'écrit

$$L(i.i\vec{e}_j) = i\,L(i\vec{e}_j) \text{ ou } L(-\vec{e}_j) = i\,L(i\vec{e}_j) \text{ ou } L(i\vec{e}_j) = i\,L(\vec{e}_j),$$

et l'ensemble des $\vec{e}_j, i\vec{e}_j$ constitue bien une $\mathbb{R}$-base de $\vec{E}$,

Corollaire 1

Si E et F sont des espaces $\mathbb{C}$-affines, et si f est une application d'un ouvert Ω de E dans F, $\mathbb{R}$-dérivable au point $a \in \Omega$, Pour que f soit $\mathbb{C}$-derivable au point a,

<u>il faut et il suffit que l'on ait la relation</u>

(VII,1;4) $$f'(a).(i\vec{X}) = i f'(a).\vec{X}\ , \text{ pour } \dots\ \vec{X}\in\vec{E}.$$

<u>Remarque.</u> Reprenons le cas où E est de dimension finie et soit 0, ê,,..., $\vec{e}_n$ un @-référentiel. Soit $\vec{X}\in\vec{E}$; soient z_j ses coordonnées (complexes) par rapport aux $\vec{e}_j$, alors $\vec{X}=\sum_{j=1}^{n} z_j\,\vec{e}_j=\sum_{j=1}^{n}(x_j\vec{e}_j+y_j(i\vec{e}_j))$; donc les $x_j=\mathcal{R}e\,z_j$ et $y_j=\mathcal{I}m\,z_j$ sont les coordonnées de $\vec{X}$ par rapport à la $\mathbb{R}$-base des $\vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$. On peut dire que, si on appelle x_j et y_j les fonctions coordonnées par rapport au $\mathbb{R}$-référentiel formé de 0 et des $\vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$, alors les $z_j=x_j+iy_j$ sont les fonctions coordonnées par rapport au Q-référentiel formé de 0 et des $\vec{e}_i$. Si f est $\mathbb{R}$-dérivable, elle a des dérivées partielles $f'(a).\vec{e}_j=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, $f'(a).i\vec{e}_j=\frac{\partial f}{\partial y_j}(a)$ au sens réel; mais si elle est $\mathbb{C}$-dérivable, on a aussi, au sens complexe, $f'(a).\vec{e}_j=\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial z_j}}(a)$, $f'(a).i\vec{e}_j=if'(a).\vec{e}_j=i\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial z_j}}(a)$. Autrement dit, d'après (VII,1;2) :

<u>Corollaire 2.</u> <u>Si E est de dimension finie, et si les $\vec{e}_j$ sont une $\mathbb{C}$-base de $\vec{E}$, alors $f:\Omega\longrightarrow F$, supposée $\mathbb{R}$-dérivable au point a de Ω, est $\mathbb{C}$-dérivable si et seulement si</u>

(VII,1;5) $$\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y_j}}(a)=i\,\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(a)\,,\qquad j=1,2,\dots,n.$$

<u>Dans ce cas, on a</u> :

(VII,1;6) $$\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial z_j}}(a)=\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(a)=-i\,\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y_j}}(a)=f'(a).\vec{e}_j\ .$$

Remarque. On peut retrouver (VII,1;6) autrement : pour $x_1, y_1, \ldots, x_{j-1}, y_{j-1}, x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, x_n, y_n$, fixés, f est une fonction de x_j, y_j par l'intermédiaire de z_j, et on applique le théorème des fonctions composées

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_j} = \frac{\partial f}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial y_j} = i\frac{\partial f}{\partial z_j},$$

c'est là un procédé commode, mais l'intervention simultanée de dérivées au sens réel et au sens complexe demande quelques précautions, qui rendent sa justification moins commode que la méthode précédente.

Corollaire 3

Si f est une application d'un ouvert Ω d'un espace $\mathbb{C}$-affine E dans le corps des complexes $\mathbb{C}$, et si P et Q sont la partie réelle et la partie imaginaire de f, soit $f = P + iQ$ alors, si P et Q sont des fonctions $\mathbb{R}$-dérivables sur Ω, la condition nécessaire et suffisante pour que f soit $\mathbb{C}$-dérivable, est que l'on ait, pour tout $\vec{X} \in \vec{E}$:

(VII,1;6 bis) $$D_{i\vec{X}} P = -D_{\vec{X}} Q$$

Si $E = \mathbb{C}^n$, cette condition s'écrit (en prenant successivement $\vec{X} = \vec{e}_j, i\vec{e}_j$) sous la forme des conditions de Cauchy-Riemann:

(VII,1;7) $$\frac{\partial P}{\partial x_j} = \frac{\partial Q}{\partial y_j} \qquad \frac{\partial P}{\partial y_j} = -\frac{\partial Q}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

C'est évident, il suffit de prendre la partie réelle et la partie imaginaire de (VII,1;5)

Corollaire 4

Si Ω est un ouvert connexe d'un espace $\mathbb{C}$-affine E, si f est une fonction $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω à valeurs complexes,

<u>et si sa partie réelle est constante dans Ω, alors f elle-même est constante</u>

En effet, la partie imaginaire Q de f a une dérivée qui, d'après la relation (VII,1; 6 bis) est nulle; alors Ω étant connexe, Q est constante d'aprés le théorème 22 du Chapitre III.

<u>Corollaire 5.</u>

<u>si f est une fonction@-dérivable. définie sur Ω connexe $\subset E$ à valeurs complexes, et si son module $|f|$ est une constante dans Ω alors f elle-même est constante.</u>

On a en effet, pour tout $\vec{X} \in \vec{E}$:

$$D_{\vec{X}} |f|^2 = D_{\vec{X}}(P^2 + Q^2) = P D_{\vec{X}} P + Q\, D_{\vec{X}} Q$$

$$= P D_{\vec{X}} P - Q\, D_{i\vec{X}} P = 0$$

En remplaçant? par $i\vec{X}$, on a aussi

$$Q D_{\vec{X}} P + P D_{i\vec{X}} P = 0$$

En un point $a \in \Omega$, nous avons là 2 équations linéaires à 2 inconnues $D_{\vec{X}}$ P (a) , $D_{i\vec{X}}$ P (a) , de déterminant $P^2(a) + Q^2(a)$. Si la constante $P^2 + Q^2 = |f|^2$ est nulle le corollaire est démontré; sinon, on aura $D_{\vec{X}} P(a) = 0$, $D_{i\vec{X}} P(a) = 0$, pour tout a et tout $\vec{X}$ alors P' est nulle sur Ω et de même Q'donc f' est constante puisque Ω est connexe.

<u>Introduction des symboles</u> $\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$.

Soient E un espace de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et, $(\vec{e}_j)_{j=1,\dots,n}$ une $\mathbb{C}$- base de $\vec{E}$ Si alors, comme précédemment, on considère les fonctions coordonnées réelles x_j , y_j , on peut prendre leurs différentielles dx_j , dy_j

De même les coordonnées complexes z_j sont des fonctions à valeurs complexes sur E et admettent des différentielles dz_j

On a alors les formules $dz_j = dx_j + i\,dy_j$; en prenant les fonctions complexes conjuguées $\bar{z}_j = x_j - i y_j$, on a $d\bar{z}_j = dx_j - i\,dy_j$. Soit alors f une application d'un ouvert Ω de E dans un espace affine F sur le corps des complexes. Suppososns seulement que f soit $\mathbb{R}$-dérivable en un point a de Ω, alors sa dérivée s'exprime avec la notation différentielle du Chapitre III, sous la forme

(VII, 1; 8)
$$\overrightarrow{df} = \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_j}}\, dx_j + \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y_j}}\, dy_j$$

Si nous exprimons les dx_j et dy_j en fonction des dz_j et $d\bar{z}_j$ par

(VII, 1; 9)
$$dx_j = \frac{dz_j + d\bar{z}_j}{2}, \quad dy_j = \frac{dz_j - d\bar{z}_j}{2i},$$

on obtiendra la nouvelle expression

(VII, 1; 10)
$$\overrightarrow{df} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_j}} - i \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y_j}}\right) dz_j + \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_j}} + i \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y_j}}\right) d\bar{z}_j \right)$$

On est ainsi amené 6 poser (pour une fonction f qui est <u>seulement $\mathbb{R}$-dérivable</u>, rappelons le enoore une fois) :

(VII, 1; 11)
$$\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial z_j}} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_j}} - i \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y_j}} \right), \quad \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_j}} + i \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y_j}} \right), \text{ donc}$$

(VII, 1; 11 bis)
$$\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_j}} = \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial z_j}} + \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}}, \quad \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial y_j}} = i \left(\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial z_j}} - \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}} \right)$$

de sorte que l'application dérivée (encore une fois, au sens réel s'exprime sous la forme particulièrement simple en notation différentielle

(VII,1;12) $$\overrightarrow{df} = \sum_{j=1}^{n}\left(\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial z_j}}\, dz_j + \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}}\, d\bar{z}_j\right)$$

Les symboles ainsi introduits, $\frac{\partial}{\partial z_j}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$, sont d'une manipulation très pratique. Les conditions (VII,1;5) donnent immédiatement :

Corollaire 6

Pour qu'une application f de l'ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ dans F et $\mathbb{R}$-dérivable soit $\mathbb{C}$-dérivable, il faut et il suffit qu'elle vérifie les équations aux dérivées partielles

(VII,1;13) $$\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}} = \vec{0}$$

et, dans ce cas, ses dérivées partielles par rapport au corps des complexes $\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial z_j}}$ définies par la formule (VII,1;6) coïncident avec les quantités $\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial z_j}}$ définies par (VII,1;11).

Théorème 2

Soit $\vec{\omega}$ une forme différentielle de degré p, définie sur l'ouvert Ω de l'espace $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\vec{F}$ et $\mathbb{R}$-dérivable. Alors son cobord $d\vec{\omega}$ est donné par la formule suivante, analogue à la deuxième formule (VI,4;1) :

(VII,1;14) $$d\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{n}\left(dz_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} + d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j}\right)$$

Démonstration

En utilisant en effet la formule (VI,4;1), on aura immédiatement

$$d\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{n} \left(dx_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial x_j} + dy_j \wedge \frac{d\vec{\omega}}{\partial y_j} \right) \tag{VII,1;15}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{dz_j + d\bar{z}_j}{2} \wedge \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j} \right) + \frac{dz_j - d\bar{z}_j}{2i} \wedge i \left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} - \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j} \right) \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(dz_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial z_j} + d\bar{z}_j \wedge \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \bar{z}_j} \right)$$

Théorème 3

Soit $\vec{f}$ une application deux fois $\mathbb{R}$-dérivable d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ dans F. Si alors elle est une fois $\mathbb{C}$-dérivable, elle est harmonique, autrement dit vérifie

$$\Delta \vec{f} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y_j^2} \right) = \vec{0}$$

Si f est à valeurs dans le corps des complexes $\mathbb{C}$, et si P et Q sont sa partie réelle et sa partie imaginaire, alors P et Q sont aussi harmonique.

Démonstration

Le laplacien Δ s'exprime avec les notations (VII, 1; 11) sous la forme :

$$\Delta = 4 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \tag{VII,1;16}$$

ce qui donne immédiatement le premier résultat, d'après le corollaire précédent.

Le résultat relatif aux parties réelle et imaginaire P, Q, pour $F = \mathbb{C}$, est évident, car $\Delta(P+iQ) = \Delta P + i\Delta Q$, ΔP et ΔQ réelles.

Remarque : Dans le cas de la dimension complexe $n=1$, nous verrons au théorème 10 que toute fonction une fois $\mathbb{C}$-dérivable, de $\Omega \subset \mathbb{C}$ dans F, est nécessairement indéfiniment dérivable; de sorte que, sans autre hypothèse que la $\mathbb{C}$-dérivabilité d'ordre 1, on peut dire que f, et par conséquent P et Q si $F=\mathbb{C}$, sont harmoniques (corollaire 1 du théorème 10).

On peut donner une certaine réciproque du théorème précédent. Soit P une fonction réelle définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, que nous opposerons deux fois $\mathbb{R}$-dérivable et harmonique; est-elle alors la partie réelle d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable définie sur Ω à valeurs complexes.

Théorème 4

Soient Ω un ouvert simplement connexe du corps des complexes $\mathbb{C}$, et P une fonction réelle de classe C^2 sur Ω et harmonique, c'est-a-dire vérifiant l'équation de Laplace $\Delta P = 0$; alors P est, d'une infinité de manières la partie réelle d'une fonction f, à valeurs complexes, $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω ; Si Ω est connexe, la partie imaginaire Q est déterminée à une constante additive près, et par conséquent f est déterminée à une constante additive purement imaginaire près.

Démonstration

Nous devons déterminer Q de façon à ce que soient vérifiées les relations de Cauchy (VII,1;7) (pour $n=1$); cela revient à se donner les dérivées partielles du 1er ordre de Q , supposée $\mathbb{R}$-dérivable.

Pour que l'on puisse déterminer une telle fonction Q, nous avons vu (corollaire 1 du théorème 59 du Chapitre VI) que, Ω étant simplement connexe, et les quantités $-\frac{\partial P}{\partial y}$ et $+\frac{\partial P}{\partial x}$ étant de classe C^1, une condition nécessaire et suffisante était donnée par $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$

c'est-à-dire par $AP = 0$; cette condition est donc vérifiée puisque P est supposée de classe C^2 et harmonique. Il est donc possible de déterminer Q ; le résultat est unique à une constante additive près si Ω est connexe (car la différence entre 2 solutions est une fonction de dérivées premières nulles, donc constante d'après le théorème 22 du Chapitre III).

Remarque. Ce résultat ne susiste pas du tout pour une fonction complexe sur $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$.

La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ à valeurs complexes, sont appelées deux fonctions réelles harmoniques conjuguées. On voit que, si l'on s'est donne une fonction harmonique dans un ouvert simplement connexe, elle a une infinité de fonctions harmoniques conjuguées, déterminées à une constante additive près si l'ouvert est connexe.

Il est à remarquer que si Q est la fonction harmonique conjuguée de P , alors une fonction harmonique conjuguée de Q est $-P$.

§ 2 THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS HOLOMORPHES D'UNE VARIABLE COMPLEXE : FORMULES INTÉGRALES DE CAUCHY

Soit E un espace affine normé sur $\mathbb{C}$, F un espace de BANACH sur $\mathbb{C}$ (on ne serait pas partout obligé de supposer vectoriel et complet , mais la plupart du temps, parce qu'on intègre des fonctions continues à valeurs dans $\vec{F}$ Nous le supposerons toujours vectoriel et complet, et ne le répèterons pas nécessairement dans les énoncés). On appelle fonction C^m- holomorphe sur un ouvert Ω de E à valeurs dans $\vec{F}$ une fonction de classe C^m par rapport au corps des complexes.

Nous verrons au théorème 10 que, si E a la dimension complexe 1, C^1- holomorphe implique C^∞- holomorphe. Nous étendrons cette propriété bien plus tard à E quelconque (théorème ?) Jusqu'au théorème 10, nous ferons soigneusement la distinction. Ensuite, nous écrirons simplement holomorphe, sans préciser, et celà quel que soit E .

Cela voudra dire C^∞-holomorphe; cette hypothèse sera visiblement exagerée dans certains énoncés, mais ce sera sans importance puisqu'on saura a posteriori que les diverses holomorphies sont identiques. Bien entendu, au théorème nous emploierons à nouveau C^1-holomorphe et C^∞-holomorphe.

Une grande quantité de résultats seront seulement relatifs à $E = \mathbb{C}$ mais certains d'entre eux à E quelconque.

Théorème 5. Pour qu'une fonction $\vec{f}$ sur $\Omega \subset \mathbb{C}$, à valeurs dans $\vec{F}$, de classe C' par rapport à $\mathbb{R}$, soit C^1-holomorphe, il faut et il suffit que la forme différentielle de degré 1, de classe C^1, $\vec{\omega} = \vec{f}(z)\,dz$, soit fermée.

Démonstration

On a en effet immédiatement, d'après (VII, 1; 14):

(VII,2;1) $$d\vec{\omega} = \frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z} \wedge dz$$

Comme $d\bar{z} \wedge dz = 2i\, dx \wedge dy \neq 0$, il est équivalent d'écrire que $d\omega$ est nulle, ou d'écrire que $\frac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial \bar{z}} = 0$, ce qui démontre le théorème d'après le corollaire 6 du théorème 1.

Remarque. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, n quelconque, $\vec{f}$ est C^1-holomorphe si et seulement si la n-forme $f\, dz_1 \wedge dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_n$ est fermée; mais cela n'a pas autant d'applications,

Théorème 6.

(Première formule intégrale fondamentale de Cauchy)

Pour que l'application $\vec{f}$ de $\Omega \subset \mathbb{C}$ dans $\vec{F}$, supposée de classe C^1 par rapport au corps des réels $\mathbb{R}$, soit C^1-holomorphe il faut et il suffit que, pour tout C^1-bord Γ de dimension 1 dans Ω, on ait la relation

(VII,2,2) $$\int_\Gamma \overrightarrow{f}(z)\,dz = \overrightarrow{0} \quad *$$

Demonstration

Si en effet f est C^1-holomorphe, alors $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{f(z)\,dz}$ est un cocycle. (théorème 5) et le théorème 41 du chapitre VI (Stokes) nous indique bien que son intégrale sur tout C'-bord est nulle.

Réciproquement, si ω est une forme différentielle de classe C' dont l'intégrale sur tout C^1-bord est nulle le théorème 42 du Chapitre VI nous indique que c'est un co-cycle, ce qui d'après le théorème 5 prouve que f est C^1-holomorphe.

Remarques

On peut améliorer considérablement l'énoncé de ce théorème :

1°) si $\overrightarrow{f}$ est C^1-holomorphe, alors d'après le corollaire 6 du théorème 54 du Chapitre III, on a encore la relation

$$\int_\Gamma \overrightarrow{f(z)}\,dz = 0 \ ,$$

même si Γ est simplement une variété singulière, compacte, orientée, de dimension 1, de longueur finie, qui soit un C^0-bord dans Ω .

* Toutes les fois que nous emploierons les expressions cycle, bord, variété avec bord, ce sera pour intégrer une forme différentielle et appliquer STOKES; conformément aux conventions du § 6 du chapitre VI, ce seront toujours des compacts; nous ne le répèterons plus dans les énoncés. Ici donc Γ est compact, bord d'un? variété avec bord compacte D'autre part, les variétés avec bord seront de dimension réelle 2, les cycles et les bords de dimension réelle 1.

2°) D'après le théorème 42 et sa démonstration, il suffit, pour que $\vec{f}$ soit C^1-holomorphe, que la f'ormule $\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz = 0$ soit vraie pour toute circonférence orienté Γ bordant un disque Δ entièrement contenu dansa ou même que, pour tout point a de Ω, elle soit vraie pour une suite de tels cercles Γ_n, de centre a, de rayon tendant vers 0.

Nous démontrerons même plus loin (voir corollaire 3 théorème 10) qu'en ce qui concerne la condition suffisante, ce résultat subsiste si l'on suppose la formule (VII,2;2) vérifiée, sur de telles circonférences Γ, et $\vec{f}$ simplement continue et non nécessairement $\mathbb{R}$-dérivable.

3°) Par contre, il est absolument essentiel, dans le théoréme 6, que Γ soit un bord.

Voici un contre-exemple évident lorsqu'il n'est pas un bord :

Prenons la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$;
elle est holomorphe dans l'ouvert $\Omega = \complement 0$.

Par ailleurs appelons Γ une circonférence de centre 0 et de rayon R, orientée dans le sens direct dans $\mathbb{C}$.

Cette circonférence est évidemment un bord dans $\mathbb{C}$, mais nous avons déjà signalé qu'elle n'était pas un bord dans $\complement 0$ (corollaire 2 du théorème 58 du Chapitre VI).
Or on a immédiatement, en posant $z = Re^{i\theta}$, la formule

(VII,2;3) $$\int_\Gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi .$$

Cette formule jouera d'ailleurs un rôle fondamental d'un bout à l'autre de la théorie des fonctions homolorphes. Elle est la base du théorème des résidus, théorème 19. Ellemontre d'ailleurs que Γ n'est pas un bord dans $\complement 0$.

Corollaire

Si $\vec{f}$ est C^1-holomorphe et si Ω est simplement connexe, alors la formule (VII,2;2) est vraie pour tout C^1-cycle Γ (ou même pour tout C^0-cycle de longueur finie Γ).

En effet, Ω étant simplement connexe tout cycle Γ est un bord (corollaire 2 du théorème 54 du Chapitre VI). Mais on pourrait aussi dire : Ω étant simplement connexe, le cocycle $\vec{\omega}$ est un cobord (théorème 59 du Chapitre VI), donc son intégrale sur tout cycle Γ est nulle (théorème 39 ou 41 du Chapitre VI).

Primitive d'une fonction holomorphe

Théorème 7

Si $\vec{f}$ est une fonction holomorphe dans Ω simplement connexe $\subset \mathbb{C}$ à valeurs dans l'espace de Banach G * alors elle admet des primitives F, c'est-à-dire des fonctions C^1 holomorphes sur Ω à valeurs dans G, telles que $\vec{F}' = \vec{f}$. Si Ω est en outre connexe, ces primitives sont déterminées à une constante additive près.

Démonstration

Si $\vec{f}$ est C^1-holomorphe, la forme différentielle $\vec{f}\, dz$ est un co-cycle; comme alors Ω est supposée simplement connexe, il résulte du théorème 59 du Chapitre VI qu'elle est un cobord. Soit F une fonction primitive extérieure de $\vec{\omega}$; on a alors la formule

$$d\vec{F} = \vec{\omega} = \overrightarrow{f(z)}\, dz . \tag{VII,2;4}$$

Mais
$$d\vec{F} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial z}\, dz + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z} ,$$

ce qui prouve d'une part que $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \bar{z}} = 0$, c'est-à-dire que F est C^1-holomorphe, et d'autre part que $\vec{F}$ admet pour dérivée par rapport au corps des complexes, $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial z} = \vec{f}$.

* Nous appelons G le Banach au lieu de $\vec{F}$ comme d'habitude, pour pouvoir appeler F les primitives de $\vec{f}$.

La fonction? étant de classe C^1, le théorème 59 du Chapitre VI nous dit que $\vec{F}$ est de classe C^2; elle est unique à une constante près si Ω est connexe, simplement d'après le théorème 22 du Chapitre III. Ce théorème 59 du chapitre VI nous indique en même temps un moyen pratique de déterminer $\vec{F}$. Si l'on choisit arbitrairement sa valeur $\overline{F(a)}$ en un point a de Ω, alors elle est déterminée en un point z de la même composante connexe de Ω par la formule intégrale

(VII,2;5) $$\vec{F}(z) - \vec{F}(a) = \int_a^z \overrightarrow{f(\zeta)}\, d\zeta$$

l'intégrale étant prise sur n'importe quel chemin de longueur finie, d'origine a et d'extrémité z dans Ω.

Remarque

ici encore il est essentiel de faire une hypothèse du type de la simple connexité pour Ω. Si $\Omega = \complement 0$ et si $f(z) = \frac{1}{z}$, il est bien évident que f n'admet pas de primitive dans Ω, car il n'existe pas de détermination aéfinie et continue du logarithme dans le complémentaire de l'origine. (C'est intuitif. Mais nous le voyons justement ici en toute rigueur. S'il en existait une, on aurait, Γ désignant le cercle trigonométrique oriente, $2i\pi = \int_\Gamma \frac{dz}{z} = \int_\Gamma d(\log z) = 0$).

Ceci nous amène à étudier les déterminations continues du logarithme. On appelle détermination continue (resp. holomorphe) du logarithme dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ une fonction continue (resp. holomorphe) f qui, en chaque point, soit une des valeurs de $\log z$, ou encore telle que $e^{f(z)} = z$.

Théorème 8.

Soit Ω un ouvert de $\complement_{\mathbb{C}}\{0\}$. Toute détermination continue du logarithme dans Ω est C^∞ holomorphe. S'il en existe et si Ω est connexe, la différence entre deux d'entre elles est un multiple entier, de $2i\pi$, et la fixation d'une telle détermination en un point de Ω la fixe dans Ω tout entier. Il existe de telles déterminations toutes les rois que Ω est simplement connexe.

Démonstration

Supposons d'abord que f soit une détermination continue du logarithme dans Ω. En posant $Z = f(z)$ le théorème des fonctions réciproques (corollaire 4 du théorème 11 du Chapitre III, valable également, rappelons le, pour les dérivations par rapport au corps des complexes) nous dit que l'on a

$$f'(z) = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{z} , \tag{VII,2;6}$$

autrement dit f est certainement C^∞ holomorphe, et primitive de $\frac{1}{z}$ dans Ω. Si alors Ω est connexe, la différence entre deux déterminations. ayant une dérivée nulle. est une constante, qui est necessairement un multiple entier de $2i\pi$.

Si Ω est simplement connexe, $\frac{1}{z}$ a des primitives d'après le théorème 7.

Choisissons alors une primitive f en un point a de Ω de façon que f(a) soit l'une des déterminations de $\log a$.

Alors, du fait que la dérivée de f est $\frac{1}{z}$, on déduit que les fonctions $e^{f(z)}$ et z ont même dérivée logarithmique dans Ω, et comme Ω est connexe, on en déduit que leur rapport est une constante (voir 3° page 713 du ChapitreIV). Ce rapport etant égal à 1 au point a il est égal à 1 dans tout Ω et f est bien une détermination holomorphe du logarithme dans Ω.

Remarque

1°) Il n'est nullement nécessaire de supposer Ω simplement connexe pour qu'il y existe des déterminations holomorphes du logarithme : par exemple dans une couronne $r < |z-a| < R$, si $|a| > R$, il en existe, puisqu'il en existe dans le disque (simplement connexe) $|z-a| < R$. D'apres le theorème 45 du Chapitre VI. appliqué à la forme différentielle $\frac{dz}{z}$, il est suffisant que $\int_\Gamma \frac{dz}{z}$ soit nulle pour tout C^∞-cycle Γ de Ω donc en utilisant ce qui a été dit page 247 du Chapitre VI, qu'il n'existe pas dans Ω de C^∞- cycle Γ 'faisant le tour de l'origine': c.a.d. d'indice $\neq 0$ par rapport à l'origine.

2°) Puisqu'on a $\log z = \log r + i\theta$ pour $z = r e^{i\theta}$, l'existence d'une détermination continue du logarithme est équivalente à celle d'une détermination continue de l'angle polaire θ .

Or le théorème 45 et le corollaire 2 du théorème 59 du chapitre VI donnent précisément, pour Ω , les conditions que nous venons d'indiquer.

Dans la pratique, pour déterminer dans Ω une determination holomorphe du logarithme par fixation de sa valeur en un point a de Ω , on la déterminera en chaque point z de Ω en suivant un chemin allant de a à z , et en faisant varier de façon continue la détermination du logarithme.

La détermination obtenue au point z sera indépendante du chemin suivi si Ω est simplement connexe.

On peut de même étudier les déterminations continues (et par conséquent holomorphes) de certaines "fonctions multiformes'< telles que $z \longrightarrow z^\alpha = e^{\alpha \log z}$. On peut encore définir une telle fonction en posant $z = re^{i\theta}$ et on a alors, $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$, alors, dans tout ouvert Ω où l'on peut fixer les déterminations continues de l'angle polaire, on peut fixer des déterminations holomorphes de toutes les fonctions ...

On sait au contraire que de telles déterminations n'existent pas nécessairement dans un couvert quelconque; dans le complémentaire de l'origine dans $\mathbb{C}$, même pour la fonction $\sqrt{z}$, on sait qu'il n'est pas possible de numéroter de manière continue les deux déterminations.

Si en effet on part de l'une des deux ddterminations en un point donné a , et qu'on tourne une fois autour de l'origine et revienne au point a , en faisant varier de façon continue la détermination de la racine carrée, on arrive au point a avec la ddtermination opposée à la détermination initiale. (C'est intuitif; mais de toute rigueur, on voit que $\log z$ a augmente de? $2i\pi$ donc $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log z}$ a bien été multiplié par $e^{+i\pi} = -1$.

<u>Démonstration du théorème de POINCARE sur les primitives extérieures des formes différentielles dans le cas du corps des complexes.</u>

En démontrant le théorème de Poincaré (théorème 19 du Chapitre VI) nous avons supposé qu'il s'agissait de formes différentielles sur le corps des réels (cette restriction est indiquée au cours de la démonstration, page 81).

Supposons donc qu'il s'agisse maintenant d'une forme différentielle $\vec{\omega}$ de classe C^1 par rapport au corps des complexes, définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^N$, à valeurs dans un espace de Banach F.

On suppose toujours que Ω ait les propriétés indiquées dans l'énoncé du théorème 19, et que $\vec{\omega}$ est fermée, de degré ≥ 1.

En fait, on peut supposer que Ω vérifie des conditions un peu plus générales que celles de l'énoncé du théorème 19.

Designons par $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ la base canonique de $\mathbb{C}^N$

On va supposer que si, par un point quelconque a de Ω on mène le plan à deux dimensions réelles (sous-espace affine à une dimension complexe) parallèle aux vecteurs $\vec{e}_j$, $i\vec{e}_j$, il coupe Ω suivant un ouvert à la fois connexe et simplement connexe $\Omega_j(a)$ qui, s'il n'est pas vide, contient nécessairement un point dans le sous-espace à 2 $n-2$ dimensions réelles ou $n-1$ dimensions complexes, mené par l'origine parallèlement aux vecteurs de base et à leurs produits par i .

On effectue ensuite la même démonstration par récurrence que dans le cas du théorème 19. Il faut naturellement trouver une forme Λ primitive de L par rapport à z_1, comme dans cette démonstration. Or il suffira pour cela de prendre une formule analogue à (VI,4;44) qui sera ici

$$(VII,2;7) \qquad \Lambda(z_1, z_2, \ldots, z_N) = \int_0^{z_1} L(\zeta_1, z_2, \ldots, z_N)\, d\zeta_1$$

où l'intégrale est prise dans l'ouvert connexe et simplement connexe $\Omega_1(z_1, z_2, \ldots, z_N)$, suivant n'importe quel chemin C^1 joignant $(0, z_2, \ldots, z_N)$ à $(z_1, z_2, \ldots, z_N)$

L'intégrale est bien indépendante du chemin parce qu'Ω_1 est simplement connexe. Le reste se poursuit sans modification.

Deuxième formule intégrale fondamentale de Cauchy

Théorème 9

Soit $\vec{f}$ une fonction C^1-holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$.

Si V est une variété avec bord de Ω, de classe C^1, ayant l'orientation canonique du plan complexe, et de bord $bV = \Gamma$ munie de l'orientation canonique de bord, alors on a la formule

(VII,2;8) $$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \overrightarrow{\frac{f(z)}{z-a}}\,dz = \vec{0}$$

si $a \notin V$, et

(VII,2;9) $$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \overrightarrow{\frac{f(z)}{z-a}}\,dz = \overrightarrow{f(a)}$$

si $a \in \overset{\circ}{V}$.
(L'intégrale n'a pas de sens pour $a \in \Gamma$).

Démonstration,

1°) Soit $a \notin V$. La fonction $z \longrightarrow \dfrac{f(z)}{z-a}$ est C^1-holomorphe dans $\complement_\Omega a$ or $V \subset \complement_\Omega a$, donc Γ est un bord dans $\complement_\Omega a$, et le théorème 6 donne aussitôt le résultat (VII,2;8).

2°) Soit maintenant $a \in \overset{\circ}{V}$. Le raisonnement n'est plus applicable. En effet $z \longrightarrow \dfrac{f(z)}{z-a}$ est toujours C^1-holomorphe dans $\complement_\Omega a$, mais $V \not\subset \complement_\Omega a$; on a si l'on veut $\complement_V a \subset \complement_a a$, et Γ est le bord de $\complement_V a$, mais $\complement_V a$ n'est pas compacte, de sorte qu'au sens du paragraphe 8 du Chapitre VI , Γ n'est plus un bord dans $\complement_\Omega a$. D'ailleurs le résultat ne subsiste plus, on ne trouve plus $\vec{0}$.

Appelons γ un cercle ayant pour centre a parcouru dans le sens direct, et tel que le disque Δ qu'il borde soit entièrement contenu dans $\overset{\circ}{V}$. Alors $-\gamma$ sera le même cercle parcouru dans le sens rétrograde.

Dans $\complement_\Omega a$, $\Gamma-\gamma$ est un bord, à savoir le bord de $\complement_\gamma \overset{\circ}{\Delta}$

on peut donc appliquer le théorème 6, ce qui donne

$$\text{(VII,2;10)} \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma-\gamma} \frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} \frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz .$$

Ce résultat est indépendant du rayon du cercle γ

Pour démontrer le théorème, il nous suffit donc de démontrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz$$

est égale à $\overrightarrow{f(a)}$ ou même, puisqu'elle est indépendante du rayon r de γ, il nous suffit de démontrer qu'elle tend vers $\overrightarrow{f(a)}$ quand le rayon r de γ tend vers 0 . Or cette intégrale est somme de deux termes :

$$\text{(VII,2;11)} \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz = \frac{\overrightarrow{f(a)}}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{\overline{\overrightarrow{f(z)}-\overrightarrow{f(a)}}}{z-a}\,dz$$

Le premier terme est bien égal à $\overrightarrow{f(a)}$ (d'après la formule (VII,2;3) ;

Il nous suffit donc de démontrer que le deuxième tend vers 0 quand le rayon r de γ tend vers 0 . Or puisque $\vec{f}$ est supposée $\mathbb{C}$-dérivable, la quantité $\left| \frac{\overline{\overrightarrow{f(z)}-\overrightarrow{f(a)}}}{z-a} \right|$

est majorée par un nombre fixe M quand le rayon r de γ tend vers 0 .

La deuxième intégrale de (VII, 2; 11) admet alors la majoration

$$(\text{VII},2;12)\qquad \left|\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\overrightarrow{f(z)-f(a)}}{z-a}\,dz\right| \leq \frac{1}{2\pi} M\cdot 2\pi r = Mr\,,$$

et ceci montre bien qu'elle tend vers 0 quand le rayon r de γ tend vers 0 , et achève la démonstration du thécrème.

Remarque

1°) Il est souvent commode de changer les lettres employées, et d'écrire :

$$(\text{VII},2;13)\qquad \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\overrightarrow{f(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta-z} = \begin{cases} \overrightarrow{f(z)} & \text{pour } z\in \overset{\circ}{V} \\ \vec{0} & \text{pour } z\notin V \end{cases}$$

2°) On peut démontrer un résultat beaucoup plus général :

Si Γ est un C-cycle singulier de longueur finie dans $\complement_\Omega a$, et si c'est un c-bord dans Ω , alors on a la formule

$$(\text{VII},2;14)\qquad \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\overrightarrow{f(z)}\,dz}{z-a} = \overrightarrow{f(a)}\; I(\Gamma\,;a)\,,$$

où $I(\Gamma\,;a)$ est l'indice de Γ par rapport au point a * (page 247 du Chapitre VI). Cette formule nous donnera bien (VII,2;8 et 9); si en effet $a\notin V$, Γ est un bord dans $\complement_\Omega a$, donc son indice par rapport à a est nul; si $a\in \overset{\circ}{V}$, Γ est homologue à γ dans $\complement_\Omega a$, donc son indice est $+1$.

La démonstration de (VII,2;13) résulte immédiatement du théorème 64 du Chapitre VI; la classe résiduelle de $\vec{\omega} = \frac{1}{2i\pi}\frac{\overrightarrow{f(z)}}{z-a}\,dz$ est $\overrightarrow{f(a)}$, comme le montre le précédent

* Rappelons que cet indice suppose Γ orienté, et Ω orienté (orientation canonique de $\mathbb{C}$).

raisonnement, consistant à faire tendre vers 0 le rayon r du cercle Γ , et il suffit d'appliquer (VI,8;67).

3°) Le théorème 9 a une conséquence remarquable : si $\vec{f}$ est C-holomorphe dans Ω, et si ses valeurs sont connues sur $\Gamma = bV$, elles sont nécessairement connues dans V tout entier, puisqu'elles sont données par l'intégrale, (VII, 2; 9), qui ne fait intervenir que les valeur de $\vec{f}$ sur Γ .

On pourrait se demander s'il est possible de choisir arbitrairement les valeurs de $\vec{f}$ sur Γ (pourvu que ces valeurs définissent une application continue de Γ dans $\vec{F}$).

Il est facile de voir qu'il n'en est rien. En effet, on remarquera par exemple que la même Intégrale

$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\overrightarrow{f(z)}\,dz}{z-a}$ doit être nulle pour $a \notin V$, ce qui lorsque a varie dans $\complement_\Omega V$, donne une infinité de conditions que $\vec{f}$ doit vérifier sur Γ .

Partons d'une fonction $\vec{f}$ continue, arbitraire, sur Γ à valeurs dans F. Il est facile de voir que l'intégrale

$z \longrightarrow \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\overrightarrow{f(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta - z}$ définit alors, aussi bien

dans $\mathring{V}$ que dans $\complement_\Omega V$. des fonctions C^∞- holomorphes de

Comme en effet l'intégration a lieu sur le compact et que la fonction ($z , \zeta) \longrightarrow \frac{\overrightarrow{f(\zeta)}}{\zeta - z}$ est continue par rapport à (z , ζ) , dérivable par rapport à z , pour ζ fixée, et que sa dérivée définit une fonction

$(z,\zeta) \longrightarrow \frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$ continue par rapport à (z,ζ) le corollaire du théorème 115 du Chapitre IV nous montre bien que l'intégrale est une fonction de classe C^1 par rapport à z relativement au corps des complexes; la même démonstration montre qu'elle est C^∞ *

L'intégrale n'est pas définie pour $z \in \Gamma$. Mais on peut se demander si elle a une limite quand z tend vers un point z_0 de Γ .

On peut en effet montrer, si $\vec{f}$ est donnée <u>de classe C' sur Γ</u>, que si z tend vers un point z_0 du contour, en restant dans $\mathring{V}$, l'intégrale possède une limite $\overrightarrow{f_1(z_0)}$,et que si z tend vers z_0 , en restant $\complement_\Omega V$, elle tend vers une autre limite $\overrightarrow{f_2(z_0)}$, et qu'enfin la différence entre ces deux limites est précisément égale à $\overrightarrow{f(z_0)}$:

$$\overrightarrow{f_1(z_0)} - \overrightarrow{f_2(z_0)} = \overrightarrow{f(z_0)} \tag{VII.2;15}$$

Dans le cas particulier où on était parti d'une fonction $\vec{f}$, C^1-holomorphe dans Ω, la valeur $\overrightarrow{f_2(z_0)}$ était nulle, et la valeur $\overrightarrow{f_1(z_0)}$ était $\overrightarrow{f(z)}$; si l'on est parti d'une fonction $\vec{f}$ quelconque, il n'en sera plus en général ainsi. Par contre on voit que, si l'on sait à l'avance que $\vec{f}$ de classe C', vérifie l'infinité de conditions $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{\overrightarrow{f(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta - z} = \vec{0}$ pour $z \notin V$, alors on peut bien affirmer que l'intégrale définie par $\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\overrightarrow{f(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta - z}$, $z \notin \mathring{V}$,

* Le corollaire du théorème **115** a été énoncé pour l'intégrale par rapport à une mesure> 0 ; ici la mesure dz sur Γ est complexe. Mais $4 \quad = \frac{dz}{ds}ds$, ds étant l'abscisse curviligne sur Γ, mesure ≥ 0, et on peut raisonner sur la fonction $(z,\zeta) \longrightarrow \frac{\overrightarrow{f(\zeta)}}{z-\zeta}\ \frac{d\zeta}{ds}$.

représentera une fonction C^1-holomorphe dans $\overset{\circ}{V}$ et prenant la valeur $\vec{f}$ sur Γ''.

Soit f scalaire. Nous verrons ultérieurement, dans l'étude des fonctions harmoniques, que, si P est la partie réelle de la fonction holomorphe f, c'est-à-dire d'une fonction harmonique, on peut choisir arbitrairement ses valeurs sur la courbe Γ de classe C^1, définissant une fonction continue réelle; alors la fonction P est bien déterminée d'une manière unique dans V. Il sera ensuite possible de déterminer sa fonction harmonique conjuguée Q, dans $\overset{\circ}{V}$, à une constante additive près, au moins si $\overset{\circ}{V}$ est connexe et simplement connexe; et par suite f est elle-même déterminée à une constante purement imaginaire près. En fait, Q et f ne sont ainsi déterminées que dans $\overset{\circ}{V}$; mais on montre qu'elles ont des limites aux points de Γ, si, Γ étant toujours de classe C^1, P est C^1 sur Γ. On comprend mieux maintenant pourquoi on ne pouvait pas choisir arbitrairement f sur Γ et la prolonger dans V en une fonction holomorphe dans $\overset{\circ}{V}$; on peut choisir sa partie réelle P sur Γ, et alors sa partie imaginaire est déterminée à une constante additive près, pour V connexe et simplement connexe.

§ 3 CONSÉQUENCES DE LA 2e FORMULE INTEGRALE DE CAUCHY

La formule intégrale de Cauchy (VII, 2; 9) est la formule essentielle de la théorie des fonctions holomorphes; elle permet d'en trouver les principales propriétés

<u>Théorème 10</u>

<u>Toute fonction C^1-holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$, est nécessairement de classe C^∞ sur le corps des complexes. Si $V \subset \Omega$ est une variété C^1 avec bord, compacte, munie de l'orientation canonique de $\mathbb{C}$, et de bord $bV = \Gamma$ (munie de l'orientation canonique de bord), les dérivées de $\vec{f}$ sont données</u>

en tout points de $\overset{\circ}{V}$, à partir des valeurs de $\vec{f}$ sur Γ, par les formules

(VII,3;1) $$\begin{cases} \overrightarrow{f^{(n)}(z)} = \dfrac{n!}{2i\pi} \displaystyle\int_\Gamma \dfrac{\overrightarrow{f(\zeta)}\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} & \text{ou} \\ \dfrac{\overrightarrow{f^{(n)}(z)}}{n!} = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\Gamma \dfrac{\overrightarrow{f(\zeta)}\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \end{cases}$$

11 suffit en effet de dériver (VII,2;9) sous le signe d'intégration, ces dérivations étant légitimes d'après la démonstration qui a été donnée à la page 292. Si alors a est un point quelconque, on pourra, pour V , prendre un disque A de centre a contenu dans Ω, pour Γ, son bord, et voir alors que $\vec{f}$ est infiniment dérivable dans $\overset{\circ}{\Delta}$ · ceci étant vrai au voisinage de chaque point a, elle est bien indéfiniment dérivable dans Ω .

Ce théorème est très remarquable et absolument contraire à tout ce que nous connaissions anterieurement pour les fonctions de variables réelles; une application d'un ouvert de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach, peut très bien être de classe C^m sur le corps des réels, sans être pour cela de classe C^{m+1}; mais il suffit qu'elle soit de classe C^1 dans $\Omega \subset \mathbb{C}$, sur le corps des complexes, pour être, d'un seul coup, de classe C^∞.

Corollaire 1

Toute fonction C^1 holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est harmonique; si elle est à valeurs complexes, sa partie reelle et sa partie imaginaire sont harmoniques.

En effet nous avons vu qu'il en était ainsi dans l'hypothèse particulière où $\vec{f}$ était de classe C^2 , et nous voyons maintenant que cette hypothèse est toujours réalisée.

Nous verrons que ceci reste vrai sur $\mathbb{C}^n$.

Corollaire 2

Toute fonction harmonique sur $\Omega \subset \mathbb{C}$, à valeurs réelles ou complexes, est nécessairement de classe C^∞ par rapport au corps des réels.

Il suffit évidemment de la démontrer pour une fonction harmonique à valeurs réelles. Si alors P est une telle fonction, et si a est un point de Ω, Δ un disque de centre a contenu dans Ω , il est simplement connexe, et par suite, dans ce disque, on peut trouver une fonction harmonique conjuguée Q , telle que $P+iQ$ soit une fonction C^1-holomorphe dans Δ. Elle est alors de classe C^∞ et par suite il en est de même de P.

Remarques.

1°) Ainsi nous voyons que le fait, pour une fonction, de vérifier certaines équations aux dérivées partielles, telles que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ou $\Delta f = 0$, entraîne l'existence des dérivées successives de tous les ordres. Ceci au fond ne doit pas être a priori tellement fait pour nous étonner, Lés équations aux dérivées partielles sont les généralisations, au cas de plusieurs variables réelles, des équations différentielles, nous avons vu, au Chapitre V, que toute fonction de classe C^m, solution d'une équation différentielle d'ordre m de classe C^∞, est nécessairement de classe C^∞ (corollaire du théorème 8 du Chapitre V). Nous voyons maintenant que certaines fonctions de classe C^1 ou C^2, solutions de certaines équations aux dérivées partielles de classe C", sont nécessairement de classe C^∞.

Z Toutefois. dans la théorie des équations aux dérivées partielles, ce résultat que nous obtenons n'a pas du tout le même caractère que dans la théorie des équations différentielles, il est relatif à une certaine catégorie particulière d'équations aux dérivées partielles, celle des équations elliptiques, dans laquelle rentre les équations aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \Delta f = 0$; alors que pour d'autres équations aux dérivées partielles, comme par exemple l'équation des ondes, que nous étudierons ultérieurement, cette propriété ne subsiste absolument pas.

2°) La propriété, pour les fonctions de classe C^2 harmoniques, d'être C^∞, n'est ici démontrée que sur $\mathbb{R}^2$, et pour des fonctions harmoniques à valeurs réelles ou complexes. Elle s'étend, comme nous le verrons plus tard, aux fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans un Banach quelconque $\vec{F}$. De même toute fonction C' sur $\mathbb{C}^n$ est C". En particulier, toute variété différentiable de classe C^1 sur $\mathbb{C}$ est de classe C^∞.

Corollaire 3 (Théorème de Morera)

Toute fonction $\vec{f}$ définie dans l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$, à valeurs dans l'espace de Banach $\vec{G}$, continue et telle que l'intégrale $\int_\Gamma \overrightarrow{f(z)}\, dz$ soit nulle pour tout C^∞-bord de Ω, est nécessairement holomorphe. Le théorème 45 du Chapitre VI nous indique en effet que la forme différentielle continue $\vec{f}\, dz$ est le co-bord d'une fonction $\vec{F}$ de classe C^1, définie dans A à valeurs dans $\vec{G}$. On a alors la formule $\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{f(z)}\, dz$,

donc
$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \bar{z}} = \vec{0} \quad , \quad \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = \vec{f}$$

qui signifie d'une part que $\vec{F}$ est C^1-holomorphe et d'autre part que f est la dérivée de **F au sens** du corps des complexes. Mais alors d'après le théorème, la fonction F est nécessairement de classe C^∞, et par conséquent $\vec{f}$, sa dérivée première, est elle-même de classe C^∞, sur le corps des complexes, c.a.d. holomorphe.

Remarques

1°) C'est ce théorème que nous avions annoncé à la remarque 2 après le théorème 6 : on peut définir la propriété d'holomorphie pour des fonctions continues, sans supposer à priori aucune dérivabilité.

2") On peut aussi montrer que toute fonction $\mathbb{C}$-dérivable sur $\Omega \subset \mathbb{C}$, a priori non nécessairement de classe C^1, est holomorphe.

Corollaire 4

Toute fonction à valeurs complexes, holomorphe, et sans zéros dans un ouvert Ω simplement connexe de $\mathbb{C}$, peut s'exprimer sous la **forme** $f(z) = e^{g(z)}$ **ou** g **est** une fonction complexe holomorphe dans Ω .

Démonstration

On peut évidemment supposer Ω connexe puisqu'il suffit de raisonner dans chacune de ces composantes connexes. Puisque f ne s'annule Jamais, et quelle est de classe **C'**, la fonction $\frac{f'}{f}$ **est elle-même** bien définie et de classe C^1, c'est-à-dire holomorphe. Comme par ailleurs Ω est simplement connexe, elle admet une primitive g d'après le théorème 7. Alors les fonctions f et e^g ont la même dérivée logarithmique $\frac{f'}{f}$. Comme Ω est connexe, leur rapport est constant d'après la remarque de la page 713 du Chapitre IV; on peut alors faire rentrer cette constante dans l'exponentielle, ce qui démontre le corollaire.

Remarque Ceci revient à dire que si f holomorphe ne ~~s'annute~~ pas dans Ω simplement connexe, il existe des déterminations holomorphes de $\log f$ dans Ω.

Corollaire 5. (Inégalités de Cauchy).

soit $\vec{f}$ une fonction holomorphe dans $\Omega \subset \mathbb{C}$. Soit $M(a;\rho)$ le maximum de $\|\vec{f}\|$ sur le cercle $|z-a| = \rho$ pour $\rho < d(a, \complement\Omega)$.

On a les inégalités suivantes :

(VII,3;2) $\dfrac{\|\overrightarrow{f^{(n)}(a)}\|}{n!}\rho^n \leq M(a;\rho)$; en particulier $\|\overrightarrow{f(a)}\| \leq M(a;\rho)$.

Démonstration.

Il suffit d'appliquer (VII,3;1) pour le cercle Γ : $|z-a| = \rho$:

$$\|\overrightarrow{f^{(n)}(a)}\| = \left\| \frac{n!}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\overrightarrow{f(\zeta)}}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \right\|$$

(VII,3;3)
$$\leq \frac{n!}{2\pi\rho^{n+1}} M(a;\rho) \int_\Gamma ds = \frac{n!}{2\pi\rho^{n+1}} M(a;\rho)\, 2\pi\rho$$

$$= \frac{n!}{\rho^n} M(a;\rho).$$

Remarques.

1°) Si l'on effectue le développement de Taylor de $\vec{f}$, la norme de $\dfrac{\overrightarrow{f^{(n)}(a)}}{n!}(z-a)^n$ sur le cercle $|z-a| = \rho$ est précisément $\dfrac{\|\overrightarrow{f^{(n)}(a)}\|}{n!}\rho^n$. On peut donc aussi énoncer ce corollaire en disant : le terme de taylor $\dfrac{\overrightarrow{f^{(n)}(a)}}{n!}(z-a)^n$ est majoré, en norme, sur le cercle $|z-a| = \rho$, par le maximum $M(a;\rho)$ de $\|\vec{f}\|$ sur ce cercle.

2") Naturellement il faudrait se garder de croire qu'en tout point z de la circonférence, la norme de $\vec{f}(z)$ soit au moins égale à la norme de chaque terme de Taylor. Si par exemple nous considérons la fonction holomorphe e^z donnée par

(VII, 3;4) $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad ,$$

on n'a pas, pour $z = -\rho < 0$, $e^{-\rho} \geq \frac{\rho^n}{n!}$.

Nous avons seulement dit que le maximum de la norme de a sur la circonférence surpasse la norme (constante) de chacun des termes de Taylor.

Extension des inégalités de CAUCHY

Nous ne verrons que plus tard ce qui, dans $E = \mathbb{C}^n$, étend les formules de CAUCHY (VII, 3; 1). Mais on peut dès maintenant étendre à E quelconque les inégalités (VII 3; 2). Soit donc $\vec{f}$ une fonction holomorphe sur $\Omega \subset E$ à valeurs dans $\vec{F}$ BANACH. Soient $a \in \Omega$, et $\rho > 0$ tel que la boule fermée $B(a;\rho)$ de centre a et de rayon ρ soit dans Ω.

Pour $x \in B(a;\rho)$, on peut écrire la formule de TAYLOR (voir (III, 7; 2)), dont le terme de rang m est $\frac{f^{(m)}(a)}{m!} \cdot (\overrightarrow{x-a})^m$. Ce terme de rang m se calcul entièrement dans le sous-espace affine $E_{a,x}$ de dimension complexe 1 passant par a et x; c'est aussi le terme de rang m dans le développement de TAYLOR, pour $z = 1$, de la fonction holomorphe $g : z \longrightarrow \vec{f}(a + z(\overrightarrow{x-a}))$. On peut donc lui appliquer la majoration (VII, 3; 2), ce qui donne :

(VII,3;4 bis) $$\left\| \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \cdot (\overrightarrow{x-a})^m \right\| \leq M(a;x;\rho)$$

où $M(a;x;\rho)$ est le maximum de $\|\vec{f}\|$ sur le cercle de centre a et de rayon ρ dans $E_{a,x}$; a fortiori

(VII,3;4 ter) $$\left\| \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \cdot (\overrightarrow{x-a})^m \right\| \leq M(a;\rho)$$

où $M(a;\rho)$ est la borne supérieure de $\|\vec{f}\|$ sur la sphère de centre a et de rayon ρ dans E ; nous disons borne supérieure et non maximum, car cette sphère n'est pas compacte si E est de dimension infinie, et $\|\vec{f}\|$ n'atteint peut-être pas sa borne supérieure; elle n'est peut-être même pas bornée, $M(a;\rho) \leqslant +\infty$.

Rappelons que $f^{(m)}(a)$ est une application m-linéaire continue-symétrique de $\vec{E}^m$ dans $\vec{F}$. On a donc, pour tout vecteur Y de E de norme ρ, et par suite, par raison d'homogénéité, pour tout $\vec{X}$ de $\vec{E}$, l'inégalité :

$$\left\| \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \cdot \vec{X}^m \right\| \leqslant M(a;\rho)\left(\frac{\|\vec{X}\|}{\rho}\right)^m \qquad (\text{VII},3;4\text{ quarto})$$

Soient $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m$ m vecteurs arbitraires de $\vec{E}$, de norme $\leqslant 1$. Pour $t_1, t_2, \ldots, t_m$ complexes de modules $\leqslant 1$, le vecteur $t_1\vec{X}_1 + t_2\vec{X}_2 + \cdots + t_m\vec{X}_m$ a une norme $\leqslant m$; on sait que $f^{(m)}(a)\cdot(\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_m)$ est le coefficient de $t_1 t_2 \ldots t_m$ dans $\frac{f^{(m)}(a)}{m!}\cdot(t_1\vec{X}_1+t_2\vec{X}_2+\cdots+t_m\vec{X}_m)^m$ (voir chapitre III, démonstration du lemme du théorème 21 bis).

Mais l'espace vectoriel des polynômes en $t_1, t_2, \ldots, t_m$, de degré $\leqslant m$, est de dimension finie; sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les formes linéaires sont continues (début du § 13 du chapitre II). Si donc on appelle $u(P)$ le coefficient de $t_1 t_2 \ldots t_m$ dans un tel polynôme P, u est une forme linéaire, donc on a une inégalité:

$$|u(P)| \leqslant C \operatorname*{Max}_{|t_i|\leqslant 1} |P(t_1, t_2, \ldots, t_m)| \qquad (\text{VII},3;4\text{ quinto})$$

où C est une constante convenable. Nous verrons en fait ultérieurement que cette constante vaut 1 (page   comme elle n'aura pas d'importance réelle, prenons-là tout de suite égale à 1. On en déduit donc l'inégalité :

$$\left\| f^{m}(a)\cdot(\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_m) \right\| \leqslant M(a;\rho)\left(\frac{m}{\rho}\right)^m \qquad (\text{VII},3;4\text{ sexto})$$

En prenant la borne supérieure pour $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m$, de normes $\leqslant 1$, on aura la généralisation cherchée des inégalités de CAUCHY.

<u>Corollaire 5 bis</u>

<u>**Soit** $\vec{f}$ une fonction holomorphe sur $\Omega \subset E$ à valeurs dans $\vec{F}$. Si la boule $B(a;\rho)$ est dans Ω, on a les inégalités sui-</u>vantes, où $M(a;\rho) \leqslant +\infty$ est la borne superieure de $\|\vec{f}\|$

sur la sphère de centre a et de rayon ρ :

$$\text{(VII,3;4 Septimo)}\quad \| f^{(m)}(a) \| \leq M(a,\rho)\left(\frac{m}{\rho}\right)^m \text{ ou } \| f^{(m)}(a)\cdot(\vec{X}_1,\vec{X}_2,\ldots,\vec{X}_m) \| \leq \|\vec{X}_1\|\cdots\|\vec{X}_2\|\, M(a;\rho)\left(\frac{m}{\rho}\right)^m .$$

<u>Remarque.</u> Ces inégalités sont moins bonnes que pour $E=\mathbb{C}$, car $m^m > m!$ pour $m \geq 2$

<u>Corollaire **6** (Théorème du maximum strict)</u>

<u>Soit E un espace affine normé sur $\mathbb{C}$, $\vec{F}$ un espace vectoriel norme sur $\mathbb{C}$. Soit Ω un ouvert de E et soit $\vec{f}$ une fonction sur Ω a valeurs dans $\vec{F}$ holomorphe. Alors il est impossible que $\|\vec{f}\|$ ait en un point a de Ω un maximum relatif strict.</u>

<u>Démonstration.</u>

Si **E** est le corps des complexes, celà résulte immédiatement de la majoration (VII,3;2) pour $n=0$

cette inégalité prouve que, si $\rho < d(a, \complement\Omega)$, il **existe** sur le cercle $|z-a|=\rho$, au moins un point z_0 tel que $\|\overrightarrow{f(z_0)}\| \geq \|\overrightarrow{f(a)}\|$. Mais alors, si **E** est quelconque, il suffira de considérer n'importe quel sous-espace affine E_1 à 1 dimension complexe de E, contenant a ; soit $b\in E_1$, $b\neq a$; la bijection $z \to a+z\,(\overrightarrow{b-a})$ identifie E_1 au corps $\mathbb{C}$, $a\in$ **E**, à $0\in\mathbb{C}$, $\Omega\cap E_1=\Omega_1$ à un ouvert $\tilde{\Omega}_1$ de $\mathbb{C}$, et donc permet de considérer la restriction $\vec{f}_1$ de $\vec{f}$ à Ω_1 comme une fonction $\tilde{\vec{f}}_1$ sur l'ouvert Ω_1 de $\mathbb{C}$; on en déduit pour tout $\rho < d(0, \complement\tilde{\Omega}_1)$ l'existence d'un point z_0, $|z_0|=\rho$ tel que $\|\tilde{\vec{f}}_1(z_0)\| \geq \|\tilde{\vec{f}}_1(0)\|$ donc d'un point $c_0 = a + z_0(\overrightarrow{b-a})$ de $\Omega_1\subset\Omega$, $d(a,c_0)=\rho\, d(a,b)$, tel que $\|\overrightarrow{f(c_0)}\| \geq \|\overrightarrow{f(a)}\|$, d'où le résultat.

Remarque

Il est normal de se demander si le même corollaire subsiste, avec "maximum relatif large" au lieu de "maximum relatif strict"; en excluant alors évidemment les fonctions constantes. Si $\vec{F}$ est quelconque, il n'en est rien. Soit par exemple $\vec{F} = \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, muni de la norme

(VII,3;5) $$\|(z_1, z_2, \ldots, z_n)\| = \operatorname{Max}(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|).$$

Soit alors $\vec{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{C}$: $z \to (a, a, \ldots, a, z)$, $a \neq 0$.

Cette fonction n'est pas constante, mais sa norme est constante, égale à $|a|$ pour $|z| \leq |a|$.

Mais il y a bien une extension possible si F est le corps des complexes (ou plus généralement, évidemment, s'il y a la dimension 1). C'est ce que nous verrons plus tard, après les propriétés d'analyticité (corollaire 1 du théorème 12).

Développement en série de Taylor

Théorème 11

Soit $\vec{f}$ une fonction holomorphe dans l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$, à valeurs dans l'espace de Banach $\vec{F}$, et soit a un point de Ω. Appelons A le plus grand disque ouvert de centre a contenu dans Ω ; soit R son rayon. Alors $\vec{f}$ admet le développement de TAYLOR

(VII,3;6) $$\overrightarrow{f(z)} = \overrightarrow{f(a)} + (z-a)\overrightarrow{f'(a)} + \cdots + \frac{(z-a)^n}{n!}\overrightarrow{f^{(n)}}(a) + \cdots,$$

absolument convergent dans A, et normalement convergent dans tout disque de centre a et de rayon $< R$.

Démonstration

On a en effet le développement

(VII,3;7) $$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

valable pourvu que $|z-a| < \zeta - a$.

Soient alors R' et R'' deux nombres, avec $0 < R' < R'' < R$

Ecrivons la formule intégrale de Cauchy pour $|z-a| \leqslant R'$, relativement à Γ, cercle de centre a et de rayon R''.

La formule (VII, 3; 7) nous incite à écrire

$$(\text{VII},3;8) \qquad \vec{f}(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta$$

Il reste naturellement à justifier cette interversion du signe $\sum$ et du signe $\int$

On peut remplacer partout $d\zeta$ par $\frac{d\zeta}{ds}\,ds$, pour avoir une intégrale par rapport à une mesure $ds \geqslant 0$; et $\left|\frac{d\zeta}{ds}\right| = 1$

Cette interversion peut alors se faire pourvu que, lorsqu'on remplace toutes les fonctions intervenant par leurs normes, l'un des deux membres ait une valeur finie (théorème 37 du Chapitre IV),

Si nous appelons $M(a;R'')$ le maximum de la norme de $\vec{f}$ sur la circonférence de centre a et de rayon R'', on aura la majoration

$$(\text{VII},3;9) \qquad \left\| (z-a)^n \frac{1}{2i\pi} \frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \right\| \leqslant \frac{R'^n}{R''^{n+1}} \frac{M(a;R'')}{2\pi},$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R'^n}{R''^{n+1}} \frac{M(a;R'')}{2\pi} \int_\Gamma ds = M(a;R'') \frac{R''}{R''-R'} < +\infty,$$

qui montre bien que l'opération d'interversion était légitime dans les conditions où nous sommes placés. Ensuite, (VII,3;1) montre que (VII,3:8) équivaut à (VII,3;6).

En outre, la série trouvée est bien normalement convergente pour $|z-a| \leqslant R'$ puisqu'elle est alors majorée par une série numérique géométrique convergente.

<u>Fonctions analytiques</u>. Dans le cas du corps des réels, nous avons vu qu'il peut arriver que la série de Taylor d'une fonction C^∞ ne soit pas convergente au voisinage du point a, et que, même si elle est convergente, elle ne représente pas nécessairement $\vec{f}$, (voir, par exemple, page 439 du Chapitre IV).

Par contre, nous venons de voir que, si E est le corps des complexes $\mathbb{C}$, et si $\vec{f}$ est $\mathbb{C}$-dérivable, alors la convergence et la représentation de la fonction par sa série de Taylor, sont vraies nécessairement. Nous voyons même beaucoup plus, puisque nous trouvons un minimum du rayon de convergence : <u>la série de TAYLOR est convergente dans tout disque où la fonction est holomorphe</u>.

soit f une fonction sur un ouvert Ω d'un affine normé E, à valeurs dans un affine normé F, sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que <u>f est $\mathbb{K}$-analytique</u> si elle est C^∞, et si, quel que soit a, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans a, tel que dans $\mathcal{V}$, f soit représentée par sa série de taylor :

$$(\text{VII},3;10) \qquad f(x) = f(a) + f'(a)\cdot\overrightarrow{x-a} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(\overrightarrow{x-a})^n + \cdots$$

Une fonction $\mathbb{C}$-analytique est à fortiori $\mathbb{R}$- analytique

Alors :

<u>Corollaire 1.</u>

<u>Soient E un affine normé sur $\mathbb{C}$, $\vec{F}$ un Banach sur $\mathbb{C}$. Toute application $\vec{f}$ holomorphe sur $\Omega \subset$ E à valeurs dans $\vec{F}$ est $\mathbb{C}$ -analytique.</u>

<u>Demonstration.</u>

Soit $\mathring{B}(a;\rho)$ une boule ouverte de centre a contenue dans Ω. Alors, pour $x \in B(a;\rho)$, $z \longrightarrow \vec{f}(a + z(\overrightarrow{x-a})) - \vec{f}(a)$ est une fonction $\vec{g}$ définie pour $|z| < \dfrac{\rho}{\|\overrightarrow{x-a}\|}$ (quantité >1) à valeurs dans $\vec{F}$, et de classe C^∞ par rapport au corps $\mathbb{C}$ c.a.d. holomorphe. Le théorème 11 dit que sa série de Taylor suivant les puissances de z converge pour $z = 1$.

Mais $\overrightarrow{g^{(n)}(a)} = f^{(n)}(a)\cdot\overrightarrow{(x-a)}^n$; donc la série de Taylor de $\vec{f}$ converge au point $x \in B(a\,;\rho)$.

Corollaire 2

Toute fonction réelle ou complexe sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, harmonique, est $\mathbb{R}$- analytique.

Il suffit de le voir pour une fonction réelle; or elle est, d'après le théorème 4, la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Remarque.

Nous verrons que cette conclusion subsiste pour toute fonction harmonique, sur un espace euclidien sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, à valeurs dans un Banach quelconque.

Corollaire 3

Toute fonction holomorphe, dans un ouvert Ω connexe de $\mathbb{C}$, à valeurs dans F et nulle ainsi que toutes ses dérivées successives en un point a de Ω, est identiquement nulle dans Ω.

Démonstration

Puisque $\vec{f}$ est représentable au voisinage de $a \in \Omega$ par sa série de Taylor, elle est nécessairement nulle dans tout un voisinage de a.

Appelons alors $\mathcal{E}$ l'ensemble des points où f s'annule, ainsi que toutes ses dérivées successives. Cet ensemble est manifestement fermé, comme intersection des ensembles fermés $\{ z \in \Omega\,;\ \overrightarrow{f^{(n)}}(z) = \vec{0} \}$

Mais nous venons précisément de voir qu'il est aussi ouvert .

Comme alors il contient au moins un point a et que Ω est connexe, c'est Ω tout entier.

Plus particulièrement :

Corollaire 4

Toute fonction holomorphe dansΩ connexe $\subset \mathbb{C}$, et nulle dans un ouvert non vide de Ω , est nulle dans Ω tout entier.

Les corollaires 3 et 4 ont un certain nombre d'extensions. Par exemple :

Corollaire 5.

1) Soient E et F des affines normés sur un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Ω un ouvert connexe de E, f une fonction $\mathbb{K}$- analytique sur Ω à valeurs dans F. Si f a toutes ses dérivées successives d'ordre $\geqslant 1$ nulles en un point a de Ω, ou si f est constante dans un sous-ouvert non vide de Ω, f est constante dans Ω ,

2) Soit E normé sur $\mathbb{C}$, $\vec{F}$ Banach sur $\mathbb{C}$, $\Omega \subset E$ connexe. Toute application holomorphe $\vec{f}$ de Ω dans $\vec{F}$ ayant toutes ses dérivées successives nulles en un point a de Ω ou constante dans un sous-ouvert non vide de Ω, est constante dans Ω.

3) Soit V une variété holomorphe, de dimension complexe n, connexe. Toute fonction holomorphe $\vec{f}$ sur V a valeurs dans un Banach $\vec{F}$, constante dans un ouvert non vide ω de V, est constanto sur V.

4) Soient V et W deux variétés holomorphes de dimensions m, n, V connexe. Toute application holomorphe de V dans W, constante dans un ouvert non vide ω de V, est constante sur V.

Démonstration.

La démonstration de 1°) est en fait celle qui a été donnée pour le corollaire 3; car nous avons alors seulement Utilisé le fait que toute fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ était c-analytique. 2) résulte alors de 1) et du corollaire 1.

3) et 4) se démontrent de manière analogue Considérons par exemple 4). Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points de V ayant un voisinage où f est constante et égale à $f(\omega)$. Alors $\mathcal{C}$ est ouvert par définition, non vide par hypothèse. Montrons qu'il est fermé. Soit b_ℓ une suite de points de $\mathcal{C}$, tendant pour ℓ Infini vers un point b de V. En prenant des cartes de voisinages de b dans V et de $f(b)$ dans W, on se ramène au cas où V est un ouvert Ω d'un affine normé E, W un Banach F, E et F de dimension finie.

En supprimant à ce moment l'hypothèse de dimension finie, on démontrera en même temps 3). Soit **B** $(b ; R)$ une boule de centre b contenue dans Ω. Pour ℓ assez grand, b_ℓ est dans la boule B $(b ; \frac{R}{3})$; alors, f étant égale à $f(W)$ au voisinage de b_ℓ l'est dans toute boule de centre b_ℓ contenue dans Ω d'après le corollaire 1, donc dans $B(b_\ell ; \frac{2R}{3}) \subset B(b;R) \subset \Omega$; donc aussi dans la boule $B(b ; \frac{R}{3}) \subset B(b_\ell ; \frac{2R}{3})$, et alors $b \in \mathcal{C}$, ce qui montre que $\mathcal{C}$ est fermé; V étant connexe, $\mathcal{C} = V$, ce qui démontre 3) et 4).

Remarque

Rien d'analogue, bien sûr, aux parties 2,3,4 du corollaire 5, si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

Par exemple, nous avons précisément formé, au théorème 11 du Chapitre IV, des fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur $\mathbb{R}^n$. Elles sont alors bien nulles sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. sans être cependant identiquement nulles.

Corollaire 6

si $\vec{f}$ est une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$, et si elle s'annule en une suite de points distincts a_1 . $a_2, \ldots, a_n, \ldots$ convergeant pour n infini vers un point a de Ω, alors $\vec{f}$ est identiquement nulle.

Démonstration

Il suffit de démontrer que toutes les dérivées successives de $\vec{f}$ au point a sont nulles, et on est alors ramené au corollaire 3. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. $\vec{f}$ est, au voisinage de a, de la forme
$\vec{c}_k (z-a)^k + 0 \left(|z-a|^{k+1} \right)$ pour $z \to a$, $\vec{c}_k \neq \vec{0}$;
k est le rang de la première dérivée non nulle en a.
Alors $\dfrac{\overrightarrow{f(z)}}{(z-a)^k}$ tend vers c_k quand z tend vers a, donc ne s'annule pas pour $|z-a|$ assez petit, ce qui est contradictoire.

Remarque

La même conclusion subsiste si on suppose seulement que $\vec{f}(a_i) = \vec{0}$, pour une infinité de point a_i de Ω connexe contenus dans un compact K de Ω, car alors on peut en extraire une suite partielle convergente. Ce sera aussi le cas si $\vec{f}$ s'annule sur un arc de courbe contenu dans Ω par exemple sur un segment de l'axe réel.

Contrairement aux corollaires 3 et 4, la présente conclusion ne s'étend absolument pas si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{C}^n, n \geqslant 2$. Par exemple la fonction $(z_1, z_2) \to z_1$, de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$, est holomorphe, nulle sur le sous-espace vectoriel $z_1 = 0$, mais non identiquement nulle.

Si $\vec{c}_k(z-a)^k$ est le Premier terme non nul de la série de Taylor de f au point a, on dit que f présente au point a un zéro multiple d'ordre k. Toute fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω et nulle en a présente alors en a un zéro multiple d'ordre k, entier $\geqslant 1$ fini, à moins qu'elle n'y soit identiquement nulle.

Théorème 12 (Théorème de la moyenne)

Si $\vec{f}$ est une fonction holomorphe, définie dans $\Omega \subset \mathbb{C}$ à valeurs dans F, ou une fonction harmonique réelle ou complexe, alors sa valeur, en un point a quelconque de Ω. est la moyenne de ses valeurs sur n'importe quelle circonférence Γ de centre a, telle que le disque Δ qu'elle borde soit entièrement contenu dans Ω.

Démonstration

La formule relative à une fonction holomorphe est tout simplement la formule intégrale de Cauchy (VII,2;9), appliquée à Γ.

Si en effet, dans Ω, nous posons $z = a + \rho e^{i\theta}$, on obtient immédiatement

$$\text{(VII,3;10 bis)} \quad \overrightarrow{f(a)} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\overrightarrow{f(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta - a} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overrightarrow{f(a+\rho e^{i\theta})}\,d\theta$$

En prenant alors la partie réelle **P** et la partie imaginaire **Q** si $F = \mathbb{C}$, on obtient

$$\text{(VII,3;10 ter)} \quad P(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(a+\rho e^{i\theta})\,d\theta\,,\; Q(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(a+\rho e^{i\theta})\,d\theta$$

Ceci est valable pour toute fonction P qui est, au voisinage de a, la partie réelle d'une fonction holomorphe, c'est-d-dire, d'après le théorème 4, une fonction harmonique réelle arbitraire sur $\mathbb{R}^2$; donc aussi si c'est une fonction harmonique complexe arbitraire sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque

Le théorème subsiste pour n'importe quelle fonction harmonique sur un ouvert d'un espace affine euclidien de dimension finie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$ sur $\mathbb{R}$; les cercles et disques sont remplacés par des sphères et boules. Nous le verrons au Chapitre IX.

On peut d'ailleurs démontrer inversement que ce théorème caractérise les fonctions harmoniques :

Si $\vec{f}$ est une fonction continue sur un ouvert Ω d'un espace affine euclidien de dimension finie, à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$, et si sa valeur, en tout point a de Ω, est égale à sa valeur moyenne sur n'importe quelle sphère Σ de centre a, de rayon assez Petit, alors nécessairement $\vec{f}$ est de classe C^{∞} (par rapport au corps des réels) dans Ω, et elle est harmonique : $\Delta\vec{f}=\vec{0}$.

Ceci donne une définition des fonctions harmoniques qui ne fait même pas intervenir l'existence d'une seule dérivée.

Du théorème de la moyenne, nous pouvons déduire le théorème du maximum relatif large :

Corollaire 1

Si P est une fonction harmonique réelle, dans un ouvert Ω connexe de $\mathbb{R}^2$, alors P ne peut, en un point a, admettre de maximum ou minimum relatif large, que si elle est constante dans Ω.

Démonstration.

Supposons par exemple que P admette en a un maximum relatif large. Cela signifie qu'il existe un nombre ρ tel que, pour $|z-a|\leq\rho$, on ait l'inégalité

(VII,3 ; 11) $$P(z)\leq P(a)$$

Mais par ailleurs le théorème de la moyenne peut s'écrire

$$\int_0^{2\pi}\left(P(a)-P(a+re^{i\theta})\right)d\theta = 0\ , \quad r\leq\rho\ . \tag{VII,3;12}$$

Ainsi nous avons là une fonction ≥ 0 et dont l'intégrale est nulle. Il résulte du théorème 26 du chapitre IV qu'elle est $d\theta$ - presque partout nulle; mais comme, par ailleurs, elle est continue, elle est nécessairement nulle quel que soit θ ; ceci vaut quel que soit $h \leq \rho$, donc P est constante au voisinage de a. Mais P est $\mathbb{R}$ -analytique (corollaire 2 du théorème 11) donc elle est constante dans Ω (corollaire 5 du théorème 11).

Remarque. Le résultat subsiste sur $\mathbb{R}^n$

Corollaire 2. Soit E un affine normé sur $\mathbb{C}$. ou une variété holomorphe. Si f est une fonction holomorphe sur Ω connexe $\subset$ E , à valeurs complexes, et si en un point a sa partie réelle ou sa partie imaginaire admet un maximum ou un minimum relatif large, alors f est une constante dans Ω.

En effet, si E = $\mathbb{C}$, sa partie réelle ou sa partie imaginaire est constante, d'après le corollaire 1; mais si l'une est constante, l'autre l'est aussi, d'après le théorème 4.

Si E est normé quelconque, on considérera les sous-espaces affines à 1 dimension complexe contenant a , comme par exemple au corollaire 1 du théorème 11; on en déduira que f est constante dans toute boule de centre a contenue dans Ω , donc dans Ω par le corollaire 5 du théorème 11.

Si E est une variété on se ramène à $E=\mathbb{C}^n$ par une carte d'un voisinage de a ; ensuite on utilise le corollaire 5 du théorème 11.

Corollaire 3

Soit E un affine normé sur $\mathbb{C}$, ou une variété holomorpha. Si f est une fonction holomorphe dans Ω connexe, à valeurs complexes, et si, en un point a son module admet un maximum relatif large, alors f est une constante.

Démonstration. Soit d'abord $E = \mathbb{C}$.

Supposons que $|f|$ admette au point a un maximum relatif large. Si $f(a) = 0$, alors cela entraîne que f soit nulle au voisinage de a, donc identiquement nulle d'après le corollaire 4 du théorème 11. Sinon on peut trouver un disque de centre a contenu dans Ω, et dans lequel f ne soit jamais nulle.

Alors, comme ce disque est simplement connexe, on peut y trouver une détermination holomorphe de $\log f(z)$ (corollaire 4 du théorème 10) * mais il résulte alors de l'hypothèse que la partie réelle de cette fonction, qui est $\log |f(z)|$, admet au point a un maximum relatif large. On en déduit que cette fonction $\log f$ est une constante dans le disque, et que par conséquent f est aussi constante dans le disque, et par suite dans Ω tout entier, d'après le corollaire 4 du théorème 11.
On passe à E quelconque comme précédemment.

Corollaire 4.

Soit E un affine normé sur $\mathbb{C}$ ou une variété holomorphe

Si f est une fonction complexe, holomorphe dans Ω connexe $\subset E$, et si son module admet en un point a de Ω un minimum relatif large, alors ou bien $f(a) = 0$, ou bien f est constante dans Ω.

Démonstration.

Si en effet $f(a) \neq 0$, on peut, comme dans le corollaire précédent, considérer la fonction $\log f(z)$, et en déduire la même conclusion, à savoir que f est constante dans Ω.

Remarque.

L'hypothèse $f(a) = 0$ n'est pas à exclure; dans ce cas, il est bien évident que $|f|$ a un minimum large en a ; cela n'entraîne pas que f soit constante.

Corollaire 5. Théorème de d'ALEMBERT.

Tout polynôme de degré m à coefficients complexes d'une

* C'est d'ailleurs évident directement. si A est assez petit!

variable admet m racines dans $\mathbb{C}$, si l'on compte chacune d'elles avec son ordre de multiplicité.

Démonstration

Comme nous l'avons fait au théorème 30 du Chapitre II, Il suffit de démontrer qu'il existe au moins une racine, pour $m \geqslant 1$. De la même manière qu'au Chapitre II, on pourra trouver un cercle de centre 0 et de rayon R, tel que l'on ait l'inégalité $|P(z)| \geqslant |P(0)|$ pour $|z| \geqslant R$. Alors, dans le compact $|z| \leqslant R$, $|P|$ a nécessairement un minimum, et c'est, comme nous l'avons vu au Chapitre II, un minimum pour tout le plan complexe $\mathbb{C}$.

Mais alors, d'après le corollaire 4, comme? n'est pas constante, on a nécessairement $P(a) = 0$, ce qui démontre le théorème.

Remarquons que cette démonstration que nous venons de donner, d'apparence extrêmement courte. est très voisine de celle que nous avons déjà donnée au Chapitre II; la méthode par laquelle nous avons en effet démontré à ce moment que le point a ne pouvait être un minimum du module, est une variante de la démonstration du corollaire 4 qui précède, basée sur la formule de Taylor au lieu du théorème de la moyenne.

Corollaire 6

soit une application holomorphe de $\Omega \subset E$ dans F, définie et continue sur $\bar{\Omega}$. On suppose en outre Ω borné. Alors on a les égalités :

$$\text{(VII,3;12 bis)} \qquad \sup_{x \in \bar{\Omega}} \|\overrightarrow{f(x)}\| = \sup_{x \in \mathring{\Omega}} \|\overrightarrow{f(x)}\| = \sup_{x \in \Omega} \|\overrightarrow{f(x)}\|$$

Si E est de dimension finie, f atteint son maximum en au moins un point de la frontière Ω'.

Démonstration

Soit d'abord $E = \mathbb{C}$. Alors $\bar{\Omega}$ est fermé borné donc compact, donc $\|\vec{f}\|$ admet un maximum dans $\bar{\Omega}$. Si ce maximum est atteint en un point de Ω', nous avons gagné. Sinon, soit a un point de Ω où $\|\vec{f}\|$ est maximum. Le théorème 12 de la moyenne donne, si le disque de centre a et de rayon ρ est contenu dans Ω :

$$M = \|\overrightarrow{f(a)}\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\vec{f}(a+\rho e^{i\theta})\|\, d\theta \quad \text{ou}$$

(VII,3;12 ter)

$$\int_0^{2\pi} \left(\|\vec{f}(a+\rho e^{i\theta})\| - M\right) d\theta \geq 0$$

nous avons là une fonction ≤ 0 dont l'intégrale est ≥ 0 ; le raisonnement déjà fait au corollaire 1 montre que $\|\vec{f}\|_{II} = M$ dans tout disque de centre a contenu dans Ω .

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des points de Ω où $\|\overrightarrow{f(z)}\| = M$, il est trivialement fermé, non vide, et nous venons de voir qu'il est ouvert, donc il contient toute la composante connexe Ω_a de a dans Ω . Mais alors $\|\vec{f}\| = M$ aussi sur $\overline{\Omega}_a$, par continuité. Or $\dot{\Omega}_a$ n'est pas vide; sans quoi $\mathbb{C}$ connexe serait réunion des deux ensembles ouverts non vides disjoints Ω_a et $\complement\Omega_a$ ($\complement\overline{\Omega}_a$ n'est pas vide puisque Ω est borné). Un point b de $\dot{\Omega}_a$ est aussi dans $\dot{\Omega}$, et on a $\|\overrightarrow{f(b)}\| = M$. Le maximum de $\|\vec{f}\|$ dans $\overline{\Omega}$ est donc, même s'il est atteint en un point a de Ω , atteint aussi en au moins un point b de la frontière $\dot{\Omega}$. Celà montre évidemment les égalités (VII, 3; 12 bis). En effet, tout point de Ω étant limite de points de Ω , on a nécessairement $\sup\limits_{z\in\Omega} \leq \sup\limits_{z\in\Omega}$; mais aussi $\sup\limits_{z\in\Omega} \leq \sup\limits_{z\in\dot{\Omega}}$ puisque le maximum est atteint en un point de $\dot{\Omega}$; et $\sup\limits_{z\in\overline{\Omega}}$ n'est autre que le plus grand des deux autres, donc leur est aussi égal.

Si E est de dimension finie, $\overline{\Omega}$ est encore compact, et $\|\vec{f}\|$ atteint encore son maximum en un point a . Si a $\in\Omega$, on pourra couper par tous les sous-espaces affines de dimension complexe 1 passant par a, et donc $\|\vec{f}\|$ vaudra encore M sur toute boule de centre a contenue dans Ω donc encore dans Ω_a, et le même raisonnement montrera que le maximum est atteint en au moins un point un point b de $\dot{\Omega}$.

Si par contre E est de dimension infinie, la situation est toute différente : $\overline{\Omega}$ n'est plus compact, les Sup ne sont plus des Max, d'ailleurs $\|\vec{f}\|$ an'est peut-être plus bornée et ils peuvent valoir $+\infty$. On toujours $\displaystyle\sup_{x\in\Omega} \leq \sup_{x\in\bar{\Omega}}$. Mais si $a \in \dot{\Omega}$, on peut couper par un sous-espace affine de dimension complexe 1 passant par a, et trouver dedans un point b de Ω tel que $\|\vec{f}(b)\|$ 3 $\|\vec{f}(a)\|$; donc $\displaystyle\sup_{x\in\bar{\Omega}} \leq \sup_{x\in\dot{\Omega}}$, ce qui démontre (VII,3;12 bis) dans le cas général.

Remarque 1

Il résulte de la démonstration que, si Ω est connexe et $\|\vec{f}\|$ non constante (donc, pour $F=\mathbb{C}$, pour $\vec{f}$ non constante), la borne supérieure ne peut pas être atteinte en un point de Ω.

Remarque 2

On peut améliorer, en donnant un résultat qui ne suppose pas $\vec{f}$ définie sur $\bar{\Omega}$. En tout point de $\dot{\Omega}$, posons

$$M(a) = \limsup_{x\to a} \|\overrightarrow{f(x)}\| = \lim_{\rho\to 0} \sup_{x\in\Omega\cap B(a;\rho)} \|\overrightarrow{f(x)}\|$$

Alors on a, pour $\vec{f}$ de classe C^1 dans Ω borné :

$$\sup_{x\in\Omega} \|\overrightarrow{f(x)}\| = \sup_{x\in\dot{\Omega}} M(x). \tag{VII,3;12 quarto}$$

En effet, la fonction égale à $\|\vec{f}\|$ dansa et à M dans $\dot{\Omega}$ est manifestement semi-continue supérieurement; donc, pour- $E=\mathbb{C}$ ou de dimension finie, elle admet un maximum dansa la démonstration se poursuit ensuite de la même manière. si $\vec{f}$ est donnée continue sur $\bar{\Omega}$, M est égale à $\|\vec{f}\|$ sur $\dot{\Omega}$, et on retrouve (VII,3;12 bis) comme cas particulier de (VII, 3; 12 quarto).

Remarque 3

— Le corollaire repose essentiellement sur la compacité de $\bar{\Omega}$ pour E de dimension finie, et il n'est pas exact pour Ω non borné. Considérons, par exemple, dans $\mathbb{C}$, l'ouvert

$$\Omega = \{z\in\mathbb{C} ; \mathcal{R}e\, z > 0\}, \text{ avec } \bar{\Omega} = \{z\in\mathbb{C} ; \mathcal{R}e\, z \geq 0\}.$$

La fonction e^z n'est pas bornée dans Ω alors qu'elle est de module 1 sur $\dot{\Omega}$.

On peut obtenir une égalité vraie comme suit. Si Ω n'est pas borné, introduisons un "point à l'infini" ω de $\dot{\Omega}$, et posons

$$(\text{VII},3;12\ \text{quinto})\quad M(\omega) = \limsup_{\|x-x_0\| \to +\infty} \|\vec{f}(x)\| = \lim_{\rho \to +\infty} \cdot \sup_{\|x-x_0\|\geq \rho} \|\vec{f}(x)\|$$

On a alors l'égalité

$$(\text{VII},3;12\ \text{sexto})\quad \sup_{x\in\Omega} \|\overrightarrow{f(x)}\| = \operatorname{Max}\left(\sup_{x\in\dot{\Omega}} M(x), M(\omega)\right)$$

• Pour le voir, on raisonnera encore sur $E = \mathbb{C}$, et alors $\dot{\Omega} \cup \{\omega\}$, pour une topologie convenable, sera compact, et on répètera ce qui a été dit à la remarque 2.

Ainsi dans l'exemple e^{z} que nous venons de donner,

$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| = +\infty \quad , \quad \sup_{z\in\dot{\Omega}} |f(z)| = 1 \quad , \quad M(\omega) = +\infty$$

Remarque 4

Il en résulte que la quantité $M(a;\rho)$ condidérée déjà plusieurs fois, borne supérieure de $\|\vec{f}\|$ sur la sphère de centre a et de rayon ρ, est égale à la borne supérieure de $\|\vec{f}\|$ sur la boule de centre a et de rayon ρ ; il devient donc clair qu'elle est une fonction croissante de ρ. (Elle est même strictement croissante pour E de dimension finie et $F = \mathbb{C}$, sauf si f est constante dans la composante connexe de a dans Ω ; si en effet $M(a;\rho_1) = M(a;\rho_2)$, il existe à cause de la compacité de la sphère, un point de la sphère de rayon ρ_1 qui est un maximum relatif large pour $|f|$, donc f est constante d'après le corollaire 3).

Corollaire 6 bis

Même énoncé que le corollaire 6, avec Min. ou Inf. au lieu de Max ou Sup, pour $F = \mathbb{C}$, et en supposant que f ne s'annule jamais. Il suffit en effet de raisonner sur $\frac{1}{f}$.

Si f s'annule en un point a de Ω, le résultat ne subsiste évidemment pas, car $|f|$ admet un minimum absolu nul en a, alors que, sur $\dot{\Omega}$ sa borne inférieure est généralement

$\neq 0$.

Si $\vec{F} \neq \mathbb{C}$, même si $\vec{f}$ ne s'annule jamais, le résultat ne subsiste pas non plus.

Considérons par exemple la fonction $z \to (a, a, \ldots, a, z)$

indiquée page , dans $\overline{\Omega}$, où Ω est le disque $|z| < 2|a|$. Elle atteint le minimum $|a|$ de sa norme en tous les points du disque $|z| \leq |a|$, mais nulle part sur la frontière $\dot{\Omega}$, qui est le cercle $|z| = 2|a|$ et où $\|f\|$ vaut $2|a|$

Corollaire 7

Soit V une variété holomorphe connexe et compacte. Toute fonction f sur V, à valeurs dans un Banach $\vec{F}$, et holomorphe, est constante.

Démonstration

La fonction $\|\vec{f}\|$, continue sur le compact V, a un maximum M. L'ensemble $\mathcal{E}$ des points de V où $\|\vec{f}\|$ vaut M est donc non vide, évidemment fermé, et la démonstration donnée au corollaire précédent nous indique, en utilisant des cartes, qu'il est ouvert; V étant connexe, $\mathcal{E} = V$, et $\|\vec{f}\|$ est constante sur V. Mais il en est de même pour toute fonction $\|\vec{f} - \vec{c}\|$, $\vec{c} \in \vec{F}$ quelconque. Si alors a et b sont 2 points distincts de V, la fonction $\|\vec{f} - \vec{f}(a)\|$ est constante sur V, nulle en a, donc nulle en b, donc $f(b) = f(a)$; donc f est bien constante sur V.

Remarque

Ceci montre que toute variété holomorphe de dimension > 0, compacte, connexe, est "abstraite", elle ne peut pas être une sous-variété d'un $\mathbb{C}^N$; sans quoi chacune des fonctions coordonnées $z_1, z_2, \ldots, z_N$, holomorphe sur V, serait constante sur V et V serait réduite à un point.

Corollaire 8 (Majoration des dérivées de f dans Ω à partir d'une majoration de $\|\vec{f}\|$ sur $\dot{\Omega}$).

Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \subset E$ à valeurs dans $\vec{F}$, définie et continue sur $\overline{\Omega}$; on suppose Ω borné. Alors on a les inégalités (pour $x \in \Omega$) :

$$(\mathrm{VII},3;13) \qquad \left\| f^{(m)}(x) \right\| \leq M \left(\frac{m}{d(x)}\right)^m \left(\text{ou } M \frac{m!}{(d(x))^m} \text{ si } E = \mathbb{C} \right),$$

où $d(x)$ est la distance de $x \in \Omega$ à la frontière $\dot{\Omega}$, et

$$M = \sup_{x \in \dot{\Omega}} \left\| \vec{f}(x) \right\|$$

Démonstration

soit $\rho < d(x)$. Alors la boule B (a;~) est dans Ω, et on aura l'inégalité (VII, ,) ou (si E = $\mathbb{C}$ (où a est remplacé par x)

Mais, d'après le corollaire 6, $M(a;\rho) \leq M$, d'où le résultat, en faisant tendre ρ vers $d(x)$.

Remarque 1

Comme dans le corollaire 6, que nous utilisons, Ω doit' être borné.

Remarque 2

La majoration de $\|\vec{f}\|$ sur la frontière $\dot{\Omega}$ ne donne des majorations intéressan~~tes~~-pour les dérivées successives, que pour les points de Ω qui ne sont pas trop proches de la frontière($d^m(x)$ au dénominateur!). Il n'existe pas de majoration uniforme des dérivées dans Ω tout entier.

Considérons par exemple la fonction définie par $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ dans $\bar{\Omega} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$. La convergence normale de la série assure la continuité de f dans $\bar{\Omega}$, la convergence normale de la série dérivée dans tout disque $|z| \leq \rho < 1$ assure l'holomorphie de f dans $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.
Mais on a $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} = -\frac{1}{z}\log(1-z)$, qui n'est pas bornée dans Ω (son module tend vers l'infini quand z tend vers 1). On ne doit pas être trop exigeant; il est déjà assez remarquable que des majorations de $\vec{f}$ donnent des majorations de ses dérivées!

Corollaire 9

soit $\vec{f}$ une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, à valeurs dans un Banach $\vec{F}$, ou une fonction harmonique dans Ω, à valeurs réelles ou complexes. Soit A un disque de centre a, de rayon R , contenu dans Ω . Alors $\overrightarrow{f(a)}$ est la moyenne des valeurs de $\vec{f}$ dans A :

$$(\text{VII},3;14) \qquad \overrightarrow{f(a)} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_\Delta \vec{f}(z)\,dx\,dy$$

Démonstration.

C'est évident, car la 2ème intégrale vaut

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint \vec{f}(a+\rho e^{i\theta})\,\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$(\text{VII},3;14\,\text{bis}) \qquad \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} \vec{f}(a+\rho e^{i\theta})\,d\theta =$$

$$\frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \rho\,d\rho\; 2\pi\,\vec{f}(a) = \overrightarrow{f(a)}$$

Ce corollaire parait bien moins avantageux que le théorème lui-même; mais parfois il est plus utile. Par exemple il s'étendra évidemment aux fonctions harmoniques sur un espace euclidien E de dimension finie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans un Banach quelconque, $\vec{F}$, comme le théorème 12 lui-même; et là aussi la réciproque sera vraie, toute fonction ayant cette propriété des moyennes dans les boules sera harmonique. Mais l'existence de cette moyenne ne nécessite que l'intégrabilité locale de $\vec{f}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. On pourra donc définir les fonctions harmoniques en les supposant seulement localement intégrables. La théorie des distributions donnera d'ailleurs des résultats encore meilleurs.

Voici une autre conséquence immédiate du corollaire 9:

Corollaire 9 bis

Plaçons-nous dans les conditions du corollaire 9. On a la majoration :

$$(\text{VII},3;14\,\text{ter}) \qquad \left\| \overrightarrow{f(a)} \right\| \leq \left(\frac{1}{\pi R^2} \iint_\Delta \left\| \overrightarrow{f(z)} \right\|^p dx\,dy \right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leq p \leq +\infty$$

Si une suite de fonctions $\vec{f}_n$ converge vers $\vec{0}$ localement dans L^p, c.à.d. dans $L^p(dx\,dy; K; \vec{F})$ pour tout compact K de Ω, elle converge aussi localement uniformément vers $\vec{0}$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer à (VII, **3**; 14), considérée comme intégrale de $\vec{f} = \vec{f} \times 1$ par rapport à la mesure $d\mu = \frac{1}{\pi R^2}\,dx\,dy$ de masse 1, l'inégalité de HÖLDER (IV,4; 61) (corollaire **3** du théorème **46**).

Considérons maintenant une suite de fonctions$\vec{f}_n$ sur Ω. Si elles convergent localement uniformément vers 0 , elles convergent à fortiori vers 0 localement dans L^p, car

$$\left(\iint_K \|\vec{f_n(z)}\|^p dx\,dy\right)^{1/p} \leq \operatorname*{Max}_{z\in K} \|\vec{f_n(z)}\| \left(mes\,(K)\right)^{1/p}.$$

C'est ici la réciproque que nous devons montrer, les $\vec{f}_n$ étant holomorphes ou harmoniques. Si K est un compact, soit $R > 0$ un nombre strictement inférieur à la plus courte distance de K et de $\complement\Omega$ (voir Chapitre II, page 82). Appelons H l'ensemble des points dont la distance à K est $\leq R$; H est encore un compact, contenu dans Ω . Et l'on a

$$\operatorname*{Max}_{z\in K} \|\vec{f_n(z)}\| \leq \left(\frac{1}{\pi R^2}\iint_H \|\vec{f_n(z)}\|^p dx\,dy\right)^{1/p}$$

d'après (VII, **3**; 14 quarto), d'où le résultat.

Remarque

Bien entendu la convergence dans $L^p(dx\,dy\,; \Omega\,; \vec{F})$ n'entraîne pas la convergence uniforme dans Ω, mais seulement la convergence uniforme locale; on a pas le droit de s'approcher des bords !

Fonctions entières, théorème de LIOUVILLE

Soient E, F, des affines normés sur un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle fonction entière sur E à valeurs dans F, une fonction $\mathbb{K}$-analytique f, dont le développement de Taylor, autour de tout point a de E, est convergent et représente $f(x)$, en tout point x de E. Il résulte du corollaire 1 du théorème 11 que, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ toute fonction holomorphe sur E à valeurs dans F est entière. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, toute fonction harmonique sur E euclidien de dimension finie est entière.

Désormais, entière voudra dire $\mathbb{C}$-entière.

Théorème 13. (Théorème de LIOUVILLE).

1°) Toute fonction entière $\vec{f}$ sur E à valeurs dans F, et bornée, est une constante.

2°) S'il existe $a \in E$, m entier ≥ 0, $C \geq 0$ tels que, pour $\|\overrightarrow{x - a}\|$ assez grand,

$$\|\overrightarrow{f(x)}\| \leq C \, \|\overrightarrow{x - a}\|^m \tag{VII,3;15}$$

alors f est un polynome de degré $\leq m$.

Démonstration

Montrons d'abord 2°.

Les inégalités (VII,3,4 septimo) donnent immédiatement:

$$\|f^{(n)}(a)\| \leq M(a;\rho)\frac{n^n}{\rho^n} \leq C\, n^n.\, \rho^{m-n}. \tag{VII,3;16}$$

Faisons tendre ρ vers $+\infty$; on trouve $f^{(n)}(a) = 0$ pour $n > m$. La série de Taylor autour de a, qui représente $\overrightarrow{f(x)}$ pour tout x, se réduit à un polynome de degré $\leq m$, ce qui montre 2°).

En faisant $m = 0$, on trouve le 1°)

Corollaire 1. (théorème d'Alembert)
(Démonstrations de plus en plus courtes!)

Soit en effet P un polynome de degré $m \geq 1$ sur $\mathbb{C}$, et supposons qu'il n'ait pas de zéros. Alors $\frac{1}{P}$ serait une fonction entière. Mais $|P(z)|$ tend vers l'infini pour $|z| \longrightarrow \infty$, donc il existe R tel que $|P(z)| \geq 1$ pour $|z| \geq R$; alors $\left|\frac{1}{P}\right|$ serait borné par Max $\left(1, \underset{|z|\leq R}{\text{Max}} \frac{1}{\|P(z)\|}\right)$,donc constant d'après Liouville, ce qui est absurde.

Corollaire 2

1°) Soit P une fonction harmonique, réelle ou complexe, sur $\mathbb{R}^2$. Si $|P|$ est bornée,. ou si P est réelle et bornée supérieurement ou inférieurement, elle est constante.

2°) Toute fonction f entière sur E , à valeurs complexes, à partie réelle ou imaginaire bornee supérieurement ou inferieurement, est constante.

Démonstration

Montrons d'abord 2°). Soit f entière sur E à valeurs complexes, $= P + iQ$, et supposons P bornée supérieurement, $P \leq M$. Alors e^f est encore entière, mais de module borné, $|e^f| = e^P \leq e^M$, Liouville dit que e^f est constante, donc aussi f . Si P est bornée inférieurement, $P \geq -M$, on considérera e^{-f}, si c'est Q qui est bornée supérieurement ou inférieurement, on remplace f par if .

Passons à 1°), dans le cas de $\mathbb{R}^2$ Si P est harmonique, elle est partie réelle d'une fonction holomorphe f (théorème 4); si P est bornée supérieurement ou inférieurement, nous venons de voir que f est constante, donc aussi P .

Ce corollaire admet des généralisations diverses relatives aux fonctions harmoniques ou holomorphes en dimension quelconque; nous les verrons plus tard.

Le théorème de Liouville a des applications importantes à la théorie du spectre d'un opérateur dans un espace de Banach.

Soit u une application linéaire continue d'un espace de Banach F (sur le corps des complexes) dans lui-même. On dit que le nombre de complexe λ appartient au spectre de u , si l'opérateur $u-\lambda I$ n'est pas inversible.

De même on définira le spectre d'un élément$a$ d'une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$ (Chapitre II, page 120)

D'après ce que nous avons vu au théorème62 du Chapitre II , l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{A}$ est un ouvert, et par conséquent, pour $u \in \mathfrak{A}$ donné, l'ensemble $\Omega(u)$ des valeurs de λ pour lesquels $u - \lambda I$ est inversible, est un ouvert du plan complexe : le spectre de u est fermé. D'autre Part nous avons vu aussi (corollaire 1 du théorème 31 du Chap. III) que l'application $u \longrightarrow u^{-1}$ est de classe C^∞ (par rapport au corps des complexes); il en résulte que l'application $\lambda \longrightarrow (u - \lambda I)^{-1}$ est de classe C^∞ (sur le corps des complexes), c'est-à-dire holomorphe de $\Omega(u)$ à valeurs dans $\mathfrak{A}$.

Théorème 14. (Gelfand)

Le spectre d'un élément u d'une algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$. est un ensemble compact non vide du plan complexe.

Démonstration.

Le spectre étant fermé, pour démontrer qu'il est compact, nous devons démontrer qu'il est borné, autrement dit que, pour $|\lambda|$ assez grand, $u - \lambda I$ est inversible. Or les éléments suffisamment voisins de I sont inversibles; pour $|\lambda| \to +\infty$, $I - \frac{u}{\lambda}$ tend vers I , donc il est inversible pour $|\lambda|$ assez grand, donc aussi $u - \lambda I = -\lambda(I - \frac{u}{\lambda})$. Plus précisément, le théorème 62 du Chapitre II , nous dit que $I - \frac{u}{\lambda}$, donc $u - \lambda I$, est inversible dès que $\frac{\|u\|}{\lambda} < 1$. ou $|\lambda| > \|u\|$; le spectre de u est contenu dans le disque $|\lambda| \leq \|u\|$

Nous avons maintenant à démontrer que le spectre n'est pas vide. Supposons donc qu'il soit vide, et montrons que nous aboutissons à une contradiction.

La fonction $\lambda \longrightarrow (u - \lambda I)^{-1}$ serait alors une fonction entière, définie sur $\mathbb{C}$, à valeurs dans l'espace de Banach $\mathfrak{A}$. Or il est évident qu'elle tend vers 0 à l'infini.

On a en effet

$$\text{(VII,3;17)} \qquad \|(u - \lambda I)^{-1}\| = \left\|\left(-\lambda\left(I - \frac{u}{\lambda}\right)\right)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(I - \frac{u}{\lambda}\right)^{-1}\right\|$$

Or, lorsque λ tend vers ∞, $I - \frac{u}{\lambda}$ tend vers 1 et, d'après la continuité de l'inverse, son inverse aussi tend vers 1, de sorte que le deuxième membre, et par conséquent le premier, est majoré, pour $|\lambda|$ tendant vers ∞, par le produit de $\frac{1}{|\lambda|}$ par une constante.

Le Théorème de Liouville montre donc que la fonction considérée serait une constante, et, comme elle tend vers 0 à l'infini, elle serait identiquement nulle. Or, pour tout λ, sa valeur est l'inverse d'un élément, et l'inverse d'un élément ne peut jamais être nul.

Remarque

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$, de dimension finie > 0. Alors $\mathcal{L}(E;E)$ $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach. Un élément u de $\mathcal{A}$ est inversible si et seulement si il est injective de E dans E ou encore si elle n'a pas la valeur propre 0, ou si son déterminant $\det u$ est $\neq 0$. Alors le spectre de u est l'ensemble de ses valeurs propres; il est fini, donc compact. Il est non vide, car les valeurs propres λ_i sont les racines de l'équation algébrique $\det(u-\lambda I) = 0$, et le théorème de d'Alembert nous apprend qu'il en existe au moins une.

P-ais nous avions bien remarqué que la méthode qui démontrait que le spectre n'était jamais vide, c.a.d. le théorème de Liouville, servait aussi à démontrer le théorème d'Alembert!

Corollaire. (Théorème de Mazur-Ulam)

Tout corps de Banach est canoniquement isomorphe au corps des complexes.

Un corps de Banach est $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach où tout élément $\neq 0$ est inversible.

L'application $\lambda \longrightarrow \lambda I$ est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{A}$, conservant les opérations d'addition et de multiplication, ainsi que les normes. Son image est toujours un sous corps de $\mathcal{A}$ isomorphe au corps des complexes $\mathbb{C}$. Il nous suffit donc de démontrer que ce sous-corps est $\mathcal{A}$ lui-même.

Cela revient à dire que, quel que soit l'élément& de $\mathcal{A}$, il doit exister un élément λ de $\mathbb{C}$, tel queu $= \lambda I$, or nous avons vu que le spectre n'est pas vide, il existe donc un élément λ de $\mathbb{C}$, tel que $u - \lambda I$ ne soit pas inversible; et puisque $\mathcal{A}$ est un corps, un élément non inversible est nécessairement nul, ce qui démontre le corollaire.

Théorème de convergence de Weierstrass.

Théorème 15

Soit $\vec{f}_0$, $\vec{f}_1$, ..., $\vec{f}_n$, ... une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert Ω borné de $\vec{E}$, et continues dans son adhérence $\overline{\Omega}$, à valeurs dans un Banach $\vec{F}$.

Si la suite des $\vec{f}_n$ converge uniformément vers une fonction limite $\vec{f}$, sur la frontière $\dot{\Omega}$, alors elle converge uniformément vers une limite $\vec{f}$ dans $\overline{\Omega}$ tout entier. Cette limite $\vec{f}$, continue dans $\overline{\Omega}$, est holomorphe dans Ω, et pour tout entier m, les dérivées $\vec{f}_n^{(m)}$ convergent vers la dérivée $\vec{f}^{(m)}$, localement uniformément dans Ω.

Démonstration

La quantité $\|\vec{f}_\ell - \vec{f}_n\|_{\overline{\Omega}}$, borne superieure de la norme de $\vec{f}_\ell - \vec{f}_n$ dans $\overline{\Omega}$ est aussi, d'après ce que nous avons vu au corollaire 6 du théorème 12, égale à $|||\vec{f}_\ell - \vec{f}_n|||_{\dot{\Omega}}$, borne supérieure de la norme sur la **frontière** $\dot{\Omega}$. Or celle-ci converge vers 0 pour ℓ et n infini, puisque lés $\vec{f}_n$ sont supposées converger uniformément vers une limite sur la frontière $\dot{\Omega}$. Ii existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tei que, pour $n \geq n_0$, $|||\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}|||_{\dot{\Omega}}$ soit ≤ 1, donc aussi $|||\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}|||_{\overline{\Omega}}$; les $\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}$ sont bornées sur $\overline{\Omega}$ pour $n \geq n_0$. Ensuite les $\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}$ forment une suite de Cauchy, dans l'espace normé $(\vec{F}^{\overline{\Omega}})_{cb}$; **mais** cet espace est un Banach puisque $\vec{F}$ est supposé complet (dans tout le chapitre)(corollaire 2 du théorème 65du Chap.II). Cela prouve bien que les $\vec{f}_n - \vec{f}_{n_0}$, donc aussi les $\vec{f}_n$ convergent vers une limite continue uniformément dans $\overline{\Omega}$.

Soit ensuite $a \in \Omega$, $d(a)$ sa distance à $\dot{\Omega}$ ou $\complement\Omega$. Pour tout x de la boule $B = B(a;\rho)$, $\rho < d(a)$, **on a** $d(x) \geq d(a) - \rho$; La formule (VII, 3; 13) montre alors que les dérivées $\vec{f}_n^{(m)} - \vec{f}_{n_0}^{(m)}$ forment une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}_m(\vec{E}^m;\vec{F}))^B_{cb}$, donc, comme précédemment, les $f_n^{(m)}$ convergent vers une **limite** g_m, uniformément dans B $(a;\rho)$; les $f_n^{(m)}$ convergent finalement vers g_m localement uniformément dans Ω. Le théorème 111 du Chapitre IV dit alors $\vec{f}$ est de classe C^∞ (sur $\mathbb{C}$) et que $f^{(m)} = g_m$ pour tout m, ce qui démontre le théorème.

Remarques

1°) Ω doit être supposé borné (puisqu'on applique les corollaires 6 et 8 du théorème 12). Considérons le meme ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathcal{R}e\, z > 0\}$ que dans la remarque 3 qui suit le corollaire 6, et la suite de fonctions $f_n(z) = \dfrac{e^{nz}}{n}$; elles convergent vers 0 uniformément sur $\dot{\Omega}$, **mais** ne convergent pas vers une limite dans Ω, et convergent vers l'infini en tout point de l'axe réel > 0.

2°)Nous avons bien indiqué au Chapitre IV que la convergence d'une suite de fonctions n'entraînait pas la convergence de leurs dérivées. C'est parce qu'à ce moment nous raisonnions indifféremment sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Mais nous voyons maintenant que, pour les fonctions C^1 sur $\mathbb{C}$, la convergence des fonctions entraîne bien celle des dérivées.

Corollaire 1

Si une suite de fonctions $\vec{f}_n$ holomorphes dans Ω (non. nécessairement borné) $\subset E$, à valeurs dans $\vec{F}$, converge pour n infini vers une fonction $\vec{f}$, localement uniformément dans Ω, alors $\vec{f}$ est holomorphe dans Ω et les dérivées $f_n^{(m)}$ convergent vers la dérivée $f^{(m)}$, localement uniformément dans Ω.

Démonstration

Soient en effet a un point quelconque de Ω, B $(a;\rho)$ une boule de centre a, contenue dans Ω, sur laquelle les $\vec{f}_n$ convergent uniformément; il n'y a qu'à appliquer à le théorème.

Corollaire 2

Si une série $\sum\limits_{=}^{\infty} \vec{u}_n$ de fonctions holomorphes sur $\Omega \subset E$, à valeurs dans Banach $\vec{F}$, converge localement uniformément alors sa somme est holomorphe dans Ω et la série peut être dérivée terme à terme

(VII,3;18) $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n\right)^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(m)} ,$$

toutes les séries dérivées convergent elles-mêmes localement uniformément dans Ω .

Si un produit infini $\prod_{n=0} u_n$ de fonctions holomorphes dans Ω à valeurs complexes, converge localement uniformément dans Ω vers une limite Π, alors Π est holomorphe. et on peut dériver logarithmiquement terme à terme

(VII,3;19) $$\frac{\Pi'}{\Pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n'}{u_n}$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n'}{u_n}$ convergent elle-même localement uniformément dans Ω .

Démonstration

La propriété relative aux séries résulte immédiatement du corollaire précédent.

Si maintenant on considère le produit infini, et si l'on pose $\Pi_N = \prod_{n=0}^{N} u_n$, on voit que, d'après le corollaire précédent, les Π_n' convergent vers Π' localement uniformément, et Π est holomorphe D'autre part, les $\frac{1}{\Pi_N}$ convergent vers $\frac{1}{\Pi}$ localement uniformément (voir pages 160 du Chapitre II) et par conséquent les $\frac{\Pi_N'}{\Pi_N} = \sum_{n=0}^{N} \frac{u_n'}{u_n}$ convergent bien vers $\frac{\Pi'}{\Pi}$ localement uniformément.

Corollaire 3

Soient Ω un ouvert de E , et $\vec{F}$ un Banach.

L'espace des fonctions holomorphes et bornées sur Ω , à valeurs dans $\vec{F}$, muni de la norme $\vec{f} \longrightarrow \sup_{x \in \Omega} \|\vec{f}(x)\| = \|\vec{f}\|_{\Omega;0}$ est complet.

On sait en effet que l'espace $(\vec{F}^{\Omega})_{cb}$ des fonctions continues et bornées sur Ω à valeurs dans $\vec{F}$ est complet (corollaire 2 du théorème 65 du Chap. II); or l'espace des fonctions holomorphes bornées est fermé dans $(\vec{F}^{\Omega})_{ce}$, d'après le théorème.

Corollaire 4

Soient Ω un ouvert de E, $\vec{F}$ un espace de Banach. L'espace des fonctions continues bornées sur $\bar{\Omega}$, holomorphes dans Ω, à valeurs dans $\vec{F}$, muni de la norme $|||\vec{f}|||_{\bar{\Omega};0}$ est complet.

En effet il est lui aussi fermé dans $(\vec{F}^{\Omega})_{cb}$.

De même :

Corollaire 5

L'espace des fonctions holomorphes dans Ω à valeurs dans $\vec{F}$, bornées ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m$, muni de la norme $|||\vec{f}|||_{\Omega;m}$ est complet; l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$, holomorphes sur Ω, à valeurs dans $\vec{F}$, bornées sur $\bar{\Omega}$, ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m$ sur Ω, muni de la norme $|||\vec{f}|||_{\bar{\Omega};m}$, est complet.

§ 4 FONCTIONS MÉROMORPHES. POLES ET POINTS SINGULIERS ESSENTIELS- THÉORIE DES RÉSIDUS. CALCUL DES INTÉGRALES PAR LA MÉTHODE DES RÉSIDUS

Dans le § 3, on pouvait démontrer des égalités de Cauchy relatives à des fonctions holomorphes sur des ouverts de $\mathbb{C}$, de là des inégalités qui, elles, pouvaient s'étendre à des fonctions C^1 ou C^∞ sur des ouverts d'un affine normé (sur $\mathbb{C}$) E quelconque. Dans le § 4, rien de tel ne sera possible. On étudiera en effet des fonctions présentant un point singulier isolé $a \in \mathbb{C}$, c.a.d. holomorphes dans $\complement\{a\}$; exemple : $\frac{1}{z-a}$.

Or nous verrons ultérieurement que, dans $\mathbb{C}^n$ pour $n \geq 2$, toute fonction holomorphe dans $\complement a$ se prolonge en une fonction holomorphe dans l'espace entier : il n'existera pas de fonctions à singularité isolée. E sera donc le corps des complexes dans tout ce paragraphe.

Théorème 16

Soit f une fonction holomorphe dans la couronne Ω de $\mathbb{C}$ définie par les inégalités $R_1 < |z-a| < R_2$, à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$. Alors elle admet développement en série appelé développement de LAURENT

$$\vec{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{c}_n (z-a)^n \tag{VII,4;1}$$

Ce développement converge absolument dans la couronne, et normalement dans toute couronne $R_1 < R'_1 \leq |z-a| \leq R'_2 < R_2$.

Les coefficients de la série de LAURENT sont déterminés d'une manière unique, et donnes par la formule

$$\vec{c}_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \,, \tag{VII,4;2}$$

où Γ est n'importe quel $\mathring{C}$-cycle de longueur finie dans Ω, entourant une fois a dans le sens direct.

Remarquons ce qu'il y a d'interessant dans cette formule. Le développement de Laurent généralise le développement de Taylor; cependant il n'est pas valable au voisinage de a, mais seulement dans une couronne à une certaine distance de a. En particulier, il est évidemment impossible d'exprimer les, coefficients $\vec{c}_n$ par des dérivées de $\vec{f}$ au point a, puisque $\vec{f}$ n'est pas définie au voisinage de a .

Démonstration

Désignons par γ_1 (resp. γ_2) le cercle de centre a et de rayon R''_1 (resp R''_2) avec $R_1 < R''_1 < R'_1 < R'_2 < R''_2 < R_2$, orienté dans le sens direct.

Alors, dans l'ouvert Ω , le cycle $\gamma_2 - \gamma_1$ est le bord orienté d'une couronne ayant l'orientation de $\mathbb{C}$, $R''_1 \leq |z-a| \leq R''_2$, et on peut par suite lui appliquer la formule intégrale de Cauchy :

$$(\text{VII},4;3)\qquad \vec{f}(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1-\gamma_2} \frac{\vec{f}(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\,, \quad \text{pour } R'_1 \leq |z-a| \leq R'_2 .$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} .$$

Considérons d'abord la première intégrale.

On peut la traiter exactement de la même manière qu'au théorème 10, en développant $\frac{1}{\zeta - z}$ suivant les puissances croissantes de $z - a$. On obtient ainsi le développement

$$(\text{VII}.4;4)\qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{c}_n (z-a)^n ,$$

avec les coefficients $\vec{c}_n$, $n \geq 0$, donnés par (VII, 4; 2), l'intégrale étant prise sur γ_2. La seule différence ici, comme nous l'avons déjà dit, c'est qu'il n'est plus possible d'exprimer les $\vec{c}_n$ par des dérivées de $\vec{f}$ au point a. Le rayon de convergence de la série écrite est manifestement $\geq R''_2$ (puisque $\|\vec{c}_m\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_2} \frac{\|\vec{f}(\zeta)\|\,ds}{R''^{\,n+1}_2} \leq \frac{M(a;R''_2)}{R''^{\,n}_2}$, où $M(a;\rho)$ est le maximum de $\|\vec{f}\|$ sur le cercle $|z-a| = \rho$; noter qu'ici, contrairement au §3, $M(a;\rho)$ n'est plus égal au maximum de $\|\vec{f}\|$ dans le disque $|z-a| \leq \rho$, où $\vec{f}$ n'est même pas définie) et en particulier la série est normalement convergente pour $|z-a| \leq R'_2$.

Considérons maintenant la deuxième intégrale.

Nous allons cette fois la développer suivant les puissances négatives de $z-a$. On a la formule

$$(\text{VII},4;5)\qquad \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = -\frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} = -\frac{1}{z-a} - \frac{\zeta-a}{(z-a)^2} - \cdots - \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} - \cdots$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

la série considérée étant normalement convergente pour $|\zeta - a| = R''_1$, $|z - a| \geqslant R'_1$.

Si alors on peut intervertir le signe $\sum$ et le signe $\int$, on pourra écrire

$$(VII,4;6) \qquad -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=-1}^{-\infty}\vec{c}_n\,(z-a)^n ,$$

où $\vec{c}_n$ (pour $n \leqslant -1$) est encore donné par (VII, 4; 2), l'intégrale étant prise sur γ_1 .

Cette interversion sera possible si, lorsqu'on remplace, dans les même conditions que dans la démonstration du théorème 10, les quantités $\frac{\vec{f}(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ par leur norme, l'un des deux membres prend une valeur finie. Or on a la majoration

$$(VII,4;7) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1}\frac{\|\vec{f}(\zeta)\|\,|z-a|^n}{|\zeta - a|^{n+1}}\,ds \leqslant M(a\,;R''_1)\left(\frac{R'_1}{R''_1}\right)^n ,$$

terme général $\geqslant 0$ d'une série convergente, puisque $\frac{R'_1}{R''_1} > 1$

et qu'on somme de $n=-1$ à $-\infty$.

Ceci montre que l'interversion était légitime; la série obtenue est normalement convergente pour $|z-a| \geqslant R'_1$.

En réunissant (VII,4;4) et (VII,4;6) on obtient bien (VII,4;1) avec la valeur des coefficients (VII,4;2), calculés par des intégrales sur γ_1 et γ_2 , selon le signe de n .

Des deux séries trouvées, l'une est normalement convergente pour $|z-a| \leqslant R'_2$, et l'autre pour $|z-a| \geqslant R'_1$, d'où il résulte bien que la série (VII,4;1) est normalement convergeante dans la couronne $R'_1 \leqslant |z-a| \leqslant R'_2$.

Pour les valeurs des coefficients, nous avons trouvé des intégrales sur certains cercles de centre a , orientés dans le sens direct, γ_2 pour $n \geqslant 0$, γ_1 pour $n \leqslant -1$; mais comme il s'agit d'intégrales de fonctions holomorphes dans la couronne Ω donc d'intégrales de formes différentielles de degré 1 fermées, on peut remplacer γ_1 ou γ_2 par n'importe quel C-cycle de longueur finie, qui leur est O-homologue dans Ω (corollaire 6 du théorème 54). Or, si un C-cycle de longueur finie Γ dans Ω fait une fois le tour de a dans le sens direct, c'est-à-dire sid admet par rapport à ce cycle l'indice + 1, cela veut exactement dire (remarque qui suit le théorème du Chapitre VI) que ce cycle est ?-homologue à un cercle de centre a situé dans Ω et parcouru dans le sens direct.

Dans le cas de la série de Taylor, on savait de façon élémentaire qu'il n'y avait qu'un développement possible, avec $\vec{c}_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ .en effet, une série de puissances à exposants ≥ 0 est toujours dérivable terme à terme dans son disque de convergence, on peut donc calculer $\vec{f^{(n)}}(z)$ par une série, et en faisant $z = a$ on trouve $\vec{f^{(n)}}(a) = n!\,\vec{c}_n$

Ici, pour prouver l'unicité des $\vec{c}_n$, on procèdera comme suit. Puisque la série converge uniformément dans une couronne, on peut intégrer terme à terme $\frac{\vec{f}(z)\,dz}{(z-a)^{m+1}}$ sur un cercle γ de centre a, situé dans la couronne, parcouru dans le sens direct. Mais $\int_\gamma (z-a)^{n-m-1}dz$ vaut 0 pour $n-m \neq 0$, car elle s'écrit $\int_\gamma \frac{d(z-a)^{n-m}}{n-m}$, intégrale d'un cobord sur un cycle, et $2i\pi$ pour $n-m=0$, car elle s'écrit $\int \frac{dz}{z-a}$; il reste finalement $\int_\gamma \frac{\vec{f}(z)\,dz}{(z-a)^{m+1}} = 2i\pi\,\vec{c}_m$, ce qui est la formule trouvée pour les coefficients.

En calculant les $\vec{c}_n$ par des intégrales sur un cercle de rayon ρ :

<u>Corollaire 1</u>

<u>Les coefficients de la série de LAURENT admettent la majoration</u>

(VII,4;8) $$\|\vec{c}_n\|\,\rho^n \leq M(a;\rho)\ ,\quad R_1 < \rho < R_2\ ;$$

<u>autrement dit chaque terme $\vec{c}_n\,(z-a)^n$ de la série de LAURENT est majoré, en norme, sur n'importe quelle circonférence de centre a et de rayon ρ située dans la couronne Ω, par le maximum M $(a;\rho)$ de la norme de $\vec{f}$ sur cette circonférence.</u>

<u>Cas où $R_1 = 0$,</u> La série de TAYLOR est un cas particulier de la série de LAURENT, celui où la couronne est

définie par $0 < \| z - a | < R_2$ et où les coefficients correspondant à $n < 0$ sont nuls.

Si une fonction est holomorphe dans la couronne $0 < |z-a| < R_2$, on sait à l'avance qu'elle admet un développement de LAURENT, normalement convergent dans toute couronne $0 < R_1' \leq |z-a| \leq R_2' < R_2$. S'il se trouve que tous les coefficients $\vec{c}_n$ pour $n < 0$ sont nuls, la fonction est prolongeable en une fonction holomorphe dans le disque $|z-a| < R_2$, en lui donnant la valeur $\vec{c}_0$ au point a puisqu'elle est représentée par une série de fonctions holomorphes pour $|z-a| < R_2$, localement uniformément convergente. On dit alors que a est un point régulier.

On dit que a est un pôle d'ordre-, si le coefficient $\vec{c}_{-m}$ n'est pas nul, et si tous les coefficients $\vec{c}_n$ pour $n < -m$ sont nuls. S'il existe une infinité de valeurs de $n < 0$ pour lesquels $\vec{c}_n$ n'est pas nul, on dit que $\vec{f}$ présente, au point a , un point singulier essentiel.

Le coefficient $\vec{c}_{-1}$ s'appelle toujours résidu de $\vec{f}$ en a, et se note $\mathcal{R}es_a \vec{f}$.

On dit qu'une fonction $\vec{f}$ est méromorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, à valeurs dans un espace de Banach F , s'il existe un ensemble $\{a_i\}_{i \in I}$, fini ou infini, de points isolés dans Ω, tels que $\vec{f}$ soit holomorphe dans $\Omega - \{a_i\}_{i \in I}$, et que chaque point a_i soit un pôle pour $\vec{f}$.

Corollaire 2

Si $\vec{f}$ est une fonction holomorphe pour $0 < |z-a| < R_2$, et si lorsque z tend vers a, $\|\vec{f}(z)\|$ est infiniment petit devant $\left|\frac{1}{z-a}\right|$, alors a est un point régulier pour $\vec{f}$.

En effet, les majorations (VII,4;8), si l'on fait tendre ρ vers 0 , montrent que tous les coefficients $\vec{c}_n$ sont nuls pour $n < 0$.

Corollaire 3

Si $\vec{f}$ est holomorphe pour $0 < |z-a| < R_2$, et si $\|\vec{f}(z)\|$

est infiniment petit devant $\left|\frac{1}{z-a}\right|^{m+1}$, m entier ≥ 1 , lorsque z tend vers a , $\vec{f}$ admet au point a un point régulier ou un pole d'ordre $\leq m$.

Même démonstration.

Corollaire 4

Pour que $\vec{f}$ holomorphe dans $0<|z-a|<R_2$ admette au point a un pôle d'ordre m , entier ≥ 1 , il faut et il suffit qu'il existe une constante $\vec{c}\neq 0$ (qui est exactement le coefficient $\vec{c}_{-m}$) telle que $\vec{f}$ soit équivalente à $\frac{\vec{c}}{(z-a)^m}$ lorsque z tend vers a.

Ce corollaire exprime, si l'on veut, que si $\vec{f}$ a un pôle en a son développement de LAURENT donne un développement asymptotique tout comme le développement de TAYLOR pour a régulier,

Démonstration

La condition est suffisante; car, si elle est réalisée $\left\|\vec{f}(z)-\frac{\vec{c}}{(z-a)^m}\right\|$ est infiniment petit devant $\left|\frac{1}{z-a}\right|^m$ quand z tend vers a , donc admet d'après le corollaire précédent, un développement de LAURENT avec exposants $\geq -m+1$, et $\vec{f}$ admet bien un pôle d'ordre m avec $\vec{c}_{-m}=\vec{c}$.

Inversement, si $\vec{f}$ admet au point a un pôle d'ordre m , la différence $\vec{f}(z)-\frac{\vec{c}_{-m}}{(z-a)^m}$ est la somme d'un polynôme en $\frac{1}{z-a}$ de degré $\leq m-1$, qui par conséquent, lorsque z tend vers a , est infiniment petit devant $\left|\frac{1}{z-a}\right|^m$, et d'une fonction holomorphe qui reste bornée lorsque z tend vers a, donc la condition est bien réalisée.

Cas où $R_2=+\infty$.

Supposons maintenant que $\vec{f}$ soit une fonction holomorphe pour $R_1<|z-a|$. Elle admet alors un développement de LAURENT valable dans l'extérieur de la circonférence, et normalement convergent dans toute couronne $R_1<R'_1\leq|z-a|\leq R'_2<+\infty$.

Dans ces conditions, il sera normal de dire que le point à l'infini est un point régulier pour $\vec{f}$, si tous les coefficients $\vec{c}_n$ sont nuls pour $n > 0$, que le point à l'infini est un pôle d'ordre m pour $\vec{f}$ si le coefficient $\vec{c}_m$ n'est pas nul. et si tous les coefficients $\vec{c}_n$ pour $n > m$ sont nuls, et que le point à l'infini est un point singulier essentiel pour $\vec{f}$, s'il existe une infinité de $\vec{c}_n$, pour $n \geq 0$, qui ne sont pas nuls.

Par exemple une fonction entière, c'est-à-dire holomorphe dans tout le plan complexe, admet, si elle n'est pas un polynôme, le point à l'infini comme point singulier essentiel.

Pour des raisons qui seront vues plus loin, le coefficient $\vec{c}_{-1}$ s'appelle résidu de $\vec{f}$ à l'infini. et se note $\text{Rés}_\infty \vec{f}$.

Corollaire 5

Si $\vec{f}$ est holomorphe pour $R_1 < |z - a|$, et si $\|\vec{f}(z)\|$ est infiniment petit devant $|z|$ lorsque $|z|$ tend vers ∞, le point à l'infini est un point régulier; si $\|\vec{f}(z)\|$ est infiniment petit devant $|z|^{m+1}$, m entier ≥ 1, alors le point à l'infini est régulier ou pôle d'ordre $\leq m$, et, si c'est un pôle d'ordre exactement m, $\vec{f}(z)$ est équivalent à $\vec{c}_m z^m$ pour $|z|$ infini.

Corollaire 6

Pour que a soit un point singulier essentiel pour $\vec{f}$, il faut et il suffit que la fonction $M(a;\rho)$ croisse plus vite que toute puissance de $\frac{1}{\rho}$ lorsque ρ tend vers 0. Pour que le point à l'infini soit un point singulier essentiel, il faut et il suffit que $M(a;\rho)$ croisse plus vite que toute puissance de ρ lorsque ρ tend vers $+\infty$.

Comportement d'une fonction au voisinage d'un point singulier essentiel

Le dernier corollaire montre que, au voisinage d'un point singulier essentiel a, la fonction $\vec{f}$ est susceptible d'une croissance très rapide.

Si l'on extrapole ce que l'on sait pour les pôles, il serait même normal d'imaginer que, lorsque z tend vers un point singulier essentiel a, la norma de f tende uniformément vers l'infini, plus rapidement que toute puissance de $\left|\frac{1}{z-a}\right|$. Or, il n'en est nullement ainsi.

S'il est vrai que le maximum de la norme $M(a;\rho)$ tende très rapidement vers ∞ quand ρ tend vers 0, nous allons voir que $\|\vec{f}\|$ ne tend même pas vers ∞ lorsque z tend vers a, si $\vec{F} = \mathbb{C}$.

Théorème 17 de Weierstrass

Soit f une fonction holomorphe pour $0 < |z-a| < R$, à valeurs complexes, admettant a comme point singulier essentiel.

Alors, lorsque z tend vers a, $f(z)$ approche arbitrairement près de toutes les valeurs; autrement dit, l'image par f de n'importe quel disque de centre a (percé en a,) : $0 < |z-a| \leqslant \rho < R$, est dense dans le plan complexe.

Démonstration

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi, et montrons que nous aboutissons à une contradiction. Supposons qu'il existe un point C, tel que f n'approche pas de c, pour $0 < |z-a| \leqslant \rho$.

Alors la fonction $z \to \frac{1}{f(z)-c}$ est holomorphe pour $0<|z-a|<\rho$; en outre elle est bornée, donc, d'après le corollaire 2, elle se prolonge en une fonction holomorphe dans le disque $|z-a|<\rho$. Cette fonction holomorphe s'annule peut-être au point $z=a$, mais elle n'est sûrement pas identiquement nulle, et par conséquent elle admet a comme zéro d'ordre fini m. On peut donc l'écrire

$$\frac{1}{f(z)-c} = (z-a)^m h(z) \quad , \tag{VII,4;9}$$

où h est une fonction holomorphe pour $|z-a| < \rho$ et $\neq 0$ au point a. La fonction $|h|$ est par conséquent bornée inférieurement par un nombre $\alpha > 0$ dans tout un voisinage de a. On peut donc écrire, dans ce voisinage

$$|f(z)-c| \leqslant \frac{1}{\alpha|z-a|^m} , \tag{VII,4;10}$$

et ceci prouve que f admet au pointa/ un point régulier ou un pôle d'ordre $\leqslant m$, ce qui est contraire à l'hypothèse, et le théorème est démontré.

Remarque 1

Nous voyons ainsi que le comportement, au voisinage d'un point singulier essentiel, est totalement différent du comportement au voisinage d'un pôle, et qu'un point singulier essentiel ne mérite pas le nom de pôle d'ordre infini.(le développement de LAURENT n'a alors plus rien à voir avec un développement ûsymptotique, qui suppose un premier terme, ou partie principale). Naturellement le même résultat est valable lorsque le point singulier essentiel est l'infini, il est applicable à chaque fonction entière qui n'est pas un polynôme.

Considérons par exemple la fonction entière e^z et vérifions que, dans l'ouvert $|z| > \rho$, elle approche arbitrairement près de toutes les valeurs. Nous allons même montrer plus : elle prend une infinité de fois toutes les valeurs, à l'exception de la valeur 0. Si en effet nous considérons l'équation $e^z = b$ elle admet l'infinité de solution $z = z_0 + 2k i\pi$, où z_0 est l'une des déterminations de $\log b$; à l'extérieur du disque considéré, il existe bien une infinité de telles solutions.

Si maintenant nous considérons une fonction entière, telle que $\sin z$ ou $\cos z$, on voit que, dans l'extérieur de n'importe quel disque, elle prend une infinité de fois toutes les valeurs sans exception. L'équation $\sin z = b$ admet en effet, quel que soit b, l'infinité de racines $z = z_0 + 2k\pi$ ou $\pi - z_0 + 2k\pi$, où z_0 est l'une des déterminations de $\arcsin b$.

Le théorème de Weierstrass dit seulement que la fonction approche arbitrairement près de toutes les valeurs, mais non qu'elle prend toutes les valeurs.

Un théorème beaucoup plus puissant, et beaucoup plus difficile, le théorème de PICARD, dit qu'au voisinage d'un point singulier essentiel, f prend une infinité de fois toutes les valeurs (finies, bien sûr), sauf une au plus; cette exception étant possible, dans le cas de l'exponentielle par exemple.

Remarque 2

Si $\vec{F}$ n'est pris $\mathbb{C}$, une fonction $\vec{f}$ à valeurs dans $\vec{F}$, ayant en $a \in \mathbb{C}$ un point singulier essentiel, peut très bien converger en norme vers l'infini quand z tend vers a. Prenons

Prenons par exemple $\vec{F} = \mathbb{C}$, et la fonction $z \to \left(\frac{1}{z-a}, e^{\frac{1}{z-a}}\right)$; elle admet a comme point essentiel puisqu'il en est ainsi de sa deuxième composante; mais $\|\vec{f}\|$ tend vers l'infini pour z tendant vers a, puisque la première composante tend vers l'infini.

Théorème 18

Soit $\vec{f}$ une fonction holomorphe dans Ω: $0 < |z-a| < R_2$. La classe résiduelle de la forme différentielle fermée $\overrightarrow{f(z)\,dz}$, relative au point a, est égale au produit de $2i\pi$ par le "résidu" de $\vec{f}$ au point a, c.a.d. le coefficient de LAURENT $\vec{c}_{-1}$.

Démonstration

Soit γ une circonférence de centre a et de rayon $\rho < R_2$, parcourue dans le sens direct.

D'après la définition même (VII,4;2) des coefficients de LAURENT, on a $\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi\,\vec{c}_{-1}$, et cette intégrale est bien la définition de la classe résiduelle (théorème64 du Chapitre VI) relative à une forme différentielle C^1 dans $\complement_\Omega a$.

Théorème 19 des résidus

Soit $\{a_i\}_{i\in I}$ un ensemble fermé * de points

* Nous imposons à l'ensemble des a_i d'être fermé, pour la raison suivante. Nous voulons écarter le cas d'une suite a_i tendant vers un pointu de Ω . On pourra rétorquer que, si les a_i sont singuliers, a le sera alors aussi, et ne sera pas une singularité isolée; l'hypothèse "isolés" semble suffire à écarter ce cas. Mais nous ne voulons pas obliger les a_i à être des singularités; en supposant f holomorphe dans $\complement_\Omega \{a_i\}_{i\in I}$ nous en faisons seulement des singularités éventuelles; il ne faut pas écarter la bonne surprise où certains des a_i seraient réguliers. Nous considérons toujours des espaces vectoriels de fonctions; or la somme de 2 fonctions singulières en a_i peut être régulières (exemple : $\vec{f} - \vec{f} = \vec{0}$) . Voilà pourquoi l' hypothèse : "fermé"

isolés * d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, et soit $\vec{f}$ une fonction holomorphe dans $\Omega - \{a_i\}_{i\in I}$, à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$.

Si alors $V \subset \Omega$ est une sous-variété avec bord, de classe C^1, de Ω, munie de l'orientation canonique de $\mathbb{C}$, et si son bord Γ ne contient aucun des points a_i, on a la formule des résidus, où Γ a l'orientation de bord de V :

$$\int_\Gamma \overrightarrow{f(z)}\, dz = 2i\pi \sum_{a_i \in \overset{\circ}{V}} (\mathrm{Res}_{a_i} \vec{f})^{**} \tag{VII, 4; 11}$$

la somme $\sum$ est étendue à tous les points a_i qui se trouvent dans $\overset{\circ}{V}$ ***.

Nous allons même en fait démontrer une propriété plus générale.

On remarque en effet que Γ a l'indice $+1$ par rapport aux points a_i de $\overset{\circ}{V}$, et l'indice 0 par rapport aux points a_i de $\complement V$. (théorème 60 du chapitre VI)

On a alors :

Si Γ est un C^0-bord singulier de Ω, de longueur finie, et si son image ne contient aucun des points a_i, on a la formule

$$\int_\Gamma \overrightarrow{f(z)}\, dz = 2i\pi \sum_{i\in I} I(a_i ; \Gamma)\ \mathrm{Rés}_{a_i} \vec{f}, \tag{VII, 4; 12}$$

où $I(a_i ; \Gamma)$ est l'indice de Γ par rapport à a_i. Ce théorème général résulte immédiatement du théorème 64 du chapitre VI, et du théorème 18 sur la classe résiduelle de $\overrightarrow{f(z)}\, dz$ en a_i.

* Cela veut dire, rappelons le, que tout a_i est centre d'un disque ne contenant aucun a_j, $j \neq i$.

** i a, dans cette formule, 2 sens différents : c'est un indice, $i \in I$, ou c'est $\sqrt{-1}$, dans $2i\pi$

*** Les a_i Etant isolés dans Ω, sont en nombre fini dans le compact V ; sans quoi on Pourrait en extraire une suite convergeant vers une limite a, qui serait dans l'ensemble singulier mais n'y serait pas isolée.

Néanmoins, étant donné l'importance du résultat lier tel qu'il est énoncé dans le théorème 19 nous allons en donner une démonstration qui, tout en étant exactement celle du théorème '64 du Chapitre VI, adaptée à nos conditions particulières, ne fait pas appel à lui,

Désignons par γ_i pour $a_i \in \overset{\circ}{V}$, le bord, d'un disque Δ_i de centre a_i, entièrement contenu dans $\overset{\circ}{V}$; comme ces a_i sont en nombre fini, on peut faire en sorte que les Δ_i soient deux à deux extérieurs.

Alors le cycle $\Gamma - \sum_i \gamma_i$ est un bord dans $\complement_\Omega \{a_i\}_{i\in I}$ à savoir le bord de $\complement_V \left(\bigcup_i \overset{\circ}{\Delta}_i \right)$.

Il résulte alors du théorème 6 de CAUCHY (première formule intégrale) que l'on a :

$$(\text{VII},4;13) \qquad \int_{\Gamma - \sum_i \gamma_i} \vec{f}(z)\, dz = \vec{0} \quad , \qquad \text{ou}$$

$$(\text{VII},4;14) \qquad \int_\Gamma \vec{f}(z)\, dz = \sum_i \int_{\gamma_i} \vec{f}(z)\, dz = \sum_{a_i \in \overset{\circ}{V}} 2i\pi \, \mathcal{R}\text{és}_{a_i} \vec{f} \; .$$

Remarque

La 2ème formule intégrale fondamentale de CAUCHY a servi à établir toute la théorie, en particulier à trouver le développement de LAURENT donc à définir les résidus; mais elle est a postériori une conséquence du théorème des résidus. En effet la fonction $z \longrightarrow \frac{\vec{f}(z)}{z-a}$, pour $\vec{f}$ holomorphe dans Ω, admet a comme singularité possible. Son résidu est évidemment $\vec{f}(a)$; a est en effet point régulier ou pôle simple, et, si on cherche un développement limité au voisinage de a suivant les puissances de $z-a$, en utilisant TAYLOR : $\vec{f}(z) = \vec{f}(a) + (z-a)\vec{f}'(a) + \cdots$, le 1er coefficient, celui de $\frac{1}{z-a}$ est $\vec{f}(a)$. Alors (VII, 4;11), appliqué à $\frac{\vec{f}(z)}{z-a}$ donne (VII,2;8et9); de la même manière, il donnerait les formules (VII,3;1).

Corollaire

Supposons réalisées les hypothèses du théorème, et en outre Ω simplement connexe. Pour que $\vec{f}$ ait des primitives holomorphes dans $\complement_{\Omega}\{a_i\}_{i\in I}$ il faut et il suffit que tous ses résidus soient nuls * .

Démonstration

Si $\vec{f}$ a une primitive holomorphe, celle-ci est une primitive de la 1 - forme fermée $f(z)\,dz$ (voir **raisonnement** utilisé pour démontrer le théorème 7), donc elle est un cobord, et son intégrale sur tout cycle de $\complement_{\Omega}\{a_i\}_{i\in I}$ est nulle; en choisissant pour cycle un-cercle entourant un seul des a_i, on voit que chaque résidu de f est nul. Inversement, s'il en est ainsi, nous allons montrer que le critère du théorème 45 du chapitre VI est réalisé. Soit donc $\Gamma = H|\gamma$ une application C^1 (au sens réel) du cercle trigonométrique γ de $\mathbb{R}^2$ dans $\complement_{\Omega}\{a_i\}_{i\in I}$. Puisque Ω est simplement connexe, H est prolongeable en une application continue du disque unité A de $\mathbb{R}^2$ dans Ω (mais pas, bien sûr, dans $\complement_{\Omega}\{a_i\}_{i\in I}$ qui n'est sûrement pas simplement connexe : un cercle entourant un des a_i n'est pas pas homotope à zéro!). Alors le théorème des résidus, sous sa forme générale (VII,4;12), montre, puisque tous les résidus sont nuls, que l'intégrale de $f(z)\,dz$ sur Γ est nulle; ce qui est exactement le critère considéré. Donc $f(z)\,dz$ a des primitives dans $\complement_{\Omega}\{a_i\}_{i\in I}$, et le raisonnement du théorème 7 montre que ce sont des primitives holomorphes de f. On sait ensuite que, si Ω est connexe, donc aussi $\complement_{\Omega}\{a_i\}_{i\in I}$ (du Chapitre VI), ces primitives diffèrent d'une constante.

Le théorème 19 s'appelle aussi théorème intérieur des ré--. Il existe un autre théorème. également utile dans la pratique, appelé théorème extérieur des résidus.

Soit $\vec{f}$ une fonction holomorphe pour $|z-a| > R$. Elle admet alors un développement de LAURENT, et nous avons appelé résidu de f à l'infini, la quantité $-C_{-1}$, c'est-à-dire le coefficient de $\frac{1}{z-a}$, changé de signe.

* Ce qui n'implique pas l'absence de singularités : le résidu n'est que C_{-1} ; les C_n, $n \leq -2$, peuvent être $\neq 0$

Néanmoins bien évidemment, il existe une propriété analogue au théorème 18, et qui est la suivante :

Si γ est une circonférence située dans la couronne $|z-a| > R_1$, et parcourue dans le sens rétrograde, on a la formule

$$\text{(VII,4;15)} \qquad \int_\gamma \overrightarrow{f(z)}\,dz = -2i\pi\, \vec{C}_{-1} = 2i\pi\, \text{Rés}_\infty\, \vec{f}$$

Notons bien ici qu'on prend la précaution de faire parcourir γ dans le sens rétrograde. Nous verrons plus loin la raison d'être de ces manoeuvres a priori burlesques.

Remarque

Noter qu'une fonction ne possède un résidu $\neq 0$, en un point a à distance finie, que si a est effectivement singulier, alors qu'elle peut posséder un résidu à l'infini, même si l'infini est un point régulier. La régularité à l'infini signifie en effet que le développement de LAURENT ne contient que des exposants ≤ 0, ce qui n'empêche pas l'existence de l'exposant -1. On en verra l'explication page
On voit alors que, si Γ est n'importe quel C°-cycle, de longueur finie, contenu dans $|z-a| > R_1$, et entourant a une fois dans le sens rétrograde, l'intégrale $\int_\Gamma \overrightarrow{f(z)}\,dz$

est égale à son résidu à l'infini.

En effet, comme nous l'avons vu dans la démonstration du théorème 19, Γ est C°-homologue, dans $|z-a| > R_1$, à n'importe quelle circonférence de centre a, parcourue dans le sens rétrograde. Ceci montre que le résidu à l'infini est indépendant du point a choisi pour faire le développement de LAURENT, et ne dépend que du comportement de $\vec{f}$ à l'infini. Autrement dit, si $b \neq a$, $\vec{f}$ est aussi holomorphe pour

$|z-b| > R_1 + |a-b|$; le coefficient de $\frac{1}{z-b}$ dans son développement de LAURENT relatif à b est le même que le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans son développement relatif à a.

Le théorème extérieur des résidus s'énonce maintenant comme suit :

Théorème 19 bis

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, complémentaire d'un compact.

Soit $\{a_i\}_{i\in I}$ un ensemble fermé borné de points isolés de Ω, et soit $\vec{f}$ une fonction holomorphe dans $\Omega - \{a_i\}_{i\in I}$, à valeurs dans un espace de Banach $\vec{F}$.

Soit W contenue dans $\mathbb{C}$ une variété de classe C^1 avec bord, munie de l'orientation de $\mathbb{C}$, telle que $V = \complement \mathring{W}$ soit dans Ω, et que le bord Γ de W ne contienne aucun des points a_i.

On munit Γ de l'orientation de bord de $V = \complement \mathring{W}$, c'est-à-dire de l'orientation opposée a celle de bord de W, ou encore rétrograde. Alors on a la formule

$$\text{(VII,4;16)} \qquad \int_\Gamma \overrightarrow{f(z)}\,dz = 2i\pi\left(\sum_{a_i\in \mathring{V}} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\vec{f} + \mathcal{R}\acute{e}s_\infty \vec{f}\right)^* .$$

Bien noter que dans cet énoncé, tout fait intervenir V, mais que c'est W qui est compacte. V n'est pas compacte, le cycle Γ n'est donc pas un bord dans Ω au sens considéré antérieurement ! Dans $\mathbb{C}$, Γ est le bord de W, mais dans $\mathbb{C}$ tout cycle est un bord (corollaire 3 du théorème 54 du chapitre VI).

Démonstration

Désignons en effet par $\mathring{\Delta}$ un disque ouvert quelconque mais assez grand pour contenir $\complement\Omega$ et tous les points a_i (qui forment, comme nous l'avons supposé, un ensemble borné), et également l'ensemble Γ. Il est alors possible d'appliquer le théorème intérieur des résidus, théorème 19, relativement au cycle $b\Delta + \Gamma$ (Δ orienté comme $\mathbb{C}$, $b\Delta$ comme bord, donc dans le sens direct, Γ comme bord de $\complement\mathring{V}$ ou rétrograde), bord de $\Delta \cap \complement\mathring{V}$.

On obtient la formule

$$\text{(VII,4;17)} \qquad \int_\Gamma \overrightarrow{f(z)}\,dz + \int_{b\Delta} \overrightarrow{f(z)}\,dz = 2i\pi \sum_{a_i\in\complement V} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\vec{f}$$

* Dans cette formule, les $\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}$ se calculent comme toujours par des intégrales sur des cercles parcourus dans le sens direct, alors que $\mathcal{R}\acute{e}s_\infty$ se calcule par une intégrale sur un cercle parcouru dans le sens rétrograde.

Cette formule peut encore s'écrire

$$(\text{VII},4;18) \qquad \int_{\Gamma} \vec{f}(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a_i \in \complement V} \mathcal{R}\text{és}_{a_i} \vec{f} - \int_{b\Delta} \vec{f}(z)\,dz\,,$$

et compte tenu de ce que la dernière intégrale n'est autre que 2 $i\pi$ fois le résidu à l'infini, le théorème est démontré.

Corollaire

Soit $\{a_i\}_{i\in I}$ un ensemble fini de points de $\mathbb{C}$. Soit $\vec{f}$ une fonction holomorphe sur $\complement_{\mathbb{C}}\{a_i\}_{i\in I}$ à valeurs dans $\vec{F}$. Alors la somme de tous les résidus de $\vec{f}$, aux points a_i et au point à l'infini, est nulle.

Démonstration

Soit V une sous-variété à bord de $\mathbb{C}$, dont le bord ne contienne aucun des a_i. L'intégrale de $\vec{f}(z)\,dz$ sur ce bord, orienté comme bord de **V**, est $2i\pi$ fois la somme des résidus des $a_i \in \overset{\circ}{V}$; l'intégrale sur ce bord, orienté comme bord de $\complement \overset{\circ}{V}$, c.a.d. en sens inverse, est $2i\pi$ la somme des résidus des $a_i \in \complement V$ et du point ∞ .d'où le résultat. Le choix de **V** est arbitraire; on peut par exemple prendre **V** vide, et on trouve simplement que la formule (VII,4;16) donne $\vec{0}$ au premier membre, puisqu'intégrale d'une l-forme sur le l-cycle nul. On peut au contraire prendre V assez grande pour contenir tous les a_i ; l'intégrale sur son bord parcouru dans le sens direct donne $2i\pi$ fois la somme des résidus des a_i, tandis que l'intégrale dans le sens rétrograde est le résidu à l'infini, puisque $\vec{f}$ est alors holomorphe dans $\complement V$ (voir page 75).

Exemple

Soit $\vec{f}$ une fraction rationnelle, c.a.d. une fonction de la forme $\frac{\vec{P}}{Q}$, où P est un polynome à coefficients dans F, Q un polynome à coefficients complexes. Les résidus aux différents pôles a_i ont été introduits très élémentairement, dans la théorie de la décomposition en éléments simples.

Cette décomposition montre immédiatement que la somme des résidus est égale au coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement (de LAURENT) suivant les puissances de z à l'infini; d'après la définition même, ce coefficient est l'opposé du résidu à l'infini (voir page). Ce raisonnement direct (n'utilisant aucune théorie de fonctions de variables complexes), sera d'ailleurs étendu plus loin (page) et redonnera une autre démonstration du précédent corollaire.

Conservation des résidus des formes différentielles par C^1 difféomorphisme

Soit $\vec{f}_1$ une fonction holomorphe dans $\complement_{\Omega}\{a_1\}$, où Ω_1 est un ouvert contenant a_1.

Soit H un C^1-difféomorphisme (par rapport au corps des complexes) de Ω_1 sur un ouvert Ω_2 du plan complexe $z_1 \longrightarrow z_2 = H(z_1)$. Soit $H(a_1) = a_2$.

Alors l'image $H(\vec{f}_1)$ ou $(H^{-1})^*\vec{f}_1$ est la fonction $\vec{f}_2 = \vec{f}_1 \circ H^{-1} : z_2 \longrightarrow \vec{f}_1(H^{-1}(z_2))$, tandis que l'image $H\left[f_1(z_1)\,dz_1\right]$ est la forme différentielle :

$$\vec{g}_2(z_2)\,dz_2 = \vec{f}_2(z_2)\frac{dz_1}{dz_2}\,dz_2\,,\quad \text{avec}\quad \frac{dz_1}{dz_2} = (H^{-1})'(z_2)$$

Les fonctions $\vec{f}_2$ et $\vec{g}_2$ sont donc très différentes. Toutes deux sont holomorphes dans $\complement_{\Omega_2}\{a_2\}$, mais leurs résidus en a_2 sont distincts. Alors :

<u>Théorème 2G</u>

<u>Le résidu de $\vec{f}_1$ en a_1 est égal au résidu de $\vec{g}_2$ en a_2</u>.

Il est donc naturel de dire : <u>le résidu de la forme différentielle $f_1(z_1)\,dz_1$, au point a_1, est égal au résidu de la forme différentielle image $\vec{g}_2(z_2)\,dz_2$ au point</u> a_2.

<u>Démonstration</u>

Soit en effet V_1 une sous-variété avec bord de Ω_1, de classe C', munie de l'orientation canonique de $\mathbb{C}$, et telle que $a \in \mathring{V}$.

Alors $\Gamma_1 = b\, V_1$ entoure a_1 une fois dans le sens direct, et, d'après la définition même du résidu de $\vec{f}_1$, on a

$$\int_{\Gamma} \overrightarrow{f_1(z_1)}\, dz_1 = 2 i \pi \ \mathcal{R}és_{a_1} \vec{f}_1 \tag{VII,4;19}$$

Alors $H(V_1) = V_2$ est elle aussi une sous-variété avec bord, de classe. C^1, de Ω_2.

D'autre part, d'après la formule (   ), le déterminant jacobien de H est nécessairement > 0, autrement dit H conserve les orientations.

Alors l'orientation de **H** (V_1), transportée par **H** de celle de V_1, n'est elle encore autre chose que l'orientation de V_2 induite par $\mathbb{C}$.

Il en résulte que **H** $(\Gamma_1) = \Gamma_2$ entoure une fois a_2 dans le sens direct.

Il en résulte alors que l'on a

$$\int_{\Gamma_2} \vec{g}_2(z_2)\, dz_2 = 2 i \pi \ \mathcal{R}és_{a_2} \vec{g}_2 \tag{VII,4;20}$$

Mais par ailleurs, les premiers membres de (VII,4;19) et (VII,4; 20) sont égaux d'après le théorème du chapitre VI , qui exprime l'invariance de l'intégrale d'une forme différentielle par difféomorphisme, et ceci démontre le théorème.

Ce théorème subsiste si l'on considère le résidu à l'infini. Considérons, par exemple, l'application **H** : $z_1 \longrightarrow z_2 = \frac{1}{z_1}$, de $|z_1| < 1$ dans $|z_2| > 1$; elle transforme alors V_1 définie par $|z_1| < \rho$ en $V_2 = H(V_1)$ définie par $|z_2| > \frac{1}{\rho}$.

Par ailleurs, elle conserve encore les orientations comme nous l'avons vu précédemment.

Elle transforme alors le bord de V_1, c'est-à-dire le cercle γ_1 de centre 3 et de rayon ρ_1 parcouru dans le sens direct, dans le bord de V_2, c'est-a-dire le cercle γ_2 de centre 0 et de rayon $\frac{1}{\rho}$, parcouru dans le sens rétrograde. C'est d'ailleurs ce qu'on voit aussitôt directement.

Le théorème nous donne alors ici

$$(\text{VII},4;21) \qquad \int_{\gamma_1} \vec{f_1}(z_1)\,dz_1 = \int_{\gamma_2} \vec{g_2}(z_2)\,dz_2$$

ce qui prouve que le résidu de $\vec{f_1}$ à l'origine est égal au résidu de $\vec{g_2}$ à l'infini, Justement parce qu'on a défini le résidu à l'infini en utilisant des cercles parcourus dans le sens rétrograde.

Remarque

Nous avons appelé le coefficient $\vec{c}_{-1}$ du développement de $\vec{f}$, au voisinage de a , le résidu de la fonction $\vec{f}$, puis, plus tard, le résidu de la forme différentielle $\vec{f}(z)\,dz$.

Le présent théorème nous montre que c'est là un abus de langage qui est dangereux dans les changements de variable, puisqu'en réalité c'est exclusivement le résidu de la forme différentielle qui se conserve par changement de variable;, c'est lui seul qui a réellement un sens comme le montre déjà d'ailleurs le théorème des résidus 18 ou 19.

Ceci n'est d'ailleurs pas fait pour nous étonner, à la page , nous avons seulement défini la classe résiduelle en un point d'une forme différentielle de degré $N-1$, dans un espace affine, sur le corps des réels, de dimension N ; $\mathbb{C}$ étant alors un espace de dimension 2 sur le corps des réels, on ne peut parler que du résidu d'une forme différentielle de degré 1, non d'une fonction. La correspondance bijective $\vec{f} \longrightarrow \vec{f}\,dz$ entre fonctions holomorphes et 1-formes holomorphes donnait des idées fausses!

Surfaces de Riemann, sphère de Riemann, résidus des formes différentielles à singularité isolée.

les résultats précédents s'interpréteront encore mieux en termes de variétés holomorphes. Une variété holomorphe W de dimension complexe 1 s'appelle surface de Riemann (surfaces parceque de dimension réelle 2) . Sur une telle surface, les fonctions holomorphes ont déjà été définies, comme les fonctions de classe C^1 (donc C^∞) par rapport à $\mathbb{C}_{\rightarrow}$. Une fonction $\vec{f}$ sur W , à valeurs dans un Banach F , est holomorphe, si et seulement si, pour toute carte locale $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \Phi(\mathcal{O}) \subset V$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, la fonction composée $\Phi^*\vec{f} = \vec{f} \circ \Phi$ est holomorphe sur $\mathcal{O}$.

Si par ailleurs $\mathcal{V}$ est un ouvert de V, domaine d'une carte $\Phi_1 : \mathcal{O}_1 \longrightarrow \Phi_1(\mathcal{O}_1) = \mathcal{V}$, et si une fonction f sur $\mathcal{V}$ est telle que $f \circ \Phi_1$ soit holomorphe sur $\mathcal{O}_1$, il en est de même pour toute autre carte locale $\Phi_2 : \mathcal{O}_2 \longrightarrow \Phi_2(\mathcal{O}_2) = \mathcal{V}$ du domaine $\mathcal{V}$ (théorème du Chapitre VI), et f est donc holomorphe sur $\mathcal{V}$.

Soit maintenant $\vec{\omega}$ une-forme différentielle de degré 1 sur W à valeurs dans F. Soit $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \Phi(\mathcal{O})$ une carte locale, 'et $\Phi^* \vec{\omega}$ l'image réciproque-de $\vec{\omega}$ par Φ. C'est une l-forme sur $\mathcal{O}$ donc de la forme $\vec{A}\, dx + \vec{B}\, dy$, où A et B sont des fonctions sur $\mathcal{O}$. Mais alors on ~~peut~~ aussi l'écrire $\vec{C}\, dz + \vec{D}\, d\bar{z}$, avec $\vec{C} = \dfrac{\vec{A} - i\vec{B}}{2}$, $\vec{D} = \dfrac{\vec{A} + i\vec{B}}{2}$; et inversement. On dira alors que $\vec{\omega}$ est holomorphe sur **W** si, pour toute carte, $\Phi^* \vec{\omega}$ est de la forme $\vec{C}(z)\, dz$, où C'est holomorphe sur $\mathcal{O}$ (donc celà exprime que $\vec{C}$ est holomorphe et $\vec{D}$ nulle). Si $\vec{\omega}$ est une l-forme sur $\mathcal{V}$, domaine d'une carte Φ_1, et si $\Phi_1^* \vec{\omega}$ est de la forme $\vec{C}_1\, dz_1$, $\vec{C}_1$ holomorphe, alors, pour toute autre carte Φ_2 du même ouvert $\mathcal{V}$, $\Phi_2^* \vec{\omega}$ est de la forme $\vec{C}_2\, dz_2$, $\vec{C}_2$ holomorphe dans $\mathcal{O}_2$, et $\vec{\omega}$ est par conséquent une l-forme holomorphe dans $\mathcal{V}$. En effet, $\Phi_2^{-1}\, \Phi_1$ est un difféomorphisme (par rapport au corps $\mathbb{C}$) de $\mathcal{O}_1$ sur $\mathcal{O}_2$, et $\Phi_2^* \vec{\omega}$ est la transformée de la forme $\Phi_1^* \vec{\omega}$ par $\Phi_2^{-1}\, \Phi_1$; il suffit alors d'appliquer le calcul déjà fait page .

Si f est une fonction holomorphe, son cobord $\vec{d}_a$ est une l-forme holomorphe; car sur toute carte locale si l'on pose $\vec{q} = \Phi^* \vec{\ell}$, on a $d\vec{q} = \vec{q}'(z)\, dz$. Toute l-forme holomorphe est fermée, comme le montrent des cartes locales. Donc on a la lère formule intégrale fondamentale de CAUCHY, sous la forme suivante (application immédiate de STOKES, théorème du Chapitre VI) :

Théorème-22 a.

L'intégrale d'une l-forme holomorphe, sur tout C^1-bord, est nulle.

Mais rien d'analogue n'existe pour les fonctions holomorphes. Le théorème 7 s'étend immédiatement (puisqu'on se réfère au théorème du Chapitre VI) :

Théorème 22 b.

Si la variété W est simplement connexe, toute l-forme holomorphe $\vec{\omega}$ sur W , à valeurs dans F , a des primitives, c.a.d. des fonctions holomorphes $\vec{f}$ telles que $d\vec{f} = \vec{\omega}$; deux de ces primitives diffèrent d'une constante', si W est connexe.

Il n'y a pas de généralisation directe de la 2ème formule intégrale fondamentale de CAUCHY, ni du théorème de la moyenne. Par contre, ces formules peuvent être considérées comme des cas particuliers du théorème des résidus 19 (voir la remarque qui le suit) qui, lui, se généralise parfaitement comme suit.

Soit d'abord $\vec{f}$ une fonction holomorphe dans $\complement_{\mathcal{V}}\{a\}$, où $\mathcal{V}$ est un voisinage ouvert de a sur W , autrement dit une fonction ayant a comme singularité (éventuelle) isolée. Sur une carte, son image $\vec{g} = \Phi^* \vec{f}$ a un développement de LAURENT en α , si $\Phi(\alpha) = a$. Les coefficients de LAURENT dépendent entièrement de la carte choisie, et n'ont aucun sens intrinsèque. Toutefois on voit immédiatement que, si a est régulier pour g sur une carte, il en est de même sur toute autre carte, et qu'alors **l'ordre** du premier coefficient de TAYMR non nul, c.a.d. l'ordre du zéro de $\vec{g}$ en α , est indépendant de la carte; on l'appellera l'ordre du zéro de $\vec{f}$ en a . Si α est un Pôle d'ordre m de $\vec{g}$, ceci subsiste sur toute autre carte, et on dira que $\vec{f}$ a un pôle d'ordre m en a . De **même** pour un point singulier essentiel. On peut enfin procéder de même pour une l-forme $\vec{\omega}$ sur $\mathcal{V}$, holomorphe sur $\complement_{\mathcal{V}}\{a\}$; sur une carte elle s'écrit $\vec{C}(z)\,dz$, et, si $\vec{C}$ est régulière et a un zéro d'ordre k , si $\vec{C}$ a un pôle d'ordre m ou un point essentiel, ceci subsiste sur chaque carte, et on dit que $\vec{\omega}$ a la même propriété en a sur W .

il n'existe pas de notion de résidu d'une fonction ayant un point singulier isolé. Mais soit $\vec{\omega}$ une 1-forme, holomorphe dans $\complement_{\mathcal{V}}\, a$, où $\mathcal{V}$ est un voisinage de a, domaine d'une carte locale; $\vec{\omega}$ a donc a comme singularité (éventuelle) isolée. Dans une carte quelconque de $\mathcal{V}$, $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{V}$, $\Phi(\alpha) = a$, $\vec{\omega}$ s'écrit $\vec{C}\, dz$, et, comme le montre le théorème 20, le coefficient $\vec{c}_{-1}$ du développement de LAURENT de $\vec{C}$ au point singulier isolé α est indépendant de la carte locale choisie. On l'appelle résidu de $\vec{\omega}$ au point singulier a. Il a une interprétation intégrale; si V est une sous-variété, de dimension 2 avec bord de classe C^1, de $\mathcal{V}$ (considérée comme variété de dimension 2 sur $\mathbb{R}$) telle que $a \in \mathring{V}$, si V est munie de l'orientation induite par $\mathcal{V}$, et son bord Γ muni de l'orientation bord, alors $\int_\Gamma \vec{\omega}$ vaut $2i\pi$ fois le résidu de $\vec{\omega}$ en a. Alors :

Théorème 22. c

Soient. W une surface de RIEMANN, $\{a_i\}_{i \in I}$ un ensemble fermé de points isolés de W, $\vec{\omega}$ une 1-forme holomorphe dans $\complement_W \{a_i\}_{i\in I}$ à valeurs dans un Banach $\vec{F}$, V une sous-variété avec bord, de dimension réelle 2, de classe C^1 (*) de W, munie de l'orientation induite par W, Γ son bord, muni de l'orientation bord, et ne contenant aucun des a_i. Alors

$$\int_\Gamma \vec{\omega} = 2i\pi \sum_{a_i \in \mathring{V}} \mathcal{R}és_{a_i}\, \vec{\omega}\,. \qquad \text{(VII,4;22)}$$

On pourrait être tenté de généraliser la formule (VII,4; 12); mais la notion d'indice n'a été définie au Chapitre VI, et ne peut être définie, que pour des ouverts d'un espace vectoriel de dimension finie, non pour des variétés générales. Elles reposait essentiellement sur le fait que, sur un espace vectoriel de dimension réelle N, le groupe d'homologie du complémentaire d'un point, pour la dimension $N-1$, était isomorphe à $\mathbb{Z}$; fait qui ne subsiste absolument pas sur une variété générale. Il existe toutefois une généralisation utilisant la notion de degré topologique; mais nous ne la donnerons pas ici. La démonstration de ce théorème des résidus sur une surface de RIEMANN est exactement analogue à celle du théorème . De 22 c et du critère donné au théorème du Chapitre VI, on déduit, exactement par le même raisonnement

* Comme toujours, V est compacte.

qu'au corollaire du théorème **19.**

Théorème 22 d

Dans les conditions du théorème 22 c, si W est simplement connexe, la forme 1-forme ω a des primitives holomorphes dans $\complement_W \{a_i\}_{i\in I}$ c.a.d. des fonctions holomorphes f telles que $df = \vec{\omega}$, si et seulement si ses résidus en tous les a_i sont nuls.

Il n'existe pas un théorème des résidus intérieur et un autre extérieur, mais un seul, énoncé plus haut. Cependant, supposons W compacte (donc variété abstraite, voir remarque après le corollaire 7 du théorème 12). Alors non seulement V est une sous-variété avec bord, mais aussi $\complement\mathring{V}$; on peut lui appliquer le même théorème; mais Γ, comme bord de $\complement\mathring{V}$, a l'orientation opposée à celle de bord de V ; pour cette nouvelle orientation, l'intégrale de $\vec{\omega}$ donnera $\sum_{a_i \notin V} Rés_{a_i}$ 3. Ce ne sont pas là deux théorèmes différents, l'un dit intérieur et l'autre dit extérieur, mais 2 applications du même théorème à **V** et $\complement\mathring{V}$ respectivement ! Naturellement leur combinaison donne une généralisation du corollaire du théorème 19 bis.

Théorème 22 e

Si W est compacte, et si $\vec{\omega}$ est une 1-forme holomorphe, sauf en un nombre fini de points singuliers, la somme de ses résidus est nulle. On l'obtiendra directement en appliquant le théorème des résidus à V = W, de bord vide! On pourrait être tenté de généraliser le théorème 19 bis; mais il n'y a pas de bonne notion de résidu à l'infini pour une variété. C'est au contraire le théorème 19 bis qui est, sous une forme camouflée, une application pure et simple du théorème général unique des résidus. Il faut, pour le voir, introduire la sphère de RIEMANN.

On appelle sphère de RIEMANN l'ensemble formé de $\mathbb{C}$, corps des complexes, et d'un point "à l'infini" noté ∞. On la notera $\hat{\mathbb{C}}$. Ce n'est plus un corps, mais le sous-ensemble $\mathbb{C}$ est le corps des complexes. D'autre part, pour tout $a \in \mathbb{C}$ l'application $z \longrightarrow \frac{1}{z-a}$, définie habituellement dans $\complement_{\mathbb{C}} \{a\}$, se prolonge en une bijection de $\hat{\mathbb{C}}$ sur lui-même, en posant $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$; elle envoie a sur ∞ et ∞ sur 0. Munissons maintenant $\hat{\mathbb{C}}$ d'une topologie (de manière très analogue à ce qui a été fait pour la droite achevée, page 58 du Chapitre III). On dira qu'un ensemble $\mathcal{O}$ de $\hat{\mathbb{C}}$ est ouvert si, ou bien il ne contient pas ∞ et est alors un ouvert de $\mathbb{C}$, ou bien il contient ∞ et son complémentaire est alors un compact de $\mathbb{C}$.

On voit immédiatement que les ensembles $\mathcal{O}$ ainsi définis satisfont aux axiomesdes ouverts d'une topologie; ceci d'ailleurs serait vrai en remplaçant $\mathbb{C}$ par n'importe quel espace topologique X .

L'axiome de séparation de HAUSDORFF est vérifié aussi; si a et b sont deux points distincts, il est évident qu'il existe un voisinage de l'un et un voisinage de l'autre qui sont disjoints, s'ils sont tous deux dans $\mathbb{C}$, si l'un, a par exemple, est dans $\mathbb{C}$, et l'autre b est ∞ , c'est encore vrai en prenant un voisinage compact de a dans $\mathbb{C}$, et son complémentaire dans $\hat{\mathbb{C}}$ comme voisinage (ouvert) de ∞ . Ceci est valable, non seulement pour $\mathbb{C}$, <u>mais pour tout espace localement compact X</u> .

Dans l'espace $\hat{X}$ ainsi obtenu en rajoutant un point à l'infini à X , un système fondamental de voisinages de ∞ est formé des complémentaires des compacts de X . $\hat{X}$ <u>est toujours compact</u> et s'appelle <u>le compactifié d'ALEXANDROFF de X</u> ; en effet, si $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de $\hat{X}$, l'un des $\mathcal{O}_i$ contient ∞ et son complémentaire est alors un compact K de X et un nombre fini des $\mathcal{O}_i$ suffit à recouvrir K , donc il'exlste bien un sous-recouvrement fini.

Les suites de $\hat{\mathbb{C}}$ convergeant vers un point de $\mathbb{C}$ sont les usuelles (sauf qu'un nombre fini de leurs éléments peuvent être ∞); une suite z_n de $\mathbb{C}$ converge versa, , si $|z_n|$ (en prenant $|\infty| = +\infty$) tend vers $+\infty$ sur $\mathbb{R}$. Enfin on voit que la bijection $z \longrightarrow \frac{1}{z-a}$ est un homéomorphisme de $\hat{\mathbb{C}}$ sur lui-même.

Introduisons maintenant sur $\hat{\mathbb{C}}$ une structure de surface de RIEMANN, ou variété holomorphe à 1 dimension complexe. Une 1ère carte sera l'identité $\Phi : z \longrightarrow z$ de $\mathcal{O} = \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$. Une autre carte sera $\Psi_a : z \longrightarrow \frac{1}{z-a}$ de $\mathcal{O} = \mathbb{C}$ sur $\complement_{\mathbb{C}}\{0\} \subset \hat{\mathbb{C}}$.

Pour vérifier que nous définissons bien là une structure holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$, nous, devons, conformément à ce qui a été dit page 38 du chapitre III, varifier que les homéomorphismes $\Phi^{-1} \circ \Psi_a$, $\Psi_a^{-1} \circ \Phi$, $\Psi_b^{-1} \circ \Psi_a$, sont holomorphes. Or $\Phi^{-1} \circ \Psi_a$

est l'application $z \longrightarrow \frac{1}{z-a}$, qu'on doit prendre de $\complement_{\mathbb{C}}\{a\}$ sur $\complement_{\mathbb{C}}\{0\}$; $\Psi_a^{-1} \circ \Phi$ est $z \longrightarrow a+\frac{1}{z}$, de $\complement_{\mathbb{C}}\{0\}$ sur $\complement_{\mathbb{C}}\{a\}$; $\Psi_b^{-1} \circ \Psi_a$ est $z \longrightarrow z+b-a$, de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$; toutes sont bien holomorphes.

Théorème 23

La sphère de RIEMANN $\hat{\mathbb{C}}$ est une surface de RIEMANN ou variété holomorphe, de dimension complexe 1, compacte. La projection stéréographique H établit un C^∞-difféomorphisme, par rapport au corps des réels $\mathbb{R}$, entre $\hat{\mathbb{C}}$ et la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration

Nous avons déjà dit ce qu'était cette projection stéréographique. Considérons la sphère unité Σ de $\mathbb{R}^3$, d'équation $u^2+v^2+w^2=1$. Distinguons ses deux pôles, $N(0,0,1)$ et $S(0,0,-1)$. La projection stéréographique P_N de pôle N est l'application H de Σ sur $\hat{\mathbb{C}}$ définie par les formules suivantes (u, v, w, coordonnées dans $\mathbb{R}^3$, x, y, dans $\mathbb{R}^2$)

$$(\text{VII},4;23) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{u}{1-w} \\ y &= \frac{v}{1-w} \end{aligned}\right.^{*} \qquad \begin{aligned} u &= \frac{2x}{x^2+y^2+1} \\ v &= \frac{2y}{x^2+y^2+1} \\ w &= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \end{aligned}$$

On vérifie aussitôt que c'est un homéomorphisme de Σ sur $\hat{\mathbb{C}}$ (*).

* Sue (u,v,w) dépende continuement de (x,y), et tende vers $(0,0,1)$ quand (x,y) tend vers l'infini de $\hat{\mathbb{C}}$, c'est évident sur ces formules. En sens inverse, on voit aussitôt que $(u,v,w)\to(x,y)$ est continue, sauf peut-être, pour $w=1$ mais on ne voit pas au premier coup d'oeil que, si (u,v,w) tend vers $(0,0,1)$ (x,y) tend vers l'infini de $\hat{\mathbb{C}}$. (N'oublions pas que u,v,w, ne sont pas indépendantes $(u^2+v^2+w^2=1)$ Jonc bien d'autres formules dans le sens $\Sigma \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$, sont possibles). Mais le plan tangent à Σ en N est horizontal, donc $1-w$ est un infiniment petit du 2è ordre en (u,v) (formule de TAYLOR), ce qui montre ce résultat d'ailleurs bien connu géométriquement. De toute façon, $\hat{\mathbb{C}}$ étant compacte, si $\hat{\mathbb{C}}\to\Sigma$ est continue et bijective, c'est un homéomorphisme !

Nous devons montrer que c'est un C^∞ difféomorphisme (par rapport au corps $\mathbb{R}$). Pour cela, nous devons appliquer le critère de la page 321 du Chapitre III. Prenons deux cartes, Φ et $\Psi = \Psi_0 : z \longrightarrow \frac{1}{z}$ de $\mathbb{C}$; et deux cartes $\Phi_N = P_N^{-1}$ et $\Phi_S = P_S^{-1}$ de Σ. Elles nous suffisent, puisque, dans chacque cas, les domaines de ces deux cartes recouvrent la variété, et que les cartes d'une variété ont des domaines qui correspondent exactement aux domaines des cartes de l'autre, par H. Il reste alors à montrer que les applications $\Phi_N \circ H \circ \Phi^{-1}$ et $\Phi_S \circ H \circ \Psi^{-1}$ sont C^∞ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Or la première est $P_N^{-1} \circ P_N \circ I = I$, identité. La deuxième est $P_S^{-1} \circ P_N \circ \Psi$; mais on voit aussitôt que $P_S^{-1} \circ P_N$ est l'inversion par rapport au cercle trigonométrique; tandis que Ψ est l'inversion suivie d'une symétrie par rapport à l'axe Ox; donc $P_S^{-1} \circ P_N \circ \Psi$ est finalement cette symétrie. Ces deux transformations sont trivialement C^∞ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque

Par contre, la projection stéréographique n'est pas un difféomorphisme par rapport au rorps $\mathbb{C}$, car Σ n'a pas de structure complexe, $\mathbb{R}^3$ lui-même n'étant pas un espace vectoriel complexe. D'ailleurs $\hat{\mathbb{C}}$, étant compacte, est "abstraite", et ne saurait être plongée dans un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (remarque suivant le corollaire 7 du théorème 12). Mais on peut, au contraire, transporter, par projection stéréographique, la structure complexe de $\hat{\mathbb{C}}$ sur Σ, et faire ainsi de Σ une variété holomorphe (mais pas en tant que sous-variété de $\mathbb{R}^3$, qui n'est pas complexe).

Nous pouvons maintenant interpréter les notions de résidu à l'infini vues page 336, en termes de résidus sur la surface de RIEMANN $\hat{\mathbb{C}}$ au point ∞. Soit $\tilde{\mathcal{V}}$ un voisinage ouvert de ∞ dans $\hat{\mathbb{C}}$ c.a.d. le complémentaire d'un compact de $\mathbb{C}$. posons $\mathcal{V} = \complement_{\tilde{\mathcal{V}}} \infty = \tilde{\mathcal{V}} \cap \mathbb{C}$. Soit f une fonction hnlomorphe sur $\mathcal{V}$, donc ayant, sur $\tilde{\mathcal{V}}$, ∞ comme singularité (éventuelle) isolée.

D'après ce que nous avons dit plus haut, on reconnaît si-00 est un point régulier pour f ou un pôle d'ordre m, ou un point essentiel, en utilisant une carte d'un voisinage de l'infini, par exemple $z \longrightarrow \frac{1}{z}$, et en regardant si la fonction transformée, c.a.d. $g : z \xrightarrow{g} f\left(\frac{1}{z}\right)$, a le comportement voulu au point 0.

Mais les coefficients de LAURENT de $\vec{g}$ au point 0 sont reliés à ceux de $\vec{f}$ au point à l'infini, par $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{c}_{-n}(\vec{g})$

Donc $\vec{f}$ aura ∞ comme point régulier, si et seulement si $\vec{c}_k(\vec{g}) = \vec{0}$ pour $k \leq -1$, c.a.d. $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{0}$ pour $n \geq 1$, et comme point régulier ou pôle d'ordre $\leq m$ si $\vec{c}_k(\vec{g}) = \vec{0}$ pour $k \leq -m-1$, c.a.d. $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{0}$ pour $n \geq m+1$; c'est exactement ce que nous avions dit page 336.

Il en va tout autrement pour une 1-forme $\vec{\omega}$, holomorphe dans $\mathcal{V}$. On a alors $\vec{\omega} = \vec{f}(z)\,dz$ par la carte $z \longrightarrow \frac{1}{z}$ elle devient la forme $\vec{C}(z)\,dz = -\vec{f}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z^2}$, qu'on doit étudier au voisinage de 0 . La liaison entre les coefficients de LAURENT de $\vec{f}$ à l'infini et de $\vec{C}$ à l'origine est, cette fois, $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{c}_{-(n+2)}(\vec{C})$. Donc $\vec{\omega}$ sera régulière au point ∞ de $\hat{\mathbb{C}}$, si et seulement si, par définition, $\vec{C}$ est régulière au point 0 ,c.a.d. $\vec{c}_k(\vec{C}) = \vec{0}$ pour $k \leq -1$, ou $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{0}$ pour $n \geq -1$; et de même $\vec{\omega}$ aura un point régulier ou un pôle d'ordre $\leq m$ au point ∞ de $\hat{\mathbb{C}}$ si $\vec{c}_k(\vec{C}) = \vec{0}$ pour $k \leq -m-1$, c.a.d. $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{0}$ pour $n \geq m-1$.

<u>La forme dz a donc un pôle d'ordre 2 au point ∞, la forme $\frac{dz}{z}$ un pôle d'ordre 1, la forme $z^k\,dz$ un pôle d'ordre $k+2$,</u> pour $k \geq -1$. D'ailleurs, si une fonction $\vec{f}$ a en un point a d'une surface de RIEMANN W un pôle d'ordre m, sa différentielle $d\vec{f}$ a toujours un pôle d'ordre $m+1$, comme le montre une carte ($\vec{g} = \frac{\vec{c}_{-m}}{(z-\alpha)^m} + \cdots$ donne $d\vec{g} = \vec{g}'(z)\,dz = dz\left(\frac{-m\,\vec{c}_{-m}}{(z-a)^{m+1}} + \cdots\right)$)

<u>Or la fonction $z \longrightarrow z$ a un pôle d'ordre 1 à l'infini, donc sa différentielle dz a nécessairement un pôle d'ordre 2.</u>

L'identification de $\vec{f}$ et de $\vec{f}\,dz$ dans $\mathbb{C}$ conduit, dans $\hat{\mathbb{C}}$, aux pires erreurs, <u>parce que dz a un pôle a l'infini.</u> La distinction soigneuse entre fonctions et 1-formes évite donc beaucoup d'erreurs. Néanmoins. sur $\mathbb{C}$ lui-même, ce n'est pas tellement nécessaire, et la théorie des fonctions de variables complexes profite de la situation particulière dans $\mathbb{C}$. Par exemple par la 2ème formule intégrale fondamentale qui n'a Pas d'extension aux Variétés.

Si maintenant nous cherchons le résidu de $\vec{\omega}$ au point ∞, c'est par définition (page 351) le coefficient $\vec{c}_{-1}(\vec{C})$, c.a.d. $-\vec{c}_{-1}(\vec{f})$; c'est bien la définition donnée page 336. La forme $\frac{dz}{z}$ a un pôle d'ordre 1, il n'est pas étonnant qu'elle ait un résidu, qui est -1. L'interprétation intégrale du résidu est la suivante. $\mathcal{R}és_\infty \vec{\omega}$ est, par définition, $\mathcal{R}és_0(\overrightarrow{C(z)}\,dz) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'} \overrightarrow{C(z)}\,dz$, où γ' est un petit cercle de centre 6 parcouru dans le sens direct $= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \vec{\omega} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \overrightarrow{f(z)}\,dz$, où γ, transformé de γ' par $z \longrightarrow \frac{1}{z}$, est un grand cercle parcouru dans le sens rétrograde; nous retrouvons la définition adoptée pour $\mathcal{R}és_\infty \vec{f}$ page 343 (à tort d'ailleurs parce qu'il aurait fallu dire $\mathcal{R}és_\infty(\vec{f}\,dz)$ et non $\mathcal{R}és_\infty \vec{f}$, qui n'a pas vraiment de sens).

Interprétons enfin le théorème extérieur des résidus, théorème 19 bis. Adoptons toutes les notations de ce théorème. Posons $\hat{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$, donc $\Omega = \complement_{\hat{\Omega}} \infty = \hat{\Omega} \cap \mathbb{C}$. Ω est, dans $\mathbb{C}$, le complémentaire d'un compact, donc Ω est un ouvert de $\hat{\mathbb{C}}$, contenant ∞. Puisque $\vec{f}$ est holomorphe dans $\complement_\Omega \{a_i\}_{i\in I}$, $\vec{\omega} = \vec{f}\,dz$ est holomorphe dans $\complement_{\hat{\Omega}}\left\{\{a_i\}_{i\in I} \cup \{\infty\}\right\}$.
On peut donc lui appliquer le théorème 22 c des résidus, relativement à $\hat{V} = \complement_{\hat{\Omega}} \mathring{W}$ (qui est compacte, comme il se doit; pour l'application du théorème 22 c) et à son bord Γ.
Γ doit être parcouru dans le sens rétrograde, puisque bord de $\hat{V}$ Les points singuliers (éventuels) de ω dans $\hat{\Omega}$ sont exactement les a_i et ∞. Pour chacun d'eux on devra calculer le résidu de $\vec{\omega} = \vec{f}(z)\,dz$, qui est ce que nous avons appelé (à tort) le résidu de $\vec{f}$ aux points a_i suivant la définition page 334, et pour ∞ suivant la définition page 336.
L'application du théorème 22 c donne alors exactement le résultat du théorème 19 bis. Comme quoi, moyennant la considération de la sphère de RIEMANN, il n'y a bien qu'un seul théorème des résidus, le théorème 22 c; et le point ∞ de $\mathbb{C}$ est un point comme les autres. On arrive toujours à tout expliquer,

en faisant fonctionner suffisamment sa matière grise. Si l'on veut véritablement ne Jamais commettre d'erreurs, on doit, répétons-le une fois encore : ne se permettre d'assimiler $\vec{f}$ et $\vec{f}\,dz$ que dans $\mathbb{C}$, sans point à l'infini, sans faire de difféomorphismes. Dans tous les autres cas, il faudra soigneusement les distinguer, et ne parler de résidus (notamment de résidu à l'infini) que pour $\vec{f}\,dz$. Le résidu d'une l-forme a un sens, pas celui d'une fonction. Nous commettrons quand même souvent des abus de langage dans la suite, mals il faudra les manier avec prudence.

Il est bon de dire que RIEMANN a introduit la sphère de RIEMANN justement pour débrouiller les complication apparentes du point à l'infini. Celà et d'autres considérations analogues à celles que nous avons vues antérieurement l'ont conduit à distinguer les fonctions et les l-formes holomorphes; puis à définir en général les surfaces de RIEMANN et à les étudier. Et c'est HERMANN WEYL qui, en donnant le premier une définition vraiment corecte des surfaces de RIEMANN (Die Idee der Riemannschen Flache, 1923), a Introduit "en règle" les cartes locales, d'où la définition moderne des variétés différentiables en général. De cette difficulté du point ∞ sont donc sorties, par des chaînes de découvertes, certaines des notions les plus importantes des mathématiques modernes.

Théoreme 24

Pour qu'une fonction ou l-forme soit méromorphe dans tout le plan complexe, infini compris, c'est-a-dire sur la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, il faut et il suffit qu'elle soit rationnelle.

Démonstration.

Soit $\vec{f}$ une fonction rationnelle, $\vec{f} = \dfrac{\vec{P}}{Q}$, $\vec{P}$ polynome a coefficients dans F , Q polynome complexe; bien évidemment elle est méromorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$. Nous devons montrer la réciproque. Soit donc $\vec{f}$ une fonction méromorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$. Les singularités de $\vec{f}$ sur $\hat{\mathbb{C}}$ forment un ensemble fermé de points isolés; $\hat{\mathbb{C}}$ est compact, il n'y en a qu'un nombre fini . Soient a_i les points singuliers à distance finie. Pour chacun d'eux, a_i, isolons la "partie polaire" de $\vec{f}$, c'est-à-dire la somme $\vec{f}_i$ des termes d'exposant < 0 du développement de

Laurent de $\vec{f}$ au voisinage de a_i . La différence $\vec{g} = \vec{f} - \left(\sum_i \vec{f}_i\right)$ est une fonction entière sur $\mathbb{C}$, car ses seules singularités possibles, les a_i , sont des points réguliers. A l'infini, $\vec{f}$ a un pôle, mais les parties polaires $\vec{f}_i$ y sont régulières et même nulles, donc $\vec{g}$ a encore un pôle. D'après le théorème 13 de Liouvllle, $\vec{g}$ est donc un polynome, et $\vec{f}$ est bien une fraction rationnelle, obtenue même sous forme décomposée en éléments simples.

S'il s'agit d'une 1-forme, on l'écrit $\overrightarrow{f(z)}\, dz$, et on raisonne sur $\vec{f}$.

Formule sur les zéros et les pôles d'une fonction méromorphe

Théorème 25

Soit Ω, un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit f une fonction méromorphe dans Ω , à valeurs complexes. Soit **V** une variété de dimension réelle 2, compacte, avec bord, de classe C^1, dans Ω munie de l'orientation canonique de $\mathbb{C}$.

Soit c un nombre complexe, et supposons que le bord Γ de **V** ne passe par aucune des racines de l'équation $f(z) = c$, ni par aucun des pôles de f . Alors on a, si Γ est parcouru dans le sens de bord de **V** , la formule

$$\text{(VIII,5;24)} \qquad \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-c}\, dz = N(f;V;c) - N(f;V;\infty) \, ,$$

où $N(f;V;c)$ est le nombre des racines de l'équation $f(z) = c$ contenues dans $\overset{\circ}{V}$, chacune comptée autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité, et où $N(f;V;\infty)$ est le nombre des pôles f dans $\overset{\circ}{V}$, comptés chacun autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité. Si en Particulier f est holomorphe dans Ω , le 2" membre vaut $N(f;V;c)$.

Démonstration

La fonction $\frac{f'}{f-c} : z \longrightarrow \frac{f'(z)}{f(z)-c}$ est holomorphe dans l'ouvert obtenu en retirant de Ω les racines de l'équation $f = c$, et les pôles de f.

Soit a une racine de l'équation $f(z) = c$, multiple d'ordre k. Alors on a, au voisinage de a, un développement du type

(VII,4;25) $$f(z) - c = (z-a)^k g(z) ,$$

où g est une fonction holomorphe et non nulle dans un voisinage de a.

Il en résulte que l'on a (dérivée logarithmique de $f-c$):

(VII,4;26) $$\frac{f'(z)}{f(z)-c} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} ,$$

et que par conséquent la fonction $\frac{f'}{f-c}$ possède un pôle simple au point a, ayant pour résidu k, l'ordre de multiplicité de la racine a de $f(z) = c$. Si maintenant f présente un pôle au point a, d'ordre m, alors on a la formule

(VII,4;27) $$f(z) - c = \left(\frac{1}{z-a}\right)^m h(z) ,$$

où h est une fonction holomorphe et sans zéro, dans un voisinage de a.

On a donc cette fois-ci

(VII,4;28) $$\frac{f'(z)}{f(z)-c} = -\frac{m}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)} ,$$

ce qui prouve que le résidu de $\frac{f'}{f-c}$ au point a, est $-m$ m étant l'ordre du pôle a de f. Alors le théorème 19 des résidus donne immédiatement le résultat.

Corollaire 1

Plaçons-nous dans les conditions du théorème, en supposant en outre f holomorphe dans Ω. Alors l'application f de la variété compacte orientée avec bord. V, dans $\mathbb{C}$, admet, en un point C de $\mathbb{C}$, qui n'appartient pas à l'image

$f(\Gamma)$ du bord, un degré topologique égal au nombre des racines de $f(z) = c$, chacune comptée suivant son ordre de multiplicité, et en outre a l'intégrale

(VII,4;29) $$d(f|V;c) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-c}\,dz = N(f;V;c)$$

Démonstration

D'après la définition même qui a été donnée page 260 du chapitre VI, le degré topologique n'est autre que l'indice, par rapport au point c, du cycle $f|\Gamma$. Cet indice est alors aussi l'intégrale (page 248 du chapitre VI)

(VII,4;30) $$I(f|\Gamma;c) = \frac{1}{2i\pi}\int_{f|\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta - c}$$

D'après la définition même de l'intégrale sur un cycle singulier (formule (VI,6;60)), cette intégrale n'est autre que (VII,4;29), ce qui démontre le corollaire.

Remarque.- Ce corollaire montre que le degré topologique de f relativement à la variété compacte V, orientée, a bord, se calcule de façon très simple, grâce a l'hypothèse d'holomorphie, même lorsqu'il existe des racines multiples.

Reconsidérons le calcul du degré topologique, donné page 260 du chapitre VI. On était alors amené a prendre les images réciproques de c, c'est-a-dire ici les racines de l'équation $f(z) = c$. Si ces racines étaient isolées, et si en chacune d'elles le déterminant jacobien était $\neq 0$, le degré topologique était la différence du nombre des racines à déterminant jacobien > 0, et du nombre des racines à déterminant Jacobien < 0 (le déterminant jacobien devait être calculé par rapport au corps $\mathbb{R}$). Nous savons que, pour une application holomorphe, le déterminant jacobien (par rapport à $\mathbb{R}$) est toujours $\geqslant 0$ (formule (VI,2;7); le déterminant jacobien réel de f est $|f'(z)|^2$), ce qui montre bien pourquoi on est amené ici à additionner simplement le nombre des racines. Mais en outre, la méthode indiquée au chapitre VI ne s'appliquait pas aux points où il existait un déterminant jacobien nul; nous voyons que, dans le cas d'une application holomorphe f, si, en certains points, la dérivée de f est nulle, il s'agit de racines multiples, et qu'on fait intervenir, dans le calcul du degré topologique, l'ordre de multiplicité de telles racines. Rien d'aussi simple n'existe pour des applications seulement $\mathbb{R}$-dérivables. Ceci nous permet à nouveau d'interpréter la démonstration du théorème de d'Alembert, donnée au corollaire 1 du théorème du chapitre VI; nous avions trouvé que le degré topologique du polynôme P, au point 0, était m ; le fait que $m \neq 0$ nous prouvait l'existence d'au moins "ne racine; nous savons maintenant qu'on peut interpréter ce fait de façon plus précise en disant que le polynôme a exactement m racines, chacune comptée autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité.

Corollaire 2

Soit $f_0, f_1, \ldots f_n, \ldots$ "ne suite de fonctions holomorphes à valeurs complexes, sur l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$, convergeant, pour n infini, localement uniformément vers "ne fonction holomorphe f.

Si alors $V \subset \Omega$ est "ne variété de dimension réelle 2 avec bord, de classe C^1, et si l'équation $f(z) = 0$ n'a pas de racine sur $\dot{V}$, alors, pour n assez grand, l'équation $f_n(z) = c$ n'a pas non plus de racine sur $\dot{V}$, et le nombre des racines de $f_n(z) = c$ dans $\dot{V}$ est égal au nombre des racines de $f(z) = c$ dans $\dot{V}$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

Démonstration

Tout d'abord l'affirmation relative a" contour est immédiate, en effet, si l'équation $f(z) = c$ n'a pas de racine sur $\dot{V}$, la quantité $|f(z) - c|$ admet un minimum $\delta > 0$ sur $\dot{V}$ compacte, Si alors nous prenons n assez grand pour que la différence $|f - f_n|$ soit $\leq \frac{\delta}{2}$ l'équation $f_n(z) = c$ n'a pas de racine sur $\dot{V}$. Il suffit alors de calculer l'expression intégrale de $N(f_n; V; c)$ donnée par (VII,4;29) et d'effectuer le passage à la limite pour ces intégrales (cas trivial de la convergence uniforme sur un compact).

Remarque. Compte tenu du corollaire précédent, ce résultat n'est autre que le théorème 66 du chapitre VI.

soit f une fonction holomorphe à valeurs complexes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$; on dit que f est p-valente si, pour tout point c de $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = c$ a au plus p racines dans Ω (en comptant chaque racine autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité; cela implique que f ne soit pas constante).

Corollaire 3

Si des fonctions f_n holomorphes dans Ω connexe, à valeurs complexes, convergent vers une limite f, localement uniformément dans Ω, et si toutes les fonctions f_n sont p-valentes, ou bien la limite f est une fonction constante, ou bien elle est elle-même p-valente.

Démonstration

Remarquons d'abord qu'une fonction constante n'est manifestement pas p-valente, puisqu'il existe une valeur qu'elle prend une infinité de fois.

Supposons donc que la limite f ne soit pas une constante.

Les racines de $f(z) = c$ sont alors nécessairement des points isolés de Ω ; s'il y en avait un nombre $q > p$ $(q \leq +\infty)$, on pourrait trouver une variété avec bord (compacte) V, contenue dans Ω, dont le bord ne contienne aucune de ces racines, et telle que $\mathring{V}$ en contienne $q_1 > p$ ($q_1 = q$ si q est fini). Alors le corollaire 2 nous apprendrait que, pour n assez grand, l'équation $f_n(z) = c$ aurait elle-même au moins q_1 racines situées dans $\mathring{V}$, ce qui serait contraire à l'hypothèse suivant laquelle les f_n sont p-valentes, ce qui démontre le corollaire.

Remarque.- Naturellement le cas où la limite f est une constante est parfaitement possible : il suffit de considérer la suite des fonctions $f_n(z) = \frac{z}{n}$ lorsque $n \geq 1$ tend vers ∞; elles convergent uniformément vers 0 sur tout compact de $\mathbb{C}$ elles sont univalentes, c'est-a-dire 1- valentes, et la limite 0 ne l'est pas.

Corollaire 4

Soit f une fonction holomorphe a valeurs complexes, dans un voisinage d'un point a de $\mathbb{C}$. Supposons que les dérivées d'ordre $1,2,\ldots,m-1$ de f au point a soient nulles, et que sa dérivée d'ordre m ne soit pas nulle. Il existe alors un ouvert $\mathcal{A}$ de a. et un voisinage ouvert $\mathcal{B}$ de $b = f(a)$, tel que f applique $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ et que $f(\mathcal{A})$ recouvre $\mathcal{B}$ exactement m fois.

Quand nous voulons dire que $f(\mathcal{A})$ recouvre $\mathcal{B}$ m fois, nous voulons dire que, pour tout point c de $\mathcal{B}$, l'équation $f(z) = c$ admet exactement m racines dans $\mathcal{A}$, (chacune comptée avec sa multiplicité).

Démonstration

Appelons d'abord A un disque de centre a, dans lequel l'équation $f(z) = b$ n'ait pas d'autre racine que a, qui est racine multiple d'ordre m exactement.

Alors le degré topologique de l'application f de A dans $\mathbb{C}$, au point b, est m ; mais le degré topologique en un point c qui varie continument, est constant, pourvu que c se déplace sans franchir l'image par f du bord γ de A (théorème 66 du chapitre VI, ou corollaire 2 précédent).

Donc il existe un ouvert $\mathcal{B}$ contenant b, tel que, pour c dans $\mathcal{B}$, le degré topologique de $f \mid A$ au point c soit toujours m. Si alors nous appelons $\mathcal{A}$ l'intersection $\mathring{A} \cap f^{-1}(\mathcal{B})$, on voit que $f(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, et que, pour tout point c de $\mathcal{B}$, l'équation $f(z) = c$ a m racines dans $\mathcal{A}$, ce qui démontre le corollaire.

Corollaire 5

soit f une fonction holomorphe à valeurs complexes, sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et qui n'est constante dans aucune composante connexe de Ω ; alors l'application f de Ω dans $\mathbb{C}$ est ouverte, et en particulier l'image $f(\Omega)$ est un ouvert; si f est injective, c'est un $\mathbb{C}$-difféomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$.

Démonstration

Soit $a \in \Omega$. Comme f n'est pas constante dans la composante connexe de a dans Ω, il résulte du corollaire 3 du théorème 11 que l'une au moins de ses dérivées n'est pas nulle en a. Alors l'application du corollaire précédent à la restriction de f à n'importe quel voisinage ouvert de a montre que l'image par f de ce voisinage est un voisinage de $b=f(a)$; donc f est ouverte d'après le tableau de la page 297 du chapitre III. Si alors f est injective, elle est bien un homéomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$; en outre en tout point sa dérivée est $\neq 0$, donc, d'après le théorème des fonctions réciproques (sous sa forme très élémentaire, puisqu'il s'agit d'une fonction complexe d'une variable complexe), c'est un difféomorphisme.

Remarque 0. - Le résultat ne subsiste évidemment pas pour constante.

Remarque 1. - Ceci naturellement n'implique absolument pas en général, comme nous l'avons vu au chapitre III, que f soit un homéomorphisme local; ce qui d'ailleurs est bien évident, puisque, si l'on se place dans les conditions du corollaire précédent, avec $m \geqslant 2$, f n'est sûrement pas un homéomorphisme local.

Remarque 2.- On peut préciser cet énoncé, et en même temps généraliser le théorème des fonctions réciproques, théorème 29 du chapitre III. Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $a \in \mathbb{C}$, à valeurs complexes, $f(a) = b$. Si on applique le théorème 29 du chapitre III par rapport au corps $\mathbb{C}$, on voit que, si $f'(a) \neq 0$, il existe un voisinage $\mathcal{A}$ de a et un voisinage $\mathcal{B}$ de b tels que soit un $\mathbb{C}$-difféomorphisme (de classe C^∞) de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ *. Si $f'(a) = 0$, le chapitre III ne permet plus de rien prévoir (sauf par des méthodes spéciales, telles que celle de la page 291). Ici, lorsque le corps des scalaires est $\mathbb{C}$ et la dimension 1, on peut toujours conclure. Supposons que les dérivées d'ordre $1,2,\ldots,m-1$ de f soient nulles en a, mais non sa dérivée d'ordre m. On peut écrire

$$f(z) - b = (z-a)^m h(z), \tag{VII,4;31}$$

où la fonction h ne s'annule pas en a. Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{A}_1$ de a où on peut choisir une détermination holomorphe de $\log h$ donc de $h^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m}\log h}$; on peut même obtenir terme à terme le développement de Taylor de $h^{\frac{1}{m}}$ en a, en utilisant celui de h et le développement du binôme : si $h(z) = h(a)(1+\cdots)$, on aura $(h(z))^{\frac{1}{m}} = k(1+\cdots)^{\frac{1}{m}}$, k étant l'une quelconque des déterminations de $(h(a))^{\frac{1}{m}}$, et $(1+\cdots)^{\frac{1}{m}}$ se développant suivant la formule du binôme. Alors $(f-b)^{\frac{1}{m}}$ admet elle-même

* Le corollaire précédent le redémontre.

dans $\mathcal{O}_1$ une détermination holomorphe, soit $g(z) = (z-a)(h(z))^{\frac{1}{m}}$. En outre cette fonction g, qui prend la valeur 0 au point a est maintenant dans les conditions d'application du théorème des fonctions réciproques au point a, car sa dérivée en a n'est pas nulle (elle vaut k). Il existe donc un voisinage ouvert $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1$ de a et un voisinage ouvert $\mathcal{K}$ de 0 tels que g soit un $\mathbb{C}$-difféomorphisme de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{K}$. En restreignant ces ouverts, on peut toujours supposer que $\mathcal{K}$ est un disque de centre 0.

soit g^{-1} le difféomorphisme réciproque, de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{O}$. Si nous voulons résoudre l'équation $f(z) = c$, nous supposerons $c \in b + \mathcal{K}^m$ (où $\mathcal{K}$ est l'ensemble des ζ^m pour $\zeta \in \mathcal{K}$; c'est encore un disque de centre 0); cela revient a résoudre $(f(z)-b)^{\frac{1}{m}} = (c-b)^{\frac{1}{m}}$, expression qui a m valeurs distinctes dans $\mathcal{K}$; les solutions dans $\mathcal{O}$ sont $z = g^{-1}((c-b)^{\frac{1}{m}})$; sauf pour $c = b$ où elles sont toutes confondues en a, les m solutions sont toutes distinctes. On peut encore dire que la fonction $u = f(z)$, au voisinage de a, s'inverse par la "fonction multiforme a m déterminations" $z = g^{-1}((u-b)^{\frac{1}{m}}$ si $u = f(z)$ est fonction holomorphe de z, et si $f-b$ a un zéro d'ordre m au point a, z est localement une fonction holomorphe de $(u-b)^{\frac{1}{m}}$. En prenant pour simplifier a- -L 0, si $u = f(z)$ est holomorphe au voisinage de 0, et a en 0 un zéro multiple d'ordre m, z est, au voisinage de 0, fonction holomorphe de $u^{\frac{1}{m}}$ (donc fonction "multiforme" de u).

<u>Théorème 26</u>

<u>Si l'on se place dans les conditions du théorème 25, et si Φ est Uns fonction holomorphe dans Ω, alors on a la formule</u>

$$\text{(VII,4;32)} \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \Phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-c}\,dz = \sum \Phi(\alpha_i) - \sum \Phi(\beta_j),$$

<u>où les α_i sont les racines $f(z) = c$ dans $\mathring{V}$, et où les β_j sont les pôles de f dans $\mathring{V}$ chacun étant compté autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité</u> (*).

Démonstration

Nous avons vu dans la démonstration du théorème 25 que la fonction $\frac{f'}{f-c}$ admet en chaque point α_i un pôle simple de résidu k, ordre du zéro α_i de $f-c$; alors la fonction $\Phi\frac{f'}{f-c}$ admet un pôle simple de résidu $k\,\Phi(\alpha_i)$.
De même, si β_j est un pôle de f, d'ordre m, $\frac{f'}{f-c}$ admet un pôle simple de résidu $-m$, par conséquent $\Phi\frac{f'}{f-c}$ admet un pôle simple de résidu $-m\,\Phi(\beta_j)$, ce qui donne le résultat en appliquant le théorème des résidus.

Extension aux surfaces de Riemann

Certains des résultats précédents s'étendent aux surfaces de Riemann.

Théorème 27

Soit W une surface de Riemann, f une fonction méromorphe sur W à valeurs complexes, V une sous-variétés de classe C^1 de dimension réelle 2 avec bord Γ (compacte); Γ sera muni de l'orientation bord de V, munie elle-même de l'orientation induite par W. On suppose que $f-c$ n'a ni zéros ni pôles sur Γ, et n'est constante dans aucune composante connexe de W. Soit d'autre part Φ une fonction holomorphe sur W à valeurs complexes. Alors on a :

$$(\text{VII},4\,33)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma \frac{df}{f-c} = N(f;V;c) - N(f;V;\infty) \\ \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma \Phi\frac{df}{f-c} = \sum \Phi(\alpha_i) - \sum \Phi(\beta_j), \end{cases}$$

où $N(f;V;c)$ est le nombre des racines α_i de l'équation $f(z)=c$ dans $\mathring{V}$, $N(f;V;\infty)$ le nombre des pôles β_j de f dans $\mathring{V}$, chacun compté avec son ordre de multiplicité.

Démonstration

Cette formule n'est autre que la formule des résidus (théorème 22c) appliquée à la 1 – forme meromorphe $\frac{df}{f-c}$

ou $\dfrac{\Phi\, df}{f-c}$; le calcul des résidus est local, donc peut se faire sur des cartes, et, sur "ne carte, df est $f'(z)\,dz$, de sorte que les résidus sont ceux qui ont été calculés aux théorèmes 25 et 26.

Conséquences. Les conséquences sont les mêmes que pour les théorèmes antérieurs. Un cas particulièrement intéressant est celui où W est connexe compacte, et où l'on peut alors préndre $V=W$, donc T vide * . Alors on trouve $N(f;W;c)=N(f;W;\infty)$; donc le nombre $N(f;W;c)$ est indépendant de c.

Corollaire 1

Une fonction méromorphe non constante sur W connexe compacte, à valeurs complexes, prend le même nombre fini de fois toutes les valeurs. Ce nombre est d'ailleurs facile à interpréter.

La fonction méromorphe f sur W définit "ne application de W dans $\hat{\mathbb{C}}$, prenant la valeur ∞ en tout pôle a de f. Elle est alors holomorphe de W dans $\hat{\mathbb{C}}$; en effet, si a est un pôle, la fonction $\frac{1}{f}$ est holomorphe a valeur dans $\mathbb{C}$ a" voisinage de a (par exemple par application du corollaire 2 du théorème 16) (et nulle en a), ce qui, en considérant la carte $\zeta \longrightarrow \frac{1}{\zeta}$ de $\mathcal{V}=\mathbb{C}$ sur $\complement_{\hat{\mathbb{C}}}\{0\}\subset\hat{\mathbb{C}}$ montre bien notre affirmation (théorème 33ter du chapitre III). En particulier, en tant qu'application continue de W dans $\hat{\mathbb{C}}$, elle a un degré topologique, qui est le même pour tous les points de $\hat{\mathbb{C}}$, d'après la dernière phrase du chapitre VI; et le corollaire 1 du théorème 25 montre que ce degré topologique est justement le nombre de fois qu'elle prend toute valeur : $d(f;W;c)=N(f;W;c)$. On écrira simplement $d(f)$ ou $N(f)$ et on l'appellera le degré de la fonction f. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de prendre $\hat{\mathbb{C}}$:

Corollaire 2

Une application holomorphe f non constante d'une surface de Riemann compacte connexe W dans "ne autre W' est ouverte

* Dans ce cas, la 2ème formule n'a pas d'intérêt, car Φ holomorphe sur W , est constante (corollaire 7 du théorème 12).

et a le même degré topologique $d(f) > 0$ en tous les points de W', qui est aussi le nombre de fois $N(f)$ qu'elle prend toute valeur de W'.

Supposons en particulier que f soit une fraction rationnelle, non constante, fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, ou application holomorphe de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$. Soit d'abord $f = P$, polynome de degré $m > 0$. P ne prend la valeur ∞ qu'au point ∞ ; en prenant, pour la variable et la fonction, la carte $\zeta \longrightarrow \frac{1}{\zeta}$ de $\mathcal{O} = \mathbb{C}$ sur $\complement_{\hat{\mathbb{C}}}\{0\}$, on voit, puisque $\frac{1}{P(z)} \sim \frac{1}{a_0 z^m}$ que $P(z) = \infty$ a une racine multiple d'ordre m au point ∞ : donc son degré est m, et P prend m fois toute valeur; c'est à nouveau le théorème de d'Alembert. Si maintenant $f = \frac{P}{Q}$, P et Q de degrés respectifs p et q sans zéro commun, f prend la valeur ∞ aux zéros de Q, en nombre q, et en outre au point ∞ si $p > q$, avec l'ordre de multiplicité $p-q$; son degré est donc $q+(p-q) = p$ si $p > q$ et q si $p \leq q$, c'est-à-dire dans tous les cas $d = \operatorname{Max}(p,q)$. Si d'ailleurs on veut résoudre l'équation $f = c \in \mathbb{C}$ on doit résoudre $P - cQ = 0$ qui a bien toujours $d = \operatorname{Max}(p,q)$ racines dans $\hat{\mathbb{C}}$ (si $p = q$, et si c est tel que $P - cQ$ ait un degré qui s'abaisse, f prend la valeur c au point ∞).

Premier problème de Cousin dans le plan complexe

Soit $\{a_i\}_{i \in I}$ un ensemble fermé de points isolés de $\mathbb{C}$.

Pour chacun des points a_i, donnons-nous une fonction P_i, polynome en $\frac{1}{z-a_i}$, à coefficients dans un Banach $\vec{F}$:

$$\vec{P}_i(z) = \sum_{k=1}^{m_i} \vec{c}_{-k,i} \left(\frac{1}{z-a_i}\right)^k . \tag{VII,4;34}$$

Le premier problème de Cousin pour le plan complexe consiste à trouver une fonction méromorphe f dans $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\vec{F}$, ayant les points a_i pour pôles, avec les parties singulières P_i en ces pôles : $f - P_i$ doit être régulière au point a_i.

Si la série $\sum \vec{P}_i$ converge uniformément sur tout compact ne contenant aucun des pôles, le problème est évidemment résolu, car la somme de cette série répond à la question. Elle représente en effet une fonction holomorphe dans l'ouvert complémentaire de l'ensemble des a_i (corollaire 1 du théorème 15 de Weierstrass). D'autre part, si l'on considère un point a_k

quelconque, la série $\sum_{i \neq k} P_i$ **converge uniformément** sur une circonférence de centre a_k, et par conséquent, d'après le théorème de Weierstrass, dans tout le disque bordé par cette circonférence, donc sur tout compact ne contenant aucun des $a_i \neq a_k$.

Elle représente une fonction holomorphe dans $\complement \{a_i\}_{i \neq k}$ ce qui prouve que f aura P_k comme-partie singulière au point a_k. Mais en général la série $\sum P_i$ ne convergera pas, et il n'est donc pas évident à priori qu'il existe une solution de la question.

Théorème 28 de Mittag-Leffler

Quelles que soient la suite des points a_i et les parties singulières $\vec{P_i}$, il existe des fonctions méromorphes $\vec{f}$ dans@ à valeurs dans F, ayant les Pôles a_i et les parties singulières données P_i ; on obtient la solution générale de ce problème. en ajoutant à une solution particulière une fonction entière arbitraire, à valeurs dans $\vec{F}$.

Démonstration

Soit b * un point quelconque n'appartenant pas à l'ensemble des a; . Soit une suite de nombre $\varepsilon_i > 0$ telle que la série $\sum \varepsilon_i$ soit convergente. La fonction P_i est holomorphe dans le disque $|z - b| < |a_i - b|$, donc elle possède un développement de Taylor normalement convergent dans tout cercle de centre b et de rayon strictement plus petit. Il existe donc un polynôme Q_i, somme d'un nombre fini de puissances de $z - b$, tel que $|\vec{P_i}(z) - \vec{Q_i}(z)| \leq \varepsilon_i$ pour $|z - b| \leq \frac{|a_i - b|}{2}$

Considérons alors In série

(VII,4;35) $$f(z) = \sum_i \left(\overrightarrow{P_i(z)} - \overrightarrow{Q_i(z)} \right).$$

* Généralement, on prend $b = 0$; mais il se peut que 0 soit l'un des a_i ! Même dans ce cas, on résoudra d'abord le problème de Cousin relatif' au système des $a_i \neq 0$, en prenant $b = 0$, et on ajoutera au résultat obtenu la partie singulière donnée pour 0.

D'abord elle converge normalement sur tout compact K ne contenant aucun des pôles a_i. En effet, un tel ensemble K est contenu dans un disque $|z-b| \leq R$; si alors on choisit un entier p tel que $|a_n - b| \geq 2R$ pour $n \geq p$, on aura, pour $n \geq p$, l'inégalité $|\vec{P}_n(z) - \vec{Q}_n(z)| \leq \varepsilon_n$ pour $z \in K$. Alors la fonction $\vec{f}$, somme de cette série, est holomorphe dans l'ouvert complémentaire des a_i, d'après le théorème de Weierstrass. Par ailleurs, la fonction $\vec{f} - (\vec{P}_k - \vec{Q}_k)$ est la somme d'une série qui, d'après la même démonstration que précédemment, converge uniformément dans le complémentaire de l'ensemble des $a_i \neq a_k$, par conséquent elle est holomorphe au voisinage de a_k, ce qui signifie bien, $\vec{Q}_k$ étant un polynôme, que $\vec{f}$ admet comme pôle a_k, avec la partie singulière $\vec{P}_k$, et le théorème est démontré.

<u>Remarque 1</u>

Le théorème subsiste si l'on remplace $\mathbb{C}$ par un ouvert quelconque Ω de $\mathbb{C}$. Mais la démonstration, quoique de même nature, est bien plus délicate.

<u>Remarque 2</u>

On peut étendre notablement le problème précédent.

Donnons-nous des points a_i et pour chacun d'eux un développement de Laurent à exposants limités dans les deux sens,

$$\vec{P}_i(z) = \sum_{n=p_i}^{q_i} \vec{c}_{n,i}(z-a_i)^n \ , \quad p_i \in \mathbb{Z}, q_i \in \mathbb{Z}, q_i \geq p_i . \tag{VII,4;35 bis}$$

Cherchons alors une fonction méromorphe $\vec{f}$ sur $\mathbb{C}$, telle que, pour chaque i, son développement de Laurent au voisinage de a_i soit de la forme $\sum_{n=p_i}^{+\infty} \vec{c}_{n,i}(z-a_i)^n$, les $\vec{c}_{n,i}$ étant les coefficients de $\vec{P}_i$ pour tout $n \leq q_i$.

Alors la fonction $\dfrac{\vec{P}_i}{(z-a_i)^{q_i+1}}$ est, ici encore, holomorphe dans le disque $|z| < |a_i|$, donc on peut trouver un polynome $\vec{Q}_i$

tel que

$$\left\| \frac{\vec{P}_i(z)}{(z-a_i)^{q_i+1}} - \vec{Q}_i(z) \right\| \leqslant \varepsilon_i \left(\frac{2}{3|a_i|}\right)^{q_i+1} \text{ pour } |z| \leqslant \frac{|a_i|}{2} \text{, donc} \tag{VII,4;35 bis}$$

$$\left\| \vec{P}_i(z) - (z-a_i)^{q_i+1} \vec{Q}_i(z) \right\| \leqslant \varepsilon_i \text{ pour } |z| \leqslant \frac{|a_i|}{2}$$

La série convergente $\vec{f}(z) = \sum\limits_i \left(\vec{P}_i(z) - (z-a_i)^{q_i+1} \vec{Q}_i(z) \right)$ répond alors à la question.

En particulier, si chaque développement $\vec{P}_i$ est réduit à une constante $\vec{c}_i \in \vec{F}$, on trouvera une fonction holomorphe entière sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\vec{F}$, prenant les valeurs $\vec{c}_i$ aux points a_i.

Cas particuliers importants

Si tous les a_i sont donnés comme pôles simples, si, pour chacun d'eux, est donnée la partie singulière $\vec{P}_i(z) = \frac{\vec{c}_i}{z-a_i}$ si d'autre part, la série $\sum \frac{\|\vec{c}_i\|}{|a_i|}$ est convergente, alors on peut prendre comme solution $\sum \vec{P}_i$. On a en effet la majoration

$$\frac{\|\vec{c}_i\|}{|z-a_i|} \leqslant 2 \frac{\|\vec{c}_i\|}{|a_i|} \quad \text{pour } |z| \leqslant \frac{|a_i|}{2}, \tag{VII,4;36}$$

qui nous montre que la série considérée converge normalement sur tout compact de l'ouvert complémentaire des a_i (raisonnement de la page précédente).

Si, toujours pour des pôles simples, la série $\sum \frac{\|\vec{c}_i\|}{|a_i|}$ n'est pas convergente, mais si la série $\sum \frac{\|\vec{c}_i\|}{|a_i|^{r+1}}$ est convergente, pour un certain entier r, alors on peut prendre comme solution

$$\vec{f}(z) = \sum_i \vec{c}_i \left(\frac{1}{z-a_i} + \frac{1}{a_i} + \frac{z}{a_i^2} + \cdots + \frac{z^{r-1}}{a_i^r} \right) \tag{VII,4;37}$$

(On prend ici $b = 0$; le polynôme $-\vec{c}_i \left(\frac{1}{a_i} + \frac{z}{a_i^2} + \cdots + \frac{z^{r-1}}{a_i^r} \right) = \vec{Q}_i(z)$ est bien le début du développement suivant les puissances de z de $\frac{\vec{c}_i}{z-a_i}$ dans le disque $|z| < |a_i|$; et on prend $\vec{P}_i - \vec{Q}_i$).

En effet on a la majoration

$$(\text{VII},4;38)\quad \left\| \vec{c}_i \left(\frac{1}{z-a_i} + \frac{1}{a_i} + \cdots + \frac{z^{\lambda-1}}{a_i^{\lambda}} \right) \right\| = \frac{\|\vec{c}_i\|}{|a_i|} \sum_{n=\lambda}^{\infty} \left| \frac{z}{a_i} \right|^n$$
$$\leq \frac{\|\vec{c}_i\|}{|a_i|} \frac{\left|\frac{z}{a_i}\right|^{\lambda}}{1-\left|\frac{z}{a_i}\right|} \leq 2 \frac{\|\vec{c}_i\| \; |z|^{\lambda}}{|a_i|^{\lambda+1}} \quad \text{pour } |z| \leq \frac{|a_i|}{2}$$

de sorte qu'ici encore la série considérée est normalement convergente dans tout compact du complémentaire des a_i. S'il n'existe aucun entier λ tel que $\sum \frac{\|\vec{c}_i\|}{|a_i|^{\lambda+1}} < +\infty$, on prendra un λ_i variable avec i, tendant vers $+\infty$ pour $|a_i|$ tendant vers $+\infty$. On étendra facilement à des pôles multiples.

Exemple

Donnons-nous comme pôles les entiers, $(n \in \mathbb{Z})$, et prenons comme partie singulière au voisinage de $z=n$ la quantité $\left(\frac{1}{z-n}\right)^2$. Alors la série $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n}\right)^2$ est manifestement normalement convergente dans tout compact du complémentaire des pôles, car on a la majoration

$$(\text{VII},4;39)\qquad \left|\frac{1}{z-n}\right|^2 \leq \frac{4}{n^2} \quad \text{pour} \quad |z| \leq \frac{n}{2}.$$

Nous voyons même que la convergence est normale dans toute bande de la forme $|x| \leq A$ $(z = x + iy)$, après soustraction des termes correspondant aux pôles contenus dans cette bande: car la majoration (VII,4;39) vaut encore pour $|x| \leq \frac{n}{2}$ (on a $|z-n| = |x+iy-n| \geq |x-n|$).

Remarquons que f est périodique de période 1.

Mais la fonction $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ a les mêmes pôles et les mêmes parties singulières (elle est périodique de période 1, il suffit donc de le vérifier pour $n=0$; or elle est équivalente à $\frac{1}{z^2}$ pour z tendant vers 0, et paire, donc sa partie singulière est bien $\frac{1}{z^2}$).

Donc la différence

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n}\right)^2-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=g(z) \qquad (\text{VII},4;40)$$

est une fonction holomorphe entière.

Par ailleurs, si nous faisons tendre l'ordonnée y vers $\pm\infty$, x restant borné en valeur absolue, la fonction f converge vers 0 . En effet, nous avons vu que la série f est uniformément convergente dans la bande $|x|\leq A$, et chacun de ses termes séparément tend vers 0 , de sorte que notre conclusion, pour f, résulte du théorème 66 du chapitre II .

D'autre part la fonction sinus vérifie l'équivalence

$$\left|\sin\pi z\right|=\left|\frac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2i}\right|\sim\frac{e^{\pi|y|}}{2} \qquad (\text{VII},4;41)$$

de sorte que $\dfrac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$ tend aussi vers 0 dans les mêmes conditions.

Il en résulte que la différence g converge aussi vers 0 .

On peut donc, pour **A** donné, trouver un nombre B tel que la relation $|x|\leq A$, $|y|\geq B$ entraîne $|g(z)|\leq 1$. Comme par ailleurs dans le compact $|x|\leq A$, $|y|\leq B$, la fonction g est bornée, on en déduit qu'elle est bornée dans la bande $|x|\leq A$. Mais comme elle est périodique et de période 1, on en déduit qu'elle est bornée dans tout le plan complexe.

Le théorème de Liouville montre alors que c'est une constante; et comme elle tend vers 0 lorsque, pour x fixé, y tend vers l'infini, elle est identiquement nulle.

Comme on peut ensuite remplacer z par $z-\frac{1}{2}$, on a démontré la propriété suivante.

<u>Théorème 29</u>

<u>On a les identités</u>

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n}\right)^2 \qquad (\text{VII},4;42)$$

$$\frac{\pi^2}{\cos^2\pi z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n-\frac{1}{2}}\right)^2$$

Prenons maintenant les primitives :

Corollaire 1 * . On a les identités

$$(\text{VII},4;43)\qquad \pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

$$\pi \operatorname{tg} \pi z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)$$

Démonstration

La série $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}$ qui est au deuxième membre de la première formule (VII,4;43) converge en effet trivialement pour $z=0$ (elle est nulle), et sa série dérivée $-\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n}\right)^2$ converge localement uniformément dans l'ouvert connexe $\Omega = \complement_{\mathbb{C}} \{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$; le théorème 111 du chapitre IV nous apprend donc qu'elle converge elle-même localement uniformément dans Ω, et que sa somme est une primitive de $-\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} + \frac{1}{z^2}$, donc $\pi \operatorname{cotg} \pi z - \frac{1}{z}$ à une constante près. Mais ces deux fonctions sont nulles à l'origine (nousl'avons vu pour la série; et $\pi \operatorname{cotg} \pi z - \frac{1}{z}$ est impaire), donc elles sont identiques. Remarquons que nous n'avons pas pris n'importe qu'elle primitive de $-\left(\frac{1}{z-n}\right)^2$; en prenant $\frac{1}{z-n}$ nous aurions obtenu une série divergente. Nous avons pris les primitives $\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}$, nulles à l'origine, de façon à avoir convergence en au moins un point, l'origine, et à pouvoir appliquer le théorème 111 du chapitre IV; mais alors nous devions mettre de côté le terme $\frac{1}{z^2}$, singulier à l'origine. Finalement le résultat obtenu est exactement conforme à la formule (VII, 4; 37) avec $k = 1$ et au procédé indiqué dans la note (*) de la page 370.

* Ces corollaires sont démontrés d'une autre manière dans le fascicule "Fonctions spéciales", p. 22 - 24.

Même méthode pour la deuxième formule (VII, 4, 43), tous les termes étant alors traités de la même manière, car 0 n'est plus un pôle; on a encore l'égalité des deux membres à l'origine, où ils sont trivialement nuls.

Remarque

On écrit souvent, en groupant les termes n et $-n$:

(VII,4;44)
$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2z}{z^2 - n^2} \right)$$
$$\pi \operatorname{tg} \pi z = 2z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}$$

Sous aucune des formes (VII, 4; 43) ou (VII, 4; 44), il n'est immédiat que le deuxième membre soit périodique de période 1. On le verra à titre d'exercice facile.

La fonction $\pi \operatorname{cotg} \pi z - \frac{1}{z}$ est holomorphe pour $|z| < 1$, et donnée comme somme d'une série de fonctions holomorphes, localement uniformément convergente. Donc on sait qu'il y a aussi convergence uniforme locale des séries dérivées (corollaire 1 du théortme 15 de Weierstrass), et en particulier passage à la limite pour les coefficients de Taylor à l'origine.

Le k-ième coefficient de Taylor de $\pi \operatorname{cotg} \pi z - \frac{1}{z}$ coïncide donc avec la somme des k-ièmes coefficients de Taylor des fonctions $\frac{2z}{z^2 - n^2}$.

Or on a le développement

(VII,4;45)
$$\frac{2z}{z^2 - n^2} = -\frac{2z}{n^2} - \frac{2z^3}{n^4} - \quad - \frac{2z^{2p-1}}{n^{2p}} - \dots ;$$

On en déduit la formule

(VII,4;46)
$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} - \frac{2}{\pi^2}\zeta(2) z \dots - \frac{2}{\pi^{2p}} \zeta(2p) z^{2p-1} - \dots ,$$

où les ζ sont les séries de Riemann

(VII,4;47)
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} ,$$

déjà définies à la formule (II, 16; 4) du Chapitre II.

Or le développement de Laurent de $\cot g\, z$ suivant les puissances de z , s'obtient immédiatement par division du développement de $\cos z$ par le développement de $\sin z$; c'est un développement dont tous les coefficients sont rationnels, et dont les premiers termes sont les suivants

$$\cot g\, z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \frac{z^7}{4725} \cdots \tag{VII,4;48}$$

On en déduit que $\dfrac{\zeta(2p)}{\pi^{2p}}$

est un nombre rationnel, et on peut calculer ces nombres de proche en proche

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{VII,4;49}$$

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\zeta(8) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$$

On sait que $\zeta(s)$ tend vers 1 lorsque $\mathcal{R}e\, s$ tend vers $+\infty$ en effet la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge uniformément pour $\mathcal{R}e\, s \geqslant 1 + \varepsilon > 1$, et chaque *terme* $\frac{1}{n^s}$ tend vers 0 pour $\mathcal{R}e\, s \to +\infty$; sauf le premier toujours égal à 1 (encore une application du théorème 66 du Chapitre II). Donc les nombres

$\dfrac{\pi^2}{6}$, $\dfrac{\pi^4}{90}$, $\dfrac{\pi^6}{945}$, $\dfrac{\pi^8}{9450}$, . --tendent vers 1.

Les $\zeta(2p+1)$, pour des entiers $2p+1$ impairs, sont inconnus.

Compte tenu de ce qui a été dit à la formule (II, 16;19) du chapitre II, on en déduit, pour les séries alternées $\zeta_a(2p)$, les formules

$$\zeta_a(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \tag{VII,4,50}$$

$$\zeta_a(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720} \quad , \ldots$$

Corollaire 2

On a le développement

(VII,4;51) $$\frac{1}{e^{z}-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{z+2n i\pi} - \frac{1}{2n i\pi} \right)$$

et d'autre part, au voisinage de $z = 0$, le développement

(VII,4;52) $$\frac{1}{e^{z}-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p)!} B_p \, z^{2p-1} \text{ pour } |z| < 2\pi ,$$

avec

(VII,4;53) $$B_p = \frac{2\,(2p)!}{(2\pi)^{2p}} \zeta(2p), \text{ ou } \frac{(-1)^{p+1}}{(2p)!} B_p = \frac{(-1)^{p+1} \zeta(2p)}{2^{2p-1} \pi^{2p}} \; (*)$$

Il suffit d'exprimer la fonction $\frac{1}{e^{z}-1}$ à partir de la fonction $\operatorname{cotg} z$ par la formule

(VII,4;54) $$\frac{1}{e^{z}-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth \frac{z}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{cotg} \frac{iz}{2}$$

et d'utiliser les résultats (VII, 4; 43 et 46). On peut aussi donner une démonstration directe, analogue aux précédentes.

Les nombres rationnels B_p, sont appelés nombres de Bernoulli; ils ont des applications dans un certain nombre de problèmes d'analyse ou d'arithmétique.

Les premiers de ces nombres sont donnés par les formules

(VII,4;55) $$B_1 = \frac{1}{6}, \; B_2 = \frac{1}{30}, \; B_3 = \frac{1}{42}, \; B_4 = \frac{1}{30}, \ldots$$

Remarque

Les formules (VII, 4; 42, 43 et 51) peuvent être considérées comme des sortes de "décompositions en éléments simples" des fonctions figurant aux premiers membres. Toutefois, dans la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, on ne devrait pas faire figurer de terme tel que $\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$; le $\frac{1}{n}$ est mis ici pour assurer la convergence.

(*) On introduit, assez artificiellement ici, un terme $(2p)!$, qui est utile dans certaines applications.

D'autre part on remarquera que la "partie entière" de la decomposition, qui pourrait ici être une fonction entière arbitraire, est réduite à sa plus simple expression, grâce à un argument tiré du théorème de Liouville, page 374.

Premier problème de Cousin sur une surface de Riemann

On peut faire sur une surface de Riemann arbitraire W ce que nous venons de faire dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Soit $\{a_i\}_{i\in I}$ un ensemble fermé de points isolés de W.

On ne peut pas se donner, au voisinage de a_i, un polynôme en $\frac{1}{z-a_i}$, cette expression ~~n'a pas~~ de sens. Mais on peut se donner une fonction méromorphe $\vec{P}_i$ au voisinage de a_i, et chercher une fonction méromorphe $\vec{f}$ sur W telle que, pour chaque i, $\vec{f}-\vec{P}_i$ soit holomorphe au voisinage de a_i; ce sera le premier problème de Cousin sur W.

On peut d'ailleurs supposer qu'on se donne, au voisinage de chaque a_i, une carte locale $\Phi_i : \mathcal{O}_i \subset \mathbb{C} \longrightarrow \Phi_i(\mathcal{O}_i), \Phi_i(\alpha_i) = a_i$, et $\vec{P}_i$ est alors donnée, au voisinage de α_i dans $\mathcal{O}_i$, par un polynome en $\frac{1}{\zeta-\alpha_i}$, ou la somme d'un tel polynôme et d'une fonction holomorphe qui ne jouera aucun rôle; un changement de carte, c.a.d. un $\mathbb{C}$-difféomorphisme $\zeta \longrightarrow \zeta'$, $\mathcal{O}_i \longrightarrow \mathcal{O}'_i$, ne transforme pas un polynôme en $\frac{1}{\zeta-\alpha_i}$ en un polynôme en $\frac{1}{\zeta'-\alpha'_i}$ mais transforme bien la somme d'un polynôme en $\frac{1}{\zeta-\alpha_i}$ et d'une fonction holomorphe en une fonction analogue. On peut d'ailleurs poser le même problème pour les 1-formes méromorphes aussi bien que pour les fonctions. Mais tous les résultats sont très différents de ce qu'ils sont sur $\mathbb{C}$ ou sur un ouvert de $\mathbb{C}$. le problème n'a pas toujours une solution. Nous allons analyser plus en détail ce qui se passe pour une surface de Riemann compacte W; les a_i sont alors en nombre fini. Supposons qu'il s'agisse de formes et fonctions scalaires, pour simplifier : $F = \mathbb{C}$. 1°). Cherchons d'abord le problème de Cousin pour une 1-forme ω. Pour chaque a_i, P_i est alors une 1-forme méromorphe donnée au voisinage de a_i; elle définit donc un résidu. Si ω existe, $\omega - P_i$ est holomorphe en a_i, donc ω a le même résidu que P_i. Pour que le problème soit possible, il est au moins nécessaire que la somme de ces résidus soit nulle (théorème 22 ε); on démontre (mais c'est très difficile) que cette condition est suffisante : si elle est réalisée, il existe une solution du problème de Cousin, on peut trouver ω . Cherchons alors l'indétermination du problème; on obtient toutes les solutions en ajoutant à l'une d'elles une 1-forme holomorphe arbitraire sur W . Nous sommes donc amenés à nous demander quelle est la dimension de l'espace $\mathbb{C}$-vectoriel H des 1-formes holomorphes sur W . Considérons le groupe d'homologie de W pour la dimension 1 (chapitre VI, page 209). On démontre qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}^{2g}$, où g est un entier appelé <u>genre de la surface de Riemann, et que g est précisément la dimension complexe de H</u> . Ce genre g est lié à une notion vaguement définie en Mathématiques spéciales. Si on considère une "courbe algébrique" dans un espace projectif, l'ensemble de ses points complexes (y compris ses points à l'infini) est susceptible d'une structure de surface de Riemann W (qui, si la courbe est unicursale, est la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$); ce qu'on a appelé (?) le genre de la courbe en Mathématiques spéciales est justement ce genre g que nous indiquons ici.

2°) Considérons maintenant le problème de COUSIN pour des fonctions. Il existe des conditions nécessaires pour que le problème ait une solution. En effet, si ϖ est une 1-forme holomorphe, $\varpi \in H$, et P_i une fonction méromorphe donnée au voisinage de a_i , alors $P_i\,\varpi$ est une 1-forme méromorphe au voisinage de a_i ; s'il existe une fonction f méromorphe sur W telle que, pour tout i, $f - P_i$ soit holomorphe au voisinage de a_i , alors $f\varpi$ est une 1-forme méromorphe sur W telle que $f\varpi - P_i\varpi$ soit holomorphe au voisinage de a_i ; donc la somme des résidus des $P_i\,\varpi$ doit être nulle. Ceci doit être vrai pour toute $\varpi \in H$. Comme il y a g forme holomorphes indépendantes, ϖ_1 , $\varpi_2, \ldots \varpi_g$, cela fait en tout g conditions qui doivent être vérifiées par le système des P_i ; ici encore on démontre, et c'est très difficile, que ces conditions sont suffisantes pour que le problème ait une solution. Quel est alors le degré d'indétermination ? Ici c'est tout simple : toute fonction holomorphe est une constante (corollaire 7 du théorème 12), la solution est déterminée à une constante additive près. Ces résultats et d'autres analogues ont été démontrés au siècle dernier par RIEMANN, WEIERSTRASS, ABEL. On remarquera que, pour les 1-formes, il y a 1 condition de possibilité, et g degrés d'indétermination, et que, pour les fonctions, il y a g conditions de possibilité et 1 degré d'indétermination; il y a une sorte de dualité entre les deux problèmes.

Il existe une généralisation de ce type de dualité, qui constitue le théorème de Riemann-Roch, et dont les généralisations modernes font partie des plus profonds théorèmes des mathématiques.

Prenons pour cas particulier la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

1°) Le genre g est nul, car la sphère de $\mathbb{R}^3$ est simplement connexe (théorème 57 du Chapitre VI), donc son groupe d'homologie est réduit à (0) (tout cycle de dimension 1 est homologue à 0 , et même homotope à 0). Donc l'espace H des 1-formes holomorphes est réduit à $\{0\}$. C'est d'ailleurs ici évident; une 1-forme holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$ est entière sur $\mathbb{C}$; mais alors elle a obligatoirement un pôle d'ordre $\geqslant 2$ au point ∞ si elle n'est pas identiquement nulle (rappelons que $z^k dz$ a un pôle d'ordre $k+2$; voir page 356). Alors, pour les 1-formes, le problème de Cousin est résoluble dès que la somme des résidus est nulle, et sa solution est unique. On le voit aussitôt directement comme suit. Pour chaque point $a_i \neq \infty$, on peut se donner comme partie singulière $P_i = A_i\, dz$, où A_i est un polynôme en $\frac{1}{z-a_i}$ sans terme constant; posons $c_{-1,i} = \mathcal{R}és_{a_i} P_i$. Pour le point ∞ , on se donnera la partie singulière $P_\infty = c_{-1,\infty} \frac{dz}{z} + B\, dz$ où B est un polynôme (rappelons-nous en effet que $\frac{dz}{z}$ et dz sont singulières); $-c_{-1,\infty} = \mathcal{R}és_\infty P_\infty$. Si $A = \sum_{a_i \neq \infty} A_i$, la forme cherchée ω est nécessairement de la forme $\omega = A\, dz + R\, dz$, R polynôme. On doit alors avoir, en regardant le point ∞,

$$c_{-1,\infty} \frac{dz}{z} + B\, dz = \sum_{a_i \neq \infty} c_{-1,i} \frac{dz}{z} + R\, dz,$$ ce qui donne d'abord la condition $\sum_{a_i \neq \infty} c_{-1,i} + (-c_{-1,\infty}) = 0$, la somme des résidus doit être nulle; puis $B = R$, ce qui détermine R de manière unique. Une condition de possibilité, aucune indétermination.

2°) Passons au problème de Cousin sur $\hat{\mathbb{C}}$ pour des fonctions. Pour chaque $a_i \neq \infty$, la partie singulière est un polynôme P_i en $\frac{1}{z-a_i}$ sans terme constant; pour ∞ , un polynôme P_∞ en z sans terme constant. Posons $P = \sum_{a_i \neq \infty} P_i$. Alors on doit avoir $f = P + R$, R polynôme; soit c_0 le terme constant de R ; en écrivant la condition à l'infini, on trouve $P_\infty = R - c_0$, ce qui détermine R à une constante près. Aucune condition de possibilité, 1 degré d'indétermination.

Deuxième problème de Cousin dans le plan complexe

Soit $\{a_i\}_{i\in I}$ un ensemble fermé de points isolés de $\mathbb{C}$ et, pour chaque i , un entier $p_i \geqslant 1$. Le 2ème problème de Cousin consiste à trouver une fonction entière sur $\mathbb{C}$, à valeurs complexes, ayant pour zéros les points a_i avec exactement les ordres de multiplicités p_i .

Théorème 30 de Weierstrass

Quelles que soient la suite des a_i et la suite des p_i , le deuxième problème de Cousin admet des solutions; on obtient toutes les solutions en multipliant l'une d'entre elles par une fonction arbitraire, entière et sans zéros, c.a.d. de la forme e^g , où g est une fonction entière arbitraire.

Démonstration

Soit h une fonction méromorphe à valeurs complexes dans $\mathbb{C}$, ayant les a_i comme pôles simples avec les résidus p_i ; une telle fonction existe d'après le théorème 28 de Mittag-Leffler. Soit ζ_0 un point fixe de $\mathbb{C}$ différent des a_i .

Considérons l'intégrale $H(z) = \int_{\zeta_0}^{z} h(\zeta)\, d\zeta$, calculée suivant un chemin C^1 de longueur finie évitant les a_i , et allant de ζ_0 à z . Tant que le chemin varie en restant dans un ouvert simplement connexe Ω de $\complement_{\mathbb{C}}\{a_i\}_{i\in I}$, l'intégrale ne varie pas, et représente une primitive h_0 holomorphe de h dans Ω (théorème 7). Mais $\complement_{\mathbb{C}}\{a_i\}_{i\in I}$ lui-même n'est pas simplement connexe, puisque un cercle entourant l'un des a_i n'est pas homotope à zéro, et l'intégrale précédente a donc, a priori, une infinité de valeurs possibles suivant le chemin choisi. Mais la différence entre deux de ces valeurs est l'intégrale de $h(\zeta)\, d\zeta$ suivant un C^1-cycle Γ de longueur finie (chemin fermé allant de ζ_0 à ζ_0); le plan étant simplement connexe, ce cycle Γ est homotope à 0 donc homologue à 0 dans $\mathbb{C}$, et on peut lui appliquer le théorème 19 des résidus:

cette intégrale est le produit de $2i\pi$ par une somme de résidus de h . Mais tous les résidus de h sont des entiers; donc la différence entre 2 valeurs de H en un point z est un multiple entier de $2i\pi$, donc $e^{H(z)}$ a une valeur bien déterminée. La fonction e^H ainsi définie est holomorphe et sans zéros dans $\complement_{\mathbb{C}} \{a_i\}_{i\in I}$; soit en effet z_1 un point de cet ouvert, et Δ un disque de centre z_1 contenu dans cet ouvert; pour z dans Δ , on pourra choisir la détermination de H définie par $H(z) = \int_{z_0}^{z_1} + \int_{z_1}^{z}$, où la première intégrale est calculée suivant un chemin choisi une fois pour toutes, et la deuxième suivant un chemin contenu dans Δ; comme Δ est simplement connexe, cette seconde intégrale est une fonction holomorphe de z (primitive de h dans Δ), donc aussi la détermination correspondante de H , et par suite e^H est holomorphe et sans zéros. Sa valeur en z_0 est 1.

Considérons maintenant un des points a_i . On a $h = \frac{p_i}{z - a_i} + k$, où k est holomorphe au voisinage de a_i . Les diverses déterminations de $H(z)$ peuvent s'écrire $\int_{z_0}^{z} \frac{p_i \, d\zeta}{\zeta - a_i} + \int_{z_0}^{z} k(\zeta)\, d\zeta$ ou encore $p_i \log\left(\frac{z - a_i}{z_0 - a_i}\right) + K(z)$, en prenant les diverses déterminations du logarithme et de $K(z) = \int_{z_0}^{z} k(\zeta)\, d\zeta$, d'où $e^{H(z)} = \left(\frac{z - a_i}{z_0 - a_i}\right)^{p_i} e^{K(z)}$. . Mais maintenant e^K est holomorphe et sans zéros au voisinage de a_i , d'après la démonstration donnée ci-dessus pour le voisinage d'un point z_1 ; de sorte que e^H admet bien a_i comme zéro avec l'ordre de multiplicité p_i . Cette fonction $f = e^H$ est donc une solution du problème de Cousin. Comme $\complement_{\mathbb{C}} \{a_i\}_{i\in I}$ est connexe, une fonction est déterminée, dans cet-ouvert, à un facteur constant près par sa dérivée logarithmique; f est donc la seule fonction holomorphe de dérivée logarithmique h ,et telle que $f(z_0) = 1$.

Regardons de plus près sa forme, en utilisant la méthode de résolution de Mittag-Leffler pour la détermination de h .

Déterminons donc à partir d'un point $b = z_0$ différent de tous les a_i , une série (VII, 4; 35) :

(VII,4;56) $$h(z) = \sum_i \left(\frac{p_i}{z-a_i} - Q_i(z)\right)$$

qui converge localement uniformément dans le complémentaire des a_i .

On a vu que Q_i est un polynôme. Appelons R_i l'unique primitive de ce polynôme qui soit nulle au point z_0 ; on a alors

(VII,4;57) $$f(z) = e^{H(z)} = \prod_i \left(\left(\frac{z-a_i}{z_0-a_i}\right)^{p_i} e^{-R_i(z)}\right).$$

[On voit d'ailleurs directement que nous avons là un produit infini, qui prend la valeur 1 au point z_0 , et dont la série dérivée logarithmique converge localement uniformément vers h dans l'ouvert connexe $\complement_{\mathbb{C}} \{a_i\}_{i\in I}$, donc qui converge lui aussi localement uniformément dans le même ouvert d'après le théorème 112 du chapitre IV; et il a évidemment les propriétés demandées].

En général, on prendra $z_0 = b = 0$ (s'il se trouve que c'est l'un, a_0 , des points a_i , on isolera d'abord le terme z^{p_0}, correspondant à l'ordre de multiplicité de ce zéro, et on s'occupera ensuite de trouver une fonction admettant les autres zéros avec leurs ordres de multiplicité donnés). Compte tenu de (VII, 4; 37) on trouvera une fonction de la forme

(VII,4;58) $$f(z) = \prod_{i=0}^{\infty}\left(\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^{p_i} e^{p_i\left(\frac{z}{a_i}+\frac{z^2}{2a_i^2}+\cdots+\frac{z^{k_i}}{k_i a_i^{k_i}}\right)}\right).$$

Il est bien évident que le quotient de deux solutions est une fonction entière sans zéros arbitraire; d'après le corollaire 4 du théorème 10 , elle est l'exponentielle d'une fonction entière arbitraire.

Remarque 1

Le fait que $\mathbb{C}$ était simplement connexe a joué un rôle essentiel à un moment donné de la démonstration du théorème. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$; on a vu (remarque1 page 371) que le premier problème de Cousin avait toujours des solutions dans Ω . On peut donc construire la fonction h de la démonstration précédente. Mais alors la quantité $H(z)$ n'est plus définie à un multiple entier près de $2i\pi$, parce que le théorème des résidus n'est applicable que si Γ est homologue à 0 ce qui n'est sûr que si Ω est simplement connexe. On dispose cependant d'une marge de manoeuvre, parce que le choix de h n'est pas unique; on peut montrer que, pour un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, le problème a toujours une solution. Mais il n'en sera pas de même pour des surfaces de Riemann, même si le premier problème de Cousin a une solution; nous verrons un exemple plus loin.

Remarque 2

On aurait pu chercher $\vec{f}$ à valeurs dans un Banach $\vec{F}$, satisfaisant aux mêmes conditions. Mais c'est là une généralisation triviale; car il suffit de multiplier une fonction scalaire ayant les zéros donnés par un vecteur fixe non nul de $\vec{F}$.

Remarque 3

Si, au lieu d'exiger que f admette les zéros a_i avec les ordres p_i, on exige qu'elle ait au moins les zéros a_i (mais d'autres éventuellement), d'ordres au moins p_i, c.à.d. que, dans l'anneau des fonctions entières, f soit divisible par chaque $(z-a_i)^{p_i}$, alors la fonction f construite dans la démonstration répond encore à la question, et on obtient toutes les autres en la multipliant par une fonction entière arbitraire (ayant ou non des zéros).

Cas particuliers importants

Supposons que la série $\sum_i \frac{p_i}{|a_i|}$ soit convergente, alors on aura la solution suivante

$$f(z) = \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right)^{p_i}, \tag{VII,4;59}$$

le produit écrit est en effet localement uniformément convergent dans le complémentaire des zéros, d'après le théorème 70 du Chapitre II.

S'il n'est pas ainsi, mais si la série $\sum_i \frac{p_i}{|a_i|^{r+1}}$ est convergente, alors on pourra prendre une solution de la forme

$$f(z) = \prod_{i=0}^{\infty} \left(\left(1-\frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i} + \frac{z^2}{2a_i^2} + \cdots + \frac{z^r}{r a_i^r}}\right)^{p_i}. \tag{VII,4;60}$$

C'est en effet ce que donne la méthode précédente, compte tenu de (VII, 4; 37).

Si, pour tout λ, $\sum \frac{p_i}{|a_i|^{\lambda+1}} = +\infty$, on aura une formule (VII, 4; 58) avec des λ_i tendant vers l'infini pour a_i tendant vers l'infini.

Corollaire 1

On a la formule

$$(\text{VII}, 4; 61) \quad \sin \pi z = \pi z \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

ces produits infinis étant localement uniformément convergents dans $\complement \mathbb{Z}$.

En effet, $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ est la seule fonction holomorphe de dérivée logarithmique $\pi \cot g\, \pi z - \frac{1}{z}$ et valant 1 à l'origine; il suffit alors d'appliquer (VII,4;43).

Remarque.

De même que, page 367, nous avons comparé les développements obtenus à des décompositions en élément simples de fractions rationnelles, nous pouvons comparer (VII,4;61) au développement en produit de facteurs premiers d'un polynôme. Ici encore on écrit $\prod \left(\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right)$ et non $\prod (z - n)$, pour assurer la convergence. D'autre part, dans le cas des polynômes, il ne restait jamais qu'un facteur constant arbitraire, parce qu'un polynôme sans zéros est constant (d'Alembert); ici il reste une fonction entière sans zéro arbitraire, et il est remarquable qu'elle soit constante pour la fonction $\sin$.

Corollaire 2

Soient $\{a_i\}_{i \in I}$, $\{b_j\}_{j \in J}$, deux ensembles fermés disjoints de points isolés de $\mathbb{C}$, et $i \to p_i$, $j \to q_j$, deux applications de I, J dans l'ensemble des entiers > 0.

Il existe une fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$, à valeurs complexes, ayant les a_i pour zéros avec les ordres p_i, et les b_j comme pôles avec les ordres q_j (deuxième problème de Cousin général); si f est une telle fonction, on obtient toutes les autres fonctions ayant les mêmes propriétés en la multipliant par une fonction entière sans zéros arbitraire.

Démonstration

Soit g (resp. h) une fonction entière ayant les zéros a_i (resp. b_j) avec les ordres p_i (resp. q_j); alors $\frac{g}{h}$ répond à la question.

Corollaire 3

Toute fonction méromorphe $\vec{f}$ sur $\mathbb{C}$, à valeurs dans un Banach $\vec{F}$, est quotient d'une fonction entière à valeurs dans $\vec{F}$ par une fonction entière à valeurs complexes.

Démonstration

Soient b_i les pôles de $\vec{f}$, d'ordres q_i. Il existe une fonction scalaire entière h ayant les zéros b_i d'ordres q_i; alors $\vec{f}h$ est une fonction entière $\vec{g}$ à valeurs dans $\vec{F}$, et on a bien $\vec{f} = \frac{\vec{g}}{h}$.

Corollaire 4

Soit $\{a_i\}_{i \in I}$ un ensemble fermé de points isolés de $\mathbb{C}$ et soit $i \longrightarrow \vec{c}_i$ une application de I dans le Banach $\vec{F}$. Il existe une fonction entière $\vec{f}$ sur $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\vec{F}$, prenant au point a_i la valeur $\vec{c}_i$. Si $\vec{f}$ est une fonction répondant à la question, on obtient toutes les autres en lui ajoutant une fonction entière arbitraire s'annulant en tous les a_i.

Démonstration

Soit h une fonction scalaire, ayant les a_i comme zéros simples (deuxième problème de Cousin). Alors, si $\vec{f}$ existe, $\frac{\vec{f}}{h}$ est une fonction méromorphe ayant pour pôles simples les a_i pour lesquels $\vec{c}_i \neq \vec{0}$, avec le résidu $\frac{\vec{c}_i}{h'(a_i)}$ en un tel point a_i.

Inversement soit $\vec{g}$ une fonction satisfaisant à ces conditions (premier problème de Cousin); alors $\vec{f} = \vec{g}h$ répond à la question. Il est bien évident qu'on obtient toutes les autres en lui ajoutant une fonction entière nulle en tous les a_i, c.à.d. produit de h par une fonction entière arbitraire.

Exemple

Cherchons une fonction $\vec{f}$ prenant la valeur $\vec{c}_n$ au point $n \in \mathbb{Z}$, avec $\sum_{n \neq 0} \frac{\vec{c}_n}{n} < +\infty$. Ici $h(z)$ pourra être $\frac{\sin \pi z}{\pi}$; alors $\vec{g}$ devra avoir le résidu $\vec{c}_n$ au point n ; comme la série $\sum_{n \neq 0} \frac{\|\vec{c}_n\|}{n}$ converge, on pourra prendre

$$\vec{g}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{c}_n}{z-n}, \quad \vec{f} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{c}_n}{z-n}.$$

Remarque 1

Nous avions déjà résolu le problème précédent et même un problème bien plus général dans la remarque 2 suivant le théorème 28.

Remarque 2

Si les a_i sont en nombre fini, on retrouve la formule d'interpolation de Lagrange. Car on peut prendre pour h la fonction $(z-a_0)(z-a_1)\dots(z-a_m)$, alors

(VII,4;61 bis) $$h'(z) = \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{z-a_i}\right) h(z), \quad h'(a_i) = \prod_{j \neq i} (a_i - a_j),$$

d'où

(VII,4;61 ter) $$\overrightarrow{g(z)} = \sum_i \frac{\vec{c}_i}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)} \frac{1}{z-a_i},$$

$$\overrightarrow{f(z)} = \sum_i \vec{c}_i \prod_{j \neq i} \frac{z-a_j}{a_i - a_j}$$

Théorème 32 de Hadamard

Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$ à valeurs complexes et admettant une majoration du type suivant, pour $|z|$ assez grand :

(VII,4;62) $$|f(z)| \leq C e^{|z|^\rho}$$

alors si les a_i sont ses zéros, multiples d'ordres p_i, la série $\sum_{a_i \neq 0} \frac{p_i}{|a_i|^k}$ est convergente dès que le nombre réel k est $> \rho$. Si $\rho < \lambda + 1$, λ entier ≥ 0, f admet l'expression en produit de facteurs de Weierstrass

$$(\text{VII},4;63) \quad f(z) = e^{P(z)} z^{p_0} \prod_{a_i \neq 0} \left(\left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\left(\frac{z}{a_i} + \frac{z^2}{2a_i^2} + \cdots + \frac{z^\lambda}{\lambda a_i^\lambda}\right)} \right)^{p_i},$$

localement uniformément convergente dans $\complement_{\mathbb{C}} \{a_i\}_{i \in I}$,

où $p_0 \geq 0$ est l'ordre du zéro à l'origine, et P un polynôme de degré $\leq \lambda$. La démonstration de ce théorème est très difficile, et nous ne la donnerons pas; c'est un des premiers théorèmes démontrés par Hadamard (1892, il avait 27 ans) et un des plus spectaculaires (le mémoire où ce théorème et plusieurs autres, également très remarquables, furent publiés, lui valut le Grand Prix des Sciences Mathématiques, décerné par l'Académie des Sciences).

On voit combien ce théorème peut être précieux. Si par exemple nous considérons la fonction $\sin \pi z$, elle admet bien une majoration du type précédent avec l'exposant $\rho = 1$, car on a

$$(\text{VII},4;64) \quad |\sin \pi z| = \left| \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \right| \leq e^{\pi |z|}.$$

Il en résulte que l'on a nécessairement $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^k} < \infty$ pour $k > 1$ (ce que nous savions déjà), et, en prenant $\lambda = 1$, l'expression

$$(\text{VII},4;65) \quad \sin \pi z = e^{\alpha z + \beta} z \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right).$$

où α et β sont des constantes inconnues. Mais la fonction $\sin$ est impaire, et d'autre part au second membre3 est impair et le produit infini est pair, donc nécessairement $e^{\alpha z + \beta}$ est une fonction paire, d'où l'on déduit $\alpha = 0$. Il suffit alors de remarquer que $\frac{\sin \pi z}{z}$ tend vers π lorsque tend vers 0, et que tous les termes du produit infini va4ent 1 pour $z = 0$, pour en déduire $e^\beta = \pi$, d'où à nouveau l'identité (VII, 4; 61). Sans connaissance d'aucune formule préalable, (VII,4;61) se déduit immédiatement du théorème de Hadamard.

Le théorème de Hadamard montre que, dès que l'on connait les zéros d'une fonction avec leur ordre de multiplicité, avec en outre une certaine condition de croissance (VII,4;62), on connait à très peu de chose près, la fonction, puisqu'elle est déterminée à un facteur e^P près, où P est un polynôme de degré $\leq \lambda$.

Supposons en particulier que l'on ait (VII, 4; 62) avec $\rho < 1$. Alors on peut prendre $\lambda = 0$, et le facteur e^P se réduit à une constante. C'est ce qui se passe si f est un polynôme. D'ailleurs le théorème 32 contient comme cas particulier une généralisation considérable du théorème de d'Alembert:

Corollaire

Si une fonction scalaire entière sur $\mathbb{C}$ admet la majoration (VII,4;62) avec $\rho < \lambda + 1$, et n'a pas de zéros, elle a la forme e^P , où P est un polynôme de degré $\leq \lambda$; en particulier, si $\rho < 1$, elle est constante.

On peut encore dire qu'une fonction f vérifiant (VII,4;62) avec $\rho < 1$, et qui n'est pas un polynôme, a une infinité de zéros (car, si elle n'en avait qu'un nombre fini, elle serait un produit $C \prod_i \left(1 - \frac{z}{a_i}\right)$ donc un polynôme), donc aussi prend une infinité de fois toute valeur c (en considérant $f - c$). Le résultat ne subsiste pas pour $\rho \geq 1$, comme le montre l'exemple de e^z qui ne s'annule jamais.

§ 5 APPLICATIONS DU THÉORÈME DES RÉSIDUS AU CALCUL D'INTÉGRALES DÉFINIES

D'après sa formulation même, le théorème 19 des résidus permet de ramener le calcul de certaines intégrales définies dans le plan complexe à des calculs de résidus, c'est-à-dire de coefficients dans des développements limités au voisinage de certains points singuliers. Mais en outre beaucoup d'intégrales sur la droite réelle , ne faisant intervenir a priori aucune fonction de variables complexes, peuvent, par des modifications convenables, se calculer de la même manière. C'est le plus puissant outil pour calculer certaines intégrales définies pour lesquelles l'intégrale indéfinies correspondante n'est pas calculable.

Exemple 1

Intégrale de 0 à 2π d'une fraction rationnelle des fonctions trigonométriques.

Soit $\vec{R} = \frac{\vec{P}}{Q}$ une fraction rationnelle de 2 variables complexes, $\vec{P}$ a coefficients dans un Banach $\vec{F}$, Q à coefficients complexes. Soit à intégrer

$$\text{(VII,5;1)} \qquad \int_0^{2\pi} \vec{R}\,(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta\,.$$

On effectue le changement de variables $e^{i\theta} = z$; on obtient formellement

$$\text{(VII,5;2)} \qquad \int_\Gamma \vec{R}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{i}\frac{dz}{z}\,,$$

Γ étant le cercle trigonométrique parcouru dans le sens direct. Et en effet, si on veut calculer cette intégrale de forme différentielle, on peut justement paramétrer Γ par $z = e^{i\theta}$, et on obtient bien (VII,5;1) d'après (VI,6;74). Mais alors (VII,5;2) se calcule d'après le thdorème Intérieur 19 ou extérieur 19bis des résidus.

Soit a calculer par exemple

$$\text{(VII,5;3)} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}\,, \quad a \in \mathbb{C}\,,\ a \notin [-1,+1]\,.$$

On obtient

$$\text{(VII,5;4)} \qquad \int_\Gamma \frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\,\frac{1}{i}\,\frac{dz}{z} = \int_\Gamma \frac{2}{i}\,\frac{dz}{z^2+2az+1}$$

le trlnome $z^2+2az+1$ a deux racines, dont le produit est 1; une d'entre elles est donc dans le disque trigonométrique Δ bordé par Γ Appelons-l& $\alpha = -a+\sqrt{a^2-1}$, correspondant a une détermination convenable du radical; si par exemple a est réel > 1 , c'est la racine > 0 qu'il faut prendre, s'il est < -1 , c'est la racine < 0 . Le résidu en α est $\frac{2}{i}\,\frac{1}{2\alpha+2a}$, ce qui donne

$$\text{(VII,5;5)} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

On pourra, a titre d'exercice, utiliser la méthode usuelle, qui consiste a poser $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$. On remarquera bien que la présente méthode calcu4e un résidu en α , mais ne calcule pas de primitive $\int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$. A titre de vérification, pour a tendant vers ∞ , l'intégrale est trivialement équivalente Y $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a} = \frac{2\pi}{a}$.

Exemple 2

Intégrales sur la droite réelle

Soit $\vec{R} = \frac{\vec{P}}{Q}$ une fraction rationnelle, $\vec{P}$ à coefficients dans un Banach $\vec{F}$ sur $\mathbb{C}$, Q à coefficients complexes. Proposons-nous de calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{\vec{P}}{Q} dx$. Cette intégrale a un sens si, d'une part, Q n'a pas de zéros réels, si, d'autre part, $\deg Q \geqslant \deg \vec{P} + 2$ (intégrabilité à l'infini).

On peut considérer un cas un peu plus général, en supposant que Q possède éventuellement certains zéros réels d'ordre 1; dans ce cas, pour chacun d'eux a_i, on calculera l'intégrale en valeur principale de Cauchy $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-a_i| \geqslant \varepsilon}$ (Chapitre IV, page 656); on peut de même supposer seulement que $\deg Q \geqslant \deg \vec{P} + 1$, quitte à considérer une valeur principale de Cauchy à l'infini, $\lim\limits_{A \to \infty} \int_{-A}^{+A}$, car $\frac{\vec{P}}{Q}$ est la somme d'une fraction rationnelle impaire qui donnera 0 et d'une fraction rationnelle paire $\frac{\vec{P}_o}{Q_o}$ pour laquelle $\deg Q_o \geqslant \deg \vec{P}_o + 2$, puisque la différence des degrés est $\geqslant 1$ et paire. Finalement, on cherchera à calculer

$$\text{(VII,5;6)} \qquad \mathrm{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} dx = \lim_{\substack{A \to +\infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{\substack{|x-a_i| \geqslant \varepsilon \\ |x| \leqslant A}} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} dx ,$$

les a_i étant les zéros réels de Q.

On peut d'abord calculer $\mathrm{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q} dx$ par des méthodes purement réelles, en décomposant $\frac{\vec{P}}{Q}$ en éléments simples. La partie polynomiale est nulle, à cause des conditions sur les degrés. Donc :

$$\text{(VII,5;7)} \qquad \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} = \sum_i \left(\frac{\vec{c}_{i,-1}}{x-a_i} + \frac{\vec{c}_{i,-2}}{(x-a_i)^2} + \cdots + \frac{\vec{c}_{i,-k_i}}{(x-a_i)^{k_i}} \right) ,$$

les a_i étant les zéros de Q (réels ou complexes).

Mais l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x-a_i)^k}$ est nulle dès que $k \geqslant 2$, car elle vaut $\left[\frac{1}{1-k} \frac{1}{(x-a_i)^{k-1}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Calculons donc $vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-a_i}$. Soit d'abord $\mathcal{I}m\ a_i > 0$. On peut introduire une détermination continue de la fonction $z \longrightarrow \log(z-a_i)$ pour $\mathcal{I}m\, z < \mathcal{I}m\ a_i$, ou $\mathcal{I}m\,(z-a_i) < 0$, en choisissant $-\pi < \mathcal{A}rg\,(z-a_i) < 0$. Alors ce logarithme est $\mathbb{C}$-dérivable et de dérivée $z \longrightarrow \frac{1}{z-a_i}$ (voir théorème 8), donc la fonction $x \longrightarrow \log(x-a_i)$, définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-dérivable et de dérivée $\frac{1}{x-a_i}$. Donc :

$$(\text{VII},5;8)\quad \int_{-A}^{+A} \frac{dx}{x-a_i} = \log(A-a_i) - \log(-A-a_i) = \log\left|\frac{A-a_i}{-A-a_i}\right| + i\left(\mathcal{A}rg\,(A-a_i) - \mathcal{A}rg\,(-A-a_i)\right).$$

Le premier terme tend vers 0 pour A infini parce que $\left|\frac{A-a_i}{-A-a_i}\right|$ tend vers 1, le second terme tend vers $i\pi$. Avec un calcul identique pour $\mathcal{I}m\ a_i < 0$, et évident pour $\mathcal{I}m\ a_i = 0$ (voir formule (IV,9;119)) :

$$(\text{VII},5;9)\quad vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-a_i} = i\pi \text{ si } \mathcal{I}m\ a_i > 0, -i\pi \text{ si } \mathcal{I}m\ a_i < 0, 0 \text{ si } \mathcal{I}m\ a_i = 0\ ,$$

d'où le résultat cherché

$$(\text{VII},5;10)\quad vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\, dx = i\pi \left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i > 0} \mathcal{R}és_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} - \sum_{\mathcal{I}m\, a_i < 0} \mathcal{R}és_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} \right)$$

Nous avons bien utilisé ici la fonction $\log$ en variables complexes, ce qui est normal puisque les a_i sont complexes; par contre nous n'avons nullement utilisé d'intégrale curviligne $\int \vec{f}(z)\, dz$ dans le plan complexe, mais seulement une intégrale d'une fonction à valeurs complexes ou dans un Banach complexe, sur $\mathbb{R}$, par rapport à la mesure dx , rentrant dans le cadre du chapitre IV sur l'intégration; il n'y a pas eu de résidu, et nous sommes passés par des primitives. Nous allons maintenant obtenir le même résultat par des intégrales dans le plan complexe, calculées par résidus. Soit d'abord $\deg Q \geqslant \deg \vec{P} + 2$, et tous les a_i non réels. L'intégrale $\int \frac{\vec{P}}{Q}\, dz$ le long d'un demi-cercle γ_A : $|z| = A,\ 0 < \mathcal{A}rg\, z < \pi$, tend vers 0 pour A infini, car $\left\| \frac{\vec{P}}{Q} \right\|$ est majoré par const.$\frac{1}{A^2}$ sur ce demi-cercle, et que sa longueur est πA . On peut donc écrire :

$$(VII,5;11)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{+A} \frac{\vec{P}}{Q}\,dx = \lim_{A\to\infty} \left(\int_{[-A,+A]} \frac{\vec{P}}{Q}\,dz + \int_{\gamma_A} \frac{\vec{P}}{Q}\,dz \right),$$

γ_A étant parcouru dans le sens de A à $-A$. Mais alors $\Gamma_A = [-A,+A] \cup \gamma_A$ est une courbe C^∞ par morceaux, qui est le pseudo-bord d'une variété avec pseudo-bord, à savoir le demi-disque $\Delta_A : |z| \leq A, \mathcal{I}m\, z \geq 0$. Δ_A étant orienté par $\mathbb{C}$, Γ_A est bien à parcourir dans le sens direct. Nous avons vu au théorème général de Stokes 38 du chapitre VI, que la formule de Stokes était applicable dans ce cas (exercice 2° page 175) donc aussi le théorème des résidus 19. L'intégrale correspondante est donc égale à $2i\pi$ fois la somme des résidus correspondant aux pôles contenus dans ce demi-disque (pourvu qu'il n'y ait pas de pôles sur γ_A). Si A est assez grand, cette somme est indépendante de A, et vaut la somme des résidus des pôles contenus dans le demi-plan supérieur $\mathcal{I}m\, z > 0$, soit :

$$(VII,5;12)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\,dx = 2i\pi \sum_{\mathcal{I}m\, a_i > 0} \mathcal{R}és_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q}\,.$$

Il en résulte d'ailleurs a posteriori que la forme particulière du contour dans $\mathbb{C}$, à savoir Γ_A, était sans importance, et que par exemple n'importe quel contour C^∞, de longueur finie, entourant une fois dans le sens direct tous les résidus de $\vec{R}$ dans le demi-plan supérieur, donnerait le même résultat. Mais nous devions partir de $\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{R}(x)\,dx$, et débuter par $\int_{\Gamma_A}$, pour être sûr que $\lim_{A\to\infty} \int_{\Gamma_A} = \int_{\mathbb{R}}$.

On peut aussi utiliser l'autre demi-cercle $\gamma'_A : |z| = A, -\pi < \operatorname{Arg} z < 0$, toujours parcouru de $+A$ vers $-A$, et on trouve cette fois, comme $\Gamma'_A = [-A,+A] \cup \gamma'_A$ est à parcourir dans le sens rétrograde, donc en sens inverse du bord du demi-disque $\Delta'_A : |z| \leq A, \mathcal{I}m\, z \leq 0$, orienté par $\mathbb{C}$:

$$(VII,5;13)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\,dx = -2i\pi \sum_{\mathcal{I}m\, a_i < 0} \mathcal{R}és_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q}\,.$$

Les 3 résultats (VII,5;10,12 et 13) sont bien égaux; en effet la somme des résidus, y compris le résidu à l'infini, est nulle, d'après le corollaire du théorème 19bis, et le résidu à l'infini est nul puisque $\deg Q \geqslant \deg \vec{P} + 2$. Supposons maintenant seulement $\deg Q \geqslant \deg \vec{P} + 1$ mais toujours les a_i non réels. L'intégrale sur γ_A n'est plus négligeable; à l'infini, on a,

$$\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} = \frac{\overrightarrow{c_{\infty,-1}}}{z} + \overrightarrow{g_\infty}(z), \tag{VII,5;14}$$

avec $-\overrightarrow{c_{\infty,-1}} = \mathcal{R}és_\infty \frac{\vec{P}}{Q}$, et $\|\overrightarrow{g(z)}\| \leqslant const. \frac{1}{|z|^2}$ pour $|z|$ infini.

Donc $\int_{\gamma_A}$ tend vers $\vec{c}_{\infty,-1} \int_{\gamma_A} \frac{dz}{z} = i\pi\, \vec{c}_{\infty,-1}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\, dx &= \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{+A} = \lim_{A\to\infty} \left(\int_{[-A,+A]} \frac{\vec{P}}{Q}\, dz \right. \\ &\left. + \int_{\gamma_A} \frac{\vec{P}}{Q}\, dz \right) - i\pi \vec{c}_{\infty,-1} = 2i\pi \sum_{\mathcal{I}m\, a_i > 0} \mathcal{R}és_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} + i\pi\, \mathcal{R}és_\infty \frac{\vec{P}}{Q} \end{aligned} \tag{VII,5;15}$$

L'utilisation de l'autre demi-cercle donnerait

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\, dx = -2i\pi \sum_{\mathcal{I}m\, a_i < 0} \mathcal{R}és_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} - i\pi\, \mathcal{R}és_\infty \frac{\vec{P}}{Q} . \tag{VII,5;16}$$

et ici encore les 3 résultats (VII,5;10,15 et 16), sont égaux, puisque la somme des résidus (y compris $\mathcal{R}és_\infty$) est nulle.

Supposons maintenant qu'il y ait un seul zéro a_i de Q situé sur $\mathbb{R}$. La valeur principale est la limite d'une intégrale sur le complémentaire de l'intervalle symétrique $[a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon]$, lorsque ε tend vers 0 . Ajoutons alors un demi-cercle $\gamma_{i,\varepsilon} : |z - a_i| = \varepsilon, \mathcal{I}m\, z \geqslant 0$, parcouru de $a_i - \varepsilon$ à $a_i + \varepsilon$; compte tenu du développement $\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} = \frac{\overrightarrow{c_{i,-1}}}{z - a_i} + \overrightarrow{g_i(z)}$, $\|\vec{g}_i(z)\|$ borné lorsque z tend vers a_i , l'intégrale sur ce demi-cercle tend vers $-i\pi \vec{c}_{i,-1} = -i\pi\, \mathcal{R}és_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q}$ lorsque ε tend vers 0 . S'il y a plusieurs pôles sur $\mathbb{R}$, on fera de même pour chacun d'eux, de sorte que finalement

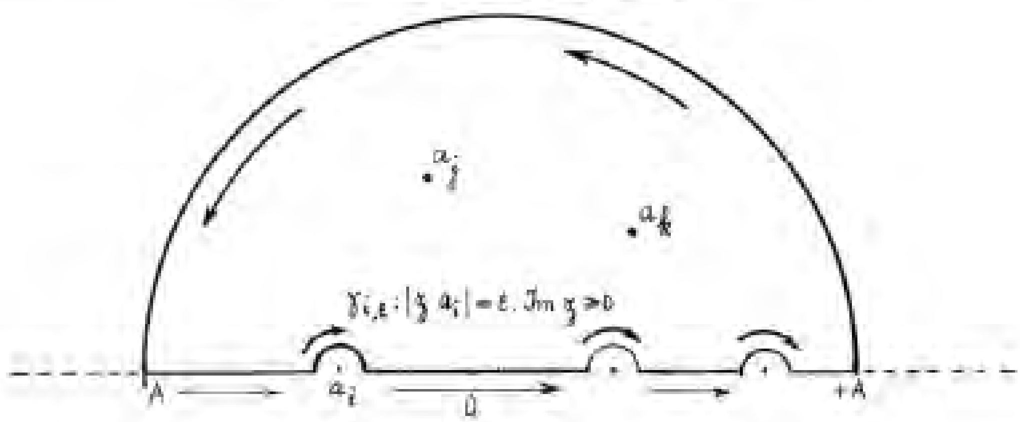
$$(\text{VII},5;17)\quad vp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}}{Q}\,dx=\lim_{\substack{A\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\substack{|x|\le A\\ |x-a_i|\ge\varepsilon,\, a_i\in\mathbb{R}}}\frac{\vec{P}}{Q}\,dx$$

$$=\left(\lim_{\substack{A\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}\,dz\right)+i\pi\,\mathcal{R}\acute{e}s_{\infty}\frac{\vec{P}}{Q}+\sum_{a_i\in\mathbb{R}}i\pi\,\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q}$$

$$=2i\pi\sum_{\operatorname{Im}a_i>0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q}+i\pi\sum_{\operatorname{Im}a_i=0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q}+i\pi\,\mathcal{R}\acute{e}s_{\infty}\frac{\vec{P}}{Q}$$

où $\Gamma_{A,\varepsilon}$ est la courbe, parcourue dans le sens direct, à laquelle on applique le théorème des résidus :

$$\gamma_A : |z| = A,\ \operatorname{Im} z \geq 0 .$$



L'utilisation de demi-cercles inférieurs donnerait

$$(\text{VII},5;18)\quad vp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}}{Q}\,dx=-2i\pi\sum_{\operatorname{Im}a_i<0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q}-i\pi\sum_{\operatorname{Im}a_i=0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q}$$
$$-i\pi\,\mathcal{R}\acute{e}s_{\infty}\frac{\vec{P}}{Q}\ .$$

Les 3 résultats sont encore égaux, puisque la somme des résidus est nulle.

On voit, dans ces formules, que le résidu à l'infini ne joue pas un rôle différent des résidus des pôles situés sur $\mathbb{R}$. On partage en quelque sorte chacun de ces pôles en deux noitiés, affectées aux demi-plans supérleur et inférieur.

Un argument essentiel a été utilisé, dans tous ces raisonnements :

Le mme

Si, sur un secteur **S** d'un cercle de rayon R, une fonction $\vec{f}(z)$ est majorée en norme par const. $\frac{1}{R^\alpha}$, alors $\left\|\int_S \vec{f}(z)\,dz\right\|$ est majoré par const. $\frac{1}{R^{\alpha-1}}$; il tend donc vers 0 pour R infini si $\alpha > 1$ .et tend vers 0 pour R tendant vers 0 si $\alpha < 1$.

Nous retrouverons souvent cette majoration évidente.

Nous pouvons résumer les résultats obtenus en un théorème :

Théorème 32

-soit $\frac{\vec{P}}{Q}$ une fraction rationnelle d'une variable,? à coefficients dans un Banach $\vec{F}$, Q a coefficients complexes, les zéros a_i de Q étant non réels, ou réels d'ordre 1, et $\deg Q \geq \deg \vec{P} + 1$. Alors

$$(\text{VII},5;19)\quad vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}\,dx = 2i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i>0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} + \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{I}m\, a_i=0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} + \frac{1}{2}\mathcal{R}\acute{e}s_\infty \frac{\vec{P}}{Q}\right)$$

$$= -2i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i<0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} + \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{I}m\, a_i=0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} + \frac{1}{2}\mathcal{R}\acute{e}s_\infty \frac{\vec{P}}{Q}\right)$$

$$= i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i>0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} - \sum_{\mathcal{I}m\, a_i<0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q}\right).$$

Application à des produits de convolution

Appliquons les résultats précédents au calcul de certains produits de convolution *. Soit à calculer $\frac{1}{x-a} * \frac{1}{x-b}$ où a et b ne sont pas réels. Ces deux fonctions appartiennent à L^2, donc leur produit de convolution est une fonction continue bornée, donnée pour toutes les valeurs de x par la formule 2 du fascicule "Convolution" **

(VII,5;20) $$\frac{1}{x-a} * \frac{1}{x-b} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-a)(x-t-b)}$$

Nous avons donc exactement l'intégrale d'une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$. Elle a pour pôles $t = a$, $t = x - b$, et les résidus correspondants sont

(VII,5;21) $$\left\{\begin{aligned} \mathcal{R}és_a &= \frac{1}{x-a-b} \\ \mathcal{R}és_{x-b} &= -\frac{1}{x-a-b} \end{aligned}\right.$$

La somme de ces résidus est nulle, comme il se doit, le résidu à l'infini étant nul. On obtient donc les résultats suivants :

<u>Théorème 33</u>

<u>Pour a et b non réels, on a</u> :

* Nous supposons que les fascicules "Distributions, Convolution, Intégrale de Fourier,..." viennent <u>après</u> le présent chapitre VII dans l'ordre de la rédaction du Cours. Donc nous ne parlons de la convolution qu'à titre d'exemple, et on se persuadera aisément que nous n'utiliserons pas cette convolution dans le reste du chapitre.

** Cette propriété de la convolution, d'opérer continuement de $L^2 * L^2$ dans l'espace des fonctions continues bornées, n'a pas été démontrée dans le fascicule.

$$
(\text{VII},5;22)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{x-a} * \frac{1}{x-b} &= \frac{2i\pi}{x-a-b} \quad \underline{\underline{\text{si} \quad \mathcal{I}m\, a > 0,\ \mathcal{I}m\, b > 0,}} \\
&= \frac{-2i\pi}{x-a-b} \quad \underline{\underline{\text{si} \quad \mathcal{I}m\, a < 0,\ \mathcal{I}m\, b < 0,}} \\
&= 0 \quad \underline{\underline{\text{si } \mathcal{I}m\, a \text{ et } \mathcal{I}m\, b \text{ sont de signes contraires}}}
\end{aligned}
\right.
$$

Par dérivation, compte tenu des relations entre dérivation et convolution, on en déduit :

<u>Corollaire 1</u>

<u>On a :</u>

$$
(\text{VII},5;23)\qquad \frac{m!}{(x-a)^{m+1}} * \frac{n!}{(x-b)^{n+1}} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ \text{ou } 0 \end{pmatrix} 2i\pi \, \frac{(m+n)!}{(x-a-b)^{m+n+1}}
$$

<u>($+1$, -1 , **ou 0** suivant les signes de $\mathcal{I}m$ a. $\mathcal{I}m b$)</u>.

Si alors on veut calculer le produit de convolution de 2 fractions rationnelles nulles à l'infini et sans pôles réels, on pourra, soit appliquer directement le théorème 32, soit la décomposer en éléments simples et utiliser (VII,5;22 et *23)* en convolant terme a terme.

Un exemple utile en calcul des-probabilités (loi de Cauchy) est la convolution $\frac{a}{\pi}\,\frac{1}{x^2+a^2} * \frac{b}{\pi}\,\frac{1}{x^2+b^2}$, a et b réels > 0.
, On aura Ici :

$$
\begin{aligned}
(\text{VII},5;24)\qquad \frac{a}{\pi}\,\frac{1}{x^2+a^2} * \frac{b}{\pi}\,\frac{1}{x^2+b^2} &= \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{4}{x-ai} - \frac{1}{x+ai}\right) \\
&* \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{1}{x-bi} - \frac{1}{x+bi}\right) \\
&= \frac{-1}{4\pi^2}\,\frac{2i\pi}{x - a i - e;} + \frac{-1}{4\pi^2}\,\frac{-2i\pi}{x+ai+bi} \\
&= \frac{1}{\pi}\,\frac{a+b}{x^2+(a+b)^2}
\end{aligned}
$$

par application de (VII,5;22), 2 des 4 produits étant nuls. On retrouve bien la formule 22 du fascicule "Convolution"; donc :

Corollaire :

On a, pour a et b réels > 0 :

(VII,5;24) $$\frac{a}{\pi}\,\frac{1}{x^2+a^2} * \frac{b}{\pi}\,\frac{1}{x^2+b^2} = \frac{a+b}{\pi}\,\frac{1}{x^2+(a+b)^2}.$$

Remarque - Si maintenant a est réel, $\frac{1}{x-a}$ n'est plus localement intégrable, et ne définit pas une distribution. Cependant $\operatorname{vp}\frac{1}{x-a}$ définit une distribution par la formule 55 du fascicule "Distributions" :

(VII,5;25) $$< \operatorname{vp}\frac{1}{x-a}, \varphi > = \operatorname{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)\,dx}{x-a}$$

On peut alors se demander si l'on peut donner un sens au produit de convolution $\operatorname{vp}\frac{1}{x-a} * \operatorname{vp}\frac{1}{x-b}$, pour a réel et b non réel, ou pour a et b réels. Ce ne sont plus des fonctions de L^2 (ni même des "fonctions", au sens donné dans la théorie des distributions, c'est-à-dire localement intégrables); d'autre part aucune d'elles n'a un support compact. Donc aucune des méthodes indiquées au fascicule "Convolution" ne permet de définir cette convolution. Il existe cependant de nombreuses méthodes, qui toutes donnent le même résultat.

1) Soit a réel et b non réel. Soit α une fonction de $\mathcal{D}$ égale à 1 au voisinage de a. On peut poser, par définition :

(VII,5;26) $$\left(\operatorname{vp}\frac{1}{x-a}\right) * \frac{1}{x-b} = \left(\alpha(x)\operatorname{vp}\frac{1}{x-a}\right) \underset{(1)}{*} \frac{1}{x-b} + \frac{1-\alpha(x)}{x-a} \underset{(2)}{*} \frac{1}{x-b},$$

le 1er produit, noté $\underset{(1)}{*}$, ayant un sens parce que $\alpha\operatorname{vp}\frac{1}{x-a}$ est à support compact, et le 2ème, noté $\underset{(2)}{*}$, parce que $\frac{1-\alpha}{x-a}$ et $\frac{1}{x-b}$ sont dans L^2. Il reste à montrer que le résultat est indépendant du choix de α. Soit donc β une fonction ayant les mêmes propriétés. Nous devons montrer que la différence des deux expressions correspondantes est nulle; or elle vaut :

(VII,5;27) $$\frac{\alpha-\beta}{x-a} \underset{(1)}{*} \frac{1}{x-b} - \frac{\alpha-\beta}{x-a} \underset{(2)}{*} \frac{1}{x-b};$$

$\alpha-\beta$ est nulle au voisinage de a, donc $\frac{\alpha-\beta}{x-a}$ est dans $\mathcal{D}$.

C'est la différence de 2 produits de convolution identiques; mais le 1er est calculé en considérant $\frac{\psi - \beta}{x-a}$ comme à support compact, le 2ème en considérant les 2 fonctions comme dans L^2. Or le produit de convolution de 2 fonctionsde L^2 est défini par' l'intégrale 2 du fascicule "Convolution"; et le produit de convolution de 2 distributions, lorsque l'une est à support compact et qu'elles sont toutes les deux des fonctions, est aussi défini par la même intégrale, donc la différence précédente est bien nulle.

2) Voici un autre procédé, qui donne en outre la valeur du résultat. La formule (IV,9;121) du chapitre IV donne

$$\text{(VII,5;28)} \quad \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x-a+i\varepsilon} = vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x-a} - i\pi\,\varphi(a)$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}$, donc

$$\text{(VII,5;29)} \quad \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \frac{1}{x-a+i\varepsilon} = vp\,\frac{1}{x-a} - i\pi\,\delta_{(a)} \,,$$

la limite étant prise au sens des distributions. Nous l'écrirons

$$\text{(VII,5;30)} \quad vp\,\frac{1}{x-a} = \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \frac{1}{x-a+i\varepsilon} + i\pi\,\delta_{(a)}\ ^{*}$$

Mais la convolution $\frac{1}{x-a+i\varepsilon} * \frac{1}{x-b}$ existe, puisque les deux termes sont des fonctions de L^2, et elle est donnée par le théorème 33. Nous poserons alors par définition

$$\text{(VII,5;31)} \quad \left(vp\,\frac{1}{x-a}\right) * \frac{1}{x-b} = \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \left(\frac{1}{x-a+i\varepsilon} * \frac{1}{x-b}\right) + i\pi\,\delta_{(a)} * \frac{1}{x-b}\,.$$

* Si a n'est pas réel, $\frac{1}{x-a+i\varepsilon}$ converge au contraire vers $\frac{1}{x-a}$, uniformément sur $\mathbb{R}$ donc dans $\mathcal{D}'$. Elle converge aussi dans L^2 par le théorème de convergence de Lebesgue, car elle est majorée par $\frac{1}{\sqrt{(x-\mathcal{R}e\,a)^2 + \left(\frac{\mathcal{I}m\,a}{2}\right)^2}} \in L^2$ pour $\varepsilon \leq \frac{|\mathcal{I}m\ a|}{2}$.

si $\mathcal{I}m\, b > 0$, cela donne, d'après (VII,5;22)

$$0 + i\pi\, \tau_{(a)} \frac{1}{x-b} = \frac{i\pi}{x-a-b} ,$$

où $\tau_{(a)}$ est la translatée par la translation a , et, si

$$\mathcal{I}m\, b < 0 : \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \frac{-2i\pi}{x-a-b+i\varepsilon} + i\pi\, \tau_{(a)} \frac{1}{x-b}$$

$$= -\frac{2i\pi}{x-a-b} + i\pi \frac{1}{x-a-b} = -\frac{i\pi}{x-a-b} ,$$

qui est une fonction C^∞ ($a + b \notin \mathbb{R}$) .

Reste à voir que le résultat ainsi trouvé est le même que celui qui est donné par la première méthode. Mais , lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers 0 , $\dfrac{\alpha}{x-a+i\varepsilon}$ tend vers $\alpha\, vp \dfrac{1}{x-a} - i\pi\, \delta_{(a)}$ dans $\mathcal{D}'$ en gardant son support dans un compact fixe, donc $\dfrac{\alpha}{x-a+i\varepsilon} * \dfrac{1}{x-b}$ tend vers $\alpha\, vp \dfrac{1}{x-a} \underset{(1)}{*} \dfrac{1}{x-b} - i\pi \dfrac{1}{x-a-b}$ (proposition 5 du fascicule "Convolution").

D'autre part $\dfrac{1-\alpha}{x-a+i\varepsilon}$, tend vers $\dfrac{1-\alpha}{x-a}$ dans L^2 , car elle converge ponctuellement (et même uniformément) et est majorée par une fonction fixe de L^2 ; la convolution étant continue de $L^2 \times L^2$ dans l'espace des fonctions continues bornées, $\dfrac{1-\alpha}{x-a+i\varepsilon} * \dfrac{1}{x-b}$ converge vers $\dfrac{1-\alpha}{x-a} \underset{(2)}{*} \dfrac{1}{x-b}$ uniformément sur $\mathbb{R}$, donc dans $\mathcal{D}'$. On a donc, la limite étant prise dans $\mathcal{D}'$:

$$\text{(VII,5;32)} \quad \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \left(\frac{1}{x-a+i\varepsilon} * \frac{1}{x-b} \right) + \frac{i\pi}{x-a-b} = \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \left(\frac{\alpha}{x-a+i\varepsilon} * \frac{1}{x-b} \right)$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \left(\frac{1-\alpha}{x-a+i\varepsilon} * \frac{1}{x-b} \right) + \frac{i\pi}{x-a-b}$$

$$= \left(\alpha\, vp \frac{1}{x-a} \right) \underset{(1)}{*} \frac{1}{x-b} + \frac{1-\alpha}{x-a} \underset{(2)}{*} \frac{1}{x-b}$$

ce qui montre l'identité des deux résultats.

On peut opérer de même si a et b sont tous les deux réels. Par exemple on aura, par définition :

$$vp\,\frac{1}{x-a} * vp\,\frac{1}{x-b}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0,\,\varepsilon>0}\left(vp\,\frac{1}{x-a} * \frac{1}{x-b+i\varepsilon}\right) + i\pi\, vp\,\frac{1}{x-a-b}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0,\,\varepsilon>0} \frac{-i\pi}{x-a-b+i\varepsilon} + i\pi\, vp\,\frac{1}{x-a-b}$$

$$= -\pi^2\,\delta_{(a+b)}\,.$$

On peut donc compléter le théorème **33** par :

<u>Corollaire 3</u>

<u>Si a est réel et b non réel, on a</u> :

$$\text{(VII,5;34)}\qquad vp\,\frac{1}{x-a} * \frac{1}{x-b} = \frac{i\pi}{x-a-b}\quad \text{si } \mathcal{I}m\, b > 0\,,$$

$$= -\frac{i\pi}{x-a-b}\quad \text{si } \mathcal{I}m\, b < 0\,;$$

<u>si a et b sont tous les deux réels</u> :

$$\text{(VII,5;35)}\qquad vp\,\frac{1}{x-a} * vp\,\frac{1}{x-b} = -\pi^2\,\delta_{(a+b)}$$

<u>En particulier</u>

$$\text{(VII,5;36)}\qquad vp\,\frac{1}{x} * vp\,\frac{1}{x} = -\pi^2\,\delta\,.$$

<u>Remarque</u> - Pour a réel et b non réel, le résultat coïncide avec l'intégrale $vp\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(t-a)\,(x-t-b)}$ donnée par le théorème 32; suivant le calcul fait dans la démonstration du théorème **33**; si a et b sont tous deux réels, il en est de même dans l'ouvert $\complement_{\{a+b\}}$, où les deux quantités sont nulles; mais cela n'était pas évident a priori, et celà ne pouvait 'de toute façon pas donner le terme $-\pi^2\delta_{(a+b)}$.

Introduction de facteurs exponentiels

Dans le théorème 32, le calcul des résidus était un outil commode, mais pouvait etre évité; on remarquera même qu'il en fait plus long que la méthode directe. Mais il n'était nullement nécessaire de supposer qu'on avait affaire à une fraction rationnelle, pour que l'opération réussisse. Et alors <u>on obtient facilement des cas où l'intégrale ne peut se calculer que par la méthode des résidus</u>, ou des astuces analogues, mais non directement, c'est-à-dire des cas <u>où l'on peut calculer l'intégrale définie</u> $\int_{-\infty}^{+\infty}$ <u>alors que la primitive ou intégrale indéfinie</u> $\int_{-\infty}^{x}$ <u>n'est pas connue</u>. Considérons par exemple l'intégrale (de Fourier)

$$\text{(III,5;37)} \qquad \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overrightarrow{P}(x)}{Q(x)}\, e^{i\alpha x}\, dx\,, \qquad \alpha \text{ réel}\,,$$

où $\frac{\overrightarrow{P}}{Q}$ est encore une fraction rationnelle, Q ayant des zéros non réels, ou réels d'ordre 1, et $\deg Q \geqslant \deg \overrightarrow{P} + 1$. La valeur principale a un sens pour tout pôle réel, les conditions indiquées au chapitre IV, théorème 101, étant trivialement réalisées; pour x infini, la valeur principale de Cauchy est nécessaire si $\alpha = 0$, mais non pour $\alpha \neq 0$, l'intégrale étant alors semi-convergente, tant pour $x \to +\infty$ que pour $x \to -\infty$, par le critère d'Abel (corollaire du théorème 98 du chapitre IV) : ($\frac{\overrightarrow{P}}{Q}$ est à variation bornée à l'infini (car sa dérivée, majorée en norme par $\mathrm{const}\,\frac{1}{x^2}$, est intégrable à l'infini (voir)), et elle tend vers $\vec{0}$ à l'infini; et $\left|\int_A^B e^{i\alpha x}\, dx\right| \leqslant \frac{2}{|\alpha|}$; voir exemple (IV,9;106)) . Ici le calcul direct n'est plus possible. Utilisons la méthode des résidus, avec les demi-cercles supérieurs. On reprendra le contour $\Gamma_{A,\varepsilon}$ de la page . L'intégrale sur un demi-cercle $\gamma_{i,\varepsilon}$ tend encore vers $-i\pi\, \mathrm{Rés}_{a_i}\left(\frac{\overrightarrow{P}(\zeta)}{Q(\zeta)} e^{i\alpha\zeta}\right)$, pour la même raison. Quant à l'intégrale sur le grand demi-cercle γ_A : $|\zeta| = A$, $\mathcal{I}m\, \zeta \geqslant 0$, elle converge évidemment vers 0 si $\deg Q \geqslant \deg \overrightarrow{P} + 2$ et $\alpha \geqslant 0$, car alors $\left|\frac{\overrightarrow{P}(\zeta)}{Q(\zeta)} e^{i\alpha\zeta}\right| \leqslant \mathrm{const}\,\frac{1}{A^2}$ (car $|e^{i\alpha\zeta}| = e^{-\alpha \mathcal{I}m\,\zeta} \leqslant 1$ pour $\mathcal{I}m\,\zeta \geqslant 0$)
Si on a seulement $\deg Q = \deg \overrightarrow{P} + 1$, on aura $\frac{\overrightarrow{P}}{Q} = \frac{\overrightarrow{c_{\infty,-1}}}{\zeta} + \vec{g}$

avec $\left\|\vec{g}(z)\right\| \leq \text{const.}\dfrac{1}{|z|^2}$, **et, pour** $\alpha \neq 0$:

$$\text{(VII,5;38)} \quad \lim_{A\to\infty}\int_{\gamma_A}\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}dz = \vec{c}_{\infty,-1}\lim_{A\to\infty}\int_{\gamma_A}\frac{e^{i\alpha z}}{z}dz$$

$$= \vec{c}_{\infty,-1}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{e^{-i\alpha A}+e^{i\alpha A}}{-i\alpha A} + \int_{\gamma_A}\frac{e^{i\alpha z}}{i\alpha z^2}dz\right)^{*} = 0 \ .$$

On aura donc la formule suivante, pour $\alpha > 0$:

$$\text{(VII,5;39)} \quad vp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}dx = \lim_{\substack{A\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}dz$$

$$+ i\pi\sum_{a_i\in\mathbb{R}}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right)$$

$$= 2i\pi\sum_{\mathcal{I}m\, a_i>0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right) + i\pi\sum_{\mathcal{I}m\, a_i=0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right).$$

On voit que, pour $\alpha \neq 0$, <u>le résultat ne fait pas intervenir de résidu a l'infini</u>, contrairement au cas $\alpha = 0$. Remarquons que ∞ est alors un point singulier essentiel pour $\dfrac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}$ et non un pôle (ce qui ne l'empêche pas d'avoir un résidu a l'infini). Mais on remarquera surtout ceci: <u>on ne peut pas, pour $\alpha > 0$, utiliser les demi-cercles inférieurs,</u> donc il n'y a pas a priori de formule du type (VII,5;18),; en effet, sur $\Gamma'_A : |z| = A$, $\mathcal{I}m\, z \leq 0$, $e^{i\alpha z}$ n'est plus borné, mais a croissance exponentielle, car $\left|e^{i\alpha z}\right| = e^{-\alpha\,\mathcal{I}m\, z}$. Par contre, il reste vrai que la somme des résidus de $\dfrac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}$ est nulle, en comptant le résidu a l'infini; donc, de (VII,5;39) on peut déduire une formule du type (VII,5;18) (ce qui revient à appliquer à $\Gamma_{A,\varepsilon}$ le théorème extérieur lgbis des résidus) :

$$\text{(VII,5;40)} \quad vp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}dx = -2i\pi\sum_{\mathcal{I}m\, a_i<0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right)$$

* Nous avons appliqué ici une intégration par parties, et la formule de Stokes, triviale pour les degrés 0 et 1 : $\int_{\Gamma_A} dF = F(-A) - F(+A)$.

$$-i\pi \sum_{\mathcal{I}m\, a_i=0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(\zeta)}{Q(\zeta)} e^{i\alpha\zeta}\right) - 2i\pi\, \mathcal{R}\acute{e}s_{\infty}\left(\frac{\vec{P}(\zeta)}{Q(\zeta)} e^{i\alpha\zeta}\right),$$

d'où, en prenant la moyenne arithmétique, une formule du type (VII,5;10) :

$$(\text{VII},5;41)\quad vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,dx = i\pi \sum_{\mathcal{I}m\, a_i>0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(\zeta)}{Q(\zeta)} e^{i\alpha\zeta}\right)$$

$$-i\pi \sum_{\mathcal{I}m\, a_i<0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(\zeta)}{Q(\zeta)} e^{i\alpha\zeta}\right) - i\pi\, \mathcal{R}\acute{e}s_{\infty}\left(\frac{\vec{P}(\zeta)}{Q(\zeta)} e^{i\alpha\zeta}\right).$$

Tout se passe comme si, à cause du comportement à l'infini de $e^{i\alpha\zeta}$ pour $\alpha > 0$, ∞ devait être compté dans la région $\mathcal{I}m\, \zeta < 0$, alors qu'il est compté dans $\mathcal{I}m\, \zeta = 0$ si $\alpha = 0$. Si maintenant $\alpha < 0$, on devra utiliser les demi-cercles inférieurs, et on trouvera

$$(\text{VII},5;42)\quad vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,dx = i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i>0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i} + \mathcal{R}\acute{e}s_{\infty} - \sum_{\mathcal{I}m\, a_i<0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\right)$$

$$= 2i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i>0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i} + \mathcal{R}\acute{e}s_{\infty} + \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{I}m\, a_i=0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\right)$$

$$= -2i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i<0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i} + \frac{1}{2}\sum_{\mathcal{I}m\, a_i=0} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\right),$$

le résidu à l'infini étant donc compté comme si ∞ était dans le demi-plan $\mathcal{I}m\, \zeta > 0$. Il n'est pas inutile de réunir toutes ces formules :

Théorème 34

Si $\frac{\vec{P}}{Q}$ est une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$, $\vec{P}$ à valeurs dans un Banach $\vec{F}$, Q à valeurs complexes, les zéros a_i de Q étant non réels, ou réels d'ordre 1 et $\deg Q \geq \deg \vec{P} + 1$, on a, pour α réel, les formules suivantes, où $\mathcal{R}\acute{e}s$ est le résidu de $\frac{\vec{P}(\zeta)}{Q(\zeta)} e^{i\alpha\zeta}$:

(VII,5;43)
$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}dx = 2i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i>0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}+\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{I}m\, a_i=0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\right)$$

$$= -2i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i<0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}+\mathcal{R}\acute{e}s_{\infty}+\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{I}m\, a_i=0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\right)$$

$$= i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i>0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}-\sum_{\mathcal{I}m\, a_i<0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}-\mathcal{R}\acute{e}s_{\infty}\right)$$

pour $\alpha > 0$;

$$= 2i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i>0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}+\mathcal{R}\acute{e}s_{\infty}+\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{I}m\, a_i=0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\right)$$

$$= -2i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i<0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}+\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{I}m\, a_i=0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\right)$$

$$= i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i>0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}+\mathcal{R}\acute{e}s_{\infty}-\sum_{\mathcal{I}m\, a_i<0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\right)$$

our $\alpha < 0$;

$$= 2i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i>0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}+\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{I}m\, a_i=0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}+\frac{1}{2}\mathcal{R}\acute{e}s_{\infty}\right)$$

$$= -2i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i<0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}+\frac{1}{2}\sum_{\mathcal{I}m\, a_i=0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}+\frac{1}{2}\mathcal{R}\acute{e}s_{\infty}\right)$$

$$= i\pi\left(\sum_{\mathcal{I}m\, a_i>0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}-\sum_{\mathcal{I}m\, a_i<0}\mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\right)$$

pour $\alpha = 0$.

Corollaire 1

Si $a \in \mathbb{C}$, α réel, on a :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}\,dx}{x-a} = 2i\pi \, \mathcal{R}\acute{e}s_a \left(\frac{e^{i\alpha z}}{z-a} \right) = -2i\pi \, \mathcal{R}\acute{e}s_\infty \left(\frac{e^{i\alpha z}}{z-a} \right) \\[2ex]
= 2i\pi e^{i\alpha a} \quad \underline{\text{pour } \mathcal{I}m\, a > 0,\ \alpha > 0}\ ; \\[2ex]
= 2i\pi \, \mathcal{R}\acute{e}s_\infty = -2i\pi \, \mathcal{R}\acute{e}s_a \\[2ex]
= -2i\pi e^{i\alpha a} \quad \underline{\text{pour } \mathcal{I}m\, a < 0,\ \alpha < 0}\ ; \\[2ex]
= 0 \qquad\qquad \underline{\text{pour } \mathcal{I}m\, a \text{ et } \alpha \text{ de signes contraires}}\ ; \\[2ex]
= i\pi \, \mathcal{R}\acute{e}s_a = -i\pi \, \mathcal{R}\acute{e}s_\infty = i\pi e^{i\alpha a} \\[2ex]
\underline{\text{pour } \alpha > 0,\ \mathcal{I}m\, a = 0,\ \text{ou } \alpha = 0,\ \mathcal{I}m\, a > 0}\ ; \\[2ex]
= -i\pi \, \mathcal{R}\acute{e}s_a = +i\pi \, \mathcal{R}\acute{e}s_\infty = -i\pi e^{i\alpha a} \\[2ex]
\underline{\text{pour } \alpha < 0,\ \mathcal{I}m\, a = 0,\ \text{ou } \alpha = 0,\ \mathcal{I}m\, a < 0}\ ; \\[2ex]
= 0 \ \underline{\text{pour } \alpha = \mathcal{I}m\, a = 0}.
\end{array}
\right.
\tag{III,5;44}
$$

(le symbole vp n'étant nécessaire que pour $\alpha = 0$ ou $\mathcal{I}m\, a = 0$).

Corollaire 2

Pour $a \notin \mathbb{R}$, on a :

(VII,5;45)

$$m!\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}dx}{(x-a)^{m+1}} = 2i\pi(i\alpha)^m e^{i\alpha a}$$

our $\mathcal{I}m\, a > 0$, $\alpha > 0$;

$$= -\,2i\pi\,(i\alpha)^m e^{i\alpha a}$$

pour $\mathcal{I}m\, a < 0$, $\alpha < 0$;

$= 0$ pour $\mathcal{I}m$ a et α de signes contraires

o u our $\alpha = 0$.

Démonstration.- De toute évidence, ces formules s'obtiennent en dérivant sous le signe $\int$, par rapport à a , les formules antérieures. Encore faut-il légitimer cette dérivation. Il n'y a pas ici de singularité à distance finie, puisque nous avons supposé $a \notin \mathbb{R}$. On remarquera alors que, si. l'on avait une intégrale sur un intervalle borné, la dérivation

(VII,5;46)
$$\frac{d}{da}\left(\int_{-A}^{B}\frac{e^{i\alpha x}}{x-a}dx\right) = \int_{-A}^{B}\frac{e^{i\alpha x}}{(x-a)^2}dx$$

serait triviale, en vertu du corollaire du théorème 115 du chapitre IV. On peut alors faire tendre A et B vers l'infini; la parenthèse du premier membre, et le deuxième membre de (VII,5;46) convergent respectivement

vers $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{x-a}dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{(x-a)^2}dx$,

uniformément lorsque a décrit un compact de la région% $\neq 0$, la première à cause du théorème d'Abel, la deuxième plus s4mplement par convergence absolue; alors le théorème 111 du chapitre IV affirme que la deuxième limite est bien la dérivée par rapport à a de la première; et de même pour les dérivations suivantes, la convergence absolue étant alors valable pour toutes. Ce que nous venons de faire là est d'ailleurs simplement l'application du théorème 117 du chapitre IV.

On pourrait aussi utiliser la formule $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-a}\right) = -\frac{1}{(x-a)^2}$
et intégrer (VII,5;44) par parties (d'abord sur un intervalle borné, puis sur $\mathbb{R}$ par passage à la limite, ce qui revient à appliquer le théorème 98 du chapitre IV).

Enfin on pourrait aussi démontrer directement les formules (VII,5;45) comme on a démontré (VII,5;44) en appliquant les formules (VII,5;43). Tous ces résultats sont en relation évidente avec les formules de dérivation d'images de Fourier (fascicule : "Intégrales de Fourier", formule 68).

Remarque - Si maintenant on a à calculer $vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$,
on pourra soit utiliser directement le théorème 34, soit décomposer $\frac{\vec{P}}{Q}$ en éléments simples et utiliser les corollaires 1 et 2.

Corollaire 3

On a, pour $a > 0$, λ réel :

$$\text{(VII,5;47)} \qquad \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{\pm 2i\pi\lambda x} \frac{a\,dx}{a^2+x^2} = e^{-2\pi a|\lambda|} ,$$

(donc, pour β réel :

$$\text{(VII,5;47 bis)} \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\pm i\beta x}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-|\beta|} \ ) .$$

Il suffit en effet d'appliquer (VII,5;43) où α est remplacé par $2\pi\lambda$, et de faire successivement $\lambda > 0$, $\lambda < 0$, $\lambda = 0$. En fait, une fois qu'on a le résultat pour $\lambda > 0$, on remarque qu'il est changé en son complexe conjugué par changement de λ en $-\lambda$, donc invariant puisqu'il est réel, et qu'il est continu en λ au point $\lambda = 0$ par application évidente du théorème de convergence de Lebesgue, de sorte qu'on a le résultat pour tout λ . On pourrait aussi écrire
$\frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2+a^2} = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{1}{x-ia} - \frac{1}{x+ia}\right)$, et appliquer le corollaire 1. Rappelons que (VII,5;47) a été indiqué sans démonstration au chapitre IV, formule (IV,11;50) (*), et qu'il est aussi calculé dans le fascicule "Intégrale de Fourier", formule (110).

* La formule (IV,11;50) est erronée, il faut lire $\pi e^{-|x|}$ et non $\pi e^{-\pi|x|}$

Corollaire 4

On a (théorème 118 du chapitre IV) :

$$(\text{VII},5;48)\qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration

$$(\text{VII},5;49)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{4i}\,vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx - \frac{1}{4i}\,vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \frac{i\pi-(-i\pi)}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque.- En cours de démonstration, on doit utiliser un vp pour la singularité à l'origine, alors que ce n'était pas nécessaire avec l'intégrale donnée.

Applications à la transformation de Fourier

Dans les conditions du théorème 34, on peut définir une distribution $vp\,\frac{\vec{P}}{Q}$, par :

$$(\text{VII},5;50)\qquad \left\langle vp\,\frac{\vec{P}}{Q}, \varphi \right\rangle = vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}\varphi(x)\,dx\ ,\qquad \varphi \in \mathcal{S}$$

Elle est visiblement tempérée, puisqu'elle est, a l'infini, une fonction-tendant vers 0 . Donc elle a une image de Fourier. si $\frac{P}{Q}$ n'a pas de pôles réels, et si $\deg Q \geq \deg \vec{P}+2$, c'est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, et son image de Fourier est la fonction continue bornée

$$(\text{VII},5;51)\qquad \vec{C}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}\, e^{-2i\pi\lambda x}\,dx$$

qui est donc facile à calculer par le théorème 34. C'est ce que nous venons de faire au corollaire 3.

Mals si $\deg Q = \deg \vec{P} + 1$, elle n'est plus intégrable, et si elle a des pôles réels, c'est une distribution $vp\,\frac{\vec{P}}{Q}$ et non plus une fonction; on peut quand même espérer raisonnablement que son image de Fourier est la fonction définie par

$$\vec{C}(\lambda) = vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}\, e^{-2i\pi\lambda x}\,dx$$

Pour tout A , appelons $\vec{S}_A$ la distribution définie par

$$(\text{VII},5;52)\qquad \langle \vec{S}_A, \varphi \rangle = vp\int_{-A}^{+A} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}\varphi(x)\,dx\ ,\quad \varphi \in \mathcal{S}_x\ .$$

Elle est à support compact $\subset [-A,+A]$ donc son image de Fourier est donnée par la formule 61 du fascicule "Intégrale de Fourier" :

$$(\mathrm{VII},5;53)\qquad (\mathcal{F}(\vec{S}_A))(\lambda) = vp \int_{-A}^{+A} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{-2i\pi\lambda x}\,dx\,.$$

Lorsque A tend vers l'infini, $\vec{S}_A$ tend évidemment vers $vp\dfrac{\vec{P}}{Q}$ dans $\mathcal{S}'_x$, car, pour $\varphi \in \mathcal{S}_x$,

$$(\mathrm{VII},5;54)\qquad \lim_{A\to+\infty} vp \int_{-A}^{+A} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} \varphi(x)\,dx = vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} \varphi(x)\,dx\,.$$

Donc $\mathcal{F}(vp\dfrac{\vec{P}}{Q})$ est la limite de $\mathcal{F}\vec{S}_A$ pour A infini ($\mathcal{F}$ étant une opération linéaire continue de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$). Donc :

$$(\mathrm{VII},5;55)\qquad \mathcal{F}(vp\frac{\vec{P}}{Q}) = \lim_{A\to+\infty} \left(vp \int_{-A}^{+A} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{-2i\pi\lambda x}\,dx \right),$$

la limite étant prise dans $\mathcal{S}'_\lambda$. Mais, pour tout λ , la parenthèse converge pour A infini vers $vp \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{-2i\pi\lambda x}\,dx$; pour $\lambda \neq 0$, en vertu du théorème d'Abel appliqué à $+\infty$ et à $-\infty$, et pour $\lambda = 0$ en valeur principale à l'infini (voir pages et). Le critère d'Abel montre que la convergence est uniforme pour $|\lambda| \geq \lambda_0 > 0$, mais elle n'est pas uniforme au voisinage de $\lambda = 0$. Quoiqu'il en soit, il est facile de voir que la différence $vp\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} - vp\int_{-A}^{+A}$, qui donc tend vers 0 pour A infini, pour tout λ , <u>est bornée indépendamment de λ pour $A \geq A_0 > 0$, donc tend vers 0 pour A infini dans $\mathcal{S}'_\lambda$</u> * .

En effet, pour $\lambda \neq 0$ (le cas $\lambda = 0$ étant évident à part, puisqu'il y a convergence, et d'ailleurs sans importance puisque c'est un ensemble de mesure nulle), si on pose $\dfrac{\vec{P}(x)}{Q(x)} = \dfrac{\vec{C}_{m,-1}}{x} + \vec{g}(x)$, $\|\vec{g}(x)\| \leq \text{const.}\dfrac{1}{x^2}$, on a la majoration:

* Si f_n converge presque partout vers 0 pour n infini, et reste bornée, alors $\int f_n \varphi\,dx$ converge vers 0 d'après le théorème de convergence de Lebesgue, pour $\varphi \in \mathcal{S}$, donc f_n converge bien vers 0 dans $\mathcal{S}'$.

$$(\text{VII},5;56)\qquad \left\| vp \int_{-\infty}^{+\infty} - vp \int_{-A}^{+A} \right\| \leq \left\| \vec{C}_{\infty,-1} \right\| \left| \int_{-\infty}^{-A} \frac{e^{-2i\pi\lambda x}}{x}\,dx + \int_{A}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi\lambda x}}{x}\,dx \right| + \int_{|x|\geq A_0} \left\| \vec{g}(x) \right\| dx$$

$$\leq \left\| \vec{C}_{\infty,-1} \right\| 2 \left| \int_{A}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi\lambda x}{x}\,dx \right| + \text{const}\cdot\frac{1}{A_0}$$

$$= \left\| \vec{C}_{\infty,-1} \right\| 2 \left| \int_{2\pi|\lambda|A}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \right| + \text{const}\cdot\frac{1}{A_0}$$

$$\leq \text{const}.$$

ce qui montre bien notre affirmation.

On a donc bien

$$(\text{VII},5;57)\qquad \left(\mathcal{F}\left(vp\,\frac{\vec{P}}{Q}\right)\right)(\lambda) = vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}\, e^{-2i\pi\lambda x}\,dx\,,$$

le second membre étant une fonction de λ , continue pour $\lambda \neq 0$; la formule (VII,5;43) montre bien qu'elle peut être discontinue pour $\lambda = 0$, mais elle est en tout cas bornée pour λ réel.

On peut donc énoncer :

Théorème 35.

L'image de Fourier de la distribution $vp\,\frac{\vec{P}}{Q}$, dans les conditions du théorème 34, est la distribution définie par une fonction bornée, continue dans $\complement\{0\}$, et donnée pour $\lambda \neq 0$ par l'intégrale

$$(\text{VII},5;58)\qquad C(\lambda) = vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}\, e^{-2i\pi\lambda x}\,dx$$

calculée dans ce théorème *

* Puisqu'on s'intéresse à C_λ comme distribution, son calcul pour $\lambda = 0$ est ici sans intéret.

Corollaire

L'image de Fourier de $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$ est la fonction de λ égale à $+i\pi$ pour $\lambda < 0$, et $-i\pi$ pour $\lambda > 0$.

Il suffit en effet d'appliquer le corollaire 1 du théorème 34, pour $a = 0$, $\alpha = -2\pi\lambda$.

On sait que, dans des conditions convenables la transformation de Fourier transforme la convolution en multiplication. La formule (VII,5;36) peut alors se déduire du précédent corollaire, puisque $(\pm i\pi)^2 = -\pi^2$. Mais ce cas ne rentre pas dans ceux qui ont été signalés au fascicule "Intégrale de Fourier", puisque même le produit de convolution $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} * \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$ n'est pas orthodoxe. Disons seulement que cette concordance est une constatation agréable (on est heureux qu'une formule reste valable dans des conditions différentes de celles qui sont officiellement signalées dans un théorème !), qui prouve le bien-fondé de notre définition de $\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} * \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$, ou qui encore fournit une autre définition donnant le même résultat.

Exemple 3.- Intégrales de 0 à $+\infty$ sur la droite.

Certaines intégrales de 0 à $+\infty$ se ramènent trivialement à des intégrales sur $\mathbb{R}$ pour des raisons de parité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^m} \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx .$$

Ce n'est évidemment pas cela que nous entendons ici. Mais soit $\vec{R} = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle, α un nombre complexe, et considérons l'intégrale

$$\text{(VII,5;39)} \qquad I = I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \vec{R}(x)\, x^\alpha\, dx .$$

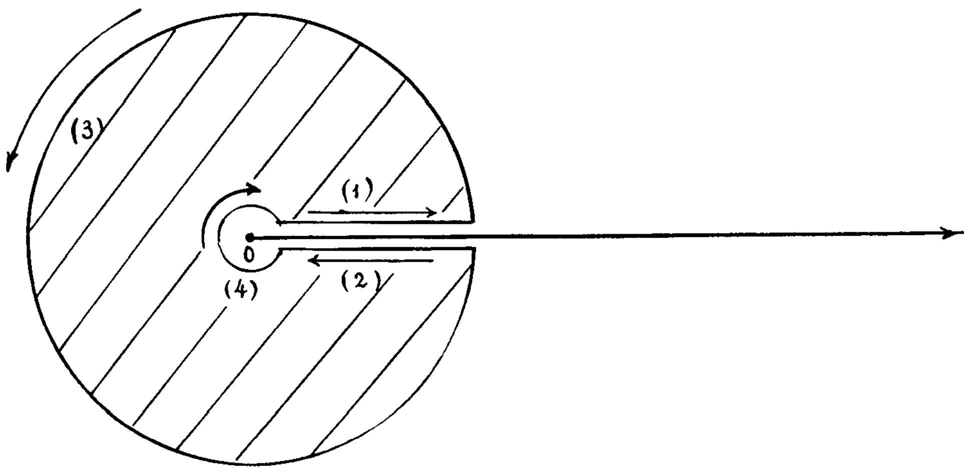
On supposera que $\vec{R}$ n'a pas de pôles réels ≥ 0, et que $\vec{R}(0) \neq \vec{0}$.

On a $\left| x^\alpha \right| = \left| e^{\alpha \log x} \right| = e^{\mathcal{R}e\,\alpha \log x} = x^{\mathcal{R}e\,\alpha}$,

de sorte que I a un sens si on suppose

$\mathcal{R}e\, \alpha > -1$ (intégrabilité à l'origine) et $\mathcal{R}e\,\alpha + \deg \vec{P} - \deg Q$
$< -$ (intégrabilité à l'infini).

Considérons l'intégrale $\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}} \vec{R}(z)\, z^{\alpha}\, dz$ sur le contour suivant $\Gamma_{A,\varepsilon}$:



La partie (1) est le segment $[\varepsilon + i\varepsilon\, ,\ A + i\varepsilon]$

La partie (2) est le segment $[A - i\varepsilon\, ,\ \varepsilon - i\varepsilon]$

La partie (3) est l'arc de cercle $|z| = \sqrt{A^2 + \varepsilon^2}$, $\mathcal{R}e\, z \leq A$

La partie (4) est l'arc de cercle $|z| = \sqrt{2}\,\varepsilon$, $\mathcal{R}e\, z \leq \varepsilon$;
le sens de parcours est indiqué par les flèches (sens direct).

La fonction à intégrer **correspond à la détermination de** la fonction multiforme $z^{\alpha} = e^{\alpha \log z} = |z|^{\alpha}\, e^{i\alpha \operatorname{Arg} z}$ **avec** $0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi$; cette fonction z^{α} est ainsi **holo**morphe dans le plan complexe privé de la demi-droite $\mathbb{R}_+$, et par suite $\vec{R}(z)\, z^{\alpha}$ y est méromorphe.

On a les majorations suivantes. Pour $|z|$ tendant vers 0

$\|\vec{R}(z)\, z^{\alpha}\| \leq$ const. $|z^{\alpha}|$ = const. $|e^{\alpha \log z}|$ = const. $e^{\mathcal{R}e(\alpha \log z)}$ = const. $|z|^{\mathcal{R}e\,\alpha}\, e^{-\mathcal{I}m\,\alpha\, \mathrm{Arg}\, z} \leq$ const. $|z|^{\mathcal{R}e\,\alpha}$ (puisque $0 < \mathrm{Arg}\, z < 2\pi$) ; pour $|z|$ tendant vers l'infini, $\|\vec{R}(z)\, z^{\alpha}\| \leq$ const. $|z|^{\mathcal{R}e\,\alpha + \deg \vec{P} - \deg Q}$. Compte tenu des hypothèses faites sur $\mathcal{R}e\,\alpha$, cela entraîne que les intégrales sur (4) et (3) tendent vers 0 pour $\varepsilon \to 0$ et $A \to +\infty$ (voir lemme page).

L'intégrale sur (1) tend précisément vers l'intégrale I que nous cherchons à calculer. En effet elle peut s'écrire

$$\text{(VII,5;60)} \qquad \int_{\varepsilon}^{A} \vec{R}(x+i\varepsilon)(x+i\varepsilon)^{\alpha} dx = \int_{0}^{+\infty} \vec{R}(x+i\varepsilon)(x+i\varepsilon)^{\alpha} \chi_{\varepsilon,A}(x)\, dx ,$$

où $\chi_{\varepsilon,A}(x) = 1$ pour $\varepsilon \leq x \leq A$ et $\chi_{\varepsilon,A}(x) = 0$ pour $x < \varepsilon$ ou $x > A$.

Or la fonction à intégrer converge en tout point vers $\vec{R}(x)\, x^{\alpha}$. Nous devons montrer qu'elle est majorée par une fonction ≥ 0 fixe intégrable, de sorte que le théorème de convergence de Lebesgue prouvera notre affirmation. Or il existe $\varepsilon_0 > 0$, $A_0 > 0$, tels que, pour $x \geq A_0$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, on ait $\|\vec{R}(x+i\varepsilon)\| \leq$ const. $|x+i\varepsilon|^{\deg \vec{P} - \deg Q} \leq$ const. $x^{\deg \vec{P} - \deg Q}$, et que, pour $x \leq A_0$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\|\vec{R}(x+i\varepsilon)\|$ soit borné; alors, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, on aura $\|\vec{R}(x+i\varepsilon)\| \leq$ const. $(1 + x^{\deg \vec{P} - \deg Q})$. En même temps, pour $x \geq \varepsilon$, on a $x \leq |x+i\varepsilon| = \sqrt{x^2+\varepsilon^2} \leq \sqrt{2}\; x$, donc, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\chi_{\varepsilon,A}(x)\, |(x+i\varepsilon)^{\alpha}| \leq$ const. $x^{\mathcal{R}e\,\alpha}$, et $\chi_{\varepsilon,A}(x)\, \|\vec{R}(x+i\varepsilon)(x+i\varepsilon)^{\alpha}\| \leq$ const. $x^{\mathcal{R}e\,\alpha}(1 + x^{\deg \vec{P} - \deg Q})$, qui est intégrable puisque $\mathcal{R}e\,\alpha > -1$ et $\mathcal{R}e\,\alpha + \deg \vec{P} - \deg Q < -1$; donc l'intégrale sur (1) tend bien vers I.

Considérons maintenant l'intégrale suivant (2). Elle s'écrit

$$\text{(VII,5;61)} \qquad -\int_{\varepsilon}^{A} \vec{R}(x-i\varepsilon)(x-i\varepsilon)^{\alpha} dx = -\int_{0}^{+\infty} \chi_{\varepsilon,A}(x)\, \vec{R}(x-i\varepsilon)(x-i\varepsilon)^{\alpha} dx .$$

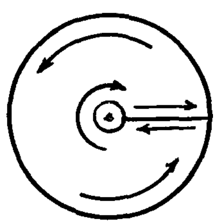
Lorsque ε tend vers 0 et A vers $+\infty$, $\chi_{\varepsilon,A}(x)\vec{R}(x-i\varepsilon)(x-i\varepsilon)^{\alpha}$ converge en tout point vers $\vec{R}(x)\ x^{\alpha}e^{2i\pi\alpha}$, parce que l'argument de $x - i\varepsilon$ tend vers 2π ; elle est majorée par $\text{const.}\,x^{\mathcal{R}e\,\alpha}(1 + x^{\deg P - \deg Q})$, de sorte que le théorème de convergence-de Lebesgue montre que l'intégrale sur (2) tend vers $-e^{2i\pi\alpha}\,I$ * . Finalement, on a :

$$\text{(VII,5;62)}\quad \lim_{A\to+\infty,\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}\vec{R}(z)\,z^{\alpha}dz = (1-e^{2i\pi\alpha})\,I\,.$$

Il en resulte que la connaissance de $\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$ permet de calculer I si α n'est pas entier (pour que $1 - e^{2i\pi\alpha} \neq 0$). Or $\Gamma_{A,\varepsilon}$ est un chemin de classe C^{∞} par morceaux, et il est le pseudo-bord de la région hachurée, variété avec pseudo-bord; nous sommes dans un cas où l'on peut appliquer Stokes (théorème de Stokes général 38 du chapitre VI, exercice 2° page 175). Le théorème 19 des résidus montre alors que $\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$ est égale à $2i\pi$ fois la somme des résidus des pôles de $\vec{R}(z)\,z^{\alpha}$ contenus dans cette région, c'est-à-dire, si A est assez grand et ε assez petit, tous les pôles a_i de $\vec{R}(z)$.

Ces pôles sont les zéros a_i de Q ; en chacun d'eux, pour le calcul du résidu, on devra bien tenir compte de la valeur de z^{α}, à savoir $e^{\alpha\log z}$.

* Fréquemment on "simplifie" cette démonstration en supposant que (1) et (2) sont des chemins d'ordonnée nulle, "l'un sur la face supérieure et l'autre sur la face inférieure de $\mathbb{R}$ ". Le contour $\Gamma_{A,\varepsilon}$ est alors le suivant :



Mais cela suppose l'utilisation d'une fonction "prenant des valeurs différentes sur les 2 faces de $\mathbb{R}$ ", donc des outils topologiques plus compliqués.

On peut conclure par le théorème :

Théorème

Si $\vec{R} = \dfrac{\vec{P}}{Q}$ est une fraction rationnelle d'une variable, à pôles a_i non réels ≥ 0, α un nombre complexe non entier tel que $\mathcal{R}e\,\alpha > -1$ et $\mathcal{R}e\,\alpha + \deg \vec{P} - \deg Q < -1$, alors on a :

$$\text{(VII,5;63)} \qquad \int_0^{+\infty} \vec{R}(x)\, x^{\alpha}\, dx = \frac{2i\pi}{1-e^{2i\pi\alpha}} \sum_{a_i} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i}\left(\vec{R}(z)\, z^{\alpha}\right),$$

où la fonction z^{α} est définie par $z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$, $\log z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$, $0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi$.

Corollaire.

On a la "formule des compléments" pour les fonctions eulériennes:

$$\text{(VII,5;64)} \qquad \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Démonstration.

On montre, dans le fascicule "Fonctions eulériennes", page 6, que

$$\text{(VII,5;65)} \qquad \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x}\, dx \quad \text{pour } 0 < \mathcal{R}e\, z < 1$$

C'est une intégrale du type précédent, avec $\alpha = z-1$, $R(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Le seul pôle est -1, et son résidu est $(-1)^{z-1} = e^{i\pi(z-1)}$, d'où le résultat

$$\frac{2i\pi\, e^{i\pi(z-1)}}{1-e^{2i\pi(z-1)}} = \frac{-2i\pi\, e^{i\pi z}}{1-e^{2i\pi z}} = \frac{-2i\pi}{e^{-i\pi z}-e^{i\pi z}} = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

pour $0 < \mathcal{R}e\, z < 1$. On obtient le résultat pour z quelconque, soit par un argument de périodicité (les 2 membres sont anti-périodiques d'antipériode 1) soit par prolongement analytique (les 2 membres sont méromorphes en z, ils ne peuvent coïncider pour $0 < \mathcal{R}e\, z < 1$ sans coïncider partout).

La démonstration donnée ici est exactement celle qui est donnée au fascicule "Fonctions eulériennes", page 6-8.

Le cas α entier **échappe** au théorème précédent. Dans ce **cas,** $1 - e^{2i\pi\alpha} = 0$, et en **même** temps l'intégrale $\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$ est **nulle** (car alors $\vec{R}(z)\, z^{\alpha}$, est une fraction **rationnelle;** la somme de ses résidus est **nulle,** en comptant le résidu **à** l'infini, mais celui-ci **est nul** en vertu des hypothèses faites **sur** α **),** et on trouve $\vec{I} = \frac{\vec{0}}{0}$. On peut faire le calcul, dans ce cas, par les méthodes **usuelles** puisqu'il s'agit d'une fraction rationnelle. On peut aussi le faire pour α non entier et passer ensuite à la limite. Ceci est **légitime,** car $I(\alpha)$ est manifestement une fonction continue de α , **pour** $\alpha_1 \leq \mathcal{R}e\, \alpha \leq \alpha_2$, α_1 **et** α_2 réels vérifiant les conditions de l'énonce. En effet $\overrightarrow{R(x)}\, x^{\alpha}$ est continue en α pour tout $x \neq 0$, et on a la majoration $\| \overrightarrow{R(x)}\, x^{\alpha} \| \leq \| \overrightarrow{R(x)} \| \, (x^{\alpha_1} + x^{\alpha_2})$, d'où la continuité de I par le théorème de convergence de Lebesgue (théorème 114 du chapitre IV).

On calcule alors $\frac{2i\pi}{1 - e^{2i\pi\alpha}} \sum_{a_i} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i} (\overrightarrow{R(z)}\, z^{\alpha})$. **pour** α non entier, et on **passe à** la **limite pour** α entier, en "levant l'indétermination%" . **C'est** facile par la règle de **L'Hôpital.** Pour α entier,

$$(\text{VII},5;66) \qquad I(\alpha) = \lim_{\substack{\beta \to \alpha \\ \beta \text{ non entier}}} I(\beta) = \lim_{\beta \to \alpha} \frac{2i\pi}{1 - e^{2i\pi\beta}} \sum_{a_i} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i} (\vec{R}(z)\, z^{\beta})$$

$$= \lim_{\beta \to \alpha} \frac{2i\pi}{-2i\pi\, e^{2i\pi\beta}} \sum_{a_i} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i} (\vec{R}(z)\, z^{\beta} \log z)$$

$$= - \sum_{a_i} \mathcal{R}\acute{e}s_{a_i} (\vec{R}(z)\, z^{\alpha} \log z) .$$

Mais il existe une autre méthode. Considérons **l'intégrale** suivante :

$$(\text{VII},5;67) \qquad \int_{\Gamma_{A,\varepsilon}} \overrightarrow{R(z)}\, z^{\alpha} \log^{m+1}(z)\, dz ,$$

où α vérifie **toujours** les mêmes conditions (entier ou non), et où m est un entier ≥ 0 . Les intégrales suivant **(3)** et (4) convergent encore vers 0 **pour** A infini et ε tendant vers 0 . L'intégrale suivant (1) tend vers

$$(\text{VII},5;68) \qquad \int_0^{+\infty} \overrightarrow{R(x)}\, x^{\alpha} \log^{m+1}(x)\, dx ,$$

tandis que l'intégrale suivant (2) tend vers

(VII,5;69) $$\int_0^{+\infty} \overrightarrow{R(x)}\, x^\alpha e^{2i\pi\alpha} (\log x + 2i\pi)^{m+1} dx \; ,$$

de sorte qu'on a

(VII,5;70) $$2i\pi \sum_{a_i} \mathcal{R}és_{a_i} \left(\overrightarrow{R}(z)\, z^\alpha \log^{m+1} z\right) = \lim_{h\to\infty,\, \varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_{h,\varepsilon}} \overrightarrow{R}(z)\, z^\alpha \log^{m+1}(z)\, dz$$
$$= \int_0^{+\infty} \overrightarrow{R(x)}\, x^\alpha \left(\log^{m+1} x - e^{2i\pi\alpha}(\log x + 2i\pi)^{m+1}\right) dx \; .$$

Pour α entier et $m = 0$, on en déduit :

(VII,5;71) $$2i\pi \sum_{a_i} \mathcal{R}és_{a_i} \left(\overrightarrow{R(z)}\, z^\alpha \log z\right) = -2i\pi \int_0^{+\infty} \overrightarrow{R}(x)\, x^\alpha dx \; ,$$

ce qui résout notre problème. Pour $m = 1$:

(VII,5;72) $$2i\pi \sum_{a_i} \mathcal{R}és_{a_i} \left(\overrightarrow{R(z)}\, z^\alpha \log^2 z\right) = -4i\pi \int_0^{+\infty} \overrightarrow{R}(x)\, x^\alpha \log x\, dx$$
$$+ 4\pi^2 \int_0^{+\infty} \overrightarrow{R}(x)\, x^\alpha dx \; .$$

On peut donc compléter le théorème 36 :

Théorème 37

Dans les conditions du théorème 36, mais pour α entier, on a :

(VII,5;73) $$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \overrightarrow{R}(x)\, x^\alpha dx = -\sum_{a_i} \mathcal{R}és_{a_i} \left(\overrightarrow{R}(z)\, z^\alpha \log z\right) \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \overrightarrow{R}(x)\, x^\alpha \log x\, dx = -\frac{1}{2} \mathcal{R}és_{a_i} \left(\overrightarrow{R}(z)\, z^\alpha \log^2 z\right) \\ \displaystyle\quad - i\pi \sum_{a_i} \mathcal{R}és_{a_i} \left(\overrightarrow{R}(z)\, z^\alpha \log z\right) \end{cases}$$

Remarquons encore ceci.

I est dérivable en α sous le signe $\int$ (α entier ou non). En effet une dérivation formelle donne

(VII,5;74) $$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^{+\infty} \overrightarrow{R}(x)\, x^\alpha \log x\, dx$$

Or la nouvelle intégrale est encore convergente d'après les mêmes critères, et avec les majorations analogues, de sorte que le théorème 115 du chapitre IV montre la légitimité de cette dérivation formelle. Plus généralement :

$$\text{(VII,5;75)} \qquad \frac{d^m I}{d\alpha^m} = \int_0^{+\infty} \vec{R}(x)\, x^\alpha \log^m x \, dx \, .$$

Or $\dfrac{d^m I}{d\alpha^m}$ peut se calculer d'après le résultat obtenu au théorème.36 ce qui fournit une méthode de calcul du 2ème membre de (VII,5;75), pour m entier $\geqslant 0$, par :

$$\text{(VII,5;76)} \qquad \int_0^{+\infty} \overrightarrow{R(x)}\, x^\alpha \log^m x \, dx = \frac{d^m}{d\alpha^m} \left(\frac{2i\pi}{1-2^{2i\pi\alpha}} \sum_{a_i} \mathcal{R}és_{a_i} \left(\overrightarrow{R(z)}\, z^\alpha \right) \right),$$

(résultat direct pour α non entier, indirect par levée de l'indétermination $\dfrac{\vec{0}}{0}$ pour α entier).

Par exemple, pour $0 < \mathcal{R}e\, z < 1$:

$$\text{(VII,5;77)} \qquad J(z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1} \log x}{1+x}\, dx$$

$$= \frac{d}{dz} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x}\, dx \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)$$

$$= - \frac{\pi^2 \cos \pi z}{\sin^2 \pi z} \, .$$

<u>Exemple 4.</u> <u>Applications aux fonctions eulériennes</u>

Il existe un grand nombre d'applications du calcul des résidus à toutes les fonctions spéciales. Nous nous bornerons à donner ici une formule intéressante relative aux fonctions eulériennes, qui d'ailleurs est plutôt une application de la 1ère formule intégrale de Cauchy que du théorème des résidus.

La fonction Γ est définie, pour $\mathcal{R}e\, \alpha > 0$, par

$$\text{(VII,5;78)} \qquad \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx \, .$$

Peut-on modifier la ligne d'intégration, la demi-droite réelle $\geqslant 0$, et la remplacer par la demi-droite d'argument θ dans le plan complexe :

$$\text{(VII,5;79)} \qquad \int_0^{e^{i\theta}.\infty} e^{-z} z^{\alpha-1}\, dz \, , \quad z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\log z} \, , \ \operatorname{Arg} z = \theta \, ?$$

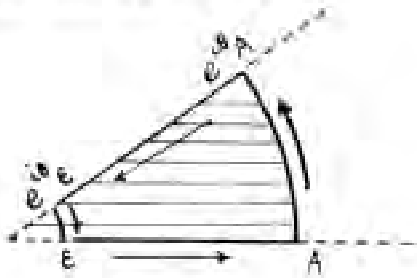
Pour le voir, nous devons montrer que la différence

(VII,5;80) $$\int_0^{+\infty} - \int_0^{e^{i\theta}\cdot\infty}$$

est nulle. Tout d'abord la 2ème intégrale $\int_0^{e^{i\theta}\infty} = \int_0^{+\infty} e^{-re^{i\theta}} (re^{i\theta})^{\alpha-1} e^{i\theta}\,dr$ a un sens si $\left| e^{-\zeta} \zeta^{\alpha-1} \right| = e^{-r\cos\theta}\, r^{\mathcal{R}\alpha-1}\, e^{-\theta\mathcal{I}m\alpha}$ est intégrable à l'infini, c'est-à-dire si $\cos\theta > 0$ (l'intégrabilité à l'origine donne toujours la même condition $\mathcal{R}e\,\alpha > 0$). Prenons par exemple $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Dans ces conditions, la différence (VII,5;80) s'écrit aussi

(VII,5;81) $$\lim_{A \to +\infty,\, \varepsilon \to 0} \left(\int_\varepsilon^A - \int_{e^{i\theta}\varepsilon}^{e^{i\theta}A} \right).$$

Ajoutons un trajet sur le secteur circulaire $|\zeta| = A$, de l'argument 0 à l'argument θ, et un trajet sur le secteur circulaire $|\zeta| = \varepsilon$, de l'argument θ à l'argument 0. Nous ajoutons là des intégrales qui tendent vers 0 lorsque A tend vers l'infini et ε vers 0, car $\left| e^{-\zeta} \zeta^{\alpha-1} \right|$ reste majoré par $\text{const}.\ e^{-A\cos\theta}\, A^{\mathcal{R}\alpha-1}$ sur le grand cercle et par $\text{const}\ \varepsilon^{\mathcal{R}\alpha-1}$ sur le petit. La différence est donc la limite de $\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$ où $\Gamma_{A,\varepsilon}$ est le contour marqué sur la figure :



Or ce contour est le pseudo-bord orienté d'une variété $D_{A,\varepsilon}$ orientée avec pseudo-bord, qui est la région hachurée orientée par $\mathbb{C}$; nous sommes dans un cas d'application du théorème de Stokes (théorème général 38 du chapitre IV, exercice 2° page 175), donc de la 1ère formule intégrale fondamentale de Cauchy.

Or la fonction à intégrer est bien holomorphe dans un ouvert contenant $D_{A,\varepsilon}$, à savoir l'ouvert $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}\zeta < \frac{\pi}{2}$, $\zeta \neq 0$. Donc $\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$ est nulle, ce qui démontre bien l'égalité de (VII,5;78) et de (VII,5;79). On a donc :

$$\Gamma(\alpha) = \int^{e^{i\theta}.\infty} e^{-z} z^{\alpha-1}\, dz \tag{VII,5;82}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-re^{i\theta}} r^{\alpha-1} \; e^{i\theta\alpha}\, dr$$

Faisons maintenant $\theta = \frac{\pi}{2}$, donc $e^{-re^{i\theta}} = e^{-ir}$. L'intégrale écrite est semi-convergente à l'infini en vertu du critère d'Abel pour $\Re\alpha < 1$ (il y a toujours intégrabilité à l'origine pour $\Re\alpha > 0$). En effet la fonction $r^{\alpha-1}$ est alors à variation bornée à l'infini (car sa dérivée $(\alpha-1)r^{\alpha-2}$ est intégrable a l'infini, voir théorème 87 du chapitre IV), et tend vers 0 pour r infini et $\left|\int_A^B e^{-ir}\, dr\right| \leqslant 2$.

En outre, l'intégrale est uniformément convergente à l'infini, pour $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ (cela résulte du théorème d'Abel pour $0 < \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$). On a en effet :

$$\left|\left(e^{-r\cos\theta} r^{\alpha-1}\right)'\right| \leqslant |\alpha-1|\, r^{\Re\alpha-2} + \left|\left(e^{-r\cos\theta}\right)'\right| r^{\Re\alpha-1}, \tag{VII,5;82 bis}$$

d'où, par (IV,9;23):

$$\begin{aligned} &V\left([A,+\infty[\;;\; e^{-r\cos\theta} r^{\alpha-1}\right) \\ &\leqslant \int_A^{+\infty} \left(|\alpha-1|\, r^{\Re\alpha-2} + \left|\left(e^{-r\cos\theta}\right)'\right| r^{\Re\alpha-1}\right) dr \\ &\leqslant \left|\frac{\alpha-1}{\Re\alpha-1}\right| A^{\Re\alpha-1} + A^{\Re\alpha-1} = \text{const}\, A^{\Re\alpha-1}\,; \end{aligned} \tag{VII,5;82 ter}$$

alors, par (IV,9;102)

$$\begin{aligned} &\left|\int_A^{+\infty} \left(e^{-r\cos\theta} r^{\alpha-1}\right)\left(e^{-ir\sin\theta}\right) dr\right| \leqslant \\ &\text{const}\; A^{\Re\alpha-1} \sup_{\substack{B \geqslant A \\ \theta \geqslant \theta_0}} \left|\int_A^B e^{-ir\sin\theta}\, dr\right| \\ &\leqslant \text{const.}\; A^{\Re\alpha-1} \frac{2}{\sin\theta_0}\,. \end{aligned} \tag{VII,5; 82 quarto}$$

Mais, pour $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, la convergence absolue a l'infini est uniforme par la majoration directe $\left|e^{-re^{i\theta}} r^{\alpha-1}\right| \leqslant e^{-r\cos\theta_0} r^{\Re\alpha-1}$.
Donc il y a bien convergence uniforme à l'infini pour $\Re\alpha < 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$). Donc le théorème 116 du chapitre IV montre qu'elle est une fonction continue de θ, et comme elle

est constante pour $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, elle l'est pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. On peut donc encore écrire, pour $0 < \mathcal{R}\alpha < 1$:

(VII,5;83) $$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-ir} r^{\alpha-1} e^{i\alpha\frac{\pi}{2}} dr \qquad \text{ou}$$

(VII,5;84) $$e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-ir} r^{\alpha-1} dr$$

En faisant de même avec $\theta = -\frac{\pi}{2}$, on aura un résultat analogue avec changement de $-i$ en i, c'est-à-dire, en combinant :

(VII,5;85) $$\begin{cases} \Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2} = \int_0^{+\infty} r^{\alpha-1}\cos r\, dr \\ \Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2} = \int_0^{+\infty} r^{\alpha-1}\sin r\, dr \end{cases}$$

On peut aller plus loin en ce qui concerne la 2 ème intégrale. En effet, pour l'une comme pour l'autre, la convergence à l'infini par Abel exige $\mathcal{R}e\,\alpha < 1$, et c'est l'intégrabilité à l'origine qui exige $\mathcal{R}e\,\alpha > 0$; mais, à cause du sinus, la 2ème intégrale a un sens à l'origine même pour $\mathcal{R}e\,\alpha > -1$, donc finalement pour $-1 < \mathcal{R}e\,\alpha < +1$. Elle représente une fonction holomorphe de α dans cette bande (une dérivation formelle en α sous le signe $\int$ donne $\int_0^{+\infty} r^{\alpha-1}\log r \sin r\, dr$, et on appliquera le théorème 115 du chapitre IV pour $\int_0^A$, et le théorème 117 du chapitre IV pour la limite pour A infini), et comme il en est de même pour $\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}$ ($\alpha = 0$ est un pôle de Γ mais un zéro du sinus, donc un point régulier) et que ces deux fonctions coïncident pour $0 < \mathcal{R}e\,\alpha < 1$, elles coïncident dans toute cette bande. Donc :

<u>Théorème 38</u>

<u>On a les formules (VII,5;85), la 1ère pour $0 < \mathcal{R}e\,\alpha < 1$, la 2ème pour $-1 < \mathcal{R}e\,\alpha < +1$.</u>

<u>Corollaire.</u>

(VII,5;86) $$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{+\infty} e^{\pm ix}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}\, e^{\pm\frac{i\pi}{4}};\ \int_0^{+\infty}\cos x\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{+\infty}\sin x\frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \int_0^{+\infty} e^{\pm it^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\pm\frac{i\pi}{4}};\ \int_0^{+\infty}\cos t^2 dt = \int_0^{+\infty}\sin t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Démonstration

En faisant $\alpha = 0$ dans la 2ème formule (VII,5;85) on obtient $\left(\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right)_{\alpha=0}$; mais, pour α tendant vers $0, \Gamma(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$, et $\sin\frac{\alpha\pi}{2} \sim \frac{\alpha\pi}{2}$, d'où la valeur $\frac{\pi}{2}$.

Les formules de la 2ème ligne s'obtiennent en faisant $\alpha = \frac{1}{2}$ dans (VII,5;83 et 85) et en tenant compte de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (formule 15 du fascicule "Fonctions eulériennes"). La 3ème ligne se déduit de la 2ème par le changement de variable $x = t^2$. Ces formules s'appellent formules de Fresnel (utilisées en théorie de la diffraction). Voir chapitre IV, formules (IV,9;110bis et 113).

§ 6 FONCTIONS ELLIPTIQUES

(Photographie du cours de M. Paul LEVY).

§ 7 COMPLÉMENTS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE. THÉORÈMES D'ASCOLI ET DE MONTEL

Espaces semi-métriques

Au chapitre II, nous avons d'abord introduit les espaces métriques, puis les espaces topologiques. Tout espace métrique est topologique, mais sa structure métrique est plus riche que sa seule structure topologique, et permet de considérer d'autres propriétés ou problémes (suites de CAUCHY et espaces complets, ensembles bornés, applications uniformément continues, etc...). Un espace topologique dont la topologie peut être définie par une métrique est métrisable; les différentes métriques définissant sa topologie sont dites "équivalentes", mais ne sont pas "identiques", et par exemple l'espace peut être complet pour certaines d'entre elles et pas pour d'autres.

D'autre part il y a des topologies non métrisables.

On peut étendre considérablement la notion d'espace métrique.

On appelle semi-distance (ou écart) sur un ensemble E une application d de $E \times E$ dans la demi-droite réelle ≥ 0 $\mathbb{R}_+$, ayant les propriétés suivantes :

(VII,7;1)
1) Symétrie : $d(x,y) = d(y,x)$;
2) Semi-positivité : $d(x,y) \geq 0$, et $d(x,x) = 0$;
3) Inégalité triangulaire : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Par contre on peut avoir $d(x,y) = 0$ même pour $x \neq y$.

Il ne serait guère intéressant de considérer un ensemble muni d'une seule semi-distance; il serait topologique non séparé (c'est toutefois le cas de l'espace $\mathcal{L}^p$, Chapitre IV, page 305).

On appelle alors espace semi-métrique un ensemble E muni d'une famille $(d_i)_{i \in I}$ de semi-distances (où l'ensemble d'indices I est de puissance quelconque) vérifiant la condition suivante :

(VII,7;1bis) La famille $(d_i)_{i \in I}$ est "filtrante", autrement dit, pour toute partie finie J de I, il existe $k \in I$ tel que $d_k \geq d_j$ pour tout $j \in J$.

On appelle semi-boule ouverte $B_{i,o}(a,R)$ (resp. fermée $B_i(a,R)$) de centre $a \in E$, de rayon $R > 0$, d'indice $i \in I$, l'ensemble des x de E tels que $d_i(a,x) < R$ (resp. $\leq R$).

Un espace semi-métrique est alors muni d'une topologie, définie comme suit : une partie $\mathcal{O}$ de E est dite ouverte si, toutes les fois qu'elle contient un point, elle contient une semi-boule l'ayant pour centre, autrement dit si :

(VII,7;2) $\forall a \in \mathcal{O}$, $\exists i \in I$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B_i(a,\varepsilon) \subset \mathcal{O}$.

On vérifie que les axiomes (II,2;1) des ouverts sont bien satisfaits.

Le seul qui ne soit pas complètement trivial est l'axiome k) de l'intersection finie : toute intersection finie d'ouverts est un ouvert. Soient en effet $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n$, des ouverts, et $\mathcal{O}$ leur intersection. Soit $a \in \mathcal{O}$. Il existe alors des indices $i_1, i_2, \dots, i_n$, et des nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n > 0$, tels que tels que chaque semi-boule $B_{i_\nu}(a, \varepsilon_\nu)$, soit dans $\mathcal{O}_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, n$. Si alors k est un indice tel que d_k

majore $d_{i_1}, d_{i_2}, \ldots, d_{i_n}$ (axiome de filtration) et si $\varepsilon = \mathrm{Min}\,(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ la semi-boule $B_k(a,\varepsilon)$ est dans $\mathcal{O}$, qui est donc bien ouvert. On peut encore dire qu'un ensemble est ouvert si et seulement s'il est réunion de semi-boules ouvertes. Les semi-boules $B_i(a,\varepsilon)$ de centre a (lorsque ε et i varient) forment un système fondamental de voisinages de a.

Cette topologie est séparée (axiome d) de HAUSDORFF) si et seulement si :

(VII,7;2bis) <u>Quels que soient x et y distinctsde E, il existe un $i \in I$ tel que $d_i(x,y) > 0$</u>.

L'espace semi-métrique est dit séparé si sa topologie est séparée. <u>Même sans le dire explicitement, nous supposerons toujours que la structure semi-métrique est séparée.</u>

Les fonctions semi-distances d_i sont trivialement continues de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$.

Il peut arriver que toutes les semi-distances d_i soient, en fait, des distances; <u>l'espace est quand même appelé semi-métrique et non métrique, dès lors qu'il a plus d'une distance dans la famille.</u>

On dira qu'un espace topologique est semi-métrisable si sa topologie peut être définie par une famille de semi-distances.

<u>Théorème 38. Pour qu'un espace topologique E soit semi-métrisable, il faut et il suffit qu'il ait la propriété suivante :</u>

<u>Quels que soient $a \in E$ et le voisinage ouvert Ω de a, il existe une fonction continue γ sur E à valeurs réelles ≥ 0, qui est > 0 en a et nulle dans $\complement\Omega$.</u>

<u>Démonstration</u>

1) Soit E semi-métrique, $(d_i)_{i\in I}$ sa famille de semi-distances. Puisque Ω est un voisinage de a, il existe un $i \in I$ et $\eta > 0$ tel que la semi-boule $B_i(a,\varepsilon)$ soit dans Ω. Alors la fonction égale à $x \longmapsto 1 - d(x,a)$ dans B, et à 0 en dehors, répond à la question. C'est exactement la construction qui a été faite au lemme 1 du théorème 11 du chapitre IV (partition de l'unité); on supposait à ce moment l'espace métrique

et localement compact ce qui était inutile pour ce seul résultat.

2) Inversement, supposons que E soit un espace topologique ayant cette propriété. A toute fonction continue γ sur E, à valeurs ≥ 0, faisons correspondre la fonction sur $E \times E$: $(x,y) \longrightarrow |\gamma(x) - \gamma(y)|$. C'est manifestement une semi-distance, que nous noterons d_γ.

En faisant varier γ, on obtient une famille de semi-distances, donc une structure semi-métrique. Or cette structure définit une topologie $\mathcal{T}'$; montrons qu'elle n'est autre que la topologie initiale $\mathcal{T}$. En effet, les semi-boules ouvertes $B_{\gamma,\varepsilon}(a,\eta)$ forment un système fondamental de voisinages de a pour $\mathcal{T}'$; mais, chaque γ étant continue pour la topologie $\mathcal{T}$, ces semi-boules sont des ouverts donc des voisinages de a pour la topologie $\mathcal{T}$, donc tout $\mathcal{T}'$-voisinage de a est un $\mathcal{T}$-voisinage. Inversement, si Ω est un voisinage ouvert de a pour la topologie $\mathcal{T}$, il existe une γ qui est > 0 en a et nulle dans $\complement\Omega$, alors la semi-boule $B_\gamma\left(a, \frac{\gamma(a)}{2}\right)$, ensemble des x vérifiant $|\gamma(x) - \gamma(a)| \leq \frac{\gamma(a)}{2}$ donc $\gamma(x) \geq \frac{\gamma(a)}{2} > 0$, est contenue dans Ω, qui est donc un voisinage de a pour $\mathcal{T}'$. Ainsi dans $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, tout point a les mêmes voisinages, donc on a bien $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, c.q.f.d.

Remarque

En fait, ce théorème ne donne pas un critère tellement pratique pour reconnaître qu'un espace est semi-métrisable. Quoi qu'il en soit, s'il est vrai que beaucoup d'espaces utiles en analyse ne sont pas métrisables, presque tous sont semi-métrisables; on démontre que tout espace compact ou localement compact est semi-métrisable *.

Continuité et continuité uniforme

Soient E et F deux espaces semi-métriques, dont les familles de semi-distances sont $(d_i)_{i\in I}$ et $(\delta_j)_{j\in J}$. Une

* Apparemment, pour le voir, il suffirait précisément d'appliquer le lemme 1 du théorème 11 du chapitre IV, qui montre que les conditions du présent théorème 38 sont satisfaites. Mais nous avons admis ce lemme dans le cas général, et ne l'avons démontré que pour le cas métrique ou semi-métrique !

application f de E dans F est alors continue (notion purement topologique) si :

$$\text{(VII,7;3)} \quad \forall a \in E, \forall \varepsilon > 0, \forall j \in J, \exists \eta > 0, \exists i \in I : \left(d_i(x-a) \leq \eta \Rightarrow \delta_j(f(x), f(a)) \leq \varepsilon\right).$$

Mais en outre on pourra dire qu'elle est uniformement continue (ce qu'on ne peut pas faire avec seulement des structures topologiques) si :

$$\text{(VII,7;4)} \quad \forall \varepsilon > 0, \forall j \in J, \exists \eta > 0, \exists i \in I : (d_i(x', x'') \leq \eta \Longrightarrow \delta_i(f(x'), f(x'')) \leq \varepsilon).$$

Théorème 39. <u>Toute application continue d'un compact semi-métrique E dans un semi-métrique F est uniformément continue.</u>

<u>Démonstration</u>

C'est l'extension aux espaces semi-métriques du théorème 31 du chapitre II. Mais la démonstration donnée alors ne s'étend pas, puisqu'elle était basée sur WEIERSTRASS-BOLZANO, ce qui supposait l'espace métrisable; donnons en une nouvelle, qui bien entendu est aussi valable pour le cas particulier métrique.

Supposons donc que ce ne soit pas vrai, et montrons que nous aboutissons à une contradiction.

Il existe donc un $j \in J$ et un $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $i \in I$ et tout $\eta > 0$, il existe un couple $(x', x'') \in E \times E$ vérifiant

$$\text{(VII,7;4bis)} \qquad d_i(x', x'') \leq \eta, \qquad \delta_j(f(x'), f(x'')) \geq \varepsilon.$$

Fixons ainsi j et ε. Pour tout i et tout η, l'ensemble $E_{i,\eta}$ des (x, x'') $\in E \times E$ vérifiant (VII,7;4 bis) est fermé (parce que f, d_i, δ_j sont continues), et non vide, sur le compact $E \times E$.

Comme la famille des semi-distances est filtrante, toute intersection finie des $E_{i,\eta}$ contient encore un tel ensemble, donc est non vide. Donc l'intersection de tous les $E_{i,\eta}$ est non vide.

Si (x', x'') est dans l'intersection, on a, pour tout $i \in I$, $d_i(x', x'') = 0$, donc, E étant séparé, $x' = x''$; et cependant $\delta_j(f(x'), f(x'')) \geq \varepsilon$, ce qui est bien contradictoire.

On dira qu'une application f de E dans F est lipschitzienne si, quel que soit $j \in J$, il existe $i \in I$ et $k \geq 0$ tels que, quels que soient $x', x'' \in E$, on ait

$$(\text{XII},7;4\,\text{ter}) \qquad \delta_j(f(x'), f(x'')) \leq k\, d_i(x', x'') ;$$

Une application lipschitzienne est uniformément continue.

Structure uniforme, structure lipschitzienne

Deux structures semi-métriques sur un même ensemble sont dites "équivalentes" si elles définissent la même topologie, c.à.d. si l'application identique de E, muni de chacune de ces deux structures, dans E muni de l'autre, est continue. On dira qu'elles sont "uniformément équivalentes", ou encore qu'elles définissent la même structure uniforme sur E, si l'application identique de E, muni de chacune de ces deux structures, dans E muni de l'autre, est uniformément continue. Deux structures semi-métriques uniformément équivalentes sont a fortiori équivalentes.

On dit enfin que deux structures semi-métriques sont Lipschitz-équivalentes, ou définissent la même structure lipschitzienne, si l'application identique de E, muni de chacune de ces structures, dans E muni de l'autre, est lipschitzienne. Deux structures Lipschitz-équivalentes sont a fortiori uniformément équivalentes. Par exemple, si on ajoute à la famille des semi-distances de E, toutes les bornes supérieures ou les sommes d'un nombre fini d'entre elles, on obtient une structure Lipschitz-équivalente.

Les applications continues (resp. uniformément continues, resp. lipschitziennes) de E dans F ne changent pas quand on remplace les structures semi-métriques de E et F par des structures équivalentes (resp. uniformément équivalentes, resp. Lipschitz-équivalentes).

Si E est un espace topologique compact; nous avons vu (remarque suivant le théorème 38) qu'il est susceptible de structures semi-métriques; toutes sont uniformément équivalentes d'après le théorème 39, autrement dit un espace topologique compact a une structure uniforme unique.

On peut naturellement se proposer de définir une structure uniforme de manière plus générale sans passer par les structures semi-métriques, comme on l'a déjà fait pour les structures topologiques. On procède comme suit. Une structure uniforme sur un ensemble E sera la donnée d'une famille de parties de $E \times E$, appelées entourages, et vérifiant les propriétés suivantes :

(VII,7;4 quarto)

1) Toute partie de $E \times E$ contenant un entourage est un entourage;

2) Toute intersection finie d'entourages est un entourage;

3) si $\mathcal{U} \subset E \times E$ est un entourage, il en existe un autre $\mathcal{V}$, tel que $(x,y) \in \mathcal{V}$ entraîne $(y,x) \in \mathcal{U}$ (symétrie);

4) si $\mathcal{U} \subset E \times E$ est un entourage, il en existe un autre $\mathcal{V}$ tel que $(x,y) \in \mathcal{V}$, $(y,z) \in \mathcal{V}$, entraîne $(x,z) \in \mathcal{U}$ (inégalité triangulaire)."

5) Pour tout entourage $\mathcal{U}$, et tout $x \in E$, (x,x) est dans $\mathcal{U}$;

6) Axiome de séparation : l'intersection de tous les entourages est la diagonale de $E \times E$, c.à.d. l'ensemble des (x,x), $x \in E$.

Les entourages indiquent des sortes de degré de proximité; si $(x,y) \in \mathcal{U}$, on dira aussi que x et y sont voisins d'ordre $\mathcal{U}$.

Une structure uniforme définit a fortiori une topologie; une partie $\mathcal{O}$ de E est dite ouverte pour cette topologie si, pour tout $a \in \mathcal{O}$, il existe un entourage $\mathcal{U} \subset E \times E$ tel que $(a,x) \in \mathcal{U}$ entraîne $x \in \mathcal{O}$. Un espace topologique est dit uniformisable si sa topologie peut être définie par une structure uniforme.

Si alors E et F sont deux espaces uniformes, une application f de E dans F est dite uniformément continue si, quel que soit l'entourage $\mathcal{V}$ de $F \times F$, il existe un entourage $\mathcal{U}$ de $E \times E$ tel que $(x,y) \in \mathcal{U}$ entraîne $(f(x), f(y)) \in \mathcal{V}$. Elle est alors a fortiori continue.

Si E est un espace semi-métrique, de semi-distances d_i, $i \in I$, un ensemble $\mathcal{U}$ de $E \times E$ sera appelé entourage s'il existe $i \in I$ et $\varepsilon > 0$ tels que $d_i(x,y) \leq \varepsilon$ entraîne $(x,y) \in \mathcal{U}$. Ainsi une structure semi-métrique définit bien une structure uniforme. Mais alors qu'une structure topologique ne peut pas toujours être définie par une famille de semi-distances (voir théorème 38), on démontre que toute structure uniforme, au sens général qui vient d'être indiqué, peut être définie par une famille de semi-distances; il est donc équivalent, pour un espace topologique, d'être uniformisable ou semi-métrisable.

On ne perd donc rien à ne considérer que les structures uniformes définies à partir de structures semi-métriques.

Quant aux structures lipschitziennes, il ne semble pas intéressant de les définir sans passer par des semi-distances.

Si E et F sont des espaces semi-métriques, on peut mettre sur $E \times F$ diverses structures semi-métriques, suivant le procédé indiqué au chapitre II, page 63; elles sont toutes Lipschitz-équivalentes. Les fonctions distances d_i sont alors lipschitziennes $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$.

Suites de Cauchy, espaces séquentiellement complets

Soit E un espace semi-métrique.

Les suites convergentes ne dépendent que de sa topologie. Une suite $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ d'éléments de E converge vers $a \in E$, si, quels que soient $i \in I$ et $\varepsilon > 0$, il existe un entier p tel que $d_i(x_n, a) \leq \varepsilon$ pour $n \geq p$.

Mais on peut en outre définir des suites de Cauchy, ce qui n'est pas possible avec seulement une structure topologique : la suite x_n est de Cauchy si, quel que soit $i \in I$, $d_i(x_m, x_n)$ converge vers 0 pour m et n infinis, ou encore si :

$$(\text{VII},7;5) \qquad \forall i \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N} : (m \geq p, n \geq p \Longrightarrow d_i(x_m, x_n) \leq \varepsilon)$$

Les suites de Cauchy ne changent pas si on remplace la structure par une uniformément équivalente (mais elles peuvent changer si on la remplace par une équivalente). On peut d'ailleurs définir directement les suites de Cauchy avec les entourages de la structure uniforme. La suite x_n est de Cauchy si, pour tout entourage $\mathcal{U}$, il existe $p \geq 0$ tel que, pour $m \geq p$ et $n \geq p$, on ait $(x_m, x_n) \in \mathcal{U}$.

L'espace semi-métrique E est dit séquentiellement complet (ou semi-complet) si toute suite de Cauchy est convergente. Nous disons "séquentiellement complet" et non "complet", parce que, comme on peut s'en douter, quand on sort des espaces métriques, la considération des suites n'est plus suffisante. Il existe une notion d'espace complet, plus forte, dont nous ne parlerons pas ici, et qui coïncide avec celle d'espace séquentiellement complet dans le cas des espaces métriques ou uniformément équivalents à un espace métrique.

Espaces semi-métriques métrisables

Théorème 40

Soit E un espace semi-métrique, défini par un nombre fini ou une infinité dénombrable $d_0, d_1, \ldots d_n, \ldots$ de semi-distances.

Il existe alors une structure métrique sur E, uniformément équivalente à celle-là. En particulier l'espace topologique E est métrisable.

Démonstration

Tout d'abord, remarquons que la famille de semi-distances

$d_0, d_0 + d_1, \ldots, d_0 + d_1 + \ldots d_n, \ldots$ est uniformément équivalente à

la famille donnée. On peut donc supposer, sans rien changer au problème, que la famille de semi-distances est croissante : $d_n \geqslant d_{n-1}$ pour tout n.

Ensuite, si on remplace chaque d_n par $\delta_n = \mathrm{Inf}(d_n, 1)$, c.a.d.

$$(\text{VII},7;6) \qquad \delta_n(x,y) = \mathrm{Min}\,(d_n(x,y), 1),$$

on a encore une famille uniformément équivalente; on peut donc encore supposer qu'on a une suite croissante de distances $\delta_n \leqslant 1$. Posons alors :

$$(\text{VII},7;7) \qquad \delta = \sup_{n \geqslant 0} \left(\frac{\delta_n}{2^n}\right), \quad \text{ou} \quad \delta_n(x,y) = \max_{n \geqslant 0} \left(\frac{\delta_n(x,y)}{2^n}\right).$$

Ce maximum existe bien, car, pour x et $y \in E$, la suite des $\frac{\delta_n(x,y)}{2^n}$ tend vers 0 pour n infini. Il est bien évident

que δ est une semi-distance; c'est même une distance, car, si $x \neq y$, il existe n tel que $\delta_n(x,y) > 0$ à cause de l'hypothèse de séparation, donc $\delta(x,y) > 0$.

Montrons que la structure métrique définie par δ est uniformément équivalente.& la structure donnée.

Soient d'abord $n \in \mathbb{N}$, et &>O . Alors trivialement $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$ implique $\frac{\delta_n}{2^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$ ou $\delta_n \leqslant \varepsilon$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe n tel que $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$;

alors $\delta_n \leqslant \varepsilon$ implique $\frac{\delta_i}{2^i} \leqslant \varepsilon$, pour $i \leqslant n$ parce que $\frac{\delta_i}{2^i} \leqslant \frac{\delta_n}{2^i} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^i} \leqslant \varepsilon$, et pour $i \geqslant n$ parce que $\delta_i \leqslant 1$ et $\frac{1}{2^i} \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$. Donc les deux structures $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et δ sont bien uniformément équivalentes. Elles sont a fortiori équivalentes, donc la structure topologique définie par la première est bien métrisable, c.q.f.d.

Remarque

Par contre, la manière même dont nous avons formé $\delta_n = \operatorname{Inf}(d_n, 1)$ montre que la structure métrique obtenue n'est pas en général Lipschitz-équivalente à la structure initiale.

Parties bornées d'un espace semi-métrique

Un ensemble A d'un espace semi-métrique E est dit borné si, pour tout $i \in I$, il est contenu dans une semi-boule relative à la semi-distance d_i. Cette notion ne dépend que de la structure lipschitzienne; mais un ensemble peut être borné pour une semi-métrique et non borné pour une autre uniformément équivalente. Par exemple, si nous reprenons la démonstration du théorème 39, les structures $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\delta_n = \operatorname{Inf}(d_n, 1)$ n'ont pas les mêmes ensembles bornés, et, pour la 2ème, l'espace entier est borné.

Les fonctions distances étant continues, l'adhérence d'une partie bornée est encore bornée.

Espaces vectoriels semi-normés

Nous avons déjà défini la notion de semi-norme d'un espace vectoriel $\vec{E}$ elle est à la notion de norme ce qu'est celle de semi-distance à celle de distance. C'est une fonction p sur $\vec{E}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ayant les propriétés suivantes :

(XII,7;7 bis)

1°) Semi-positivité : $p(\vec{x}) \geqslant 0$; $p(\vec{0}) = 0$

2°) Transformation par les homothéties : $p(\lambda \vec{x}) = |\lambda| \, p(\vec{x})$, λ scalaire;

3°) Inégalité de convexité : $p(\vec{x} + \vec{y}) \leqslant p(\vec{x}) + p(\vec{y})$.

Un espace vectoriel $\vec{E}$ est dit semi-normé s'il est muni d'une famille de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$ (qu'on notera aussi $\| \ \|_i$, bien que souvent la notation $\| \ \|$ soit réservée pour des normes), ayant la propriété de filtration :

Quel que soit l'ensemble fini $J \subset I$, il existe k tel que $\| \ \|_k$ majore toutes les $\| \ \|_j$, $j \in J$.

On supposera en outre, même sans le dire explicitement, que la structure est séparée :

(VII,7;7quarto) Quel que soit $\vec{x} \neq \vec{0}$, il existe un $i \in I$ tel que $\|\vec{x}\|_i \neq 0$

Si p est une semi-norme, alors $(x,y) \longrightarrow p(x-y)$ est une semi-distance, particulièrement adaptée à la structure vectorielle: invariante par translation, et multipliée, dans une homothétie, par le module du rapport d'homothétie. Un espace vectoriel semi-normé est donc aussi un espace topologique. En outre :

Théorème 41,

Un espace vectoriel semi-norme est un espace vectoriel topologique : les applications $(\vec{x},\vec{y}) \longrightarrow (\vec{x}+\vec{y})$ de $\vec{E} \times \vec{E}$ dans $\vec{E}$ et $(\lambda,\vec{x}) \longrightarrow \lambda\vec{x}$ de $\mathbb{K} \times \vec{E}$ dans $\vec{E}$ sont continues.

Démonstration.

Soient en effet $a \in E$, $b \in E$, $i \in I$, et $\varepsilon > 0$. Alors les inégalités $\|\vec{x}-\vec{a}\|_i \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\|\vec{y}-\vec{b}\|_i \leq \frac{\varepsilon}{2}$, entraînent l'inégalité $\|(\vec{x}+\vec{y})-(\vec{a}+\vec{b})\|_i \leq \varepsilon$, ce qui prouve la continuité (et même la continuité uniforme) de l'addition. Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{K}$. On a l'inégalité

(VII,7;7quinto) $$\|\lambda\vec{x}-\alpha\vec{a}\|_i \leq |\lambda-\alpha| \, \|\vec{x}\|_i + |\alpha| \, \|\vec{x}-\vec{a}\|_i \, ;$$

on aura sûrement $\|\lambda\vec{x}-\alpha\vec{a}\|_i \leq \varepsilon$ si on a $|\lambda-\alpha| \, \|\vec{x}\|_i \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et $|\alpha| \, \|\vec{x}-\vec{a}\|_i \leq \frac{\varepsilon}{2}$; la 2è inégalité est réalisée dès que $\|\vec{x}-\vec{a}\|_i \leq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$; la 1ère est réalisée dès que $|\lambda-\alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2\|x\|_i}$, c.a.d. dès que $\|\vec{x}-\vec{a}\|_i \leq 1$, $|\lambda-\alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2(\|\vec{a}\|_i+1)}$;

donc

(VII,7;sexto) $$|\lambda-\alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2\|\vec{a}\|_i+1}, \quad \|\vec{x}-\vec{a}\|_i \leq \mathrm{Min.}\left(1, \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right),$$

entraîne

$$\|\lambda\vec{x}-\alpha\vec{a}\|_i \leq \varepsilon,$$

ce qui montre la continuité du produit par un scalaire au point (α, a) de $\mathbb{K} \times \vec{E}$ par contre, ce produit n'est pas uniformément continu; voir page 116 du Chapitre II).

Théorème 42

Soient $\vec{E}$ et $\vec{F}$ des espaces vectoriels semi-normés par les familles de semi-normes $(p_i)_{i\in I}$ sur $\vec{E}$ et $(q_j)_{j\in J}$ sur $\vec{F}$.

Pour qu'une application linéaire u de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ soit continue, il faut et il suffit qu'elle le soit à l'origine, et elle est alors uniformément continue et même lipschitzienne. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, pour tout indice j de J, il existe un indice i de I et une constante $k \geq 0$ telles que l'on ait

(XII,7;8) $$q_j(u(\vec{x})) \leq k\, p_i(\vec{x}) \text{, pour tout } \vec{x} \in \vec{E} \text{ ; ou } q_j \circ u \leq p_i$$

Démonstration.

Ce théorème généralise le théorème 47 du chapitre II et se démontre à peu près de la même manière.

Supposons u continue à l'origine. Pour $j \in J$, la semi-boule $B_j = B_j(\vec{0},1)$ est un voisinage de $\vec{0}$ dans $\vec{F}$, donc il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $\vec{0}$ dans $\vec{E}$ tel que $u(\mathcal{U}) \subset B$, puis une indice i et un nombre $k > 0$ tels que la semi-boule $B_i(\vec{0},\frac{1}{k})$ soit dans $\mathcal{U}$, de sorte que $p_i(\vec{x}) \leq \frac{1}{k}$ entraîne $q_j(u(\vec{x})) \leq 1$; Par homothétie, $p_i(\vec{x}) \leq \frac{\lambda}{k}$ entraîne $q_j(u(\vec{x})) \leq \lambda$; en prenant $\lambda = k\, p_i(\vec{x})$, on a $q_j(u(\vec{x})) \leq k\, p_i(\vec{x})$.

Inversement, si cette condition est réalisée, u est trivialement continue sur $\vec{E}$ et même lipschitzienne.

Corollaire

Soient $(p_i)_{i\in I}$ et $(q_j)_{j\in J}$ deux familles de semi-normes sur un espace vectoriel $\vec{E}$. Pour qu'elles définissent la même topologie, il faut et il suffit que, pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ et $k > 0$ tels que

(XII,7;9) $$q_j \leq k\, p_i \text{ ,}$$

et que, pour tout $i' \in I$, il existe $j' \in J$ et $k' \geq 0$ tels que $p_{i'} \leq k' q_{j'}$.

<u>Les deux familles de semi-normes définissent alors la même structure uniforme et la même structure lipschitzienne</u>.

Il suffit en effet d'appliquer le théorème à l'application identique de $\vec{E}$, muni de chacune des deux structures, dans $\vec{E}$ muni de l'autre. Ce corollaire généralise le théorème 12 du chapitre II, qui est aussi, comme nous l'avons indiqué à la remarque suivant le théorème 47 du chapitre II, un corollaire de ce théorème.

Ce corollaire montre en particulier que, pour un espace vectoriel $\vec{E}$ semi-normé, les structures uniforme et lipschitzienne ne dépendent pas des semi-normes, mais seulement de la topologie. On peut d'ailleurs voir que, par exemple, la continuité uniforme d'une application f de $\vec{E}$ dans un espace semi-métrique F, de semi-distances $(\delta_j')_{j\in J}$, s'exprime uniquement à partir de la topologie de $\vec{E}$ et non de ses semi-normes : quels que soient $j \in J$ et $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $\vec{0}$ dans $\vec{E}$ tel que $\vec{x}'' - \vec{x}' \in \mathcal{U}$ entraîne $d_j(f(\vec{x}'), f(\vec{x}'')) \leqslant \varepsilon$,

De même, une suite de points x_n de $\vec{E}$ est de Cauchy, si et seulement si, pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $\vec{E}$, il existe un entier p tel que $m \geqslant p, n \geqslant p$, entraîne $\vec{x}_n - \vec{x}_n \in \mathcal{U}$.

D'ailleurs tout espace vectoriel topologique, défini ou non par des semi-normes, est uniformisable, en définissant une structure uniforme comme suit : une partie $\mathcal{U}$ de $\vec{E} \times \vec{E}$ est un entourage s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\vec{E}$ tel que $\vec{x} - \vec{y} \subset \mathcal{V}$ entraîne $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{U}$; si $\vec{E}$ est semi-normé, cette structure uniforme est celle qui est définie par les semi-normes. D'après ce que nous avons dit à la page 431, celà prouve que tout espace vectoriel topologique est semi-métrisable; mais celà ne prouve pas qu'il soit semi-normable. Toutefois, presque tous les espaces vectoriels tolopogiques de l'analyse sont semi-normables, et leur topologie est même définie par la donnée des semi-normes.

Aussi la notion d'espace semi-normé, à peine plus compliquée que celle d'espace normé, rend-elle des services inappréciables. Elle va nous servir tout de suite à définir certaines topologies que nous n'avions pas pu aborder jusqu'à maintenant, et donner des exemples d'espaces topologiques simples non métrisables, ou d'espaces vectoriels topologiques non normables.

Exemple 1, topologie de la convergence simple

Soit E un ensemble quelconque, F un espace semi-métrique, de semi-distances δ_j, $j \in J$. Nous avons appelé F^E l'ensemble de toutes les applications de E dans F. Alors, sur $F^E \times F^E$, la fonction $\delta_{j,x}$ définie par $\delta_{j,x}(f,g) = \delta_j(f(x), g(x))$, $j \in J$, $x \in E$, est une semi-distance. Lorsque j et x varient, la famille de ces semi-distances n'est pas filtrante, aussi prendrons nous aussi les bornes supérieures

$$(\text{VI},7;11) \qquad \delta_{j,A}(f,g) = \operatorname*{Sup}_{x \in A} \delta_j(f(x), g(x)) ,$$

pour toutes les parties finies A de E. On définit ainsi une structure semi-métrique, donc topologique, sur F^E. On l'appelle structure semi-métrique de la convergence simple. En effet, une suite f_n d'applications de E dans F converge vers une application f, au sens de cette topologie, si et seulement si, pour toute partie finie A de E et tout j de J, $\delta_{j,A}(f_n, f)$ converge vers 0, ou encore si et seulement si, pour tout x de E et tout j de J, $\delta_{j,x}(f_n, f)$ converge vers 0, ce qui revient à dire que, pour tout x de E, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, ou que f_n converge simplement vers f.

On remarquera que les voisinages d'un point, dans cette topologie, sont "énormes", autrement dit que cette topologie est très faible et que la convergence y est facile (convergence simple); en effet si $j \in J$ et si A est une partie finie de E, la semi-boule $B_{j,A}(f,\varepsilon)$ est l'ensemble des applications g de E dans F qui vérifient $\delta_j(g(x), f(x))$ pour $x \in A$ et sont arbitraires pour $x \in \complement A$.

La topologie précédente ne dépend évidemment que de la topologie de F et non de sa semi-métrique; en effet, un système fondamental de voisinages de $f \in F^E$ peut être défini par les ensembles

$$(\text{VI},7;12) \qquad [x_1, x_2, \dots, x_n, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n] = [g \in F^E ;\ g(x_1) \in \mathcal{V}_1 ;\ g(x_2) \in \mathcal{V}_2 , \dots ;\ g(x_n) \in \mathcal{V}_n] ,$$

où les x_i sont des points arbitraires de E et les V_i des voisinages arbitraires des $f(x_i)$ dans F . D'ailleurs F^E est un ensemble produit de E facteurs identiques à F ; nous avons défini la topologie produit au chapitre II, seulement pour un produit fini, mais on peut la définir pour un produit arbitraire et la précédente topologie est alors la topologie produit. Néanmoins il sera souvent commode d'avoir un F semi-métrique, et de considérer alors F^E comme semi-métrique.

soit $a \in E$. L'application $f \to f(a)$ qui, à chaque fonction f sur E à valeurs dans F , fait correspondre sa valeur en a, est lipschitzienne de F^E dans F ; en effet, pour tout $j \in J$, on a précisément $\delta_{j,a}(f,g) = \delta_j(f(a),g(a))$ donc à fortiori $\leq$.

Elle est donc uniformément continue. En considérant F^E comme un produit infini, cela généralise ce que nous avons dit au § 6 du chapitre II : dans un produit topologique, les projections sont continues.

Si en particulier $\vec{F}$ est un espace vectoriel semi-normé, de semi-normes $\| \ \|_j$, $j \in J$, $\vec{F}^E$ devient lui-même un espace vectoriel semi-normé, de semi-normes $||| \ |||_{j,A}$ définies par

$$(\text{VII},7;12^{bis}) \qquad ||| \vec{f} |||_{j,A} = \underset{x \in A}{\text{Max}} \| \vec{f}(x) \|_j \ .$$

Même si F est métrique, ou $\vec{F}$ normé, F^E ou $\vec{F}^E$ n'est que semi-métrique ou semi-normé. Si $F = \mathbb{C}$, l'espace $\mathbb{C}^E$ des fonctions complexes sur l'ensemble E est un espace vectoriel topologique semi-normé, de semi-normes $\| \ \|_A$ définies par

$$(\text{VII},7;13) \qquad \| f \|_A = \underset{x \in A}{\text{Max}} | f(x) | \ .$$

Rappelons que, sur l'espace $\mathcal{C}'(X)$ des mesures de Radon sur l'espace localement compact X nous avons utilisé la topologie vague (chapitre IV, § 7); c'était précisément celle de la convergence simple sur $\mathcal{C}(X)$, définie par les semi-normes

$$(\text{VII},7;13^{bis}) \qquad \| \mu \|_A = \underset{\varphi \in A}{\text{Sup}} | \mu(\varphi) | , \quad A \text{ partie finie de } \mathcal{C}(X) \ .$$

De même, la topologie sur l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions est celle de la convergence simple sur $\mathcal{D}$, la topologie de l'espace$\mathcal{S}'$ des distributions tempérées est celle de la convergence simple sur $\mathcal{S}$.

Si E n'est pas dénombrable, la topologie ainsi définie sur $\mathbb{C}^E$ n'est pas métrisable; par exemple, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{S}'$ ne sont pas métrisables. En effet, on peut voir que toute intersection dénombrable de voisinages de 0 contient un sous-espace vectoriel de dimension infinies (En effet, soit $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ une suite de parties finies de E. L'intersection des semi-boules $B_{A_n}(0, \varepsilon_n) = \{ f \in \mathbb{C}^E ; |f(x)| \leq \varepsilon_n$ pour $x \in A \}$, quelle que soit la suite des $\varepsilon_n > 0$, contient l'ensemble $\mathcal{N}_A$ des fonctions f complexes sur E qui sont nulles sur la réunion A des A_n, et arbitraires ailleurs; A étant dénombrable et E non dénombrable, $\mathcal{N}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^E$ de dimension infinie. Or dans tout espace métrique, tout point a une suite de voisinages dont l'intersection est réduite à ce point, à savoir les boules de rayon $\frac{1}{2^n}$ l'ayant pour centre.

Si maintenant E est dénombrable, $\mathbb{C}^E$ est métrisable en vertu du théorème 40(et de même F^E, si la structure de F est définie par une infinité dénombrable de semi-distances). Mais il n'est néanmoins pas normable, si E n'est pas fini *

En effet, tout voisinage de 0 contient un sous-espace vectoriel de dimension infinie (la semi-boule $B_A(0, \varepsilon)$ contient le sous-espace $\mathcal{N}_A$ des fonctions f qui sont nulles sur A et arbitraires ailleurs. Comme A est fini et E non fini $\mathcal{N}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^E$ de dimension infinie).

Or dans tout espace vectoriel normé, l'origine a un voisinage qui ne contient aucun sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, à savoir la boule unité.

Ainsi un espace vectoriel topologique semi-normé peut être métrisable mais non normable. Cela n'est pas étonnant; une norme est une distance d'une nature très particulière. Partons d'une suite de semi-normes p_n, qu'on peut supposer croissante comme dans la démonstration du théorème 40.

Si l'on suit la démonstration de ce théorème, on est amené à poser $q_n = \operatorname{Inf}(p_n, 1)$, puis $q = \operatorname{Sup}_{n \geq 0} \left(\frac{q_n}{2^n} \right)$, et la distance δ définie sur E est $\delta(x, y) = q(x - y)$. Mais q n'est pas

* Si E a n éléments, $\mathbb{C}^E$ est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, donc normable.

une norme et déjà q_n ne l'est pas, puisque $q_n \leqslant 1$ et que l'on n'a donc pas $q_n(\lambda x) = |\lambda| q_n(x)$ pour λ scalaire. Il résulte de ce que nous venons de voir que les boules relativement à la distance δ tout en constituant un système fondamental de voisinages de 0, contiennent toutes des sous-espaces vectoriels de dimension infinie; elles sont très loin d'être des boules définies par une norme. La métrisabilité de $\mathbb{C}^E$ pour E dénombrable ou, plus généralement, de F^E pour E dénombrable et F semi-métrique à infinité dénombrable de semi-distances, sera très utile pour pouvoir appliquer les théorèmes de topologie générale qui nécessitent l'hypothèse de métrisabilité (par exemple le théorème 16 du chapitre II, ou le théorème de Weierstrass-Bolzano du même chapitre, pour caractériser les parties compactes de F^E). Mais on préfèrera la plupart du temps utiliser, dans $\mathbb{C}^E$, la famille dénombrable de semi-normes, bien liées à la structure vectorielle, plutôt que la distance précédente.

Exemple 2. (Topologie de la convergence uniforme)

Au chapitre II, nous avons défini la convergence uniforme d'une suite de fonctions f_n sur E à valeurs dans F, vers une limite f, seulement pour F métrique. On peut le faire maintenant pour F semi-métrique; f_n converge vers f pour n infini,

si et seulement si, pour tout j, $\delta_j(f_n, f) = \operatorname{Sup}_{x \in E} \delta_j(f_n(x), f(x)) \leqslant +\infty$

converge vers 0. Autrement dit, sur l'espace $(F^E)_b$ des applications bornées de E dans F la structure semi-métrique dite de la convergence uniforme est définie par les semi-distances

$$\delta_j(f, g) = \operatorname{Sup}_{x \in E} \delta_j(f(x), g(x)) < +\infty \quad . \tag{VII,7;14}$$

Si F est métrique, on retrouve bien la distance (II,15;3) introduite au chapitre II.

La convergence uniforme d'une suite d'applications de E dans F ne dépend pas seulement de la topologie de F, mais ne dépend que de sa structure uniforme. Cependant, si on remplace la structure semi-métrique de F par une autre uniformément équivalente, on change les parties bornées de F, donc on change l'espace $(F^E)_b$ lui-même. C'est pourquoi, si on ne s'intéresse qu'aux structures topologique et uniforme, non aux semi-métriques elles-mêmes, on pourra toujours remplacer les semi-distances δ_j de F par les $\operatorname{Inf}(\delta_j, 1)$, uniformément equivalentes, alors F devient borné, $(F^E)_b$ devient F^E, lui aussi borné, et les structures topologique et uniforme de la convergence uniforme sur F^E sont définies par les semi-distances $\operatorname{Inf}(\delta_j(f, g), 1)$, qui ne dépendent que de la structure uniforme de F *. On peut d'ailleurs définir directement la structure uniforme de F^E à partir de celle de F : $\mathcal{V} \subset F^E \times F^E$ sera un entourage s'il existe un entourage $\mathcal{U} \subset F \times F$ tel que "$\forall x \in E, (f(x), g(x)) \in \mathcal{U}$" entraîne $(f, g) \in \mathcal{V}$.

Exemple 3. (Topologie de la convergence compacte)

Soit maintenant E un espace topologique, F un espace semi-métrique de semi-distances δ_j, $j \in J$. Considérons l'espace $(F^E)_c$ des applications continues de E dans F. Pour tout compact K de E et tout $j \in J$, la fonction définie par

(III,7;15)
$$\delta_{j,K}(f, g) = \operatorname{Max}_{x \in K} \delta_j(f(x), g(x)),$$

est finie, car toute fonction continue sur un compact a un maximum, et elle est une semi-distance sur $(F^E)_c$. Lorsque j et K varient, ces semi-distances définissent sur $(F^E)_c$ une structure semi-métrique. Une suite f_n d'applications continues de E dans F converge vers une application f pour la topologie correspondante, si et seulement si, pour tout $j \in J$ et tout compact K de E, $\delta_{j,K}(f_n, f)$ converge vers 0 pour n infini, c.à.d. si et seulement si, pour tout K, f_n converge vers f uniformément sur K. Cette structure est dite structure semi-métrique de la convergence uniforme sur tout compact, ou convergence compacte; la topologie correspondante ne dépend que de la topologie de E et de la structure uniforme de F. Si F est un espace vectoriel topologique semi-normé, $(F^E)_c$ est aussi un espace vectoriel topologique semi-normé, de semi-normes

(III,7;16)
$$\| \vec{f} \|_{j,K} = \operatorname{Max}_{x \in K} \| \vec{f}(x) \|_j$$

Par exemple, l'espace $(\mathbb{C}^E)_c$ des fonctions complexes continues sur E aura les semi-normes

(III,7;16 bis)
$$| f |_K = \operatorname{Max}_{x \in K} | f(x) | .$$

* Bien entendu, on perd ainsi toute possibilité d'étudier les parties bornées; et, si les δ_j sont définies à partir de semi-normes sur F vectoriel, les $\mathcal{M}(\delta_j, 1)$ n'ont plus cette propriété, on perd la relation avec la structure vectorielle.

si E est un espace localement compact dénombrable à l'infini, et F semi-métrique à infinité dénombrable de semi-distances, l'espace topologique $(F^E)_c$ est métrisable; en effet, si A_n est une suite de compacts de réunion E, B_n une suite de voisinages compacts de A_n, tout compact K de E est contenu dans B_n pour n assez grand *, et l'infinité dénombrable des semi-distances δ_{j,B_n} est Lipschitz-équivalente à la famille de toutes les $\delta_{j,K}$, K compacts de E, de sorte qu'il suffit d'appliquer le théorème 40. Si E est localement compact non compact, le raisonnement déjà fait à l'exemple 1 montre que l'espace vectoriel métrisable $(\mathbb{C}^E)_c$ n'est pas normable, car tout voisinage de 0 contient une semi-boule $B_K(0, \varepsilon)$, donc le sous-espace vectoriel de dimension infinie $\mathcal{N}_K$ des fonctions nulles sur K, arbitraires ailleurs**.

Exemple 4 - (Espaces de fonctions dérivables)

Soient maintenant Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ***, $\vec{F}$ un Banach, et considérons l'espace $(F^\Omega)_{c;m}$ des fonctions de classe C^m sur Ω à valeurs dans $\vec{F}$. On note aussi $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$, et $\mathcal{E}^m(\Omega)$ si $\vec{F} = \mathbb{C}$. On peut le munir des semi-normes :

$$\text{(VII,7;17)} \qquad |||\vec{f}\,|||_{m,K} = \operatorname*{Max}_{\substack{x\in K\\ |p|\leq m}} \| D^p \vec{f}(x) \|$$

Une suite de fonctions $\vec{f}_j$ de $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$ converge, pour j infini, vers $\vec{f}$, pour la topologie correspondante, si et seulement si, pour tout indice de dérivation p d'ordre $|p| \leq m$, les $D^p \vec{f}_j$ convergent vers $D^p \vec{f}$, uniformément sur tout compact de Ω. Cette topologie s'appelle donc topologie de la convergence compacte pour les dérivées d'ordre $\leq m$. On peut aussi considérer l'espace $\mathcal{E}(\Omega;\vec{F}) = \mathcal{E}^\infty(\Omega;\vec{F})$ ($\mathcal{E}(\Omega)$ si $\vec{F} = \mathbb{C}$)

* Voir démonstration du théorème 11 du chapitre IV (partition de l'unité), page 441.

** Si E est compact, $(\mathbb{C}^E)_{cb} = \mathcal{C}(E)$ est un Banach.

*** Nous prenons $\mathbb{R}^n$ pour simplifier, on peut prendre un vectoriel de dimension finie quelconque.

des applications C^m de Ω dans $\vec{F}$, et lui mettre la famille de semi-norme $\| \quad \|_{m,K}$ pour tous les m entiers ≥ 0 et tous les compacts K de Ω. Comme Ω est toujours réunion dénombrable de compacts (s'il est borné, on peut prendre la suite des $K_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n ; d(x, \complement\Omega) \geq \frac{1}{\nu}\}$; sinon, la suite des $K_\nu = \{x \in \Omega ; d(x, \complement\Omega) \geq \frac{1}{\nu}, d(x,0) \leq \nu\}$) ces espaces vectoriels semi-normés sont métrisables, mais non normables. Si alors, pour un compact K de Ω, nous appelons $\mathcal{D}_K^m(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}_K(\Omega)$) le sous-espace de $\mathcal{E}^m(\Omega)$ (resp. $\mathcal{E}(\Omega)$) des fonctions à support dans K, on peut le munir de la topologie induite. Elle est définie par la norme $\| \quad \|_{m,K}$ (resp. par la suite de normes $\| \quad \|_{m,K}$, m entier ≥ 0). La norme $\| \quad \|_{m,K}$ sur $\mathcal{D}_K^m(\Omega)$ est aussi induite par la norme $\| \quad \|_m$ du Banach $(\mathbb{C}^\Omega)_{cb;m}$ (corollaire 2 du théorème 111 du chapitre IV); comme $\mathcal{D}_K^m(\Omega)$ est trivialement fermé dans $(\mathbb{C}^\Omega)_{cb;m}$ il est aussi un Banach. Par contre $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est semi-normé métrisable, mais on peut montrer qu'il est non normable (ce n'est pas évident; la démonstration de l'exemple 1 n'est plus valable, car les $\| \quad \|_{m,K}$ sont des normes sur $\mathcal{D}_K(\Omega)$, et une boule ne contient aucun sous-espace vectoriel sauf $\{0\}$; nous le verrons à la remarque suivant le corollaire du théorème . Quoiqu'il en soit, on sait qu'on appelle distribution sur Ω à valeurs dans le Banach $\vec{F}$, une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\vec{F}$, dont les restrictions à chaque $\mathcal{D}_K(\Omega)$ sont continues; puisque $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est métrisable, la continuité exprime simplement (théorème 16 du chapitre II) que, pour toute suite φ_j de fonctions de $\mathcal{D}_K(\Omega)$, convergeant vers 0, c'est-à-dire convergeant uniformément vers 0 sur K, ainsi que chacune de leurs dérivées, les $\vec{T}(\varphi_j)$ convergent vers $\vec{0}$ dans $\vec{F}$.

Exemple 5 - (Espaces de fonctions holomorphes)

Soit enfin Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$, donc de $\mathbb{R}^{2n}$. On définit les espaces $\mathcal{E}^m(\Omega, \vec{F})$, $\mathcal{E}(\Omega ; \vec{F})$ en utilisant seulement la structure réelle, avec $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Mais on appelle $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω à valeurs dans le Banach $\vec{F}$ (sur le corps des complexes). C'est un sous-espace fermé de $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$ pour tout m et de $\mathcal{E}(\Omega;\vec{F})$ d'après le théorème 15 de Weierstrass; et en outre, sur $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$, les topologies induites par les $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$ et $\mathcal{E}(\Omega;\vec{F})$ coïncident. C'est un espace vectoriel semi-normé métrisable, non normable. Ici encore, il n'est pas évident qu'il n'est pas normable. En effet toutes les semi-normes $\| \quad \|_{m,K}$ sont des normes sur $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$ dès que K a un intérieur non vide, si Ω est connexe. Car si une fonction holomorphe $\vec{f}$ est nulle sur K elle est nulle sur Ω connexe d'après le corollaire 5 du théorème 11. Alors les boules correspondantes ne contiennent pas d'autre sous-espace vectoriel que $\{0\}$, et le raisonnement de l'exemple 1 n'est plus valable. Nous le verrons à la remarque suivant le corollaire du théorème

<u>Remarque</u> - On a les inclusions suivantes :

$$(F^E)_c \subset F^E, (F^E)_b \subset F^E, \mathcal{E}(\Omega;\vec{F}) \subset \mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$$

$$\subset (\vec{F}^\Omega)_c \subset \vec{F}^\Omega, \mathcal{H}(\Omega;\vec{F}) \subset \mathcal{E}(\Omega;\vec{F}),$$

et les injections canoniques correspondantes sont continues.

<u>Théorème 43</u>

<u>Si F ou $\vec{F}$ est séquentiellement complet, les espaces F^E (E ensemble), $(F^E)_b$ (E ensemble) $(F^E)_c$ (E espace topologique localement compact), $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$) $\mathcal{E}(\Omega;F)$, $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$ (Ω ouvert de $\mathbb{C}^n$) sont séquentiellement complets,</u>

<u>Démonstration</u>

1) soit f_n une suite de Cauchy de F^E (convergence simple). Alors, pour tout x de E, les $f_n(x)$ forment une suite de Cauchy de F, supposé séquentiellement complet,

donc convergent vers une limite $f(x)$. Alors les f_n convergent simplement vers f, et F^E est bien séquentiellement complet.

2) Soit f_n une suite de Cauchy de $(F^E)_b$ (convergence uniforme). D'après 1), les f_n convergent simplement vers une limite f. Mais en outre, pour $j \in J$ et $\varepsilon > 0$, il existe un entier p tel que $m \geqslant p, n \geqslant p$ entraîne $\delta_j(f_m, f_n) \leqslant \varepsilon$, donc, pour tout x de E, $\delta_j(f_m(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$; en passant à la limite pour m infini, on en déduit $\delta_j(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$, donc $\delta_j(f, f_n) \leqslant \varepsilon$; donc les f_n convergent uniformément vers f, pour n infini. En outre, f_n étant borné, l'inégalité ci-dessus montre que f est aussi bornée, donc $f \in (F^E)_b$, et f_n converge vers f dans $(F^E)_b$, qui est bien séquentiellement complet.

3) Soit f_n une suite de Cauchy dans $(F^E)_c$ (convergence uniforme sur tout compact). Alors 1) montre que les f_n convergent simplement vers une limite f. Ensuite 2), appliqué à un compact K de E au lieu de E lui-même, montre que les f_n convergent uniformément vers f sur K ; le théorème 65 du chapitre II (démontré pour F métrique mais évidemment vrai pour F semi-métrique) montre que la restriction de f à K est continue. Comme tout point de E a un voisinage compact, f est continue sur E, $f \in (F^E)_c$; et alors f_n converge bien vers f dans $(F^E)_c$, qui est bien séquentiellement complet.

4) Soit f_n une suite de Cauchy dans $\mathcal{E}^m(\Omega; \vec{F})$ F Banach. Pour $m = 0$, 3) montre le résultat. Mais, si $m \geqslant 1$, et si $|p| \leqslant m$, les $D^p \vec{f}_n$ forment aussi une suite de Cauchy dans $(\vec{F}^\Omega)_c$, donc convergent, uniformément sur tout compact de Ω, vers une fonction continue $\vec{f}_p$ sur Ω à valeurs dans $\vec{F}$; le corollaire 1 du théorème 111 du chapitre IV montre alors que $\vec{f}$ est de classe C^m, et que $\vec{f}_p = D^p \vec{f}$ pour $|p| \leqslant m$. Donc $\vec{f} \in \mathcal{E}^m(\Omega; \vec{F})$ et les $\vec{f}_n$ convergent vers $\vec{f}$ dans $\mathcal{E}^m(\Omega, \vec{F})$ qui est bien séquentiellement complet. De même pour $\mathcal{E}(\Omega, \vec{F})$

5) On sait que $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$ est un sous-espace fermé, donc séquentiellement fermé de $\mathcal{E}(\Omega;\vec{F})$ séquentiellement complet, donc il est lui-même séquentiellement complet (généralisation évidente du théorème 43 du chapitre II aux espaces semi-métriques).

Remarque - Comme nous l'avons dit page 432, "séquentiellement complet" peut aussi s'appeler "complet" dans le cas d'espaces à infinité dénombrable de semi-distances. C'est le cas pour 1) si E est fini ou dénombrable, pour 2), pour 3) si E est dénombrable à l'infini, dans chacun de ces cas à condition que la structure semi-métrique de F soit définie par une infinité dénombrable de semi-distances; c'est aussi toujours le cas pour 4) et 5), car Ω est réunion dénombrable de compacts, avec la même hypothèse sur $\vec{F}$. En outre, dans tous les cas 1-5, si F est complet (notion que nous n'avons pas définie ici), on montre que les espaces considérés sont aussi complets.

Ensembles bornés dans un espace vectoriel topologique

Nous avons donné page 434 la définition des ensembles bornés dans un espace semi-métrique. Pour un espace vectoriel semi-normé de semi-normes p_i, $i \in I$, elle revient à ceci : B est borné si, pour tout i la semi-norme p_i est bornée sur B. Toutefois, alors qu'en général les ensembles bornés dépendent complètement de la structure lipschitzienne, dans un espace vectoriel semi-normé, ils ne dépendent que de la topologie, à cause du corollaire du théorème 42. Et on peut dire directement que B est borné dans un espace vectoriel topologique $\vec{E}$, si et seulement si, pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de $\vec{0}$ il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $\eta B \subset \mathcal{V}$. Indiquons ce'que sont les ensembles bornés dans les différents exemples précédents :

Exemple 1 - **B** est borné dans $\vec{F}^E$ (E ensemble, $\vec{F}$ espace vectoriel semi-normé), si et seulement si, pour tout $x \in E$, l'ensemble $B(x) = \{\vec{f}(x), \vec{f} \in B\}$ est borné dans $\vec{F}$. (On dit encore que les $\vec{f}$ de B sont bornées dans leur ensemble en tout point de E). En particulier, $B \subset \mathbb{C}^E$ est borné si et seulement si, en tout point x de E , les $|f(x)|$, $f \in B$, sont bornés dans leur ensemble (la borne dépendant évidemment de x).

Exemple 2 - Dans l'espace $(\vec{F}^E)_b$ des fonctions bornées sur l'ensemble E à valeurs dans l'espace vectoriel semi-normé $\vec{F}$, B est borné si et seulement si l'ensemble des $\vec{f}(x)$, $x \in E$, $\vec{f} \in B$ est. borné dans F (On dit encore que les $\vec{f} \in B$ sont bornées dans leur ensemble sur E). En particulier, dans $(\mathbb{C}^E)_b$, B est borné si et seulement si

$$\sup_{x \in E, f \in B} |f(x)| \text{ est fini.}$$

Exemple 3 - Dans l'espace $(\vec{F}^E)_c$ des applications continues de l'espace topologique E dans l'espace vectoriel semi-normé F, B est borné si et seulement si, pour tout compact K de E, l'ensemble des $\vec{f}(x)$, $x \in K$, $\vec{f} \in B$, est borné dans F (On dit encore que les $\vec{f} \in B$ dont bornées dans leur ensemble sur tout compact K de E). En particulier, dans $(\mathbb{C}^E)_c$, B est borné si et seulement si. pour tout compact K de E, $\sup_{x \in K, f \in B} |f(x)|$ est fini; ou encore SI, pour tout compact K, il existe $M_K \geqslant 0$ tel que

$$|f(x)| \leqslant M_K \quad \text{pour} \quad x \in K,\ f \in B. \tag{VII,7;18}$$

Exemple 4 - Dans $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$, $\vec{F}$ Banach, B est borné si et seulement si, pour tout compact K de Ω, $\sup_{x \in K, |p| \leqslant m, f \in B} \|D^p \vec{f}(x)\|$ est fini; ou encore si. pour tout K, il existe $M_K \geqslant 0$ tel que

$$\|D^p \vec{f}(x)\| \leqslant M_K, \quad \text{pour } x \in K,\ |p| \leqslant m,\ \vec{f} \in B \tag{VII,7;19}$$

Dans l'espace $\mathcal{E}(\Omega;\vec{F}) = \mathcal{E}^\infty(\Omega;\vec{F})$, B est borné si et seulement si, pour tout compact K de Ω et tout entier $m \geqslant 0$ $\sup_{x \in K, |p| \leqslant m, \vec{f} \in B} \|D^p \vec{f}(x)\|$ est fini, ou encore, si, pour tout K et tout m, il existe $M_{K,m}$ 30 tel que

$$\|D^p \vec{f}(x)\| \leqslant M_{K,m} \quad \text{pour} \quad x \in K,\ |p| \leqslant m,\ \vec{f} \in B. \tag{VII,7;19 bis}$$

Exemple 5 - $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$ étant un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$ ou de $\mathcal{E}(\Omega;\vec{F})$, on est ramené à l'exemple 4. Ces exemples montrent une différence essentielle entre le cas des espaces vectoriels normés et celui des espaces semi-normés. Dans un normé, les boules sont à la fois des ensembles bornés et des voisinages de $\vec{0}$. Un ensemble est borné s'il est contenu dans une boule, et c'est un voisinage de $\vec{0}$ s'il contient une boule. Mais dans E semi-normé, un ensemble est un voisinage de $\vec{0}$ s'il existe $i \in I$ tel qu'il contienne une semi-boule relative à $\| \; \|_i$, et il est borné si, pour tout $i \in I$, il est contenu dans une semi-boule relative à $\| \; \|_i$. Dans les exemples 1 à 5 précédents, un voisinage de $\vec{0}$ n'est jamais borné (sauf dans les cas dégénérés, dans 1 si E est fini et $\vec{F}$ normé, dans 2 si F est normé, dans 3 si E est compact et $\vec{F}$ normé). On peut démontrer que si, dans un espace vectoriel semi-normé, il existe un voisinage de $\vec{0}$ borné, alors cet espace est normable.

Les ensembles équicontinus d'applications et les théorèmes d'Ascoli

Soit E un espace topologique, F un espace semi-métrique de semi-distances $(\delta_j)_{j\in J}$. Rappelons qu'une application f de E dans F est continue au point a de E, si, quel que soit $j \in J$ et quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de a dans E tel que $\delta_j(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon$ pour tout x de $\mathcal{U}$. Considérons maintenant un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions, toutes continues, et supposons que, pour tout $j \in J$ et tout $\varepsilon > 0$, on puisse déterminer un même voisinage $\mathcal{U}$ de a dans E tel qu'on ait $\delta_j(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon$ pour $x \in \mathcal{U}$ et pour toute $f \in \mathcal{F}$. On dit alors que les $f \in \mathcal{F}$ sont également continues au point a de E, ou que l'ensemble $\mathcal{F}$ est équicontinu en a. On dit que les $f \in \mathcal{F}$ sont également continues ou que $\mathcal{F}$ est équicontinu, si ceci est vrai pour tout point a, de E. Tout ensemble fini de fonctions continues est équicontinu; la réunion de deux parties équicontinues, est équicontinue.

Si E est aussi semi-métrique, de semi-distances $(d_i)_{i\in I}$, on dira que $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinu si, pour tout $j \in J$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $i \in I$ et $\eta > 0$ tels que $d_i(x', x'') \leqslant \eta$ entraine $\delta_j(f(x'), f(x'')) \leqslant \varepsilon$ pour toute $f \in \mathcal{F}$.

Par exemple, si les $f \in \mathcal{F}$ sont toutes lipschitziennes, et si, pour tout $j \in I$, il existe un même $i \in I$ et une même constante $k \geqslant 0$ tels que $\delta_j(f(x'), f(x'')) \leqslant k\, d_i(x', x'')$ pour toute $f \in \mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinu, et on dira même qu'il est équilipschitzien. Ainsi, si $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont des espaces vectoriels normés, l'ensemble des $u \in \mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$ tels que $\|u\| \leqslant M$ (boule de rayon M dans $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$) est équilipschitzien (on a $\|u(\vec{x}) - u(\vec{y})\| \leqslant M\, \|\vec{x} - \vec{y}\|$) donc uniformément équicontinu sur $\vec{E}$. Si $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont semi-normés, $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$ est équicontinu si et seulement s'il est équicontinu a l'origine, et alors $\mathcal{F}$ est équilipschitzien donc uniformément équicontinu; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ et $k \geqslant 0$ tels que $q_j \circ u \leqslant k p_i$ pour toute $u \in \mathcal{F}$ (généralisation du théorème 42).

Soient E et F des espaces affines normés, Ω un ouvert de E, et $\mathcal{F}$ un ensemble d applications dérivables de Ω dans F, telles que les normes $\|f'(x)\|$ des dérivées $f'(x) \in \mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$ soient toutes bornées par un même nombre $M \geqslant 0$, pour $x \in \Omega$ et $f \in \mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F}$ est équicontinu. En effet, la formule des accroissements finis montre que $\|\overrightarrow{f(x'') - f(x')}\| \leqslant M\, \|\overrightarrow{x'' - x'}\|$ pour toute $f \in \mathcal{F}$, pourvu que tout le segment $[x', x'']$ soit dans Ω, donc $a \in \Omega$, et si $\varepsilon > 0$ est donné, il suffira d'appeler $\mathcal{U}$ une boule de centre a, de rayon $\leqslant \frac{\varepsilon}{M}$, tout entière contenue dans Ω, pour avoir $\|\overrightarrow{f(x) - f(a)}\| \leqslant \varepsilon$, pour $x \in \mathcal{U}$ et $f \in \mathcal{F}$. En fait on voit qu'on peut supposer un peu moins. Si, pour tout point a de Ω, il existe un voisinage ouvert ω de a et un nombre $M \geqslant 0$ tels que l on ait $\|f'(x)\| \leqslant M$ pour $x \in \omega$ et $f \in \mathcal{F}$, le résultat subsiste, car il suffira de prendre la boule $\mathcal{U}$ contenue dans ω.

En particulier, en revenant à ce que nous avons dit des ensembles bornés dans l'exemple 4, pour $m=1$, et compte tenu de ce que, dans l'exemple 5, les ensembles bornés sont les mêmes que dans 4, on voit que toute partie bornée de $\mathcal{E}^1(\Omega;\vec{F})$ ou de $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$ est un ensemble équicontinu d'applications de Ω dans $\vec{F}$.

Théorème 44 (1er théorème d'Ascoli)

Soient E un espace topologique et F un espace semi-métrique. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble d'applications de E dans F.

<u>ésuicontinu au point a de E. Alors l'adhérence $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ dans F^E (espace de toutes les applications de E dans F, muni de la topologie de la convergence simple) est encore équicontinue au point a.</u>

<u>Démonstration</u> - Donnons-nous une des semi-distances δ_j sur F, et $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathcal{F}$ est équicontinu en a, il existe un voisinage $\mathcal{U}_{j,\varepsilon} = \mathcal{U}$ de a dans E tel que $x \in \mathcal{U}, g \in \mathcal{F}$ entraîne

$$\delta_j(g(a), g(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{VII,7;20}$$

Soient alors x un point quelconque de $\mathcal{U}$, et f une fonction quelconque appartenant à $\overline{\mathcal{F}}$. Parmi les semi-distances sur F^E figure $\delta_{j,\{a,x\}}$ définie par $\delta_{j,\{a,x\}}(u,v) = \operatorname{Sup}[\delta_j(u(a), v(a)), \delta_j(u(x), v(x))]$. Donc, f étant adhérente à $\mathcal{F}$, il existe $g \in \mathcal{F}$ (g dépend de f, a, x, j, ε) telle que

$$\delta_j(f(a), g(a)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \quad \delta_j(f(x), g(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{VII,7;21}$$

On voit alors que, pour $x \in \mathcal{U}$ et $f \in \overline{\mathcal{F}}$, on aura

$$\delta_j(f(a), f(x)) \leqslant \delta_j(f(a), g(a)) + \delta_j(g(a), g(x)) + \delta_j(g(x), f(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon; \tag{VII,7;22}$$

donc, pour tout $j \in J$ et tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé un voisinage $\mathcal{U}$ de a dans E tel que $x \in \mathcal{U}$, $f \in \overline{\mathcal{F}}$ entraîne $\delta_j(f(a), f(x)) \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve bien l'équicontinuité de $\overline{\mathcal{F}}$ au point a.

<u>Corollaire 1</u> - <u>Dans les conditions du théorème, toutes les fonctions f de $\overline{\mathcal{F}}$ sont continues au point a. Toute limite simple f d'une suite de fonctions f_n de $\mathcal{F}$ est continue au point a.</u>

<u>Remarque</u> : Ce corollaire apporte un complément important au <u>théorème</u> 65 du chapitre II; celui-ci dit qu'une limite <u>localement uniforme</u> d'une suite de fonctions continues f_n est <u>encore continue</u>; nous voyons qu'une **<u>limite simple</u>** d'une suite de fonctions continues f_n peut encore être continue, si les f_n sont non seulement individuellement continues, <u>mais également continues.</u>

En fait, le théorème 65 du chapitre II et le théorème précédent sont très apparentés. En effet :

1) Si "ne suite de fonctions f_n continues au point a converge localement uniformément vers une limite f, nécessairement continue aussi a" point a, les f_n sont également continues au point a.

Soient en effet $j \in J$ et $\varepsilon > 0$. En vertu de la convergence uniforme locale, on peut trouver un voisinage $\mathcal{U}_1$ de a dans E et un entier $p \geq 0$ tel que $n \geq p, x \in \mathcal{U}_1$ entraîne $\delta_j(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Mais ensuite les fonctions $f, f_0, f_1, \ldots, f_{p-1}$, en nombre fini, sont continues a" point a, donc il existe un voisinage $\mathcal{U}_2$ de a tel que $x \in \mathcal{U}_2$ entraîne $\delta_j(f(x), f(a)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, et $\delta_j(f_n(x), f_n(a)) \leq \varepsilon$ pour $n < p$. Alors $x \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ entraine

$$\delta_j(f_n(a), f_n(x)) \leq \varepsilon \quad \text{pour} \quad n < p, \quad \text{et} \tag{VII,7;23}$$

$$\delta_j(f_n(a), f_n(x)) \leq \delta_j(f_n(a), f(a)) + \delta_j(f(a), f(x)) + \delta_j(f(x), f_n(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{pour } n \geq p, \tag{VII,7;24}$$

ce qui prouve bien l'équicontinuité de l'ensemble des f_n au point a.

2) Inversement, nous verrons a" corollaire 1 du théorème suivant que, si E est localement compact, toute suite de fonction, équicontinue sur E tout entier et simplement convergente, est localement uniformément convergente.

Ainsi, si les fonctions f_n sont continues sur E localement compact et convergent simplement vers f, il sera équivalent de supposer qu'elles convergent localement uniformément ou qu'elles sont également continues sur E ; et dans chacun des cas, leur limite f sera continue. Mais, s'il est vrai que le théorème 65 du chapitre II et le précédent théorème sont ainsi théoriquement équivalents, ils donnent, <u>dans la pratique</u>, deux critères très différents pour reconnaître que la limite f est continue.

<u>Corollaire 2</u> - <u>On a des énoncés analogues avec l'équicontinuit.6 sur E tout entier, ou l'équicontinuité uniforme si E est aussi semi-métrique.</u>

<u>Théorème 45 (2ème théorème</u> d'Ascoli)

<u>Soient E un espace topologique et F un espace semi-métrique. Sur un ensemble équicontinu $\mathcal{F}$ d'applications de E</u>

dans F, les structures semi-métriques de la convergence simple sur un sous-ensemble dense E_0 de E, de la convergence simple sur E, et de la convergence uniforme sur toute partie compacte de E, sont uniformément équivalentes; (autrement dit, les structures uniformes correspondantes sont identiques, et en particulier les topologies correspondantes coïncident).

Démonstration. - La structure semi-métrique de la convergence simple sur E_0 est définie par les semi-distances

$$\delta_{j,A_0}(f,g) = \underset{x\in A_0}{\mathrm{Max}}\ \delta_j(f(x),g(x)) \quad , A_0 \text{ partie finie de } E_0 . \tag{VII,7;25}$$

Celle de la convergence simple sur E est définie par les semi-distances :

$$\delta_{j,A}(f,g) = \underset{x\in A}{\mathrm{Max}}\ \delta_j(f(x),g(x)) , \quad A \text{ partie finie de } E . \tag{VII,7;26}$$

Enfin celle de la convergence uniforme sur les parties compactes de E est définie par les semi-distances :

$$\delta_{j,K}(f,g) = \underset{x\in K}{\mathrm{Max}}\ \delta_j(f(x),g(x)) , \quad K \text{ partie compacte de } E . \tag{VII,7;27}$$

La 2éme structure uniforme étant intermédiaire entre la lère et la 3ème, il suffit de montrer que celles-ci sont uniformément équivalentes. Par ailleurs toute semi-distance de la lère est une semi-distance de la 3ème (en prenant $K = A_0$ finie $\subset E_0$); c'est donc une réciproque qu'il faut montrer. Ce n'est évidemment pas exact sur l'ensemble $(F^E)_c$ de toutes les applications continues de E dans F ; mais il s'agit ici des structures induites sur une partie équicontinue $\mathcal{F}$ de $(F^E)_c$. soit donc K un compact de E, $j \in J$ et $\varepsilon > 0$.

Nous allons montrer qu'il existe une partie finie A_0 de E_0 et $\eta > 0$ telle que $\delta_{j,A_0}(f,g) \leq \eta$ entraîne $\delta_{j,K}(f,g) \leq \varepsilon$ pour f et g dans $\mathcal{F}$. Or ceci est très simple. Pour tout point a de K, il existe un voisinage $\mathcal{U}_a$ de a dans E tel que $x \in \mathcal{U}_a$, $h \in \mathcal{F}$ entraîne $\delta_j(h(a),h(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, en vertu de l'équicontinuité de $\mathcal{F}$. Un nombre fini des $\mathcal{U}_a$ recouvre K, soit $\mathcal{U}_{a_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots,n$. Chacun de ces $\mathcal{U}_{a_\nu}$ contient un point b_ν de E_0, puisque E_0 est supposé dense. On a alors, pour f et g dans $\mathcal{F}$, et $x \in \mathcal{U}_{a_\nu}$:

$$(\mathrm{VII},7;28)\qquad \delta_j(f(x),g(x)) \le \delta_j(f(x),f(a_\nu)) + \delta_j(f(a_\nu),f(b_\nu))$$
$$+\ \delta_j(f(b_\nu),g(b_\nu)) + \delta_j(g(b_\nu),g(a_\nu)) + \delta_j(g(a_\nu),g(x)).$$

Si alors on prend $A_0 = \{b_\nu\}_{\nu=1,\dots,n}$, $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$, comme tout $x \in K$ est dans l'un des $\mathcal{U}_{a_\nu}$, $\delta_{j,A_0}(f,g) \le \eta$ entraîne bien $\delta_{j,K}(f,g) \le \varepsilon$.

Corollaire 1 - Si une suite de fonctions également continues f_n sur E à valeurs dans F converge vers une fonction continue f sur E en tout point d'un sous-ensemble dense E_0 de E les f_n convergent vers f en tout point de E, et uniformément sur tout compact de E. En effet, l'ensemble $\mathcal{F}$ des f_n et de f est équicontinu sur E, et il suffit d'appliquer le théorè e.

Notons que. pour appliquer le théorème dans la démonstration de ce corollaire, nous devons considérer l'ensemble des f_n et de f. Mais supposons que nous sachions seulement que, pour tout x de E_0 dense, les $f_n(x)$ convergent vers une limite $f(x)$; f est continue sur E_0 d'après le théorème 44, mais n'est peut-être pas prolongeable en une fonction continue sur E ; alors la conclusion ne subsiste pas, et nous ne pouvons pas affirmer que les $f_n(x)$ convergent encore vers une limite en tout point x de E. Il y a cependant deux cas où la conclusion subsiste. D'abord si $E_0 = E$ puisqu'alors, comme nous venons de le voir, f est sûrement continue sur E_0 et le corollaire 1 s'applique. D'autre part, si F est séquentiellement complet, ou, plus généralement, si, pour tout x de E, l'ensemble $\mathcal{F}(x) = \{f_n(x)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est contenu dans une partie séquentiellement complète de F. En effet, pour m et n infinis, A, finie $\subset E_0$, $\delta_{j,A_0}(f_m,f_n)$ tend vers 0, donc aussi $\delta_{j,A}(f_m,f_n)$ pour toute partie finie A de E, d'après l'identité des structures uniformes induites par F^E et F^{E_0} sur $\mathcal{F}$; donc. pour tout x de E, les $f_n(x)$ forment une suite de Cauchy, donc convergent si l'on fait l'hypothèse précédente, et de nouveau la limite est continue sur E et on peut appliquer le corollaire 1. Donc :

Corollaire 2 - Si les f_n sont également continues et convergent simplement vers f sur E, f est continue et la convergence est uniforme sur tout compact.

Corollaire 3 - Si une suite équicontinue d'applications f_n d'un espace topologique E dans un espace semi-métrique F converge vers une limite en tout point d'un sous-ensemble dense E_0 de E , et si, pour tout x de E , l'ensemble $\mathcal{F}(x) = \{f_n(x) \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ est contenu dans une partie séquentiellement complète de F , alors la suite f_n converge en tout point de E , la limite est continue sur E , et la convergence est uniforme sur tout compact de E .

Compléments topologiques, théorèmes de Baire et de Banach-Steinhaus

Nous avons donné au chapitre IV le théorème de Baire et le théorème de Banach-Steinhaus; nous allons leur apporter ici quelques compléments.

On appelle espace de Baire un espace topologique E où toute intersection dénombrable d'ouverts denses est encore dense En passant aux complémentaires, celà revient à dire que toute réunion dénombrable de fermés sans intérieur est encore sant intérieur. Le lemme du théorème 65 du chapitre IV revient à dire que tout espace métrique complet est un espace de Baire. Il faut noter qu il y a là un mélange d'une propriété purement topologique, le fait d'être un espace de Baire, et d'une propriété liée à une structure métrique. Il est donc plus juste de dire : si un espace topologique E est tel que sa topologie puisse être définie par une métrique pour laquelle il est complet, il est de Baire. Par exemple, si E est un espace semi-métrique, a infinité dénombrable de semi-distances, et complet, il est de Eaire; car, d'après le théorème 40, sa structure est uniformément équivalente à une structure métrique, pour laquelle il est encore complet puisque les suites de Cauchy, ne dépendant que de la structure uniforme, sont les mêmes. Tout espace de Banach est de Baire. Les espaces $(F^E)_c$, pour F semi-métrique à infinité dénombrable de semi-distances et complet, et E réunion dénombrable de compacta; $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$, pour F semi-normé a infinité dénombrable de semi-normes et complet, $\mathcal{E}(\Omega;\vec{F})$ et $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$, dans les mêmes conditions, sont de Baire. On démontre aussi, mais nous ne l'utiliserons pas, que tout espace localement compact, est de Baire. Par contre, le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, pour la topologie induite par $\mathbb{R}$, n'est pas de Baire, puisqu 'il est réunion dénombrable de fermés sans intérieur, réduits chacun a un point; un espace vectoriel normé non complet n'est en général pas de Baire. (Considérons par exemple l'espace $E = C[0,1]$, et muni de la norme induite par $\mathcal{L}^1([0,1], dx)$ *. Il n'est alors pas complet, puisqu'il est dense dans $\mathcal{L}^1$; montrons qu'il n'est pas de Baire. Appelons B la boule unité relative à la norme habituelle de $C[0,1]$ ($\| f \| = \operatorname{Max}_{0 \leqslant x \leqslant 1} | f(x) |$) Soit $\overline{B}$ son adhérence dans (donc pour la topologie $\mathcal{L}^1$). Comme de toute suite convergente dans $\mathcal{L}^1$ on peut extraire une suite partielle &-presque Partout convergente (théorème 38 du chapitre IV), $\overline{B}$ est entièrement composée de fonctions &-presque partout bornées en module par 1, donc partout puisque continues, donc $\overline{B} = B$ B est fermée dans E . Mais elle n'a pas d'intérieur, car si elle contenait la coule (pour la norme $\mathcal{L}^1$) de centre $g \in C[0,1]$ et de rayon R, l'inégalité $\int_0^1 |f-g|\,dx \leqslant R$ devrait entraîner $\operatorname{Max}_{0 \leqslant x \leqslant 1} | f(x) | \leqslant 1$, ce qui est absurde. De même, pour tout entier n, nB est fermé dans E sans intérieur. Cependant, du fait que B est la boule unité de $C[0,1]$ pour sa norme habituelle, la réunion des nB est l'espace $C[0,1]$ tout entier, donc E n'est pas de Baire (pour la norme $\mathcal{L}^1$)).

Soit E un espace de Baire. Une partie $A \subset E$ est dit maigre si elle est contenue dans une réunion dénombrable de parties fermées sans intérieur. Une réunion dénombrable de parties maigres est encore maigre. Le lait que l'espace soit de Baire exprime que toute partie maigre est sans intérieur. Au contraire, dans un espace qui n'est pas de Baire, une partie maigre peut être l'espace entier, et la notion est sans intérêt. On pourra dire qu'une propriété P relative a des points de E est B - presque partout vérifiée (B est l'initiale de Baire) si l'ensemble des points de E où elle n'est pas vérifiée est maigre. Les ensembles maigres sont une catégorie d'ensembles "négligeables", analogue a celle des ensembles de mesure nulle relativement à une mesure $\geqslant 0$. Mais c'est une notion purement topologique, sans rapport avec une théorie de la mesure. (D'ailleurs E sera le Plus souvent un espace de Banach, non localement compact, donc ne pouvant pas porter de mesures de Radon). Le B - presque par-

* $\mathcal{L}^1$ est seulement semi-normé, et non séparé; mais sa semi-norme induit sur C une norme, car Une fonction continue h-presque partout nulle est partout nulle.

tout et le μ - presque partout, pour une mesure μ, sont sans relation directe. Considérons par exemple la droite réelle $\mathbb{R}$. Soit $a_0, a_1, \ldots, a, \ldots$ un ensemble dénombrable dense de $\mathbb{R}$. Rappelons $\mathcal{O}_{n,\varepsilon}$ l'intervalle ouvert de centre a_n et de longueur $\frac{\varepsilon}{2^n}$, et $\mathcal{O}_\varepsilon$ la réunion des $\mathcal{O}_{n,\varepsilon}$, pour ε donné et $n = 0,1,\ldots$. Alors $\mathcal{O}_\varepsilon$ est un ouvert dense, et de mesure $\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon$ ($\leq$ et non== , parce que les intervalles $\mathcal{O}_{n,\varepsilon}$ ne sont pas disjoints). Alors l'ensemble A, intersection 'des $\mathcal{O}_\varepsilon$ (on peut prendre $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}; \ldots$) est intersection dénombrable d'ouverts denses, donc son complémentaire est maigre; cependant **A** est de k-mesure nulle. Ainsi A est un "presque partout" au sens de Baire, et son complémentaire un "presque partout" au sens de la mesure dx. Ou encore : **A** est un " B - presque partout" **mais** de dx-mesure nulle; $\complement$ A est un "h-presque partout", mais maigre. Ou encore : la réunion d'une infinité dénombrable de parties maigres est maigre. la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles de dx-mesure nulle est de b-mesure nulle, **mais** la réunion d'une partie maigre $\complement$ **A** et d'une partie A de k-mesure nulle peut être $\mathbb{R}$ tout entière; les deux notions ne doivent jamais être mélangées! On peut cependant démontrer qu'un B - presque partout de $\mathbb{R}$, qui n'est sûrement pas dénombrable, a exactement la puissance du continu.

Théorème 46 de Banach-Steinhaus *

Soient $\vec{E}$ et $\vec{F}$ des espaces vectoriels topologiques, $\vec{E}$ de Baire, $\vec{F}$ séquentiellement complet. Soit u_n une suite d'applications linéaires continues de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$, convergeant vers une limite pour n infini, en tout point d'un sous-ensemble dense $\vec{E}_0$ de $\vec{E}$. Alors :

1) ou bien la suite des u_n est B-presque partout divergente sur $\vec{E}$, et même B - presque partout non bornée.;

2) ou bien elle est partout convergente sur $\vec{E}$, la limite u est linéaire continue, les u_n sont équicontinues, et la

* Généralisation du théorème 65 du chapitre IV, avec d'ailleurs la **même** démonstration.

convergence est uniforme sur tout compact de $\vec{E}$

Démonstration - Pour simplifier, supposons $\vec{F}$ semi-normé, de semi-normes q_j, $j \in J$. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $A_{j,k}$ le sous-ensemble de $\vec{E}$ défini par $A_{j,k} = \{\vec{x} \in \vec{E} ; \forall n, q_j(u_n(x)) \leq k\}$. Les u_n étant continues, $A_{j,k}$ est fermé. Par ailleurs, si, en un point x, les $u_n(x)$ ont une limite, ils sont bornés, et donc, pour tout j, $\vec{x}$ est dans la réunion $A_j = \bigcup_k A_{j,k}$. Si donc, pour au moins un j, tous les $A_{j,k}$ sont d'intérieur vide, A_j est maigre, et l'éventualité 1) est réalisée : pour $\vec{x} \notin A_j$, c'est-à-dire pour B- presque tout $\vec{x}$, la suite des $u_n(\vec{x})$ n'est pas convergente ni même bornée. Sinon, celà veut dire que, pour tout j, il existe un k tel que $A_{j,k}$ ait un intérieur non vide; mais, si $A_{j,k}$ est un voisinage de $\vec{a}$, $A_{j,k} - \vec{a}$ * est un voisinage de $\vec{0}$; mais $A_{j,k} - \vec{a}$ est contenu dans $A_{j,2k}$, car, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\vec{x} \in A_{j,k} - \vec{a}$, on a $u_j(u_n(\vec{x} + \vec{a})) \leq k$, $q_j(u_n(\vec{a})) \leq k$, donc $q_j(u_n(x)) \leq 2k$; donc $A_{j,2k}$ est encore un voisinage de $\vec{0}$. Alors, pour tout $j \in J$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\frac{\varepsilon}{2k} A_{j,2k}$ de 0 dans E tel que, pour tout $\vec{x}$ de $\frac{\varepsilon}{2k} A_{j,2k}$ et tout n, on ait $q_j(u_n(x)) \leq \varepsilon$, donc les u_n sont équicontinues à l'origine, donc partout puisque linéaires. Le corollaire 3 du théorème 45 entraîne alors toutes les conclusions de l'éventualité 2) (parce que F est séquentiellement complet; la linéairité de la limite u est évidente), c.q.f.d.

Nous voyons donc que Banach-Steinhaus s'obtient en juxtaposant Baire et Ascoli. Donnons quelques applications aux mesures et distributions. Utilisons d'abord le cas où l'on sait qu'il y a convergence partout (seconde éventualité).

Considérons un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, K un compact de Ω et prenons pour E l'espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$, qui est bien défini par une infinité dénombrable de semi-normes et est bien complet

* $A_{j,k} - \vec{a} = \{\vec{x} - \vec{a} ; \vec{x} \subset A_{j,k}\}$.

(théorème 43), donc de Baire; prenons $\vec{F} = \mathbb{C}$. On obtient la proposition 10 du fascicule "Distributions". D'autre part, le corollaire 3 permet d'étendre certains théorèmes de la convergence vague des mesures (c'est-à-dire la convergence simple sur $\mathcal{C}(X)$) a la convergence des distributions (c'est-à-dire la convergence simple sur $\mathcal{D}(\Omega)$). C'est ainsi quele corollaire 2 du théorème 65 du chapitre IV est valable pour une suite de distributions T_j * convergeant vers T dans $\mathcal{D}'$ et une suite de φ_j convergeant vers φ dans $\mathcal{D}$. Le corollaire 3 du théorème 66 du chapitre IV s'étend en remplaçant les μ_n par des distributions T_k , et φ continue par φ indéfiniment dérivable. Le théorème 80 du chapitre IV est alors valable pour la convergence d'un produit tensoriel $S_j \otimes T_j$ de distributions. Mais ensuite on peut utiliser le fait que, si H est une application $\mathcal{C}^\infty$ propre, et si des T_j convergent, les H T_j convergent trivialement; en prenant pour H l'addition $(\xi, \eta) \longrightarrow \xi + \eta$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on en déduit le théorème de continuité séquentielle du produit de convolution (proposition 5 du fascicule "Convolution").

C'est ainsi que les principaux théorèmes topologiques de la théorie des distributions sont des conséquences de Banach-Steinhaus. Mais en outre, ces théorèmes permettent de relier entre elles des convergences différentes. Ainsi :

Soit μ_j une suite de mesures, convergeant dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$) vers une mesure μ pour j infini. Pour que les μ_j convergent vaguement vers μ , il faut et il suffit que, pour tout compact K , les $\| \mu_j \|_K$ soient bornées dans leur ensemble, autrement dit que la suite des μ_j soit équlcontinue sur tout $\mathcal{C}_K(\Omega)$.

SI en effet les μ_j convergent vaguement vers μ , les $\| \mu_j \|$ sont bornées d'après Banach-Steinhaus (théorème 65 du chapitre IV, redémontré Ici). Inversement, si les $\| \mu_j \|$ sont bornées, celà prouve que, pour tout K , les μ_j sont des formes linéaires également continues sur $\mathcal{C}_K(\Omega)$. Mais, puisqu'elles convergent au sens de $\mathcal{D}'$ vers μ , celà veut dire que les fonctions μ_j , définies sur $\mathcal{C}_K(\Omega)$, sont équicontinues et convergent vers la fonction μ en tout point

* NOUS écrivons T_j et non T_n , n étant la dimension de $\mathbb{R}^n$!

du sous-ensemble $\mathcal{D}_{K'}(\Omega)$, $\mathcal{D}_K(\Omega)$ n'est pas dense dans $C_K(\Omega)$, mais, de toute façon, d'après le corollaire 3, les μ_j convergent vers μ sur toute φ de l'adhérence $\overline{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ dans $C_K(\Omega)$. Ceci est valable pour tout K. Mais, si φ est une fonction de $C(\Omega)$, si H est un voisinage compact de son support K, le théorème d'approximation (proposition 1 du fascicule "Distributions") montre que φ est dans $\mathcal{D}_H(\Omega)$, donc $\mu_j(\varphi)$ converge vers $\mu(\varphi)$, et μ_j converge vaguement vers μ, c.q.f.d

Exemple : Soit $\mu_j = \sqrt{j}\left(\delta_{(\frac{1}{j})} - \delta_{(0)}\right)$ sur $\mathbb{R}$. Les μ_j convergent vers 0 dans $\mathcal{D}'$; en effet, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, la formule des accroissements finis montre que $\left|\varphi\left(\frac{1}{j}\right) - \varphi(0)\right| \leqslant \frac{1}{j}\|\varphi'\|$. Mais les μ_j ne convergent pas vaguement vers 0 ; si en effet nous prenons $\varphi \in C$, égale à $x^{\frac{1}{3}}$ au voisinage de 0, on voit que $\mu_j(\varphi) = j^{\frac{1}{6}}$, qui tend vers $+\infty$. D'ailleurs $\|\mu_j\| = 2\sqrt{j}$ (formule (IV,2;7)) qui tend vers $+\infty$.

Donnons au contraire d'autres applications, utilisant l'éventualité 1) du théorème 46. Considérons la suite des formes linéaires continues $u_{n,a}$ sur C $[0,1]$:

$$u_{n,a}(\varphi) = \frac{\varphi\left(a+\frac{1}{n}\right) - \varphi(a)}{\frac{1}{n}} ; u_{n,a} = n\left(\delta_{(a+\frac{1}{n})} - \delta_{(a)}\right) \tag{VII,7;29}$$

Les $u_{n,a}$ convergent vers $-\delta'_{(a)}$: $\varphi \longrightarrow \varphi'(a)$, sur le sous-ensemble dense des fonctions dérivables au point a. Mais la norme de $u_{n,a}$ est $2n$, (formule (IV,2;7)), elle tend vers $+\infty$ avec n. Donc l'ensemble des $\varphi \in C[0,1]$ pour lesquelles les u_n convergent est maigre; autrement dit, non seulement toute fonction continue n'est pas dérivable au point a, ce que nous savions déjà, mais B - presque toutes les fonctions continues sont non-dérivables au point a ; ceci nous donne une confirmation moralement satisfaisante de notre intuition qu'en général une fonction continue n'est pas dérivable. Si maintenant R_1 est une partie dénombrable dense de $[0,1]$ l'ensemble des fonctions dérivables en a $\in$ R, étant maigre, :a réunion de ces ensembles est encore maigre, donc B - presque toute fonction continue est non-dérivable en tout point de R_1 . (On a même, en fait , un peu plus : pour B- presque toute $\varphi \in C[0,1]$, la suite des $u_{n,a}(\varphi)$ n'est bornée en aucun point a de R_1). Par contre, il ne semble pas exact ou pas évident que B- presque toute fonction continue soit partout non dérivable.

Mais remarquons une autre chose. Dans la démonstration du théorème 46, la linéarité des u_n et la convergence sur E_0 dense n'apparaissait pas dans la première éventualité : même sans ces hypothèses, si, pour au moins un j , tous les $A_{j,k}$ sont sans intérieur, l'ensemble des points de convergence des u_n est toujours maigre. C'est ce qui se passera si, en tout point x d'un ensemble E_1 dense dans $\vec{E}$, les $u_n(\vec{x})$ ne sont pas bornés, et si $\vec{F}$ est normé. Dans ce cas, il n'y a qu'une q_j que nous noterons $\| \quad \|$, et nous écrirons simplement A_k et A au lieu de $A_{j,k}$ et A_j . Pour tout $\vec{x}$ de E_1 , les $u_n(\vec{x})$ ne sont pas bornés, donc $\vec{x} \notin A$; donc A ne contient aucun point de E_1 donc n'a pas d'intérieur donc aucun des A_k n'a d'intérieur: et A sera maigre : les u_n seront divergentes et même non bornées en B- presque tout point de $\vec{E}$.

Soit alors R_1 un ensemble dénombrable dense de $[0,1]$ soit φ une fonction telle que, pour tout $a \in R_1$, les $u_{n,a}(\varphi)$ soient non bornés; nous avons vu par application du théorène 46, éventualité 1), que ces φ forment un " B- presque partout" de $C[0,1]$. Pour φ ainsi fixée, considérons la suite des fonctions φ_n définie par

$$\varphi_n(x) = \frac{\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)}{\frac{1}{n}}$$

. C'est une suite de fonctions continues (non linéaires!) sur l'espace de Baire $[0,1]$, qui n'est bornée en aucun point de l'ensemble dénombrable dense R_1 ; donc par une nouvelle application du théorème 46, éventualité 1) elle est non bornée en B- presque tout point x de $[0,1]$. En particulier φ est B -- presque partout non dérivable. Ainsi B- presque toutes les fonctions continues sont B - presque partout non dérivables. En langage quantifié: "$(\exists L$ maigre dans $C[0,1])(\forall \varphi \notin L)(\exists M$ maigre dans $[0,1])(\forall x \notin M)$:

(φ n'est pas dérivable en x)". Bien entendu, M dépend de φ ; et C $[0,1]$ peut être remplacé par $(\mathbb{C}^{\mathbb{R}})_c$.

Voici une autre application. On démontre, en théorie des séries trigonométriques, que, si f est une fonction continue périodique de période T , sa série de Fourier n'est pas nécessairement convergente. Par la même suite de raisonnements utilisant successivement le théorème 46 pour l'espace de Baire des fonctions continues sur le cercle Γ et pour l'espace de Baire Γ , on trouve que, pour B- presque toutes les fonctions continues périodiques. la série de Fourier est B- presque partout divergente (Voir: Compléments sur la série et l'intégrale de Fourier). Il existe une quantité d'autres énonces analogues.

Voici un théorème qu'on pourra traiter en exercice. Soit E un espace de Baire, u_n une suite d'applications continues de E dans un espace métrique F , convergeant simplement vers une limite u . Alors l'ensemble des points de discontinuité de u est maigre.

Par exemple soit φ une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$. La suite des fonctions φ_n , $\varphi_n(x) = \dfrac{\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\varphi(x)}{\frac{1}{n}}$ est alors simplement convergente sur $\mathbb{R}$ vers φ' Donc la dérivée φ' est continue en B-presque tous les points de $\mathbb{R}$. Une fonction dérivée n'a donc que "très peu" de points de discontinuité !

Théorème 47 (3ème théorème d'Ascoli)

Soient E un espace topologique, F un espace semi-métrique, $\mathcal{F}$ un ensemble d'applications continues de E dans F. Pour que $\mathcal{F}$ soit relativement compact * dans $(F^E)_c$ (espace des applications continues de E dans F , muni de la

• Rappelons (oubli de la topologie générale) qu'une partie A d'un espace topologique X est dit relativement compacte dans X si son adhérence $\overline{A}$ dans X est compacte. Celà revient au même de dire que A est contenue dans une partie compacte B de X , car alors $\overline{A}$ est fermée dans un compact B donc compacte.

<u>topologie de la convergence compacte), il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées</u> :

1) <u>$\mathcal{F}$ est équicontinu;</u>

2) <u>Pour tout $x \in E$, l'ensemble</u> $\mathcal{F}(x) = \{f(x), f \in \mathcal{F}\}$ <u>est relativement compact dans F.</u>

<u>Si E est localement compact, ces conditions sont aussi nécessaires.</u>

<u>Démonstration</u> - 1°/ Montrons que 1) et 2) sont suffisantes. Supposons les donc réalisées. Il existe une démonstration très générale et très courte, mais utilisant le théorème de Tychonof, que nous n'avons pas a notre disposition. Le théorème de Tychonof dit qu'un produit, <u>fini ou infini,</u> de compacts, est compact; sa démonstration utilise la notion d'ultrafiltre et le théorème de Zorn. Pour tout $x \in E$, l'adhérence $\overline{\mathcal{F}(x)}$ de $\mathcal{F}(x)$ dans F est supposée compacte; donc, d'après Tychonof, $\prod_{x \in E} \overline{\mathcal{F}(x)}$ est compact. Celà veut dire que l'ensemble des $f \in F^E$ telles que, pour tout $x \in E$, $f(x)$ soit dans $\overline{\mathcal{F}(x)}$, est compact dans F^E; donc notre ensemble $\mathcal{F}$ contenu dans un compact, est relativement compact dans F^E (sans aucune hypothèse d'équicontinuité), son adhérence $\overline{\mathcal{F}}$ dans F^E est compacte. Mais $\overline{\mathcal{F}}$ est encore équicontinue (1er théorème d'Ascoli); alors, sur $\overline{\mathcal{F}}$, la topologie F^E et la topologie $(F^E)_c$ coïncident, donc $\overline{\mathcal{F}}$ est un compact de $(F^E)_c$ et $\mathcal{F}$ est bien relativement compacte dans $(F^E)_c$.

Pour n'utiliser que des théorèmes démontrés antérieurement, nous serons obligés de donner une autre démonstration un peu plus compliquée, et de faire sur E et F des hypothèses particulières (mais très généralement vérifiées). Nous supposerons que la structure de F est définie par une infinité dénombrable de semi-distances δ_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, et que E est sdparable, c'est-à-dire possède un ensemble dénombrable dense $E_0 = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$. Même en ignorant Tychonof, l'ensemble des fonctions de F^E qui, pour tout $x \in E$, prennent leurs valeurs dans $\overline{\mathcal{F}(x)}$ est fermé, comme intersection de fermés; il contient $\mathcal{F}$ donc $\overline{\mathcal{F}}$, adhérence de $\mathcal{F}$ dans F^E; donc l'ensemble $\overline{\mathcal{F}}(x) = \{f(x) ; f \in \overline{\mathcal{F}}\}$ est contenu dans $\mathcal{F}(x)$ donc aussi relativement compact dans F. D'autre part $\overline{\mathcal{F}}$ est encore équicontinu. Donc $\overline{\mathcal{F}}$ a les mêmes propriétés que $\mathcal{F}$, mais est fermé dans F^E et a fortiori dans (F'), ; nous allons démontrer que $\overline{\mathcal{F}}$ est compact dans $(F^E)_c$, et alors $\mathcal{F}$ sera bien relativement compact.

D'après le théorème 45, la topologie induite sur $\overline{\mathcal{F}}$ par $(F^E)_c$ est identique à la topologie induite par F^{E_0} c'est-a-dire par la convergence simple sur E_0, dont les semi-distances sont données à (VII,7;25). Il y a donc une infinité dénombrable de ces semi-distances (E_0 est dénombrable donc aussi l'ensemble de ses parties finies). Donc, d'après le théorème 40, la topologie de $\overline{\mathcal{F}}$ est métrisable.

Pour montrer alors que $\overline{\mathcal{F}}$ est compact, nous pouvons appliquer le théorème de Weierstrass-Bolzano : nous allons montrer que, de toute suite $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ de $\overline{\mathcal{F}}$, on peut extraire une suite convergente. L'ensemble $\mathcal{F}$ (a,) est compact dans F métrisable, donc on peut extraire de la suite des f_n une suite partielle convergente au point a, . Nous la noterons $S_0 : f(0,0)\,,\ f(0,1)\,,\ldots,\ f(0,n)\,,\ldots$ $(0,n)$ désigne donc un entier $\geqslant 0$, avec $(0,n) > (0,n-1)$. Mais ensuite l'ensemble $\mathcal{F}(a_1)$ est aussi compact dans F métrisable, donc on peut extraire de la suite précédente une nouvelle suite partielle convergente au point a_1, donc à la fois au point a_0 et au point a_1, que nous noterons $S_1 : f(1,0)\,,\ f(1,1)\,,\ldots,\ f(1,n)\,,\ldots$ (Ici encore, $(1,n)$ est un entier $\geqslant 0$, on a $(1,n) > (1,n-1)$; et, puisque S_1 est. une suite partielle de S_0 pour tout n, il existe $n' \geqslant n$ tel que $(0\ n') = (1,n) \geqslant (0,n)$). Et ainsi de suite, de proche en proche. 'La suite S_m sera notée $f(m,0)\,,\ f(m,1)\,,\ldots,\ f(m,n)\,,\ldots$; (m,n) est un entier, $(m,n) > (m,n-1)$, et S_m est une suite partielle de S_{m-1}. autrement dit, pour tout n il existe $n' \geqslant n$ tel que $(m-1,n') = (m,n) \geqslant (m-1,n)$. La suite S_m converge en chacun des points $a_0, a_1, \ldots, a_n$. on peut, si l'on veut, placer ces suites les unes sous les autres :

$$\begin{array}{llllll}
f(0,0), & f(0,1), & f(0,2), & \ldots, & f(0,n), & \ldots \\
f(1,0), & f(1,1), & f(1,2), & \ldots, & f(1,n), & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
f(m,0), & f(m,1), & f(m,2), & \ldots, & f(m,n), & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Considérons alors la suite diagonale $S : f(0,0), f(1,1), \ldots, f(n,n) \ldots$ Chaque suite est une suite partielle de la précédente ; alors, pour m donné, pour tout $n \geqslant m$, il existe $n' \geqslant n$ tel que $(m,n') = (n,n) \geqslant (m,n)$, et en outre $(n,n) > (n,n-1) \geqslant (n-1,n-1)$, autrement dit les $f(n,n)$, à partir de $n \geqslant m$, forment une suite partielle de S_m ; la suite diagonale converge donc au point a_m. Donc la suite S est convergente en tout point de E_0. soit f_0 la limite, application de E_0 dans F. Alors f_0 est prolongeable en une application continue f de E dans F et la suite S converge vers f en tout point de E et uniformément sur tout compact de E. Celà résulte du corollaire 3 du théorème 45; on peut l'appliquer, car chaque partie $\mathcal{F}(x)$ est contenue dans $\overline{\mathcal{F}(x)}$, qui est compacte donc séquentiellement complète Nous avons démontré au théorème 41 du chapitre II que tout métrique compact est séquentiellement complet. Il en est de même, par le même raisonnement, de tout espace semi-métrique compact, à infinité dénombrable de semi-distances. En effet cet espace est métrisable (théorème 40), et alors si x_n est une suite de Cauchy, Weierstrass-Bolzano montre qu'on peut en extraire une suite partielle convergente, donc la suite toute entière est convergente, par le théorème 40 du chapitre II. Comme ensuite $\overline{\mathcal{F}}$ est fermé dans F^E la limite f de la suite de $\overline{\mathcal{F}}$ est nécessairement dans $\overline{\mathcal{F}}$. Nous avons donc extrait de la suite donnée des f_n dans $\overline{\mathcal{F}}$ une suite partielle S convergeant dans $(F^E)_c$ vers un élément f de $\overline{\mathcal{F}}$; donc $\overline{\mathcal{F}}$ est bien compact pour la topologie induite par $(F^E)_c$, et $\mathcal{F}$ est bien relativement. compact dans $(F^E)_c$.

2°/ Inversement; supposons $\mathcal{F}$ relativement compacte dans $(F^E)_c$, donc son adhérence $\overline{\mathcal{F}_c}$ * compacte. Son image $\overline{\mathcal{F}_c}(x)$ par l'application continue $\delta_{(x)} : f \longrightarrow f(x)$ de $(F^E)_c$ (ou F^E) dans F est donc aussi compacte, donc $\mathcal{F}(x) \subset \overline{\mathcal{F}_c}(x)$ est bien relativement compacte dans F. Ceci ne suppose aucune condition spéciale sur E ou F.
Soit maintenant K un compact de E. Appelons f_K la restriction d'une fonction f au compact K; l'application $f \longrightarrow f_K$ est évidemment continue (et même lipschitzienne) de $(F^E)_c$ dans $(F^K)_c$ (les semi-distances de $(F^K)_c$ sont les $\delta_{j,K}, j \in J$); l'image $\overline{\mathcal{F}}_{c,K}$ de $\overline{\mathcal{F}_c}$ par cette application est donc encore une partie compacte de $(F^K)_c$. Soient alors $j \in J$ et $\varepsilon > 0$; il existe un ensemble fini d'éléments $f_{\nu,K}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, de $\overline{\mathcal{F}}_{c,K}$ tel que les boules $B_{j,K}(f_{\nu,K}; \frac{\varepsilon}{3})$ recouvrent $\overline{\mathcal{F}}_{c,K}$; autrement dit, pour toute $f_K \in \overline{\mathcal{F}}_{c,K}$, il existe un ν tel que $\delta_{j,K}(f_{\nu,K}, f_K) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Mais un ensemble fini de fonctions continues $f_{\nu,K}$ est toujours équicontinu. Donc, pour tout a de E, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de a dans K tel que, pour tout $x \in \mathcal{U}$ et tout ν, on ait $\delta_j(f_{\nu,K}(a), f_{\nu,K}(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$; donc, pour tout $x \in \mathcal{U}$ et toute $f \in \overline{\mathcal{F}_c}$,

* Nous écrivons $\overline{\mathcal{F}_c}$ et non $\overline{\mathcal{F}}$ comme précédemment; $\overline{\mathcal{F}}$ était l'adhérence de $\mathcal{F}$ dans F^E, $\overline{\mathcal{F}_c}$ est son adhérence dans $(F^E)_c$. A priori ils sont distincts. Mais d'une part trivialement $\overline{\mathcal{F}} \supset \overline{\mathcal{F}_c}$. D'autre part l'injection de $(F^E)_c$ dans F^E est continue, donc $\overline{\mathcal{F}_c}$, compact de $(F^E)_c$, est encore compact pour la topologie F^E (théorème 28 du chapitre II), donc fermé dans F^E, donc $\overline{\mathcal{F}_c} \supset \overline{\mathcal{F}}$, donc $\overline{\mathcal{F}_c} = \overline{\mathcal{F}}$, ce qui permettrait de ne pas introduire d'écriture nouvelle.

En outre nous voyons que $\overline{\mathcal{F}}(x)$ et $\overline{\mathcal{F}(x)}$, que nous avons distinguez plus haut, coïncident également. Car nous avons vu que $\mathcal{F}(x) \subset \overline{\mathcal{F}}(x)$; Mais $\overline{\mathcal{F}}(x)$ va être compact donc fermé dans F, et il contient $\mathcal{F}(x)$ donc $\overline{\mathcal{F}(x)}$, d'où le résultat.

(VII,7;30) $$\delta_j(f(a),f(x)) \leq \delta_j(f(a),f_\nu(a)) + \delta_j(f_\nu(a),f_\nu(x)) + \delta_j(f_\nu(x),f(x)) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve que l'ensemble $\overline{\mathcal{F}_{K,c}}$ de fonctions continues sur K est équicontinu. Mais cela ne prouve nullement que $\overline{\mathcal{F}_c}$ soit équicontinu sur E. Si par contre nous supposons E localement compact, alors, pour tout $a \in E$ il existe un voisinage compact K de a dans E, alors le $\mathcal{U}$ trouvé plus haut, voisinage de a dans K est aussi voisinage de a dans E (théorème 6 c du chapitre II)et (VII,7;30) montre que $\overline{\mathcal{F}_c}$, donc $\mathcal{F}$, est équicontinu en a. Les conditions 1) et 2) sont donc bien nécessaires si E est localement compact.

Corollaire 1

Soit E un espace localement compact (par exemple un espace vectoriel topologique de dimension finie), et soit $\vec{F}$ un espace vectoriel topologique de dimension finie (par exemple $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$). Pour qu'une partie $\mathcal{F}$ de $(\vec{F}^E)_c$ soit relativement compacte, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiée :

1) $\mathcal{F}$ est équicontinu;

2) Pour tout x de E, l'ensemble $\mathcal{F}(x) = \{f(x), f \in \mathcal{F}\}$, est borné dans $\vec{F}$.

En effet, les parties relativement compactes de $\vec{F}$ ne sont autres que ses parties bornées. Ceci ne subsiste évidemment pas si $\vec{F}$ est de dimension infinie.

Corollaire 2

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\vec{F}$ un Banach de dimension finie, Pour qu'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$ soit relativement compacte, il faut et il suffit que les 2 conditions suivantes soient vérifiees :

1) Pour tout indice de dérivation p d'ordre $|p| \leq m$, l'ensemble $\mathcal{F}_p$ des $D^p\vec{f}$, $\vec{f} \in \mathcal{F}$ ensemble de fonctions sur Ω à valeurs dans $\vec{F}$, est équicontinu;

2) <u>Pour tout p d'ordre</u> $|p| \leq m$, <u>et tout $x \in \Omega$, l'ensemble</u> $\mathcal{F}_p(x) = \{D^p \vec{f}(x), \vec{f} \in \mathcal{F}\}$ <u>est borné dans $\vec{F}$</u>.

<u>Démonstration</u> - Pour $m = 0$, c'est un cas particulier du Corollaire précédent. Soit m quelconque. Supposons d'abord $\mathcal{F}$ relativement compact dans $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$. L'application linéaire $D^p : \vec{f} \to D^p \vec{f}$, de $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$ dans $\mathcal{E}^\circ(\Omega;\vec{F})$, est continue. Si en effet on considère une semi-norme $\|\ \|_{o,K}$ de $\mathcal{E}^\circ(\Omega;\vec{F})$ on introduira la semi-norme $\|\ \|_{m,K}$ de $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$ et on aura justement l'inégalité

$$\|D^p \vec{f}\|_{o,K} \leq \|\vec{f}\|_{m,K} .$$

Alors l'image $D^p \bar{\mathcal{F}}$ du compact $\bar{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$ est un compact de $\mathcal{E}^\circ(\Omega;\vec{F})$. cet ensemble contient $D^p \mathcal{F} = \mathcal{F}_p$, qui est donc relativement compact. Il doit alors vérifier les conditions du corollaire 1, ce qui donne précisément 1) et 2) relatives à p. Donc ces conditions sont bien nécessaires.

Inversement supposons 1) et 2) réalisées. Soit $\bar{\mathcal{F}}$ l'adhérence de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$. $\bar{\mathcal{F}}$ vérifie encore 1) et 2). En effet, l'ensemble des $\vec{f}$, telles que $D^p \vec{f} \in \bar{\mathcal{F}}_p$ -pour tout p d'ordre $|p| \leq m$, est fermé, et contient $\mathcal{F}$ donc $\bar{\mathcal{F}}$, donc $D^p \bar{\mathcal{F}} \subset \bar{\mathcal{F}}_p$ ou $\bar{\mathcal{F}}_p \subset \bar{\mathcal{F}_p}$. SI alors $\mathcal{F}_p$ est équicontinu, $\bar{\mathcal{F}}_p$ l'est aussi d'après le théorème 44, donc à fortiori 4, ; d'autre part, si $\mathcal{F}_p(x)$ est borné, son adhérence $\bar{\mathcal{F}}_p(x)$ l'est aussi, donc a fortiori $\bar{\mathcal{F}}_p(x)$, donc a fortiori $\bar{\mathcal{F}}_p(x)$.

Montrons alors que $\bar{\mathcal{F}}$ est compact dans $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$. Comme il est métrisable, il suffit de montrer Weierstrass-Bolzano. Soit donc $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n, \ldots$ une suite de $\bar{\mathcal{F}}$. Pour tout p d'ordre $|p| \leq m$, $\bar{\mathcal{F}}_p$ vérifie les conditions du corollaire 1,. donc est relativement compact dans $\mathcal{E}^\circ(\Omega;\vec{F})$ donc de la suite on peut extraire une suite Partielle S_p, telle que les $D^p \vec{f}_n$ correspondantes convergent uniformément sur tout compact donc localement uniformément, vers une limite $\vec{g}_p$ continue: soit $\vec{g}$ celle qui correspond à $p = 0$. D'après le même procédé que pour la démonstration du théorème, on pourra ranger les p, $|p| \leq m$, dans un ordre quelconque, et faire que, pour cet ordre, chaque S_p soit une suite partielle de la précédente; alors la dernière écrite (il n'y en a qu'un nombre fini) est une suite partielle S telle que, pour tout p d'ordre $|p| \leq m$, les $D^p \vec{f}_m$ correspondantes aient une limite localement uniforme $\vec{g}_p$. D'après le corollaire 1 du théorème 111 du chapitre IV, $\vec{g}$ est alors de classe C^m, et $\vec{g} = D^{p}\,\vec{g}_{0}$. Alors la suie partielle S converge vers $\vec{g}_0$ dans $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$. Comme $\bar{\mathcal{F}}$ est fermé dans $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$, $\vec{g}$ est dans $\bar{\mathcal{F}}$ et ainsi $\bar{\mathcal{F}}$ est bien compact, donc $\mathcal{F}$ est bien relativement compact.

Corollaire 3 .-

Si $\vec{F}$ est de dimension finie, toute partie bornée de $\mathcal{E}^m(\Omega;\vec{F})$ est relativement compacte dans $\mathcal{E}^{m-1}(\Omega;\vec{F})$.

En effet, elle est d'abord bornée dans $\mathcal{E}^{m-1}(\Omega;\vec{F})$, donc la condition 2) est sûrement réalisée. Ensuite, d'après les propriétés des parties bornées ((VII,7;19)), pour tout p d'ordre $|p| \leq m-1$, $\mathcal{F}_p$ est un ensemble de fonctions sur Ω a valeurs dans $\vec{F}$ qui est borné dans $\mathcal{E}^1(\Omega;\vec{F})$ donc équicontinu (voir page 450) donc la condition 1) est aussi réalisée.

Propriété de Montel

Dans un espace vectoriel topologique de dimension finie, il y a identité entre les parties compactes et les parties fermées bornées, ou encore, puisque 1 adhérence d'une partie bornée est bornée, entre les parties relativement compactes et les parties bornées (théorème 23 du chapitre II). Dans un espace vectoriel topologique quelconque, les parties compactes sont toujours fermées et bornées (fermées à cause du théorème 23 du chapitre II; bornées, c'est évident dans un espace semi-normé, car toute semi-norme définissant la structure est continue donc bornée sur un compact, et c'est encore vrai même dans les espaces vectoriels topologiques non semi-normés). Mais, en général, la réciproque ne sera pas vraie; nous avons même vu qu'elle n'est jamais vraie dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, dont la boule unité n'est jamais compacte (théorème 45 bis du chapitre II). Cependant, dans un espace vectoriel topologique non norme, il peut arriver que la réciproque soit vraie, cela n'entre pas en contradiction avec le théorème 45 bis du chapitre II puisqu'aucun voisinage de 0 n'est borné (voir page 449). On dit qu'un espace vectoriel topologique a la propriété de Montel s'il y a identité entre ses parties compactes et ses parties bornées, ou encore entre ses parties relativement compactes et ses parties bornées. Alors :

Corollaire 4

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\vec{F}$ un Banach de dimension finie, l'espace $\mathcal{E}(\Omega;F) = \mathcal{E}^\infty(\Omega;\vec{F})$ a la propriété de Montel

Démonstration - Nous devons montrer que toute partie fermée bornée $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}(\Omega;\vec{F})$ est compacte. Comme l'espace est métrisable, nous pouvons appliquer Weierstrass-Bolzano. Soit donc $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n, \dots$ une suite de $\mathcal{F}$. Pour tout p, l'ensemble $\mathcal{F}_p = D^p\mathcal{F}$ est encore borné dans $\mathcal{E}^1(\Omega;\vec{F})$ donc vérifie les conditions 1) et 2) du corollaire 1 donc est relativement compact dans $\mathcal{E}^0(\Omega;\vec{F})$ d'après le corollaire 1. On peut donc extraire une suite partielle S_p qui converge localement uniformément vers une fonction continue $\vec{g}_p$. Appelons $\vec{g}$ celle qui correspond à $p = 0$ Comme au corollaire 2, l'ensemble des indices p est $\mathbb{N}^n$ donc dénombrable, donc nous pouvons l'ordonner totalement en le mettant en correspondance bijective avec $\mathbb{N}$ et choisir ensuite chaque suite S_p comme suite partielle de la précédente, et prendre la suite diagonale S comme dans la démonstration du théorème. Alors S est une suite partielle de la suite initiale, telle que les $D^p\vec{f}_n$ correspondants convergent localement uniformément vers $\vec{g}_p$. Le théorème du chapitre IV dit alors que $\vec{g}$ est C^∞, et que $D^p\vec{g} = \vec{g}_p$. Alors S converge vers $\vec{g}$ dans $\mathcal{E}(\Omega;\vec{F})$, et comme $\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathcal{E}(\Omega;\vec{F})$, $\vec{g}$ est dans $\mathcal{F}$, qui est bien compact.

Corollaire 5

Dans les conditions du corollaire 4, si K est un compact de Ω, l'espace $\mathcal{D}_K(\Omega;\vec{F})$ a la propriété de Montel. En effet $\mathcal{D}_K(\Omega;\vec{F})$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{E}(\Omega;\vec{F})$, donc toute partie fermée bornée de $\mathcal{D}_K(\Omega;\vec{F})$ est fermée bornée dans $\mathcal{E}(\Omega;\vec{F})$ donc compacte.

Corollaire 6 (Théorème de Montel)

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et si $\vec{F}$ est un Banach complexe de dimension finie, l'espace $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$ des fonctions holomorphes sur Ω à valeurs dans $\vec{F}$, muni de la topologie de la convergence compacte (ou de la convergence compacte pour toute dérivée) a la propriété de Montel : il y a identité entre ses parties compactes et ses parties fermées bornées, ou encore entre ses parties relativement compactes et ses parties bornées.

Démonstration - $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{E}(\Omega;\vec{F})$ d'après le théorème de Weierstrass, corollaire 1 du théorème 15, c'est donc trivial comme le corollaire 5.

Remarque - Comme nous l'avions annoncé page 444-45, ceci montre bien que $\mathcal{D}_K(\Omega;\vec{F})$ et $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$ ne sont pas normables, car un espace normable n'a jamais la propriété de Montel, sauf s'il est de dimension finie.

Le corollaire 6 est fondamental dans la théorie des fonctions de variables complexes. Dans la démonstration précédente, il est la suite de plusieurs corollaires en chaîne; il n'est pas inutile de voir directement qu'il est une conséquence triviale des théorèmes d'Ascoli. Soit $\mathcal{F}$ une partie bornée de $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$. Pour tout $\vec{x}$ de Ω, $\mathcal{F}(\vec{x})$ est borné, donc relativement compact dans $\vec{F}$ de dimension finie. D'autre part, puisque $\mathcal{F}$ est borné, si $B(\vec{a};R)$ est une boule de centre $\vec{a}$ contenue dans Ω fermée donc compacte, il existe un nombre $M \geq 0$ tel qu'on ait l'inégalité :

$$\|\vec{f}(\vec{x})\| \leq M, \quad \text{pour } \vec{x} \in B(\vec{a};R), \quad \vec{f} \in \mathcal{F}. \tag{VII,7;31}$$

D'après l'inégalité de Cauchy on a donc :

$$\|\vec{f}'(\vec{x})\| \leq \frac{2}{R} nM \text{ pour } \vec{x} \in B(\vec{a};\tfrac{R}{2}), \quad \vec{f} \in \mathcal{F}, \tag{VII,7;32}$$

d'où, par la formule des accroissements finis, l'inégalité

$$\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a})\| \leq nM \text{ pour } \vec{x} \in B(\vec{a};\tfrac{R}{2}), \quad \vec{f} \in \mathcal{F}.$$

Celà prouve l'équicontinuité de $\mathcal{F}$ sur Ω au Point a.

Donc $\mathcal{F}$ vérifie les conditions du 3ème théorème d'Ascoli 47, donc $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $(\vec{F}^{\Omega})_c$; mais comme $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$ est fermé dans $(\vec{F}^{\Omega})_c$ par le théorème de Weierstrass (corollaire 1 du théorème 15), l'adhérence (compacte) $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ dans $(\vec{F}^{\Omega})_c$ est dans $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$ et $\mathcal{F}$ est bien relativement compacte dans $\mathcal{H}(\Omega;\vec{F})$.

On peut généraliser :

Corollaire 7

Si V est une variété holomorphe, $\vec{F}$ un Banach de dimension finie, l'espace $\mathcal{H}(V;\vec{F})$ des fonctions holomorphes sur V à valeurs dans $\vec{F}$, muni de la topologie (induite par $(\vec{F}^V)_c$) de la convergence compacte, a la propriété de Montel.

Démonstration - Soit $\mathcal{F}$ borné dans $\mathcal{H}(V;\vec{F})$. D'abord, pour tout $x \in V$ $\mathcal{F}(x)$ est borne dans $\vec{F}$, donc relativement compact. Ensuite, soit $a \in V$, $\mathcal{V}$ un voisinage de a dans V qui soit le domaine d'une carte $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^n \xrightarrow{\Phi} \mathcal{V} = \Phi(\mathcal{O}) \subset V$ Soit $\Phi(\alpha) = a$.

Pour $\vec{f} \in \mathcal{F}$ appelons $\vec{f}^*$ son image réciproque $\Phi^*\vec{f} = \vec{f} \circ \Phi$, fonction holomorphe sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans $\vec{F}$ et soit $\mathcal{F}^*$ l'ensemble des $\vec{f}^*$.

Le raisonnement ci-dessus (inégalités (VII,7;31 et 32) montre que $\mathcal{F}^*$ est équicontinu sur $\mathcal{O}$ au point α ; donc $\mathcal{F}$ est équicontinu sur Ω au point a. Donc ici encore $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $(\vec{F}^V)_c$, donc dans $\mathcal{H}(V;\vec{F})$ fermé dans $(\vec{F}^V)_c$, c.q.f.d.

Remarque : Dans tous les corollaires précédents, l'hypothèse "$\vec{F}$ de dimension finie" était évidemment essentielle. Soit $\vec{F}$ un Banach de dimension Infinie; on sait que sa boule unité n'est pas compacte. On peut donc trouver une suite $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n, \ldots$ de vecteurs de norme 1, sans suite partielle convergente. Alors la suite de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$: $z \longrightarrow z\vec{f}_n$, est borné dans $\mathcal{H}(\mathbb{C};\vec{F})$, mais sans suite partielle convergente; $\mathcal{H}(\mathbb{C};\vec{F})$ n'a pas la propriété de Montel.

Applications du théorème de Montel.

Ce théorème sert a montrer que certaines quantités, associées a des fonctions de variables complexes, sont bornées. Donnons un exemple constamment utilisé.

Théorème 48 -

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. K un compact de Ω . Si à chaque f, fonction complexe holomorphe sur Ω , on associe $N(f;K) \leq +\infty$, nombre des zéros de f sur le compact K , chacun compte avec son ordre de multiplicité, la fonction $f \longrightarrow N(f;K)$ est semi-continue supérieurement sur l'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ (à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup (+\infty)$.

Démonstration - Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si le nombre de ses zéros sur K est infini (auquel cas elle est identiquement nulle sur une composante connexe de Ω), il n'y a rien à montrer. Supposons donc qu'elle ait $p < +\infty$ zéros sur K , chacun compté suivant son ordre de multiplicité. Soient a_i , $i \in I$ fini, les zéros de f sur K . Soient Δ_{a_i} des disques ouverts de centres a_i , tels que les $\overline{\Delta}_{a_i}$ soient disjoints. Leur réunion en général ne recouvre pas K. Mais si, pour tout b de K qui n est pas un zéro, nous considérons un disque ouvert Δ_b de centre b tel que $\overline{\Delta}_b$ ne contienne aucun zéro de f , K est recouvert par les Δ_{a_i} et les Δ_b , donc un nombre fini d'entre eux suffit à le recouvrir, soit les Δ_{a_i} et les Δ_{b_j} , $j \in J$ fini. Soit H la réunion des $\overline{\Delta}_{a_i}$, $i \in I$ et des $\overline{\Delta}_{b_j}$, $j \in J$; c'est un voisinage compact de K . D'après le corollaire 2 du théorème 25, on peut trouver $\eta > 0$ tel que l'inégalité $\sup\limits_{z \in H} |g(z) - f(z)| < \eta$ entraîne que :

1) g n'ait aucun zéro dans les disque $\overline{\Delta}_{b_j}$, $j \in J$;

2) Dans chaque $\overline{\Delta}_{a_i}$, $i \in I$, le nombre des zéros de g soit exactement égal à celui de f , c'est-à-dire l'ordre de multiplicité p_{a_i} du zéro a_i de f .

Alors, les $\overline{\Delta}_{a_i}$ étant disjoints, le nombre de zéros de g sur H est exactement $\sum\limits_i p_{a_i} = p$; et Par suite le nombre de zeros de f sur $K \subset H$ est $\leq p$, ce qui démontre la semi-continuité supérieure, car $\{g \,;\, \operatorname{Sup}_{z \in H} |g(z)-f(z)| \leq \eta\}$ est un voisinage de f dans $\mathcal{H}(\Omega) \subset (\mathbb{C}^{\Omega})_c$.

<u>Remarque</u> : On voit immédiatement que, si H est n'importe quel voisinage compact de K tel que f n'ait pas d'autres zéros dans H que ses zéros dans K , il existe $\eta > 0$ tel que $\operatorname{Max}_{z \in H} |g(z) - f(z)|$ "1 entraîne $N(g;H) = N(f;H) = N(f;K)$; d'où $N(g;K) \leq N(f;K)$. C'est ce qui montre bien qu'on a semi-continuité supérieure et non continuité. Supposons par exemple que K soit réduit à un seul point a ; et supposons que a soit zéro simple de f, $N(f;\{a\}) = 1$. Si H est n'importe quel disque fermé de centre a , ne contenant aucun autre zéro de f que a, on aura, pour g assez voisine de f sur H, $N(g;H) = 1$, mais le zéro de g dans le disque H n'aura aucune raison d'être en a lui-même, et on aura seulement $N(f;\{a\}) \leq 1$. Voici un autre exemple peut-être plus suggestif. Supposons que K soit un disque. Supposons d'abord que tous les zéros de f dans K soient dans son intérieur $\mathring{K}$. Il existe alors un disque strictement plus petit K' tel que $N(f;K') = N(f;K)$. On peut alors raisonner sur K', et, par rapport à lui, prendre $H' = K$. Alors, pour g assez voisine de f sur K , on aura $N(g;K) = N(f;K') = N(f;K)$ donc il y aura continuité au point f de $\mathcal{H}(\Omega)$. Mais ce ne sera plus la même chose si certains des zéros de f sur K sont sur la frontière $\dot{K}$. On devra alors retourner au raisonnement général, et on trouvera seulement $N(g;K) \leq N(g;H) = N(f;K)$; et en effet, les fonctions voisines de f pourront avoir certains de leurs zéros dans H près du bord $\dot{K}$ de K mais en dehors.

Si F est seulement un ensemble fermé, la fonction $f \longrightarrow N(f;F)$ n'a plus aucune semi-continuité.

Supposons maintenant $\mathcal{O}$ ouvert $\subset \Omega$. Supposons que f n'ait dans $\mathcal{O}$ que des zéros isolés, en nombre fini ou infini p. Soit q un nombre fini, quelconque si $p = +\infty$, et $q = p$ si p est fini. Soient a_i , $i \in I$, I fini, des zéros de f dans $\mathcal{O}$, dont la somme des ordres de multiplicité p_{a_i} soit $\geq q$. Soient Δ_{a_i} des disques ouverts de centres a_i tels que les $\overline{\Delta}_{a_i}$ soient disjoints, et soit H le compact $\bigcup_{i \in I} \overline{\Delta}_{a_i}$. Pour $\eta > 0$ assez petit, $\operatorname{Max}_{z \in H} |g(z) - f(z)| \leq \eta$

entraînera que g ait exactement p_{a_i} zéros dans $\overline{\Delta}_{a_i}$, donc $N(g;\mathcal{O}) \geq q$; donc la fonction $g \longrightarrow N(g;\mathcal{O})$ sera semi-continue inférieurement sur $\mathcal{H}(\Omega)$ au point f. Mais supposons que f soit identiquement nulle sur une composante connexe $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$. Parmi les fonctions voisines de f, il y en a qui, dans $\mathcal{O}_1$, sont des constantes $\neq 0$; leur nombre de zéros dans $\mathcal{O}_1$ est nul; la fonction $g \longrightarrow N(g;\mathcal{O})$ n'est plus semi-continue inférieurement sur $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ en un tel point f. On pourra donc seulement dire que la fonction $f \longrightarrow N(f;\mathcal{O})$ est semi-continue inférieurement sur le sous-ensemble de $\mathcal{H}(\Omega)$ formé des fonctions qui ne sont constantes sur aucune composante connexe de $\mathcal{O}$.

<u>Corollaire (Montel)</u>. <u>Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, M un nombre ≥ 0, K un compact de Ω, a un point de Ω, α un nombre réel > 0. Il existe un entier fini $N(\Omega, M, K, a, \alpha)$ tel que, pour toute fonction f holomorphe sur Ω, bornée en module par M, vérifiant $|f'(a)| \geq \alpha$, on ait $N(f;K) \leq N(\Omega,M,K,a,\alpha)$</u>

<u>Démonstration</u> - L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω bornées en module par M, et vérifiant $|f'(a)| \geq \alpha$, est fermé et borné dans $\mathcal{H}(\Omega)$, donc compact (corollaire 6 du théorème 47). Donc la fonction $f \longrightarrow N(f;K)$ admet un maximum sur cet ensemble. Ce maximum est fini, car, si f réalisait ce maximum et avait une infinité de zéros sur K, on pourrait en extraire une suite convergente, et alors f serait identiquement nulle dans Ω connexe (corollaire 6 du théorème 11), ce qui est impossible puisque $|f'(a)| \geq \alpha > 0$.

Compléments sur la convergence simple et uniforme de la série et de l'intégrale de Fourier

Les théorèmes énoncés dans la suite comprendront toujours une partie relative à une fonction ou à la convergence en un point, et une autre relative à des ensembles de fonctions et à la convergence uniforme sur des ensembles de points; celle-ci toujours notablement plus délicate, et on pourra la passer en première lecture, dans la mesure où elle sera dissociée de l'autre. Par exemple, si l'on ne s'intéresse qu'à la partie "convergence simple" de la série de Fourier (théorème 3), il suffira de lire la partie du théorème 1 ne concernant qu'une seule fonction $\vec{f}$, de même pour le corollaire, de même pour le théorème 2; ensuite on considérera dans le corollaire du théorème 2, le cas d'une seule fonction, $\vec{f} = \vec{g}$, avec $\lambda = \mu$; ensuite on n'aura à considérer que la 1ère partie de la démonstration du théorème 3, débouchant au corollaire 1.

__Théorème 1__ -

__Soit $\vec{f}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans un Banach $\vec{F}$. Alors l'intégrale de Fourier__

$$(1) \qquad \vec{C}(\lambda;\vec{f}) = \vec{C}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \vec{f}(x)\, e^{-2i\pi\lambda x}\, dx$$

__est une fonction continue de λ, qui tend vers 0 pour $\lambda \to \pm\infty$ (Lebesgue). En outre, cette convergence vers $\vec{0}$ est uniforme lorsque $\vec{f}$ parcourt une partie relativement compacte de $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$.__

__Démonstration__ - La continuité de $\vec{C}$ est évidente (convergence dominée de Lebesgue).

On a d'autre part $\| \vec{C}(\lambda) \| \leq \| \vec{f} \|_{L^1}$, donc $\vec{C}$ est bornée. Montrons qu'elle tend vers $\vec{0}$ pour λ infini.

C'est connu si $\vec{f}$ est de classe C^1, intégrable ainsi que sa dérivée première, car alors $\vec{C}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \vec{f}'(x) \dfrac{e^{-2i\pi\lambda x}}{2i\pi\lambda}\, dx$, donc $\| \vec{C}(\lambda) \| \leq \text{const.} \dfrac{1}{|\lambda|}$, d'où le résultat.

D'après le théorème 49 du chapitre IV, les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ Ensuite, d'après le théorème d'approximation (proposition 1 du fascicule des Distributions, démontré par convolution avec une fonction scalaire de $\mathcal{D}$, ou par la partition de l'unité), toute fonction continue à support compact à valeurs dans $\vec{F}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions indéfiniment dérivables à support dans un compact fixe, donc à fortiori limite dans $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. Donc $\mathcal{D}(\mathbb{R}; \vec{F})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$.

Alors les applications linéaires $u_\lambda : \vec{f} \longrightarrow \vec{C}(\lambda; \vec{f})$ de $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ dans $\vec{F}$, dépendant du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, convergent, pour λ infini, vers l'application linéaire nulle, sur le sous-ensemble dense $\mathcal{D}(\mathbb{R}; \vec{F})$ de $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$; mais elles sont également continues, lorsque λ varie dans $\mathbb{R}$, puisque de norme ≤ 1 ; le 2ème théorème d'Ascoli dit alors qu'elles convergent vers 0 simplement sur $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ tout entier, autrement dit $\vec{C}(\lambda; \vec{f})$ converge vers $\vec{0}$ pour λ infini, pour toute $\vec{f} \in L(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$; et la convergence est uniforme sur tout compact.

<u>Corollaire</u>.- <u>Si $\vec{f}$ est périodique de période T sur $\mathbb{R}$ et localement intégrable, ses coefficients de Fourier $\vec{c}_k(\vec{f})$ tendent vers $\vec{0}$ pour $|k|$ infini, et uniformément lorsque $\vec{f}$ parcourt une partie relativement compacte de $L^1(\Gamma, dx; \vec{F})$</u> .

En effet, appelons $\vec{g}$ la fonction sur $\mathbb{R}$ égale à $\vec{f}$ sur une période et nulle ailleurs. Alors $\vec{c}_k(\vec{f}) = \vec{C}(\lambda; \vec{g}) = \int_{\mathbb{R}} \vec{g}(x) e^{-2i\pi\lambda x} dx$ pour $2\pi\lambda = k\omega$, et celà résulte alors du théorème.

<u>Théorème 2</u> -

<u>Soient $\vec{f}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\vec{F}$ et $\vec{\sigma} \in \vec{F}$. Alors l'intégrale de Dirichlet</u>

$$(2) \qquad \vec{J}(\lambda; \vec{f}) = \vec{J}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \vec{f}(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx, \lambda \geqslant 0 ,$$

<u>converge, pour $\lambda \longrightarrow +\infty$ *, vers $J\vec{\sigma}$, $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$</u> ,

<u>si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite</u> :

* Nous prenons $\lambda \geqslant 0$. Pour $\lambda \longrightarrow -\infty$, l'intégrale tend vers $-J\vec{\sigma}$. On sait que $J = \frac{\pi}{2}$ (formule (IV,11;51)), mais on va le redémontrer ici.

Condition 1) : La fonction $\dfrac{\vec{f}(x)-\vec{\sigma}}{x}$ est intégrable au voisinage de l'origine * .

Celà se produit en particulier si $\vec{f}$ a une limite à droite $\vec{f}(0+0)$ à l'origine, et vérifie au voisinage de l'origine une condition de Hölder $|\vec{f}(x)-\vec{f}(0+0)| \leqslant C\,x^{\alpha}$, C et $\alpha > 0$; en particulier si $\vec{f}$ est dérivable à l'origine.

En outre, la convergence de $\vec{J}(\lambda;\vec{f})$ vers $J\vec{\sigma}$ pour $\lambda \longrightarrow +\infty$, est uniforme, lorsque $\vec{f}$ et $\vec{\sigma}$ varient, de manière que la condition soit vérifiée par chaque $(\vec{f},\vec{\sigma})$, que $\vec{f}$ parcoure une partie relativement compacte de $L^1(\mathbb{R},dx;\vec{F})$, $\vec{\sigma}$ une partie bornée de $\vec{F}$, et que $\int_0^{\delta}\left\|\dfrac{\vec{f}(x)-\vec{\sigma}}{x}\right\|dx$ converge vers 0 lorsque δ tend vers 0 , uniformément par rapport à $\vec{f},\vec{\sigma}$.

Condition 2) : La fonction $\vec{f}$ est à variation bornée au voisinage de l'origine, $\vec{F}$ est de dimension finie et $\vec{\sigma}=\vec{f}(0+0)$. Celà se produit en particulier si f est réelle, monotone et bornée au voisinage de 0 . En outre, la convergence de $\vec{J}(\lambda;\vec{f})$ vers $J\vec{\sigma}$ est uniforme lorsque $\vec{f}$ et $\vec{\sigma}$ varient, de manière que $\vec{f}$ décrive une partie relativement compacte de $L^1(\mathbb{R},dx;\vec{F})$, $\vec{f}(0+0)$ une partie bornée de $\vec{F}$, et que la variation totale $V(\vec{f};]0,\delta[)$ de $\vec{f}$ dans $]0,\delta[$ tende vers 0 lorsque δ tend vers 0 , uniformément par rapport à $\vec{f}$.

Démonstration - Supposons d'abord 1) réalisée. On peut écrire:

$$\begin{aligned} J(\lambda;\vec{f})-J\vec{\sigma} &= \int_{\delta}^{+\infty}\frac{\vec{f}(x)}{x}\sin\lambda x\,dx \\ &+ \left(\int_0^{\delta}\frac{\sin\lambda x}{x}\,dx - J\right)\vec{\sigma} \\ &+ \int_0^{\delta}\frac{\vec{f}(x)-\vec{\sigma}}{x}\sin\lambda x\,dx\,. \end{aligned}$$

* Cela n'entraîne pas que $\vec{f}$ tende vers $\vec{\sigma}$ quand $x \longrightarrow 0$; mais, si $\vec{f}$ a une limite, ce ne peut être que $\vec{\sigma}$; et $\vec{\sigma}$ est déterminée par $\vec{f}$, car $\dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable au voisinage de 0.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. On peut d'abord choisir δ de manière que le 3ème terme soit borné en norme par $\frac{\varepsilon}{3}$, uniformément lorsque $\vec{f}$ et $\vec{\sigma}$ varient dans les conditions indiquées. Fixons ainsi δ. Ensuite le second terme s'écrit $\left(\int_0^{\lambda\delta} \frac{\sin x}{x} dx - J\right)\vec{\sigma} = \vec{\sigma}\int_{\lambda\delta}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$; $\vec{\sigma}$ restant borné dans $\vec{F}$, on peut choisir λ assez grand pour qu'il soit borné en norme par $\frac{\varepsilon}{3}$. Comme ensuite $\frac{\vec{f}(x)}{x}$ est intégrable sur $[\delta, +\infty[$ on peut lui appliquer le théorème 1 (avec $\sin \lambda x = \frac{e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}}{2i}$) ; en outre l'application $(\vec{f}$ sur $[0, +\infty[) \longrightarrow (\frac{\vec{f}(x)}{x}$ sur $[\delta, +\infty[)$ est linéaire continue de $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ dans $L^1([\delta, +\infty[, dx; \vec{F})$ (de norme $\leq \frac{1}{\delta}$), donc, si $\vec{f}$ parcourt un compact de $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, la fonction $\frac{\vec{f}(x)}{x}$ parcourt un compact de $L^1([\delta, +\infty[, dx; \vec{F})$, et le 1er terme est borné en norme par $\frac{\varepsilon}{3}$ pour λ assez grand uniformément quand $\vec{f}$ varie dans les conditions indiquées; ce qui prouve le théorème si la condition 1) est réalisée.

Passons au cas de la condition 2).

Supposons donc $\vec{f}$ à variation bornée dans $[0, \delta]$, $\vec{F}$ de dimension finie, $\vec{\sigma} = \vec{f}(0+0)$ On peut supposer $\vec{f}$ continue à l'origine avec $\vec{f}(0) = \vec{f}(0+0)$, car $\vec{f}(0)$ ne joue aucun rôle; on peut de même supposer $\vec{f}$ partout continue à gauche, en remplaçant $\vec{f}(x)$ par $\vec{f}(x-0)$, là où elles sont différentes, car celà ne touche qu'une infinité dénombrable de points, donc ne change pas les intégrales, et ne peut qu'abaisser la variation totale de $\vec{f}$.

On sait alors que $\vec{f}$ est l'intégrale indéfinie d'une mesure $\vec{\mu}$, de base $\geqslant 0$, d'après le théorème 88 du Chapitre IV. En outre, on peut intégrer par parties (théorème 92 du chapitre IV).

Posons $T_\lambda(x) = \int_0^\delta \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \int_0^{\lambda\delta} \frac{\sin t}{t} dt$.

$T_\lambda(0) = 0$; pour $x \neq 0$, $T_\lambda(x) \longrightarrow J$ pour $\lambda \longrightarrow +\infty$, en restant bornée. On aura

$$\text{(3bis)} \qquad J(\lambda;\vec{f}) - J\vec{f}(0) = \int_\delta^{+\infty} \frac{\vec{f}(x)}{x} \sin \lambda x \, dx$$

$$+ \int_0^\delta \vec{f}(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx - J\vec{f}(0)$$

$$= \int_\delta^{+\infty} \frac{\vec{f}(x)}{x} \sin \lambda x \, dx$$

$$+ T_\lambda(\delta)\vec{f}(\delta) - J\vec{f}(0)$$

$$- \int_0^\delta T_\lambda(x) \, d\vec{\mu}(x)$$

$$= \int_\delta^{+\infty} \frac{\vec{f}(x)}{x} \sin \lambda x \, dx$$

$$+ T_\lambda(\delta)\left(\vec{f}(\delta) - \vec{f}(0)\right)$$

$$+ (T_\lambda(\delta) - J)\vec{f}(0)$$

$$- \int_0^\delta T_\lambda(x) \, d\vec{\mu}(x)$$

La variation totale de $\vec{f}$ dans $[0,\delta[$ (ou dans $]0,\delta[$ puisqu'on l'a supposée continue) vaut $\int_0^\delta d|\vec{\mu}|$, et est $\geqslant \|\vec{f}(\delta) - \vec{f}(0)\|$; puisque T_λ est borné, on peut fixer $\delta > 0$ pour que le 2ème et le 4ème termes soient bornés en norme chacun par $\frac{\varepsilon}{4}$, uniformément lorsque $\vec{f}$ varie dans les conditions indiquées. Ensuite, $\vec{f}(0)$ restant borne, on peut choisir λ assez grand pour que le 3ème terme soit $\leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, uniformément par rapport à $\vec{f}$, et de même pour le premier terme, par application du théorème 1; ce qui démontre le théorème dans le cas de la condition 2).

Corollaire - Soient $\vec{f}, \vec{g}$, deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, égales dans un voisinage de 0. Soit α une fonction complexe sur $\mathbb{R}$, mesurable, bornée inférieurement en dehors de tout voisinage de 0, deux fois dérivable au voisinage de 0, $\alpha(0)=0, \alpha'(0)=1$. Posons :

(3ter) $$K(\mu;\vec{g})=\int_0^{+\infty}\vec{g}(x)\,\frac{\sin\mu x}{\alpha(x)}\,dx\ ,\quad \mu\geq 0\ .$$

Alors, toutes les fois que $\vec{J}(\lambda;\vec{f})$ a une limite $J\vec{s}$ pour $\lambda\longrightarrow+\infty$, $\vec{K}(\mu;\vec{g})$ a la même limite $J\vec{s}$ pour $\mu\longrightarrow+\infty$; qu'il en soit ou non ainsi, si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ parcourent des parties relativement compactes de $L^1(\mathbb{R},dx;\vec{F})$ en restant égales sur un même voisinage de 0, $\vec{K}(\mu;\vec{f})-\vec{J}(\lambda;\vec{f})$ converge vers $\vec{0}$, uniformément par rapport à $\vec{f},\vec{g}$ lorsque λ et μ tendent vers $+\infty$, pourvu que $|\lambda-\mu|$ reste borné.

Démonstration - Il s'agit en réalité d'un pur corollaire du théorème 1 et non du théorème 2; mais nous le plaçons ici, parce que, le théorème 2 permettant de connaître, moyennant des conditions du type 1) ou 2), la limite $J\vec{s}$ de $\vec{J}(\lambda;\vec{f})$, ce corollaire donne la limite, égale aussi à $J\vec{s}$, de $\vec{K}(\mu;\vec{g})$. Bien entendu, il suffit de démontrer la fin de l'énoncé. On a :

(3quarto) $$\vec{K}(\mu;\vec{g})-\vec{J}(\lambda;\vec{f})=\big(\vec{K}(\mu,\vec{g})-\vec{J}(\mu;\vec{g})$$

$$+\big(J(\mu;\vec{g})-J(\mu;\vec{f}) \ +\big(\vec{J}(\mu;\vec{f})-J(\lambda;\vec{f})\big)$$

$$=\int_0^{+\infty}\vec{g}(x)\left(\frac{1}{\alpha(x)}-\frac{1}{x}\right)\sin\mu x\,dx$$

$$+\int_0^{+\infty}\frac{\vec{g}(x)-\vec{f}(x)}{x}\sin\mu x\,dx$$

$$+2\int_0^{+\infty}\frac{\vec{f}(x)\sin\frac{\mu-\lambda}{2}x}{x}\cos\frac{\mu+\lambda}{2}x\,dx$$

La fonction $\frac{1}{\alpha(x)} - \frac{1}{x}$ est mesurable et bornée sur $\mathbb{R}$
En effet, elle est bornée en dehors de tout voisinage de 0
Et, au voisinage de l'origine, la formule de Taylor montre que
$\alpha(x) - x = \alpha(x) - \alpha(0) - x\,\alpha'(0) \sim \frac{x^2}{2}\,\alpha''(0)$ pour $x \longrightarrow 0$
(théorème 21 du chapitre II), de sorte que

$$\frac{1}{\alpha(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x-\alpha(x)}{x\,\alpha(x)} \quad \text{tend vers } \frac{1}{2}\alpha''(0)$$

quand $x \longrightarrow 0$, et est donc encore borné au voisinage de 0.
Donc, d'après le théorème 1, la 1ère intégrale tend vers $\vec{0}$ pour $\mu \longrightarrow +\infty$; en outre, si $\vec{f}$ parcourt un compact de $L^1(\mathbb{R}, dx\,; \vec{F})$, il en est de même de la fonction $\vec{f}(x)\left(\frac{1}{\alpha(x)} - \frac{1}{x}\right)$ parce que $\vec{f} \longrightarrow \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x}\right)\vec{f}$ est continue de $L^1(\mathbb{R}, dx\,; \vec{F})$ dans lui-même; donc la convergence est uniforme par rapport à $\vec{f}$. Ceci achève la démonstration du corollaire si on se borne au cas $\vec{f} = \vec{g}$, $\lambda = \mu$.

Ensuite $\frac{\vec{g}(x) - \vec{f}(x)}{x}$ est intégrable, car $\vec{g} - \vec{f}$ est nulle au voisinage de 0 ; la 2ème intégrale tend donc vers $\vec{0}$ pour $\mu \longrightarrow \infty$ d'après le théorème 1; en outre, la fonction $\frac{\vec{g} - \vec{f}}{x}$ parcourt un compact de $L^1([\delta, +\infty[\,, dx\,; \vec{F})$ quand $\vec{f}$ et $\vec{g}$ parcourent des compacts de $L^1(\mathbb{R}, dx\,; \vec{F})$, et le 2ème terme est une intégrale sur $[\delta, +\infty[$ dsi $\vec{f}$ et $\vec{g}$ coïncident dans $[0, \delta]$; donc le 2ème terme tend vers l'infini pour $\mu \longrightarrow +\infty$, uniformément par rapport à $\vec{f}, \vec{g}$ dans les conditions indiquées.

Si l'on se borne au cas $\lambda = \mu$, la démonstration est achevée. Mais supposons seulement $|\mu - \lambda|$ borné. L'application $(\vec{f}, g) \longrightarrow \vec{f} g$ est bilinéaire continue, de norme ≤ 1, de $L^1(\mathbb{R}, dx\,; \vec{F}) \times (\mathbb{C}^{\mathbb{R}})_{cb}$ dans $L^1(\mathbb{R}, dx\,; \vec{F})$; l'application $\tau \longrightarrow$ (fonction $\frac{\sin \tau x}{x}$) est continue et même lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{C}^{\mathbb{R}})_{c,b}$, car

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sin \tau'' x}{x} - \frac{\sin \tau' x}{x} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} 2 \left| \frac{\sin \frac{\tau''-\tau'}{2} x}{x} \cos \frac{\tau''+\tau'}{2} x \right|$$
$$\leq |\tau'' - \tau'|$$

donc l'application $(\vec{f}, \tau) \longrightarrow$ (fonction $\vec{f}(x)\dfrac{\sin \tau x}{x}$) est continue de $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F}) \times \mathbb{R}$ dans $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$; si alors $\vec{f}$ parcourt un relativement compact de $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, et τ un relativement compact de $\mathbb{R}$, la fonction $\vec{f}(x)\dfrac{\sin \tau x}{x}$ parcourt un relativement compact de $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. Si donc $\vec{f}$ parcourt un relativement compact de $L^1_\lambda(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ et si $\lambda-\mu$ reste borné, la fonction $\vec{f}(x)\dfrac{\sin \frac{\mu-\lambda}{2} x}{x}$ parcourt un relativement compact de $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. Alors la dernière intégrale (3 quarto) converge uniformément vers $\vec{0}$ pour $\mu + \lambda \longrightarrow +\infty$, en vertu du theorème 2, ce qui achève de démontrer le corollaire.

Convergence de la série de Fourier

Théorème 3

Soit $\vec{f}$ une fonction périodique de période T sur $\mathbb{R}$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$; supposons $\vec{f}$ intégrable sur un intervalle-période.

Soit $\vec{s} \in \vec{F}$, et supposons que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

1) La fonction paire $t \longrightarrow \dfrac{\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t)-2\vec{s}}{t}$ est intégrable au voisinage de 0 ;

2) la fonction paire $t \longrightarrow \dfrac{\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t)}{2}$ est à variation bornée au voisinage de 0, sa limite à droite (et à gauche) pour $t=0$ est $\vec{s}$, et $\vec{F}$ est de dimension finie.

Alors la série de Fourier de $\vec{f}$:

$$(4) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \vec{c}_k(\vec{f})e^{ik\omega x} \quad , \quad \vec{c}_k(\vec{f}) = \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} \vec{f}(\xi)e^{-ik\omega\xi}\frac{d\xi}{T}$$

converge, pour $x = a$, vers $\vec{s}$, en valeur principale de Cauchy :

$$(5) \qquad \lim_{N\to+\infty} \vec{S}_N(a;\vec{f}) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{+N} \vec{c}_k(\vec{f})e^{ik\omega a} = \vec{s}.$$

En outre l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ vaut $\frac{\pi}{2}$ *.

Si A est un ensemble fermé de $\mathbb{R}$, si $\vec{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tout point de A **, et si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

Condition 1') $\vec{f}$ vérifie, sur un voisinage A' de A, une condition de Hölder :

$$\|\vec{f}(x)-\vec{f}(y)\| \leq C\,|x-y|^{\alpha}, \text{ pour } x \in A, y \in A'; \quad C \text{ et } \alpha > 0.$$

Condition 2') $\vec{f}$ est à variation localement bornée sur un voisinage A' de A, et $\vec{F}$ est de dimension finie;

alors la convergence de $\vec{S}_N(\vec{f})$ vers $\vec{f}$ pour N infini est uniforme sur A.

Démonstration - On a :

$$(6) \qquad \vec{c}_k(\vec{f})e^{ik\omega a} = \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} \vec{f}(\xi)\, e^{ik\omega(a-\xi)} \frac{d\xi}{T} \quad ***$$

de sorte que

$$(7) \qquad \vec{S}_N(a;\vec{f}) = \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} \vec{f}(\xi)\, R_N(a-\xi) \frac{d\xi}{T}, \quad R_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} e^{ik\omega t}$$

Calculons donc R_N. C'est la somme des termes d'une progression géométrique, de sorte que

* C'est une nouvelle démonstration de la formule (IV,11;51).

** Cela implique plus que la continuité de la restriction de $\vec{f}$ à A ; par contre, cela n'implique pas la continuité de $\vec{f}$ sur un voisinage de A.

*** C'est un cas particulier de la formule 33 du fascicule "Séries de Fourier", appliqué à une fonction $\vec{f}$. Il s'agit là, rappelons-le, de la convolution sur le cercle Γ, qui se traduit, pour des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$, par une formule intégrale sur un intervalle-période: $(f * g)(x) = \int_b^{b+T} f(x-\xi)g(\xi)d\xi$.

La formule (6) est évidente directement.

$$(8)\qquad R_N(t) = \frac{e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}}{e^{i\omega t} - 1} = \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\omega t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\omega t}}{e^{\frac{i\omega t}{2}} - e^{-\frac{i\omega t}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{\sin\frac{\omega t}{2}}, \text{ et}$$

$$(9)\qquad \vec{S}_N(a;\vec{f}) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \vec{f}(a-t)\, R_N(t)\,\frac{dt}{T}$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \vec{f}(a-t)\,\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\omega t}{\sin\frac{\omega t}{2}}\;\frac{dt}{T}$$

$$= \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\pi}\left(\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t)\right)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{\left(\sin\frac{\omega t}{2}\Big/\frac{\omega}{2}\right)}\,dt,$$

On trouve une intégrale (3 ter), avec une fonction

(9 bis) $\vec{\Phi}_a(t) = \frac{1}{\pi}\left(\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t)\right)$ dans $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, nulle ailleurs; $\mu = \left(N+\frac{1}{2}\right)\omega$; $\alpha(t) = \dfrac{\sin\frac{\omega t}{2}}{\frac{\omega}{2}}$ dans $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, égale à n'importe quelle constante $\neq 0$ ailleurs; α est bien bornée inférieurement en dehors de tout voisinage de 0, et $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) = 1$.

Si $\vec{f}$ vérifie la condition 1) ou 2) du théorème 3, $\vec{\Phi}_a$ vérifie la condition 1) ou 2) du théorème 2 avec $\vec{\sigma} = \frac{2}{\pi}\vec{s}$, car

$$(9\text{ ter})\qquad \vec{\Phi}_a(t) - \vec{\sigma} = \frac{1}{\pi}\left(\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t) - 2\vec{s}\right)$$

et

$$\Phi_a(0+0) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{2}\left(\vec{f}(a+0)+\vec{f}(a-0)\right) = \frac{2}{\pi}\vec{s}$$

Le théorème 2 et son corollaire nous disent alors que $\vec{S}_N(a;\vec{f})$ converge, pour N infini vers $J\vec{\sigma} = J\frac{2}{\pi}\vec{s}$, $J = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

Si donc nous démontrons que $J = \frac{\pi}{2}$, le résultat relatif à la convergence en un point a sera démontré. Mais il suffit d'appliquer ce qui précède à la constante $f = 1$, alors tous les $c_k(f)$ valent 0 sauf $c_0(f) = 1$ et nécessairement $S_N(a;1) = 1$ tend vers 1, or il doit tendre vers $J\frac{2}{\pi}1$, donc $J = \frac{\pi}{2}$.

Avant de démontrer le résultat concernant la convergence uniforme, donnons un corollaire évident du résultat relatif à la convergence simple :

Corollaire 1 - Si $\vec{f}$ vérifie l'une des deux conditions suivantes:

1) La fonction $\vec{f}$ a une limite à droite $\vec{f}(a+0)$ et une limite à gauche $\vec{f}(a-0)$ au point a, et les fonctions $t \longrightarrow \frac{\vec{f}(a+t)-\vec{f}(a+0)}{t}$, $t \longrightarrow \frac{\vec{f}(a-t)-\vec{f}(a-0)}{t}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ au voisinage de 0 ; celà se produira en particulier si $\vec{f}$ vérifie des conditions de Hölder, $\|\vec{f}(x)-\vec{f}(a+0)\| \leq C\,|x-a|^\alpha$ pour $x \geq a$, et $\|\vec{f}(x)-\vec{f}(a-0)\| \leq C\,|x-a|^\alpha$ pour $x \leq a$; en particulier, si $\vec{f}$ est dérivable au point a ;

2) La fonction $\vec{f}$ est à variation bornée au voisinage de a et $\vec{F}$ est de dimension finie; celà se produira en particulier si f est réelle, monotone, et bornée au voisinage de a;

Alors la série de Fourier de $\vec{f}$ converge, pour $x = a$; en valeur principale de Cauchy, vers $\frac{1}{2}\left(\vec{f}(a+0)+\vec{f}(a-0)\right)$.

Passons maintenant au cas de la convergence uniforme. Dans les conditions où l'on se place, $\vec{S}_N(a;\vec{f})$ converge vers $\vec{f}(a)$ pour N infini, pour tout a de A, et nous devons montrer que cette convergence est uniforme pour $a \in A$. Il suffit pour celà de montrer que la fonction $\vec{\Phi}_a$ vérifie les conditions données au théorème 2, permettant d'affirmer la convergence de $\int_0^\infty \vec{\Phi}_a(t)\,\frac{\sin \mu t}{\alpha(t)}\,dt$ vers $J\vec{\sigma} = \vec{f}(a)$ pour $\lambda \longrightarrow +\infty$ uniformément pour a dans A.

Nous allons d'abord vérifier que, lorsque $\vec{f}$ reste fixée mais que a varie sur Γ *, les fonctions $\vec{\Phi}_a$ forment un compact de $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$. Appelons u_a l'application linéaire,

* Nous identifions systématiquement les fonctions sur le cercle Γ, et les fonctions sur $\mathbb{R}$, périodiques de période T. Celà mène à certains abus de langage, qui seront aisément compris.

continue $\vec{f} \longrightarrow \vec{\Phi}_a$ de $L^1(\Gamma, dt; \vec{F})$ dans $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$; sa norme est bornée par $\frac{1}{\pi}$. Si a tend vers a_0 , $u_a \vec{f}$ tend vers $u_{a_0} \vec{f}$ dans $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$ si $\vec{f}$ est une fonction continue, puisque elle converge même vers $u_{a_0} \vec{f}$ uniformément sur $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ et reste nulle en dehors; donc u_a converge vers u_{a_0} simplement sur le sous-ensemble dense $\mathscr{C}(\Gamma; \vec{F})$ de $L^1(\Gamma, dt; \vec{F})$; d'après le 2ème théorème d'Ascoli $u_a \vec{f}$ converge aussi vers $u_{a_0} \vec{f}$ pour toute fonction $\vec{f}$ de $L^1(\Gamma, dt; \vec{F})$. Celà prouve que, pour $\vec{f}$ fixée dans $L^1(\Gamma, dt; \vec{F})$, l'application $a \longrightarrow u_a \vec{f} = \vec{\Phi}_a$ est continue de Γ dans $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$; donc l'image du compact Γ est bien un compact de $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$. Ceci est uniquement une conséquence de l'intégrabilité de $\vec{f}$ sur Γ .

Supposons ensuite la condition 1') de l'énoncé vérifiée. Soit δ_0 la plus courte distance de A et de $\complement A'$ (voir chapitre II, page 81). Pour $\delta \leqslant \delta_0$, on aura la majoration suivante, pour $a \in A$:

$$(10) \qquad \int_0^\delta \left\| \frac{\vec{\Phi}_a(t) - \frac{2}{\pi}\vec{f}(a)}{t} \right\| dt \leqslant \frac{1}{\pi} 2C \frac{\delta^\alpha}{\alpha}$$

de sorte que le 1er membre converge vers 0 pour δ tendant vers 0 , uniformément pour a dans A ; le corollaire du théorème 2 permet alors d'affirmer que $\vec{S}_N(\vec{f})$ converge vers $\vec{f}$ uniformément sur A .

Supposons enfin la condition 2') de l'énoncé vérifiée. Montrons que si la condition d'uniformité 2) du théorème 2 n'était pas vérifiée, nous aboutirions à une contradiction. Il existerait une suite de points a_n de A , et un nombre $\varepsilon > 0$ tels qu'on ait toujours :

$$(10\text{bis}) \qquad V\left(\vec{\Phi}_{a_n}; \left]0, \frac{1}{n}\right[\right) \geqslant \varepsilon \ .$$

Mais, A étant compact sur Γ , on peut extraire des a_n une suite partielle ayant une limite a dans A ; les $a_n \pm \frac{1}{n}$ tendent aussi vers a . Ensuite $\vec{f}$ est supposée à variation bornée au voisinage de a , et continue au point a ; donc la variation de $\vec{f}$ dans $[a-\eta, a+\eta]$ tend vers 0 avec η (théorème

84 bis du Chapitre IV), et sa variation dans $[a_n - \frac{1}{n}, a_n + \frac{1}{n}]$ tend donc vers 0 pour n infini; donc $V(\vec{\Phi}_{a_n}; [0, \frac{1}{n}])$ tend vers 0 pour n infini, ce qui contredit (10bis).

Donc il est bien vrai que la variation de $\vec{\Phi}_a$ dans$]0,\delta[$ tend vers 0 avec δ uniformément pour $a \in A$, donc la condition uniforme 2) du théorème 2 est vérifiée, et $\vec{S}_N(\vec{f})$ converge vers $\vec{f}$ pour N infini, uniformément sur A .

De cette convergence unoforme, on déduira le corollaire:

<u>Corollaire 2</u> - <u>Si $\vec{f}$ est à variation localement bornée sur $\mathbb{R}$, et $\vec{F}$ de dimension infinie, la convergence de $\vec{S}_N(\vec{f})$ vers $\vec{f}$ pour N infini est uniforme sur l'ensemble A des points de continuité de $\vec{f}$. Si $\vec{f}$ est höldérienne (donc continue) sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire vérifie une condition</u>

$$\text{(10 ter)} \qquad \|\vec{f}(x)-\vec{f}(y)\| \leq C|x-y|^{\alpha}, \quad C \text{ et } \alpha > 0 \quad ,$$

<u>ou si elle est a variation localement bornée et partout continue avec $\vec{F}$ de dimension finie, $\vec{S}_N(\vec{f})$ converge pour N infini vers $\vec{f}$, uniformément sur $\mathbb{R}$</u>.

<u>Remarques</u> - 1°/ Les conditions 1) et 2) relatives à $\vec{f}(a+t) + \vec{f}(a-t)$ sont moins restrictives que les conditions séparées relatives à $\vec{f}(a+t)$, $\vec{f}(a-t)$ énoncées dans le corollaire 1. Par exemple, prenons $a=0$, et $\vec{f}$ impaire . Alors $\vec{f}(t) + \vec{f}(-t)$ est identiquement nulle, donc 1) et 2) sont réalisées avec $\vec{s}=0$; la série de Fourier est d'ailleurs une série de sinus, les sommes $\vec{S}_N(0;\vec{f})$ sont toutes nulles, et la convergence vers $\vec{0}$ est triviale; il serait ridicule d'imposer à $\vec{f}$ des conditions telles que l'intégrabilité de $\frac{\vec{f}(t)}{t}$ ou la variation bornée de $\vec{f}'$.

2°/ Nous avons bien spécifié que la série convergeait <u>en valeur principale de Cauchy</u>, c'est-à-dire $\sum_{k=-N}^{+N}$ convergeait vers $\vec{s}$; mais les séries $\sum_{k=-1}^{-\infty}$, $\sum_{k=0}^{+\infty}$, peuvent diverger. Prenons par exemple pour $\vec{f}$ la fonction impaire, égale à -1 dans $\left]-\frac{T}{2}, 0\right[$, à + 1 dans $\left]0, +\frac{T}{2}\right[$. Ses coefficients valent

$$(11) \qquad c_k(\vec{f}) = 0 \text{ pour } k \text{ pair, et } c_{2\ell+1}(\vec{f}) = + \frac{2}{(2\ell+1)i\pi}.$$

La série est une série de sinus :

$$(11^{bis}) \qquad + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\sin(2\ell+1)\omega x}{2\ell+1}.$$

La convergence vers 0 pour $x = 0$ résulte, comme dans la remarque 1°, de considérations triviales. Mais $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\vec{f}) e^{ik\omega x}$ vaut $\frac{2}{i\pi} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{e^{(2\ell+1)i\omega x}}{2\ell+1}$ et les séries $\sum_{k=-1}^{-\infty}$, $\sum_{k=0}^{+\infty}$ sont toutes deux divergentes pour $x = 0$.

3°/ Considérons la suite des fonctions $\frac{1}{T} R_N(x)$, sur le cercle Γ. Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$, et plus généralement pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^1(\Gamma)$, $\langle \frac{1}{T} R_N, \varphi \rangle$ converge, pour N infini, vers $\varphi(0)$; donc $\frac{1}{T} R_N$ converge vers δ dans l'espace $\mathcal{D}'(\Gamma)$ des distributions sur Γ, et même dans l'espace $\mathcal{D}'^1(\Gamma)$ des distributions d'ordre ≤ 1 sur Γ.

Les $\frac{1}{T} R_N$ convergent-elles aussi vers δ vaguement, autrement dit dans $\mathcal{D}'^0(\Gamma) = C'(\Gamma)$, muni de la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{D}^0(\Gamma) = C(\Gamma)$? Ou encore, la série de Fourier d'une fonction continue converge-t-elle toujours simplement vers cette fonction ?

Nous allons montrer que <u>la continuité de $\vec{f}$ n'est ni nécessaire ni suffisante pour que la série de Fourier de $\vec{f}$ converge simplement vers $\vec{f}$</u>.

D'abord, si $\vec{f}$ est à variation bornée sur la période, et si, en tout point a, on a $\vec{f}(a) = \frac{1}{2}(\vec{f}(a+0) + \vec{f}(a-0))$, la série de Fourier de $\vec{f}$ converge simplement vers $\vec{f}$, malgré l'existence de discontinuités; la continuité de $\vec{f}$ n'est donc pas nécessaire pour la convergence.

Mais elle n'est pas non plus suffisante. Il n'est pas trivial du tout de donner un exemple d'une fonction continue dont la série de Fourier n'est pas convergente. Mais le théorème de Banach-Steinhaus va nous permettre de montrer le même résultat, sans avoir à exhiber de contre-exemple.

Supposons que, pour toute fonction φ continue sur Γ, la série de Fourier de φ converge au point 0, c'est-à-dire que $\frac{1}{T} R_N$ converge vaguement vers δ pour N infini. Le théorème de Banach-Steinhaus entraînerait que les normes des mesures $\frac{1}{T} R_N\, dx$ soient bornées par un nombre fixe $M > 0$:

$$\left\| \frac{1}{T} R_N\, dx \right\| = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |R_N(x)| \frac{dx}{T} \leqslant M . \tag{12}$$

Or on a immédiatement

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left| R_N(x) \frac{dx}{T} \right| = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left| \frac{\sin (N+\frac{1}{2})\, \omega x}{\sin \frac{\omega x}{2}} \right| \frac{dx}{T} \tag{13}$$

$$= \int_{-(N+\frac{1}{2})\frac{T}{2}}^{+(N+\frac{1}{2})\frac{T}{2}} \left| \frac{\sin \omega \xi}{(N+\frac{1}{2}) \sin \frac{\omega \xi}{2(N+\frac{1}{2})}} \right| \frac{d\xi}{T}$$

Lorsque N tend vers $+\infty$, la fonction à intégrer sur $\mathbb{R}$, f_n, produit de $\frac{1}{T} \left| \frac{\sin \omega \xi}{(N+\frac{1}{2}) \sin \frac{\omega \xi}{2(N+\frac{1}{2})}} \right|$ par la fonction caractéristique de l'intervalle $\left[-(N+\frac{1}{2}) \frac{T}{2}, +(N+\frac{1}{2}) \frac{T}{2} \right]$ tend vers $\frac{2}{T} \left| \frac{\sin \omega \xi}{\omega \xi} \right|$, dont <u>l'intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut $+\infty$</u>. Posons $g_{m,n} = \operatorname{Inf}(f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n)$, $n \geqslant m$, $g_m = \lim_{n \to \infty} g_{m,n}$ (limite d'une suite décroissante); on a $\lim_{m \to \infty} g_m = \frac{2}{T} \left| \frac{\sin \omega \xi}{\omega \xi} \right|$, limite d'une suite croissante. D'après le théorème de Fatou (théorème 36 du chapitre IV), $\int g_m$ tend vers $+\infty$ pour m infini; comme $f_n \geqslant g_m$ pour $n \geqslant m$, $\int f_n$ aussi tend vers $+\infty$, d'où la contradiction avec (12); et ainsi la continuité de φ n'est pas suffisante pour la convergence simple de sa série de Fourier.

Mais le théorème de Banach-Steinhaus, sous sa forme générale donnée au § 7 du chapitre VII (théorème 46) nous permet d'approfondir ce résultat. Il nous dit que, pour B-presque toute fonction complexe continue f sur Γ, les sommes partielles $S_N(0, f)$ de la série de Fourier ne sont pas bornées. On peut en dire autant pour n'importe quel autre point a de Γ. Mais alors, comme une réunion dénombrable d'ensembles maigres est encore maigre, si A est un ensemble dénombrable de Γ pour B – presque toute fonction continue f sur Γ, les $S_N(a; f)$ ne sont bornées en aucun point a de A. A fortiori, B – presque toutes les f ont leur série de Fourier divergente en tout point a de A. <u>Il ne serait cependant pas du tout trivial d'exhiber un exemple d'une fonction f ayant cette propriété.</u> Si alors A est dense, la méthode indiquée après le théorème 46 du chapitre VII montre que toute fonction f, telle que les $S_N(a; f)$ soient non bornées en tout point a de A, a aussi ses sommes $S_N(a; f)$ non bornées en B – presque tout point a de Γ : <u>B – presque toutes les fonctions continues ont leur série de Fourier B – presque partout divergente.</u> Exprimons ce résultat avec des quantificateurs :

$(\exists \mathcal{F}$, ensemble maigre dans $C(\Gamma))$ $(A\, f \notin \mathcal{F})$

$(\exists B$, ensemble maigre de $\mathbb{R})$: (la série de Fourier de f diverge en tout point de $\complement B$).

Comme tout "B – presque partout" de Γ a la puissance du continu, il existe donc des fonctions continues périodiques dont l'ensemble des points de divergence de la série de Fourier a la puissance du continu. Cela ne prouve pas, par contre, que l'ensemble des points de divergence ait une mesure de Lebesgue > 0, car un "B – presque partout" peut être de mesure de Lebesgue nulle.

On ne sait pas s'il existe une fonction continue dont la série de Fourier soit partout ou même presque partout divergente.

Ce fait que les $\frac{1}{T} R_N$ convergent vers δ dans $\mathcal{D}'(\Gamma)$, mais pas vaguement, est une sorte de "raté" des mathématiques, un résultat moins bon que ce qu'on aurait pu attendre; mais il a été une source de nombreux travaux qui ont développé beaucoup de branches de l'Analyse.

4°/ On a des exemples de fonctions continues dont la série de Fourier converge partout, mais non uniformément.

5°/ Nous avons vu que, si $f \in L^2(\Gamma, dx)$, la série de Fourier de f converge vers f dans L^2 *. Ceci subsiste pour $f \in L^p$, $1 < p < +\infty$, mais la démonstration est difficile. Par contre c'est faux pour $p = 1$ ou $+\infty$. Celà résulte de ce qui précède pour $p = \infty$ (puisque, si f est continue, elle est dans L^∞, et les $S_N(f)$ ne convergent pas uniformément vers f donc ne convergent pas dans L^∞ vers f); montrons-le pour $p=1$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, si, pour toute $f \in L^1(\Gamma)$, les $S_N(f) = \frac{1}{T} R_N * f$ convergeaient dans L^1 vers f, les opérateurs $\frac{1}{T} R_N *$ de L^1 dans L^1 : $f \to \frac{1}{T} R_N * f$, auraient des normes $\left\| \frac{1}{T} R_N * \right\|$ bornées dans leur ensemble. Fixons-nous N. Soit ρ_j une suite de fonctions continues $\geqslant 0$ sur Γ, de support tendant vers l'origine, d'intégrale 1; d'après l'exemple 1 après le théorème 67 du chapitre IV, les $\rho_j\, dx$ convergent vaguement vers δ sur Γ pour j infini. Donc, d'après le corollaire 3 du théorème 66 du chapitre IV, les $\frac{1}{T} R_N * \rho_j$, définies par $x \to \frac{1}{T}\int_T R_N(x-\xi)\,\rho_j(\xi)\,d\xi$, convergent pour j infini vers $\frac{1}{T} R_N$, uniformément sur Γ : donc $\int_T \left| \frac{1}{T} R_N * \rho_j \right|$ converge vers $\int_T \left| \frac{1}{T} R_N \right|$ pour j infini. Donc on a l'inégalité, sur Γ :

$$(14) \quad \left\| \frac{1}{T} R_N * \right\| \geqslant \frac{\left\| \frac{1}{T} R_N * \rho_j \right\|_{L^1}}{\| \rho_j \|_{L^1}} = \int_T \left| \frac{1}{T} R_N * \rho_j \right| \text{ donc } \geqslant \int \left| \frac{1}{T} R_N \right| ,$$

et comme $\int_\Gamma \left| \frac{1}{T} R_N \right|$ tend vers $+\infty$ pour N infini d'après ce que nous venons de voir après (13), nous aboutissons bien à une contradiction. Ici encore, en utilisant la notion d'ensemble maigre, B - presque toutes les fonctions de $L^1(\Gamma)$ ont une série de Fourier divergente dans L^1. On connaît un exemple d'une fonction de $L^1(\Gamma)$ dont la série de Fourier diverge en tout point.

Par contre, si $|f| \log(1+|f|)$ est intégrable sur Γ, on démontre que la série de Fourier de f converge vers f dans $L^1(\Gamma, dx)$

* On peut étendre à $\vec{f} \in L^2(\Gamma, dx ; \vec{F})$, si $\vec{F}$ est de dimension finie; mais pas si $\vec{F}$ est quelconque.

Comportement local d'une fonction, et convergence comparée de la série de Fourier et de l'intégrale de Fourier

Soit $\vec{f}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Son intégrale de Fourier est définie par (1). Ce qui remplace ici la convergence de la série de Fourier est la validité de la formule de réciprocité de Fourier, en valeur principale de Cauchy :

$$(14^{bis})\qquad \vec{f}(a) = \lim_{L\to+\infty}\int_{-L}^{+L} \vec{C}(\lambda;\vec{f})\, e^{2i\pi\lambda a}\, d\lambda .$$

La fonction $\vec{C}$ est continue et tend vers $\vec{0}$ à l'infini d'après le théorème 1, donc le 2ème membre n'a aucune raison en général d'avoir un sens. S'il en a un, il s'agira en général d'une convergence non absolue; c'est-même une valeur principale de Cauchy, parce que nous avons écrit $\lim\limits_{L\to+\infty}\int_{-L}^{+L}$ et non $\lim\limits_{A,B\to+\infty}\int_{-A}^{+B}$ (ou encore : il se peut que (14) soit valable, mais que $\int_{-\infty}^{0}$ et $\int_{0}^{+\infty}$ soient des intégrales divergentes).

Le calcul du 2ème membre de (14) est aisé :

$$(15)\qquad \Sigma_L(a;\vec{f}) = \int_{-L}^{+L} \vec{C}(\lambda;\vec{f})\, e^{2i\pi\lambda a}\, d\lambda$$

$$= \int_{-L}^{+L} e^{2i\pi\lambda a}\, d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(x)\, e^{-2i\pi\lambda x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(x)\, dx \int_{-L}^{+L} e^{2i\pi\lambda(a-x)}\, d\lambda \; {}^{*}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi L(a-x)}{a-x}\, \vec{f}(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi L t}{t}\, \vec{f}(a-t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\left[\vec{f}(a+t) + \vec{f}(a-t)\right] \frac{\sin 2\pi L t}{t}\, dt .$$

* Voir renvoi page suivante

On est donc encore ramené à une intégrale de Dirichlet et au théorème 2, mais dans des conditions encore plus simples que pour la série de Fourier, car il n'y a pas le facteur
$\alpha(t) = \dfrac{\sin \frac{\omega t}{2}}{\frac{\omega}{2}}$ qui nous obligeait dans la formule (9) à appliquer le corollaire du théorème 2, au lieu de ce théorème lui-même. De ce fait on a immédiatement les résultats analogues :

Théorème 4 -

Si $\vec{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, le théorème 3 et ses 2 corollaires sont valables, en remplaçant la convergence de $\vec{S}_N$ par celle de $\vec{\Sigma}_L$, la convergence uniforme sur A ou $\mathbb{R}$ par la convergence uniforme sur tout compact de A ou de $\mathbb{R}$ ** .

Mais en outre, le corollaire du théorème 2 nous permet de comparer les séries de Fourier et les intégrales de Fourier de fonctions différentes, pourvu qu'elles coïncident sur un ouvert :

Théorème 5 -

Soit $\vec{f}$ une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ de période 1, localement intégrable, et $\vec{g}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$

* L'interversion des intégrations est légitime, parce que $\|\vec{f}(x)\|$ est $(dx \otimes d\lambda)$- intégrable sur $\mathbb{R} \times [-L, +L]$ (Fubini). (Par contre elle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; d'ailleurs le résultat avec $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\lambda(a-x)}\, d\lambda$ serait dénué de sens, et en général, comme nous l'avons dit, $\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{C}(\lambda)\, e^{2i\pi\lambda a}\, d\lambda$ n'a pas de sens comme intégrale de Lebesgue, $\vec{C}$ n'est pas $d\lambda$ - intégrable).

** Cette petite distinction entre la série et l'intégrale de Fourier est claire. Sur Γ , un fermé A était compact; ou encore, si A était fermé périodique sur $\mathbb{R}$, la convergence uniforme de fonctions périodiques sur tout compact de A entraînait leur convergence uniforme sur A .

Supposons que $\vec{f}$ et $\vec{g}$ coïncident sur un voisinage A' d'un compact A de $\mathbb{R}$. Alors la différence $\vec{S}_N(\vec{f}) - \vec{\Sigma}_L(\vec{g})$ converge vers $\vec{0}$ uniformément sur A, lorsque L et N tendent vers $+\infty$, pourvu que la différence $|L - N|$ reste bornée.

Démonstration - On a

$$(16) \qquad \vec{S}_N(a;\vec{f}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi}\left(\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t)\right) \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)2\pi t}{(\sin \pi t/\pi)}\, dt$$

$$\vec{\sum}_L(a;\vec{g}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi}\left(\vec{g}(a+t)+\vec{g}(a-t)\right) \frac{\sin 2\pi L t}{t}\, dt .$$

On a déjà vu que, lorsque a varie sur un compact, le produit de la fonction $\frac{1}{\pi}\left(\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t)\right)$ par la fonction caractéristique de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et la fonction $\frac{1}{\pi}\left(\vec{g}(a+t)+\vec{g}(a-t)\right)$ parcourent des compacts de $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$; et, si δ_0 est la plus courte distance de A et de $\complement A'$, elles coïncident dans $[0,\delta_0]$, pour tout $a \in A$. Il suffit bien alors d'appliquer le corollaire du théorème 2, avec $\lambda = 2\pi L$, $\mu = 2\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)$, $\alpha(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi}$ dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, prolongée par une constante $\neq 0$ en dehors.

Remarque - Nous avons pris $\vec{f}$ de période 1, parce que, dans la définition de $\mathscr{C}(\lambda;\vec{f})$, on prend $e^{-2i\pi\lambda x}$, soit $e^{-i\lambda\omega x}$ avec $\omega = 2\pi$, $\frac{2\pi}{\omega} = 1$. Si $\vec{f}$ a une période T quelconque, il faut changer d'intégrale de Fourier pour $\vec{g}$; ou bien garder la même, mais imposer que $(N - TL)$ reste borné, de façon que $|\lambda - \mu|$ reste borné, avec $\lambda = \left(N+\frac{1}{2}\right)\omega$, $\mu = 2\pi L$.

Remarque 2 - La convergence simple de la série ou de l'intégrale de Fourier étant le résultat d'un théorème de démonstration non triviale, elle donne presque toujours des formules remarquables. Reprenons par exemple la formule (94) du fascicule "Série de Fourier"; elle devient, si l'on remplace λ par iz, et si l'on prend $T = 2\pi$ donc $\omega = 1$, la formule (VII,4;43) du chapitre VII, obtenue à cet endroit par utilisation du théorème de Liouville.

La formule $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ qui joue partout ici un rôle essentiel, a été obtenue en cours de route au théorème 3, en utilisant le fait que la convergence de la série de Fourier était évidente pour une constante $f=1$; il est bon de remarquer qu'elle est exactement la formule de réciprocité de Fourier pour $f=$ fonction caractéristique de l'intervalle, $\left[-\frac{1}{2\pi} ; +\frac{1}{2\pi}\right]$

$$(17) \qquad C(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2\pi}}^{+\frac{1}{2\pi}} e^{-2i\pi\lambda x}\, dx = \frac{\sin \lambda}{\pi\lambda},$$

et la formule de réciprocité (14) pour $a=0$ donne

$$(18) \qquad 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\lambda}{\pi.\lambda}\, d\lambda \quad \text{ou} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda = \frac{\pi}{2}.$$

Espaces hilbertiens

Ce chapitre se trouvera ainsi désigné
dans l'édition augmentée et refondue du cours d'analyse
qui paraitra à la suite de cette première publication
reproduisant avec quelques corrèctions
les cours polycopiés de l'Ecole Polytechnique

§ 1 FORMES SESQUILINÉAIRES

Définition : On appelle application semi-linéaire ou anti-linéaire d'un espace vectoriel $\vec{E}$ dans un espace vectoriel $\vec{F}$ une application u vérifiant :

$$(2,\text{XXII},1;1)\quad \begin{cases} u(\vec{x}+\vec{y})=u(\vec{x})+u(\vec{y}), & \text{pour } \vec{x},\vec{y}\in\vec{E}\ ; \\ u(\lambda\vec{x})=\bar{\lambda}\,u(\vec{x}), & \text{pour } \vec{x}\in\vec{E},\ \lambda\in\mathbb{K}\ . \end{cases}$$

Si le corps des scalaires est $\mathbb{R}$, semi-linéaire coïncide donc avec linéaire.

Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel. Une fonction scalaire B sur $\vec{E}\times\vec{E}$ est dite sesquilinéaire [1], si elle est linéaire par rapport à la première variable et semi-linéaire par rapport à la deuxième :

a) pour $\vec{y}$ fixé, $\vec{x}\longrightarrow B(\vec{x},\vec{y})$ est linéaire ;

b) pour $\vec{x}$ fixé, $\vec{y}\longrightarrow B(\vec{x},\vec{y})$ est semi-linéaire.

Cela se traduit donc par les relations :

$$(2,\text{XXII},1;2)\quad \begin{cases} B(\vec{x}_1+\vec{x}_2,\vec{y})=B(\vec{x}_1,\vec{y})+B(\vec{x}_2,\vec{y}), & \vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{y}\in\vec{E}; \\ B(\vec{x},\vec{y}_1+\vec{y}_2)=B(\vec{x},\vec{y}_1)+B(\vec{x},\vec{y}_2), & \vec{x},\vec{y}_1,\vec{y}_2\in\vec{E}; \\ B(\lambda\vec{x},\vec{y})=\lambda\,B(\vec{x},\vec{y}), & \vec{x},\vec{y}\in\vec{E},\lambda\in\mathbb{K}; \\ B(\vec{x},\lambda\vec{y})=\bar{\lambda}\,B(\vec{x},\vec{y}), & \vec{x},\vec{y}\in\vec{E},\lambda\in\mathbb{K}. \end{cases}$$

Si le corps des scalaires est $\mathbb{R}$, cela veut dire que B est bilinéaire.

1 Il semble qu'on écrive avec un trait d'union semi-linéaire, anti-linéaire, et sans trait d'union bilinéaire, multilinéaire, sesquilinéaire !

On dit qu'une forme sesquilinéaire B sur $\vec{E} \times \vec{E}$ est hermitienne, si l'on a

$$B(\vec{x},\vec{y}) = \overline{B(\vec{y},\vec{x})} \tag{2,XXII,1;3}$$

Lorsque le corps des scalaires est $\mathbb{R}$, celà revient à dire que B est symétrique. [Sur $\mathbb{C}$, une forme sesquilinéaire ne pourrait pas être symétrique sans être nulle, alors qu'une forme bilinéaire ne pourrait pas être hermitienne sans être nulle ; autrement dit, la notion d'hermiticité est adaptée au caractère sesquilinéaire, celle de symétrie au caractère bilinéaire. En effet, si B est sesquilinéaire, et si $B(\vec{x},\vec{y}) = B(\vec{y},\vec{x})$, l'application $\vec{x} \longrightarrow B(\vec{x},\vec{y})$ pour $\vec{y}$ fixé, est à la fois linéaire et semi-linéaire, alors, pour tout $\vec{x}$, $B(\vec{x},\vec{y}) = B(-i(i\vec{x}),\vec{y}) = \pm i B(i\vec{x},\vec{y}) = 0$].

Si B est hermitienne, le développement de $B(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})$ prend la forme particulière :

$$B(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = B(\vec{x},\vec{x}) + B(\vec{y},\vec{y}) + 2\,\mathcal{R}e\,B(\vec{x},\vec{y}). \tag{2,XXII,1;3 bis}$$

Par ailleurs :

$$B(\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y}) = B(\vec{x},\vec{x}) + B(\vec{y},\vec{y}) - 2\,\mathcal{R}e\,B(\vec{x},\vec{y}) \tag{2,XXII,1;3 ter}$$

En additionnant et soustrayant, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} B(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) + B(\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y}) = 2\,(B(\vec{x},\vec{x}) + B(\vec{y},\vec{y})) \\ B(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) - B(\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y}) = 4\,\mathcal{R}e\,B(\vec{x},\vec{y}) \end{array}\right. \tag{2,XXII,1;3 quarto}$$

THEOREME (2,XXII,1;1).

Soit B une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel $\vec{E}$ sur le corps $\mathbb{C}$. Pour qu'elle soit hermitienne, il faut et il suffit que, pour tout $\vec{x}$ de $\vec{E}$, $B(\vec{x},\vec{x})$ soit réel.

DEMONSTRATION :

Si B est hermitienne, $B(\vec{x},\vec{x})$ est son propre complexe conjugué, donc est réel.

Inversement, s'il en est ainsi, $B(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})$, $B(\vec{x},\vec{x})$ et $B(\vec{y},\vec{y})$ sont réels, et alors :

(2,XXII,1;4) $$B(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = B(\vec{x},\vec{x}) + B(\vec{y},\vec{y}) + B(\vec{x},\vec{y}) + B(\vec{y},\vec{x})$$

montre que

(2,XXII,1;5) $$B(\vec{x},\vec{y}) + B(\vec{y},\vec{x}) = \alpha \qquad \text{réel ;}$$

en changeant $\vec{x}$ en $i\vec{x}$, on voit que

(2,XXII,1;6) $$i\,(B(\vec{x},\vec{y}) - B(\vec{y},\vec{x})) = \beta \qquad \text{réel ;}$$

donc

(2,XXII,1;7) $$B(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\alpha - i\beta}{2} \quad , \quad B(\vec{y},\vec{x}) = \frac{\alpha + i\beta}{2}$$

sont complexes conjugués, et B est hermitienne. Cqfd

REMARQUE : Il n'y a rien d'analogue lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

THEOREME (2,XXII,1;2)

Si $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{C}$, une forme sesquilinéaire B sur $\vec{E} \times \vec{E}$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur la diagonale de $\vec{E} \times \vec{E}$, autrement dit par la connaissance de la fonction $\vec{x} \longrightarrow B(\vec{x},\vec{x})$, $\vec{x} \in \vec{E}$. Ce résultat ne subsiste pas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mais reste vrai si B est supposée symétrique.

DEMONSTRATION :

Un développement direct donne, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$4\,B(\vec{x},\vec{y}) = B(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})$$

$$(2,XXII,1;8) \quad -B(\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y}) + i\,B(\vec{x}+i\vec{y},\vec{x}+i\vec{y}) - i\,B(\vec{x}-i\vec{y},\vec{x}-i\vec{y})$$

d'où le résultat.

Rien de tel ne subsiste si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$, la forme bilinéaire

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \longrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1$$

est nulle sur la diagonale, mais non identiquement nulle [Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme bilinéaire B nullé sur la diagonale s'appelle alternée, et on montre aisément que B est alternée si et seulement si elle est antisymétrique,

$$B(\vec{x},\vec{y}) = -B(\vec{y},\vec{x})\,].$$

Mais supposons B symétrique connue sur la diagonale. Alors (2,XXII,1;4) donne

$$(2,XXII,1;9) \quad 2\,B(\vec{x},\vec{y}) = B(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) - B(\vec{x},\vec{x}) - B(\vec{y},\vec{y})$$

ce qui détermine B , cqfd.

Définitions : Une forme sesquilinéaire hermitienne B sur $\vec{E} \times \vec{E}$ est dite positive ($\geqslant 0$), si $B(\vec{x},\vec{x}) \geqslant 0$ pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, " $B(\vec{x},\vec{x}) \geqslant 0$ pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$ " entraîne l'hermiticité, d'après le théorème (2,XXII,1;1), et il est donc inutile de mettre cette hermiticité dans les hypothèses; mais il n'en est pas de même pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

[Remarquons aussi que $B(\lambda\vec{x},\lambda\vec{x}) = \lambda\bar{\lambda}\, B(\vec{x},\vec{x})$, $\lambda\bar{\lambda} \geqslant 0$; c'est ce qui permet de faire cette hypothèse de positivité, qu'on ne pourrait pas faire pour une forme bilinéaire lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ car alors $B(\lambda\vec{x},\lambda\vec{x}) = \lambda^2 B(\vec{x},\vec{x})$ ne resterait même pas toujours réel (voir déjà ce qui est dit après (2,XXII,1;3))].

La forme sesquilinéaire hermitienne B est dite définie positive si $B(\vec{x},\vec{x}) > 0$ pour $\vec{x} \neq \vec{0}$.

THEOREME (2',XXII,1;3) (Inégalité de Schwarz)

Si B est une forme sesquilinéaire hermitienne $\geqslant 0$ sur $\vec{E} \times \vec{E}$, on a l'inégalité :

(2,XXII,1;10) $$\left| B(\vec{x},\vec{y}) \right| \leqslant (B(\vec{x},\vec{x}))^{1/2}\,(B(\vec{y},\vec{y}))^{1/2} ;$$

on a même l'inégalité stricte $<$, si B est définie positive, à moins que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ne soient dépendants.

DEMONSTRATION :

Supposons d'abord simplement $B \geqslant 0$.

On a :

(2,XXII,1;11) $$B(\vec{x}+\lambda\vec{y},\vec{x}+\lambda\vec{y}) = B(\vec{x},\vec{x}) + 2\,\mathcal{R}e\left(\bar{\lambda} B(\vec{x},\vec{y})\right) + |\lambda|^2 B(\vec{y},\vec{y}) \geqslant 0 .$$

Soit $B(\vec{x},\vec{y}) = r e^{i\theta}$, $r = |B(\vec{x},\vec{y})|$. Posons $\lambda = t e^{i\theta}$, t réel ; alors

(2,XXII,1;12) $$f(t) = a + 2bt + ct^2 = B(\vec{x},\vec{x}) + 2t\,|B(\vec{x},\vec{y})| + t^2 B(\vec{y},\vec{y}) \geqslant 0 .$$

Nous avons donc un trinôme du deuxième degré à coefficients réels qui est toujours $\geqslant 0$; donc il n'a certainement pas deux racines réelles, et par suite $ac - b^2 \geqslant 0$, ce qui est exactement (2,XXII,1;10).

Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont dépendants, ou bien $\vec{y} = \vec{0}$, ou bien $\vec{x} = k\vec{y}$, $k \in \mathbb{K}$; les deux membres de (2,XXII,1;10) sont alors égaux. Nous allons montrer que c'est le seul cas d'égalité, si $\mathcal{B}$ est définie positive.

Supposons donc $\vec{y} \neq \vec{0}$, et en outre que $\vec{x} + \lambda\vec{y} \neq \vec{0}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors le premier membre de (2,XXII,1;11) n'est jamais nul, $f(t)$ ne s'annule jamais pour t réel, donc $ac - b^2 > 0$, c.q.f.d.

§ 2 ESPACES PRÉHILBERTIENS

Définition : On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne ≥ 0 .

En général cette forme se note $(\vec{x}, \vec{y}) \longrightarrow (\vec{x} \mid \vec{y})$, ou $(\vec{x} \mid \vec{y})_{\vec{E}}$ s'il est utile de spécifier l'espace $\vec{E}$.

THEOREME (2,XXII,2;1) (MINKOWSKI)

On a l'inégalité

$$(\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} + \vec{y})^{1/2} \leq (\vec{x} \mid \vec{x})^{1/2} + (\vec{y} \mid \vec{y})^{1/2} \tag{2,XXII,2;1}$$

Autrement dit, $\vec{x} \longrightarrow (\vec{x} \mid \vec{x})^{1/2}$ est une semi-norme.

En outre, si la forme hermitienne est définie positive, on a toujours l'inégalité stricte $<$, à moins que l'un des vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ ne soit produit de l'autre par un scalaire ≥ 0.

DEMONSTRATION :

Elevons au carré ; nous avons à démontrer

$$(\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} + \vec{y}) \leq (\vec{x} \mid \vec{x}) + (\vec{y} \mid \vec{y}) + 2\,(\vec{x} \mid \vec{x})^{1/2}\,(\vec{y} \mid \vec{y})^{1/2} \tag{2,XXII,2;2}$$

Mais le premier membre se calcule par (2,XXI,1;4), avec

$$(\vec{x} \mid \vec{y}) + (\vec{y} \mid \vec{x}) = 2\,\mathcal{R}e\,(\vec{x} \mid \vec{y})$$

Cela équivaut donc à montrer que

$$\mathcal{R}e\,(\vec{x}\,|\,\vec{y}) \leq (\vec{x}\,|\,\vec{x})^{1/2}\,(\vec{y}\,|\,\vec{y})^{1/2}\,. \tag{2,XXII,2;3}$$

C'est donc une conséquence immédiate de l'inégalité de Schwarz. En outre, on a nécessairement < lorsque la forme est définie positive, sauf si, d'une part, on a l'égalité de Schwarz, c'est-à-dire si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont dépendants, et si d'autre part $|(\vec{x}\,|\,\vec{y})| = \mathcal{R}e\,(\vec{x}\,|\,\vec{y})$, c'est-à-dire si $(\vec{x}\,|\,\vec{y})$ est réel ≥ 0 ; c'est-à-dire si $\vec{y} = \vec{0}$ ou $\vec{x} = k\vec{y}$ k réel ≥ 0 . C.q.f.d.

Ainsi un espace préhilbertien $\vec{E}$ est semi-normé; nous écrirons $(\vec{x}\,|\,\vec{x})^{1/2} = \|\vec{x}\|$. $\vec{E}$ est normé si et seulement s'il est séparé ; cela se produit si et seulement si $(\vec{x}\,|\,\vec{x}) > 0$ pour $\vec{x} \neq \vec{0}$, c'est-à-dire si la forme hermitienne est définie positive.

L'inégalité de SCHWARZ s'écrit donc :

$$|(\vec{x}\,|\,\vec{y})| \leq \|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|\,. \tag{2,XXII,2;4}$$

REMARQUE :

Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel muni d'une semi-norme notée $\|\ \ \|$. Alors on peut reconnaître si cette semi-norme provient ou non d'une forme sesquilinéaire hermitienne, et celle-ci est alors positive et unique. En effet, pour celà, il faut et il suffit, d'après (2,XXII,1;8), que la fonction sur $\vec{E} \times \vec{E}$:

$$(\vec{x},\vec{y}) \longrightarrow \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + i\,\|\vec{x}+i\vec{y}\|^2 - i\,\|\vec{x}-i\vec{y}\|^2\right) \tag{2,XXII,2;5}$$

pour $\mathbb{K} \doteq \mathbb{C}$, ou d'après (2,XXII,1;9), que la fonction sur $\vec{E} \times \vec{E}$:

$$(\vec{x},\vec{y}) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2\right) \tag{2,XXII,2;6}$$

pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit une forme sesquilinéaire hermitienne, et c'est alors la forme cherchée. Autrement dit, on peut changer nos définitions comme suit : un espace vectoriel muni d'une semi-norme est dit préhilbertien si cette semi-norme provient d'une forme sesquilinéaire hermitienne, qui est alors nécessairement ≥ 0 et unique.

Définition : L'expression $(\vec{x}\,|\,\vec{y})$ s'appelle produit scalaire de $\vec{x}$ et $\vec{y}$. On dit que $\vec{y}$ est orthogonal à $\vec{x}$ si $(\vec{x}\,|\,\vec{y})=0$; à cause de l'hermiticité, $\vec{x}$ est alors orthogonal à $\vec{y}$, et on dit aussi que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux.

COROLLAIRE :

Le produit scalaire $(\vec{x},\vec{y}) \to (\vec{x}\,|\,\vec{y})$ est une forme sesquilinéaire continue ; sa norme est 1 pour $\vec{E}$ séparé non réduit à son origine.

DEMONSTRATION

D'après l'inégalité de SCHWARZ, on a $|(\vec{x}\,|\,\vec{y})| \leqslant \|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|$, donc la forme sesquilinéaire est continue, d'après le théorème 52 du Chapitre XIII , démontré pour des formes bilinéaires et manifestement vrai aussi pour des formes sesquilinéaires. Si $\vec{E}$ est séparé, $\|\ \|$ est une norme, et la même inégalité montre que la norme de cette forme sesquilinéaire est $\leqslant 1$; si $\vec{E}$ n'est pas réduit à son origine, il existe $\vec{a} \neq \vec{0}$, et alors $(\vec{a}\,|\,\vec{a}) = \|\vec{a}\|^2$ montre que la norme est exactement 1.

Soient $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in \vec{E}$. On a

$$\|\vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots+\vec{x}_n\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2+\cdots+\|\vec{x}_n\|^2 + \sum_{i\neq j}(\vec{x}_i\,|\,\vec{x}_j)$$

Alors si les $\vec{x}_i$ sont deux à deux orthogonaux :

$\|\vec{x}_1+\vec{x}_2+\cdots\vec{x}_n\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2+\cdots+\|\vec{x}_n\|^2$, et ceci est connu sous le nom de Théorème de PYTHAGORE.

Définition : On appelle espace hilbertien ou espace de Hilbert un espace préhilbertien $\vec{E}$, séparé et complet pour la métrique définie par la semi-norme $\vec{x} \longrightarrow \|\vec{x}\| = (\vec{x}\,|\,\vec{x})^{1/2}$.

Un espace de Hilbert est donc encore un espace de Banach, dont la norme provient d'une forme sesquilinéaire hermitienne, nécessairement définie positive et unique.

THEOREME T (2,XXII,2;2).

Soit $\vec{E}$ un espace préhilbertien séparé. Alors son complété $\hat{\vec{E}}$ est un espace hilbertien et son produit scalaire prolonge celui de $\vec{E}$.

DEMONSTRATION :

Nous avons vu au corollaire du théorème (2,XI,4;1) que $\hat{\vec{E}}$ a une structure canonique d'espace de Banach. Mais alors la fonction continue définie par (2,XXII,2;5 ou 6) est sesquilinéaire hermitienne sur $\vec{E} \times \vec{E}$ dense dans $\hat{\vec{E}} \times \hat{\vec{E}}$ donc aussi sur $\hat{\vec{E}} \times \hat{\vec{E}}$ par continuité. C.q.f.d.

§ 3 LE THÉORÈME DE PROJECTION

On a défini (Chapitre IX, § 2), dans un espace métrique E, la distance d'un point a à une partie fermée F par $d(a;F) = \inf\limits_{x \in F} d(a,x)$.

Définition : Soit F une partie fermée de E et $a \in E$. Une projection de a sur F est un point $\alpha \in F$ tel que $d(a;\alpha) = d(a;F)$.

En général un point n'a pas forcément de projection sur un ensemble fermé, ou peut en avoir plusieurs.

Nous avons déjà donné des exemples de ces possibilités après le théorème (2,IX,3;2); celui-ci en même temps nous indiquait qu'il existe toujours au moins une projection si, dans E, les boules fermées sont compactes. Dans un espace hilbertien de dimension infinie, les boules fermées ne sont sûrement pas compactes donc le théorème (2,IX,3;2) ne s'applique pas ; il existe toutefois un autre théorème, basé sur la notion de convexité :

THEOREME (2,XXII,3;1)

Soient $\vec{E}$ un espace hilbertien et F une partie fermée convexe non vide de $\vec{E}$. Alors chaque point de $\vec{E}$ a une projection et une seule sur F.

DEMONSTRATION :

Nous nous appuierons sur un lemme :

Lemme de la médiane

Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, trois points d'un espace préhilbertien. On a, si $\vec{m}$ est le milieu de $[\vec{b},\vec{c}]$:

$$d^2(\vec{a},\vec{b}) + d^2(\vec{a},\vec{c}) = 2\,d^2(\vec{a},\vec{m}) + \frac{1}{2}\,d^2(\vec{b},\vec{c}). \tag{2,XXII,3;1}$$

La démonstration du lemme est évidente ; en posant $\vec{m}-\vec{a}=\vec{x}$, $\dfrac{\vec{c}-\vec{b}}{2}=\vec{y}$, on retombe simplement sur (2,XXII,1;3 quarto).

Montrons maintenant le théorème. Soit $d=d(a,F)$. Soit $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \ldots$ une "suite minimisante", c'est-à-dire que $d(\vec{a},\vec{x}_n)$ tende vers d pour n infini. Appliquons le lemme de la médiane aux trois points $\vec{a}, \vec{x}_m, \vec{x}_n$; on a :

$$\frac{1}{2}\,d^2(\vec{x}_m,\vec{x}_n) = d^2(\vec{a},\vec{x}_m) + d^2(\vec{a},\vec{x}_n) - 2\,d^2\left(\vec{a}, \frac{\vec{x}_m+\vec{x}_n}{2}\right). \tag{2,XXII,3;2}$$

Les deux premiers termes du deuxième membre tendent vers d pour m, n, infinis ; mais F est convexe, donc $\dfrac{\vec{x}_m+\vec{x}_n}{2}$ est dans F, et par suite $d\left(\vec{a}, \dfrac{\vec{x}_m+\vec{x}_n}{2}\right) \geqslant d$; donc le deuxième membre a sûrement une limite supérieure $\leqslant 0$, et, comme il est $\geqslant 0$ il tend vers 0 pour m et n infinis. Ainsi toute suite minimisante est une suite de Cauchy. Comme $\vec{E}$ est supposé complet, elle est convergente ; comme F est fermée, sa limite $\vec{\alpha}$ est dans F ; comme la distance est une fonction continue, $d(\vec{a},\vec{\alpha}) = d$, $\vec{\alpha}$ est une projection de $\vec{a}$ sur F . Il ne peut exister qu'une projection ; car, si $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ sont deux projections, la suite $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \ldots,$ est minimisante, donc convergente, et $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$. C.q.f.d.

REMARQUE :

Si F n'est pas fermée ou n'est pas convexe, ou si $\vec{E}$ n'est pas complet, la conclusion ne subsiste en général pas. Toutefois elle subsiste manifestement pour $\vec{E}$ préhilbertien si l'ensemble convexe F est supposé séparé et complet.

Nous allons donner maintenant une caractérisation de la projection :

THEOREME (2,XXII,3;2)

Soit F une partie fermée convexe non vide d'un espace hilbertien $\vec{E}$. Alors si $\vec{\alpha}$ est la projection de $\vec{a} \in \vec{E}$ sur F on a pour tout $\vec{x} \in F$: $\mathcal{R}e\,(\vec{a}-\vec{\alpha} \mid \vec{x}-\vec{\alpha}) \leq 0$; et ceci est caractéristique de la projection.

DEMONSTRATION :

Par translation, on peut supposer $\vec{\alpha} = \vec{0}$; la relation s'écrit alors $\mathcal{R}e\,(\vec{a} \mid \vec{x}) \leq 0$.

Si $\mathcal{R}e\,(\vec{a} \mid \vec{x}) \leq 0$ pour tout $\vec{x} \in F$, on aura

$$\|\vec{a}-\vec{x}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\,\mathcal{R}e\,(\vec{a} \mid \vec{x}) + \|\vec{x}\|^2 > \|\vec{a}\|^2$$

pour tout $\|\vec{x}\| \neq \vec{0}$ de F et $\vec{\alpha} = \vec{0}$ est bien la projection de $\vec{a}$ sur F .

Inversement, si $\vec{\alpha} = \vec{0}$ est la projection de $\vec{a}$ sur F , on doit avoir, puisque F est convexe et que par conséquent $t\vec{x}$, $0 \leq t \leq 1$, est dans F dès que $\vec{x}$ est dans F:
$\|\vec{a} - t\vec{x}\|^2 \geq \|\vec{a}\|^2$ pour tout $\vec{x} \in \vec{F}$ et tout $t \in [0,1]$;
donc $-2t\,\mathcal{R}e\,(\vec{a} \mid \vec{x}) + t^2\|\vec{x}\|^2 \geq 0$ pour $\vec{x} \in F$ et $t \in [0,1]$.

Fixons $\vec{x}$. Si $\mathcal{R}e(\vec{a}\mid\vec{x})$ était > 0, cette quantité serait sûrement < 0 pour t suffisamment petit ; donc $\mathcal{R}e(\vec{a}\mid\vec{x})$ est bien ≤ 0. C.q.f.d.

REMARQUES :

1) On peut donc énoncer :

Si $\vec{E}$ est hilbertien, si F est fermé convexe dans $\vec{E}$, et si $\vec{a}\in\vec{E}$, il existe un $\vec{\alpha}$ unique dans F tel que, pour tout $\vec{x}$ de F, on ait :

$$\mathcal{R}e(\vec{a}-\vec{\alpha}\mid\vec{x}-\vec{\alpha})\leq 0$$

2) Supposons que le corps des scalaires soit $\mathbb{R}$. Il est alors habituel de poser $\dfrac{(\vec{x}\mid\vec{y})}{\|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|}=\cos\theta$, et d'appeler θ l'angle des vecteurs $\vec{x},\vec{y}$. Alors le théorème précédent s'interprète en disant que l'angle de $\vec{a}-\vec{\alpha}$ et $\vec{x}-\vec{\alpha}$ est obtus (ou droit) pour tout $\vec{x}$ de F.

VARIATIONS de la PROJECTION LORSQUE $\vec{a}$ ou F VARIENT.

THEOREME (2,XXII,3;3)

Soient $\vec{E}$ un espace hilbertien, F une partie fermée convexe non vide de $\vec{E}$. L'application qui, à chaque point $\vec{a}$ de $\vec{E}$, fait correspondre sa projection $\vec{\alpha}$ sur F, est continue de $\vec{E}$ sur F.

DEMONSTRATION :

Soient $\vec{a},\vec{b}\in\vec{E}$ et $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ leurs projections sur F. On a, en appliquant le lemme de la médiane au triangle $\vec{b},\vec{\alpha},\vec{\beta}$, et en se rappelant que, par suite de la convexité de F, $\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}\in F$ donc que $d(\vec{b},\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2})\geq d(\vec{b},F)$:

$$\frac{1}{2} d^2(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = d^2(\vec{b},\vec{\alpha}) + d^2(\vec{b},\vec{\beta}) - 2d^2(\vec{b}, \frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2})$$

(2,XXII,3;3) $$\leq d^2(\vec{b},\vec{\alpha}) - d^2(\vec{b},F)$$

$$\leq (d(\vec{b},\vec{a}) + d(\vec{a},F))^2 - d^2(\vec{b},F)$$

Mais, d'après (II,8;1) (actuellement au Chapitre IX, § 2),

$$d(\vec{b},F) \geq d(\vec{a},F) - d(\vec{a},\vec{b})$$

Si $d(\vec{a},F) \leq d(\vec{a},\vec{b})$, on aura

(2,XXII,3;4) $$\frac{1}{2} d^2(\vec{\alpha},\vec{\beta}) \leq (d(\vec{b},\vec{a}) + d(\vec{a},F))^2 \leq 4d^2(\vec{a},\vec{b}) ;$$

si $d(\vec{a},F) \geq d(\vec{a},\vec{b})$, on aura

(2,XXII,3;5) $$\frac{1}{2} d^2(\vec{\alpha},\vec{\beta}) \leq (d(\vec{a},F) + d(\vec{a},\vec{b}))^2 - (d(\vec{a},F) - d(\vec{a},\vec{b}))^2$$

$$= 4\, d(\vec{a},\vec{F})\, d(\vec{a},\vec{b}) ;$$

dans tous les cas, $d(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ tend vers 0 , pour $\vec{a}$ fixé, lorsque $\vec{b}$ tend vers $\vec{a}$, c.q.f.d.

Faisons maintenant varier F .

THEOREME (2,XXII,3;4)

Soit F_0 , F_1 ,... F_n ,... une suite décroissante d'ensembles fermés convexes d'intersection F non vide, d'un espace hilbertien $\vec{E}$. Désignons par $\vec{\alpha}_n$ la projection d'un point $\vec{a}$ sur F_n . Alors, lorsque n tend vers l'infini, les points $\vec{\alpha}_n$ convergent vers la projection $\vec{\alpha}$ de $\vec{a}$ sur l'intersection F ; et $d(\vec{a},F_n)$ tend vers $d(\vec{a},F)$.

DEMONSTRATION :

Lorsque n augmente, l'ensemble F_n devient plus petit, donc la distance d_n de $\vec{a}$ à F_n augmente ; cependant elle est toujours inférieure à la distance d de $\vec{a}$ à F ; donc la suite des nombres d_n est bornée et croissante, et converge par conséquent vers une limite $\delta \leqslant d$. Il en résulte en particulier que les différences $d_m - d_n$ convergent vers 0 lorsque m et n tendent vers ∞. Appliquons alors le lemme de la médiane aux trois points $\vec{a}, \vec{\alpha}_m, \vec{\alpha}_n$, en supposant $n \geqslant m$. Comme le point $\frac{\vec{\alpha}_m + \vec{\alpha}_n}{2}$ appartient à l'ensemble convexe F_m on a l'inégalité

$$d\left(\vec{a}, \frac{\vec{\alpha}_m + \vec{\alpha}_n}{2}\right) \geqslant d_m ,$$

et par suite la majoration

(2,XXII,3;6) $$\frac{1}{2} d^2(\vec{\alpha}_m, \vec{\alpha}_n) = d_m^2 + d_n^2 - 2\, d^2\left(\vec{a}, \frac{\vec{\alpha}_m + \vec{\alpha}_n}{2}\right) \leqslant d_n^2 - d_m^2 .$$

Elle prouve que la suite des $\vec{\alpha}_n$ est une suite de Cauchy dans $\vec{E}$. Celui-ci étant complet, elle converge vers une limite $\vec{\alpha}$. Comme tous les F_n sont fermés, $\vec{\alpha}$ appartient à chaque F_n donc à F. Alors $d(\vec{a}, \vec{\alpha})$ est la limite des $d(\vec{a}, \vec{\alpha}_n) = d_n$, donc est égale à δ ; mais par ailleurs $\alpha \in F$, donc $d(\vec{a}, \vec{\alpha}) \geqslant d \geqslant \delta$. On a donc nécessairement $d = \delta$, et $\vec{\alpha}$ est la projection de $\vec{a}$ sur F, c.q.f.d.

REMARQUE :

Si F est vide, le résultat ne subsiste plus, puisque $\vec{\alpha}$ n'existe plus. Toutefois il reste vrai que d_n converge vers $+\infty$, distance de $\vec{a}$ à la partie vide. En effet, s'il n'en était pas ainsi, les d_n seraient bornés, donc auraient encore une limite δ finie, comme dans la démonstration ci-dessus. La même méthode montrerait alors que les $\vec{\alpha}_n$ ont une limite $\vec{\alpha} \in F$, ce qui serait absurde puisque F est vide.

THEOREME (2,XXII,3;5).

Soit F_0, F_1, ..., F_n, ..., une suite croissante d'ensembles fermés convexes non vides d'un espace hilbertien $\vec{E}$, et soit F l'adhérence de leur réunion. La projection $\vec{\alpha}_n$ d'un point $\vec{a} \in \vec{E}$ sur F_n converge, pour n tendant vers $+\infty$ vers la projection $\vec{\alpha}$ de $\vec{a}$ sur F, et $d(\vec{a}, F_n)$ tend vers $d(\vec{a}, F)$.

DEMONSTRATION :

Cette fois-ci, la suite $d_n = d(\vec{a}, F_n)$ est décroissante, et a donc une limite $\delta \geqslant d = d(\vec{a}, F)$. Mais ici on voit directement que $\delta = d$. En effet, soit $\vec{\alpha}$ la projection de $\vec{a}$ sur F. Puisque F est l'adhérence de $\bigcup_{n \geqslant 0} F_n$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un entier n et un point $\vec{x}_n$ de F_n tel que $\| \vec{\alpha} - \vec{x}_n \| \leqslant \varepsilon$; alors $d_n \leqslant d(\vec{a}, \vec{x}_n) \leqslant d(\vec{a}, \vec{\alpha}) + \varepsilon = d + \varepsilon$; donc $\delta \leqslant d + \varepsilon$, et, ε étant arbitraire, $\delta \leqslant d$ donc $\delta = d$. Ensuite, le lemme de la médiane montre, comme au théorème précédent, que les $\vec{\alpha}_n$ ont une limite $\vec{\alpha}$. Tous les $\vec{\alpha}_n$ sont dans $\bigcup_{k \geqslant 0} F_k$, donc $\vec{\alpha}$ est dans l'adhérence F de cette réunion. Et comme $d(\vec{a}, \vec{\alpha})$ est la limite des $d(\vec{a}, \vec{\alpha}) = d_n$, c'est d, donc $\vec{\alpha}$ est la projection de $\vec{a}$ sur F ; c.q.f.d.

§ 4 APPLICATIONS AUX SOUS ESPACES VECTORIELS FERMÉS D'UN ESPACE HILBERTIEN

THEOREME (2,XXII,4;1).

Soit $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel fermé d'un espace hilbertien $\vec{E}$. Pour tout point $\vec{a}$ de $\vec{E}$, si $\vec{\alpha}$ est sa projection sur $\vec{F}$, $[\vec{a},\vec{\alpha}]$ est l'unique perpendiculaire abaissée de $\vec{a}$ sur $\vec{F}$.

DEMONSTRATION

Un sous-espace vectoriel fermé est fermé convexe, on peut donc appliquer les théorèmes précédents.

Pour que $\vec{\alpha}$ soit la projection de $\vec{a}$, il faut et il suffit que, pour tout $\vec{x}$ de $\vec{F}$, on ait : $\mathcal{R}e(\vec{a}-\vec{\alpha}\,|\,\vec{x}-\vec{\alpha})\leq 0$. Mais, puisque $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel, si $\vec{x}$ varie dans $\vec{F}$, $\vec{x}-\vec{\alpha}$ prend comme valeurs tous les éléments de $\vec{F}$; cette condition est donc équivalente à : $\mathcal{R}e(\vec{a}-\vec{\alpha}\,|\,\vec{x})\leq 0$ pour tout $\vec{x}$ de $\vec{F}$. Mais, si $\vec{x}$ est dans $\vec{F}$, $-\vec{x}$ y est aussi ; les quantités précédentes ne peuvent être toutes ≤ 0 sans être toutes nulles ; enfin $\vec{x}$ ne peut être dans $\vec{F}$ sans que $i\vec{x}$ y soit aussi, de sorte que celà équivaut finalement à : $(\vec{a}-\vec{\alpha}\,|\,\vec{x})=0$ pour tout $\vec{x}$ de $\vec{F}$. Donc $\vec{\alpha}$ est la projection, si et seulement si $\vec{a}-\vec{\alpha}$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\vec{F}$, ou, comme on dit plus simplement, orthogonal à $\vec{F}$.

REMARQUE :

Bien sûr, $\vec{a}$ peut être dans $\vec{F}$, alors $\vec{\alpha}=\vec{a}$.

COROLLAIRE :

Soient $\vec{E}$ un espace hilbertien, $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$. Pour que $\vec{F}$ soit dense dans $\vec{E}$, il faut et il suffit qu'il n'existe pas de vecteur non nul orthogonal à $\vec{F}$.

DEMONSTRATION

Si $\vec{F}$ est dense, un vecteur orthogonal à $\vec{F}$ est orthogonal à l'espace entier, donc à lui-même, donc nul. Si $\vec{F}$ n'est pas dense, $\overline{\vec{F}}$ est fermé $\neq \vec{E}$; si $\vec{a} \notin \overline{\vec{F}}$, et si $\vec{\alpha}$ est sa projection sur $\overline{\vec{F}}$, $\vec{a}-\vec{\alpha}$ est un vecteur non nul orthogonal à $\vec{F}$.

DEFINITION

On dit qu'un vecteur $\vec{x}$ est orthogonal à une partie F de $\vec{E}$ s'il est orthogonal à tous ses éléments. On dit que deux parties F_1, F_2, sont orthogonales, si tout élément de l'une est orthogonal à tout élément de l'autre. On appelle orthogonal d'une partie F, et on note F^+, l'ensemble des éléments orthogonaux à F.

L'orthogonal d'un élément $\vec{a}$ de $\vec{E}$ est le noyau de la forme linéaire $\vec{x} \longrightarrow (\vec{x}|\vec{a})$; c'est donc, d'après le théorème , un hyperplan fermé, sauf si cette forme linéaire est identiquement nulle, ce qui ne peut se produire que si $\vec{a} = \vec{0}$ (puisque $(\vec{a}\,|\,\vec{a}) = 0$ entraîne $\vec{a} = \vec{0}$). L'orthogonal F^+ d'une partie F est donc toujours une intersection d'hyperplans fermés, donc est un sous-espace vectoriel fermé de $\vec{E}$.

Par ailleurs un vecteur orthogonal à des éléments est orthogonal à leurs combinaisons linéaires, donc tout vecteur orthogonal à F est orthogonal au sous-espace vectoriel engendré par F ; mais aussi à son adhérence, par passage à la limite. Finalement l'orthogonal F^+ de F coïncide avec l'orthogonal $\overline{\vec{G}}^+$ de $\overline{\vec{G}}$, adhérence du sous-espace vectoriel $\vec{G}$ engendré par F.

THEOREME (2,XXII,4;2).

Soit $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel fermé d'un espace hilbertien $\vec{E}$. Alors $\vec{F}$ et son orthogonal $\vec{F}^+$ sont topologiquement supplémentaires. Le projecteur de $\vec{E}$ sur $\vec{F}$ parallèlement à $\vec{F}^+$ est l'application qui, à tout $\vec{x}$ de $\vec{E}$, fait correspondre sa projection sur $\vec{F}$; on l'appelle aussi le projecteur orthogonal de $\vec{E}$ sur $\vec{F}$. Sa norme est 1 si $\vec{F}$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$.

DEMONSTRATION

L'intersection de $\vec{F}$ et $\vec{F}^+$ est réduite à $\vec{0}$, car tout vecteur de cette intersection est orthogonal à lui-même. Ensuite, si $\vec{x} \in \vec{E}$, et si $\vec{\xi}$ est sa projection sur $\vec{F}$ suivant le théorème de projection T (2,XXII,3;1), $\vec{x} - \vec{\xi}$ est orthogonal à $\vec{F}$, (T (2,XXII,4;1)) donc dans $\vec{F}^+$, et alors la décomposition $\vec{x} = \vec{\xi} + (\vec{x} - \vec{\xi})$ montre que $\vec{F}$ et $\vec{F}^+$ engendrent $\vec{E}$; donc ils sont algébriquement supplémentaires. Pour démontrer qu'ils le sont topologiquement, nous devons montrer (théorème T (2,XXII,1;3)) que le projecteur de $\vec{E}$ sur $\vec{F}$ parallèlement à $\vec{F}^+$ est continu ; or c'est le théorème (2,XXII,3;3) ; ou encore d'après le théorème de Pythagore, $\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{\xi}\|^2 + \|x - \xi\|^2$ donc $\|\vec{\xi}\| \leq \|\vec{x}\|$, donc ce projecteur est continu et de norme ≤ 1. Il est en fait de norme 1, sauf si $\vec{F}$ est réduit à $\{\vec{0}\}$, car, pour $\vec{x} \in \vec{F}$ on a $\vec{\xi} = \vec{x}$. c.q.f.d.

REMARQUE :

Ceci montre en particulier que l'application $\vec{x} \longrightarrow \vec{\xi}$, qui, à chaque $\vec{x}$ de $\vec{E}$, fait correspondre sa projection sur $\vec{F}$, est linéaire.

COROLLAIRE 1

Si F est une partie quelconque de $\vec{E}$, l'orthogonale F^{++} de son orthogonal F^+ est l'adhérence $\vec{G}$ du sous-espace vectoriel $\vec{G}$ engendré par F ; c'est donc l'adhérence de $\vec{F}$ si $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel, et $\vec{F}$ elle-même si $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel fermé.

DEMONSTRATION

Puisque $F^{+} = \vec{G}^{+}$, on a $F^{++} = \vec{G}^{++}$, et nous avons simplement à montrer que, si $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel fermé, on a $\vec{F}^{++} = \vec{F}$. Or bien évidemment $\vec{F}^{++}$ contient $\vec{F}$ d'autre part tous deux sont supplémentaires de $\vec{F}^{+}$ donc ils coïncident. C.q.f.d.

COROLLAIRE 2

Soit $(\vec{F}_i)$, $i \in I$, une famille de sous-espaces vectoriels fermés de $\vec{E}$. L'orthogonal de la réunion $\bigcup_{i \in I} \vec{F}_i$ est l'intersection $\bigcap_{i \in I} \vec{F}^{+}$ des orthogonaux ; l'orthogonal de l'intersection $\bigcap_{i \in I} \vec{F}_i$ est l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par la réunion $\bigcup_{i \in I} \vec{F}_i^{+}$ des orthogonaux.

DEMONSTRATION :

Dire que $\vec{x}$ est orthogonal à $\bigcup_{i \in I} \vec{F}_i$, c'est dire qu'il est orthogonal à chaque $\vec{F}_i$, donc appartient à chaque $\vec{F}_i^{+}$; donc trivialement $\left(\bigcup_{i \in I} \vec{F}_i\right)^{+} = \bigcap_{i \in I} \vec{F}_i^{+}$ Ceci serait même vrai si les F_i étaient des parties quelconques de $\vec{E}$.

Il en résulte que l'orthogonal de $\bigcup_{i \in I} \vec{F}_i^{+}$ est $\bigcap_{i \in I} \vec{F}^{++}$ c'est-à-dire $\bigcap_{i \in I} \vec{F}_i$ si les $\vec{F}_i$ sont des sous-espaces vectoriels fermés (corollaire 1) ; autrement dit, si $\vec{F} = \bigcup_{i \notin I} \vec{F}_i^{+}$ on a $\bigcap_{i \in I} \vec{F}_i = \vec{F}^{+}$; alors $\left(\bigcap_{i \in I} \vec{F}_i\right)^{+} = \vec{F}^{++}$ est bien l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par $\vec{F}$ (corollaire 1). c.q.f.d.

REMARQUE :

Ce résultat est normal ; l'orthogonal de $\bigcap_{\iota \in I} \vec{F}_\iota$ ne peut pas être $\bigcup_{\iota \in I} \vec{F}_\iota^{\,+}$, ce qui n'est en général pas un sous-espace vectoriel et n'est pas fermé.

COROLLAIRE 3

Soient $\vec{E}$ un espace préhilbertien séparé, $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel, $\vec{G}$ un espace vectoriel topologique complet, u une application linéaire continue de $\vec{F}$ dans $\vec{G}$. Alors u se prolonge en une application linéaire continue $\tilde{u}$ de $\vec{E}$ dans $\vec{G}$; en outre, si $\vec{G}$ est normé, on peut la choisir de façon que $\|\tilde{u}\| = \|u\|$.

DEMONSTRATION

On peut toujours supposer $\vec{E}$ hilbertien (car s'il ne l'est pas, on démontrera même qu'on peut prolonger   à son complété hilbertien). Ensuite le théorème de prolongement (T 2,XI,2;4) (étendu aux espaces vectoriels topologiques, voir compléments à la fin du Chapitre XVII, § 8) permet d'emblée de prolonger u à $\overline{\vec{F}}$, en conservant sa norme si $\vec{G}$ est normé ; donc on peut supposer $\vec{F}$ fermé (et dans ce cas $\vec{G}$ n'a plus besoin d'être supposé complet). Alors, dans l'espace hilbertien $\vec{E}$, le sous-espace vectoriel fermé $\vec{F}$ a un supplémentaire topologique $\vec{F}^+$. Donc on peut prolonger u en $\tilde{u}$, en donnant à $\tilde{u}$ la valeur $\vec{0}$ sur $\vec{F}^+$ (corollaire 2 de (T 2,XVII,1;5)) ; pour $(\vec{x} + \vec{y}) \in \vec{E}$, $\vec{x} \in \vec{F}$, $\vec{y} \in \vec{F}^+$, on aura $\tilde{u}(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x})$. Alors, si $\vec{G}$ est normé :

$$\text{(XXII,4;1)} \quad \|\tilde{u}(\vec{x}+\vec{y})\| = \|u(\vec{x})\| \leq \|u\| \; \|\vec{x}\| \leq \|u\| \; \|\vec{x}+\vec{y}\|,$$

donc $\|\tilde{u}\| \leq \|u\|$, mais comme trivialement $\|\tilde{u}\| \geq \|u\|$ on a $\|\tilde{u}\| = \|u\|$. C.q.f.d.

REMARQUE

En prenant $\vec{G} = \mathbb{K}$, on voit que le théorème de Hahn Banach (par exemple corollaire 2 de (T 2,XIX,5;1) est trivial pour les espaces préhilbertiens séparés. Voir aussi la remarque 1 qui suit le corollaire 12 du même théorème.

Bien entendu, le prolongement $\tilde{u}$ n'est pas unique en général, si $\vec{F}$ n'est pas dense dans $\vec{E}$.

QUOTIENT D'UN ESPACE HILBERTIEN

Un sous-espace vectoriel fermé $\vec{F}$ d'un espace hilbertien $\vec{E}$ est hilbertien quand on le munit de la forme sesquilinéaire induite, puisqu'il est séparé et complet.

Considérons maintenant le quotient $\vec{E}/\vec{F}$; le théorème T (2,XVII,6;4) nous indique qu'il est un espace de Banach, relativement à la norme quotient. Nous allons voir qu'il a une structure hilbertienne, dite structure hilbertienne quotient. Soit, en effet $\vec{F}^+$ l'orthogonal de $\vec{F}$; il est supplémentaire de $\vec{F}$, donc la projection canonique π de $\vec{E}$ sur $\vec{E}/\vec{F}$ est une bijection linéaire de $\vec{F}^+$ sur $\vec{E}/\vec{F}$; elle permet donc de transporter la structure hilbertienne de $\vec{F}^+$ sur $\vec{E}/\vec{F}$. Autrement dit, pour $\dot{\vec{x}}, \dot{\vec{y}} \in \vec{E}/\vec{F}$ nous poserons par définition $(\dot{\vec{x}} \mid \dot{\vec{y}}) = (\vec{x} \mid \vec{y})$ où $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}$) est l'unique élément de $\vec{F}^+$ appartenant à la classe $\dot{\vec{x}}$ (resp. $\dot{\vec{y}}$).

[En fait on aura même $(\dot{\vec{x}} \mid \dot{\vec{y}}) = (\vec{x}' \mid \vec{y}')$, même si un seul des deux éléments $\vec{x}' \in \dot{\vec{x}}, \vec{y}' \in \dot{\vec{y}}$ est dans $\vec{F}^+$; soit en effet $\vec{y}' = \vec{y}$; alors $\vec{x}' - \vec{x}$ est dans $\vec{F}$ donc orthogonal à $\vec{F}^+$ donc $(\vec{x}' - \vec{x} \mid \vec{y}) = 0$ et par suite $(\vec{x}' \mid \vec{y} = (\vec{x} \mid \vec{y})$] . Muni de ce produit scalaire, $\vec{E}/\vec{F}$ est hilbertien, puisqu'il est exactement isomorphe à $\vec{F}^+$. La norme $(\dot{\vec{x}} \mid \dot{\vec{x}})^{1/2}$ de cette structure hilbertienne sur $\vec{E}/\vec{F}$ est exactement la norme quotient $\| \dot{\vec{x}} \|$ définie par le théorème T (2,XVIII,6;4) en effet $\| \dot{\vec{x}} \|$ est la borne inférieure des normes des $\vec{x} \in \dot{\vec{x}}$ c'est donc la distance de l'origine au sous-espace affine $\dot{\vec{x}}$ de $\vec{E}$, parallèle à $\vec{F}$; d'après les théorèmes T (2,XXII,3;1) et T (2,XXII,4;1), c'est exactement la norme $\|\vec{x}\|$ de $\vec{x}$, projection orthogonale de l'origine sur le sous-espace affine $\dot{\vec{x}}$, c'est-à-dire la norme de l'unique élément $\vec{x}$ de $\dot{\vec{x}}$ qui appartienne à $\vec{F}^+$, donc aussi $(\vec{x}\,|\,\vec{x})^{1/2}$ ou $(\dot{\vec{x}}\,|\,\dot{\vec{x}})^{1/2}$. Nous avons donc démontré ceci :

THEOREME T (2,XXII,4;3)

Soient $\vec{E}$ un espace hilbertien, $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel fermé. Le quotient $\vec{E}/\vec{F}$, muni de sa structure canonique d'espace de Banach, est hilbertien ; la bijection canonique de $\vec{F}^+$ sur $\vec{E}/\vec{F}$ est un isomorphisme des structures hilbertiennes.

REMARQUES :

La démonstration a mis en évidence les 2 faits supplémentaires suivants :

1°/ D'après la définition de la norme quotient, la norme de $\dot{\vec{x}} \in \vec{E}/\vec{F}$ est la borne inférieure des normes des $\vec{x} \in \dot{\vec{x}}$; dans le cas présent, cette borne est atteinte par l'unique point $\vec{x}$ de $\dot{\vec{x}}$ qui soit dans $\vec{F}^+$.

2°/ Pour $\vec{x} \in \vec{F}^+$, $\vec{y} \in \vec{E}$, ou pour $\vec{x} \in \vec{E}$, $\vec{y} \in \vec{F}^+$, on a $(\vec{x}\,|\,\vec{y}) = (\dot{\vec{x}}\,|\,\dot{\vec{y}})$.

§ 5 DUAL D'UN ESPACE HILBERTIEN

Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel normé. Le théorème (T 2,XIII, 5;1) établit une bijection linéaire continue isométrique de l'espace des formes bilinéaires continues sur $\vec{E} \times \vec{E}$ sur l'espace des applications linéaires continues de $\vec{E}$ dans son dual $\overleftarrow{E}'$ (voir remarque 1 après la démonstration du théorème). Une simple modification permet d'établir une application bijective linéaire isométrique $u \longrightarrow U$ de l'espace des formes sesquilinéaires continues sur $\vec{E} \times \vec{E}$ sur l'espace des applications anti-linéaires continues de $\vec{E}$ dans $\overleftarrow{E}'$. Redonnons cette correspondance. Si u est une forme sesquilinéaire continue sur $\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{E}$, U une application antilinéaire continue U de $\overrightarrow{E}$ dans $\overleftarrow{E}$, la correspondance entre u et U est définie par :

(2,XXII,5;1) $$u(\vec{x},\vec{y}) = U(\vec{y})\cdot\vec{x} = \langle \vec{x}, U(\vec{y})\rangle$$ [1]

le dernier produit scalaire étant celui que nous avons défini entre un espace vectoriel normé et son dual : $\vec{x} \in \overrightarrow{E}$. $\vec{y} \in \overrightarrow{E}, U(\vec{y}) \in \overleftarrow{E}$. Partons de u pour $\vec{y}$ donné, $U(\vec{y})$ sera la forme linéaire continue $\vec{x} \to u(\vec{x},\vec{y})$ sur $\overrightarrow{E}$ c'est donc bien un élément de $\overleftarrow{E'}$. Comme, pour $\vec{x}$ fixé, $u(\vec{x},\vec{y})$ dépend anti-linéairement de $\vec{y}$, et que $\langle\vec{x}, U(\vec{y})\rangle$ dépend linéairement de $U(\vec{y})$, $U(\vec{y})$ doit dépendre anti-linéairement de $\vec{y}$, donc U est une application antilinéaire de $\overrightarrow{E}$ dans $\overleftarrow{E'}$. En outre, en fixant $\vec{x}, \vec{y}$, on voit que $u \longrightarrow U$ est linéaire ; et nous savons que $\| u \| = \| U \|$.

Pour que U soit injective de $\overrightarrow{E}$ dans $\overleftarrow{E'}$, il faut et il suffit que $U(\vec{y}) = \overleftarrow{0}$ implique $\vec{y} = \vec{0}$; mais $U(\vec{y}) = \overleftarrow{0}$ signifie que $u(\vec{x},\vec{y}) = 0$ pour tout $\vec{x}$; donc U est injective de $\overrightarrow{E}$ dans $\overleftarrow{E}$ si et seulement si le seul élément $\vec{y}$ de $\overrightarrow{E}$ vérifiant $u(\vec{x},\vec{y}) = 0$ pour tout $\vec{x}$ de $\overrightarrow{E}$ est $\vec{y} = \vec{0}$, c'est-à-dire si u est non dégénérée. On peut alors se demander quand U est bijective :

<u>THEOREME</u> (T 2,XXII,5;1)

<u>Si u est une forme sesquilinéaire continue non dégénérée sur un espace vectoriel normé $\overrightarrow{E}$, l'application linéaire continue U de $\overrightarrow{E}$ dans $\overleftarrow{E}$ qu'elle définit par (2,XXII,5;1) est une bijection antilinéaire bicontinue (c'est-à-dire un</u>

1 La remarque 2 après le théorème (2,XIII,5; 1) nous indique qu'il y a deux manières de définir une bijection telle que $u \longrightarrow U$; c'est précisément la deuxième que nous prenons ici.

anti-isomorphisme) de $\vec{E}$ sur $\overleftarrow{E}'$, au moins dans les deux cas suivants :

1) $\vec{E}$ est de dimension finie ;
2) $\vec{E}$ est un espace hilbertien, u est le produit scalaire de sa structure hilbertienne ; alors U est en outre une isométrie de $\vec{E}$ sur $\overleftarrow{E}'$.

DEMONSTRATION :

1) U étant injective, elle est sûrement bijective si $\vec{E}$ est de dimension finie, puisque $\overleftarrow{E}'$ a la même dimension. Elle est bicontinue puisqu'on est en dimension finie.

2) Soit $\vec{E}$ un espace hilbertien, et u la forme produit scalaire $u(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}|\vec{y})$. Montrons donc que U est surjective. Soit donc $\overleftarrow{\alpha}$ un élément $\neq \overleftarrow{0}$ du dual $\overleftarrow{E}'$. Alors le noyau de la forme linéaire continue $\overleftarrow{\alpha}$ est un hyperplan fermé $\vec{H}$ de $\vec{E}$. Puisque $\vec{E}$ est hilbertien, il existe un vecteur non nul $\vec{z}$ orthogonal à $\vec{H}$ (corollaire du théorème T (2,XXII,4;1)); alors la forme linéaire continue sur $\vec{E}$: $\vec{x} \to (\vec{x}|\vec{z})$ a aussi le noyau H, donc elle est proportionnelle à $\overleftarrow{\alpha}$, soit $k(\vec{x}|\vec{z}) = <\overleftarrow{\alpha},\vec{x}>$, ou $U(k\vec{z}) = \overleftarrow{\alpha}$. ce qui montre bien la surjectivité de U. Alors U est bijective de $\vec{E}$ sur $\overleftarrow{E}'$; nous savons déjà qu'elle est antilinéaire ; d'autre part $\|u\|=1$ donc $\|U\|=1$, autrement dit $\|U(\vec{y})\| \leq \|\vec{y}\|$; mais $\|\vec{y}\|_=(\vec{y}|\vec{y}) = <\vec{y},U(\vec{y})> \leq \|\vec{y}\| \, \|U(\vec{y})\|$ donc $\|U(\vec{y})\| \geqslant \|\vec{y}\|$ finalement $\|U(\vec{y})\| = \|\vec{y}\|$, et U est une isométrie de $\vec{E}$ sur $\overleftarrow{E}'$ et alors U^{-1} est aussi continue. c.q.f.d.

Si $\vec{E}$ est un espace hilbertien, le produit scalaire se note une fois pour toutes $(\vec{x},\vec{y}) \longrightarrow (\vec{x}|\vec{y})$; alors l'anti-isomorphisme U de $\vec{E}$ sur $\overleftarrow{E}'$ se notera une fois pour toutes sous la forme $\vec{y} \longrightarrow \overleftarrow{\bar{y}}$; cela s'écrit

(2,XXII,5;2) $$(\vec{x} \mid \vec{y})_{\vec{E}} = < \vec{x}, \overleftarrow{\bar{y}} >_{\vec{E},\overleftarrow{E}} \ , \ \vec{x}, \vec{y} \in \vec{E} \ ;$$

bien distinguer (|) , produit scalaire sesquilinéaire sur $\vec{E} \times \vec{E}$, de < , > , produit scalaire bilinéaire sur $\vec{E} \times \overleftarrow{E}'$.

COROLLAIRE 1

Un espace hilbertien est anti-isomorphe à son dual (en tant qu'espace de Banach).

COROLLAIRE 2

Toute forme linéaire continue $\overleftarrow{\alpha}$ sur un espace hilbertien $\vec{E}$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme du produit scalaire avec un élément fixe : $\vec{x} \longrightarrow (\vec{x} \mid \vec{y})$: on a $\overleftarrow{\alpha} = \overleftarrow{\bar{y}}$, et $\| \overleftarrow{\alpha} \| = \| \vec{y} \|$.

COROLLAIRE 3

Le dual $\overleftarrow{E}'$ d'un espace hilbertien est lui aussi hilbertien. Son produit scalaire est le complexe conjugué du transporté par l'anti-isomorphisme canonique :

(2,XXII,5;3) $$(\overleftarrow{\bar{x}} \mid \overleftarrow{\bar{y}})_{\overleftarrow{E}} = \overline{(\vec{x} \mid \vec{y})}_{\vec{E}}$$

DEMONSTRATION :

Puisque, en tant qu'espaces de Banach, $\vec{E}$ et $\overleftarrow{E}'$ sont anti-isomorphes, $\overleftarrow{E}'$ est hilbertien comme $\vec{E}$. Son produit scalaire est défini à partir de sa norme par la formule (2,XXII,2;5) ; on a donc, compte tenu de ce que $\overline{\vec{x} + i\vec{y}} = \overleftarrow{\bar{x}} - i\overleftarrow{\bar{y}}$:

$$(2,\mathrm{XXII},5;4)\qquad (\overset{\leftleftarrows}{x} \mid \overset{\leftleftarrows}{y})_{\overleftarrow{E}'} = \frac{1}{4}\Big(\|\overset{\leftleftarrows}{x} + \overset{\leftleftarrows}{y}\|^2_{\overleftarrow{E}'} - \|\overset{\leftleftarrows}{x} - \overset{\leftleftarrows}{y}\|^2_{\overleftarrow{E}'} + i\,\|\overset{\leftleftarrows}{x} + i\overset{\leftleftarrows}{y}\|^2_{\overleftarrow{E}'}$$

$$- i\,\|\overset{\leftleftarrows}{x} - i\overset{\leftleftarrows}{y}\|^2_{\overleftarrow{E}'}\Big) = \frac{1}{4}\Big(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2_{\vec{E}} - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2_{\vec{E}} + i\,\|\vec{x} - i\vec{y}\|^2_{\vec{E}}$$

$$- i\,\|\vec{x} + i\vec{y}\|^2_{\vec{E}}\Big) = \left(\overline{\vec{x} \mid \vec{y}}\right)_{\vec{E}} \quad , \quad \text{c.q.f.d.}$$

REMARQUE :

On ne pourrait pas avoir $(\overset{\leftleftarrows}{x} \mid \overset{\leftleftarrows}{y})_{\overleftarrow{E}'} = (\vec{x} \mid \vec{y})_{\vec{E}}$ car le deuxième membre est linéaire en $\vec{x}$ et anti-linéaire en $\vec{y}$ donc anti-linéaire en $\overset{\leftleftarrows}{x}$ et linéaire en $\overset{\leftleftarrows}{y}$, contrairement au premier.

Puisque $\overleftarrow{E}'$ est hilbertien, il y a un anti-isomorphisme canonique $\overleftarrow{z}' \longrightarrow \overset{\rightrightarrows}{z}'$ de $\overleftarrow{E}'$ sur $\vec{E}''$; pour $\overleftarrow{x}' = \overset{\leftleftarrows}{x} \in \overleftarrow{E}'$, $\vec{y} \in \vec{E}$, on a :

$$(2,\mathrm{XXII},5;5)\qquad \langle \overleftarrow{x}', \overset{\rightrightarrows}{y} \rangle_{\overleftarrow{E}', \vec{E}''} = (\overleftarrow{x}' \mid \overset{\leftleftarrows}{y})_{\overleftarrow{E}'}$$

$$= (\overset{\leftleftarrows}{x} \mid \overset{\leftleftarrows}{y})_{\overleftarrow{E}'} = \overline{(\vec{x} \mid \vec{y})}_{\vec{E}} = (\vec{y} \mid \vec{x})_{\vec{E}}$$

$$= \langle \vec{y}, \overset{\leftleftarrows}{x} \rangle_{\vec{E}, \overleftarrow{E}'} = \langle \overleftarrow{x}', \vec{y} \rangle_{\overleftarrow{E}', \vec{E}} = \langle \overleftarrow{x}', \tilde{\vec{y}} \rangle_{\overleftarrow{E}', \vec{E}''}$$

où $\vec{y} \longrightarrow \tilde{\vec{y}}$ est l'injection canonique de $\vec{E}$ dans son bi-dual $\vec{E}''$. On a donc $\tilde{\vec{y}} = \overset{\rightrightarrows}{y}$; mais alors l'injection canonique, produit de deux anti-isomorphismes, est un isomorphisme. Donc :

COROLLAIRE 4

L'injection canonique de $\vec{E}$ dans $\vec{E}''$ est un isomorphisme, produit des anti-isomorphismes canoniques de $\vec{E}$ sur $\overleftarrow{E}'$ et de $\overleftarrow{E}'$ sur $\vec{E}''$; un espace hilbertien est réflexif.

COROLLAIRE 5

Les anti-isomorphismes canoniques de $\vec{E}$ sur son dual $\overleftarrow{E}'$ et de $\overleftarrow{E}'$ sur son dual $\vec{E}$ sont réciproques l'un de l'autre.

COROLLAIRE 6

La boule unité d'un espace hilbertien est faiblement compacte.

Il suffit d'appliquer le théorème de Banach (T 2,XIX, 7;8).

REMARQUE :

Les propriétés antérieures sur l'orthogonalité se déduiraient alors à nouveau facilement de celles du chapitre XIX, § 7 : les corollaires 1 et 2 de (T 2,XXII,4;2) se déduisent du corollaire 2 de (T, 2, XIX,7;3). En effet, d'après (2,XXII,5;2) $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux dans $\vec{E}$ si et seulement si $\overleftarrow{\bar{x}} \in \overleftarrow{E}'$ et $\vec{y} \in \vec{E}$ sont orthogonaux ; si alors A est une partie de $\vec{E}$ son orthogonale dans $\vec{E}$ est l'image de son orthogonale dans $\overleftarrow{E}$ par la bijection canonique de $\overleftarrow{E}'$ sur $\vec{E}$; c'est aussi l'orthogonale dans $\vec{E}$ de son image $\bar{A}$ dans $\overleftarrow{E}'$; alors sa biorthogonale pour la structure hilbertienne de $\vec{E}$ est aussi sa biorthogonale pour la dualité entre $\vec{E}$ et $\overleftarrow{E}'$.

§ 6 SOMMES DIRECTES HILBERTIENNES, BASES HILBERTIENNES

SOMME HILBERTIENNE DE DEUX ESPACES HILBERTIENS

Soient $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ deux espaces vectoriels normés. Nous avons vu au § 4 du Chapitre XIII qu'on peut mettre sur leur produit $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2$, identifié à leur somme directe $\vec{E}_1 \oplus \vec{E}_2$ diverses normes, définissant toutes la topologie produit, mais qu'aucune ne s'impose plus qu'une autre. Cependant, si $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ sont hilbertiens, auquel cas $\vec{E}_1 \times \vec{E}_2$ est sûrement complet, il existe une norme plus intéressante que les autres ; c'est

$$\| (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \| = \left(\| \vec{x}_1 \|^2 + \| \vec{x}_2 \|^2 \right)^{1/2} \tag{2,XXII,6;1}$$

Elle provient évidemment d'un produit scalaire

$$\left((\vec{x}_1, \vec{x}_2) \mid (\vec{y}_1, \vec{y}_2) \right)_{\vec{E}} = \left(\vec{x}_1 \mid \vec{y}_1 \right)_{\vec{E}_1} + \left(\vec{x}_2 \mid \vec{y}_2 \right)_{\vec{E}_2} \tag{2,XXII,6;2}$$

de sorte que $\vec{E}_1 \oplus \vec{E}_2$ est lui-même hilbertien. On dit que $\vec{E}_1 \oplus \vec{E}_2$, muni de cette structure hilbertienne, est la somme directe hilbertienne de $\vec{E}_1$ et de $\vec{E}_2$. Sa structure hilbertienne est la seule qui induise sur $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ leurs structures hilbertiennes, et pour laquelle ils soient orthogonaux.

Il n'y a évidemment aucune difficulté à étendre à des sommes hilbertiennes finies. Dans ce sens, l'espace $\mathbb{R}^n$, muni de sa norme euclidienne usuelle $\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$ n'est autre aue la somme hilbertienne de n espaces identiques à la droite réelle $\mathbb{R}$, munie de sa norme canonique $\| x \| = \| x \|$, qui provient évidemment du produit scalaire $(x \mid y) = xy$. De même l'espace $\mathbb{C}^n$, muni de sa norme hermitienne usuelle $\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$, n'est autre que la somme hilbertienne de n espaces identiques à $\mathbb{C}$, muni de sa norme canonique $\| z \| = | z |$, qui provient du produit scalaire $(x|y)_{\mathbb{C}} = x\overline{y}$.

SOMMES HILBERTIENNES INFINIES

Mais on peut aussi définir des sommes hilbertiennes infinies. Soit $(\vec{E}_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'espaces hilbertiens $\vec{E}_i$, I ensemble d'indices quelconque. Appelons $\vec{x}$ une famille $(\vec{x}_i)_{i\in I}$, $\vec{x}_i \in \vec{E}_i$ telle que la somme $\sum_{i\in I} \|\vec{x}_i\|^2_{\vec{E}_i}$ soit finie (ce qui entraine qu'au plus une infinité dénombrable des $\vec{x}_i$ soient $\neq \vec{0}$). Appelons $\vec{E}$ l'ensemble de ces familles $\vec{x}$. Définissons l'addition et la multiplication par les scalaires sur $\vec{E}$ par :

$$\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_i + \vec{y}_i)_{i\in I} \quad , \quad \lambda\vec{x} = (\lambda\vec{x}_i)_{i\in I} \tag{2,XXII,6;3}$$

On définit ainsi $\vec{E}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Posons maintenant $\| \vec{x} \| = \left(\sum_{i\in I} \| \vec{x}_i \|^2\right)^{1/2}$. Montrons qu'on définit là une norme sur $\vec{E}$. La seule chose non triviale est l'inégalité de convexité, alors ce sera une semi-norme, et $\| \vec{x} \| = 0$ entraînant trivialement $\vec{x} = 0$, ce sera une norme. Or, si J est un sous-ensemble fini de I, l'inégalité (2,I,2;5) donne

$$\left(\sum_{i\in J} \| \vec{x}_i + \vec{y}_i \|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i\in J} (\| \vec{x}_i \| + \| \vec{y}_i \|)^2\right)^{1/2} \leq \tag{2,XXII,6;4}$$

$$\left(\sum_{i\in J} \|\vec{x}_i\|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i\in J} \| \vec{y}_i \|^2\right)^{1/2}$$

d'où l'on déduit bien en prenant la borne supérieure des deux membres pour tous les J :

$$(2,\mathrm{XXII},6;5) \quad \left(\sum_{i\in I}\|\vec{x}_i+\vec{y}_i\|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i\in I}\|\vec{x}_i\|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i\in I}\|\vec{y}_i\|^2\right)^{1/2}$$

Donc $\vec{E}$ est un espace vectoriel normé. Mais sa norme provient d'un produit scalaire sesquilinéaire hermitien, donc $\vec{E}$ est préhilbertien séparé. Si en effet $\vec{x},\vec{y}\in\vec{E}$, on a la majoration

$$(2,\mathrm{XXII},6;6) \quad |(\vec{x}_i|\vec{y}_i)_{\vec{E}_i}| \leq \|\vec{x}_i\|_{\vec{E}_i}\|\vec{y}_i\|_{\vec{E}} \leq \frac{1}{2}\left(\|\vec{x}_i\|^2_{\vec{E}}+\|\vec{y}_i\|^2_{\vec{E}}\right)$$

de sorte que $\sum_{i\in I}|(\vec{x}_i|\vec{y}_i)_{\vec{E}_i}| < +\infty$. Si alors on pose

$$(2,\mathrm{XXII},6;7) \quad (\vec{x}|\vec{y})_{\vec{E}} = \sum_{i\in I}(\vec{x}_i|\vec{y}_i)_{\vec{E}_i},$$

on définit bien sur $\vec{E}$ un tel produit scalaire, et $\|\vec{x}\|^2=(\vec{x}|\vec{x})$
[D'ailleurs la majoration (2,XXII,6;6) peut se remplacer par une majoration meilleure, soit en appliquant (2,I,2;7) à une partie finie J de I et en prenant la borne supérieure pour tous les J, soit en appliquant l'inégalité de SCHWARZ (2,XXII,1;10) puisque nous savons maintenant que $\vec{E}$ est préhilbertien :

$$(2,\mathrm{XXII},6;8) \quad \sum_{i\in I}|(\vec{x}_i|\vec{y}_i)_{\vec{E}_i}| \leq \left(\sum_{i\in I}\|\vec{x}_i\|^2_{\vec{E}_i}\right)^{1/2}\left(\sum_{i\in I}\|\vec{y}_i\|^2_{\vec{E}_i}\right)^{1/2} \;].$$

<u>Définition</u> :

<u>L'espace $\vec{E}$ défini ci-dessus s'appelle la somme directe hilbertienne des $\vec{E}_i$, et se note</u> $\bigoplus_{i\in I}\vec{E}_i$

<u>REMARQUE</u> :

Certains des $\vec{E}_i$ peuvent être réduits à $\{\vec{0}\}$.

THEOREME (T ,2,XXII,6;1).

La somme directe hilbertienne d'une famille d'espaces hilbertiens est hilbertienne.

DEMONSTRATION :

Nous devons montrer que $\vec{E}$ est complet ; nous appliquerons le critère (T ,2,XIV,2;2), en montrant que toute série normalement convergente de $\vec{E}$ est convergente. Soit donc $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{x}_n$ une série d'éléments de $\vec{E}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \|\vec{x}_n\| < +\infty$.

Pour tout n , $\vec{x}_n = (\vec{x}_{n,i})_{i \in I}$. Comme $\| \vec{x}_{n,i} \|_{\vec{E}} \leq \| \vec{x}_n \|_{\vec{E}}$

on a pour tout $i \in I$, $\sum_{n=0}^{\infty} \| \vec{x}_{n,i} \|_{\vec{E}_i} < +\infty$; comme $\vec{E}_i$ est

complet, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \vec{x}_{n,i}$ converge ; soit $\vec{x}_i \in \vec{E}_i$ sa somme. Appliquons (2,I,2;5) à une somme de $\vec{N}$ termes au lieu de 2 ; soit J fini $\subset I$; alors

$$(2,\text{XXII},6;9) \quad \left(\sum_{i \in J} \left(\|\vec{x}_{0,i}\|_{\vec{E}_i} + \|\vec{x}_{1,i}\|_{\vec{E}_i} \cdots + \|\vec{x}_{N,i}\|_{\vec{E}_i} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left(\sum_{i \in J} \|\vec{x}_{0,i}\|^2_{\vec{E}_i} \right)^{1/2} + \left(\sum_{i \in J} \|\vec{x}_{1,i}\|^2_{\vec{E}_i} \right)^{1/2} + \cdots + \left(\sum_{i \in J} \|\vec{x}_{N,i}\|^2_{\vec{E}_i} \right)^{1/2}$$

$$\leqslant \|\vec{x}_0\|_{\vec{E}} + \|\vec{x}_1\|_{\vec{E}} + \cdots + \|\vec{x}_N\|_{\vec{E}}$$

En prenant la borne supérieure pour tous les J finis et tous les N :

$$(2,\text{XXII},6;10) \quad \left(\sum_{i \in I} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|\vec{x}_{n,i}\|_{\vec{E}_i} \right)^2 \right)^{1/2} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|\vec{x}_n\|_{\vec{E}}$$

et comme, pour tout i , $\|\vec{x}_i\|_{\vec{E}} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|\vec{x}_{n,i}\|_{\vec{E}_i}$, on a à fortiori

$$(2,\mathrm{XXII},6;11) \qquad \left(\sum_{i\in I} \|\vec{x}_i\|^2_{\vec{E}_i}\right)^{1/2} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|\vec{x}_n\|_{\vec{E}} < +\infty .$$

Donc $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ est un élément $\vec{x}$ de $\vec{E}$.

Il reste à voir que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \vec{x}_n$ converge vers $\vec{x}$ dans $\vec{E}$. Il suffit pour cela de réappliquer (2,XXII,6;10), en remplaçant $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ par $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}$:

$$(2,\mathrm{XXII},6;12) \qquad \left\| \sum_{n=0}^{N} \vec{x}_n - \vec{x} \right\|_{\vec{E}}$$

$$= \left(\sum_{i\in I} \left\| \sum_{n=0}^{N} \vec{x}_{n,i} - \vec{x}_i \right\|^2_{\vec{E}_i}\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left(\sum_{i\in I} \left(\sum_{n\geqslant N+1} \|\vec{x}_{n,i}\|_{\vec{E}}\right)^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{n\geqslant N+1} \|\vec{x}_n\|_{\vec{E}} \quad ,$$

qui tend vers 0 pour N tendant vers l'infini, c.q.f.d.

Tel qu'il a été défini, $\vec{E} = \bigoplus\limits_{i\in I} \vec{E}_i$ est un sous-espace du produit $\prod\limits_{i\in I} \vec{E}_i$; il ne contient que les $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ tels que $\sum\limits_{i\in I} \|\vec{x}_i\|^2 < +\infty$. D'autre part il a une topologie plus fine que la topologie induite par le produit et strictement plus fine si I est infini ; $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ converge vers $\vec{0}$ dans le produit si, pour tout i , $\vec{x}_i$ converge vers $\vec{0}$, alors qu'il converge vers $\vec{0}$ dans $\oplus\ \vec{E}_i$ si la somme $\sum\limits_{i\in I} \|\vec{x}_i\|^2$ con-

verge vers 0 . D'ailleurs, dès que I est infini, $\prod_{i\in I}\vec{E}_i$ n'est pas normable (page XVIII,19), alors que $\bigoplus_{i\in I}\vec{E}_i$ est hilbertien. D'autre part $\vec{E}_j$ n'apparaît pas comme un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$; toutefois, si l'on appelle $\vec{E}_{\{j\}}$ l'espace des $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ tels que $\vec{x}_i=\vec{0}$ pour $i\neq j$, $\vec{E}_{\{j\}}$ est manifestement isomorphe, en tant qu'espace hilbertien, à $\vec{E}_j$; un isomorphisme entre les deux est défini par $\vec{\xi}\to\vec{\xi}_{\{j\}}$, $\vec{\xi}\in\vec{E}_j$, où $\vec{\xi}_j$ est l'élément $(\vec{x}_j=\vec{\xi},\vec{x}_i=\vec{0}$ pour $i\neq j$ de $\vec{E}_{\{j\}}$.
Plus généralement, soit J un sous-ensemble de I ; appelons $\vec{E}_J$ le sous-espace fermé de $\vec{E}$ formé des $(x_i)_{i\in I}$ pour lesquels $\vec{x}_i=\vec{0}$ pour $i\notin J$. $\vec{E}_J$ est isomorphe à $\bigoplus_{i\in J}\vec{E}_i$. Si J et K sont deux sous-ensembles disjoints de I, $\vec{E}_J$ et $\vec{E}_K$ sont orthogonaux ; si J et K sont exactement complémentaires, chacun des sous-espaces $\vec{E}_J$, $\vec{E}_K$, est exactement l'orthogonal de l'autre. Pour $\vec{x}=(\vec{x}_i)_{i\in I}$, appelons $\vec{x}_J$ l'élément $(\vec{y}_i)_{i\in I}$ avec $\vec{y}_i=\vec{x}_i$ pour $i\in J$, $\vec{y}_i=\vec{0}$ pour $i\notin J$; alors $\vec{x}_J$ est la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur $\vec{E}_J$. Pour $J=I$, on a $\vec{E}_I=\vec{E}$, $\vec{x}_I=\vec{x}$; pour $J=\{j\}$, on retrouve l'espace $\vec{E}_{\{j\}}$ isomorphe à E_j , et, pour $\vec{x}=(\vec{x}_i)_{i\in I}$, $\vec{x}_{\{j\}}$ est la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur $\vec{E}_{\{j\}}$. $\vec{x}_{\{j\}}$ n'est pas $\vec{x}_j$ mais $\{\vec{x}_j\ ;\ \vec{x}_i=\vec{0}$ pour $i\neq j\}$. En fait, la plupart du temps, il n'y a aucun inconvénient à identifier $\vec{E}_j$ à $\vec{E}_{\{j\}}$ $\vec{x}_j$ à $\vec{x}_{\{j\}}$;

les $\vec{E}_i$ sont ainsi des sous-espaces, deux à deux orthogonaux, de $\vec{E}$. Mais il sera impossible de le faire si, pour deux indices différents j et k ; $\vec{E}_j = \vec{E}_k \neq \{\vec{0}\}$; car on aura quand même $\vec{E}_{\{j\}} \neq \vec{E}_{\{k\}}$. Par exemple, soit $\vec{F}$ un espace hilbertien, et considérons la somme directe hilbertienne $\vec{E} = \bigoplus_{i\in I} \vec{F}$, où tous les $\vec{E}_i$ sont égaux à $\vec{F}$. Alors, pour tout $j \in I$, $\vec{F}_{\{j\}}$ est un sous-espace de $\vec{E}$, mais tous ces sous-espaces sont distincts et même orthogonaux ; l'isomorphisme de $\vec{F}$ sur $\vec{E}_{\{j\}}$ est celui qui, à $\vec{f} \in \vec{F}$, associe $(\vec{x}_i)_{i\in I}$, $\vec{x}_j = \vec{f}, \vec{x}_i = 0$ pour $i \neq j$. Sauf mention expresse du contraire, nous ferons toujours les identification $\vec{E}_j = \vec{E}_{\{j\}}$, $\vec{x}_j = \vec{x}_{\{j\}}$.

THEOREME (T ,2,XXII,5;2)

Le sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{E}_i$ dans $\vec{E} = \bigoplus_{i\in I} \vec{E}_i$ est dense. Pour tout $\vec{x} = (\vec{x}_i)_{i\in I}$ de $\vec{E}$, la série $\sum_{i\in I} \vec{x}_i$ est sommable et de somme $\vec{x}$; c'est la seule série $\sum_{i\in I} \vec{y}_i$, $\vec{y}_i \in \vec{E}_i$, qui puisse converger vers $\vec{x}$.

DEMONSTRATION :

Soit $\vec{x} \in \vec{E}$ un élément orthogonal à tous les $\vec{E}_i$. Si $\vec{x} = (\vec{x}_i)_{i\in I}$, $\vec{x}_i$ est la projection de $\vec{x}$ sur $\vec{E}_i \subset \vec{E}$ donc $\vec{x}_i = \vec{0}$. Alors $\vec{x} = \vec{0}$. Cela prouve bien, d'après le corollaire de (T ,2,XXII,4;1), que le sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{E}_i$ est dense dans $\vec{E}$.

Montrons que $\sum\limits_{i\in I} \vec{x}_i$ est sommable et converge vers $\vec{x} = (\vec{x}_i)_{i\in I}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit J un sous-ensemble fini de I tel que $\left(\sum\limits_{i\notin J} \| \vec{x}_i \|_{\vec{E}}^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon$. Pour tout K , $J \subset K \subset I$ on a, en posant $\vec{x}_K = \sum\limits_{i\in K} \vec{x}_i$:

$$\| \vec{x} - \vec{x}_K \| = \left(\sum_{i\notin K} \| \vec{x}_i \|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i\notin J} \| \vec{x}_i \|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon \,, \tag{2,XXII,6;13}$$

ce qui prouve notre affirmation (voir définition suivant (T ,2,XIV,3;2)). Bien entendu, ceci prouverait à nouveau que le sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{E}_i$ est dense dans $\vec{E}$, car $\vec{x}$ est limite de sommes finies $\vec{x}_K$, appartenant à ce sous-espace vectoriel.

Enfin soit $(\vec{y}_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs, $\vec{y}_i \in \vec{E}_i$, telle que $\sum\limits_{i\in I} \vec{y}_i$ soit sommable et de somme $\vec{x} = (\vec{x}_i)_{i\in I}$
La projection orthogonale de $\vec{E}$ sur $\vec{E}_i$ est linéaire continue, donc elle commute avec le signe $\sum$, autrement dit peut s'opérer terme à terme ; elle donne $\vec{x}_i = \vec{y}_i$. C.q.f.d.

<u>REMARQUE</u> :

<u>Par contre la série $\sum\limits_{i\in I} \vec{x}_i$ n'est en général pas normalement convergente.</u> En effet, on a supposé $\sum\limits_{i\in I} \|\vec{x}_i\|^2 < +\infty$, et non $\sum\limits_{i\in I} \|\vec{x}_i\| < +\infty$. Prenons par exemple $I = \mathbb{N}$, $\vec{E}_i = \mathbb{R}$
Si $(x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que $\sum\limits_n |x_n|^2 < +\infty$, $\sum\limits_n |x_n| = +\infty$ (exemple : $x_n = \dfrac{1}{n+1}$) ,

alors, en prenant $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \vec{E} = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$, la série

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \vec{x}_{\{n\}}$ sera sommable dans $\vec{E}$, de somme $\vec{x}$, mais non normalement convergente. [1]

LES ESPACES $\ell^2(I)$

<u>Définition</u> :

<u>Si tous les $\vec{E}_i$ sont le corps des scalaires $\mathbb{K}$, muni de sa norme usuelle $\|x\| = |x|$, $\vec{E} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K}$ se note $\ell^2(I)$ il se note ℓ^2 si $I = \mathbb{N}$</u>. <u>C'est donc l'espace des familles</u> $\vec{x} = (x_i)_{i \in I}$, $x_i \in \mathbb{K}$, <u>telles que</u> $\sum_{i \in I} |x_i|^2 < \infty$, <u>avec</u>

(2,XXII,6;13)
$$\left(\vec{x} \mid \vec{y}\right)_{\ell^2(I)} = \sum_{i \in I} x_i \, \overline{y_i}$$

Cet espace $\ell^2(I)$ généralise les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$, correspondant à $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Il importe de ne pas confondre, pour I infini, $\ell^2(I)$ avec $\mathbb{K}^I$ (pas plus que $\bigoplus_{i \in I} \vec{E}_i$ avec $\prod \vec{E}_i$). Un élément de $\mathbb{K}^I$ est une famille $(x_i)_{i \in I}$ quelconque, alors qu'un élément de $\ell^2(I)$ est une famille pour laquelle $\sum_{i \in I} |x_i|^2 < +\infty$. En outre, $\mathbb{K}^I$ a la topologie produit et n'est pas normable, (voir page XVIII, 19), alors que $\ell^2(I)$ est hilbertien.

1 Ne pas confondre le nombre réel $x_n \in \mathbb{R}$, et le vecteur $\vec{x}_{\{n\}} \in \vec{E}_{\{n\}} \subset \vec{E}$ dont la n-ième coordonnée est x_n et toutes les autres nulles. Ici, comme tous les $\vec{E}_n$ sont égaux à $\mathbb{R}$, nous n'avons pas identifié $\vec{E}_n$ et $\vec{E}_{\{n\}}$.

On ne devra pas non plus confondre ℓ^2 avec l'espace ℓ^∞ défini au Chapitre XV, § 1, exemple 5°. Nous avons vu, à l'exemple final du Chapitre XIX, § 7, que ℓ^∞ n'était pas réflexif ; ℓ^2 , hilbertien, est réflexif.

THEOREME (T ,2,XXII,6;3).

Pour que $\ell^2(I)$ et $\ell^2(J)$ soient isomorphes, il faut et suffit que I et J soient équipotents.

DEMONSTRATION :

Si I et J sont équipotents, il existe une bijection de I sur J , qui définit trivialement un isomorphisme de $\ell^2(I)$ sur $\ell^2(J)$.

Supposons inversement qu'il existe un isomorphisme u de $\ell^2(I)$ sur $\ell^2(J)$, et montrons que I et J sont équipotents. C'est évident si I ou J est fini, car la dimension de $\ell^2(I)$ est égale à $\operatorname{card} I$ si ce nombre fini, et infinie dans le cas contraire. Supposons donc I et J infinis. (1) Ecrivons $\ell^2(I) = \bigoplus_{i\in I} \vec{E}_i$, où $\vec{E}_i = \mathbb{K}$. Le sous-espace $\vec{E}_{\{i\}}$ de $\ell^2(I)$ est appliqué, par u , sur un sous-espace de dimension 1 de $\ell^2(J)$; les coordonnées des différents points de $u(\vec{E}_{\{i\}})$ sont toutes proportionnelles ; au plus une infinité dénombrable sont $\neq 0$, soit celles qui correspondent à un sous-ensemble J_i dénombrable de J .

Identifions, pour $A \subset I$, l'espace $\ell^2(A)$ au sous-espace de $\ell^2(I)$ formé des $(x_i)_{i\in I}$ tels que $x_i = 0$ pour $i \notin A$, c'est-à-dire au sous-espace fermé noté antérieurement $(\ell^2(I))_A$. De même pour $B \subset J$. On a donc $u(\ell^2(\{i\})) \subset \ell^2(J_i)$. Soit maintenant $\vec{x} \in \ell^2(I)$; il appartient à l'adhérence du sous espace vectoriel engendré par les $\ell^2(\{i\})$, donc $u(\vec{x})$ est dans

l'adhérence du sous-espace engendré par les $\ell^2(J_i)$ lequel est contenu dans $\ell^2(\bigcup_{i\in I} J_i)$ Or u est surjective, donc $\bigcup_{i\in I} J_i = J$
Mais chaque J_i est fini ou dénombrable ; si ν est la puissance du dénombrable, on a donc $\mathrm{card}\, J \leq \nu \times \mathrm{card}\, I = \mathrm{card}\, I$ puisque I est infini (T 1...) . En raisonnant sur u^{-1} on obtient l'inégalité inverse, donc $\mathrm{card}\, I = \mathrm{card}\, J$; c.q.f.d.

FAMILLES HILBERTIENNES DE SOUS-ESPACES d'un ESPACE HILBERTIEN

Passons maintenant à une situation un peu différente. Soit $\vec{E}$ un espace hilbertien, $(\vec{E}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels fermés de $\vec{E}$, donc hilbertiens, deux à deux orthogonaux ; on dit que c'est une famille hilbertienne de $\vec{E}$. On dit que la famille est totale, si le sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{E}_i$ est dense dans $\vec{E}$; on dit qu'elle est maximale, si elle ne peut pas être agrandie non trivialement, c'est-à-dire en rajoutant à la famille un sous-espace vectoriel fermé, orthogonal aux précédents, <u>non réduit à $\{0\}$</u>. Celà revient à dire qu'un vecteur orthogonal à tous les $\vec{E}_i$ est nul ; d'après le corollaire de (T, 2,XXII,4;1), la famille est totale si et seulement si elle est maximale. Fréquemment il n'est pas facile de reconnaître si une famille hilbertienne de sous-espaces de $\vec{E}$ est totale.

<u>THEOREME</u> (T ,2,XXII,6;4)

<u>Soit $(\vec{F}_i)_{i\in I}$ une famille hilbertienne de sous-espaces de $\vec{E}$. Il existe une application linéaire continue unique de $\vec{F} = \bigoplus_{i\in I} \vec{F}_i$ dans $\vec{E}$, qui, sur chaque $\vec{F}_i$, induise son injection canonique dans $\vec{E}$. Elle est définie comme suit : si $(\vec{x}_i)_{i\in I} \in \vec{F}$, son image est la somme de la série sommable $\sum_{i\in I} \vec{x}_i$ de $\vec{E}$. Elle est isomorphisme d'espaces hilbertiens de $\vec{F}$ sur le sous-espace vectoriel fermé $\vec{E}_I$ de $\vec{E}$, adhérence du sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{F}_i$.</u>

DEMONSTRATION

Soit $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ un élément de $\vec{F} = \bigoplus_{i\in I} \vec{F}_i$ tel que tous les $\vec{x}_i$ soient nuls sauf un nombre fini ; faisons-lui correspondre l'élément $\sum_{i\in I} \vec{x}_i$ de $\vec{E}$. On définit ainsi une application linéaire u du sous-espace vectoriel de $\vec{F}$ engendré par les $\vec{F}_i$, dans $\vec{E}$. Comme les $\vec{F}_i$ sont orthogonaux dans $\vec{E}$ cette application conserve les produits scalaires et les normes ; elle est en particulier injective et continue, et son image est le sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ engendré par les $\vec{F}_i$. Comme le sous-espace engendré par les $\vec{F}_i$ est dense dans $\vec{F}$, et que $\vec{E}$ est complet, le théorème de prolongement (T ,2,XIII,2bis;2) indique que cette application se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\bar{u}$ de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$; comme une application linéaire continue transforme les séries sommables en séries sommables, l'image de $(\vec{x}_i)_{i\in I} = \sum_i \vec{x}_{\{i\}} \in \vec{F}$ est la somme de la série sommable $\sum_{i\in I} \vec{x}_i$ de $\vec{E}$. Par continuité $\bar{u}$ conserve encore les produits scalaires et les normes ; alors $\bar{u}(\vec{F})$ est complet donc fermé dans $\vec{E}$, donc c'est l'adhérence $\vec{E}_I$ du sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{F}_i$, c.q.f.d.

REMARQUE :

Nous avons employé des lettres différentes, E et F , pour conserver la notation antérieure $\vec{F} = \bigoplus_{i\in I} \vec{F}_i$, qui peut être identifié à $\vec{E}_I$ mais non à $\vec{E}$. En général il sera commode de poser $\bar{u} =$ identité, et d'identifier $\vec{F}$ à $\vec{E}_I$; et, si la famille hilbertienne est totale, $\vec{F}_i = \vec{E}_i$ et d'identifier $\vec{E}$ à $\bigoplus_{i\in I} \vec{E}_i$.

COROLLAIRE 1

L'espace $\bigoplus_{i \in I} \vec{F}_i$ est, à un isomorphisme près, le seul espace hilbertien admettant les $\vec{F}_i$ comme sous-espace hilbertiens deux à deux orthogonaux, et dans lequel l'espace vectoriel engendré par les $\vec{F}_i$ soit dense.

DEMONSTRATION :

Si $\vec{E}$ est un tel espace hilbertien, nous venons de montrer qu'il existe un isomorphisme unique $\overline{u}$ de $\bigoplus_{i \in I} \vec{F}_i$ sur $\vec{E}_I$ ici identique à $\vec{E}$, qui soit l'identité sur chaque $\vec{F}_i$.
C.q.f.d.

COROLLAIRE 2

Soit $(\vec{F}_i)_{i \in I}$ une famille hilbertienne de sous-espaces de $\vec{E}$. Pour tout $\vec{x}$ de $\vec{E}$, soit $\vec{x}_i$ sa projection orthogonale sur $\vec{F}_i$; alors on a l égalité de Bessel-Parseval

$$\sum_{i \in I} \|\vec{x}_i\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2, \tag{2,XXII,6;14}$$

et la série $\sum_{i \in I} \vec{x}_i$ est sommable, de somme $\vec{x}_I$, projection orthogonale de $\vec{x}$ sur l'adhérence $\vec{E}_I$ du sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{F}_i$. On a l'inégalité de Bessel-Parseval

$$\sum_{i \in I} \|\vec{x}_i\|^2 = \|\vec{x}\|^2, \tag{2,XXII,6;15}$$

et $\sum_{i \in I} \vec{x}_i$ converge vers $\vec{x}$, si et seulement $\vec{x} \in \vec{E}_I$; cette série est alors la seule série de la forme $\sum_{i \in I} \vec{y}_i$, $\vec{y}_i \in \vec{F}_i$ qui puisse converger vers $\vec{x}$.

Inversement, si $(\vec{x}_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs des $\vec{F}_i$, telle que $\sum_{i \in I} \|x_i\|^2 < +\infty$, il existe un vecteur unique de $\vec{E}_I$, de projection $\vec{x}_i$ sur $\vec{F}_i$ pour tout i ; c'est la somme de la série $\sum_{i \in I} \vec{x}_i$, sommable dans $\vec{E}$.

La famille hilbertienne est totale, si et seulement si, pour tout $\vec{x}$, on a l'égalité de Bessel-Parseval, ou si et seulement si, pour tout $\vec{x}$, $\sum \vec{x}_i$ converge vers $\vec{x}$.

DEMONSTRATION :

Tout résulte trivialement de l'isomorphisme de $\bigoplus_{i \in I} \vec{F}_i$ avec $\vec{E}_I$, du théorème (T ,2,XXII,6;2), de ce que x et x_I ont les mêmes projections $\vec{x}_i$ sur les $\vec{F}_i$, et de ce qu'enfin $\sum_{i \in I} \|\vec{x}_i\|^2 = \|\vec{x}_I\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{x}_I\|^2$ (théorème de Pythagore: $\vec{x}_I$ et $\vec{x} - \vec{x}_I$ sont orthogonaux) $\leqslant \|\vec{x}\|^2$ c.q.f.d.

BASES HILBERTIENNES

Définition : On appelle système orthonormé d'un espace hilbertien $\vec{E}$ une famille $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ de vecteurs unitaires, deux à deux orthogonaux. On dit qu'il est total si le sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{e}_i$ est dense ; il est total si et seulement s'il est maximal, c'est-à-dire s'il n'existe aucun vecteur non nul orthogonal à tous les $\vec{e}_i$. Un système orthonormé total s'appelle aussi une base hilbertienne de $\vec{E}$ [1]

1 Une base hilbertienne n'est pas une base ! En effet, un vecteur x va s'exprimer comme série $\sum_{i \in I} x_i \vec{e}_i$, et non comme somme finie de ce type!

Appelons $\vec{F}_i$ le sous-espace de $\vec{E}$ engendré par $\vec{e}_i$;alors $(\vec{F}_i)_{i\in I}$ est une famille hilbertienne de $\vec{E}$, formée de sous-espaces de dimension 1. Pour tout $\vec{x}$ de $\vec{E}$, si $\vec{x}_i$ est sa projection sur $\vec{F}_i$, elle peut s'écrire $\vec{x}_i = x_i \vec{e}_i$, où x_i est le scalaire $(\vec{x} \mid \vec{e}_i)$; en effet $x_i \vec{e}_i$ est proportionnel à $\vec{e}_i$ et $\vec{x} - x_i \vec{e}_i$ est orthogonal à $\vec{e}_i$. Les $x_i \in \mathbb{K}$ s'appellent les coordonnées orthogonales de $\vec{x}$ suivant le système $(\vec{e}_i)_{i\in I}$. Chaque $\vec{F}_i$ est isomorphe à $\mathbb{K}$, en identifiant $\lambda \in \mathbb{K}$ à $\lambda \vec{e}_i \in \vec{F}_i$; donc $\vec{F} = \bigoplus_{i\in I} \vec{F}_i$ est canoniquement isomorphe à $\ell^2(I) = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{K}$. On déduit alors trivialement du théorème précédent et de ses corollaires :

<u>COROLLAIRE</u> 3

Soit $(\vec{e}_i)_{i\in I}$ un système orthonormé de vecteurs d'un espace hilbertien $\vec{E}$. Il existe une application linéaire continue unique de $\ell^2(I)$ dans $\vec{E}$, qui, pour tout scalaire λ et à tout $i \in I$, associe à $\lambda_{\{i\}} \in \ell^2(\{i\}) \subset \ell^2(I)$ l'élément $\lambda \vec{e}_i$ de $\vec{E}$; c'est celle qui, à tout $(\lambda_i)_{i\in I}$ de $\ell^2(I)$ associe la somme de la série $\sum_{i\in I} \lambda_i \vec{e}_i$ sommable dans $\vec{E}$.

<u>Elle est un isomorphisme d'espaces hilbertiens de $\ell^2(I)$ sur l'adhérence $\vec{E}_I$ du sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ engendré par les $\vec{e}_i$</u> .

Pour $\vec{x} \in \vec{E}$, soit $x_i = (\vec{x} \mid \vec{e}_i)$; on a l'inégalité de Bessel-Parseval

$$\sum_{i\in I} |x_i|^2 \leq \|\vec{x}\|^2, \qquad (2,\text{XXII},6;16)$$

et la série $\sum_{i\in I} x_i \vec{e}_i$ est sommable, et converge vers la projection orthogonale $\vec{x}_I$ de $\vec{x}$ sur $\vec{E}_I$.

On a l'égalité de Bessel-Parseval

(2,XXII,6;17) $$\sum_{i\in I} |x_i|^2 = \|\vec{x}\|^2 ,$$

et la série $\sum_{i\in I} x_i \vec{e}_i$ converge vers $\vec{x}$, si et seulement si $\vec{x} \in \vec{E}_I$; et alors c'est la seule série de la forme $\sum_{i\in I} y_i \vec{e}_i$, $y_i \in \mathbb{K}$ qui puisse converger vers $\vec{x}$.

Inversement, si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de scalaires, telle que $\sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 < +\infty$, alors il existe un vecteur unique $\vec{x}$ de $\vec{E}_I$ ayant les λ_i comme coordonnées orthogonales suivant le système ; c'est la somme de la série $\sum_{i\in I} \lambda_i \vec{e}_i$ dans $\vec{E}$.

Le système orthonormé $(\vec{e}_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne si et seulement si, pour tout $\vec{x}$ de $\vec{E}$, on a l'égalité de Bessel-Parseval, ou si et seulement si, pour tout $\vec{x}$, la série $\sum_{i\in I} x_i \vec{e}_i$ converge vers $\vec{x}$.

REMARQUE :

Ces longs énoncés sont des ramassis de trivialités ; nous ne les donnons sous une forme extensive qu'à titre de souvenir, parce qu'ils ont joué un rôle important, sous toutes les formes données ici, dans la théorie des séries orthogonales, antérieurement à la découverte des espaces de Hilbert.

THEOREME (2,XXII,6;5)

Tout espace hilbertien admet des bases hilbertiennes, qui sont toutes équipotentes.

DEMONSTRATION :

Une base hilbertienne étant un système orthonormé maximal, il suffit d'appliquer le théorème de Zorn, pour en prouver l'existence ; on voit même ainsi que tout système orthonormé de vecteurs est contenu dans une base hilbertienne.

Soient $(\vec{e}_i)_{i\in I}$ et $(\vec{f}_j)_{j\in J}$ deux bases hilbertiennes ; alors $\vec{E}$ est isomorphe à $\ell^2(I)$ et à $\ell^2(J)$, donc I et J sont équipotents d'après (T ,2,XXII,6;3). C.q.f.d.

Tout espace hilbertien est isomorphe à un espace $\ell^2(I)$ où I est déterminé à une équipotence près.

Si l'on considère comme equivalents deux espaces hilbertiens isomorphes, les classes d'équivalences d'espaces hilbertiens, sont en correspondance bijective avec les nombres cardinaux.

§ 7 ADJOINT D'UN OPÉRATEUR

THEOREME (T ,2,XXII,7;1)

Soient $\vec{E}$, $\vec{F}$ deux espaces hilbertiens, u une application linéaire continue de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$. Il existe une application unique u^* de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$, telle que l'on ait, pour tous $\vec{x}\in\vec{E}$, $\vec{y}\in\vec{F}$:

(2,XXII;7;1) $$(u\vec{x}\mid\vec{y})_{\vec{F}} = (\vec{x}\mid u^*\vec{y})_{\vec{E}}$$

Cette application est linéaire et continue, et $\|u^*\| = \|u\|$. En outre, $u \longrightarrow u^*$ est une bijection anti-linéaire continue isométrique de $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$ sur $\mathcal{L}(\vec{F};\vec{E})$. On a $u^{**}=u$; si v est une application linéaire continue de $\vec{F}$ dans un espace hilbertien $\vec{G}$, on a $(v\circ u)^* = u^*\circ v^*$.

DEMONSTRATION :

Soit $\vec{y} \in \vec{F}$. Alors $\vec{x} \longrightarrow (u\vec{x} \mid \vec{y})_{\vec{F}}$ est une forme linéaire continue sur $\vec{E}$, de norme $\leq \|u\| \, \|\vec{y}\|$. Il existe donc un élément unique $\vec{Y}$ de $\vec{E}$ tel que $(u\vec{x} \mid \vec{y})_{\vec{F}} = (\vec{x} \mid \vec{Y})_{\vec{E}}$ pour tout $\vec{x}$; appelons le $u^* \vec{y}$. Alors on a bien (2,XXII,7;1). Cela montre aussitôt, en fixant $\vec{x}$, que $\vec{y} \to u^* \vec{y}$ est linéaire. En outre $\| u^* \vec{y} \| \leq \|u\| \, \|\vec{y}\|$, donc $\|u^*\| \leq \|u\|$. Mais en fait

$$(2,\text{XXII},7;2) \quad \|u^*\| = \sup_{\|\vec{y}\| \leq 1} \|u^* \vec{y}\| = \sup_{\|\vec{x}\| \leq 1, \|\vec{y}\| \leq 1} |(\vec{x} \mid u^* \vec{y})|$$

$$= \sup_{\|\vec{x}\| \leq 1, \|\vec{y}\| \leq 1} |(u\vec{x} \mid \vec{y})| = \sup_{\|\vec{x}\| \leq 1} \|u\vec{x}\| = \|u\|$$

donc $\|u^*\| = \|u\|$. Ensuite (2,XXII,7;1) montre bien que $u \longrightarrow u^*$ est anti-linéaire de $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$ dans $\mathcal{L}(\vec{F};\vec{E})$: $(u+v)^* = u^* + v^*$, $(\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*$. Montrons en détail cette dernière égalité :

$$(2,\text{XXII},7;3) \quad (\vec{x} \mid (\lambda u)^* \vec{y}) = ((\lambda u)\vec{x} \mid \vec{y}) = (\lambda(u\vec{x}) \mid \vec{y}) = \lambda(u\vec{x} \mid \vec{y})$$

$$= (u\vec{x} \mid \bar{\lambda}\vec{y}) = (\vec{x} \mid u^*(\bar{\lambda}\vec{y})) = (\vec{x} \mid \bar{\lambda} u^*(\vec{y})) = (\vec{x} \mid (\bar{\lambda} u^*)\vec{y}).$$

Il résulte de la conservation des normes que $u \longrightarrow u^*$ est injective. Pour voir qu'elle est surjective, il suffit de montrer que $u^{**} = u$, car alors toute application linéaire continue v de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$ sera l'adjointe u^* de $u = v^*$. Or:

$$(2,\text{XXII},7;4) \quad (u^{**}\vec{x} \mid \vec{y})_{\vec{F}} = (\vec{x} \mid u^* \vec{y})_{\vec{E}} = (u\vec{x} \mid \vec{y})_{\vec{F}} \text{ , donc } u^{**} = u .$$

Enfin la formule $(vu)^* = u^* v^*$ est évidente :

(2,XXII,7;5) $(\vec{x}|(vu)^*\vec{y})_{\vec{E}} = (vu\,\vec{x}|\vec{y})_{\vec{G}} = (u\vec{x}|v^*\vec{y})_{\vec{F}} = (\vec{x}|u^* v^*\vec{y})_{\vec{E}}$

C.q.f.d.

REMARQUE :

Si $\vec{F} = \vec{E}$, l'adjoint de l'identité est l'identité ; l'adjoint de la multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}$ est la multiplication par $\overline{\lambda}$.

COROLLAIRE

Si u est inversible, u^* l'est aussi, et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

Car $u^*(u^{-1})^* = (u^{-1}u)^* = I^*_{\vec{E}} = I_{\vec{E}}$ et de même $(u^{-1})^* u^* = I_{\vec{F}}$

REMARQUE :

Il existe une liaison simple évidente entre l'adjointe et la transposée (chapitre XIX, § 7). La transposée ${}^t u$ de u applique $\overleftarrow{F}'$ dans $\overleftarrow{E}'$; mais $\overleftarrow{F}'$ et $\overleftarrow{E}'$ admettent des antisisomorphimes canoniques avec $\vec{F}$ et $\vec{E}$. On voit alors immédiatement, en comparant (2,XXII,7;1) et (2,XIX,7;3bis), que $u^*\vec{y} = \overline{{}^t u\,(\overline{\vec{y}})}$. En effet :

(2,XXII,7;6) $(\vec{x}|u^*\vec{y})_{\vec{E}} = (u\vec{x}|\vec{y})_{\vec{F}} = \langle u\vec{x}, \overline{\vec{y}} \rangle_{\vec{F},\overleftarrow{F}'} = \langle \vec{x}, {}^t u\,\overline{\vec{y}} \rangle_{\vec{E},\overleftarrow{E}'}$

$$= (\vec{x}\,|\,\overline{{}^t u(\overline{\vec{y}})})_{\vec{E}}.$$

Ainsi $u^* : \vec{F} \longrightarrow \vec{E}$ est la composée des 3 applications $\vec{F} \longrightarrow \overleftarrow{F}' \xrightarrow{{}^t u} \overleftarrow{E}' \longrightarrow \vec{E}$.

(C'est là que l'on voit bien la relation entre l'adjonction et la structure hilbertienne. Remplaçons les normes de $\vec{E}$, $\vec{F}$, par des normes équivalentes, c'est-à-dire donnant la même topologie, mais non proportionnelles ; les structures hilbertiennes sont différentes ; le transposé ${}^t u : \overleftarrow{F}' \longrightarrow \overleftarrow{E}'$ n'a pas changé, mais l'adjoint $u^* : \vec{F} \longrightarrow \vec{E}$ n'est plus le même).

Le théorème précédent peut alors se déduire des propriétés de la transposée ; étant donné la simplicité de sa démonstration directe, nous avons préféré la donner. Le fait que $u \longrightarrow u^*$ soit surjective est, dans ce cas hilbertien, évident; mais celà résulte aussi de ce qui est dit page XIX, 62bis, car un espace hilbertien est réflexif.

<u>THEOREME</u> (T 2,XXII,7;2).

<u>L'orthogonal de $u(\vec{E})$ est $u^{*^{-1}}(\{\vec{0}\})$, l'orthogonal de $u^{-1}(\{\vec{0}\})$ est l'adhérence de $u^*(\vec{F})$. Pour que u soit injective, il faut et il suffit que $u^*(\vec{F})$ soit dense dans $\vec{E}$; pour que $u(\vec{E})$ soit dense dans $\vec{F}$, il faut et il suffit que u^* soit injective</u>.

Celà résulte immédiatement de (T ,2,XIX,7;6) et de son corollaire . Mais on peut le revoir directement. Pour que $\vec{y}$ soit orthogonal à $u(\vec{E})$, il faut et il suffit que $(u\vec{x}|\vec{y})$ soit nul pour tout $\vec{x}$ de $\vec{E}$, donc que $(\vec{x}|u^*\vec{y})$ soit nul pour tout $\vec{x}$, donc que $u^*\vec{y} = \vec{0}$ ou que $\vec{y} \in u^{*^{-1}}(\{\vec{0}\})$. Donc l'orthogonal de $u(\vec{E})$ est bien $u^{*^{-1}}(\{\vec{0}\})$. Alors l'orthogonal de $u^{-1}(\{\vec{0}\})$ est le biorthogonal de $u^*(\vec{F})$ c'est-à-dire son adhérence, d'après le corollaire 1 de (T 2,XXII,4;2). C.q.f.d.

<u>CAS où $\vec{E} = \vec{F}$.</u>

Alors $u \longrightarrow u^*$ est une bijection antilinéaire isométrique de $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{E})$ sur lui-même.

Par ailleurs, si $u \in \mathcal{L}(\vec{E};\vec{E})$ on peut définir la forme sesquilinéaire U sur $\vec{E} \times \vec{E}$ par

$$\text{(2,XXII,7;7)} \qquad U(\vec{x},\vec{y}) = (u\vec{x}\,|\,\vec{y})_{\vec{E}}$$

On voit alors

que $u \longrightarrow U$ est une bijection linéaire isométrique de $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{E})$ sur l'espace des formes sesquilinéaires continues sur $\vec{E}\times\vec{E}$
En effet, pour u donnée, U est évidemment continue, et

$$\text{(2,XXII,7;8)} \qquad \|U\| = \sup_{\|\vec{x}\|\leqslant 1,\,\|\vec{y}\|\leqslant 1} |(u\vec{x}|\vec{y})| = \sup_{\|\vec{x}\|\leqslant 1} \|u\vec{x}\| = \|u\|.$$

Inversement, soit U une forme sesquilinéaire continue sur $\vec{E}\times\vec{E}$. Pour $\vec{x}$ donné, $\vec{y}\longrightarrow U(\vec{x},\vec{y})$ est une forme antilinéaire continue sur $\vec{E}$; donc il existe un élément unique $u\vec{x}$ de $\vec{E}$, tel que $U(\vec{x},\vec{y}) = (u\vec{x}|\vec{y})_{\vec{E}}$ pour tout $\vec{y}$; u est linéaire continue de U dans lui-même, et, comme ci-dessus, $\|u\| = \|U\|$. Bien entendu, à partir de U, on aurait pu définir une application u^* de $\vec{E}$ dans lui-même, telle que $U(\vec{x},\vec{y})=(\vec{x}|u^*\vec{y})_{\vec{E}}$; u^* aurait été exactement l'adjointe de u. La bijection $u\longrightarrow U$ peut aussi se déduire du théorème (T,2,XIII,5;3) ; celui-ci établit une bijection de l'espace $\mathcal{L}_2(\vec{E}\times\overleftarrow{E}';\mathbb{K})$ des formes bilinéaires continues sur $\vec{E}\times\overleftarrow{E}'$ sur l'espace $\mathcal{L}(\vec{E};\mathcal{L}(\overleftarrow{E};\mathbb{K})) = \mathcal{L}(\vec{E};\vec{E}'') = \mathcal{L}(E;\vec{E})$ (les rôles de u et U sont intervertis entre ce théorème et le procédé développé ici) ; l'anti-isomorphisme de $\overleftarrow{E}$ sur $\vec{E}$ ramène $\mathcal{L}_2(\vec{E}\times\overleftarrow{E};\mathbb{K})$ à l'espace des formes sesquilinéaires continues sur $\vec{E}\times\vec{E}$.

<u>Définition</u> : <u>On dit qu'une application linéaire continue u de $\vec{E}$ dans lui-même est hermitienne (on dit aussi self-adjointe, ou auto-adjointe ; ou symétrique si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) si $u^*=u$, c'est-à-dire si l'on a, pour tout $\vec{x},\vec{y}\in\vec{E}$</u> :

$$\text{(2,XXII,7;9)} \qquad (u\vec{x}\,|\,\vec{y}) = (\vec{x}\,|\,u\vec{y})^{1}$$

1 Comme la notion d'adjoint, celle d'opérateur hermitien est liée à la structure hilbertienne ; si l'on remplace la norme hilbertienne de $\vec{E}$ par une équivalente, c.à.d. donnant la même topologie, mais non proportionnelle, un opérateur hermitien ne reste pas hermitien.

Celà revient exactement à dire que la forme sesquilinéaire associée U comme plus haut est hermitienne, en effet, (2,XXII,7;9) revient à

$$(2,\text{XXII},7;10) \qquad U(\vec{y},\vec{x}) = (u\vec{y}\,|\,\vec{x}) = \overline{(\vec{x}\,|\,u\vec{y})} = \overline{(u\vec{x}\,|\,\vec{y})} = \overline{U(\vec{x},\vec{y})}$$

Il résulte alors de (T 2,XXII,1;1) que, <u>pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, u est hermitien si et seulement si, pour tout $\vec{x}$, $(u\vec{x}\,|\,\vec{x})$ est réel</u>.

La multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}$ est hermitienne si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}$. Les opérateurs hermitiens forment un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{E})$. Par contre, si u et v sont hermitiens, uv ne l'est pas en général ; il l'est si et seulement si u et v commutent, car $(uv)^* = v^*u^* = vu$.

<u>Définition</u> :

On dit que $u \in \mathcal{L}(\vec{E};\vec{E})$ est anti-hermitien (ou anti-symétrique si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) si $u^* = -u$; celà revient à dire que, pour tous $\vec{x},\vec{y} \in \vec{E}$:

$$(2,\text{XXII},7;11) \qquad (u\vec{x}\,|\,\vec{y}) = -(\vec{x}\,|\,u\vec{y}).$$

Pour celà, il faut et il suffit que la forme sesquilinéaire soit anti-hermitienne, c'est-à-dire vérifie

$$(2,\text{XXII},7;12) \qquad U(\vec{y},\vec{x}) = -\overline{U(\vec{x},\vec{y})}$$

Dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, on sait que ceci est équivalent à $U(\vec{x},\vec{x})=0$ pour tout $\vec{x}$, donc $(u\vec{x}\,|\,\vec{x})=0$ pour tout $\vec{x}$; il n'en est rien dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, au contraire on sait que $U(\vec{x},\vec{x})=0$ entraînerait $U=0$, d'après (2,XXII,1;8).

Dans le cas complexe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u est anti-hermitienne si et seulement si iu est hermitienne, puisque l'adjointe de iu est $-iu^*$. La multiplication par λ est anti-hermitienne, pour λ purement imaginaire (donc $\lambda = 0$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

THEOREME (2,XXII,7;3)

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et pour toute $u \in \mathcal{L}(\vec{E};\vec{E})$, on a :

(2,XXII,7;13) $$\frac{1}{2}\,\| u \| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(u\vec{x} \mid \vec{x})| \leqslant \| u \|$$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, si u est hermitien, on a exactement

(2,XXII,7;14) $$\| u \| = \sup_{\|\vec{x}\| \leqslant 1} |(u\vec{x} \mid \vec{x})| .$$

DEMONSTRATION :

Raisonnons sur U (on aurait aussi bien pu donner ce théorème au début du Chapitre). On sait déjà que

(2,XXII,7;15) $$\| u \| = \| \mathrm{U} \| \sup_{\|\vec{x}\| \leqslant 1,\, \|\vec{y}\| \leqslant 1} |\mathrm{U}(\vec{x},\vec{y})| \geqslant \sup_{\|\vec{x}\| \leqslant 1} |\mathrm{U}(\vec{x},\vec{x})| .$$

Il faut une inégalité en sens inverse, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Appelons α le dernier membre de (2,XXII,7;15). Alors on a, pour tout $\vec{x}$, $|\mathrm{U}(\vec{x},\vec{x})| \leqslant \alpha \|\vec{x}\|^2$. Utilisons (2,XXII,1;8) :

(2,XXII,7;16) $$|\mathrm{U}(\vec{x},\vec{y})| \leqslant \frac{1}{4}\Big(\alpha \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \alpha \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \alpha \|\vec{x}+i\vec{y}\|^2 + \alpha \|\vec{x}-i\vec{y}\|^2\Big)$$

$$= \frac{\alpha}{4}\big(2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|i\vec{y}\|^2$$

(parce que $\| \vec{x} + \vec{y} \| = \| \vec{x} \| + \| \vec{y} \| + 2\,\mathcal{R}e\,(\vec{x} | \vec{y})$, etc...).

$$= \alpha \left(\| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2 \right) .$$

$$(2,\mathrm{XXII},7;17) \qquad \| U \| = \sup_{\|\vec{x}\| \leqslant 1,\, \|\vec{y}\| \leqslant 1} | U(\vec{x},\vec{y}) | \leq 2\alpha ,$$

ce qui donne (2,XXII,7;13).

Supposons maintenant U hermitienne, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, au lieu de (2,XXII,1;8), on utilise (2,XXII,1;3 quarto) : (la partie $\mathcal{R}e$ est à supprimer pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tout étant réel) :

$$(2,\mathrm{XXII},7;18) \quad | \mathcal{R}e\, U(\vec{x},\vec{y}) | = \frac{1}{4} \left| U(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) - U(\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y}) \right|$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{4} \left(\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 + \| \vec{x} - \vec{y} \|^2 \right) = \frac{\alpha}{4} \left(2 \| \vec{x} \|^2 + 2 \| \vec{y} \|^2 \right)$$

$$= \frac{\alpha}{2} \left(\| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2 \right) .$$

Mais, pour $\| \vec{x} \| \leqslant 1$, $\| \vec{y} \| \leqslant 1$, l'ensemble des valeurs de $U(\vec{x},\vec{y})$ dans $\mathbb{C}$ est équilibré, donc la borne supérieure des modules est aussi celle des valeurs absolues des parties réelles ; donc

$$(2,\mathrm{XXII},7;18^{bis}) \qquad \| U \| = \sup_{\|\vec{x}\| \leqslant 1,\, \|\vec{y}\| \leqslant 1} | \mathcal{R}e\, U(\vec{x},\vec{y}) | \leqslant \frac{\alpha}{2} \cdot 2 = \alpha ,$$

ce qui donne (2,XXII,7;14).

REMARQUES:

1) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la formule (2,XXII,7;13) ne peut pas subsister, puisque, si u est antisymétrique, on a $(u\vec{x} | \vec{x}) = 0$ pour tout $\vec{x}$, sans avoir $u = 0$. On retrouve les circonstances du théorème (2,XXII,1;2), dont celui-ci est simplement une forme plus précise.

2) Si u n'est pas hermitien, (2,XXII,7;14) n'est plus nécessairement exact, et le facteur $\frac{1}{2}$ de (2,XXII,7;13) est inévitable. Considérons par exemple, dans $\vec{E} = \mathbb{C}^2$, la transformation $u : (x_1, x_2) \to (x_2, 0)$; sa norme est égale à 1, car elle est trivialement ≤ 1 , et, pour $x_1 = 0$, la norme est conservée par u . Or, pour $\vec{x} = (x_1, x_2)$, on a $(u\vec{x} \mid \vec{x}) = x_2\,\overline{x_1}$, dont le maximum du module pour $|x_1|^2 + |x_2|^2 \leq 1$ est $\frac{1}{2}$.

Définition :

<u>L'opérateur $u \in \mathcal{L}(\vec{E};\vec{E})$ est dit hermitien ≥ 0 s'il est hermitien, et si $(u\vec{x} \mid \vec{x}) \geq 0$ pour tout $\vec{x}$ de $\vec{E}$. Il est dit hermitien défini positif si en outre $(u\vec{x} \mid \vec{x}) > 0$ pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$.</u>

Celà revient exactement à dire que la forme sesquilinéaire associée U est hermitienne ≥ 0 ou hermitienne définie positive. D'après (T,2,XXII,1;1), si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'inégalité $(u\vec{x}|\vec{x}) \geq 0$, entraînant $(u\vec{x} \mid \vec{x}) \in \mathbb{R}$ pour tout $\vec{x}$, suffit à assurer l'hermiticité de u .

THEOREME (T,2,XXII,7;4)

<u>Soient $\vec{E}$, $\vec{F}$ des espaces hilbertiens, $u \in \mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$. Alors $u^* u$ est un opérateur hermitien ≥ 0 de $\vec{E}$ dans lui-même, et en outre $\| u^* u \| = \| u \|^2$.</u>

DEMONSTRATION :

On a d'abord $(u^* u)^* = u^* \; u^{**} = u^* u$, donc $u^* u$ est hermitien. On a trivialement, pour tout $\vec{x}$ de E , $(u^* u\vec{x} \mid \vec{x}) = (u\vec{x} \mid u\vec{x}) = \|u\vec{x}\|^2 \geq 0$. Alors en utilisant (2,XXII,7;14) :

$$(2,\mathrm{XXII},7;19) \qquad \| u^* u \| = \sup_{\|\vec{x}\| \leq 1} (u^* u\vec{x} \mid \vec{x}) = \sup_{\|\vec{x}\| \leq 1} \| u\vec{x} \|^2 = \| u \|^2, \text{ c.q.f.d.}$$

REMARQUE :

De même $u\,u^*$ est hermitien $\geqslant 0$ de $\vec{F}$ dans lui-même, et $\|u\ u^*\| = \|u^*\|^2 = \|u\|^2$.

THEOREME ($\mathcal{T}$,2,XXII,7;5)

Soient $\vec{E}$, $\vec{F}$, deux espaces hilbertiens, $u \in \mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$
Pour que u soit inversible à gauche, il faut et il suffit qu'il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que

(2,XXII,7;20) $$\|(u\,\vec{x})\| \geqslant k\ \|\vec{x}\|$$

Le maximum de ces constantes k est alors aussi le maximum des $\|v\|^{-1}$, pour tous les inverses à gauche v.

DEMONSTRATION :

Supposons d'abord u inversible à gauche, et soit v un inverse à gauche : $vu = I_{\vec{E}}$. Alors

(2,XXII,7;21) $$\|\vec{x}\| = \|vu\,\vec{x}\| \leqslant \|\vec{v}\|\ \|u\,\vec{x}\| ,$$

donc on a bien (2,XXII,7;20), avec $k = \|v\|^{-1}$; et la borne supérieure k_0' des k possibles est au moins égale à la borne supérieure des $\|v\|^{-1}$.

Supposons inversement l'existence d'une constante k telle que l'on ait (2,XXII,7;20). Appelons k_0 la borne supérieure de ces k ; on a alors aussi (2,XXII,7;20) avec la constante k_0, c'est donc un maximum. Posons $\vec{G} = u(\vec{E})$. Alors (2,XXII,7;20) prouve que u est une bijection linéaire de $\vec{E}$ sur $\vec{G}$; la bijection réciproque w est continue, car, si $\vec{y} \in \vec{G}$, $\vec{y} = u(w\,\vec{y})$, et

(2,XXII,7;22) $$\|w\,\vec{y}\| \leqslant \frac{1}{k_0}\,\|u\,w\,\vec{y}\| = \frac{1}{k_0}\,\|\vec{y}\| ;$$

et sa norme est $\leqslant k_0^{-1}$. Alors $\vec{G}$, dont la norme est équivalente à la transportée par u de celle de $\vec{E}$, est complet comme $\vec{E}$, donc fermé dans $\vec{F}$. Soit $\vec{H}$ l'orthogonal de $\vec{G}$ on peut identifier $\vec{F}$ à la somme hilbertienne $\vec{G} \oplus \vec{H}$; l'application v_0 de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$ qui, sur $\vec{G}$, coïncide avec w et est nulle sur $\vec{H}$, est alors trivialement un inverse à gauche de u , car

$$(2,\mathrm{XXII},7;23) \qquad v_0 u \vec{x} = w u \vec{x} = \vec{x} \quad \text{pour } \vec{x} \in \vec{E}$$

En outre, on a, pour $\vec{g} \in \vec{G}$, $\vec{h} \in \vec{H}$:

$$(2,\mathrm{XXII},7;24) \quad \| v_0(\vec{g}+\vec{h}) \| = \| w\vec{g} \| \leq k_0^{-1} \| \vec{g} \| \leq k_0^{-1} \| \vec{g} + \vec{h} \| ,$$

$$\text{donc } \| v_0 \| \leq k_0^{-1} ,$$

ce qui prouve bien que $\| v_0 \|^{-1} \geqslant k_0$, et que k_0 est le maximum des $\| v \|^{-1}$ pour les inverses à gauche v possibles. C.q.f.d.

COROLLAIRE 1

Soit un opérateur hermitien de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$. Pour qu'il soit inversible, il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

a) il est inversible à gauche ;

b) il est inversible à droite ;

c) il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que l'on ait (2,XXII,7;20).

Et alors u^{-1} est hermitien et le maximum de ces constantes k est exactement $\| u^{-1} \|^{-1}$.

DEMONSTRATION :

Supposons u inversible à gauche, il existe v tel que $vu = I$. Alors on a aussi, en prenant les adjoints, $uv^* = I$ donc u est aussi inversible à droite ; on sait alors (propriété classique d'algèbre) que u est inversible (car $v^* = vuv^* = v$, donc $v^* = v$ est inverse bilatère) ; et son inverse v est hermitien. Donc a) entraîne b), de même b) entraîne a), et tous deux entraînent l'inversibilité. Le théorème précédent montre alors que c) entraîne l'inversibilité à gauche, donc l'inversibilité. Il y a alors un seul inverse à gauche, u^{-1}, d'où le résultat final. C.q.f.d.

COROLLAIRE 2.

Soit u un opérateur hermitien de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$. Pour tout λ complexe non réel, l'opérateur $u + \lambda I$ est inversible, et $\|(u+\lambda I)^{-1}\|^{-1} \geq |\mathcal{Im}\,\lambda|$. Si u est hermitien ≥ 0, $u+\lambda I$ est aussi inversible pour λ réel > 0, et alors $\|(u+\lambda I)^{-1}\|^{-1} \geq \lambda$.

DEMONSTRATION :

Posons $\lambda = \sigma + i\tau$; alors

$$(2,\text{XXII},7;25) \qquad \|(u+\lambda I)\vec{x}\| \ \|\vec{x}\| \geq |((u+\lambda)\vec{x}|\vec{x})| =$$

$$|((u+\sigma)\vec{x}|\vec{x}) + i\tau\|\vec{x}\|^2| \overset{1}{\geq} |\tau|\ \|\vec{x}\|^2$$

donc $u + \lambda I$ est inversible à gauche ; mais il en est de même de $u + \bar{\lambda} I$, donc $u + \lambda I$ est inversible à droite (l'adjoint d'un opérateur inversible à gauche est inversible à droite), donc inversible ; et alors le théorème donne le résultat $\|(u+\lambda I)^{-1}\|^{-1} \geq |\tau| = |\mathcal{Im}\,\lambda|$.

Si u est hermitien ≥ 0, et si λ est réel ≥ 0, on a de même

$$(2,\text{XXII},7;26) \qquad \|(u+\lambda I)\vec{x}\| \ \|\vec{x}\| \geq |((u+\lambda)\vec{x}|\vec{x})| \geq \lambda\|\vec{x}\|^2,$$

d'où l'on conclut de la même manière. C.q.f.d.

1 parce que $((u+\sigma)\vec{x}|\vec{x})$ est réel, u étant hermitien.

DEFINITION :

Soient $\vec{E}$ et $\vec{F}$ des espaces hilbertiens. Un opérateur u de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ est dit partiellement unitaire, s'il conserve les normes, ce qui implique qu'il soit injectif :

(2,XXII,7;27) $$\| u\vec{x} \| = \| \vec{x} \| \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \vec{E}.$$

Celà entraîne, d'après (2,XXII,2;5 et 6), qu'il conserve aussi les produits scalaires :

(2,XXII,7;28) $$(u\vec{x} \mid u\vec{y})_{\vec{F}} = (\vec{x} \mid \vec{y})_{\vec{E}} \quad , \text{pour } \vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$$

Comme $(u\vec{x} \mid u\vec{y}) = (u^* ux \mid \vec{y})$, u est partiellement unitaire si et seulement si $u^*u = I_{\vec{E}}$; celà entraîne donc que u soit inversible à gauche. On dit que u est unitaire s'il est partiellement unitaire et inversible. Alors $u^*u = I$ implique l'inverse de u soit u^* ; u est unitaire si et seulement s'il est inversible et si u^* est son inverse. La multiplication par un scalaire λ est unitaire, si et seulement si $|\lambda| = 1$. Unitaire s'appelle aussi orthogonal si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Si $\vec{E}$ est de dimension finie, tout opérateur partiellement unitaire de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$, étant injectif, est inversible, donc unitaire ; mais ceci ne subsiste pas en dimension infinie. Soit en effet $\vec{E}$ un espace hilbertien muni d'une base hilbertienne dénombrable $(\vec{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$; et considérons l'opérateur linéaire continu unique u tel que $u(\vec{e}_n) = \vec{e}_{n+1}$; il est défini par $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \longrightarrow (0, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ en coordonnées orthogonales par rapport à la base. Il est évidemment partiellement unitaire, mais non surjectif, puisque $u(\vec{E})$ est le sous-espace vectoriel fermé engendré par $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \ldots$ c'est-à-dire l'orthogonal de $\vec{e}_0$.

<u>Définition : On dit qu'un opérateur linéaire continu u de $\vec{E}$</u> dans $\vec{E}$ est normal, s'il commute avec son adjoint : $u^*u = uu^*$ [1)]

Un opérateur hermitien, antihermitien, unitaire, est normal. La multiplication par un scalaire arbitraire est normale.

L'intérêt des opérateurs normaux est le suivant. On dira qu'un opérateur u de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$ est ortho-diagonal, si l'on peut décomposer $\vec{E}$ en somme directe hilbertienne de sous-espaces, $\vec{E} = \bigoplus_{i\in I} \vec{E}_i$, tels que chaque $\vec{E}_i$ soit stable par u et que, dans chaque $\vec{E}_i$, u soit la multiplication par un scalaire λ_i. L'opérateur u peut s'écrire $(\vec{x}_i)_{i\in I} \longrightarrow (\lambda_i \vec{x}_i)_{i\in I}$. Un tel opérateur n'est continu que si $\sup_{i\in I} |\lambda_i|$ est fini, et cette quantité est précisément $\| u \|$, si aucun des $\vec{E}_i$ n'est réduit à $\{\vec{0}\}$; en effet, trivialement $\| u \| \leq \sup_{i\in I} |\lambda_i|$; d'autre part, pour tout i, $\vec{E}_i$ n'étant pas nul, la norme de la restriction de u à $\vec{E}_i$ est $|\lambda_i|$, donc $\| u \| \geq \sup_{i\in I} |\lambda_i|$. Quel que soit le choix des λ_i, l'opérateur u ainsi défini est normal, et son adjoint est $u^* : (\vec{x}_i)_{i\in I} \longrightarrow (\bar{\lambda}_i \vec{x}_i)_{i\in I}$. En effet, quels que soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans $\vec{E}$, on a

$$(2,\mathrm{XXII},7;29) \quad (u\vec{x} \mid \vec{y})_{\vec{E}} = \Big((\lambda_i \vec{x}_i)_{i\in I} \mid (\vec{y}_i)_{i\in I}\Big)_{\vec{E}} = \sum_{i\in I} (\lambda_i \vec{x}_i \mid \vec{y}_i)_{\vec{E}_i}$$

$$= \sum_{i\in I} (\vec{x}_i \mid \bar{\lambda}_i \vec{y}_i)_{\vec{E}_i} = \Big((\vec{x}_i)_{i\in I} \mid (\bar{\lambda}_i \vec{y}_i)_{i\in I}\Big)_{\vec{E}} = (\vec{x} \mid u^* \vec{y})_{\vec{E}}$$

1 Comme les notions d'adjoint et d'opérateur hermitien, la notion d'opérateur normal est liée à la structure hilbertienne.

On voit d'où vient le nom d'orthodiagonal ; chacun des $\vec{E}_i$ est sous-espace propre de u pour la valeur λ_i de sorte que u est "diagonalisé" par la décomposition de $\vec{E}$ en somme des $\vec{E}_i$, et les $\vec{E}_i$ sont deux à deux orthogonaux.

Si $\vec{E}$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et u normal de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$, on démontre en algèbre que u est orthodiagonal : il a un nombre fini de valeurs propres λ_i , et, si les $\vec{E}_i$ sont les sous-espaces propres correspondants, ils sont deux à deux orthogonaux, et engendrent $\vec{E}$. (Si u est un opérateur quelconque dans un espace hilbertien de dimension finie $\vec{E}$, il a toujours au moins une valeur propre ; mais les sous-espaces propres, qui sont toujours indépendents, ne sont pas nécessairement orthogonaux [1], et n'engendrent pas nécessairement $\vec{E}$. Ainsi, <u>en dimension finie, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$</u>, opérateurs normaux et opérateurs orthodiagonaux coïncident. (Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on sait qu'il n'en est plus ainsi, il se peut qu'il n'y ait pas de valeur propre).

En dimension infinie, ce résultat ne s'étend pas. Toutefois on peut montrer des propriétés très voisines. Nous allons étudier, au paragraphe suivant, les opérateurs normaux <u>compacts</u>, et montrer qu'ils sont encore orthodiagonaux. Le résultat ne s'appuiera pas sur un quelconque résultat analogue en dimension finie, mais devra utiliser le fait qu'en dimension finie, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il y a au moins une valeur propre (théorème de d'Alembert).

§ 8 OPÉRATEURS COMPACTS

<u>Définition</u> :

<u>On dit qu'une application linéaire u d'un espace vectoriel topologique $\vec{E}$ dans un espace vectoriel topologique est</u>

1 Si l'opérateur u n'a pas certaines propriétés liées à la norme hilbertienne de $\vec{E}$, comme celle d'être normal, les sous-espaces propres n'ont pas de raison d'être orthogonaux.

compacte, s'il existe un voisinage U de $\vec{0}$ dans $\vec{E}$ dont l'image par u est relativement compacte dans $\vec{F}$ [1].

Un opérateur compact est évidemment continu ; soit en effet V un voisinage de 0 dans $\vec{F}$; comme $u(U)$ est relativement compact, il est borné, donc il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda u(U) \subset V$; alors λU est un voisinage de $\vec{0}$ dans $\vec{E}$ dont l'image par u est dans V ; donc u est bien continu. Mais la réciproque n'est évidemment en général pas vraie, les opérateurs compacts sont très particuliers ; par exemple, si $\vec{E}$ est de dimension infinie, l'identité n'est pas un opérateur compact de $\vec{E}$, puisque celà entraînerait l'existence d'un voisinage de $\vec{0}$ relativement compact dans $\vec{E}$. Par contre, si $\vec{F}$ est de dimension finie, toute application linéaire continue de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ est compacte ; en effet, $\vec{F}$ a un voisinage V de $\vec{0}$ compact, alors $u^{-1}(V)$ est un voisinage U de $\vec{0}$ dans $\vec{E}$, dont l'image $u(U)$ par u est dans V, donc relativement compacte. Les opérateurs compacts sont donc la plus immédiate généralisation des opérateurs linéaires continus dans les espaces de dimension finie. Plus généralement, tout opérateur linéaire continu de rang fini de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ est compact ; en effet, $u(\vec{E})$ étant un sous-espace de dimension finie $\vec{G}$ de $\vec{F}$, l'image réciproque $U = u^{-1}(V)$ d'un voisinage compact V de $\vec{0}$ dans $\vec{G}$, est un voisinage de $\vec{0}$ dans $\vec{E}$ dont l'image par u est relativement compacte dans $\vec{F}$.

Si u_1 et u_2 sont compactes de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$, $u_1 + u_2$ l'est aussi. Soient en effet U_1, U_2 des voisinages de $\vec{0}$ dans $\vec{E}$ tels que $u_1(U_1)$ et $u_2(U_2)$ soient relativement compacts ; si $U = U_1 \cap U_2$, $(u_1+u_2)(U) \subset \overline{u_1(U)} + \overline{u_2(U)}$ qui est compact dans $\vec{F}$, donc u est compacte. Les applications linéaires compactes de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ forment donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$.

1 relativement compacte, non nécessairement compacte. Il serait plus correct de dire : opérateur relativement compact.

Soient $u : \vec{E} \to \vec{F}$ et $v : \vec{F} \to \vec{G}$ des applications linéaires continues ; si l'une des deux est compacte, alors vu est compacte. Soit en effet, par exemple, u compact ; alors il existe un voisinage U de $\vec{0}$ dans $\vec{E}$ tel que $u(U)$ soit relativement compact, donc $\overline{u(U)}$ compact ; alors $(vu)(U)$ est contenu dans $v(\overline{u(U)})$, image d'un compact par v continue donc compact.

<u>En particulier, dans l'algèbre $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{E})$, les opérateurs compacts forment un idéal bilatère.</u>

Dans la suite, $\vec{E}$ et $\vec{F}$ seront presque toujours des Banach, et même fréquemment des Hilbert. Si $\vec{E}$ est normé, $\vec{F}$ quelconque, une application linéaire u de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ est compacte, si et seulement si l'image par u de la boule unité B de $\vec{E}$ est relativement compacte dans $\vec{F}$.

<u>THEOREME</u> (T,2,XXII,8;1)

<u>Si $\vec{E}$ est un Banach réflexif, et u compact de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$, alors l'image par u de la boule unité B de $\vec{E}$ est compacte.</u>

<u>DEMONSTRATION</u> :

Puisque E est réflexif, la boule unité B de $\vec{E}$ est faiblement compacte (théorème (T 2,XIX,7;8)). Mais u, étant continue, est faiblement continue (théorème (T 2,XIX,7;5)) ; donc $u(B)$ est faiblement compacte, donc faiblement fermée dans $\vec{F}$, donc a fortiori fermée pour la topologie initiale ; étant relativement compacte, elle est alors compacte, c.q.f.d.

<u>REMARQUE</u> :

Considérons au contraire $\vec{E} = \mathcal{C}([0,1])$ qui n'est pas réflexif, et soit u la forme linéaire continue sur $\vec{E}$ définie à la dernière page du Chapitre XIX. Alors u est linéaire continue de $\vec{E}$ dans $\mathbb{K}$, donc compacte puisque $\mathbb{K}$ est de dimension finie ; et nous avons justement vu que $u(B)$ n'est pas compact, puisque $|u|$ n'a pas de maximum sur B ($+1$ est adhérent à $u(B)$ sans être dans $u(B)$).

<u>THEOREME</u> (T ,2,XXII,8;2)

<u>Soient $\vec{E}$ et $\vec{F}$ des Banach.</u>

<u>Dans $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$, l'ensemble des opérateurs compacts est fermé.</u>

<u>DEMONSTRATION</u> :

Comme $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$ est normé, il suffit de voir que, si $u_0, u_1, \ldots, u_k, \ldots,$ sont des opérateurs compacts, convergeant pour k infini vers u , alors u est compact. Pour celà, nous devons montrer que l'image $u(B)$ de la boule unité B de $\vec{E}$ est relativement compacte. D'après le critère de Weierstrass-Bolzano, nous devons montrer que de toute suite de $u(B)$ on peut extraire une suite partielle, convergente dans $\vec{F}$ (voir (T ,2,VIII,2;5)) ; c'est-à-dire que, si $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ est une suite quelconque de points de B , il en existe une suite partielle dont les images par u convergent dans $\vec{F}$.

Tout d'abord u_0 est compacte. Donc $u_0(B)$ est relativement compacte dans $\vec{F}$. Donc on peut extraire de la suite des $\vec{x}_n$ une suite partielle, que nous écrirons $\vec{x}_0^{\,0}, \vec{x}_1^{\,0}, \ldots, \vec{x}_n^{\,0}, \ldots,$ pour laquelle les $u_0(\vec{x}_n^{\,0})$ convergent dans $\vec{F}$. Ensuite u_1 est un opérateur compact ; donc, de la suite des $\vec{x}_n^{\,0}$, on peut extraire une nouvelle suite partielle, $\vec{x}_0^{\,1}, \vec{x}_1^{\,1}, \ldots, \vec{x}_n^{\,1}, \ldots,$ telle que les $u_1(\vec{x}_n^{\,1})$ convergent dans $\vec{F}$; de sorte que maintenant, pour la suite partielle des $\vec{x}_n^{\,1}$, les deux suites $u_0(\vec{x}_n^{\,1}), u_1(\vec{x}_n^{\,1})$ convergent. Et ainsi de suite. Pour tout k on peut ainsi trouver une suite partielle $s^k = (\vec{x}_n^{\,k})_{n\in\mathbb{N}}$, telle que toute suite $(u_i(\vec{x}^k_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, pour $i \leqslant k$; chacune des suite $\mathcal{S}^k$ étant une suite partielle de la précédente $\mathcal{S}^{k-1}$. Prenons alors la suite diagonale $\mathcal{S}$, celle des x^n_n : $x^0_0, x^1_1, \ldots, x^n_n, \ldots$ Alors $\mathcal{S}$ est suite partielle de $\mathcal{S}_k$, à partir de son k-ième terme ; donc chacune des suites $(u_k(\vec{x}^n_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans $\vec{F}$ pour n infini.

Montrons que la suite des $u(\vec{x}^n_n)$ est de Cauchy dans $\vec{F}$ Soit $\varepsilon > 0$ donné. Choisissons k tel que $\| u - u_k \| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, ce qui est possible, puisque les u_k sont supposées converger vers u pour k infini. Alors on a, pour m et n quelconques:

$$(2,\text{XXII},8;1) \qquad \| u(\vec{x}^m_m) - u(\vec{x}^n_n) \| \leqslant \| u(\vec{x}^m_m) - u_k(\vec{x}^m_m) \| + \| u_k(\vec{x}^m_m - \vec{x}^n_n) \| + \| u_k(\vec{x}^n_n) - u(\vec{x}^n_n) \|$$

Puisque tous les $\vec{x}^n_n$ sont dans la boule unité B de $\vec{E}$, le premier et le troisième terme du 2ème membre sont $\leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. On peut alors, la suite $(u_k(\vec{x}^n_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, trouver N tel que $m, n \geqslant N$ entraîne

$$(2,\text{XXII},8;2) \qquad \| u_k(\vec{x}^m_m - \vec{x}^n_n) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors on aura $\| u(\vec{x}^m_m) - u(\vec{x}^n_n) \| \leqslant \varepsilon$ pour m et $n \geqslant N$

Donc la suite des $u(\vec{x}^n_n)$ est bien de Cauchy. $\vec{F}$ étant complet, elle est convergente ; et ceci démontre que $u(B)$ est relativement compacte dans $\vec{F}$, donc que l'opérateur u est bien compact.

REMARQUE :

On aurait évidemment évité la suite diagonale en utilisant un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur B, et en montrant que $u(\mathcal{U})$ était un filtre de Cauchy dans $\vec{F}$; nous avons préféré rester élémentaires, les espaces étant de toute façon métriques.

COROLLAIRE :

Toute limite d'opérateurs linéaires continus de rangs finis de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ est un opérateur compact.

En effet nous avons vu qu'un opérateur de rang fini était compact, et il suffit alors d'appliquer le théorème.

Dans le cas hilbertien, on peut montrer la réciproque :

THEOREME (T ,2,XXII,8;3)

Si $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont des espaces de Banach, $\vec{F}$ hilbertien, pour qu'une application linéaire continue u de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ soit compacte, il faut et il suffit qu'elle soit limite d'opérateurs de rangs finis.

DEMONSTRATION :

Nous n'avons donc à montrer que la nécessité de la condition. Soit donc u un opérateur compact. Alors $u(B)$ est relativement compact dans $\vec{F}$, si B est la boule unité de $\vec{E}$. Donc, ε étant donné, il existe un nombre fini de points $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ de $u(B)$ tels que les boules de centres $\vec{b}_i$ et de rayon ε recouvrent $u(B)$. Soit $\vec{M}$ le sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{b}_i$, et soit $p \in \mathcal{L}(\vec{F};\vec{F})$ l'opérateur de $\vec{F}$, projecteur orthogonal d'image $\vec{M}$. Considérons l'opérateur pu ; il est de rang fini, puisque $pu(\vec{E}) \subset \vec{M}$. Evaluons la différence $\| u - pu \|$. Pour tout $\vec{x}$ de B, $u(\vec{x})$ est à une distance $\leq \varepsilon$

de l'un des $\vec{b}_i$; alors $d(u(\vec{x}),\vec{M}) \leq \varepsilon$; donc $\| u(\vec{x}) - pu(\vec{x}) \| \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\vec{x}$ de B , celà prouve que $\| u - pu \| \leq \varepsilon$. On a donc bien trouvé un opérateur pu de rang fini, à une distance $\leq \varepsilon$ de u ; u est bien adhérent au sous-espace vectoriel des opérateurs de rang fini, c.q.f.d.

REMARQUE :

Le caractère hilbertien de $\vec{F}$ est intervenu de façon essentuelle, par le projecteur orthogonal p . En fait, Banach a émis l'hypothèse que le théorème restait vrai pour $\vec{F}$ Banach arbitraire ; depuis plusieurs dizaines d'années, cette conjecture reste ouverte !

THEOREME (T ,2,XXII,8;4).

Soient $\vec{E}$, $\vec{F}$ des Banach. Le transposé d'un opérateur compact u de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ est compact de $\overleftarrow{F'}$ dans $\overleftarrow{E'}$. Si $\vec{E}$ et $\vec{F}$ sont hilbertiens, u^* est compact de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$.

DEMONSTRATION :

Posons $K = \overline{u(B)}$; c'est un compact de $\vec{F}$. Munissons $\overleftarrow{F'}$ de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\vec{F}$, et appelons $\overleftarrow{F'_c}$ l'espace ainsi défini. Alors, parmi les semi-normes qui définissent cette topologie, figure p_K , avec

2,XXII,8;3) $$p_K(\overleftarrow{f'}) = \underset{\vec{f} \in K}{Max} \left| \langle \overleftarrow{f'}, \vec{f} \rangle \right| .$$

La semi-boule unité correspondante est le polaire K° de K . Mais de $u(B) \subset K$ résulte ((T ,2,XIX,7;6)) ${}^t u(K^\circ) \subset B^\circ$, B° boule unité de $\overleftarrow{E}$. Celà prouve, les homothétiques de B° formant un système fondamental de voisinages de $\vec{0}$ dans $\overleftarrow{E}$, que ${}^t u$ est continue de $\overleftarrow{F'_c}$ dans $\overleftarrow{E'}$. C'est là un résultat remarquable ; du fait que u est continue, résulte la continuité de ${}^t u$ de $\overleftarrow{F'}$ dans $\overleftarrow{E'}$; du fait que u est compacte résulte la continuité de ${}^t u$ de $\overleftarrow{F}'_c$ dans $\overleftarrow{E}'$. Appelons B' la boule unité de $\overleftarrow{F}'$. C'est une partie équicontinue de $\overleftarrow{F}' \subset (\mathbb{K}^F)_c$ (Chapitre XX, § 1). Donc, sur B' , la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\vec{F}$ est identique à la topologie de la convergence simple, induite par $\mathbb{K}^F$ pour laquelle B' est compacte (théorème de Banach (T 2,XIX, 7;7). Alors, ${}^t u$ étant continue de $\overleftarrow{F}'_c$ dans $\overleftarrow{E}'$, l'image ${}^t u\,(B')$ de la partie compacte B' de $\overleftarrow{F}'_c$ est une partie compacte de $\overleftarrow{E}'$. Ainsi, l'image de B' , boule unité de $\overleftarrow{F}'$, par ${}^t u$, est compacte dans $\overleftarrow{E}'$, donc ${}^t u$ est un opérateur compact de $\overleftarrow{F}'$ dans $\overleftarrow{E}'$.

Le cas hilbertien se ramène à l'autre par (2,XXII,7;6) et la remarque correspondante.

REMARQUE :

Nous avons même démontré, par un argument analogue à celui du théorème (T ,2,XXII,8;1), que, si u est un opérateur compact de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$, c'est-à-dire si $u\,(B)$ est relativement compacte dans $\vec{F}$, alors ${}^t u\,(B')$ est compacte dans $\overleftarrow{E}'$.

VALEURS PROPRES et SOUS-ESPACES PROPRES

Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel, u une application linéaire de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$. On appelle valeur propre de u un scalaire λ tel que $u - \lambda I$ ait un noyau non réduit à $\{\vec{0}\}$, autrement dit tel qu'il existe $\vec{x} = \vec{0}$ tel que $u\vec{x} = \lambda\vec{x}$
Un tel vecteur $\neq \vec{0}$ s'appelle vecteur propre correspondant à la valeur propre λ . Le noyau $\vec{E}_\lambda(u) = \vec{E}_\lambda$ de $u - \lambda I$, pour λ quelconque, s'appelle sous-espace vectoriel propre relatif à λ ; si λ est valeur propre, $\vec{E}_\lambda$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$, et le sous-espace propre $\vec{E}_\lambda$ est alors l'ensemble formé des vecteurs propres relatifs à λ et de $\vec{0}$. Si $\vec{E}$

est de dimension finie, on sait que les valeurs propres de u sont les racines de $dét(u - \lambda I)$. D'après le théorème de d'Alembert, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le polynome en λ : $dét(u = \lambda I)$ admet au moins une racine complexe, et il existe au moins une valeur propre.

Ce résultat ne subsiste pas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ni si $\vec{E}$ est de dimension infinie. Par exemple, dans $\vec{E} = \mathbb{R}^2$, l'opérateur de rotation $+\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine n'a pas de valeur propre. Si $\vec{E}$ est l'espace de Banach $C([0,1])$ des fonctions complexes continues sur $[0,1]$, l'opérateur u de multiplication par x n'a pas de valeur propre ; car, si $(x-\lambda) f(x) = 0$, on a $f \equiv 0$ si $\lambda \notin [0,1]$; si $\lambda \in [0,1]$, on a $f \equiv 0$ sur $\complement_{[0,1]} \{\lambda\}$, donc, par continuité, $f \equiv 0$ sur $[0,1]$.

THEOREME (T ,2,XXII,8;5) (Fr.Riesz).

Soit u un opérateur linéaire compact d'un espace vectoriel topologique $\vec{E}$ dans lui-même. Si λ est une valeur propre $\neq 0$, son sous-espace vectoriel propre $\vec{E}_\lambda$ est de dimension finie.

DEMONSTRATION :

Soit U un voisinage de $\vec{0}$ dans $\vec{E}$, d'image relativement compacte par u. Soit $\lambda \neq 0$, $\vec{E}_\lambda$ son sous-espace propre associé. Posons $U_\lambda = U \cap \vec{E}_\lambda$; c'est un voisinage de $\vec{0}$ dans $\vec{E}_\lambda$; son image par u coïncide avec λU_λ, c'est donc encore un voisinage de $\vec{0}$ de $\vec{E}_\lambda$ puisque $\lambda \neq 0$; mais contenu dans l'intersection de $\overline{u(U)}$, compact de $\vec{E}$ avec $\vec{E}_\lambda$ fermé dans $\vec{E}$ il est contenu dans un compact de $\vec{E}_\lambda$. Donc $\vec{E}_\lambda$ est localement compact, donc de dimension finie (d'après Riesz, (T 2,XVII,7;1)).

REMARQUE :

C'est essentiellement pour démontrer ce théorème que Fr. RIESZ avait démontré le théorème général (T 2,XVII,7;1).

THEOREME (T ,2,XXII,8;6).

Soit u un opérateur linéaire continu normal d'un espace hilbertien $\vec{E}$ dans lui-même. Si $\vec{E}_\lambda$ est le sous-espace propre de u pour la valeur λ , il est le sous-espace propre de u^* pour la valeur $\bar{\lambda}$. Deux sous-espaces propres de u pour deux valeurs λ et μ distinctes sont orthogonaux.

DEMONSTRATION ·

u^* laisse $\vec{E}_\lambda(u)$ stable ; en effet, si $\vec{x} \in \vec{E}_\lambda(u)$, $u^*\vec{x}$ est encore dans $E_\lambda(u)$, car $u(u^*\vec{x}) = u^*u\vec{x} = \lambda(u^*\vec{x})$

Alors u et u^* laissent tous deux $\vec{E}_\lambda(u)$ stable ; dans l'espace hilbertien $\vec{E}_\lambda(u)$, les restrictions de u et u^* sont encore adjointes l'une de l'autre, car ils vérifient toujours $(u\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|u^*\vec{y})$ pour $\vec{x}, \vec{y} \in E_\lambda(u)$. Mais, dans $\vec{E}_\lambda(u)$, u est la multiplication par λ ; donc u^* est la multiplication par $\bar{\lambda}$, donc $\vec{E}_\lambda(u)$ est contenu dans le sous-espace $\vec{E}_{\bar{\lambda}}(u^*)$. Mais de la même manière on démontre que $\vec{E}_{\bar{\lambda}}(u^*) \subset \vec{E}_\lambda(u)$, d'où le premier résultat.

Soient ensuite $\vec{x}_\lambda \in \vec{E}(u)$, $\vec{x}_\mu \in \vec{E}_\mu(u), \lambda \neq \mu$. Alors

(2,XXII,8;4) $(u\vec{x}_\lambda|\vec{x}_\mu) = \lambda(\vec{x}_\lambda|\vec{x}_\mu)$, $(\vec{x}_\lambda|u^*\vec{x}_\mu) = (\vec{x}_\lambda|\bar{\mu}\vec{x}_\mu) = \mu(\vec{x}_\lambda|\vec{x}_\mu)$;

donc $(\lambda - \mu)(\vec{x}_\lambda|\vec{x}_\mu) = 0$; comme $\lambda \neq \mu$, on a bien $(\vec{x}_\lambda|\vec{x}_\mu) = 0$.
C.q.f.d.

REMARQUE :

Nous avons utilisé deux propriétés générales, qui reviendront plusieurs fois dans la suite ;

a) si v et w sont deux opérateurs de $\vec{E}$ qui commutent (ici $(u - \lambda I)$ et u^*), le noyau de chacun est stable pour l'autre, donc pour les deux. Soit en effet $\vec{x}$ un élément du noyau $\vec{N}$ de v ; alors $v(w\vec{x}) = w(v\vec{x}) = \vec{0}$, donc $w\vec{x} \in \vec{N}$;

b) si $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace hilbertien $\vec{E}$, stable pour u et u^* (ici $\vec{E}_\lambda(u)$),

alors les restrictions de u et u^* à $\vec{F}$ sont encore adjointes l'une de l'autre ; car on a encore $(u\vec{x} \mid \vec{y}) = (\vec{x} \mid u^*\vec{y})$ pour $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{F}$. Donc, si u est normal dans $\vec{E}$, il l'est encore dans $\vec{F}$. Remarquons aussi que, si u est compact dans $\vec{E}$, il l'est encore dans $\vec{F}$; car, si B est la boule unité de $\vec{E}$, $u(B \cap \vec{F}) \subset \overline{u(B)} \cap \vec{F}$, compact de $\vec{F}$.

Soit alors u un opérateur normal compact d'un espace hilbertien $\vec{E}$ dans lui-même. Appelons alors $\Lambda = \Lambda(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u . Pour $\lambda \notin \Lambda$, $\vec{E}_\lambda$ est réduit à $\{\vec{0}\}$; pour $\lambda \in \Lambda$, $\vec{E}_\lambda$ est quelconque si $\lambda = 0$ de dimension finie si $\lambda \neq 0$; et les différents $\vec{E}_\lambda$ sont deux à deux orthogonaux. Enfin, si $u\vec{x} = \lambda\vec{x}, \vec{x} \neq \vec{0}$, on a $\| u \| \geq |\lambda|$, donc Λ est contenu dans le disque de rayon $\| u \|$ de $\mathbb{C}$.

THEOREME (T 2,XXII,8;7).

Soit u un opérateur normal compact d'un espace hilbertien $\vec{E}$ dans lui-même. En dehors de tout voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, Λ ne contient qu'un nombre fini de points.

<u>Autrement dit, ou bien Λ est fini, ou bien il est dénombrable, et peut être rangé en une suite de nombres complexes tendant vers 0 , 0 faisant ou non partie de Λ</u> .

<u>DEMONSTRATION</u> :

Supposons que ce soit inexact. Alors on pourrait trouver une suite $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots,$ de nombres distincts, $\in \Lambda$, situés en dehors du disque de rayon ε ; mais comme Λ est contenu dans le disque de rayon $\| u \|$, ces λ_n sont dans la couronne compacte $\varepsilon \leq |z| \leq \| u \|$, et on pourrait en extraire une suite partielle convergente, que nous appellerons encore $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la limite étant $\lambda \neq 0$. A chaque λ_n , on pourrait associer un $\vec{x}_n \in \vec{E}_{\lambda_n}$, de norme 1 ; les x_n seraient deux à deux orthogonaux, d'où résulterait que, pour $m \neq n$, $\| \vec{x}_m - \vec{x}_n \| = \sqrt{2}$. Mais les $u\vec{x}_n$ sont dans l'image $u(B)$ de la boule unité B , relativement compacte par hypothèse ; donc on pourrait extraire encore une suite partielle, que nous appellerons encore de la même manière, pour laquelle les $u\vec{x}_n$ aient une limite $\vec{y}$. Alors les $\vec{x}_n = \frac{1}{\lambda_n} u\vec{x}_n$ auraient la limite $\frac{1}{\lambda} \vec{y}$, ce qui est impossible, puisque leurs distances mutuelles sont $\sqrt{2}$. C.q.f.d.

<u>REMARQUE</u> :

Par une méthode un peu plus compliquée, on pourrait étendre ce théorème au cas d'un opérateur compact, d'un Banach <u>quelconque</u> $\vec{E}$ dans lui-même ; le fait que $\vec{E}$ soit hilbertien et u normal donne uné démonstration plus simple, mais n'a rien d'essentiel.

THEOREME (T ,2,XXII,8;8)

Soit u un opérateur normal compact d'un espace hilbertien $\vec{E} \neq \{\vec{0}\}$ dans lui-même. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et u est symétrique, alors il existe au moins une valeur propre de u, de module $\| u \|$.

DEMONSTRATION :

On peut supposer une fois pour toutes $\| u \| = 1$ [1]
Supposons d'abord u hermitien, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. D'après (2,XXII, 7;4), on a $\underset{\|\vec{x}\| \leqslant 1}{\operatorname{Sup}} |(u\vec{x}|\vec{x})| = 1$. On a donc ou bien

$$\underset{\|x\| \leqslant 1}{\operatorname{Sup}} (u\vec{x}|\vec{x}) = +1 \quad \text{, ou bien} \quad \underset{\|x\| \leqslant 1}{\operatorname{Inf}} (u\vec{x}|\vec{x}) = -1$$

Nous allons montrer que, dans le premier cas, $+1$ est valeur propre, et dans le deuxième cas, -1 ; par changement de u en $-u$, on peut se ramener au premier cas.

Il existe donc une suite $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \ldots$ de points de la sphère unité de $\vec{E}$, telle que $(u\vec{x}_n | \vec{x}_n)$ tende vers $+1$ pour n infini.

Comme les $\vec{x}_n$ sont sur la boule unité B de E, les $u\vec{x}_n$ sont dans $u(B)$ compacte, donc on peut, quitte à extraire une suite partielle, supposer que les $u\vec{x}_n$ ont une limite $\vec{y}$.

Comme $(u\vec{x}_n | \vec{x}_n) \leqslant \|u\vec{x}_n\| \leqslant 1$, il ne peut tendre vers 1 que si $\|u\vec{x}_n\|$ tend vers 1, donc $\|\vec{y}\| = 1$.

Montrons alors que les $\vec{x}_n$ convergent aussi vers $\vec{y}$.

$$(2,\text{XXII},8;5) \quad \|\vec{y} - \vec{x}_n\|^2 = \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}_n\|^2 - 2\,\mathcal{R}e\,(\vec{y}|\vec{x}_n) = 1 + 1 - 2\,\mathcal{R}e\,(\vec{y}|\vec{x}_n);$$

1 sauf si $u = 0$, auquel cas c'est trivial.

mais $(\vec{y}\,|\,\vec{x}_n)$ a même limite que $(u\vec{x}_n\,|\,\vec{x}_n)$, c'est-à-dire 1, car $|(\vec{y}-u\vec{x}_n\,|\,\vec{x}_n)| \leq \|\vec{y}-u\vec{x}_n\|\ \|\vec{x}_n\|$ qui tend vers 0 . Donc (2,XXII,8;5) tend bien vers 0 , et $\vec{x}_n$ converge vers $\vec{y}$. Alors $\vec{x}_n$ et $u\vec{x}_n$ convergent tous deux vers $\vec{y}$, et la continuité de u donne $u\vec{y} = \vec{y}$; $\vec{y}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 1 , ce qui montre bien notre affirmation pour u hermitien, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il n'a pas été fait usage du théorème de d'Alembert.

Supposons maintenant u normal compact, mais $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors u^*u est hermitien $\geqslant 0$, de norme $\|u\|^2 = 1$ (T 2,XXII, 7;4)). D'autre part, u étant compact, u^*u l'est aussi (page XXII,46). Donc le sous-espace propre $\vec{E}_1(u^*u)$ relatif à la valeur propre 1 n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$. Ce sous-espace $\vec{F} = \vec{E}_1(u^*u)$ est stable par u et u^* , qui tous deux commutent avec $u^*u - I$ (remarques après (T ,2,XXII, 8;6)). Alors $\vec{F}$ est un sous-espace hilbertien de dimension finie ; les restrictions de u et u^* à $\vec{F}$ sont adjointes l'une de l'autre, donc normales. D'après le résultat connu dans un espace vectoriel de dimension finie, u admet dans $\vec{F}$ au moins une valeur propre λ (théorème de d'Alembert), et un vecteur propre $\vec{x}_\lambda$ correspondant ; d'après (T,2,XXII,8;6), $\vec{x}_\lambda$ est vecteur propre de u^* pour la valeur propre $\bar{\lambda}$. Alors $\vec{x} = u^*u\vec{x} = \bar{\lambda}\lambda\vec{x}$, donc $|\lambda| = 1$ [1] ; donc u a bien la valeur propre λ de module $1 = \|u\|$. C.q.f.d.

1 On peut encore dire : dans $\vec{F}$, u est unitaire puisque $u^*u = I$, donc il conserve les normes, donc ses valeurs propres sont nécessairement de module 1.

COROLLAIRE

Soit u un opérateur normal compact d'un espace hilbertien $\vec{E}$ dans lui-même, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou un opérateur symétrique compact de $\vec{E}$ dans lui-même pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Alors les sous-espaces propres $\vec{E}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, engendrent un sous-espace vectoriel dense dans $\vec{E}$. Autrement dit, $\vec{E}$ est la somme directe hilbertienne $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \vec{E}_\lambda$.

DEMONSTRATION :

Nous avons déjà vu que chaque $\vec{E}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, était stable par u et u^*. Appelons $\vec{E}_\Lambda$ l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{E}_\lambda$. Comme chaque $\vec{E}_\lambda$, $\vec{E}_\Lambda$ est stable par u et par u^*. Soit $\vec{G}$ l'orthogonal de $\vec{E}_\Lambda$. Montrons que $\vec{G}$ aussi est stable par u et u^*. Soit donc $\vec{x} \in \vec{G}$ c'est à dire orthogonal à tous les $\vec{E}_\lambda$. Montrons que $u\vec{x}$ est aussi orthogonal à tous les $\vec{E}_\lambda$. Soit donc $\vec{x}_\lambda \in \vec{E}_\lambda$. Alors

$$(u\vec{x} \mid \vec{x}_\lambda) = (\vec{x} \mid u^*\vec{x}_\lambda) = (\vec{x} \mid \bar{\lambda}\vec{x}_\lambda) = \lambda(\vec{x} \mid \vec{x}_\lambda) = 0,$$

ce qui prouve notre affirmation. Alors les restrictions de u et u^* à $\vec{G}$ sont encore deux opérateurs adjoints, et u est encore compacte. Donc il existe un vecteur propre de u dans $\vec{G}$ sauf si $\vec{G} = \{\vec{0}\}$; or l'existence d'un tel vecteur propre est impossible, puisque $\vec{G}$ est orthogonal à tous les vecteurs propres, donc $\vec{G} = \{\vec{0}\}$, et $\vec{E} = \vec{E}_\Lambda$, c.q.f.d.

Nous pouvons résumer ce qui précède dans le résultat suivant :

THEOREME (T 2,XXII,8;9) (Riesz)

Soit $\vec{E}$ un espace hilbertien, u un opérateur compact normal si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. L'ensemble Λ des valeurs propres de u est fini, ou peut être rangé en une suite convergeant vers 0, 0 faisant ou non partie de Λ ; Λ est contenu dans le disque de rayon $\| u \|$, et a un élément de module $\| u \|$. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, sauf peut-être $\lambda = 0$, $\vec{E}_\lambda$ est de dimension finie ; les $\vec{E}_\lambda$ sont deux à deux orthogonaux. $\vec{E}$ est la somme directe hilbertienne des $\vec{E}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$; la décomposition $\vec{E} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \vec{E}_\lambda$ s'appelle décomposition spectrale de $\vec{E}$ relativement à u. Ainsi l'opérateur u est orthodiagonal et peut s'écrire $(\vec{x}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \longrightarrow (\lambda \vec{x}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, tandis que u^* s'écrit $(\vec{x}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \longrightarrow (\bar{\lambda} \vec{x}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

REMARQUES :

1) On peut remplacer $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \vec{E}_\lambda$ par $\bigoplus_{\lambda \in \mathbf{C}} \vec{E}_\lambda$, puisque $\vec{E}_\lambda = \{\vec{0}\}$ pour $\lambda \notin \Lambda$.

2) La réciproque est trivialement vraie : si u a la forme ci-dessus, nous avons déjà vu qu'il est normal ; montrons qu'il est compact. Soit $\varepsilon > 0$.

Alors Λ est réunion de deux parties disjointes, L finie, formée des λ de module $> \varepsilon$, $M = \complement_\Lambda L$.

Alors, si nous posons, pour $\vec{x} = (\vec{x}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$:

$$v(\vec{x}) = \sum_{\lambda \in L} \lambda \vec{x}_\lambda , \quad w(\vec{x}) = \sum_{\lambda \in M} \lambda \vec{x}_\lambda , \tag{2,XXII,8;6}$$

v est de rang fini, puisque $v(\vec{E}) \subset \bigoplus_{\lambda \in L} \vec{E}_\lambda$, de dimension finie, et $\| w \| \leq \varepsilon$ puisque $|\lambda| \leq \varepsilon$ pour $\lambda \in M$. alors (T 2,XXII,8;3) montre bien que u est compact.

3) Pour $\vec{E}$ de dimension finie, toute application linéaire u de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$ est compacte ; on retrouve donc les propriétés de la décomposition spectrale des opérateurs normaux dans les espaces de dimension finie.

4) Si u est hermitien, toutes ses valeurs propres sont réelles, car $(u\,\vec{x}_\lambda \mid \vec{x}_\lambda) = \lambda\,\|\vec{x}_\lambda\| \in \mathbb{R}$ pour un vecteur propre $\vec{x}_\lambda$ relatif à la valeur propre λ . Si u est hermitien $\geqslant 0$, toutes ses valeurs propres sont réelles $\geqslant 0$. Si u est anti-hermitien, toutes ses valeurs propres sont purement imaginaires. Si u est unitaire, toutes ses valeurs propres sont de module 1 puisque $\|u\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$, ce qui implique, si l'on veut qu'il soit compact, que $\vec{E}$ soit de dimension finie (d'après T 2,XXII,8;7). Les réciproques, lorsque u est supposé normal compact, sont triviales, d'après l'expression de u suivant (T 2,XXII,8;9).

5) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et u normal. Il n'y a pas de décomposition analogue, comme le montre le cas de la rotation $+\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}^2$, opérateur orthogonal qui n'a pas de valeurs propres (les racines de $\det(u-\lambda I)$ sont ici $\pm i$). On peut cependant trouver une décomposition canonique d'un autre type, faisant justement jouer un rôle aux rotations dans des espaces de dimension 2 ; nous ne la donnerons pas ; le lecteur pourra la faire lui-même, en "complexifiant" l'espace $\vec{E}$

6) On appelle <u>spectre $\mathrm{Sp}\,u$</u> d'un opérateur u dans un Banach $\vec{E}$ <u>l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lesquels $u - \lambda I$ n'est pas inversible</u>.

Toute valeur propre λ de u appartient évidemment au spectre, puisqu'alors $u - \lambda I$ n'est pas injectif. Si $\vec{E}$ est de dimension finie, la réciproque est vraie, car toute application linéaire injective de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$ est bijective ; le spectre de u est donc dans ce cas l ensemble Λ des valeurs propres de u . Il n'en est plus de même si $\vec{E}$ est de dimension infinie. Par exemple soit $\vec{E} = \mathcal{C}\,[0,1]$ espace des fonctions continues sur le compact $[0,1]$ de $\mathbb{R}$; soit u l'opérateur de multiplication par x ; nous avons déjà vu (page XXII,51) qu'il n'a pas de valeur propre ; cependant il a un spectre, qui est le compact $[0,1]$ de $\mathbb{C}$; car $u - \lambda I$ est l'opérateur de multiplication par $x - \lambda$, qui est inversible (et son inverse est l'opérateur de multiplication par $\frac{1}{x-\lambda}$ si et seulement si $x - \lambda$ n'est jamais nulle sur $[0,1]$, c'est à dire si $\lambda \in [0,1]$.

Mais supposons $\vec{E}$ hilbertien et u normal compact. Pour tout $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $u - \lambda_0 I$ est l'opérateur qui par rapport à la décomposition spectrale de u s'écrit $(\vec{x}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \longrightarrow ((\lambda - \lambda_0)\vec{x}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

Il est inversible et d'inverse $(\vec{x}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \longrightarrow \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_0} \vec{x}_\lambda\right)_{\lambda \in \Lambda}$,

si et seulement si $\frac{1}{\lambda - \lambda_0}$ reste borné pour $\lambda \in \Lambda$, c'est-à-dire pour $\lambda_0 \in \overline{\Lambda}$. Le spectre de u est donc l'adhérence $\overline{\Lambda}$ de Λ dans $\mathbb{C}$; donc en particulier contient 0 si $\vec{E}$ est de dimension infinie.

F I N

Ouf !

Tirage Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan, Allemagne
Dépôt légal quatrième trimestre 1967
Numéro d'édition 2202
Hermann, éditeurs des sciences et des arts