COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

# EXERCICES
# DE GÉOMÉTRIE

COMPRENANT

L'EXPOSÉ DES MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES
ET 2000 QUESTIONS RÉSOLUES

PAR F. G.-M.

CINQUIÈME ÉDITION

TOURS
MAISON A. MAME ET FILS
IMPRIMEURS - ÉDITEURS

PARIS
J. DE GIGORD
RUE CASSETTE, 15

ET CHEZ LES PRINCIPAUX LIBRAIRES

1912

# AVERTISSEMENT

La cinquième édition des *Exercices de Géométrie* complète celle de 1907, en y ajoutant un certain nombre de questions intéressantes et de nombreuses indications biographiques et bibliographiques.

Les Théorèmes et Problèmes nouvellement introduits ont eu beaucoup moins pour but d'accroître le nombre des Exercices proposés, que de développer certains groupes naturels, en comblant les lacunes qu'ils présentaient, ou en leur donnant l'extension qu'ils semblaient réclamer.

Des notes, parfois très étendues, réunissent et résument des renseignements disséminés dans de nombreux recueils.

Notre travail s'adressant à ceux qui cultivent avec prédilection les études de Géométrie élémentaire, il nous a paru utile de leur épargner des recherches qui ne sauraient aboutir; par suite, nous indiquons un assez grand nombre de questions, très simples en apparence, mais dont la solution échappe aux éléments de Géométrie et d'Algèbre.

Les diverses tables qui accompagnent les *Exercices de Géométrie élémentaire* et de *Géométrie descriptive,* ayant été fort appréciées, nous développons cette source féconde de renseignements; ainsi, dans cette cinquième édition, nous indiquons les questions nouvellement introduites et un assez grand nombre de références complémentaires.

# AVANT-PROPOS

**Complément de Géométrie.** — Nos *Éléments de Géométrie* sont complétés par un *Livre d'Exercices*, comprenant des théorèmes à démontrer, des lieux géométriques à trouver et des problèmes à résoudre.

**Utilité des Exercices de Géométrie.** — Nous croyons qu'il est nécessaire d'exercer les élèves à traiter par eux-mêmes un assez grand nombre de *questions*, et l'on peut justifier cette assertion par deux raisons principales :

1° L'exposition synthétique des théorèmes d'un cours élémentaire ne développe pas l'esprit de recherche, car rien n'est laissé à l'initiative de l'étudiant; il faut donc provoquer ses propres réflexions en lui proposant des exercices à résoudre, et le porter ainsi à faire usage de toutes les notions qu'il a acquises.

2° L'extrême variété des exercices géométriques, l'absence de toute méthode assez générale, ou du moins assez pratique, qui conduise d'une manière certaine à la solution d'une question nouvelle, exigent que l'élève se livre à de nombreuses recherches, s'il veut se préparer sérieusement à tenir tête à l'imprévu que lui réservent les Examens à subir.

Après avoir rappelé l'importance qu'il faut attacher à la recherche des questions géométriques, indiquons rapidement l'esprit qui a présidé à la rédaction de notre ouvrage, les principales divisions de ce volumineux recueil et l'usage des diverses parties qui le constituent.

## PREMIÈRE PARTIE

**Des Méthodes.** — Le recueil que nous publions commence par l'exposé des *Méthodes;* nous donnons aussi sous ce titre certaines solutions générales et des exemples de discussion.

Les *Méthodes* constituent la partie la plus importante de tout l'ouvrage, comme elles en sont d'ailleurs la plus originale. *Tout professeur,* et même tout élève sérieux, *devrait posséder parfaitement ce complément de géométrie;* car l'exposition des méthodes fait naître et développe les idées générales; elle permet de rattacher des milliers d'exercices variés à quelques types principaux, que l'on retient sans peine et que l'on applique avec facilité.

Afin de contraindre le lecteur, autant qu'il dépend de nous, à s'assimiler complètement cette première partie, nous avons proposé comme *Exercices,* dans nos *Éléments de Géométrie* (dès la 8e édition), tous les théorèmes et problèmes donnés en exemples dans l'exposé même des *Méthodes;* puis dans le *Livre d'Exercices,* au numéro qui correspond à telle ou telle question, nous nous bornons le plus souvent à renvoyer à la première partie; par ce moyen, on trouve non seulement la démonstration ou la solution cherchée, mais on voit à quel genre il est possible de les rattacher, et quels sont les Exercices que l'on pourrait traiter d'une manière analogue.

**Classement des Méthodes.** — Donnons quelques détails sur le classement des méthodes, sur leur importance relative et sur leur emploi.

**Analyse et Synthèse.** — L'*Analyse* et la *Synthèse* (I, p. 1 à 24) sont les seules méthodes générales; mais par le fait même qu'elles s'appliquent à toutes les questions, il en résulte qu'elles ne dispensent point de chercher des méthodes particulières, des procédés spéciaux pour traiter rapidement certains groupes d'exercices.

**Lieux géométriques.** — Les *Lieux géométriques* (II, p. 24 à 59) sont si utiles, que nul ne regrettera les développements que nous avons donnés à leur recherche et à leur emploi; les quelques pages consacrées aux *enveloppes* présentent des notions intéressantes sur des questions non traitées dans les *Éléments*, mais qui ont conduit au principe si fécond de la *dualité*.

**Emploi des figures auxiliaires.** — L'*emploi des figures auxiliaires* (III, p. 60 à 87) est presque indispensable; car la plupart des questions exigent le tracé de certaines lignes, la construction de quelques figures ou la considération de surfaces ou de volumes auxiliaires.

Nous devons ajouter que la *duplication* et les *projections* donnent assez souvent des démonstrations aussi simples qu'élégantes.

**Transformation des figures.** — La *Transformation des figures* (IV, p. 87 à 116), même en se bornant à ce que nous en avons dit, est le moyen le plus puissant d'investigation que les *Éléments de Géométrie* puissent nous fournir pour découvrir de nouveaux théorèmes, ou pour trouver d'heureuses solutions.

**Discussion.** — La *Discussion* et l'*Extension* (V, p. 116 à 150) ont bien des points communs, malgré les différences caractéristiques qui les distinguent l'une de l'autre. La *discussion des problèmes* entre de plus en plus dans les habitudes classiques; car, en réalité, une question n'est traitée d'une manière complète que lorsqu'on a étudié les cas de possibilité, les variations que peuvent subir certaines grandeurs, et, s'il y a lieu, leur maximum ou leur minimum.

**Extension.** — L'*Extension* (p. 129 à 141) est rarement indiquée et plus rarement pratiquée; cependant elle contribue plus que toute autre étude géométrique à développer les forces de l'esprit, et à produire cet enthousiasme qui rend le travail facile. Il nous semble qu'on rendrait un grand service aux élèves si l'on cherchait à faire naître en eux cette faculté créatrice.

L'extension peut être complétée par les *Déductions successives* (p. 141) et par la *Généralisation hypothétique* de certains théorèmes (p. 145).

**Méthode algébrique.** — La *Méthode algébrique* (VI, p. 150 à 179) offre des ressources qu'on aurait grand tort de négliger; elle fournit, pour un grand nombre de questions, des solutions parfois peu élégantes, il est vrai, mais toujours faciles à imaginer.

En effet, quel que soit le problème proposé, si l'on parvient à lier les inconnues aux données par des équations des deux premiers degrés ou par une équation bicarrée, on peut regarder la question comme complètement résolue : car l'algèbre nous donne des règles certaines et invariables pour déterminer les inconnues.

**Maxima et Minima.** — Les *Maxima* et les *Minima* (V, p. 179 à 210), traités par des moyens à peu près exclusivement géométriques, présentent sans doute une véritable nouveauté ; car le petit nombre d'exemples qu'on pourrait en trouver dans d'autres ouvrages ne constituent ni une méthode ni même un simple procédé susceptible de s'appliquer à quelques exercices ; tandis que l'inscription d'une figure d'aire maxima, celle d'un volume maximum, de même que la circonscription d'une figure d'aire minima ou d'un volume minimum, *n'exigent la connaissance que d'un seul problème :* celui de la *tangente* (n° 310).

## DEUXIÈME PARTIE

**Recueil d'Exercices.** — Après avoir ainsi fait connaître l'utilité de la première partie de l'ouvrage actuel, relative aux *Méthodes*, il nous sera bien permis de passer rapidement sur le reste, consacré aux Exercices proprement dits. Voici néanmoins quelques indications assez importantes.

**Choix des Exercices.** — Dans chaque livre, on trouve d'abord des théorèmes, puis des lieux géométriques, et enfin des problèmes ; chacune de ces trois grandes sections est à son tour subdivisée, et chaque groupe ainsi formé présente, au début, des exercices très faciles et se termine par des questions offrant plus d'intérêt et plus de difficultés ; il est donc important que le Professeur se rende compte, par avance, des questions qu'il veut proposer à ses élèves, afin que les exercices soient en rapport avec les connaissances déjà acquises par ceux qu'il instruit.

Nous avouons sans peine que plusieurs questions réputées difficiles ont trouvé place dans notre recueil, parce que l'emploi judicieux des *Méthodes* (p. 1 à 211) conduit à des démonstrations ou à des solutions remarquables par leur simplicité ; d'ailleurs il nous a semblé utile de ne pas nous borner aux questions qu'on rencontre partout, et de laisser à un ouvrage plus élémentaire le soin de fournir de nombreux exercices faciles et d'intéressants problèmes d'application.

**Démonstrations ou solutions multiples.** — Plusieurs théorèmes ont été démontrés de diverses manières; quelques problèmes ont été de même résolus par l'emploi successif de plusieurs procédés différents. En agissant ainsi, nous avons voulu montrer l'avantage que peut présenter telle marche sur telle autre, donner quelques exemples de l'admirable fécondité de certaines méthodes, et surtout encourager les chercheurs, en leur prouvant qu'on peut arriver, par bien des voies, au résultat demandé.

**Problèmes numériques.** — Les *problèmes numériques*, qui se trouvaient dans les premières éditions, n'ont pas été reproduits dans celle-ci, parce que la *Géométrie* du cours supérieur, pour l'enseignement primaire donne un grand nombre de questions numériques, empruntées, pour la plupart, aux examens du brevet supérieur de ce même enseignement.

Le baccalauréat ès sciences et le baccalauréat moderne (mathématiques) proposent aussi assez fréquemment des questions numériques, mais il faut presque toujours chercher préalablement une solution générale; il est donc nécessaire d'étudier tout ce qui est relatif aux *relations numériques :* aussi avons-nous multiplié les exercices qui s'y rattachent, et les livres III, IV, VI et VII contiennent un assez grand nombre de formules à démontrer et de relations à trouver.

**Désignation de certains Exercices.** — Plusieurs questions sont désignées par des noms ou des appellations devenues historiques; par exemple, le *Théorème de Ménélaüs*, le *Théorème de Guldin*, le *Problème de Pappus*, le *Problème de la Section déterminée*, etc.; nous en avons publié un assez grand nombre d'autres sous le nom de leur auteur, ou bien nous avons indiqué, après l'énoncé, le nom de l'auteur présumé du théorème ou du problème; puis une courte notice historique vient satisfaire la louable curiosité du lecteur. De même, nous avons cité très fréquemment les ouvrages auxquels nous avions emprunté des *Exercices*, sans pouvoir affirmer néanmoins que la question est due à l'auteur même du livre rappelé; car on sait qu'un très grand nombre d'ouvrages mathématiques ne donnent aucune indication sur la provenance des matériaux mis en œuvre.

**Citation des auteurs.** — Nous avons cité les *grands géomètres*, parce que leur nom relève, ennoblit, en quelque sorte, les questions qu'ils ont traitées ; nous regardons d'ailleurs comme un devoir de reconnaissance envers ces illustres mathématiciens de rappeler leur souvenir à tous ceux qui bénéficient de leurs travaux.

Beaucoup de savants moins célèbres, sans nul doute, qu'Archimède, Apollonius, Pascal, Descartes, Newton, Desargues, Poncelet, Chasles, etc., méritent d'autant plus d'être mentionnés, qu'ils trouvènt rarement place dans les dictionnaires bibliographiques. En effet, la plupart de ces ouvrages, dus à des hommes de lettres, ne veulent point oublier le moindre romancier, le moindre utopiste de quelque renom ; mais ils ne se préoccupent pas au même degré de ceux qui ont voué leur existence aux laborieuses recherches mathématiques.

Enfin, à côté des plus grands noms, se trouvent aussi les noms, parfois très modestes, de certains auteurs que nous avons néanmoins consultés avec profit ; nous n'avons pas hésité à mettre ces hommes estimables dans le cortège des plus illustres géomètres, et nous pouvons même dire que si nous sommes fier de citer les plus grands mathématiciens, nous sommes encore plus heureux de rendre justice à ceux que la gloire ne viendra jamais couronner.

**Tables diverses.** — L'ouvrage se termine par diverses tables de référence ; on y trouve : un *Lexique géométrique* avec renvois aux numéros correspondants ; l'énoncé de quelques *Problèmes et Théorèmes historiques;* une *Table* des notes et des remarques principales ; l'indication des exercices introduits dans la cinquième édition ; une série de questions qu'on ne sait pas construire avec la règle et le compas ; enfin un *Index bibliographique* et un *Index biographique*, destinés à faciliter les recherches et à rappeler les sources où nous avons puisé.

## TROISIÈME PARTIE

**Historique des Exercices de Géométrie.** — La première édition des *Exercices de Géométrie* a été publiée en 1875 (in-12 de 440 pages). Elle constituait un recueil bien gradué de questions élémentaires de Géométrie.

Un complément de 52 pages, destiné à être développé ultérieurement, avait pour titre : *des Méthodes pour démontrer ou résoudre les Exercices élémentaires de Géométrie,* suivi d'un *Appendice pour évaluer les volumes,* terminait cette première édition. C'était, en germe, l'exposé des Méthodes (210 p.) qui distingue les Exercices de Géométrie édités par MM. MAME et POUSSIELGUE, et l'*Appendice aux Exercices de Géométrie* (170 p.) publié en 1877.

**Deuxième édition.** — La deuxième édition a paru en 1882 (in-12 de 1125 pages, F. I. C.) ; c'était en quelque sorte un ouvrage nouveau, non seulement parce qu'elle contenait beaucoup de questions qui ne se trouvaient point dans la première édition, mais surtout parce qu'elle débutait par un travail original intitulé : *Méthodes pour démontrer les théorèmes et résoudre les problèmes de Géométrie.* Aucun auteur français, croyons-nous, n'avait encore publié de méthodologie pour l'enseignement élémentaire de la Géométrie[1]. On sait que l'ouvrage de Paul SERRET : *Des Méthodes en Géométrie*, est d'un ordre plus élevé, et n'a presque aucun rapport avec celui que nous avons fait connaître en 1875, et développé en 1882. Nous n'avions guère alors que l'ouvrage de Julius PETERSEN : *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes et constructions géométriques*, dont la traduction française venait d'être publiée (1880). Nous avons consulté avec plaisir et profit l'ouvrage remarquable du savant géomètre danois, tout en conservant notre travail déjà préparé; d'ailleurs ce dernier a son originalité propre, soit dans le classement et l'exposé des méthodes, soit dans le choix des questions étudiées. Quant aux nouveaux exercices, nos modestes recherches ont trouvé place à côté des questions empruntées aux meilleurs

---

[1] Il en est tout autrement depuis cette époque, et nous citons même plusieurs des ouvrages qui ont paru assez récemment sur ce sujet.

auteurs, surtout dans le paragraphe des *Maxima et Minima;* on chercherait vainement ailleurs l'emploi de la *tangente* pour résoudre géométriquement des problèmes qu'on ne traitait que par l'algèbre et la trigonométrie.

**Troisième édition.** — La troisième édition, publiée en 1896 (in-8° de 1135 pages, F. J.), a fourni son contingent de questions nouvelles ou peu connues, et a donné en 118 pages une série d'Exercices élémentaires très intéressants sur la *Géométrie du triangle.*

Ce travail a sa physionomie bien particulière; il ne fait pas double emploi avec l'*Étude* si remarquable publiée par le savant M. NEUBERG dans le *Traité de Géométrie* de M. ROUCHÉ, ni avec l'ouvrage de John CASEY (n° 2261, 9°).

**Quatrième édition.** — Publiée en juillet 1907 (in-8° de 1228 pages, F. G. M.) La quatrième édition différait de la précédente par les modifications et améliorations suivantes: Les renseignements bibliographiques avaient été notablement développés et complétés jusqu'à nos jours, surtout à l'aide de MATHESIS et de l'*Intermédiaire des mathématiciens.* Ces mêmes périodiques, diverses autres publications et quelques recherches personnelles avaient fourni des questions nouvelles en assez grand nombre; mais afin de ne pas accroître notablement un ouvrage très volumineux, nous avions supprimé fréquemment les solutions des questions les plus élémentaires et les calculs les plus étendus; d'autant plus qu'il est facile de les trouver dans les éditions précédentes.

L'énoncé des questions dont la solution complète n'est point dans nos *Exercices* ne se trouve pas dans les *Éléments de Géométrie;* néanmoins nous indiquons avec soin les ouvrages et les publications périodiques qui démontrent le théorème énoncé, ou donnent la solution du problème proposé.

**Cinquième édition.** — La cinquième édition est précédée d'un *Avertissement* qui rend suffisamment compte des modifications quelle contient, et qui permettent de la caractériser.

# HISTORIQUE

Dès le commencement du monde, les hommes ont eu besoin d'évaluer les grandeurs et ont choisi, à cette fin, des unités convenables; il n'y a donc pas lieu de rechercher l'origine des idées d'étendue, de mesure, de nombre, et il est impossible d'assigner la date des premières découvertes relatives aux propriétés des figures; néanmoins on croit communément que la Géométrie proprement dite prit naissance chez les Chaldéens et les Égyptiens. Hérodote, le *père de l'histoire,* fait remonter l'origine de cette science à l'époque où Sésostris fit une répartition générale des terres entre les habitants de l'Égypte; Aristote place de même dans cette contrée le berceau des mathématiques.

On doit dire cependant que la Grèce est la vraie patrie de la Géométrie, car c'est là qu'elle a été cultivée avec ardeur, que de nombreuses découvertes ont été faites, et que les résultats obtenus ont été coordonnés de manière à former un corps de doctrine.

Au VI[e] siècle avant J.-C., **Thalès**, né en Phénicie, va s'instruire en Égypte, y mesure la hauteur des pyramides par leur ombre, porte la Géométrie en Grèce, fonde à Milet l'école Ionienne et enrichit la science de divers théorèmes sur le *triangle isocèle,* l'*angle inscrit* et les *triangles semblables.*

**Pythagore**, né à Samos vers 580 avant J.-C., est le plus illustre disciple de Thalès; comme son maître, il voyage en Égypte. Après avoir parcouru l'Inde, il se retire en Italie, y fonde une école célèbre; on lui doit la démonstration de l'*incommensurabilité* de la diagonale du carré comparée au côté de cette figure, la théorie des *corps réguliers,* le théorème du *carré de l'hypoténuse* du triangle rectangle et le premier germe de la doctrine des *isopérimètres.*

**Anaxagore** de Clazomène, mort vers l'an 430 avant J.-C., s'occupe le premier de la *quadrature du cercle.*

**Hippocrate** de Chio (vers 450 av. J.-C.) s'adonne aux mêmes recherches, ainsi qu'à l'étude du problème de la *duplication du cube,* et se rend célèbre par la quadrature de ses *lunules.*

**Platon** (430-347 av. J.-C.) va d'abord s'instruire en Égypte, puis chez les pythagoriciens. De retour à Athènes, le fondateur du Lycée introduit dans la géométrie la *méthode analytique*, les *sections coniques*, la doctrine des *lieux géométriques*, et donne une solution graphique du problème de la *duplication du cube*; il appelle Dieu l'*Éternel Géomètre*, et inscrit sur la porte de son école de philosophie : « Que nul n'entre ici, s'il n'est géomètre. »

Le phytagoricien **Archytas**, né à Tarente vers 430 avant J.-C., s'occupe le premier d'une *courbe à double courbure* à l'occasion du problème des *deux moyennes proportionnelles*, auquel Hippocrate avait ramené celui de la duplication du cube.

A la même époque, **Dinostrate**, disciple de Platon, résout le problème de la *trisection de l'angle* à l'aide d'une courbe qu'il nomme *quadratrice*.

**Perseus** recherche les propriétés des *spiriques*, c'est-à-dire des lignes obtenues en coupant par un plan la surface annulaire appelée tore.

**Euclide** (vers 285 av. J.-C.) enseigne à Alexandrie, et rédige *les Éléments de Géométrie*, en y introduisant la méthode de *réduction à l'absurde*.

*Les Éléments* comprennent treize livres, auxquels on joint deux autres livres, attribués à **Hypsicle**, géomètre d'Alexandrie, postérieur à Euclide de 150 ans. Les six premiers livres traitent des figures planes; les quatre suivants sont nommés *arithmétiques*, parce qu'ils traitent des propriétés des nombres, et les cinq derniers s'occupent des plans et des solides. On n'a fait passer dans l'enseignement que les six premiers livres, le onzième et le douxième.

On doit aussi à Euclide un livre des *Données;* il avait écrit sur les *Sections coniques*, et laissé trois livres de *Porismes* qui ne nous sont point parvenus.

**Archimède** (287-212 av. J.-C.) s'occupe particulièrement de la *Géométrie de la mesure;* il opère la *quadrature de la parabole*, étudie les *spirales*, donne l'expression des volumes des segments des ellipsoïdes et des hyperboloïdes, la proposition de la sphère et du cylindre circonscrit, le rapport de la circonférence au diamètre; il lègue aux générations suivantes non seulement un grand nombre de théorèmes nouveaux, mais la *méthode d'exhaustion* qu'il avait si bien employée.

**Apollonius** (vers 247 av. J.-C.) traite de la *Géométrie de l'ordre*, de la forme et de la situation des figures. On lui doit un *Traité des coniques* en huit livres; sept nous sont parvenus, et le huitième a été rétabli en 1646 par l'astronome Halley, d'après les indications de Pappus. Le *Traité des coniques* fit donner à son auteur le nom de *géomètre par excellence;* on y trouve les principales propriétés des foyers, la germe des théories des *polaires*, des *développées*, des *maxima* et des *minima*.

Après les grands noms d'Archimède et d'Apollonius, il faut se borner à citer rapidement quelques autres géomètres.

**Nicomède** (150 av. J.-C.) est connu par la *conchoïde*, courbe qui permet de résoudre par un procédé mécanique le problème des *deux moyennes proportionnelles* et celui de la *trisection de l'angle*.

**Hipparque** (vers 150 av. J.-C.) considère la *projection stéréographique* et s'occupe des triangles sphériques.

**Ménélaüs** (vers 80 ap. J.-C.), dans son *Traité des sphériques*, découvre plusieurs des propriétés des triangles sphériques et donne comme *lemme* le théorème fondamental de la *théorie des transversales*.

**Ptolémée** (vers 125 ap. J.-C.), dans sa *Syntaxe mathématique*, nommée *Almageste*, c'est-à-dire *Très grande*, par les Arabes, donne le premier traité de *Trigonométrie rectiligne et sphérique* qui nous soit parvenu.

**Pappus** (sur la fin du VI^e siècle de l'ère chrétienne) rassemble dans ses *Collections mathématiques* les découvertes des mathématiciens les plus célèbres, et une multitude de propositions curieuses et de lemmes destinés à faciliter la lecture de leurs ouvrages. On lui doit le célèbre *théorème de Guldin* et la première mention du *rapport anharmonique*.

**Dioclès** invente la *cissoïde* pour résoudre le problème des deux moyennes proportionnelles, mais le tracé mécanique de cette courbe est dû à Newton.

Aux grands géomètres succèdent quelques commentateurs plus ou moins ingénieux, et l'on arrive à une période de stagnation qui dure jusqu'au XVI^e siècle.

**Viète**, de Fontenay-le-Comte (1540-1643), ouvre l'ère moderne de la science; il complète la *méthode analytique* de Platon par l'invention de l'*Algèbre*, il construit graphiquement les équations du second et du troisième degré, préparant ainsi la voie à Descartes, et il perfectionne la trigonométrie sphérique.

**Kepler** (1571-1631), dans sa *Nouvelle stéréométrie*, introduit le premier la notion de l'*infini* dans la géométrie, fait remarquer la nullité d'accroissement d'une variable au *maximum* ou au *minimum*, et donne une méthode graphique pour déterminer les circonstances d'une éclipse de soleil.

**Cavalieri** (1598-1647) publie sa *Géométrie des indivisibles;* il considère les solides comme formés d'une infinité de plans, et les plans, par la réunion d'une infinité de lignes; cette idée féconde, malgré l'inexactitude du fait qu'elle exprime, permet des évaluations nouvelles de surfaces et de volumes, et la détermination géométrique des *centres de gravité*.

**Guldin** (1577-1643) découvre les théorèmes célèbres qui portent son nom, et que plus tard on a aperçus dans Pappus.

**Grégoire de Saint-Vincent** (1584-1667) perfectionne la *méthode d'exhaustion* d'Archimède, et l'on peut dire avec raison que le petit triangle différentiel qui apparaît entre la courbe et deux des côtés consécutifs de l'un des deux polygones inscrit ou circonscrit, a conduit Barrow, Leibniz et Newton au calcul infinitésimal.

**Roberval** (1602-1673) donne une méthode pour mener les *tangentes*, basée sur la doctrine des mouvements composés, introduite dans la mécanique par Galilée.

**Fermat** (1590-1663) publie la belle méthode *de maximis et minimis*, en introduisant pour la première fois l'*infini* dans le calcul, comme Kepler l'avait introduit dans la géométrie pure; il est sans égal dans sa *théorie des nombres*.

**Desargues** (1593-1662) étend aux coniques les propriétés du cercle qui sert de base au cône, dont il étudie les sections; il considère les droites parallèles comme concourant à l'infini, et donne le théorème fondamental de l'*involution de six points*, en considérant une sécante qui coupe une conique et un quadrilatère inscrit dans cette courbe. On lui doit aussi le théorème fondamental des deux *triangles homologiques*.

**Pascal** (1623-1662) écrit à seize ans son *Traité des sections coniques;* à dix-huit, ses découvertes sur la *Roulette* ou *Cycloïde*, et donne le célèbre théorème de l'*hexagramme mystique* relatif à la propriété de l'hexagone inscrit dans une conique.

**Descartes** (1596-1650), par son inappréciable conception de l'*application de l'algèbre à la théorie des courbes*, change véritablement la face des sciences mathématiques. La physique et l'algèbre elle-même retirent de grands avantages de la doctrine des coordonnées, et l'analyse s'enrichit de la méthode des coefficients indéterminés.

La *méthode analytique* de Descartes est dès lors cultivée par un si grand nombre de géomètres, qu'il faut se borner à en citer quelques-uns.

**De Witt** (1625-1672), le *grand pensionnaire* de Hollande, donne une description organique des coniques.

**Wallis** (1616-1703) écrit le premier un *Traité analytique des sections coniques*.

**Viviani** (1622-1703) propose le problème de la voûte sphérique exactement carrable.

**Huygens** (1629-1695), célèbre à bien des titres, donne la théorie des *développées*, établit le *principe de la conservation des forces vives*, et publie son *Traité de la Lumière*.

**La Hire** (1640-1718), continuateur des doctrines de Desargues et de Pascal, donne la *Nouvelle Méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques*, un *Mémoire sur les épicycloïdes*, et, en 1685, son grand *Traité des sections coniques*.

**Newton** (1642-1727), *le grand géomètre*, publie l'*Arithmétique universelle*, modèle parfait de l'application de la méthode de Descartes à la résolution des problèmes de géométrie et à la construction des racines des équations. Le grand ouvrage des *Principes* contient de nombreuses propositions de géométrie pure et la rectification des épicycloïdes; mais tout semble disparaître devant l'invention du *calcul des fluxions* ou *calcul infinitésimal,* dont Newton dispute la gloire à Leibniz.

**Leibniz** (1646-1716) est le principal auteur des méthodes merveilleusement puissantes qu'on nomme *calcul différentiel* et *calcul intégral;* la première est surtout employée pour la détermination des *tangentes* et des *maxima* ou *minima;* la seconde pour les *quadratures*, les *cubatures*, les *rectifications.*

**Halley** (1656-1742) est non seulement astronome célèbre, mais géomètre distingué. On lui doit la traduction et la restitution de plusieurs ouvrages d'Apollonius.

**Maclaurin** (1698-1746) montre, dans son *Traité des fluxions,* le grand parti qu'on peut tirer des considérations purement géométriques pour étudier les questions relatives à l'attraction des ellipsoïdes.

**R. Simson** (1687-1768) publie, dans son *Traité des coniques,* les théorèmes célèbres de Desargues et de Pascal, ainsi que le problème *ad quatuor lineas* de Pappus, et s'occupe de découvrir les *porismes d'Euclide.*

Les **Bernoulli** emploient surtout le calcul infinitésimal.

Jacques **Bernoulli** (1654-1705) est l'un des premiers à faire usage du calcul intégral; il étudie la *spirale logarithmique.*

Le marquis **de l'Hopital** (1651-1704) donne l'*analyse des infiniment petits.*

Jean **Bernoulli** (1667-1748), émule de son frère Jacques, propose le problème de la *brachistochrone,* ou de la plus courte descente, et étudie le problème des *isopérimètres.*

Il faut se borner à nommer **Rolle** (1652-1749) et son théorème d'algèbre; **Riccati** (1676-1754); dont une équation porte le nom; **Taylor** (1685-1731) et sa série; **Moivre** (1667-1756), **Cotes** (1682-1716) et leurs théorèmes; **Cramer** (1704-1752) et son *Introduction à l'analyse des courbes algébriques,* pour passer à un des plus grands analystes.

**Euler** (1707-1783) publie l'*Introduction à l'analyse des infinis* et un grand nombre de mémoires sur les différentes parties des mathématiques.

**Clairaut** (1713-1765) écrit à seize ans le *Traité des courbes à double courbure,* et expose pour la première fois, d'une manière méthodique, la doctrine des coordonnées dans l'espace, appliquée aux surfaces courbes et aux lignes à double courbure qui résultent de leur intersection.

**D'Alembert** (1716-1783) est surtout connu par son *Traité de dynamique.*

**Lambert** (1728-1777) publie son *Traité de perspective* et son *Traité géométrique des comètes.*

**Bezout** (1730-1783), bien connu par son *Cours complet de mathématiques.*

**Lagrange** (1736-1813), auteur de la *Mécanique analytique* et du *Calcul des variations.*

**Laplace** (1749-1827), auquel on doit de nombreux travaux d'analyse et la *Mécanique céleste.*

La puissance et la fécondité des *Méthodes analytiques* exercent dès lors un tel attrait sur les intelligences, qu'on ne cultive plus, pour ainsi dire, la géométrie proprement dite; mais un réveil se produit vers la fin du dix-huitième siècle, et reporte l'attention sur les méthodes purement géométriques.

**Monge** (1746-1818) coordonne les éléments de construction dispersés dans les œuvres de Desargues, de Frézier et de divers praticiens, et crée la *Géométrie descriptive;* il réduit ainsi à un petit nombre de principes invariables et à des constructions faciles et certaines toutes les opérations géométriques qui peuvent se présenter dans la coupe des pierres, la charpente, la perspective, la gnomonique; il développe en outre la faculté de percevoir les figures dans l'espace et de découvrir leurs propriétés.

**Carnot** (1753-1823) donne la *Méthode des transversales* et la *Géométrie de position,* qui permet de déduire d'un cas donné d'un problème proposé, les divers autres cas qui peuvent se présenter.

**Legendre** (1762-1833), devenu populaire par ses *Éléments de Géométrie,* publiés en 1794, s'adonne aussi à la plus haute *Analyse* et à la *Théorie des nombres.*

**Dupin** (1784-1873), dans ses *Développements* et ses *Applications de géométrie,* traite par de simples considérations géométriques quelques-unes des questions les plus difficiles de l'analyse.

**Brianchon** (1785-1864) fait connaître les propriétés de l'*hexagone circonscrit à une conique,* et publie son *Mémoire sur les lignes du second ordre.*

**Poncelet** (1788-1857) devient le principal auteur des méthodes de transformation des figures par les fécondes doctrines de l'*homologie* et des *polaires réciproques;* son *Traité des propriétés projectives des figures* montre la puissance extraordinaire des instruments qu'il a créés et qu'il met en œuvre. Il est possible, sans nul doute, de trouver, dans des ouvrages publiés antérieurement, quelques germes des méthodes qu'il donne; mais il y a loin d'un théorème isolé, quelque intéressant qu'il puisse être, à une doctrine complète conduisant à de nombreuses applications.

**Poinsot** (1777-1859), si connu par sa *théorie des couples,* étudie les *polyèdres étoilés.*

**Cauchy** (1789-1857) traite la même question et ne reste étranger à aucune des branches des mathématiques.

**Möbius** (1790-1868) et **Steiner** (1796-1863) appliquent avec succès les méthodes de transformation des figures, et le dernier surtout fait connaître un très grand nombre de théorèmes nouveaux.

**Gergonne** (1771-1859), dans ses *Annales mathématiques*, propage les nouvelles doctrines; il formule le *principe de dualité*, en généralisant les résultats donnés par la *méthode des polaires réciproques.*

**Chasles** (1793-1880) reprend toutes les nouvelles découvertes, les étend par ses propres recherches; puis il les présente d'une manière élégante et rigoureuse, en employant les transformations qu'il désigne sous le nom d'*homographie* et de *corrélation des figures*, et dont le *rapport anharmonique* est la base fondamentale. Sa *Géométrie supérieure*, le *Traité des coniques* et le rétablissement des *porismes d'Euclide*, font époque dans l'histoire de la géométrie.

**Cremona** (1830-1903), dans sa *Géométrie projective*, résume les principes de la géométrie moderne établis par Poncelet, Steiner, Chasles; il trouve le moyen, *trop négligé par la plupart des auteurs*, de rendre justice aux savants qui l'ont précédé.

L'*inversion des figures* a ses propriétés particulières et obtient des travaux spéciaux des géomètres **Stubbs**, **Thomson**, **Liouville**, etc. Pendant ce temps, **Bellavitis** crée la théorie des *équipollences*, et **Mannheim** développe la *Géométrie cinématique*, dont Roberval avait donné une première notion par sa méthode des tangentes, et que Poinsot avait continuée par la théorie du centre instantané de rotation.

La *transformation des figures*, appliquée aux arts mécaniques, donne lieu à d'intéressants travaux : **Peaucellier**, par son *Inverseur*, ouvre une voie féconde, que suivent avec succès **Kempe**, **Hart**, **Sylvester**, **Liguine**, **Darboux**.

De nos jours, la *Géométrie* s'est enrichie d'un chapitre très intéressant, grâce aux travaux d'un grand nombre de géomètres distingués, parmi lesquels il convient de citer d'abord **MM. Lemoine**, **Brocard** et **Neuberg**.

On doit nommer ensuite **J. Casey**, **G. Tarry**, **M. d'Ocagne** et **G. de Longchamps**.

Dans divers congrès scientifiques, **M. E. Vigarié** a été l'historiographe des recherches relatives à la *Géométrie du Triangle.*

En 1904, M. Gaston **Darboux** a publié un travail remarquable, *Étude sur le développement des Méthodes géométriques au XIXe siècle.*

# TABLE DES MATIÈRES

### V. Discussion et extension



### VI. Méthode algébrique



### VII. Maxima et minima



# EXERCICES

## LIVRE I



### THÉORÈMES



### PROBLÈMES

## LIVRE II

### THÉORÈMES



### LIEUX GÉOMÉTRIQUES



### PROBLÈMES



## LIVRE III

### THÉORÈMES



### LIEUX GÉOMÉTRIQUES

PROBLÈMES



## LIVRE IV

THÉORÈMES



PROBLÈMES



## LIVRE V

THÉORÈMES



## LIVRE VI

THÉORÈMES



PROBLÈMES

## LIVRE VII

### THÉORÈMES



### PROBLÈMES



## LIVRE VIII

### THÉORÈMES



### PROBLÈMES



## PROBLÈMES NUMÉRIQUES



## GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

## TABLES DE RÉFÉRENCE

# MÉTHODES

POUR DÉMONTRER LES THÉORÈMES ET RÉSOUDRE LES PROBLÈMES
DE GÉOMÉTRIE

## I

## MÉTHODES GÉNÉRALES

### Introduction.

**1.** Il est utile de faire précéder l'exposé des méthodes de quelques indications relatives aux diverses propositions que l'on peut avoir à démontrer.

**2. Manière d'énoncer les théorèmes.** L'énoncé d'un théorème se compose essentiellement d'une *hypothèse* et d'une *conclusion.*

**Exemple.** *Tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des deux côtés de cet angle.*

L'*hypothèse* consiste à supposer que le point appartient à la bissectrice; la *conclusion* consiste à dire que le point est équidistant des deux côtés.

**3. Remarque.** L'hypothèse s'énonce ordinairement au début de la proposition; mais on peut aussi commencer par la conclusion et dire, par exemple :

*Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés respectivement égaux.*

**4. Diverses sortes de propositions.** Deux *propositions* comparées entre elles peuvent être *réciproques, contraires, contradictoires.*

**Propositions réciproques.** Deux *propositions* sont *réciproques* lorsque l'hypothèse et la conclusion de la première deviennent respectivement la conclusion et l'hypothèse de la seconde.

**Propositions contraires.** Deux *propositions* sont *contraires* lorsque les conditions de la seconde sont l'inverse ou la négative des conditions de la première; ainsi l'hypothèse de la proposition contraire est l'opposé de l'hypothèse de la proposition directe, et la conclusion de cette *proposition* contraire est aussi l'opposé de la conclusion de la proposition énoncée directement.

**Propositions contradictoires** Deux *propositions* sont *contradictoires* lorsqu'elles ont même hypothèse avec une conclusion opposée, ou des hypothèses différentes et même conclusion.

5. **Propositions correspondantes.** A toute *proposition donnée directement* correspondent :

1o La proposition *réciproque ;*

2o La proposition *contraire* et sa réciproque ;

3o Les deux propositions *contradictoires* et leurs réciproques.

**Exemples.** *Proposition directe.* Tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet angle.

*Proposition réciproque.* Tout point équidistant des côtés d'un angle appartient à la bissectrice de cet angle.

*Proposition contraire et sa réciproque.* 1o Tout point pris hors de la bissectrice est inégalement éloigné des côtés de cet angle.

2o Tout point inégalement éloigné des côtés d'un angle n'appartient pas à la bissectrice de cet angle.

*Propositions contradictoires.* 1o Tout point de la bissectrice serait inégalement éloigné des côtés de l'angle ; 2o tout point pris hors de la bissectrice serait également éloigné des côtés de l'angle.

6. **Remarques.** 1o La *réciproque* d'un théorème peut être une proposition fausse. Ainsi, du théorème connu : *tous les angles droits sont égaux,* on ne peut pas conclure que tous les angles égaux sont droits.

2o La proposition contraire d'un théorème peut être fausse ; telle est la suivante : *tous les angles qui ne sont pas droits sont inégaux.*

3o Il est évident que si une proposition est vraie, sa contradictoire est fausse, et réciproquement.

4o La proposition contradictoire est employée lorsqu'on démontre, par la réduction à l'absurde, la réciproque d'un théorème donné.

7. **Dépendance des propositions.** I. Si le théorème direct et le théorème contraire sont vrais, il en est de même de la proposition réciproque de chacun de ces théorèmes.

**Exemple.** *Dans le même cercle, ou dans des cercles égaux, les arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales et les arcs inégaux sont sous-tendus par des cordes inégales.*

On peut en conclure que des cordes égales sous-tendent des arcs égaux et que des cordes inégales sous-tendent des arcs inégaux.

II. Si le théorème direct et la proposition réciproque sont vrais, il en est de même de la proposition contraire de chacun de ces théorèmes.

**Exemple.** *Toute droite perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente à la circonférence, et,* réciproquement, *toute droite tangente à la circonférence est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de contact.*

Il en résulte nécessairement que toute droite non perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon n'est pas tangente à la circonférence, et que toute droite qui n'est pas tangente n'est pas perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon.

**8. Résumé**. En représentant par A et A′ une proposition et sa réciproque, par B et B′ les propositions contraires de A et A′, par C et C′ les propositions contradictoires de A′, on peut démontrer directement A et B pour en déduire A′ et B′, ou bien démontrer A et A′ pour en déduire B et sa réciproque B′.

Enfin on peut démontrer directement que A étant une proposition vraie, si l'on prouve que l'une des propositions contradictoires C ou C′ de la réciproque A′ est une proposition fausse, on en conclura l'exactitude de A′, et par suite de B et B′.

On peut dire aussi : « La réciproque et la contraire d'une proposition quelconque vraie ou fausse, sont toujours vraies ou fausses en même temps. » (L. Gérard.)

**9. Hypothèses simultanées**. Un même théorème peut énoncer ou contenir plusieurs hypothèses devant exister ensemble pour aboutir à une conclusion unique. Dans ce cas, il y a autant de propositions réciproques qu'il y a d'hypothèses.

**Exemple**. *Deux angles adjacents dont les côtés extérieurs forment une ligne droite sont supplémentaires.*

La condition d'être *adjacents* forme une première hypothèse, et celle d'avoir les côtés extérieurs en ligne droite en forme une seconde.

On a les deux réciproques suivantes :

1° *Si deux angles supplémentaires sont adjacents, les côtés extérieurs sont en ligne droite.*

2° *Si deux angles supplémentaires ont les côtés extérieurs en ligne droite, ces angles sont adjacents.*

La première réciproque est vraie ; elle correspond aux angles *a* et *b* (fig. 1). La seconde ne l'est pas ; car si l'on prend l'angle *c* égal à *b*, les angles *a* et *c* sont supplémentaires, ont deux côtés en ligne droite, et néanmoins ils ne sont pas adjacents.

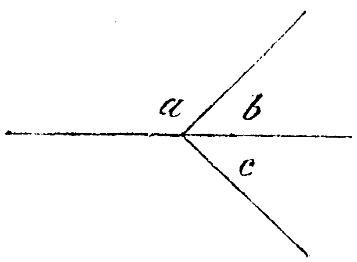


Fig. 1.

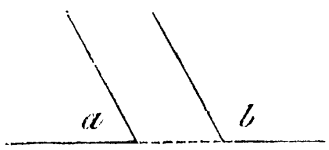


Fig. 2.

Dans la figure 2, les angles *a* et *b* sont supplémentaires et ont les côtés extérieurs en ligne droite ; néanmoins ils ne sont pas adjacents.

**10. Remarque**. Les indications que l'on vient de donner sont importantes, et même nécessaires, pour prévenir les conclusions et les conséquences inexactes qu'on serait tenté de tirer d'un théorème dont on négligerait d'étudier directement la proposition réciproque ou la proposition contraire. Ainsi « il est bon que les élèves aient des idées générales précises sur les méthodes de démonstration ; ils suivent plus facilement les détails d'un théorème, et ils peuvent abréger le travail relatif aux propositions contraires, réciproques, etc... »

(J. BOURGET, *Journal de mathématiques élémentaires*, 1877, p. 37.)

**Note.** * J. BOURGET, ancien professeur à la Faculté des sciences de Clermont, puis recteur de la même Faculté. (Voir ci-après, n° 55, *note*.)

*Journal de mathématiques élémentaires,* fondé en 1877, publié sous la direction de MM. BOURGET et KŒHLER. — Depuis 1880, cette utile publication a pour titre : *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales.* M. G. DE LONGCHAMPS (1842-1906), professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, en a pris la direction en 1888 et l'a continuée jusqu'en octobre 1897.

* M. L. GÉRARD, auteur d'une note bibliographique sur les *Exercices de géométrie,* par F. J. 3e édition, dans le *Bulletin de mathématiques élémentaires,* année 1896-1897, p. 109.

Cette intéressante publication, commencée le 1er octobre 1895, porte aujourd'hui le titre de *Bulletin de Sciences Mathématiques et Physiques élémentaires*, fondé par M. B. NIEWENGLOWSKI, inspecteur de l'académie de Paris, sous la direction de MM. L. GÉRARD, professeur au lycée Charlemagne, et CH. MICHEL, professeur au lycée de Douai.

## § I. — Classification des méthodes.

**11. But des méthodes.** Les méthodes indiquent la marche qu'il faut suivre pour démontrer un théorème, ou pour résoudre un problème.

En géométrie, il n'est pas possible d'indiquer une même voie qui, dans tous les cas, conduise inévitablement au but; mais on peut diriger les recherches et faire trouver plus facilement les résultats demandés.

**12. Principales sortes de méthodes.** On classe les méthodes en deux groupes principaux. On distingue les *méthodes générales* et les *méthodes particulières.*

Les *méthodes générales* peuvent s'appliquer à toutes les questions.

Les *méthodes particulières* ne peuvent être utilisées que dans un certain nombre de questions. L'emploi de plusieurs d'entre elles est si restreint, qu'on doit considérer ces méthodes comme ne constituant que de *simples procédés.*

Les *méthodes générales* sont l'*analyse* et la *synthèse.*

**13. Analyse.** L'analyse est la méthode par laquelle une proposition inconnue A se ramène à une autre proposition inconnue B, puis cette seconde B à une troisième C, et celle-ci à une quatrième D, etc., jusqu'à ce que l'on tombe sur une proposition connue.

Entre la proposition d'où l'on part et celle où l'on arrive, il peut se trouver un nombre quelconque de propositions intermédiaires.

**14. Synthèse.** La synthèse est la méthode par laquelle on passe d'une proposition connue D à une autre proposition connue C, puis de cette seconde C à une troisième B, de celle-ci à une quatrième, etc., jusqu'à ce que l'on arrive ainsi à la proposition A que l'on devait étudier.

L'analyse et la synthèse suivent des voies opposées : tandis que la première part de la question à traiter pour arriver à une question connue, la seconde part d'une question connue pour tomber sur la question proposée.

**15. Déduction.** Quel que soit l'exercice géométrique à étudier et quelle que soit la méthode que l'on veut employer, il faut que les propositions *se déduisent* rigoureusement les unes des autres, et que deux propositions consécutives quelconques soient *réciproques*, au point de vue logique.

**16. Propositions réciproques.** Deux propositions sont *réciproques*, au point de vue logique, lorsque chacune d'elles entraîne l'autre et toutes ses conséquences.

**Exemple.** *Lorsque les angles d'un triangle sont respectivement égaux à ceux d'un autre triangle, les côtés du premier triangle sont à ceux du second dans un rapport constant, et il en est de même des hauteurs correspondantes, etc.*

Réciproquement, de la proportionnalité des côtés on déduit l'égalité des angles et toutes les propriétés qui en découlent.

Ainsi l'*égalité des angles de deux triangles* et le *rapport constant des côtés homologues* donnent lieu à deux *propositions réciproques*.

L'égalité des côtés de deux triangles et l'égalité des angles opposés ne donnent pas lieu, *au point de vue logique*, à deux propositions réciproques; car de l'égalité des côtés on déduit bien l'égalité des angles opposés, mais l'égalité des angles n'entraîne pas celle des côtés.

**16 a. Note.** Dans le numéro précédent, l'expression *propositions réciproques* n'a pas la signification qu'on a indiquée au n° 4. Il est regrettable que les mêmes termes soient employés en géométrie avec deux sens différents.

Pour la rédaction de ce paragraphe nous avons surtout mis à profit les premiers volumes de l'ouvrage : *Des méthodes dans les sciences de raisonnement,* par DUHAMEL.

*Méthode analytique*. En géométrie, la méthode analytique indiquée dans l'ouvrage ci-dessus n'est pas la méthode analytique des Anciens, due à PLATON. A ce sujet. il est bon de lire un article publié dans *Mathesis,* 1902, p. 266 à 273.

Cette étude est due à M. P. MANSION.

* DUHAMEL, né à Saint-Malo en 1797, mort à Paris en 1872, professeur à l'École Polytechnique, membre de l'Institut.

* PLATON (430-347 av. J.-C.) alla s'instruire des mathématiques en Égypte, puis en Italie. De retour à Athènes, le célèbre philosophe introduisit dans la géométrie la *méthode analytique;* il étudia les *sections coniques*, et fit connaître les *cinq polyèdres réguliers convexes.* On connaît l'inscription qu'il avait fait mettre à l'entrée de son école philosophique : *Que nul n'entre ici, s'il n'est géomètre.*

* P. MANSION, professeur à l'Université de Gand, de concert avec M. J. NEUBERG, professeur à l'Université de Liège, a fondé un recueil mathématique, nommé *Mathesis,* que nous aurons à citer fréquemment, car nous lui avons fait d'assez nombreux emprunts.

## § II. — Classification des Exercices de Géométrie et Démonstration des théorèmes par l'analyse.

**17. Exercices de Géométrie.** Les *exercices* ou *questions de géométrie* comprennent des *théorèmes*, des *lieux géométriques* et des *problèmes*.

Il convient de parler en premier lieu des théorèmes, parce qu'on les utilise pour la résolution des problèmes.

La détermination des lieux géométriques doit venir ensuite, car leur emploi constitue une des méthodes les plus fécondes pour résoudre les problèmes de géométrie.

**18. Emploi de l'analyse.** Pour démontrer un théorème par l'analyse, on procède ordinairement comme il suit :

*Du théorème à démontrer, regardé comme vrai, on déduit une deuxième proposition ; de celle-ci on passe à une troisième, etc., jusqu'à ce que l'on arrive à une proposition connue.* Mais il faut que les propositions consécutives, considérées deux à deux, soient toujours réciproques au point de vue logique (nos 13 et 16).

Voici quelques exemples de théorèmes démontrés par l'analyse.

### Théorème.

**19.** *Par un point quelconque de la base d'un triangle isocèle, on mène des parallèles aux côtés égaux ; prouver que le parallélogramme ainsi formé a un périmètre constant.*

Soient OM, ON deux parallèles aux côtés égaux CB, AB.

Il faut prouver que le périmètre du parallélogramme OMBN est constant.

Il suffit de le démontrer pour le demi-périmètre OM + ON.

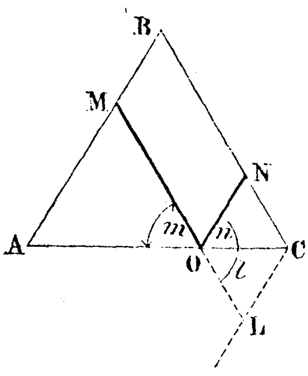


Fig. 3.

1° Pour reconnaître s'il est constant, on peut porter les deux parties sur la même droite et prendre $OL = ON$.

Les angles $l$, $m$ sont égaux comme opposés par le sommet ; $m = n$ comme étant respectivement égaux aux angles A et C ; donc les triangles COL, CNO sont égaux comme ayant un angle égal compris entre des côtés égaux ; donc l'angle $OCL = OCN = A$, les deux droites CL, AB sont parallèles et MLCB est un parallélogramme, donc $OM + ON$ ou $ML = BC$, longueur constante ; donc...

2° Pour avoir la somme $OM + ON$, on peut remplacer chacune de ces formules par une droite égale.

Ainsi $OM = BN$, comme côtés opposés d'un parallélogramme.

Le triangle ONC est isocèle, car l'angle $n = A = C$ ; par suite, $ON = CN$ ; donc...

$$OM + ON = BC. \qquad \text{Quantité constante.}$$

### Théorème.

**20.** *La somme des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la base d'un triangle isocèle sur les côtés égaux, est une quantité constante.*

1° Une analyse analogue à la précédente nous conduit à prolonger OM d'une quantité OL égale à ON, et à prouver que CL est parallèle à AB ;

donc la somme $OM + ON$ est constante, car elle est égale à la distance des parallèles AB, CL. Ainsi $OM + ON$ égale la hauteur CH, quantité constante.

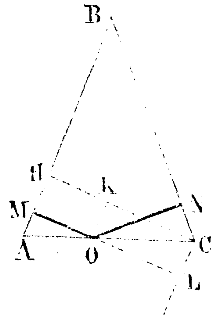


Fig. 4.

2° En menant OK parallèle à AB, on a :

$$OM = HK, \qquad ON = CK,$$

car les deux triangles rectangles CNO et CKO sont égaux (G., n° 54) ; donc $OM + ON = CH$.

**Théorème de Miquel.**

**21**. *Quatre droites, se coupant deux à deux, forment quatre triangles; les circonférences circonscrites à ces quatre triangles passent par un même point.*

Les quatre droites, se coupant deux à deux, donnent six sommets A, B, C, D, E, F. Circonscrivons des circonférences à deux des quatre triangles, par exemple aux triangles ACF, ADE; soit M le second point où les circonférences se coupent, et joignons ce point aux six sommets; il faut prouver que les circonférences circonscrites aux triangles BDF, BCE, passent aussi par le point M.

En admettant que cela ait lieu, on reconnaît que le quadrilatère CBME serait inscrit, et, par suite, que l'angle BCM égalerait BEM (G., n° 148); mais l'égalité de ces deux angles peut s'établir directement. En effet :

angle BCM ou $FCM = FAM$,

comme ayant même mesure, $^1/_2$ FM, car le quadrilatère FACM est inscrit;

angle BEM ou $DEM = DAM$ ou FAM,

comme ayant même mesure, $^1/_2$ DM ;

donc angle $BCM =$ angle BEM.

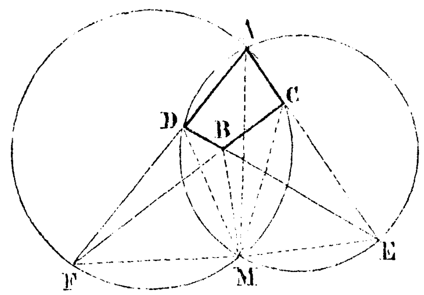


Fig. 5.

Or les angles BCM, BEM étant égaux, il est démontré (G., n$^{os}$ 154-155) que la circonférence circonscrite au triangle BCE passe par le point M. Il en est de même de la circonférence circonscrite au triangle BDF; donc...

**Note.** Le point de concours des quatre circonférences circonscrites a été nommé *point de Miquel*, par M. KANTOR de Vienne. Le théorème est probablement de STEINER (voir ci-après n$^{os}$ 689 et 711, notes).

**Théorème de Simson.**

**22**. *Si d'un point pris sur la circonférence circonscrite à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur chaque côté du triangle, les trois points ainsi obtenus sont en ligne droite.*

Ce théorème s'énonce quelquefois comme il suit :

*Les projections d'un point quelconque de la circonférence circonscrite à un triangle, sur chaque côté de ce triangle, sont en ligne droite.*

Soit M un point quelconque de la circonférence circonscrite au triangle ABC ; abaissons les perpendiculaires MD, ME, MF sur les côtés ; il faut prouver que les trois points D, E, F sont en ligne droite.

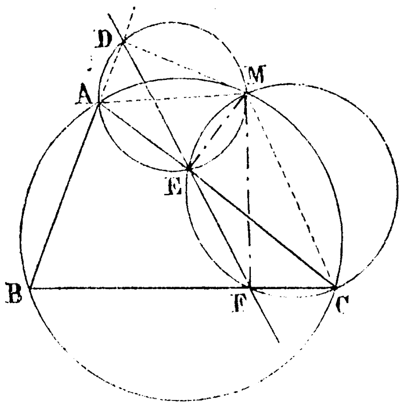



Fig. 6.

*Si les segments* DE, EF *ne formaient qu'une même droite,* les angles AED, CEF seraient égaux comme opposés par le sommet.

Les quadrilatères ADME, CFEM sont inscriptibles : le premier, parce que les angles opposés D et E sont supplémentaires (G., nº 157) ; le deuxième, parce que les deux triangles rectangles MEC et MFC ont même hypoténuse MC ; donc, de l'égalité des angles AED, CEF, on conclurait l'égalité des angles AMD, CMF respectivement égaux aux premiers. Il suffit donc de démontrer directement l'égalité des angles AMD, CMF, ou bien l'égalité de leurs compléments MAD, MCF.

Or l'angle exinscrit MAD, supplément de l'angle MAB, a pour mesure moitié de l'arc MAB ; ainsi il égale l'angle MCF, qui a aussi pour mesure moitié de l'arc MAB.

Donc l'hypothèse qui a servi de point de départ est vraie, et les trois points D, E, F sont en ligne droite.

**23.** *Remarques.* 1º Les propositions consécutives dont nous nous sommes servis dans la précédente démonstration sont évidemment réciproques au point de vue logique (nº 16), car tout repose sur l'égalité des angles ; les exercices suivants offriront quelques nouvelles particularités.

2º La droite DEF, qui passe par les trois projections du point M, est appelée *droite de Simson,* parce que le théorème lui-même est attribué à *Robert Simson.*

3º Le cercle circonscrit est le lieu des points dont les projections sur les trois côtés d'un triangle sont en ligne droite.

**23 a. Note.** 1º Voir ci-après, nºs 762 à 765. D'après *l'Intermédiaire des mathématiciens,* 1894, p. 174, la *droite de Simson* porterait à tort le nom de ce géomètre, car il ne s'en est point occupé ; on devrait la nommer *droite de Wallace,* parce que ce mathématicien l'a mentionnée par la première fois en 1799 ou 1800.

*L'Intermédiaire des mathématiciens* rend de réels services à tous les savants qui ont à demander des renseignements sur des questions mathématiques. Ce recueil si intéressant est dû à MM. LAISANT et LEMOINE ; il a commencé en 1894 ; puis en 1901, M. MAILLET, Ingénieur des Ponts et Chaussées, a collaboré activement à cette importante revue. Nous aurons fréquemment à citer l'*Intermédiaire.*

ROBERT SIMSON (1687-1768), mathématicien écossais, professa à Glasgow. On a de lui un *Traité des sections coniques.* Il rétablit plusieurs *porismes* d'EUCLIDE, ainsi que la *section déterminée* d'APOLLONIUS.

Il ne faut pas confondre R. SIMSON avec THOMAS SIMPSON (1710-1761). Ce dernier est surtout connu par les formules trigonométriques qui portent son nom (*Trigonométrie,* nº 57) et par une formule de quadrature (*Géométrie,* nº 983).

**Théorème.**

**24.** *Lorsque la demi-circonférence décrite sur le côté oblique d'un trapèze rectangle coupe le côté opposé, chaque point d'intersection divise la hauteur en deux segments dont le produit égale le produit des bases du trapèze.*

Supposons que la demi-circonférence ayant AD pour diamètre coupe la hauteur BC aux points M et N.

Il faut prouver que l'on a, par exemple :

$$BM . MC = AB . CD. \qquad (1)$$

En admettant cette relation comme vraie, on peut écrire :

$$\frac{BM}{AB} = \frac{CD}{MC}. \qquad (2)$$

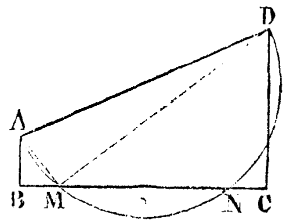


Fig. 7.

Alors les triangles rectangles AMB, MCD seraient semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels (G., n° 225); il suffit donc de démontrer directement la similitude de ces triangles; or les angles AMB, DMC sont complémentaires, car l'angle AMD est droit.

Donc l'angle AMB égale MDC comme ayant même complément DMC.

Ainsi les triangles sont semblables, et l'on peut en déduire la proportion (2), et par suite la relation (1).

*Remarque.* On a de même :

$$BN . NC = AB . CD.$$

2° Quand la demi-circonférence AD est tangente à BC, le point de contact est au milieu de la hauteur; le carré de la moitié de BC égale AB . CD.

3° Lorsque la demi-circonférence ne coupe point BC, on ne peut pas diviser BC en deux segments additifs dont le produit soit égal au produit AB . CD.

4° Lorsque les perpendiculaires AB, CD sont dirigées en sens contraire (fig. 8), il y a toujours intersection; mais les points M, N sont sur le prolongement de BC, et l'on a comme précédemment : $BM . CM = AB . CD = BN . CN.$

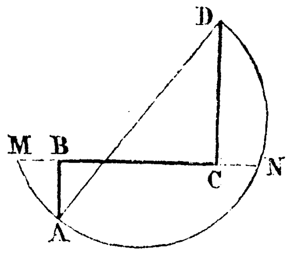


Fig. 8.

**Théorème.**

**25.** *La distance* MP *d'un point quelconque* M *d'une circonférence à une corde donnée* AB *est moyenne proportionnelle entre les distances* ME, MG *du même point* M *aux tangentes* AC, BC, *menées par les extrémités de la corde donnée.*

Il faut prouver que l'on a :

$$MP^2 = ME . MG. \qquad (1)$$

Regardant cette relation comme étant démontrée, nous pouvons en déduire les rapports égaux

$$\frac{ME}{MP}=\frac{MP}{MG}. \qquad (2)$$

Mais les angles EMP, PMG sont égaux, car ils égalent respectivement les angles égaux $emC$, $gmC$; donc, en admettant (2), on trouve que les triangles EMP, PMG sont semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés homologues proportionnels.

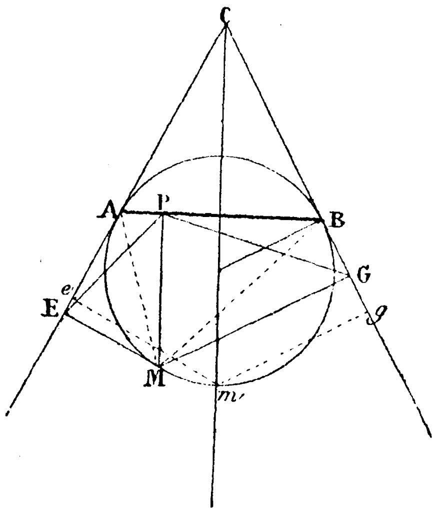


Fig. 9.

Comme conséquence de cette similitude de triangles, on peut dire que l'angle MPE = MGP.

En réalité, pour conclure que les propositions intermédiaires et celle du point de départ sont vraies, il suffit de démontrer directement l'égalité des angles MPE et MGP. Or les deux quadrilatères APME, BGMP sont inscriptibles (G. nos 156 et 157), car chacun d'eux a deux angles opposés supplémentaires, puisqu'ils sont droits; donc l'angle MPE = MAE comme correspondant au même arc dans la circonférence circonscrite au quadrilatère APME.

De même l'angle MGP = MBP. Or les angles MAE, MBP ont pour mesure la moitié de l'arc AM; donc ils sont égaux, et il en est de même des angles MPE, MGP.

Le théorème est donc démontré, et l'on peut écrire :

$$MP^2 = ME \,.\, MG.$$

**26.** *Remarque.* Dans le raisonnement ci-dessus, deux propositions consécutives sont toujours réciproques.

Ainsi, de même que, de la similitude des triangles établie par l'égalité de trois angles, on déduit :

$$\frac{ME}{MP}=\frac{MP}{MG};$$

de même, de l'égalité de ces rapports et de l'égalité des angles en M, on déduit que l'angle MPE = MGP, etc.

### Théorème.

**27. Cercle des neuf points.** *Dans un triangle, les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des droites qui joignent les sommets au point de concours des hauteurs, sont situés sur une même circonférence.*

Soient D, E, F les points milieux des côtés; AK, CG deux des hauteurs, et L le point milieu de AH.

Circonscrivons une circonférence au triangle DEF des points milieux des côtés.

Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que cette circonférence passe par le pied K, d'une hauteur quelconque, et par le point L, milieu de AH.

1° La droite FK, qui joint le sommet K de l'angle droit au point milieu F de l'hypoténuse AC, égale la moitié de cette hypoténuse; donc FK = FC = donc DE.

Ainsi le trapèze EDFK est isocèle; par suite, la circonférence qui passe par E, D, F, passe aussi par le quatrième sommet K.

2° La droite FL, qui joint les points milieux F, L des côtés du triangle ACH, est parallèle à la base CH; d'ailleurs FE est aussi parallèle à AB; donc l'angle EFL égale l'angle AGC, égale donc 90 degrés.

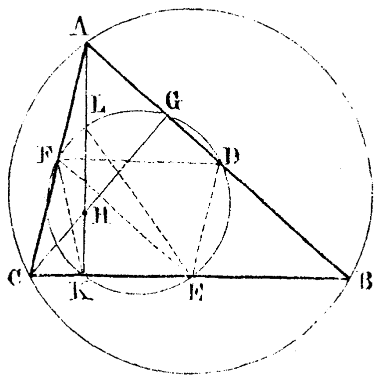


Fig. 10.

Le quadrilatère EKFL est inscriptible à cause des angles droits EKL, EFL; donc la circonférence qui passe par les trois sommets F, K, E, passe aussi par le quatrième sommet L.

**28.** Remarques. 1° *Le centre du cercle des neuf points est au milieu de la droite qui joint le point de concours des hauteurs au centre du cercle circonscrit à ce triangle.*

En effet, le centre se trouve sur les perpendiculaires élevées au milieu de FG et de KE (fig. 11); or ces perpendiculaires passent par le point M, milieu de OH.

La droite OH qui contient le centre du *cercle des neuf points* et qui joint l'*orthocentre,* ou point de concours des hauteurs, au centre du cercle circonscrit, a reçu le nom de *droite d'Euler.*

2° *Le rayon du cercle des neuf points est la moitié du rayon du cercle circonscrit.*

Car $\mathrm{EM} = \frac{1}{2}\,\mathrm{EL} = \frac{1}{2}\,\mathrm{AO}.$

Cela résulte aussi des triangles semblables EOM, AHO.

3° *La tangente* EJ, *du cercle d'Euler, au point milieu d'un côté, et ce même côté sont antiparallèles par rapport aux côtés de l'angle opposé.*

Les tangentes EJ, AT sont parallèles, car elles sont perpendiculaires aux rayons parallèles EM, AO; de plus, l'angle CAT = CBA.

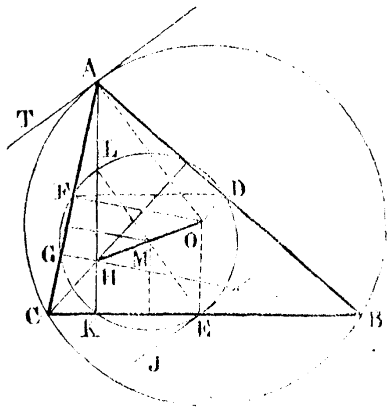


Fig. 11.

Donc AT et CB ou EJ et CB sont antiparallèles par rapport à l'angle A.

**Note.** Le théorème du *cercle des neuf points* est dû à Euler; il a été donné en 1765, dans les mémoires de Saint-Pétersbourg.

* Euler, né à Bâle en 1707, mort à Saint-Pétersbourg, en 1783, célèbre analyste; il perfectionna *le calcul intégral* et fit connaître les cinq surfaces du second degré, nommées aussi *quadriques.*

Pour l'emploi du mot *orthocentre*, voir ci-après n° 663, *note.*

### Remarques.

**29.** 1° C'est par l'emploi judicieux de l'analyse que l'on découvre les relations les plus simples qui rattachent entre elles les diverses parties d'une même question et que l'on trouve, par suite, le meilleur mode de démonstration.

2° L'analyse est aussi très utile lorsqu'il s'agit de la géométrie dans l'espace. Dans bien des cas elle permet de se passer de figure, ou du moins de remplacer par une construction simple une figure compliquée peu facile à étudier. En voici quelques exemples (nos 30 et 31).

### Théorème.

**30.** *On donne une sphère et un point fixe* P; *par ce point on mène trois plans rectangulaires deux à deux et qui déterminent trois cercles; prouver que la somme de ces trois cercles est constante.*

Soient $a$, $b$, $c$ les rayons de ces cercles, $r$ le rayon de la sphère et $a'$, $b'$, $c'$ les distances du centre de la sphère aux cercles; il faut prouver que l'on a :

$$\pi a^2 + \pi b^2 + \pi c^2 = \text{constante},$$

ou, ce qui revient au même, $a^2 + b^2 + c^2 =$ une valeur constante; mais

$$a^2 = r^2 - a'^2; \quad b^2 = r^2 - b'^2; \quad c^2 = r^2 - c'^2;$$

on a donc : $$a^2 + b^2 + c^2 = 3r^2 - (a'^2 + b'^2 + c'^2).$$

Il suffit de prouver que la quantité à soustraire est constante.

Or les trois distances $a'$, $b'$, $c'$, perpendiculaires deux à deux, menées du centre O sur les trois plans rectangulaires, dont P est le point commun, sont les trois arêtes latérales d'un parallélipipède rectangle ayant PO pour diagonale; par suite, la somme des carrés de ces arêtes égale $\text{PO}^2$, et le théorème est démontré.

**31.** *Remarque.* La détermination de la valeur constante n'offre aucune difficulté.

Ainsi $$a^2 + b^2 + c^2 = 3r^2 - \text{PO}^2,$$

donc $$\pi a^2 + \pi b^2 + \pi c^2 = 3\pi r^2 - \pi\text{PO}^2.$$

La somme des trois cercles déterminés par le trièdre tri-rectangle dont P est le sommet, égale trois grands cercles moins le cercle qui aurait PO pour rayon.

### Théorème.

**32.** *Lorsque les arêtes opposées d'un octaèdre inscrit dans une sphère sont dans un même plan, les trois diagonales de l'octaèdre se coupent au même point. En menant un plan tangent à la sphère par chaque sommet de l'octaèdre, on forme un hexaèdre circonscrit dont les faces, prises quatre à quatre, concourent en un même point* (G., n° 429).

1° Les arêtes opposées étant dans un même plan, les deux diagonales qui joignent les extrémités des arêtes opposées se coupent, car elles sont deux à deux dans un même plan. Les trois diagonales de l'octaèdre ne peuvent être dans un même plan; car, si cela avait lieu, les six sommets seraient ainsi dans un même plan, et il n'y aurait pas de solide : or les trois diagonales n'étant pas dans un même plan, et se coupant deux à deux, doivent passer par un même point.

2° Les quatre sommets qui correspondent à deux quelconques des diagonales de l'octaèdre sont dans un même plan. Les plans tangents, en ces quatre points, déterminent quatre faces consécutives de l'hexaèdre circonscrit. Or le plan des quatre sommets considérés coupe la sphère suivant un cercle dont la circonférence peut être considérée comme la courbe de contact d'un cône circonscrit à la sphère; mais les plans tangents menés par les quatre sommets sont en même temps tangents à la sphère et au cône circonscrit; donc ces quatre plans passent par le sommet du cône, et par suite se coupent au même point.

**33.** *Remarque.* Les six faces de l'hexaèdre, prises quatre à quatre, donnent lieu à trois groupes, et par suite, à trois points de concours; le point de rencontre des diagonales de l'octaèdre inscrit est le pôle du plan des trois points de concours des faces de l'hexaèdre.

## § III. — Synthèse et Réduction à l'absurde.

**34. Emploi de la synthèse.** Pour démontrer un théorème par la synthèse, *on part d'une vérité connue, on en déduit une deuxième proposition connue, de celle-ci une troisième, etc., jusqu'à ce que l'on tombe sur la proposition à démontrer.*

Comme enchaînement de propositions, la synthèse suit une marche inverse de celle de l'analyse.

Appliquons la synthèse à l'exemple déjà donné (n° 25).

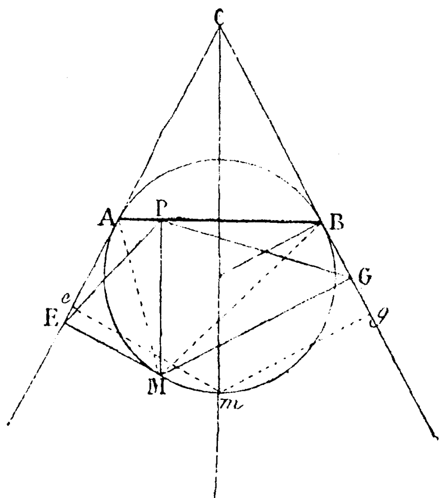



Fig. 12.

**35.** Théorème. *La distance* MP, *d'un point quelconque* M *d'une circonférence à une corde donnée* AB, *est moyenne proportionnelle entre les distances* MG, ME *du même point* M *aux tangentes* AC, BC, *menées par les extrémités de la corde donnée.*

Le quadrilatère APME est inscriptible, parce que deux de ses angles opposés sont droits; donc l'angle MPE = MAE, comme angles inscrits dans un même segment.

De même l'angle MGP = MBP.

D'ailleurs les angles MAE, MBP sont égaux;

donc l'angle $\qquad$ MPE = MGP,

et puisque les angles EMP, GMP sont égaux comme étant respectivement égaux aux angles en *m*, il en résulte que les triangles MPE, MGP sont équiangles, et par suite semblables.

Donc $$\frac{ME}{MP} = \frac{MP}{MG};$$

d'où $$MP^2 = ME \,.\, MG.$$

*Remarque.* Mais comment est-on conduit à considérer le quadrilatère APME?... pourquoi s'occuper de l'égalité des angles MBP, MAE... et autres questions analogues ?

Aucune réponse complètement satisfaisante ne peut être donnée ; en réalité, *l'intuition la plus heureuse n'est que la conséquence d'une analyse rapide, parfois inconsciente, mais néanmoins très réelle :* pour rechercher la vérité, il faut donc recourir à l'analyse.

**36. Réduction à l'absurde.** *La démonstration d'un théorème par la réduction à l'absurde consiste à admettre provisoirement comme vraie la proposition contradictoire du théorème énoncé, à en déduire une suite de conséquences, jusqu'à ce que l'on parvienne à un résultat évidemment incompatible avec les vérités connues.*

*Exemple.* Pour démontrer le théorème suivant :

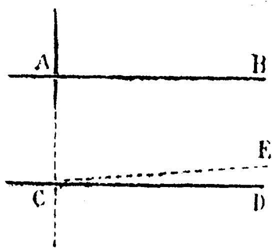


Fig. 13.

*Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une d'elles* AB *est aussi perpendiculaire à l'autre droite* CD. (G., n° 76.)

On admet, ou plutôt l'on raisonne comme si l'on admettait la proposition contradictoire : *Si deux droites* AB *et* CD *sont parallèles, une droite* AC, *perpendiculaire à l'une d'elles* AB, *n'est pas perpendiculaire à l'autre* CD.

Par suite, on pourrait élever une perpendiculaire CE sur AC ; mais les droites AB et CE seraient parallèles d'après le théorème direct déjà démontré (G., n° 72) ; il en résulterait que par le point C on aurait deux parallèles à une même droite. Or cette conséquence est évidemment inadmissible d'après le *Postulatum* (G. n° 74) ; il faut donc que CD soit perpendiculaire à AC.

**37.** *Remarque.* Il faut avoir soin d'étudier les cas différents que peut présenter la proposition contradictoire ; car, sans cela, de l'absurdité de l'un d'eux on ne pourrait pas conclure la vérité du théorème proposé.

*Exemple.* On sait *que toute parallèle* DE, *menée à la base d'un triangle, détermine un second triangle* ADE *semblable au premier ;* c'est-à-dire détermine un triangle ayant même angle au sommet que le premier et dont les côtés, qui comprennent l'angle commun, sont respectivement proportionnels.

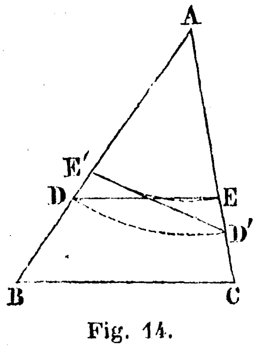


Fig. 14.

La proposition réciproque serait fausse si on l'énonçait comme il suit :

*Lorsque deux triangles ont un angle commun compris entre des côtés proportionnels, les bases de ces triangles sont parallèles.*

En effet, une droite telle que D'E' obtenue en prenant AD' = AD, AE' = AE donne deux triangles semblables AD'E', ABC, qui remplissent toutes les conditions de l'énoncé de la proposition réciproque; néanmoins D'E' n'est pas parallèle à BC. Ces deux autres droites sont antiparallèles.

**38.** *Emploi de la réduction à l'absurde.* La démonstration par la réduction à l'absurde convainc, mais n'éclaire pas; elle contraint à reconnaître l'exactitude de la proposition énoncée, néanmoins elle satisfait peu l'esprit, parce qu'elle ne traite pas directement le théorème demandé; aussi on a rarement recours à cette méthode aujourd'hui (d'après DUHAMEL).

**38 a. Note.** La méthode par réduction à l'absurde est due à EUCLIDE; elle a été employée fréquemment par LEGENDRE.

* EUCLIDE, né vers 315 av. J.-C., mort vers 255, se fixa à Alexandrie, auprès de Ptolémée I. Ses *Éléments de géométrie,* composés de treize livres, ont l'inappréciable avantage de réunir en un corps de doctrine les vérités géométriques plus ou moins éparses jusqu'à cette époque, et, tout en ajoutant aux découvertes des ouvrages antérieurs, de donner des démonstrations rigoureuses.

Les *Éléments* d'EUCLIDE sont encore classiques en Angleterre; on doit citer le Manuel de TODHUNTER, celui de JOHN CASEY, les Éléments édités par W. COLLINS, et surtout l'édition magistrale de ROBERT POTTS. Ce dernier ouvrage contient un grand nombre d'*exercices* et des *notes* très importantes.

* LEGENDRE, né à Paris, et non à Toulouse, en 1752, mort à Auteuil en 1833, fut membre du Bureau des Longitudes. On lui doit plusieurs savants ouvrages : ses *Éléments de géométrie,* publiés en 1794, ont rendu son nom populaire parmi les étudiants au XIXe siècle. (*Enseignement mathématique,* 1907, p. 219.)

## § IV. — Problèmes graphiques.

**39. Analyse.** *Pour traiter par l'analyse un problème graphique, on le suppose résolu; puis on considère les rapports des données et des inconnues, et l'on en déduit des conséquences jusqu'à ce qu'on arrive à des résultats connus.*

On doit avoir soin que les propositions déduites les unes des autres soient *réciproques au point de vue logique* (n° 16); sans quoi on pourrait omettre ou perdre des solutions, ou en introduire d'étrangères à la question proposée.

**40. Synthèse.** *Pour traiter par synthèse un problème graphique, on indique immédiatement les constructions à effectuer pour arriver au résultat demandé, et l'on justifie successivement les constructions ainsi faites.*

Nous allons appliquer successivement l'analyse et la synthèse à un même problème.

### Problème.

**41.** *Construire un carré, connaissant la somme* l *de la diagonale et du côté.*

1° *Analyse.* Supposons le problème résolu, et soit ABCD le carré demandé.

Menons la diagonale AC, prolongeons cette ligne, et prenons une longueur CE égale à AB; nous aurons $AE = l$.

Si l'on mène BE, on reconnaît que le triangle BCE est isocèle ; l'angle BCA, extérieur à ce triangle, étant de 45 degrés, chacun des angles B, E du triangle isocèle BCE égale la moitié de 45 degrés. Ainsi, dans le triangle ABE, on connaît la base AE ou $l$ et les angles adjacents A, E.

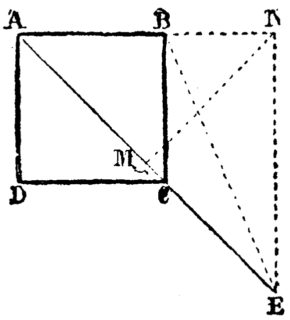


Fig. 15.

On peut donc construire le triangle, et le petit côté AB sera le côté du carré demandé.

L'ordre le plus pratique, pour ces constructions, est celui que nous allons indiquer dans la synthèse.

2° *Synthèse.* Sur le milieu d'une droite AE, égale à la longueur donnée $l$, il faut élever une perpendiculaire ; porter MA de M en N ; tracer NA et NE ; mener EB bissectrice de l'angle E, puis BC perpendiculaire à AB, et enfin AD et CD qui complètent le carré.

En effet, dans le triangle ABC, l'angle B est droit, l'angle A égale 45 degrés, et par suite, C égale aussi 45 degrés ; ainsi BC = AB.

L'angle AEN égale 45 degrés ; donc AEB = la moitié de 45 degrés.

Dans le triangle BCE, l'angle B égale l'angle extérieur C moins l'angle intérieur E,

ou $$\text{angle B} = 45^o - \frac{45^o}{2} = \frac{45^o}{2},$$

donc le triangle BCE est isocèle ; CE = CB ou AB, et la ligne AE ou $l$ égale la diagonale AC, plus la longueur du côté.

Le problème est donc résolu.

*Remarque.* Nous allons donner quelques autres exemples de résolution de problèmes, mais en nous bornant à les traiter par l'analyse.

**Problème.**

**42.** *Diviser un arc de cercle en deux parties, de manière que les cordes des arcs ainsi déterminés soient entre elles dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

Soit ACB l'arc donné. Supposons le problème résolu et admettons qu'on ait :

$$\frac{AD}{BD} = \frac{m}{n}.$$

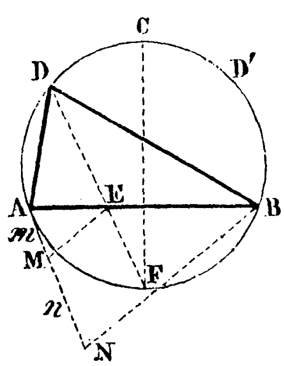


Fig. 16.

Pour être conduit à la solution, il suffit d'employer le théorème de la bissectrice (G., n° 215), car on sait que la base est divisée en segments proportionnels aux côtés.

On a donc : $\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD} = \frac{m}{n}$.

On peut dès lors déterminer le point E ; car la bissectrice de l'angle D doit passer par le point milieu de l'arc AFB. On est donc conduit à la construction suivante.

*Construction.* Sur une droite quelconque menée par le point A, il faut prendre $AM = m$, $MN = n$; joindre B au point N; par M mener à NB la parallèle ME et joindre le milieu F de l'arc au point E; la droite FED détermine le point D.

*Remarque.* Le point D', symétrique de D par rapport au diamètre CF, correspond à
$$\frac{BD'}{AD'} = \frac{m}{n}.$$

**Problème.**

**43.** *Construire un triangle, connaissant deux côtés et la bissectrice de l'angle compris entre ces deux côtés.*

Soient ABC le triangle demandé, les côtés BC, BA respectivement égaux aux longueurs données $a$, $c$, et la bissectrice BD, égale à une autre longueur connue $b$.

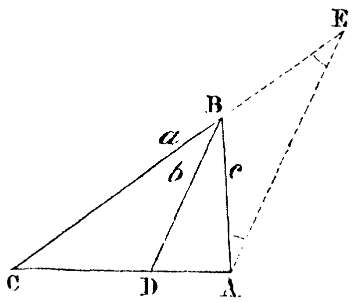


Fig. 17.

En menant une parallèle AE à la bissectrice, on forme un triangle isocèle ABE (G., n° 215), dont on peut déterminer la base.

En effet, les triangles semblables CAE, CDB donnent la relation
$$\frac{AE}{b} = \frac{CE}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{AE}{b} = \frac{a+c}{a}, \quad \text{car } BE = c;$$
d'où
$$AE = \frac{b(a+c)}{a}.$$

Ainsi, après avoir déterminé, par une quatrième proportionnelle, la longueur de AE, il faudra construire un triangle isocèle ABE, ayant AE pour base et $c$ pour longueur des côtés égaux.

Par le sommet B du triangle isocèle, mener une parallèle à la base; prendre $BD = b$ et mener les droites EB, AD jusqu'à leur point de concours.

**Problème.**

**44.** *Étant donné un triangle* ABC, *ayant trois côtés inégaux, on demande de mener des droites* OM, ON *par un point quelconque de la base, de manière que ces droites* OM, ON, *limitées aux deux côtés, aient pour somme une longueur donnée* l, *et que, pour tout autre point de la base, les parallèles menées aux droites* OM, ON *aient constamment pour somme* l.

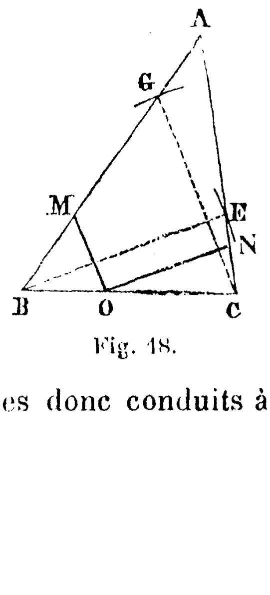


Fig. 18.

Admettons que la question proposée puisse être résolue, et soit $OM + ON = l$.

Puisque la somme doit être constante pour un point quelconque de la base, il faut que BE, parallèle à ON, égale $l$; car, pour le point B, la parallèle menée à OM est nulle. De même CG, menée parallèlement à OM, doit égaler $l$. Nous sommes donc conduits à la construction suivante :

Du point B, avec $l$ pour rayon, décrire un arc qui coupe AC en E avec le même rayon; de C comme centre, déterminer G sur AB; puis, par un point quelconque O de la base, mener des parallèles aux droites BE, CG.

Il suffit de prouver que $OM + ON = l$.

En effet, les triangles semblables OCN, BCE donnent :

$$\frac{ON}{l} = \frac{OC}{BC}; \quad \text{d'où} \quad ON = l \cdot \frac{OC}{BC}.$$

Les triangles semblables OBM, CBG donnent de même :

$$OM = l \cdot \frac{OB}{BC}.$$

Par suite, $$OM + ON = l \cdot \frac{OB + OC}{BC} = l.$$

**45.** *Remarque.* Dans les problèmes précédents, le rappel d'un seul théorème a conduit à la solution; mais il n'en est pas ainsi pour la plupart des questions; on peut procéder alors comme il suit :

*On cherche à ramener le problème proposé à un problème plus simple, puis ce second à un troisième encore plus facile à résoudre, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on parvienne à une question connue, ou du moins à un problème qui puisse être résolu immédiatement.*

Voici quelques exemples :

### Problème.

**46.** *Décrire une circonférence tangente à trois circonférences données* A, B, C.

Soient $a$, $b$, $c$ les rayons respectifs de ces circonférences, et D le centre de la circonférence demandée.

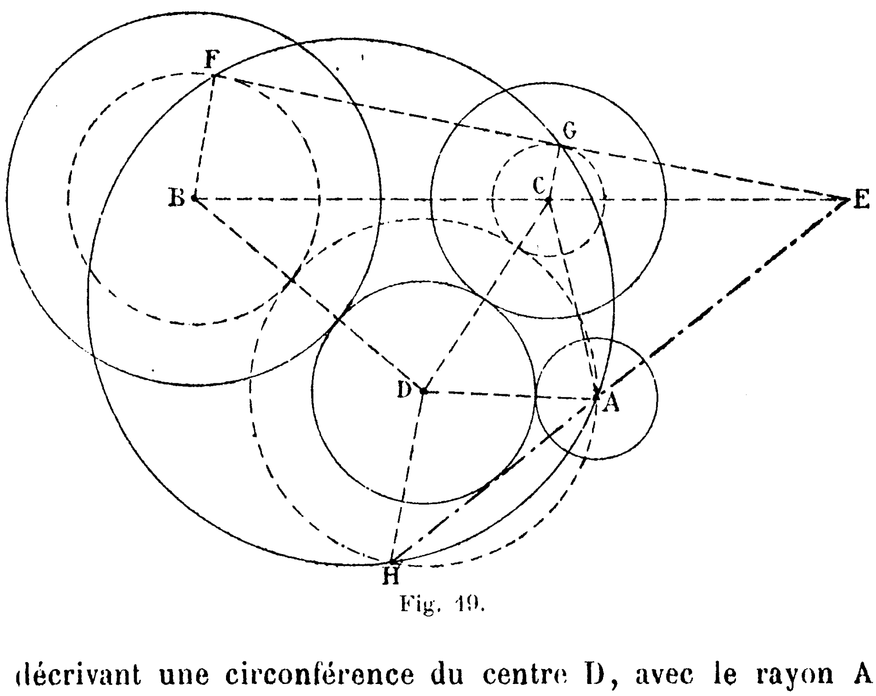



Fig. 19.

En décrivant une circonférence du centre D, avec le rayon AD, on reconnaît qu'elle sera tangente à la circonférence décrite du centre B avec le rayon $b - a$, et à celle que l'on décrirait du centre C avec le rayon $c - a$; donc le problème est ramené au suivant :

**Problème.**

**47.** *Décrire une circonférence qui passe par un point* A *et qui soit tangente à deux circonférences données* BF *et* CG (fig. 19).

En supposant le problème résolu, menant la tangente commune EGF et joignant le centre de similitude E au point A, on sait que l'on a :

$$EA \cdot EH = EF \cdot EG; \qquad (G., n^o\ 819)$$

donc, pour déterminer le point H, il suffit de faire passer une circonférence par les points A, F, G ; puis le cercle demandé devant passer par deux points connus A, H, la question est ramenée à la suivante :

**Problème.**

**48.** *Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés* A, H, *et qui soit tangente à une circonférence donnée.*

Ce troisième problème se ramène à ce quatrième : *faire passer une circonférence par trois points donnés.*

**49.** *Remarque.* La marche indiquée est complètement analytique; mais, comme les questions successives ne sont pas réciproques les unes des autres, il faut étudier chacune d'elles avec soin, afin de ne pas omettre certaines solutions. Ainsi le quatrième problème, *faire passer une circonférence par trois points,* n'a qu'une solution ; le troisième, *faire passer une circonférence par deux points et tangente à une autre circonférence*, en a deux ; le deuxième, *faire passer une circonférence par un point et tangente à deux autres circonférences,* en a quatre, et le premier, *décrire une circonférence tangente à trois autres circonférences,* a huit solutions.

La méthode synthétique expose en premier lieu le problème le plus simple. Dans l'exemple cité, c'est le quatrième ; puis viendront successivement le troisième, le deuxième et le premier.

**49 a. Note.** La première solution géométrique du problème : *construire un cercle qui en touche trois autres,* est due à VIÈTE; elle se trouve dans son *Apollonius Gallus :* c'est la solution même que nous donnons; mais ce savant procède du simple au composé, il traite des cas particuliers et termine par le problème général, tandis que dans le mode d'exposition ci-dessus, on procède à l'inverse, afin d'amener la question proposée à un problème de plus en plus simple : telle a été probablement la marche que Viète lui-même a suivie pour trouver la solution remarquable que nous lui devons (voir ci-après la note du nº 1463).

Le bel exemple de *simplifications successives* que nous venons de donner se trouve dans les *Problèmes de géométrie* de RITT.

* FRANÇOIS VIÈTE, né en 1540 à Fontenay-le-Comte (Vendée), devint maître des requêtes, mais cultiva les mathématiques avec beaucoup d'ardeur et de succès. Il est le premier qui ait construit géométriquement les formules algébriques. Il mourut à Paris en 1603.

* GEORGES RITT, né à Toulon en 1800, mort à Paris en 1864, ancien élève de l'École normale supérieure, inspecteur général de l'instruction publique dès

1846, est surtout connu par son *Arithmétique élémentaire* et par les *recueils de problèmes* relatifs à l'Algèbre, aux éléments de géométrie et à la Géométrie analytique.

Ces divers ouvrages sont remarquables par le choix des problèmes, le mode d'exposition et les aperçus nouveaux qu'ils contiennent. C'est dans ses *Problèmes de Géométrie* que nous avons pris l'idée de faire précéder les *Exercices de Géométrie* d'une véritable *Méthodologie appliquée aux théorèmes et problèmes.*

### Problème.

**50.** *Dans une ellipse, quelle est la distance* OL *du centre à une corde* MN *parallèle à* AA', *et dont la longueur est la moitié du grand axe?* (Baccalauréat ès sciences, Toulouse.)

1° Considérons le cercle principal de l'ellipse. (G., n° 626.) La corde correspondante $mn$ égale $a$, rayon de ce cercle; en joignant les extrémités au centre, on forme un triangle équilatéral $nOm$. La hauteur de ce triangle égale $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. (G., n° 316.) Or cette distance est réduite pour la corde de l'ellipse, dans le rapport $\frac{b}{a}$ (G., n° 636); donc la distance du centre à la corde de l'ellipse égale :

$$\frac{b}{a} \times \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{b}{2}\sqrt{3}.$$

2° On peut arriver plus rapidement à ce résultat. Par rapport au cercle décrit sur le petit axe, la demi-corde $\frac{a}{2}$ est l'abscisse DE d'un point D; pour le petit cercle, la demi-corde correspondante $dE = \frac{b}{2}$. (G., n° 635.) Mais $dc = b$ est la base d'un triangle équilatéral;, donc $OE = \frac{b}{2}\sqrt{3}$.

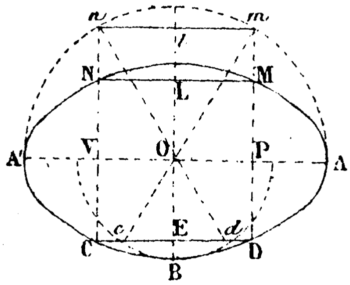


Fig. 20.

3° Le moyen général pour traiter ces questions, c'est d'employer l'équation de la courbe $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. (G., n° 645.)

Remplaçons $x$ par ML ou $\frac{a}{2}$, d'où $x^2 = \frac{a^2}{4}$; l'équation devient successivement :

$$a^2y^2 + \frac{b^2a^2}{4} = a^2b^2;$$

$$y^2 + \frac{b^2}{4} = b^2; \quad y^2 = \frac{3b^2}{4}; \quad \text{d'où} \quad y = \frac{b}{2}\sqrt{3}.$$

### Problème de Castillon.

**51.** *On donne trois points* A, B, C, *et une circonférence; inscrire dans cette circonférence un triangle* DEF, *tel que chaque côté passe par un des points donnés.*

Soit le problème résolu et DEF le triangle demandé. Il suffit qu'un seul sommet soit déterminé. Pour établir aisément certaines relations entre les données et les inconnues, menons FG parallèle à BC et menons GEH.

Les angles inscrits D, G sont égaux, donc l'angle $EHB = D$; les triangles BHE, BDC sont semblables, car ils ont un angle B commun et un angle H égal à D; on a par conséquent :

$$\frac{BH}{BD} = \frac{BE}{BC}; \text{ d'où } BH = \frac{BD \cdot BE}{BC}.$$

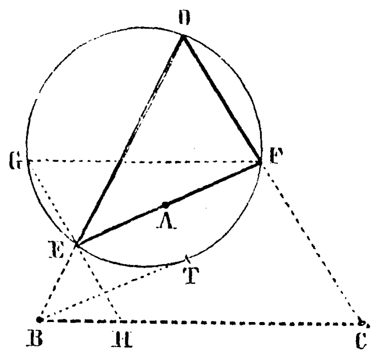


Fig. 21.

Les longueurs BE et BD ne sont point connues, mais leur produit égale le carré de la tangente BT;

d'où $$BH = \frac{BT^2}{BC}.$$

Ainsi le point H peut être déterminé, et le problème proposé serait résolu, si l'on savait déterminer un point E, tel qu'en le joignant aux points A et H, la corde GF fût parallèle à BC. On est donc conduit à résoudre le problème suivant (nº 52).

**51 a. Note.** Ce problème, proposé par CRAMER, a été résolu en 1776 par CASTILLON, géomètre italien (1708-1791). Le problème avait été résolu par PAPPUS dans le cas particulier où les trois points A, B, C, sont en ligne droite. (*Nouvelles Annales mathématiques,* année 1844, p. 464.)

* CRAMER, né à Genève en 1704, mort à Bagnols-sur-Cèze en 1752. On lui doit l'*Introduction à l'analyse des courbes algébriques*, et les formules d'élimination qui portent son nom.

* PAPPUS vivait à Alexandrie vers la fin du IVᵉ siècle de l'ère chrétienne. Ses *collections mathématiques* contiennent les principales découvertes faites jusqu'alors en géométrie, et les recherches personnelles de l'auteur. On y trouve même une question analogue au* *théorème de Guldin,* et le théorème fondamental relatif au *rapport anharmonique.*

### Problème.

**52.** *On donne deux points* A, H, *une circonférence et une droite* BC. *Déterminer sur cette circonférence un point* E, *tel qu'en le joignant aux deux points donnés* A, H, *la corde* FG *soit parallèle à la droite* BC.

Soit le problème résolu et FG parallèle à BC.

Par analogie à la question précédente, menons FL parallèle à AH, puis la ligne LGM, et déterminons la position du point M.

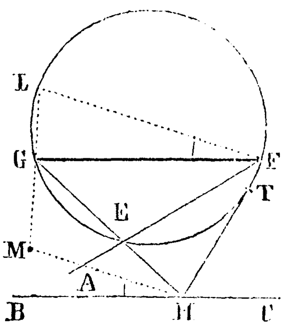


Fig. 22.

Les triangles MGH, EAH sont semblables. En effet, l'angle H est commun et l'angle M égale l'angle E, car ces deux angles ont pour supplément le même angle L.

On a donc : $$\frac{HM}{HE} = \frac{HG}{HA},$$

d'où $$HM = \frac{HE \cdot HG}{AH} = \frac{HT^2}{AH}.$$

Ainsi le point M est connu de position; d'ailleurs, l'angle $LFG = AHB$ angle donné; donc il suffit de mener par le point M une sécante MGL telle que l'angle inscrit correspondant LFG soit égal à l'angle formé par les droites données AH et BC.

La résolution complète du *problème de Castillon* n'exige plus que la résolution de l'exercice très simple que voici :

**Problème.**

53. *Par un point donné* M, *mener une sécante telle que l'angle inscrit* LFG, *qui correspond à la corde interceptée* GL, *soit égale à un angle donné* AHB.

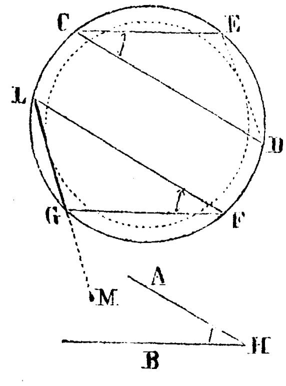


Fig. 23.

Tous les angles inscrits égaux correspondent à des arcs égaux, et par suite à des cordes égales. Il suffit donc de faire un angle inscrit C égal à H, de mener une circonférence concentrique à la première et tangente à la corde DE, puis par le point M de mener à cette deuxième circonférence une tangente MGL. Tout angle inscrit tel que F égalera H.

**Résumé.**

54. La *synthèse* permet à celui qui sait, d'exposer ce qu'il connaît; il est d'usage de l'employer, dans les éléments de géométrie, à la démonstration des théorèmes; mais la synthèse ne peut guère être utilisée dans la résolution des problèmes, car rien n'indique, *à priori,* les constructions à effectuer.

L'*analyse* est, par excellence, la méthode pour découvrir; par suite, on en fait constamment usage dans la solution des questions que l'on n'a pas encore étudiées.

**Méthodes particulières.**

55. Pour faciliter la démonstration des théorèmes et la résolution des problèmes graphiques, il est à propos d'indiquer plusieurs méthodes particulières qui se rapportent en réalité à l'analyse.

La classification des *méthodes particulières* n'a rien d'absolu, car un grand nombre d'exercices pourraient être rapportés à plusieurs de ces méthodes. Souvent aussi la démonstration ou la résolution d'une question proposée peut exiger l'emploi simultané de plusieurs des procédés spéciaux qui vont être indiqués. On ne doit jamais perdre de vue l'observation suivante :

*Il faut, dans chaque cas, employer la méthode qui mène promptement et le plus facilement au but, mais toujours en conservant l'inexorable rigueur logique qui est l'âme de la science.* (TERQUEM, *Nouvelles Annales mathématiques,* 1852, p. 447.)

**55 a. Note.** Le journal connu sous le nom de *Nouvelles Annales mathématiques* a été fondé en 1842, par MM. TERQUEM et GERONO.

M. TERQUEM, mort en 1862, a été successivement remplacé par MM. E. PROUHET, J. BOURGET, CH. BRISSE. L'honorable et savant M. GERONO a continué jusqu'en 1887; à cette époque, il se fit remplacer par M. E. ROUCHÉ.

Plus tard, en 1896, les *Nouvelles Annales* furent rédigées par MM. LAISANT et ANTOMARI. Ce dernier fut remplacé par DUPORCQ; celui-ci, à son tour, décédé en 1903, après une courte carrière, a eu pour successeurs MM. BOURLET et BRICARD.

Nous aurons à citer fréquemment les *Nouvelles Annales*, car cet ouvrage nous a fourni de nombreuses et intéressantes questions et d'utiles renseignements bibliographiques. Les renvois seront indiqués par N. A., année ..., page ...

* TERQUEM, né à Metz en 1782, mort à Paris en 1862, fut admis à l'École Polytechnique en 1801; il occupa la chaire de mathématiques transcendantes, au lycée de Mayence, de 1804 à 1814. A partir de cette époque, il fut bibliothécaire au dépôt d'artillerie à Paris, publia divers ouvrages, et collabora assidûment au journal de M. GERONO.

* GERONO, né à Paris le 30 décembre 1799, décédé en 1892, après avoir dirigé les *Nouvelles Annales* pendant plus de 45 ans et publié divers ouvrages, notamment des Traités de Géométrie analytique et de Géométrie descriptive (voir la *Notice* publiée par M. ROUCHÉ, *Nouvelles Annales*, 1892, p. 538).

* E. PROUHET, décédé en 1867, répétiteur à l'École Polytechnique.

* J. BOURGET, décédé en 1887, recteur à Clermont-Ferrand, après avoir été recteur à Aix, directeur des études à Sainte-Barbe, et antérieurement professeur à la Faculté des sciences de Clermont-Ferrand.

* CH. BRISSE, professeur à l'École Centrale, répétiteur à l'École Polytechnique.

* E. ROUCHÉ, mort le 19 août 1910, à Lunel, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, auteur des *Appendices* si estimés, du *Traité de Géométrie* qui porte son nom et celui de M. DE COMBEROUSSE.

* C.-A. LAISANT, répétiteur à l'École Polytechnique, directeur de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*.

* X. ANTOMARI (1860-1902), professeur de mathématiques spéciales au lycée Carnot.

* E. DUPORCQ (1873-1903), ingénieur des télégraphes.

* C. BOURLET, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

* R. BRICARD, répétiteur à l'École Polytechnique.

# II

## LIEUX GÉOMÉTRIQUES

### § I. — Recherche des lieux géométriques.

**56.** *Définition.* On appelle *lieu géométrique* l'ensemble des points qui jouissent d'une même propriété.

Les *Éléments de géométrie* indiquent un assez grand nombre de lieux géométriques ; ainsi :

*La perpendiculaire élevée au milieu d'une droite est le lieu des points équidistants des extrémités de cette droite.* (G., n° 42.)

*La bissectrice d'un angle est le lieu des points équidistants des deux côtés de cet angle.* (G., n° 66.)

On connaît aussi le lieu des points distants d'une longueur donnée d'une droite ou d'une circonférence. (G., n$^{os}$ 84, 115, 2°.)

Le lieu des points distants d'une longueur donnée d'un plan ou d'une sphère, est un plan parallèle au premier ou une sphère concentrique à la sphère proposée.

**57.** *Détermination du lieu.* Pour reconnaître la nature du lieu des points qui jouissent d'une propriété donnée, et pour reconnaître la position de ce lieu par rapport aux grandeurs connues, on considère quelques points spéciaux du lieu et l'on cherche quelle est la ligne qui peut passer par les points ainsi trouvés, puis on suit un des deux modes ci-après.

*Premier mode.* 1° On démontre que tous les points de la ligne jouissent de la propriété énoncée.

2° On prouve que tout point pris hors de la ligne considérée n'a pas la propriété demandée.

*Second mode.* 1° On démontre qu'un point quelconque, jouissant de la propriété voulue, se trouve sur la ligne.

2° On prouve que toute la ligne appartient au lieu, ou on reconnaît quelle est la partie de cette ligne qui appartient réellement à ce lieu.

*Remarque.* 1° A cause de l'importance de la détermination des lieux géométriques et des difficultés que présente l'application des considérations générales ci-dessus, nous allons traiter quelques exemples avec tous les détails nécessaires.

2° La doctrine des *lieux géométriques*, de même que l'*analyse*, est attribuée à Platon. (*Aperçu historique,* page 5.)

**Problème.**

58. *Par chaque point d'une circonférence, on mène des droites parallèles sur lesquelles on prend une longueur constante* l; *quel est le lieu des points ainsi obtenus?*

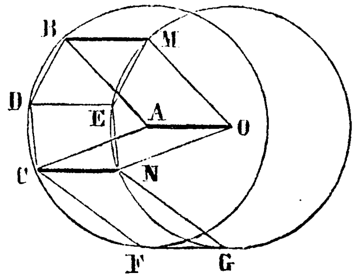


Fig. 24.

Soit CN égale et parallèle à BM.

Par le centre A menons une parallèle AO égale à $l$.

La figure ABMO est un parallélogramme comme ayant deux côtés opposés égaux et parallèles; donc

$$OM = AB = r.$$

De même $\quad ON = AC = r.$

Le lieu est donc une circonférence égale à la première.

59. *Remarques*. 1° En appliquant les conditions de l'énoncé ci-dessus à une figure quelconque, on obtiendrait aussi une figure égale.

La démonstration générale est la suivante.

Les droites BD et ME sont égales et parallèles, car BM et DE sont égales et parallèles, et de même DC et EN sont égales et parallèles, et les angles BDC, MEN sont égaux comme ayant les côtés parallèles et de même sens.

Ainsi les figures BDCF, MENG sont égales comme ayant les côtés respectivement égaux et les angles égaux.

Les figures courbes sont égales comme limites de polygones égaux.

2° Dans les applications, on peut considérer la figure MENG comme ayant été obtenue par le déplacement de la figure BDCF, dont tous les sommets ont glissé sur des parallèles. Ainsi on peut dire que la figure MENG a été obtenue à l'aide de BDCF, en employant un *déplacement* ou une *translation*, tous les points glissant sur des droites parallèles.

**Problème.**

X 60. *Quel est le lieu des points dont le rapport des distances à deux droites égale un rapport donné* $\frac{m}{n}$?

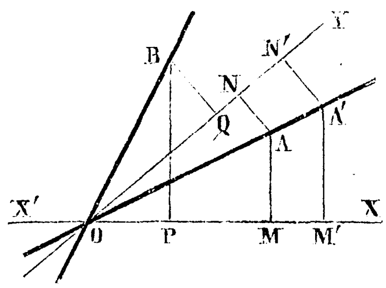


Fig. 25.

Soient OX, OY les droites données.

Le point O appartient au lieu; soit A un point tel qu'on ait :

$$\frac{AM}{AN} = \frac{m}{n}.$$

*La droite* AO *est le lieu demandé*, car pour tout autre point A', on aura :

$$\frac{A'M'}{A'N'} = \frac{AM}{AN} = \frac{m}{n}.$$

*La droite* OB *appartient aussi au lieu*, car on peut avoir :

$$\frac{BP}{BQ} = \frac{m}{n}.$$

**Problème.**

**61.** *Quel est le lieu géométrique des points dont les distances à deux points donnés* A *et* B *sont dans un rapport constant* $\frac{m}{n}$ ?

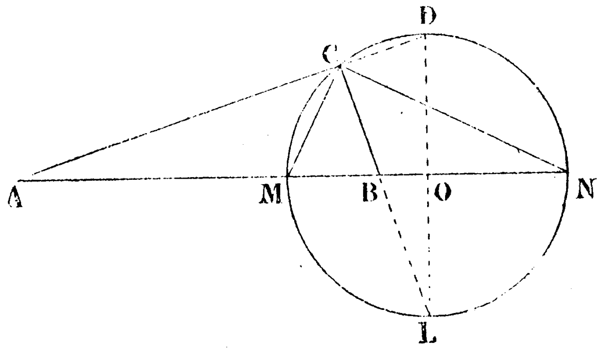



Fig. 26.

Sur la droite AB et sur son prolongement, déterminons les points M et N tels qu'on ait :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}.$$

(G., n° 307.)

Ces deux points M et N appartiennent au lieu demandé.

Pour un autre point quelconque C du lieu, on a par hypothèse :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n};$$

donc
$$\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}.$$

Mais la bissectrice de l'angle ACB et celle de l'angle supplémentaire BCD donneraient, sur la base, deux points dont le rapport des distances aux points A et B égalerait $\frac{CA}{CB}$ ou $\frac{m}{n}$; donc les droites CM et CN sont elles-mêmes les bissectrices cherchées.

Les bissectrices de deux angles supplémentaires sont perpendiculaires l'une à l'autre; donc l'angle MCN est droit, et le point C appartient à la circonférence décrite sur le diamètre MN.

On prouve ensuite que tout point de la circonférence appartient au lieu. (G., n° 307, 2°.)

**62. Note.** 1° En tenant compte des signes, on écrit :

$$\frac{MA}{MB} = -\frac{m}{n} \text{ et } \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}; \text{ d'où } \frac{NA}{NB} = -\frac{MA}{MB}.$$

Les quatre points A, B, M, N, forment une division harmonique. Dans la *Géométrie récente du triangle* (n°s 2262 et suivants), on écrit de préférence :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n} \text{ et } \frac{AN}{NB} = -\frac{m}{n},$$

afin que le rapport qui correspond au point compris entre M et N soit positif.

2° Le lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite est constant est une conique.

On obtient une ellipse pour $\frac{m}{n} < 1$. (G., n° 846.)

— une parabole pour $\frac{m}{n} = 1$. (G., n° 848.)

— une hyperbole pour $\frac{m}{n} > 1$. (G., n° 850.)

**Problème.**

**63.** *On joint les divers points* M *d'une droite à un point donné* O, *et l'on prend sur chaque ligne ainsi menée une distance* ON, *telle que* $\frac{OM}{ON} = \frac{m}{n}$. *Quel est le lieu des points* N?

Soient N et N′ deux points du lieu.

Les triangles MOM′, NON′ sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés homologues proportionnels, car

$$\frac{OM}{ON} = \frac{m}{n} = \frac{OM'}{ON'},$$

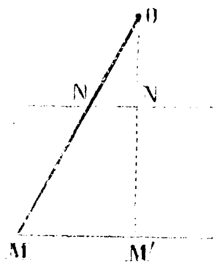


Fig. 27.

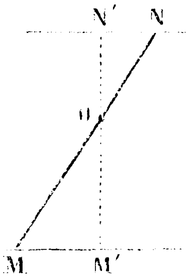


Fig. 28.

donc les droites MM′ et NN′ sont parallèles.

**64.** *Remarque.* Le point O (fig. 27) est le centre de similitude directe. Le point O (fig. 28) est le centre de similitude inverse. (G., n<sup></sup>os 305 et 813.)

**Problème.**

**65.** *On joint les divers points* M *d'une circonférence à un point donné* O, *et l'on prend sur chaque ligne ainsi menée une distance* ON, *telle que* $\frac{OM}{ON}$ *égale un rapport donné* $\frac{m}{n}$. *Quel est le lieu des points* N?

Soit N un point quelconque du lieu.

Sur la ligne AO prenons une longueur OB, telle qu'on ait :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{m}{n} = \text{donc } \frac{OM}{ON}.$$

Les triangles AOM, BON sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc

$$\frac{AM}{BN} = \frac{OM}{ON}; \quad \frac{AM}{BN} = \frac{m}{n};$$

d'où $\quad BN = AM \cdot \frac{n}{m}$ quantité constante.

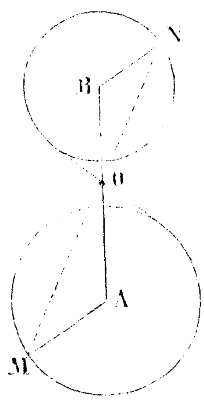


Fig. 29.

Donc le lieu des points N est une circonférence décrite du point B comme centre avec $AM \cdot \frac{n}{m}$ pour rayon.

**66.** *Remarques.* 1° Quand le point O est entre M et N, la similitude est inverse; elle est directe dans le cas contraire.

2° Le théorème s'applique à une figure quelconque; le lieu des points N est une figure semblable à la première.

**Problème.**

**67**. *Par un point donné* O, *l'on mène une droite quelconque; elle rencontre une droite donnée* AB *en un point* N, *et l'on prend sur la sécante une longueur* OM *telle que le produit* OM . ON *ait une valeur constante* $k^2$. *Quel est le lieu du point* M?

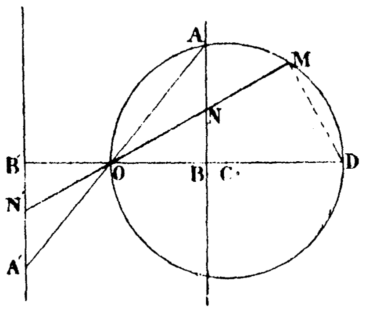


Fig. 30.

Le lieu est évidemment symétrique par rapport à la perpendiculaire OB, abaissée du point O sur la droite donnée; déterminons donc le point D tel que l'on ait :

$$OB \,.\, OD = k^2.$$

Soit M un point quelconque du lieu; on aura : $OM \,.\, ON = k^2$.

Les produits égaux OB . OD et OM . ON donnent : $\dfrac{OM}{OB} = \dfrac{OD}{ON}$.

Donc les triangles OBN, OMD sont semblables, car ils ont un angle égal compris entre côtés homologues proportionnels; donc l'angle M est droit, car il égale B. Ainsi tout point M du lieu appartient à la circonférence décrite sur le diamètre OD.

**68**. *Remarques*. 1° Il serait facile de prouver que tous les points de la circonférence appartiennent au lieu.

2° En donnant un point O sur une circonférence ayant OD pour diamètre, et déterminant ON' par la relation

$$OM \,.\, ON' = k^2,$$

le lieu des points N' est la perpendiculaire N'B', menée au diamètre par un point B', tel qu'on ait :

$$OB' \,.\, OD = k^2. \qquad \text{(G., n° 825.)}$$

3° Lorsque le point O n'est pas sur la circonférence des points M, le lieu des points N', tels que $OM \,.\, ON' = k^2$, est une seconde circonférence; les deux courbes ont le point O pour centre de similitude. (G., n° 828.)

**Problème.**

X **69**. *Quel est le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points donnés égale un carré donné* $k^2$?

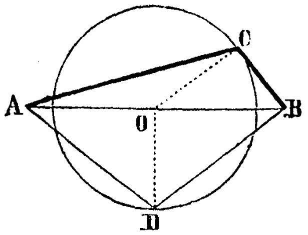


Fig. 31.

Soient A, B les points donnés, C un point du lieu tel que l'on ait :

$$AC^2 + BC^2 = k^2.$$

Puisqu'on a la somme des carrés de deux côtés du triangle ABC, on est conduit à appliquer le théorème du carré de la médiane. (G., n° 254.) Joignons donc le point C au point milieu O de la base; on aura :

$$AC^2 + BC^2 = 2AO^2 + 2OC^2;$$

donc $\quad 2AO^2 + 2CO^2 = k^2;\;$ d'où $\;CO^2 = \dfrac{k^2 - 2AO^2}{2}$.

Ainsi CO est une longueur constante.

Le lieu est donc la circonférence décrite du point milieu O comme centre, avec OC pour rayon.

**70.** *Remarques.* 1° Toute la circonférence appartient au lieu.

2° Pour déterminer le rayon, on peut élever une perpendiculaire au point O sur AB (fig. 31), et du point A comme centre, avec un rayon égal au côté du carré équivalent à la moitié de $k^2$, couper la perpendiculaire au point D.

3° Il faut que $k^2$ égale au moins $2AO^2$ ou $\frac{AB^2}{2}$.

**Problème.**

**71.** *Quel est le lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux points donnés égale un carré donné* $k^2$?

Soit : $AC^2 - BC^2 = k^2$.

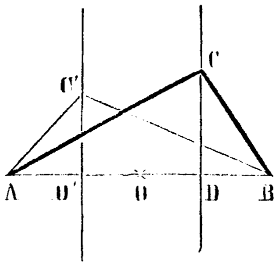


Fig. 32.

Puisqu'il s'agit de la différence des carrés des deux côtés d'un triangle, on est conduit à étudier les projections de ces côtés sur AB. (G., n° 255, 2°.) Abaissons donc la perpendiculaire CD ; on a :

$$AC^2 = AD^2 + CD^2; \quad BC^2 = BD^2 + CD^2;$$

d'où $$AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2.$$

Ainsi, quel que soit le point du lieu, la différence $AD^2 - BD^2$ ne varie point, elle égale $k^2$ ; donc le point D est déterminé, et la perpendiculaire CD appartient au lieu demandé.

Le lieu complet comprend encore la perpendiculaire C'D' telle que

$$BC'^2 - AC'^2 = k^2.$$

*Remarques.* 1° Les deux perpendiculaires sont équidistantes du milieu O.

2° La différence peut varier de zéro à $+\infty$.

Lorsqu'elle est nulle, les deux droites DC, D'C' se réduisent à une seule perpendiculaire au milieu de AB au point O.

**Problème.**

**72.** *Quel est le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux droites rectangulaires est égale à un carré donné* $a^2$?

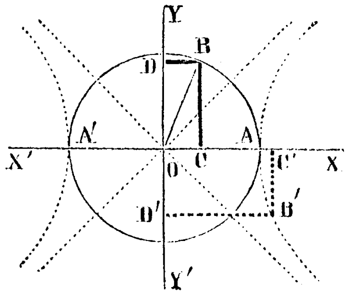


Fig. 33.

Soit : $BC^2 + BD^2 = a^2$.

On a : $BC^2 + OC^2 = OB^2 = a^2$.

OB étant une longueur constante, le lieu du point B est la circonférence décrite du centre O avec $a$ pour rayon.

**73.** *Remarques.* 1° Pour la différence des carrés ou $B'D'^2 - B'C'^2 = a^2$, le lieu est une hyperbole équilatère ayant $AA' = 2a$ pour axe transverse. (G., n° 676.)

2° Lorsque les axes ne sont pas rectangulaires, le premier lieu est une ellipse et le second une hyberbole à axes inégaux.

3° Le lieu des points dont la somme ou la différence des carrés des distances à un point et à une droite est constante, est aussi une conique.

### Problème.

**74.** *Quel est le lieu des points dont la somme des distances à deux droites concourantes égale une longueur donnée* l?

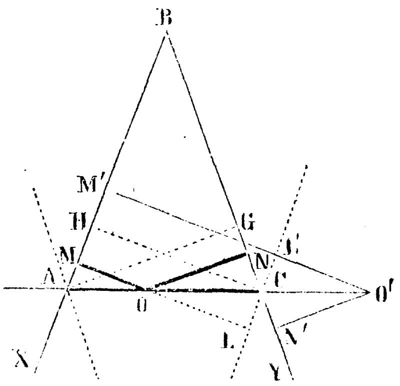



Fig. 34.

Soient deux droites concourantes BX, BY.

Sur chacune de ces droites il y a un des points du lieu; pour BY c'est un point C tel que la hauteur $CH = l$, car la distance du même point C à la droite BY est nulle.

Pour déterminer C, on prend une perpendiculaire M'L' égale à la longueur donnée $l$, et l'on mène une parallèle L'L.

On détermine de même un point A tel que $AG = l$.

Il suffit d'ailleurs de prendre $BA = BC$, car le triangle ABC est isocèle comme ayant deux hauteurs égales.

1° On est donc conduit à regarder hypothétiquement la droite AC comme étant le lieu demandé.

En effet, pour tout autre point O de la base on a (n° 20) :

$$OM + ON = ML = l.$$

2° Il reste à examiner si tous les points de la ligne déterminée par les points A et C appartiennent au lieu.

Or, pour tout point O' pris sur le prolongement de la base AC du triangle isocèle, on a : $O'M' - O'N' = M'L' = l.$

Ainsi l'on doit regarder une des perpendiculaires comme étant négative ou modifier l'énoncé, car les points situés sur le prolongement de la base appartiennent au lieu des points dont la différence des distances aux droites données égale $l$.

*Extension.* Mais les droites BX, BY sont illimitées; il y a donc lieu de considérer les quatre angles que ces droites forment en se coupant (fig. 35). On trouve ainsi la solution complète qui suit.

**75. Théorème.** *Le lieu des points dont la somme des distances à deux droites concourantes est égale à* l, *est formé par le périmètre d'un rectangle* ACDE; *et le lieu des points dont la différence des distances est égale à* l, *est formé par les prolongements des quatre côtés de ce rectangle.*

**Figures complémentaires.** On nomme *figures complémentaires* les figures qui répondent aux mêmes données et à la même question, mais avec un changement de signe dans la relation : elles constituent l'ensemble complet d'un lieu géométrique. Ainsi le rectangle ACDE, qui correspond à une somme (n° 75), et les prolongements des côtés de ce même rectangle, qui correspondent à une différence, sont des figures complémentaires. Il en est de même du cercle et de l'hyperbole (n° 72).

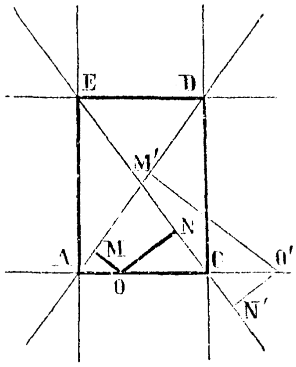


Fig. 35.

*Remarque.* Le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux points donnés égale une longueur donnée $2a$, est une ellipse ou une hyperbole. (G., nos 618 et 653.)

**Note.** Le mot *complémentaire* est employé dans la Géométrie *récente du triangle*, dans un sens différent, mais ici nous prenons le terme même de PONCELET, avec le sens qu'il y attachait.

### Problème.

**76.** *Quel est le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à une droite et à un point donnés est constante?*

Soient F le point et BC la droite donnée.

Soient M, M'... des points du lieu; on a donc :

$$MF + MN = l.$$

Pour ajouter les deux droites, il suffit de prendre MP égal à MF, M'P' égal à M'F;

donc $$PN = P'N' = l.$$

Le lieu des points P est une droite parallèle à BC; et les points M, M', étant équidistants d'un point F et d'une droite DP, appartiennent à une parabole ayant F pour foyer et DP pour directrice. (G., n° 681.)

Les points de la parabole compris à droite de BC correspondent à la différence;

car $$FI = IK,$$

et $$FI - IJ = JK = l.$$

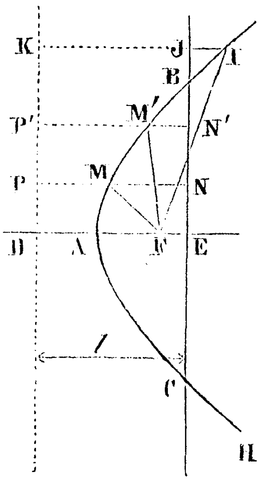


Fig. 36.

**77.** *Remarques.* 1° Lorsque $l$ est $<$ FE, tous les points de la parabole correspondent à une différence; la courbe ne coupe point la droite donnée.

2° Si l'on retranchait le rayon vecteur de la distance du point considéré à la droite donnée, la directrice se trouverait entre la droite et le point donnés.

### Problème.

**78.** *Quel est le lieu des points dont le produit des distances à deux axes rectangulaires égale un carré donné* $k^2$?

Soit : $$MP \,.\, MN = k^2.$$

Le lieu est une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes. (G., n° 678.)

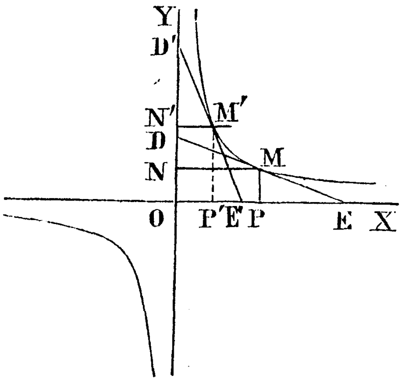


Fig. 37.

Tous les rectangles tels que ceux qui ont pour sommets les points M, M' sont équivalents entre eux.

La tangente DE, à la courbe, est divisée en deux parties égales par le point de contact (voir n° 175, ci-après); par suite, le triangle DOE, double du rectangle OPMN, est équivalent au triangle D'OE'.

79. **Note.** 1° Lorsque les droites OX, OY ne sont pas rectangulaires, le lieu des points dont le produit des distances aux deux droites est constant est une hyperbole à axes inégaux.

2° En géométrie élémentaire, il n'y a point à s'occuper du lieu des points dont le produit des distances à un point et à une droite est constant, car la courbe est du quatrième degré.

3° Le lieu des points dont le produit des distances à deux points donnés est constant est du quatrième degré; il est connu sous le nom de *courbe cassinienne* et comprend plusieurs variétés, entre autres l'*ovale de Cassini* et la *lemniscate de Bernoulli*.

Pour l'étude de ce lieu géométrique, on peut consulter divers *Traités de Géométrie analytique :* BRIOT, n° 339; SONNET et FRONTERA, n° 20; PRUVOST, n° 175, exemple II; M. G. DE LONGCHAMPS, n$^{os}$ 27-29. On peut aussi voir nos *Exercices de Géométrie descriptive,* 4$^e$ édition, n$^{os}$ 934 à 940.

* Les CASSINI ont été surtout astronomes, et ont travaillé de père en fils, pendant quatre générations, soit au tracé de la méridienne, soit à celui de la grande carte de France, commencée en 1744 et terminée en 1793.

* Les BERNOULLI, voir ci-après, n° 770, *note.*

**Problème.**

80. *Quel est le lieu des points milieux des cordes menées à une circonférence par un même point* A?

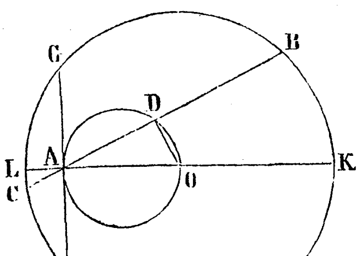


Fig. 38.

1° Le lieu doit passer par le centre O, milieu du diamètre, et par le point A, car ce point est le milieu de la corde GH, perpendiculaire au diamètre LK; d'ailleurs le lieu est symétrique par rapport à AO.

2° Pour le point milieu D d'une corde quelconque CB, on sait que la droite OD est perpendiculaire à la corde BC; donc le point D, sommet de l'angle droit ADO, appartient à la circonférence décrite sur AO, comme diamètre.

3° Lorsque le point A est intérieur (fig. 38), toute la circonférence AO appartient évidemment au lieu; mais il n'en est pas de même si le point A est extérieur (fig. 39).

Lorsqu'on se place au point de vue de la géométrie élémentaire et des constructions ultérieures qu'on pourrait avoir à effectuer, *l'arc* MDON, *limité aux tangentes* AM, AN, *appartient seul au lieu*, puisque, en dehors de ces tangentes, il n'y a pas de droite menée par le point A qui puisse rencontrer la circonférence O.

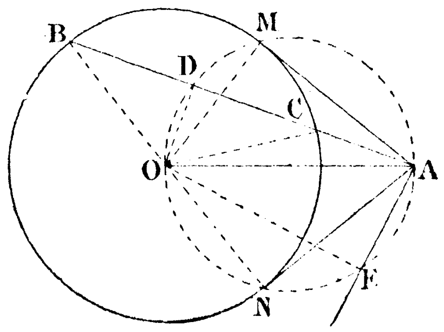


Fig. 39.

Néanmoins, afin de se rendre compte de la présence de l'arc MAN comme lieu, il suffit de remarquer que l'angle ADO est droit et de poser la question comme il suit :

*Quel est le lieu géométrique du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle dont* AO *est l'hypoténuse?*

Car, dans ce cas, le point E appartient évidemment au lieu; mais il y a une manière plus générale de se rendre compte de la présence de l'arc MAN.

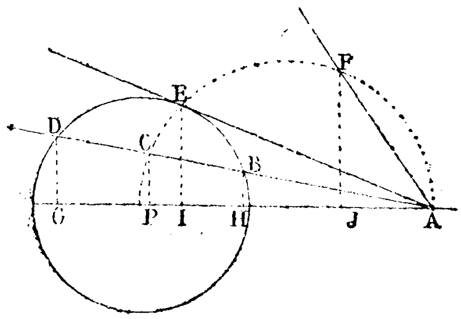


Fig. 40.

**81. Note.** L'équation du cercle rapportée à deux axes rectangulaires menés par son centre est :

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad \text{(G., n° 646.)}$$

L'équation d'une sécante quelconque menée par le point A est de la forme

$$y = ax + b.$$

$b$ est une longueur constante, $a$ un coefficient angulaire variable pour caractériser la position de la droite par rapport à AO.

En éliminant $y$, on trouve l'équation du second degré

$$x^2 + a^2x^2 + 2abx + b^2 - r^2 = 0,$$

ou

$$x^2 + \frac{2ab}{1 + a^2}x + \frac{b^2 - r^2}{1 + a^2} = 0.$$

Les deux valeurs de $x$ correspondent aux abscisses AG, AH des deux points d'intersection; la demi-somme de ces lignes est l'abscisse AP du point milieu de la corde; de même que CP est la demi-somme des ordonnées BH et DG. Or, on sait que la somme des racines égale le coefficient de $x$, pris en signe contraire; donc l'abscisse AP du point milieu est toujours réelle, même lorsque les racines sont imaginaires, c'est-à-dire lorsque la sécante ne rencontre pas la circonférence. Il en est de même de l'ordonnée; dans ce cas, on dit que les points de rencontre sont *imaginaires*. Ainsi :

*Une sécante quelconque menée par le point* A *rencontre la circonférence en deux points réels ou imaginaires, mais le point milieu de la distance des deux points d'intersection est toujours réel et appartient au lieu.*

On peut consulter les *Éléments d'algèbre*, F. I.-C., ou le *Cours d'algèbre*, F. G.-M.

### Problème.

**82.** *On donne une circonférence et un diamètre fixe* AB. *D'un point quelconque* C, *pris sur le prolongement du diamètre, on mène une tangente* CT, *puis la bissectrice de l'angle* ACT; *quel est le lieu du pied de* *la perpendiculaire abaissée du centre sur la bissectrice?* (Énoncé de BLANCHET.)

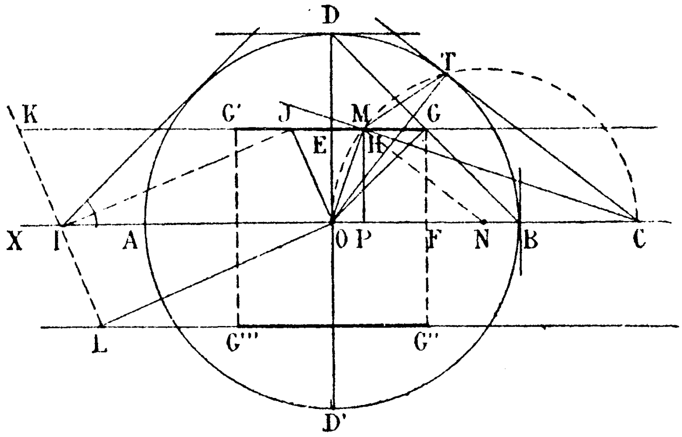



Fig. 41.

1° Étudions les positions particulières de la tangente.

Pour la tangente au point D, la bissectrice est parallèle à la tangente et au diamètre AB; elle passe par le point milieu E de OD.

La tangente au point B donne une bissectrice BD qui coupe le diamètre sous un angle de 45°. La perpendiculaire OG détermine un triangle OGB, rectangle isocèle;

donc $$GF = GE = \frac{R}{2}.$$

Les quatre points G, G′, G″, G‴ sont les sommets d'un carré ayant le point O pour centre. Le côté GG′ passe par le point E déjà déterminé.

2° Pour une tangente quelconque CT, le point M est la projection du centre sur la bissectrice CM. Prouvons que le point M appartient à la droite GEG′.

Menons le rayon NM de la circonférence OTC qui détermine le point de contact; soit H le point où ce rayon coupe la corde OT;

on a : $$OH = \frac{OT}{2} = \frac{R}{2}.$$

Or les triangles rectangles OMP, OMH sont égaux comme ayant l'hypoténuse commune et l'angle $MON = OMN$.

Donc $$MP = OH = \frac{R}{2}.$$

**83.** *Remarque.* Le lieu complet, pour le diamètre fixe AB, se compose de deux parallèles illimitées. Les segments GG′, G″G‴ correspondent à la bissectrice IJ de l'angle aigu que la tangente fait avec le diamètre, tandis que les prolongements correspondent à la bissectrice IK de l'angle obtus.

**83 a. Note.** Le problème a été proposé dans la *Géométrie de Legendre,* revue par A. BLANCHET, ancien directeur des études à Sainte-Barbe.

Les théorèmes, lieux géométriques et problèmes proposés dans cet ouvrage, ont intéressé de nombreux élèves. La solution de toutes ces questions est contenue dans un ouvrage publié en 1879.

*Applications de Blanchet,* par M. NEËL, ancien élève de l'École militaire belge.

**Problème.**

84. *Deux côtés opposés* AB *et* CD *d'un quadrilatère sont donnés : ils se coupent en un point* O. *Un des côtés* AB *est fixe, l'autre* CD *tourne autour du point* O. *Quel est le lieu du point* M *où se coupent les deux autres côtés* AC, BD, *et le lieu du point d'intersection* M′ *des diagonales* AD, BC ?

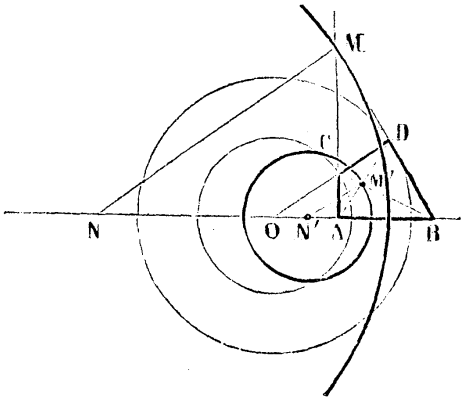


Fig. 42.

Par le point M menons MN parallèle à OCD, et cherchons la relation qui existe entre AN, NM et les longueurs données.

Soient $OA = a$ ; $OB = b$ ;
$AB = b - a = l$ ; $OC = c$ ; $OD = d$.

Les triangles semblables NBM, OBD, puis NAM, OAC donnent :

$$\frac{MN}{NB} = \frac{OD}{OB} = \frac{d}{b}; \quad MN = NB \cdot \frac{d}{b};$$

$$\frac{MN}{NA} = \frac{OC}{OA} = \frac{c}{a}; \quad MN = NA \cdot \frac{c}{a};$$

d'où
$$NA \cdot \frac{c}{a} = NB \cdot \frac{d}{b};$$

mais
$$NB = NA + l; \quad \text{donc} \quad NA \cdot \frac{c}{a} = NA \cdot \frac{d}{b} + l \cdot \frac{d}{b};$$

d'où
$$NA \cdot \frac{bc - ad}{ab} = l \cdot \frac{d}{b};$$

$$NA = l \cdot \frac{ad}{bc - ad} \quad \text{quantité constante;}$$

puis, de $MN = NA \cdot \frac{c}{a}$, on tire : $MN = l \cdot \frac{cd}{bc - ad}$ quantité constante.

Donc *le lieu du point* M *est une circonférence dont le centre* N *est sur* OAB.

*Le lieu de* M′ *est la circonférence dont* N′ *est le centre et* N′M′ *le rayon.*

L'ensemble des deux circonférences, ayant pour centres respectifs N et N′, constitue le lieu complet.

85. **Lieu composé.** Le lieu géométrique demandé peut être formé par plusieurs lignes d'espèces différentes : par exemple, d'une droite et d'un cercle, ou bien d'un cercle et d'une hyperbole. Dans ce cas, l'étude en est plus difficile, car on est exposé à omettre quelque partie du lieu.

Cette particularité s'est présentée dans un problème de concours (n° 86); mais avant de l'examiner, nous étudierons un cas très simple de la même question (n° 85 b). Traitons d'abord d'un lieu composé d'une droite et d'un cercle.

**Problème.**

**85 a.** *Du sommet* A *d'un triangle isocèle* BAC, *on décrit un cercle quelconque, de* B *et* C *on mène des tangentes au cercle variable de*

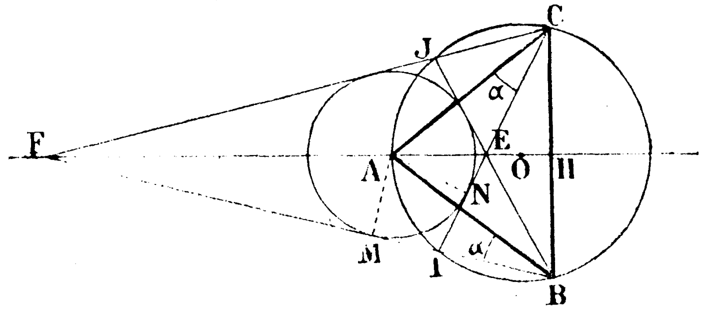



Fig. 43.

*centre* A; *quel est le lieu des points de concours des tangentes ainsi menées?*

Les tangentes se coupent en quatre points E, F, I, J.

1° Le lieu des points E, F est évidemment la droite EAF perpendiculaire à la base BC.

2° Le lieu des points I, J est le cercle circonscrit au triangle BAC. En effet, si l'on mène les rayons de contact AM, AN, on reconnaît que les triangles rectangles AMB, ANC sont égaux; donc ABM égale ACN, l'angle BIC = BAC, et le point I appartient au cercle BAC.

*Remarque.* Ainsi le lieu complet des quatre points de concours se compose de deux parties distinctes : d'une droite AH et d'un cercle ABC.

**Problème.**

**85 b.** *On donne une droite* XX' *et deux perpendiculaires* YY', ZZ' *à la première. D'un point* M *on abaisse des perpendiculaires* MP, MQ, MR *sur ces droites. Quel est le lieu du point* M *lorsque* MP *est moyenne proportionnelle entre* MQ *et* MR?

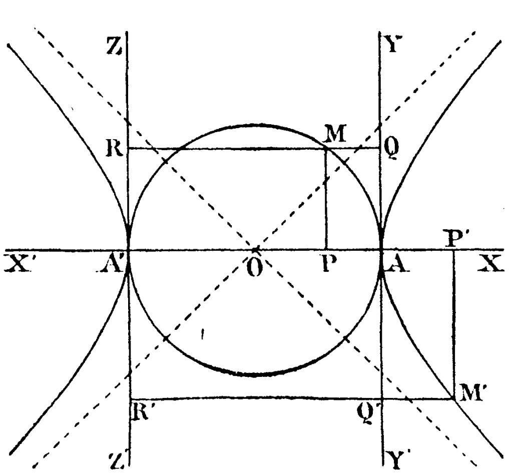



Fig. 44.

1° Soit

$$MP^2 = MQ \cdot MR.$$

On a donc :

$$MP^2 = PA \cdot PA';$$

donc le lieu du point M est la circonférence décrite sur AA' pris pour diamètre.

2° Mais on peut avoir aussi :

$$M'P'^2 = M'Q' \cdot M'R' \quad \text{ou} \quad M'P'^2 = P'A \cdot P'A'.$$

Or, si l'on représente l'ordonnée M'P' par $y$, la distance OP' par $x$ et le rayon du cercle par $a$, on a :

$$y^2 = (x - a)(x + a) = x^2 - a^2 \qquad \text{(G., n° 676 c)},$$

équation d'une hyperbole équilatère, ayant AA' pour axe transverse : ainsi le lieu complet se compose d'un cercle et d'une hyperbole équilatère facile à déterminer.

*Remarque.* La circonférence et l'hyperbole sont des courbes complémentaires, dans le sens indiqué par PONCELET (n° 75).

### Problème.

86. *Un triangle isocèle est donné; on demande le lieu des points tels que la distance de chacun d'eux à la base du triangle soit moyenne proportionnelle entre les distances du même point aux deux autres côtés.* (Concours des lycées, 1865; cours de logique, section scientifique.)

On reconnaît immédiatement que le centre O du cercle inscrit et les centres H, I, J des cercles exinscrits appartiennent au lieu demandé, car chacun d'eux est équidistant des trois côtés.

Les points A et B appartiennent aussi au lieu. En effet, la distance de chacun de ces points à la base et à l'un des côtés est nulle, ce qui suffit pour annuler le carré et le produit.

Les six points ainsi trouvés directement ne peuvent évidemment appartenir ni à une même droite, ni à une même circonférence; les meilleurs élèves ont été arrêtés par cette considération, tandis que ceux qui n'avaient songé qu'aux points A, O, B, H, ont donné pour réponse une circonférence, et telle était bien la solution demandée.

C'est aussi la seule solution qu'indique un ouvrage, d'ailleurs remarquable à bien des points de vue (Voir note ci-après, n° 86 a).

Mais le lieu complet comprend les deux parties indiquées ci-après :

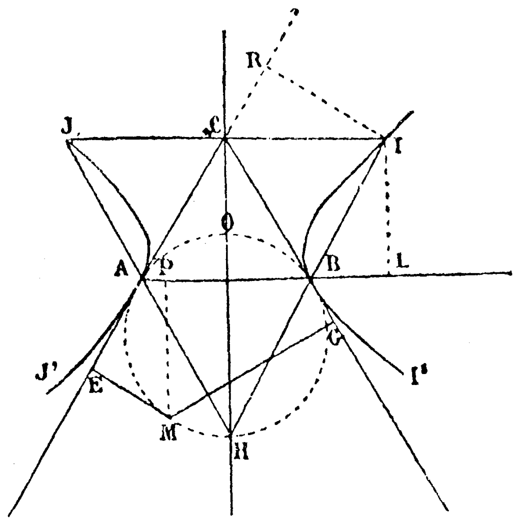



Fig. 45.

1° La circonférence tangente aux deux côtés en A et B; cette courbe passe par les centres H et O. On sait que tous les points de cette circonférence appartiennent au lieu (n° 25).

La géométrie analytique donne en outre, comme solution :

2° Une hyperbole JAJ', IBI', tangente aux côtés en A et B, et par suite tangente à la première partie du lieu. Cette seconde courbe contient les centres I et J des cercles exinscrits aux côtés égaux du triangle isocèle.

86 a. **Note.** 1° La première partie de la solution se trouve dans l'ouvrage suivant : *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire,* par CATALAN, 6e édition 1879, problème XLI, page 243.

La première édition a pour titre : *Théorèmes,* etc., par H.-CH. DE LAFRÉMOIRE, ancien élève de l'École Polytechnique, répétiteur de mathématiques au collège Louis-le-Grand. — TERQUEM a rendu compte de cet ouvrage (N. A. 1843, p. 515); puis on a : *Théorèmes,* etc. par H.-CH. DE LAFRÉMOIRE. Seconde édition, entièrement revue et corrigée par E. CATALAN, docteur ès sciences, etc. — E. PROUHET en a fait le compte rendu (N. A. 1852, p. 113). Enfin l'on arrive au titre ci-dessus : *Théorèmes,* etc., par EUGÈNE CATALAN.

2° Nous donnons quelques autres exemples de lieux composés (nos 1407 **c**, et 2166 **a**), parce que la plupart des recueils élémentaires n'en donnent pas, et qu'il est utile de prévenir les débutants des cas exceptionnels qui peuvent se présenter dans les examens.

Une remarque analogue peut être faite pour les études plus élevées (Voir ci-après, n° 2166 **c**).

* EUGÈNE CATALAN (1814-1894), professeur émérite à l'Université de Liège, auteur de plusieurs ouvrages estimés : *Manuel du candidat à l'École Polytechnique, Éléments de géométrie, Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire.* — *Nouvelle correspondance mathématique*, de 1874-75 à 1880; on lui doit de nombreux et savants mémoires mathématiques. On peut lire à son sujet le *Discours sur les travaux mathématiques de M. E. C. Catalan,* par M. MANSION, professeur à l'Université de Gand, membre de l'Académie royale de Belgique (*Mathesis,* 1885).

## § II. — Emploi des lieux géométriques.

**87. Lieux à employer.** Les *principaux lieux géométriques* à utiliser dans la recherche des problèmes sont les suivants :

(**a**) Lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites données égale une longueur donnée;

(**b**) Lieu des points dont les distances à deux droites sont dans un rapport donné;

(**c**) Lieu des points dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné;

(**d**) Lieu des points où les droites menées d'un point à une droite ou à une circonférence sont divisées dans un rapport donné $\frac{m}{n}$;

(**e**) Lieu des points N où une droite OM, menée d'un point O, à une droite ou à une circonférence, est divisée en deux parties telles que le produit $OM \times ON$ est constant;

(**f**) Lieu des points dont la somme ou la différence des carrés des distances à deux points donnés égale une valeur donnée.

**88. Détermination d'un point.** Dans la plupart des cas, la résolution d'un problème graphique revient à déterminer la position d'un point.

Or, en ne tenant pas compte d'une des *données* de la question proposée, on trouve une ligne contenant le point cherché; puis, en prenant la condition négligée, mais en faisant abstraction d'une autre *donnée,* on obtient encore une ligne à laquelle appartient le point à déterminer; donc l'intersection des deux lieux géométriques donne le point demandé.

### Emploi d'un seul lieu géométrique.

**89.** La détermination d'un point n'exige parfois que la *construction d'un seul lieu ;* cette circonstance se présente lorsque le point doit appartenir à une ligne donnée. En voici quelques exemples.

**Problème.**

**90.** *Sur une ligne* AB, *déterminer un point* L *tel que ses distances* LM, LN *à deux droites* OX, OY, *soient dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

Il faut détermier le lieu OZ des points dont les distances EF, EG sont dans le rapport donné (nº 60).

*Remarque.* Pour la construction, on peut prendre $OC = m$, $OD = n$ et mener les parallèles CE, DE, car on a :

$$\frac{EF}{EG} = \frac{m}{n}.$$

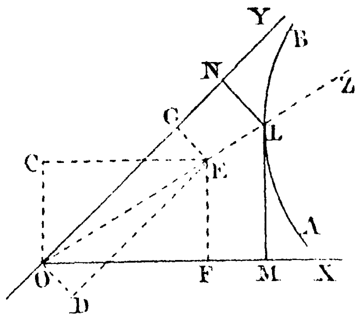


Fig. 46.

**Problème.**

**91.** *Sur une ligne* AB *déterminer un point* L *tel qu'en le joignant aux extrémités de deux segments* m *et* n, *les triangles obtenus soient équivalents.*

On détermine le lieu OLE des points dont le rapport des distances à PM, QN soit inverse des longueurs $m$, $n$ de ces segments.

Pour cela sur OC, perpendiculaire à PM, on prend $n' = n$; sur OD, perpendiculaire à QN, on prend $m' = m$, et l'on mène les parallèles CE, DE; les triangles LMP, LNQ sont équivalents.

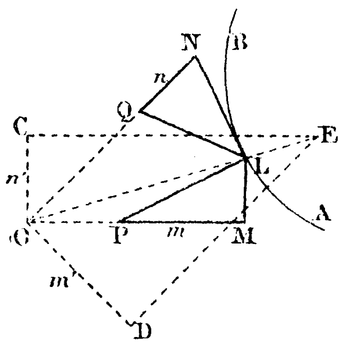


Fig. 47.

**Problème.**

**92.** *On donne un point sur une circonférence ainsi qu'une corde; par le point, mener une seconde corde qui soit divisée en deux parties égales par la première.*

1re *Solution.* Soient A le point donné et BC la corde donnée.

Si ADE est la corde demandée, le point D doit se trouver sur BC et sur le lieu des points milieux des cordes menées par le point A (nº 80). Il suffit donc de décrire une circonférence sur le diamètre AO.

Les points D et D′ déterminent les cordes demandées.

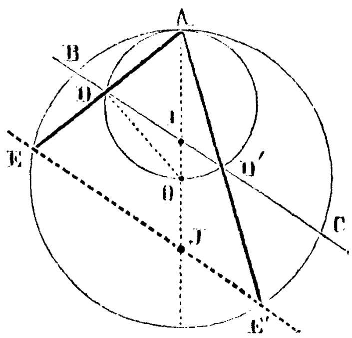


Fig. 48.

2e *Solution.* Le point E doit se trouver sur la circonférence donnée et sur le lieu, tel que toute ligne menée par le point A se trouve divisée en deux parties égales par BC.

Donc, sur une ligne droite quelconque AIJ, il suffit de prendre IJ = AI et de mener une parallèle EE′ à BC.

**93.** Remarques. 1° *Lorsqu'une solution dépend de l'intersection d'une droite et d'un cercle,* il peut y avoir *deux réponses, une seule,* ou *aucune.* Nous nous dispenserons parfois de répéter cette observation.

2° La seconde solution peut être employée même lorsque la circonférence est remplacée par une courbe quelconque.

La question proposée n'est qu'un cas particulier de l'exercice suivant.

**Problème.**

**94.** *On donne un point* O *et deux droites quelconques ; par le point donné, mener une sécante* MON *limitée aux deux lignes données, et telle que les segments interceptés* OM, ON *soient dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

Soient les droites XY, XZ et MON divisée dans le rapport voulu.

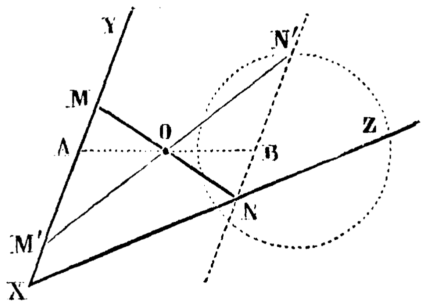


Fig. 49.

Le point N doit appartenir à XZ et au lieu des points tels que toute droite menée par le point O se trouve divisée dans le rapport $\frac{m}{n}$. Il faut donc construire ce lieu. Pour cela, menons une droite quelconque AOB; prenons $\frac{AO}{OB} = \frac{m}{n}$, et par le point B menons une parallèle à XY.

On aura :

$$\frac{OM}{ON} = \frac{m}{n}.$$

**95.** *Remarque.* Pour une droite XY et une circonférence, le même lieu donne :

$$\frac{OM'}{ON'} = \frac{m}{n}.$$

Pour une droite et une courbe quelconque, on procède comme ci-dessus; pour une circonférence et une courbe quelconque, on procède comme ci-après (n° 96).

**Problème.**

**96.** *Même question* (n° 94), *mais on donne deux circonférences.*

Soient les circonférences ayant respectivement pour centres les points A et B.

Il faut trouver le lieu des points tels que $\frac{OM}{ON} = \frac{m}{n}$.

On a vu (n° 65) que ce lieu est une circonférence de centre C, telle que le point donné O soit le centre de similitude des circonférences A et C; donc sur la droite AO prenons :

$$\frac{OC}{OA} = \frac{m}{n};$$

puis un rayon $c$, tel qu'on ait :

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{n}.$$

Les droites MN et M'N' répondent à la question, car on a :

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OC}{OA} = \frac{m}{n}.$$

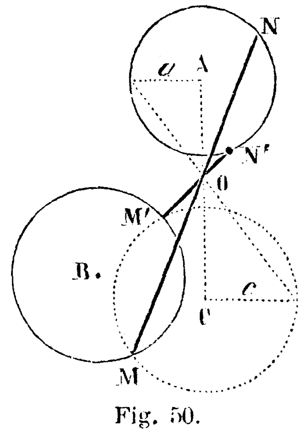


Fig. 50.

**Problème.**

**97.** *Par un point* O, *donné dans un angle* YXZ, *mener une sécante* MON, *telle que le produit* OM . ON *ait une valeur donnée* $k^2$.

Il suffit, comme précédemment, de déterminer directement une des extrémités de la sécante, N par exemple. Or le point N doit se trouver sur XZ et sur le lieu des points tels que

$$OM . ON = k^2.$$

Or, pour déterminer ce dernier lieu (n° 67), il faut abaisser la perpendiculaire OA, prendre OB tel que $OB . OA = k^2$, et sur OB comme diamètre décrire une circonférence. Les points d'intersection N et N' avec XZ répondent à la question.

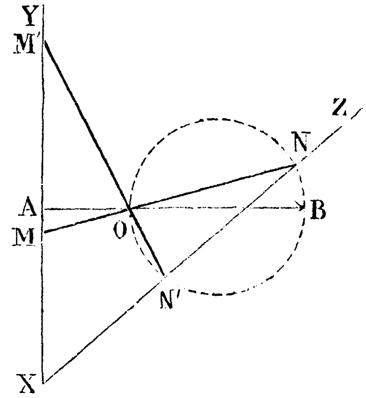


Fig. 51.

**98.** *Remarque.* Une des droites peut être remplacée par une circonférence, ou par une courbe quelconque.

On peut donner deux circonférences, ou bien une circonférence et une courbe quelconque.

**Problème.**

**99.** *Par un point de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, mener des parallèles aux côtés de l'angle droit, de manière que le rectangle obtenu réalise certaines conditions imposées.*

(a) *Le périmètre du rectangle doit égaler une longueur donnée* 2p.

Soient ABC le triangle rectangle donné; APMN un rectangle tel que le demi-périmètre

$$MN + MP = p \quad \text{(fig. 52)}.$$

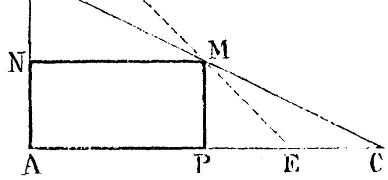


Fig. 52.

Le point M doit appartenir au côté BC et au lieu des points dont la somme des distances aux droites rectangulaires AB, AC égale $p$ (n° 75); donc il suffit de prendre $AD = AE = p$ et de mener DME.

On doit avoir : $$AB < p < AC.$$

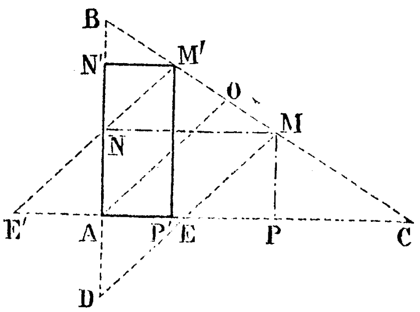


Fig. 53.

(b) *La différence de deux côtés adjacents du rectangle doit égaler une longueur donnée* d.

Il faut employer le lieu des points dont la différence des distances égale une ligne donnée (n° 75), et prendre :
$$AD = AE = d \quad \text{(fig. 53)}.$$

Le point M étant sur le prolongement de la base DE du triangle isocèle ADE, on a :
$$MN - MP = d.$$

*Remarques.* 1° E'M' donne une seconde solution : $M'P' - M'N' = d$.
2° La différence peut être nulle; on obtient alors le carré inscrit; la ligne AO, à 45°, correspond à ce cas.

Il y a deux solutions lorsque $d$ est moindre que le plus petit des côtés.

Une seule pour $AB < d < AC$.

Aucune pour $d > AC$.

(c) *Le rapport des côtés du rectangle doit égaler* $\frac{m}{n}$.

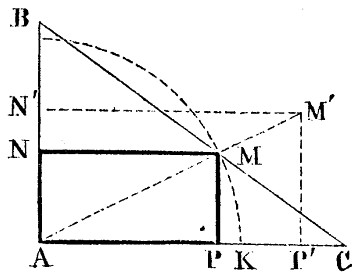


Fig. 54.

Ou bien : *le rectangle doit être semblable à un rectangle donné.*

Le point M doit appartenir au lieu des points dont le rapport des distances aux côtés AB et AC égale $\frac{m}{n}$.

Pour construire ce lieu (fig. 54), il faut déterminer un point M' dont les distances soient dans le rapport voulu. Pour cela, il suffit de prendre $\frac{AP'}{AN'} = \frac{m}{n}$ et de mener des parallèles P'M', N'M', ou bien de construire un rectangle AP'M'N' égal au rectangle donné.

Il y a deux solutions, car on peut disposer le rectangle AP'M'N' de manière que la petite base soit sur AC.

(d) *La somme des carrés des côtés adjacents du rectangle doit égaler un carré donné* k².

Du point A comme centre, avec une longueur $AK = k$, on décrit un arc de cercle (fig. 54).

Il peut y avoir deux solutions, une seule, ou aucune.

(e) *Dans un triangle rectangle isocèle, inscrire un rectangle dont la surface soit équivalente à un carré donné* k².

Il faudrait chercher l'intersection de l'hypoténuse BC (fig. 55) et de l'hyperbole équilatère, lieu des points M de produit constant (n° 78); mais l'hyperbole ne pouvant être tracée par des procédés géométriques, il faut recourir à d'autres constructions.

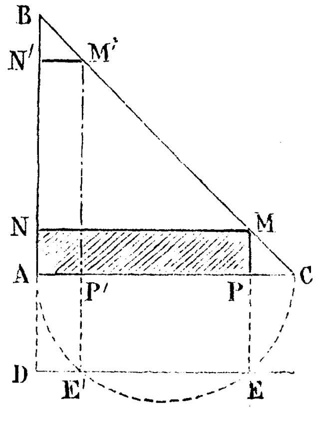


Fig. 55.

Le rectangle sera déterminé lorsque le point P sera connu.

Or le triangle étant isocèle, la somme des côtés MP, MN est constante ; elle égale AC (n° 74). Or tous les rectangles qui ont AC pour somme des côtés, ont pour surface le carré des diverses ordonnées telles que PE, du demi-cercle AEC décrit sur AC comme diamètre (G., n° 256); donc il faut prendre $AD = k$ et mener une parallèle DE. (G., n° 340.)

On aura : $AP \cdot PC = EP^2$ ou $AP \cdot PM = k^2$.

**Problème.**

**100**. *Dans un cercle donné, inscrire un rectangle dont le périmètre égale une longueur donnée* l.

(**a**) Il suffit évidemment de s'occuper du quart du périmètre et de poser :
$$MP + MN = \frac{l}{4}.$$

Le point M doit appartenir à l'arc BMC (fig. 56) et au lieu des points dont la somme des distances aux droites AB, AC égale $\frac{l}{4}$; donc il faut prendre $AD = AE = \frac{l}{4}$, et mener DE (n° 99, **a**).

*Remarque.* Il peut y avoir deux solutions, une seule, ou aucune (n° 93).

(**b**) *La différence des côtés adjacents du rectangle doit égaler* d (fig. 56).

On prend : $AF = AG = \frac{d}{2}$,

et on mène : FGM.

On trouve : $MN - MP = \frac{d}{2}$;

d'où $MM' - MM'' = d$.

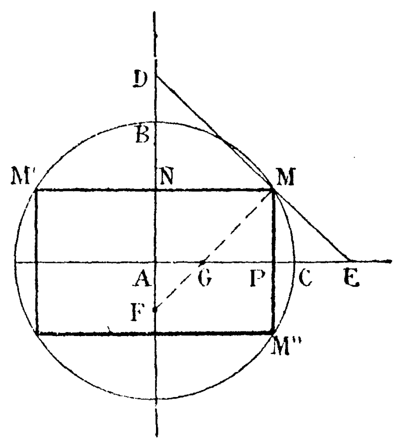


Fig. 56.

(**c**) Le rapport des côtés adjacents du rectangle doit égaler $\frac{m}{n}$.

On procède comme pour le triangle (n° 99, **c**).

(**d**) *La surface du rectangle doit égaler un carré donné* (fig. 57).

Puisqu'il suffit de s'occuper du quart APMN du rectangle demandé, représentons la surface totale par $4k^2$.

On aura : $AP \cdot MP = k^2;$

d'ailleurs $AP^2 + MP^2 = AM^2 = r^2.$ (G., n° 646.)

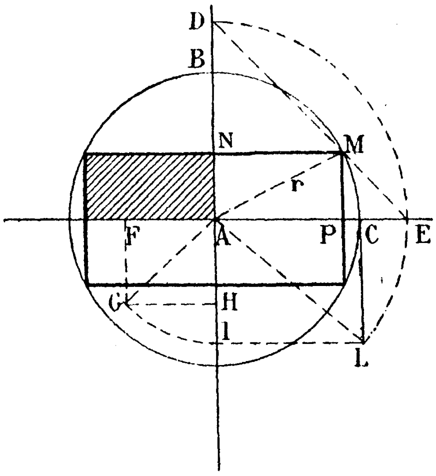


Fig. 57.

Donc $AP^2 + 2AP \cdot MP + MP^2$

ou $(AP + MP)^2 = r^2 + 2k^2.$

Nous pouvons donc connaître la somme des deux côtés adjacents et retomber sur une question connue (**a**).

Soit AFGH le carré donné;

$$AG^2 = 2k^2.$$

Portons cette longueur AG de A en I, et menons les perpendiculaires IL, CL.

On a : $AL^2 = r^2 + 2k^2;$

donc $AL = AP + MP.$

Puis portons AL de A en E et en D, et menons le lieu DE.

(**e**) *La différence des carrés de deux côtés adjacents du rectangle doit égaler un carré donné* (fig. 58).

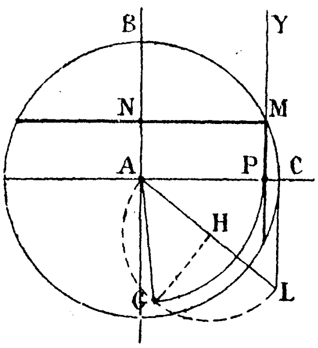


Fig. 58.

Il faudrait, comme au n° 99 (**e**), construire une hyperbole et prendre son intersection avec le cercle donné; mais on préfère remplacer cette courbe par une droite.

En représentant la différence des carrés par $4k^2$, on aura :

$$MN^2 - MP^2 = k^2;$$

d'ailleurs $MN^2 + MP^2 = r^2;$

d'où, en additionnant $2MN^2 = r^2 + k^2;$

$$MN^2 = \frac{r^2 + k^2}{2}; \quad MN = \sqrt{\frac{r^2 + k^2}{2}}.$$

Il suffit donc de construire cette longueur.

Il faut prendre $CL = k;$ alors $AL^2 = r^2 + k^2;$ puis élever une perpendiculaire HG au milieu de AL, jusqu'à la rencontre de la demi-circonférence AGL.

On aura : $$AG^2 = \frac{r^2 + k^2}{2}.$$

Enfin, en portant AG de A en P, la droite PY, parallèle à AB, est le lieu des points distants de AB de la longueur voulue MN; donc M est le sommet du rectangle.

*Remarque.* Les exercices déjà résolus conduisent à faire les remarques suivantes.

Pour certains problèmes, on utilise immédiatement les lieux géométriques (nos 90, 91, 92, 94...), tandis que pour d'autres questions il faut préparer la solution.

Les exemples donnés (99, e; 100 **d**, e) peuvent se rapporter à la *Méthode algébrique* (n° 301), tandis que les deux suivants réclament des *constructions auxiliaires* (n° 135); le problème 101 peut être rapporté à la *Méthode de translation* (n° 194).

### Problème.

**101**. *On donne deux points* A *et* B *sur une circonférence, ainsi qu'un diamètre* EF *fixe de position; trouver sur la circonférence un point* C, *tel que les cordes* CA, CB *déterminent sur le diamètre fixe un segment* MN *de longueur donnée* l.

Supposons le problème résolu, et $MN = l$.

Nous connaissons la position des points A, B, et par suite la grandeur de l'angle inscrit C. On connaît aussi la longueur donnée.

Or, en menant des parallèles ND, AD aux droites AM, MN, nous formons un parallélogramme dans lequel $AD = MN = l$; de plus, les angles DNB et C sont égaux comme correspondants.

Mais le point D peut être déterminé directement; donc nous sommes conduits à la construction suivante :

Par le point A, il faut mener une parallèle au diamètre fixe, prendre $AD = l$; sur BD décrire un segment capable de l'angle connu C, puis tracer BNC et CA.

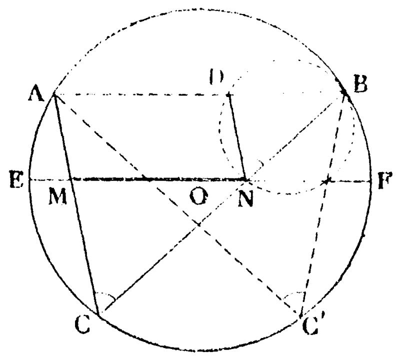


Fig. 59.

On aura : $MN = l$; le point C' donne une seconde solution.

### Problème.

**102**. *On donne deux points* A *et* B *sur une circonférence ainsi qu'un diamètre* EF *fixe de position; trouver sur la circonférence un point* C, *tel que les cordes* CA, CB *déterminent sur le diamètre fixe, à partir du centre* O, *des segments égaux* OM, ON.

Supposons le problème résolu et $OM = ON$.

En menant le diamètre AOD et joignant le point N au point D, nous formons deux triangles AOM, DON qui sont égaux, comme ayant un angle égal, au point O, compris entre deux côtés égaux; donc la droite ND est parallèle à AC, et nous pouvons connaître la valeur de l'angle BND.

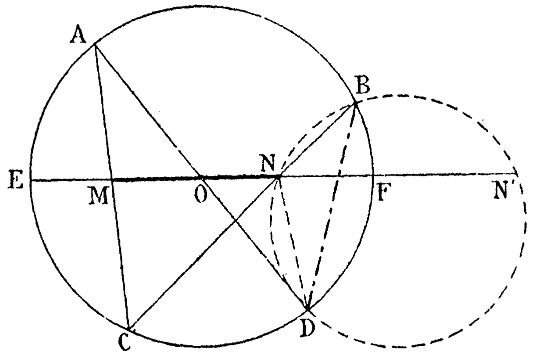


Fig. 60.

En effet, l'angle $DNC = C$.

Or ce dernier angle est connu, car il a pour mesure la moitié de l'arc AB. Puis l'angle BND, supplément de DNC, est aussi le supplément de C; nous sommes donc conduits à la construction suivante :

Il faut mener le diamètre AOD ; sur BD décrire un segment capable du supplément de l'angle connu C.

Le point N se trouve ainsi déterminé ; on mène BNC, et l'on joint C au point A.

*Remarque.* Le point N′ correspond à une seconde solution.

L'angle BN′D, supplément de BND, égale C.

### Emploi de deux lieux géométriques.

Lorsque le point à déterminer ne doit pas se trouver sur une ligne donnée, il faut recourir à l'emploi simultané de deux lieux géométriques (nº 88) ; mais il faut chercher les lieux les plus faciles à construire, en se rappelant qu'on ne peut tracer directement que des droites et des circonférences.

Voici quelques exemples :

### Problème.

**103.** *Dans un triangle, déterminer un point dont les distances* x, y, z *aux trois côtés* a, b, c *du triangle, soient entre elles dans le même rapport que les côtés correspondants.*

Pour deux des sommets A et B, il suffit de déterminer la droite qui est le lieu des points dont les distances aux deux côtés correspondants sont dans le même rapport que ces côtés (nº 60).

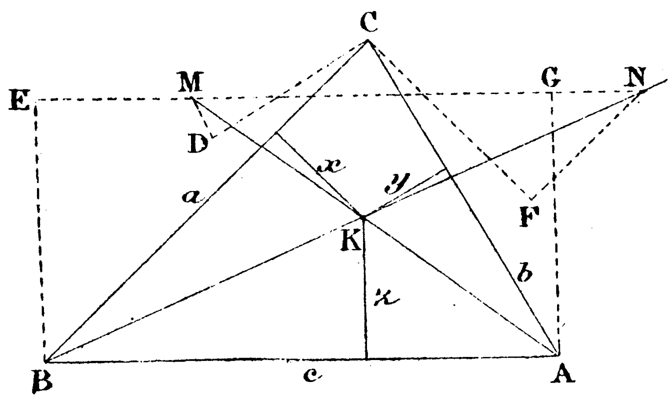



Fig. 61.

Pour A, élevons aux extrémités des côtés *b* et *c* des perpendiculaires CD, BE qui soient dans le rapport de ces côtés ; par exemple, la moitié ; puis par D, E des parallèles DM, EM aux côtés correspondants *b* et *c* ; le point M appartient au lieu AM.

On procède de même pour le sommet B, et l'on trouve BN ; donc le point K répond à la question, car l'on a :

$$\frac{x}{z} = \frac{a}{c} \quad \text{et} \quad \frac{y}{z} = \frac{b}{c};$$

ou

$$x : y : z = a : b : c.$$

Le point K est nommé *point de Lemoine* (Voir ci-après, nºs 2352 et suivants).

**Problème.**

**104**. *Construire un rectangle, connaissant le périmètre* 2p *et la somme* $k^2$ *des carrés des côtés adjacents.*

Soit un angle droit XAY.

En ne considérant que la première condition, on est conduit à prendre :

$$AE = AD = p.$$

Le sommet M doit se trouver sur DE.

En ne tenant compte que de la seconde, on décrit un arc de cercle du centre A avec $k$ pour rayon.

L'intersection des deux lieux fait connaître le point M.

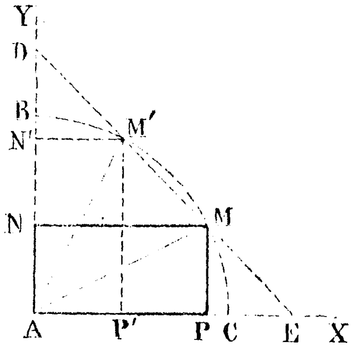


Fig. 62.

En effet, $MN + MP = AE = p$, (n° 74.)

$MN^2 + MP^2 = AM^2 = k^2$. (n° 72.)

**Problème.**

**105**. *Construire un triangle, connaissant la base* AB, *l'angle au sommet et la hauteur* h *abaissée de ce dernier point.*

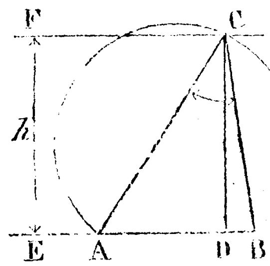


Fig. 63.

En ne tenant pas compte de la hauteur, le sommet pourrait être en un point quelconque de l'arc ACB, capable de l'angle donné.

Mais tous les triangles ayant AB pour base et $h$ pour hauteur ont leur sommet sur une parallèle FC, distante de la base AB d'une longueur donnée $h$.

Donc le sommet C est au point d'intersection du segment capable de l'angle donné et de la parallèle FC.

**Problème.**

**106**. *Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et le produit* $a^2$ *des deux côtés qui comprennent cet angle.*

1° Le sommet doit se trouver sur l'arc du segment capable de l'angle donné. Il en résulte que l'on connaît le diamètre $d$ du cercle circonscrit. Or le produit $a^2$ des deux côtés du triangle égale le produit du diamètre $d$ par la hauteur $h$. (G., n° 270.)

Donc $$h = \frac{a^2}{d}.$$

2° Le sommet se trouvera sur une parallèle à la base, la distance des deux parallèles ayant pour valeur $\frac{a^2}{d}$ (n° 105).

**Problème.**

**107**. *Construire un triangle, connaissant la base* AB, *la hauteur* h *et la valeur* $k^2$ *de la somme des carrés des deux autres côtés.*

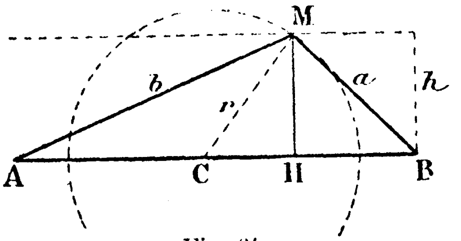


Fig. 64.

En ne tenant pas compte de la hauteur, il ne reste que la relation

$$a^2 + b^2 = k^2;$$

donc le sommet M doit se trouver sur le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes A et B a une valeur constante $k^2$.

Ce lieu est une circonférence décrite du point milieu C, pris pour centre, avec un rayon

$$r = \sqrt{\frac{1}{2} k^2 - AC^2}. \qquad \text{(G., n° 255.)}$$

Puis, en négligeant la condition $a^2 + b^2 = k^2$, et en considérant la hauteur donnée $h$, on voit que le sommet doit se trouver sur une parallèle à AB menée à une distance $h$ de AB. Donc le sommet M sera déterminé par l'intersection de la circonférence et d'une droite parallèle à la base.

**Problème.**

**108**. *Construire un triangle, connaissant la longueur de la base, une droite sur laquelle cette base doit se trouver, l'angle opposé, et sachant que les côtés qui comprennent cet angle doivent passer par deux points fixes* A *et* B.

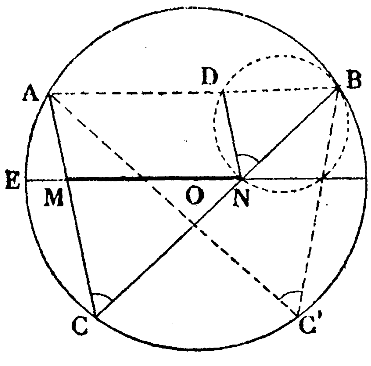


Fig. 65.

Le sommet C doit se trouver sur l'arc du segment capable de l'angle donné C et décrit sur la corde AB.

La considération de cet arc ACB suffit pour ramener le problème proposé à une question déjà connue (n° 101), mais où la droite donnée remplace le diamètre fixe. En réalité, on pourra donc se borner aux constructions suivantes :

Par le point A, mener une parallèle à EF. Prendre la ligne AD égale à la longueur que la base doit avoir; sur BD décrire un segment capable de l'angle donné, joindre le point B au point N, où l'arc de segment coupe la droite donnée EF; mener la droite BNC, et par le point A mener une parallèle à DN.

Le triangle MCN est le triangle demandé.

**109**. *Remarques.* 1° Ce problème peut s'énoncer autrement : *Une droite* EF *et deux points extérieurs étant donnés, ainsi qu'une longueur*

I, *placer cette ligne sur* EF, *de manière que l'angle* G, *formé par les droites* AM *et* BN, *égale un angle donné.*

2° Le nouvel énoncé conduit à poser une question très intéressante, qui sera traitée au paragraphe relatif aux *maxima* et aux *minima*. Voici le problème : *Comment varie l'angle* G, *lorsque le segment* MN *se déplace sur* EF ? (Voir ci-après n° 253.)

**Problème.**

**110.** *Construire un trapèze, connaissant les angles et les diagonales.* (*Éléments de Géométrie de Legendre*, revus par Blanchet, n° 28, des problèmes à résoudre.)

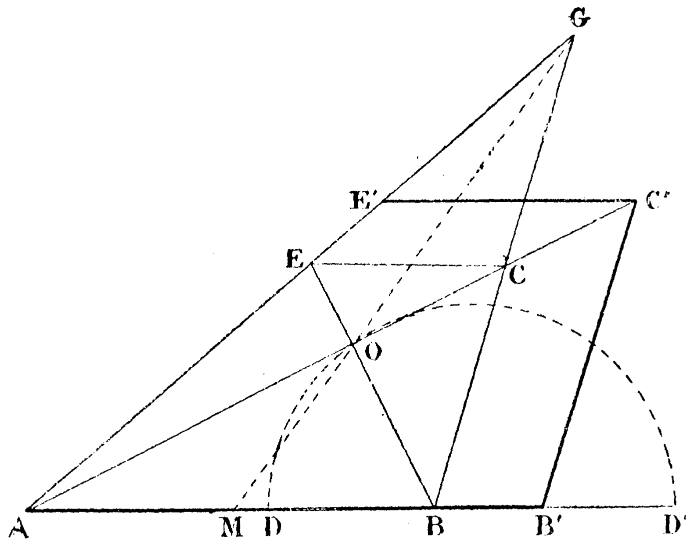



Fig. 66.

Dans un trapèze, à partir du point de concours des diagonales, les segments AO, OB sont dans le même rapport que les diagonales.

Soient $d$ et $d'$ les diagonales. Sur une droite quelconque AB je fais les angles donnés A et B ; je décris le lieu DD' des points dont les distances aux points A et B sont dans le rapport $\frac{d}{d'}$ ; et je mène la médiane MG, qui généralement coupe le lieu en deux points. Menons AOC, BOE ; la figure obtenue est un trapèze, comme il est facile de le démontrer ; de plus, il est semblable au trapèze proposé. Portons $d$ de A en C', menons les parallèles C'E', C'B' ; et AB'C'E' est le trapèze demandé. Le point O a été déterminé par la rencontre de deux lieux géométriques.

**111.** *Remarque.* On ne peut employer directement à la résolution des problèmes que les lieux géométriques constitués par des droites ou des circonférences (n° 103) ; car on ne sait pas construire d'une manière continue, par des moyens suffisamment rigoureux, ni l'ellipse, ni les deux autres courbes du second degré. Lorsque le point à déterminer se rapporte à un lieu qu'on ne tracerait pas géométriquement, il faut chercher une solution particulière qui n'exige point la construction du lieu ; c'est ainsi qu'on a procédé (nos 99 **e**, 100 **d**) ; en voici quelques autres exemples.

**Problème.**

**112.** *Construire un triangle, connaissant la base* FF′, *la hauteur* h *correspondante et la somme* 2a *des deux autres côtés.*

Soit $MP = h, \quad MF + MF' = 2a.$

Le sommet M est sur la parallèle distante de la base d'une longueur $h$, et sur l'ellipse qui aurait F, F′ pour foyers et $AA' = 2a$ pour grand axe. Le problème proposé revient donc au problème connu :

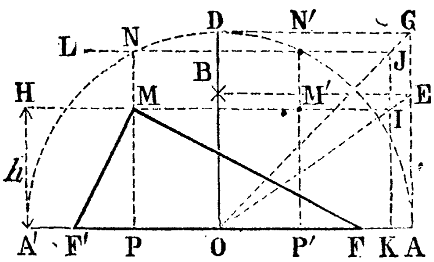


Fig. 67.

*Sans construire la courbe, trouver les points d'intersection d'une ellipse et d'une droite* MM′. (G., n° 642.)

Sur AA′ comme diamètre, décrivons le cercle principal ; cherchons quelle est la droite NN′ qui correspond à MM′. Pour cela, déterminons le rapport des ordonnées correspondantes de l'ellipse et du cercle. Du centre F, avec $a$ pour rayon, coupons la perpendiculaire OD au point B ; cette ligne OB est le demi-petit axe de l'ellipse ; puis traçant AG, DG, BE et les droites OG, OE, il suffira de mener l'ordonnée du point I. Son intersection J, avec OG, fait connaître la ligne JL, qui correspond à HI. L'intersection de la circonférence et de JL donne les points N et N′, et par suite M et M′.

Le point M appartient à l'ellipse, car on a :

$$\frac{MP}{NP} = \frac{IK}{JK} = \frac{EA}{GA} = \frac{b}{a};$$

donc $MF + MF' = 2a$, et FMF′ est le triangle demandé.

**Problème.**

**113.** (**a**) *Construire un triangle dont la base est donnée, connaissant la différence* d *des autres côtés et sachant que le sommet inconnu doit se trouver sur une droite donnée.*

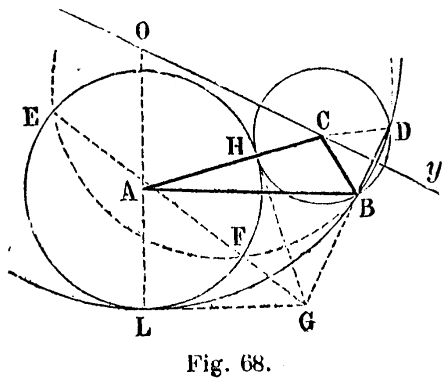


Fig. 68.

Soient A et B les points donnés, $xy$ la droite sur laquelle doit se trouver le troisième sommet.

Supposons le problème résolu et

$$AC - BC = d.$$

On reconnaît que le point C appartient à l'hyperbole qui aurait A et B pour foyers et $d$ pour axe transverse.

Le problème revient donc à la question suivante :

(**b**) *Déterminer les points où une droite* xy *coupe une hyperbole dont on connaît les foyers* A, B *et la différence constante* d *des rayons vecteurs.*

En décrivant une circonférence du point A comme centre avec $d$ pour rayon, on trouve : $$CB = CH.$$

Donc on est ramené au problème suivant :

(**c**) *Décrire une circonférence qui ait son centre sur une droite* xy, *qui passe par un point* B *et soit tangente à une circonférence* AH.

Mais le cercle qui a son centre sur $xy$ et passe par le point B passe nécessairement par le point D, symétrique de B.

Donc la question peut s'énoncer :

(**d**) *Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés* B, D *et qui soit tangente à un cercle* AH.

Or cette question est connue. (G, n° 299.)

Par B et D on fait passer un cercle qui coupe le cercle AH, on mène EFG, DBG; puis les tangentes GH, GL, et l'on fait passer une circonférence par les trois points B, D, H, ce qui donne une première solution C; et une autre circonférence par B, D, L, ce qui donne une seconde solution O ; car $$OB - OA = d.$$

**114.** *Remarque.* Dans les exemples ci-dessus (nos 112 et 113), la considération du lieu que l'on ne peut tracer conduit néanmoins à la solution.

Dans les exemples suivants (nos 115 et 117), la solution trouvée directement résout un problème relatif aux coniques.

### Problèmes.

**115.** *Construire un triangle, connaissant la base* AB, *l'angle opposé et la somme* 2a *des côtés qui comprennent cet angle.*

1° Le sommet C appartient à l'arc de segment capable de l'angle donné.

2° Le même sommet appartient aussi à l'ellipse qui aurait A et B pour foyers et $2a$ pour longueur du grand axe; mais comme on ne peut utiliser directement cette ellipse, il faut chercher une autre solution.

Supposons le problème résolu, et soit
$$AC + CB = 2a.$$

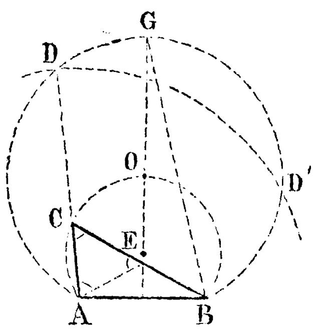


Fig. 69.

En portant CB de C en D, sur le prolongement de AC, nous formons un triangle isocèle BCD; or l'angle extérieur ACB égale la somme des angles égaux CBD, CDB; donc l'angle D est constant, car il égale la moitié de l'angle donné C; donc sur AB décrivons un segment capable de l'angle $\frac{C}{2}$, et du point A comme centre, avec une longueur $2a$, coupons en D et D′ l'arc décrit, puis menons DA et BC; ACB est une des réponses.

Le problème résolu donne la solution du suivant

**116**. *Sans tracer une ellipse, dont on connait les foyers* A *et* B, *la longueur* 2a *du grand axe, déterminer les points où cette courbe est coupée par une circonférence* ACB, *dont le centre est sur le petit axe de l'ellipse.*

*Remarques.* 1° Pour décrire l'arc capable de l'angle $\frac{C}{2}$, on prend le point O pour centre et OB pour rayon. Ou bien on se borne à décrire directement le segment capable de l'arc $\frac{C}{2}$, et l'on élève une perpendiculaire au milieu de BD jusqu'à la rencontre de AD.

2° Si la différence des côtés était donnée, on porterait CA de C en E.

$$A = E = 90^\circ - \frac{C}{2}; \quad \text{donc} \quad AEB = 90^\circ + \frac{C}{2}.$$

Sur AB on décrirait un segment capable de $\left(90^\circ + \frac{C}{2}\right)$, et du point B, avec la différence donnée, on couperait l'arc du segment.

## Problème.

**117**. *Couper les côtés d'un angle droit par une droite d'une longueur donnée, de manière que le triangle rectangle résultant ait une aire donnée.*

Soit le triangle ABC, tel que sa surface égale $2k^2$, aire donnée, et que $BC =$ la longueur $2l$.

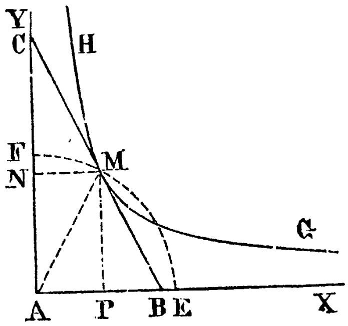


Fig. 70.

Par M, point milieu de l'hypoténuse, menons des parallèles aux côtés AB, AC.

Le rectangle APMN est la moitié du triangle, il égale $k^2$, et

$$AM = \frac{1}{2} BC = l.$$

Donc le point M appartient au cercle décrit du centre A, avec $l$ pour rayon; il faut ensuite inscrire un rectangle APMN ayant une aire donnée $k^2$; c'est une question connue (n° 100, **d**); enfin il faut prendre PB = AP et joindre BMC.

**118**. *Remarque.* Le lieu des points M, tels que le produit des distances MP, MN à deux axes rectangulaires, égale une quantité constante $k^2$, est une hyperbole équilatère ayant $k^2$ pour puissance, et AX, AY pour asymptotes (G., n° 678) ; donc on a résolu la question suivante :

*Une hyperbole équilatère étant donnée par ses asymptotes et par sa puissance* $k^2$, *mener une tangente sans construire la courbe, de manière que la droite interceptée entre les asymptotes ait une longueur donnée* 2l.

## § III. — Enveloppes.

**119.** *Définition.* On nomme *courbe enveloppe,* ou simplement *enveloppe* d'une droite mobile, la courbe tangente à la droite dans chaque position que cette dernière ligne peut occuper.

Exemple. *L'enveloppe des droites équidistantes d'un point donné est une circonférence ayant ce point pour centre.*

L'*enveloppe* se réduit au point donné, lorsque la distance des droites à ce point devient nulle.

L'*enveloppe* peut être considérée comme formée par la suite des points d'intersection de ses tangentes, prises deux à deux, dans des positions qui diffèrent infiniment peu l'une de l'autre.

**120.** *Droite mobile.* La droite qui engendre la courbe enveloppe est assujettie à se mouvoir suivant une certaine loi; en d'autres termes, chaque tangente jouit d'une même propriété, et l'ensemble de ces lignes constitue une famille de droites, analogue au lieu géométrique formé par l'ensemble des points qui jouissent d'une même propriété.

**121.** *Emploi des enveloppes.* De même qu'un point peut être déterminé par l'intersection de deux lieux, une droite peut être déterminée par deux enveloppes, car elle est tangente à chacune de ces courbes. Il suffit que l'on connaisse une enveloppe de cette droite et une autre condition à laquelle la ligne demandée est assujettie.

*Remarque.* La connaissance des propriétés des *courbes enveloppes* facilite non seulement la résolution de quelques problèmes, mais elle est indispensable pour arriver à comprendre et à utiliser la théorie des polaires réciproques. Il faut reconnaître néanmoins que les *Éléments de Géométrie* n'offrent que de faibles ressources pour traiter des enveloppes. Nous devons donc nous borner à citer quelques exemples très simples qui, d'ailleurs, seront suffisants pour les questions à traiter ultérieurement.

### Problème.

**122.** *Un des côtés* AX *d'un angle droit* XAY *roule sur une circonférence, pendant que le sommet* A *glisse sur une circonférence concentrique à la première; quelle est l'enveloppe du second côté* AY *de l'angle droit?*

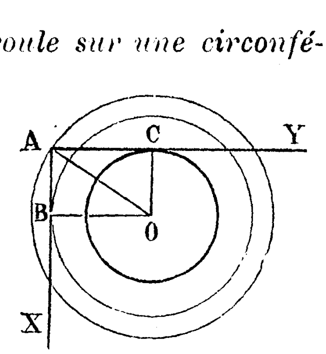


Fig. 71.

Soit O le centre commun aux circonférences données OB, OA.

Quelle que soit la position ABX, la perpendiculaire OC forme un rectangle ABOC dont les dimensions ne varient pas, car OA, OB ont des longueurs données, et l'angle ABO est droit; donc la perpendiculaire OC est constante; par suite, le côté ACY sera constamment tangent à la circonférence OC; donc l'enveloppe de AY est la circonférence décrite du centre O, avec OC pour rayon.

*Remarque.* Quel que soit l'angle A, le côté AY reste à une distance constante du centre O, et l'enveloppe demandée est une circonférence concentrique aux premières.

**Problème.**

**123.** *Quelle est l'enveloppe de la base* BC *d'un triangle* BAC *dont le périmètre est constant, et dont l'angle* A *est donné de grandeur et de position?*

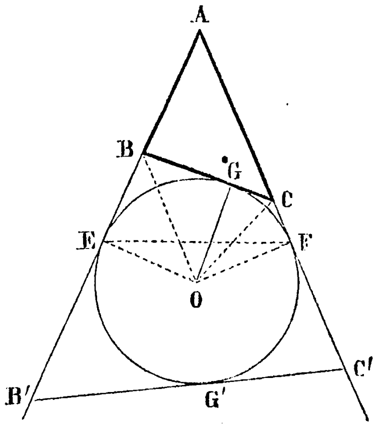



Fig. 72.

Proposons-nous de trouver un triangle isocèle EAF dont la somme des côtés AE, AF égale le périmètre ABC; menons les bissectrices des angles extérieurs B et C.

On aura $AE + AF = AB + BC + AC$,

et $OG = OE = OF$.

Donc la base BC est tangente à la circonférence exinscrite; en d'autres termes, l'enveloppe de la droite BC est l'arc EGF.

*Remarque.* L'arc EG'F est l'enveloppe de la droite B'C' telle que $AB' + AC' - B'C'$ est une quantité constante, égale au périmètre de ABC.

**Problème.**

**124.** *Par un point fixe* A *pris sur une circonférence, on mène deux cordes* AB, AC *dont le produit* $k^2$ *est constant, quelle est l'enveloppe de la base* BC *du triangle* BAC? (*N. A.* — 1868, p. 187.)

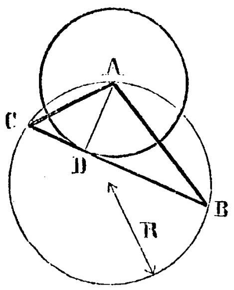



Fig. 73.

En abaissant la perpendiculaire AD, on reconnaît que sa longueur est constante, car le produit des deux côtés d'un triangle égale la hauteur de ce triangle multipliée par le diamètre du cercle circonscrit. (G., n° 270.)

Donc $$AD = \frac{k^2}{2R}.$$

Ainsi l'enveloppe de BC est une circonférence décrite du point A comme centre, avec la valeur $\frac{k^2}{2R}$ pour rayon.

*Remarque.* L'enveloppe est la même pour toutes les circonférences ayant R pour rayon et passant par le point donné A.

**Problème.**

**125.** *On décrit deux circonférences tangentes entre elles, et tangentes respectivement à une droite en des points donnés* A *et* B. *Quel est le lieu du point de contact* O *des circonférences entre elles, et l'enveloppe de la droite des centres* MN?

Menons la tangente commune OD.

Les triangles rectangles DAM, DOM sont égaux entre eux ; de même pour DBN, DON ; donc

$$DA = DO = DB.$$

Ainsi le *lieu* des points de contact O est le cercle décrit sur le diamètre AB.

Ce même cercle est l'enveloppe de la droite MON, car le rayon DO est perpendiculaire à la tangente MN.

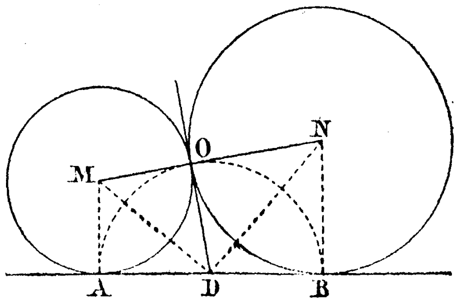


Fig. 74.

**Problème.**

**126.** *Le côté* CX *d'un angle droit* XCY *passe par un point fixe* F, *tandis que le sommet* C *de l'angle droit glisse sur une droite* AC; *quelle est l'enveloppe du côté* CY ?

En prolongeant FC d'une grandeur $CF_1$, égale à CF, le lieu des points $F_1$ sera une droite $DF_1$ parallèle à AC et telle que AD = AF.

Or on sait que toute perpendiculaire CY, élevée au milieu de $FF_1$, est tangente à la parabole dont F est le foyer et $DF_1$ la directrice; donc *l'enveloppe de* CY *est une parabole ayant* F *pour foyer et* AC *pour tangente au sommet.*

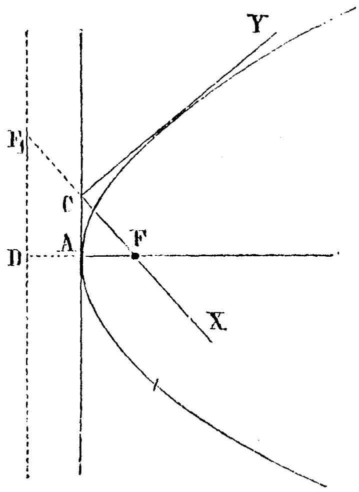


Fig. 75.

*Remarque.* Il est possible d'arriver plus rapidement à la conclusion, car il suffit de se rappeler que *le lieu des projections du foyer d'une parabole, sur les tangentes à cette courbe, est la tangente au sommet* (G., nº 697); mais si les théorèmes relatifs à la directrice et à la tangente au sommet (G., nºs 695 et 697) n'étaient pas connus, les *Éléments de Géométrie* ne conduiraient pas à la connaissance de la courbe enveloppe.

**Problème.**

**127.** *Le côté* CF *d'un angle droit* FCT *passe par un point fixe* F; *quelle est l'enveloppe de l'autre côté* CT, *lorsque le sommet* C *glisse sur une circonférence donnée* ACA' ?

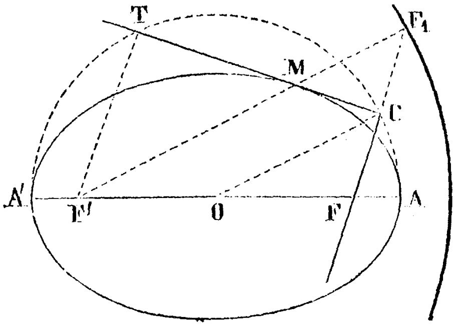


Fig. 76.

Quand le point F est dans le cercle, l'enveloppe de CT est une ellipse ayant AA' pour grand axe et F pour foyer; car le lieu de la projection C du foyer F sur les tangentes à l'ellipse est le cercle principal décrit sur le diamètre AA'. (G., n° 626.)

Lorsque le point fixe est extérieur au cercle, l'enveloppe est une hyperbole ayant F pour un de ses foyers et le diamètre AA', qui passe par le point fixe pour axe transverse. (G., n° 667.)

**127 a. Note.** Ce théorème est dû à MACLAURIN, *Traité des propriétés projectives des figures*, tome I, n° 447. Il est attribué souvent à LA HIRE. Voir *Aperçu historique*, page 125.

* MACLAURIN ou MAC-LAURIN, né en 1698, mort à York en 1746, donna divers procédés pour le tracé organique des courbes, et publia son *Traité des fluxions.* Cet ouvrage célèbre a été traduit en français par le Père PÉZENAS.

* LA HIRE, né à Paris en 1640, mort en 1718, publia, en 1685, un grand traité sur les coniques. Dans cet ouvrage, il étudiait les propriétés du cercle, considéré comme étant la base d'un cône, et en déduisait des propriétés correspondantes pour les sections coniques. Il fit un grand emploi de la *proportion harmonique,* et établit les théorèmes principaux de la théorie des polaires.

Dans son *Traité des planiconiques,* il donne la première méthode suffisamment générale, pour transformer des figures données en d'autres figures de même genre.

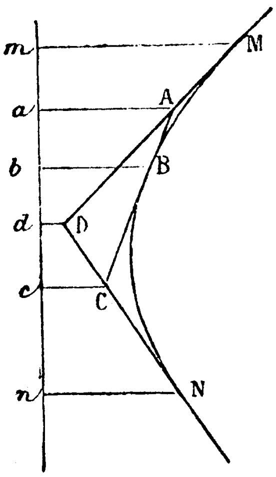


Fig. 77.

**Problème.**

**128.** *Quelle est l'enveloppe d'une droite* AC *qui divise deux droites* DM, DN, *données de longueur et de position, en parties inversement proportionnelles ?*

On a : $$\frac{AM}{AD} = \frac{CD}{CN}.$$

L'enveloppe est une parabole, car un théorème connu (G., n° 710) prouve que la parabole tangente en M, N aux lignes données, est tangente à toute droite AC qui divise les côtés DM, DN en parties inversement proportionnelles.

**Problème.**

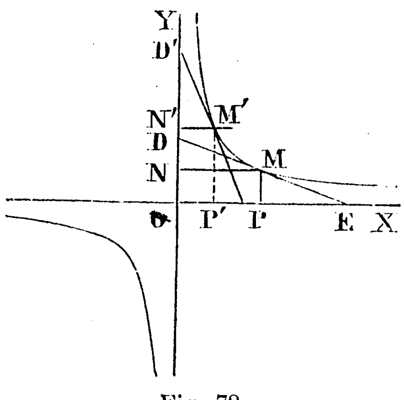


Fig. 78.

**129.** *On coupe les côtés d'un angle droit* XOY *par une droite* DE, *de manière que le triangle* DOE *ait une aire constante* $a^2$; *quelle est l'enveloppe du côté* DE ?

Soit $$\frac{OD \cdot OE}{2} = a^2.$$

Du point M milieu de DE, abaissons les perpendiculaires MN, MP; on aura :

$$MN \cdot MP = \frac{1}{2} \cdot \frac{OD \cdot OE}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Or le produit MN . MP des coordonnées du point milieu M étant constant, le lieu du point M est une hyperbole équilatère ayant OX, OY pour asymptote et $\frac{a^2}{2}$ pour puissance. (G., n° 677.)

On sait d'ailleurs que la tangente, limitée aux asymptotes, est divisée en deux parties égales par le point de contact (n° 75); donc DE est tangente au lieu obtenu; par suite, *l'enveloppe* de DE *est l'hyperbole, lieu des points* M.

*Remarque.* Quel que soit l'angle donné, l'enveloppe de la base DE d'un triangle à aire constante est une hyperbole ayant OX, OY pour asymptotes.

**Problème.**

**130.** *Les hauteurs d'un triangle* ABC, *inscrit dans un cercle de centre* O, *se coupent en un point* H. *Ce dernier point peut servir de point de concours des hauteurs d'une infinité de triangles inscrits dans le même cercle; quelle est l'enveloppe des côtés de tous ces triangles?* (Paul Serret. — *N. A.* — 1865, p. 428.)

1° En prolongeant chaque hauteur jusqu'à la circonférence, chaque côté BC, par exemple, est perpendiculaire au milieu de HL, car l'angle $CBL = CAL$; mais l'angle $CAD = CBE$; donc $DH = DL$, etc.

De même, $HE = EM$, $HF = FN$.

2° Il y a une infinité de triangles dont les hauteurs se coupent en un point donné H. En effet, admettons qu'on ne donne que le cercle et le point H; prouvons qu'à toute corde menée par H correspond un triangle dont ce point est le point de concours des hauteurs. Menons une corde quelconque BHM, élevons une perpendiculaire AC au milieu de HM : les trois hauteurs de ABC se couperont au point H, car $EH = EM$; donc...

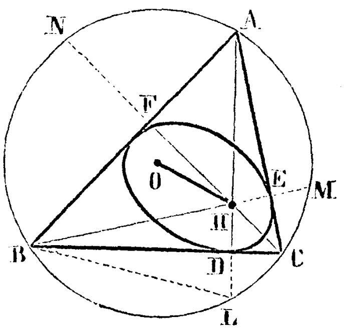


Fig. 79.

3° La propriété connue du cercle directeur (G., n° 624) prouve que les côtés AC perpendiculaire au milieu de HM, AB perpendiculaire au milieu de HN, etc., sont tangents à une ellipse ayant pour foyers les points O et H, et le cercle circonscrit pour cercle directeur; donc *l'enveloppe des côtés est l'ellipse* OH.

*Remarque.* — Lorsque le point de concours des hauteurs est hors du cercle, l'enveloppe est une hyperbole. (G., n° 660.)

**130 a. Note.** 1° Le théorème proposé par Paul Serret, en 1865, a été résolu par Picquet (N. A. 1866, p. 153, IX); puis par divers auteurs, p. 168 et 170. L'idée première de la question appartient à M. E. Lemoine (N. A. 1858, p. 240).

2° La dénomination de *foyers*, pour l'ellipse et l'hyperbole, se trouve dans les ouvrages d'Apollonius.

* Apollonius de Perge (vers 247 av. J.-C.) vivait à Alexandrie sous le règne de Ptolémée Philopator; il publia un traité célèbre sur les *Sections coniques*. Ce grand ouvrage, dans lequel se trouvent les propriétés les plus remarquables des coniques, avait fait donner à son auteur le surnom de *géomètre par excellence*.

**131.** *Enveloppe d'une courbe variable.* L'enveloppe d'une courbe qui varie suivant une loi donnée est une seconde courbe tangente à la première dans toutes les positions que celle-ci peut occuper.

Exemple. *L'enveloppe d'un cercle de rayon constant dont le centre décrit une circonférence donnée, est l'ensemble de deux circonférences concentriques à celle que décrit le centre du cercle mobile.*

Lorsque $r$ est le rayon de la circonférence fixe et $s$ le rayon de la circonférence mobile, l'un des rayons de l'enveloppe égale $r + s$ et l'autre $r - s$.

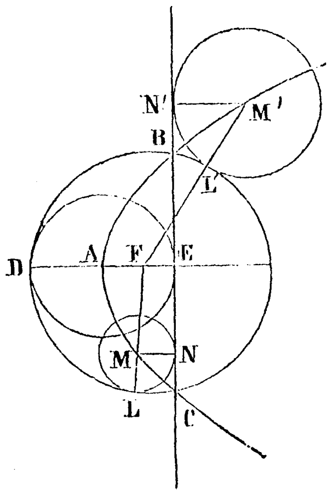


Fig. 80.

**Problème.**

**132.** *Quelle est l'enveloppe des cercles dont le centre est sur une parabole et qui sont tangents à une corde perpendiculaire à l'axe de cette courbe?*

La parabole est le lieu des points dont la somme ou la différence des distances au foyer F et à la droite BC est constante (nº 76).

| | |
|---|---|
| Donc | $FM + MN$ |
| ou | $FL = FA + AE = FD,$ |
| de même | $FM' - M'N'$ |
| ou | $FL' = FD.$ |

Ainsi l'enveloppe est la circonférence DLL', décrite du foyer F pris pour centre avec $FA + AE$ pour rayon.

*Remarque.* La courbe passe par les points B et C.

**Problème.**

**133.** *Quelle est l'enveloppe des cercles dont le centre est sur une ellipse et qui sont tangents à une circonférence décrite d'un foyer comme centre?*

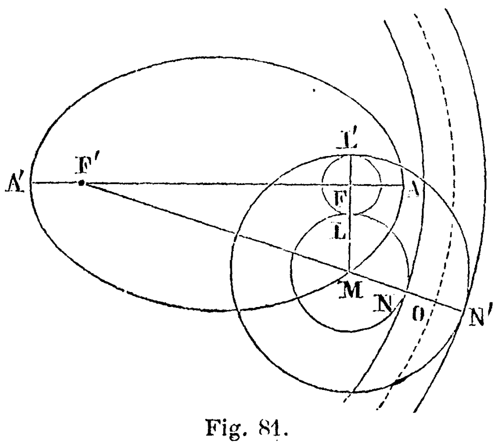


Fig. 81.

Soit MN un cercle quelconque; décrivons le cercle directeur relatif au foyer F'.

Pour tout centre M, pris sur l'ellipse, la circonférence qui passe par le foyer est tangente au cercle directeur au point O. (G., nº 625.)

Donc l'enveloppe des cercles décrits du centre M, et tangents au cercle LF, est une circonférence concentrique au cercle directeur; F'N en est le rayon.

Les circonférences auxquelles le cercle F serait tangent intérieurement auraient pour enveloppe le cercle dont F'N' serait le rayon.

**Problèmes.**

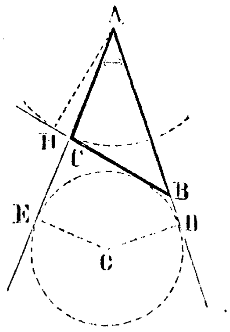


Fig. 82.

**134.** *Construire un triangle, connaissant le périmètre, un angle et la hauteur abaissée du sommet de cet angle.*

Formons un angle A égal à l'angle donné; déterminons l'enveloppe de la base du triangle à périmètre constant $2p$ (nº 124). Pour cela, prenons $AD = AE = p$; élevons les perpendiculaires DO, EO, et décrivons le cercle exinscrit au triangle demandé. Du sommet A, il faut décrire une autre circonférence avec $h$ pour rayon, puis mener une tangente commune aux deux circonférences A, O.

**134 a.** *Construire un triangle, connaissant le périmètre, un angle et le rayon du cercle inscrit.*

Comme précédemment (nº 134) faisons un angle A égal à l'angle donné, déterminons le cercle exinscrit de centre O qui sera l'enveloppe de la base, puis le cercle inscrit de centre I et de rayon donné $r$, puis menons la tangente intérieure commune aux cercles inscrit et exinscrit.

**134 b. Note.** La dénomination de *cercles exinscrits* est due à LHUILIER, de Genève, en 1810 (*Annales de Gergonne*, 1810-1811, p. 149).

* SIMON LHUILIER, né à Genève en 1750, eut pour professeur LOUIS BERTRAND, connu par la démonstration des parallèles (nº 425). LHUILIER résida longtemps à Varsovie, puis fut professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève; il y publia la *Polygonométrie* et mourut en 1840, après avoir compté STURM au nombre de ses élèves.

# III

## EMPLOI DE FIGURES AUXILIAIRES

---

### § I. — Constructions auxiliaires.

**135.** Le recours à des constructions auxiliaires, soit pour démontrer un théorème, soit pour résoudre un problème, est moins une méthode qu'un procédé dont l'emploi est réclamé par la plupart des questions à traiter. Les exercices déjà proposés en fournissent plusieurs exemples (nos 46, 47, 51).

Il est impossible d'indiquer d'une manière générale les constructions qu'il convient de faire; mais parfois une seule ligne donne des rapports inattendus d'où dérive directement la solution.

Dans les exemples que nous allons donner, les lignes auxiliaires seront tantôt une ou plusieurs droites, et tantôt une circonférence.

**Théorème.**

**136.** *Les côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible, dont une des diagonales est un diamètre, se projettent sur l'autre diagonale suivant des longueurs égales.*

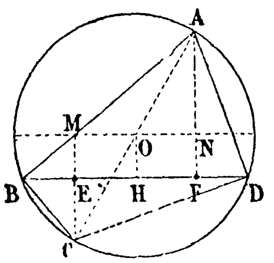



Fig. 83.

Soient ABCD un quadrilatère inscrit, AOC le diamètre, CE, AF les perpendiculaires abaissées sur la diagonale BD.

Il faut prouver que BE = DF.

En effet, en traçant comme ligne auxiliaire le diamètre parallèle à BD, prolongeant CE, et menant la perpendiculaire OH, on obtient deux triangles rectangles égaux : OAN, OCM

donc $\quad OM = ON,$

d'où $\quad BE = FD.$

De même $\quad BF = ED.$

**Problème.**

**137.** *Une rivière, dont le cours est rectiligne dans la partie considérée, passe entre deux localités inégalement éloignées du cours d'eau. Où faut-il construire un pont perpendiculaire à la rivière, pour que les deux* *localités soient à des distances égales de l'entrée correspondante du pont?*

Supposons le problème résolu; soit AMNB la ligne brisée telle que MN soit perpendiculaire à RM et que AM = BN.

En menant une droite auxiliaire BC égale et parallèle à MN, on reconnait immédiatement que le point M sera déterminé par la perpendiculaire DM élevée au milieu de AC; car la figure BCMN est un parallélogramme; donc

$$BN = CM = AM.$$

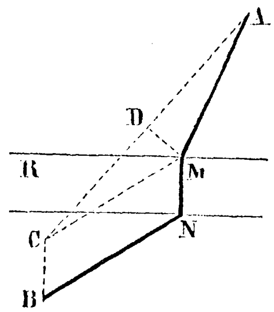


Fig. 84.

*Remarque.* Cet exemple, comme plusieurs autres, peut être rapporté à la *Méthode de translation* (nº 194).

**Problème.**

**138.** *Étant données deux circonférences sécantes* A *et* B, *mener par l'un des points d'intersection* E *une sécante qui soit divisée par ce point dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

Pour résoudre la question proposée, on pourrait recourir à un lieu géométrique déjà étudié (nº 65); mais le problème comporte une solution particulière très simple, qu'il est utile d'indiquer.

Soit le problème résolu et

$$\frac{CE}{DE} = \frac{m}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{GE}{HE} = \frac{m}{n},$$

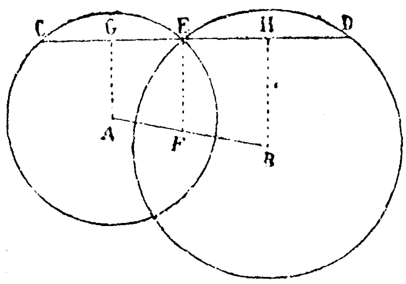


Fig. 85.

en ne prenant que la moitié des cordes.

Si l'on mène par le point E une perpendiculaire EF à GH, la ligne AB sera divisée dans le rapport donné, et le point F fera connaître la direction de FE; donc il faut diviser AB dans le rapport $\frac{m}{n}$, joindre le point F au point E, puis au point E élever une perpendiculaire CD à la droite EF.

**Problème.**

**139.** *Par l'un des points d'intersection de deux circonférences qui se coupent, mener une sécante qui ait une longueur donnée* $2l$.

En supposant le problème résolu, et CED $= 2l$, on est conduit comme précédemment (nº 138) à ne considérer que la moitié GH de la sécante.

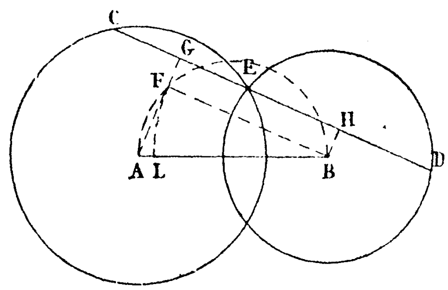


Fig. 86.

Il suffit de considérer une droite auxiliaire BF parallèle à CD pour reconnaître que le problème revient à construire un triangle rectangle

AFB dont on connaît l'hypoténuse AB et la longueur $l$ d'un côté BF de l'angle droit. On est donc amené à faire la construction suivante :

Sur AB comme diamètre, il faut décrire une demi-circonférence ; du point B comme centre, avec un rayon BL égal à $l$, décrire un arc LF, enfin mener une droite GED parallèle à BF.

*Remarque.* La longueur donnée $2l$ peut au plus être égale à 2AB ; ainsi la *sécante maxima* est parallèle à la ligne des centres.

**Problème.**

**140.** *Une droite* DF *étant donnée de longueur et de position, trouver sur un cercle aussi donné un point* C *tel qu'en le joignant aux points* D, F, *la corde interceptée* AB *soit parallèle à* DF.

Supposons le problème résolu et AB parallèle à DF. Il suffit de déterminer un des points A ou B.

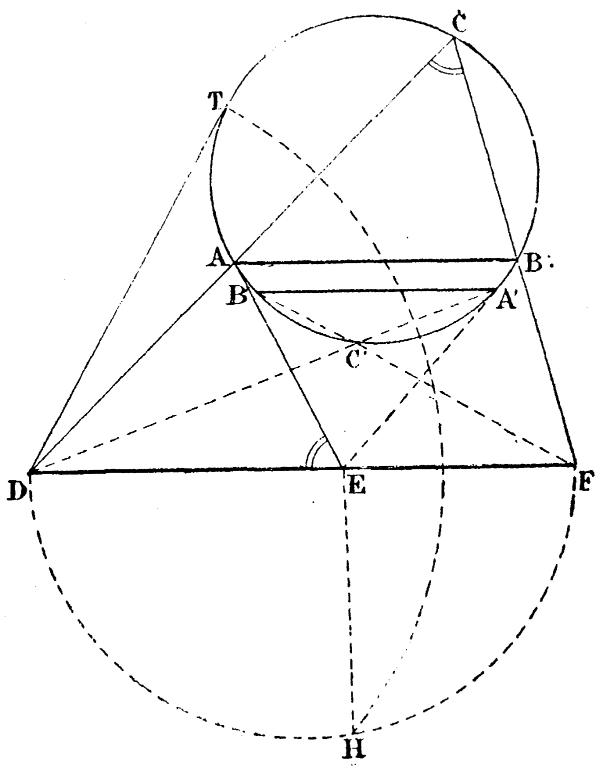


Fig. 87.

Pour rattacher le point inconnu A aux données du problème, menons la tangente AE. Tout serait déterminé si le point E était connu de position. Or les triangles ADE, FDC sont semblables comme ayant un angle D commun, et l'angle A égale F ; car l'angle A, ou son opposé par le sommet, a pour mesure la moitié de l'arc ATC, et il en est de même de l'angle B, auquel l'angle F est égal.

Les triangles semblables donnent :

$$\frac{DE}{DC} = \frac{DA}{DF};$$

d'où $\quad DE = \dfrac{DA \cdot DC}{DF}.$

Nous ne connaissons ni DA ni DC, mais leur produit est connu ; car en menant la tangente DT, on a : $\quad DA \cdot DC = DT^2$ ;

donc $$DE = \frac{DT^2}{DF}.$$

Il suffit donc de construire une troisième proportionnelle aux lignes connues DT et DF.

*Construction.* Sur DF décrivons une demi-circonférence ; portons DT de D en H, abaissons la perpendiculaire HE ; menons la tangente EA, puis les lignes DAC et CF.

Il y a deux solutions.

**140 a. Note.** Cette question a été choisie par BOURDON dans son *Application de l'algèbre à la géométrie* (nos 20 et 21), pour montrer toute l'utilité qu'on peut retirer de l'introduction de certaines lignes auxiliaires, telles que la tangente AE.

* BOURDON, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, est surtout connu par l'admirable clarté qui règne dans tout ses ouvrages : *Arithmétique, Algèbre, Application de l'algèbre à la géométrie.*

**Théorème.**

**141.** *Lorsqu'un parallélogramme* ABCD *de grandeur invariable se meut dans son plan de manière que deux côtés adjacents* AB, AD *passent respectivement par deux points fixes* M *et* N, *la diagonale* AC *passe aussi par un point fixe.*

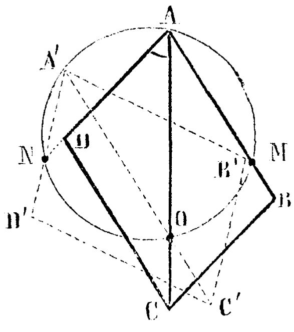


Fig. 88.

L'angle DAB est constant, donc le sommet A du parallélogramme se meut sur l'arc du segment MAN capable de l'angle donné A.

La considération de la circonférence MANO conduit très simplement à la démonstration du théorème.

En effet, l'angle NAO ou D'A'C' est constant, le premier côté A'D' de l'angle passe par le point N; donc le second côté A'C' passera par un point fixe O.

**141 a. Note.** Cette question si élémentaire conduit à un théorème remarquable de statique : *Lorsqu'on fait tourner deux forces concourantes d'une même quantité angulaire et dans le même sens autour de leurs points respectifs d'application, la résultante tourne de la même quantité et passe par un point fixe.*

Le théorème no 141 a été énoncé par M. MAURICE D'OCAGNE, alors élève à l'École Polytechnique (N. A. 1880, page 116), plus tard ingénieur des ponts et chaussées, auteur de nombreux articles dans divers recueils scientifiques et de plusieurs ouvrages estimés. Voir ci-après (no 963).

Le théorème de statique avait été cité antérieurement comme étant déjà connu (N. A. 1863, p. 142). ABEL TRANSON le donne à démontrer et en indique la généralisation.

**Lieu.**

**142.** *Quel est le lieu des points* M *tels que la droite* AB *qui joint les pieds des perpendiculaires* MA, MB *abaissées de ce point sur deux droites fixes* OX, OY, *ait une longueur constante* $l$?

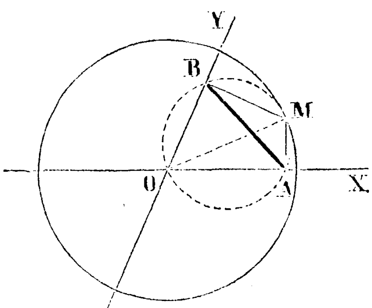


Fig. 89.

Soient M un point du lieu, MA perpendiculaire sur OX, MB sur OY et AB $= l$.

La considération du cercle circonscrit au quadrilatère AMBO, dont deux angles sont droits, conduit immédiatement à la réponse.

En effet, à cause des angles droits A et B, le cercle circonscrit a pour diamètre MO. Mais AB ayant une longueur constante, on peut dire que l'arc AOB est l'arc de segment décrit sur AB et capable de l'angle donné XOY. Ainsi la circonférence circonscrite change de position, mais non de grandeur; donc le diamètre MO a une longueur constante; et le lieu du point M est une circonférence décrite du point O, avec OM pour rayon.

*Remarque.* Pour l'étude complète, on peut voir ci-après n° 801.

**Lieu.**

**143.** *Les sommets* A *et* B *d'un triangle* ABC *glissent respectivement sur les deux droites fixes* OX, OY, *dont l'angle* XOY *est le supplément de l'angle* C; *quel est le lieu décrit par ce troisième sommet* C?

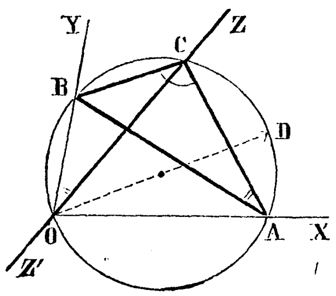


Fig. 90.

Soit l'angle C supplémentaire de l'angle O.

Comme précédemment, la considération du cercle circonscrit amène facilement à la connaissance du lieu.

En effet, quelle que soit la position du triangle donné ABC, le cercle circonscrit passe par le point O, car le quadrilatère AOBC est inscriptible; or l'angle BOC égale A; donc l'angle BOC est constant; le point C, quelle que soit la position du triangle mobile, se trouve sur une droite ZOZ' formant avec OY un angle égal à l'angle donné A.

*Remarque.* Pour avoir les positions extrêmes du sommet C, il faut porter sur OZ et sur OZ' des longueurs égales au diamètre OD du cercle circonscrit.

**Lieu.**

**144.** *Les sommets* A *et* B *d'un triangle* ABM *glissent respectivement sur deux droites fixes* OX, OY. *Quel est le lieu décrit par le troisième sommet* M?

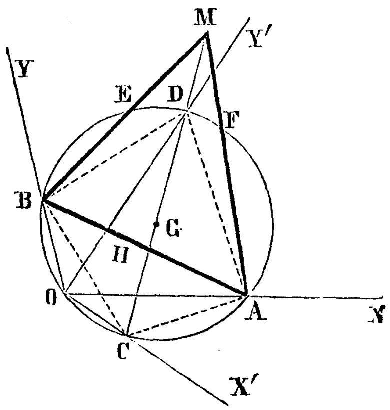


Fig. 91.

Le problème précédent nous conduit à déterminer des points liés au triangle, et dont le lieu soit une droite passant par le point O.

Or tous les points de l'arc EDF se meuvent suivant des droites; car pour le point D, par exemple, l'angle ADB est le supplément de O.

Les points de l'arc AOB donnent aussi des droites, car

$$\text{l'angle } ACB = O.$$

Menons le diamètre CM qui passe par le sommet M; soit D le point où l'arc EF est coupé par CM.

La ligne CDM reste invariablement liée au triangle.

En effet, l'arc ADB, capable d'un angle supplémentaire de l'angle XOY, a un rayon constant et une position invariable par rapport au triangle donné. Il coupe MB en un certain point E tel que le segment BE ne varie pas de longueur; de même, le centre du cercle AOBD reste à une distance invariable de la base AB; ainsi le diamètre MDGC a une position déterminée et passe constamment par un même point H de la base AB;

donc MDGC participe au mouvement du triangle donné ABM, et le quadrilatère inscriptible ACBD est mobile dans son plan, mais il ne varie point de forme ni de grandeur.

Or l'angle DOC est droit; donc les extrémités C et D de la droite CD glissent sur deux droites rectangulaires OX', OY'; par suite, tout point M de cette droite décrit une ellipse. (G., n° 643.)

*Remarque.* O est le centre de la courbe, les axes sont dirigés suivant OX' et OY'. Les longueurs MC, MD font connaître les demi-axes $a$ et $b$.

**144 a. Note.** La recherche analytique du lieu demandé n'offre aucune difficulté, elle est connue depuis longtemps; mais la détermination géométrique des axes de l'ellipse ne remonte qu'à 1859; elle est due à MANNHEIM, alors élève à l'École Polytechnique, plus tard professeur à la même école, auteur d'aperçus nouveaux et remarquables sur la *Géométrie cinématique.*

## § II. — Figures symétriques.

**145.** L'emploi des *figures symétriques* constitue la *méthode par duplication* ou par *retournement.*

Dans certains cas on détermine, par rapport à un axe donné, le point symétrique d'un point donné; en d'autres circonstances, on remplace une ligne droite ou courbe par la ligne symétrique.

On trouve une application de cette méthode dans la résolution du problème du *chemin brisé minimum* (G., n° 176), et aussi dans le suivant :

Prouver qu'on peut circonscrire une circonférence à tout polygone régulier. (G., n° 163.)

**145 a. Note.** Les mots *méthode par duplication* se trouvent dans un ouvrage de M. PAUL SERRET : *Des Méthodes en Géométrie,* 1855. Ce livre remarquable nous a été fort utile.

* M. PAUL SERRET, né à Aubenas en 1827, a publié divers articles dans les *Nouvelles annales de M. Gérono.* Il professait, de nos jours, à l'Institut catholique de Paris.

**Théorème.**

**146.** *Dans un triangle isocèle, la somme des distances d'un point quelconque de la base aux deux autres côtés est constante, et la différence des distances d'un point pris sur le prolongement de la base est aussi constante.*

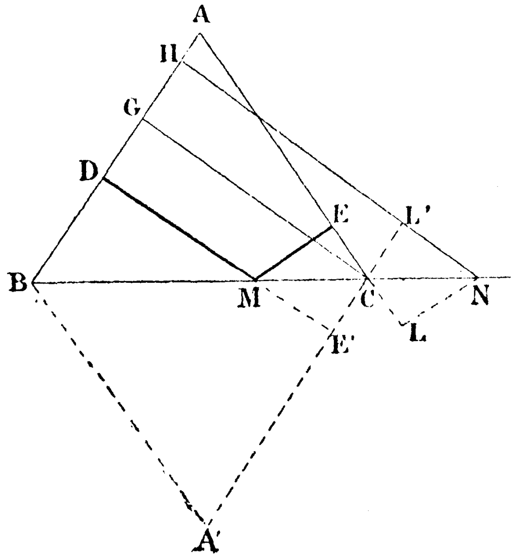


Fig. 92.

Dans le rabattement, à cause des angles égaux en M, ME devient ME' sur le prolongement de DM.

Or DE' = CG, quantité constante.

De même NL devient NL', et NH — LN = L'H = CG.

**Problème.**

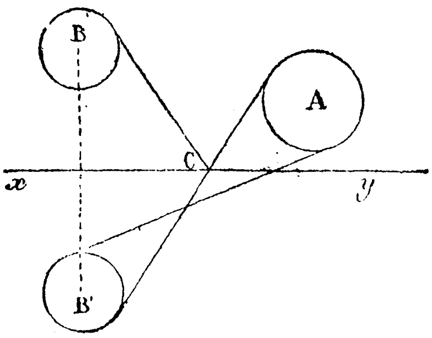



Fig. 93.

**147.** *Sur une droite donnée* xy, *déterminer un point* C *tel que les tangentes menées de ce point à deux circonférences données* A *et* B *fassent des angles égaux avec* xy.

Je cherche B′ symétrique de B; je mène une tangente commune aux circonférences A et B′.

Le point C est le point demandé.

Il y a généralement quatre solutions.

**Problème.**

**147 a.** *Sur une droite* OY, *déterminer un point* M, *tel que la somme des distances* MA + MB *de ce point à un point donné* A *et à une droite donnée* OX *soit minima.*

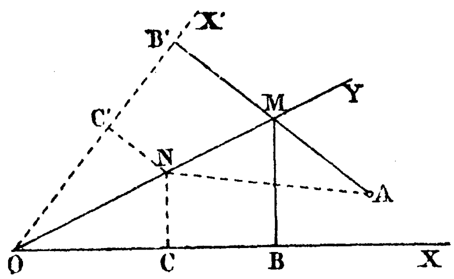



Fig. 94.

Menons la droite OX′ symétrique de OX, par rapport à OY, et abaissons la perpendiculaire AMB′ sur OX′.

On aura :

$$MA + MB < NA + NC;$$

donc...

**Problème.**

**148.** *Dans un triangle, déterminer la droite symétrique d'une médiane, par rapport à la bissectrice qui part du même sommet. Prouver que les distances de chacun de ses points aux deux côtés sont proportionnelles à ces mêmes côtés.*

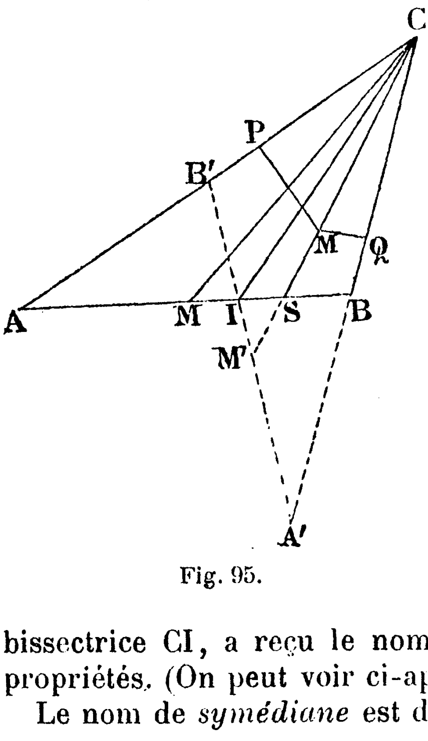



Fig. 95.

1° Il suffit de prendre $CA' = CA$, $CB' = CB$ et de mener la médiane CM′ du triangle A′CB′.

2° Les distances d'un point quelconque d'une médiane aux côtés qui partent du même sommet, sont inversement proportionnelles à ces côtés (voir ci-après, n° 163); donc on a :

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{CA'}{CB'}, \quad \text{ou} \quad \frac{MP}{MQ} = \frac{CA}{CB}.$$

*Remarque.* La droite CS, symétrique de la médiane CM, par rapport à la bissectrice CI, a reçu le nom de *symédiane;* elle jouit de nombreuses propriétés. (On peut voir ci-après, n° 2331.)

Le nom de *symédiane* est dû à M. MAURICE D'OCAGNE.

### Théorème de Fuss.

**149.** *Quelle que soit la base* AB *du triangle sphérique* ACB, *le lieu du troisième sommet* C *est un grand cercle, lorsque la somme des arcs latéraux est une demi-circonférence.* (*Aperçu historique,* page 326, *note* 1.)

Soit arc AC + arc BC $= \pi R$.

La somme constante des arcs étant une demi-circonférence, nous sommes conduits à considérer une figure double de celle qui est donnée. Pour cela, déterminons les points symétriques de A et B, par rapport au diamètre parallèle à la corde AB, ou bien menons les diamètres AOA′, BOB′.

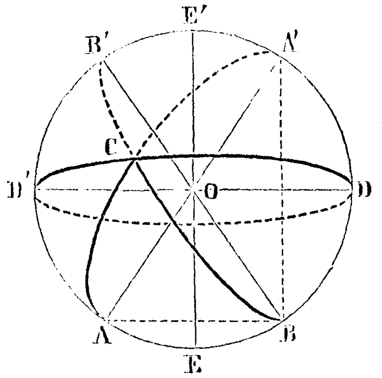


Fig. 96.

L'arc AC + arc BC $= \pi R$

égale arc AC + arc CA′;

donc arc BC = arc CA′.

Ainsi, quelle que soit la longueur de la base AB et la position des demi-cercles ACA′, BCB′, le triangle sphérique BCA′ est isocèle, la corde BA′ est perpendiculaire à la corde AB; donc le sommet C a pour lieu géométrique le grand cercle DCD′, dont le plan est perpendiculaire au diamètre EE′ qui passe par le milieu de la base AEB.

**149 a. Note.** *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en géométrie,* par M. Chasles.

Nous avons eu fréquemment recours à cet ouvrage si complet et si riche en renseignements.

* M. Michel Chasles (1793-1880) est sans contredit un des plus féconds géomètres du XIX^e siècle. On doit à cet auteur de nombreux mémoires mathématiques, la *Géométrie supérieure*, l'*Aperçu historique,* les *Porismes d'Euclide,* un *Traité des coniques.*

* Nicolas Fuss (1755-1826), secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg. (Voir nº 1183, note.)

**149 b.** *Remarque.* A la méthode par duplication, on peut rattacher le procédé qui consiste à disposer les diverses parties d'une figure, de manière à ramener la question proposée à une question déjà connue. En voici deux exemples.

### Théorème.

**150.** *Lorsque deux triangles ont deux angles respectivement égaux et deux angles supplémentaires, les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels aux côtés opposés aux angles supplémentaires.*

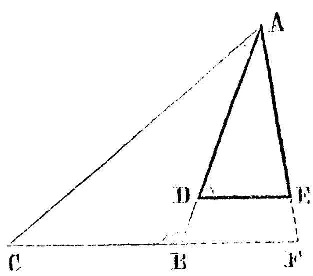


Fig. 97.

Plaçons les deux triangles en ABC et ADE, de manière que les angles égaux soient adjacents, et que le côté commun soit adjacent aux angles supplémentaires B et D.

A la seule disposition de la figure, on reconnaît le théorème de la bissectrice. (G., n° 215.)

On a :
$$\frac{AC}{CB}=\frac{AF}{BF};$$

donc
$$\frac{AC}{CB}=\frac{AE}{DE}, \quad \text{ou} \quad \frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}.$$

**Problème.**

**151**. *Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les quatre côtés*. (STURM.)

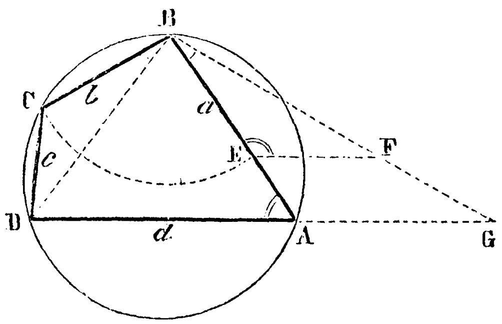



Fig. 98.

Supposons le problème résolu, et $a$, $b$, $c$, $d$, les quatre côtés donnés.

La propriété caractéristique du quadrilatère inscriptible d'avoir les angles opposés supplémentaires, et l'étude de l'exercice précédent (n° 150), conduisent à placer le triangle BCD en BEF, afin de découvrir quelque relation simple entre les lignes données.

EF est parallèle à DA, et le problème serait résolu si l'on pouvait construire le triangle DBG.

Or les triangles semblables ABG et EBF ou CBD donnent :
$$\frac{AG}{CD}=\frac{AB}{CB}, \quad \text{ou} \quad \frac{AG}{c}=\frac{a}{b};$$

d'où
$$AG=\frac{ac}{b}.$$

Ainsi DG est connu.

On peut déterminer en outre le rapport des côtés BD et BG.

En effet,
$$\frac{BD}{BG}=\frac{BE}{BA}=\frac{b}{a};$$

donc, par rapport aux points D et G, dont la distance DG est connue, il faut décrire le lieu des points B tels que le rapport des distances aux deux premiers égale $\frac{b}{a}$. Puis du point A comme centre, avec la longueur $a$ pour rayon, couper le lieu, et l'on trouve ainsi le point B.

Enfin circonscrire une circonférence au triangle ABD, et prendre une corde BC égale à $b$. La corde CD sera égale à la longueur donnée $c$.

**151 a. Note.** * STURM, né à Genève, en 1803, a passé la plus grande partie de sa vie à Paris ; il est mort professeur à l'École Polytechnique en 1855. On connaît son *Traité de calcul infinitésimal* et son *Traité de mécanique rationnelle*.

Son élégante démonstration du *parallélogramme des forces* se trouve dans la plupart des traités de mécanique ; on cite surtout le célèbre théorème algébrique connu sous le nom de *théorème de Sturm*.

## § III. — Composition ou décomposition.

**152. Composition.** La méthode par *composition* consiste à compléter une figure donnée, en ne la considérant que comme une partie d'une figure déjà connue.

*Exemples.* Pour avoir l'aire du triangle, on considère le parallélogramme, dont la première figure n'est que la moitié. (G., nº 314.)

Pour avoir le volume du prisme triangulaire, on considère le parallélépipède de volume double. (G., nº 443.)

Pour obtenir le volume de la pyramide triangulaire, on prouve que cette pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur. (G., nº 469.)

**153. Décomposition.** La méthode par *décomposition* consiste à partager la figure à étudier en plusieurs figures connues.

*Exemples.* Pour trouver la somme des angles d'un polygone, on décompose ce polygone en triangles. (G., nº 94.)

On procède de la même manière pour trouver l'aire d'un polygone. (G., nºs 317 et 319.)

Pour déterminer le volume du tronc de pyramide triangulaire ou du tronc de prisme, on décompose le tronc en trois tétraèdres. (G., nº 475.)

Dans la *Méthode de sommation* (G., nº 943), la surface à étudier est décomposée en rectangles, et le solide à évaluer est décomposé en prismes.

**154. Résumé.** Par la *composition* ou par la *décomposition*, la figure donnée est considérée comme étant la différence ou la somme de plusieurs figures connues.

(Voir nº 556, construction de polygones, comme application de cette méthode.)

### Théorème.

155. *Lorsque deux droites* AC, BD *de longueur donnée se coupent sous un angle constant, le quadrilatère* ABCD, *formé en joignant deux à deux les extrémités de ces droites, a une surface constante.*

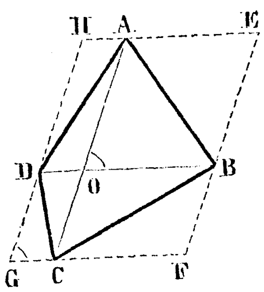


Fig. 99.

On peut donner plusieurs démonstrations élémentaires de ce théorème, mais la plus simple se rapporte à la méthode par *composition*.

Par les sommets A et C, menons des parallèles à la diagonale BD; et par les sommets B et D, menons des parallèles à AC.

Le parallélogramme ainsi formé est constant, car l'angle G ou O est donné, et il en est de même des côtés GF, GH. Or le quadrilatère est la moitié du parallélogramme, car le triangle AOB égale ABE, etc.; donc le quadrilatère a une surface constante.

**Théorème.**

**156.** *Lorsque trois droites de longueur donnée* AB, CD, EF *se coupent en un même point* O *et sous des angles constants, l'octaèdre qui aurait pour sommets les extrémités des trois droites, a un volume constant.*

En effet, le quadrilatère CEDF qui divise l'octaèdre en deux pyramides quadrangulaires, est la moitié du parallélogramme invariable LMNP, que l'on forme comme à l'exercice précédent. Or, en menant par les sommets A et B des plans parallèles au parallélogramme LMNP, et en menant par MN, NP, etc., des plans latéraux parallèles à AB, on forme un parallélépipède invariable, car les arêtes sont égales et parallèles aux trois lignes données AB, CD, EF, et ces lignes ont des longueurs données et se rencontrent sous des angles constants.

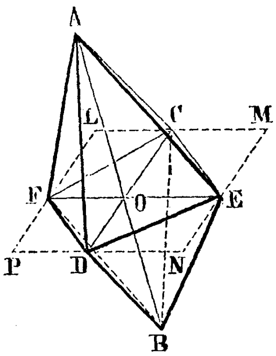


Fig. 100.

Mais la pyramide A,CDEF n'est que la sixième partie du parallélépipède de même hauteur et de base double LMNP, car le volume de la pyramide s'obtient en multipliant la base CEDF par le tiers de la perpendiculaire abaissée du point A sur la base. De même, la pyramide B,CDEF est le sixième du parallélépipède correspondant; donc *l'octaèdre a un volume constant*, car ce volume est le sixième de celui du parallélépipède total.

*Remarque.* Dans le cas particulier où les droites données sont rectangulaires deux à deux, on a : $V = \frac{1}{6}\,AB\,.\,CD\,.\,EF.$

**Problème.**

**157.** *Par les arêtes opposées d'un tétraèdre, on mène des plans parallèles; on forme ainsi un parallélépipède circonscrit; quel est le rapport des volumes des deux corps?*

Par les deux arêtes opposées AB et DC, on peut mener deux plans parallèles. En effet, si l'on mène CX parallèle à AB, le plan DCX sera parallèle à la droite AB, et par cette dernière ligne on pourra mener un plan parallèle au plan DCX. (G., n° 378.) De même, par les arêtes opposées AD, BC on peut mener deux plans parallèles entre eux. Enfin, par AC et BD, on peut aussi mener deux plans parallèles, et former ainsi un parallélépipède circonscrit au tétraèdre donné.

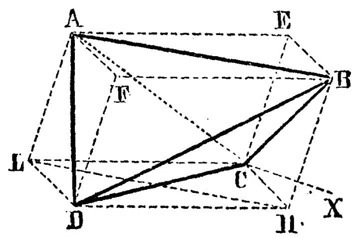


Fig. 101.

Le volume du tétraèdre égale celui du parallélépipède diminué de celui de quatre pyramides équivalentes, dont chacune est le sixième du parallélépipède.

En effet, la pyramide B,DCH a même hauteur que le parallélépipède, et sa base DCH n'est que la moitié du parallélogramme LDHC.

En représentant par P le volume du parallélépipède, on a donc : pyramide $B,DCH = \frac{1}{6}P$.

Il en est de même pour chacune des pyramides A,CDL, C,AEB, D,ABF ; donc le tétraèdre égale $P - \frac{4}{6}P = \frac{1}{3}P$.

*Ainsi le tétraèdre est le tiers du parallélépipède circonscrit.*

**Note.** Le théorème est de MONGE (d'après M. J. NEUBERG).

### Théorème de Steiner.

**158.** *Sur deux droites* XX′, YY′ *non situées dans un même plan, on prend respectivement deux longueurs données* AB, CD ; *prouver que le tétraèdre qui aurait pour sommets les quatre points* A, B, C, D, *a un volume constant, quelle que soit la position de* AB *sur* XX′, *et celle de* CD *sur* YY′.

Construisons le parallélépipède circonscrit, il suffit de prouver que le volume de ce corps est constant, car celui du tétraèdre en est le tiers (nº 157).

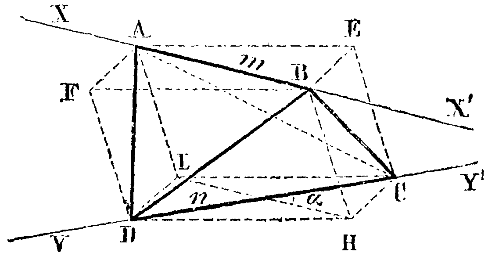


Fig. 102.

Or la diagonale HL est égale et parallèle à AB ; donc, quelle que soit la position des segments donnés AB et CD, le parallélogramme de base CHDL a une surface constante, car ses deux diagonales ont des longueurs données et se coupent sous un angle égal à celui que forment entre elles les droites XX′ et YY′.

La hauteur ou perpendiculaire abaissée du point B, par exemple, sur la base CHDL, est la longueur de la plus courte distance des lignes XX′, YY′ (G., nº 441) ; donc elle ne varie point. Par suite, le volume du parallélépipède est constant, et il en est de même du tétraèdre.

**158 a.** *Remarque.* Dans le cas particulier où les droites CD et LH seraient perpendiculaires l'une à l'autre, et représentées comme longueurs par $m$ et $n$, la surface de la base serait $\frac{mn}{2}$. Si $d$ représente la plus courte distance des droites XX′, YY′, on aurait, pour le parallélépipède :

$$\text{Volume} = \frac{mnd}{2} ;$$

donc le tétraèdre serait : $\frac{mnd}{6}$.

Si les diagonales forment entre elles un angle $\alpha$, on a :

$$\text{Tétraèdre} = \frac{mn \cdot \sin\alpha}{2} \cdot \frac{d}{3}, \quad \text{ou} \quad \frac{mnd \cdot \sin\alpha}{6}. \quad (\textit{Trig.}, \text{ nº } 76.)$$

Cette expression du volume du tétraèdre étant connue peut servir à démontrer le *théorème de Steiner*.

La formule $$V = \frac{mnd}{6} \cdot \sin\alpha$$

est due à P. LENTHÉRIC et à TIMMERMANS (*Annales de mathématiques*, 1828, p. 250, d'après LE COINTE, *Fonctions circulaires*, p. 380).

**158 b. Note.** * STEINER, né à Soleure en 1796, mort à Berne en 1863, professeur à Berlin, auteur de nombreuses questions proposées dans les *Annales de Gergonne*, ou dans le *Journal de Crelle*, a publié, en 1832, l'ouvrage intitulé : *Développement systématique de la dépendance des formes géométriques*.

Les *Annales mathématiques* de GERGONNE ont été publiées de 1810 à 1831 ; elles comprennent vingt et un volumes, et contiennent de nombreux articles de LHUILIER, de PONCELET et de STEINER. On y trouve la première exposition de la méthode si féconde des *Polaires réciproques*. (Voir aussi n° 251 **f.**)

Le *Journal de mathématiques pures et appliquées* du docteur CRELLE a été fondé en 1826. Il a rendu en Allemagne des services analogues à ceux qu'ont rendus en France les *Annales de Gergonne* et les *Nouvelles Annales de Terquem et Gérono*.

* P. LENTHÉRIC, professeur à la faculté des sciences de Montpellier.

* TIMMERMANS, professeur à l'athénée royal de Tournay.

* CRELLE (1780-1855), ingénieur des ponts et chaussées en Prusse.

**Théorème.**

159. *En prenant deux à deux les arêtes opposées d'un tétraèdre, on obtient trois groupes d'arêtes.*

1° *Un tétraèdre peut avoir un, deux ou trois groupes d'arêtes égales.*

2° *Un tétraèdre peut avoir un seul groupe d'arêtes perpendiculaires l'une à l'autre, ou trois groupes d'arêtes perpendiculaires.*

1° Pour que deux arêtes opposées AB et DC ou LH et DC soient égales, il faut et il suffit que la base CHDL soit un rectangle. Dans ce cas, le parallélépipède serait à base rectangle, mais les deux autres faces BHCE, BHDF seraient des parallélogrammes quelconques.

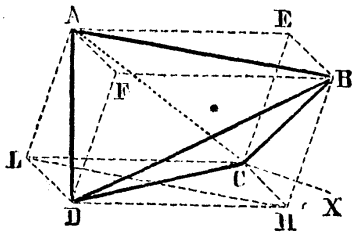


Fig. 103.

Le parallélépipède droit a deux groupes de faces rectangulaires; donc le tétraèdre correspondant aura deux groupes d'arêtes égales.

Enfin le tétraèdre aura trois groupes d'arêtes égales, si le parallélépipède est rectangle.

2° Pour que deux arêtes opposées AB et DC ou LH et DC soient perpendiculaires l'une à l'autre, il faut que la face CHDL soit un losange.

Si dans deux groupes les arêtes opposées sont rectangulaires, il en est de même dans le troisième groupe.

En effet, si AD est perpendiculaire à BC, la figure BHCE est un losange ; donc
$$HB = HC = HD.$$

Ainsi la face HBFD est aussi un losange, et l'arête BD est perpendiculaire à AC.

*Remarque.* On nomme tétraèdre *orthogonal* le tétraèdre dont les trois groupes d'arêtes sont formés par des lignes perpendiculaires l'une à l'autre.

Le tétraèdre orthogonal jouit de nombreuses propriétés pour l'étude desquelles on peut consulter les ouvrages suivants :

*Nouvelles Annales*, année 1854, pages 296 et 385 ; année 1871, page 451.

*Questions de Géométrie*, par M. DESBOVES, 3e édition, pages 218 et 219.
*Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, par J. BOURGET et KŒHLER, année 1881, pages 337 et suivantes.

### Théorème de Guéneau d'Aumont.

**160.** *La somme de deux angles opposés d'un quadrilatère sphérique inscrit est égale à la somme des deux autres angles.* (*Aperçu historique de* CHASLES, page 238.)

Soient O le centre de la sphère, ABCD le quadrilatère formé par quatre arcs de grand cercle, dont les sommets A, B, C, D se trouvent sur une même circonférence ayant P pour un de ses pôles. (G., nº 544.) Il faut démontrer que les angles dièdres qui correspondent aux arêtes AO, CO, ont une somme égale à celle des dièdres qui correspondent aux arêtes BO, DO.

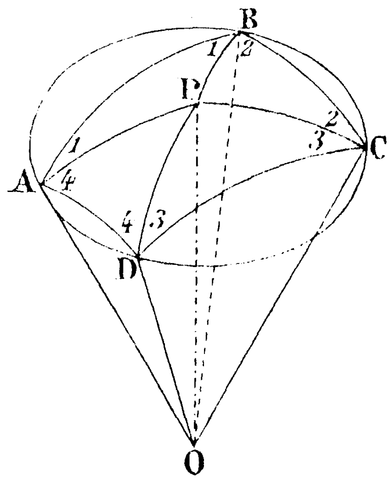


Fig. 104.

Par le pôle P et par chaque sommet faisons passer des grands cercles; chaque côté AB, par exemple, est la base d'un triangle isocèle APB, car l'arc

$$PA = PB;$$

donc l'angle $\quad BAP = ABP;$

ou $\quad 1 = 1; \quad 2 = 2, \quad$ etc.

Or la somme de deux angles dièdres opposés se compose de

$$1 + 2 + 3 + 4;$$

donc $\quad A + C = B + D.$

**160 a. Note.** * GUÉNEAU D'AUMONT, professeur durant de longues années au collège royal de Dijon, puis à la Faculté de cette ville, s'est distingué par son zèle pour l'enseignement. Le théorème qui porte son nom a été publié dans le tome XII, année 1821-1822, des *Annales de Gergonne*.

## § IV. — Surfaces auxiliaires.

**161.** *Surfaces auxiliaires.* La méthode des *Surfaces auxiliaires* consiste à faire intervenir des surfaces, lorsqu'il s'agit d'établir certaines relations entre des lignes données.

En voici quelques exemples :

### Théorème.

**162.** *La bissectrice de l'angle d'un triangle divise le côté opposé en segments proportionnels aux côtés adjacents.*

En effet, les triangles BCI, ACI, ayant même sommet C et leurs bases respectives sur la même droite, sont dans le même rapport que leurs bases $m$ et $n$.

Ces mêmes triangles ont des hauteurs égales $h$; ils sont donc entre eux comme $a$ et $b$; donc

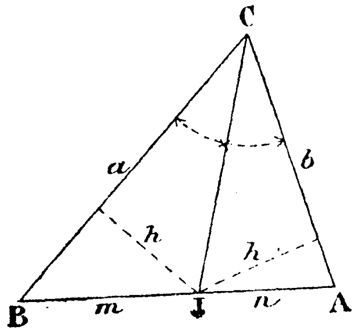


Fig. 105.

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}.$$

De même pour la bissectrice extérieure.

**Théorème.**

**163**. *Dans un triangle isocèle, la somme des distances d'un point quelconque de la base aux deux autres côtés est constante, et la différence des distances d'un point pris sur le prolongement de cette base est aussi constante.*

Menons AM, AN et CG perpendiculaire abaissée du point C sur AB.

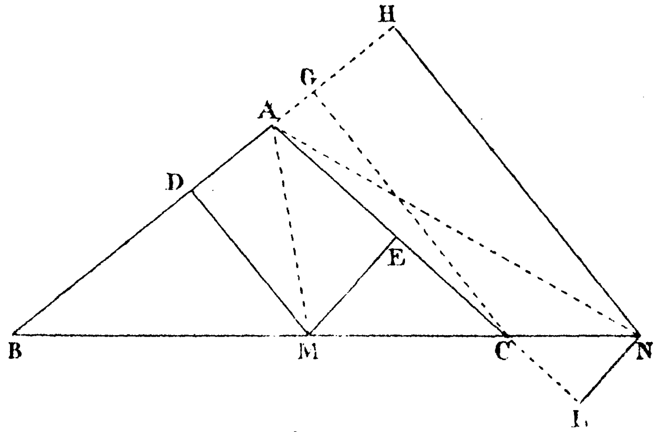


Fig. 106.

Le double de l'aire du triangle isocèle peut être exprimé par

$$AB \,.\, CG,$$

ou par
$$AB \,.\, MD + AC \,.\, ME,$$

lorsque l'on considère les deux triangles ABM, AMC; mais $AC = AB$.

Donc
$$AB \,.\, CG = AB(MD + ME);$$

d'où MD plus ME égale la perpendiculaire CG abaissée du point C sur le côté AB.

Pour le point N on a :

$$AB \,.\, CG = AB \,.\, NH - AC \,.\, NL;$$

d'où
$$CG = NH - NL.$$

*Remarque*. La question précédente a déjà été traitée par une autre méthode (n° 146).

**Théorème.**

**164**. *Les distances d'un point quelconque d'une médiane aux côtés qui partent du même sommet, sont inversement proportionnelles à ces côtés.*

En effet, $$\frac{MP}{MQ}=\frac{M'P'}{M'Q'}.$$

Or les triangles CBM', ABM' sont équivalents ; donc

$$a \cdot M'P' = c \cdot M'Q';$$

d'où $$\frac{M'P'}{M'Q'}=\frac{MP}{MQ}=\frac{c}{a}.$$

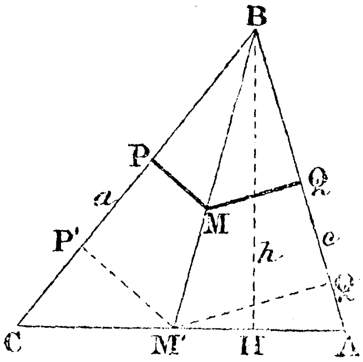


Fig. 107.

**Théorème.**

**165**. *Lorsque trois droites issues des sommets d'un triangle se coupent au même point* O, *on a la relation*

$$\frac{DO}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OG}{CG}=1.$$

En effet, les triangles BOC et BAC sont entre eux comme leurs hauteurs, ou comme les lignes OD et AD, proportionnelles à ces hauteurs :

$$\frac{BOC}{BAC}=\frac{DO}{AD}; \quad \text{de même} \quad \frac{AOC}{ABC}=\frac{OE}{BE},$$

et $$\frac{BOA}{ABC}=\frac{OG}{CG}.$$

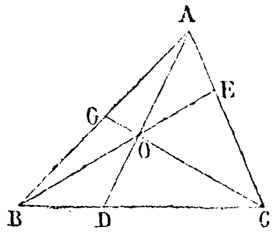


Fig. 108.

En ajoutant ces égalités on trouve :

$$\frac{BOC+BOA+AOC}{ABC}, \text{ ou } 1=\frac{DO}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OG}{CG}.$$

On trouverait, par une marche analogue, que

$$\frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CG}=2.$$

**Théorème de Ménélaüs.**

**166**. *Lorsqu'une transversale coupe les trois côtés d'un triangle, le produit des trois segments n'ayant pas d'extrémité commune, égale le produit des trois autres segments.*

Désignons par A, B, C les triangles ALN, BLM, CMN.

On peut écrire : $$\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{C}\cdot\frac{C}{A}=1.$$

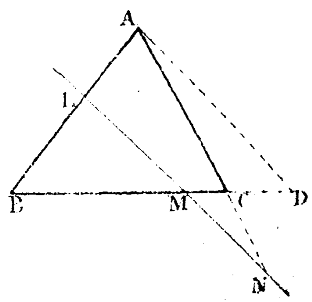


Fig. 109.

Or les triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle ;

donc (G., n° 329)

$$\frac{A}{B} = \frac{AL \cdot LN}{BL \cdot LM},$$

$$\frac{B}{C} = \frac{BM \cdot LM}{CM \cdot MN},$$

$$\frac{C}{A} = \frac{CN \cdot MN}{AN \cdot LN}.$$

En multipliant ces égalités membre à membre et simplifiant, on a :

$$\frac{A \cdot B \cdot C}{B \cdot C \cdot A}, \quad \text{ou} \quad 1 = \frac{AL \cdot BM \cdot CN}{BL \cdot CM \cdot AN},$$

ou

$$AL \cdot BM \cdot CN = BL \cdot CM \cdot AN.$$

**166 a. Note.** MÉNÉLAÜS (vers l'an 80 après J.-C.) a vécu à Alexandrie; il paraît être le premier qui se soit occupé de trigonométrie. On lui doit le théorème fondamental des transversales. Néanmoins ce théorème est fréquemment attribué à PTOLÉMÉE.

PTOLÉMÉE (vers 128 à 168 après J.-C.) résida à Canobe, près d'Alexandrie. Il est surtout connu comme astronome, et c'est par son *Almageste* que le théorème de MÉNÉLAÜS est venu jusqu'à nous. On lui doit aussi les premières notions de la doctrine des *projections*.

### Théorème de Céva.

**167.** *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle à un même point* O, *déterminent six segments tels que le produit de trois d'entre eux n'ayant pas d'extrémité commune, égale le produit des trois autres.*

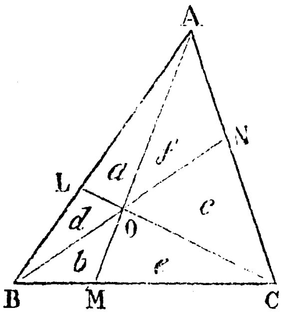



Fig. 110.

Désignons par $a$, $b$, $c$... les triangles AOL, BOM, etc.

Les triangles qui ont même sommet sont entre eux comme leurs bases ; on a donc :

$$\frac{a}{d} = \frac{AL}{BL}; \quad \frac{b}{e} = \frac{BM}{CM}; \quad \frac{c}{f} = \frac{CN}{AN};$$

d'où

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e \cdot f} = \frac{AL \cdot BM \cdot CN}{BL \cdot CM \cdot AN}.$$

Il suffit de prouver que $\frac{abc}{def} = 1$.

Or

$$\frac{a}{e} = \frac{OL \cdot OA}{OM \cdot OC},$$

$$\frac{b}{f} = \frac{OB \cdot OM}{OA \cdot ON},$$

$$\frac{c}{d} = \frac{OC \cdot ON}{OL \cdot OB},$$

En multipliant ces égalités membre à membre, on trouve :

$$\frac{abc}{def} = 1.$$

*Autre démonstration :* On peut dire plus simplement :

$$\frac{LA}{LB} = \frac{OCA}{OCB},$$

$$\frac{MB}{MC} = \frac{OAB}{OAC},$$

$$\frac{NC}{NA} = \frac{OBC}{OBA}.$$

$$\text{Produit} = 1.$$

**167 a. Note.** On peut nommer *cévienne* toute droite qui part du sommet d'un triangle pour se limiter au côté opposé. (Voir ci-après, nos 2262 et suivants.) On dit aussi *transversale angulaire.*

L'appellation de *cévienne* est utile dans la *Géométrie du triangle;* elle est due à M. A. POULAIN, professeur à la faculté catholique d'Angers.

* JEAN CÉVA, de Milan, publia divers ouvrages de mathématiques; entre autres, en 1678, *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio.*

Son frère, THOMAS CÉVA (1648-1737), construisit un instrument pour opérer mécaniquement la trisection de l'angle.

Voir l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1895, p. 182, n° 585, et 1899, p. 177.

### Théorème.

**168.** *La droite la plus courte que l'on puisse mener par un point donné* E *dans un angle donné, est définie par cette condition que la perpendiculaire* EC *à cette droite, menée par le point donné* E, *et les perpendiculaires* BC, DC *aux côtés de l'angle, menées par les extrémités de la droite* BED, *concourent en un même point* C. (NEWTON, *Opuscules,* tome I, page 87.)

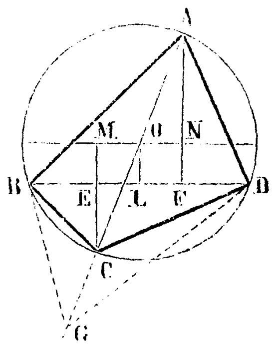



Fig. 111.

En admettant que les droites concourantes CB, CD, CE soient respectivement perpendiculaires aux côtés du triangle ABD, on reconnaît que le quadrilatère ABCD a deux angles opposés B et D qui sont droits; par suite, AC serait le diamètre du cercle circonscrit, et comme on a déjà prouvé que les côtés opposés BC, AD ont des projections BE, FD égales entre elles (n° 136), le théorème revient au suivant :

*La droite la plus courte qu'on puisse mener par un point donné* E *dans un angle donné* XAY (fig. 112) *est une droite* BEC *telle que le segment* BE *égale la projection* FC *du côté* AC. (De même, le segment CE égale alors la projection BF du côté AB.)

*Démonstration.* Soit $BE = FC$.

En élevant une perpendiculaire EG à BC et prenant $EG = AF$, on forme un parallélogramme ABGC.

Par le point E menons une autre droite MEN; il faut prouver que BC est $<$ MN.

Comparons les triangles BGC, MGN.

Si nous démontrons que BGC est plus petit que MGN, nous aurons prouvé que BC est $<$ MN, car la hauteur GE du premier est plus grande que la hauteur GH du second.

Or, à cause des parallèles AC et BG, les triangles BGC, BGN sont équivalents, car ils ont même base BG et même hauteur.

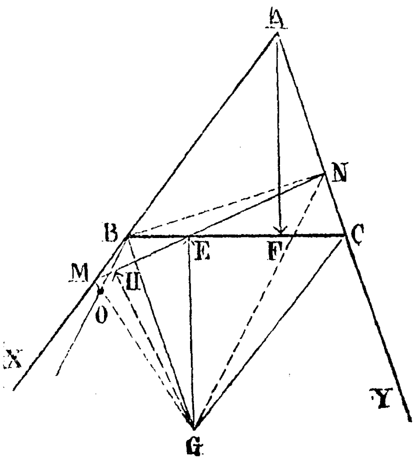



Fig. 112.

Il suffit donc de comparer BGN et MGN ; pour cela menons une parallèle BO au côté NG pris pour base. Le point O se trouve entre M et G, car l'angle GBO, égal à BGN, est plus petit que les angles égaux BGC, GBM ; donc la perpendiculaire abaissée du point B sur GN est plus courte que la perpendiculaire abaissée du sommet M sur la même base GN ; ainsi le triangle BGN est plus petit que MGN.

Donc le triangle BGC est plus petit que MGN,

d'où $$BC < MN.$$

**168 a. Note.** Le théorème précédent n'est qu'un cas particulier du théorème général de NEWTON : *La droite la plus courte qu'on puisse mener entre deux courbes données, de manière que cette droite* BEC *passe par un point donné ou soit tangente à une troisième courbe, est celle qui remplit les conditions suivantes : Les normales menées aux courbes par les extrémités* B *et* C *de la droite doivent concourir en un même point avec la normale menée à la troisième courbe par le point de contact* E.

On peut consulter les ouvrages suivants : *Annales de Gergonne*, tome II (1811-1812), p. 17, art. de LHUILIER de Genève. — *Principles of modern Geometry, by* JOHN MULCAHY, n° 104, page 106 ; *Questions de Géométrie*, par M. DESBOVES, pages 126, 434 ; et *Des méthodes en Géométrie*, par PAUL SERRET, n° 56, page 104. (Voir ci-après n° 1615 a.)

* NEWTON (1642-1727) naquit dans le comté de Lincoln, en Angleterre. Un de ses principaux ouvrages a pour titre : *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. NEWTON inventa le *calcul des fluxions*, qui ne diffère du *calcul différentiel* de LEIBNIZ que par le point de départ et par la notation. On doit aussi au géomètre anglais une première étude de la classification des *courbes du troisième degré*.

* LEIBNIZ, né à Leipzig en 1646, mort à Hanovre en 1716, est l'inventeur du *calcul différentiel*, nommé aussi *calcul infinitésimal* ; il avait trouvé ce nouveau calcul dès 1674 ou 1675, mais ce n'est qu'en 1684 que parut sa *Nova Methodus pro maximis et minimis*.

## § V. — Volumes auxiliaires.

**169.** *Volumes auxiliaires* L'emploi des volumes auxiliaires est analogue à celui des surfaces auxiliaires, mais il est beaucoup plus étendu. A l'aide des volumes auxiliaires ont peut chercher :

1° Des relations entre certaines lignes (n° 170) ;

2° L'aire d'une figure (n° 173) ;

3° Les propriétés d'une figure plane considérée comme section d'un solide (n° 174).

**Premier Cas.** *Relations linéaires.*

**Théorème.**

**170.** *Lorsqu'un tétraèdre a trois faces égales, la somme des distances d'un point quelconque de la quatrième face à chacune des trois autres est constante.*

La démonstration est analogue à celle d'un théorème connu (nº 163). On joint le point donné aux quatre sommets, ce qui décompose le solide donné en trois pyramides ayant pour base une des faces latérales, etc.

De même, le théorème relatif aux droites issues d'un même point (nº 165) conduit au théorème suivant, facile à démontrer à l'aide de volumes auxiliaires :

*Lorsque des droites issues de chaque sommet d'un tétraèdre se coupent en un même point O dans l'intérieur du solide, l'unité est la valeur de la somme des quotients obtenus en divisant, par la ligne entière correspondante, chaque segment compris entre le point O et la face de la pyramide.*

**Théorème.**

**171.** *Etant donné un point à l'intérieur d'un polyèdre régulier, la somme des perpendiculaires abaissées de ce point sur les faces du polyèdre est une quantité constante.*

On prend chaque face pour base d'une pyramide ayant en premier lieu le point donné pour sommet, puis on considère un autre groupe de pyramides ayant pour sommet le centre du polyèdre.

Le volume s'obtient tantôt en multipliant le tiers d'une face par la somme des perpendiculaires, et tantôt en multipliant le tiers d'une face par la somme des apothèmes du polyèdre ; donc la somme des perpendiculaires est constante, car elle égale celle des apothèmes.

**172.** *Remarque.* La méthode par les surfaces ou les volumes auxiliaires est parfois moins élégante qu'une solution directe ; mais elle s'applique à un assez grand nombre de questions. Au point de vue des méthodes que l'on peut employer pour démontrer le théorème connu :

*La somme des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la base d'un triangle isocèle sur les côtés égaux est une quantité constante*, on peut faire les remarques suivantes :

La démonstration donnée (nº 20) est ingénieuse, mais ne s'applique qu'à cette question. La méthode par duplication (nº 74) est plus générale, mais ne convient qu'aux figures planes ; et l'emploi des surfaces auxiliaires (nº 163) a de bien plus nombreuses applications et conduit à des démonstrations analogues pour la géométrie dans l'espace.

**2e Cas.** *On considère des volumes connus, pour obtenir l'aire d'une surface demandée.*

**Problème.**

**173.** *Trouver la surface convexe d'un cône de révolution coupé par une section oblique.*

La section BC est une ellipse dont on peut mesurer ou calculer les axes. Du point D, où l'axe rencontre la section, abaissons une perpendiculaire DE sur une génératrice; abaissons la perpendiculaire AH sur la section.

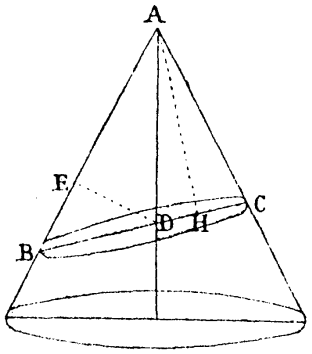


Fig. 113.

Le volume du cône ABC égale :

$$\text{ellipse BC} \times \frac{AH}{3};$$

mais le point D est à égale distance de toutes les génératrices. Le cône peut donc être regardé comme la limite vers laquelle tend la somme des pyramides triangulaires qui auraient le point D pour sommet, et dont le triangle de base aurait pour côtés deux génératrices voisines et une corde de l'ellipse. Donc le volume peut s'obtenir en multipliant la surface latérale par $\frac{DE}{3}$; donc aussi

$$\text{surface convexe BAC} = \frac{\text{ellipse CB} \times AH}{DE}.$$

Voir *Appendice aux Exercices de Géométrie*, nos 875 et 876, et ci-après la note du no 199.

Cet exercice 173 permet d'étudier la *sinusoïde*, connaissant le volume de l'onglet cylindrique.

**3e Cas.** ***On emploie un volume auxiliaire, afin d'étudier les propriétés d'une figure plane, que l'on peut considérer comme étant une section du solide.***

**Théorème.**

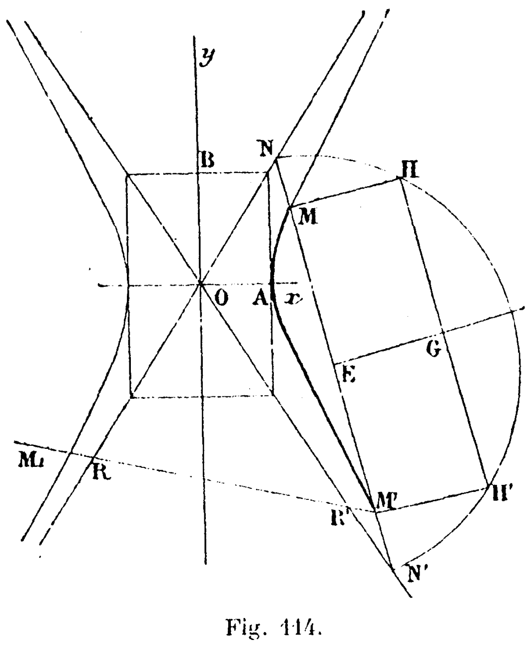


Fig. 114.

**174.** *Sur une sécante quelconque, l'hyperbole et ses asymptotes interceptent des segments égaux.*

Considérons le cône formé par la rotation de ON autour de $Ox$.

Un plan sécant perpendiculaire au méridien principal, et dont la trace serait NN', couperait le cône suivant une ellipse, puisque toutes les génératrices de la même nappe seraient rencontrées. (G., no 844.)

Soit NHN' le rabattement de la moitié de l'ellipse : le plan qui donne l'hyperbole est éloigné de l'axe du cône de la longueur OB; donc sa trace sur l'ellipse est une corde HH' parallèle à NN' et telle que EG = OB. Mais, NN' étant le grand axe de l'ellipse, la perpendiculaire élevée au milieu de NN′ divise toute corde parallèle en deux parties égales : ainsi $GH = GH'$; donc $MN = M'N'$.

Si la sécante coupait les deux branches, la section serait une hyperbole dont RR′ serait l'axe transverse, $M'M_1$ serait la projection d'une corde parallèle; donc encore $M_1R = M'R'$.

*Application.* A l'aide de la propriété démontrée, on construit très facilement une hyperbole lorsqu'on connaît les asymptotes et un point de la courbe.

**175.** Corollaire. *Toute tangente limitée aux asymptotes est divisée en deux parties égales par le point de contact.*

**Note.** On trouve facilement la plupart des propriétés de l'ellipse lorsqu'on la considère comme étant obtenue par la section oblique d'un cône de révolution. MAC-LAURIN, dès 1742, en donne de nombreux exemples dans son *Traité des fluxions,* tome II, chap. XIV, page 96.

### Théorème de d'Alembert.

**176.** *Trois circonférences, considérées deux à deux, ont six centres de similitude ; les trois centres extérieurs sont en ligne droite ; il en est de même de deux centres intérieurs et d'un centre extérieur.*

*Démonstration de* MONGE. Considérons des sphères ayant pour grands cercles les cercles donnés A, B, C. Les cônes, circonscrits à ces sphères prises deux à deux, ont respectivement pour sommets les centres de similitude.

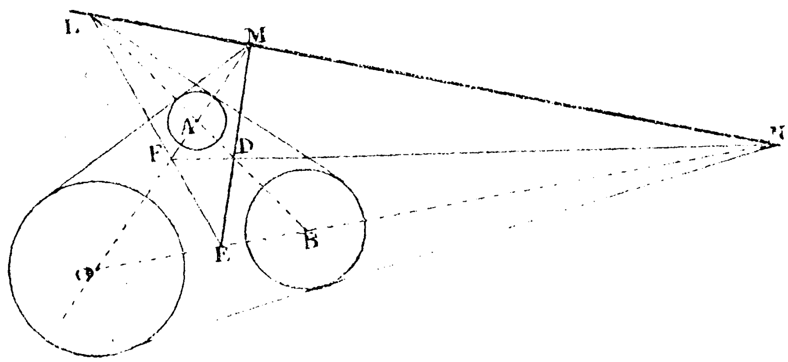



Fig. 115.

Pour démontrer que les trois centres extérieurs L, M, N sont en ligne droite, il suffit de considérer les deux plans tangents qui laissent les trois sphères d'un même côté. Ces deux plans contiennent les trois sommets L, M, N des cônes circonscrits; or deux plans se coupent suivant une droite ; donc les trois points L, M, N sont en ligne droite.

*Remarque.* Pour F, D, N, on considère les deux plans tangents qui laissent les sphères B et C d'un même côté, tandis que la sphère A est de l'autre côté, etc.

**Note.** * D'ALEMBERT, né à Paris en 1717, mort en 1783. On lui doit un *Traité de dynamique,* le *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides,* et un grand nombre d'autres écrits.

* MONGE, né à Beaune en 1746, mort à Paris en 1818, élève, puis répétiteur à l'école militaire de Mézières, est le principal créateur de la *géométrie descriptive*. Après avoir accompagné Bonaparte en Égypte, il eut à son retour la direction de l'École Polytechnique.

### Théorème de Desargues.

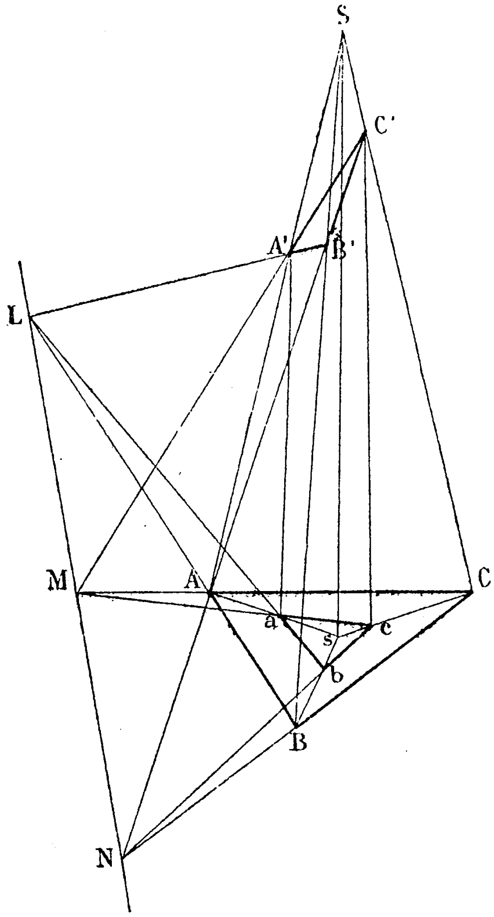



Fig. 116.

**177.** *Lorsque les côtés de deux triangles* ABC, abc *se coupent deux à deux en trois points situés en ligne droite, les droites* Aa, Bb, Cc, *qui joignent les sommets correspondants se coupent au même point.*

Admettons que *abc* soit la base d'un prisme triangulaire, dont A'B'C' serait la section par un plan mené par la droite LMN.

Les droites AB, A'B' concourent au point L, car LA'B' est l'intersection du plan sécant et du plan conduit par L*ab*.

Il est évident que les droites AA', BB', CC' concourent en un même point S; car si par les lignes concourantes LAB, LA'B' on fait passer un premier plan, puis un second par MAC, MA'C', un troisième par NBC, NB'C', les trois plans se coupent en un même point S.

Donc les trois droites A*a*, B*b*, C*c* concourent en un même point *s*, projection du sommet S de la pyramide sur la base ABC.

**Note.** * DESARGUES, né à Lyon en 1593, mort en 1662, s'occupa surtout de la partie pratique des mathématiques. PASCAL, DESCARTES, FERMAT, LA HIRE, ont profité des idées de cet auteur. On doit à DESARGUES le théorème relatif à deux triangles dont les sommets sont deux à deux sur trois droites concourantes, théorème que PONCELET a pris pour base de sa théorie des figures homologiques. (Voir ci-après nos 1247-1249.)

### Théorème.

**177 a.** *Lorsque les sommets de deux triangles* ABC, abc *sont deux à deux sur trois droites qui concourent en un même point* s, *les côtés des triangles se coupent deux à deux, en trois points* L, M, N *situés en ligne droite.*

Considérons une pyramide dont *sa*A, *sb*B, *sc*C seraient les projections des arêtes latérales. Les projetantes qui correspondent aux sommets *a*, *b*, *c* donneraient A', B', C', sur les arêtes correspondantes.

Or le plan de la section A'B'C' coupe celui de la base suivant une certaine droite, et les côtés correspondants AB, A'B' se coupent sur cette droite, en L, par exemple ; donc $ab$ passe aussi par ce point, car $ab$ est la projection de A'B'.

**177 b. Note.** Les deux théorèmes de *Desargues* sont fondamentaux dans la théorie de l'*homologie*.

L'*homologie*, comme corps de doctrine et procédé général de transformation des figures, est due à PONCELET. Pour se rendre compte de la fécondité de cette méthode et de l'esprit investigateur du créateur de l'homologie, il faut lire son *Traité des propriétés projectives des figures*, et les *Applications d'analyse et de géométrie*, du même auteur.

*Traité des propriétés projectives des figures*, 2 vol. in-4°. La première édition est de 1822, et la seconde de 1865. Les premières recherches datent de 1813, pendant la captivité de l'auteur en Russie ; elles furent communiquées dès 1814 à MM. FRANÇAIS et SERVOIS, professeurs aux écoles d'artillerie et du génie à Metz.

Quelques fragments de ces recherches ont été publiés en 1817-1818 dans le tome VIII des *Annales de Gergonne*.

* SERVOIS (1767-1847), officier d'artillerie, quitta le service actif à trente-trois ans, pour étudier et professer à Metz ; il publia, en 1812, les *Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique*.

## § VI. — Projections ou Sections.

**178.** La méthode des projections ou des sections est, en quelque sorte, la contre-partie de la méthode qui emploie des surfaces ou des volumes auxiliaires pour étudier des questions de géométrie plane. En effet, par la méthode des projections, on se propose d'obtenir une figure plus simple que la figure proposée, ou bien on ramène une question de géométrie dans l'espace à un exercice plan, se bornant à étudier la section obtenue en coupant le solide par un plan convenablement choisi.

Nous ne considérons ici que la *projection cylindrique*, c'est-à-dire la projection obtenue par des droites parallèles entre elles, mais dans une direction d'ailleurs quelconque par rapport au plan de la section. Ainsi, étudier la projection plane d'une figure donnée revient à considérer la section du cylindre formé par les projetantes de cette figure donnée.

### Théorème.

**179.** *La bissectrice de l'angle d'un triangle divise le côté opposé en segments proportionnels aux côtés adjacents.*

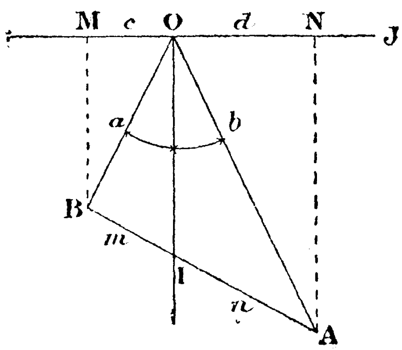


Fig. 117.

Projetons les sommets A et B sur la bissectrice extérieure OJ.

Les côtés $a$ et $b$, étant également inclinés sur OI, sont proportionnels à leurs projections $c$ et $d$.

Il en est de même des segments $m$ et $n$ ;

donc $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}.$$

*Remarque.* Pour les segments déterminés par la bissectrice extérieure, on projette ces segments et les côtés adjacents sur la bissectrice intérieure. La démonstration est tout aussi simple que la précédente.

### Théorème de Ménélaüs.

**180.** *Lorsqu'une transversale coupe les trois côtés d'un triangle, le produit des trois segments n'ayant pas d'extrémité commune, égale le produit des trois autres segments* (nº 166).

Sur une droite quelconque, projetons les trois sommets du triangle par des lignes A$a$, B$b$, C$c$, parallèles à la transversale. Le point $o$ est la projection des trois points L, M, N.

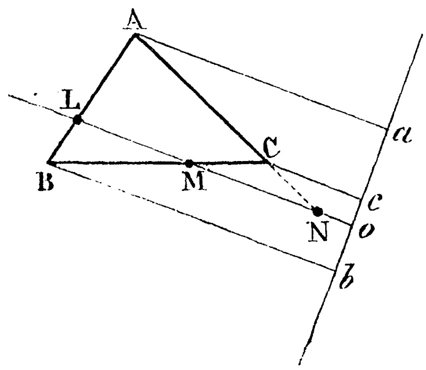


Fig. 118.

Les parallèles divisent les sécantes en parties proportionnelles ; on peut donc remplacer le rapport $\frac{AL}{BL}$ par $\frac{ao}{bo}$, etc.

Mais $AL \cdot BM \cdot CN = BL \cdot CM \cdot AN$,

ou $\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = 1$, peut être remplacé par

$$\frac{ao}{bo} \cdot \frac{bo}{co} \cdot \frac{co}{ao} = 1.$$

Or cette dernière égalité est évidente ; la relation demandée est par suite démontrée.

### Théorème de Carnot.

**181.** *Lorsqu'une transversale coupe les côtés d'un polygone plan, chaque côté est divisé en deux segments; le produit de tous les segments n'ayant pas d'extrémité commune, égale le produit de tous les autres segments.*

Soit, par exemple, un pentagone ABCDE dont les côtés successifs AB, CD, ... sont coupés par une transversale en des points H, K, L, M, N.

Projetons la figure sur une droite quelconque $xy$ située dans son plan. par des droites parallèles à la transversale, et soit $o$ le point où cette ligne rencontre $xy$.

Il faut prouver qu'on a :

$$\frac{AH}{BH} \cdot \frac{BK}{CK} \cdot \frac{CL}{DL} \cdot \frac{DM}{EM} \cdot \frac{EN}{AN} = 1,$$

ou

$$\frac{ao}{bo} \cdot \frac{bo}{co} \cdot \frac{co}{do} \cdot \frac{do}{eo} \cdot \frac{eo}{ao} = 1.$$

Or cette dernière relation est évidente. La première est donc démontrée.

**181 a.** *Remarque.* On démontre aussi d'une manière fort simple la généralisation suivante :

*Lorsqu'un plan coupe les côtés d'un polygone gauche, chaque côté est divisé en deux segments; le produit de tous les segments n'ayant pas d'extrémité commune, égale le produit de tous les autres segments.*

Il suffit de projeter la figure sur un plan parallèle au plan sécant, en recourant à des droites parallèles à ce même plan sécant; car on retombe sur le *théorème de Carnot*.

**181 b. Note.** * CARNOT, né à Nolay (Côte-d'Or) en 1753, mort à Magdebourg en 1823, élève de MONGE à l'école de Mézières, publia un *Essai sur les transversales*, *De la corrélation dans les figures de géométrie*, la *Géométrie de position*.

On ne cite généralement que la *Géométrie de position*, publiée en 1803; mais le théorème ci-dessus, ainsi que son extension à un polygone gauche, se trouve déjà dans l'ouvrage publié en 1801 : *De la corrélation des figures de géométrie*, nos 220 et 221, page 162.

**Lieu.**

**182.** *Une pyramide triangulaire* SABC *est coupée par un plan qui rencontre le plan de base suivant* LMN, *et détermine dans la pyramide une section* A'B'C'. *On fait tourner la section* A'B'C' *autour de l'axe* MN, *et l'on joint* AA', BB', CC'; *quel est le lieu décrit par le sommet de la pyramide ainsi obtenue?*

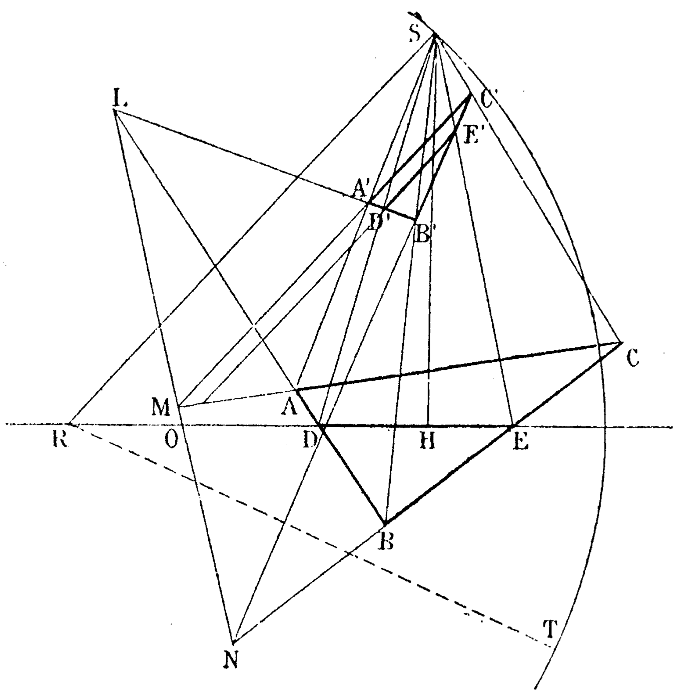



Fig. 119.

Par la hauteur SH menons un plan SHOR perpendiculaire à l'axe de rotation; ce plan détermine deux droites DE, D'E' dont il suffit d'étudier la position respective, car elles sont invariablement liées à la base et à la section. Le problème revient donc à une question connue de géométrie plane. *On demande le lieu décrit par le point de concours* S *des droites* DD', EE' (no 84).

Le sommet S décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à MN; R en est le centre et RS le rayon.

*Remarque.* On peut considérer le point S comme le point de vue de deux figures perspectives A'B'C', ABC, et la question s'annonce fréquemment sous la forme de théorème :

*Lorsqu'une figure* ABC *reste fixe et que sa perspective* A'B'C' *tourne autour de la trace du tableau* LMN, *le lieu du point* S *est un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe* LMN.

**182 a. Note.** Le théorème précédent, n° 182, a été indiqué par Poncelet dans l'étude de l'homologie; mais il est attribué ordinairement à Steiner, qui l'a formulé explicitement dans le *Journal de Crelle.*

La démonstration que nous donnons est très simple; néanmoins on lira avec fruit la solution de Bobillier, dans les *Annales de Gergonne,* tome XVII (1826-1827), p. 335, et celle de A. Amiot, *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire,* 2e édition, p. 570. — L'édition de 1897 a été revue par M. Vintéjoux, professeur honoraire de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

* A. Amiot, ancien professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, est surtout connu par les nombreux élèves qu'il a préparés pour l'École Normale supérieure et pour l'École Polytechnique. On lui doit divers ouvrages classiques, entre autres des *Éléments de géométrie* et des *Leçons nouvelles de géométrie descriptive.*

### Théorème.

**183.** *Dans un trièdre, les trois plans menés par une arête et la bissectrice de l'angle de la face opposée se coupent suivant une même droite.*

Prenons des grandeurs égales SA, SB, SC sur chaque arête; nous aurons une pyramide ayant pour base ABC et pour faces latérales trois triangles isocèles. La bissectrice de l'angle au sommet de chacun d'eux passe au milieu du côté opposé; donc les traces sur le plan ABC des trois plans menés dans le trièdre sont les médianes du triangle ABC; or ces lignes se coupent en un même point M; par suite, les trois plans se coupent suivant SM.

### Problème.

**184.** *Circonscrire un cône de révolution à un trièdre donné.*

D'après le théorème précédent, on voit qu'il suffit de circonscrire une circonférence au triangle ABC, obtenu en prenant

$$SA = SB = SC.$$

Les arêtes étant égales, le cône sera de révolution.

*Remarques.* 1° On peut circonscrire quatre cônes de révolution à deux nappes, à trois droites qui passent par un même point.

De même on peut inscrire quatre cônes de révolution à deux nappes, à trois plans qui passent par un même point.

2° La Géométrie descriptive permet d'effectuer les constructions relatives à ce problème. (Voir *Éléments de Géométrie descriptive,* par F. J., et les *Exercices de Géométrie descriptive,* 4e édition.)

# IV

## TRANSFORMATION DES FIGURES

**185**. *Définition*. La méthode dite par Transformation des figures consiste à remplacer une figure donnée par une figure plus simple, liée à la première par des relations de position et de grandeur.

Dans l'exposé des méthodes élémentaires, nous emploierons les transformations qui résultent des modifications suivantes :

1° Le déplacement et la translation parallèles ;
2° La réduction et l'inclinaison des ordonnées d'une figure ;
3° La similitude et l'homothétie ;
4° Le problème contraire ;
5° L'inversion, ou transformation par rayons vecteurs réciproques.

### § I. — Déplacement parallèle ou Translation.

**186**. **Déplacement d'un sommet**. Les théorèmes fondamentaux relatifs à ce mode de transformation sont les suivants :

*Deux triangles qui ont même base et même hauteur sont équivalents.* (G., n° 315, 2°.)

*Deux pyramides qui ont même base et même hauteur sont équivalentes.* (G., n° 467.)

On emploie fréquemment le premier de ces théorèmes dans toutes les questions où il s'agit de transformer un polygone donné en un triangle équivalent, et de partager un polygone en parties équivalentes, ou en parties proportionnelles à des grandeurs données.

On emploie le second pour démontrer des théorèmes relatifs au volume du tronc de prisme et du tronc de pyramide. (G., n$^{os}$ 473 et 475.)

Voici la propriété dont nous ferons le plus fréquemment usage :

#### Théorème.

**187**. *Lorsque le sommet d'un triangle glisse sur une parallèle à la base, le segment déterminé par les deux autres côtés du triangle sur une sécante parallèle à cette base a une longueur constante, quelle que soit la position du sommet mobile.*

Soit le triangle ABC, dont le sommet est transporté en C′. On doit avoir :

$$MN = M'N'.$$

On a :

$$\frac{MN}{AB} = \frac{d}{h};$$

mais

$$\frac{d}{h} = \frac{M'N'}{AB};$$

donc

$$M'N' = MN.$$

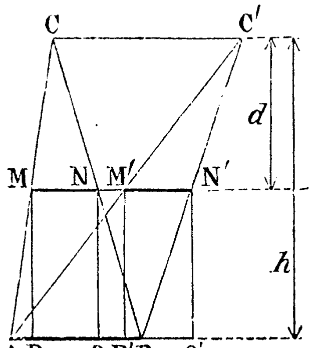


Fig. 120.

**188.** *Remarque.* Les rectangles correspondants MNPQ et M′N′P′Q′ sont égaux.

Les parallélogrammes qu'on obtiendrait en menant par N et N′ des droites respectivement parallèles aux côtés AC et AC′, seraient équivalents.

Voici une application :

**Problème.**

**189.** *Dans un triangle* ABC, *mener une parallèle à la base, de manière que le rectangle inscrit correspondant ait une valeur donnée* r² *pour somme des carrés des deux côtés adjacents.*

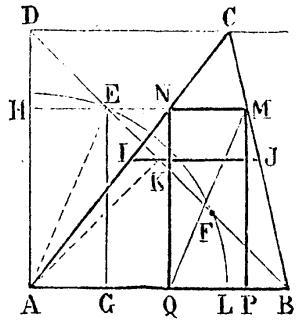


Fig. 121.

Transportons le sommet C en D, de manière à obtenir un triangle rectangle ABD.

On doit avoir : $EG^2 + EH^2 = r^2$;

donc $AE = r$.

Ainsi du point A comme centre, avec $r$ pour rayon, il faut décrire une circonférence. Cette courbe rencontre BD aux points E, F.

Par le point E, menons une parallèle ENM à la base du triangle, puis abaissons les perpendiculaires MP et NQ :

$$MN = HE \text{ (n}^\circ\text{ 187)};$$

donc

$$MN^2 + MP^2 = r^2.$$

*Remarque.* Le minimum de la somme des carrés correspond au pied K de la perpendiculaire AK.

**Problème.**

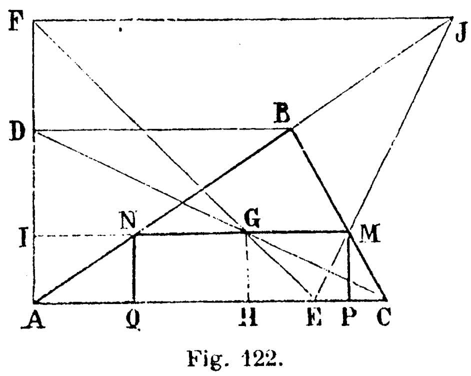


Fig. 122.

**190.** *Dans un triangle donné* ABC, *inscrire un rectangle dont le périmètre égale une longueur donnée* 2l.

En supposant le problème résolu et MPNQ le rectangle, tel que $MN + MP = l$, on reconnaît que la question revient à inscrire le rectangle AHGI dans le triangle rectangle CAD, de même base et de même hauteur que le triangle proposé.

Or il suffit de prendre : $AE = AF = l$,
et de mener FE (nº 99 **a**).

On a : $GH + GI = l;$

donc aussi $MP + MN = l.$

**191**. *Remarques.* 1º On peut éviter la construction du triangle CAD, car il suffit de mener une parallèle FJ jusqu'à la rencontre de ABJ, et de joindre le point J au point E.

On a, en effet : $\frac{MP}{AF} = \frac{ME}{JE}$, d'où $MP = l \cdot \frac{ME}{JE}$;

$\frac{MN}{AE} = \frac{JM}{JE}$, d'où $MN = l \cdot \frac{JM}{JE}$;

donc $MP + MN = l \cdot \frac{JM + ME}{JE} = l.$

2º Cette seconde construction conduit immédiatement à la solution du problème suivant, qui de prime abord semble plus difficile.

**Problème.**

**192**. *Dans un triangle quelconque, mener une parallèle* MN *à la base, et par les points* M *et* N *des droites* MP, NQ *parallèles à une ligne donnée* XY, *de manière que le parallélogramme inscrit* MNQP *ait un périmètre donné* 2p.

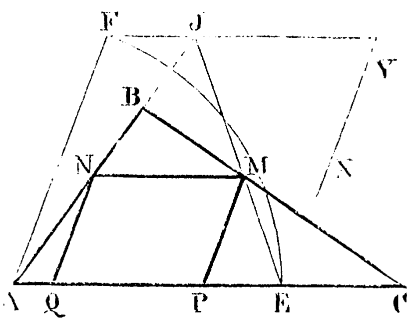


Fig. 123.

La solution développée du problème précédent, et l'emploi des mêmes lettres, permet de nous borner à l'indication des constructions à effectuer.

Par le sommet A menons une parallèle à XY; prenons :

$$AF = AE = p.$$

Prolongeons AB jusqu'à la rencontre de la parallèle FJ ; la droite EJ détermine le sommet M du parallélogramme.

On aura : $MN + MP = p.$

**Problème.**

**193**. *Dans un triangle donné, inscrire un rectangle ayant pour diagonale une longueur donnée.*

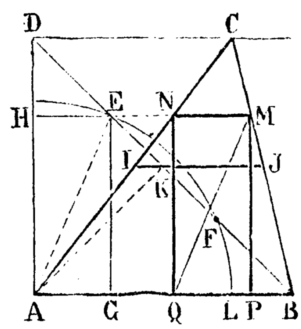


Fig. 124.

On a déjà traité cette question sous un énoncé différent (nº 189).

Considérons le triangle rectangle BAD.

Du point A comme centre, avec la longueur donnée AL pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupera l'hypoténuse en deux points E et F.

Ces points d'intersection donnent la réponse

$$QM = AE = l.$$

*Remarque.* La perpendiculaire AK ferait connaître le rectangle à diagonale minima : IJ serait la base supérieure de ce rectangle.

**194. Translation d'une figure.** *La translation parallèle*, ou simplement la méthode de translation, consiste à transporter une figure ABCD... d'une position donnée à une autre position A'B'C'D' ..., de manière que les droites AA', BB', CC', etc., soient égales et parallèles.

Cette méthode donne souvent des solutions fort simples; en voici quelques exemples :

**Problème.**

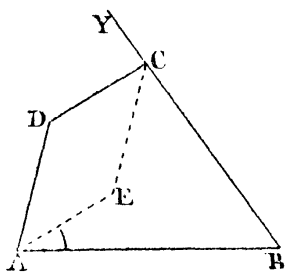



Fig. 125.

**194 a.** ***Construire un quadrilatère, connaissant les angles et deux côtés opposés.***

Soit le problème résolu; AB et DC les côtés donnés : opérons la translation du côté DC en AE.

L'angle DAE est le supplément de l'angle D, donc l'angle BAE est connu, car il égale l'angle A moins le supplément de D; on peut donc construire l'angle BAE, prendre ensuite AE = DC longueur connue, et par le point E mener une parallèle à AD jusqu'à la rencontre de BY ; ce qui détermine le sommet C.

**Problème.**

**194 b.** ***Entre deux circonférences données, inscrire une droite de longueur l, et qui soit parallèle à une ligne XY.***

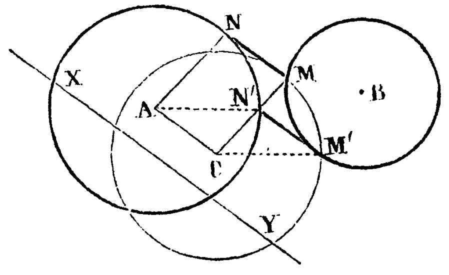



Fig. 126.

Soient A et B les circonférences données; il faut recourir au lieu géométrique qu'on obtient par une *translation parallèle* (nº 59, rem. 2º).

Par le centre A menons la droite AC égale à $l$ et parallèle à XY; puis, du point C comme centre, décrivons une circonférence égale au cercle A. En d'autres termes : transportons la circonférence A en C, de manière que AC égale $l$ et soit parallèle à XY.

Les points d'intersection M, M' donnent les solutions, puisque les figures ANMC et AN'M'C sont des parallélogrammes.

*Remarques.* La circonférence A peut être remplacée par un polygone quelconque; alors le déplacement pourra être effectué en n'employant que la règle et le compas.

La circonférence B peut être remplacée par une courbe quelconque.

Dans le cas général, il y a quatre solutions.

**Problème.**

**194 c.** *On donne deux circonférences extérieures* A *et* B, *ainsi qu'une droite* XY; *mener une sécante parallèle à* XY, *de manière que la somme des cordes interceptées égale une longueur* l.

Employons une translation parallèle, et, comme à l'exercice précédent, menons la droite AC parallèle à XY et égale à la longueur donnée $l$, et du point C décrivons une circonférence de même rayon que A. Toute parallèle à XY telle que EG égale $l$.

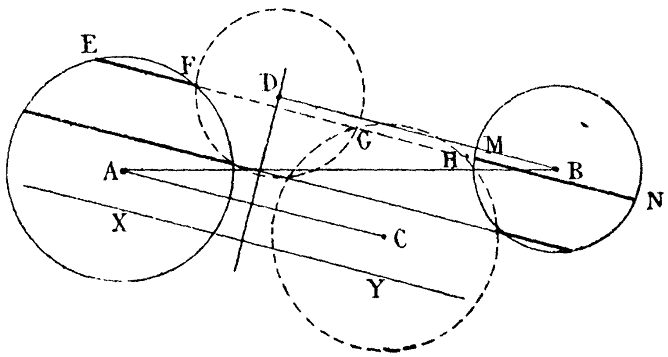


Fig. 127.

Par un second déplacement parallèle, amenons le cercle B à avoir son centre en D sur la perpendiculaire élevée au milieu de AC.

Les points d'intersection donnent la solution.

En effet : $EG = AC = l$ ; $FG = MN$ ; donc $EF + MN = l$.

On voit, sur la figure, une seconde solution plus rapprochée de XY.

**Théorème.**

**194 d.** *Lorsqu'un quadrilatère a deux côtés opposés égaux, la droite qui joint les points milieux des deux autres côtés est parallèle à la bissectrice de l'angle formé par les deux premiers côtés.*

Soient $AD = BC$ et M le point milieu de AB.

Par une translation, amenons AD en ME et BC en MF. Menons EF et prouvons que le point N d'intersection est le milieu de DC.

Les triangles équiangles DNE, CNF sont égaux, car $DE = CF$, donc $DN = CN$; par suite, MN est la droite des points milieux; or le triangle EMF est isocèle, et puisque $NE = NF$, la hauteur MN est bissectrice de l'angle au sommet M, et se trouve parallèle à la bissectrice (AD, BC).

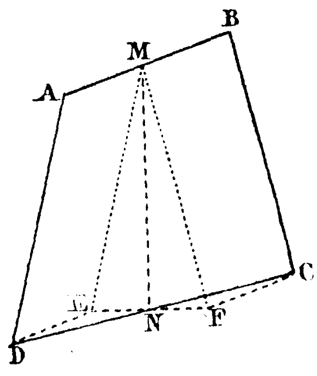


Fig. 128.

**Théorème.**

**194 e.** *Lorsqu'on a deux triangles directement semblables* ABC, A'B'C', *et qu'on divise en parties proportionnelles en* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, *les droites qui joignent les sommets homologues, on obtient un triangle* $\alpha\beta\gamma$ *semblable aux deux premiers.*

En opérant une translation de $A'B'C'$ en $AB''C''$, puis divisant $BB''$ et $CC''$ dans le même rapport que $BB'$ et $CC'$, on obtient un triangle $A\beta'\gamma'$,

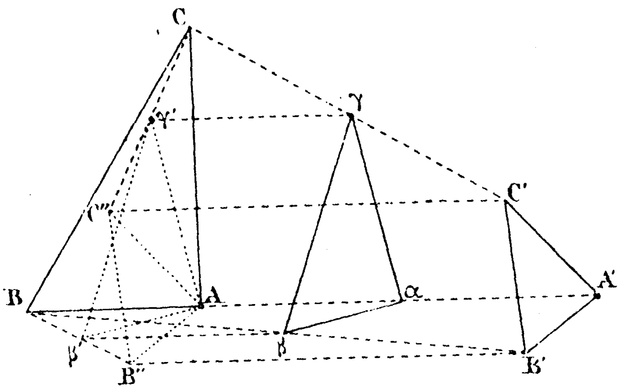



Fig. 129.

semblable aux deux premiers et égal à $\alpha\beta\gamma$; donc ce dernier est semblable aux triangles donnés.

**195. Note.** La *Méthode de translation,* déjà mentionnée (n° 59 a), a été indiquée par M. PÉTERSEN, et souvent appliquée par ce savant danois. Voir à ce sujet : *Méthodes et théories* pour *la résolution des problèmes de constructions géométriques*, pages 50 à 60.

La *Méthode de translation* est aussi mentionnée par M. IVAN ALEXANDROFF*, dans ses *Problèmes de Géométrie élémentaire, groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution* (pages 94 et 98). Cet auteur indique le moyen suivant pour résoudre un grand nombre de problèmes sur le quadrilatère quelconque ABCD.

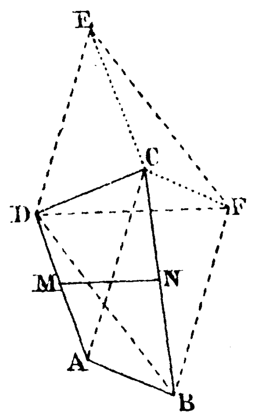



Fig. 130.

Par le sommet C, on prend CE égal et parallèle à AD; de même CF à AB.

1° La figure BDEF est un parallélogramme, dont les côtés égalent les diagonales du quadrilatère donné.

2° Les quatre angles du quadrilatère sont reportés en C.

3° La diagonale DF est double de la droite MN qui joint les milieux de AD, BC.

Nous avons fait un usage fréquent de la *Translation* dans l'étude des *figures inversement égales,* dans celle des *figures directement semblables* et des *figures inversement semblables.* (Voir *Éléments de Géométrie*, par F. J., 9e édition, nos 1062, 1074, 1088. — *Exercices de Géométrie*, nos 771, 1150.)

* IVAN ALEXANDROFF (en 1899), professeur au lycée de Tambov (Russie).

* D. AITOFF a traduit en français (en 1899) la sixième édition des *Problèmes de Géométrie élémentaire* dont nous venons de parler.

## § II. — Modification des Ordonnées.

**196.** *Définition.* On sait qu'on nomme *ordonnées* d'une figure les perpendiculaires abaissées des divers points d'un périmètre sur une droite fixe prise pour axe. (G., nº 357.)

L'*abscisse* d'un point est la distance du pied de l'ordonnée à un point fixe, nommé origine, et pris sur l'axe choisi.

On prend plus généralement pour axes deux droites concourantes OX, OY, formant un angle quelconque. Par chaque point du périmètre de la figure étudiée, on mène les parallèles aux axes. Les parallèles à l'axe OY sont les ordonnées, et les parallèles à OX sont les abscisses. Ainsi MP est l'*ordonnée* du point M; MQ, ou son égale OP, en est l'*abscisse*.

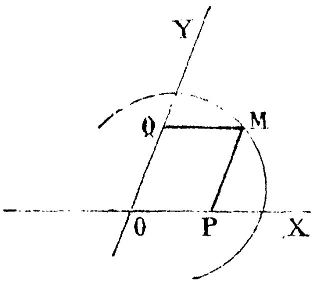



Fig. 131.

**197.** *Remarque.* Les modes de transformation que l'on va indiquer sont connus sous le nom de *réduction des ordonnées* ou *inclinaison des ordonnées*; mais la modification peut être opérée sur les abscisses aussi bien que sur les ordonnées.

On peut indifféremment *réduire* ou *amplifier* les ordonnées, c'est-à-dire que l'on peut multiplier chaque ordonnée ou chaque abscisse par un *nombre constant,* entier, expression fractionnaire ou fraction.

### Problème.

**198.** *Étudier les modifications qui résultent de la réduction des ordonnées d'une figure.*

Il faut distinguer ce qui se rapporte à la géométrie de position et ce qui est relatif aux aires ou aux volumes.

1º Pour les mêmes abscisses OE, OE', OP.

Les sécantes correspondantes CC', GG' coupent l'axe au même point L. (G., nº 640.)

Les tangentes MT, NT rencontrent aussi l'axe en un même point T. (G., nº 640.)

2º Les surfaces sont réduites ou amplifiées dans le rapport des ordonnées correspondantes. (G., nº 637.)

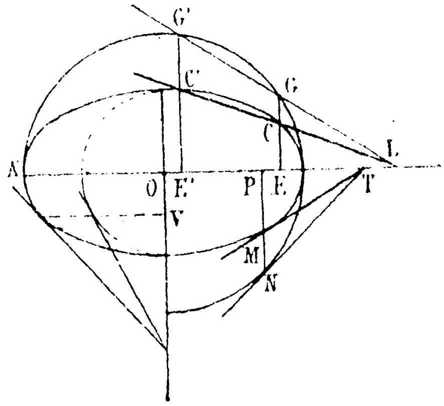



Fig. 132.

3º Les volumes sont réduits ou amplifiés dans le même rapport que les lignes correspondantes. (G., nº 911).

**Note.** Le célèbre peintre ALBERT DÜRER (1471-1528) transformait le cercle en ellipse en faisant croître proportionnellement toutes les ordonnées de la première courbe. (*Aperçu historique,* pages 216 et 529.)

### Problème.

**199.** *Étudier les variations qui résultent de l'inclinaison des ordonnées.*

1° Les sécantes correspondantes concourent au même point du diamètre commun à la figure donnée et à sa transformée; il en est de même des tangentes correspondantes.

2° L'aire de la surface qu'on obtient en inclinant les ordonnées d'une figure donnée s'obtient en multipliant l'aire de cette figure par le sinus de l'angle d'inclinaison. (G., n° 910.)

3° Il en est de même des volumes. (G., n° 913.)

**199 a. Note.** Les éléments de géométrie, et surtout les exercices proposés dans l'appendice, offrent un grand nombre d'exemples relatifs à l'ellipse obtenue par l'inclinaison des ordonnées du cercle; mais nous ne pouvons point insister ici sur ce mode de transformation, parce que nous n'y aurons pas recours dans ce travail. (Voir *Appendice aux Exercices de Géométrie,* n°s 724, 726, 734, 737, etc.)

*Appendice aux Exercices de Géométrie,* F. I. C. 1877. Cet ouvrage donne la solution des questions complémentaires proposées à la fin de l'*Appendice aux Éléments de Géométrie,* 3e édition. Il contient quelques développements relatifs aux *coniques;* il donne le volume des segments des corps qui sont limités par une *surface du second degré,* et traite plusieurs questions dont la connaissance est utile en *géométrie descriptive.* — Cet ouvrage n'est plus en librairie.

### Théorème.

**200.** *Quand on modifie les ordonnées ou les abscisses d'une figure donnée, les figures inscrites correspondantes sont entre elles dans le même rapport que les figures circonscrites correspondantes.*

Considérons trois triangles ayant même hauteur, et dont les bases sont sur une même droite; coupons ces triangles par une droite NP' parallèle à la base, et menons PM parallèle à AC, P'M' parallèle à A'C', etc.

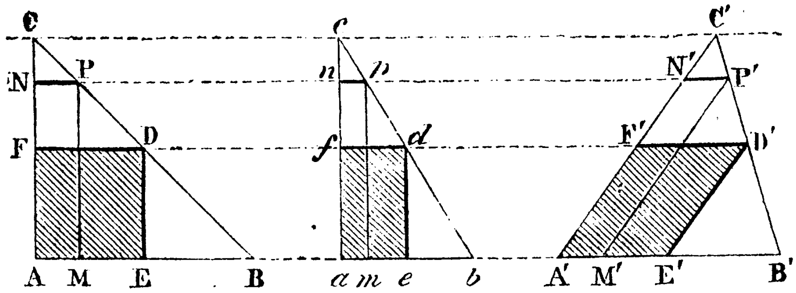


Fig. 133.

On a évidemment :
$$\frac{\mathrm{CNP}}{\mathrm{CAB}} = \frac{cnp}{cab} = \frac{\mathrm{C'N'P'}}{\mathrm{C'A'B'}};$$

$$\frac{\mathrm{PMB}}{\mathrm{CAB}} = \frac{pmb}{cab} = \frac{\mathrm{P'M'B'}}{\mathrm{C'A'B'}};$$

donc
$$\frac{\mathrm{ANPM}}{\mathrm{ACB}} = \frac{anpm}{acb} = \frac{\mathrm{A'N'P'M'}}{\mathrm{A'C'B'}}.$$

**Théorème.**

**201**. *Les figures inscrites de surface maxima sont correspondantes.*

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent; mais le grand parti que nous tirerons de ce corollaire nous conduit à le présenter directement.

Dans un triangle rectangle isocèle ABC, on démontre très simplement que le rectangle maximum inscrit AFDE (fig. 133) a son sommet au milieu de l'hypoténuse, car la somme DE + DF est constante, elle égale PM + PN = CA : or, pour le point milieu D, les facteurs sont égaux. Le rectangle maximum est la moitié du triangle circonscrit.

On a donc : $$\frac{\text{AFDE}}{\text{ABC}} = \frac{1}{2},$$

et ce rapport du rectangle inscrit au triangle rectangle circonscrit est maximum. Or on a de même :

$$\frac{afde}{abc} = \frac{\text{A'F'D'E'}}{\text{A'B'C'}} = \frac{1}{2};$$

donc, *pour un triangle quelconque, le parallélogramme inscrit maximum est celui qu'on obtient en menant, par le point milieu du côté donné, des parallèles aux deux autres côtés.*

**Problème.**

**202**. *Dans un triangle quelconque, inscrire un rectangle dont la surface soit équivalente à un carré donné* k².

Nous pouvons remplacer le triangle donné ABC par un triangle rectangle ADC de même base et de même hauteur (nº 187).

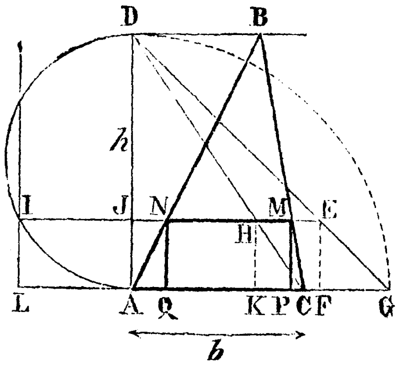


Fig. 134.

Soit $\text{AJHK} = \text{NMPQ} = k^2$.

Si le triangle ADC était rectangle isocèle, la question serait résolue (nº 99, **e**). Or, en prenant :

$$\text{AG} = \text{AD} = h,$$

on a : $$\frac{\text{AJEF}}{\text{AJHK}} = \frac{\text{JE}}{\text{JH}}.$$

Or $$\frac{\text{JE}}{\text{JH}} = \frac{\text{AG}}{\text{AC}} = \frac{h}{b};$$

d'où $\frac{\text{AJEF}}{k^2} = \frac{h}{b}$; d'où l'on déduit : $\text{AJEF} = k^2 \cdot \frac{h}{b}$.

Nous pouvons chercher un carré $l^2$ qui soit au carré $k^2$ dans le rapport $\frac{h}{b}$ (G., nº 345), puis porter le côté trouvé $l$ de A en L, mener une parallèle LI à AD et abaisser une perpendiculaire IJNM. On a successivement :

$$\text{AJ} \cdot \text{JE} = \text{AJ} \cdot \text{JD} = l^2 = k^2 \cdot \frac{h}{b}.$$

Mais
$$\frac{AJHK}{AJEF} = \frac{AC}{AG} = \frac{b}{h};$$

ou
$$AJHK = AJEF \cdot \frac{b}{h}.$$

Remplaçons AJEF ou AJ . JD par sa valeur $k^2 \cdot \frac{h}{b}$.

On aura :
$$AJHK = k^2 \cdot \frac{h}{b} \cdot \frac{b}{h} = k^2.$$

**203. Parallélépipède inscrit.** Lorsque par un point quelconque de la base ABC d'un tétraèdre S,ABC on mène des plans parallèles aux faces latérales, on forme un parallélépipède dont trois faces sont sur les faces de l'angle S et dont un sommet est sur ABC.

### Théorème.

**204.** *Quelle que soit la modification apportée à une ou à plusieurs des arêtes de l'angle S, le parallélépipède inscrit est au tétraèdre primitif dans le rapport du nouveau parallélépipède au tétraèdre transformé.*

Bornons-nous à examiner le cas le plus simple. Admettons que dans le tétraèdre S,ABC, dont P est le sommet du parallélépipède inscrit, on réduise l'arête SA de moitié, par exemple, la distance de P′ à la face B′S′C′ ne sera que la moitié de la distance de P à la face BSC, tandis que les deux autres dimensions du parallélépipède ne varient point; donc, en désignant les solides inscrits par P et P′, on aura :

$$\frac{P}{S,ABC} = \frac{P'}{S',A'B'C'}.$$

**205.** *Corollaire.* Au maximum du parallélépipède inscrit dans le tétraèdre S, correspondra le maximum de celui qui serait inscrit dans le tétraèdre S′.

Ainsi, après avoir démontré que dans le trièdre tri-rectangle à trois arêtes égales, le maximum est obtenu quand P est au point de concours des médianes du triangle équilatéral ABC, et qu'alors le parallélépipède est les $\frac{2}{9}$ du tétraèdre, nous en conclurons que pour un tétraèdre quelconque, le sommet P′ doit être au point de concours des médianes de A′B′C′, et que le solide inscrit maximum est les $\frac{2}{9}$ du tétraèdre considéré.

## § III. — Similitude et homothétie.

**206.** *Similitude.* L'étude des *figures semblables* repose principalement sur le *théorème de Thalès*, relatif aux triangles semblables. (G., nº 221.)

Pour résoudre un problème à l'aide de la similitude ou de l'homothétie, on construit une figure semblable à la figure demandée, et on compare une dimension à son homologue donnée. On opère surtout ainsi lorsque le problème proposé, ou le problème plus simple auquel on a pu le ramener, ne dépend que d'une ligne donnée.

**206 a. Note.** Le nom d'*homothétie* est dû à CHASLES, mais l'étude des *figures homothétiques* est de PONCELET.

Actuellement l'étude de l'*homothétie* précède celle de la *similitude*, ou des *figures semblables*.

* THALÈS, un des sept sages de la Grèce (639 à 548 av. J.-C.), alla s'instruire en Égypte ; il mesura la hauteur des pyramides par le moyen de leur ombre ; aussi lui attribue-t-on les théorèmes relatifs aux triangles semblables. THALÈS s'établit ensuite à Millet, et y fonda l'École ionienne. Il eut la gloire de compter PYTHAGORE au nombre de ses disciples.

### Problème.

**207.** *Construire un carré, connaissant la somme ou la différence de sa diagonale et de son côté.*

Tous les carrés sont des figures semblables ; ainsi toutes leurs dimensions homologues sont dans un même rapport. Or la somme ou la différence du côté et de la diagonale, dans un carré quelconque, est homologue à la somme ou à la différence du côté et de la diagonale dans un autre carré. De là on conclut la construction ci-après :

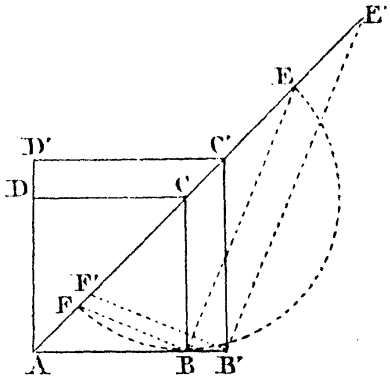


Fig. 135.

Construire un carré quelconque ABCD ; tracer et prolonger la diagonale AC ; du point C, avec CB pour rayon, décrire la demi-circonférence FBE, ou du moins marquer les points F et E.

Porter en AE′ ou AF′ la longueur donnée pour la somme ou pour la différence du côté et de la diagonale ; mener EB ou FB, puis E′B′ ou F′B′ parallèle à EB ou FB. On détermine ainsi le côté AB′ du carré demandé.

**208.** *Remarques.* 1° L'emploi des figures semblables fournit des solutions faciles à trouver, mais peu élégantes. Ce procédé est utile dans l'inscription d'une figure semblable à une figure donnée.

2° Dans certains cas, il faut combiner l'emploi des constructions auxiliaires à celui des figures semblables.

### Problème.

**209.** *Dans un triangle* ABC, *inscrire un rectangle semblable à un rectangle donné.*

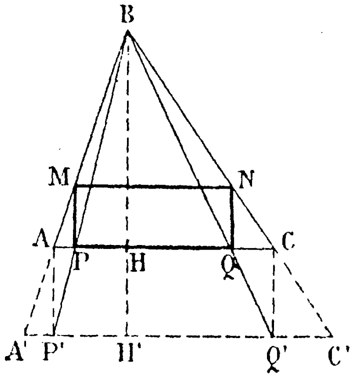


Fig. 136.

Cette question a déjà été résolue (n° 99, c) ; mais la *similitude* est la méthode naturelle, puisqu'on veut une figure de forme donnée.

Sur AC il faut construire un rectangle semblable au rectangle donné, joindre le sommet B aux points P' et Q'; puis élever les perpendiculaires PM, QN.

On a :

$$\frac{MN}{AC} = \frac{MP}{AP'};$$

d'où

$$\frac{MN}{MP} = \frac{AC}{AP'}.$$

**210**. *Remarques.* 1° On peut construire un rectangle sur chaque côté, ce qui donne trois solutions.

2° Comme sur le côté AC, on peut construire un second rectangle semblable au rectangle demandé, on obtiendra sur AC une seconde solution, et, en considérant les trois côtés, on aurait six solutions.

3° Pour inscrire un carré, il suffit de prendre $AP' = AC$. Il n'y a alors que trois solutions.

### Problème.

**211**. *Dans un cercle donné, inscrire un triangle isocèle, connaissant la somme l de la base et de la hauteur.*

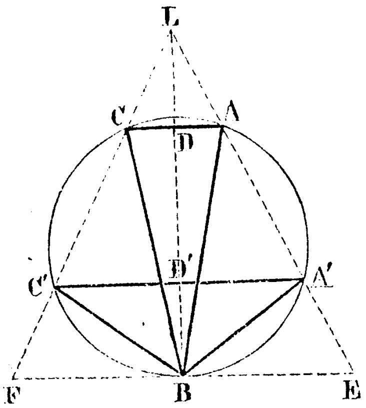


Fig. 137.

Supposons le problème résolu, et soit ABC le triangle demandé, tel que

$$AC + BD = l.$$

Portons la base AC de D en L à la suite de la hauteur; alors

$$BL = l.$$

Pour tout triangle semblable à LAC, la hauteur égale la base; donc en prolongeant LA, LC jusqu'à la tangente en B, on aura :

$$FE = BL \quad \text{ou} \quad BE = \frac{l}{2}.$$

De là on déduit la construction suivante :

Sur une tangente, il faut prendre $BE = \frac{l}{2}$, puis $BL = l$, et mener LE.

Le point A est déterminé; on a en effet :

$$AD = \frac{1}{2} DL; \quad \text{d'où} \quad AC = DL;$$

donc

$$AC + BD = l.$$

Il y a généralement une seconde solution A'BC'.

*Remarques.* 1° Ce problème sera développé et discuté (n° 1503).

2° On procéderait d'une manière analogue pour inscrire un triangle isocèle, connaissant $b + h$, dans un polygone régulier quelconque, et même dans toute figure ayant un axe de symétrie, pourvu que le sommet du triangle dût se trouver à l'un des points où l'axe de symétrie coupe le périmètre.

**Théorème de d'Alembert.**

**212.** *Trois circonférences considérées deux à deux ont six centres d'homothétie : les trois centres extérieurs sont en ligne droite, il en est de même de deux centres intérieurs et d'un centre extérieur.*

Soient L, M, N les centres extérieurs ; D, E, F les intérieurs : prouvons que les trois premiers sont en ligne droite.

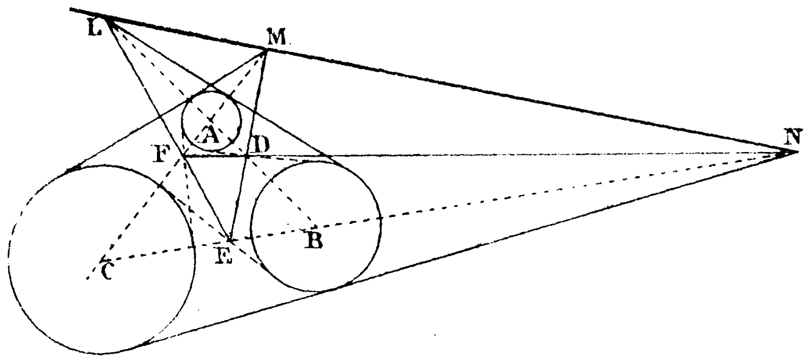



Fig. 138.

Toute droite menée par un centre d'homothétie de deux figures est un axe de similitude pour ces figures, c'est-à-dire constitue un couple de lignes homologues superposées ; réciproquement, tout axe d'homothétie de deux figures passe par le centre correspondant d'homothétie. Ainsi considérons la droite LM ; il suffit de prouver qu'elle passe par le troisième point N ; or, passant par L, elle est axe d'homothétie pour les circonférences A et B ; passant par M, elle l'est pour les circonférences A et C ; donc cette droite est axe d'homothétie pour B et C, et, par conséquent, elle doit passer par le centre d'homothétie N de ces mêmes circonférences.

## § IV. Méthode du problème contraire.

**213.** *Problème contraire.* La méthode du problème contraire consiste à s'occuper d'abord d'un problème opposé à celui qui est proposé, et à revenir ensuite à ce dernier, en construisant une figure égale ou semblable à celle qu'on a d'abord obtenue.

On emploie le *problème contraire* dans la plupart des cas relatifs à l'inscription des figures. Par exemple, pour inscrire une figure A dans une figure donnée B, on circonscrit à la figure A une figure égale ou semblable à la figure B, et l'on cherche les relations de position qui permettent de faire la construction dans un sens inverse.

**Note.** La méthode du *problème contraire* a été nommée parfois méthode *par inversion :* mais il est préférable de réserver cette dernière appellation à une méthode très importante que nous ferons connaître plus loin (n° 217).

**Problème.**

**214.** *A un arc donné* AB *mener une tangente* MCN, *limitée aux rayons* OAM, OBN, *de manière que le segment* CM *soit triple de* CN.

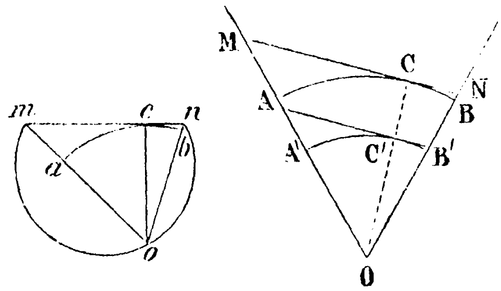



Fig. 139.

Nous pouvons construire une figure *omn* semblable à celle que l'on demande ; pour cela :

Prenons $mc = 3cn$. Sur $mn$ décrivons un segment capable de l'angle donné AOB. Élevons la perpendiculaire $co$, et du point $o$ comme centre décrivons l'arc $acb$. Il ne reste plus qu'à revenir à la figure donnée. Nous pouvons décrire, avec $oa$ pour rayon, un arc A'C'B', puis prendre l'arc $A'C' = ac$, mener OC'C, et par le point C mener une perpendiculaire MCN au rayon OC.

A cause des figures semblables, on a $MC = 3CN$.

**Problème.**

**215.** *Dans un triangle donné* ABC, *inscrire un triangle égal à un triangle donné* DEF.

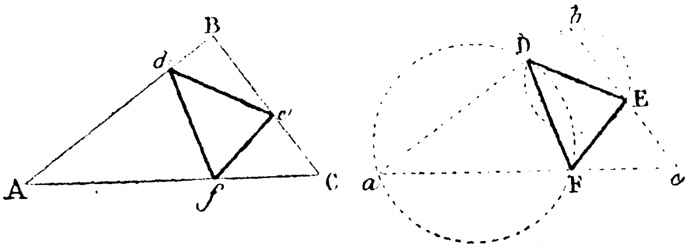



Fig. 140.

Circonscrivons au triangle DEF un triangle égal à ABC.

Sur DE décrivons un segment capable de l'angle B ; sur DF un segment capable de l'angle A ; par le point D menons une sécante $ab$ égale à AB (nº 139).

Les triangles $abc$, ABC sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux ; donc la figure de droite est égale à celle qu'on cherche. Prenons $Ad = aD$, etc., et $def$ sera le triangle demandé.

*Remarque.* Dans bien des cas, on se borne à traiter le problème contraire ; car de ce dernier on passe facilement à la question proposée.

**Problème.**

**216.** *Deux parallèles* AC *et* DB *sont éloignées d'une longueur donnée* d ; *d'un point fixe* O, *distant de* h *de la première, on mène la perpendiculaire commune* OAB. *A quelle distance* y *de cette droite une autre perpendiculaire commune* CD *sera-t-elle vue du point* O *sous un angle maximum* COD ?

Résolvons le problème contraire.

Par le point O menons une parallèle aux droites AC, BD; et, DC étant donnée de position, cherchons sur OE le point O qui donne l'angle maximum COD.

Pour un cercle quelconque de centre N, qui passe par D et C, et qui rencontre la parallèle, l'angle E = N.

Donc il sera maximum lorsque le rayon sera le plus petit possible. Ainsi par DC, faisons passer un cercle M tangent à la parallèle, l'angle O = M; et, puisque CM est < CN, on a : angle M > N.

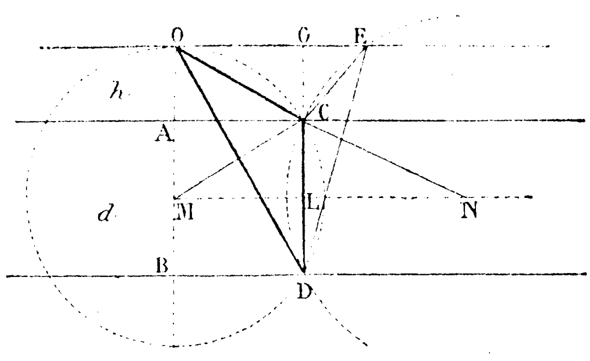



Fig. 141.

*Remarque*. On peut facilement calculer les éléments trigonométriques de l'angle maximum COD :

$$\text{angle } O = \text{angle } M.$$

Le triangle rectangle CLM a pour côtés :

$$CL \quad \text{ou} \quad \frac{d}{2}; \quad CM = MO = \frac{d}{2} + h;$$

donc
$$LM = \sqrt{\left(\frac{d}{2} + h\right)^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

Ainsi
$$LM = \sqrt{dh + h^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{h(h+d)}.$$

Sinus O ou sinus
$$CML = \frac{CL}{CM} = \frac{d}{2} : \left(\frac{d}{2} + h\right),$$

donc
$$\text{sinus } O = \frac{d}{d + 2h}.$$

Tangente M ou tangente
$$O = \frac{CL}{ML} = \frac{d}{2\sqrt{h(h+d)}}.$$

## § V. Inversion.

**217**. *Définition*. On appelle *figures inverses* deux figures telles que toute droite OMM' (fig. 142), menée par un point donné O, et coupant l'une d'elles en M et l'autre en M', donne un produit OM . OM' dont la valeur est constante.

On nomme *origine* ou *centre d'inversion* le point fixe donné. Les points correspondants M et M' sont appelés *points réciproques* ou *points inverses*.

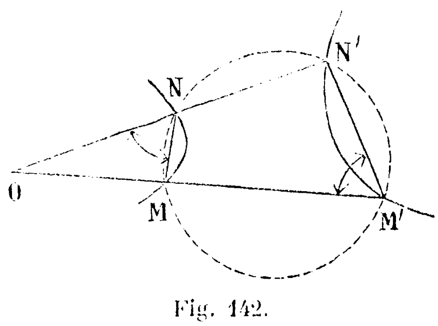



Fig. 142.

Les distances OM, OM' sont connues sous le nom de *rayons vecteurs* *réciproques*. On appelle *puissance d'inversion* le produit constant des rayons vecteurs des deux points correspondants.

La puissance est *positive*, lorsque les points M et M' sont d'un même côté de l'origine O ; elle est *négative*, lorsque ces points sont de part et d'autre de l'origine. La puissance se représente assez fréquemment par $\pm k^2$.

La transformation d'une figure MNP... en une autre M'N'P'..., à l'aide de l'inversion, se nomme : *transformation par rayons vecteurs réciproques*. Nous dirons simplement : *transformation par inversion*.

**Note.** La dénomination : *puissance d'un point* par rapport à un cercle (G., n° 829), d'où est venue *puissance d'inversion*, a été introduite par STEINER.

**Théorème.**

**218.** *Deux couples de points inverses appartiennent à une même circonférence. Les cordes correspondantes* MN, M'N' *sont antiparallèles*.

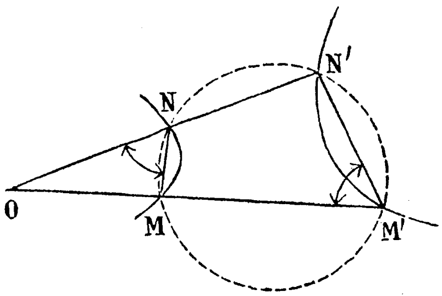



Fig. 143.

Soit $k^2$ la puissance ; on a :

$$OM \cdot OM' = k^2 = ON \cdot ON' ;$$

*donc les quatre points appartiennent à une même circonférence*. (G., n° 261.)

Les angles M' et ONM sont égaux ; il en est de même de N' et de OMN ; donc les cordes correspondantes sont antiparallèles par rapport aux rayons vecteurs OMM', ONN' qui aboutissent à leurs extrémités.

**Théorème.**

**219.** *La longueur d'une corde* MN *s'obtient en multipliant la corde correspondante par la puissance, et en divisant ce résultat par le produit des rayons vecteurs, qui aboutissent aux extrémités de cette seconde corde.*

Les cordes MN, M'N' (fig. 143) sont antiparallèles ; les triangles OMN, ON'M' sont donc semblables, d'où

$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{ON}{OM'},$$

$$MN = M'N' \cdot \frac{ON}{OM'}.$$

Il suffit d'exprimer ON en fonction de la puissance et de ON'.

Or de $ON \cdot ON' = k^2$, on tire : $ON = \dfrac{k^2}{ON'}$,

donc $$MN = k^2 \cdot \frac{M'N'}{OM' \cdot ON'}. \qquad (1)$$

On aurait de même : $$M'N' = k^2 \frac{MN}{OM \cdot ON}. \qquad (2)$$

**Théorème.**

**220.** *Les tangentes menées à deux courbes inverses, par deux points correspondants, forment des angles égaux avec le rayon vecteur des points de contact.*

En effet, pour deux rayons quelconques OMM', ONN' (fig. 144), le quadrilatère MM'N'N est inscriptible, les cordes MN, M'N' sont antiparallèles ;

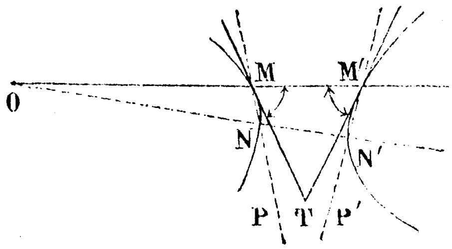



Fig. 144.

l'angle PMM' = P'N'O.

A la limite, quand les rayons se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre, les cordes deviennent des tangentes en M et M' ; on a donc : angle TMM' = TM'M.

*Scolie.* Deux tangentes TM, TM', et le segment MM' du rayon vecteur des points de contact, forment un triangle isocèle.

**Théorème.**

**221.** *L'angle de deux lignes d'une figure donnée égale l'angle des deux lignes réciproques de la figure inverse.*

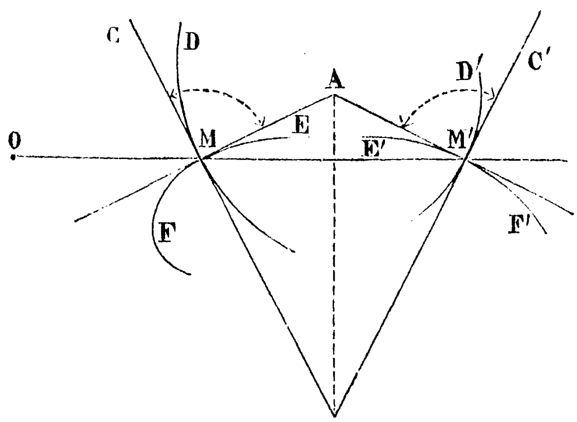



Fig. 145.

L'angle de deux courbes qui se coupent est l'angle des tangentes menées à ces courbes par le point commun.

Soient les courbes MD, ME qui appartiennent à une première figure ; M'D', M'E' les courbes inverses des premières.

Il faut prouver que l'angle AMC des tangentes = AM'C'.

| | | |
|---|---|---|
| Or l'angle | CMM' = C'M'M, | (n° 220) |
| l'angle | AMM' = AM'M, | |
| donc l'angle | AMC = AM'C'. | |

**222.** *Remarques.* 1° Les deux couples de tangentes donnent un quadrilatère symétrique, par rapport à la droite AB des points de concours.

2° Dans certains cas, la figure inverse d'une circonférence MD est une droite M'C' (n° 223). Le théorème n'en subsiste pas moins.

L'angle des tangentes AMC égale l'angle que la tangente AM' fait avec la droite M'C', inverse de l'arc MD.

3° Il ne faut pas comparer l'angle formé par deux couples de cordes correspondantes, car ces droites ne sont pas inverses, mais bien l'angle de deux couples de tangentes.

**Théorème.**

**223.** *L'inverse d'une circonférence, lorsque le centre d'inversion est sur cette courbe, est une droite perpendiculaire au diamètre qui passe par l'origine donnée.* (G., n° 825.)

**224.** Réciproquement : *L'inverse d'une droite donnée est une circonférence qui passe par l'origine ; le diamètre mené par ce point est perpendiculaire à la droite donnée* (G., n° 827.)

**225.** *L'inverse d'une circonférence, lorsque le centre d'inversion n'est pas sur la courbe donnée, est une circonférence homothétique de la première, par rapport à l'origine donnée.* (G., n° 828.)

Voici quelques applications :

**I<sup></sup>er Théorème de Ptolémée.**

**226.** *Dans tout quadrilatère inscrit, le produit des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés.*

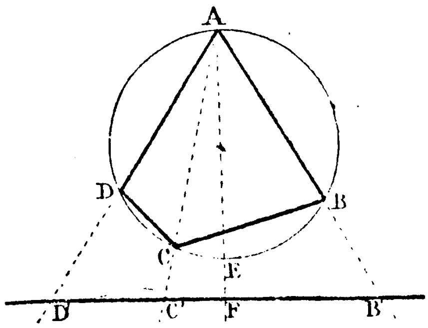


Fig. 146.

Considérons un quadrilatère inscrit. Menons une droite quelconque B'D', perpendiculaire au diamètre qui passe par le sommet A : la puissance égale

$$AE \times AF = k^2.$$

Les segments déterminés par les droites AD, AC, AB donnent la relation
$$D'B' = D'C' + C'B'. \qquad (1)$$

Mais (n° 210) $\quad D'B' = DB \cdot \dfrac{k^2}{AD \cdot AB},$

$$D'C' = DC \cdot \frac{k^2}{AD \cdot AC}, \quad C'B' = CB \cdot \frac{k^2}{AC \cdot AB} \cdot$$

L'égalité (1) devient $\quad \dfrac{DB \cdot k^2}{AD \cdot AB} = \dfrac{DC \cdot k^2}{AD \cdot AC} + \dfrac{CB \cdot k^2}{AC \cdot AB} \cdot$

En réduisant au même dénominateur et simplifiant, on trouve :

$$DB \cdot AC = DC \cdot AB + CB \cdot AD. \qquad (2)$$

Donc le produit des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés.

*Remarque.* Quand le triangle ADB est équilatéral, $AD = BD = AB$; l'égalité (2) devient $AC = DC + CB$, ce qui démontre ce théorème connu : *La distance d'un point du cercle circonscrit à un triangle équilatéral à l'un des sommets de ce triangle, égale la somme des distances du même point aux deux autres sommets* (n° 680).

**226 a.** *Autre démonstration.* Prenons pour origine un point quelconque du cercle ; désignons par $a$, $b$, $c$, $d$ les rayons vecteurs AO, BO, CO, DO.

On sait que pour quatre segments consécutifs, on a l'*identité* suivante :

$$A'B' . C'D' + A'D' . B'C' = B'D' . A'C'. \qquad (1)$$

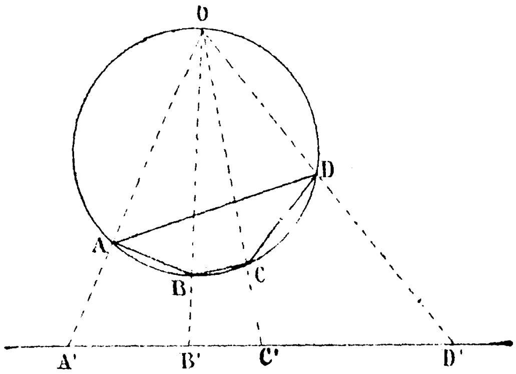


Fig. 147.

Car, en remplaçant les lignes A'D', B'D' et A'C' par les segments qui les composent, chaque membre de l'égalité (1) a pour valeur :

$$A'B' . C'D' + A'B' . B'C' + B'C' . B'C' + C'D' . B'C'. \qquad (2)$$

Mais $\qquad A'B' = \frac{AB}{ab}, \quad C'D' = \frac{CD}{cd}, \quad$ etc.

En mettant ces valeurs dans (2), on trouve :

$$\frac{AB . CD}{abcd} + \frac{AD . BC}{adbc} = \frac{BD . AC}{bdac}.$$

Et, en supprimant le dénominateur commun, on a :

$$AB . CD + AD . BC = BD . AC.$$

**226 b.** *Remarque.* Lorsque $AB . CD = AD . BC$, on a aussi :

$$A'B' . C'D' = A'D' . B'C' \quad \text{ou} \quad \frac{B'C'}{B'A'} = \frac{D'C'}{D'A'}.$$

Dans ce cas la droite A'C' est dite divisée *harmoniquement* aux points B' et D' (G., nº 786); réciproquement, B'D' est divisée de la même manière aux points A' et C'. Des droites qui concourent au point O forment un *faisceau harmonique*. Toute droite qui traverse un tel faisceau est toujours divisée harmoniquement (G., nº 794); on a donc le résultat suivant :

### Théorème.

**227.** *Lorsque les rectangles formés par les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit sont équivalents, toute droite qui coupe le faisceau formé en joignant les quatre sommets du quadrilatère à un point quelconque de la circonférence circonscrite est divisée harmoniquement par ce faisceau.*

*Remarque.* On nomme *quadrilatère harmonique* un quadrilatère inscriptible, dans lequel le produit de deux côtés opposés égale le produit des deux autres côtés; par suite, chacun de ces produits est la moitié du produit des diagonales.

Le quadrilatère harmonique a été l'objet d'études toutes récentes; il jouit de nombreuses propriétés. (Voir ci-après nº 2454.)

**Problème.**

**228**. *Par deux points* A *et* B, *faire passer une circonférence qui coupe une circonférence donnée* C, *sous un angle donné* m.

Soit le problème résolu et l'angle des tangentes, au point D, égal à l'angle donné LMN ou $m$.

Transformons par inversion la figure donnée, par rapport à l'origine A.

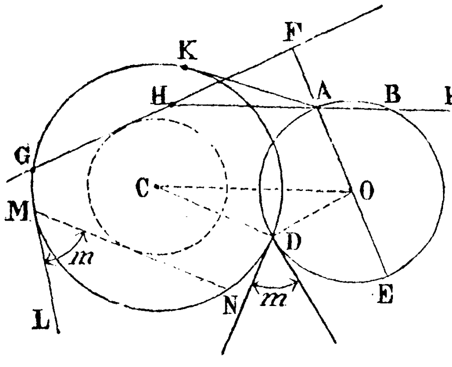



Fig. 148.

Afin de conserver le cercle donné CM, prenons $AK^2$ pour puissance. L'inverse de la circonférence demandée O sera une droite telle que FG, qui coupera la circonférence C sous un angle égal à l'angle donné. Il suffit donc de déterminer cette sécante FG.

Or prenons l'inverse du point B, par rapport au point A ; c'est-à-dire prenons $AB \,.\, AH = AK^2$.

Par le point H il suffira de mener une tangente à la circonférence qui est elle-même tangente à MN, puis le centre O se trouvera sur la perpendiculaire abaissée du point A sur FG. Le diamètre est donné par :

$$AE \,.\, AF = AK^2.$$

*Remarque.* Il y a deux solutions, et deux seulement, bien que chaque point H et H', inverse de B, en donne deux; mais si l'on fait varier la circonférence passant par A et B, son angle ne passe que deux fois par la valeur $m$.

En réalité, H' correspond à la puissance positive $AK^2$, tandis que H correspond à $-AK^2$ : il faut se borner à considérer un seul de ces deux points H ou H'.

**Lieu.**

**229**. *Quel est le lieu du point de contact des circonférences tangentes deux à deux et tangentes à deux cercles donnés?*

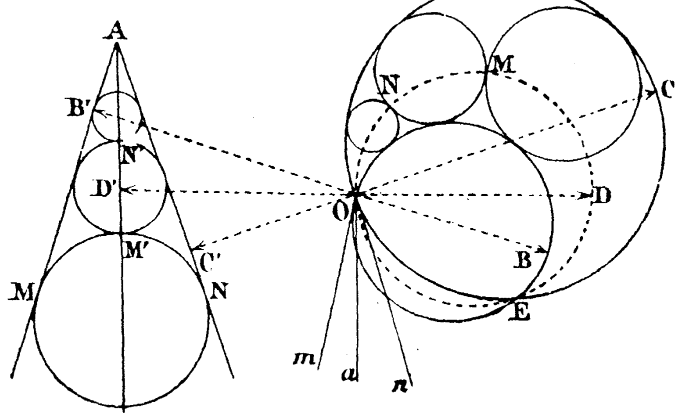



Fig. 149.

Considérons une suite de circonférences tangentes deux à deux et tangentes aux côtés d'un angle A. En prenant dans le plan un point quelconque O pour origine, et une puissance quelconque $k^2$, les côtés de l'angle et la bissectrice qui contient les centres ont pour figure inverse des circonférences qui passent par le même point. On doit avoir : $OB \times OB' = OC \times OC' = OD \times OD' = k^2$. Les circonférences tangentes deux à deux ont pour inverses des circonférences tangentes deux à deux et tangentes aux inverses des côtés de l'angle : on arrive donc au théorème suivant :

**229 a.** *Lorsqu'on inscrit une suite de circonférences tangentes deux à deux, entre deux cercles* B *et* C, *les points de contact sont sur une même circonférence* D.

**230.** *Remarques.* 1° Le lieu des points de contact, c'est-à-dire le cercle OD, étant la figure inverse de la bissectrice AD', est le *cercle bissecteur* des cercles qui se coupent aux points O, E. La tangente $Oa$, qui lui correspond, est bissectrice de l'angle $mOn$.

2° En vue des transformations à faire, il est utile d'indiquer les théorèmes suivants.

**Théorème.**

**231.** *Toutes les circonférences qui coupent orthogonalement deux cercles donnés* A *et* B *passent par deux mêmes points situés sur la ligne des centres des cercles* A *et* B.

L'axe radical CD est le lieu des centres des cercles tels que C et D qui coupent orthogonalement deux cercles donnés A et B. (G., n° 835.)

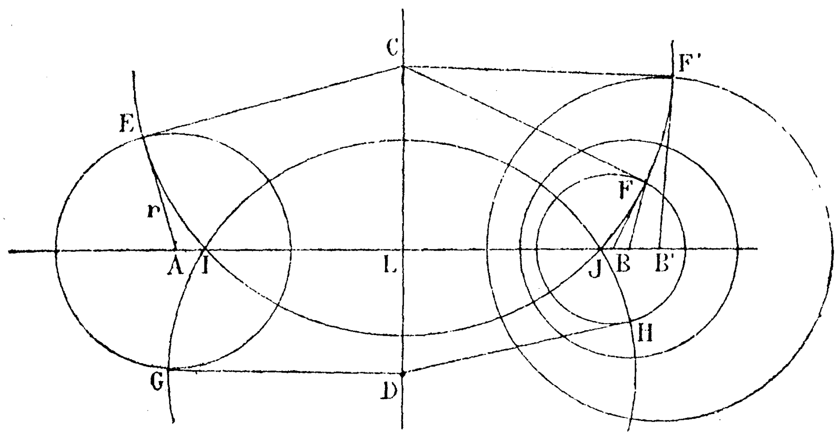



Fig. 150.

Et même, d'une manière plus générale, l'axe radical est le lieu des centres des cercles qui coupent orthogonalement tous les cercles qui ont ce même axe radical CD; car les tangentes CE, CF, CF' sont égales et perpendiculaires aux rayons AE, BF, B'F'...

Mais deux cercles du second système, ayant pour centres C et D, ont pour axe radical la ligne des centres AB des premiers, car le point A est d'égale puissance pour ces deux cercles; et il en est de même du point B, car $AE^2 = AG^2$ et $BF^2 = BH^2$.

Or la corde commune des cercles C et D est l'axe radical des deux premiers A et B ; donc les cercles C et D se coupent en deux points I et J de la ligne des centres AB ; car les points d'intersection de deux cercles sont des points d'égale puissance.

**232.** *Remarques.* 1° Poncelet, à qui l'on doit la considération de ces points remarquables, les nomme *points limites*. (V. *Traité des propriétés projectives des figures*, tome I, n° 76.)

2° Les points limites sont réels, quand les cercles donnés A, B, B' ne se coupent point ; mais pour les cercles orthogonaux C, D du second système, ils sont imaginaires, parce que les cercles A et B de l'autre système ne rencontrent point la ligne des centres CD.

**232 a. Note.** Poncelet, né à Metz en 1788, mort à Paris en 1867, fut fait prisonnier pendant la campagne de Russie, et s'occupa dès lors des *Méthodes de transformation des figures*. On lui doit la doctrine de l'*homologie* et celle des *polaires réciproques*. Il est en réalité le principal créateur des méthodes modernes. Au point de vue géométrique, il faut citer avant tout son *Traité des propriétés projectives des figures*, puis ses *Applications d'analyse et de géométrie*.

Un juge bien compétent, M. P. Mansion, a dit : « Le vrai créateur de la géométrie supérieure est Poncelet, ainsi que Salmon le fait remarquer dans ses *Coniques*. » (Compte rendu de la 6e édition du *Traité de géométrie*, par MM. Rouché et de Comberousse ; voir *Mathesis*, 1892, à la fin du volume, page 3.)

**Théorème.**

**233.** *Deux cercles qui ne se coupent point se transforment par inversion en cercles concentriques, lorsqu'on prend pour origine un des points limites.*

En effet, en prenant, par exemple, le point I (fig. 150) pour origine, tous les cercles orthogonaux du second système se transforment en ligne droite, car ils passent par l'origine (G., n° 825) ; mais les droites, qui sont les transformées des cercles C, D..., doivent couper orthogonalement tous les cercles obtenus par l'inversion des cercles A, B, B'... ; donc ces cercles se transforment en de nouveaux cercles ayant le point I pour centre commun.

**234.** *Remarque.* Tous les cercles qui ne se coupent point et qui ont même axe radical CD, peuvent se transformer en cercles concentriques.

**Théorème.**

**235.** *Deux cercles qui se coupent, se transforment en cercles égaux lorsqu'on prend pour origine un point quelconque d'un des cercles bissecteurs des cercles donnés.*

En effet, le cercle bissecteur, passant par l'origine, se transforme en une droite qui devient l'axe radical des figures inverses des cercles donnés ; mais ces cercles inverses coupent l'axe radical sous des angles égaux, donc ils sont égaux ; car deux cercles qui coupent sous le même angle leur corde commune ont nécessairement des rayons égaux.

**236.** *Remarque.* Le théorème s'applique même lorsque les deux cercles ne se coupent pas. Dans ce cas, le cercle qui correspond au cercle bissecteur de deux circonférences sécantes est le cercle qui passe par les points de contact des circonférences tangentes entre elles deux à deux et tangentes aux deux circonférences données (n° 229).

### Théorème.

**237.** *Entre deux cercles* A *et* B *non concentriques, et qui n'ont pas de point commun, on inscrit un cercle* C *tangent aux deux premiers, puis un cercle* D *tangent au cercle* C *et aux deux premiers; ensuite un cercle* E *tangent à* D *et à* A *et* B, etc.

1° *Les points de contact qu'ont entre eux les cercles inscrits* C, D, E... *sont sur une même circonférence ; 2° si un dernier cercle* N, *de rang* n, *ferme la série en se trouvant tangent au cercle* C, *une nouvelle série, commençant en un point quelconque, se terminera après* n *cercles consécutifs.*

Il suffit de transformer par inversion les cercles A et B en deux cercles concentriques A' et B'.

Tous les cercles C', D'... seront égaux entre eux ; les points de contact seront sur un cercle concentrique à D' et C'. Si $n$ cercles ferment le circuit, on peut les considérer comme inscrits dans $n$ secteurs égaux. Et quel que soit le point de départ d'une nouvelle série, on n'aura qu'à former $n$ secteurs égaux pour revenir au point de départ.

### Théorème de Feuerbach.

**238.** *Le cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits.*

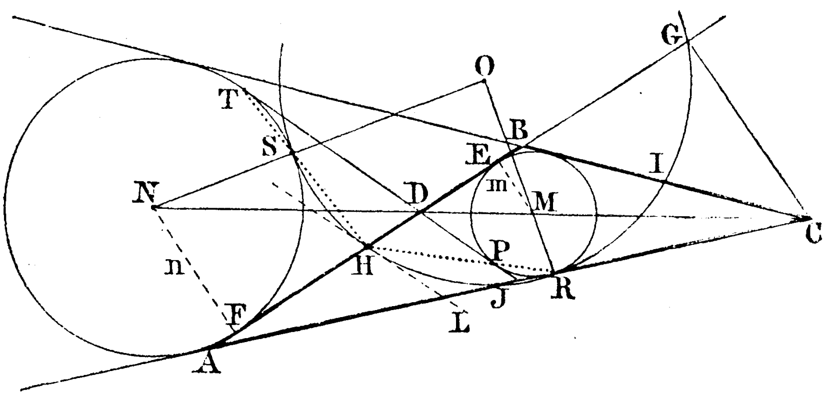



Fig. 151.

Soit ABC le triangle donné, M, N les centres et $m$, $n$ les rayons du cercle inscrit et d'un cercle exinscrit ; H, I, J les milieux des côtés.

Menons les rayons des points de contact et projetons le point C en G, sur AB.

On sait qu'on a :

$$\frac{CM}{CN} = \frac{m}{n}; \quad \frac{DM}{DN} = \frac{m}{n}; \quad \text{d'où} \quad \frac{CM}{CN} = \frac{DM}{DN}.$$

(G., n°s 305 et 306.)

On peut remplacer chaque ligne par sa projection sur AB, on a donc :

$$\frac{GE}{GF} = \frac{DE}{DF}.$$

Ainsi les points D, G divisent harmoniquement le segment EF. (G., n° 786.)

Mais la moitié du segment divisé est une moyenne proportionnelle entre les distances de son point milieu aux deux conjugués (G., n° 787); d'ailleurs $AF = BE$ (G., n° 351), d'où $HE = HF$; donc $\overline{HE}^2 = HD \cdot HG$; soit $\overline{HE}^2 = k^2$.

Ceci établi, transformons la figure par inversion, en prenant H pour pôle et $k^2$ pour puissance d'inversion. Les cercles M et N se reproduisent puisque le carré de leurs tangentes respectives HE, HF égale $k^2$. Le cercle des neuf points, passant par l'origine H, point milieu de AB, se transforme suivant une droite; mais le cercle des neuf points passe par le pied G de la hauteur CG, or D est le point inverse de G, car $HD \cdot HG = k^2$; donc la droite passe par ce point D.

La droite obtenue par la transformation du cercle des neuf points coupe la base AD sous le même angle que la tangente HL, car HL et AB sont antiparallèles par rapport à l'angle C (n° 28, 3°). Or la ligne antiparallèle menée par le point D n'est autre que la seconde tangente intérieure DT, et puisque cette droite est tangente aux cercles M et N, il en est de même du cercle des neuf points.

**238 a.** *Remarque.* Pour déterminer les points de contact R et S du *cercle des neuf points* et des cercles inscrit et exinscrit, il suffit de joindre le point milieu H aux points de contact des cercles M et N et de la seconde tangente intérieure; ainsi HT détermine le point S, et HPR détermine le point de contact R. (Voir aussi n° 1341.)

**238 b. Note.** Le *Cercle des neuf points,* d'abord signalé par EULER pour six points (pieds des hauteurs et des médianes), est parfois nommé *Cercle de Feuerbach,* à cause du théorème précédent. Le cercle des neuf points est assez mal nommé à cause du très grand nombre de points du cercle que l'on connaît actuellement.

On nomme *point de Feuerbach*, le point de contact du cercle inscrit et du cercle des neuf points (n° 1341 b).

* FEUERBACH, professeur de mathématiques au gymnase d'Erlangen, est né en 1800 à Iéna, et mort en 1834. On a de cet auteur : *Propriétés de quelques points remarquables du triangle rectiligne et de plusieurs lignes et figures qu'ils déterminent.*

### Inversion dans l'espace.

**239.** Considérons les figures inverses dans l'espace, mais en nous bornant à la sphère et au plan.

En faisant tourner une droite et un cercle autour du diamètre perpendiculaire à la droite, on obtient une sphère et un plan.

Deux cercles tournant autour de la ligne des centres engendrent deux sphères; on a donc les résultats suivants :

### Théorème.

**240.** *La figure inverse d'une sphère, par rapport à un point de cette surface pris pour origine, est un plan perpendiculaire au diamètre mené par l'origine.*

*La figure inverse d'un plan, par rapport à un point extérieur à ce plan, est une sphère qui passe par l'origine, et dont le diamètre correspondant est perpendiculaire au plan donné.*

*La figure inverse d'une sphère, par rapport à un point extérieur à cette surface, est une autre sphère, et l'origine est un centre de similitude pour les deux sphères.*

**Théorème.**

**241.** *Dans deux figures inverses, les angles correspondants sont égaux.*

Soient dans l'espace la courbe M'N' inverse de MN et M'L' inverse de ML. Ces courbes MN et M'N' sont dans un même plan passant par l'origine; il en est de même des deux autres. Dans chacun de ces plans, on mène les tangentes; il faut prouver que ces lignes se coupent sous des angles égaux.

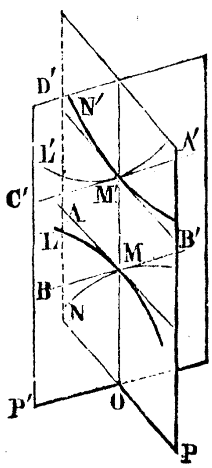



Fig. 152.

Considérons MA, MB et les prolongements M'A', M'B' dirigés en sens contraire.

Les angles trièdres M, OAB et M', OA'B' sont égaux comme ayant un angle dièdre égal compris entre deux angles plans respectivement égaux.

En effet, les dièdres qui ont pour arête commune OMM' sont opposés au sommet. L'angle plan AMO = A'M'O, ainsi qu'on l'a démontré (n° 221). De même l'angle

BMO = B'M'O.

Donc le troisième angle plan

AMB = A'M'B'.

*Remarque.* On étudie les angles opposés afin que les trièdres considérés soient égaux, mais les angles opposés par le sommet sont égaux; donc angle AMB = C'M'D'.

**Théorème.**

**242.** *L'inverse d'un cercle, par rapport à une origine située hors de son plan, est un cercle.*

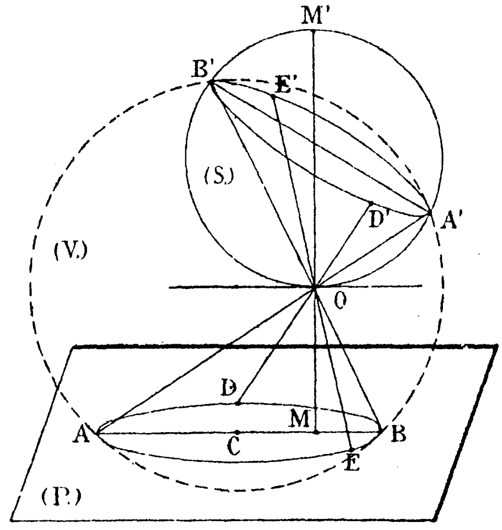



Fig. 153.

Soient AB un cercle, O un point extérieur pris pour origine. Abaissons la perpendiculaire OM sur le plan du cercle. Prenons le plan OMC pour plan principal de la figure à représenter, déterminons l'inverse M' du point M.

La sphère décrite sur le diamètre OM' sera l'inverse du plan P qui contient le cercle donné (n° 240). Donc tous les points inverses du cercle AB se trouvent sur la sphère S. En menant un rayon vecteur quelconque DOD' limité à la sphère, on aura OD . OD' = $k^2$.

Dans le plan OMC faisons passer un cercle par les points A et B et leurs inverses A′, B′. La sphère V, qui aura pour grand cercle la circonférence décrite ABA′B′, doit passer par tous les points inverses tels que D′, E′, car chaque corde menée par le point O donne un produit constant.

L'inverse du cercle AB est donc un cercle A′D′B′E′, car cette figure est l'intersection de deux sphères S et V.

**243.** *Remarques.* 1° Les cercles inverses AB, A′B′ sont les sections antiparallèles du cône dont O est le sommet.

2° Tout plan parallèle au plan du cercle AB donne un autre cercle inverse de A′B′, mais avec une puissance différente d'inversion.

3° Le plan tangent à la sphère du sommet O au cône donne un cercle infiniment petit. Sa direction suffit pour déterminer les sections antiparallèles d'un cône oblique OA′B′, à base circulaire, inscrit dans une sphère.

4° En considérant la sphère V, on peut dire : tout cône de sommet quelconque O, ayant pour base un cercle AB de la sphère, coupe encore cette sphère suivant un autre cercle A′B′.

5° Avec une puissance positive $k^2$ égale à $2r^2$, le plan passe par le centre de la sphère inverse.

**244. Projection stéréographique.** On nomme *projection stéréographique* d'une figure sphérique la projection conique obtenue sur un plan diamétral de la sphère, lorsqu'on prend, pour sommet du cône projetant, une des extrémités du diamètre perpendiculaire au plan de projection.

*Conséquences.* Tout ce qui a été démontré pour les figures inverses dans l'espace s'applique au cas particulier qui constitue la *projection stéréographique*.

Ainsi un cercle AMB a pour projection un cercle A′M′B′.

Les angles sont conservés en vraie grandeur.

**244 a. Note.** La dénomination de *projection stéréographique*, que l'on a donnée à la projection employée par Ptolémée dans son planisphère, est assez récente, car elle est due au P. Aguillon, de Bruxelles, et se trouve dans son *Optique*, publiée en 1613. (*Aperçu historique*, p. 516.)

### Théorème de Chasles.

**245.** *Le centre* N′ *de la circonférence obtenue par la projection d'un cercle* AMB *de la sphère est la projection du sommet* N *du cône circonscrit à la sphère, suivant le cercle considéré* AMB.

En effet, pour un point quelconque M, menons le plan MON qui passe par l'origine O et par le sommet N du cône circonscrit.

La droite NN′O est la projetante du sommet N, et la ligne M′N′ est la projection de la tangente MN.

Pour démontrer le théorème proposé et pour fournir en même temps une autre démonstration d'un théorème connu (n° 242), il suffit de prouver que M′N′ a une longueur constante.

En effet l'angle OMN formé par le rayon OM et la tangente MN mesure l'angle que fait le même rayon OM avec l'arc de cercle que détermine le plan OMN.

L'inverse de cet arc est la droite M'N' (nos 220 et 223); donc les angles OMN et OM'N' sont supplémentaires. Or les côtés opposés aux angles égaux ou supplémentaires sont proportionnels (no 150); donc

$$\frac{M'N'}{MN}=\frac{ON'}{ON};\ M'N'=MN.\frac{ON'}{ON}.$$

Ainsi la longueur de M'N' est constante; donc...

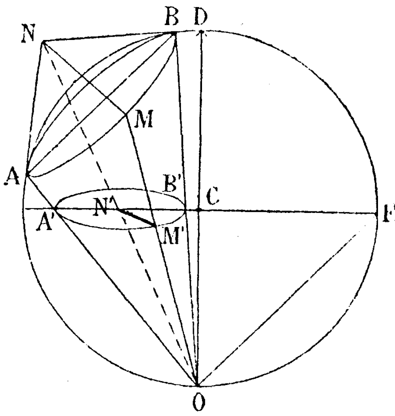


Fig. 154.

**245 a. Note.** Le théorème de CHASLES a été donné en 1816. L'énoncé précédent (no 245) est devenu classique et ne doit pas être modifié; mais il ne s'agit point de *projection orthogonale*, mais bien de *projection conique* ou *projection centrale*, c'est-à-dire du point d'intersection N' de la droite ON et du cercle A'B'.

### Remarque générale.

**246.** Quelle que soit la position du plan P qui a pour inverse une sphère donnée, l'origine est à une des extrémités du diamètre perpendiculaire au plan, et l'on peut faire les remarques suivantes, en désignant par M' le point du plan que détermine le diamètre OM mené par l'origine.

*Tout grand cercle de la sphère qui passe par l'origine O se transforme en une droite qui passe par le point* M'.

*Tout petit cercle qui passe par l'origine a une droite pour inverse*, mais cette ligne ne passe point par M'.

*Tout cercle qui ne passe pas par l'origine* a un cercle pour inverse.

Les cercles qui passent par M', dans le plan P, sont les inverses des petits cercles qui passent par l'extrémité du diamètre opposée à l'origine.

*Toute propriété d'une figure sphérique donne lieu à une propriété correspondante d'une figure plane.*

Réciproquement, *toute propriété d'une figure plane donne une propriété correspondante pour une figure sphérique.*

### Exemples.

**247. Théorèmes. (a)** *Dans un même plan, toute sécante menée par un des centres de similitude de deux circonférences coupe ces deux courbes sous le même angle.*

**(b)** *Deux points antihomologues peuvent être considérés comme étant les points de contact d'un cercle tangent aux deux premiers.* (G., no 818, 1o.)

**(c)** *Quatre points antihomologues*

**Théorèmes corrélatifs. (a)** *Sur une sphère, tout grand cercle mené par un des centres de similitude de deux petits cercles coupe ces deux courbes sous le même angle.*

**(b)** *Deux points antihomologues peuvent être considérés comme étant les points de contact d'un cercle tangent aux deux petits cercles donnés.*

**(c)** *Quatre points antihomologues*

*appartiennent à une même circonférence.* (G., n° 818, 2°.)

(d) *Le lieu des points d'où l'on peut mener à deux circonférences des tangentes égales est une perpendiculaire à la lignes des centres.* (G., n° 830.)

Cette droite se nomme *axe radical* des deux circonférences.

(e) *Tout cercle ayant pour centre un point de l'axe radical, et pour rayon la tangente menée de ce point à deux circonférences données coupe orthogonalement ces deux circonférences.* (G., n° 835.)

(f) *Lorsque par deux points fixes on fait passer une suite de circonférences qui coupent un cercle donné, toutes les cordes communes passent par un même point.*

*appartiennent à une même circonférence.*

(d) *Le lieu des points d'où l'on peut mener à deux petits cercles des arcs de grand cercle tangents et égaux est un grand cercle perpendiculaire à celui qui passe par les centres des deux petits cercles.*

Ce grand cercle se nomme *cercle radical* des deux petits cercles.

(e) *Tout cercle ayant pour centre un point du cercle radical, et pour rayon polaire la corde de l'arc tangent mené de ce point aux deux cercles donnés, coupe orthogonalement ces deux cercles.*

(f) *Lorsque par deux points fixes d'une sphère on fait passer une suite de circonférences qui rencontrent un petit cercle donné, tous les grands cercles, qui tiennent lieu de corde commune, passent par un même diamètre.*

**248.** *Remarques.* 1° L'*hexagramme de Pascal* (G., n° 747), l'*hexagone de Brianchon* (G. n° 807) ont leurs analogues sur la sphère, et l'on peut énoncer les théorèmes suivants :

*Dans tout hexagone sphérique inscrit à un petit cercle, les points de concours des côtés opposés se trouvent sur un grand cercle.*

*Les arcs diagonaux qui joignent les sommets opposés d'un hexagone sphérique circonscrit à un petit cercle se coupent aux mêmes points.*

En d'autres termes, *les trois grands cercles qui passent par les sommets opposés d'un hexagone sphérique circonscrit à un petit cercle se coupent suivant un même diamètre.*

Voici un exemple d'un théorème sphérique, conduisant à un théorème de géométrie plane.

Le *Théorème de Guéneau d'Aumont* (n° 160) devient :

*La somme de deux angles opposés d'un quadrilatère plan inscrit, et dont les côtés sont des arcs de cercle de rayon quelconque, égale la somme des autres angles.* (Baltzer, § IV, n° 4.)

Il est d'ailleurs facile, ainsi que nous l'établirons (*Exercices* du livre II, n° 686), de démontrer directement ce dernier théorème et plusieurs autres, qui ont été déduits, par inversion, de théorèmes relatifs aux polygones sphériques. (E. de G., 2e, 3e, 4e éditions, livre II, n° 686.)

2° La projection stéréographique est usitée en *cartographie.* En prenant un grand cercle comme tableau et l'un de ses pôles pour centre de projection, tous les cercles tracés sur la sphère se projettent sur ce tableau suivant des cercles; par suite, les méridiens de la sphère et les cercles parallèles de latitude sont représentés sur la carte par des arcs circulaires faciles à tracer. La conservation des angles fait que toute figure sphérique est assez fidèlement représentée; mais les surfaces équivalentes, inégalement éloignées du pôle, ne se projettent pas suivant des surfaces équivalentes.

3° La *loxodromie* est une courbe sphérique qui coupe les méridiens sous un angle constant ; pour la tracer, on peut dessiner une spirale logarithmique sur le plan d'un grand cercle, et, du pôle de ce cercle, projeter la courbe plane sur l'hémisphère opposé (*Exercices de Géométrie descriptive*, nos 1217 à 1223). D'après une propriété connue, la spirale logarithmique coupe les rayons vecteurs sous un angle constant ; par suite, il en sera de même de la loxodromie pour les méridiens.

4° Le *théorème de Villarceau :* le plan bitangent au tore coupe cette surface suivant deux cercles égaux, a conduit MANNHEIM au théorème analogue pour la sphère bitangente au tore. (*Exercices de Géométrie descriptive*, nos 942, 943 et 1202 à 1205.)

**248 a. Note.** La projection stéréographique paraît due à HIPPARQUE (150 av. J.-C.). Elle nous a été transmise par PTOLÉMÉE. (*Aperçu historique*, pages 24 et 28.) La méthode de *transformation par inversion* a été proposée par STUBBS en 1843, puis appliquée par WILLIAM THOMSON sous le nom de *Principe des images*. — M. LIOUVILLE a généralisé ce principe en 1849 ; il l'a traité par l'analyse et l'a désigné sous le nom de *Transformation par rayons vecteurs réciproques*. — Le nom de *Surfaces inverses* a été employé par BRAVAIS lorsque la puisssance $k^2$ égale — 1. (N. A., 1854, pages 227 et suivantes.)

La *méthode de transformation par inversion* est très féconde ; on peut même l'appliquer utilement à l'étude de la Trigonométrie sphérique. (Voir PAUL SERRET, *Des Méthodes en géométrie*, page 30.)

* PASCAL, né à Clermont-Ferrand en 1623, mort en 1662, donna, dès l'âge le plus tendre, des marques d'un esprit extraordinaire. A l'âge de seize ans, il publia un *Essai sur les coniques*, ouvrage qui contient l'*hexagramme mystique* et le *théorème fondamental de l'involution*. Il fit connaître le *triangle arithmétique* et étudia les propriétés de la cycloïde.

* BRIANCHON, né à Sèvres en 1785, ancien élève de l'École Polytechnique, était capitaine d'artillerie en 1817, lorsqu'il publia son *Mémoire sur les courbes du second ordre*. BRIANCHON est mort à Versailles en 1864. Le théorème qui porte son nom est le 36e de cet ouvrage ; mais il l'avait publié en 1810, dans le XIIIe cahier du journal de l'École Polytechnique.

* WILLIAM THOMSON, rédacteur du *Cambridge and Dublin mathematical Journal*.

* LIOUVILLE, 1809-1882, membre de l'Académie des sciences et du Bureau des Longitudes, fondateur du *Journal de Mathématiques*, cité fréquemment sous le nom de *Journal de M. Liouville*.

* A BRAVAIS. On lui doit divers théorèmes relatifs à la *symétrie*. (G., nos 489-496.) Le *Journal de M. Liouville* a publié plusieurs de ses mémoires.

* HIPPARQUE, environ 150 av. J.-C. Astronome célèbre, « un des hommes les plus étonnants de l'antiquité » d'après DELAMBRE (*Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques*, par MAXIMILIEN MARIE ( tome I, p. 208 à 217).

# V

## DISCUSSION ET EXTENSION

### § I. — Discussion d'un Problème.

**249.** *Définition.* Discuter un problème, c'est étudier les divers cas qui peuvent se présenter lorsque certaines données varient.

**Problème.**

**250.** *Mener une parallèle aux bases d'un trapèze, de manière que le segment compris entre les diagonales ait une longueur donnée* l.

*Construction.* On prend $BE = l$, et on mène EM parallèle à BD; la droite MN parallèle aux bases est la ligne demandée.

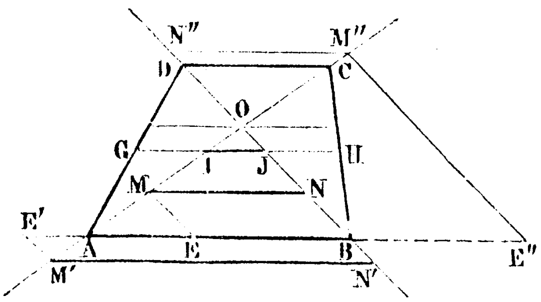


Fig. 155.

(**a**) Soit $l > BA$.

On prend $BE' = l$, puis on mène E'M' parallèle à OB; par cette construction, l'on obtient une droite M'N' extérieure au trapèze; mais il y a une solution, quelle que soit la longueur de $l$.

(**b**) Soit $$l = BA.$$

Dans ce cas, AB répond à la question.

(**c**) Soit $$l = \frac{AB - CD}{2}.$$

Lorsque $l$ est la demi-différence des bases, le segment IJ est sur la base moyenne.

En effet $$IH = \frac{AB}{2}; \quad JH = \frac{DC}{2};$$

donc $$IJ = \frac{AB - DC}{2}.$$

(**d**) Si $l =$ zéro, on n'a plus que le point de concours des diagonales.

(**e**) Enfin, pour une valeur négative, on porterait $l$ de B en E'', et l'on obtiendrait M''N'', dont la direction de droite à gauche est contraire à celle de MN.

*Résumé.* Le problème admet toujours une solution, et une seule; la longueur donnée $l$ peut varier de $+\infty$ à zéro, et de zéro à $-\infty$.

Si l'on ne tenait pas compte de la direction de MN, et le point M devant se trouver sur AC, la longueur $l$ ne recevrait que des valeurs positives : à chacune d'elles correspondraient deux solutions; l'une d'elles serait située dans l'angle AOB, et l'autre dans l'angle COD.

### Problème.

**251.** *Soit à décrire une circonférence tangente à trois cercles donnés* A, B, C.

Le contact peut être extérieur ou intérieur. Dans le premier cas, représentons les cercles par A, B, C; et dans le second, par $a$, $b$, $c$. On a les huit solutions suivantes :

$$(1)\quad A,\ B,\ C \qquad\qquad\qquad (3)\ \left\{\begin{array}{l} A,\ b,\ c \\ a,\ B,\ c \\ a,\ b,\ C \end{array}\right.$$

$$(2)\ \left\{\begin{array}{l} A,\ B,\ c \\ A,\ b,\ C \\ a,\ B,\ C \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad (4)\quad a,\ b,\ c.$$

Mais, en réalité, il n'y a que quatre constructions différentes.

En effet (1) donne trois contacts extérieurs.

Le groupe (2) correspond à deux contacts extérieurs et un intérieur.

Le groupe (3) donne un contact extérieur et deux intérieurs.

Enfin (4) a les trois contacts intérieurs.

*Remarque.* Les huit solutions se correspondent deux à deux comme il suit :

$$\left\{\begin{array}{l} A,\ B,\ C \\ a,\ b,\ c \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A,\ B,\ c \\ a,\ b,\ C \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} A,\ b,\ C \\ a,\ B,\ c \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a,\ B,\ C \\ A,\ b,\ c. \end{array}\right.$$

*Cas particuliers.* Un ou plusieurs cercles peuvent se réduire à un point, car un point peut être considéré comme un cercle dont le rayon est nul; on peut avoir successivement :

1° Deux cercles et un point;

2° Un cercle et deux points;

3° Trois points.

Un ou plusieurs cercles peuvent être remplacés par une droite, car une droite peut être considérée comme un cercle de rayon infini. On peut donc avoir :

4° Deux cercles et une droite;

5° Un cercle et deux droites;

6° Trois droites.

On doit encore considérer les trois combinaisons suivantes :

7° Un cercle, un point et une droite;

8° Deux points et une droite;

9° Un point et deux droites.

*Variétés.* Le cas général de trois cercles et chaque cas particulier peuvent offrir des *variétés* relatives à la position des données. Ainsi, pour trois cercles donnés A, B, C, on peut faire les remarques suivantes :

(**a**) Trois cercles extérieurs deux à deux, et dont les centres ne sont pas en ligne droite, donnent lieu à *huit solutions différentes.*

(b) Trois cercles extérieurs deux à deux, mais dont les centres sont en ligne droite, donnent *huit solutions* symétriques deux à deux par rapport à la ligne des centres.

(c) Trois cercles, dont deux, A et B, se coupent, tandis que C est extérieur, n'offrent plus que *quatre solutions*. En effet, A et B seront en même temps ou tangents extérieurement, ou tangents intérieurement au cercle demandé ; on n'a donc que les groupes ci-après :

$$\begin{cases} A,\ B,\ C \\ A,\ B,\ c \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a,\ b,\ C \\ a,\ b,\ c. \end{cases}$$

(d) A et B sont extérieurs l'un à l'autre, mais intérieurs au cercle C.

*Quatre solutions*. Le contact avec C sera toujours intérieur, mais on peut avoir les groupes suivants :

$$\begin{cases} A,\ B,\ c \\ a,\ b,\ c \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A,\ b,\ c \\ a,\ B,\ c. \end{cases}$$

(e) A et B se coupent et sont intérieurs à C.

*Deux solutions* : A, B, $c$ et $a$, $b$, $c$.

*Remarque*. Les indications précédentes suffisent pour montrer l'étonnante variété des aspects différents que peut présenter un problème donné ; mais on aurait à examiner bien d'autres particularités, si l'on voulait rechercher toutes les circonstances possibles.

**251 a. Note.** On peut voir la belle solution due à GERGONNE, en 1814 (*Annales de mathématiques,* tome IV). Elle est reproduite dans la *Géométrie de Bobillier,* page 372 ; ainsi que dans les premières éditions du *Traité de Géométrie de Rouché et Comberousse,* n° 389. — PONCELET, dans son *Traité des propriétés projectives des figures,* tome I, page 137, etc., indique diverses solutions. — M. FOUCHÉ a donné une très belle solution, en 1892, dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*. A son insu, le savant professeur a retrouvé une des solutions de PONCELET ; mais il l'a développée et complétée.

* GERGONNE, professeur, puis recteur à Montpellier, mort en 1859, fondateur d'un journal célèbre, connu sous le nom d'*Annales de Gergonne,* et où l'on trouve des articles remarquables de LHUILIER, FRANÇAIS, SERVOIS, WRONSKI, PUISSANT, LAMÉ, BRIANCHON, DURRANDE, CH. DUPIN, FRÉGIER, PONCELET, VALLÈS, GUÉNEAU D'AUMONT, STURM, AMPÈRE, ABEL, CAUCHY, MAGNUS, PLUCKER, BOBILLIER, GÉRONO, LENTHÉRIC, STEINER, QUÉTELET, DANDELIN, CHASLES, GALOIS, SARRUS, etc.

* BOBILLIER (1797-1832), professeur à l'école d'*arts et métiers de Châlons,* auteur du *Cours de Géométrie,* des *Principes d'algèbre,* destinés aux élèves des écoles d'arts et métiers.

**Problème.**

**252.** *Examiner le nombre de solutions que peut avoir la question suivante : Avec un rayon donné* c, *décrire une circonférence* C *tangente à deux circonférences* A *et* B.

Soient $a$ et $b$ les rayons de A et B, $d$ la distance des centres.

La plus grande distance des circonférences données égale $a+b+d$ ; et la plus petite distance égale $d-(a+b)$. (G., n° 138.)

Admettons en outre que $a$ soit plus grand que $b$ et que les deux circonférences A et B soient extérieures, c'est-à-dire qu'on ait d'une manière générale :

$$d > a + b.$$

1° $2c > d + a + b$. On a huit solutions symétriques deux à deux par rapport à la ligne des centres des cercles A et B.

2° $2c = d + a + b$. On obtient sept solutions; car les deux circonférences symétriques qui enveloppaient A et B dans le cas précédent se réduisent à une seule.

3° $2c < d + a + b$, mais $> d + a - b$, et *a fortiori* $> d + b - a$. On a six solutions.

| | | |
|---|---|---|
| 4° $2c = d + a - b$. | | Cinq solutions. |
| 5° $2c < d + a - b$, | mais $> d + b - a$. | Quatre solutions. |
| 6° $2c = d + b - a$. | | Trois solutions. |
| 7° $2c < d + b - a$, | mais $> d - (a + b)$. | Deux solutions. |
| 8° $2c = d - (a + b)$. | | Une solution. |
| 9° $2c < d - (a + b)$. | | Point de solution. |

*Cas particuliers.* Il y aurait ensuite à examiner les réponses que l'on obtient suivant la position relative des deux circonférences données et les diverses valeurs que $c$ peut recevoir.

Ainsi, quand la circonférence B est dans la circonférence A, on peut avoir, suivant la grandeur relative des rayons et la distance des centres, soit quatre solutions, trois, deux, une ou aucune.

**Problème.**

**253.** *Sur une droite illimitée XY se meut un segment MN de longueur constante. Deux points fixes A et B sont donnés; on mène AMC, BNC; étudier les variations de l'angle C ainsi déterminé.*

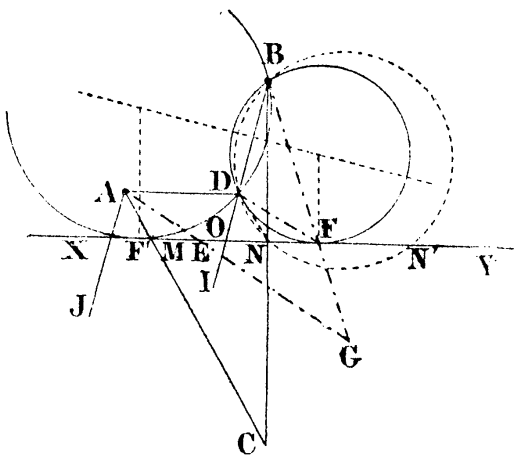


Fig. 156.

Soit MN le segment dans une position quelconque.

Pour simplifier la question, il suffit de mener la droite AD égale et parallèle à MN. Le point D sera ainsi déterminé, et l'angle DNB sera égal à l'angle variable C. Or l'angle N est d'autant plus grand que le rayon du cercle qui passe par les points fixes B et D est plus petit (n° 216); donc le maximum G est donné par le cercle tangent BDF. Le cercle BDF′ donne un second maximum.

Entre les deux maximums, l'angle devient nul pour le cercle de rayon infini, c'est-à-dire pour la corde commune BD. En effet, les droites BDI, AJ sont alors parallèles.

*Variations.* Lorsque N est situé à l'infini, vers la droite, l'angle est nul; puis, lorsque le point vient en N′, l'angle a une certaine valeur, et cette valeur augmente jusqu'à la position où il y a un maximum G; ensuite il diminue en N, jusqu'en O, où il est nul. Depuis le point O jusqu'à l'infini, vers la gauche, l'angle, d'abord nul, augmente, passe par le maximum F', diminue et revient à zéro.

*Remarque.* Au point de vue de la continuité de la fonction, il n'y a pas deux maximums, car l'angle change de signe; mais il y a, en réalité, un maximum et un minimum.

### Problème.

**254.** *Diviser un trapèze en deux parties équivalentes, par une droite menée par un point donné.*

La droite MN, qui joint les points milieux des bases (fig. 157), divise le trapèze en deux parties équivalentes; par suite, toute droite EF, menée par le milieu O de MN, et qui rencontre les deux bases, divise le trapèze en deux parties équivalentes. Il n'en est plus ainsi lorsque le point F tombe sur le prolongement de la petite base; on est donc conduit à déterminer les positions extrêmes de la ligne de division.

(**a**) Menons COC', DOD' (fig. 157). La droite EF passe par le point O et coupe les deux bases du trapèze, lorsque le point P est situé dans l'angle COD ou dans son opposé par le sommet.

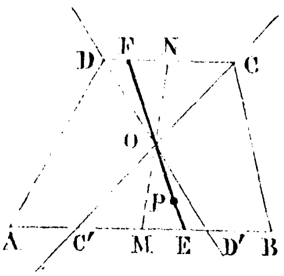


Fig. 157.

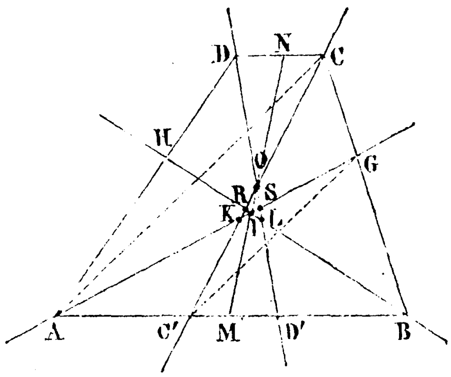


Fig. 158.

(**b**) Déterminons les positions limites de la droite de division, lorsqu'elle coupe la grande base et un des côtés latéraux.

*Graphiquement.* Il suffit de joindre le point A au point C (fig. 158), de mener la parallèle C'G, puis AG.

Le triangle ABG est équivalent à C'BC.

*Numériquement.* On peut calculer la hauteur $h'$ du triangle ABG en fonction de la hauteur $h$ du trapèze et de ses bases $b$ et $b'$.

On doit avoir : $bh' = \frac{b+b'}{2}\,.\,h;$ d'où $h' = \frac{(b+b')h}{2b}$

Le point H est à la même hauteur que G. Les droites AG, BH se coupent sur MN en un point I. En outre, AG coupe CC' au point K et BH coupe DD' au point L; donc

La droite de division coupe la grande base et le côté BC, lorsque le point P est compris dans l'angle CKG ou dans son opposé au sommet.

La droite coupe AB et AD, lorsque le point P est situé dans l'angle DLH ou dans son opposé.

(c) Enfin la droite coupe les deux côtés non parallèles, lorsque le point P est dans l'angle AIH ou dans son opposé par le sommet.

(d) Soient R et S les points où BH rencontre CC' et où AG rencontre DD'.

Pour tout point compris dans le quadrilatère non convexe OKIL, il y a trois solutions, car le point appartient à trois des positions considérées.

Pour ORIS, la droite peut couper CD et C'D', ou CG et AC', ou bien DH et BD'.

Pour un point P compris dans le triangle RIK, la droite coupe DC et C'D', ou AH et GB ou bien CG et AC'; remarque analogue pour SIL. On aura : DC et C'D', ou BG et AH, ou bien DH et BD'.

(e) Pour tout point du périmètre du quadrilatère OKIL, il y a deux solutions.

(f) Tout point pris hors du quadrilatère OKIL ne donne qu'une solution.

*Remarque*. Le périmètre du trapèze est partagé en huit segments associés deux à deux. La droite de division doit toujours rencontrer deux segments correspondants.

**Problème.**

255. *On donne une circonférence et une droite; mener une corde telle que le carré qui aurait cette corde pour un de ses côtés, ait le côté opposé sur la droite donnée.*

*Discuter le problème, en admettant que la droite varie de position par rapport au centre de la circonférence.*

Soit XY la ligne donnée.

Puisqu'il s'agit d'inscrire une figure semblable à une figure donnée, on peut recourir à la similitude (nº 206).

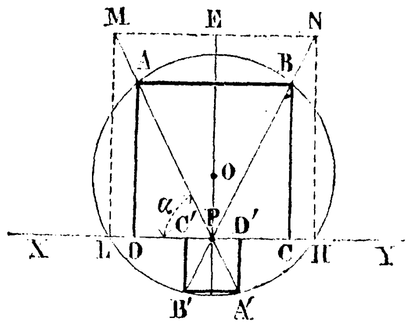


Fig. 159.

Sur XY construisons un carré de côté quelconque, mais dont P, milieu du côté des carrés, soit aussi le milieu de HL, et menons PM, PN.

La figure ABCD est un carré, puisqu'elle est semblable à LMNH.

La corde A'B' donne un second carré.

*Remarque*. Il suffit de mener le diamètre perpendiculaire à XY, de prendre une perpendiculaire HN, égale au double de PH, et de mener NBPB'. Les perpendiculaires BC et B'C' sont les côtés des carrés.

On peut aussi mener par le point P une droite PN, faisant avec XY l'angle constant $\alpha$ d'un triangle rectangle PHN, dont le côté HN est double de PH.

La droite PN détermine les sommets B et B', et par suite les côtés BC, et B'C' des deux carrés.

**Discussion**. Il suffit de déplacer la droite XY, parallèlement à elle-même, à partir du centre et d'un seul côté de ce point, car les deux positions symétriques de XY, par rapport au point O, donnent des résultats analogues.

(**a**) XY passe par le centre (fig. 160).

Il y a deux solutions égales AD, BC; d'ailleurs,

$$OD = \frac{AD}{2};$$

donc $$OD^2 + AD^2 \quad \text{ou} \quad \frac{AD^2}{4} + AD^2 = r^2;$$

$$5AD^2 = 4r^2; \quad \text{d'où} \quad AD^2 = \frac{4}{5} r^2.$$

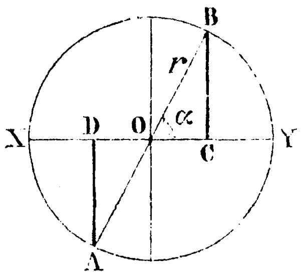



Fig. 160.

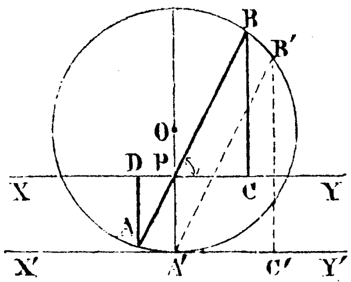



Fig. 161.

(**b**) Dès que XY s'éloigne du centre, on obtient deux carrés inégaux AD, BC (fig. 161).

(**c**) Lorsque la droite X'Y' est tangente au cercle, un des carrés s'annule; il ne reste plus que B'C' (fig. 161).

(**d**) Lorsque la droite XY devient extérieure (fig. 162), il y a deux carrés de même sens, pourvu que la droite PAB coupe la circonférence en deux points.

(**e**) Lorsque OP' égale le diamètre, la droite P'B' passe par l'extrémité du rayon OB', parallèle à X'Y' (fig. 162); alors B'C' donne le carré maximum. Il égale $4r^2$.

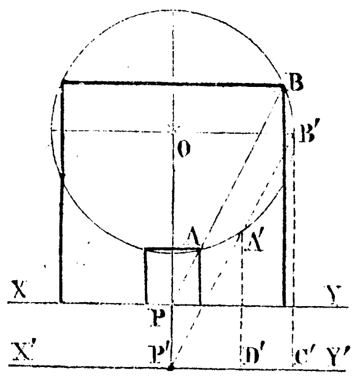



Fig. 162.

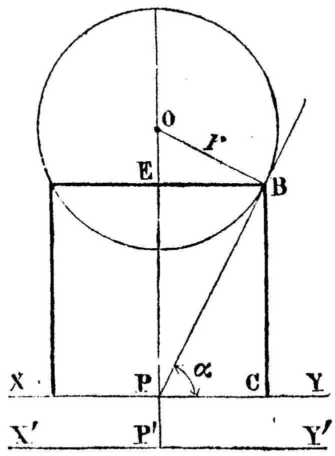



Fig. 163.

(**f**) XY, s'éloignant encore du centre O, atteint une position pour laquelle la droite PB se trouve tangente à la circonférence (fig. 163). Les deux solutions coïncident; et, au point de vue géométrique, il n'y a qu'un seul carré. Pour calculer la superficie de ce carré, on peut considérer les triangles rectangles semblables OBE, PBE.

D'abord $\quad BE = 2 . OE$, puisque $BC = 2 . CP$,

$$BE^2 + OE^2 = BE^2 + \frac{BE^2}{4} = r^2; \quad \text{d'où} \quad 5BE^2 = 4r^2; \quad \text{d'où} \quad BE^2 = \frac{4}{5} r^2.$$

Or BE est la moitié du côté du carré; donc

$$BC^2 = \frac{16}{5} r^2.$$

Le triangle rectangle OBP est semblable à BEP;

donc $\quad BP = 2r \quad$ et $\quad OP^2 = 5r^2.$

Ainsi, à la position limite, $OP = r\sqrt{5}$.

(**g**) Pour une valeur de OP plus grande que $r\sqrt{5}$, pour P' par exemple (fig. 163), il n'y a plus de solution.

**Note.** Il est utile de comparer la *discussion géométrique* précédente à la *discussion algébrique* du même problème. (Voir *Exercices d'algèbre*, n° 1460.)

**Problème.**

**256.** *Dans un triangle quelconque* ABC, *inscrire un rectangle de périmètre donné* 2p.

*Construction.* Élevons une perpendiculaire AF sur AC, menons la parallèle BD.

On sait qu'on résout le problème pour le triangle rectangle CAD, en prenant.

$$AE = AF = p$$

et menant FE. Le point O fait connaître M (n° 99, **a**).

On peut se borner à mener FG et GE (n° 191).

On a : $MN + MP = p$.

Lorsque le demi-périmètre variera, il suffira de mener des parallèles à GE.

1° *Soit la base* AC *plus grande que la hauteur* BH *ou* AD.

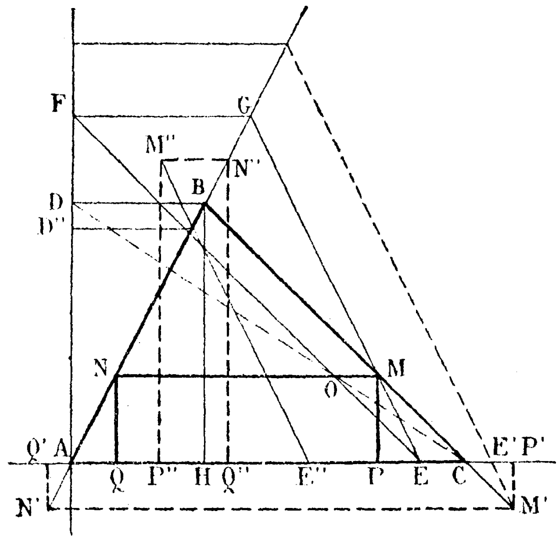



Fig. 164.

(**a**) Supposons $p > AC$; par exemple, $p = AE'$.

La droite E'M' parallèle à GE, coupe le prolongement inférieur de BC.

La hauteur M'P' est de sens contraire à MP, elle doit être regardée comme négative, et en ne tenant compte que des valeurs absolues, on a en effet : $\quad M'N' - M'P' = AE = p;$

(**b**) $\quad p = AC.$

La hauteur est nulle; le demi-périmètre se réduit à la longueur AC.

(**c**) $\quad p < AC \quad$ mais $\quad > AD.$

Le point M est donné par une droite GE, qui coupe BC entre les **points** B et C.

**On** a la somme proprement dite $MN + MP = p$.

(**d**) $p = AD.$

Le demi-périmètre se réduisant à la hauteur abaissée du point B sur AC, la base du rectangle est nulle (fig. 164).

(**e**) $p < AD$ égale $AD'' = AE''$ par exemple.

La parallèle menée par E″ coupe BC en son prolongement M″ (fig. 164). Le point M″ est à gauche du point N″. La base devrait être regardée comme négative. On a réellement, en ne tenant compte que des valeurs absolues :

$$M''P'' - M''N'' = AE'' = p.$$

Pour toute grandeur de $p$, moindre que AD, la parallèle coupe le prolongement supérieur de CB; néanmoins il y a encore deux hypothèses à faire.

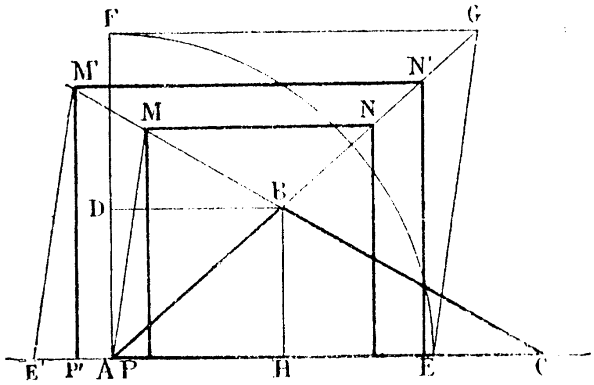



Fig. 165.

(**f**) Soit $p =$ zéro.

La différence est nulle; donc la parallèle AM à EG, menée par le point A (fig. 165), donne un carré inscrit; car $MP - MN =$ zéro.

L'inscription de ce carré se résout facilement par la similitude (nº 206).

(**g**) Soit $p = -l.$

Portons la longueur donnée de A en E′ (fig. 165);

on aura : $M'P' - M'N' = -l.$

En réalité, au point de vue géométrique, on a simplement un rectangle dont la base M′N′ surpasse la hauteur d'une quantité donnée $l$.

*Remarque.* (**a**) et (**g**) répondent à la question suivante : Inscrire un rectangle dont la base surpasse la hauteur d'une quantité donnée.

(**c**) Le périmètre a une longueur donnée.

(**e**) La hauteur surpasse la base d'une longueur donnée.

(**f**) Inscrire un carré.

**257.** 2º *La base du triangle égale la hauteur* (fig. 166).

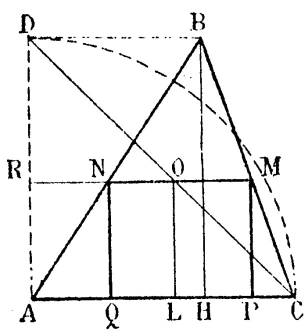



Fig. 166.

Le problème est indéterminé, car le triangle transformé ADC est isocèle, et l'on sait que $OR + OL = AC$; et quel que soit le point M sur BC, on aura toujours $MN + MP = AC$.

Sur le prolongement de BC, on a une différence (nº 75).

3º *La base est plus petite que la hauteur.*

La discussion est analogue à celle de 1º.

*Remarque.* Comme on peut opérer sur un côté quelconque du triangle, les solutions se trouvent triplées. Ainsi, pour un triangle à trois côtés inégaux, si l'on donne à $p$ une valeur comprise entre le côté et la hauteur correspondante qui diffèrent le moins l'un de l'autre, on obtiendra trois rectangles ayant pour périmètre $2p$.

Pour tout triangle quelconque il y a trois carrés inscrits, et *le plus grand carré est celui qui correspond au plus petit côté du triangle.*

Voir aussi nos 302 et 1635.

**Problème.**

**258.** *Étudier les variations de la différence des distances de deux points donnés à un même point d'une droite donnée.*

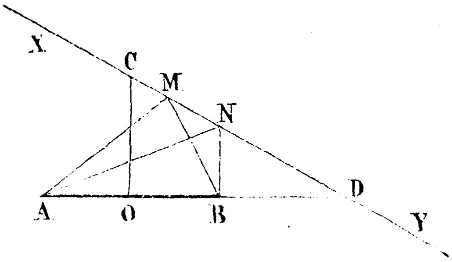



Fig. 167.

**Ier Cas.** *Les deux points* A *et* B *sont d'un même côté de* XY.

Élevons une perpendiculaire OC au milieu de AB, et prolongeons AB jusqu'à la rencontre XY.

Il y a trois parties à étudier séparément : CD, CX, DY.

(**a**) *Pour le point* C, *la différence est nulle;* car $AC = BC$.

(**b**) *De* C *à* D *la différence augmente graduellement.*

Prouvons qu'on a : $AM - BM < AN - BN$ (fig. 167).

Lorsque deux triangles ont même base et que deux de leurs côtés se coupent, la somme des côtés qui se rencontrent est plus grande que la somme des deux autres;

donc $$AM + BN < AN + BM.$$

Mais, aux deux membres d'une inégalité, on peut retrancher une même quantité sans changer le sens de l'inégalité;

donc $$AM - BM < AN - BN.$$

(**c**) Au point D, on a : $AD - BD = AB$.

(**d**) De D *à* Y, *la différence diminue graduellement* (fig. 168).

Comme précédemment, on prouve que $AM - BM < AN - BN$.

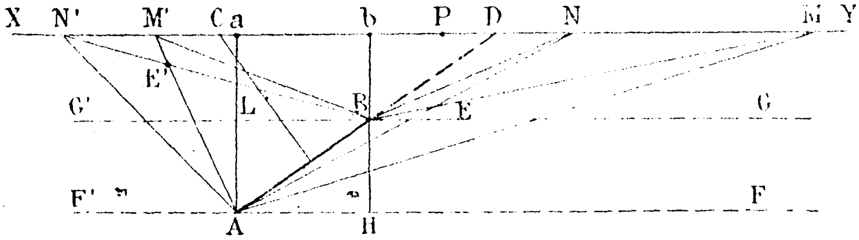



Fig. 168.

A la limite, quand Y tend vers l'infini, les droites AF, BG deviennent parallèles.

Leur différence $= AH = ab$, projection de AB sur la ligne donnée.

(**e**) De C à X, la distance $BM'$ surpasse $AM'$ ; en prenant $BM' - AM'$ pour différence, on peut dire que la différence augmente lorsqu'on s'éloigne du point C.

En effet, $BM' + AN' < BN' + AM'$ ;

d'où $BM' - AM' < BN' - AN'$.

A la limite, quand X s'éloigne indéfiniment vers la gauche, les droites BG′ et AF′ sont parallèles ; elles ont aussi $ab$ pour différence.

(**f**) En prenant constamment $AM' - BM'$ pour différence, on doit dire que de C vers X la différence est négative et augmente en valeur absolue jusqu'à égaler $ab$.

**259.** *Résumé.* De X vers C la différence est négative ; sa *valeur absolue*, égale d'abord à $ab$, décroît de plus en plus et devient nulle au point C ; à droite de ce point, la différence reste constamment positive et augmente graduellement jusqu'au point D, où elle égale AB. Au delà du point D, la différence toujours positive décroît, et pour Y à l'infini, elle devient égale à $ab$ ; donc *la différence* part de $-ab$, arrive à zéro, croît jusqu'à AB, puis diminue jusqu'à $ab$.

*Remarques.* 1° De C à D, la différence passe de zéro à AB (fig. 168) ; donc il y a un point P pour lequel la différence égale $ab$.

2° En ne tenant compte que de la *valeur absolue* de la différence, on peut dire :

De X à P il y a deux positions et deux seulement, pour lesquelles la différence peut avoir une valeur comprise entre zéro et $ab$.

De P à Y il y a deux positions et deux seulement, pour lesquelles la différence peut avoir une valeur comprise entre $ab$ et AB.

*Donc de X à Y il y a deux positions et deux seulement, pour lesquelles la différence a une valeur donnée*, lorsque cette valeur est comprise entre zéro et AB.

*Cas particulier.* Lorsque XY est parallèle à AB, la projection $ab = AB$. A partir du point C, soit vers la droite, soit vers la gauche, la différence augmente graduellement et varie de zéro à AB.

**2e Cas.** *Les deux points donnés* A *et* B *sont de part et d'autre de* XY (fig. 169).

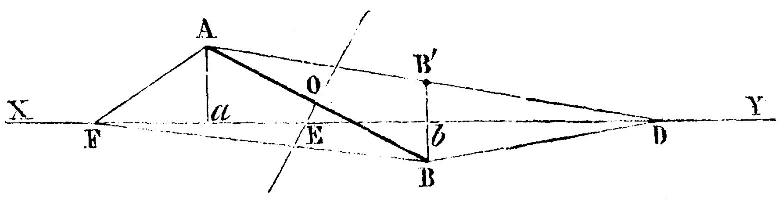



Fig. 169.

On retombe dans le cas précédent, en déterminant la symétrique B′ du point B, par rapport à la droite donnée XY.

Sur la droite donnée, et pour toute différence comprise entre zéro et AB′, on trouve deux points qui donnent la différence demandée.

(**g**) Le point D, tel que XY est bissectrice de l'angle ADB, donne la différence maxima AB′.

(**h**) De D vers Y, la différence diminue de plus en plus et tend à devenir égale à la projection $ab$ de AB sur XY. Il est évident que AB′ donne la même projection $ab$.

(**i**) Au point E, où la perpendiculaire OE, élevée au milieu de AB, coupe XY, la différence est nulle (fig. 169).

(**j**) De D vers E, la différence diminue depuis sa valeur maxima AB' jusqu'à zéro.

(**k**) A partir de E vers X, la différence AF — BF est négative; en ne tenant compte que de la *valeur absolue*, ou de BF — AF, on peut dire qu'au delà du point E, la différence augmente quand le point s'éloigne de E, et tend à devenir égale à la projection *ab* de AB sur XY.

**260. Application.** On sait que l'hyperbole est le lieu des points dont la différence des distances à deux points donnés est constante.

Soient F, F' les points fixes (fig. 170); $2a$ la différence constante; elle doit être plus petite que FF'. Soit donc $AA' = 2a$.

1° L'*hyperbole est une courbe convexe,* car une droite ne peut la couper qu'en deux points. En effet, sur cette droite, on ne peut trouver que deux points dont la différence des distances à F et F' soit égale à $2a$ (n° 259. *Remarque,* 2°).

2° Toute droite XY qui laisse F et F' d'un même côté, coupe la courbe en deux points; car il existe deux positions pour lesquelles la différence des distances est moindre que FF'.

En effet, la droite MN coupe les deux branches, car les différences

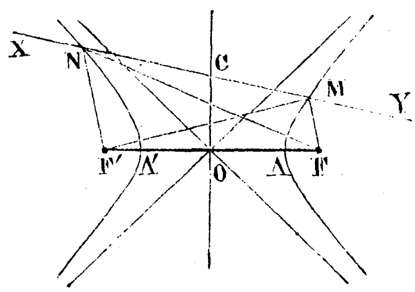



Fig. 170.

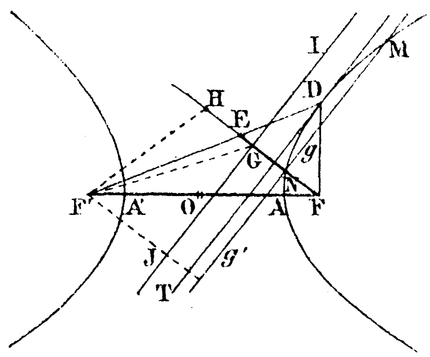



Fig. 171.

F'M — FM et F'N — FN ont même valeur absolue, mais sont de signe contraire, car elles sont de part et d'autre du point C (n° 258, **f**).

3° *Une droite qui passe entre les points F et F' peut couper l'hyperbole en deux points, lui être tangente ou ne pas rencontrer la courbe.*

En effet, soit MN (fig. 171); déterminons la symétrique G du point F par rapport à MN, et projetons les foyers en $g$ et $g'$ sur la droite donnée. Lorsque la longueur AA' ou $2a$ est comprise entre $gg'$ et F'G, il y a deux points d'intersection appartenant à la même branche.

Sur toute parallèle à MN, la projection de FF' égale toujours $gg'$.

Or, en déterminant le symétrique E du point F, par rapport à une certaine droite DT, on peut trouver que $F'E = 2a$; alors la droite DT est tangente à la courbe; les deux points d'intersection se réduisent à un seul.

Enfin, pour IJ, l'on a $2a >$ F'H, et la droite ne rencontre pas la courbe.

4° *Une droite* OD (fig. 172), *qui passe par le centre* O, *ne rencontre la courbe qu'à l'infini, lorsque la projection* DD' *de* FF' *sur* OD *égale de la distance* 2a.

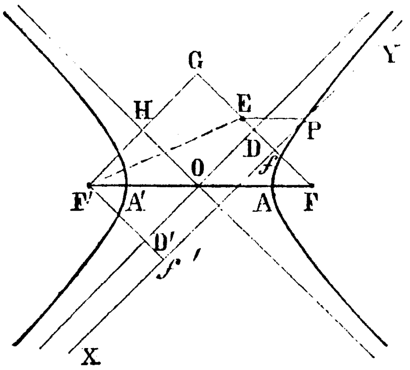



Fig. 172.

En effet, pour une droite menée par le milieu O de FF', la différence, d'abord nulle, augmente de part et d'autre du point O, et ne devient égale à la projection de FF' que pour les points infiniment éloignés du centre.

*Les droites* OD, OH *sont asymptotes de la courbe.* On peut les considérer comme des tangentes dont le point de contact est infiniment éloigné du point O; car en prenant DG = DF pour avoir le symétrique de F, on a :

$$GF' = DD' = 2a.$$

5° *Toute droite qui ne passe pas par le centre, et telle que la projection* ff' *égale* 2a, *ne coupe l'hyperbole qu'en un seul point.*

En effet, soit $2a = ff' = F'G$. Le point G étant le symétrique du foyer F par rapport à l'asymptote OD, le point E symétrique de F par rapport à la parallèle XY est différent du point G.

On a donc $\qquad 2a < EF'.$

Or, à distance finie, il existe un point P et un seul tel que

$$PF' - PF = ff' = 2a \quad (\text{n}^\text{o}\ 259,\ \textit{Remarque},\ 1^\text{o}).$$

**261.** *Remarque.* La droite XY n'est point tangente, quoiqu'elle n'ait qu'un seul point de commun à distance finie avec l'hyperbole; car par la nature même de la variation de la différence, on reconnaît que le point P n'est pas obtenu par la réunion de deux points infiniment rapprochés (n° 259, *Remarque*, 1°).

Ainsi *une droite qui n'a qu'un point commun* (à distance finie) *avec une courbe convexe non fermée, peut n'être point tangente* à *cette courbe.*

**Note.** Cette belle étude est due à M. Régis Pialat, ingénieur civil, sorti de l'*Ecole des Mines* en 1876, avec le numéro 1; mort en 1894, à Mauléon, après avoir professé pendant plusieurs années, comme frère des Ecoles chrétiennes, au Cours préparatoire à l'Ecole des Mines, à Saint-Etienne (pensionnat Saint-Louis).

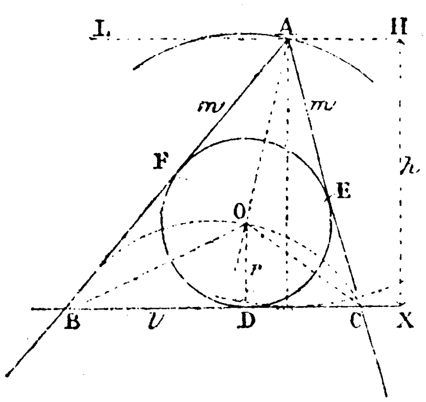



Fig. 173.

**Manières diverses d'envisager un problème.**

**262.** Une question donnée peut être proposée de différentes manières, et chaque énoncé conduit à une solution plus ou moins facile; il y a donc parfois utilité à transformer l'énoncé proposé. En voici un exemple :

(1) *Un angle* A *constant a ses deux côtés tangents à un cercle donné, de rayon* r. *Quelle position doit occuper cet angle pour que les côtés interceptent une longueur* BC $= l$ *sur une tangente fixe* DX?

(2) *Étant données deux tangentes fixes* AB, AC, *mener une troisième tangente* DX *telle que le segment* BC, *intercepté par les deux premières, égale une ligne donnée* l.

(3) *Construire un triangle, connaissant la base* BC, *l'angle au sommet* A, *et le rayon du cercle inscrit.*

Ces divers énoncés correspondent à la même question; mais ils conduisent avec plus ou moins de facilité à la solution.

1re *Solution.* Supposons le problème résolu et prenons les diverses questions en commençant par (3). L'angle BOC égale $A + \frac{B+C}{2}$ ;

mais $\frac{B+C}{2} = \frac{180 - A}{2}$; donc $O = \frac{2A}{2} + \frac{180 - A}{2} = 90^o + \frac{A}{2}$ ;

et le problème est ramené à construire un triangle BOC, connaissant la base BC, l'angle au sommet BOC et la hauteur $r$.

2e *Solution.* La longueur AE ou $m$ peut être regardée comme connue, puisqu'on donne l'angle A et le rayon $r$. Le périmètre égale $2(m + l)$; car $BF + CE = l$. La surface égale $pr = (m + l)r$; mais elle égale aussi $\frac{lh}{2}$. Donc $\frac{lh}{2} = r(m + l)$; $h = \frac{2r(m + l)}{l}$, 4e proportionnelle. Et le problème est ramené à construire un triangle, connaissant la base BC, l'angle au sommet A et la hauteur $h$.

En considérant la tangente mobile comme trouvée, on voit qu'elle est déterminée lorsqu'on connaît sa distance au sommet A; donc, pour construire directement le no (2), du sommet A, avec $h$ pour rayon, décrivons un arc et menons une tangente commune BC à cet arc et au cercle inscrit.

3e *Solution.* Pour le 1er énoncé, à la tangente fixe DX, menons une parallèle HL à la distance $h$, et du point O, avec la longueur connue AO, décrivons un arc qui fera connaître la position du sommet de l'angle mobile.

La considération de la hauteur $h$ permet de résoudre directement chaque énoncé.

## § II. — Méthode par extension.

**263.** *Extension.* La méthode par *extension* consiste à étendre les propriétés d'une figure élémentaire à une figure de même espèce, mais dont la première n'est qu'un cas particulier.

L'*extension* consiste aussi à passer d'une figure plane à une figure de l'espace ayant certaines analogies avec la première.

Il y a deux cas à considérer :

1o *D'une figure plane donnée, passer à une figure plane plus générale que la première.* Par exemple, étendre le théorème de *Ménélaüs* relatif au triangle à un polygone plan quelconque (nos 180 et 181).

2° *D'une figure plane, passer à une figure de l'espace.* C'est ce qui a lieu quand le théorème de *Ménélaüs* est appliqué à un polygone gauche (n° 181 a).

**264.** *Emploi de l'extension.* L'extension est une méthode très féconde pour découvrir par intuition de nouveaux théorèmes; mais il faut une certaine sagacité et une grande habitude pour arriver à généraliser; d'ailleurs, il faut démontrer l'exactitude du résultat auquel on est parvenu.

**265.** *Réduction.* La *réduction* est l'opposé de l'*extension*, et constitue une véritable *simplification.* La *réduction* consiste à étudier en premier lieu un ou plusieurs cas particuliers d'une question générale donnée, afin de parvenir à la démonstration du théorème ou à la résolution du problème proposé.

Voici quelques exemples d'*extension.*

### Problème.

**266.** *Sur la base* BC *d'un triangle isocèle, on élève, en un point quelconque, une perpendiculaire* PNM *qui coupe les côtés* BA, CA *aux points* M *et* N; *la somme* PM + PN *est constante. Que devient ce théorème pour un triangle quelconque?*

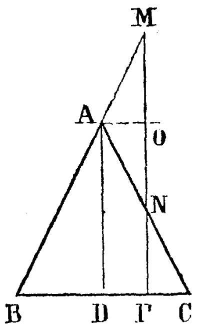


Fig. 174.

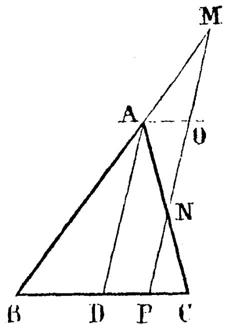


Fig. 175.

Pour le triangle isocèle (fig. 174) on a :

$$PM + PN = 2PO = 2AD.$$

Pour le triangle quelconque (fig. 175), il faut que la droite MNP soit parallèle à la médiane, car on aura :

$$PM + PN = 2PO = 2AD\,;$$

donc :

**Th.** *Dans un triangle quelconque, si l'on mène par un point quelconque de la base une parallèle à la médiane correspondante, et que cette parallèle coupe les côtés en* M *et* N, *la somme* PM + PN *sera constante.*

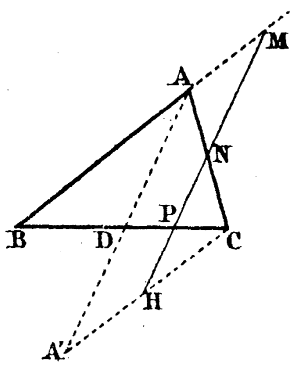


Fig. 176.

*Autre démonstration.* Menons CH parallèle à AB jusqu'à son intersection A′ avec la médiane, puis prolongeons NP.

On a : $$PN = PH\,;$$

donc $$PM + PN = MH = AA'\,;$$

ou $$PM + PN = 2AD = \text{constante}.$$

**267.** *Réciproquement.* Si l'on avait à démontrer le théorème relatif à la parallèle menée à la médiane d'un triangle quelconque, et si la démonstration ne se présentait pas immédiatement, on pourrait établir le théorème pour un triangle isocèle; le mode employé pour traiter ce cas particulier conduirait presque inévitablement à la démonstration de la question générale.

### Problème.

**268.** Généraliser le théorème connu : *Dans un triangle isocèle, la somme des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la base sur les côtés égaux est constante.*

1[re] *Extension.* La méthode par duplication conduit immédiatement à la généralisation suivante.

*Les droites* OP, OQ, *qui rencontrent les côtés égaux sous des angles égaux et constants* P *et* Q, *ont une somme constante quelle que soit la position du point* O *sur la base du triangle.*

En effet, $OP + OQ = PQ'$ (fig. 177), longueur constante pour un angle donné P, puisque la figure $BACA'$ est un losange.

Corollaire. *Les parallèles menées aux côtés égaux par un point quelconque de la base d'un triangle isocèle ont une somme constante.*

Dans ce cas particulier, la somme égale $AB = AC$ (n° 19).

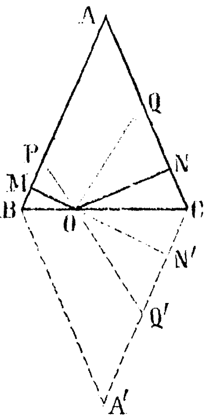



Fig. 177.

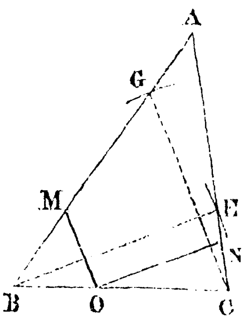



Fig. 178.

**269.** 2[e] *Extension.* Recherchons quelque propriété analogue pour le triangle scalène ABC (fig. 178) et la direction constante à donner aux droites OM, ON, pour que leur somme soit constante et égale à une longueur $l$.

D'après le problème déjà résolu (n° 44), nous savons qu'en prenant $BE = CG = l$, et menant des parallèles OM, ON aux droites BE, CG,

on a :
$$OM + ON = l.$$

**270.** 3[e] *Extension.* Prenons pour point de départ le corollaire établi précédemment (n° 268). Bornons-nous au cas d'un triangle dont un des côtés est double de l'autre ; soit $AB = 2AC$.

Prenons $AD = AB$ (fig. 179). Le triangle BAD est isocèle; donc la somme $PM + PQ$ est constante, elle égale $AB = 2AC$.

Mais $PM = 2MO$; donc, pour OM et ON, on a la relation

$$2MO + ON = AB, \quad \text{ou} \quad OM + \frac{1}{2} ON = AC.$$

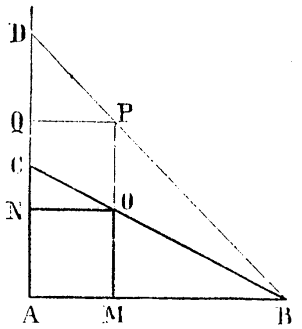



Fig. 179.

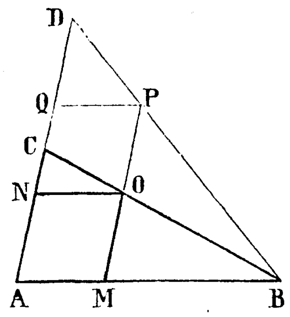



Fig. 180.

En représentant ON par $x$ et OM par $y$, on écrirait $x + 2y = AB$, et l'on arriverait, en généralisant, au théorème suivant (fig. 180).

**271. Th.** *Dans tout triangle, les parallèles* x *et* y *menées à deux côtés* AB *et* AC *par un point quelconque du troisième, donnent une somme constante, lorsqu'on multiplie* x *et* y *par des coefficients* n *et* m *dont le rapport est inverse du rapport de* AB *à* AC*; ainsi pour* $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$, *on aura* $nx + my =$ *constante.*

*Application.* Soit à transformer par extension une question déjà traitée (nº 216); proposons-nous, par suite, les problèmes suivants (nºs 272 et 273) :

### Problème.

**272.** *Un point fixe et deux parallèles sont donnés. Mener une sécante* CD *parallèle à une droite* AB, *de manière que l'angle* COD *soit maximum.*

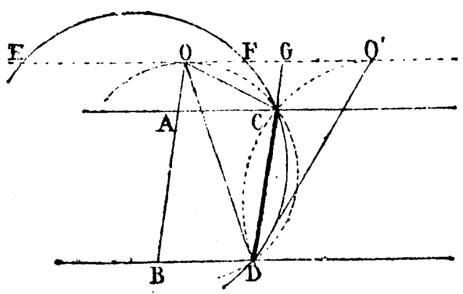



Fig. 181.

Prenons la question inverse :

Menons une parallèle à AC, à une distance CG égale à AO.

Pour une position donnée CD, déterminons le point O de l'angle maximum.

Par les points C et D, faisons passer une circonférence tangente à OG.

Il y a deux réponses O et O′.

Lorsque du point E, par exemple, le point s'avance vers la droite, le rayon de l'arc dont CD est la corde diminue constamment jusqu'au point O, puis il augmente; donc l'angle augmente. Au point O a lieu le maximum; puis l'angle diminue. Au point G il est nul, ensuite il augmente usqu'en O′, nouveau maximum, et diminue indéfiniment. On a encore $\overline{OG}^2 = CG \times DG$.

Pour calculer l'angle COD, on résout les triangles OGC, OGD, dans lesquels on connaît deux côtés et l'angle G qu'ils comprennent, puis le triangle COD, dont les trois côtés sont alors connus. (*Trig.*, 5e édit., nº 79.)

**273.** Même problème. *Les deux parallèles sont remplacées par deux circonférences concentriques.*

1º La droite CD peut être normale aux circonférences concentriques;

2º La droite CD peut rencontrer une de ces circonférences sous un angle donné.

En considérant le *problème contraire*, on reconnaît que la droite CD est donnée de position et que le sommet O doit se trouver sur une circonférence concentrique aux deux premières.

*Remarque.* Le grand nombre de cas intéressants que présente ce dernier problème nous conduit à le traiter avec quelques développements, au paragraphe des *maxima* et des *minima* (nº 341).

**Problème.**

**274.** Généraliser le problème suivant déjà résolu (nº 102): *On donne deux points* A *et* B *sur une circonférence ainsi qu'un diamètre* EF *fixe de position; déterminer sur la circonférence un point* C, *tel que les cordes* CA, CB *interceptent sur le diamètre fixe, à partir du centre* O, *des segments égaux* OM, ON.

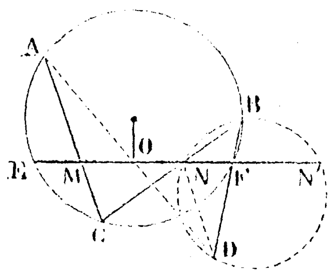


Fig. 182.

1º Remplaçons le diamètre fixe et le centre du cercle par une corde quelconque EF et par son point milieu O.

En procédant par analogie à la solution déjà donnée, on arrive immédiatement à la construction suivante, qui se justifie comme précédemment (nº 102).

Il faut joindre le point A au point O milieu de la corde; prendre OD = AO, afin d'avoir DN parallèle à AM; et sur BD décrire un segment capable du supplément de C.

**275. Problème.** Deuxième extension. *La corde* EF *étant donnée, ainsi que son point milieu, déterminer le point* C *de manière que les segments* MO, ON *soient dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

En se reportant à la figure précédente, on reconnaît immédiatement qu'il faut mener AO; prendre une longueur :

$$\frac{AO}{OD}=\frac{m}{n};$$

car alors la parallèle DN donnera :

$$\frac{MO}{ON}=\frac{AO}{OD}=\frac{m}{n}.$$

*Remarque.* Une étude attentive de la question montre qu'on peut remplacer le point milieu O de la corde par un point donné sur une droite quelconque, et l'on parvient ainsi à la question beaucoup plus générale qui suit.

### Problème.

**276.** *On donne deux points* A *et* B *sur une circonférence ainsi qu'une droite* EF *et un point* O *sur cette droite; déterminer sur la circonférence un point* C *tel que les cordes* CA, BC *déterminent sur la droite donnée, à partir du point fixe* O, *des segments* OM, ON, *qui soient dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

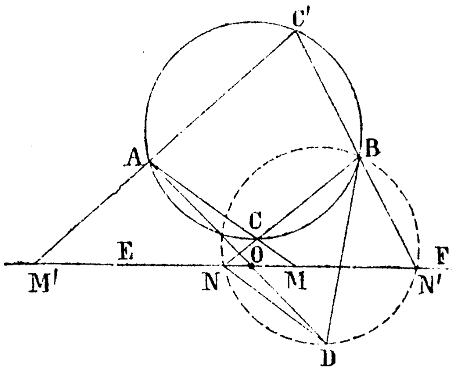


Fig. 183.

Reprenons cette question par l'analyse. Supposons le problème résolu et soit

$$\frac{OM}{ON} = \frac{m}{n}.$$

En menant, par le point N, une parallèle ND à ACM, et menant AOD par le point fixe, on aurait :

$$\frac{AO}{OD} = \frac{OM}{ON} = \frac{m}{n}.$$

D'ailleurs, à cause des parallèles AM et ND, l'angle BND est le supplément de l'angle C; mais ce dernier est connu puisqu'il a pour mesure moitié de l'arc AC'B; donc nous sommes conduits à la construction suivante :

Il faut joindre le point A au point fixe O, prendre OD tel que $\frac{AO}{OD} = \frac{m}{n}$, et, sur BD, décrire un segment capable de l'angle supplément de C.

*Remarques.* 1° Le point N' donne une seconde solution.

On mène : N'BC' et C'AM'.

On a : $\frac{OM'}{ON'} = \frac{m}{n}$.

2° Pour une droite quelconque, on peut demander de déterminer le point C, de manière que le segment MN ait une longueur donnée $l$. Il suffit de procéder comme on l'a fait lorsque EF est un diamètre (n° 101).

### Extension aux figures de l'espace.

**277.** Extension du théorème relatif à la perpendiculaire élevée en un point quelconque de la base d'un triangle isocèle (n° 266).

Il suffit d'indiquer les résultats.

**Th.** *On donne une pyramide régulière; en un point quelconque* P *de la base, on élève une perpendiculaire qui rencontre successivement en* M, N, Q, R... *les faces latérales de la pyramide ou leur prolongement; prouver que la somme* PM + PN... + PR *est constante.*

Si la base a $n$ côtés, la somme égale $n$ fois la hauteur.

Pour une pyramide non régulière, mais à base régulière, il faut mener PMN... parallèle à la droite qui joint le sommet S au centre de la base.

**278.** *Applications.* Extension du théorème relatif aux perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la base d'un triangle isocèle sur les côtés égaux de ce triangle isocèle (nº 268).

**Th.** *Les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la base d'une pyramide régulière sur les faces latérales, ont une somme constante.*

Si la base a $n$ côtés, la somme égale $n$ fois la distance du centre de la base à une des faces latérales.

**Th.** *Lorsqu'on mène par un point quelconque de la base d'une pyramide régulière des droites sur chaque face et rencontrant les faces sous un angle constant, la somme des lignes ainsi menées est constante.*

**Théorème.**

**279.** *Par un point fixe* O, *pris sur la bissectrice d'un angle droit, on mène une sécante* MON; *prouver que la somme* $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$ *des inverses des segments* AM, AN, *déterminés sur les côtés de l'angle droit est une quantité constante.*

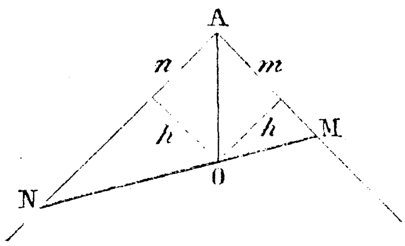



Fig. 184.

Soient $m$, $n$ les segments, $h$ la perpendiculaire abaissée du point O sur chaque côté de l'angle droit.

Il faut prouver que $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ est une quantité constante.

En effet, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ revient à $\frac{n+m}{mn}$.

Le double de l'aire du triangle rectangle AMN peut être exprimé par $nh+mh$ et par $mn$;

d'où $$nh+mh=mn;$$

en divisant chaque terme par $mnh$,

on trouve : $$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{h}$$ quantité constante; donc...

**Ire Extension.**

**280. Th.** *Même question pour un angle* $\alpha$ *quelconque.*

Le double de l'aire peut être exprimé de deux manières différentes :

$$nh+mh=n\,.\,\text{MP}=mn\,.\,\frac{\text{MP}}{m}\,.$$

Le rapport $\dfrac{MP}{m}$ est constant pour un même angle $\alpha$.

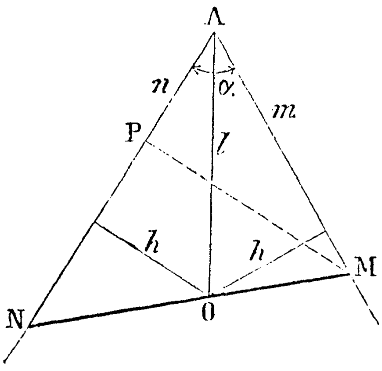



Fig. 185.

En divisant tous les termes par $mnh$, on trouve :

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{h}\cdot\frac{MP}{m},$$

quantité constante.

**281.** *Remarque.* Il est avantageux d'employer la notation trigonométrique. Sachant que le double de l'aire d'un triangle égale le produit de deux côtés multiplié par le sinus de l'angle qu'ils forment (*Trig.*, nº 76), on a : $nh+mh=mn$ sinus $\alpha$;

d'où
$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{\sin\alpha}{h}.$$

**282.** *Valeur de la constante.* Proposons-nous d'exprimer la quantité constante en fonction de AO et de l'angle $\alpha$.

Soit
$$AO=l;$$

$$h=l\sin\frac{1}{2}\alpha;\quad \text{donc}\quad \frac{1}{h}=\frac{1}{l\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

La formule $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{\sin\alpha}{h}$ devient : $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{\sin\alpha}{l\sin\frac{1}{2}\alpha}$.

Mais
$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.\qquad (\textit{Trig.}, \text{nº } 37.\ R.\ \text{III.})$$

On peut donc écrire : $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{2}{l}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

### 2ᵉ Extension.

**283. Th.** *Par un point O de la diagonale SO d'un octaèdre régulier, on mène un plan quelconque qui coupe les quatre arêtes issues du point S; prouver que la somme des inverses des quatre segments est constante.*

Dans l'octaèdre régulier, les arêtes opposées d'un même angle solide S sont à l'angle droit; donc, en désignant par $h$ la distance du point donné O à chacune des quatre arêtes considérées, on aura :

$$\frac{1}{SA}+\frac{1}{SC}=\frac{1}{h};\quad \frac{1}{SB}+\frac{1}{SD}=\frac{1}{h};$$

d'où
$$\frac{1}{SA}+\frac{1}{SB}+\frac{1}{SC}+\frac{1}{SD}=\frac{2}{h}.$$

### 3ᵉ Extension.

**284. Th.** *Tout plan mené par le point de concours O des diagonales d'un octaèdre régulier coupe les douze arêtes ou leur prolongement. La somme des inverses des vingt-quatre segments est constante.*

Chaque arête passe par deux sommets et donne lieu à deux segments additifs ou soustractifs, suivant que le plan sécant passe entre les deux sommets, ou qu'il les laisse d'un même côté.

Or, pour chaque groupe de quatre segments d'un même sommet, on a pour constante $\frac{2}{h}$ ; donc, pour les six sommets, la somme des vingt-quatre segments égale $\frac{12}{h}$.

*Remarque.* Le théorème est vrai pour tout octaèdre ayant les douze arêtes équidistantes du point de concours des diagonales.

### 4e Extension.

**285. Th.** *Tout un plan mené par un point fixe* O *pris sur la droite équidistante des arêtes considérées deux à deux d'un angle polyédrique* S, *dont les faces en nombre pair sont opposées et égales deux à deux, détermine des segments dont la somme des inverses est constante.*

En effet, soient SA, SA' les segments déterminés sur deux arêtes opposées, $\alpha$ l'angle qu'elles forment entre elles et dont SO est bissectrice; représentons par $a$ la perpendiculaire abaissée du point O sur chacune de ces lignes;

on aura : $$\frac{1}{SA}+\frac{1}{SA'}=\frac{\sin\alpha}{a} \qquad (n^o\ 281);$$

de même $$\frac{1}{SB}+\frac{1}{SB'}=\frac{\sin\beta}{b} \qquad \text{etc...};$$

donc la somme des inverses est constante, car, pour un même point O, $\frac{\sin\alpha}{a}$, $\frac{\sin\beta}{b}$ ne varient point.

Pour six arêtes on aurait :

$$\frac{1}{SA}+\frac{1}{SB}+\frac{1}{SC}+\frac{1}{SA'}+\frac{1}{SB'}+\frac{1}{SC'}=\frac{\sin\alpha}{a}+\frac{\sin\beta}{b}+\frac{\sin\gamma}{c}.$$

*Remarque.* Si l'angle polyédrique est régulier $\alpha=\beta=\gamma$ et $a=b=c$,

on a pour constante $$\frac{3\sin\alpha}{a}.$$

### 5e Extension.

**286. Th.** *Par un point fixe* O, *pris sur la droite qui se trouve équidistante de toute les faces d'un angle polyédrique régulier, on mène un plan quelconque; la somme des inverses des arêtes est une quantité constante.*

Le théorème est justifié quand l'angle polyédrique a un nombre pair d'arêtes (no 285); mais il reste à le démontrer, dans le cas où il y a un nombre *impair d'arêtes.* La difficulté est la même quel que soit ce nombre impair; considérons, par exemple, un trièdre.

Circonscrivons un cône de révolution à l'angle polyédrique donné; par chaque arête et par chaque génératrice équidistante de deux arêtes consécutives menons des plans tangents à ce cône; nous formons ainsi un angle polyédrique régulier à six faces. La section donne un hexagone DEFGHI circonscrit à une ellipse; le triangle ABC correspond au trièdre donné.

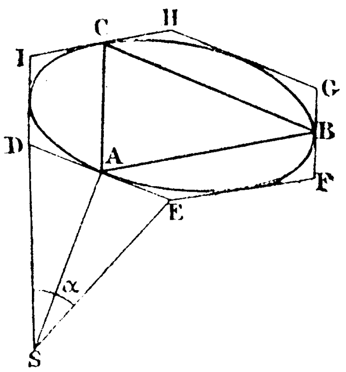


Fig. 186.

Supposons qu'une des faces de l'angle hexaédrique soit rabattue en DSE; DS, ES sont deux arêtes de cet angle solide à six faces; AS, arête du trièdre, est bissectrice de l'angle plan DSE.

Or on a :

$$\frac{1}{SD}+\frac{1}{SE}=\frac{2}{SA}\cos\frac{1}{2}\alpha \qquad \text{(n° 282); donc}$$

$$\left(\frac{2}{SA}+\frac{2}{SB}+\frac{2}{SC}\right)\cos\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{SD}+\frac{1}{SE}+\frac{1}{SF}+\frac{1}{SG}+\frac{1}{SH}+\frac{1}{SI}=$$

constante (n° 285).

Représentons cette constante par $\frac{1}{c}$;

on a donc : $\frac{1}{SA}+\frac{1}{SB}+\frac{1}{SC}=\frac{1}{2c\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$, quantité aussi constante;

donc...

**Application.**

**287. Th.** *Par le foyer d'une ellipse, on mène des rayons vecteurs formant des angles consécutifs égaux entre eux; prouver que la somme des inverses de ces rayons vecteurs est une quantité constante.*

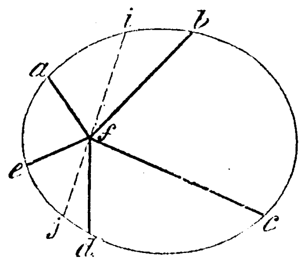


Fig. 187.

Il suffit de considérer un angle polyédrique régulier ayant autant d'arêtes qu'on a formé d'angles égaux autour du foyer, cinq par exemple, de circonscrire un cône de révolution et de couper tout le système par un plan quelconque; on aura :

$$\frac{1}{SA}+\frac{1}{SB}+\frac{1}{SC}+\frac{1}{SD}+\frac{1}{SE}=\text{constante} \qquad \text{(n° 286).}$$

En projetant la section sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône, on obtient une ellipse *abcde*, ayant pour foyer *f*, la projection du sommet. (G., n° 855.) Les faces égales de l'angle polyédrique se projettent suivant des angles égaux. Les arêtes SA, SB, étant également inclinées sur le plan de projection perpendiculaire à l'axe, seront réduites dans un rapport constant;

donc $$\frac{1}{fa}+\frac{1}{fb}+\frac{1}{fc}+\frac{1}{fd}+\frac{1}{fe}$$

est aussi quantité constante.

**287 a.** *Remarques.* 1° Le théorème est vrai pour un conique quelconque.

2° Comme cas particulier, on peut mener une corde focale $ifj$ ; on aura :

$$\frac{1}{fi} + \frac{1}{fj} = \text{constante},$$

et l'on obtiendra le théorème suivant, qui se trouve énoncé dans les traités de *Géométrie analytique.*

**287 b. Th.** *Dans une conique quelconque, la somme des inverses des segments d'une corde focale est une quantité constante.*

La constante se détermine très simplement lorsqu'on considère le grand axe, car les segments égalent $a - c$ et $a + c$ ;

or $$\frac{1}{a-c} + \frac{1}{a+c} = \frac{a+c+a-c}{a^2-c^2} = \frac{2a}{b^2};$$

donc $$\frac{1}{fi} + \frac{1}{fj} = \frac{2a}{b^2}.$$

**288. Extension du triangle au trièdre.** La plupart des propriétés du triangle plan peuvent conduire à des propriétés analogues pour le trièdre. A son tour, chaque propriété du trièdre donne une propriété correspondante pour le triangle sphérique.

| | | |
|---|---|---|
| Dans un *triangle,* un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres. | Dans un *trièdre*, une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres. | Dans un *triangle sphérique,* un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres. |
| Les trois hauteurs d'un triangle se coupent au même point. | Dans un trièdre, les trois plans menés par chaque arête perpendiculairement à la face opposée se coupent suivant la même droite. | Les trois arcs de grands cercles, menés par chaque sommet perpendiculairement au côté opposé, se coupent au même point. |
| Les trois bissectrices se coupent au même point. | Les trois plans bissecteurs des dièdres du trièdre se coupent suivant une même droite. | Les trois arcs bissecteurs des angles d'un triangle sphérique se coupent au même point. |
| A tout triangle on peut inscrire et circonscrire une circonférence. | A tout trièdre on peut inscrire et circonscrire un cône de révolution. | A tout triangle sphérique on peut inscrire et circonscrire un cercle. |

**289. Extension des relations numériques.** Il est facile, par extension, de transformer certaines relations et d'obtenir une autre relation exprimant un théorème nouveau.

On doit distinguer deux cas principaux.

**Ier Cas.** *Lorsque la relation, déjà connue, se rapporte à une somme ou à une différence, il faut que chaque terme soit multiplié par une quantité constante.* En voici un exemple très simple :

**Problème.**

**289 a.** *Par un point pris dans l'intérieur d'un triangle équilatéral on mène des droites; chacune d'elles coupe respectivement le côté* *correspondant sous un angle donné α; prouver que la somme des lignes menées est constante.*

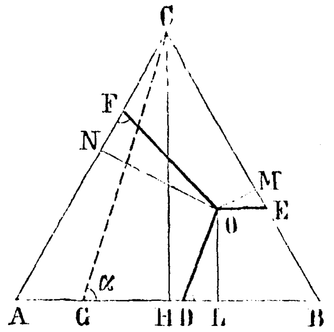


Fig. 188.

Soient OD, OE, OF les droites coupant les côtés sous l'angle donné α.

Abaissons les hauteurs OL, OM, ON ainsi que CH, et menons CG sous la même inclinaison que les droites OD, OE, OF.

On a : $$\mathrm{OL} + \mathrm{OM} + \mathrm{ON} = \mathrm{CH}; \qquad (1)$$

d'ailleurs, pour démontrer cette question bien connue, il suffit de procéder comme on l'a fait pour le triangle isocèle (nº 146).

Or les triangles ODL, OEM, OFN, CGH sont semblables; donc

$$\frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OE}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OF}} = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CG}};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{OL} + \mathrm{OM} + \mathrm{ON}}{\mathrm{OD} + \mathrm{OE} + \mathrm{OF}} = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CG}}.$$

Les numérateurs étant égaux, il doit en être de même des dénominateurs; donc $\mathrm{OD} + \mathrm{OE} + \mathrm{OF} = \mathrm{CG}$ quantité constante.

**289 b.** *Remarques.* 1º La considération des triangles semblables suffit pour conduire au résultat; mais il est assez long et peu élégant d'écrire une suite nombreuse de rapports, tandis qu'on peut procéder rapidement comme il suit :

Soit $r$ la valeur du rapport constant $\frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{OD}}$, $\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OE}}$ ...;

On a : $$\mathrm{OL} = \mathrm{OD}\,.\,r, \quad \mathrm{OM} = \mathrm{OE}\,.\,r, \quad \text{etc.}$$

Dans (1) remplaçons les termes OL, OM... par leur valeurs respectives; on trouve : $$\mathrm{OD}\,.\,r + \mathrm{OE}\,.\,r + \mathrm{OF}\,.\,r = \mathrm{CH};$$

d'où $$\mathrm{OD} + \mathrm{OE} + \mathrm{OF} = \frac{\mathrm{CH}}{r} \quad \text{quantité constante};$$

donc...

2º Le rapport $r$ n'est autre chose que le sinus de l'angle α. *Il serait avantageux d'employer les notations trigonométriques connues :* sin α, sin β, etc., *même en géométrie,* pour désigner, d'une manière abrégée, les rapports constants.

**2e Cas.** *Lorsque la relation, déjà connue, est un rapport ou un produit, chaque facteur peut être multiplié par une constante différente.* Exemple :

**Théorème.**

**290.** *Par un point quelconque* M *d'une circonférence, on mène une sécante dans une direction donnée; elle coupe une corde fixe* IJ *en un point* A, *et les tangentes menées au cercle par les extrémités de cette corde, en des points* B, C; *prouver que le rapport* $\frac{\mathrm{MA}^2}{\mathrm{MB}\,.\,\mathrm{MC}}$ *est constant.*

Cette question est l'extension d'une solution connue (nº 25).

Soient XY la direction invariable de la sécante, et MD, ME, MF les perpendiculaires abaissées sur les côtés du triangle isocèle HIJ; les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont constants pour une direction donnée XY.

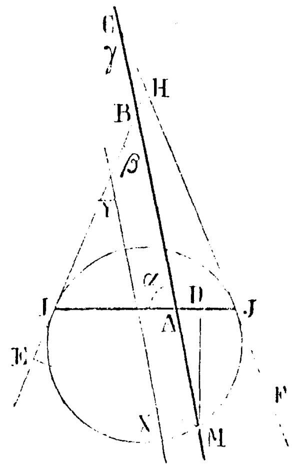



Fig. 189.

En représentant par $a$, $b$, $c$ les rapports constants $\frac{MD}{MA}$, $\frac{ME}{MB}$, $\frac{MF}{MC}$, on aura :

$$MD = MA \,.\, a; \quad ME = MB \,.\, b; \quad MF = MC \,.\, c.$$

Or $MD^2 = ME \,.\, MF$, ou $\frac{MD^2}{ME \,.\, MF} = 1$ (nº 25);

remplaçons MD, ME, MF par leurs valeurs $MA \,.\, a$, $MB \,.\, b$, $MC \,.\, c$; on trouve :

$$\frac{MA^2 \,.\, a^2}{MB \,.\, b \times MC \,.\, c} = 1;$$

d'où
$$\frac{MA^2}{MB \,.\, MC} = \frac{bc}{a^2} \quad \text{quantité constante.}$$

En recourant à la notation trigonométrique, on écrirait :

$$\frac{MA^2}{MB \,.\, MC} = \frac{\sin\beta \,.\, \sin\gamma}{\sin^2\alpha}.$$

### Extension.

**290 a.** On peut donner une nouvelle extension au nº 25 rappelé ci-dessus et en faire autant pour le nº 290 lui-même.

1º *Le rapport du produit des distances de tout point d'une conique à deux tangentes quelconques, au carré de la distance du point considéré à la corde des points de contact des tangentes, est une quantité constante.*

Les distances peuvent être mesurées sur des lignes obliques parallèles à des directions données.

2º *Par un point quelconque* M *d'une conique, on mène une sécante dans une direction donnée; elle coupe une corde* IJ *en un point* A, *et les tangentes menées à la conique par les extrémités de cette corde en des points* B, C; *prouver que le rapport du carré* $MA^2$ *au produit* MB . MC *est constant.*

*Remarque.* Les théorèmes ci-dessus relatifs à une conique, à deux tangentes et à la corde de contact, ne sont que des cas particuliers du théorème *ad quatuor lineas* de Pappus (nºs 2105 et 2107).

## § III. — Déductions successives.

**291.** A la *Méthode par extension* (nº 263) ou aux *Diverses manières d'envisager un problème* (nº 262), on peut rattacher un genre d'étude dont il est plus facile de donner l'exemple que de formuler le principe, et qu'on peut nommer *Déductions successives*.

*Une question étant donnée, on la considère non seulement sous les différents aspects qu'elle peut présenter, mais on fait varier certaines parties de la figure, on a recours à de nouvelles constructions, etc., et du théorème primitif on arrive ainsi à de nouveaux résultats.*

Le traité *de la Corrélation des figures de géométrie*, de CARNOT, reproduit et développé sous le nom de *Géométrie de position*, en fournit des exemples très remarquables. D'une seule figure bien étudiée dérivent une foule de questions qu'on rencontre dans la plupart des recueils d'exercices géométriques; mais ces divers théorèmes, étant présentés indépendamment les uns des autres, ne laissent guère soupçonner leur commune origine et les déductions successives qui ont été faites.

### Problème.

**292.** *Trouver les rapports existant entre les côtés d'un triangle quelconque, les perpendiculaires menées des sommets sur les côtés opposés et les segments formés sur ces côtés et ces perpendiculaires.* (CARNOT, *de la Corrélation des figures géométriques*, n° 142, p. 101.)

Prolongeons les hauteurs jusqu'à la circonférence; on sait que les trois hauteurs se coupent en un point D, nommé *orthocentre*.

(**a**) *Chacun des points* A, B, C, D *peut être considéré comme l'orthocentre du triangle formé par les trois autres points.*

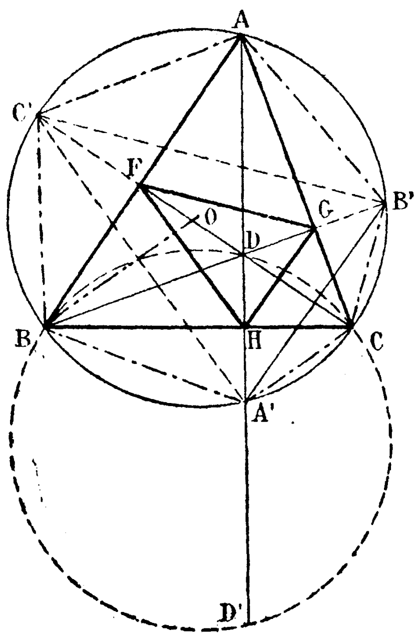



Fig. 190.

A, par exemple, est l'orthocentre du triangle BCD. En effet, puisque BDG est perpendiculaire sur CGA, CGA sera perpendiculaire sur BDG; de même CDF étant perpendiculaire sur BFA, BFA sera perpendiculaire sur FDC. Donc A est bien le point de concours des trois hauteurs de BDC. Ainsi les quatre points forment un *groupe orthocentrique* (n° 292 (**m**).

(**b**) *Les six arcs déterminés par les sommets* A, B, C *et par les extrémités* A′, B′, C′ *des prolongements des hauteurs sont égaux deux à deux.*

En effet, les angles ABC′, ACC′ ont même mesure; mais l'angle ACC′ égale ABB′ comme ayant l'angle BAC pour complément.

Ainsi l'angle $\quad ABC' = ABB'$;

donc $\quad AC' = AB'$; $BC' = BA'$; $CA' = CB'$.

(**c**) *La distance de l'orthocentre à un côté donné égale le prolongement de la hauteur abaissée sur ce côté, compris depuis le côté jusqu'au cercle circonscrit.*

Par exemple : $\quad DF = FC'$;

cela résulte de l'égalité des angles ABC′, ABB′.

De même, pour le cercle circonscrit au triangle BDC, le point A est le point de concours des hauteurs ; donc AH = HD'.

Mais, par rapport au triangle primitif ABC, cette dernière égalité conduirait à l'énoncé suivant :

(**d**) *Lorsqu'on fait passer une circonférence par deux sommets B, C d'un triangle et par l'orthocentre, la hauteur AHD', abaissée du troisième sommet et prolongée jusqu'à la circonférence, est divisée en deux parties égales par la base BC.*

Ceci peut être regardé comme une simple conséquence du théorème suivant :

(**e**) *Le cercle circonscrit à un triangle, et les cercles circonscrits aux trois triangles ayant respectivement pour sommets l'orthocentre et deux des sommets du triangle donné, sont égaux entre eux.*

En effet, le cercle ABC peut être considéré comme étant le cercle circonscrit au triangle BA'C; or ce triangle égale le triangle BDC, qui donne lieu à un des trois autres cercles; donc tous les cercles sont égaux.

(**f**) *Le produit des segments de l'un quelconque des côtés est égal au produit de la hauteur correspondante par la distance de ce même côté à l'orthocentre du triangle.*

En effet, $\qquad AF \cdot FB = CF \cdot FC',$

donc $\qquad AF \cdot FB = CF \cdot DF.$

(**g**) *Les trois produits formés en multipliant l'un par l'autre les deux segments d'une même hauteur sont égaux entre eux.*

Il faut prouver qu'on a :

$$AD \cdot DH = BD \cdot DG = CD \cdot DF.$$

Or, à cause des angles droits en G et F, les quatre points B, C, G, F appartiennent à une même circonférence, dont BC serait le diamètre; donc

$$BD \cdot DG = CD \cdot DF, \text{ etc.}$$

On peut encore faire les remarques suivantes :

(**h**) *La droite qui joint les pieds des hauteurs abaissées de deux sommets est perpendiculaire au rayon du cercle circonscrit mené par le troisième sommet.*

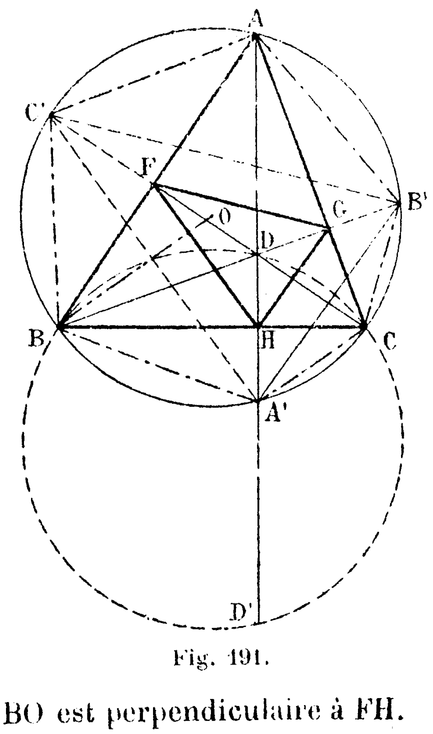


Fig. 191.

Joignons A' à C'. Le rayon BO est perpendiculaire à la corde A'C', car BA' = BC'; mais les droites FH et C'A' sont parallèles, car F est le milieu de DC' et H le milieu de DA'; donc le rayon BO est perpendiculaire à FH.

On retrouve aussi le théorème connu :

(**i**) *Les hauteurs sont bissectrices des angles du triangle* FGH *formé en joignant deux à deux les pieds de ces hauteurs.*

En effet, CC' est bissectrice de l'angle A'C'B', car l'arc CA' = CB'; donc

CF est bissectrice de l'angle F formé par deux parallèles aux deux premières lignes.

(j) *Le triangle* FGH, *formé par les pieds des hauteurs, est le triangle de périmètre minimum que l'on puisse inscrire dans* ABC.

En effet, en admettant les principes que nous démontrerons au paragraphe spécial des *maxima* et *minima* (nº 342), on reconnaît qu'en regardant comme fixes les points G, H, le minimum ne dépend que de la position du sommet mobile F. Or on sait que le chemin GF + FH est minimum lorsque les droites GF et FH sont également inclinées sur AB. (G., nº 177.) Pour la même raison, en rendant mobile successivement chaque sommet, on reconnaît qu'il faut que FH et HG soient également inclinées sur BC, etc. ; donc le triangle FGH, qui réalise cette condition pour chaque côté de ABC, a le périmètre minimum.

Voici de nouvelles propriétés : On sait que le *cercle des neuf points* d'un triangle ABC passe par le milieu de chaque côté, par les pieds des trois hauteurs, par le point milieu de chaque segment, tel que AD, BD, CD, compris entre les sommets et le point de concours des hauteurs; le théorème de FEUERBACH (nº 238) prouve que le cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit et à chaque cercle exinscrit. On a donc le théorème de W. HAMILTON :

(k) *Les quatre triangles* ABC, ABD, BDC, CDA, *formés par trois droites données et par les hauteurs, ont le même cercle des neuf points. Ce cercle est tangent aux seize cercles inscrits ou exinscrits aux quatre triangles.*

**292 (l).** *Remarque.* L'étude attentive de la figure formée par trois droites se coupant deux à deux, et par les trois hauteurs de ce triangle, conduit, ainsi qu'on vient de le voir, à un grand nombre de théorèmes. En procédant d'une manière analogue, on peut étudier la figure formée par un triangle et ses trois médianes, étudier aussi le système d'un triangle et de ses bissectrices intérieures, ou d'un triangle et de ses bissectrices extérieures. Plus généralement, on peut considérer un triangle et les trois droites qui joignent chaque sommet à un même point donné.

Jusqu'à nos jours, l'étude de ces dernières figures était loin d'avoir fourni autant de résultats que le problème donné comme exemple (nº 292), ou du moins ces questions n'avaient pas encore rencontré leur *Carnot;* mais nous sommes heureux de pouvoir ajouter qu'il en est tout autrement depuis quelques années. En effet, sous le nom de *Géométrie récente,* ou de *Géométrie du triangle,* un nouveau chapitre des plus intéressants et des plus étendus vient d'être ajouté aux Éléments traditionnels de Géométrie. (Voir ci-après nºs 2262, etc.)

**292 (m). Note.** *Orthocentre* (**d**). Actuellement le point de concours des hauteurs est connu sous le nom d'*orthocentre,* que lui ont donné les géomètres anglais ; voir nº 664 **a**, *note.*

On nomme *groupe orthocentrique* l'ensemble de quatre points tels que chacun d'eux est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres. [Nº 292 (**a**).]

On peut énoncer la question ci-dessus (nº 292 (**k**) comme il suit : *Les quatre triangles d'un groupe orthocentrique ont même cercle des neuf points.* (Voir ci-après, nº 2183 **d**, 2º.)

*Points concycliques* (**g**). Lorsque quatre points appartiennent à une même circonférence, les auteurs anglais disent simplement : les quatres points sont *concycliques.* M. NEUBERG avait proposé le terme *homocycliques.*

*Triangle orthique* (i). Le triangle formé en joignant deux à deux les pieds des hauteurs a reçu de nos jours le nom de *triangle orthocentrique*, ou plus simplement *triangle orthique*.

Le théorème de sir William Hamilton a été proposé en 1861, dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, page 216.

Ce théorème peut conduire à son tour à de nouveaux énoncés. On peut voir à ce sujet l'ouvrage suivant : *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, par Eugène Catalan, 6e édition, 1879. Théorèmes CVIII à CXII, pages 178.

Enfin le *Cercle des neuf points* d'un triangle donné est l'enveloppe des cercles inscrits et exinscrits de tous les triangles qui ont même orthocentre et même cercle circonscrit (no 1341, *b*).

M. John Casey, professeur à l'Université catholique d'Irlande, établit que le *Cercle des neuf points* est tangent à 64 cercles, et que par le moyen de ceux-ci il est tangent à 256 cercles, et ainsi de suite.

## § IV. — Généralisation.

**293. Généralisation hypothétique.** Plusieurs questions élémentaires peuvent conduire à des questions beaucoup plus générales dont on n'entrevoit pas immédiatement la démonstration, ou qui pourraient même constituer des propositions inexactes; mais parfois les hypothèses que l'on fait conduisent à d'intéressants résultats. On peut procéder comme il suit :

*Un théorème étant donné, on le considère comme conduisant à une proposition beaucoup plus générale, qu'on est impuissant à démontrer directement, mais que l'on cherche à vérifier dans certains cas particuliers.* En fait, la généralisation hypothétique que l'on étudie, la proposition que l'on énonce sans l'avoir encore démontrée, est la conséquence d'une intuition plus ou moins aventurée d'un chercheur original et puissant. En voici deux exemples :

De l'étude attentive de certains couples de trois points en ligne droite, et de celle de quatre, cinq, six points concycliques, on arrive aux propositions hypothétiques suivantes :

1o *Lorsque trois points analogues d'une figure donnée sont en ligne droite, cette droite est le lieu géométrique d'une infinité de points qui ont les mêmes propriétés géométriques que les premiers.*

2o *Lorsque quatre, cinq, six points sont concycliques, le cercle ainsi obtenu est le lieu géométrique d'une infinité de points analogues aux premiers.*

Nous nommons *points analogues* d'une figure donnée, les points qui sont obtenus par les mêmes constructions ou qui jouissent des mêmes propriétés. Ainsi, dans le *théorème de Simson* (no 22), les projections d'un point du cercle circonscrit, sur les côtés d'un triangle, sont trois points analogues; mais il en est tout autrement des trois points considérés dans la *droite d'Euler* (nos 1119 et 1262), si l'on se borne à la définition ordinaire, car on y trouve le centre O du cercle circonscrit, le point de concours G des médianes et l'orthocentre H, ou point de concours des hauteurs; néanmoins nous indiquerons une propriété commune à ces trois points (no 1242 **o**, 3o).

Nous allons énoncer et démontrer quelques propositions, suggérées par des questions connues.

**Théorème.**

**293 a.** *La droite de d'Alembert de trois centres de similitude de trois circonférences est le lieu géométrique de tous les centres de similitude, analogues aux premiers, d'une infinité de circonférences* (voir nos 176 et 1260).

Considérons la droite des centres extérieurs de similitude des circonférences C, $C_1$, $C_2$.

En désignant par $r$, $r_1$, $r_2$ et par $d$, $d_1$, $d_2$ les rayons et les distances des centres à l'axe de similitude, on a :

$$\frac{d}{r}=\frac{d_1}{r_1}=\frac{d_2}{r_2}.$$

Or tous les cercles $C_3$, $C_4$, etc., qui donneraient :

$$\frac{d_3}{r_3}=\frac{d_4}{r_4}=\dots\frac{d}{r},$$

ont même axe extérieur de similitude; donc, etc.

*Remarques.* 1° La *démonstration de Monge* (n° 176) s'applique directement à tous ces cercles, car les sphères correspondantes sont tangentes aux faces d'un même dièdre.

2° Mêmes résultats pour chacun des trois autres axes de similitude.

**Théorème.**

**293 b.** *La droite de Pascal d'un hexagone inscrit est le lieu des points de concours des côtés opposés d'une infinité d'hexagones inscrits dans le même cercle.*

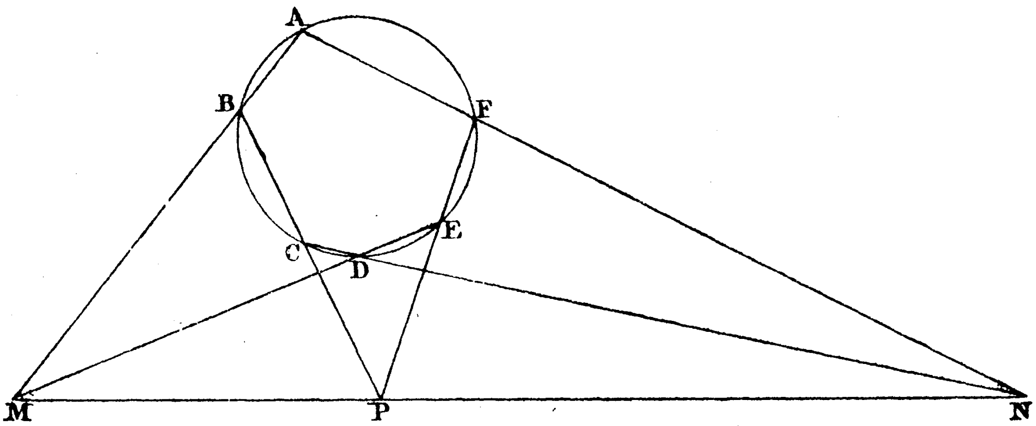



Fig. 192.

Soient un cercle et une droite; il suffit d'inscrire un hexagone dont les points de concours des côtés soient sur la droite donnée. On peut se donner trois points fixes, par exemple M, N sur la droite et A sur le cercle. En prenant un second point D à volonté, menant MA, MDE, puis NA, NDC, on obtient un hexagone inscrit ABCDEF, dont les côtés BCP, FEP doivent se couper sur MN. Ainsi, en faisant décrire le cercle par le point D, le point P décrit la droite MN.

**Théorème.**

**293 c.** *La droite de Simson* XY *d'un triangle donné par rapport à un point* M *du cercle circonscrit, est droite de Simson pour une infinité de triangles inscrits dans le même cercle; en d'autres termes, cette droite est le lieu géométrique des projections du point* M *sur les côtés d'une infinité de triangles inscrits dans le même cercle.*

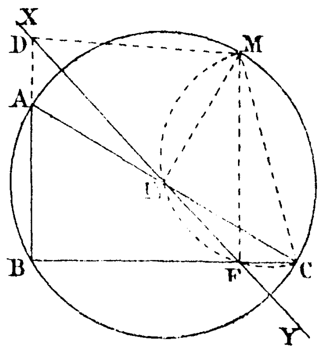


Fig. 193.

Soient donnés la droite XY, un cercle et un point M de ce cercle; construisons un triangle inscrit ayant la droite donnée pour *droite de Simson.*

Joignons le point M à un point quelconque E de XY.

La perpendiculaire AEC menée à ME est un côté du triangle demandé. Pour en obtenir un second, décrivons un demi-cercle sur le diamètre MC; ce demi-cercle passe par E et coupe encore XY en F, il suffit de mener CFB, et le triangle ABC a XY pour droite de Simson.

*Remarques.* 1° Le *théorème de Carnot* (n$^{os}$ 1234 et 2464) donnerait une remarquable extension au théorème précédent; car en remplaçant les projetantes orthogonales MD, ME, MF, par des projetantes isoclines, la droite XY peut être droite de Simson pour chacun des points du cercle circonscrit choisi comme point à projeter.

2° L'exemple précédent montre que certaines questions élémentaires sont susceptibles de notables développements.

Donnons quelques exemples du deuxième cas des déductions hypothétiques (n° 293, **d**, etc.).

**Note.** Pour être *droite de Simson,* une ligne donnée doit rencontrer la circonférence concentrique au cercle donné, et dont le rayon ne serait que le tiers du rayon donné; car pour un triangle et le cercle circonscrit, l'enveloppe des droites de Simson, pour chaque point du cercle, est une *hypocycloïde à trois rebroussements,* c'est-à-dire la courbe qu'engendrerait un point fixe d'une circonférence de rayon trois fois moindre, qui roulerait sans glissement, sur le cercle circonscrit et à l'intérieur de ce cercle.

Cette courbe a été l'objet d'un grand nombre d'études, voir notamment : N. A. 1870, pages 202 et 256, L. Painvin; J. M. S. 1884, pages 169 à 178, G. de Longchamps; N. A. 1901, page 168, Duporc; 1902, page 206, Fréchet, et le *Traité des courbes remarquables* par M. Gomes Teixeira, t. 2, page 174; ouvrage publié en 1909.

**Théorème.**

**293 d.** *Lorsque quatre points* ABCD *sont concycliques, on peut considérer trois points* A, B, C, *par exemple, comme étant fixes, et la circonférence est le lieu géométrique des points* D, *tels que l'angle* ADC *est égal à l'angle* B, *ou supplémentaire de cet angle.*

Il suffit de considérer le quadrilatère inscriptible ABCD.

**Théorème.**

**293 e.** *Le cercle des neuf points d'un triangle* ABC *passe par une infinité de points analogues aux premiers.*

En effet, une infinité de triangles inscrits dans le même cercle ont même orthocentre que le premier (nº 130, 2º); or le rayon du cercle des neuf points égale la moitié de R, et son centre est au point milieu de OH (nº 28, 1º et 2º); ainsi le cercle des neuf points est le même pour tous les triangles qui ont même orthocentre et même cercle circonscrit, donc...

*Remarque.* L'étude ci-dessus conduit à formuler le théorème suivant :

**Théorème.**

**293 f.** *Tout cercle qui passe par des points remarquables d'un triangle donné, passe par une infinité de points analogues lorsque le centre et le rayon de ce cercle sont indépendants des côtés du triangle.*

En effet, dans ce cas, une infinité de triangles peuvent réaliser les conditions du premier; en voici quelques exemples :

1º *Le cercle des huit points, ou cercle des moments égaux, décrit sur le diamètre* OG, *est commun à l'infinité de triangles inscrits dans le même cercle* O, *et qui ont même centre de gravité* G (nº 1185 b).

2º *Le cercle de Brocard, décrit sur le diamètre* OK, *est commun à l'infinité des triangles inscrits dans le même cercle* O, *et qui ont même point de Lemoine* K (nº 2242).

*Remarques.* 1º Les cercles de Brocard et des huit points ne dépendent que de OK ou de OG.

2º Par analogie au théorème précédent, on peut énoncer la proposition hypothétique suivante :

**Théorème.**

**293 g.** *Le cercle inscrit d'un triangle est l'enveloppe des côtés d'une infinité de triangles analogues au triangle donné, lorsque ce cercle inscrit est indépendant des côtés du triangle.* En voici quelques exemples :

1º *Lorsqu'un triangle est inscrit dans un cercle* O *et circonscrit à un cercle* I, *ce dernier cercle est l'enveloppe des côtés d'une infinité de triangles inscrits dans le cercle* O *et circonscrit au cercle* I.

En effet, le théorème d'Euler donne la relation

$$d^2 = R(R - 2r),$$

indépendante des côtés (nºs 1182 **a** et **b**), donc...

2º *Un cercle donné est l'enveloppe des côtés d'une infinité de triangles ayant même point de Gergonne* (nº 1242 a).

Ce théorème n'ayant pas été donné jusqu'à présent, du moins que nous sachions, nous allons le formuler autrement et le démontrer (nº 293 i).

**Théorème.**

**293 h.** *Lorsqu'un hexagone est circonscrit, le cercle inscrit peut être considéré comme étant l'enveloppe des côtés opposés d'une infinité d'hexagones circonscrits qui ont même point de Brianchon que le premier.*

D'après le *théorème de Brianchon* (G., nº 807), *on sait que les diagonales qui joignent deux à deux les sommets opposés passent par un même point :* le point de Brianchon. Or les trois points d'intersection des côtés opposés de l'hexagone inscrit formé par les cordes de contact de l'hexagone circonscrit se trouvent sur la même droite (G., n° 747). Cette droite est la *pascale* de l'hexagone inscrit, c'est-à-dire la polaire du point de Brianchon. Donc, à chaque hexagone que l'on peut inscrire dans le même cercle (n° 293 b), ayant la même pascale, correspond un hexagone circonscrit ayant le point donné pour point de Brianchon.

**Théorème.**

**293 i.** *On peut construire une infinité de triangles ayant même cercle inscrit et même point de Gergonne* N.

On sait que le *point de Gergonne* est le point de concours des céviennes qui aboutissent aux points de contact du cercle inscrit (n° 1242 a).

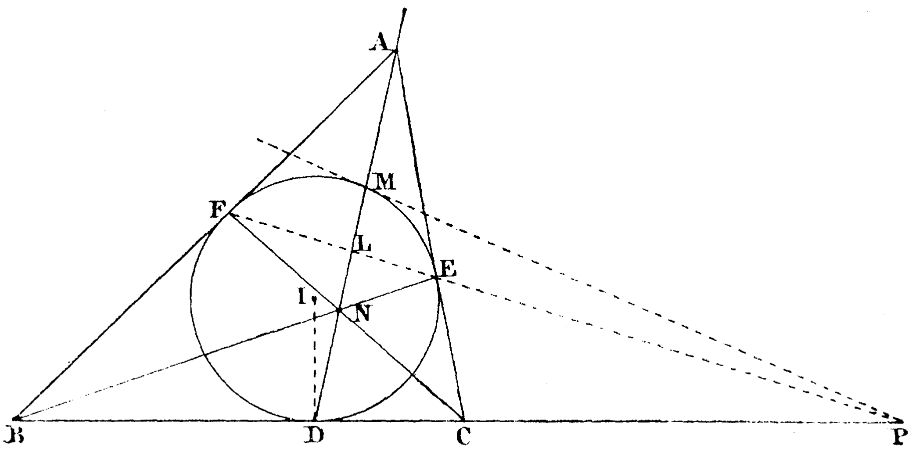



Fig. 194.

Par N menons une droite quelconque AND et les tangentes MP, DP.

Le point P est le pôle de AND par rapport au cercle et aux côtés demandés AB, AC; ou bien AND est la polaire de P; donc les diagonales BE, CF se coupent sur cette droite AD.

Pour construire le triangle ABC, tout revient à mener PELF, de telle sorte que les diagonales BE, CF se coupent en N, c'est-à-dire que DL soit divisé harmoniquement par N et A; d'ailleurs, la corde DM est de même divisée harmoniquement par L et A.

Posons : $\mathrm{DM} = m$, $\mathrm{DN} = n$, $\mathrm{DL} = x$, $\mathrm{DA} = y$.

Les relations $(\mathrm{DLNA}) = -1$, et $(\mathrm{DMLA}) = -1$, (G., n° 786)

ou
$$\frac{\mathrm{DN}}{\mathrm{NL}} = \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{LA}}, \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{DL}}{\mathrm{LM}} = \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{MA}},$$

peuvent s'écrire respectivement :
$$\frac{2}{x} = \frac{1}{n} + \frac{1}{y}, \quad \text{et} \quad \frac{2}{m} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y};$$

on en tire :
$$x = \frac{3mn}{2n + m}, \quad \text{et} \quad y = \frac{3mn}{4n - m},$$

quatrièmes proportionnelles faciles à construire; d'ailleurs, il suffit de construire l'une d'elles.

*Remarque.* On peut résoudre le problème de diverses manières (n° 1546 j et suivants).

## VI

### MÉTHODE ALGÉBRIQUE

---

### § I. — Construction des formules.

**294.** *Emploi de l'algèbre.* Pour employer l'algèbre à la résolution des problèmes de géométrie, on prend pour inconnue une ou plusieurs grandeurs à déterminer ; ensuite on établit autant d'équations qu'il y a d'inconnues ; on résout le système d'équations, et l'on construit la valeur trouvée pour l'inconnue conservée dans les éliminations successives.

**294 a. Principales formules.** Les principales expressions algébriques à construire sont les suivantes :

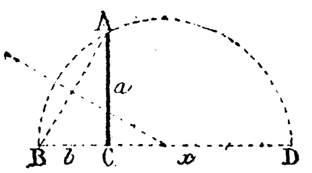


Fig. 195.

**(a)** $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{ab}{c}, \\ \text{ou} \quad \dfrac{a}{c} = \dfrac{x}{b}. \end{array}\right\}$ 4e proportionnelle. (G., n° 295.)

**(b)** $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{a^2}{b}, \\ \text{ou} \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{a}. \end{array}\right\}$ 3e proportionnelle. (G., n° 296, 3°.)

Outre le procédé de la quatrième proportionnelle, on emploie la construction suivante :

On prend $BC = b$, une perpendiculaire $AC = a$, et on fait passer par A et B une demi-circonférence ayant son centre sur BC ; alors $x = \dfrac{a^2}{b}$.

**(c)** $\left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{ab}, \\ x^2 = ab, \end{array}\right\}$ moyenne proportionnelle. (G., n° 297.)

**(d)** $\left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ x^2 = a^2 + b^2, \end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{a^2 - b^2}, \\ x^2 = a^2 - b^2. \end{array}\right\}$ (G., n° 347.)

**(e)** $x = \sqrt{a^2 \pm bc}$. $\Big\{$ Il faut remplacer $bc$ par un carré, et l'on est ramené au quatrième cas (**d**).

**(f)** $x = \dfrac{abc}{de}$. En posant : $\dfrac{ab}{d} = y$, on a : $x = \dfrac{cy}{e}$.

Il reste à trouver deux quatrièmes proportionnelles (**a**).

On peut aussi construire directement la valeur de $x$ (fig. 196).

Après avoir pris $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, $OE = e$, on joint

BD, CE; par le point A on mène AY parallèle à BD, puis XY parallèle à CE; on obtient OX pour la longueur cherchée.

$$(g)\quad \begin{cases} x = a\sqrt{\dfrac{m}{n}}, \\ \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{m}{n}. \end{cases} \qquad \text{(G., n}^\text{o}\ 345.)$$

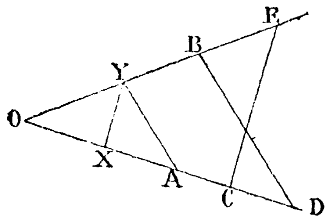


Fig. 196.

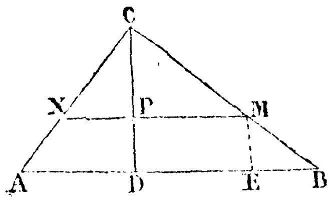


Fig. 197.

$$(h)\quad \begin{cases} x = \dfrac{m \cdot a^2}{b^2}, \\ \dfrac{x}{m} = \dfrac{a^2}{b^2}. \end{cases}$$

Sur les côtés d'un angle droit (fig. 197), on prend $CA = a$, $CB = b$; on abaisse la perpendiculaire CD sur l'hypoténuse; on porte $m$ de D en E. Puis les lignes EM, MX donnent : $\dfrac{PX}{PM} = \dfrac{a^2}{b^2}$. (G., nº 345.)

### Double radical.

**295** (i). $\qquad x = \sqrt{a^2 \pm \sqrt{b^4 - c^4}}$.

On peut écrire : $\quad b^4 - c^4 = (b^2 + c^2)(b^2 - c^2)$. $\quad$ (G., nº 246 et 327.)

Puis, soit : $\quad b^2 + c^2 = m^2$, et $b^2 - c^2 = n^2$.

On a : $\quad x = \sqrt{a^2 \pm \sqrt{m^2 \times n^2}} = \sqrt{a^2 \pm mn}$.

On est ramené au cinquième cas (e).

Soit $AB = b$ (fig. 198). Décrivons une demi-circonférence sur AB

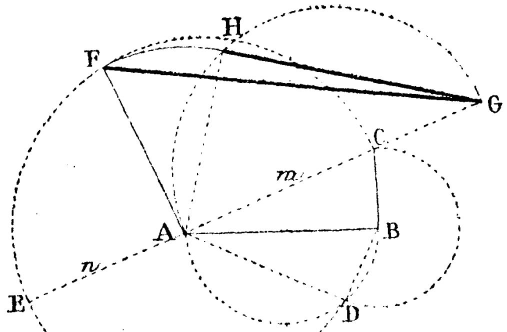


Fig. 198.

comme diamètre, élevons une perpendiculaire au point B, et prenons

$BC = DB = c$; nous aurons $AC^2$ ou $m^2 = b^2 + c^2$, $AD^2$ ou $n^2 = b^2 - c^2$. Prenons $AE = n$, nous aurons $AF^2 = mn$; portons $a$ de A en G. Alors $FG^2 = a^2 + mn$; et, lorsque $AH = AF$, on a $GH^2 = a^2 - mn$.

(j) $$x = \sqrt{a^2 \pm \sqrt{b^4 + c^4}}.$$

On peut écrire : $$b^4 + c^4 = c^2\left(\frac{b^4}{c^2} + c^2\right).$$

Posons $\frac{b^2}{c} = d$, nous aurons :

$$b^4 + c^4 = c^2(d^2 + c^2), \quad \text{puis} \quad d^2 + c^2 = f^2.$$

On aura : $$b^4 + c^4 = c^2 \times f^2;$$

d'où $$x = \sqrt{a^2 \pm cf}.$$

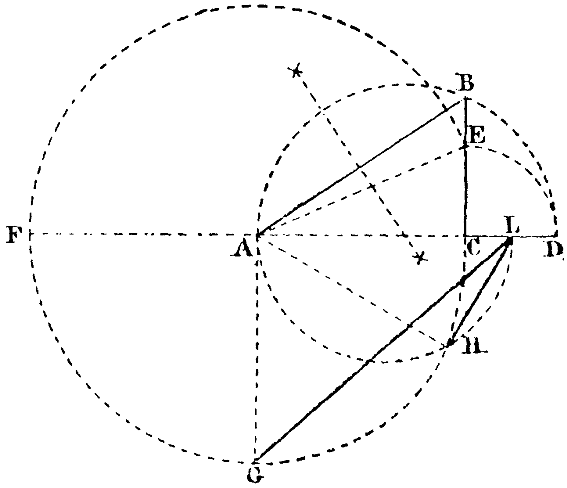



Fig. 199.

Prenons $AC = c$, $CB = b$. En décrivant une demi-circonférence ABD, on a : CD ou $d = \frac{b^2}{c}$ (n° 294 b), ou $d^2 = \frac{b^4}{c^2}$. Portons $d$ de C en E, nous aurons $f^2$ ou $AE^2 = c^2 + d^2$; puis, prenant $AF = AE = f$, on a : $AG^2 = AF \times AC = fc$. Et si $AL = a$, on trouve :

$$GL^2 = a^2 + fc, \quad \text{ou} \quad GL = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^4 + c^4}},$$

et $$HL^2 = a^2 - fc, \quad HL = \sqrt{a^2 - \sqrt{b^4 + c^4}}.$$

**Problème.**

**296 (k).** *Construire directement les racines de l'équation du second degré*

$$x^2 + px + q = 0.$$

Il y a quatre cas à considérer.

On peut toujours rendre $x^2$ positif. Alors, en faisant passer la quantité toute connue à droite, et en la remplaçant par $a^2$, afin que tous les termes soient du même degré, on peut avoir les quatre cas suivants :

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x^2 - px = -a^2, \\ (3) & x^2 + px = -a^2,\end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{ll}(2) & x^2 - px = +a^2, \\ (4) & x^2 + px = +a^2.\end{array}\right.$$

La première équation peut s'écrire :

$$-x^2+px=+a^2, \quad \text{ou} \quad x(p-x)=a^2.$$

Les deux facteurs $x$ et $p-x$ ont pour somme $p$.

Le problème correspond à l'énoncé suivant (G., n° 340) :

*Construire un rectangle, connaissant sa surface* $a^2$ *et la somme* $p$ *de ses côtés.*

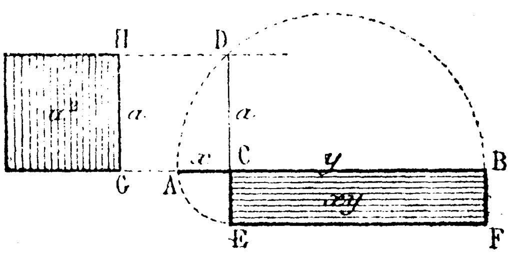



Fig. 200.

On sait qu'il faut décrire une demi-circonférence sur $AB=p$ comme diamètre; élever une perpendiculaire $GH=a$; mener une parallèle HD, et abaisser la perpendiculaire DC. Les segments AC et BC sont les racines de l'équation (1).

**297.** *Seconde construction.* Dans bien des cas, le terme connu est formé de deux facteurs $m$, $n$, par exemple, et l'on a une équation de la forme

$$x^2-px=-mn, \quad \text{ou} \quad x(p-x)=mn.$$

A l'aide d'une moyenne proportionnelle, on pourrait remplacer $mn$ par $a^2$; mais il est plus simple de trouver directement les racines par la construction suivante :

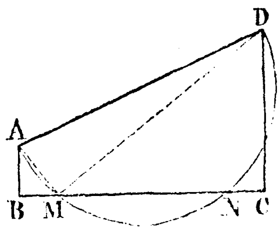



Fig. 201.

Aux extrémités de BC, dont la longueur égale $p$, on élève des perpendiculaires et l'on prend :

$$AB=m; \quad CD=n,$$

et l'on décrit une demi-circonférence sur le diamètre AD.

On sait que l'on a, à cause des triangles semblables ABM, DCM :

$$BM \,.\, MC = AB \,.\, CD = mn \quad (\text{n}^\circ\ 24).$$

*Remarque.* La construction suivante est aussi simple que la précédente, et elle est plus facile à justifier.

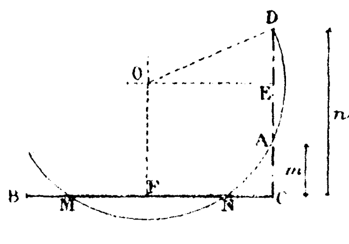



Fig. 202.

A l'extrémité C de la somme BC des racines, élevons une perpendiculaire et prenons $CA=m$, et $CD=n$.

Élevons des perpendiculaires EO, FO par les points milieux E, F, de AD et de BC.

Enfin du point O, comme centre, avec OD, décrivons une circonférence.

On aura : CN . CM,

ou $CN \,.\, NB = CA \,.\, CD = mn$. (G., n° 261.)

Ainsi CN et BN sont les racines demandées.

**Note.** La seconde construction (nos 297 et 299) a été donnée par M. E. BURAT dans son *Traité élémentaire d'algèbre,* page 358, n° 268. — Cet ouvrage présente de très beaux exemples de discussion.

**298**. *Deuxième équation*. La deuxième équation peut s'écrire :

$$x(x-p)=a^2.$$

La différence des facteurs $x$ et $x-p$ égale $p$.

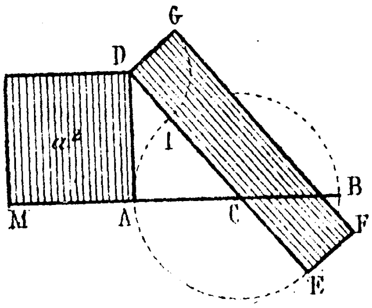



Fig. 203.

On est ramené au problème connu. (G., n° 341.)

*Construire un rectangle, connaissant sa surface* a² *et la différence* AB *de ses côtés*.

On sait qu'il faut décrire une circonférence ayant AB ou $p$ pour diamètre, mener une tangente AD égale à la longueur $a$ et mener DC. La sécante DE et la partie extérieure DI sont les racines de l'équation (2).

**299**. *Seconde construction*. On peut construire directement

$$x(x-p)=mn.$$

Aux extrémités de BC (fig. 204), dont la longueur égale $p$, on élève des perpendiculaires de sens contraire, et l'on prend :

$$AB=m;\quad CD=n,$$

et l'on décrit une circonférence ayant AD comme diamètre.

On sait que l'on a (n° 24. *Remarque*) :

$$BM\,.\,CM=AB\,.\,CD=mn.$$

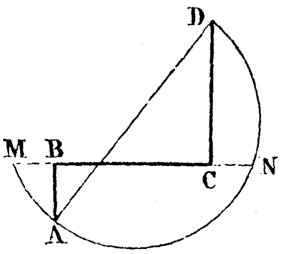



Fig. 204.

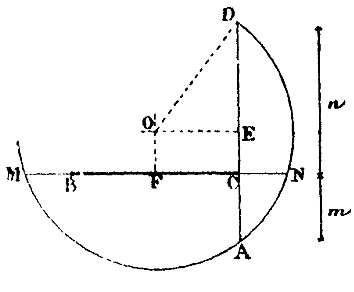



Fig. 205.

*Remarque*. On peut modifier utilement la construction précédente.

Il faut élever une perpendiculaire à l'extrémité C de la différence des racines (fig. 205), prendre $CA=m$, et $CD=n$. Par les points milieux E, F, élever des perpendiculaires aux droites AD et BC; enfin, du point O comme centre, avec OD pour rayon, décrire une circonférence.

On aura : $CM\,.\,CN=CA\,.\,CD=mn.$ (G., n° 259.)

*Équations* (3) et (4). L'équation (3) donne les mêmes racines que l'équation (1), mais changées de signe; de même (4) se ramène à (2).

**Problème.**

**300**. *Construire directement l'équation bicarrée.*

| | | |
|---|---|---|
| (5) $x^4-a^2x^2+b^4=0.$ | En posant : $x^2=by$, ces équations deviennent : | (5 *bis*) $y^2-\frac{a^2}{b}y+b^2=0.$ |
| (6) $x^4-a^2x^2-b^4=0.$ | | (6 *bis*) $y^2-\frac{a^2}{b}y-b^2=0.$ |
| (7) $x^4+a^2x^2+b^4=0.$ | | (7 *bis*) Racines imaginaires. |
| (8) $x^4+a^2x^2-b^4=0.$ | | (8 *bis*) $y^2+\frac{a^2}{b}y-b^2=0.$ |

On obtient les racines des équations en $y$ en opérant comme ci-dessus; puis une moyenne proportionnelle donne $x$.

*Exemple* pour (5 *bis*). Faisons passer une demi-circonférence par A et B, ayant son centre sur BC, on aura :

$\mathrm{CD}=\frac{a^2}{b}$; puis décrivons une demi-circonférence sur CD, prenons $\mathrm{CB}'=b$, on aura CE et DE pour les deux racines de l'équation en $y$ : car

$$\mathrm{CE}\,.\,\mathrm{ED}=b^2,$$

et
$$\mathrm{CE}+\mathrm{DE}=\frac{a^2}{b}.$$

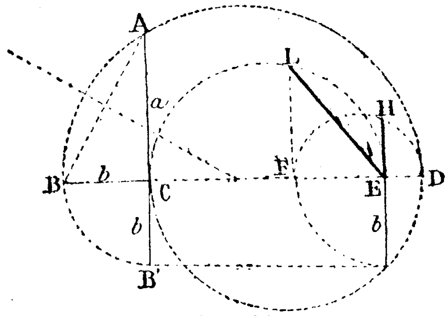


Fig. 206.

Pour avoir $x$, prenons $\mathrm{EF}=b$; on a : $\mathrm{EH}^2=\mathrm{DE}\,.\,b$. Ainsi $x^2=\mathrm{HE}^2$; de même $x^2=\mathrm{EL}^2$, puisque $\mathrm{EL}^2=b\,.\,\mathrm{CE}$, ou $by$.

Les quatre racines sont :

$$\pm\mathrm{EH},\quad \pm\mathrm{EL}.$$

*Remarque.* On a recours rarement à la construction directe des racines d'une équation bicarrée, tandis qu'il est très utile de construire celles de l'équation du second degré, dans toutes les questions de Géométrie qui donnent lieu à cette équation.

## § II. — Emploi de la méthode algébrique.

**Problème.**

**301**. *Dans un triangle donné* ABC, *inscrire un rectangle tel que deux côtés adjacents remplissent une des conditions ci-après :*

(**a**) *La somme égale une longueur donnée* p.

(**b**) *La différence égale une longueur donnée* d.

(**c**) *Le rapport des deux côtés égale un rapport connu* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$.

(**d**) *Le produit des deux côtés, ou l'aire du rectangle, égale* $\mathrm{a}^2$.

**(e)** *La somme des carrés des deux côtés égale une valeur donnée* $a^2$.

**(f)** *La différence des carrés des deux côtés égale* $a^2$.

En représentant la base par $y$ et la hauteur par $z$, les relations deviennent :

(a) $y + z = p,$ (b) $y - z = d,$

(c) $\dfrac{y}{z} = \dfrac{m}{n},$ (d) $yz = a^2.$

(e) $y^2 + z^2 = a^2,$ (f) $y^2 - z^2 = a^2.$

Il suffit de déterminer la position du point D; prenons donc CD ou $x$ pour inconnue. Exprimons les deux côtés $y$ et $z$ en fonction des quantités connues $b$, $h$, et de l'inconnue $x$.

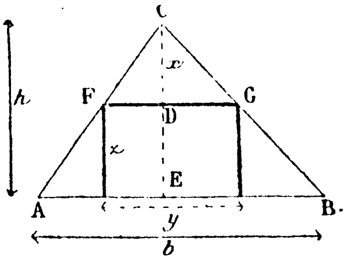


Fig. 207.

On a : $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{FG}{AB}$, ou $\dfrac{x}{h} = \dfrac{y}{b}$;

d'où $$y = \frac{bx}{h}; \quad (1)$$

d'ailleurs $$z = h - x. \quad (2)$$

Quelle que soit la condition que les côtés adjacents doivent remplir, les relations ci-dessus (1) et (2) peuvent être employées.

Nous allons traiter ensemble les cas analogues.

### Problème.

**302.** *Dans un triangle donné, inscrire un rectangle dont la somme ou la différence des côtés ait une longueur donnée.*

Le problème a déjà été résolu par l'emploi des lieux géométriques (nos 190 et 256); en voici la solution algébrique.

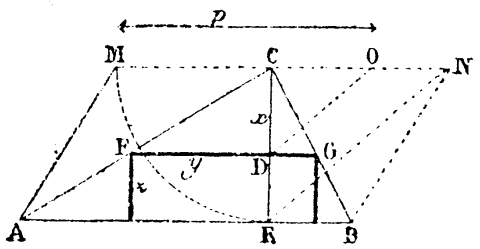


Fig. 208.

(a) Dans le problème précédent (*a*),
$$y + z = p;$$
donc (1) + (2), ou $\dfrac{bx}{h} + h - x = p;$

d'où $$x = \frac{h(p-h)}{b-h}.$$

C'est une quatrième proportionnelle à construire; on a :
$$\frac{b-h}{p-h} = \frac{h}{x}.$$

Sur une ligne quelconque passant par le sommet du triangle, prenons $CM = h$, puis $MN = AB$ ou $b$, et $MO = p$; alors $CN = b - h$, $CO = p - h$. Joignons NE; la parallèle OD détermine $x$.

(b) $$y - z = d; \quad \text{donc} \quad \frac{bx}{h} - (h - x) = d;$$
$$x = \frac{h(d+h)}{b+h}, \quad \text{ou} \quad \frac{h+b}{h+d} = \frac{h}{x}.$$

Prenons $CM = h$, $MN = b$, $MO = d$; joignons NE, et menons la parallèle OD. On a :

$$\frac{NC}{OC} = \frac{CE}{CD}, \quad \frac{h+b}{h+d} = \frac{h}{x}.$$

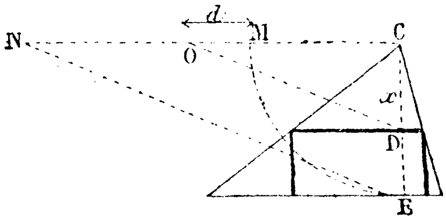



Fig. 209.

La discussion des solutions des problèmes ($a$) et ($b$) serait très intéressante.

**Problème.**

**303.** *Dans un triangle ABC, inscrire un rectangle tel :*

1° *Que le rapport des côtés adjacents égale un rapport donné;*
2° *Que le produit des côtés adjacents égale un carré donné.*

1° (c) soit : $\frac{y}{z} = \frac{m}{n}$.

2° (d) soit : $yz = a^2$.

(c) $\frac{y}{z} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\frac{bx}{h}}{h-x} = \frac{m}{n}, \quad \frac{bx}{h(h-x)} = \frac{m}{n}, \quad bnx = mh^2 - mhx,$

$$bnx + mhx = mh^2, \quad x = \frac{mh^2}{mh + nb}.$$

Pour construire cette expression, divisons tout par $m$ :

$$x = \frac{h^2}{h + \frac{n}{m} b}.$$

Le dénominateur est la somme de deux lignes.

Déterminons $\frac{n}{m} b = u$;

d'où $\frac{m}{n} = \frac{b}{u}$.

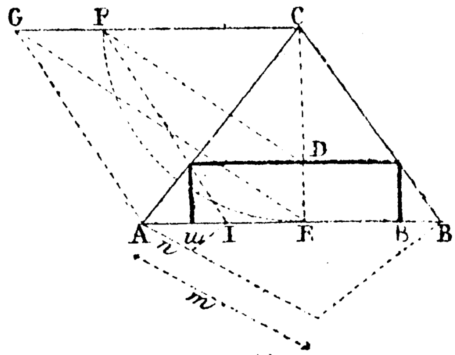



Fig. 210.

Sur une droite quelconque menée par A, prenons les grandeurs $m$ et $n$, on aura : $AI = u$; or $x = \frac{h^2}{u+h}$; d'où $\frac{h+u}{h} = \frac{h}{x}$; prenons $CP = h$, et $PG = u$, joignons GE. La parallèle PD donne la réponse.

**303 a.** *Remarques.* 1° Quand $\frac{m}{n} = 1$, la figure est un carré; la valeur de $x$ devient $\frac{h^2}{h+b}$. On doit prendre $PG = b$, et continuer comme ci-dessus.

2° Le problème a été résolu graphiquement par deux méthodes : par l'*emploi des lieux géométriques* (nº 99 **c**), et par la *similitude* (nº 209). L'inscription du rectangle de surface donnée, qu'on va traiter algébriquement, a déjà été faite par d'autres procédés (nº 202).

(**d**) On veut avoir : $yz = a^2$.

On a : $\frac{bx}{h} \times (h - x) = a^2,\quad bhx - bx^2 = ha^2,\quad x^2 - hx = \frac{-ha^2}{b},$

ou $$x(x - h) = \frac{-h}{b} a^2.$$

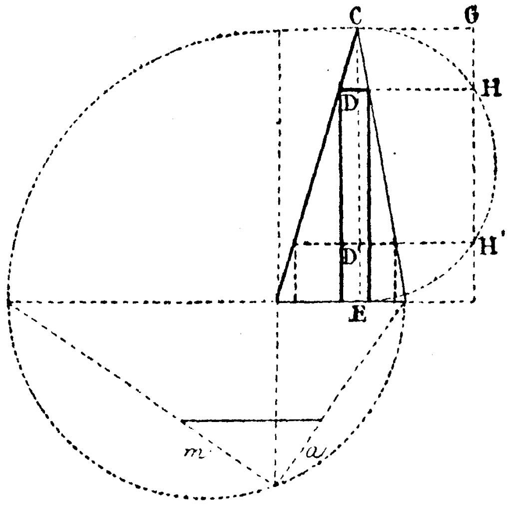



Fig. 211.

Nous pouvons employer la première formule du nº 296 (**k**); mais, avant, il faut trouver un carré $m^2$ égal à

$$\frac{h}{b} a^2;\quad \text{d'où}\quad \frac{m^2}{a^2} = \frac{h}{b}$$

(problème $g$, nº 293), et écrire

$$x(h - x) = +m^2.$$

Sur $h$ comme diamètre, décrivons une demi-circonférence ; prenons $CG = m$ ; CD et CD′ sont les deux racines.

$m$ ne peut dépasser $\frac{h}{2}$.

En prenant cette valeur limite, la surface du rectangle donné par

$$\frac{h}{b} a^2 \quad \text{devient :} \quad \frac{h^2}{4},$$

ou $$\frac{h}{b} a^2 = \frac{h^2}{4};\quad \text{d'où}\quad \frac{a^2}{b} = \frac{h}{4}.$$

Le plus grand rectangle est celui qui est donné par $x = \frac{h}{2}$.

3° On parvient ainsi à un théorème que nous aurons occasion de démontrer par diverses méthodes; on peut donc consigner le résultat suivant :

**303 b. Th.** *Le rectangle maximum que l'on peut inscrire dans un triangle donné, a pour base supérieure la droite qui joint les points milieux des deux côtés latéraux du triangle.*

### Problème.

**304.** *Inscrire, dans un triangle* ABC, *un rectangle tel que la somme, ou la différence des carrés des côtés adjacents, égale un carré donné.*

La première partie du problème a été résolue graphiquement (nº 193), mais il n'en a point été de même de la seconde; voici d'ailleurs la solution algébrique des deux parties.

(e) $$y^2 + z^2 = a^2, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{bx}{h}\right)^2 + (h - x)^2 = a^2;$$

d'où $$x^2 - \frac{2h^3}{b^2 + h^2}\,x = \frac{a^2h^2 - h^4}{b^2 + h^2}.$$

Au lieu de construire directement les racines, résolvons l'équation; on trouve :

$$x = \frac{h^3}{b^2 + h^2} \pm \sqrt{\frac{h^2(a^2b^2 + a^2h^2 - b^2h^2)}{(b^2 + h^2)^2}}.$$

Cette expression, bien que déjà fort compliquée, se construit cependant aussi facilement que les précédentes; mais elle exige un plus grand nombre d'opérations.

Le numérateur peut s'écrire : $h^4\left(\frac{a^2b^2}{h^2} + a^2 - b^2\right)$. Le premier terme de la parenthèse est le carré de la quatrième proportionnelle $\frac{ab}{h}$; puis on ajoute ce carré à $a^2$, et on soustrait $b^2$.

Soit $m^2$ la valeur obtenue, on a alors :

$$x = \frac{h^3}{b^2 + h^2} \pm \sqrt{\frac{h^4m^2}{(b^2 + h^2)^2}} = \frac{h^2}{b^2 + h^2}(h \pm m).$$

Et le problème est l'inverse de $(g)$; il consiste à trouver une ligne $x$ qui soit à une autre ligne $(h \pm m)$ dans le rapport des deux carrés $h^2$ et $(h^2 + b^2)$. On peut écrire :

$$\frac{x}{h \pm m} = \frac{h^2}{h^2 + b^2}.$$

(Voir $h$, n° 294.)

Soient $AB = h$, $AC = b$; $CB^2$ égale donc $b^2 + h^2$. Puis sur les côtés d'un angle droit prenons $BD = BC$, $BE = BA = h$; abaissons la perpendiculaire BF. On a: $\frac{FE}{FD} = \frac{h^2}{h^2 + b^2}$. Puis prenons FO égale, par exemple, à $(h + m)$; menons OG parallèle à BF, et GH parallèle à DO.

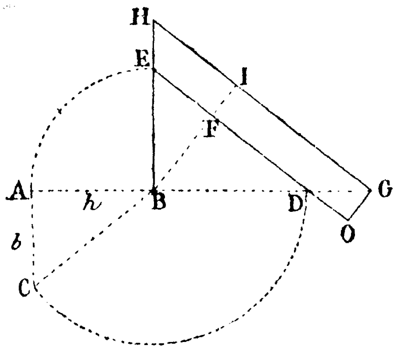


Fig. 212.

On aura : $$\frac{HI}{IG \text{ ou } h + m} = \frac{h^2}{h^2 + b^2}.$$

(f) $$y^2 - z^2 = a^2, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{bx}{h}\right)^2 - (h - x)^2 = a^2,$$

$$x^2 + \frac{2h^3}{b^2 - h^2}\,x = \frac{h^2(a^2 + h^2)}{b^2 - h^2}.$$ Analogue au précédent.

**Relations à utiliser.**

**305.** *Relations principales.* En employant les lieux géométriques, il est très facile d'imaginer un grand nombre de questions qu'on peut traiter comme la précédente. En appelant $x$ et $y$ les deux parties d'une droite à mener, ou les deux dimensions d'un rectangle à construire, etc., on a les six relations suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| (**a**) | $x+y=p,$ | La somme ou la différence des variables égale une longueur donnée. |
| (**b**) | $x-y=d.$ | |
| (**c**) | $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}.$ | Le rapport des variables égale un rapport donné. |
| (**d**) | $xy=a^2.$ | Le produit des variables égale une valeur donnée. |
| (**e**) | $x^2+y^2=a^2,$ | La somme ou la différence des carrés des variables égale un carré donné. |
| (**f**) | $x^2-y^2=a^2.$ | |

**305 a.** *Autres relations.* Telles sont les six relations élémentaires que l'on rencontre ordinairement; mais, dans une question donnée, on pourrait poser : $mx \pm ny = p$, ou $mx^2 \pm ny^2 = a^2$, $m$ et $n$ étant des coefficients quelconques; ou même établir toute autre relation.

Lorsqu'on choisit une des relations précédentes ($a$, $b$, ... $f$) comme relation fondamentale, les cinq autres relations permettent de poser cinq problèmes différents :

Exemple. *Les deux segments d'une corde menée par un point fixe, pris à l'intérieur d'une circonférence, donnent un* ***produit*** *constant. On peut demander les cinq questions suivantes :*

**Problème.**

**305 b.** *Par un point pris dans une circonférence, mener une corde :*

(**a**) *qui égale une ligne donnée* $x+y=p$;

(**b**) *dont la différence des segments égale une longueur donnée, c'est-à-dire* $x-y=d$;

(**c**) *qui soit divisée par ce point, dans un rapport donné ou* $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$;

(**e**), (**f**) *telle que la somme ou la différence des carrés des segments ait une valeur donnée ou* $x^2 \pm y^2 = a^2$.

**306.** *Lieux géométriques.* Pour avoir une relation entre deux quantités variables, on peut utiliser les lieux géométriques connus : voici quelques-uns des plus simples et des plus employés.

1. Lorsque la hauteur et la base d'un triangle sont égales entre elles, tout rectangle inscrit a un *périmètre* constant (nº 257).

2. Le rectangle inscrit dans un carré, et dont les côtés sont parallèles aux diagonales du carré, a un *périmètre* constant (nº 19).

3. La *somme* des distances d'un point quelconque de la base d'un triangle isocèle aux deux autres côtés est constante (nº 20).

4. La *somme* des rayons vecteurs d'un point de l'ellipse est constante. (G., n° 613.)

Dans tous les cas, l'équation générale est : $x + y = p$.

5. Dans les n$^{os}$ 1, 2, la *différence* des côtés adjacents est constante lorsque le rectangle est exinscrit; il en est de même dans le n° 3 quand le point est pris sur le prolongement de la base du triangle isocèle, et enfin pour l'hyperbole. (G., n° 647.)

On a donc : $x - y = d$.

Le *rapport* est constant lorsqu'on considère :

6. Les distances d'un point quelconque d'une droite à deux autres qui la coupent en un même point (n° 60);

7. Les distances d'un point de la circonférence à deux points fixes (G., n° 307 et E. de G., n° 61);

8. Les distances d'un point d'une ellipse ou d'une hyperbole à un foyer et à la directrice correspondante (G., n$^{os}$ 845 et 850);

9. Les distances d'un point fixe aux points où toute droite menée par ce point fixe coupe deux parallèles (n° 63).

10. Question analogue pour deux circonférences, en prenant pour point fixe un des centres de similitude; on a : $\dfrac{x}{y} = \dfrac{m}{n}$ (n° 65).

Le *produit* de deux lignes est constant quand on considère :

11. Les deux segments d'une corde menée par un point fixe (G., n° 259);

12. La sécante entière et sa partie extérieure quand le point fixe est extérieur (G., n° 261);

13. Les rayons vecteurs réciproques des figures inverses (n$^{os}$ 223, 224, 225);

14. Les distances d'un point quelconque d'une hyperbole à ses deux asymptotes (n$^{os}$ 78 et 79).

Dans tous ces problèmes on a : $xy = a^2$.

La *somme des carrés* des distances est constante :

15. Pour le lieu géométrique connu (n° 69);

Pour tout point de l'ellipse par rapport aux deux diamètres conjugués égaux (n° 73, 2°).

16. La *différence des carrés* est constante pour le lieu étudié au n° 71;

17. Pour tout point d'une hyperbole équilatère, relativement aux axes (n° 73, 1° et 3°).

### Remarque sur le choix des méthodes.

**307**. *Les méthodes particulières n'ont jamais qu'une valeur relative; le grand art est de savoir les utiliser à propos, suivant la nature de la question à traiter.*

Ainsi il convient de renoncer à l'algèbre lorsque les deux inconnues sont liées par une relation fondamentale trop compliquée; dans ce cas, on peut recourir aux procédés particuliers ou à l'intersection des lieux géométriques.

En voici un exemple (n° 308).

**Problème.**

**308.** *Par le point* C, *intersection de deux circonférences* A *et* B, *mener une sécante* EF *telle que les cordes* CE, CF *remplissent certaines conditions.*

Cherchons une relation entre les longueurs AI, BM et les rayons des cercles.

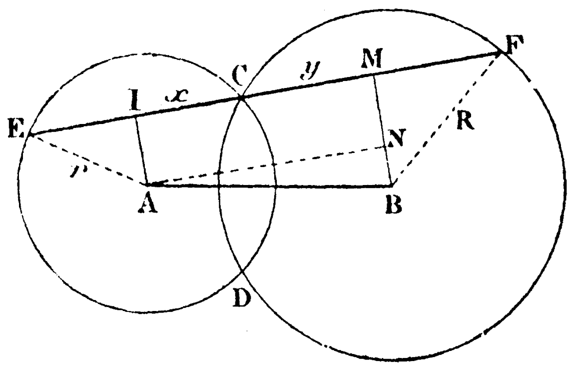



Fig. 213.

Soient : $CI = x$, $CM = y$, $AE = r$, $BF = R$.

On peut obtenir une relation entre les deux demi-cordes $x$ et $y$; car, en menant AN parallèle à la sécante, on trouve :

$$AB^2 = AN^2 + BN^2, \quad \text{ou} \quad = AN^2 + (BM - AI)^2.$$

Mais $\quad AN = x + y, \quad BM = \sqrt{R^2 - y^2}, \quad AI = \sqrt{r^2 - x^2}$ ;

donc $\quad AB^2 = (x+y)^2 + (\sqrt{R^2 - y^2} - \sqrt{r^2 - x^2}\,)^2.$

*Remarques.* 1° Cette équation est trop compliquée pour qu'on puisse l'employer ordinairement, bien qu'on en trouve un exemple dans l'Algèbre de BRIOT.

Le problème $x + y = p$, est résolu ci-après (n° 878) : $\dfrac{x}{y} = \dfrac{m}{n}$ (n° 96); $xy = a^2$ (n° 1427). On trouve facilement la solution pour $x - y = d$ (n° 880).

2° Il est utile d'étudier aussi l'exemple ci-après (n° 309); pour certains cas, les solutions directes sont très simples, mais l'algèbre reprend l'avantage pour plusieurs autres cas.

**Note.** * CH. BRIOT, né en 1817 à Saint-Hippolyte-sur-Doubs, mort en 1882 au Bourg-d'Ault (Franche-Comté), maître de conférences à l'École Normale supérieure, professeur à la Faculté des sciences, auteur d'ouvrages classiques très estimés : *Leçons d'algèbre*, de *géométrie analytique*, etc., et d'un *Traité sur les fonctions elliptiques*.

**Problème.**

**309.** *Par un point* A, *pris entre les côtés* OX, OY *d'un angle droit, mener une sécante limitée aux côtés de l'angle, de manière que les deux segments* x *et* y *de la droite soient liés par une relation donnée.*

Soient $a$ et $b$ les distances du point A aux côtés OX, OY. On trouve la relation :

$$x^2y^2 = a^2x^2 + b^2y^2. \qquad (1)$$

En se reportant au nº 305, pour les divers problèmes à se proposer, on connaît les solutions suivantes : (*c*) $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ (nº 94). (*d*) ou $xy = a^2$ (nº 97).

Le calcul a néanmoins ses avantages spéciaux, car il permet de traiter (*c*), (*d*), (*e*), (*f*) à l'aide d'une équation bicarrée.

Mais (*a*) et (*b*) donnent une équation complète du quatrième degré.

Lorsque dans (1) $a = b$, la relation fondamentale devient :

$$x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2), \qquad (2)$$

et l'on peut résoudre (*a*) et (*b*). On tombe sur le problème suivant :

**309 a.** Problème de Pappus. *Par un point* A *pris sur la bissectrice d'un angle droit, mener une sécante telle que la partie* $(x + y)$, *comprise entre les côtés de cet angle, ait une longueur donnée* p.

A l'aide de quelques artifices de calcul, on résout le système des équations (2) et (*a*) ou $x + y = p$. En élevant cette dernière au carré, on trouve successivement :

$$x^2 + 2xy + y^2 = p^2, \quad x^2 + y^2 = p^2 - 2xy.$$

L'équation (2) devient : $x^2y^2 = a^2(p^2 - 2xy)$.

On regarde $xy$ comme inconnue

$$xy = -a^2 \pm \sqrt{a^2(a^2 + p^2)}\,.$$

On connaît donc la somme et le produit des deux inconnues, et le problème peut être regardé comme résolu. (*Algèbre*, nº 231.)

## § III. — Problèmes sur la tangente.

Les problèmes suivants relatifs à la tangente (nºˢ 310 à 319) ne sont donnés qu'à cause des applications nombreuses que nous allons en faire dans les questions de *maximum* et de *minimum* (voir ci-après nºˢ 359 et suivants).

### Problème.

**310.** *On donne une demi-circonférence* ADC *et une perpendiculaire* PF *au diamètre* AC; *mener une tangente* EDF *limitée à ces deux droites, de manière que les distances* DE, DF *soient entre elles dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

Soient : $OP = a$, $OE = x$, et $\frac{DE}{DF} = \frac{m}{n}$.

En prenant DE pour inconnue auxiliaire, on a les relations suivantes :

$$DE^2 = x^2 - r^2; \qquad (1)$$

$$DE^2 = x \,.\, HE. \qquad (2)$$

Or
$$\frac{HE}{PE} = \frac{m}{m+n},$$

ou
$$\frac{HE}{x-a} = \frac{m}{m+n},$$

$$HE = \frac{m}{m+n}(x-a);$$

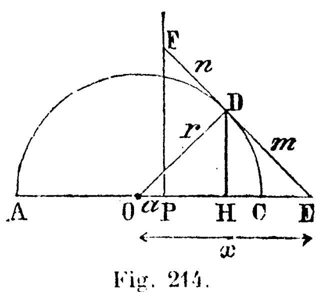



Fig. 214.

d'où $$DE^2 = \frac{m}{m+n}(x^2 - ax); \qquad (3)$$

(1) et (3) donnent : $$x^2 - r^2 = \frac{m}{m+n}(x^2 - ax);$$

d'où $$nx^2 + m \cdot ax - (m+n)r^2 = 0; \qquad (4)$$

donc $$x = \frac{-am \pm \sqrt{a^2m^2 + 4n(m+n)r^2}}{2n}. \qquad (5)$$

Quantité facile à construire.

*Remarque.* Il convient d'examiner avec quelques détails les deux cas que nous aurons à utiliser, et même de les traiter directement.

**Problème.**

**311.** *Mener une tangente* EDF, *limitée à un diamètre prolongé* ACE, *et à une perpendiculaire* PF *à ce diamètre, de manière que le point de contact* D *soit au milieu de la tangente* EDF.

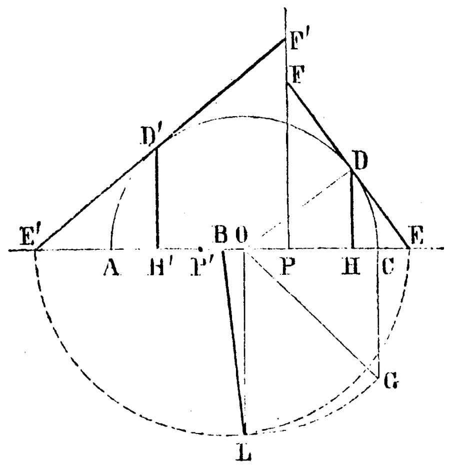



Fig. 215.

Lorsque $DE = DF$, $m = n$. Dans ce cas, la formule (5)

$$x = \frac{-am \pm \sqrt{a^2m^2 + 4n(m+n)r^2}}{2n};$$

devient : $$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2}. \qquad (6)$$

Directement, on aurait :

$$DE^2 = OE \cdot HE = \frac{x(x-a)}{2},$$

et $$DE^2 = x^2 - r^2;$$

d'où $$x^2 + ax - 2r^2 = 0,$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2}. \qquad (6)$$

Mais de $$x^2 + ax - 2r^2 = 0,$$

on peut déduire : $$x(x+a) = 2r^2. \qquad (7)$$

*Construction.* (7) revient à construire un rectangle, connaissant la surface $2r^2$ et la différence $a$ des deux côtés $a + x$ et $x$; mais il est aussi facile de construire (6) que (7).

Prenons $OB = -\frac{a}{2}$ (il suffit de porter, vers la gauche, la demi-longueur de OP); élevons une perpendiculaire CG égale à $CO = r$; d'où

$$OG^2 = 2r^2.$$

Reportons OG de O en L; BL représente le radical, car

$$BL^2 = \frac{a^2}{4} + 2r^2;$$

puis du centre B, avec BL pour rayon, décrivons une demi-circonférence :

$$OE = -OB + BL = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2}\,,$$

$$OE' = -OB - BL = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2}\,.$$

**312.** *Calcul de* PH *et de* DH; *de* PH' *et de* D'H'.

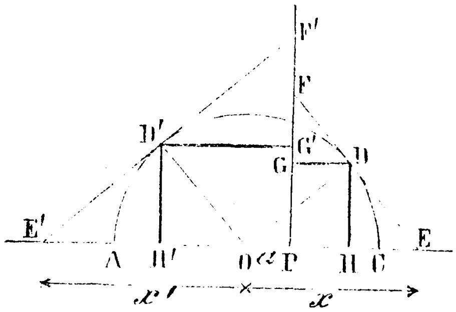



Fig. 216.

1°
$$PH = \frac{1}{2}\,PE = \frac{1}{2}(x - a) = \frac{x}{2} - \frac{2a}{4}\,,$$

$$DG \text{ ou } PH = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 8r^2} - 2a}{4} = \frac{-3a + \sqrt{a^2 + 8r^2}}{4}\,. \quad (1)$$

2°
$$DH^2 = OH\,.\,HE = \left[a + \frac{x-a}{2}\right]\left(\frac{x-a}{2}\right) = \frac{x^2 - a^2}{4}\,,$$

$$DH^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + 8r^2}}{2}\right)^2 - a^2\right];$$

d'où
$$DH^2 = \frac{-a^2 + 4r^2 - a\sqrt{a^2 + 8r^2}}{8}\,. \quad (2)$$

3° Il suffit de tenir compte de la valeur absolue de D'G'

$$D'G' = \frac{3a + \sqrt{a^2 + 8r^2}}{4}\;; \quad (3)$$

d'où
$$D'H'^2 = \frac{-a^2 + 4r^2 + a\sqrt{a^2 + 8r^2}}{8}\,. \quad (4)$$

**313.** *Discussion.* Dans la mise en équation, nous avons supposé que la longueur $a$ ou OP, portée vers la droite du centre, était positive. En prenant OP' = OP, etc., les réponses géométriques seraient identiques aux précédentes; mais la plus petite tangente FDE serait à gauche du centre et réciproquement pour E'F'; il suffit donc, comme étude géométrique, de faire varier la longueur $a$ depuis zéro jusqu'à plus l'infini.

1° $a$ est nul.

C'est-à-dire que la perpendiculaire PF passe par le centre.

La formule (6) ou $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2}\,,$

donne deux racines égales, car elle se réduit à

$$x = \pm r\sqrt{2}\,,$$

ainsi qu'on pouvait le prévoir, car les deux tangentes deviennent les côtés du carré circonscrit.

2° $a > 0$, mais $< r$.

Les deux valeurs sont réelles et plus grandes, en valeur absolue, que la longueur $r$; par conséquent, on peut mener les deux tangentes.

3° $a = r$.

La formule devient :

$$x = -\frac{r}{2} \pm \frac{3r}{2} = \begin{cases} +r, \\ -2r. \end{cases}$$

Le point E se confond avec le point C. — Le point E' donné par $x = -2r$ est le sommet d'un triangle équilatéral dont E'C serait la hauteur.

4° $a > r$.

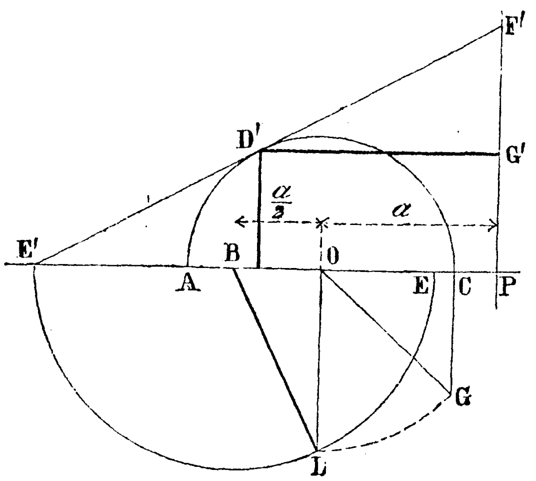


Fig. 217.

La valeur négative donnée par le signe inférieur du radical sera plus grande en valeur absolue que $2r$; par suite, la tangente E'F' pourra être menée; mais il n'en est plus de même de EF, car la valeur positive est plus petite que R.

**314**. **Résumé.** *Au point de vue géométrique*, quel que soit $a$, il y a au moins *une tangente* qui répond à la question; il y a *deux tangentes* lorsque la valeur absolue de $a$ est plus petite que $r$; mais il n'y en a qu'*une* lorsque $a$ est plus grand que $r$ (fig. 217), car le point E se trouve entre A et C, et par ce point E on ne saurait mener de tangente à la demi-circonférence AC.

### Problème.

**315**. *Mener une tangente de manière que la partie* DE, *limitée au diamètre, soit double de* DF (fig. 218).

$$m = 2n.$$

La formule $x = \dfrac{-am \pm \sqrt{a^2m^2 + 4n(m+n)r^2}}{2n}$

devient : $$x = -a \pm \sqrt{a^2 + 3r^2}\,. \qquad (8)$$

*Construction.* Prenons : $OB = -a$; $CG = r$.

Élevons GK perpendiculaire sur OG; prenons : $GK = r$;

on a : $OK^2 = 3r^2$.

On peut aussi, du point C comme centre, couper la perpendiculaire OL avec un rayon égal à AC, car OL serait la hauteur d'un triangle équilatéral dont AC serait la base.

Reportons OK de O en L, puis BL de B en E et en E'.

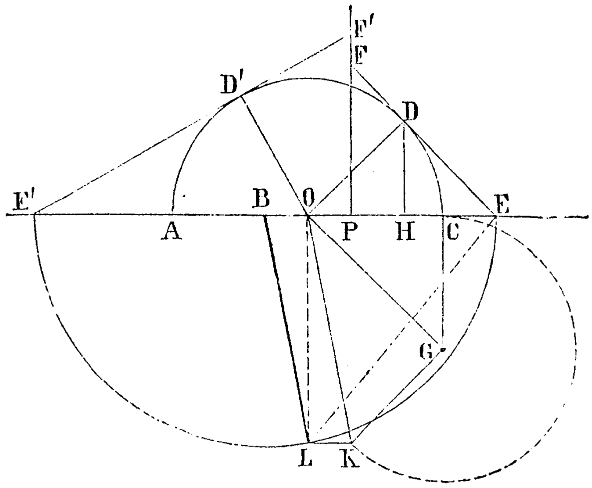



Fig. 218.

On a : $OL^2 = 3r^2$;

donc $BL = \sqrt{a^2 + 3r^2}$.

$$OE = -a + \sqrt{a^2 + 3r^2},$$

$$OE' = -a - \sqrt{a^2 + 3r^2}.$$

*Remarques.* 1° La valeur négative $-a - \sqrt{a^2 + 3r^2}$ est toujours plus grande en valeur absolue que le rayon; pour avoir la valeur limite de $a$ qui donne une longueur positive plus grande que $r$, posons :

$$-a + \sqrt{a^2 + 3r^2} = r;$$

d'où $a = r$.

Ainsi, comme dans l'exemple précédent, lorsque $a$ atteint la valeur de $r$ ou la dépasse, il n'y a qu'*une seule tangente*.

2° Pour $a = r$, on a :

$$x = -r \pm \sqrt{r^2 + 3r^2}\,; \quad x = -r \pm 2r = \left\{ \begin{array}{l} +r, \\ -3r. \end{array} \right.$$

La valeur $+r$ correspond à la perpendiculaire PF (fig. 220), alors tangente à la circonférence.

**316.** *Cas particuliers.* **1er Cas** (fig. 219). Examinons le cas où les deux droites rectangulaires OE, OF passent par le centre, et calculons OH, OL en fonction du rayon. Sans recourir à la formule générale, on trouve facilement :

$$OE^2 = 3r^2, \qquad \textbf{(a)}$$

$$OF^2 = \frac{3}{2} r^2. \qquad \textbf{(b)}$$

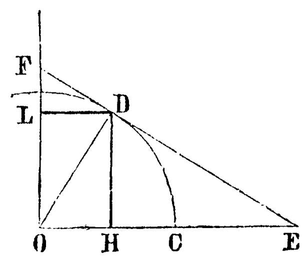



Fig. 219.

Mais OH est le tiers de OE; $OH^2$ égale donc $\frac{1}{9}OE^2$;

d'où
$$OH^2 = \frac{r^2}{3}, \tag{c}$$

$$OL^2 = \frac{2}{3} r^2; \quad \text{d'où} \quad OL^2 = 2 \cdot OH^2. \tag{d}$$

**316 a. 2e Cas** (fig. 220). $a = r$.

On a déjà vu que $x = \begin{cases} +r, \\ -3r. \end{cases}$ (no 315, 2o).

La première valeur correspond au point P; et c'est la tangente donnée PF elle-même.

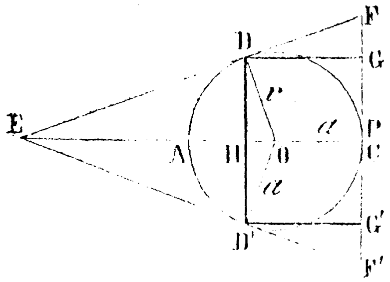


Fig. 220.

La seconde valeur $-3r$ donne OE; ainsi, en ne tenant compte que de la valeur absolue, on trouve facilement :

$$CH = \frac{4r}{3}, \tag{e}$$

$$DH = \frac{2}{3} r\sqrt{2}, \tag{f}$$

$$PF = r\sqrt{2}. \tag{g}$$

**317.** *Calcul de* PH *et* DH, *lorsque* DE = 2DF.

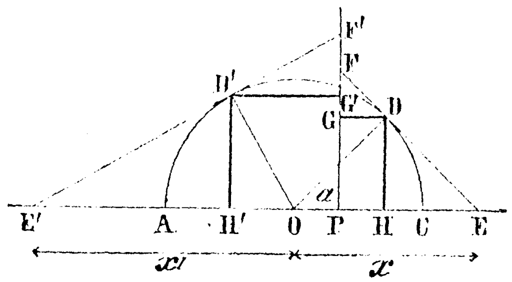


Fig. 221.

$$PH = \frac{-2a + \sqrt{a^2 + 3r^2}}{3}, \tag{h}$$

$$DH^2 = \frac{-2a^2 + 6r^2 - 2a\sqrt{a^2 + 3r^2}}{9}, \tag{i}$$

$$PH' = \frac{2a + \sqrt{a^2 + 3r^2}}{3}, \tag{j}$$

$$D'H'^2 = \frac{-2a^2 + 6r^2 + 2a\sqrt{a^2 + 3r^2}}{9}, \tag{k}$$

$$PF^2 = \frac{-2a^2 + 6r^2 - 2a\sqrt{a^2 + 3r^2}}{4}, \tag{l}$$

$$PF'^2 = \frac{-2a^2 + 6r^2 + 2a\sqrt{a^2 + 3r^2}}{4}. \tag{m}$$

**317 a. Note.** 1o Pour les développements de divers calculs, on peut se reporter aux 2e et 3e éditions précédentes.

2o Nous n'avons résolu le *problème de la tangente* que lorsque les deux droites passent par le centre du cercle (no 214), ou lorsqu'une des droites passe par le centre et que l'angle des deux lignes est droit (nos 310 à 317); mais, dans le cas général, les deux droites déterminent quatre arcs différents: il y a quatre solutions, et le problème, dépendant d'une équation complète du 4e degré, ne peut être résolu en n'employant que la règle et le compas.

On peut obtenir les quatre points de contact par l'intersection d'une hyperbole et de la circonférence donnée.

Le problème de la recherche du point brillant d'une sphère lorsqu'on donne la position du point lumineux et celle de l'œil du spectateur peut être ramené à la question précédente (N. A., 1869, pages 232 et 235).

**Problème.**

**318.** *Un segment parabolique* ABC *est limité par une corde* BC *perpendiculaire à l'axe de la courbe; mener une tangente* FEG, *telle que le point de contact* E *soit le milieu du segment* FG, *limité à la corde prolongée et à la droite* CG, *menée parallèlement à l'axe par l'extrémité* C *de la corde donnée.*

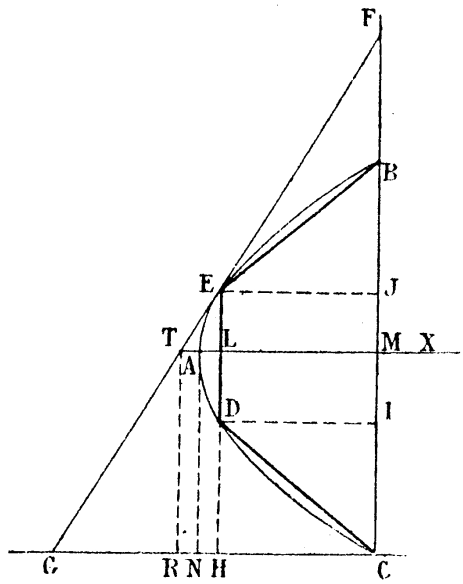



Fig. 222.

Supposons le problème résolu

$$EF = EG.$$

On sait que le sommet A divise la sous-tangente TL en parties égales (G., no 699); prenons pour inconnues AL ou $x$ et LE $= y$; soit AM $= a$, BM $= b$.

Les triangles semblables GRT, TLE donnent :

$$\frac{GR}{RT} = \frac{TL}{LE},$$

ou

$$\frac{a - 3x}{b} = \frac{2x}{y}. \qquad (1)$$

Car $\qquad GR = GH - TL,$

mais $\qquad GH$ ou $HC = AM - AL = a - x; \quad TL = 2x,$

donc $\qquad GR = a - 3x,$

(1) donne $\qquad ay - 3xy = 2bx$ ou $3xy + 2bx - ay = 0. \qquad (2)$

L'équation de la courbe donne $\dfrac{y^2}{x} = \dfrac{b^2}{a}$; (G., no 708)

d'où

$$x = \frac{ay^2}{b^2}.$$

Cette valeur mise dans l'équation (2) donne :

$$y = \frac{-ab \pm \sqrt{a^2b^2 + 3a^2b^2}}{3a},$$

$$y = +\frac{b}{3}, \quad \text{et} \quad y = -b.$$

La racine positive conduit à $x = \dfrac{a}{9}$; donc AL est le neuvième de AM. Par le point L, ainsi déterminé, il faut mener une corde ELD parallèle à BC.

La racine $y = -b$ donne $x = a$.

On retrouve ainsi la corde CB; cette valeur ne correspond point directement à la question proposée.

**318 a.** *Remarques.* 1° Au chapitre des *maxima* et des *minima* (n° 365), nous verrons qu'à la corde DE déterminée par la tangente FG, dont le point du contact est le point milieu, correspond le *trapèze maximum* BCDE qu'on puisse inscrire dans le segment parabolique BAC.

L'aire maxima ou $(\mathrm{MB} + \mathrm{LE}) \,.\, \mathrm{LM} = \left(b + \frac{b}{3}\right) \cdot \frac{8}{9}\, a.$

L'aire du trapèze $= \frac{32}{27}\, ab.$

L'aire du segment parabolique $\mathrm{BAC} = \frac{2}{3}\, \mathrm{AM} \,.\, \mathrm{BC}$ (G., nos 707 et 982)

égale : $$\frac{2}{3}\, a \,.\, 2b = \frac{4ab}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{36}{27}\, ab\,;$$

donc l'aire du *trapèze maximum* est les $\frac{32}{36}$ ou les $\frac{8}{9}$ du segment parabolique.

2° Pour un segment terminé par une corde quelconque, il faut considérer le diamètre conjugué à la corde donnée. L'équation de la parabole rapportée à un diamètre quelconque et à la tangente parallèle aux cordes conjuguées étant de même forme que l'équation de la courbe rapportée à l'axe et à la tangente au sommet, la recherche du trapèze maximum inscrit est identique à la précédente.

Le *diamètre conjugué* à un système de cordes est le diamètre qui divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à la direction donnée.

### Nombre de solutions d'un problème.

**319.** Une équation a autant de racines qu'il y a d'unités dans le nombre qui exprime le degré de cette équation; néanmoins un problème de géométrie a parfois un plus grand nombre de solutions que le degré de l'équation obtenue pour déterminer l'inconnue.

Nous en donnons un exemple : mais il arrive encore plus fréquemment que les solutions géométriques sont moins nombreuses que ne le comporterait le degré de l'équation, parce que certaines racines ne peuvent être acceptées.

### Problème.

**320.** *Par le point milieu d'un arc de cercle, mener une droite telle que le segment compris entre la corde de l'arc et l'autre partie de la circonférence ait une longueur donnée* l.

(FRANCŒUR, *Cours de Mathématiques*, tome I.)

Supposons le problème résolu, et $\mathrm{MN} = l$.

Prenons OM, ou $x$ pour inconnue; soit $\mathrm{OA} = a$.

On a : $$\mathrm{OM} \,.\, \mathrm{ON} = \mathrm{OD} \,.\, \mathrm{OB} = a^2, \qquad (\text{n° } 68,\ 2°)$$
$$x(x + l) = a^2.$$

On peut déterminer l'inconnue en cherchant les côtés d'un rectangle ayant $l$ pour différence et $a^2$ pour produit.

On peut aussi résoudre l'équation, et l'on trouve :

$$x = -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + a^2}.$$

*Construction.* Sur une droite parallèle à AC, prenons OE=OA=$a$. Élevons une perpendiculaire EF égale à $\frac{l}{2}$.

On aura $OF = \sqrt{\frac{l^2}{4} + a^2}$.

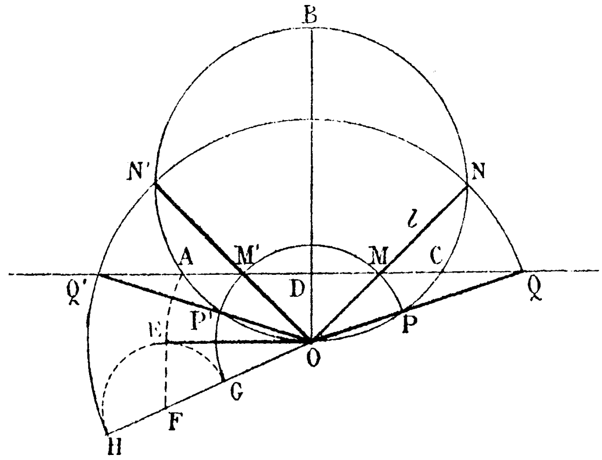



Fig. 223.

Puis reportons $\frac{l}{2}$ de F en G et en H. La longueur OG représente la première racine et OH la seconde. Or il y a quatre solutions géométriques.

Car PQ répond à la question proposée aussi bien que MN. Il y a en outre les deux solutions géométriques M'N', P'Q'.

**321.** *Remarque.* Le problème précédent peut s'énoncer comme il suit :

*Construire un triangle* ANC (*ce triangle n'est pas tracé*), *connaissant la base* AC, *l'angle opposé* N *et la longueur* l *de la bissectrice qui part du sommet* N.

Les deux triangles ANC, AN'C ne diffèrent que par leur position.

Les triangles APC, AP'C ne répondent pas à la nouvelle question, car l'angle APC est supplémentaire de l'angle inscrit dans le segment ABC, mais il correspond à la question analogue : *Construire un triangle* APC, *connaissant la base, la valeur* AOC *de l'angle opposé* P, *et la longueur* PQ *de la bissectrice extérieure qui part du sommet* P.

**321 a. Note.** L'emploi du problème contraire (n° 213) et de la question qu'on vient de résoudre (n° 320) donne une solution très simple du *Problème de Pappus* (n° 309); mais cette solution est indirecte; il en existe plusieurs autres plus ou moins algébriques; l'une d'elles est de PAPPUS lui-même. NEWTON en a donné plusieurs. On peut consulter les ouvrages suivants :

*Nouvelles Annales,* 1847, page 458, note de M. ABEL TRANSON; l'auteur indique six solutions, dont plusieurs s'appliquent à un angle donné quelconque.

Dans les *Examens et compositions de Mathématiques,* par MM. MOMENHEIM et FRANCK, on trouve jusqu'à dix solutions différentes; mais l'angle donné est toujours droit.

Les *Questions d'Algèbre* de M. DESBOVES reproduisent deux des solutions données par Newton, et en indiquent plusieurs autres. (Voir *Questions d'Algèbre,* 2e édition, n° 231.)

Voir aussi nos *Exercices d'Algèbre,* 5e édition, n° 1407, et nos *Compléments de Trigonométrie*, 3e édition, n° 441.

Le *Cours d'Algèbre élémentaire,* par E. COMBETTE, publié en 1893, étudie longuement le *problème de Pappus,* p. 486 à 501 ; n° 526.

Le *Cours développé d'Algèbre élémentaire,* par B. LEFEBVRE. S. J. (Tome II, p. 274, problème XVII), donne diverses solutions et l'historique de la question (p. 277). Voir en outre, la note ci-après, n° 1538.

B. Lefebvre, auteur d'ouvrages classiques très estimés, et d'une étude très remarquable sur l'*histoire des mathématiques*. (*Mathesis*, 1909. Supplément de 72 pages, sous le titre : *A propos d'une histoire des mathématiques*. (W.-W. Rouse-Ball.)

## § IV. — Relations numériques.

**322**. *Recherche des relations*. Pour découvrir ou démontrer les relations qui existent entre les diverses parties d'une figure donnée, on a recours aux figures semblables, aux propriétés du triangle rectangle ou à des relations préalablement établies.

**Problème.**

**323**. *Par un point fixe* A, *on mène une sécante* MAN *qui coupe les côtés d'un angle* XOY. *Quelle est la relation qui existe entre les distances* OM, ON ?

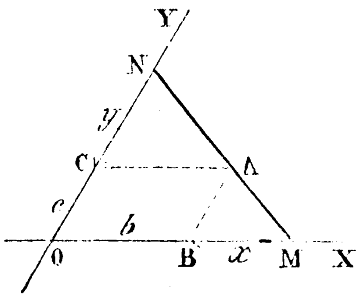



Fig. 224.

Puisque le point A est donné, on peut mener les parallèles AB, AC et chercher à exprimer OM . ON en fonction des longueurs connues $b$ et $c$.

Les triangles ABM, NOM sont semblables et donnent :

$$\frac{AB}{ON} = \frac{BM}{OM} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{ON} = \frac{OM - b}{OM};$$

d'où $\quad OM \,.\, ON = c \,.\, OM + b \,.\, ON \quad$ ou $\quad \dfrac{b}{OM} + \dfrac{c}{ON} = 1.$

**324**. *Remarque*. Les points B et C sont connus, on peut donc les prendre respectivement pour origine des distances BM ou $x$ et CN ou $y$, et l'on trouve une relation très simple entre $x$ et $y$.

Les triangles semblables ABM, NCA donnent :

$$\frac{AB}{x} = \frac{y}{AC} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{x} = \frac{y}{b};$$

d'où $$xy = bc.$$

Le produit des segments $x$ et $y$ est constant.

**Problème.**

**325**. *Du point milieu de la base* AB *d'un triangle isocèle, on décrit une demi-circonférence tangente aux deux autres côtés, une tangente* MN *coupe ces côtés ; trouver une relation entre les distances* AM *et* BN.

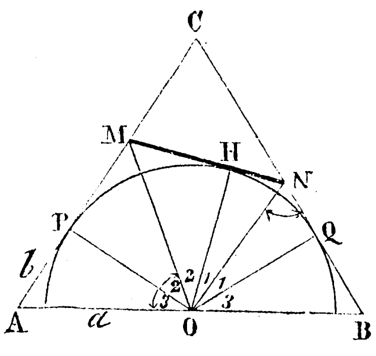



Fig. 225.

Les triangles AOM, BON sont équiangles.

En effet, les angles formés au point O sont égaux deux à deux :

$$1 = 1, \quad 2 = 2, \quad \text{et} \quad 3 = 3\,;$$

d'où $$1 + 2 + 3 = 1^{dr}.$$

Or l'angle N est le complément de 1 ; mais 1 est aussi le complément de $(3+2)$ ; donc $AOM = N$, et comme $A = B$, les deux triangles sont semblables, et on a :

$$\frac{AM}{AO} = \frac{OB}{BN}; \quad \text{d'où} \quad AM \,.\, BN = AO^2.$$

Ainsi le produit des distances AM, BN est constant.

### Problème.

**326.** *Lorsqu'on a deux points fixes* A *et* B *sur une circonférence, ainsi qu'une corde* EF *donnée de position et qu'on joint un point quelconque* C *de la circonférence aux deux points fixes, la corde* EF *est divisée en trois segments* EM, MN, NF; *trouver une relation entre ces trois segments.*

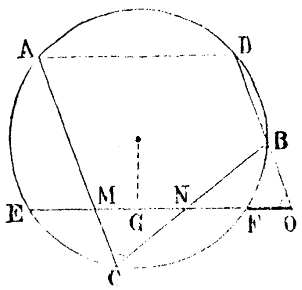


Fig. 226.

Par le point A, menons une parallèle à EF, joignons le point D au point B et prolongeons jusqu'à la rencontre avec EF.

Les triangles MCN, NBO sont équiangles, car les angles N sont égaux, et $C = O$.

En effet, $$C = \frac{1}{2}\,ADB,$$

$$O = \frac{1}{2}(EAD - BF) = \frac{1}{2}(EADB - DF) = \frac{1}{2}\,ADB\,;$$

donc $$\frac{MN}{CN} = \frac{NB}{NO}; \quad MN \,.\, NO = CN \,.\, NB.$$

Mais $$CN \,.\, NB = EN \,.\, NF,$$

donc $$EN \,.\, NF = MN \,.\, NO;$$

d'où $$\frac{EN}{MN} = \frac{NO}{NF}; \quad \text{d'où} \quad \frac{EN - MN}{MN} = \frac{NO - NF}{NF},$$

$$\frac{EM}{MN} = \frac{FO}{NF}; \quad \text{d'où} \quad \frac{EM \,.\, NF}{MN} = OF. \qquad (1)$$

Mais OF est une quantité constante pour les points donnés A et B; donc (1) exprime une relation entre les segments variables EM, MN, NF et une constante OF.

### Théorème d'Euler.

**327.** *Dans tout triangle* ABC *la distance* d *du centre du cercle inscrit, ayant* r *pour rayon, au centre du cercle circonscrit dont* R *est le rayon, est donnée par la relation*

$$d^2 = R(R - 2r).$$

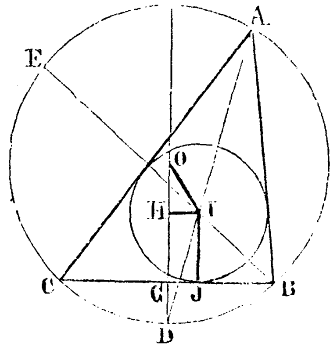


Fig. 227.

Soient $OI = d$; $OD = R$; $IJ = r$.

A cause des bissectrices AID, BIE, on a :

$$\text{arc } BD = CD\,; \quad \text{arc } AE = CE\,;$$

donc $$\text{l'arc } DCE = DB + AE,$$

et l'angle $$DBE = \text{angle } DIB\,;$$

d'où $$DB = DI.$$

Le diamètre DOF est perpendiculaire au milieu de BC ; donc

$$BD^2 \text{ ou } DI^2 = DG \cdot DF,$$
$$DI^2 = 2R \cdot DG.$$

Du point I, abaissons la perpendiculaire IH sur le diamètre DF ; nous aurons :

$$DI^2 = IO^2 + OD^2 - 2 \cdot OD \cdot OH ; \quad \text{mais} \quad DI^2 = 2R \cdot DG ;$$

donc $$2R \times DG = d^2 + R^2 - 2R(OG - r),$$

$$d^2 + R^2 = 2R(DG + OG - r) = 2R(R - r) = 2R^2 - 2Rr ;$$

d'où, en simplifiant et mettant R en facteur commun, on trouve :

$$d^2 = R(R - 2r).$$

*Autre démonstration :*

$$\begin{aligned} d^2 &= R^2 + DI^2 - 2R \cdot DH \\ &= R^2 + 2R \cdot DG - 2R \cdot DH \\ &= R^2 - 2R(DH - DG) \\ &= R^2 - 2Rr \\ &= R(R - 2r). \end{aligned}$$

**327 a. Th.** *En désignant par* $r_a$ *le rayon de cercle exinscrit tangent au côté* BC *ou* a, *et par* $d_a$ *la distance correspondante, on aurait :*

$$d_a^2 = R(R + 2r_a). \qquad (2)$$

**Note.** Le *Théorème d'Euler* a été publié en 1747. (D'après JACOBI, *Journal de Crelle* de 1828.) Voir *Nouvelles Annales de mathémathiques*, 1845, page 377, et les E. de G., nos 1183 *note* et 1185 *b*, 1°.

### Applications des relations.

**328.** Dans la méthode algébrique, les relations jouent un rôle analogue à celui que remplissent les lieux géométriques dans la résolution graphique des problèmes.

La formule obtenue établit une première équation entre les inconnues du problème. En voici quelques exemples :

### Problème.

**329.** *On donne deux tangentes à un cercle ; mener une troisième tangente telle que le segment intercepté sur cette ligne par les deux premières ait une longueur donnée* l.

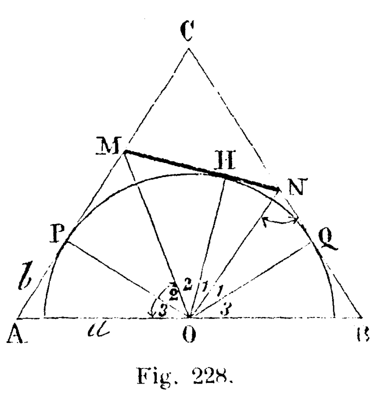



Fig. 228.

Menons le diamètre perpendiculaire à la droite OC, qui joindrait le centre au point de concours des tangentes.

Soient $AO = a$, $AP = BQ = b$, $PM = x$, $NQ = y$.

On sait que $MN = MP + NQ$,

donc $$x + y = l ; \qquad (1)$$

d'ailleurs $AM \cdot BN = a^2$, (no 325)

ou $$(x + b)(y + b) = a^2 ;$$

d'où $$xy + b(x + y) + b^2 = a^2.$$

Mais $$x + y = l,$$
donc $$xy = a^2 - b^2 - bl.$$

La question est ramenée à un problème connu, car on connaît la somme et le produit des inconnues (n° 296, et *Alg.*, n° 231).

### Problème.

**330.** *On donne une circonférence, une corde fixe* EF *et deux points* A, B *sur la circonférence; trouver, sur la courbe, un point* C, *tel que les droites* AC, BC *interceptent sur la corde* EF, *à partir du point milieu* G *de cette corde, des segments* GM, GN *dont le produit égale un carré donné* k².

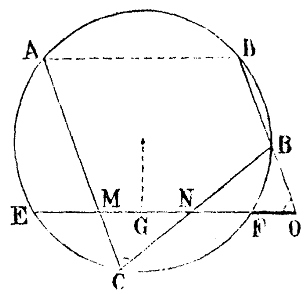


Fig. 229.

Employons la relation connue (n° 326) :

$$\frac{\text{ME} \cdot \text{NF}}{\text{MN}} = \text{FO}.$$

Soient $\text{GE} = \text{GF} = a$, $\text{FO} = b$, $\text{MG} = x$ et $\text{GN} = y$.

On a : $$\frac{(a - x)(a - y)}{x + y} = b. \qquad (1)$$

et $$xy = k^2; \qquad (2)$$

(1) devient $$a^2 - a(x + y) + xy = b(x + y).$$

Remplaçons $xy$ par sa valeur $k^2$; nous obtiendrons :

$$x + y = \frac{a^2 + k^2}{a + b}. \qquad (3)$$

La question peut être regardée comme résolue, car (2) et (3) font connaître la somme et le produit des deux inconnues. (*Algèbre*, n° 231, et *Exercices de Géométrie*, n° 296.)

*Construction.* Prenons $\text{HI} = \text{GF} = a$, $\text{IJ} = \text{FO} = b$, la perpendiculaire $\text{IK} = k$; on aura $\text{HK}^2 = a^2 + k^2$.

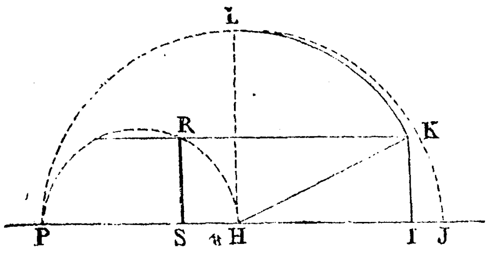


Fig. 230.

Reportons HK de H en L. Décrivons une demi-circonférence ayant son centre sur HJ et passant par L et J; on aura :

$$\text{PH} = \frac{\text{HL}^2}{\text{HJ}} = \frac{a^2 + k^2}{a + b} = \text{donc PH} = x + y;$$

puis coupons la demi-circonférence PH par la parallèle KR; nous aurons PS et SH pour les segments demandés, car $\text{PS} \cdot \text{SH} = k^2$.

**331.** *Remarque.* On a résolu d'une manière très simple les problèmes où l'on demandait qu'on eût $MN = l$ ou $MG = GN$ (nos 101, 102, 275 et 276, *Remarque*); néanmoins il est utile d'examiner la solution que donne la relation connue (no 326) :

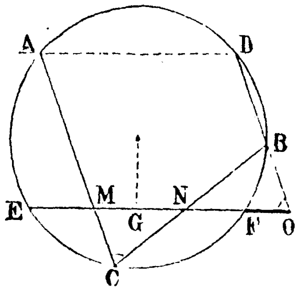


Fig. 231.

$$\frac{ME \cdot NF}{MN} = FO = b. \qquad (1)$$

1° *Soit à trouver :* $MN = l$.
On a (fig. 231) :

$$ME + NF = 2a - MN = 2a - l. \qquad (2)$$

Puis (1) devient : $\dfrac{ME \cdot NF}{l} = b;$

d'où $$ME \cdot NF = bl. \qquad (3)$$

(2) et (3) donnent encore la somme et le produit des inconnues.

2° *Soit à trouver :* $MG = GN$;

d'où $EM = NF$.

La relation (1) devient : $\dfrac{ME^2}{2a - 2ME} = b.$

Équation du second degré que l'on sait résoudre et construire.

3° *Soit à trouver :* $MG - GN = d$.

d'où $NF - EM = d$, $NF = EM + d$;

Ainsi $MN = 2a - EM - (EM + d) = 2a - 2EM - d$.

La relation (1) devient :

$$\frac{ME(ME + d)}{2a - 2ME - d} = b.$$ Équation du second degré.

4° Pour $\dfrac{MG}{GN} = \dfrac{m}{n}$, on trouve : $MG = NG\dfrac{m}{n}$,

$$MN = MG + GN = GN\frac{m}{n} + GN = GN \cdot \frac{m + n}{n},$$

$$EM = a - MG = a - GN \cdot \frac{m}{n} = \frac{na - mGN}{n}.$$

La relation (1) devient :

$$\frac{(na - mGN)(a - GN)}{GN(m + n)} = b.$$

Équation du second degré.

**Problèmes d'Apollonius.**

**332.** *Sur deux droites concourantes* OX, OY, *on donne deux points fixes* D, F. *Par un point* A, *mener une sécante* MAN *de manière qu'on ait une des relations suivantes.*

**a.** *Problème de la section de raison.* Les segments DM, FN doivent être dans une raison donnée, c'est-à-dire dans un rapport donné $\dfrac{m}{n}$.

Prenons BM, CN pour inconnues; on aura la relation générale (n° 324)

$$xy = bc; \qquad (1)$$

puis $\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{FN}}$ ou $\frac{d+x}{f+y} = \frac{m}{n}$;

d'où $\quad nd + nx = mf + my. \qquad (2)$

On peut regarder le problème comme résolu, car (1) est du second degré et (2) n'est que du premier.

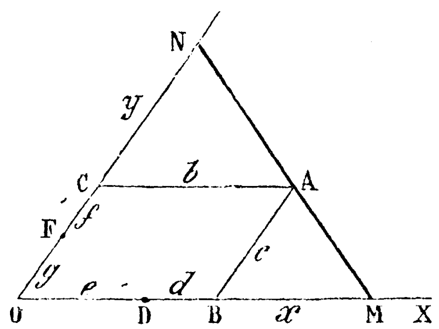


Fig. 232.

**b.** *Problème de la section de l'espace.* Le produit des distances DM, FN doit égaler un carré donné $k^2$.

On a donc :

$$(d+x)(f+y) = k^2, \quad df + dy + fx + xy = k^2;$$

mais $xy = bc$ (n° 324); donc

$$fx + dy = k^2 - bc - df. \qquad (3)$$

Les équations (1) et (3) donnent la solution.

**333.** *Autres problèmes.* Il est facile de proposer plusieurs autres questions.

(e) *On veut avoir :* $\quad \mathrm{DM} + \mathrm{FN} = l,$

ou $\quad d + x + f + y = l, \quad$ d'où $\quad x + y = l - d - f. \qquad (4)$

(4) et (1) donnent la somme et le produit des racines.

(d) $\quad \mathrm{DM} - \mathrm{FN} = l,$

$$d + x - (f + y) = l, \quad \text{d'où} \quad x - y = l - d + f. \qquad (5)$$

(e) $$\frac{\mathrm{OD}\,.\,\mathrm{OM}}{\mathrm{OF}\,.\,\mathrm{ON}} = \frac{m}{n},$$

ou $$\frac{e(x+b)}{g(y+c)} = \frac{m}{n}. \qquad (6) \text{ Premier degré.}$$

**334. Note.** Nous croyons utile de donner ici un troisième problème célèbre d'Apollonius (n° 334 a), bien qu'il ne se rapporte point à la relation utilisée pour les deux premiers.

Nous conservons les dénominations données par APOLLONIUS. — ($a$) est nommé *section de raison,* parce qu'il faut que les segments soient dans un *rapport* ou dans une *raison* donnée; ($b$) est nommé *section de l'espace,* parce que le produit est un carré, c'est-à-dire une surface. Le troisième problème (n° 334 a) est appelé *section déterminée,* parce que le rapport des produits est une quantité connue.

### Problème de la section déterminée.

**334 a.** *Étant donnés quatre points en ligne droite, on demande de déterminer un cinquième point, tel que le produit de ses distances à deux des points donnés soit au produit des distances aux deux autres dans un rapport donné* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$.

Soient A, B, C, D les points donnés, X le point cherché.

Rapportons tous les points à une origine commune ; l'un d'eux pourrait être pris comme point de départ, mais, pour plus de généralité, prenons un point quelconque O.


Fig. 233.

Soient $OA = a$, $OB = b\ldots$, $OX = x$.

D'après l'énoncé, on a : $\dfrac{AX \cdot BX}{CX \cdot DX} = \dfrac{m}{n}$,

c'est-à-dire, en remplaçant AX par $x - a\ldots$, DX par $x - d$ :

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} = \frac{m}{n}.$$

Équation du second degré que l'on sait résoudre et discuter, car elle n'est qu'un cas particulier de l'équation connue

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = y. \quad (E.\ d'A.,\ 5^e\ \text{édit., p. 260.})$$

Il y a donc deux solutions, une seule ou aucune, suivant le cas. On sait déterminer, quand il y a lieu, le maximum et le minimum de $y$, c'est-à-dire de $\dfrac{m}{n}$.

En un mot, on connaît entre quelles limites $\dfrac{m}{n}$ peut varier pour des longueurs connues $a$, $b$, $c$, $d$.

Lorsque les segments AB et CD empiètent l'un sur l'autre, c'est-à-dire quand le point B, par exemple, se trouve entre C et D, il n'y a ni maximum ni minimum.

**334 b. Note.** APOLLONIUS a publié trois traités : *De Sectione rationis* (de la section de raison), *De Sectione spatii* (de la section de l'espace) et *De Sectione determinata* (de la section déterminée). Ce dernier contenait quatre-vingt-une propositions.

HALLEY a traduit le premier des trois traités, et il a rétabli le second d'après les indications de PAPPUS. (Voir *Aperçu historique,* pages 21, 41, 154 ; et *Géométrie supérieure,* nos 281, 296 et 298.)

Les trois *Problèmes d'Appollonius* comprenaient un grand nombre de propositions, parce que les anciens démontraient directement chaque cas, chaque variété, chaque figure différente d'une même question. Les généralisations algébriques et analytiques n'étaient point connues : il fallait donc étudier laborieusement les diverses particularités que pouvaient présenter un théorème ou un problème proposés.

Le problème de la *section déterminée* revient au suivant : *Sur la ligne des centres de deux circonférences données déterminer un point dont les puissances, relatives à chaque cercle, soient dans un rapport donné* $\dfrac{m}{n}$.

Car $(x-a)(x-b)$ est la puissance du point cherché X au cercle décrit sur AB comme diamètre. (G., n° 829.)

* HALLEY, né à Londres en 1656 ; mort en 1724 ; célèbre astronome, prédit le retour de la comète qui porte son nom. Comme géomètre, il est connu par son édition du *Traité des coniques d'Apollonius* et par le rétablissement ou la publication des traités *De Sectione spatii* et de *De Sectione rationis,* du même auteur.

# VII

## MAXIMA ET MINIMA

**335**. *Définition.* On appelle *variable* une quantité qui peut passer successivement par différents états de grandeur.

Deux variables sont *fonction* l'une de l'autre, lorsque la variation de l'une entraîne la variation de l'autre.

La *variable indépendante* est celle à laquelle on attribue des valeurs arbitraires; l'autre se nomme *variable dépendante* ou fonction de la première.

Lorsqu'une fonction, variant d'une manière continue, diminue après avoir augmenté, elle passe par une valeur plus grande que les valeurs qui la précèdent et qui la suivent immédiatement : cette valeur est dite un *maximum;* au contraire, si, après avoir diminué, la fonction augmente, elle passe par une valeur plus petite que les valeurs voisines : cette valeur est un *minimum.*

**Note.** D'après les exemples donnés par divers auteurs, nous écrivons : les *maxima* et les *minima;* le *maximum* et le *minimum* d'une quantité; un rectangle de périmètre *maximum* ou *minimum ;* un rectangle de surface *maxima* ou *minima.* Plusieurs auteurs écrivent : les *maximums* et les *minimums,* et n'emploient jamais ces mots comme qualificatifs.

Voir à ce sujet un article de l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1898, page 185, nº 1241.

**336**. *Méthode algébrique.* La méthode la plus générale et la plus féconde pour déterminer le *maximum* ou le *minimum* d'une quantité, consiste à traiter la question par l'algèbre, et à discuter le résultat d'après les règles connues (*Alg.,* nº 283); mais il convient de réserver cette méthode pour les exercices proposés dans le cours d'algèbre.

*Sans recourir aux équations,* on peut résoudre d'une manière très simple un grand nombre de questions géométriques, relativement au *maximum* ou au *minimum* qu'elles peuvent présenter.

### § I. — Solution limite.

**337**. Pour déterminer la solution limite que peut comporter un problème, on résout ce problème pour une *valeur particulière,* et l'on examine pour quelle valeur ou quelle position spéciales le problème cesse d'être possible.

**Problème.**

**338**. *Dans un cercle donné, inscrire le triangle isocèle dont la somme de la base et de la hauteur a une valeur maxima.*

Examinons en premier lieu si la question comporte un maximum.

Pour une base infiniment rapprochée du sommet B, la somme de la base et de la hauteur est nulle; puis elle prend une certaine valeur quand la base s'éloigne du sommet B. La somme devient égale à 3R, quand la base passe par le centre; mais plus loin elle diminue, car elle se réduit à 2R lorsque la base est à l'extrémité du diamètre mené par le sommet B. Entre ces deux positions, la somme atteint donc une certaine valeur maxima.

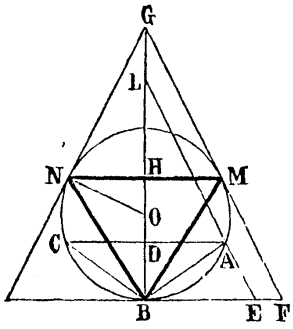


Fig. 234.

*Construction*. Lorsque la somme doit avoir une longueur déterminée $l$, on fait la construction connue (nº 211). On prend $BL = l$, $BE = \frac{l}{2}$, et la droite EL détermine les points A et A' qui donnent deux triangles isocèles répondant à la question.

*Donc le maximum sera donné par la tangente* FMG *parallèle à* EL.

La somme $$BH + MN = BG.$$

*Valeur du maximum*. Les triangles ONG, FBG sont semblables; donc

$$NG = 2NO = 2R, \quad \text{car} \quad BG = 2BF,$$

$$OG = R\sqrt{5}, \quad \text{et} \quad BG = R(1 + \sqrt{5}).$$

**Problème.**

**339.** *Dans un cercle, inscrire le rectangle de périmètre maximum*, ou même : *Dans une ellipse, mener deux parallèles équidistantes d'un diamètre donné, de manière que le parallélogramme inscrit ait un périmètre maximum.*

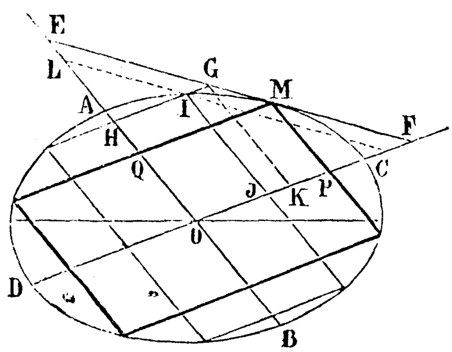


Fig. 235.

On sait que les côtés d'un parallélogramme inscrit sont parallèles à deux diamètres conjugués; menons donc le conjugué DC du diamètre donné AB et une tangente EMF qui détermine un triangle isocèle; le point M est le sommet demandé.

En effet, d'après une propriété connue du triangle isocèle (nº 19), on a :

$$MQ + MP = GH + GK,$$

donc $$MP + MQ > IJ + IH, \text{ etc.}$$

*Remarque*. La question précédente peut être considérée comme n'étant qu'un cas particulier de la suivante.

**Problème.**

**340.** *On donne deux droites et une courbe; par chaque point de la courbe on mène des parallèles aux droites données; étudier les variations de la somme des parallèles ainsi menées.*

Prenons deux longueurs égales OA, OB; le triangle AOB sera isocèle et donnera :

$$DE + DF = OB.$$

Pour avoir le maximum et le minimum, il faut mener des tangentes parallèles à BA.

M correspond au maximum.

$$MP + MQ = OR.$$

Pour le point D la somme diminue.

Le point de contact N donne le minimum.

Pour le point J, on a :

$$JI - JL = OK.$$

Pour les points d'intersection, tels que H, une des lignes est nulle.

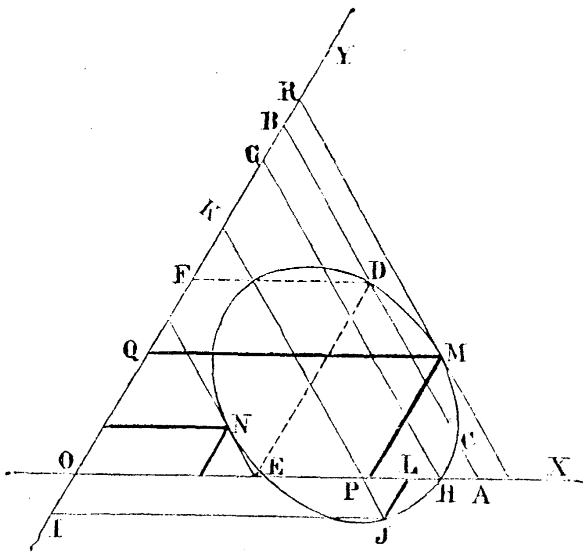


Fig. 236.

*Remarque.* On procède d'une manière analogue lorsqu'on abaisse des perpendiculaires de chaque point de la courbe sur OX et OY.

**Problème.**

**341.** *On donne de grandeur et de position une circonférence et une droite limitée* CD. *Pour quel point* A *de la circonférence l'angle* CAD *est-il maximum ou minimum ?*

Pour obtenir un angle CAD ayant une grandeur donnée, il faudrait décrire sur CD un arc de segment capable de l'angle donné.

Or l'arc de segment tangent à la circonférence aura, suivant les cas, le plus petit rayon ou le plus grand rayon, parmi les arcs menés par C et D et qui rencontreront la circonférence. On obtiendra donc un maximum ou un minimum.

Il est intéressant d'examiner les principaux cas de cette question.

1° La droite CD est extérieure, et son prolongement coupe la circonférence sur laquelle doit se trouver le sommet (fig. 237).

Par C et D décrivons des circonférences tangentes à la circonférence donnée AB.

Au point A, l'angle est nul; quand le sommet s'élève sur la circonférence, l'angle augmente; le maximum a lieu au point O, puis l'angle diminue jusqu'au point B, où il devient nul, augmente de nouveau : il y a un second maximum en O′, et diminue jusqu'au point A.

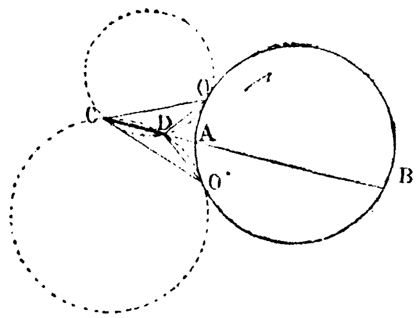


Fig. 237.

2° Quand le prolongement de CD ne rencontre pas la circonférence AB (fig. 238), le maximum a lieu au point O; puis l'angle diminue; il arrive à son minimum en O', et augmente de nouveau jusqu'au point O.

3° Quand le prolongement de DC est tangent, le point de contact O' donne un angle nul; puis l'angle augmente jusqu'au point de contact O de la circonférence menée par C et D et tangente à la circonférence : là a lieu le maximum; puis l'angle diminue jusqu'au point de contact du prolongement de la droite.

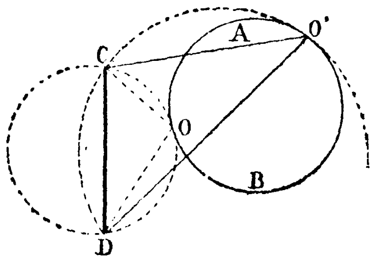



Fig. 238.

4° Quand le contact O de CD et de la circonférence que doit décrire le sommet a lieu entre C et D, l'angle égale deux droits en O; puis il diminue, atteint le minimum en O', point de contact intérieur du cercle donné et de celui qu'on peut mener par D et C, etc.

5° Lorsque la circonférence donnée coupe CD (entre C et D), l'angle est nul pour le point où le prolongement de CD coupe de nouveau la circonférence; puis il augmente jusqu'au point où CD coupe la même circonférence : là il égale deux droits, et diminue jusqu'à zéro.

6° Enfin, quand la circonférence coupe deux fois CD entre C et D, il y a deux minima, et les points d'intersection correspondent à deux droits.

## § II. — Emploi des principes.

**342.** En géométrie, de même qu'en algèbre, on peut s'appuyer sur quelques *principes* que l'on invoque fréquemment dans les questions de maxima et de minima.

Il est facile de démontrer ces principes, ou, du moins, de les justifier par des voies purement géométriques, car il suffit d'étudier les variations de quelques figures connues.

### Premier principe.

**343.** *Le produit de deux facteurs, dont la somme est constante, est maximum lorsque ces facteurs sont égaux entre eux.*

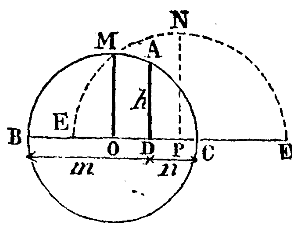



Fig. 239.

En effet, sur BC, somme constante des deux facteurs linéaires, $m$ et $n$, décrivons une demi-circonférence. On sait que l'on a :

$$mn = h^2 \qquad \text{(G., n° 256)};$$

donc le maximum du produit a lieu quand les facteurs BO, OC sont égaux; car alors

$$BO \cdot OC = MO^2,$$

or

$$MO > AD.$$

**343 a. Note.** Il faut que les deux facteurs puissent devenir égaux, ainsi que vient de le rappeler avec exemples à l'appui, M. C. Burali-Forti, de Turin, dans *L'Enseignement Mathématique* (1910, p. 512).

Même remarque pour tous les cas analogues.

**Deuxième principe.**

**344.** *La somme de deux facteurs, dont le produit est constant, est minima quand ces facteurs sont égaux.*

Ce principe se déduit du précédent. En effet, soit $MO^2$ le produit constant. Quand les facteurs sont égaux, on a BC ou 2MO pour somme. Mais quand ils sont inégaux, on peut les considérer comme obtenus par une demi-circonférence EMNF qui passerait par M (fig. 239), car on a :

$$EO \cdot OF = OM^2.$$

Mais $$EF = 2PN, \quad \text{or} \quad PN > OM;$$

donc on a : $$BC < EF.$$

**Troisième principe.**

**345.** *Le produit de deux facteurs, dont la somme des carrés est constante, est maximum quand ces facteurs sont égaux entre eux.*

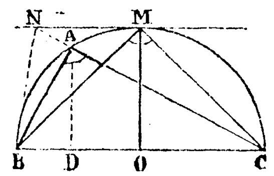


Fig. 240.

On peut considérer les deux facteurs AB, AC comme les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse égale la racine carrée de la constante, car on a : $$AB^2 + AC^2 = BC^2 = MB^2 + MC^2.$$

Mais le produit $$AB \cdot AC = BC \cdot AD,$$

tandis que $$MB \cdot MC = BC \cdot MO,$$

or $$MO > AD,$$

donc le produit MB . MC est plus grand que AB . AC.

On en déduit le principe réciproque suivant :

**Quatrième principe.**

**346.** *La somme des carrés de deux facteurs, dont le produit est constant, est minima lorsque ces facteurs sont égaux.*

La démonstration directe de cette réciproque est d'ailleurs très simple. Par le point M (fig. 240), menons une parallèle à la base BC, prolongeons CA et joignons BN.

Les triangles BMC, BNC sont équivalents, car ils ont même base et même hauteur, donc $$BM \cdot MC = BA \cdot NC.$$

Mais $$BM^2 + MC^2 = BA^2 + AC^2,$$

donc $$BM^2 + MC^2 < BA^2 + NC^2.$$

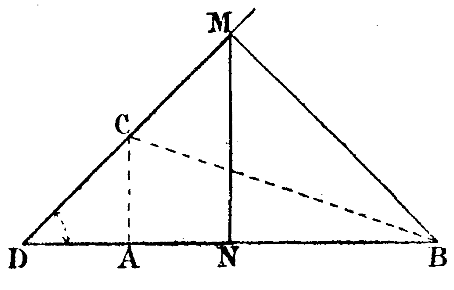


Fig. 241.

*Remarque.* Cela revient à déterminer *le minimum de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont la somme des côtés de l'angle droit est constante.*

Soit BCA un de ces triangles (fig. 241); prenons $AD = AC$, l'angle BDC vaut 45°; le lieu de C est la droite DM; donc le minimum de l'hypoténuse est la perpendiculaire BM.

Alors $$NM = NB.$$

### Cinquième principe.

**346 a.** *La somme de deux segments rectilignes, dont la somme des carrés est constante, est maxima lorsque les segments sont égaux.*

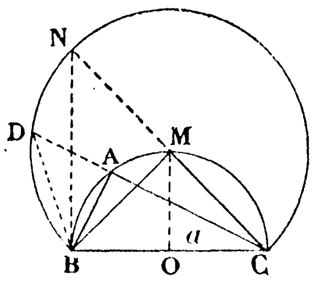


Fig. 241 *bis*.

Soient $AB^2 + AC^2 = a^2$.

En prenant $AD = AB$, la somme des segments, ou AD, est la corde d'un arc capable d'un angle de 45°, et dont M est le centre.

Le maximum de la somme des segments est donné par le diamètre CMN; donc le maximum de la somme a lieu quand les segments BM, CM sont égaux.

### Sixième principe.

**346 b.** *La somme des carrés de deux segments rectilignes, dont la somme des longueurs est constante, est minima lorsque les segments sont égaux.*

Soit $2l$ la longueur constante de la somme des segments; désignons les segments par $(l + x)$ et $(l - x)$.

La somme des carrés est $2l^2 + 2x^2$; le minima a lieu pour $x = 0$, donc les segments doivent être égaux.

### Septième principe.

**347.** *Lorsque deux variables, affectées de coefficients, ont une somme constante, le maximum du produit de ces variables a lieu, quand ces dernières quantités sont inversement proportionnelles à leurs coefficients respectifs.*

Soit
$$ax + by = l. \qquad (1)$$

Le maximum de $xy$ a lieu pour $\frac{x}{b} = \frac{y}{a}$.

En effet, posons $xy = k^2$, puis éliminons une des inconnues, $y$ par exemple; on trouve :

$$x = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4abk^2}}{2a}.$$

Le radical s'annule pour $k^2 = \frac{l^2}{4ab}$,

d'où
$$x = \frac{l}{2a}, \quad y = \frac{l}{2b}, \quad xy = \frac{l^2}{4ab}; \qquad (2)$$

donc
$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{b} = \frac{y}{a}.$$

*Vérification.* Examinons le produit obtenu en posant :

$$x = \frac{l + c}{2a}, \quad y = \frac{l - c}{2b}.$$

…n imposée (1) est vérifiée, or

$$xy = \frac{l^2 - c^2}{4ab}.$$

…ent le maximum a lieu quand $c$ est nul.

*Remarque.* En vue des applications ultérieures, posons $l = 2S$ ; on a :

$$x = \frac{S}{b}, \quad \text{et} \quad y = \frac{S}{a}. \qquad (3)$$

**Huitième principe.**

**348.** *Lorsque deux variables, affectées de coefficients, ont une somme constante, le minimum de la somme des carrés de ces variables a lieu quand ces dernières quantités sont proportionnelles à leurs coefficients respectifs.*

Soit $$ax + by = l. \qquad (1)$$

Le minimum de $x^2 + y^2$ a lieu quand on a :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

En effet, posons $x^2 + y^2 = k^2$, puis éliminons une des inconnues, en procédant comme ci-dessus ; on reconnaît que le radical s'annule pour

$$k^2 = \frac{l^2}{a^2 + b^2}; \quad \text{alors} \quad x = \frac{al}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{bl}{a^2 + b^2};$$

d'où $$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = \frac{l^2}{a^2 + b^2}. \qquad (2)$$

*Vérification.* En prenant des valeurs qui vérifient la relation (1), par exemple $$x = \frac{al + bc}{a^2 + b^2}, \quad \text{et} \quad y = \frac{bl - ac}{a^2 + b^2},$$

on trouve, toutes réductions faites :

$$x^2 + y^2 = \frac{l^2 + c^2}{a^2 + b^2};$$

donc le minimum a bien lieu quand $c$ est nul et que l'on prend :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

*Remarque.* Pour les applications ultérieures, on peut poser $l = 2S$.

Dans ce cas : $$x = \frac{2aS}{a^2 + b^2}, \quad \text{et} \quad y = \frac{2bS}{a^2 + b^2}. \qquad (3)$$

**Problème.**

**349.** *Dans un triangle isocèle rectangle, inscrire le rectangle de surface maxima.*

1° On sait que pour chaque point de la base d'un triangle isocèle, la somme des perpendiculaires abaissées sur les autres côtés est constante ; donc

$$MP + MQ = DE + DF;$$

donc, d'après le premier principe, le rectangle MPAQ est maximum lorsque les côtés MP, MQ sont égaux ; par suite, le rectangle maximum a pour sommet le milieu M de l'hypoténuse.

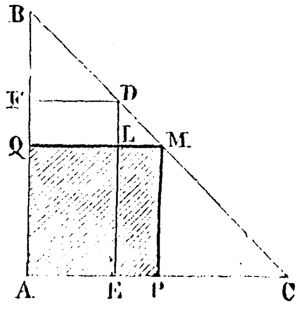


Fig. 242.

**2° On peut encore dire :**

Les rectangles MPAQ, DEAF ont une partie commune; il suffit de comparer MPEL à DLQF.

Or les hauteurs ML, DL sont égales, tandis que

$$MP \text{ ou } MQ > LQ,$$

donc

$$MPEL > DLQF.$$

Ainsi le carré MPAQ est le rectangle maximum.

**Problème.**

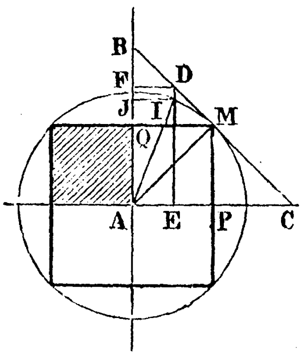



Fig. 243.

**350.** *Dans un cercle donné, inscrire le rectangle de surface maxima.*

1° D'après le problème précédent, on peut mener la tangente BC de manière à former un triangle rectangle isocèle, et le milieu M de l'hypoténuse sera le point de contact.

On aura, en envisageant le quart de la surface,

$$\text{surface } APMQ > AEDF,$$

donc *a fortiori* $> AEIJ$.

2° On peut encore dire :

$$IE^2 + IJ^2 = R^2 = MP^2 + MQ^2,$$

donc le maximum a lieu quand les facteurs sont égaux (3e principe, n° 345).

*Remarque.* Le rectangle inscrit maximum est un carré, soit pour le triangle rectangle isocèle, soit pour le cercle.

**Problème.**

**351.** *Par le sommet* M *d'un parallélogramme* AMPQ, *mener une droite* BMC *de manière que le triangle* BAC *soit minimum.*

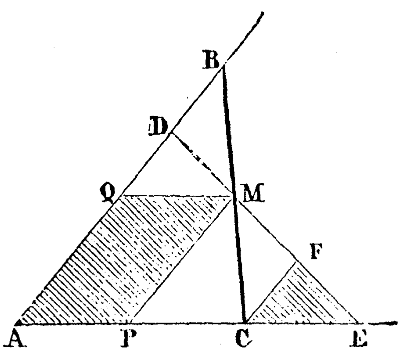



Fig. 244.

Considérons deux sécantes : l'une quelconque DME, et l'autre BMC, dont le point M est le milieu; cette dernière donne le *minimum*.

En effet, menons CF parallèle à BD.

A cause de $BM = MC$, les deux triangles MBD, MCF sont égaux. Donc le triangle ABC est équivalent à ADFC.

Donc $$ABC < ADE.$$

**351 a.** Ainsi : *Le triangle circonscrit* ABC *est minimum lorsque la base* BC *est divisée en deux parties égales par le sommet du parallélogramme.*

Remarque. *A toute question de maximum répond une question de* ***minimum****, et réciproquement*, on pourrait donc tirer de l'exemple ci-dessus la conclusion suivante :

**351 b. Th.** *Le parallélogramme* APMQ, *inscrit dans un triangle* ABC, *est maximum lorsque son sommet* M *est au milieu de la base.*

Ce théorème a d'ailleurs été déjà donné comme application de la méthode de *modification des ordonnées* (n° 201), et déduit aussi d'un problème résolu par la *Méthode algébrique* (n° 203 *d, Remarque*).

Mais l'emploi très fréquent que nous en ferons exige quelques nouveaux détails.

**Problème.**

**352.** *Dans un triangle quelconque inscrire le rectangle maximum.*

*Deux des sommets du rectangle doivent être sur la base du triangle, et les deux autres sommets sur les côtés.*

1° Fig. (*a*). Pour un triangle rectangle BAC, dont les côtés AB, AC pourraient être inégaux, le rectangle maximum est donné par le point milieu M de BC.

Surface $\quad \text{APMQ} = \frac{1}{2}\,\text{ABC}.$

2° Fig. (*b*). D'après le théorème relatif à la modification des ordonnées (n° 201), le parallélogramme maximum ALMQ est donné par le point milieu M de BC; d'ailleurs, comme on peut le vérifier directement, on a $\text{ALMQ} = \frac{1}{2}\,\text{ABC}$, ainsi qu'on le déduirait du n° 201. Or le rectangle RPMQ est équivalent au parallélogramme; donc, *pour un triangle quelconque,* le rectangle maximum a deux de ses sommets aux points milieux des deux côtés.

Sa surface est la moitié de celle du triangle.

En menant la hauteur on aurait pu dire, d'après le premier cas, le rectangle RHIQ est maximum pour AHB, et il égale sa moitié; de même HPMI est maximum pour HCB et égale sa moitié; donc RPMQ est maximum pour ABC et égale sa moitié.

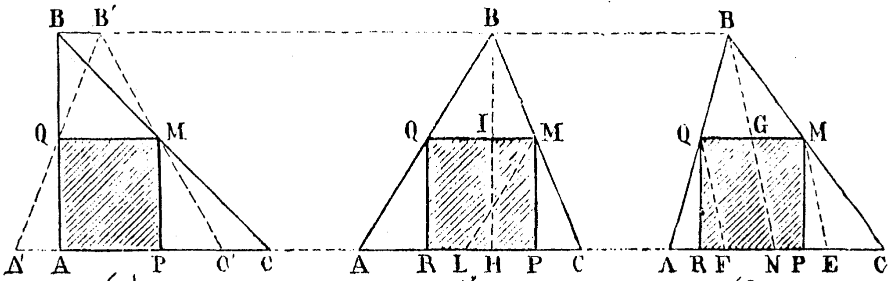



Fig. 245.

3° Fig. (*c*). On peut encore arriver au résultat précédent par une voie qui sera très utile pour l'étude des figures inscrites dans les courbes à diamètres rectilignes. Menons la médiane BN (fig. *c*) et les parallèles ME et QF. Chacun des parallélogrammes NEMG, FNGQ, égaux entre eux, est maximum pour le triangle correspondant; mais le rectangle RPMQ est équivalent au parallélogramme FEMQ; donc le rectangle est maximum.

*Remarques.* 1° Pour un triangle donné ABC, en prenant successivement chaque côté pour base, on obtient trois rectangles équivalents entre eux, car *chaque rectangle maximum est la moitié du triangle.*

2° Tous les triangles circonscrits au rectangle (fig. *a*) et ayant même hauteur ont aussi même base, car cette ligne égale 2MQ; ils sont équivalents entre eux et correspondent au triangle minimum circonscrit.

## § III. — Variable regardée comme constante.

**353.** Lorsqu'il y a plus de deux variables, trois, quatre, par exemple, on peut regarder momentanément une ou plusieurs de ces variables comme étant constantes, afin de ne conserver que deux quantités variables; on cherche le maximum ou le minimum relatifs qui peuvent résulter de ces deux variables, puis on en déduit le maximum ou le minimum réels qu'entraîne l'ensemble des variables.

**Problème.**

**354.** *Dans un demi-cercle, inscrire le quadrilatère de surface maxima, le diamètre du demi-cercle étant un des côtés du quadrilatère.*

Soit un quadrilatère quelconque AECB. Admettons que BC ne change point. Les variations de la surface ne peuvent dépendre que du déplacement du sommet E sur l'arc AEDC; or le maximum du triangle ADC a lieu quand D est au milieu de l'arc, car alors la flèche DH est plus grande que EF; ainsi le *maximum relatif exige que les cordes* AD *et* DC *soient égales entre elles.*

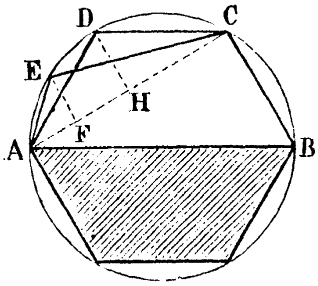


Fig. 246.

Pour la même raison, il faut que C soit le milieu de l'arc DCB; donc le maximum a lieu quand les trois cordes sont égales.

*Remarques.* 1° Le quadrilatère ADCB est la moitié de l'hexagone régulier inscrit.

2° Quelle que soit la corde donnée AB, le maximum a lieu lorsque les trois cordes variables sont égales entre elles.

3° On démontre de la même manière que le triangle inscrit de surface maxima est équilatéral.

**Théorème.**

**355.** *Dans un cercle donné, et pour un nombre donné de côtés, le polygone régulier inscrit est celui dont la surface est maxima.*

En effet, si deux cordes AB et BC n'étaient point égales entre elles, on augmenterait la surface du triangle formé par ces deux cordes et la diagonale AC en prenant le point milieu de l'arc; donc les cordes prises deux à deux doivent être égales, le polygone maximum est régulier.

**Théorème.**

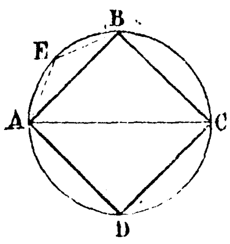


Fig. 247.

**356.** *De deux polygones réguliers inscrits dans le même cercle, celui qui a le plus grand nombre de côtés est maximum.*

En effet, soit, par exemple, un carré ABCD.

Le pentagone AEBCD a une surface plus grande; or le pentagone régulier a une plus grande surface que AEBCD; donc le pentagone régulier inscrit est maximum par rapport au carré, etc.

**Problème.**

357. *Inscrire dans un demi-cercle, en prenant pour base le diamètre, le quadrilatère de périmètre maximum.*

En regardant un côté BC comme invariable, il suffit de considérer AE et EC, ou leurs moitiés EF, EG obtenues en abaissant du centre des perpendiculaires sur les cordes. Menons la tangente au point milieu D de l'arc. Or on sait que pour chaque point de IJ la somme des perpendiculaires est constante ; donc

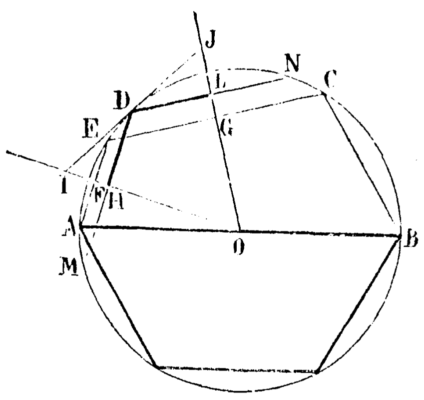



Fig. 248.

$$DH + DL > EF + EG,$$

puisque E est dans l'intérieur de IOJ (nos 339 et 340).

Ou $$DM + DN > AE + EC.$$

Mais les arcs AEC, MDN sont égaux ; donc, pour deux arcs dont la somme est constante, la somme des cordes est maxima lorsque les arcs sont égaux.

Donc le *quadrilatère inscrit a le périmètre maximum lorsque les trois côtés variables sont égaux entre eux.* On retombe ainsi sur le demi-hexagone régulier (no 354).

*Remarque.* Pour un nombre donné de côtés, le polygone régulier inscrit a le périmètre maximum.

**Problème.**

358. *Trouver un point dans l'intérieur d'un triangle, tel que la somme des carrés de ses distances aux trois sommets soit minima.*

Admettons que la somme des carrés de AG et de CG soit constante.

On sait que le lieu des points G est une circonférence ayant pour centre le point milieu D de AC ; car le théorème du carré de la médiane (G., no 254) donne :

$$AG^2 + CG^2 = 2AD^2 + 2DG^2.$$

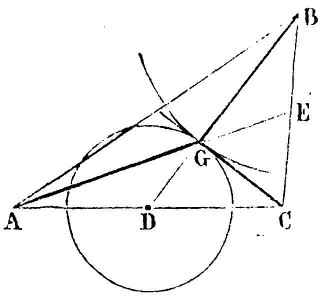



Fig. 249.

La variation de la somme demandée ne peut dépendre que de la position du point G sur la circonférence ; or la plus courte distance du sommet B à la circonférence est donnée par la ligne des centres BD ; donc le point G se trouve sur la médiane de BD. Pour une raison analogue, en regardant la somme $BG^2 + CG^2$ comme constante, le point demandé est sur la médiane AE ; donc *le point de concours des médianes donne la somme minima.*

*Remarque.* Un calcul facile donne :

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{AB^2 + BC^2 + AC^2}{3}.$$

## § IV. — Emploi de la Tangente.

**359**. Lorsqu'on donne une courbe quelconque et deux droites OX, OY (fig. 250), on peut demander le *maximum* ou le *minimum* du parallélogramme formé en menant par un point de la courbe deux droites parallèles aux axes, ou, ce qui revient au même, on peut demander le *minimum* ou le *maximum* du triangle MON, déterminé par une tangente MN à la courbe.

*Dans tous les cas possibles, le maximum ou le minimum sont donnés par une tangente* MCN *divisée en deux parties égales par le point de contact* C.

*Remarque*. La solution indiquée ci-dessus est générale; mais on doit se rappeler que le problème qui consiste à mener la tangente ne peut pas toujours être résolu géométriquement, quand on n'emploie que la règle et le compas (nº 317, **b**).

### Problème.

**360**. *On donne une courbe et deux droites. Quel est le parallélogramme inscrit maximum?*

Menons la tangente MCN telle que le point C soit le milieu de MN. Le parallélogramme OPCQ est maximum. En effet :

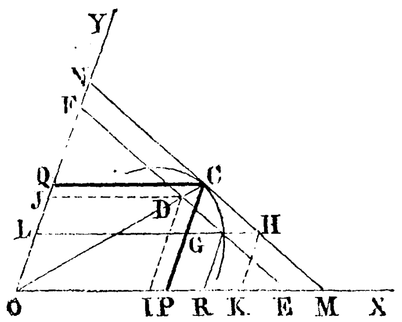



Fig. 250.

1re *Démonstration*. Pour tout autre point G, on a :

$$\text{ORGL} < \text{OKHL},$$

mais $\quad \text{OKHL} < \text{OPCQ}; \quad$ (nº 351)

donc $\quad \text{ORGL} < \text{OPCQ}.$

2e *Démonstration*. Par le point G, menons une parallèle EF à MN; on aura DE = DF, c'est-à-dire que D est le point milieu de EF.

Or $\quad \text{ORGL} < \text{OIDJ}, \quad$ (nº 351)

mais $\quad \text{OIDJ} < \text{OPCQ},$

donc $\quad \text{ORGL} < \text{OPCQ}.$

*Remarque*. Ces deux démonstrations exigent que la courbe, dans les régions voisines du point C, soit comprise entre la tangente et les axes OX, OY.

### Théorème.

**361.** *Lorsqu'on a deux courbes* AB, CD *qui tournent leur concavité vers un même point* O *du segment rectiligne* AC *qui joint deux points de ces courbes, le rectangle maximum inscrit* PMNQ *est celui qui est déterminé par des tangentes* EMF, FNG, *divisées en deux parties égales par les points de contact* M *et* N.

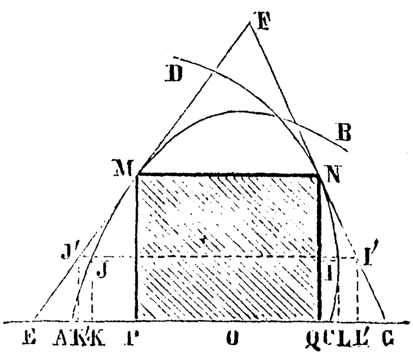


Fig. 251.

En effet, le rectangle PMNQ est le plus grand qu'on puisse inscrire dans le triangle EFG ; donc tout autre rectangle inscrit dans les courbes donne :

$$\text{IJKL} < \text{I'J'K'L'} < \text{NMPQ}.$$

### Problème de Newton.

**362.** *Dans un segment donné d'une courbe quelconque, inscrire un rectangle d'aire maxima.*

A la courbe donnée, il faut circonscrire un angle EFG, tel que les points de contact M, N soient les milieux des côtés EF, FG.

*Remarques.* 1° On peut arriver à la solution de ce problème en recourant à des considérations infinitésimales assez élémentaires.

(Voir Paul Serret, *Des Méthodes en Géométrie,* page 105.)

2° Voici quelques applications de l'emploi de la tangente :

### Problème.

**363.** *A une circonférence donnée, inscrire le triangle isocèle d'aire maxima.*

On sait que le triangle d'aire maxima est équilatéral (n° 354, *Remarque* 3°). On arrive à la même conclusion en employant la tangente.

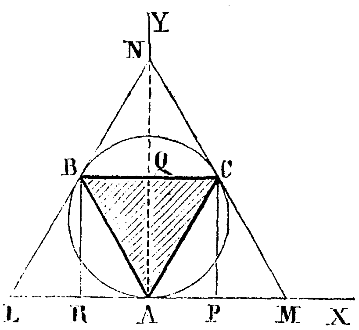


Fig. 252.

Il suffit de considérer la moitié de la figure comprise entre la tangente AX et la perpendiculaire AY.

La tangente MCN telle que $MC = CN$ répond à la question, APCQ est maximum (n° 360), mais les tangentes MA, MC sont égales comme issues du même point ; donc

$$LM = MN.$$

Puis le triangle ABC est maximum en même temps que le rectangle PCBR ; d'ailleurs AC, médiane du triangle rectangle MAN, égale $CM = AM = BC$.

Donc, pour les triangles inscrits, le triangle équilatéral ABC est maximum.

*Remarque.* La tangente MCN, que le point de contact C divise en deux parties égales, donne aussi le triangle circonscrit minimum, ainsi qu'on le démontrera bientôt (n° 367).

**Problème.**

**364.** *Dans un secteur* AOB *ou dans un segment* EGF, *inscrire le rectangle maximum.*

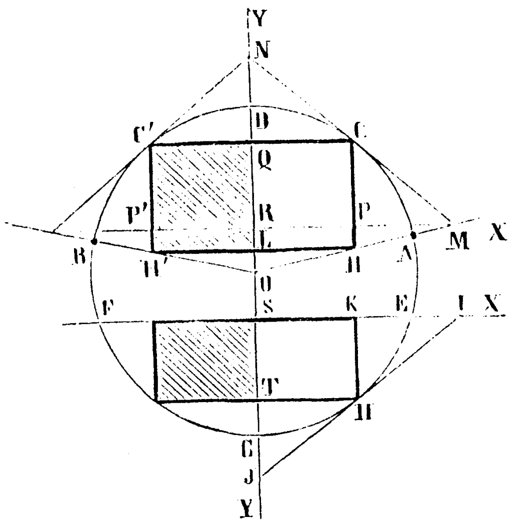


Fig. 253.

Il suffit de s'occuper de la moitié de la figure.

1° Pour le secteur, il suffit de prendre la moitié C de l'arc AD, car la tangente MCN sera divisée en deux parties égales.

RPCQ est maximum pour le triangle RMN.

RPHL est maximum pour RMO.

Donc LHCQ est maximum pour OMN; d'ailleurs, C est le seul point du périmètre du triangle qui appartienne à l'arc; donc, *a fortiori*, tout autre rectangle appuyé sur l'arc et sur OA serait plus petit que LHCQ.

2° Pour le segment, il faut mener IHJ de manière que H soit le milieu. Le calcul du rectangle dépend de la longueur OJ qui détermine la tangente (n° 312).

Soient $OA = r$ et $OS = a$; on a :

$$HK = \frac{-3a + \sqrt{a^2 + 8r^2}}{4}, \qquad \text{(n° 312, \textit{formule} 1)}$$

$$TH^2 = \frac{-a^2 + 4r^2 - a\sqrt{a^2 + 8r^2}}{8}, \qquad (\textit{formule } 2)$$

$$2TH \,.\, HK = \frac{-3a + \sqrt{a^2 + 8r^2}}{2} \sqrt{\frac{-a^2 + 4r^2 - a\sqrt{a^2 + 8r^2}}{8}}.$$

**Problème.**

**365.** *Dans un segment donné, inscrire le trapèze maximum.*

Le trapèze doit avoir pour base la corde qui limite le segment et une parallèle à cette corde.

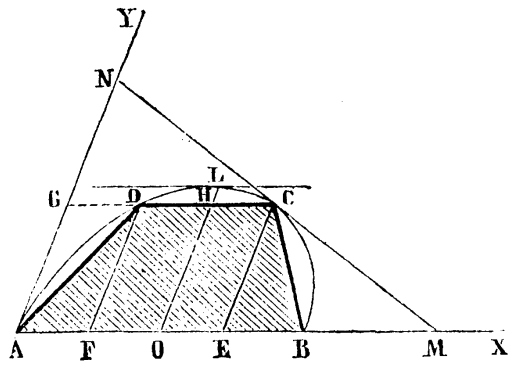


Fig. 254.

La solution très simple que nous allons donner s'applique avec facilité à toutes les courbes qui ont un diamètre rectiligne pour lieu géométrique des points milieux des cordes qui sont parallèles à la base du segment.

Soit le problème résolu, OL le diamètre qui divise en deux parties égales toute parallèle à AB, et AGN une parallèle à OL. On a donc $AO = OB$, $DH = HC$, par suite $AF = EB$. Donc les triangles AGD, CBE sont équivalents comme ayant des bases égales et même hauteur ; donc le trapèze ABCD est équivalent au parallélogramme AECG ; donc encore le maximum est déterminé par la tangente MCN, que le point de contact divise en deux parties égales.

**Note.** On peut consulter la solution analytique de cette question, lorsque le segment donné est parabolique. (*Nouvelles Annales de mathématiques,* 1879, page 379.) Solution par Lez et Moret-Blanc.

* Lez Henri, de Lorrez-le-Bocage, et Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre, ont publié de nombreux articles dans les *N. A.* : le premier, de 1869 à 1885, et le second de 1870 à 1888.

Moret-Blanc est mort à Salins (Jura) en 1886. (*N. A.*, 1886, page 160.)

### Problème.

**366.** *Dans une courbe à centre et à diamètres rectilignes, mener une corde* BC *parallèle à une droite donnée* xy, *de manière que le quadrilatère* ABCD *ayant pour côtés opposés la corde* BC *et un diamètre* DA *donné, ait une aire maxima.*

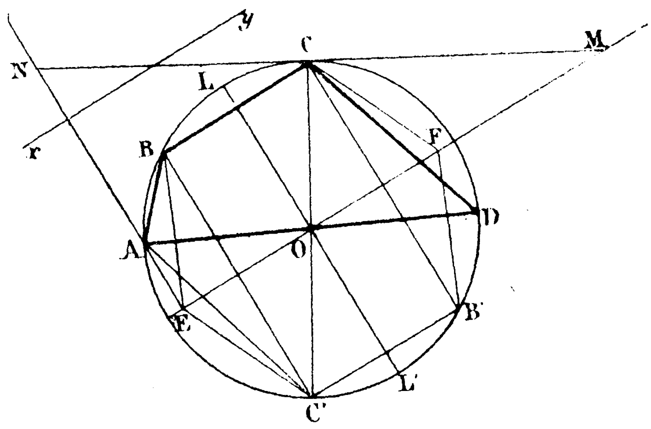


Fig. 255.

Supposons le problème résolu. Menons un diamètre parallèle à la droite donnée ; projetons les sommets A et D sur EF par des droites parallèles au diamètre LOL′ conjugué de EF, on aura OE = OF. Menons aussi les diamètres BOB′, COC′ ; les cordes BC′ et CB′ sont parallèles aux projectantes AE, DF.

Donc la figure ABCDB′C′A est équivalente à la figure EBCFB′C′E, car les triangles tels que CFB′ et CDB′ sont équivalents.

Donc le maximum de ABCD a lieu en même temps que le maximum du trapèze équivalent EBCF ; mais le maximum de EBCF s'obtient en menant la tangente MCN de manière que MC = CN ; donc, etc.

**Note.** Pour la solution analytique, voir *N. A.*, 1879, page 425.

Les solutions analytiques dues à MM. Lez et Moret-Blanc sont remarquables à divers titres; mais il faut reconnaître aussi qu'*elles font valoir la simplicité et l'élégance* de la solution géométrique que nous donnons.

### Problème.

**367.** *On donne deux axes* DX, DY *et une courbe dont la concavité est tournée vers l'origine* D ; *mener une tangente* MN *qui détermine le triangle minimun.*

On mène la tangente MCN telle que MC = CN.

Le triangle MDN est minimum.

En effet, la courbe est comprise entre la tangente et l'origine; toute autre ligne ICJ sera sécante et plus courte que la tangente EGF qui lui

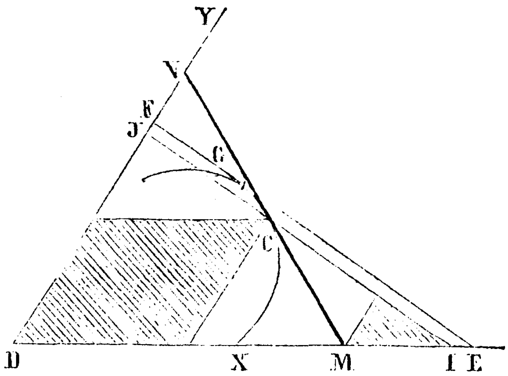



Fig. 256.

serait parallèle; or le triangle MDN est plus petit que IDJ (nº 351) et à plus forte raison que DEF; donc MDN est minimum.

**Problème.**

**368.** *On donne deux axes* OX, OY *et une courbe tangente à ces deux axes; étudier d'une manière générale le maximum et le minimum pour le parallélogramme ayant son sommet sur la courbe, et pour le triangle formé par une tangente et les axes.*

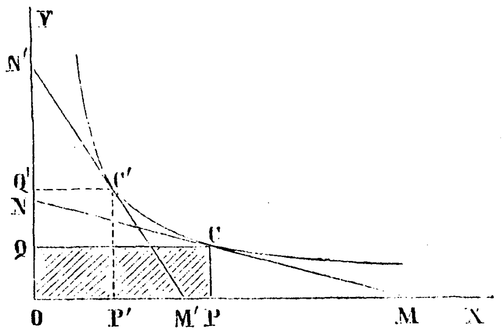



Fig. 257.

1º *Hyperbole rapportée à ses asymptotes.*

On sait que toute tangente est divisée en deux parties égales par le point de contact (nº 175), et que tous les triangles tels que MON, M'ON' sont équivalents (nº 78); donc, pour cette courbe tangente aux asymptotes en des points infiniment éloignés de l'origine, il n'y a ni maximum ni minimum, puisqu'on a :

$$\text{MON} = \text{M'ON'} \quad \text{et} \quad \text{OPCQ} = \text{OP'C'Q'}.$$

Mais toute autre courbe donnera un maximum ou un minimum, suivant le sens de la concavité de la partie considérée.

**369.** 2º *Courbe quelconque tangente aux axes, ou coupant les axes.*

1º La tangente MCN (fig. 258) telle que MC = CN, lorsque la courbe, dans les environs du point de contact, tourne sa concavité vers les axes, donne le *parallélogramme maximum* OP'CQ' et le *triangle minimum* MON (nºs 360 et 367).

2º La tangente EGF, menée à la partie de la courbe qui tourne sa convexité vers les axes et telle que EG = GF, donne le *triangle maximum* OEF.

En effet, l'hyperbole tangente à FE au point G (fig. 259), et dont OX OY seraient les asymptotes, ayant ses points de contact à l'infini, se trouve à droite de la partie convexe SIGT, par rapport à l'origine O.

Or pour l'hyperbole, le triangle OE'F', donné par une tangente quelconque, est équivalent au triangle OEF; donc OHL $<$ OEF.

Mais OPGQ est aussi *maximum*, car il est équivalent au parallélo-

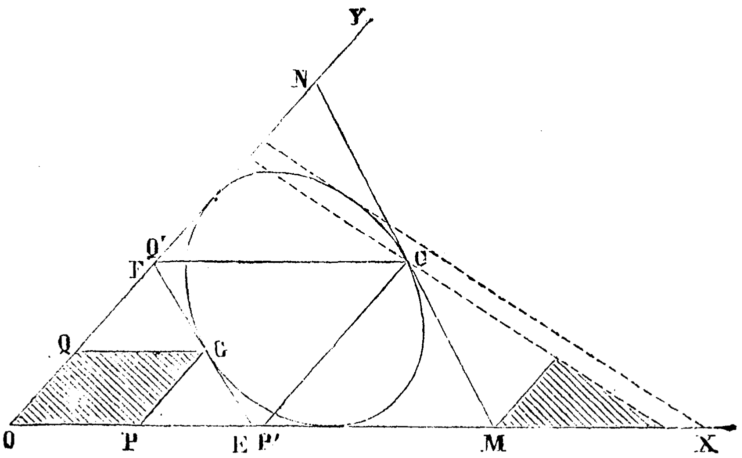



Fig. 258.

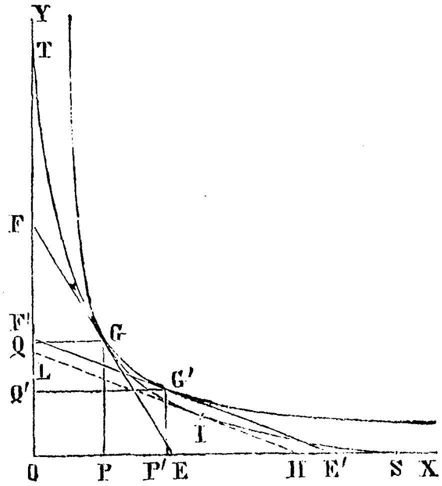



Fig. 259.

gramme OP'G'Q' (no 78), et ce dernier est plus grand que celui dont le sommet serait au milieu de HL, et, à plus forte raison, plus grand que celui dont le sommet serait au point I.

**370.** *Remarque.* Les exercices précédents (nos 367, 368 et 369) répondent d'une manière très simple aux divers cas d'inscription d'un rectangle, d'un parallélogramme, d'un triangle dans une courbe donnée ainsi qu'au problème du triangle minimum circonscrit. La seule difficulté *est de mener une tangente qui soit divisée en deux parties égales par le point de contact.* On sait néanmoins mener la tangente dans un assez grand nombre de cas (nos 310 à 319); dans les autres circonstances, lorsque la règle et le compas ne suffisent plus pour résoudre géométriquement le problème de la tangente, *la méthode algébrique cesse d'être élémentaire, et il en est de même de l'emploi de la trigonométrie.*

Un autre avantage de la méthode géométrique est de manifester l'analogie que présentent entre elles un grand nombre de questions qui réclament cependant une mise en équation et une analyse différentes.

Enfin, avec de légères modifications, *la méthode de la tangente s'applique aux questions de volume.*

## § V. — Volume maximum et minimum.

**371.** Pour résoudre les questions de maxima et de minima relatives aux volumes, on a recours aux principes algébriques connus, principes pour lesquels on peut trouver parfois des démonstrations géométriques très simples.

On peut employer aussi des constructions analogues à celles de la Géométrie plane.

**Problème.**

**372.** *Quel est le parallélépipède de volume maximum dont la somme des trois arêtes égale une longueur donnée $l$?*

Soient $x$, $y$, $z$ les trois arêtes. En admettant que $z$ soit invariable, on aura une somme constante pour $x+y$,

car $$x+y=l-z.$$

Or le rectangle $xy$ est maximum lorsque $x=y$.

Donc le parallélépipède doit être à base carrée.

En prenant une face quelconque pour base, on arrive à la même conclusion ; donc *le cube est le parallélépipède de volume maximum.*

*Remarque.* La question ci-dessus peut être regardée comme la démonstration géométrique du principe suivant.

**373. Premier principe**. *Un produit de trois facteurs, dont la somme est constante, est maximum lorsque ces trois facteurs sont égaux entre eux,* pourvu que ces facteurs puissent devenir égaux (*Cours d'Algèbre* F. G.-M. nº 451).

On en déduirait le principe réciproque.

**374. Deuxième principe**. *Pour une valeur donnée* $a^3$, *du produit de trois facteurs, la somme des trois facteurs est minima lorsque les trois facteurs sont égaux entre eux.*

**Problème.**

**375.** *De tous les parallélépipèdes droits qui ont pour base un carré et dont la somme du côté du carré et de la hauteur est constante, quel est celui dont le volume est maximum?*

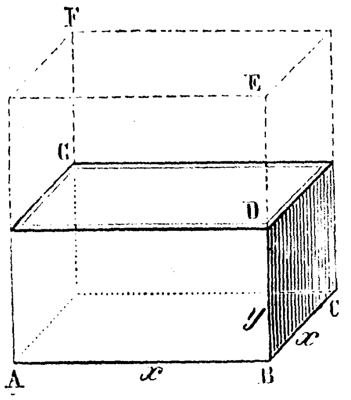


Fig. 260.

Soient $x^2$ la base, $y$ la hauteur et $(x+y)=l$ la somme constante.

Le volume est exprimé par $x^2y$.

Prolongeons $y$ d'une quantité DE égale à BD, nous obtiendrons ainsi un solide BF double du précédent BG.

Au maximum du solide ACEF correspondra celui de ACDG. Or la somme des trois arêtes du premier est constante, car

$$AB+BC+BE=2(x+y)=2l;$$

donc le solide BF est maximum lorsque les trois arêtes sont égales; donc *le volume* BG *est maximum lorsque le côté du carré est double de la hauteur.*

Alors $$V=\frac{4l^3}{27}.$$

De l'exercice ci-dessus, on déduit le principe suivant :

**376. Troisième principe**. *Pour une somme constante* l *de deux facteurs* x *et* y, *le produit* $x^2y$ *est maximum lorsqu'on partage* l *en parties proportionnelles aux exposants 2 et 1 des facteurs* x *et* y.

**377. Quatrième principe**. *Réciproquement, pour un produit donné* $x^2y=a^3$, *la somme des facteurs* $x+y$ *est minima lorsqu'on prend* x *double de* y.

Dans ce cas, $x^2y=a^3$ revient à $4y^3=a^3$.

où $$y=\frac{a}{\sqrt[3]{4}} \quad \text{et} \quad x=\frac{2a}{\sqrt[3]{4}}.$$

**Problème.**

**378.** *Pour une surface donnée* $2a^2$, *quel est le parallélépipède rectangle de volume maximum?*

Soient $x$, $y$, $z$ les trois arêtes, $xyz$ exprimera le volume.
$xy + xz + yz = a^2$ est la moitié de la surface, en prenant $xy$ pour base, et $z(x+y)$ est la demi-surface latérale.

Admettons que la surface de base $xy$ ne varie point; il en sera de même de la demi-surface latérale, car sa valeur $a^2 - xy$ sera constante.

Mais la hauteur $z$ s'obtient en divisant la demi-surface latérale par le demi-périmètre de base

ou
$$z = \frac{a^2 - xy}{x + y}.$$

Or la hauteur sera d'autant plus grande et, par suite, le volume $xyz$ sera d'autant plus grand que le diviseur $x + y$ sera plus petit; mais on sait que le minimum $x + y$, lorsque le produit $xy$ est constant, a lieu quand les deux facteurs sont égaux. *Donc la base doit être carrée.*

Il en serait de même pour toute autre face; *donc, pour une surface totale donnée, le cube est maximum.*

**Problème.**

**379.** *Quel est le volume maximum d'une boîte creuse, dont la surface des cinq faces a une valeur donnée* $a^2$?

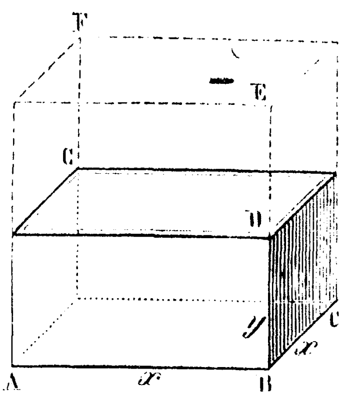


Fig. 261.

Doublons le volume à étudier, en prenant la longueur DE égale à la profondeur de la boîte.

La surface totale du parallélépipède ainsi formé est constante, elle égale $2a^2$, donc ce corps est un cube; la boîte ACDG est donc la moitié d'un cube, *et la hauteur* y *ne doit être que la moitié du côté du carré de la base.*

La surface des cinq faces ou
$$x^2 + 4xy = a^2$$
devient :
$$x^2 + 4x \times \frac{x}{2} = a^2 \quad \text{ou} \quad 3x^2 = a^2,$$
d'où
$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{2\sqrt{3}};$$
$$V = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a^3}{6\sqrt{3}}.$$

**Note.** Il serait utile de comparer cette solution si simple et si élégante, ainsi que plusieurs autres déjà indiquées, aux solutions que donne l'algèbre pour les mêmes problèmes. (Voir *Exercices d'algèbre*, F. G.-M., 5e édition, no 984.)

**Problème.**

**380.** *Quel est le parallélépipède à base carrée dont le volume est maximum, lorsque la somme du carré de base et d'une face latérale est une quantité constante* $a^2$?

Soient $x$ le côté du carré, $y$ la hauteur. Le volume égale $x^2y$, et la surface constante est donnée par

$$x^2 + xy = a^2.$$

Pour ramener ce cas au précédent, il suffit de multiplier la surface donnée par 16, ou de poser

$$(4x)^2 + 4 \times 4xy = 16a^2;$$

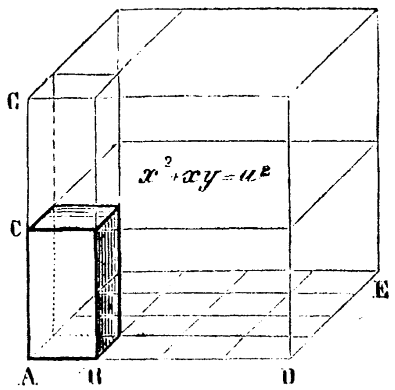


Fig. 262.

car le premier terme représente la surface d'un carré de base ayant $4x$ pour côté, et le second terme est la somme de quatre faces latérales ayant $4x$ pour base et $y$ pour hauteur.

Or le maximum du volume a lieu lorsque le côté du carré de base est double de la hauteur (n° 379), et, par suite, pour l'exemple donné, $4x$ étant le côté du carré, on a :

$$4x = 2y, \quad \text{d'où} \quad y = 2x.$$

*Le maximum a lieu quand la hauteur* y *est double du côté* x *de la base du solide demandé.*

$$x^2 + xy = a^2$$

devient :

$$x^2 + 2x^2 = a^2;$$

d'où

$$x^2 = \frac{a^2}{3};$$

d'où

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad y = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Dans ce cas,

$$V \quad \text{ou} \quad x^2y = \frac{2a^3}{3\sqrt{3}}.$$

**Problème.**

**381.** *Par un point quelconque de la base d'un tétraèdre, dont l'angle au sommet est un trièdre trirectangle à trois arêtes égales, on mène des plans parallèles aux faces du trièdre, et l'on forme un parallélépipède rectangle; pour quelle position du point, pris sur la base, ce parallélépipède est-il maximum?*

1° Prenons un trièdre trirectangle à trois faces égales entre elles.

Soit $OA = OB = OC = l$; donc ABC est un triangle équilatéral.

Représentons par $x$, $y$, $z$ les distances d'un point quelconque de la base ABC aux trois faces; on sait que cette somme est constante, et égale $l$ (nº 278). Donc le volume $xyz$ est maximum quand les trois facteurs sont égaux entre eux.

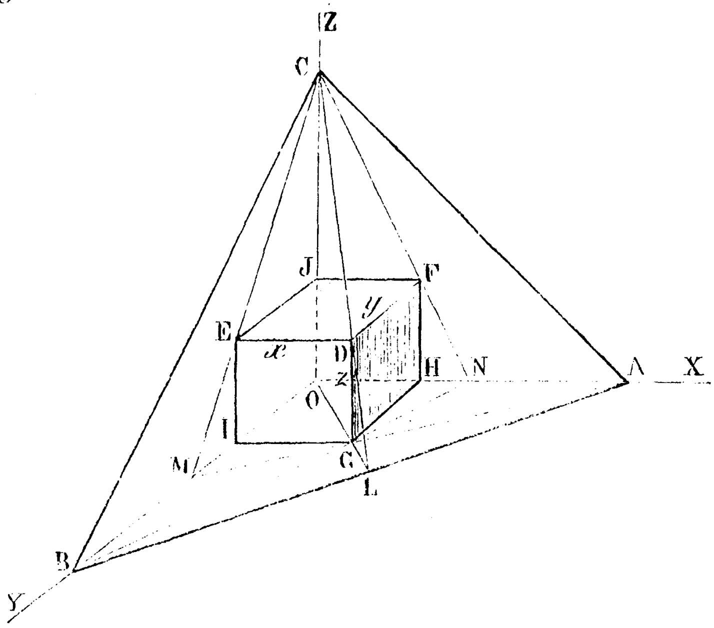



Fig. 263.

Alors
$$x = y = z = \frac{l}{3};$$

$$xyz = \frac{l^3}{27} \quad \text{ou} \quad \frac{2l^3}{54}.$$

Le tétraèdre a pour volume :

$$AO \cdot \frac{OB}{2} \cdot \frac{OC}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{l^3}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{9l^3}{54};$$

donc *le parallélépipède maximum est les* $^2/_9$ *du tétraèdre.*

*Remarque.* Le point D est au point de concours des médianes du triangle équilatéral ABC, aux $^2/_3$ de CL à partir du sommet.

Le point D se projette en E, F, G, aux points de concours des médianes des faces du tièdre O.

**382.** 2º *Trièdre quelconque.* D'après un théorème connu, quelle que soit la modification apportée à l'une ou à plusieurs des arêtes de l'angle S, le parallélépipède inscrit est au tétraèdre primitif dans le rapport du nouveau parallélépipède au tétraèdre transformé (nº 204). On peut énoncer le théorème suivant :

**Th.** *Pour un tétraèdre quelconque ayant* O *pour sommet,* ABC *pour base, le parallélépipède formé en menant par un point de la base des plans parallèles aux trois faces de l'angle* O, *a un volume maximum lorsque le sommet* D *est au point de concours des médianes de la base.*

*Son volume est les* $^2/_9$ *du volume du tétraèdre.*

**Problème.**

**383.** *Par le sommet* D *d'un parallélépipède, mener un plan* ABC *qui coupe les trois arêtes* OX, OY, OZ *du sommet* O, *opposé à* D, *de manière que le tétraèdre* OABC *soit minimum.*

C'est la réciproque de la question précédente; il faut prendre des arêtes OA, OB, OC, triples des arêtes correspondantes OH, OI, OJ du parallélépipède, et le plan ABD passe par le sommet D et donne le tétraèdre minimum égal aux $\frac{9}{2}$ du parallélépipède.

**Problème.**

**384.** *Couper une pyramide parallèlement à la base, de manière que le prisme, ayant la section pour base et la hauteur du tronc, ait un volume maximum.*

**1er Cas.** *Pyramide à base carrée et dont le côté a égale la hauteur de la pyramide.*

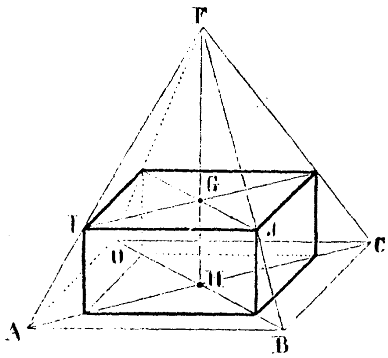


Fig. 264.

Pour toute section on aura :

$$IJ = FG,$$

ou $$IJ + GH = FH = a.$$

Soient $IJ = x$ et $GH = y$;

on a : $$x + y = a.$$

Or le volume du prisme $= x^2y$; mais ce produit est maximum lorsque $x = 2y$ (3e *principe*, no 376) ;

d'où $$x = \frac{2a}{3} \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{3}.$$

Donc *la section doit être faite au premier tiers de la hauteur à partir de la base*, ou aux $^2/_3$ à partir du sommet.

$$V = \frac{4a^2}{9} \cdot \frac{a}{3} = \frac{4a^3}{27}.$$

**384 a. 2e Cas.** D'après les transformations indiquées (nos 202, 203, 204), on peut dire immédiatement :

*Pour une pyramide quelconque, le prisme maximum correspond à la section menée aux $^2/_3$ de la hauteur à partir du sommet.*

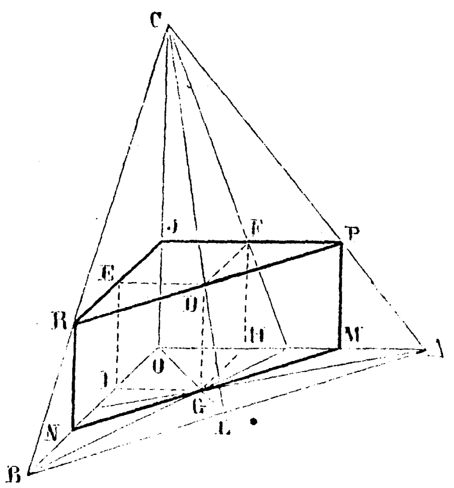


Fig. 265.

Autre solution. *Considérons d'abord une pyramide triangulaire ayant pour base* AOB.

Menons une section PJR parallèle à la base, mais à une hauteur quelconque.

Construisons le prisme triangulaire correspondant et le parallélépipède DFJE, GHOI, dont le sommet D est au point milieu de PR, et appartient par suite à la médiane CDL de la face ABC.

1o Le parallélépipède dont DFJE est une des bases est équivalent à la moitié du prisme triangulaire qui a pour base PJR, car ce triangle est double du parallélogramme.

2° Au parallélépipède maximum correspondra un prisme triangulaire double, et, par suite, ce prisme sera maximum; mais le parallélépipède EF, IH est maximum quand le sommet D est au tiers de LC à partir de la base (n° 381); donc le prisme PJR, MON est maximum lorsque la section est faite aux deux tiers de la hauteur, à partir du sommet C.

3° Le sommet D du parallélépipède maximum est aux $^2/_3$ de la médiane CL (n° 381), et CJ est les $^2/_3$ de CO; donc *le prisme triangulaire est maximum lorsque la section* PJR *est faite aux* $^2/_3$ *des arêtes, à partir du sommet,* ou bien *au tiers de la hauteur à partir de la base.*

**385.** *Volume du prisme maximum.* Soient B et $h$ la base et la hauteur de la pyramide donnée ; le volume de cette pyramide $= ^1/_3\, Bh$.

La section PJR étant faite aux $^2/_3$ de la hauteur, on a :

$$\frac{\text{PJR}}{\text{AOB}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{PJR}}{\text{B}} = \frac{4}{9};$$

d'où $$\text{PJR} = {}^4/_9\, \text{B}.$$

La hauteur du prisme $$= \frac{h}{3};$$

donc $$\text{V} = {}^4/_9\, \text{B} \cdot \frac{h}{3} = {}^4/_{27}\, \text{B}h.$$

D'autre part, la pyramide donnée a pour volume B $\frac{h}{3}$; donc le prisme est les $^4/_9$ de la pyramide donnée.

*Remarque.* Ce résultat est conforme à celui qu'on a obtenu par une autre méthode (n° 384). En effet, la pyramide F,ABCD (fig. 264) $= \frac{a^3}{3} = \frac{9a^3}{27}$; donc le prisme $\frac{4a^3}{27}$ est les $\frac{4}{9}$ de la pyramide donnée $\frac{9a^3}{27}$.

**386.** *Extension.* Le théorème démontré pour une pyramide triangulaire s'applique, par extension, à une pyramide quelconque, et en particulier au cône; on peut donc énoncer le théorème suivant :

**Th.** *Le cylindre maximum, inscrit dans un cône donné, est celui qu'on obtient en coupant le cône par un plan parallèle à la base, ce plan étant mené aux* $^2/_3$ *de la hauteur à partir du sommet.*

$$\text{Cône} = {}^1/_3\pi r^2 h, \quad \text{cylindre maximum} = {}^4/_9 \cdot {}^1/_3\pi r^2 h.$$

**387.** Réciproquement. *La pyramide de volume minimum circonscrite à un prisme donné a une hauteur* FH *triple de celle du prisme.*

*De même le cône minimum circonscrit à un cylindre donné a une hauteur triple de celle du cylindre.*

**Problème.**

**388.** *Inscrire dans une sphère le parallélépipède de volume maximum.*

Soient $x$, $y$, $z$ les trois dimensions du parallélépipède, et $d$ le diamètre de la sphère.

Admettons que $z$ ne varie point; la face $xy$ est inscrite dans un cercle obtenu en coupant la sphère par un plan éloigné du centre de la longueur $\frac{z}{2}$. Mais, pour une hauteur constante, le solide est maximum lorsque la face $xy$ est maxima; or le carré est le plus grand rectangle qu'on puisse inscrire dans un cercle; donc la face $xy$ est carrée. Un raisonnement analogue prouve qu'il doit en être ainsi d'une face quelconque.

**Donc le cube est le parallélépipède maximum que l'on peut inscrire dans une sphère donnée.**

*Remarques.* 1° Le cube inscrit a pour diagonale un diamètre de la sphère.

Donc
$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2, \quad 3x^2 = d^2;$$
d'où
$$x = \frac{d}{\sqrt{3}};$$
$$xyz \quad \text{ou} \quad x^3 = \frac{d^2}{3} \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}.$$

2° La somme des carrés de trois dimensions est constante; on peut donc en conclure le principe suivant :

**388 a. Cinquième principe.** *Lorsque la somme des carrés des trois facteurs d'un produit est constante, le produit est maximum quand les facteurs sont égaux entre eux.*

## § VI. — Emploi de la Tangente.

### Problème.

**389.** *On donne trois plans qui se coupent deux à deux suivant les droites* OX, OY, OZ ; *une surface courbe* abc *est comprise entre ces plans ; déterminer sur cette surface un point* D *tel, qu'en menant par ce point des plans parallèles aux faces du trièdre donné, on obtienne le parallélépipède maximum.* (La concavité de la surface est tournée vers l'origine O.)

D'après les théorèmes connus relatifs au tétraèdre et au prisme inscrit (nos 381 et 382), le problème serait résolu si l'on menait un plan tangent ABC tel que le point de contact D fût le point de concours des médianes du triangle obtenu ABC, car le parallélépipède D serait les $^2/_9$ du tétraèdre OABC, tandis que tout parallélépipède ayant son sommet en un autre point quelconque du triangle ABC, donnerait un volume moindre, et puisqu'on admet que la surface est concave par rapport au point O, cette surface est comprise dans le tétraèdre ; tout autre point que D donnera un parallélépipède plus petit que le point correspondant du triangle ABC; on a donc le théorème suivant :

**Th.** *Le parallélépipède maximum a pour sommet le point de contact d'un plan tangent tel, que ce point de contact est le point de concours des médianes du triangle obtenu.*

**389 a.** *Remarques.* 1° Nous allons indiquer la manière de déterminer le point de contact dans les seuls cas que nous aurons à traiter plus tard.

*La surface courbe sera de révolution*, et ordinairement ce sera une zone sphérique.

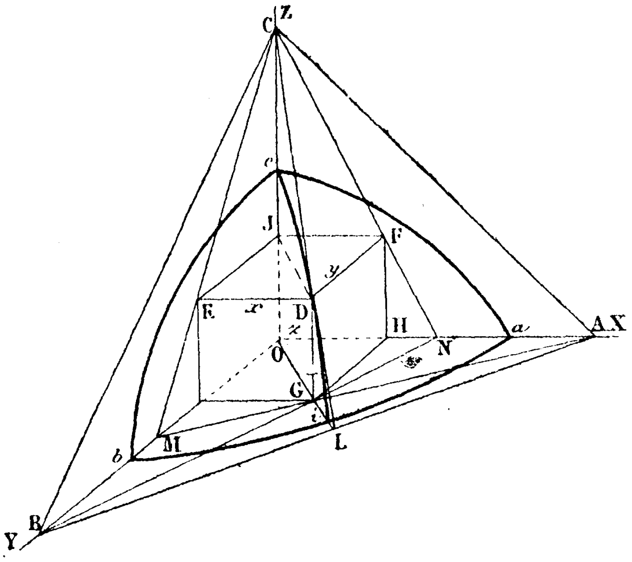



Fig. 266.

Soient OC l'axe de la zone de révolution, XOY un plan perpendiculaire à cet axe. Pour inscrire dans la zone ou dans le segment un parallélépipède maximum, il suffit de considérer le quart de la zone, en menant par l'axe OZ deux plans rectangulaires, car pour une même hauteur du parallélépipède, le solide maximum a pour base un carré (n° 372). De plus, le quart ainsi obtenu est symétrique par rapport au plan bissecteur COL; par suite, le triangle ABC est toujours isocèle, quand il s'agit d'une surface de révolution. Donc *il suffit de considérer l'arc* cDi *déterminé par le plan bissecteur* COL, *et de mener à cet arc une tangente* CDL *telle que* $DC = 2DL$ (n° 315).

2° En ne considérant que la courbe $cDi$, la tangente CDL telle que $DC = 2DL$ donne le sommet du parallélépipède DO; les deux lignes DG et DJ ne remplissent pas la même fonction : DG est une arête du solide, tandis que DJ est la diagonale du carré de base.

Ainsi, dans le cas particulier où DO serait un cube, on aurait :

$$DJ^2 = 2DG^2$$

3° Pour inscrire un prisme triangulaire maximum, on mènerait par l'axe OZ trois plans formant entre eux des angles de 120°, car la base du prisme maximum est inscrite dans un cercle, et par suite cette base est un triangle équilatéral (n° 355).

**Problème.**

**390.** *Dans le segment déterminé par un plan perpendiculaire à l'axe d'un corps de révolution, inscrire le parallélépipède maximum.* Une des faces du parallélépipède doit être sur le plan de base du segment.

Il suffit de considérer le quart du segment, c'est-à-dire l'onglet compris entre le plan de base et deux plans perpendiculaires entre eux et menés par l'axe.

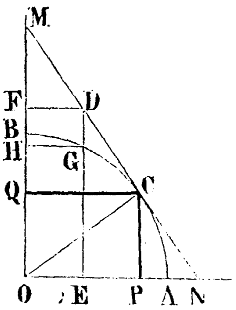


Fig. 267.

Le solide maximum inscrit doit avoir pour sommet, sur la surface courbe de l'onglet, le point de contact d'un plan tangent à la surface et coupant les trois faces du trièdre trirectangle suivant un triangle dont le point de contact est le point de rencontre des médianes (nº 381). Donc, si l'arc AB représente la courbe méridienne de l'onglet, il faut mener une tangente MCN de manière que

$$CM = 2CN, \qquad (\text{n}^\text{o}\ 315)$$

car chaque médiane du triangle est divisée par le centre de gravité aux $^2/_3$ à partir du sommet.

Le parallélépipède rectangle ayant CP pour arête et CQ pour diagonale de la face supérieure est maximum. En effet, pour tout autre point G de la courbe, le parallélépipède correspondant à GE et GH est moindre que le parallélépipède DE, DF ; mais ce dernier est moindre que le solide CP, CQ ; donc ce dernier est maximum.

**391** *Remarque.* Pour l'hémisphère, la tangente divisée aux $^2/_3$ à partir du point M donne (nº 316 a, formules *c* et *d*) :

$$\overline{CP}^2 = \frac{r^2}{3} \quad \text{et} \quad \overline{CQ}^2 = \frac{2r^2}{3}.$$

Le parallélépipède inscrit dans la sphère entière est donc un cube. En effet, CP est le côté et CQ la diagonale du carré qui termine le solide (nº 389 b); car la figure OACB est la section de l'onglet sphérique du parallélépipède inscrit et du tétraèdre circonscrit par le plan diagonal conduit par OB et par la médiane opposée MN.

**392.** *Maximum de $x^2y$.* Le problème précédent conduit d'une manière très simple au maximum du produit $x^2y$, lorsque la somme des carrés $x^2$ et $y^2$ est constante.

Soit donc $\qquad x^2 + y^2 = a^2.$

Dans l'inscription du parallélépipède rectangle maximum, $x$ ou CQ est la moitié de la diagonale du carré de base, $y$ ou CP est la moitié de la hauteur totale du parallélépipède demandé.

Il suffit de considérer le huitième de ce corps, c'est-à-dire la partie comprise dans un des huit trièdres trirectangles déterminés par trois plans rectangulaires deux à deux et menés par le centre de la sphère.

Or le parallélépipède maximum est le cube inscrit dans la sphère, le huitième de ce solide est aussi un cube ayant $x$ pour diagonale du carré de base et $y$ pour hauteur.

Donc $x^2$ doit égaler $2y^2$.

L'égalité $\qquad x^2 + y^2 = a^2 \quad$ devient $\quad 3y^2 = a^2;$

d'où $\qquad y^2 = \dfrac{a^2}{3}, \quad$ par suite $\quad x^2 = {}^2/_3 a^2.$

Mais le cube considéré a pour volume $\ ^1/_2 x^2 \times y.$

Le produit $x^2y$ exprime le double du cube partiel.

*Ce produit* $x^2y$ *est maximum lorsqu'on a :*

$$x^2 = {}^2/_3 a^2, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a}{3}\sqrt{6}\,;$$

$$y^2 = \frac{a^2}{3}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{3}\sqrt{3}\,;$$

et V ou $\frac{1}{2}\, x^2y$ égale alors $\frac{1}{2} \cdot {}^2/_3 a^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}$;

$$V = \frac{a^3}{9}\sqrt{3}.$$

Le cube inscrit $= \frac{8a^3\sqrt{3}}{9}$.

**Problème.**

**393.** *Dans un secteur sphérique, ou dans un segment sphérique à une base, inscrire le cylindre de volume maximum.*

Il suffit de considérer la section principale obtenue en coupant le solide par un plan mené par l'axe.

1° Pour le secteur, il faut mener la tangente HCN limitée aux rayons OA, OB, et telle que

$$HC = {}^2/_3 HN. \quad (\text{n}^\circ\ 315)$$

2° Pour le segment, il faut mener EDF telle que

$$ED = 2DF.$$

Par rapport au cône, dont E serait le sommet et EDF la génératrice, le cylindre est maximum lorsque la section DD′ est aux ${}^2/_3$ de la hauteur à partir du sommet (n° 386); donc...

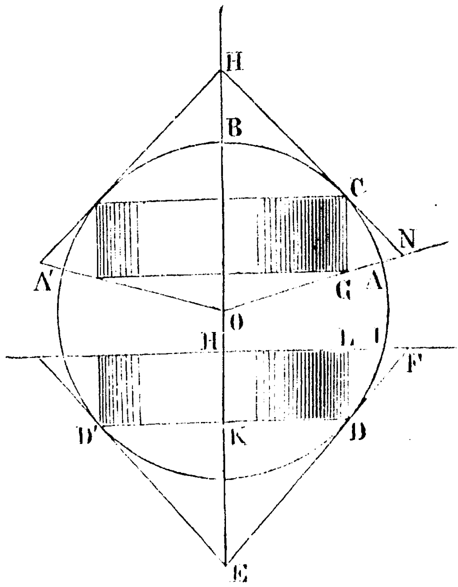



Fig. 268.

**Problème.**

**394.** *A un segment sphérique ACC′A′, circonscrire le cône de volume minimum.*

Il faut mener la tangente MCN de manière que

$$MC = 2CN$$

(n°s 387 et 390).

Il faut prouver que le cône ayant M pour sommet, MCN pour génératrice, a un volume plus petit que le cône engendré par une autre tangente quelconque HG.

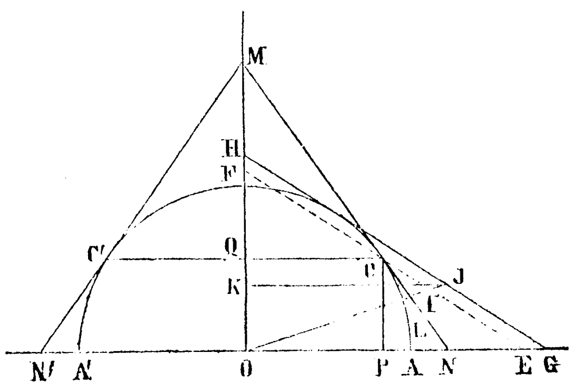



Fig. 269.

En effet, le cylindre CPOQ,

ayant CP pour hauteur et CQ pour rayon, est les $^4/_9$ du cône engendré par MON (nº 386).

Ou $\qquad$ cône MON $= {}^9/_4$ cylindre CPOQ.

Par le point G, menons une parallèle EF à la tangente GH.

Soient I et J les points situés aux $^2/_3$ de ces lignes, à partir de F et de H.

Dans le cône engendré par FOE, le cylindre CPOQ est moindre que le cylindre IKOL, qui correspond au premier tiers à partir de la base.

Donc $\qquad$ cône FOE $> {}^9/_4$ cylindre CPOQ,

ou $\qquad$ cône FOE $>$ cône MON,

donc, *a fortiori*, $\qquad$ cône HOG $>$ cône MON.

*Remarque.* La démonstration présuppose que la courbe est concave vers les axes OA, OH.

### Problème.

**395.** *Dans un segment de paraboloïde de révolution, à une base, inscrire le cylindre de volume maximum.*

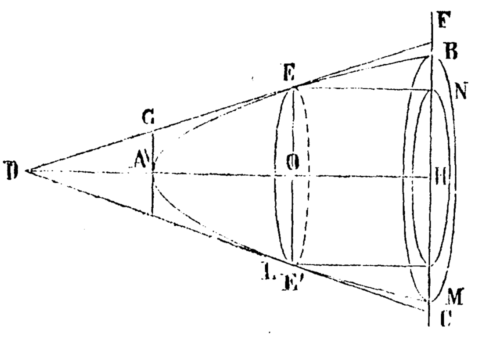


Fig. 270.

Il faut mener la tangente DEF de manière que DE $= 2$ EF (nº 390).

Pour cela, il suffit de diviser AH en deux parties égales, car on aura AD $=$ AO, puisque la sous-tangente est divisée en deux parties égales par la tangente au sommet. (G., nº 699.)

Ainsi le cylindre maximum a pour base la section équidistante du sommet A et de la base BC du tronc de paraboloïde.

Soient $\qquad$ $AH = a \quad BH = b$.

Le paraboloïde a pour volume $\dfrac{\pi a b^2}{2}$. (G., nº 953.)

Le cylindre a pour base $\pi OE^2$, mais $OE^2 = {}^1/_2 HB^2$, et $OH = \dfrac{a}{2}$; donc

$$\text{cylindre} = \frac{\pi a b^2}{4}.$$

Le cylindre est la moitié du paraboloïde donné.

**396.** *Remarques.* 1º Pour un tronc obtenu en coupant un paraboloïde elliptique par un plan quelconque, le cylindre maximum aurait aussi pour base la section équidistante de la base du paraboloïde et du plan tangent parallèle à cette base.

2º Pour le paraboloïde de révolution, DF serait la génératrice du cône minimum circonscrit (nº 394).

Pour avoir le volume de ce cône, il suffit de remarquer que la hauteur

$$DH = {}^3/_2 a.$$

On a ensuite : $\frac{HF^2}{OE^2} = \frac{DH^2}{DO^2} = \frac{9}{4}$ ; $\frac{HF^2}{\frac{1}{2}b^2} = \frac{9}{4}$ ;

d'où $$HF^2 = {}^9/_8 b^2.$$

$$V = {}^9/_8 \pi b^2 . \frac{a}{2} = \frac{9}{16} \pi a b^2.$$

**Problème.**

**397.** *Inscrire, dans une sphère donnée, un prisme régulier maximum ; par exemple, un prisme triangulaire.*

*Première solution.* En appelant $y$ la demi-hauteur du prisme triangulaire inscrit, $x$ le rayon du cercle circonscrit au triangle équilatéral qui sert de base au prisme, $a$ le rayon de la sphère, on a la relation

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Il faut exprimer la surface du triangle équilatéral de base en fonction de $x$.

Or le rayon du cercle circonscrit est les ${}^2/_3$ de la hauteur de ce triangle ; donc $h = {}^3/_2 x$, d'où $h^2 = {}^9/_4 x^2$.

Mais la surface du triangle équilatéral, en fonction de $h$, est donnée par

$$S = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}. \qquad \text{(G., n° 316.)}$$

$$S = {}^9/_4 x^2 . \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} x^2.$$

Alors le volume de la moitié $= \frac{3\sqrt{3}}{4} x^2 y$, et le volume total du prisme $\frac{3\sqrt{3}}{2} x^2 y$.

Le maximum ne dépend que de la fonction $x^2 y$.

Et puisqu'on a : $x^2 + y^2 = a^2$,
la somme des carrés est constante, et l'on doit avoir :

$$x^2 = 2y^2, \quad \text{d'où} \quad 3y^2 = a^2,$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad x^2 = \frac{2a^2}{3}.$$

Pour avoir le volume total du prisme, il faut tenir compte du coefficient $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ :

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{2a^2}{3} \times \frac{a}{\sqrt{3}} = a^3.$$

**398.** *Seconde solution.* Soit le problème résolu, et ABCL le demi-prisme triangulaire régulier maximum.

Choisissons pour méridien principal celui qui passe par une arête AL, et menons le grand cercle SS' perpendiculaire aux arêtes latérales.

Pour ramener le problème proposé à une question connue, menons par PO des plans méridiens PFJ, PGI respectivement perpendiculaires aux faces BAL et ALC du prisme. Le tiers du prisme se trouve compris entre les deux plans ainsi menés (n° 389, *Remarque* 3°). Il suffit de considérer la partie du prisme qui a pour base ADHE et pour hauteur la ligne AL.

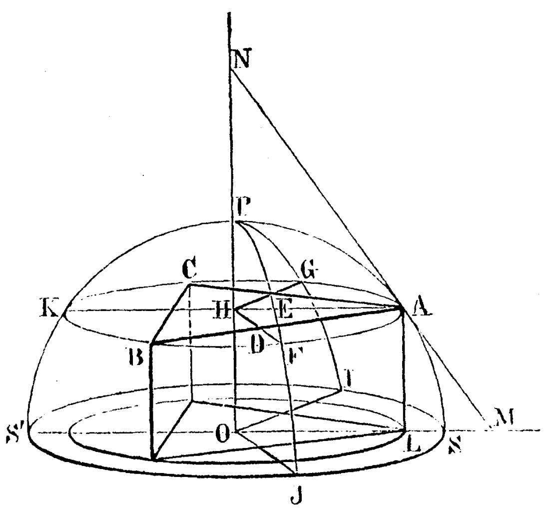


Fig. 271.

Or AD est perpendiculaire à HD ; AE, de la droite AC, est perpendiculaire à HEG ; donc le prisme (AL, ADHE) inscrit dans le trièdre formé par le plan du grand cercle SS′ et par les méridiens menés suivant HF, HG sera maximum lorsque son sommet A sera le point de contact d'une tangente divisée au tiers, à partir du point M (n° 389 b, *Remarque* 1°).

*Donc le sommet* A *du prisme maximum est le même point que le sommet du cube inscrit dans la sphère* (n° 390).

**399.** *Extension.* Il en serait de même pour tout prisme inscrit, ayant la base semblable à un polygone inscriptible donné. En un mot :

*La tangente* MAN *telle que* AN $=$ 2AM *fait connaître le cylindre inscrit de volume maximum*, et tout prisme maximum ayant une base semblable à un polygone inscriptible donné, est inscrit dans le cylindre de volume maximum.

*Volume des solides inscrits.* Désignons par $a$ le rayon de la sphère.

On sait qu'on a les relations suivantes (n° 316, $c$ et $d$) :

$$\mathrm{AL}^2 = \frac{a^2}{3}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{AA'} = \frac{2a}{\sqrt{3}}\,; \quad \mathrm{AH}^2 = {}^2/_3 a^2, \quad \text{ainsi} \quad \mathrm{AH} = a\sqrt{{}^2/_3}\,.$$

AA′ est la hauteur commune à tous les solides prismatiques maxima qu'on peut inscrire dans la sphère, et AH est le rayon du cercle circonscrit à la base de ces prismes.

(**a**) *Cylindre* $\quad V = \pi r^2 h = \pi\,{}^2/_3 a^2 \cdot \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}\,\pi a^3.$

(**b**) *Cube* $\quad \mathrm{AH}^2$ ou ${}^2/_3 a^2$ égale 2 fois $\mathrm{AL}^2$, car $\mathrm{AL}^2 = \dfrac{a^2}{3}$.

Ainsi, lorsque le prisme régulier inscrit doit être à base carrée, on obtient un cube ayant AA′ ou $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ pour côté, et AK pour diagonale d'une face.

$$V = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}}\,a^3.$$

(**c**) *Prisme triangulaire.* Le côté du triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon AH a pour expression $\mathrm{AH}\sqrt{3}$. (G., n° 277.)

La hauteur de ce triangle égale $^3/_2$HA.

Donc : aire de $ABC = {}^1/_2 AH\sqrt{3} \times {}^3/_2 AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ AH^2$;

mais $AH^2 = {}^2/_3 a^2$; donc $ABC = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot {}^2/_3 a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ a^2$.

$$\text{Volume} = ABC \cdot AA' = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = a^3.$$

Ainsi, *le prisme triangulaire maximum, inscrit dans une sphère, est équivalent au cube du rayon de cette sphère.*

### Problème.

**400.** *On donne une sphère, un grand cercle fixe* AB, *et un plan* NT; *mener un plan parallèle au plan* NT, *tel que le cylindre qu'on obtient en projetant le cercle* CIDJ *sur le grand cercle fixe ait un volume maximum.*

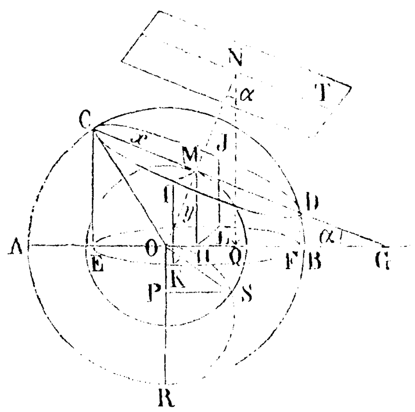


Fig. 272.

Du centre O, abaissons une perpendiculaire OMN sur le plan donné; cette perpendiculaire passe par le centre M de la section.

Abaissons la perpendiculaire NQ.

Les angles ONQ, OGM sont égaux.

Le rapport $\frac{NQ}{NO}$ est donc connu, car l'angle $\alpha$ est donné.

Représentons $GM = MJ$ par $x$, et OM par $y$.

La projection ELFK du cercle CD est une ellipse. (G., nº 634.)

Le diamètre IJ, parallèle au grand cercle, se projette en vraie grandeur; donc $LH = MJ = x$.

$$HF = HE = CM \cos\alpha \quad \text{ou} \quad x \cos\alpha \quad \left(\text{d'ailleurs, } \cos\alpha = \frac{NQ}{NO}\right).$$

$$V = \pi HE \cdot HL \cdot HM. \qquad \text{(G., n}^{\text{os}}\text{ 520 et 637.)}$$

Or $MH = y\cos\alpha$, donc $V = \pi x \cos\alpha \cdot x \cdot y\cos\alpha$.

$$V = \pi x^2 y \cos^2\alpha.$$

Le maximum ne dépend que de la variation de $x^2y$.

Or $x^2 + y^2 = r^2$.

Donc le maximum a lieu quand $x^2 = {}^2/_3 r^2$,

et que $y^2 = \frac{r^2}{3}$. (nº 392.)

Ainsi, en divisant OR en trois parties égales, élevant la perpendiculaire PS, il faudra décrire une circonférence avec OS pour rayon, et mener un plan tangent parallèle au plan donné.

## Note sur les Méthodes en Géométrie.

**400 a.** Nous venons d'indiquer les méthodes élémentaires que l'on peut employer avec avantage pour démontrer les théorèmes, ou résoudre les problèmes de géométrie.

On distingue la *Géométrie de la mesure* et la *Géométrie de l'ordre*, ou *Géométrie de position*. La *Géométrie de la mesure*, ou *Géométrie d'Archimède*, s'occupe des *quadratures* et des *cubatures*. La *Géométrie de l'ordre*, ou *Géométrie d'Apollonius*, s'occupe des *formes* et des *situations*; on peut l'appeler *Géométrie de position*, mais avec une signification plus étendue que celle que CARNOT a donnée à cette dénomination.

La plupart des méthodes que nous avons données se rapportent à la *Géométrie de position*; cependant la *Géométrie de la mesure* n'a pas été complètement oubliée; ainsi, la méthode par *composition* ou *décomposition* (nos 152 et 153) ne s'occupe, en quelque sorte, que des surfaces ou des volumes.

La *Méthode par duplication* (no 145) est employée, sous le nom de *Méthode de retournement*, dans les *Éléments de Géométrie* pour démontrer le 3e cas d'égalité des triangles. (G., no 52.)

L'emploi d'un *volume auxiliaire* peut conduire à la détermination de l'aire de quelques surfaces (no 173); enfin le chapitre des *Maxima* et des *Minima* (nos 335 à 401) est surtout relatif aux surfaces et aux volumes.

Les méthodes élémentaires les plus fécondes pour traiter les questions qui se rapportent à la *Géométrie de la mesure* ont été exposées dans l'*Appendice aux Éléments de Géométrie*. On y trouve notamment : les *Théorèmes de Guldin* (G., no 895, etc.), les *Théorèmes généraux* (G., nos 909 à 923), et les méthodes de *sommation* (G., nos 943 à 971) et des *sections comparées* (G., nos 974 à 982), dont nul ne conteste la simplicité et l'élégance.

Les *Méthodes infinitésimales* proprement dites (sauf les sommations élémentaires) n'ont pas été employées, car elles n'appartiennent pas aux *Éléments*; par suite, on en trouve à peine quelques traces. (G., no 881, et *Appendice aux Exercices de Géométrie*, 1re *note*.)

Les méthodes données précédemment (nos 1 à 335) pour étudier les questions relatives à la *Géométrie de position* suffisent amplement pour traiter les nombreux exercices qui sont énoncés dans les *Éléments de Géométrie*, et néanmoins c'est avec un vif sentiment de peine que nous avons dû renoncer à exposer, d'une manière élémentaire, les principales *Méthodes modernes*.

L'*Appendice aux Éléments de Géométrie* traite, il est vrai, de plusieurs de ces méthodes. Ainsi on y trouve : les *Transversales* (G., no 743), le *Rapport anharmonique* (G., no 754), la *Division harmonique* (G., no 786), les *Polaires* (G., no 797), les *Figures homothétiques* (G., no 810), les *Figures inverses* (G., no 824).

La *Transformation par inversion* a trouvé place dans l'ouvrage actuel (nos 217 à 249); mais les travaux célèbres de PONCELET, de CHASLES, etc., ne sont pas résumés, car nous n'avons pas exposé les méthodes si puissantes et si fécondes de l'*Homologie*, des *Polaires réciproques*, de l'*Homographie* et de l'*Involution*. Nous ne parlerons pas non plus des théories qu'on a nommées *Géométrie cinématique*, de cette méthode qu'on peut faire remonter à ROBERVAL, que POINSOT a enrichie, et dont M. MANNHEIM a grandement étendu le domaine.

Dès la troisième édition des *Exercices de Géométrie*, nous avons introduit un assez grand nombre d'exercices relatifs à la *Géométrie récente du triangle* (Voir ci-après nos 2262 et suivants); nous espérons par là mettre à la portée des élèves les questions les plus élémentaires relatives aux découvertes contemporaines.

# EXERCICES

DE

# GÉOMÉTRIE

## LIVRE I

### Choix des Exercices.

401. La plupart des constructions graphiques se font en employant simultanément la règle et le compas ; on ne peut donc les indiquer qu'après l'étude de la circonférence, c'est-à-dire à la fin du livre II.

Les questions proposées sont groupées en familles naturelles, autant du moins que cela est utile ou possible.

On peut traiter un groupe donné en ne s'appuyant que sur le paragraphe correspondant des *Éléments de Géométrie*, et sur ceux qu'on aurait déjà rappelés dans les exercices précédents ; néanmoins *il est bon d'accepter toute démonstration satisfaisante, quels que soient les paragraphes invoqués*.

Afin de n'être pas conduit à trop demander aux commençants, le maître doit se rappeler qu'un élève ne traite avec fruit, et surtout avec quelque facilité, les questions de géométrie, que lorsqu'il est parvenu à bien posséder les deux ou trois premiers livres des Éléments.

402. **Note.** Dans cette cinquième édition de nos *Exercices de Géométrie*, nous simplifions ou supprimons plusieurs démonstrations élémentaires données antérieurement. Par ces suppressions, nous avons voulu nous donner la possibilité de compléter certains paragraphes intéressants et mettre à jour un assez grand nombre de notes, sans trop augmenter néanmoins le volume de cet ouvrage.

# THÉORÈMES

## Angles.

Dans ce paragraphe, il n'est question que de l'angle droit et des angles supplémentaires ou complémentaires.

### Théorème 1.

**403.** *Si deux angles adjacents sont supplémentaires, leurs bissectrices sont perpendiculaires l'une à l'autre, et réciproquement.*

La *réciproque* est vraie et se démontre facilement.

### Théorème 2.

**404.** *Si l'angle des bissectrices des deux angles adjacents n'est pas droit, les côtés extérieurs ne sont pas en ligne droite.*

*Lorsque deux angles adjacents ont les côtés extérieurs non en ligne droite, les bissectrices de ces angles ne sont pas perpendiculaires.*

### Théorème 3.

**405.** *Lorsque deux angles, ayant un côté commun, sont placés l'un sur l'autre et que leur différence égale un angle droit, les bissectrices font entre elles un angle égal à la moitié de l'angle droit.*

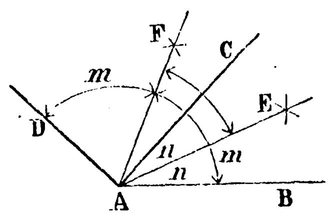



Fig. 273.

Soient BAD — BAC = CAD = 1 droit.

On a : $2m - 2n = 1$ droit,

d'où $m - n = {}^1/_2$ droit.

Or $\mathrm{EAF} = m - n$; donc...

### Théorème 4.

**406.** *Les bissectrices de deux angles opposés par le sommet sont en ligne droite.*

**407.** *Lorsque les bissectrices de deux angles égaux ayant même sommet sont en ligne droite, les angles sont opposés par le sommet.*

### Théorème 4. — 1.

**408.** *Lorsque deux droites se croisent, les bissectrices des quatre angles forment deux droites perpendiculaires entre elles.*

### Théorème 5.

**409.** *La distance du milieu d'une droite à un point quelconque pris sur le prolongement de cette droite, égale la demi-somme des distances de ce point aux extrémités de la droite.*

Soient O le milieu de la droite AB, et M un point quelconque pris sur le prolongement de la droite.

On a : $MA = MO + OA,$

$MB = MO - BO.$

Fig. 274.

Additionnant membre à membre,

on trouve : $MA + MB = 2MO,$

d'où $MO = \frac{1}{2}(MA + MB).$

**Théorème 5. — I.**

**410.** *La distance du milieu d'une droite à un point quelconque pris sur cette droite égale la demi-différence des distances de ce point aux extrémités de la droite.*

Soient O le milieu de la droite AB, et M un point quelconque pris sur cette droite ; on a :

$MA = OA + MO,$

$MB = OB - MO.$

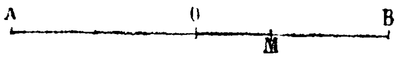


Fig. 275.

Soustrayant membre à membre,

on a : $MA - MB = 2MO,$

d'où $MO = \frac{1}{2}(MA - MB).$

*Remarques.* Lorsque le point mobile M se trouve en O, la distance MO est nulle, et la différence MA — MB est nulle également ; lorsque le point mobile est en B, c'est la distance MB qui est nulle, et on a encore $MO = \frac{1}{2}(MA - MB)$.

**411.** *Discussion.* Afin d'obtenir une formule générale, représentons par $a$ la distance AM, par $b$ la distance BM, par $m$ la distance OM du point milieu O au point M, et par $l$ la longueur de la moitié du segment rectiligne donné, AB.

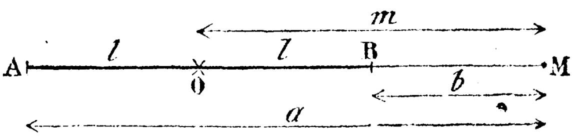


Fig. 276.

On a : $m = a - l,$

$m = b + l;$

d'où, en additionnant, $2m = a + b;$

$$m = \frac{1}{2}(a + b).$$

Ainsi, quand le point est extérieur, $m$ est la demi-somme des distances $a$ et $b$. Or cette formule est générale et s'applique quelle que soit la position du point M, pourvu qu'on adopte la convention que nous allons faire connaître.

**412. Convention des signes.** Une droite peut être parcourue par un mobile en deux sens différents ; les distances comptées dans une direction, d'ailleurs quelconque, *de gauche à droite*, par exemple, seront affectées du signe +, et les distances comptées dans le sens contraire auront le signe —.

Ainsi, en regardant comme positives les distances AM, OM, BM parcourues de gauche à droite, on considérera comme négatives les distances telles que MA, MO, MB allant de droite à gauche.

Conformément à cette convention, on écrit :

$$AM = -MA;$$

parce que les deux longueurs ont même valeur absolue, mais sont parcourues suivant les directions opposées.

*Deuxième cas.* Lorsque le point M est donné sur le segment AB, on peut encore écrire :

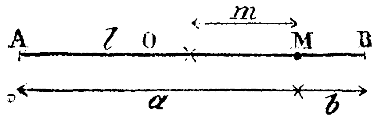


Fig. 277.

$$m = \frac{1}{2}(a + b).$$

En effet, ainsi qu'on l'a vu (nº 410), on a :

$$OM = \frac{1}{2}(AM - BM);$$

mais en regardant OM et AM comme des grandeurs positives, BM, dirigée en sens contraire, est négative ; donc la formule

$$m = \frac{1}{2}(a + b)$$

est encore vérifiée ; mais la quantité $b$ est négative lorsque M est sur le segment donné AB ; donc le *théorème général* suivant :

**Théorème 5. — II.**

**413.** *Lorsque trois points* A, B, M, *sont en ligne droite, la distance* m *de l'un d'eux au point milieu du segment déterminé par les deux autres est la moyenne arithmétique des distances du même point à chacun des deux autres.*

*Remarque.* Pour que deux des trois points coïncident, il faut que $a$ ou $b$ soit nul.

$m$ est nul lorsque M est au point milieu du segment AB ; dans ce cas, la somme algébrique $(a + b)$ doit être nulle.

En effet, elle devient :

$$OA + OB.$$

Or ces deux grandeurs ont même valeur absolue et sont de signes contraires.

La discussion précédente s'applique à l'exercice suivant.

**Théorème 6.**

**414.** *L'angle formé par la bissectrice d'un angle et une droite quelconque menée hors de cet angle par le sommet, égale la demi-somme des angles que forme cette droite avec les côtés de l'angle primitif.*

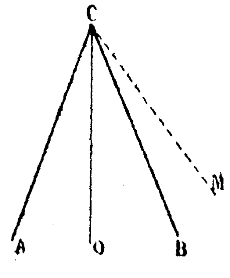


Fig. 278.

Soient CO la bissectrice de l'angle ACB, et CM une droite quelconque menée hors de cet angle par le sommet.

On a :

$$MCA + MCB = 2MCO,$$
$$MCO = \tfrac{1}{2}(MCA + MCB).$$

*Remarque.* Pour que ce théorème et le théorème suivant puissent s'appliquer d'une manière générale, les côtés de l'angle donné, la bissectrice et la droite mobile doivent être considérés comme indéfinis, même au delà du sommet.

### Théorème 6. — 1.

**415.** *L'angle formé par la bissectrice d'un angle et une droite quelconque menée dans cet angle par le sommet, égale la demi-différence des angles partiels que cette droite détermine dans l'angle primitif.*

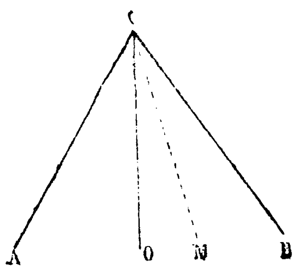


Fig. 279.

Soient CO la bissectrice de l'angle ACB, et CM une droite quelconque menée dans cet angle par le sommet.

On a : $MCA - MCB = 2MCO$,

angle $MCO = {}^1/_2(MCA - MCB)$.

*Extension.* On a des théorèmes analogues pour les arcs de circonférence, pour les secteurs circulaires. Il en est de même pour les fuseaux sphériques, les onglets sphériques qui correspondent à un même diamètre, et il en est encore ainsi pour les zones sphériques déterminées par les plans parallèles.

Dans tous les cas précédents, la démonstration est identique à celle des exercices connus (nos 409, 410 et 413).

## Perpendiculaires et Obliques.

**416.** Il suffit de donner un petit nombre d'exercices, car la plupart des auteurs préfèrent s'appuyer sur les cas d'égalité des triangles, plutôt que de tirer du théorème des obliques toutes les conséquences qu'on pourrait en déduire.

**417. Méthode de retournement.** Pour démontrer que *deux obliques dont les pieds s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales,* on a recours à la *méthode de retournement*. (G., n° 38, 2°.) Cette méthode est très simple et peut être considérée comme n'étant qu'un cas particulier de la méthode de superposition, employée par tous les auteurs pour démontrer les deux premiers cas d'égalité des triangles.

Utilisée en premier lieu pour les obliques égales, la méthode de retournement permet de démontrer directement que deux triangles sont superposables lorsqu'ils ont les trois côtés respectivement égaux (G., n° 52), et, par suite, les trois cas d'égalité sont démontrés d'une manière analogue; néanmoins *il est d'usage de ne recourir que rarement au retournement des figures,* bien que cette méthode ne donne prise à aucune objection sérieuse.

Nous avons déjà employé la méthode de retournement à la résolution de plusieurs problèmes. (Voir § II, *Figures symétriques,* nos 145 à 152.)

**Théorème 7.**

**418.** *Deux obliques dont les pieds s'écartent également du pied de la perpendiculaire, font des angles égaux avec cette perpendiculaire. Ces obliques font aussi des angles égaux avec la droite qui joint leurs pieds.*

**Théorème 7. — I.**

**419.** *Deux obliques sont égales dans les cas suivants :*

1° *Lorsque la perpendiculaire est bissectrice de l'angle qu'elles forment ;*

2° *Lorsque leurs pieds sont équidistants du pied de la perpendiculaire ;*

3° *Lorsqu'elles font des angles égaux avec la droite qui joint leurs pieds.*

**Théorème 7. — II.**

**420.** *Toute perpendiculaire à la bissectrice d'un angle coupe les côtés de cet angle en deux points également éloignés du sommet, et le point milieu de cette perpendiculaire est sur la bissectrice.*

**Théorème 8.**

**421.** *Démontrer directement que tout point pris hors de la perpendiculaire élevée au milieu d'une droite est inégalement distant des extrémités de cette droite.*

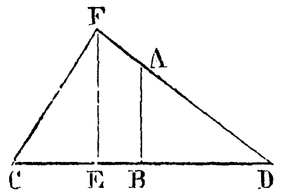


Fig. 280.

La démonstration suivante est très simple.

Soit F le point donné pris hors de la perpendiculaire AB élevée au milieu de CD.

En abaissant une perpendiculaire FE sur CD, le pied E ne peut coïncider avec B, sans quoi il y aurait deux perpendiculaires élevées à une même droite, par un même point ; donc les lignes CE, DE sont inégales, et les distances FC, FD sont des obliques inégales, car elles sont inégalement éloignées du pied E de la perpendiculaire FE.

**Théorème 9.**

**422.** *Si d'un point* A, *extérieur à une droite* MN, *on mène à cette droite la perpendiculaire* AB *et les obliques* AC, AD, AE, *et si ces droites croissent successivement d'une même quantité, les distances* CD, DE *iront en diminuant.* (N. A., 1846, p. 448, HUET ; 479, DORMOY.)

On a, d'après les données :

$$AE - AD = AD - AC,$$

d'où

$$AE + AC = 2AD.$$

Prolongeons AD d'une quantité égale à elle-même; prenons $DH = DC$ et menons GH.

Il suffit de prouver que l'oblique AH est $> AE$; car on aura, dans ce cas,

$$DE < DC.$$

Or les triangles égaux ADC, HDG donnent :

$$HG = AC;$$

mais $$AH + HG > AG;$$

donc $$AH + AC > 2AD;$$

mais $$AE + AC = 2AD;$$

donc $$AH > AE.$$

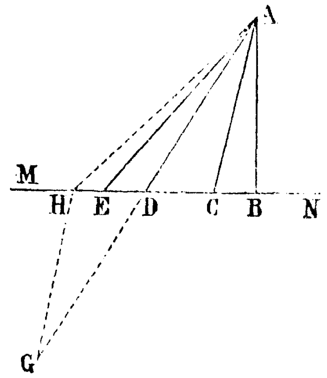


Fig. 281.

## Parallèles.

**423**. La théorie des parallèles fournit deux théorèmes principaux, que l'on utilise pour résoudre quelques exercices.

*Les parallèles coupées par une sécante forment des angles correspondants égaux et des angles alternes-internes égaux.*

*Les parties de parallèles comprises entre parallèles sont égales.* Comme cas particulier de ce dernier théorème, on sait que *les perpendiculaires comprises entre deux parallèles sont égales.*

Sans recourir aux parallèles, on peut établir plusieurs des propriétés du triangle; mais l'ordre que nous adoptons nous permettra de placer dans un même groupe un grand nombre de questions relatives au triangle.

**424. Postulatum.** Malgré les efforts des plus grands géomètres, les *Éléments de géométrie* ne donnent la théorie des parallèles qu'à l'aide d'un *postulatum*. Voici celui d'Euclide :

*Deux droites se rencontrent, lorsque, étant coupées par une sécante, elles forment des angles intérieurs non supplémentaires.*

Dans la plupart des traités récemment publiés, on a recours au postulatum suivant, proposé par Gergonne dans les *Annales de mathématiques*, tome III, 1812-1813, p. 353. Théorème 4.

*Par un point on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.*

*Démonstration.* Pour exposer la théorie des parallèles, sans employer de postulatum, il faut recourir à des considérations infinitésimales qui paraissent déplacées, car il faut les présenter au début des éléments de Géométrie. La démonstration que l'on cite le plus fréquemment est celle de Bertrand de Genève; elle considère l'espace plan, illimité, compris entre les côtés d'un angle, et a recours à des *bandes infinies;* déjà proposées par A. Arnauld dans ses *Nouveaux Éléments de Géométrie,* publiés en 1667.

**I. — Lemme.**

**425.** *Sur l'un des côtés* AX *d'un angle droit* XAA′ *on prend des longueurs égales* AB, BC, CD...; *par les points de division, on mène des perpendiculaires* BB′ CC′, *etc., au côté* AX; *les bandes* A′ABB′ *ainsi formées sont illimitées dans le sens de* A′; *néanmoins il est impossible de recouvrir l'espace angulaire* XAA′, *quelque nombre de bandes que l'on puisse prendre.*

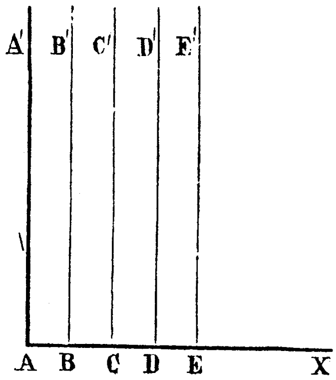


Fig. 282.

En effet, les bandes sont illimitées dans le sens de A′; mais un nombre fini de longueurs telles que AB ne peut jamais égaler la ligne AX qui se prolonge indéfiniment vers la droite; donc les bandes formées par les parallèles AA′ BB′ ... ne peuvent pas recouvrir complètement l'espace angulaire XAA′.

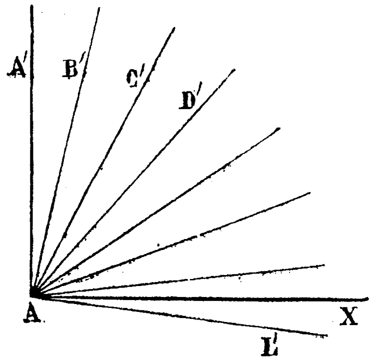


Fig. 283.

**II. — Lemme.**

**426.** *Un angle* A′AB′, *quelque petit qu'il soit, étant ajouté successivement à lui-même peut recouvrir complètement l'angle droit* XAA′.

En effet, les quantités comparées A′AX, A′AB′ étant de même espèce, il est évident qu'en prenant la grandeur A′AB′ un nombre de fois suffisant, on recouvrira l'espace A′AX, et on dépassera même AX.

**III. — Théorème.**

**427.** *Deux droites* CD *et* AB, *dont l'une est perpendiculaire et l'autre oblique à une troisième droite* AX, *sont nécessairement concourantes.*

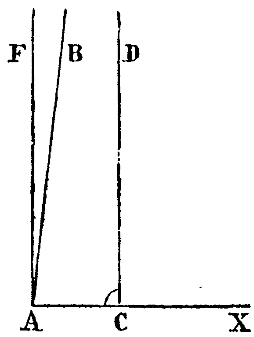


Fig. 284.

En effet élevons la perpendiculaire AF. Les deux perpendiculaires AF, CD, forment une bande qui ne saurait contenir l'espace angulaire illimité FAB, car un nombre fini de grandeurs telles que FAB peut recouvrir FAX, tandis que le même nombre de bandes égales à FACD ne peut le recouvrir, mais AF est un côté commun à l'angle et à la bande; donc il faut que l'autre côté AB coupe CD, afin que l'espace angulaire FAB puisse se développer hors de la bande.

Donc AB et CD sont des lignes concourantes.

**428. Note.** 1° Il est plus facile d'entrevoir que d'exprimer tout ce qu'il y a d'étrange dans la démonstration précédente.

En fait, on compare des espaces illimités, un angle et une bande qu'on ne peut rapporter l'un à l'autre.

S'il est vrai de dire que les *postulata* ne satisfont pas complètement l'esprit, on peut bien en dire autant de certaines démonstrations.

TERQUEM fait de sérieuses objections à la démonstration précédente. (N. A. 1845, p. 549 et 550.)

La démonstration que LEGENDRE a donnée du *postulatum*, dans l'*Appendice* de ses *Éléments de Géométrie,* n'échappe pas non plus à une critique sérieuse.

2° On parvient directement, *sans recourir à la théorie des parallèles*, à démontrer que la somme des trois angles d'un triangle égale deux droits, si l'on adopte les définitions et le raisonnement de BERTRAND de Genève. *Annales de Gergonne,* tome III (1812-1813) pages 355, 356; mais à ce sujet, voir N. A., 1842, pages 210, 213, un art. de TERQUEM.

3° On nomme *Géométries non euclidiennes*, les Géométries qui ne s'appuient pas sur le *Postulatum d'Euclide*. La première est due à LOBATCHEFSKY, géomètre russe (1793-1856); on en trouve un résumé dans l'*Appendice du traité de Géométrie,* par MM. ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE.

La *Géométrie riemannienne,* du nom de son auteur RIEMANN (1826-1866), ne s'appuie pas non plus sur le *Postulatum d'Euclide* (voir *Mathesis,* 1894, page 180, article par M. P. MANSION).

Comme contre-partie aux études qui préconisent les *Géométries non euclidiennes,* on peut lire les articles de MM. DE COMMINES DE MARCILLY et FROLOW de Genève. (A. F., 1889, page 88 et 1904, page 88.)

Dans l'ouvrage de M. G. LECHALAS : *Etude* sur l'Espace et le Temps (2e édition 1909) ; on trouvera d'utiles indications sur le *Postulatum d'Euclide* et la *Géométrie générale.* (Ch. III et IV.)

* BERTRAND LOUIS, né à Genève en 1731, mort en 1812, élève et ami d'Euler, a publié des *Eléments de Géométrie,* et a donné son nom à une *théorie des parallèles* (nos 425-428).

**Théorème 10.**

**429.** *Si deux angles ont les côtés parallèles, leurs bissectrices sont parallèles ou perpendiculaires.*

Si les angles considérés, ABC et DEF, sont de même nature (aigus ou obtus), ces angles sont égaux (G., n° 85), et leurs moitiés sont aussi *égales*.

Si l'on considère l'angle aigu ABC et l'angle obtus DEG, ces deux angles sont supplémentaires; et la bissectrice MN, perpendiculaire à EK (n° 403), l'est aussi à la parallèle BI.

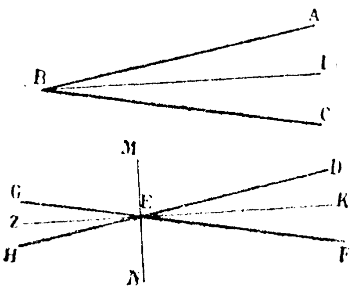


Fig. 285.

**430.** *Si deux angles ont les côtés respectivement perpendiculaires, leurs bissectrices sont perpendiculaires ou parallèles.*

**Théorème 11.**

**431.** *La parallèle à la base d'un triangle menée par le milieu d'un côté égale la moitié de la base et passe par le milieu de l'autre côté.*

Soit ABC un triangle quelconque. Par le point F, milieu du côté AB, menons FE parallèle à BC, et ED parallèle à AB.

La figure FBDE est un parallélogramme; ainsi FE = BD, et FB = ED.

Les triangles AFE et EDC sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à des angles respectivement égaux ; donc

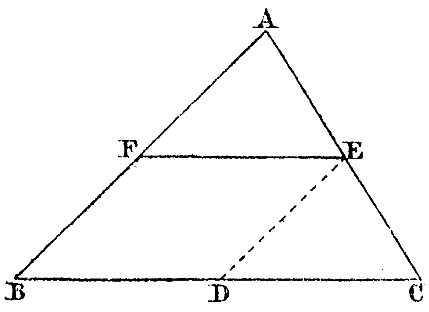


Fig. 286.

$$AF = ED = FB, \quad BD = FE = DC.$$

Ainsi la droite FE joint les milieux des côtés AB et AC; et cette droite égale la moitié de la base BC.

### Théorème 11. — I.

**432.** *En joignant par des droites les milieux des côtés d'un triangle, on le partage en quatre triangles égaux.*

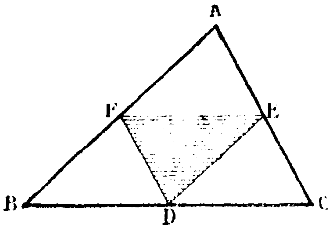


Fig. 287.

Soient D, E, F, les milieux des côtés du triangle ABC. Chacune des droites DE, EF, FD, est la moitié du côté qui lui est parallèle (nº 431). Donc les quatre triangles formés dans la figure sont égaux comme ayant les côtés respectivement égaux.

*Remarque.* Par rapport à un triangle donné ABC, le triangle DEF obtenu en joignant deux à deux les points milieux des côtés du premier est nommé *triangle médian*, ou *triangle complémentaire*. (Voir ci-après nº 434 **a.**)

### Théorème 12.

**433.** *La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle, et la médiane qui aboutit au troisième côté, se coupent respectivement en deux parties égales.*

1re *Démonstration.* En effet, on a déjà vu que la droite FE est parallèle à BC (nº 431); et la droite FG, menée dans le triangle ABD par le milieu F, parallèlement à BD, passe par le milieu G de l'autre côté AD; elle égale aussi la moitié de la base BD; de même GE est la moitié de DC; donc FG = GE. Donc le point G est le milieu de la médiane AD et le milieu de FE.

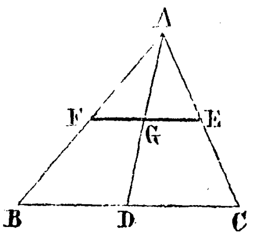


Fig. 288.

2e *Démonstration.* En joignant le point D aux points E, F, on formerait un parallélogramme (nº 432); or les diagonales AD, FE, d'un parallélogramme se coupent respectivement en parties égales. Donc

$$AG = GD \quad \text{et} \quad FG = GE.$$

### Théorème 13.

**434.** *Les droites menées par les sommets d'un triangle, parallèlement aux côtés opposés, forment un nouveau triangle qui a les sommets primitifs pour milieux de ses côtés.*

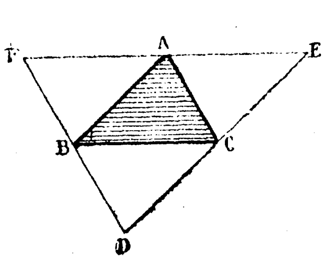


Fig. 289.

Soient ABC le triangle proposé, et DEF le nouveau triangle obtenu.

A cause des trois parallélogrammes ABCE, ACBF et ACDB (G., nos 96 et 100), on a :

$$AE = BC = AF.$$

$$FB = AC = BD\,; \quad CD = AB = CE.$$

Donc les points A, B, C, sont les milieux des nouveaux côtés.

*Remarque.* Le nouveau triangle DEF se compose de quatre triangles égaux au triangle primitif.

**434 a. Note.** Par rapport à un triangle donné ABC (fig. 289), le triangle DEF qu'on obtient en menant par chaque sommet une parallèle au côté opposé est appelé *triangle anticomplémentaire*.

Les appellations de *triangle complémentaire* (n° 432) et de *triangle anticomplémentaire* (n° 434) sont dues à M. NEUBERG, professeur à l'Université de Liége, auteur de nombreux et savants mémoires mathématiques; fondateur, avec M. MANSION, professeur à l'Université de Gand, d'une remarquable publication, *Mathesis*, que nous aurons fréquemment à citer.

La *Géométrie récente*, ou *Géométrie du triangle*, a fait introduire un grand nombre d'appellations nouvelles, car il fallait préciser les découvertes et les exposer clairement sans recourir à de trop longues périphrases.

MATHESIS, *Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne*, par MM. P. MANSION et J. NEUBERG. Cette publication paraît depuis 1881.

### Théorème 13. — I.

**435.** *La droite* ALN, *qui joint un sommet d'un triangle* ADB *au point milieu* L *d'une des médianes des autres sommets, divise le côté* BD *opposé au sommet considéré en deux parties, dont l'une est double de l'autre.*

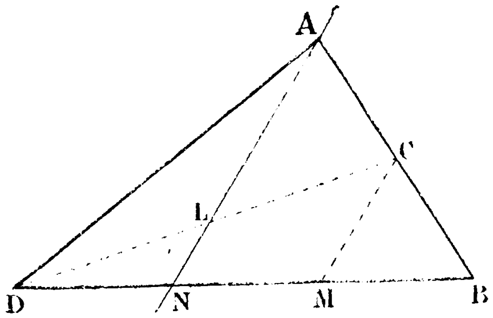


Fig. 290.

Par le point C, milieu de AB, menons CM parallèle à AN.

On sait que toute parallèle menée à la base d'un triangle par le point milieu d'un côté, divise l'autre côté en deux parties égales (n° 431).

Dans le triangle ABN, on a donc :

$$NM = MB.$$

Dans le triangle DCM, on a aussi DN = NM, car L est le milieu de DC; donc $\quad DN = NM = MB; \quad DN = \frac{BN}{2}.$

*Remarque.* $\quad LN = \frac{CM}{2} = \frac{AN}{4}.$

### Théorème 14.

**436.** *Par les extrémités* A *et* C *et par le milieu* B *d'une droite, on mène trois parallèles limitées à une autre droite* DEF; *prouver que la ligne* BE *est la demi-somme algébrique des deux autres parallèles.*

Représentons par $a$, $b$, $c$, les trois lignes.

Trois cas peuvent se présenter.

**1ᵉʳ Cas.** *Les droites* AC *et* DC *ont une extrémité commune* (fig. 291).

On sait que la parallèle BE, menée à la base d'un triangle par le point milieu B d'un des côtés, égale la moitié de la base (nº 431); et comme la ligne CF est nulle, on peut écrire :

$$b = \frac{1}{2}(a + c).$$

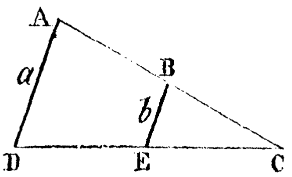



Fig. 291.

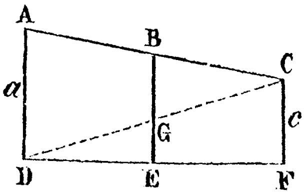



Fig. 292.

**2e Cas.** *Les droites* AC, DF *ne se rencontrent pas* (fig. 292).

BE est la base moyenne d'un trapèze; elle égale donc la demi-somme des bases parallèles.

En effet, d'après le 1er cas,

$$BG = \frac{a}{2}\,; \quad GE = \frac{c}{2}\,; \quad \text{donc} \quad b = \frac{1}{2}(a + c).$$

**3e Cas.** *Les droites* AF, DC se coupent entre A et F (fig. 293).

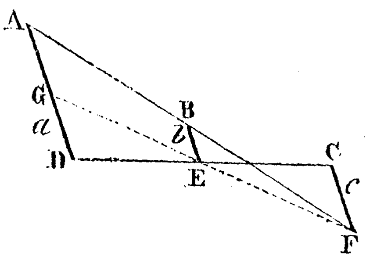



Fig. 293.

Menons FEG.

$$BE = \frac{1}{2}AG \quad \text{et} \quad DG = CF\,;$$

donc $\qquad b = \frac{1}{2}(AD - CF).$

En réalité, BE est la demi-différence des lignes extrêmes; mais, afin de généraliser et de comprendre tous les cas dans un même énoncé, on regarde CF comme ayant une valeur négative lorsqu'elle est de sens contraire à AD ; on écrit donc encore : $b = \frac{1}{2}(a + c)$;
mais, dans le troisième cas, la valeur absolue de $c$ doit être retranchée de la valeur de $a$.

*Remarque.* Dans un grand nombre de questions, l'énoncé général ne s'applique à certains cas qu'autant qu'on admet des quantités négatives, c'est-à-dire la convention des signes (nº 412).

### Théorème 15.

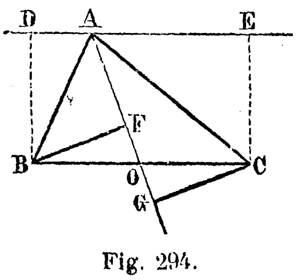



Fig. 294.

**437.** *Dans un triangle, chaque médiane est équidistante des deux autres sommets.*

Puisque AO est médiane, les triangles rectangles BOF, COG sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un angle aigu égal; donc

$$BF = CG.$$

### Théorème 15. — I.

***438.** Dans un triangle, un sommet et le point milieu du côté opposé sont équidistants de la droite qui joint les milieux des deux autres côtés,* *et ces deux points milieux sont équidistants de la médiane qui passe par le point milieu de l'autre côté.*

## Trois droites concourantes.

**439.** Dans un assez grand nombre de cas, on doit prouver que trois droites, déterminées par certaines conditions, vont concourir en un même point.

On peut procéder comme il suit :

Après avoir déterminé le point de concours de deux des trois droites et recherché les particularités que présente la situation de ce point, on démontre qu'il doit appartenir à la troisième droite (*Exemples*, nos 443, 444), ou bien, par le point de concours des deux premières lignes, on mène une droite qui remplisse certaines conditions imposées aux données, et il suffit de prouver que la ligne ainsi menée jouit de toutes les propriétés de la troisième droite (*Exemples*, nos 440, 441). Dès lors on peut conclure que les trois lignes données concourent en un même point.

En résumé, on cherche à démontrer que le point commun à deux droites données appartient au lieu géométrique constitué par la troisième droite.

### Théorème 16.

**440.** *Les perpendiculaires menées aux deux côtés d'un angle, à des distances égales du sommet, se rencontrent sur la bissectrice.*

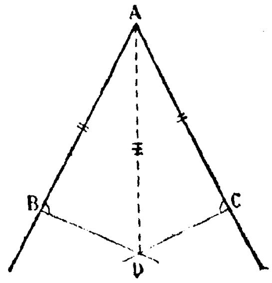


Fig. 295.

Soient D le point de rencontre des perpendiculaires menées à AB et à AC, lorsque AB = AC; joignons le point A au point D.

Les triangles rectangles ABD et ACD sont égaux, comme ayant même hypoténuse AD et un autre côté égal, AB = AC. Ainsi les angles formés en A sont égaux, et AD est bissectrice de l'angle A. Donc *les perpendiculaires...*

### Théorème 17.

**441.** *Étant donné un angle quelconque* A, *si l'on porte sur les côtés des distances égales* AB *et* AD, AC *et* AE, *les droites* BE *et* CD *sont égales, et se rencontrent sur la bissectrice.*

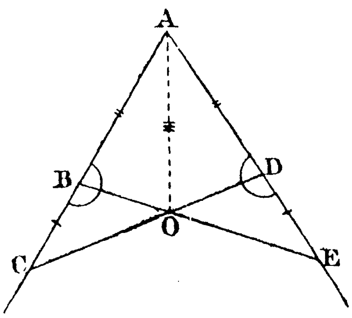


Fig. 296.

Menons AO. D'après les données, les triangles ABE et ADC sont égaux, comme ayant en A un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux. Donc BE = CD... De plus, les angles en C et en E sont égaux, ainsi que les angles en B et en D, et les suppléments de ces derniers sont pareillement égaux.

Ainsi les triangles OBC et ODE sont égaux, comme ayant un côté égal (BC, DE) adjacent à des angles respectivement égaux ; donc OB = OD.

Enfin les triangles AOB et AOD sont égaux comme ayant les trois côtés respectivement égaux ; ainsi les angles en A sont égaux, et la droite AO est bissectrice de l'angle A.

**Théorème 17. — I.**

**442.** *Deux droites comprises dans l'intérieur d'un angle sont égales lorsqu'elles se coupent sur la bissectrice, et qu'elles sont également inclinées sur cette bissectrice.*

**Théorème 18.**

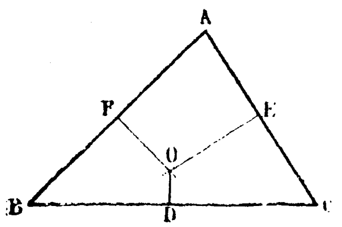


Fig. 297.

**443.** *Les trois perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se rencontrent en un même point, et ce point est équidistant des trois sommets.*

**Note.** M. NEUBERG a proposé le terme de *médiatrice* pour désigner la perpendiculaire élevée au milieu d'un côté du triangle; par suite, le théorème peut s'énoncer ainsi : *Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes,* etc.

**Théorème 19.**

**444.** *Les trois bissectrices des angles d'un triangle se rencontrent en un même point, et ce point est équidistant des trois côtés.*

**Théorème 20.**

**445.** *Les trois hauteurs d'un triangle se rencontrent en un même point.* (ARCHIMÈDE, *Lemme* 5.)

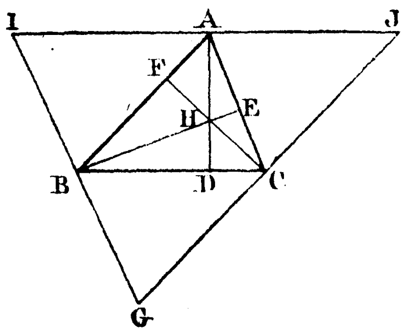


Fig. 298.

*Démonstration de Gauss.* Soit ABC un triangle quelconque. Par les sommets A, B, C, menons les parallèles aux côtés opposés.

Dans le triangle GIJ, les points A, B, C, sont les milieux des côtés (nº 434); et les hauteurs du triangle ABC ne sont autres que les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés du triangle GIJ. Or (nº 443) ces trois médiatrices se rencontrent en un même point. *Donc les trois hauteurs...* — (Voir aussi nº 1397 a.)

**Note.** GAUSS, né à Brunswick en 1777, mort à Gœttingue en 1855. Savant astronome mathématicien; il a démontré qu'*au moyen de la règle et du compas* on peut inscrire au cercle le polygone régulier de dix-sept côtés.

La démonstration géométrique du théorème ci-dessus est attribuée à AMPÈRE. Elle est reproduite dans les *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire* de M. CATALAN.

AMPÈRE, né à Poleymieux, près de Lyon, en 1775, mort en 1836, est surtout célèbre par la théorie *électrodynamique* dont l'expérience d'ŒRSTED fut l'occasion.

### Théorème 20. — I.

**446.** *Sur deux côtés* AC, BC *d'un triangle quelconque* ABC, *on construit des carrés; prouver que les droites* AD, BE *se coupent sur la hauteur* CF *du troisième sommet.*

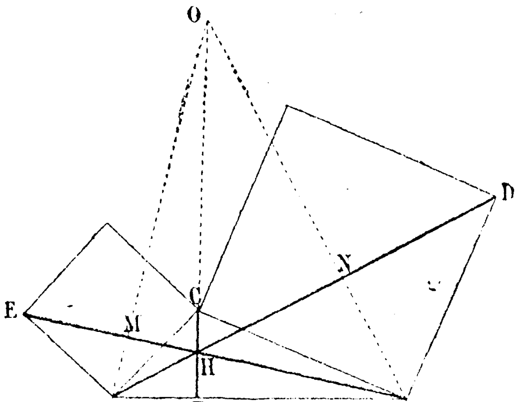


Fig. 299.

Le théorème sera démontré si l'on prouve que les perpendiculaires AM, BN, abaissées respectivement du sommet A sur BE et de B sur AD, se coupent sur la hauteur CF; car si cela a lieu, les droites AD, BE, CF seront les hauteurs d'un triangle AOB.

Prolongeons AM jusqu'à sa rencontre avec FC; soit O l'intersection, déterminons la longueur de CO.

Les triangles EAB, ACO sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, car $AE = AC$, et les angles AEB, CAO sont égaux, comme ayant les côtés perpendiculaires.

Il en est de même des angles EAB, ACO.

Donc $$CO = AB.$$

En prolongeant BN, on obtiendrait un triangle O'CB égal au triangle ABD, et dans ces triangles on aurait :

$$O'C = AB = OC,$$

ce qui exige que O et O' se confondent.

Donc les droites AD, BE, CF passent par un même point.

**Note.** 1° Cette belle démonstration, d'une question d'ailleurs connue depuis 1817, se trouve dans le *Journal de mathématiques élémentaires,* par M. VUIBERT (année 1879-1880, page 36). Nous aurons occasion de citer encore cet intéressant recueil.

2° Le théorème pour le triangle rectangle a été proposé en 1823 par le *Philosophical Magazine,* et démontré par GERGONNE, tome XIV des *Annales,* pages 334 et 374; puis généralisé au tome XV, 1824-1825, par GERGONNE et QUERRET, page 84. D'ailleurs le théorème 446 pour les triangles quelconques avait été donné dès 1816-1817, dans le tome VII des *Annales,* page 321, par VECTEN, ancien professeur de mathématiques spéciales à Nîmes, auteur de la première étude connue de la figure qu'on obtient en construisant des carrés sur chaque côté d'un triangle quelconque (voir ci-après, n$^{os}$ 1773, k-n).

### Théorème 21.

**447.** *Les trois médianes d'un triangle se rencontrent en un même point, et ce point est situé aux* $^2/_3$ *de chaque médiane en partant des sommets.*

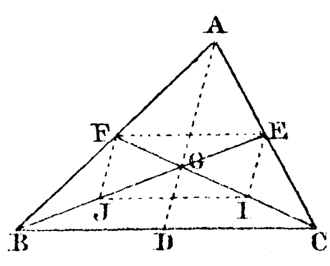


Fig. 300.

Soit ABC un triangle quelconque, et soit G le point de rencontre des deux médianes BE et CF.

Menons FE; cette ligne est parallèle à BC, et égale à sa moitié (n° 431). Dans le triangle BGC, menons IJ par les milieux des côtés GB et GC; cette ligne IJ est parallèle à BC, et égale à sa moitié.

Ainsi les deux droites EF et IJ sont égales et parallèles, la figure EFIJ est un parallélogramme, et le point G est le milieu des deux diagonales. On a donc EG = GJ = JB, etc.

Et puisque deux médianes quelconques BE et CF se coupent aux $^2/_3$ de leur longueur, c'est au même point G que doit passer la troisième médiane. Donc les *trois médianes...*

448. *Remarque.* La démonstration précédente est très ingénieuse, mais elle est peu naturelle. La démonstration la plus simple repose sur le livre III. (G., n° 230.)

## Triangle quelconque.

**449.** Les propriétés déjà indiquées pour le triangle (nos 444 à 448) sont principalement des propriétés de position : ainsi les trois hauteurs se coupent au même point : il en est de même des trois bissectrices, des trois médianes, etc. Il reste à établir les propriétés de relation. Dans le triangle, on a des *relations linéaires* et des *relations angulaires.*

Les relations, entre certains éléments linéaires d'un triangle, n'exigent guère que la connaissance des définitions relatives au triangle, du théorème des obliques (G., n° 23) et du théorème : *Chaque côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres.* (G., n° 49.)

Les *relations angulaires* se déduisent du théorème fondamental : *La somme des angles d'un triangle quelconque est égale à deux angles droits* (G., n° 92), et des corollaires qui en découlent.

### Théorème 22.

**450.** *Si l'on joint les trois sommets d'un triangle à un point quelconque pris à l'intérieur, la somme des trois lignes intérieures ainsi tracées est comprise entre la somme et la demi-somme des trois côtés.*

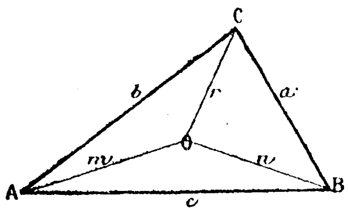



Fig. 301.

On a : $c < m + n < a + b;$
$a < n + r < b + c;$
$b < r + m < a + c;$

d'où $$a + b + c < 2m + 2n + 2r < 2a + 2b + 2c,$$

et enfin $$\frac{a+b+c}{2} < m + n + r < a + b + c.$$

**Note.** 1° La somme des trois lignes intérieures est moindre que la somme des deux plus longs côtés du triangle : voir ci-après le *théorème de Visschers,* n° 460 a.

2° Le minimum de la somme $m + n + r$ a lieu lorsque le point O est le point d'où l'on voit chaque côté du triangle sous le même angle (nos 904 et 1079).

### Théorème 22. — I.

**451.** *La distance d'un sommet d'un triangle à un point quelconque pris sur le côté opposé à ce sommet, est plus grande que la moitié du résultat qu'on obtient en retranchant ce côté de la somme des deux autres.*

### Théorème 23.

432. *La hauteur d'un triangle est moindre que la demi-somme des deux côtés qui partent du même sommet.*

### Théorème 23. — I.

433. *La somme des trois hauteurs d'un triangle est moindre que la somme des trois côtés.*

On a séparément :

$$d < b;$$
$$e < c;$$
$$f < a;$$

d'où, par addition,

$$d + e + f < a + b + c.$$

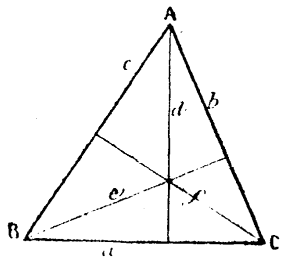


Fig. 302.

### Théorème 23. — II.

434. *La somme des trois hauteurs d'un triangle acutangle est plus grande que la demi-somme des trois côtés.*

### Théorème 24.

435. *Une médiane quelconque d'un triangle est plus petite que la demi-somme des deux côtés adjacents.*

Soient ABC le triangle, AM la médiane considérée; en prolongeant cette ligne d'une longueur MA′ égale à elle-même et menant A′B, on a :

$$A'B = AC;$$

or $$AA' < AB + BA' \text{ ou } < AB + AC;$$

donc $$AM < \frac{AB + AC}{2}.$$

### Théorème 24. — I.

436. *La somme des trois médianes d'un triangle est comprise entre le périmètre et le demi-périmètre de ce triangle.*

On s'appuie sur le théorème précédent; mais les limites peuvent être resserrées davantage, ainsi que le prouve le théorème suivant.

### Théorème 25.

437. *La somme des trois médianes d'un triangle est plus grande que les $^3/_4$ du périmètre.*

Soient $a$, $b$, $c$, les trois côtés; $m$, $n$, $p$, les trois médianes du triangle ABC.

Puisque les médianes se coupent aux $^2/_3$ de leur longueur (n° 447, ou G., n° 230), les triangles AOB, BOC, COA, donnent :

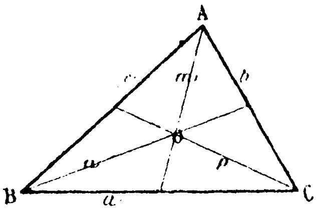



Fig. 303.

$$^2/_3 m + {^2/_3} n > c;$$
$$^2/_3 n + {^2/_3} p > a;$$
$$^2/_3 p + {^2/_3} m > b;$$

d'où $\quad {^4/_3}(m + n + p) > a + b + c;$

et, en multipliant par 3 et divisant par 4 :

$$m + n + p > {^3/_4}(a + b + c).$$

**Théorème 25. — I.**

**458.** *Si, par le point de concours des bissectrices d'un triangle, on mène une parallèle à l'un des côtés, cette ligne égale la somme des segments déterminés sur les deux autres côtés, et compris entre les parallèles.*

**Théorème 25. — II.**

**459.** *Si, par le point de concours des bissectrices de deux angles extérieurs d'un triangle, on mène une parallèle* GF *au côté* AC *adjacent aux deux angles, la droite ainsi menée égale la somme des segments* AF *et* CG.

**Théorème 25. — III.**

**460.** *Les bissectrices des angles intérieurs et celles des angles extérieurs d'un triangle donnent lieu à quatre points de concours* (n° 444). *Toute parallèle menée à un côté par un des points de concours, et limitée aux deux autres côtés, égale la somme ou la différence des segments déterminés sur ces côtés par les deux droites parallèles.*

**Théorème 25. — IV.**

**460 a.** *La somme des trois lignes* m, n, r, *qui joignent un point intérieur d'un triangle aux sommets est moindre que la somme des deux plus longs côtés de ce triangle.*

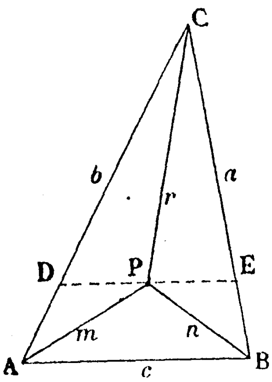



Fig. 303 *bis*.

Soient $c$ le plus petit des côtés et $b$ le plus grand ; on aura :

$$m + n + r < a + b.$$

Menons DPE parallèle à AB. On aura :

$$DC > EC > DE \quad \text{et} \quad CD > CP,$$
$$AP < AD + DP,$$
$$BP < BE + EP,$$
$$CP < DC,$$
$$DE < EC.$$

En additionnant membre à membre les quatre dernières inégalités, on a :

$$AP + BP + CP < AC + BC;$$

ou $\quad m + n + r \quad < a + b.$

**Note.** Le théorème est de M. J. N. VISSCHERS, professeur, à Bois-le-Duc (Hollande). Le théorème a paru en 1902 dans le *De Vriend der Wiskunde*, périodique hollandais.

### Théorème 26.

**461.** *La somme des distances des sommets d'un triangle* ABC *à une droite quelconque* MN *égale la somme des distances de cette même droite aux milieux des trois côtés.*

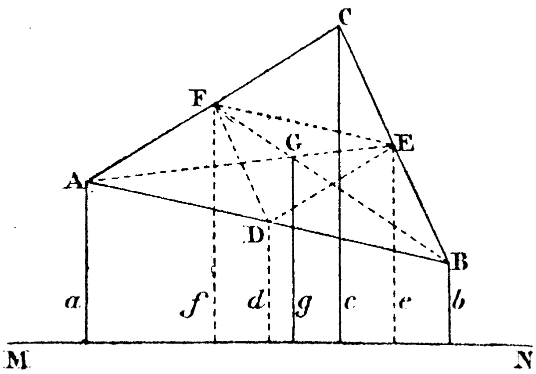



Fig. 304.

En effet, on a (n° 436) :

$$d = \frac{a+b}{2};$$

$$e = \frac{b+c}{2};$$

$$f = \frac{c+a}{2};$$

d'où $d + e + f = a + b + c$.

*Remarque.* En procédant pour le triangle DEF comme pour ABC, etc., on arriverait au point G, point de concours des médianes et centre de gravité du triangle. Alors on a :

$$3g = a + b + c.$$

### Théorème 27.

**462.** *Par le point de concours des médianes d'un triangle, on mène une droite quelconque; la somme des distances des deux sommets situés du même côté de la droite égale la distance du troisième sommet à cette même ligne.*

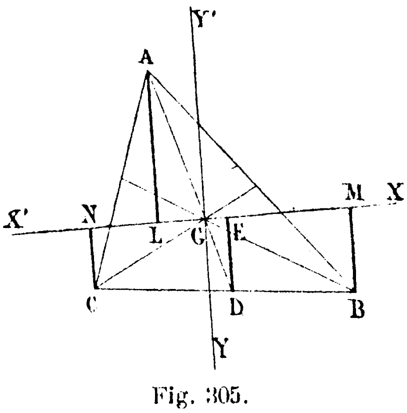



Fig. 305.

Soient G le point de concours des médianes, XX' la droite donnée.

On a : $BM + CN = 2DE$ (n° 436).

Mais les médianes se coupent aux $^2/_3$ de leur longueur, à partir des sommets; ainsi $AG = 2DG$, et par suite $AL = 2DE$ (n° 447).

Donc $AL = BM + CN$.

*Remarque.* On a aussi : $GM = GL + GN$.

En effet, ces grandeurs sont les distances des trois sommets à une droite YY' parallèle à AL.

**463. Note.** Le point G est le *centre de gravité* de la surface du triangle. CARNOT (*Géométrie de position*, 269) l'a aussi nommé centre des moyennes distances des trois sommets du triangle. L'introduction dans les *Eléments de Géométrie* de la notion du *centre des moyennes distances*, ou *barycentre*, nous semble

**due à Bobillier** (*Cours de Géométrie*, pages 55 et 83); **après lui, divers auteurs l'ont adoptée dans leurs ouvrages. On peut citer** Baltzer, § 8, n° 4.

* Bobillier (1787-1832). On peut voir I. M. 1901, p. 329-330; 1902, p. 163-164, les articles de MM. Brocard, Mannheim, Alasia.

**463 a.** *Le centre des moyennes distances des points d'intersection de deux droites fixes* OX, OY *et d'un cercle de rayon variable, dont le centre est fixe, ne varie pas, quel que soit le rayon du cercle qui coupe les deux droites.*

Soient A, B, les points d'intersection sur OX; C, D, sur OY. Le centre de gravité G. est le point de rencontre des perpendiculaires élevées respectivement à OX, OY, par les points milieux des segments AB et CD; or ces perpendiculaires ne varient pas quel que soit le rayon du cercle.

**Note**. Le théorème est vrai lorsqu'on remplace OX, OY par une ellipse. (N. A. 1904, page 96, d'Ocagne et Barisien.)

### Théorème 28.

**464.** *La somme des distances des trois sommets d'un triangle à une droite quelconque, égale trois fois la distance de la même droite au point de concours des médianes.*

Soient $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$, $GG' = g$ (fig. 306).

Il faut prouver que l'on a :

$$a + b + c = 3g \quad \text{ou} \quad g = {}^1/_3 (a + b + c).$$

1re *Démonstration*. Menons XX′ parallèle à ZZ′.

On a (n° 462) : $AL = BM + CN,$

ou $AL - BM - CN = 0.$

Ajoutons $3g$ à chaque membre de l'égalité.

On a : $g + AL + g - BM + g - CN = 3g,$

ou $AA' + BB' + CC' = 3g;$

donc $g = {}^1/_3 (a + b + c).$

2e *Démonstration*. Prenons $DH = DG$ et joignons HB, HC.

On a : $b + c = 2d$, $2d = g + h$; donc $b + c = g + h$.

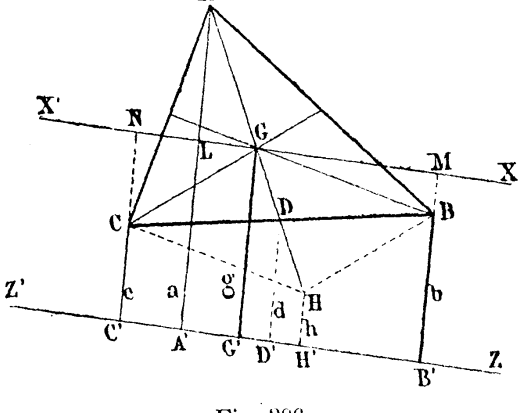



Fig. 306.

Ainsi $a + b + c = a + g + h$, mais $a + h = 2g$,

car $AG = GH;$

donc $a + b + c = 3g.$

**Théorème 29.**

**465.** *La différence des angles qu'une bissectrice intérieure forme avec le côté opposé d'un triangle, égale la différence des angles à la base de ce triangle.*

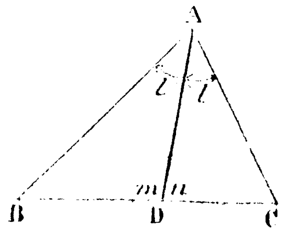


Fig. 307.

En effet, l'angle extérieur à un triangle égale la somme des deux angles intérieurs opposés (G., nº 93, 1º); donc

$$m = C + l;$$
$$n = B + l;$$

d'où $$m - n = C - B.$$

**Théorème 30.**

**466.** *L'angle formé par deux bissectrices intérieures d'un triangle égale un angle droit plus la moitié de l'angle du troisième sommet.*

Il faut prouver qu'on a :

$$BDC = 90^{o} + \frac{A}{2}.$$

En effet, $D = 180^{o} - (DBC + DCB)$;

$$D = 180^{o} - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right).$$

D'ailleurs $\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^{o} - \frac{A}{2}$;

donc $$D = 180^{o} - \left(90^{o} - \frac{A}{2}\right);$$

$$D = 90^{o} + \frac{A}{2}.$$

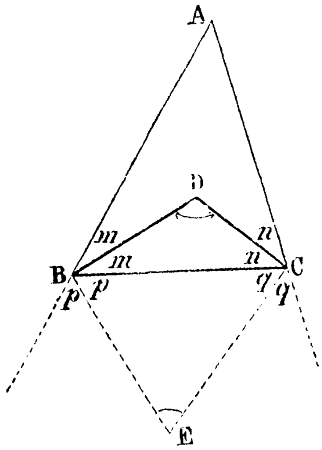


Fig. 308.

**Théorème 30. — I.**

**467.** *L'angle des bissectrices extérieures* $= \frac{B}{2} + \frac{C}{2}$.

On peut le calculer d'une manière analogue à la précédente; d'ailleurs le quadrilatère BCDE a deux angles droits; donc les angles D et E sont supplémentaires.

**Théorème 31.**

**468.** *L'angle formé par la bissectrice de l'angle d'un triangle et par la hauteur abaissée du même sommet, égale la demi-différence des angles à la base.* (J. Mention, *N. A.* — 1850, p. 326.)

L'angle $\frac{A}{2} = \frac{180^{o} - (B + C)}{2}$.

L'angle $DAE = \frac{A}{2} - CAE.$

Mais $CAE = 90^{o} - C;$

donc $DAE = \frac{180^{o} - (B + C)}{2} - (90^{o} - C);$

$$DAE = \frac{180^{o} - B - C - 180^{o} + 2C}{2};$$

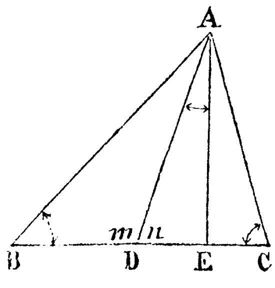


Fig. 309.

d'où $$\text{DAE} = \frac{C - B}{2}.$$

**469.** *Remarque.* D'après un théorème connu (n° 465),

$$C - B = m - n;$$

on a donc aussi : $$\text{Angle DAE} = \frac{m - n}{2};$$

*Vérification.* $$\text{DAE} = 90^\circ - n,$$

d'où $$\frac{m - n}{2} = 90^\circ - n;$$

ou $$m - n = 180^\circ - 2n;$$

$$m + n = 180^\circ.$$

On peut démontrer directement que

$$\text{DAE} = \frac{m - n}{2}$$

Il suffit d'élever, au point D, une perpendiculaire à BC.

On peut dire aussi : l'angle $m$, extérieur au triangle rectangle DEA, donne : $m = \text{DAE} + \text{E} = \text{DAE} + 90^\circ$; $n = 90^\circ - \text{DAE}$;

d'où $m - n = 2\text{DAE}$; donc $\text{DAE} = \frac{m - n}{2}$.

*Autre démonstration.* Menons la bissectrice extérieure AF.

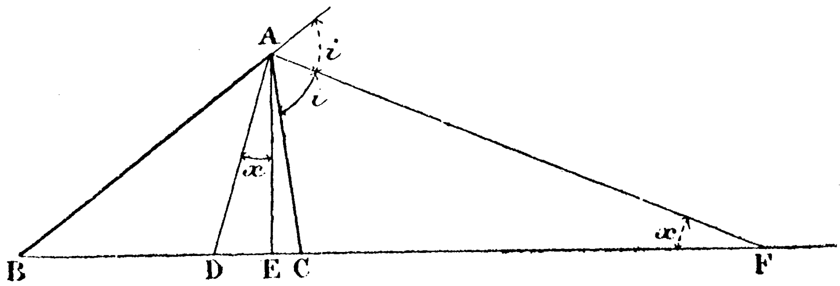



Fig. 310.

Les angles DFA et DAE sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires; les triangles FCA, FAB donnent respectivement :

$$x + i = C \quad \text{d'où} \quad x = C - i,$$

$$x + B = i \quad \text{»} \quad x = i - B;$$

d'où $$2x = C - B \quad \text{ou} \quad x = \frac{C - B}{2}.$$

## Triangle isocèle.

**470.** Toutes les propriétés spéciales au triangle isocèle procèdent de l'égalité des angles à la base et de l'égalité des côtés opposés. Le triangle isocèle est composé de deux parties symétriques par rapport à la hauteur; il en résulte qu'un assez grand nombre de propriétés peuvent être trouvées si facilement, qu'elles paraissent évidentes. Ainsi, sans recourir à la théorie des lignes proportionnelles, on peut dire :

*Les parallèles à la base, qui divisent un des côtés en parties égales, divisent aussi l'autre côté en parties égales; chacune de ces parallèles est divisée en deux parties égales par la hauteur. Le point milieu de la base est équidistant des deux côtés égaux.*

*Les perpendiculaires élevées sur la base, en des points équidistants du milieu de cette base, et limitées aux côtés, sont égales entre elles; la droite qui joint leurs extrémités est parallèle à la base,* etc.

La *Méthode par duplication* (n° 145) ou par *retournement* est la méthode naturelle pour étudier les propriétés du triangle isocèle; elle conduit à des démonstrations très simples; néanmoins il est d'usage de recourir aux divers cas d'égalité des triangles.

**471. Lignes antiparallèles.** Rappelons que par rapport à un angle XOY, deux droites AB, CD sont antiparallèles (n° 26, note) lorsque l'angle OAB égale l'angle OCD (fig. 311).

Il en résulte que l'angle B égale l'angle D, et que si l'on prend :

$$OC' = OC, \quad OD' = OD,$$

les droites AB et C'D' sont parallèles, car les angles OBA et OD'C' sont égaux et correspondants.

Lorsque deux droites AB et CB (fig. 312) forment des angles égaux d'un même côté de la sécante ACD, on les nomme aussi parfois lignes

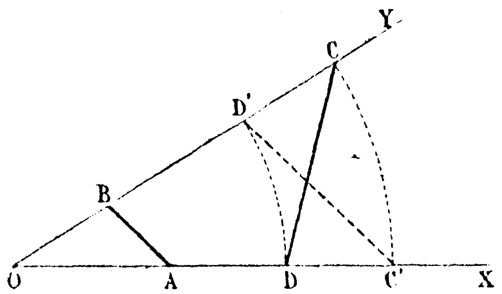


Fig. 311.

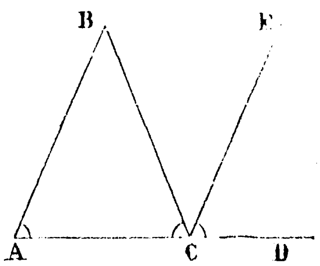


Fig. 312.

antiparallèles; prolongées suffisamment, elles forment, avec la sécante, un triangle isocèle ABC.

CB et CE sont aussi antiparallèles par rapport à ACD.

**Note.** La considération des antiparallèles simplifie certaines questions; voir à ce sujet dans le J. M. E. de VUIBERT, l'étude de M. A. DURAND (1910, p. 21 et 29).

* DURAND, professeur au lycée Saint-Louis, petit-fils de BRIOT.

**Théorème 32.**

**472.** *Un triangle est isocèle lorsqu'une même droite est à la fois médiane et hauteur, ou bien bissectrice et hauteur, ou bien bissectrice et médiane.*

**Théorème 32. — I.**

**473.** *Si deux côtés d'un triangle sont inégaux, la hauteur, la bissectrice et la médiane comprises forment trois droites différentes.*

**Théorème 32. — II.**

**474.** *Si deux côtés d'un triangle sont inégaux, la bissectrice et la médiane comprises sont l'une et l'autre plus grandes que la hauteur qui part du même sommet.*

**Théorème 33.**

**475.** *Un triangle isocèle a deux hauteurs égales, deux bissectrices égales et deux médianes égales.*

**Théorème 34.**

**476.** *Un triangle est isocèle lorsqu'il a deux hauteurs égales; il en est de même lorsqu'il a deux médiatrices égales* (nº 443).

**Théorème 34. — I.**

**477.** *Un triangle est isocèle lorsque deux médiatrices limitées à leur point de concours sont égales.*

**Théorème 34. — II.**

**478.** *A un plus grand côté d'un triangle correspond une plus petite médiane.*

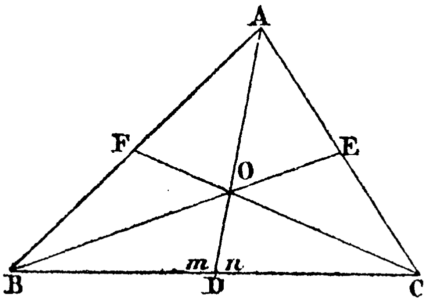


Fig. 313.

Soit le triangle ABC, et soit le côté $AB > AC$. Pour prouver que la médiane CF est moindre que BE, menons la troisième médiane AOD.

Les triangles ABD et ADC ont deux côtés respectivement égaux, et le troisième côté $AB > AC$; il en résulte l'angle $m > n$. (G., nº 56.)

Et alors les triangles OBD et ODC ont deux côtés respectivement égaux, et l'angle compris $m > n$; on a donc le côté $OB > OC$, ou $\frac{2}{3}BE > \frac{2}{3}CF$ (nº 447); donc $BE > CF$.

*Remarque.* On peut dire : *la plus longue médiane est celle qui part du sommet du plus petit angle du triangle.*

**Théorème 35.**

**479.** *Un triangle est isocèle lorsqu'il a deux médianes égales.*

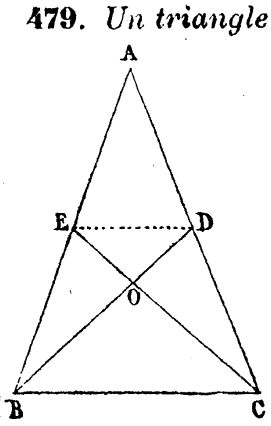


Fig. 314.

Cela résulte du théorème précédent (nº 478).

On peut aussi le démontrer comme il suit :

Soit $BD = CE$.

Puisque les médianes se coupent aux deux tiers de leur longueur (nº 447), il en résulte que

$$BO = CO \quad \text{et} \quad OD = OE.$$

Ainsi les triangles BOE, COD sont égaux comme ayant un angle égal au point O, compris entre côtés égaux.

Donc $BE = CD$, d'où $BA = CA$.

### Théorème 36.

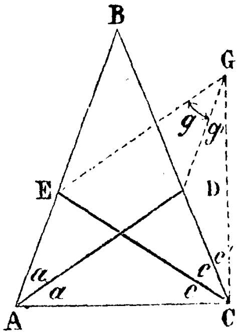


Fig. 315.

**480.** *Un triangle est isocèle lorsqu'il a deux bissectrices intérieures égales.*

Soit la bissectrice AD = CE; il faut prouver que l'angle A = C, ou que sa moitié CAD = ACE; et comme les deux triangles CAD, ACE ont deux côtés respectivement égaux, il suffit de prouver que

$$CD = AE.$$

Par les points D, E, menons des parallèles aux droites AE, AD; on forme ainsi un parallélogramme: le côté EG = AD = CE, DG = AE, l'angle $g = a$.

Le triangle CEG est isocèle comme ayant deux côtés égaux EG = EC, ainsi l'angle ECG = EGC.

Si les angles A et C sont inégaux, supposons que le premier soit le plus grand, d'où $g > c$, et par suite on aurait $g' < c'$; donc le côté DC serait plus petit que DG. Mais puisqu'on suppose $a > c$, on aurait DC plus grand que AE, c'est-à-dire, DC > DG, ce qui est incompatible avec le premier résultat obtenu DC < DG. Ainsi l'hypothèse que les angles A et C seraient inégaux est fausse, puisqu'elle conduit à deux résultats contradictoires; donc A = C *et le triangle est isocèle.*

**480 a. Note.** 1° Cette démonstration est due à M. Descube, ingénieur. (*Journal de mathématiques élémentaires et spéciales,* 1880, page 538.)

2° *Un triangle*, sans être isocèle, *peut avoir deux bissectrices extérieures égales.* Voir *Intermédiaire des Mathématiciens,* 1894, pages 70 et 149, Alauda et Friocourt; 1895, page 101, question 129, Alauda; Remarque par Dellac; page 169, notes de la Rédaction, et de MM. G. Tarry, Welsch, C. Juel de Copenhague. *Mathesis,* 1895, page 261. M. Soons, avec note de M. J. Neuberg; — 1900, page 129, *Sur le triangle pseudo-isocèle,* par M. A. Emmerich puis *Bulletin des Sciences M. et P. élémentaires,* 9ème année (1903-1904), page 146; 13ème année (1907-1908) page 22. *Sur les triangles non isocèles à deux bissectrices égales*, par M. G. Fontené. Voir aussi la note historique de M. J. Neuberg. (*Mathesis,* 1907, page 184.)

### Théorème 37.

**481.** *Dans un triangle isocèle, on mène les médianes qui correspondent aux côtés égaux, puis une parallèle quelconque à la base; prouver que le segment compris entre un des côtés et une des médianes égale le segment compris entre la seconde médiane et le second côté.*

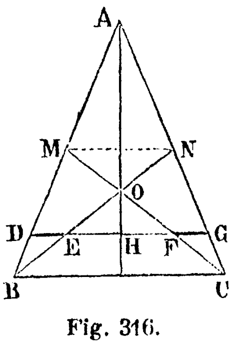


Fig. 316.

Toute parallèle à la base d'un triangle isocèle est divisée en deux parties égales par la hauteur; donc DH = HG (n° 470); et comme les médianes se coupent au même point (n° 447), le point O est sur la hauteur élevée au milieu de la base BC; le triangle BOC est isocèle; par suite,

$$EH = HF, \quad \text{donc} \quad DE = FG.$$

**Théorème 37. — I.**

**482.** *Lorsque deux triangles isocèles ont leurs bases sur une même droite et que les hauteurs sont aussi sur une même droite, les côtés égaux de l'un d'eux coupent les côtés égaux de l'autre en deux points équidistants des bases et symétriques par rapport à la hauteur.*

**Théorème 37. — II.**

**483.** *On joint le milieu de la base d'un triangle isocèle au point milieu de chacun des autres côtés, on prolonge les lignes ainsi tracées jusqu'à la droite menée par le sommet parallèlement à la base; prouver que le triangle ainsi formé est égal au proposé.*

**Théorème 37. — III.**

**484.** *Prouver que les perpendiculaires élevées sur les côtés égaux d'un triangle isocèle en des points équidistants du sommet coupent ces mêmes côtés en des points situés sur une parallèle à la base.*

*Remarque.* Les théorèmes précédents (n^os^ 481, 482, 483 et 484) se démontrent très simplement par la *Méthode de duplication*, car il est évident que la hauteur du triangle est un axe de symétrie pour les parties de la figure.

**Théorème 38.**

**485.** *Par un point quelconque de la base d'un triangle isocèle, on mène des parallèles aux côtés égaux; prouver que le parallélogramme ainsi formé a un périmètre constant.*

(*Méthodes*, n° 19.)

**Théorème 39.**

**486.** *La somme des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la base d'un triangle isocèle sur les côtés égaux est une quantité constante.*

*La différence des distances d'un point pris sur le prolongement de la base est aussi constante* (voir n^os^ 20 et 146).

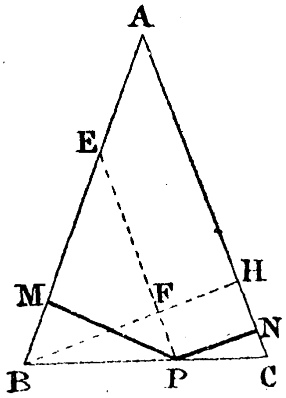


Fig. 317.

La démonstration par les surfaces auxiliaires (n° 163) se rapporte au livre IV.

*Autre démonstration.* On mène à AC la parallèle PFE qui détermine le triangle isocèle BPE.

On a : $PM = BF, \quad PN = FH;$

d'où $PM + PN = BH.$

**Théorème 39. — I.**

**487.** *Par un point quelconque de la base d'un triangle isocèle, on mène des droites qui rencontrent les côtés égaux sous des angles égaux; prouver que la somme de ces deux droites est constante.* (Voir n° 268.)

**Théorème 40.**

488. *Pour un point quelconque pris à l'intérieur d'un triangle équilatéral, la somme des distances aux trois côtés est constante et égale à la hauteur du triangle.*

Par le point O, l'on mène une parallèle à la base du triangle ; la somme des perpendiculaires abaissées sur les côtés latéraux égale la hauteur du triangle équilatéral partiel ; par suite, la somme des trois distances égale la hauteur du triangle donné.

489. *Remarque.* La démonstration par les surfaces auxiliaires est très simple, mais elle dépend du livre IV.

**Théorème 41.**

490. *Sur la base* BC *d'un triangle isocèle* BAC, *on élève, en un point quelconque, une perpendiculaire* PMN *qui coupe les côtés* BA, CA *aux points* M *et* N ; *prouver que la somme* $PM + PN$ *est constante.*

(*Méthodes*, n° 266.)

## Triangle rectangle.

491. Les propriétés descriptives du triangle rectangle qu'il est possible d'étudier dans le livre I peuvent être rattachées à la propriété qu'ont les angles à la base d'être complémentaires. Il en résulte, ainsi qu'on va le démontrer, que l'hypoténuse est double de la médiane qui part du sommet de l'angle droit ; donc le triangle rectangle peut être considéré comme étant formé par la réunion de deux triangles isocèles ayant pour côté commun un de leurs côtés égaux, et dont les angles au sommet sont supplémentaires.

**Théorème 42.**

492. *La médiane relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle est moitié de cette hypoténuse.*

**Théorème 42. — I.**

493. *Les médiatrices des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle se rencontrent sur l'hypoténuse* (n° 443).

**Théorème 42. — II.**

494. *Les médiatrices des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, et la droite qui joint leur point de concours au sommet de l'angle droit, divisent le triangle rectangle en quatre triangles égaux.*

**Théorème 43.**

495. *Si une médiane d'un triangle est moitié du côté sur lequel elle tombe, le triangle est rectangle.*

**Théorème 43. — I.**

**496.** *Si un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est moitié de l'hypoténuse, l'angle opposé à ce côté égale $^1/_3$ d'angle droit, et réciproquement.*

**Réciproque 43. — II.**

**497.** *Si l'un des angles aigus d'un triangle rectangle égale $^1/_3$ d'angle droit, le côté opposé à cet angle est moitié de l'hypoténuse.*

Car la médiane qui part du sommet de l'angle droit divise le triangle rectangle en deux triangles dont l'un est équilatéral; par suite, l'un des angles aigus du triangle rectangle vaut $\frac{2}{3}$ d'un droit, et l'autre angle aigu vaut $\frac{1}{3}$.

**Théorème 43. — III.**

**498.** *Un triangle est rectangle lorsqu'un des angles aigus vaut $^1/_3$ d'angle droit et que la hauteur du triangle tombe aux $^3/_4$ de la base à partir du sommet de l'angle aigu donné.*

**Théorème 43. — IV.**

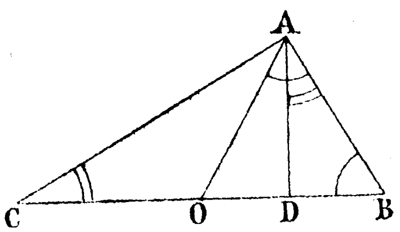


Fig. 318.

**499.** *Dans un triangle rectangle, la médiane et la hauteur qui partent du sommet de l'angle droit font entre elles un angle égal à la différence des angles aigus.*

L'angle BAO = B; BAD = C;
donc angle DAO = B — C.

**Théorème 44.**

**500.** *Dans un triangle rectangle, la bissectrice de l'angle droit est bissectrice de l'angle formé par la médiane et la hauteur qui partent de cet angle droit.*

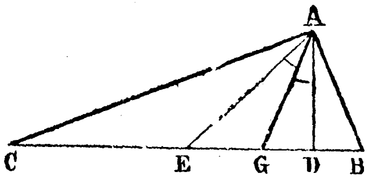


Fig. 319.

1re *Démonstration.* On sait que l'angle DAE = B — C (no 499).

On sait aussi que l'angle de la bissectrice et de la hauteur égale la demi-différence des angles à la base (no 468).

D'où
$$\text{angle DAG} = \frac{B - C}{2},$$
donc l'angle DAG est la moitié de DAE.

2e *Démonstration.* Le triangle AEC est isocèle (no 492);
donc
$$\text{l'angle CAE} = C,$$

mais l'angle BAD = C comme étant le complément de B;
donc angle CAE = BAD.

Ainsi la bissectrice de l'angle droit est en même temps bissectrice de l'angle DAE.

*Remarque.* Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un théorème relatif au triangle quelconque (n° 646).

**Théorème 44. — I.**

**501.** *On donne deux parallèles; d'un point A de l'une d'elles, on abaisse sur l'autre une perpendiculaire* AC *et une oblique* AB; *si une sécante* BED *est telle que* ED = 2AB, *démontrer que l'angle* EBC *est le tiers de* ABC.

Soit EM = MD = AB.

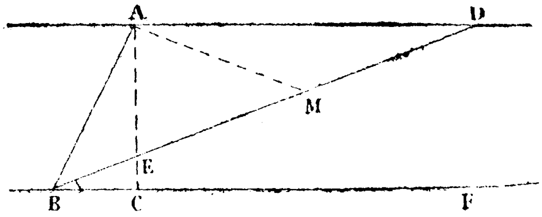


Fig. 320.

Dans le triangle rectangle AED, la médiane AM égale la moitié de l'hypoténuse; donc

AM = MD = AB.

Or l'angle AMB extérieur au triangle AMD = MAD + D = 2D.

D'ailleurs les angles D et DBF sont égaux comme alternes-internes.

L'angle AMB égale ABM, car AM = AB;

donc angle DBF = $^1/_2$ ABE.

Ainsi l'angle DBF = $^1/_3$ ABF.

**Note.** Pour diviser l'angle ABF en trois parties égales, il faudrait mener une sécante BED telle que ED = 2AB; mais on ne peut résoudre ce dernier problème en n'employant que la règle et le compas (voir n° 910). On pourrait recourir à une *conchoïde*, ayant le point B pour pôle et AC pour droite directrice; on déterminerait une suite de points que l'on réunirait par un trait continu.

Diverses solutions mécaniques très ingénieuses de la trisection de l'angle ont été indiquées par M. A. Aubry : J. M. S. 1896, p. 76 et 106; puis *Cosmos*, 1908, p. 551-554.

## Parallélogramme.

Pour les exercices relatifs au parallélogramme, on a recours aux divers théorèmes connus. (G., nos 100 à 108.)

Le rectangle, le losange et le carré sont des variétés du parallélogramme.

Chacune de ces figures peut être considérée comme formée par la réunion de deux triangles égaux; par suite, chaque cas d'égalité établi pour le triangle peut en donner un pour le parallélogramme.

**Théorème 45.**

**502.** *Deux parallélogrammes sont égaux :*

*1° Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés respectivement égaux;*

2° *Lorsqu'ils ont deux côtés adjacents respectivement égaux, et une diagonale égale et de même position;*

3° *Lorsque leurs diagonales sont égales et se coupent sous un même angle.*

**Théorème 45. — I.**

**303.** *Deux parallélogrammes sont égaux :*

1° *Lorsqu'ils ont un côté égal et les diagonales respectivement égales;*

2° *Lorsqu'ils ont une diagonale égale rencontrant les côtés adjacents sous des angles respectivement égaux.*

**Théorème 46.**

**304.** *Toute droite menée dans un parallélogramme par le point de rencontre des diagonales a ce point pour milieu.*

**Théorème 47.**

**305.** *Les diagonales de deux parallélogrammes, dont l'un est circonscrit à l'autre, passent par un même point.*

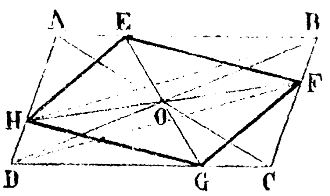


Fig. 321.

Les triangles EBF, GDH sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, car GH est égal et parallèle à EF.

Ainsi les angles BEF, DGH sont égaux comme ayant les côtés parallèles et de sens contraire; il en est de même des angles en F et en H; donc

$$BF = DH.$$

Ces deux lignes étant égales et parallèles, la figure BFDH est un parallélogramme; les diagonales FH et BD se coupant en leur milieu, le point O est donc le point de rencontre de toutes les diagonales.

**Théorème 48.**

**306.** *A partir de chaque sommet d'un carré, et en parcourant le périmètre dans un même sens, on prend sur chaque côté une grandeur donnée; prouver que la figure obtenue en joignant deux à deux les points déterminés sur le périmètre est un carré.*

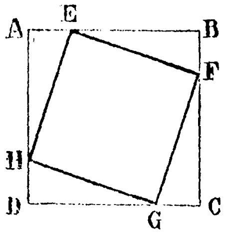


Fig. 322.

Soit $AE = BF = CG = DH$.

Les quatre triangles rectangles sont égaux, comme ayant les côtés de l'angle droit respectivement égaux; donc les hypoténuses sont égales

$$EF = FG, \quad \text{etc.}$$

L'angle $AHE = BEF$;

donc l'angle $BEF + AEH = 1$ droit.

Ainsi l'angle FEH est droit; donc la figure est un carré.

### Théorème 48. — I.

507. *A partir de deux sommets opposés d'un losange, on porte sur chaque côté une grandeur donnée; la figure formée en joignant deux à deux les points obtenus est un rectangle.*

### Théorème 49.

508. *A partir de deux sommets opposés d'un carré, on prend sur chaque côté une longueur donnée; la figure formée en joignant deux à deux les points ainsi obtenus est un rectangle à périmètre constant.*

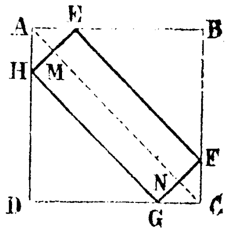


Fig. 323.

Soit $AE = AH = CF = CG.$

Les quatre triangles AHE, BEF, etc., sont isocèles-rectangles; donc chaque angle aigu vaut 45 degrés; ainsi l'angle MEF est droit, et de même pour les autres; la figure EFGH est un rectangle.

On a, d'ailleurs :

$$ME = AM;\quad EF = MN;\quad FN = NC;$$

donc le périmètre est constant, car il égale 2AC.

### Théorème 50.

509. 1° *Le point de concours des diagonales d'un losange est équidistant des quatre côtés de ce losange.* 2° *Les diagonales sont bissectrices des angles que forment entre elles les perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés.*

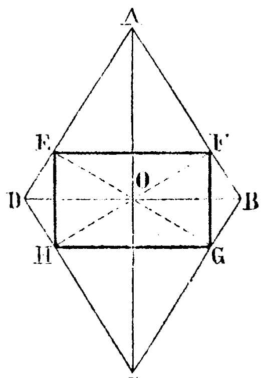


Fig. 324.

### Théorème 50. — I.

510. *En joignant deux à deux les pieds des perpendiculaires abaissées du point de concours des diagonales d'un losange sur ses côtés, on forme un rectangle inscrit.*

### Théorème 50. — II.

511. *En élevant des perpendiculaires aux extrémités de deux droites égales qui se coupent en leur milieu, on forme un losange dont les diagonales passent par le point de concours des lignes données.*

### Théorème 51.

512. *Les bissectrices intérieures d'un parallélogramme se rencontrent de manière à former entre elles un rectangle.*

Les angles opposés de la figure obtenue sont droits.

**Théorème 51. — I.**

**513.** *Les bissectrices intérieures d'un rectangle se rencontrent en formant un carré.*

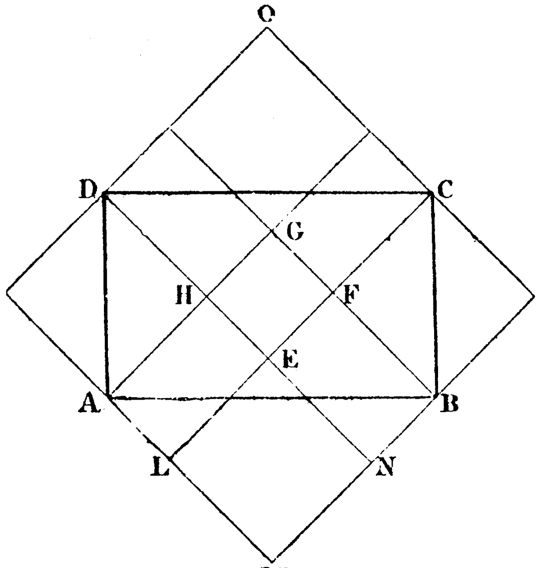



Fig. 325.

*Remarque.* En menant les bissectrices *intérieures* et *extérieures*, on forme :

| | | |
|---|---|---|
| Quatre carrés tels que | | ME; |
| Quatre | id. | MG; |
| Un | id. | MO; |
| Un | id. | EG. |

En tout dix carrés et quatre rectangles.

**Théorème 51. — II.**

**514.** *La diagonale* HF *du carré intérieur égale la différence* AB — BC *des côtés du rectangle. La diagonale* MO *du carré extérieur égale la somme* AB + BC *des mêmes côtés.*

**Théorème 51. — III.**

**515.** *Les bissectrices extérieures d'un parallélogramme se coupent en formant un rectangle dont les diagonales égalent la somme des côtés du parallélogramme.*

*Remarque.* La question peut être posée comme il suit :

On mène les bissectrices des angles intérieurs et extérieurs d'un parallélogramme. Démontrer :

1° Que les bissectrices, en se coupant, forment des rectangles;

2° Que les diagonales de ces rectangles coupent en leurs milieux les côtés du parallélogramme;

3° Que la diagonale du grand rectangle est égale à la somme des deux côtés adjacents du parallélogramme, et la diagonale du petit rectangle est égale à la différence des mêmes lignes;

4° Que la surface du rectangle extérieur est égale à deux fois la surface du parallélogramme, plus la surface du rectangle intérieur.

Examiner dans quel cas les rectangles deviennent des carrés, et dans quel cas le rectangle intérieur se réduit à un point.

**Théorème 52.**

516. *En menant des parallèles équidistantes d'une des diagonales d'un rectangle et en joignant les extrémités de ces parallèles, on forme un parallélogramme inscrit dont le périmètre égale la somme des diagonales du rectangle.*

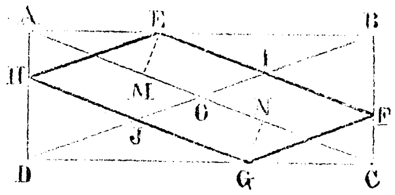


Fig. 326.

Le périmètre égale la somme des diagonales, car les triangles BIF, GJD sont isocèles; ainsi

$$IF = IB, \quad JG = JD;$$

d'ailleurs $FG = IJ$;

donc le demi-périmètre

$$IF + FG + GJ = BD.$$

**Théorème 52. — I.**

517. *En menant deux parallèles équidistantes d'une des diagonales d'un rectangle, mais de manière que ces parallèles coupent les prolongements de l'autre diagonale, puis en joignant deux à deux les points où les parallèles rencontrent les prolongements des côtés du rectangle, on forme un parallélogramme dont la différence des côtés adjacents égale la diagonale du rectangle.*

**Théorème 53.**

518. *Par l'un des sommets d'un parallélogramme on mène une droite quelconque XY; de chacun des trois autres sommets on abaisse une perpendiculaire sur la ligne menée; prouver que la perpendiculaire abaissée du point intermédiaire égale la somme ou la différence des perpendiculaires extrêmes.*

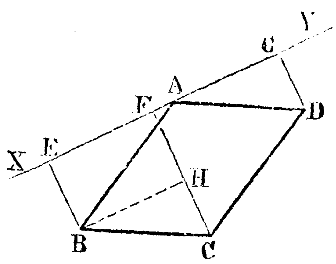


Fig. 327.

Par le sommet B, menons une parallèle BH à XY.

Les triangles rectangles BCH, ADG sont égaux, comme ayant l'hypoténuse égale et les angles égaux; donc

$$CH = DG,$$

mais $BE = FH$;

donc $CF = BE + DG$.

*Remarque.* Quand XY coupe le parallélogramme, on a une différence au lieu d'une somme.

**Théorème 53. — I.**

519. *La projection de la diagonale d'un parallélogramme sur une droite quelconque égale la somme des projections de deux côtés adjacents sur la même droite.* (VARIGNON.)

Soient la diagonale BD et les côtés adjacents BA, BC (fig. 327).

La projection de BD sur XY égale EG; il faut prouver qu'on a :

$$EG = EA + EF.$$

Or $\qquad EF = BH = AG \quad \text{et} \quad EG = EA + AG;$

donc $\qquad EG = EA + EF.$

*Remarque*. L'énoncé est général, pourvu qu'on regarde comme de signes différents les lignes qui vont en sens contraire; ainsi la projection AF de AG donne $\qquad AF = AE - AG.$

**Note.** VARIGNON, né à Caen en 1654, mort à Paris en 1722. On lui doit un *Projet d'une nouvelle mécanique*, en 1687, puis la *Nouvelle mécanique ou statique.* C'est dans ces ouvrages que se trouve le célèbre *théorème des moments.*

### Théorème 53. — II.

**520.** *La somme des perpendiculaires abaissées des sommets d'un parallélogramme sur une droite extérieure à cette figure, égale quatre fois la distance de cette droite au point de concours des diagonales.*

(Voir n° 461.)

### Théorème 54.

**521.** *La somme ou la différence des perpendiculaires abaissées d'un point donné sur deux côtés consécutifs d'un losange, égale la somme ou la différence des perpendiculaires abaissées du même point sur les deux autres côtés.*

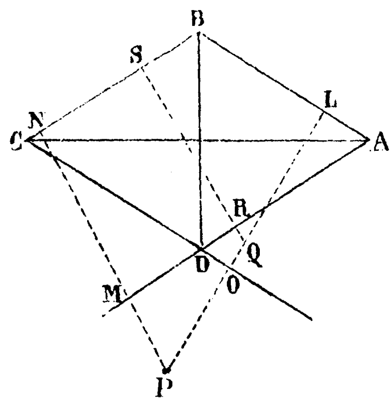



Fig. 328.

On doit avoir :

$$PL + PM = PO + PN.$$

En effet, cela revient à

$$PO + OL + PM = PO + PM + MN.$$

Or $\qquad OL = MN; \text{ donc...}$

Pour que le théorème soit général, il faut avoir égard aux signes.

Ainsi $\quad QL + QR = QS + (-QO).$

### Théorème 55.

**522.** *Lorsqu'on joint deux sommets opposés d'un parallélogramme aux points milieux de deux côtés opposés de la figure, une des diagonales du parallélogramme se trouve divisée en trois parties égales.* (P. ANDRÉ, *Exercices de Géométrie.*)

1<sup></sup>re *Démonstration.* En effet, AF, CG, BO sont les médianes du triangle ACB; donc $\qquad BM = {}^2/_3\, BO, \qquad$ (n° 447) ou $$BM = \frac{2}{3} \times \frac{BD}{2} = \frac{BD}{3};$$

de même $$DN = \frac{BD}{3}; \text{ donc...}$$

2e *Démonstration.* Considérons le triangle AOB.

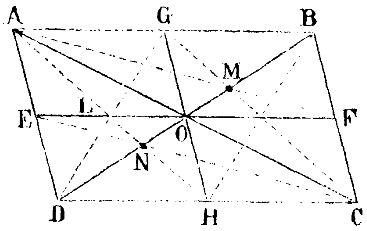


Fig. 329.

La droite AF, diagonale du parallélogramme ABFE, passe par le point milieu de OG; or on sait que la droite AM, qui passe par le milieu de la médiane OG du triangle AOB, détermine sur la base OB un segment OM qui est la moitié de BM (no 435); donc BM est le tiers de BD.

Remarque. *Les droites AF, AH, qui joignent un sommet d'un parallélogramme aux points milieux des côtés opposés à ce sommet, divisent une des diagonales en trois parties égales.*

## Trapèze.

323. Le parallélogramme et ses variétés ne sont qu'un cas particulier du trapèze; néanmoins nous considérerons spécialement le trapèze proprement dit, c'est-à-dire le quadrilatère dans lequel les deux côtés parallèles sont inégaux.

On nomme *trapèze symétrique* ou *trapèze isocèle* le trapèze dont les côtés non parallèles sont égaux.

Le trapèze isocèle peut être considéré comme obtenu en coupant un triangle isocèle par une parallèle à la base, car on démontre que les angles à la base sont égaux entre eux (no 534). Il en résulte que les côtés considérés sont des *antiparallèles* (no 471) par rapport aux bases du trapèze.

### Théorème 56.

324. *Dans tout trapèze : 1o la différence des deux bases est plus petite que la somme des deux autres côtés; chacun de ces côtés est plus petit que l'autre côté augmenté de la différence des bases; 2o la somme des bases est plus petite que la somme des diagonales.*

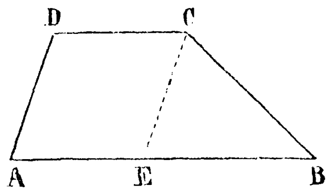


Fig. 330.

325. *Remarque.* En admettant que ces conditions soient constamment réalisées pour quatre lignes données, et chaque groupe de deux lignes étant pris successivement pour former les bases, on pourrait construire six trapèzes différents.

En effet, soient les quatre lignes $a$, $b$, $c$, $d$; on aurait les trapèzes

| | |
|---|---|
| *abcd* | *bacd* |
| *acbd* | *badc* |
| *abdc* | *dacb* |

### Théorème 57.

**526.** *Deux trapèzes sont égaux lorsque leurs bases sont respectivement égales chacune à chacune, et qu'il en est de même des côtés non parallèles.*

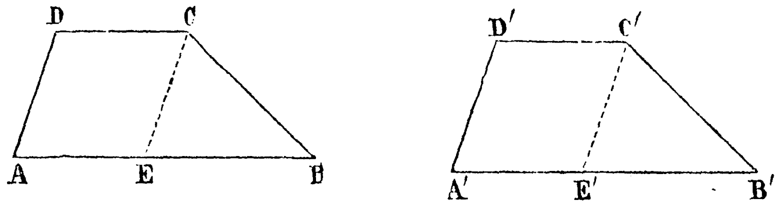


Fig. 331.

**527.** *Remarque.* Pour que deux trapèzes soient égaux, il ne suffit point qu'ils aient les quatre côtés respectivement égaux et placés dans le même ordre ; car, avec quatre droites données, on peut parfois former plusieurs trapèzes différents (n° 525). Ainsi les quatre longueurs $a$, $b$, $c$, $d$, prises dans l'ordre indiqué, pourraient donner un premier trapèze ayant $a$ et $c$ pour bases, et un second trapèze ayant $b$ et $d$ pour bases.

### Théorème 57. — I.

**528.** *Deux trapèzes sont égaux lorsque leurs bases sont respectivement égales chacune à chacune, et qu'il en est de même des diagonales.*

### Théorème 57. — II.

**529.** *Deux trapèzes sont égaux lorsqu'ils ont trois côtés respectivement égaux et un angle égal.*

### Théorème 58.

**530.** *Dans un trapèze, la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles est parallèle aux bases, et égale à leur demi-somme; et la partie de cette droite comprise entre les deux diagonales est égale à la demi-différence des bases.*

*La droite menée parallèlement aux bases d'un trapèze par le milieu de l'un des côtés non parallèles, passe au milieu de l'autre côté.*

### Théorème 58. — I.

**531.** *Lorsque la petite base d'un trapèze est la moitié de la grande, la base moyenne est divisée en trois parties égales par les diagonales.*

### Théorème 59.

**532.** *Lorsque la petite base d'un trapèze égale la somme des côtés non parallèles, les bissectrices intérieures des angles adjacents à la grande base viennent concourir sur la petite base.*

(Voir n° 458.)

### Théorème 59. — I.

**333.** *Lorsque la grande base d'un trapèze égale la somme des côtés non parallèles, les bissectrices des angles adjacents à la petite base viennent concourir sur la grande base.*

On peut consulter avec profit le nº 458, car toutes ces questions ne diffèrent que par l'énoncé.

### Théorème 60.

**334.** *Dans le trapèze isocèle, les angles adjacents à une même base sont égaux, les diagonales sont égales et se coupent sur la droite qui joint les milieux des deux bases.*

Soit $AC = BD$.

1º Abaissons les hauteurs, CE, DF ; on a :

$$CE = DF.$$

Les triangles rectangles ACE, BDF sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un côté égal :

$$CE = DF;$$

donc angle $CAE = DBF$.

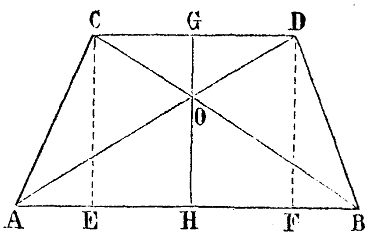


Fig. 332.

2º Les triangles CAB, DBA sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux ; car l'angle $A = B$ ; donc

$$AD = BC;$$

de plus l'angle $ABO = BAO$ ;
ainsi le triangle AOB est isocèle, et le sommet O se trouve sur la perpendiculaire élevée au point H milieu de AB.

Mais le triangle COD est aussi isocèle ; la perpendiculaire HO est aussi perpendiculaire à la parallèle CD ; or la perpendiculaire OG, abaissée du sommet d'un triangle isocèle sur la base de ce triangle, passe au milieu de cette base. Ainsi G est le point milieu de CD, et la droite GH, qui joint les deux points milieux, passe par le point de concours des deux diagonales.

*Remarque.* Dans tout trapèze les diagonales se coupent sur la droite des milieux des bases.

### Théorème 60. — I.

**335.** *En joignant deux à deux les points milieux des quatre côtés d'un trapèze isocèle, on obtient un losange.*

### Théorème 60. — II.

**336.** 1º *Deux trapèzes isocèles sont égaux lorsqu'ils ont des bases égales et même hauteur ;* 2º *les perpendiculaires élevées au milieu des côtés d'un trapèze symétrique se coupent au même point.*

**537. Note.** On nomme *contre-parallélogramme* un système articulé de quatre tiges, correspondant aux diagonales et aux côtés non parallèles d'un trapèze isocèle ; ainsi (fig. 332) les quatre tiges seraient AD, BC, AC et BD.

Cette figure, dont le parallélogramme n'est qu'un cas particulier, est très usitée dans les *Inverseurs*. De nos jours, les *systèmes de tiges articulées* ont été étudiés et appliqués d'une manière remarquable; on les nomme, suivant le cas, *inverseurs ou réciprocateurs*, *compas de Peaucellier*, *compas composé*, *transformateurs*, etc. (Voir ci-après, nº 1203.)

## Quadrilatère quelconque.

**538.** Le quadrilatère se rencontre fréquemment dans les Exercices de Géométrie; il y a donc lieu d'étudier quelques cas d'égalité de deux quadrilatères, ainsi que les propriétés de ces figures.

Pour démontrer l'égalité de deux quadrilatères, on a recours à la superposition ou à la décomposition en deux triangles.

### Théorème 61.

**539.** *Deux quadrilatères sont égaux :*

1º *Lorsqu'ils ont trois côtés et les deux angles compris respectivement égaux;*

2º *Lorsqu'ils ont deux côtés consécutifs et les trois angles adjacents respectivement égaux;*

3º *Lorsqu'ils ont un angle égal et les quatre côtés respectivement égaux, et placés dans le même ordre.*

### Théorème 62.

**540.** *Dans tout quadrilatère convexe, la somme des diagonales est plus grande que la somme de deux côtés opposés.*

### Théorème 62. — I.

**541.** *Dans un quadrilatère convexe, la somme des diagonales est comprise entre le périmètre et le demi-périmètre.*

### Théorème 63.

**542.** *Les points milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque sont les sommets d'un parallélogramme.*

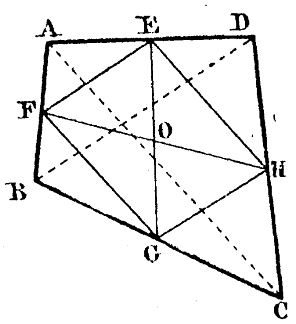


Fig. 333.

Les droites qui joignent les milieux des côtés adjacents sont parallèles deux à deux à chaque diagonale du quadrilatère donné; elles forment donc un parallélogramme EFGH.

### Théorème 63. — I.

**543.** *Dans un quadrilatère quelconque, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés se coupent en leurs milieux.*

**Théorème 63. — II.**

544. *Le parallélogramme obtenu en joignant deux à deux les points milieux des côtés d'un quadrilatère est un rectangle, lorsque les diagonales du quadrilatère primitif sont rectangulaires, ou lorsque les droites qui joignent les milieux des côtés opposés sont égales entre elles.*

**Théorème 63. — III.**

545. *On obtient un losange lorsque la figure donnée est un trapèze isocèle ou un rectangle. On obtient un carré lorsque la figure donnée est un carré, ou un trapèze isocèle à diagonales rectangulaires égales.*

**Théorème 64.**

546. *Le parallélogramme formé en joignant deux à deux les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque est la moitié de ce quadrilatère.*

Dans le triangle ABO, la droite FG est menée par le point milieu F de AB; de plus elle est parallèle à AC; donc elle passe par le milieu de l'autre côté BO (n° 431,). Ainsi M est le point milieu de BO; de même N est le point milieu de CO; par suite, la droite MN, qui joint les milieux de OB et de OC, est parallèle à BC et en égale la moitié (n° 431 *corollaire*); donc

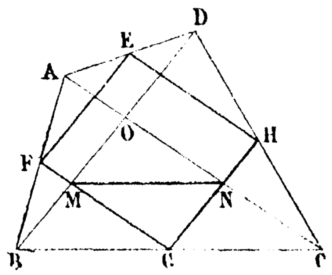


Fig. 334.

$$MN = BG = CG.$$

Les quatre triangles OMN, BMG, GNC, NGM sont donc égaux comme ayant tous les côtés respectivement égaux; donc le parallélogramme OMGN est la moitié du triangle BOC.

Il en serait de même des autres parties des figures comparées; donc le parallélogramme EFGH est la moitié du quadrilatère ABCD.

**Théorème 64. — I.**

547. *Le parallélogramme formé en menant par chaque sommet d'un quadrilatère des parallèles aux diagonales, est double de ce quadrilatère et quadruple du parallélogramme formé en joignant deux à deux les milieux des côtés du quadrilatère donné.*

Démonstration analogue à celle qui est donnée ci-dessus, mais beaucoup plus simple; on peut aussi consulter les *Méthodes*, n° 155.

**Théorème 65.**

548. *Dans un quadrilatère quelconque, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés se rencontrent au milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales.*

Soient ABCD un quadrilatère quelconque, EG et FH les droites qui joignent les milieux des côtés opposés, AC et BD les diagonales, et IK la droite qui en joint les milieux.

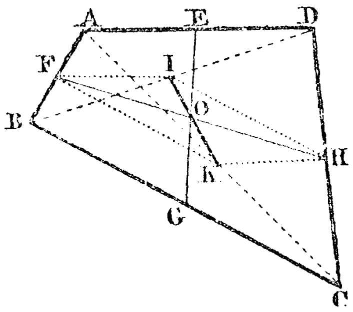



Fig. 335.

Traçons le quadrilatère IFKH.

Dans le triangle ABD, la droite IF est parallèle à AD et en est la moitié; dans le triangle ACD, la droite KH est parallèle à AD et en est la moitié; ainsi les droites IF et KH étant parallèles et égales, la figure IFKH est un parallélogramme (G., n° 104), et les diagonales FH et IK se coupent en leurs milieux (G., n° 105); mais FH et EG se coupent aussi en leurs milieux (n° 543); donc le point O est le milieu des trois droites EG, FH et IK.

**548 a. Note.** 1° Le théorème ci-dessus a été proposé dans les *Annales de Gergonne*, tome I (1810-1811), page 232 et résolu page 311, avec d'intéressants développements par divers auteurs, et notamment par ROCHAT, professeur de navigation à Saint-Brieuc; LHUILIER, professeur à Genève; VECTEN, professeur à Nîmes; TÉDENAT, recteur de l'Académie de cette même ville. On peut voir aussi le n° 1233 b.

2° Les droites EG, FH, IK sont parfois nommées *médianes* du quadrilatère ABCD. Le théorème s'énonce comme il suit : *les trois médianes se coupent en un même point.*

### Théorème 66.

**549.** *L'angle des bissectrices intérieures de deux angles consécutifs d'un quadrilatère est égal à la demi-somme des deux autres angles de ce quadrilatère; l'angle des bissectrices extérieures de deux angles consécutifs est égal à la demi-somme de ces deux angles consécutifs.*

1° L'angle $\quad E = 180^\circ - \dfrac{A+B}{2}.$

Mais $\quad \dfrac{A+B}{2} + \dfrac{C+D}{2} = 180^\circ, \qquad$ (G., n° 94.)

d'où $\quad \dfrac{C+D}{2} = 180^\circ - \dfrac{A+B}{2}.$

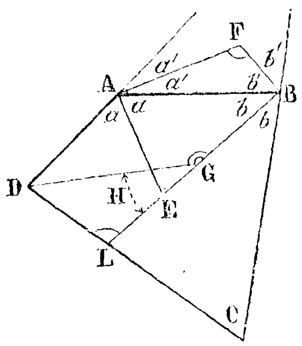



Fig. 336.

Donc $\quad E = \dfrac{C+D}{2}.$

2° Les angles supplémentaires de A et B ont pour valeur :

$$180^\circ - A \quad \text{et} \quad 180^\circ - B;$$

donc $\quad F = 180^\circ - \dfrac{180^\circ - A + 180^\circ - B}{2},$

d'où $\quad F = \dfrac{A+B}{2}.$

*Vérification.* Les angles E, F doivent être supplémentaires, car le quadrilatère AFBE a deux angles droits en A et B; or

$$E + F = \frac{A+B}{2} + \frac{C+D}{2} = 180^\circ.$$

**Théorème 67.**

350. *L'angle aigu des bissectrices intérieures de deux angles opposés d'un quadrilatère égale la demi-différence des deux autres angles.*

Soient G l'angle DGB formé par les deux bissectrices, et H son supplément.

L'angle L, extérieur au triangle $BCL = C + \frac{B}{2}$;

donc $$H = 180 - C - \frac{B}{2} - \frac{D}{2}.$$

Mais $180^o$ peut se remplacer par $\frac{A+B+C+D}{2}$ et $-C$ par $-\frac{2C}{2}$.

On a donc : $$H = \frac{A+B+C+D-2C-B-D}{2},$$

ou $$H = \frac{A-C}{2}.$$

**Théorème 68.**

351. *Les bissectrices intérieures d'un quadrilatère quelconque se rencontrent de manière à former un nouveau quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires.*

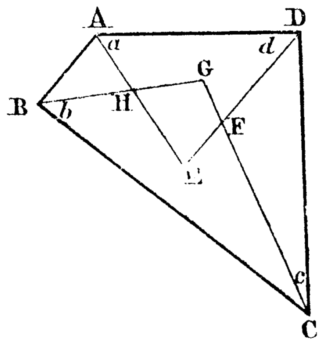


Fig. 337.

Soient ABCD un quadrilatère quelconque, et EFGH le quadrilatère formé par les bissectrices intérieures.

Les quatre angles du quadrilatère ABCD égalent ensemble 4 droits; on a donc :

$$a + b + c + d = 2 \text{ droits}.$$

Pour les deux triangles ADE et BCG, la somme totale des six angles est de 4 droits :

$$a + b + c + d + E + G = 4 \text{ droits}.$$

Si de cette égalité on retranche la précédente, il vient : $E + G = 2$ droits.

Ainsi les deux angles E et G sont supplémentaires; il en résulte que F et H le sont aussi.

Donc *les bissectrices intérieures...*

*Remarque.* Les exercices relatifs aux figures formées par les bissectrices des angles d'un parallélogramme, d'un rectangle (nos 512, 513), ne sont que des cas particuliers de celui-ci.

**Théorème 68. — I.**

352. *Les bissectrices extérieures d'un quadrilatère quelconque se rencontrent de manière à former un quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires.*

Comme ci-dessus.

**Théorème 69.**

**553.** *L'angle des bissectrices des deux angles formés par les côtés opposés d'un quadrilatère égale la demi-somme de deux angles opposés du quadrilatère.*

1re *Démonstration.* Soient EG, FG les bissectrices des angles formés par les côtés opposés du quadrilatère; par les sommets opposés A et C menons des parallèles aux bissectrices.

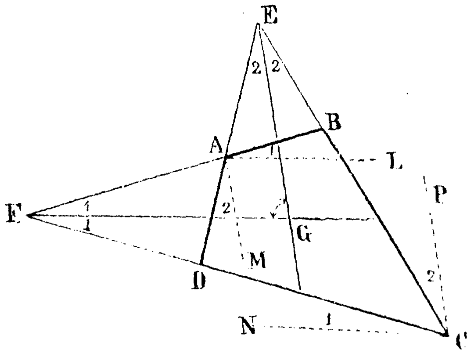


Fig. 338.

Tous les angles marqués 1 sont égaux entre eux; il en est de même des angles marqués 2.

Les trois angles G, LAM, NCP, ayant les côtés parallèles de même sens, ou tous deux de sens contraire, sont égaux.

Or l'angle $A = LAM + 1 + 2$,

l'angle $C = NCP - 1 - 2$.

En additionnant, $A + C = LAM + NCP = 2G$;

donc $\quad$ angle $G = \dfrac{A + C}{2}$.

2e *Démonstration.* Dans le quadrilatère non convexe EAFG, on a :

$$\text{angle } EAF = G + 1 + 2.$$

Dans EGFC, $\quad$ angle $G = C + 1 + 2$.

En retranchant la première égalité de la seconde, on trouve :

$$2G = A + C.$$

*Remarque.* Lorsque les angles opposés du quadrilatère sont supplémentaires, l'angle G des diagonales est droit. On sait que le quadrilatère dont deux angles opposés sont supplémentaires est inscriptible (G., no 156); par suite, la remarque ci-dessus conduit à l'énoncé suivant :

**Théorème 69. — I.**

**554.** *Les bissectrices de deux angles formés par les côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible sont perpendiculaires entre elles.*

**Théorème 70.**

**555.** *La somme des distances des quatre sommets d'un quadrilatère à une droite donnée, égale quatre fois la distance de cette même droite au point de concours des droites qui joignent les points milieux des côtés opposés du quadrilatère.*

En effet, en joignant deux à deux les points milieux, on obtient un parallélogramme (no 542) qui a pour diagonales les droites qui joignent les milieux des côtés opposés; or la somme des distances, à la droite donnée, des quatre sommets du quadrilatère égale la somme des distances des quatre sommets du parallélogramme, et celle-ci égale quatre fois la distance du point de concours des diagonales; donc...

**Théorème de Prouhet 70. — I.**

556. *Un polygone convexe d'un nombre impair de côtés est déterminé par la connaissance des points milieux de ses côtés.*

1° Si l'on donne les points milieux I, K, L des trois côtés d'un triangle, ce triangle est déterminé. En effet, par chaque point donné, il suffit de mener une parallèle à la droite qui joint les deux autres (n° 434).

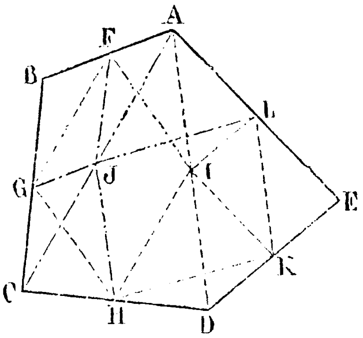


Fig. 339.

2° Lorsqu'on connaît les points milieux des côtés d'un pentagone, la figure est aussi déterminée; car, soient donnés les points F, G, H, K, L; en admettant que le pentagone demandé soit construit, on reconnaît, en menant une diagonale quelconque AD, que le point I, milieu de AD et dont la position détermine le triangle ADE et par suite le quadrilatère ABCD, peut s'obtenir à l'aide des trois points F, G, H, car la figure FGHI est un parallélogramme n° 542).

Il en serait de même pour une autre diagonale, AC par exemple. Le point milieu J est le quatrième sommet d'un parallélogramme HKLJ, que les trois points donnés H, K, L déterminent complètement. Ainsi, soit qu'on construise le parallélogramme FGHI, puis le triangle ADE, ou bien le parallélogramme HKLJ et le triangle ABC, on n'obtient qu'un seul et même pentagone.

Il en serait de même pour 7 points, pour 9, etc...; donc...

**Note.** A. Prouhet, *Nouvelles Annales de mathématiques,* 1844, p. 19. On peut voir ci-après n° 1049.

* A. Prouhet, alors élève au collège royal d'Auch, où E. Prouhet était professeur de mathématiques.

# LIEUX GÉOMÉTRIQUES

557. Les constructions n'étant indiquées qu'à la fin du livre II, on doit se borner, dans les questions suivantes, à reconnaître la nature et la position du lieu demandé.

Le lieu peut se composer d'une ou de plusieurs droites, d'une ou de plusieurs circonférences.

Dans certains cas, une partie seule de la ligne obtenue répond à la question proposée; l'autre partie répond généralement à une question présentant quelque analogie avec la première (n° 570).

Pour la recherche des lieux et pour leur construction, il est utile de recourir aux développements déjà donnés. (*Méthodes,* n° 56.)

La recherche des lieux géométriques est très importante, parce que la résolution d'un grand nombre de problèmes réclame leur emploi.

**Lieu 71.**

558. *Lieu des points également distants de deux droites parallèles.*

**Lieu 71. — I.**

**559.** *Lieu du milieu des sécantes comprises entre deux parallèles.*

**Lieu 71. — II.**

**560.** *Entre deux parallèles, on mène des perpendiculaires; sur ces perpendiculaires, prises pour bases, on construit des triangles isocèles égaux entre eux. Quel est le lieu du sommet de ces triangles isocèles?*

**Lieu 71. — III.**

**561.** *Même problème. Le triangle est quelconque, mais il est constamment égal à lui-même.*

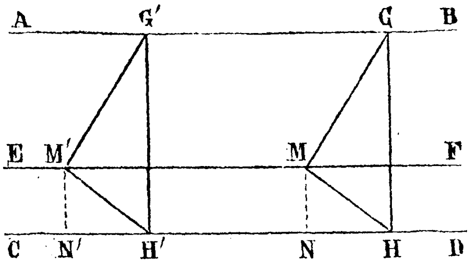


Fig. 340.

Le lieu du sommet M est une parallèle aux droites données.

Les triangles rectangles MNH, M'N'H' sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale MH = M'H' et un angle aigu égal : l'angle MHN = M'H'N' comme compléments des angles égaux H et H'; donc MN = M'N' et les deux droites MM', NN' sont parallèles.

**Lieu 72.**

**562.** *Deux sommets d'un triangle glissent sur deux parallèles données; quel est le lieu du troisième sommet?*

Même réponse et même démonstration que précédemment.

**Lieu 73.**

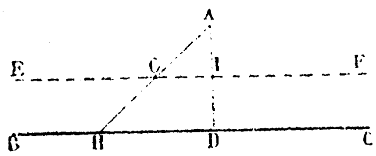


Fig. 341.

**563.** *Lieu des milieux des droites menées d'un point donné à une droite donnée.*

Le milieu de toute droite, telle que AH, se trouve sur la droite indéfinie EF menée par le point I milieu de AD, parallèlement à BC.

**Lieu 74.**

**564.** *Lieu des centres des parallélogrammes qui ont une base commune et même hauteur* h.

C'est une droite menée par le point milieu de la hauteur, parallèlement à la base commune.

**Lieu 74. — I.**

**565.** *Lieu des centres des parallélogrammes obtenus en coupant deux parallèles données par deux sécantes parallèles entre elles.*

**Lieu 75.**

**566.** *Lieu des sommets des triangles qui ont même base* BC *et même hauteur* h.

Ce lieu n'est autre que le lieu des points situés à la distance $h$ de la droite BC; c'est donc l'ensemble des deux droites indéfinies menées de part et d'autre parallèlement à BC, à la distance $h$.

**567.** *Remarque.* Après l'étude des superficies, la question précédente peut s'énoncer comme il suit :

*Lieu des sommets des triangles qui ont même base et même superficie.*

**Lieu 75. — I.**

**568.** *Lieu du point de concours des médianes des triangles qui ont une base commune et même hauteur.*

Les médianes se coupent aux $^2/_3$ de leur longueur à partir du sommet; le lieu est donc la parallèle menée à la base par le point situé aux $^2/_3$ de la hauteur du triangle, à partir du sommet.

**Lieu 76.**

**569.** *Lieu des points de concours des diagonales des trapèzes symétriques formés en menant des parallèles à la base d'un triangle isocèle.*

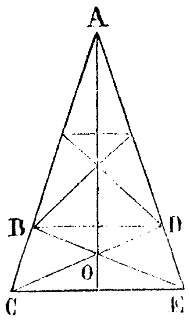


Fig. 342.

Les parallèles BD et CE donnent lieu à des angles correspondants égaux.

| | |
|---|---|
| Ainsi l'angle | ABD = ACE, |
| de même | ADB = AEC; |
| mais | C = E, |
| donc | B = D. |

Ainsi le triangle ABD est isocèle, et le côté AB = AD.

Or on sait que les droites telles que DC, BE, se coupent sur la bissectrice de l'angle A (n° 534); donc la bissectrice est le lieu du point de concours des diagonales des trapèzes symétriques.

**570.** *Remarque.* La bissectrice de l'angle A ou la hauteur du triangle isocèle répond directement à la question, lorsque les trapèzes sont compris dans le triangle. Les prolongements de la bissectrice au delà du sommet A ou au delà de la base CE correspondent au point de concours des diagonales des trapèzes obtenus, lorsque les parallèles menées coupent les prolongements de AC et de AE.

**Lieu 77.**

**571.** *Lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites données égale une ligne donnée.*

(Voir *Méthodes*, nos 74 et 75.)

**Lieu 78.**

**572.** *Lieu des sommets des parallélogrammes à périmètre constant que l'on peut obtenir en coupant un angle donné de grandeur et de position par des sécantes parallèles aux côtés de cet angle.*

La question se ramène à la précédente.

# MAXIMA ET MINIMA

**573**. Avec les faibles ressources que procure le livre I, on ne peut traiter que de la variation des droites.

Voici les théorèmes que l'on utilise le plus fréquemment :

*Toute ligne convexe enveloppée est plus petite que la ligne enveloppante.* (*Exemples*, nos 574, 589, 591.)

*La perpendiculaire est plus petite que toute oblique qui part du même point.* (*Exemples*, nos 584, 587.)

On emploie aussi les lieux géométriques déjà étudiés; car tous les points d'un lieu considéré jouissent de la même propriété, tandis que les autres points sont ou plus ou moins éloignés d'une droite donnée. (*Exemple*, no 580.)

La méthode par duplication (no 145) donne parfois des solutions très simples. (*Exemples*, nos 574, 577, 582, 2e dém.)

Enfin la remarque suivante conduit, dans bien des cas, sinon à la démonstration, du moins à la découverte du maximum ou du minimum demandés : *Lorsqu'un triangle a un côté invariable, ou bien un angle donné, et que les autres parties varient, le triangle isocèle donnera le maximum ou le minimum cherchés;* car ce triangle est la limite commune de deux triangles égaux entre eux, ayant des positions symétriques par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de la base donnée, ou par rapport à la bissectrice de l'angle donné. Il suffit donc de comparer le triangle isocèle à un autre triangle remplissant les conditions imposées. (*Exemples*, nos 574, 581, 582, 583.)

### Problème 79.

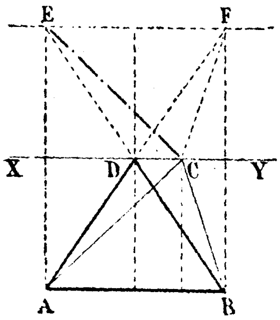


Fig. 343.

**574**. *De tous les triangles* ABC *qui ont même base* AB *et même hauteur, quel est celui dont la somme des deux autres côtés est minima?*

Cherchons les points symétriques E, F de A et B, par rapport à XY.

La somme AC + CB égale la ligne brisée AC + CF; donc le minimum demandé correspond à la droite ADF, et l'on obtient ainsi un triangle isocèle ADB pour réponse.

### Problème 79. — I.

**575**. *De tous les parallélogrammes qui ont une diagonale commune et dont les autres sommets se trouvent sur les droites parallèles à cette diagonale, quel est celui dont le périmètre est minimum?*

C'est le losange, d'après l'exercice précédent.

### Problème 79. — II.

**576**. *De tous les parallélogrammes qui ont même base et même hauteur, quel est celui dont le périmètre est minimum?*

C'est le rectangle.

### Problème 80.

**377.** *De tous les triangles* ABC *qui ont même sommet* A *et dont les autres sommets sont sur les côtés d'un angle aigu donné* O, *quel est celui dont le périmètre est minimum?*

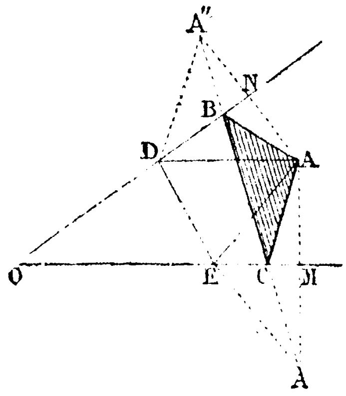


Fig. 344.

Il suffit de recourir à la méthode par duplication, pour reconnaître que le triangle de périmètre minimum est celui qu'on obtient en joignant les points A', A'' symétriques de A par rapport à chaque côté de l'angle, et en menant AB, AC; car le périmètre du triangle ABC est moindre que celui de tout autre triangle ADE.

### Problème 80. — I.

**378.** *De toutes les lignes brisées qui partent d'un point* A *pour aboutir à un point* B, *et dont les sommets doivent se trouver respectivement sur deux droites données, quelle est celle dont la longueur est minima?*

Solution analogue à la précédente.

On peut poser une question de même genre pour une ligne brisée assujettie à rencontrer un nombre quelconque de droites données.

### Problème 81.

**379.** *Étant donné un triangle* ABC, *on demande quel est le point de* BC *pour lequel la somme des distances aux deux autres côtés du triangle est minima.*

C'est le sommet du plus grand des angles B et C.

La distance minima est la hauteur abaissée du sommet du plus grand des deux angles sur le côté opposé.

### Problème 82.

**380.** *On donne un polygone et deux droites* OX, OY. *Quel est le point du périmètre de ce polygone dont la somme des distances aux deux droites est maxima, et le point où elle est minima?*

La base d'un triangle isocèle est le lieu des points dont la somme des distances aux deux côtés égaux est constante (n$^{os}$ 20, 74); on est donc conduit à mener EF de manière que OE = OF. Le sommet A donne le maximum AG + AL = EH.

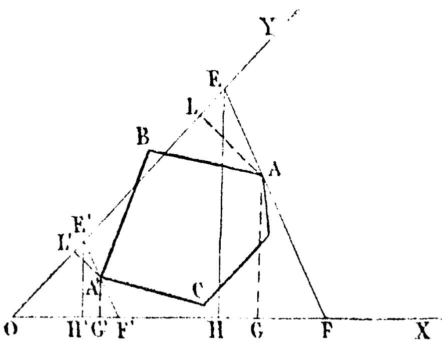


Fig. 345.

Le sommet A' donne le minimum.

### Problème 83.

**581.** *De tous les triangles qui ont même angle au sommet et dont la somme des côtés qui comprennent cet angle est constante, quel est celui qui a la plus petite base?*

1re *Démonstration.* Considérons le triangle isocèle BAC et le triangle EAF, tels que BE = CF; nous allons prouver que toute base telle que EF est plus grande que la base BC du triangle isocèle.

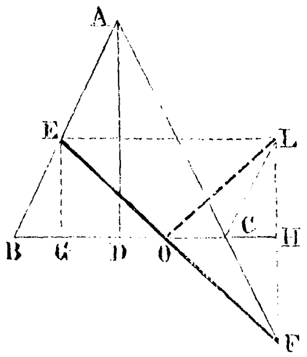


Fig. 346.

Abaissons les perpendiculaires EG, FH.

Les triangles rectangles EBG, CFH sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et l'angle B = l'angle FCH; donc

$$BG = CH,$$

et par suite $GH = BC.$

Or GH est plus petit que EF; donc

$$BC < EF.$$

2e *Démonstration.* La méthode par duplication conduit à une démonstration très simple. Déterminons le point L symétrique de F, par rapport à BC; on aura OL = OF, puis les lignes BE et CL sont égales et parallèles; il en est donc de même de BC et de EL; or

$$EL < EO + OL; \quad \text{donc} \quad BC < EF.$$

### Problème 84.

**582.** *Un angle A est donné de grandeur et de position ainsi qu'un point D sur la bissectrice de cet angle. Par ce point on mène une sécante BDC. Quel est le triangle dont le périmètre est minimum?*

1re *Démonstration.* Le triangle isocèle ABC, obtenu en menant BC perpendiculaire à la bissectrice, a le périmètre minimum.

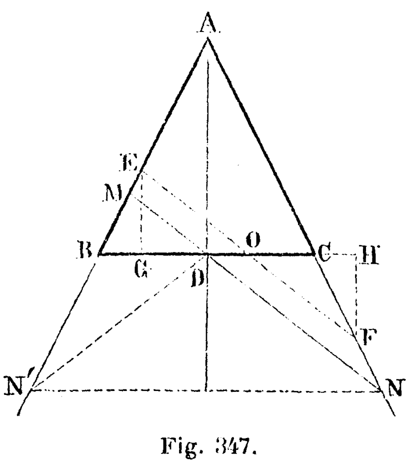


Fig. 347.

En effet, soit un autre triangle AEF, tel que BE = CF; on a :

$$BC < EF. \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 581.)$$

Or, puisque GE = FH, on a aussi GO = OH, et le point O est sur le segment DC; la parallèle MDN, menée par le point D, donne MN > EF; donc, à plus forte raison, MN > BC.

D'ailleurs, $AE + AF = AB + AC$,

donc $AM + AN > AB + AC.$

Ainsi le triangle isocèle a le périmètre minimum.

2e *Démonstration*. La méthode par duplication conduit à une démonstration très simple.

En déterminant le point N' symétrique de N par rapport à la hauteur AD du triangle isocèle ABC, on a $DN' = DN$; d'ailleurs DB est bissectrice de l'angle MDN'.

Or la bissectrice est plus petite que la demi-somme des côtés, car elle est comprise entre la hauteur et la médiane (nos 500 et 646); par suite, elle est plus courte que cette dernière ligne; or la médiane est plus petite que la demi-somme des deux côtés adjacents (no 455); donc

$$2DB < DM + DN' \quad \text{ou} \quad BC < MN.$$

**Problème 85.**

583. *On prolonge deux côtés d'un triangle donné, au-dessous de la base, de manière que la somme des prolongements soit égale à cette base. Dans quel cas la droite qui joint les extrémités des prolongements est-elle minima?*

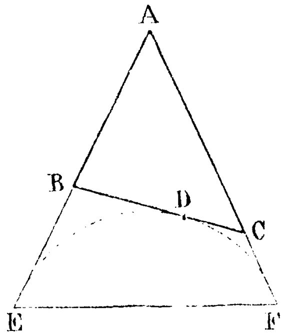


Fig. 348.

Soit un point quelconque D de la base.

Prenons $BE = BD$ et $CF = CD$.

Joignons E et F.

Le triangle AEF a un angle constant A; la somme des côtés AE et AF est aussi constante, puisqu'elle égale $AB + BC + CA$; donc la base EF est minima lorsque le triangle est isocèle (no 581).

Donc il faut prendre $AE = AF = \dfrac{AB + BC + CA}{2}$.

*Remarque*. Les trois points D, E, F, sont les points de contact d'un des cercles exinscrits au triangle ABC. (G., no 189.)

**Problème 86.**

584. *D'un point* D *de l'hypoténuse* BC *d'un triangle rectangle* ABC, *on abaisse des perpendiculaires* DE, DF *sur les côtés de l'angle droit; dans quel cas la droite* EF *qui joint les pieds des perpendiculaires est-elle minima?*

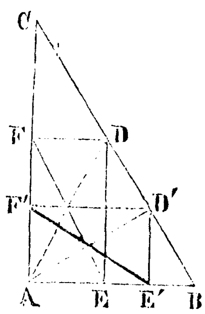


Fig. 349.

Pour un point D quelconque $FE = AD$; or la plus petite droite qu'on puisse mener du sommet A à un point de l'hypoténuse est la perpendiculaire AD'; donc F'E' est la ligne minima.

**Problème 86. — I.**

585. *Par un point* D, *pris sur le périmètre d'un losange, on mène des parallèles aux diagonales de cette figure et on termine le rectangle inscrit; pour quelle position du point* D *la somme des diagonales du rectangle sera-t-elle minima?*

Solution analogue à la précédente.

### Problème 86. — II.

586. *Pour quelle position d'un point* D *pris sur le périmètre d'un losange, le rectangle inscrit ayant ce point pour un de ses sommets, aura-t-il le périmètre maximum, et pour quelle autre position, le périmètre minimum ?*

D'après un problème connu (nº 579), le périmètre sera maximum quand le point D sera à l'une des extrémités de la grande diagonale; mais, en réalité, le triangle aura une hauteur nulle, et le périmètre se composera de deux fois la grande diagonale. Le minimum a lieu quand le point D est pris à l'une des extrémités de la petite diagonale. Pour toute position intermédiaire du point D, le périmètre du rectangle est plus grand que le double de la petite diagonale et plus petit que le double de la grande.

### Problème 87.

587. *Une droite* XY *est menée par le sommet* A *d'un triangle* ABC; *des sommets* B *et* C *on abaisse des perpendiculaires sur la droite donnée; quelle position faut-il donner au triangle, en le faisant tourner dans son plan autour du sommet* A, *pour que la somme des perpendiculaires soit maxima?*

1º Du point F, milieu de BC, abaissons une perpendiculaire sur XY; on a un trapèze. La somme des bases égale le double de la base moyenne,

ou $$BD + CE = 2FG. \qquad \text{(fig. 350.)}$$

Donc le maximum de la somme a lieu pour le maximum de FG. Cette droite ne peut être plus grande que l'hypoténuse AF, mais elle peut l'égaler; donc le maximum a lieu lorsque la médiane AF est perpendiculaire à XY.

2º FG diminue lorsque FA se rapproche de XY.

Lorsque C vient sur la droite, $FG = \frac{BD}{2}$.

Mais, en réalité, il faut continuer le mouvement et regarder comme

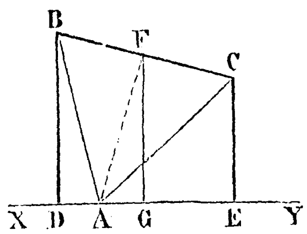


Fig. 350.

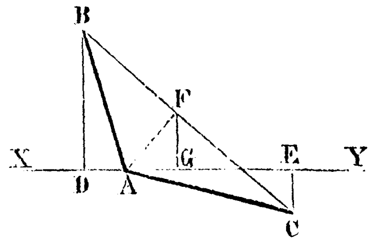


Fig. 351.

négative la perpendiculaire EC (fig. 351), qui tombe en sens contraire de BD (nº 436, 3e *cas*). On a une différence, car

$$FG = \frac{BD - CE}{2};$$

cette différence s'annule lorsque F vient sur XY.

*Remarque.* Au point de vue géométrique, pour étudier la longueur de la base moyenne FG, il suffit de considérer AF dans les diverses positions que cette ligne prend en tournant autour du point A, à partir de XY, jusqu'à ce qu'elle devienne perpendiculaire à XY : la droite FG, d'abord nulle, croît constamment jusqu'à devenir égale à la médiane AF.

Au point de vue analytique, on reconnaît sans peine que les variations de FG dépendent de celles du sinus de l'angle YAF. Soient $\alpha$ cet angle, $m$ la médiane AF; on a : $FG = m \sin \alpha$. Lorsque $\alpha$ est nul, il en est de même de FG; puis cette ligne augmente jusqu'à égaler $m$ pour $\alpha = 90$ degrés; ensuite elle décroît quand l'angle continue à croître; pour $\alpha = 180$ degrés, la longueur de FG est nulle de nouveau; pour $\alpha > 180°$, la valeur de FG est négative; elle devient égale à $-m$ pour $\alpha = 270$ degrés; puis tout en restant négative, elle diminue en valeur absolue, et redevient nulle pour $\alpha = 360$ degrés.

### Problème 88.

588. *A partir de chaque sommet d'un carré, en suivant le périmètre d'une manière continue, on prend sur chaque côté une longueur donnée, et l'on joint deux à deux les points ainsi déterminés; trouver le carré minimum que l'on peut obtenir.*

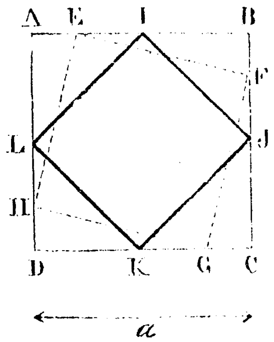



Fig. 352.

Soit $AE = BF = CG = DH$.

1° Il faut d'abord prouver que la figure est un carré.

2° Déterminer ensuite quel est le carré dont le côté est le plus petit.

Or $AE + AH = AD$ quantité constante;

donc le minimum de l'hypoténuse a lieu lorsque les deux côtés de l'angle droit sont égaux entre eux (n° 581).

Ainsi le carré minimum IJKL est celui qu'on obtient en joignant deux à deux les points milieux des côtés du carré donné.

### Problème 89.

589. *Étudier les variations de la somme des distances de deux points donnés à un même point d'une droite donnée.*

1° *Les points donnés sont de part et d'autre de la droite.*

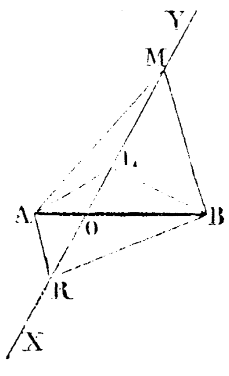



Fig. 353.

**a.** Lorsque la droite coupe AB, le point d'intersection O donne la plus petite somme; car

$$AB < AL + LB.$$

**b.** La somme augmente lorsque le point s'éloigne de AB. En effet, la ligne convexe enveloppée $AL + LB$ est plus petite que la ligne enveloppante $AM + MB$.

**c.** La somme tend vers l'infini lorsque le point mobile s'éloigne indéfiniment dans la direction OX ou dans la direction OY.

*Résumé.* La somme peut varier de AB à $+\infty$.

Pour une somme donnée $2a > AB$, il y a deux points M, N et deux points seulement qui donnent :

$$AM + MB = AN + NB = 2a.$$

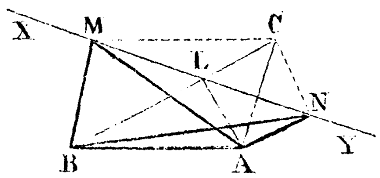


Fig. 354.

2° *Les points donnés sont d'un même côté de la droite.*

Pour ramener ce cas au précédent, il suffit de déterminer le point C symétrique de A par rappport à XY, car $AN + BN$ revient à $CN + BN$. Donc le minimum de la somme est donné par la droite BC, et la somme peut varier de BC à $+\infty$.

**590.** Note. De l'étude précédente, on peut déduire plusieurs conséquences qui se rapportent à l'ellipse. (G., n° 613.)

On sait que l'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante; donc, si A et B sont les deux foyers de la courbe et $2a$ la somme des rayons vecteurs, on peut admettre les résultats suivants :

1° La somme $2a$ doit être plus grande que la distance focale AB;

2° Toute droite qui passe entre les foyers A et B coupe l'ellipse en deux points (fig. 353);

3° Une droite qui ne passe point entre les foyers (fig. 354) coupe l'ellipse en deux points lorsque $2a$ est plus grand que la droite BC, qui joint un des foyers au point symétrique du premier par rapport à cette droite;

4° Elle ne rencontre pas la courbe lorsque $2a$ est moindre que BC;

5° Elle est tangente à la courbe quand $2a = BC$, car alors les deux points d'intersection M et N se rapprochent indéfiniment;

6° L'ellipse est une courbe convexe, car une droite ne peut la couper qu'en deux points.

### Problème 90.

**591.** *Étudier les variations de la différence des distances de deux points donnés à un même point d'une droite donnée.*

(*Méthodes*, n$^{os}$ 258 à 264.)

*Remarque.* De même que l'étude des variations de la somme des distances de deux points donnés à un même point d'une droite, conduit à la connaissance de plusieurs propriétés de l'ellipse (n° 590); de même l'étude des variations de la différence des distances de deux points à un même point d'une droite donnée, fait connaître diverses propriétés de l'hyperbole (n° 260); mais la seconde étude est plus longue et plus difficile que la première. On comprend donc pourquoi la plupart des Traités de Géométrie ne démontrent pas d'une manière complète et rigoureuse *qu'une droite ne saurait couper une hyperbole en plus de deux points;* cependant nous avons cru devoir introduire ce complément dans nos *Éléments de Géométrie*, dès la 4e édition (n° 680).

# LIVRE II

---

## THÉORÈMES

### Distances et cordes.

**392.** Pour démontrer facilement les théorèmes de ce paragraphe, il est utile de se rappeler les théorèmes suivants :

*La plus courte et la plus longue des distances d'un point à une circonférence se mesurent sur la droite qui joint le point au centre de la circonférence.*

*La plus courte et la plus longue des distances qui puissent exister entre les divers points de deux circonférences se mesurent sur la ligne des centres.*

*De deux cordes inégales, la plus longue est la plus rapprochée du centre.*

*Remarque.* Les divers cas d'égalité de deux triangles suffisent pour démontrer les théorèmes proposés dans ce paragraphe; néanmoins nous admettons que l'on connait la mesure de l'angle inscrit, car cela donne lieu à des démonstrations beaucoup plus simples que celles qu'on obtient en ne s'appuyant que sur les cas d'égalité de deux triangles.

Un ou deux exercices présupposent aussi la connaissance de la définition de la tangente.

#### Théorème 91.

**393.** *Toute droite* AB *qui partage la circonférence en deux parties égales* AMB *et* ANB *est un diamètre.*

#### Théorème 92.

**394.** *La plus grande ligne droite que l'on puisse mener d'un point* M *à une circonférence donnée est la droite* MOA *qui part de ce point, passe au centre, et va se terminer à la circonférence.*

#### Théorème 93.

**395.** *Lorsque deux circonférences n'ont aucun point commun, leurs points les plus rapprochés sont sur la ligne des centres.*

### Théorème 94.

**596.** *Quelle que soit la position respective de deux* ***circonférences*** *A et B, la plus* ***grande*** *sécante que l'on puisse mener de* ***l'une*** *à* ***l'autre est dans*** *la* ***direction*** *des* ***centres***.

### Théorème 95.

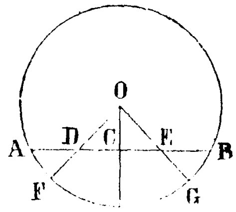


Fig. 355.

**597.** *Les points pris sur une corde à égale distance du milieu de cette corde sont équidistants de la circonférence.*

### Théorème 95. — I.

**598.** *Les points pris sur une tangente, à égale distance du point de contact, sont équidistants de la circonférence.*

### Théorème 95. — II.

**599.** *Les points pris sur une même circonférence, à égale distance du point de contact de deux circonférences tangentes, sont équidistants de la seconde circonférence.*

### Théorème 96.

**600.** *Les cordes parallèles menées par les extrémités d'un diamètre sont égales, et la droite qui* ***joint*** *leurs autres extrémités* ***est*** *aussi un diamètre.*

1° L'arc $BC = AD$ comme compris dans des angles inscrits égaux A et B. Or, si l'on retranche chacun de ces arcs d'une demi-circonférence, on aura :

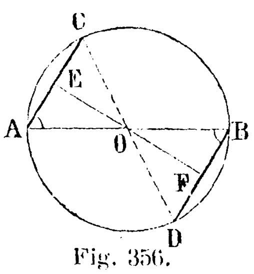


Fig. 356.

$$\text{arc } AC = \text{arc } BD,$$

donc, $\qquad$ corde $AC =$ corde $BD$.

2° L'arc $BC + BD$ égale une demi-circonférence, car $BD = AC$; donc $CD$ est un diamètre.

*Autre démonstration.* Lorsqu'on ne veut pas employer les angles inscrits, on abaisse la perpendiculaire EOF.

Les triangles rectangles AOE, BOF sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un angle aigu égal; donc $OE = OF$, et les cordes sont égales. Le reste comme ci-dessus.

### Théorème 96. — I.

**601.** *Par les extrémités d'une corde, et dans un même segment de cercle, on mène deux cordes également inclinées sur la première; prouver que ces deux lignes sont égales, et que la droite qui joint leurs autres extrémités est* ***parallèle*** *à la* ***première*** *corde.*

### Théorème 97.

602. *Deux cordes sont égales lorsqu'elles sont également inclinées sur le diamètre qui passe par leur point de concours.*

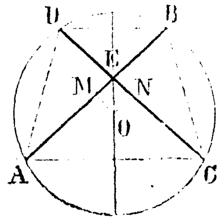


Fig. 357.

En effet, du centre, abaissons les perpendiculaires OM, ON.

Les triangles rectangles OME, ONE sont égaux comme ayant l'hypoténuse commune et un angle aigu égal MEO = NEO.

Donc OM = ON, et les cordes sont égales comme étant également éloignées du centre.

*Remarque.* On peut recourir à la *Duplication* (n° 145), en faisant tourner une partie de la figure autour de OE; il en est de même pour plusieurs des questions suivantes.

### Théorème 97. — I.

603. *Deux droites sécantes ou tangentes, qui, sans se couper, interceptent sur une même circonférence des arcs égaux, sont parallèles.*

### Théorème 98.

604. *Dans un même cercle, deux cordes égales qui se coupent sont les diagonales d'un trapèze isocèle.*

### Théorème 98. — I.

605. *Dans un même cercle, deux cordes égales qui ne se coupent pas sont les côtés non parallèles d'un trapèze isocèle.*

### Théorème 99.

606. *Deux cordes égales d'une même circonférence et les arcs que les cordes sous-tendent interceptent des segments égaux sur toute sécante parallèle à la droite qui joint les milieux des cordes.*

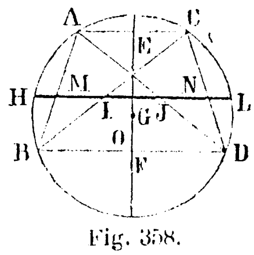


Fig. 358.

Soient les cordes égales AB, CD; O, le centre du cercle et G le point où la perpendiculaire OE rencontre la parallèle HL.

La figure ABDC est un trapèze symétrique.

La perpendiculaire abaissée du centre divise les trois cordes parallèles en deux parties égales; ainsi le milieu G de la corde HL est sur EF.

D'ailleurs les deux figures EFDC, EFBA sont superposables.

Donc GN = GM;

par suite, MH = NL.

*Remarque.* Les cordes égales AD, BC donnent HI = JL.

**Théorème 99. — I.**

**607.** *Lorsqu'on fait pivoter une corde autour d'un point fixe, et qu'on mène par les extrémités de la corde mobile des cordes parallèles à une ligne donnée, la droite qui joint les extrémités des parallèles passe constamment par un même point.* (*Cas particulier d'un problème de* Poncelet. Voir n° 1236.)

Soit AB qui pivote autour du point M (fig. 358); la quatrième corde CD passera constamment par le point N symétrique de M, par rapport à la perpendiculaire EOF.

**Théorème 100.**

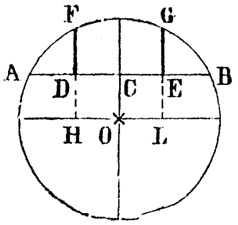


Fig. 359.

**608.** *Par deux points pris sur une corde et équidistants du point milieu de cette corde, on élève deux perpendiculaires limitées au même arc de cercle ; prouver que ces perpendiculaires sont égales.*

*Remarque.* Par rapport à l'arc AFGB et à la corde AB, les perpendiculaires DF, EG sont appelées *ordonnées* des points F et G.

**Théorème 100. — I.**

**609.** *Par rapport à un arc et à sa corde, les ordonnées égales sont équidistantes du milieu de la corde.*

**Théorème 101.**

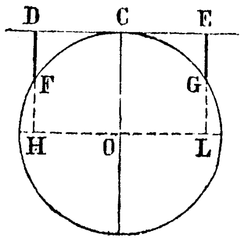


Fig. 360.

**610.** *Les ordonnées* DF, EG *prises à équidistance du point de contact, sont égales.*

Ce théorème est analogue au précédent, mais présuppose la connaissance de la propriété fondamentale suivante. *La tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui aboutit au point de contact.*

*Remarque.* Dans le tracé des arcs de cercle sur le terrain, les lignes DF et EG sont nommées *Ordonnées sur la tangente.* (Voir *Eléments de Topographie,* par Edmond Gabriel, p. 323, n° 654.)

**Théorème 101. — I.**

**611.** *Les distances égales,* CD, CE *déterminent des arcs égaux* CF, CG.

Puisque $CE = CD$,

on a : $OL = OH$, donc $HF = LG$.

Par suite, $DF = GE$.

**Théorème 102.**

**612.** *La plus grande et la plus petite corde que l'on puisse mener par un point A donné dans un cercle, sont perpendiculaires l'une à l'autre, et l'une d'elles est un diamètre.*

C'est le diamètre et la perpendiculaire à ce même diamètre, menés par le point donné A.

*Remarque.* Lorsque le point est extérieur, il n'y a lieu de considérer que la plus grande corde. La sécante qui passe par le centre donne une corde égale au diamètre.

**Théorème 102. — I.**

**613.** *Deux cordes de longueurs connues l et l' sont inscrites dans la même circonférence; la plus courte et la plus longue distance de leurs points milieux correspondent aux cordes parallèles.*

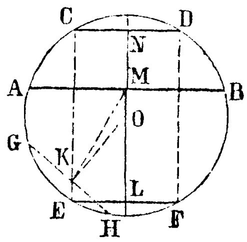


Fig. 361.

Soient les deux cordes AB et GH de longueurs $l$ et $l'$.

Soit $EF = CD = GH$, CD et EF étant parallèles à AB.

MN est la plus courte distance.

ML est la plus longue distance.

**Théorème 103.**

**614,** *Lorsque deux circonférences se coupent, et que de chaque centre on abaisse une perpendiculaire sur la sécante menée par l'un des points d'intersection, la distance entre les deux perpendiculaires est la demi-somme ou la demi-différence des cordes interceptées par chaque circonférence sur la sécante menée.*

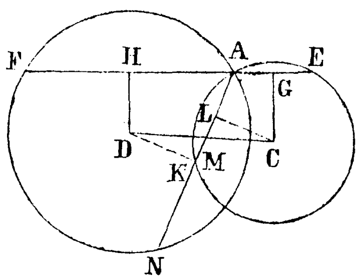


Fig. 362.

1° Pour la sécante EF, telle que le point A est compris entre E et F.

On a : $AH = {}^1/_2 AF$,

et $AG = {}^1/_2 AE$,

d'où $HG = {}^1/_2 FE$.

2° Pour la sécante AMN, telle que le point A est sur le prolongement de MN.

On a : $AK = {}^1/_2 AN$,

$AL = {}^1/_2 AM$,

d'où $KL = {}^1/_2(AN - AM) = {}^1/_2 MN$.

*Remarque.* Dans les applications on prend pour longueur de la sécante commune aux deux circonférences la partie EF ou MN, comprise entre les points autres que le point commun A.

**Théorème 103. — I.**

**615.** *Si deux circonférences se coupent, deux sécantes parallèles menées par les points d'intersection sont égales.*

**Théorème 104.**

**616.** *De toutes les sécantes que l'on peut mener par l'un des points d'intersection de deux circonférences* A *et* B, *la plus grande est celle qui est parallèle à la ligne des centres.*

En effet, la sécante parallèle à la ligne des centres égale deux fois la distance AB des deux centres.

## Tangente.

**617. Définitions :** 1° *La tangente à une courbe est une droite indéfinie qui n'a qu'un point de commun avec cette courbe.*

Cette définition s'applique exactement à la tangente au cercle, à l'ellipse et aux autres courbes convexes et fermées; mais elle ne convient ni à l'hyperbole, ni à la parabole, car une droite peut n'avoir qu'un seul point commun, *à distance finie,* avec chacune de ces courbes, et n'être cependant pas tangente à ces lignes.

Il faut donc recourir à d'autres définitions.

2° *La tangente est la limite des positions que prend une sécante qui se meut parallèlement à elle-même, jusqu'à ce que les deux points d'intersection se réduisent à un seul.*

Cette nouvelle définition s'applique à toutes les courbes convexes; elle convient donc à l'hyperbole et à la parabole aussi bien qu'à l'ellipse; elle permet de démontrer d'une manière très simple la propriété fondamentale de la tangente au cercle.

*Toute droite tangente à une circonférence est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de contact.*

Réciproquement : *Toute droite perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente à la circonférence.*

*Remarque.* La seconde définition ne s'applique point aux courbes à points multiples, qu'on rencontre si fréquemment en géométrie descriptive; il est donc utile de donner une définition qui convienne à tous les cas, et de reprendre le théorème du cercle en s'appuyant sur la définition générale suivante :

3° *La tangente à une courbe est la limite* MT (fig. 363) *des positions que prend une sécante* MM' *tournant autour de l'un des points d'intersection, de telle sorte que le second point* M' *se rapproche indéfiniment du premier.*

Une droite peut couper une courbe en plus de deux points; mais la définition précédente présuppose, dans ce cas, que l'on considère des points d'intersection consécutifs M et M′ sur la courbe, lorsqu'on décrit cette ligne d'un mouvement continu.

*Démonstration du théorème relatif au cercle.* Soit une sécante quelconque MM′ (fig. 364); du centre, abaissons une perpendiculaire OP sur

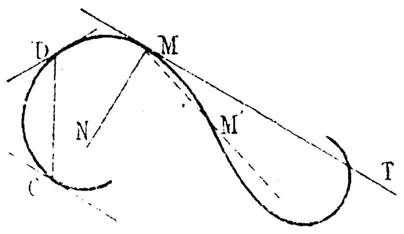



Fig. 363.

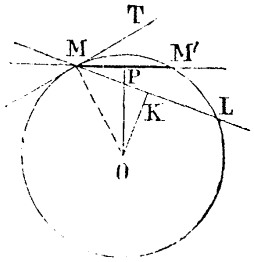



Fig. 364.

cette ligne; la perpendiculaire passera au milieu de la corde, quelque rapprochés que soient les points M et M′; donc à la limite, lorsque les deux points d'intersection se rapprochent indéfiniment, la sécante devient la tangente MT; la perpendiculaire, devant passer au milieu de la corde, n'est autre que le rayon ON du point de contact; donc la tangente est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de contact.

**Note.** La troisième définition est due aux grands géomètres du XVII^e siècle FERMAT, HUYGHENS, NEWTON, LEIBNIZ.

**618. Courbes tangentes.** *Deux courbes sont tangentes en un point donné* M, *lorsque ces deux courbes ont même tangente en ce point.*

De cette définition générale, trop rarement donnée, résulte immédiatement que les rayons du point de contact de deux cercles tangents sont en ligne droite, car chacun d'eux doit être perpendiculaire à la tangente commune et au même point.

**619. Angle d'une droite et d'une courbe.** On nomme angle d'une droite AB et d'une courbe CAB (fig. 365) l'angle BAT formé par la droite AB et par la tangente AT, menée à la courbe par le point où elle est rencontrée par la droite.

L'angle ABT est l'angle formé au point B par AB et par la courbe donnée.

On considère généralement le plus petit des deux angles supplémentaires BAT, DAT, que la sécante AB forme avec la tangente AT.

Une droite est *normale* à la courbe, ou *coupe normalement* la courbe, lorsqu'elle est perpendiculaire à la tangente.

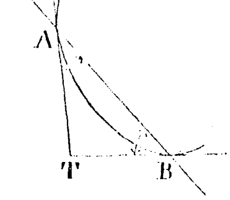



Fig. 365.

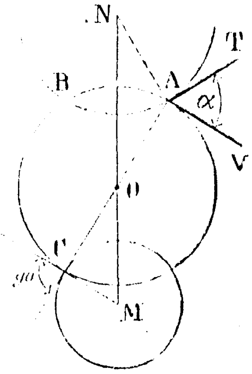



Fig. 366.

**Angle de deux courbes.** On nomme angle de deux courbes AB, AC qui se coupent (fig. 366), l'angle TAV formé par les tangentes AT, AV menées respectivement à chaque courbe par le point d'intersection.

**620. Cercles orthogonaux.** On dit qu'un cercle *coupe orthogonalement* un autre cercle lorsque les tangentes menées respectivement à ces cercles, par le point d'intersection, font entre elles un angle droit; les cercles ayant pour centres respectifs M et O (fig. 366) sont orthogonaux (voir aussi n° 627).

Dans ce cas, les rayons menés au point d'intersection sont perpendiculaires l'un à l'autre.

**Théorème 105.**

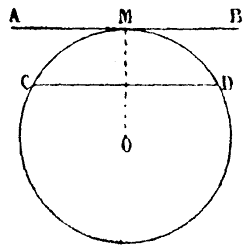



Fig. 367.

**621.** *La tangente AB menée par le milieu d'un arc CMD est parallèle à la corde CD qui sous-tend cet arc.*

Le rayon OM, mené au point de contact, est perpendiculaire à la tangente (G., n° 131); ce même rayon, étant mené au milieu de l'arc CMD, est perpendiculaire à la corde CD. (G., n° 122.) Donc les deux droites AB et CD sont parallèles comme étant perpendiculaires à la même droite OM.

**Théorème 106.**

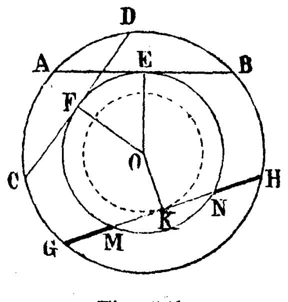



Fig. 368.

**622.** *Lorsque deux circonférences sont concentriques : 1° La plus grande circonférence intercepte des cordes égales sur les tangentes à la circonférence intérieure ;*

*2° Pour une corde qui coupe les deux circonférences, les parties GM, NH, comprises entre les deux courbes sont égales.*

**Théorème 107.**

**623.** *Lorsque, d'un même point, on mène deux tangentes à une circonférence : 1° La corde des contacts est perpendiculaire à la droite qui joint le centre au point de concours des tangentes;*

*2° Les tangentes sont également inclinées sur la corde des contacts.*

*Remarque.* Le procédé usuel que l'on emploie pour mener une tangente à une circonférence, par un point donné hors du cercle, en décrivant une

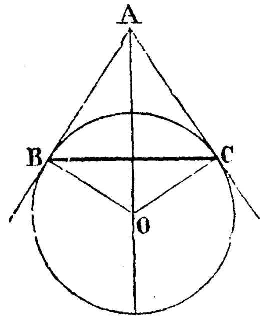



Fig. 369.

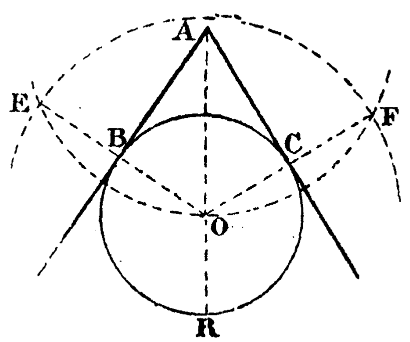



Fig. 370.

circonférence sur la droite AO comme diamètre (fig. 369), est très simple; mais il ne peut être utilisé pour la sphère, tandis que le suivant conduit à une solution qui est aussi applicable aux arcs tangents sur la sphère.

Du point O comme centre (fig. 370), avec un rayon double de OR, il faut décrire une circonférence concentrique à la première. Du point A comme centre, avec AO pour rayon, couper la circonférence décrite : soient E, F les points d'intersection. La perpendiculaire élevée au milieu de la corde OE est la tangente demandée.

On peut joindre le point C au point A.

**Théorème 108.**

**624.** *Lorsque deux arcs, ayant même rayon, sont tangents à la même circonférence : 1o La corde des contacts est perpendiculaire à la droite qui joint le centre de la circonférence au point de concours des deux arcs ;*
2o *Les arcs sont égaux et également inclinés sur la corde des contacts.*

Soient E, F les centres des arcs tangents à la circonférence O.

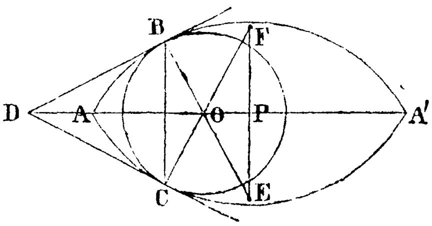


Fig. 371.

1o La ligne des centres EF est perpendiculaire à la corde commune AA' (G., no 137, 2o), les rayons EB, FC sont égaux, et ces rayons passent par le centre O ; ainsi OB = OC ; donc OE = OF et ces obliques égales donnent aussi PE = PF ; donc les triangles FOE, BOC sont isocèles, et ont un angle opposé par le sommet ; mais la droite OP, perpendiculaire au milieu de FE, est bissectrice de l'angle FOE et de son opposé BOC ; donc cette droite AOP est perpendiculaire au milieu de la corde des contacts BC.

2o On sait que l'angle d'une droite BC et d'une courbe BA est l'angle CBD formé par la droite et par la tangente BD (no 619) ; or l'angle OBC = OCB ; donc l'angle complémentaire CBD = BCD.

**Théorème 109.**

**625.** *Les tangentes extérieures* CD *et* EF, *communes à deux circonférences* A *et* B, *se rencontrent sur la ligne des centres, et il en est de même des tangentes intérieures* GL *et* KH.

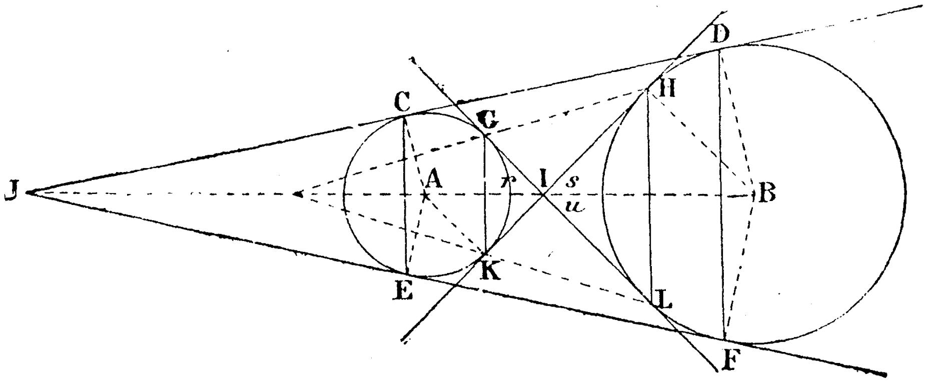


Fig. 372.

Le point A, étant équidistant des tangentes extérieures, appartient à la bissectrice de leur angle, et il en est de même du point B. Donc la bissectrice de l'angle J se confond avec la ligne des centres.

On voit de même que les points A et B appartiennent aux bissectrices des angles opposés formés en I par les tangentes intérieures.

Et comme ces angles sont égaux, leurs moitiés sont aussi égales. Or $I + s + u = 2$ droits; donc $I + s + r = 2$ droits; et les deux bissectrices IA et IB ne font qu'une même ligne droite qui est la ligne des centres.

Donc *les tangentes*...

### Théorème 109. — I.

**626.** *Avec les mêmes données que précédemment* (n° 625) :

1° *Les cordes des contacts* CE, GK, HL, DF *sont parallèles.*

2° *Les sécantes* CF, DE *sont égales entre elles ; il en est de même de* GH *et* KL.

1° Les quatre cordes sont perpendiculaires à la ligne des centres.

2° La droite AB étant perpendiculaire au milieu des cordes CE, DF; la figure CDFE est un trapèze symétrique, et les diagonales CF, DE sont égales.

Le trapèze GKLH est aussi symétrique; donc les côtés GH, KL sont égaux.

*Remarque.* Le point I est le centre intérieur de similitude, et le point J, le centre extérieur. (G., n° 813.)

### Théorème 109. — II.

**627.** *Si l'on mène les trois tangentes communes à deux cercles* I *et* K *tangents l'un à l'autre, la tangente interne* AB *rencontre chacune des deux autres à égale distance des points de contact.*

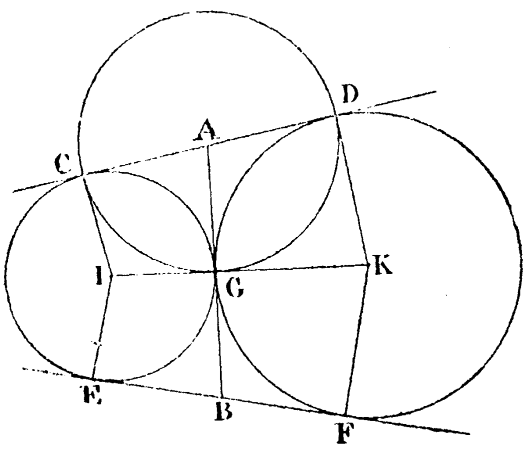


Fig. 373.

En effet, les tangentes menées d'un même point à un même cercle étant égales (G., n° 192), on a $AC = AG$, et $AG = AD$; ainsi le point A est le milieu de CD.

Et de même, le point B est le milieu de EF.

*Remarque.* Si du point A comme centre, avec AG pour rayon, on décrit une circonférence, cette ligne passe par les points de contact C, D et coupe *orthogonalement* les deux cercles donnés.

On sait que deux circonférences sont *orthogonales*, lorsque leurs rayons respectifs AC, IC allant à un point d'intersection, sont perpendiculaires l'un à l'autre (n° 620).

La droite AB prolongée est le lieu des points d'où l'on peut mener des tangentes égales aux cercles donnés.

**Théorème 109. — III.**

628. *Le point de contact des circonférences données* (nº 627), *et les points de contact d'une même tangente extérieure, déterminent une demi-circonférence; les deux demi-cercles qui correspondent aux deux tangentes extérieures sont tangents entre eux.*

En effet, il suffit de prendre A et B pour centres, et AG = GB pour rayon.

Les demi-cercles sont tangents, parce que les rayons AG et GB sont en ligne droite.

**Théorème 110.**

629. *Les points de rencontre des bissectrices extérieures d'un triangle servent de centres à des cercles tangents aux trois côtés;* on les nomme *exinscrits.*

**Théorème 110. — I.**

630. *Les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle forment entre elles un nouveau triangle, dont les hauteurs se confondent avec les bissectrices intérieures du premier triangle.*

En effet, les bissectrices des angles extérieurs forment trois lignes droites perpendiculaires aux bissectrices des angles intérieurs.

De plus, les points de concours des bissectrices extérieures appartiennent aussi aux bissectrices intérieures.

**Théorème 111.**

631. *Les circonférences décrites des trois sommets d'un triangle* ABC, *et passant par les points de contact du cercle inscrit, sont tangentes deux à deux.*

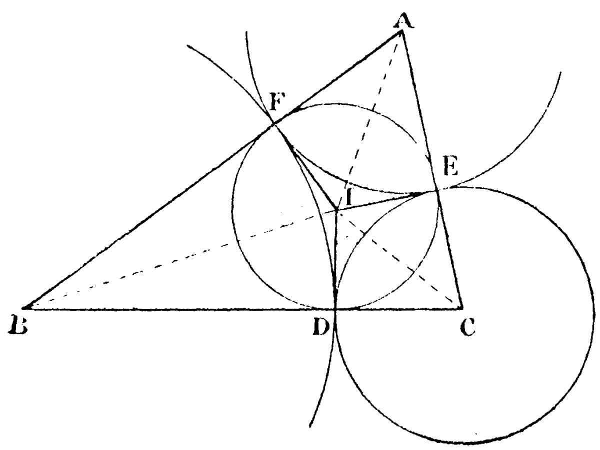



Fig. 374.

En effet, les tangentes menées d'un même point à un même cercle étant égales, on a : AE = AF, BF = BD, CD = CE.

Ces circonférences, ayant un point commun sur la ligne des centres, sont tangentes deux à deux.

**Théorème 111. — I.**

**632.** *Les circonférences décrites des trois sommets d'un triangle* ABC, *et passant par les trois points de contact que détermine chaque cercle exinscrit, sont tangentes deux à deux.*

Démonstration analogue à la précédente. On a trois groupes de trois circonférences.

**Théorème 111. — II.**

**633.** 1° *Le cercle inscrit dans un triangle, et chacun des cercles exinscrits, coupe orthogonalement le groupe des trois circonférences tangentes deux à deux qui lui correspond.*

Car le rayon ID du cercle inscrit est perpendiculaire au rayon DC du cercle ayant C pour centre, etc. (fig. 374).

2° *Lorsque trois circonférences sont tangentes deux à deux, la circonférence qui passe par les trois points de contact coupe orthogonalement les trois circonférences données.*

## Mesure des angles.

**634.** Les démonstrations données pour les angles inscrits (G., nos 147 à 154) sont très simples; néanmoins on peut aussi donner les suivantes :

**Théorème.** *L'angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.* (G., n° 147.)

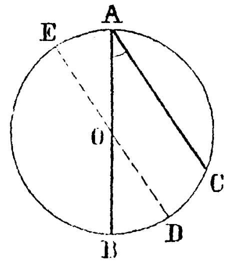


Fig. 375.

Soit A un angle inscrit dont un côté passe par le centre.

Menons le diamètre DOE parallèle à AC.

Les angles A et O sont égaux comme correspondants, ils ont donc même mesure; or l'angle au centre O a pour mesure l'arc BD; mais l'arc BD = l'arc AE comme mesurant des angles au centre opposés par le sommet; les arcs AE, DC sont égaux comme compris entre parallèles (G., n° 134); donc l'arc BD = DC; par suite, l'arc BD est la moitié de l'arc BC. Ainsi l'angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc BC compris entre ses côtés.

**Théorème.** *L'angle du segment a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.* (G., n° 149.)

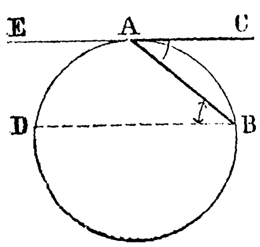


Fig. 376.

Soit BAC un angle du segment; menons BD parallèle à la tangente; les arcs AD et AB sont égaux comme compris entre parallèles; les angles A et B sont égaux comme alternes-internes (G., n° 78); or B a pour mesure la moitié de l'arc AD, donc son égal A a pour mesure la moitié de l'arc AB.

**635. Théorème.** *L'angle qui a son sommet entre le centre et la circonférence a pour mesure la demi-somme des arcs compris entre ses côtés et leurs prolongements.* (G., n° 151.)

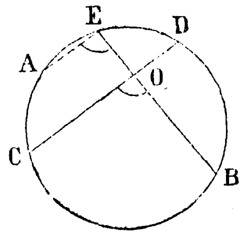


Fig. 377.

Soit l'angle BOC.

Par le point E, menons une parallèle EA à la corde DC; les arcs AC et DE sont égaux (G., n° 134), les angles O, E sont égaux comme correspondants. (G., n° 78.)

L'angle E a pour mesure $\frac{BCA}{2}$ ou $\frac{BC}{2} + \frac{CA}{2}$;

donc O a pour mesure $\frac{BC}{2} + \frac{DE}{2}$.

**636. Théorème.** *L'angle formé par deux sécantes a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés.* (G., n° 152.)

Soit l'angle BAC; menons FG parallèle à AC (fig. 378).
L'arc CG = DF; l'angle A = F.

Or F a pour mesure : $\frac{BG}{2}$ ou $\frac{BC}{2} - \frac{CG}{2}$;

donc A a pour mesure : $\frac{BC}{2} - \frac{DF}{2}$.

**636 a.** *L'angle exinscrit formé par une corde et par le prolongement d'une autre corde, et dont le sommet est sur la circonférence, a pour mesure la demi-somme des arcs qui ne sont pas compris entre les deux cordes.*

Ainsi l'angle BAC (fig. 379), formé par une corde BA et par le prolongement d'une autre corde DA, a pour mesure $\frac{1}{2}$ AMB + $\frac{1}{2}$ AND, parce qu'il est le supplément de BAD, dont la mesure est $\frac{BD}{2}$.

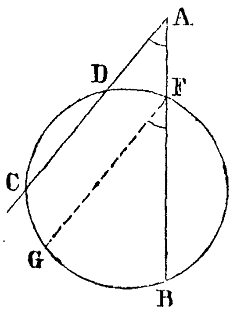


Fig. 378.

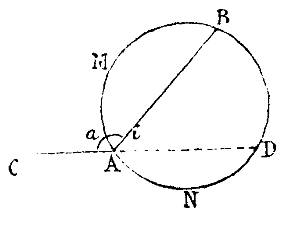


Fig. 379.

Cet angle se présente assez fréquemment; on le nomme *exinscrit.* Pour avoir sa mesure, *on fait la demi-somme des arcs qui ne sont pas compris entre les deux cordes*, dont l'une est un des côtés de l'angle, et l'autre le prolongement de l'autre côté.

**636 b. Note.** L'étude de l'angle dont le sommet est dans la circonférence, et de celui dont le sommet est hors de la circonférence, est due à ALHAZEN, l'auteur du problème connu sous le nom de *billard circulaire* ou *miroir circulaire* (n° 1545).

* ALHAZEN, né à Bassora vers 980, mort au Caire en 1038. (Voir n° 1546.)

### Théorème 112.

**637.** *Toute sécante, menée par le point de contact de deux circonférences tangentes, détermine des arcs opposés d'un même nombre de degrés.* (De tels arcs peuvent être nommés *arcs semblables*. G., n° 240.)

Il suffit de mener la tangente commune par le point de contact des circonférences données.

### Théorème 113.

**638.** *Si deux sécantes se croisent au point de contact de deux circonférences tangentes, les cordes qui joignent leurs extrémités sont parallèles.*

### Théorème 113. — I.

**639.** *Si l'on mène une sécante commune par le point de contact de deux circonférences tangentes, les tangentes menées par les extrémités de cette sécante sont parallèles.*

### Théorème 114.

**640.** *Si deux circonférences se coupent, et si, par l'un des points d'intersection, on mène un diamètre de part et d'autre, la droite qui joint les extrémités de ces diamètres passe par le second point d'intersection, et cette droite est double de la distance des centres.*

### Théorème 115.

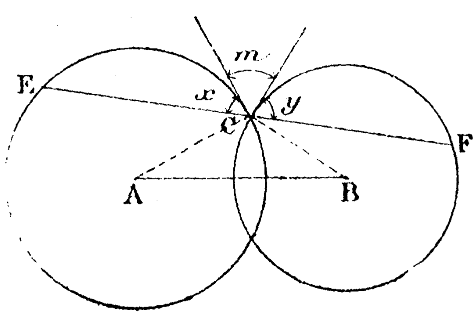


Fig. 380.

**641.** *Si deux circonférences A et B se coupent, et si, par l'un des points d'intersection C, on mène une sécante mobile EF, la somme des arcs CE et CF situés d'un même côté de cette sécante est constante, quant au nombre des degrés.*

L'angle $m$ des deux tangentes est constant; donc la somme supplémentaire $x + y$ est aussi constante.

### Théorème 116.

**642.** *Une sécante mobile étant menée par l'un des points d'intersection de deux circonférences, les droites qui joignent l'autre point d'intersection aux deux extrémités de la sécante forment entre elles un angle constant.*

L'angle est constant, car il est le supplément de l'angle des deux cercles.

**642 a. Note.** Le théorème est dû à MOEBIUS, *Statik*, p. 118. Cit. de BALTZER, § IV, p. 53.

* MOEBIUS (1790-1868), élève de GAUSS et continuateur de ses travaux, a publié notamment en 1827 le *Calcul barycentrique*. (Voir *Histoire des sciences mathématiques et physiques*, par MAXIMILIEN MARIE, et *Histoire des mathématiques*, par JULES BOYER, p. 230.)

### Théorème 117.

**643.** *Si l'on mène une sécante mobile par l'un des points d'intersection de deux circonférences sécantes, les tangentes menées par les extrémités de la sécante mobile font entre elles un angle constant.*

### Théorème 118.

**644.** *Si deux sécantes se coupent en l'un des points d'intersection de deux circonférences, les cordes qui joignent leurs extrémités forment par leurs prolongements un angle constant.*

**Note.** L'étude des théorèmes précédents est très facile; on pourrait d'ailleurs se reporter aux trois premières éditions des *Exercices de Géométrie*; il en est de même pour d'autres questions très élémentaires.

### Théorème 119.

**645.** *On a deux circonférences tangentes intérieurement en un point* A; *si par la seconde extrémité* B *de la ligne des centres* AB *on mène une corde* BCD, *tangente au point* C, *à la circonférence intérieure, la droite* AC *est bissectrice de l'angle* BAD.

1° *Démonstration.* Menons la tangente AE et la ligne ACF.

Les tangentes AE et CE étant égales,

$$\text{l'angle } EAC = ECA;$$

mais $$EAC = \frac{AD + DF}{2}, \qquad (G., n^o 149)$$

$$ECA = \frac{AD + BF}{2}; \qquad (G., n^o 151)$$

donc $$\text{arc } DF = BF,$$

d'où $$\text{angle } DAC = CAB.$$

Donc AC est bissectrice.

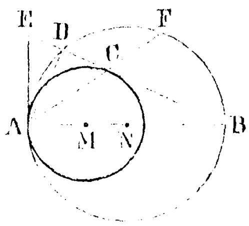


Fig. 381.

*Autres démonstrations.* 2° Menons le rayon MC (fig. 381); le triangle isocèle AMC donne CAM = ACM; mais MC est perpendiculaire à la tangente BC, par suite MC est parallèle à AD; ainsi l'angle ACM = CAD comme alternes-internes; donc l'angle CAD = CAM.

3° GH est parallèle à DB (fig. 382), à cause des angles droits G et D; donc C est le milieu de l'arc GH.

4° Les angles en A ont pour complément ACD et AHC, qui ont même mesure.

La propriété est générale.

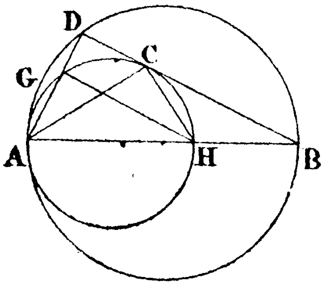



Fig. 382.

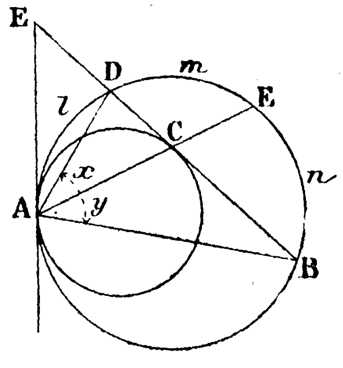



Fig. 383.

5° Le triangle EAC étant isocèle (fig. 383),

$$l + n = l + m\ ;$$

donc $$m = n,$$

et $$x = y.$$

**Théorème 119. — I.**

**646.** *La bissectrice intérieure de l'angle d'un triangle est bissectrice de l'angle formé par le diamètre du cercle circonscrit et la hauteur abaissée de l'angle considéré.*

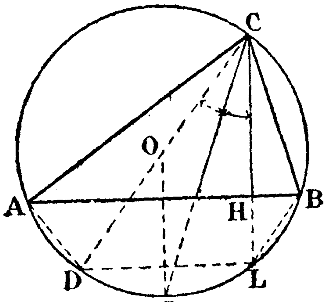



Fig. 384.

Soit le triangle ACB. Circonscrivons une circonférence au triangle; joignons le sommet C au point milieu de l'arc AB, afin d'avoir la bissectrice de l'angle C; menons le diamètre CD et la hauteur CH; prolongeons cette hauteur jusqu'à la circonférence; soit L le point de rencontre; l'angle CLD est droit, il en est de même de CHA; donc les côtés AB et DL sont parallèles; ainsi l'arc BL $=$ AD, etc.

*Remarques.* 1° La question connue : *La bissectrice de l'angle droit d'un triangle rectangle est bissectrice de l'angle formé par la hauteur et la médiane issues de ce même sommet* (n° 500), n'est qu'un cas particulier du théorème ci-dessus, car alors la médiane est un rayon du cercle circonscrit.

2° On peut donner une seconde démonstration du théorème proposé (voir ci-après, n° 664).

3° Les droites CH et CD, faisant des angles égaux avec la bissectrice intérieure de l'angle C, sont des *droites isogonales* (n°s 1108 et 2307).

4° La bissectrice extérieure fait aussi des angles égaux avec le diamètre et la hauteur.

**Théorème 120.**

**647.** *Lorsqu'un parallélogramme* ABCD, *de grandeur invariable, se meut dans son plan, de manière que deux côtés adjacents* AB, AD *passent par deux points fixes, la diagonale AC passe aussi par un point fixe.*

(*Méthodes*, nº 141.)

**Théorème 120. — I.**

**648.** *Les projections A, B, C, d'un point quelconque M, sur trois droites concourantes qui font entre elles trois angles consécutifs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ dont la somme égale deux droits, sont les sommets d'un triangle ABC, dont les angles sont respectivement égaux aux angles donnés.*

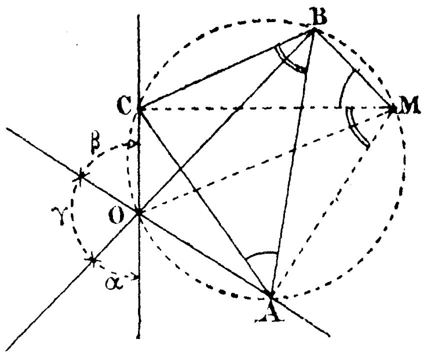



Fig. 385.

Soit O le sommet commun des angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, dont la somme égale deux droits.

Sur OM comme diamètre, il faut décrire un cercle, les projections du point M sur les droites données sont les points A, B, C et se trouvent sur le cercle. L'angle $A = CMB = \alpha$; de même $B = \beta$; $C = \gamma$.

*Remarques.* De ce théorème, on déduit plusieurs cas particuliers de triangles équiangles ou semblables; ainsi :

1º Les projections de l'orthocentre sur les médiatrices d'un triangle donnent un triangle semblable au premier;

2º Les projections du centre du cercle circonscrit à un triangle sur les trois hauteurs donnent un triangle semblable au triangle inscrit;

3º On peut rapporter le théorème 648 au théorème 2287.

## Figures inscrites au cercle.

*Inscrit* veut dire qui est situé à l'intérieur, qui est dans l'objet considéré; par suite, d'après l'exemple donné par E. CATALAN (*Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*), nous disons *figures inscrites au cercle*, au lieu de *figures inscrites dans le cercle*.

**649.** Les solutions des exercices relatifs aux angles, aux triangles, aux quadrilatères inscrits au cercle, nécessitent surtout l'emploi des théorèmes suivants :

*L'angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

*Aux arcs égaux, aux cordes égales, correspondent des angles au centre égaux.*

En combinant ces deux théorèmes, on arrive au suivant, que l'on emploie fréquemment :

*Aux arcs égaux, aux cordes égales, correspondent des angles inscrits égaux, et réciproquement.*

Pour les exercices relatifs au quadrilatère, on a recours à deux théorèmes principaux :

*Dans un quadrilatère convexe inscrit, les angles opposés sont supplémentaires*, et réciproquement, *un quadrilatère convexe est inscriptible lorsque les angles opposés sont supplémentaires.*

On peut y ajouter les deux théorèmes suivants (nº 658) :

*Dans un quadrilatère non convexe inscrit, les angles opposés sont égaux*, et réciproquement, *un quadrilatère non convexe est inscriptible lorsque les angles opposés sont égaux.*

On doit remarquer que deux côtés opposés d'un quadrilatère convexe et les deux diagonales constituent un quadrilatère non convexe, auquel on peut appliquer les deux théorèmes ci-dessus.

### Théorème 121.

**650.** *Aux arcs égaux, aux cordes égales, correspondent des angles inscrits égaux, et réciproquement.*

### Théorème 121. — I.

**650 a.** *Lorsque plusieurs angles sont égaux, l'arc opposé à l'angle au centre égale une quelconque des valeurs suivantes :*

1º *La moitié de l'arc de l'angle inscrit ;*

2º *La moitié de la somme des arcs opposés à l'angle dont le sommet est entre le centre et la circonférence ;*

3º *La moitié de la différence des arcs compris entre les côtés de l'angle, dont le sommet est hors de la circonférence, et réciproquement.*

### Théorème 121. — II.

**651.** *Lorsqu'un triangle inscrit à une circonférence a un angle constant, le côté opposé est tangent à une circonférence concentrique à la première.*

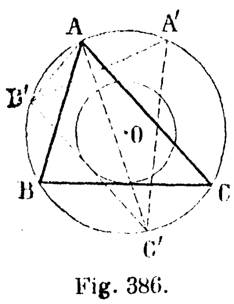


Fig. 386.

Soit A l'angle constant; il a pour mesure la moitié de l'arc BC.

Donc, si $A' = A$,

on a : arc $BC =$ arc $B'C'$,

d'où la corde $BC = B'C'$.

Or les cordes égales sont également éloignées du centre, donc les cordes BC, B'C'... sont tangentes à une même circonférence décrite du point O comme centre.

### Théorème 121. — III.

**652.** *Lorsqu'un triangle circonscrit à une circonférence a deux angles dont la somme est constante, le troisième sommet est sur une circonférence concentrique à la première.*

Le troisième angle est aussi constant, et par suite son sommet est toujours à la même distance du centre.

### Théorème 122.

**653.** *Dans la même circonférence, on a deux angles égaux : l'un est au centre et l'autre est inscrit.*

*Lorsque chaque angle égale $^1/_3$ de droit, les cordes correspondantes sont égales.*

Soit l'angle $AOB = DCE = {}^1/_3$ de droit; il faut prouver que $DE = AB$.

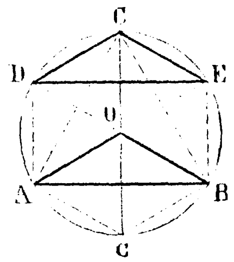


Fig. 387.

En effet, tous les angles que l'on peut former autour d'un point O valent quatre droits (G., n° 31); or $^1/_3$ est contenu trois fois dans 4 droits; autour du point O il est donc possible de former trois angles égaux à $^4/_3$ et six angles égaux à $^2/_3$ de droit.

Supposons l'angle AOB égal à $^4/_3$ de droit, et l'angle AOG égal à $^2/_3$.

Dans le triangle isocèle AOG, l'angle O valant $^2/_3$ de droit, la somme des deux autres angles égale $^4/_3$; chacun d'eux égale $^2/_3$ de droit; donc le triangle est équiangle et équilatéral (G., n° 60),

et
$$AG = AO = OG.$$

L'angle inscrit AGB égale $^4/_3$ de droit, égale $AOB = DCE$; donc
$$AB = DE.$$

### Théorème 122. — I.

**654.** *Lorsque chacun des angles égaux donnés est moindre que $^4/_3$, la corde de l'angle au centre est plus petite que celle de l'angle inscrit, mais plus grande que sa moitié.*

Pour un angle plus petit que $^4/_3$, considérons un angle ACB, ayant COG pour bissectrice (fig. 387).

$$\text{L'angle } AOG = GOB = ACB.$$

Or, dans le triangle isocèle AGB, on a :
$$AG < AB,$$

et
$$AG > \frac{AB}{2},$$

*Remarque.* Lorsque la valeur de chaque angle est plus grande que $^4/_3$ de droit, la corde de l'angle au centre est plus grande que celle de l'angle inscrit, mais plus petite que le double de cette corde, lorsque l'angle au centre est plus petit que 151°2'40". Pour cette valeur, la corde de l'angle au centre égale le double de celle de l'angle inscrit; pour une valeur plus grande que 151°2'40", la corde de l'angle au centre est plus grande que le double de celle de l'angle inscrit. Enfin pour 180° la première corde égale le diamètre, et celle de l'angle inscrit est nulle. (E. Lartigue, *capitaine de frégate à Caudéran, Gironde.*

**Théorème 123.**

655. *Tout parallélogramme* ABCD *inscrit à un cercle est un rectangle, et les diagonales sont des diamètres.*

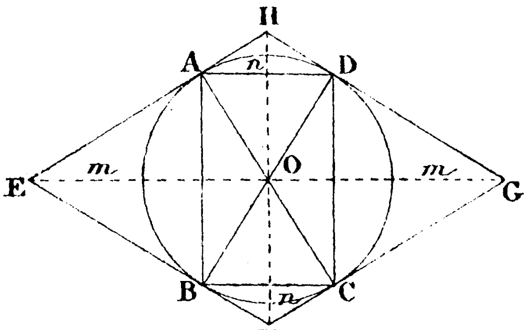


Fig. 388.

En effet, les cordes AD et BC sont égales, comme étant les côtés opposés d'un parallélogramme; ainsi les arcs AD et BC sont égaux, et il en est de même des arcs AB et CD.

Chacun des quatre angles A, B, C, D, a pour mesure $\frac{1}{2}(m+n)$; donc ces angles sont égaux, chacun d'eux est droit, et la figure est un rectangle.

L'angle D étant droit et inscrit, il faut que l'arc ABC soit une demi-circonférence; donc la diagonale AC est un diamètre. Il en est de même de BD.

**Théorème 123. — I.**

656. *Quatre tangentes, parallèles deux à deux, forment un losange circonscrit, et le quadrilatère obtenu en joignant deux à deux les points de contact est un rectangle.*

**Théorème 123. — II.**

657. *Les cordes perpendiculaires aux extrémités d'une troisième corde quelconque forment les côtés opposés d'un rectangle inscrit.*

**Théorème 123. — III.**

658. *Les angles opposés d'un quadrilatère non convexe inscriptible sont égaux.*

*Un quadrilatère non convexe est inscriptible lorsque les angles opposés sont égaux.*

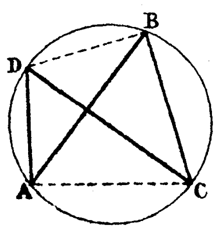


Fig 389.

Soit ABCD un quadrilatère non convexe inscriptible.

En parcourant le périmètre, à partir d'un sommet quelconque A, pour revenir au même sommet, on voit que les angles A et C occupent le premier et le troisième rang : tels sont les angles *opposés*. Il en est de même de B et D.

1° A = C comme ayant même mesure demi-arc BD.

2° Lorsque A égale C, les deux points A et C se trouvent sur l'arc de segment décrit sur BD et capable de l'angle A; donc les quatre points A, B, C, D appartiennent à une même circonférence.

### Théorème 124.

**659.** *Les circonférences qui passent par deux sommets* A *et* B *d'un triangle coupent les côtés du troisième sommet suivant des cordes* DE, MN *parallèles entre elles.*

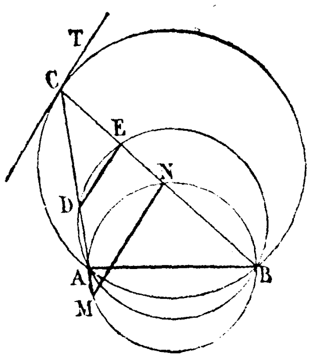


Fig. 390.

Les quadrilatères ADEB, AMNB sont inscriptibles (nº 649); donc l'angle E = N. En effet, l'angle E est le supplément de BAD, et l'angle N égale BAM. Les angles E, N étant égaux et correspondants, les droites ED, NM sont parallèles.

*Remarques.* 1º Les côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible sont des lignes antiparallèles (nº 471).

En effet, les angles opposés étant supplémentaires, les angles CDE et ABC sont égaux; il en est de même des angles BAC et DEC.

2º La tangente CT est parallèle à DE, et, par suite, la *tangente* CT est antiparallèle à AB.

3º Le prolongement de AC et de BC donne aussi lieu à une corde parallèle à DE, et par suite antiparallèle à AB par rapport aux côtés de l'angle C.

### Théorème 125.

**660.** *Sur une base donnée* AB, *on construit divers triangles* ABC, *tels que l'angle du sommet* C *ait une valeur constante ; prouver que la droite* DE, *qui joint les pieds des hauteurs* AD, BE *abaissées des extrémités de la base, a une longueur constante.*

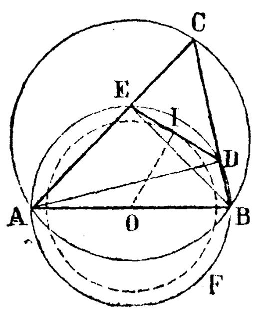


Fig. 391.

L'angle C étant constant aura son sommet sur le segment capable de cet angle.

La circonférence décrite sur AB comme diamètre passe par les pieds D, E des hauteurs, quelle que soit la position du sommet C sur l'arc du segment.

Or, par rapport au cercle ABDE, l'angle extérieur C a pour mesure la demi-différence des arcs :

$$C = \frac{\text{arc AFB} - \text{arc DE}}{2}.$$

Mais l'angle C est constant; il en est de même de la demi-circonférence AFB; donc l'arc DE est aussi constant, et par suite la corde DE a une longueur invariable.

**661.** *Remarques.* 1º Soit I le milieu de la corde; dans chaque position du sommet C, la corde DE est tangente à la circonférence décrite du centre O avec le rayon OI. En d'autres termes : *la circonférence* OI *est l'enveloppe de la droite* DE, *qui joint les pieds des hauteurs* (nº 119).

2° *La droite* DE, *qui joint les pieds des hauteurs, est antiparallèle au côté* AB, *qui joint les sommets d'où partent ces hauteurs.*

En effet, le quadrilatère ABDE est inscriptible (n° 659), et l'angle CDE, supplément de EDB, est égal à l'angle EAB, supplément de EDB.

**Théorème 126.**

**662.** *Les trois hauteurs d'un triangle servent de bissectrices au triangle qui a pour sommets les pieds de ces mêmes hauteurs.*

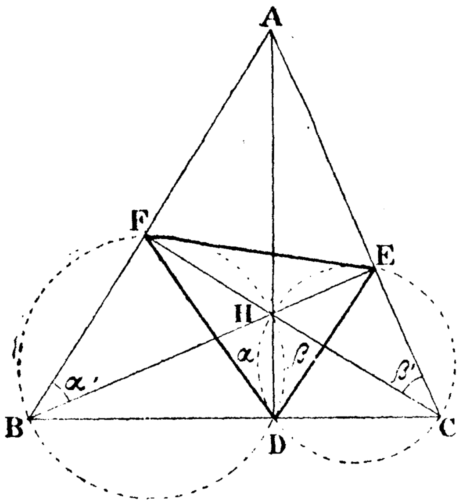


Fig. 392.

Cette question est déjà traitée aux *Méthodes* (n° 292, *i*); néanmoins nous en donnons une autre démonstration.

Dans les quadrilatères inscriptibles BDHF, DCEH, on a :

$$\alpha = \alpha' \quad \text{et} \quad \beta = \beta';$$

or $\alpha' = \beta'$ comme ayant les côtés perpendiculaires ;

donc $$\alpha = \beta.$$

*Remarque.* On peut consulter aussi le théorème du n° 1136, celui du n° 1138, et la 1re *Démonstration* donnée dans la 3e édition, n° 662.

**Théorème de Nagel 127.**

**663.** *Les rayons qui joignent les sommets d'un triangle au centre du cercle circonscrit sont respectivement perpendiculaires aux droites qui joignent deux à deux les pieds des hauteurs du triangle.*

1re *Démonstration.* (Voir *Méthodes*, n° 292, *h*.)

2e *Démonstration.* (Housel, *N. A.* 1860, page 438.)

Le point O étant équidistant de chaque sommet (fig. 393),

$$\text{l'angle } a = a, \quad b = b, \quad c = c.$$

Or $$2a + 2b + 2c = 180°,$$

ou $$a = 90° - (b + c),$$

ou $$a = 90° - C.$$

Mais les hauteurs sont les bissectrices (n° 662) des angles du triangle DEF.

Donc aussi $$d = 90° - (e + f).$$

Or $(e + f)$ est le supplément de EHF, dont C est aussi le supplément ; par suite,

$$e + f = C \quad \text{et} \quad \text{l'angle } a = d.$$

Mais AD est perpendiculaire à DC; donc AO est aussi perpendiculaire à DF.

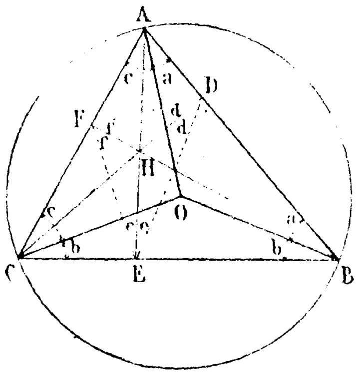



Fig. 393.

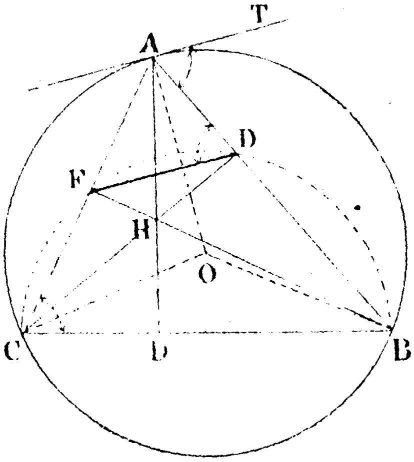



Fig. 394.

3° *Démonstration.* Le quadrilatère inscriptible CFDB (fig. 394) donne :

angle C = D.

La tangente AT donne A = C, donc D = A; FD parallèle à AT est perpendiculaire au rayon AO.

**664.** Remarque. 1° *La bissectrice d'un angle d'un triangle divise en deux parties égales l'angle formé par le rayon du cercle circonscrit et par la hauteur qui part du sommet considéré.*

En effet, dans B (fig. 393), on a $a = 90° - C$ (valeur trouvée ci-dessus).

Or l'angle CBF égale aussi $90° - C$; donc la bissectrice de l'angle B est aussi bissectrice de l'angle OBF.

On a donc une seconde démonstration d'un théorème connu (n° 646).

2° Le *théorème de Nagel* n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général.

**664 a. Note.** Le point de concours des trois hauteurs d'un triangle a été nommé *orthocentre* par M. Besant, auteur de divers ouvrages mathématiques estimés; il a employé ce terme dans son livre : *Geometrical Conics*, en 1869.

En France, M. Morel a introduit ce mot (*Journal de mathématiques élémentaires,* 1879, p. 178, et 1890, p. 106), en traduisant un ouvrage de James Booth, *membre de la société royale de Londres,* mort en 1878.

Dans la *Géométrie récente du triangle,* le point de concours des hauteurs est désigné par H.

Les mêmes auteurs ont nommé DEF, *triangle orthocentrique;* actuellement on dit simplement : *triangle orthique.*

* Nagel (1803-1882), recteur de l'école industrielle (Real-Schule) d'Ulm.

* Housel, ancien élève de l'École Normale supérieure, auteur de l'*Introduction à la géométrie supérieure*, 1865.

L'*Introduction à la G. S.* est un ouvrage qui donne beaucoup plus que ce qu'annonce son titre modeste.

**Théorème 127. — I.**

665. *Dans un triangle* ABC, *les trois hauteurs se coupent en un même point. On circonscrit une circonférence au triangle, et l'on prolonge*

*les hauteurs jusqu'à la circonférence; on obtient ainsi six arcs égaux deux à deux.*

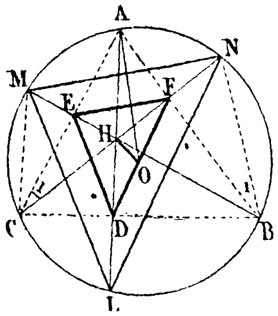


Fig. 395.

*La distance de l'orthocentre à un côté donné, égale le prolongement de la hauteur abaissée sur ce même côté.*

(Voir *Méthodes*, n° 292 *b* et *c*.)

**666.** *Remarque.* Il est facile de construire un triangle ABC, connaissant les points L, M, N où les prolongements des hauteurs rencontrent le cercle circonscrit. En effet, les bissectrices LA, BM, NC du triangle LMN sont les hauteurs du triangle demandé.

### Théorème 128.

**667.** 1° *Les cercles circonscrits à un triangle donné et aux triangles, ayant deux des sommets du premier et le point de concours des hauteurs pour troisième sommet, sont égaux.* (CARNOT.)

(Voir *Méthodes*, n° 292 *c*.)

**Note.** Pour compléter divers théorèmes élémentaires relatifs au triangle, et notamment les questions des n$^{os}$ 646, 662 à 667, 701, 737, on pourrait lire une étude très intéressante de. J. MENTION (*N. A.* 1850, p. 324 et 401).

### Théorème de Pollock 129.

**668.** *Les sommets d'un triangle rectangle inscrit divisent la circonférence en trois arcs; l'un est une demi-circonférence, et les deux autres sont supplémentaires. Après avoir prolongé les côtés de l'angle droit, on mène à chacun de ces trois arcs une tangente telle que le point de contact soit au milieu de la portion de tangente interceptée par les côtés prolongés; démontrer que les trois points de contact sont les sommets d'un triangle équilatéral.* (Sir FREDERICK POLLOCK. — *N. A.* 1857, p. 126, n° 367.)

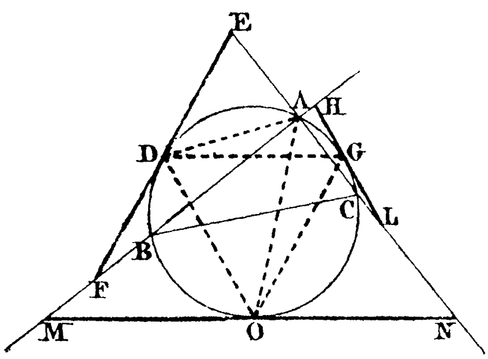


Fig. 396.

Soient l'angle droit BAC, et les tangentes EF, HL, MN, telles que

$$DE = DF, \quad GH = GL \quad \text{et} \quad OM = ON.$$

Il faut prouver que l'arc DAG est le tiers de la circonférence, et qu'il en est de même de DBO.

Joignons le point A au point D. Dans le triangle rectangle EAF, la médiane AD égale la moitié de l'hypoténuse; donc

$$AD = DE = DF,$$

donc
$$\text{l'angle } DAF = DFA.$$

Mais $\qquad$ l'angle $DAF = \dfrac{\text{arc } DB}{2}$ ;

tandis que $\qquad$ l'angle $F = \dfrac{\text{arc } AD - \text{arc } DB}{2}$ ;

donc l'arc DB est la moitié de l'arc AD; c'est-à-dire que

$$\text{l'arc } AD = {}^2/_3 \text{ de l'arc } ADB.$$

De même $\qquad$ l'arc $AG = {}^2/_3$ arc AGC.

Donc $\qquad$ arc $AD +$ arc $AG$

ou $\qquad$ arc $DAG = {}^2/_3$ demi-circonférence BAC.

Ainsi l'arc DAG est le tiers de la circonférence, et DG est le côté du triangle équilatéral inscrit.

On a de même : $\qquad$ l'angle $MAO = AMO$,

donc $\qquad$ arc $BO = {}^1/_2$ arc ACO;

mais $\qquad$ arc $BD = {}^1/_2$ arc AD,

donc $\qquad$ arc $OBD = {}^1/_2$ arc DACO,

ou $\qquad$ arc $OBD = {}^1/_3$ de circonférence.

**669.** *Remarque.* La construction des tangentes telles que EF, par exemple, exige en réalité la trisection de l'arc ADB; par conséquent, elle ne saurait être effectuée en n'employant que la règle et le compas; mais le *théorème de sir Pollock* est néanmoins remarquable, et nous l'utiliserons au livre IV, pour traiter une question de *maximum* (voir ci-après, n° 1719).

### Théorème 129. — I.

**670.** *Lorsque deux des angles d'un quadrilatère sont droits, les projections des côtés opposés sur la diagonale qui joint les sommets des angles droits sont égales entre elles.*

(Voir n° 136.) On a : $\qquad BF = ED. \qquad$ (fig. 397)

### Théorème 129. — II.

**671.** *Les projections des extrémités d'un diamètre sur une corde quelconque, sont équidistantes du point milieu de cette corde.*

C'est un nouvel énoncé du théorème précédent.

On a : $\qquad HE = HF.$

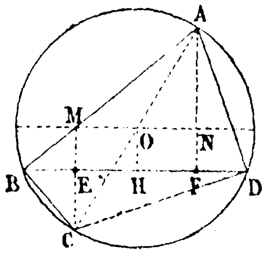



Fig. 397.

### Théorème 129. — III.

**672.** *Si deux droites sont les diagonales d'un quadrilatère inscriptible, et que les projections des extrémités de l'une d'elles sur la seconde soient équidistantes du point milieu de cette seconde diagonale, la première ligne est un diamètre du cercle circonscrit.* (N. A. 1852, p. 156.)

**Théorème 130.**

**673.** *Dans un cercle, on donne une corde AB et un diamètre CD perpendiculaire à cette corde. On joint un point quelconque O de la circonférence aux extrémités des deux lignes déjà menées. On projette les droites OC, OD sur OA; démontrer que la somme des projections est égale à OA; et que la différence des mêmes projections est égale à OB. (Grand concours en 1847. Mathématiques élémentaires.)*

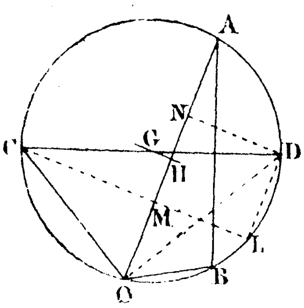


Fig. 398.

Soient OM et ON les projections des droites OC et OD.

1° Projetons le centre G sur la corde OA. Les lignes égales CG, DG ont des projections égales MH, NH (nos 670 et 136). D'ailleurs H est le milieu de la corde; donc

$$OM = NA,$$

par suite, $$OM + ON = OA.$$

2° Prolongeons CM jusqu'à la circonférence en L, et joignons L au point D.

A cause des grandeurs égales OM, AN, la corde LD est égale et parallèle à MN; de plus on a :

$$\text{arc } OL = \text{arc } AD = \text{arc } DB;$$

d'où $$\text{l'arc } OB = \text{l'arc } LD;$$

par suite, $$\text{la corde } OB = LD = MN.$$

**Théorème 131.**

**674.** *Dans tout quadrilatère inscriptible, les bissectrices des angles formés par les côtés opposés sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les diagonales.*

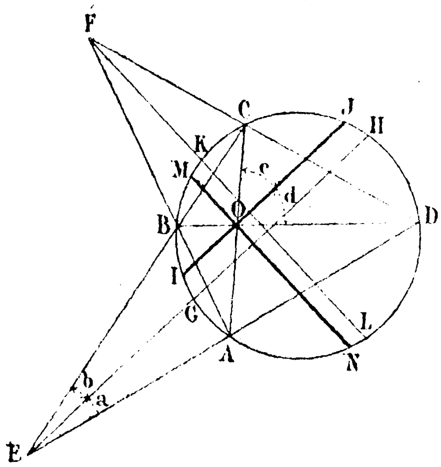


Fig. 399.

Par le point O de concours des diagonales, menons des parallèles IJ, MN aux bissectrices EH, FL des angles E, F.

Il faut prouver que IJ et MN sont les bissectrices des angles O.

En effet, $a = \frac{1}{2}(DH - AG)$,

mais $\quad$ l'arc $GI = HJ$;

on peut ajouter ou retrancher ces grandeurs égales et écrire :

$$a = \tfrac{1}{2}(DJ - AI),$$

de même, $b = \frac{1}{2}(CJ - BI)$,

mais $$a = b;$$

donc $$DJ - AI = CJ - BI;$$

d'où $$DJ + BI = CJ + AI.$$

Le premier membre est le double de la mesure de l'angle $c$; le second est le double de $d$.

Donc $$c = d.$$

On prouverait de même que MN est bissectrice de l'angle BOC.

*Remarque.* Le théorème précédent est la réciproque d'un cas particulier d'un théorème relatif à deux coniques qui se coupent en quatre points concycliques (n° 2104 a).

### Théorème 132.

**675.** *Lorsqu'on prolonge les côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible, et qu'on mène les bissectrices des deux angles ainsi obtenus, ces lignes coupent les côtés du quadrilatère en quatre points, qui sont les sommets d'un losange inscrit dans la figure donnée.*

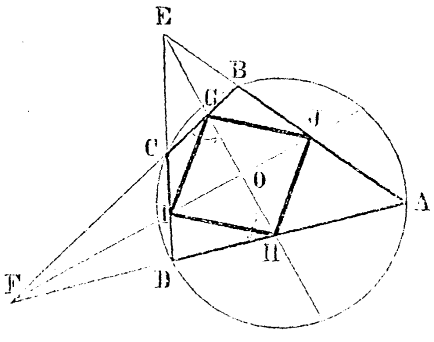


Fig. 400.

Soient EH, FJ les bissectrices des angles E, F formés par les côtés opposés du quadrilatère donné ABCD. Pour prouver que la figure IGJH est un losange, il suffit de démontrer que les diagonales GH, IJ sont à angle droit et se coupent respectivement en leur milieu. On sait déjà que les bissectrices sont à angle droit (n° 554); mais on peut démontrer directement le théorème proposé en prouvant que le triangle FGH est isocèle.

Or les triangles DEH, BEG ont les deux angles CEG et BEG égaux; ainsi que les angles D et GBE, comme ayant même supplément ABC; donc le troisième angle DHE = BGE = donc CGH. Ainsi le triangle FGH est isocèle; la bissectrice FO de l'angle du sommet est perpendiculaire au milieu de la base; ainsi OH = OG. On démontrerait de même que OI = OJ; donc la figure IGJH est un losange.

### Théorème 132. — I.

**676.** *Dans tout quadrilatère inscriptible, les perpendiculaires abaissées du point milieu de chaque côté sur le côté opposé se coupent en un même point.*

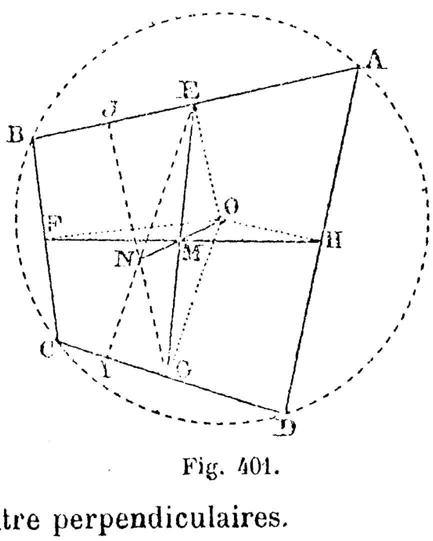


Fig. 401.

Soient O le centre du cercle circonscrit, ou point de rencontre des médiatrices, et M le point de concours des bi-médianes EG, FH.

En prolongeant OM d'une quantité égale à elle-même, la figure ENGO est un parallélogramme; donc ENI, parallèle à la médiatrice GO, est perpendiculaire au côté CD. Ainsi le point N est le point de concours des quatre perpendiculaires.

*Remarque.* Les perpendiculaires abaissées du point milieu de chaque diagonale sur l'autre diagonale se coupent aussi au point N, car les médiatrices relatives aux diagonales AC, BD se coupent en O.

**676 a. Note.** 1° Le point N, symétrique du centre O par rapport au point de concours des médianes du quadrilatère, n'est autre que le point mis en relief par MM. Mathot et Deteuf (n° 1277 **b**).

2° M. S. Kantor de Vienne a généralisé comme il suit le théorème précédent :

**Théorème.** *Étant donnés* n *points sur une circonférence, les perpendiculaires abaissées du centre de gravité de* (n — 2) *quelconques de ces points sur la corde qui passe par les deux points restants, concourent en un même point.* (*Mathesis,* 1906, p. 124, n° 13.)

### Théorème 132. — II.

**677.** *Par le sommet* A *d'un angle donné* FAG *et par un point fixe* B, *pris sur la bissectrice de cet angle, on fait passer une circonférence quelconque; elle coupe les côtés de l'angle en* C *et* D ; *prouver que la somme des segments* AC, AD *est constante.*

En prenant AB pour diamètre, on a $AF = AG$; donc la constante doit égaler 2AF.

Il suffit donc de prouver qu'on a :

$$AC + AD = 2AF.$$

La droite BF est perpendiculaire sur AD; projetons le point C sur la bissectrice AB, afin d'obtenir $AE = AC$. Il suffit de prouver que $FE = FD$.

Or l'angle $a = c$, $b = d$,

donc $c = d$,

par suite, $BD = BC = BE$,

le triangle DBE est isocèle, et la perpendiculaire BF donne $FD = FE$.

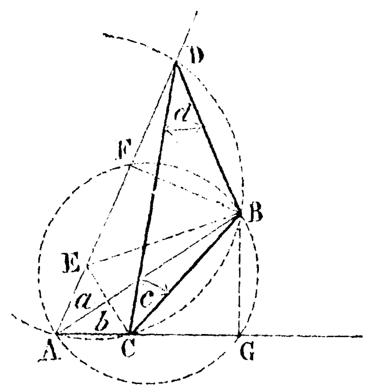


Fig. 402.

**678.** *Remarque.* Le théorème peut être énoncé comme il suit :

*Lorsqu'un triangle* CAD *a un angle* A, *donné de grandeur et de position, et que la somme* AC + AD *des côtés qui comprennent cet angle est constante, la circonférence circonscrite au triangle passe par un point fixe* B, *situé sur la bissectrice de l'angle* A.

### Théorème 132. — III.

**679.** *Lorsqu'un angle* CBD *pivote autour de son sommet* B, *et que les côtés* BC, BD *coupent les côtés d'un angle fixe* A, *supplémentaire du premier et dont la bissectrice* AB *passe par le sommet* B *du premier, les segments interceptés* AC, AD *ont une somme constante* (fig. 402).

C'est un nouvel énoncé de la proposition précédente.

### Théorème 133.

**680.** *Lorsqu'une circonférence est circonscrite à un triangle équilatéral, démontrer que la distance d'un point quelconque de cette* *circonférence à un des sommets du triangle égale la somme des distances du même point aux deux autres sommets.*

Il faut prouver qu'on a : $MC = MA + MB$,

ou $$DM + DC = MA + MB.$$

1re *Démonstration.* Par le sommet A, menons ADE parallèle à MB, et les cordes EB, EC.

Les triangles DAM, DEC sont équilatéraux,

donc $$DM = AM, \quad DC = EC = BM\,;$$

donc $$MC = MA + MB.$$

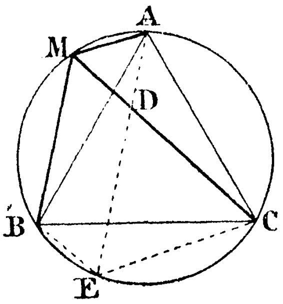



Fig. 403.

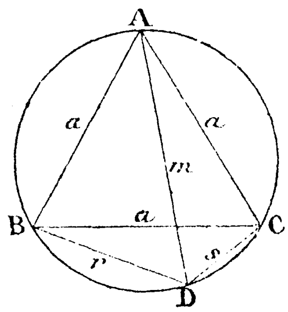



Fig. 404.

**681.** 2e *Démonstration.* En regardant comme connu le livre III, on peut s'appuyer sur le *premier théorème de Ptolémée.*

Dans le quadrilatère inscrit ABDC (fig. 404), le produit $am$ des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés (no 1209) ; on a donc :

$$am = ar + as\,;$$

d'où $$m = r + s.$$

**Théorème 134.**

**682.** *Soient* A, B, C, D, E *les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle, et* M *un point quelconque de l'arc* AE ; *démontrer que* $MB + MD = MA + MC + ME$. (N. A., 1876, p. 383.)

Par le sommet **A**, menons AF parallèle à MD ; il en résulte :

$$DF = AM = MI,$$

car le triangle AMI est isocèle.

En effet, l'angle MAI a pour mesure :

$$\frac{MEDF}{2} \text{ ou } \frac{AMED}{2},$$

ou le cinquième de la circonférence ;

$$\text{l'angle } I = \frac{BCF + AM}{2},$$

ou le cinquième aussi ;

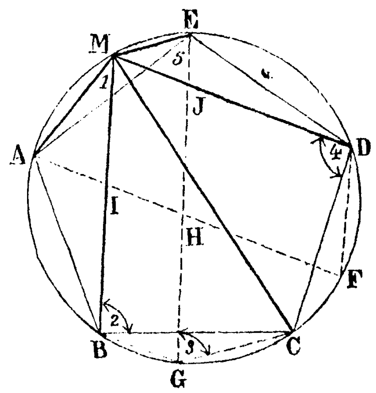



Fig. 405.

donc $$IM = AM.$$

De même, en menant par le sommet E la droite EG parallèle à MB, on a : $$BG = ME = MJ,$$

et, par suite, $$CG = AM = DF.$$

Ainsi les figures HIBG, HIMJ, HFDJ sont des parallélogrammes.

Dès lors, démontrer que

$$MB + MD = MA + MC + ME,$$

revient à prouver que

$$(HJ + HG) + (HI + HF) = MA + MC + ME;$$

ou, en supprimant les quantités égales HJ, MA, puis HI et ME, il suffit de prouver que $HG + HF = MC$.

Or le triangle EHF est isocèle, car chacun des arcs AE et GF égale un cinquième de la circonférence;

donc $$HG + HF = EG.$$

D'ailleurs $$EG = MC,$$

parce que ces deux cordes sous-tendent des arcs égaux EDCG et CBAM;

donc $$HG + HF = MC.$$

Le théorème est général et se démontre facilement par la trigonométrie (G. de Trigon., n° 369).

Il peut s'énoncer ainsi :

**682 a. Théorème.** *Pour un polygone régulier d'un nombre impair de côtés, la somme des distances des sommets de rang pair à un point donné de la circonférence circonscrite égale la somme des distances de ce point aux sommets de rang impair.*

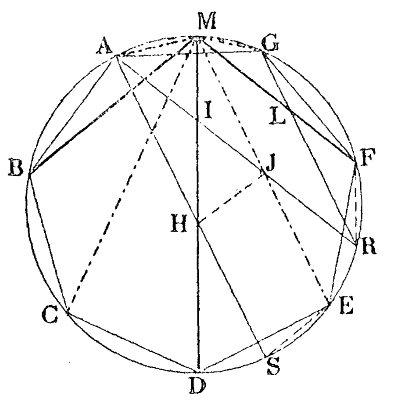



Fig. 406.

En voici d'ailleurs la démonstration géométrique pour le polygone de sept côtés (fig. 406) :

En menant AR parallèle à MF et AS et GR parallèles à MF, on a :

$$AR = MC,$$

car ces cordes sous-tendent des arcs égaux.

De même,

$$AS = MD, \quad \text{et} \quad GR = MB.$$

Ainsi, démontrer que

$$AM + CM + EM + MG = MB + MD + MF$$

revient à prouver que

$$AM + MG + (AI + IR) + (MJ + JE) = (GL + LR) + (MI + IH + HD) + MF.$$

Or les triangles AMI, MGL, AIH sont isocèles;

donc $$AM = MI, \quad MG = GL, \quad AI = IH.$$

Les quadrilatères MIRF et MLRJ sont des parallélogrammes;

donc $$IR = MF \quad \text{et} \quad MJ = LR.$$

Les trapèzes AHJM et ASEM sont symétriques; ainsi le quadrilatère HSEJ est un parallélogramme; par suite, $JE = HS$.

Or le triangle HDS est isocèle et donne :

$$JE = HS = HD.$$

Donc $$AM + CM + ME + MG = MB + MD + MF.$$

**Note.** La généralisation du théorème est due à CHADU (*N. A.*, 1876, p. 384). Pour le polygone régulier de $2n + 1$ côtés, on a :

$$l_1 + l_3 + \dots l_{2n+1} = l_2 + l_4 + \dots l_{2n}.$$

**Théorème 135.**

683. *On divise une demi-circonférence de diamètre* AH *en un nombre impair de parties égales, en sept, par exemple,* A, B, C, D, E, F, G, H. *Par les points de division on mène des parallèles au diamètre* AH, *l'on joint le centre* O *aux points du milieu* D, E; *prouver que la somme des segments* DE, LK, MN *interceptés par les côtés de l'angle* DOE *sur les parallèles égale le rayon.* (Le Cointe, *N. A.* 1842, p. 508.)

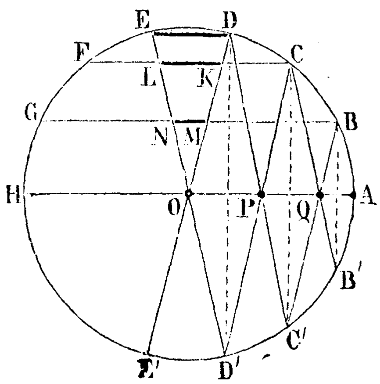


Fig. 407.

Il faut prouver que

$$DE + KL + MN = r.$$

Déterminons les points symétriques D', C', B', et menons diverses droites.

On a évidemment :

$$DE = OP, \quad KL = PQ, \quad MN = AQ;$$

donc

$$DE + KL + MN = r.$$

**Note.** Le P. Le Cointe, durant son séjour à Vals, près le Puy, a publié divers articles dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*. Ses *Leçons sur la théorie des fonctions circulaires et la Trigonométrie,* en 1858, contiennent un grand nombre d'exercices trigonométriques, soit inédits, soit empruntés au *Journal de Crelle.*

## Polygones curvilignes.

684. Les polygones plans curvilignes, c'est-à-dire les polygones formés par des arcs de cercle décrits sur un même plan, ont été peu étudiés jusqu'à présent; néanmoins ils offrent un grand intérêt, car ils peuvent conduire à des théorèmes nouveaux, relatifs aux petits cercles de la sphère, tandis que le théorème du triangle rectiligne correspond plus directement au triangle sphérique formé par trois arcs de grand cercle.

On sait que l'angle de deux cercles qui se coupent est l'angle formé par les tangentes menées à ces deux arcs par leur point d'intersection.

Les questions sont parfois assez simples pour ne réclamer que la connaissance des deux premiers livres; néanmoins l'étude des polygones plans curvilignes tire un grand secours de *l'inversion* (*Méthodes,* n° 217).

Aussi, nous supprimons dans la cinquième édition des *Exercices de Géométrie,* les théorèmes relatifs aux polygones curvilignes (nos 685 à 697). Nous ne conservons que le *théorème de Miquel,* sur le triangle curviligne formé par trois cercles qui passent par le même point; mais nous reportons cette question à sa place naturelle, à l'*Inversion* (n° 1342 I).

## Cercle circonscrit à un polygone.

698. Pour démontrer que quatre points appartiennent à une même circonférence, il suffit d'établir que le quadrilatère qui aurait ces points pour sommets est inscriptible.

On sait que le rectangle, le trapèze isocèle et tout quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires sont des figures inscriptibles.

Les problèmes où l'on donne un plus grand nombre de points, six, neuf, par exemple, se ramènent à la considération du quadrilatère inscriptible.

**699. Points concycliques.** On nomme *points concycliques*, ou *points homocycliques*, quatre points, ou un plus grand nombre, qui appartiennent à une même circonférence.

L'expression *points concycliques*, introduite par les géomètres anglais, se rencontre fréquemment dans la *Géométrie récente* ou *Géométrie du Triangle*.

### Théorème 138. — VIII.

**700.** *Lorsque les diagonales d'un quadrilatère se coupent à angle droit, les quatre points milieux des quatre côtés de ce quadrilatère appartiennent à une même circonférence.*

En effet, le parallélogramme formé en joignant les points milieux deux à deux est un rectangle, car ses côtés sont parallèles aux diagonales du quadrilatère.

### Théorème 138. — IX.

**701.** *Les sommets* B, C *d'un triangle* ABC, *le centre du cercle inscrit et le centre du cercle exinscrit tangent à* BC, *appartiennent à une même circonférence,*

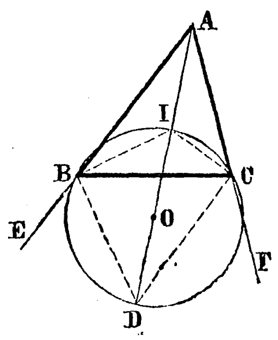


Fig. 418.

En effet, les bissectrices BI, BD des angles supplémentaires ABC, CBE sont perpendiculaires l'une à l'autre; il en est de même de IC et CD; donc la circonférence décrite sur ID comme diamètre passe par B et C.

*Remarque.* 1° Le centre O du cercle IBDC est au point milieu de l'arc BOC du cercle circonscrit au triangle ABC.

2° La moitié de la distance ID des centres I et D du cercle inscrit et de l'exinscrit égale la corde de la moitié de l'arc BOC; on a : IO ou DO = BO ou CO (nos 735 et 816 R).

### Théorème 138. — X.

**702.** *Si du milieu de l'arc sous-tendu par une corde* AB, *on mène deux autres cordes* CD *et* CE *coupant la première, et si l'on joint leurs extrémités, on forme deux triangles* CDE *et* CFG *équiangles entre eux, et un quadrilatère inscriptible* DEGF.

### Théorème 138. — XI.

**702 a.** *Un segment rectiligne* AB *se meut de manière que* A *se trouve constamment sur une droite* OX, *et* B *sur une droite* OY. *La circonférence circonscrite au triangle* AOB *a un rayon constant.*

L'arc AOB est l'arc du segment capable de l'angle constant XOY; dès lors son rayon est constant.

Pour CD = AB, c'est l'arc d'un segment capable de l'angle supplémentaire de XOY; par suite, c'est le même rayon.

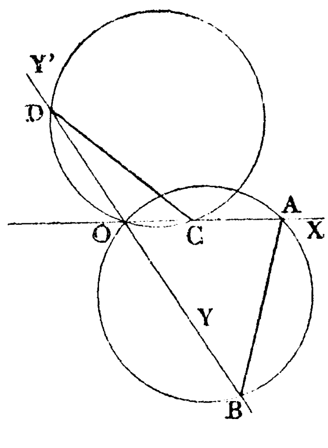


Fig. 418 *bis*.

**Note.** L'enveloppe des cercles de même rayon est une circonférence ayant O pour centre; l'enveloppe des segments tels que AB, CD est une courbe à quatre points de rebroussement, analogue à l'*Astroïde* (n° 793 a). Cette dernière courbe a un grand nombre de propriétés; elle a été l'objet de diverses études : citons d'abord les *Nouvelles Annales*, 1861, p. 348 et 351, DESGRANGES. — 1874, p. 534, note de M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. — 1875, p. 328, n° 2, M. BARBARIN. Voir aussi *Mathesis*, 1900, p. 244, M. GINO LORIA; p. 247, M. NEUBERG.

La courbe générale du n° 702 a est étudiée dans les *N. A.* par MERLIEUX, en 1842, p. 265; en 1847, p. 260, par JOACHIMSTHAL; p. 263, par BOUTEILLER.

### Théorème 139.

**703.** *Un polygone est régulier lorsqu'il est inscriptible et circonscriptible à deux circonférences concentriques.*

Le polygone étant circonscriptible, il en résulte OM = ON; donc les deux cordes AB, BC sont égales comme également éloignées du centre O du cercle de rayon OA.

De l'égalité des cordes résulte l'égalité des angles.

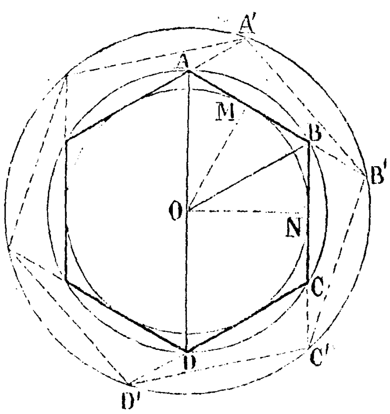


Fig. 419.

### Théorème 139. — I.

**704.** *Lorsqu'on prolonge chaque côté d'un polygone régulier, dans le même sens et d'une même quantité, on obtient un nouveau polygone régulier* A'B'C'... (fig. 419).

### Théorème 139. — II.

**705.** *On donne un polygone régulier d'un nombre impair de côtés, par exemple un pentagone; on prolonge les apothèmes jusqu'au cercle circonscrit; on obtient ainsi les sommets d'un pentagone égal au premier. Les côtés des deux pentagones, en se coupant deux à deux, forment un décagone régulier* (fig. 420).

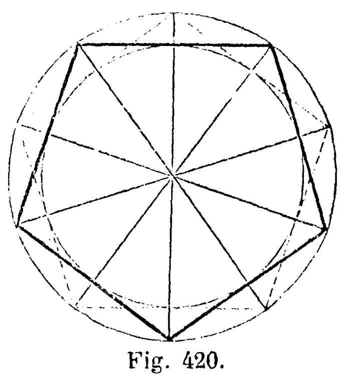


Fig. 420.

**Théorème 140.**

**706.** *Si, par les sommets d'un triangle* ABC, *on fait passer trois circonférences qui se coupent deux à deux sur les côtés de ce triangle en* D, E, F,

1° *Ces trois circonférences passent par un même point* O;

2° *L'angle* AOB *égale la somme des angles* C *et* D, *l'angle* BOC *égale* A *plus* E, *l'angle* COA *égale* B *plus* F.

1° Soit O le point de concours des circonférences qui passent par les sommets A et B.

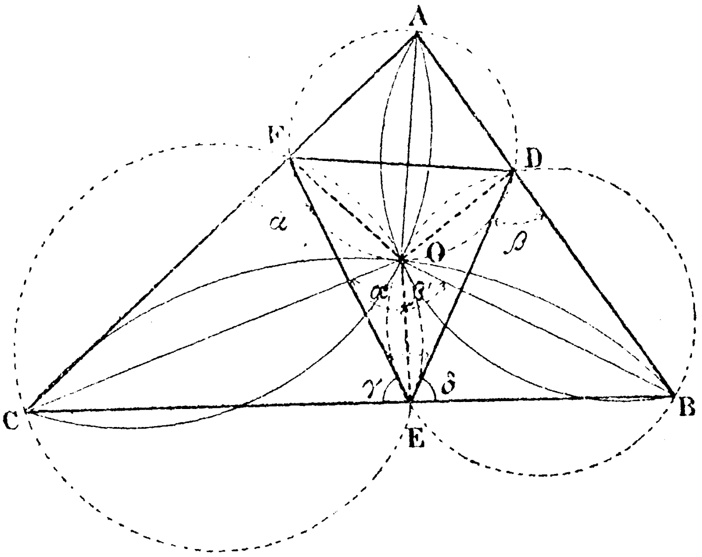


Fig. 421.

A cause des quadrilatères inscrits, l'angle FOD est le supplément de A, DOE est le supplément de B; mais les trois angles au point O et les angles A, B, C valent ensemble 6 droits; or les angles A, B et leurs suppléments donnent 4 droits; donc FOE et C valent ensemble 2 droits; par suite, le quadrilatère CFOE est inscriptible, et la circonférence FCE passe par le point O.

2° *Prouver que l'angle* $BOC = A + E$, etc.

Représentons 2 droits par $\pi$; on a :

$$\text{l'angle } BOC = \alpha' + \beta' = \alpha + \beta.$$

Or $$\alpha = \pi - (C + \gamma), \quad \beta = \pi - (B + \delta);$$

d'où $$BOC = \pi - (B + C) + \pi - (\gamma + \delta),$$

donc $$BOC = A + E.$$

*Remarque.* De la seconde partie du théorème précédent, on déduit la conséquence suivante, qu'il est utile de formuler comme théorème à cause de l'emploi fréquent que nous en ferons dans les questions relatives au centre permanent de similitude (nos 2476 et suivants).

**Théorème 140. — I.**

**706 a.** *Si un triangle* DEF, *inscrit dans un triangle donné* ABC, *est variable de grandeur et de position, mais reste semblable à lui-même,* *le point* O, *commun aux cercles* ADF, BDE, CEF, *est invariable de position.*

En effet, la somme A + E est constante, etc.; donc le point O peut être déterminé par les segments du cercle BOC capable de A + E, et de COA capable de B + F.

**Note.** La seconde partie du théorème précédent n° 706 et la conséquence si remarquable et si féconde qu'on en tire sont dues, croyons-nous, à M. NEUBERG. (*J. M. E.*, 1886, p. 152, n° 8, et *N. C.*, 1880, t. VI, pp. 65, 72, etc.).

**706 b. Extension.** *Si l'on choisit un point arbitrairement sur chaque arête d'un tétraèdre, les quatre sphères passant respectivement par chaque sommet et par les points situés sur les trois arêtes adjacentes ont un point commun.* (S. ROBERTS.)

Pour la démonstration on peut voir : *Mathesis*, 1884, page 16, question 45.

### Théorème 140. — II.

**706 c.** *Sur les côtés* AB, BC, CA *d'un triangle, on prend trois points quelconques* C', A', B'; *on décrit les cercles* AB'C', BC'A', CA'B', *qui coupent respectivement en* D, E, F *trois parallèles issues de* A, B, C. *Démontrer que les points* D, E, F *et le point* S *commun aux trois cercles sont en ligne droite.* (J. M. E. de VUIBERT, 1893, 1er oct., p. 4.)

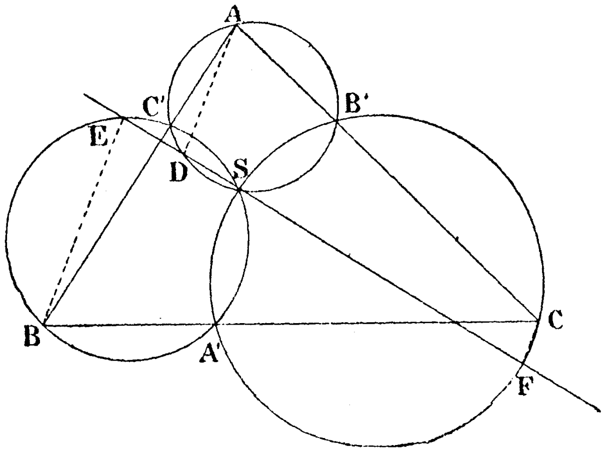


Fig. 422.

Les quadrilatères inscriptibles SAC'D, SBEC', donnent :

$$\text{angle } DSC' = DAC', \quad ESC' = EBC';$$

or $$DAC' = EBC';$$

donc $$DSC' = ESC'.$$

Ainsi DS et ES se confondent.

De même, DS coïncide avec SF, d'où résulte que les quatre points D, E, F, S sont en ligne droite.

### Théorème 140. — III.

**707.** *Une circonférence est circonscrite à un triangle* ABC; *les trois circonférences qui se coupent deux à deux aux points* A, B, C, *et dont les centres sont sur la circonférence circonscrite, passent par un même point.*

Il suffit de se reporter à un théorème précédent (nº 701).

Les trois circonférences, telles que celle dont O est le centre (fig. 418), passent par le point de concours I des bissectrices intérieures.

**Théorème 141.**

**708.** *Étant donné un quadrilatère, si l'on mène des circonférences tangentes intérieurement aux côtés pris trois à trois, les quatre centres ainsi obtenus sont les sommets d'un quadrilatère inscriptible.*

En effet, les centres en question ne sont autres que les points de concours des bissectrices intérieures du quadrilatère considéré. Or ces bissectrices forment un nouveau quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires (nº 551) ; donc ce quadrilatère est inscriptible.

**Théorème 141. — I.**

**709.** *A chaque côté d'un quadrilatère et aux prolongements des deux côtés adjacents du côté considéré, on décrit une circonférence tangente ; prouver que les centres des quatre cercles tangents, ainsi décrits, appartiennent à une même circonférence.*

**Théorème 142.**

**710.** *Sur chaque côté d'un quadrilatère inscriptible pris pour corde, on décrit une circonférence ; les quatre circonférences se coupent deux à deux en quatre autres points qui appartiennent à une même circonférence.*

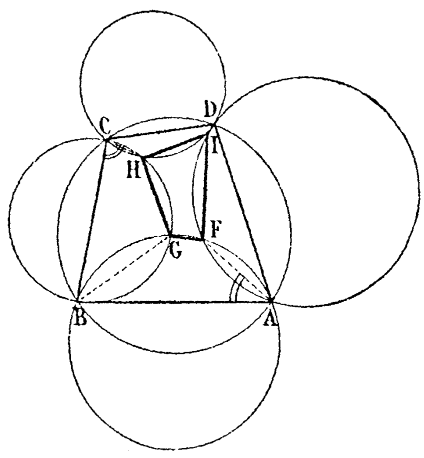



Fig. 423.

Les trois angles formés au point G valent 4 droits ; donc, à cause des quadrilatères inscrits, l'angle G du quadrilatère FGHI égale la somme des suppléments des deux autres angles du point G : ainsi

$$\text{HGF} \quad \text{ou} \quad G = \text{BAF} + \text{BCH}.$$

De même

$$\text{FIH} \quad \text{ou} \quad I = \text{DCH} + \text{DAF} ;$$

d'où

$$G + I = A + C = 2 \text{ droits} ;$$

donc le quadrilatère FGHI est inscriptible.

**710 a.** *Remarque.* Ce théorème se rapporte directement aux polygones curvilignes. On sait que la somme de deux angles opposés d'un quadrilatère curviligne inscriptible égale la somme des deux autres angles et que, réciproquement, le quadrilatère est inscriptible lorsque cette relation a lieu ; d'ailleurs, lorsque deux cercles se coupent, les angles curvilignes aux deux points d'intersection sont égaux entre eux. Par suite, ABCD étant inscriptible, on a, pour les angles curvilignes :

$$A + C = B + D ; \quad \text{d'où} \quad F + H = G + I ;$$

donc FGHI est inscriptible.

**Théorème 142. — I.**

**710 b.** *Les centres des cercles inscrits aux quatre triangles que déterminent les deux diagonales d'un quadrilatère inscrit sont les sommets d'un rectangle.*

En effet, les côtés de la figure obtenue sont parallèles, deux à deux, aux droites rectangulaires qui joignent les points milieux des arcs opposés déterminés par le quadrilatère donné. (*N. C. M.*, 1874-75, p. 228, question 34, d'après les *Archives de Grunert,* en 1842.) On peut voir aussi : *N. C.,* 1875, p. 228, q. 34. — *Théorèmes et Problèmes*, par M. CATALAN, 6e édition, 1878, p. 50.

**Note.** 1° La même question, plus ou moins transformée et complétée, peut donner quelques résultats intéressants. *Bulletin de mathématiques élémentaires* de M. CH. MICHEL, 1910, p. 194. Cette publication a pris fin en juillet 1910.

2° D'après le *théorème japonais* (n° 750 a), la somme des rayons des deux cercles inscrits dans les triangles déterminés par une des diagonales égale la somme des rayons des cercles inscrits dans les deux triangles déterminés par l'autre diagonale.

**Théorème 143.**

**711.** *Quatre droites se coupant deux à deux forment quatre triangles ; les circonférences circonscrites à chacun de ces triangles passent par un même point* M (*Point de Miquel* de M. KANTOR de Vienne).

(Voir *Méthodes,* n° 21.)

Ce théorème, attribué à MIQUEL, appartient à STEINER, ainsi que l'indique BALTZER, *Planimétrie,* § IV, n° 7; en effet, les *Annales de Gergonne*, tome XVIII, 1827-1828, page 302, énoncent ce théorème comme étant proposé par STEINER, ainsi que plusieurs autres, notamment le *Théorème d'Aubert* (n° 767).

**Note.** 1° Le cercle des cinq points d'un quadrilatère ou *Cercle de Miquel* a été l'objet de diverses questions et réponses de l'*Intermédiaire des mathématiciens,* 1902, p. 52, n° 2184, F. FARJON; p. 165, H. BROCARD; E. MALO; 282, G. DE LONGCHAMPS; L. RIPERT a établi que ce cercle passe par vingt-cinq points remarquables.

2° A divers articles des *Annales de Gergonne* sur le quadrilatère, il convient d'ajouter les suivants des *Nouvelles Annales* : 1875, p. 514; 1876, p. 108, par PAUL TERRIER, Ingénieur à Paris; 1908, p. 442, art. de M. DETEUF; et 1909, p. 136, *Correspondance,* H. BROCARD. Voir aussi les nos 1277, ci-après.

**Théorème 143. — I.**

**711 a.** *Une transversale quelconque coupe les côtés d'un triangle donné* ABC ; *elle rencontre* AB *en* C′, BC *en* A′, CA *en* B′ ; *on circonscrit des circonférences aux triangles* AB′C′, A′BC′, A′B′C : *les circonférences se coupent en un même point* M *du cercle circonscrit au triangle donné.*

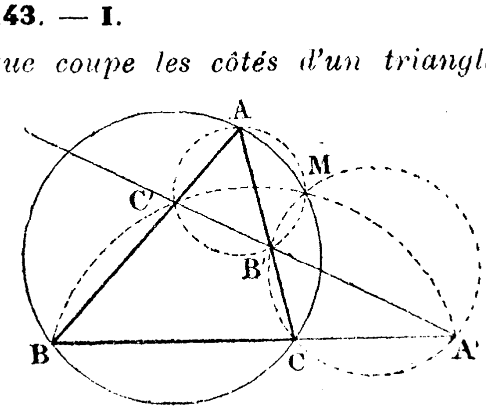



Fig. 424.

C'est la même question que précédemment (n° 711). Voir aussi n° 819.

Remarque. *En projetant le point* M

*sur chaque côté du triangle et sur la transversale, on obtient quatre points en ligne droite.* (Voir ci-après, nos 767 et 2464, 2o.)

**711 b. Note.** Le point M commun aux quatre cercles, ou *point de Miquel,* est le foyer de la parabole tangente aux quatre droites (no 2166, 2o).

Les centres des quatre cercles, ainsi que le point M, se trouvent sur une même circonférence, nommée *Cercle de Miquel* du quadrilatère; on aurait dû l'appeler *Cercle de Steiner.* (Voir le théorème suivant, no 712.)

On peut déterminer directement plusieurs autres points de ce cercle. Voir *Intermédiaire des Mathématiciens,* 1902; pages 52 et 165, no 2184; p. 261, no 2441; p. 282, no 2184. Le *Journal de Mathématiques élémentaires* de MM. Bourget et Longchamps indique neuf points de ce cercle, 1882, page 37, question 361. Voir aussi A. F. 1901, pp. 106, 114, 116. D'après M. Ripert, le *Cercle de Miquel* passe par vingt-cinq points remarquables, et le *point de Miquel* se trouve sur neuf cercles et douze droites remarquables.

**Théorème 144.**

**712.** *Les centres des circonférences circonscrites aux quatre triangles formés par quatre droites qui se coupent deux à deux appartiennent à une même circonférence.* (Steiner, — *Annales de Gergonne,* t. XVIII, 1827-1828, p. 302.)

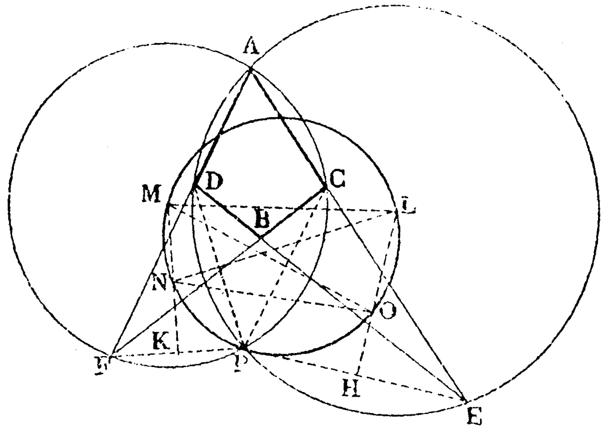



Fig. 425.

Soient les quatre droites formant le quadrilatère ACBD, dont les côtés opposés se coupent en E, F.

Les quatre circonférences circonscrites aux quatre triangles formés par quatre droites se coupent en un même point P (no 711); les quatre quadrilatères ACPF, ADPE, BCEP, BDFP sont inscrits, ils ont deux à deux une corde commune; pour avoir les centres, élevons des perpendiculaires au milieu de ces cordes.

Pour les quadrilatères ADPE, BCEP, les centres sont sur HOL.

Pour ADPE, DBPF, les centres L et N sont sur la perpendiculaire élevée au milieu de DP, etc.

Or les arcs CPF, CPE sont semblables comme mesurant le même angle A; mais l'angle $L = {}^1/_2\,DPE$ et $M = {}^1/_2\,CPF$; donc $L = M$, et le quadrilatère LMNO des quatre centres est inscriptible.

**712 a. Note.** L'énoncé de Steiner est plus complet que celui du théorème précédent. Le voici dans son ensemble, à titre documentaire :

« Quatre droites A, B, C D, se coupant deux à deux en six points, et se trouvant conséquemment comprises dans un même plan :

1o Ces quatre droites, prises trois à trois, forment quatre triangles tels que les cercles circonscrits passent tous quatre par un même point P.

2o Les centres L, M, N, O, de ces quatre cercles se trouvent, avec le point P, sur la circonférence d'un cinquième cercle.

3o Les pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur les directions de

A, B, C, D, appartiennent tous quatre à une même droite R, et cette propriété appartient exclusivement au point P.

4° Les points de concours des perpendiculaires abaissées des sommets sur les directions des côtés opposés dans les quatre triangles (1°) appartiennent à une même droite R'.

5° Les droites R et R' sont parallèles, et la droite R passe par le milieu de la perpendiculaire abaissée de P sur R'.

6° Les milieux des diagonales du quadrilatère complet formé par les quatre droites A, B, C, D, appartiennent à une même droite R'' (NEWTON).

7° La droite R'' est perpendiculaire commune aux deux droites R, R'.

8° Pour chacun des quatre triangles (1°), il y a un cercle inscrit et trois cercles exinscrits, ce qui fait en tout *seize* cercles, dont les centres sont quatre à quatre sur une circonférence, de manière à donner naissance à huit nouveaux cercles.

9° Ces huit nouveaux cercles se partagent en deux groupes, tels que chacun des quatre cercles de l'un de ces groupes coupe orthogonalement tous les cercles de l'autre groupe. On en conclut que les centres des cercles des deux groupes sont sur deux droites perpendiculaires l'une à l'autre.

10° Enfin ces deux dernières droites se coupent au point P, mentionné ci-dessus.

**712 b. Note.** Les *Annales de Gergonne* n'ont pas les démonstrations des théorèmes de STEINER. Divers auteurs en ont traité quelques-uns, notamment MIQUEL, en 1836. Plus tard, les *Nouvelles annales de* TERQUEM et GERONO ont procédé de même. En 1878, le savant M. S. KANTOR de Vienne a parlé du *point de Miquel* d'un quadrilatère: c'est le point P où se coupent les quatre cercles du n° 1° ci-dessus. De même, le cercle des quatre centres L, M, N, O et du point P, a été nommé *Cercle de Miquel.*

Enfin la question elle-même a été appelée parfois *Théorème de Miquel.* On peut voir à ce sujet les *N. A.,* 1878, p. 325, note de CATALAN; l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1899, p. 197, question 1611. — 1900, p. 221, art. de MM. DROZ-FARNY, de Porrentruy, DURAN-LORIGA de La Corogne et G. DE LONGCHAMPS; puis 1902, pp. 52, 165, 282. Questions et réponses par MM. RIPERT, MALO, H. BROCARD : Le *Cercle de Miquel* d'un quadrilatère passe par vingt-cinq points déterminés.

Il n'y a pas lieu, ce semble, de remplacer les appellations connues : *point* et *cercle de Miquel,* pour leur en substituer de nouvelles, car le célèbre et fécond STEINER n'a que faire d'un petit théorème de plus ou de moins.

* MIQUEL, alors élève à l'institution BARBET, à Paris, écrivit en 1836, dans le journal mathématique *Le Géomètre* fondé par GUILLARD, publication qui n'a eu qu'une courte durée. (*N. A.,* 1864, p. 459, note de VINCENT, membre de l'Institut).

### Theorème 145.

**713.** *Dans tout polygone inscrit de 2n côtés, la somme des angles de rang pair est égale à la somme des angles de rang impair.*

En prenant le double de la mesure de chaque angle inscrit, on a :

$$\begin{aligned}
1 &= b+c+d+e+f+g\\
3 &= d+e+f+g+h+a\\
5 &= f+g+h+a+b+c\\
7 &= h+a+b+c+d+e\\
\hline
1+3+5+7 &= 3 \text{ fois la circonférence entière.}
\end{aligned}$$

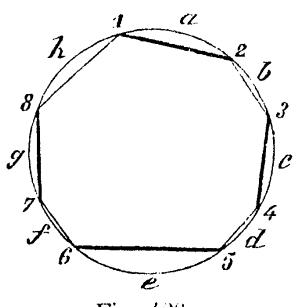


Fig. 426.

Il en serait de même du double de la somme des angles de rang pair; *donc les deux sommes sont égales.*

Dans l'exemple donné, chaque somme égale trois fois la moitié de la circonférence ou six angles droits.

**714**. *Remarque.* En général, la somme des angles intérieurs d'un polygone ayant $2n$ côtés est donnée par la formule

$$2 \text{ droits } (2n - 2);$$

donc la somme des angles de rang pair est donnée par

$$1 \text{ droit } (2n - 2).$$

*La somme des angles d'un des groupes égale autant d'angles droits qu'il y a de côtés moins deux.*

### 1er Théorème de Poncelet 146.

**715**. *Si deux polygones inscrits de* 2n *côtés ont* (2n — 1) *côtés respectivement parallèles, les deux derniers côtés sont aussi parallèles.*

En effet, tous les côtés étant donnés parallèles deux à deux, sauf deux d'entre eux, AB et A'B' par exemple, on reconnaît que tous les angles du premier polygone, sauf les angles A et B, sont connus; il en est de même pour le second. Or A et B appartiennent à deux groupes différents et se trouvent déterminés. En effet, supposons que nous ayons des octogones, la somme des angles de rang pair égale six droits; il en est de même de celle des angles de rang impair.

Soit M la somme des trois angles de rang pair qui sont connus, et N celle des trois angles de rang impair; nous aurons :

$$A = 6 \text{ droits} - M \quad \text{et} \quad B = 6 \text{ droits} - N;$$

or on a aussi : $A' = 6d - M$ et $B' = 6d - N$.

donc $A = A'$, $B = B'$ et les côtés AB et A'B' sont parallèles.

**716**. *Remarque.* Le théorème peut être énoncé comme il suit :

*Si un polygone de* 2n *côtés demeure constamment inscrit dans un même cercle et que chacun de* (2n — 1) *côtés se meuve parallèlement à lui-même, le dernier côté se mouvra aussi parallèlement à lui-même.* (N. A., 1850, p. 136.) D'après un bel article de E. Prouhet. *Loc. cit.*, p. 130.

### 2e Théorème de Poncelet 146. — I.

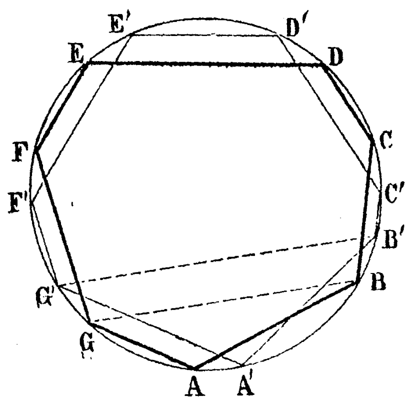



Fig. 427.

**717**. *Lorsqu'un polygone de* (2n + 1) *côtés est constamment inscrit dans un cercle, si* 2n *côtés se meuvent parallèlement à eux-mêmes, le dernier côté conservera une grandeur constante.*

En effet, soit AB... GA un polygone d'un nombre impair de côtés, dont tous les côtés, sauf AB, se meuvent parallèlement à eux-mêmes et deviennent

B'C'D'E'F'G'.

Il faut prouver que $A'B' = AB$.

Or, en limitant les polygones par les

diagonales BG et B'G', on a des polygones d'un nombre pair de côtés; donc B'G' est parallèle à BG (nº 715).

Mais G'A' est aussi parallèle à GA par construction; donc les angles inscrits AGB et A'G'B' sont égaux; par suite, la corde A'B' = AB.

**Théorème 147.**

**717 a.** *Si les angles d'un polygone inscrit dans un cercle sont égaux, ce polygone est régulier quand le nombre de ses côtés est impair.* (J. M. E. de Vuibert, 1905, nº 6020.)

Les côtés adjacents à un même côté sont égaux entre eux; par suite, pour cinq côtés, par exemple : $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, on aurait $a = c = e$; puis en continuant à parcourir le périmètre, on aurait : $e = b = d$; donc...

Si le nombre des côtés $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ est pair, les côtés de rang impair $a$, $c$, $e$ sont égaux entre eux; il en est de même des côtés de rang pair : $b = d = f$; mais rien n'indique que $a$ égale $b$.

**Théorème 148.**

**718. Cercle des neuf points** *ou* **cercle d'Euler.** *Dans un triangle, les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des droites qui joignent les sommets au point de concours des hauteurs sont situés sur une même circonférence.* (Euler, *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, en 1765.)

(*Méthodes*, nº 27; on peut voir aussi le nº 720.)

**Théorème 149.**

**719 (a).** *Le centre du cercle des neuf points est au milieu de la droite qui joint le point de concours des hauteurs au centre du cercle circonscrit à ce triangle.*

**(b).** *Le rayon du cercle des neuf points est la moitié du rayon du cercle circonscrit.*

(*Méthodes*, nº 28. Après l'étude du livre III, on peut recourir à une autre démonstration, nº 1262.)

**(c).** *La tangente du cercle des neuf points, au point milieu d'un côté du triangle, et ce même côté sont antiparallèles par rapport à l'angle opposé.* (*Méthodes*, nº 28, 3º.)

*Remarque.* Il nous paraît avantageux de reproduire ici la démonstration du théorème fondamental, à cause des questions nombreuses qu'on peut rattacher au cercle des neuf points.

**720. Cercle des neuf points.** *Dans un triangle, les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des droites qui joignent les sommets au point d'intersection des hauteurs sont situés sur une même circonférence.*

Soient D, E, F les points milieux des côtés, AK, CG deux hauteurs, H leur point d'intersection, et L le milieu de AH.

Il suffit de prouver que la circonférence DEF passe par K et par L.

1º Menons FK. Le trapèze EDFK est isocèle, et partant inscriptible. En effet, dans le triangle rectangle ACK, la médiane FK = FC.

Mais $$DE = \frac{AC}{2} = FC,$$

donc $$ED = KF.$$

Ainsi la circonférence DEF passe par le point K.

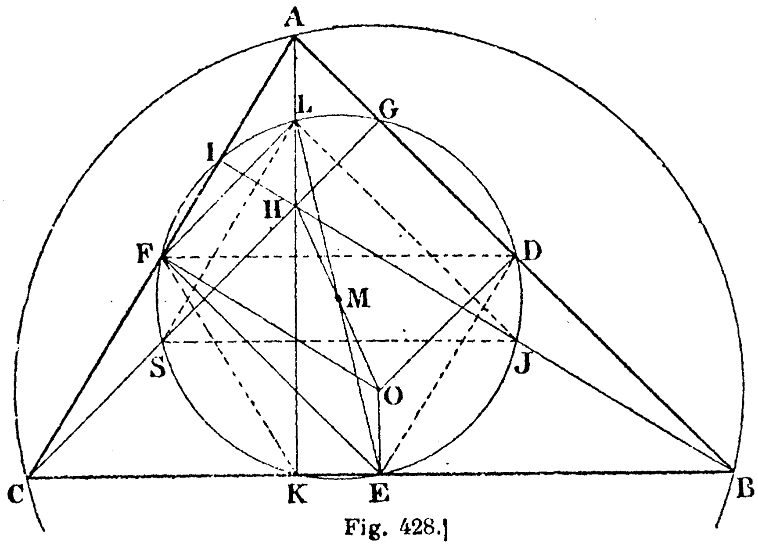



Fig. 428.

2° La droite FL, qui joint les milieux de AC et de AH, est parallèle à CH; mais FE est parallèle à AB; donc

l'angle LFE égale G = 1 droit.

Ainsi le quadrilatère ELFK est inscriptible, et la droite LE est le diamètre du cercle, car les angles LFE, LKE sont droits. Donc...

*Autre démonstration.* On peut dire plus rapidement : *La circonférence des points milieux* D, E, F

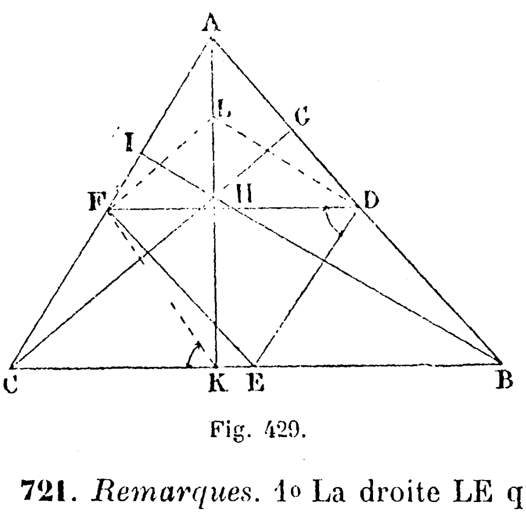



Fig. 429.

1° *passe par le pied* K *des hauteurs*,

car angle D = C = K,

donc DEKF est inscriptible;

2° *passe par le point d'Euler, tel que* L;

angle EFL = AGC = 90°,

angle EDL = AIB = 90°,

comme ayant leurs côtés parallèles; donc le quadrilatère DEFL est inscriptible.

**721.** *Remarques.* 1° La droite LE qui joint le point milieu L, pris sur une hauteur au point milieu E du côté, est un diamètre.

2° Si O est le centre du cercle circonscrit (fig. 428), DO et FO sont perpendiculaires au milieu de AB et de AC; à cause du diamètre LE, l'angle LDE est droit, il égale donc OFC; mais DE est parallèle à AC, donc DL est aussi parallèle à FO; mais FL est déjà parallèle à CHG, par suite à DO; ainsi la figure ODLF est un parallélogramme.

Donc $$DL = OF,$$
et $$OD = FL = {}^1/_2\,CH.$$

De ces remarques, on peut déduire les théorèmes suivants (nos 722 à 725).

**721 a. Note.** Le *Cercle des neuf points* est assez mal nommé, car il passe par un grand nombre d'autres points que l'on peut déterminer directement. Voir nos 27, 292 j, 727, 732, 733. On peut aussi consulter l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1898, p. 208, no 1256. (Notes de MM. Brocard, Ripert, d'Avillez, etc.)

Le *Cercle des neuf points* d'un triangle donné appartient aussi à l'infinité de triangles qui ont même orthocentre et même cercle circonscrit. (Voir no 1341 b.) Il passe donc par les neuf points principaux de chacun de ces triangles, etc.

Le *Cercle des neuf points* est le lieu du centre des hyperboles équilatères qui passent par les sommets du triangle; ces hyperboles passent par l'orthocentre. (Voir ci-après, no 2183 c, puis *N. A.*, 1863, p. 475 et 476, J.-J.-A., Mathieu; voir aussi *Mathesis*, 1891, p. 192.)

Les *points d'Euler* ou *points eulériens* des hauteurs d'un triangle ont été ainsi désignés dans nos *Exercices de Géométrie*, 2e édition, 1882, no 721. Depuis quelques années, la *Géométrie récente du triangle* a fait introduire un grand nombre d'appellations de *points*, de *droites*, de *cercles*, de *coniques*, remarquables : *points de Lemoine, de Brocard, de Steiner, de Tarry; droites d'Euler, de Simson* ou *de Wallace; cercles de Lemoine, de Tucker, de Neuberg, de Taylor, d'Adams; ellipses de Brocard, de Longchamps; hyperbole de Kiepert; paraboles de Artzt*, etc.

Voir ci-après no 721 b, puis no 1341, ainsi que *Mathesis*, 1908, pp. 33 et 201.

**721 b. Théorème.** *La circonférence des neuf points est le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux sommets, étant diminuée de leur puissance par rapport au cercle circonscrit, est égale à*

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

*Mathesis*, 1906, p. 32, Edm. de Puydt.

**Théorème 149. — I.**

**722.** *Dans un triangle, la droite qui joint le point d'Euler d'une hauteur au milieu d'un des côtés adjacents à cette hauteur, est égale et parallèle à la perpendiculaire abaissée du centre de la circonférence circonscrite au triangle, sur le second côté adjacent à la hauteur considérée.*

En effet, on vient de prouver que la ligne DL est égale et parallèle à la perpendiculaire OF (fig. 428).

**Théorème 149. — II.**

**723.** *La distance de chaque côté d'un triangle au centre du cercle circonscrit à ce triangle, égale la moitié de la distance de l'orthocentre au sommet opposé au côté considéré.*

En effet, on a : $$FL = {}^1/_2\,CH,$$
mais $$DO = FL,$$
donc $$DO = {}^1/_2\,CH.$$
De même $$OE = {}^1/_2\,AH = AL = LH. \qquad \text{(fig. 428)}$$

**Théorème 149. — III.**

**724.** *Les trois droites qui joignent le point d'Euler de chaque hauteur d'un triangle au point milieu du côté opposé, sont des diamètres du cercle des neuf points ; elles sont égales au rayon du cercle circonscrit et se coupent au point milieu de la droite qui joint l'orthocentre au centre du cercle circonscrit.*

LE est un diamètre ; il en en serait de même de FJ.

Les lignes OE et AH sont parallèles ;

d'ailleurs $$OE = AL = LH,$$

par suite, les figures ALEO, LHEO sont des parallélogrammes ;

donc $$LE = AO,$$

et LE, HO se coupent respectivement en leurs milieux (fig. 428).

Le diamètre LME, qui aboutit au point milieu d'un côté BC, est égal et parallèle au rayon AO du cercle circonscrit, rayon qui aboutit au troisième sommet.

*Remarque.* La considération des figures semblables établit plus simplement que le rayon du cercle des neuf points est la moitié de celui du cercle circonscrit, car les deux cercles sont circonscrits aux triangles semblables EDF, ABC, dont le rapport des côtés est $^1/_2$ (nº 1119).

**Théorème 149. — IV.**

**725.** *Un triangle donné et les trois triangles qui ont pour base un des côtés du premier et pour sommet commun l'orthocentre* H, *ont même cercle des neuf points.*

En effet, pour le triangle BCH par exemple, E, S, J sont les milieux des trois côtés ; donc le cercle de centre M est le cercle des neuf points.

Les trois hauteurs sont : HK, BGA et CIA ; ces trois lignes se coupent au point A. Pour la hauteur BGA, BA est la distance du sommet au point A de concours ; donc D, milieu du côté primitif BA, est le *point d'Euler,* de la hauteur BG du triangle BHC.

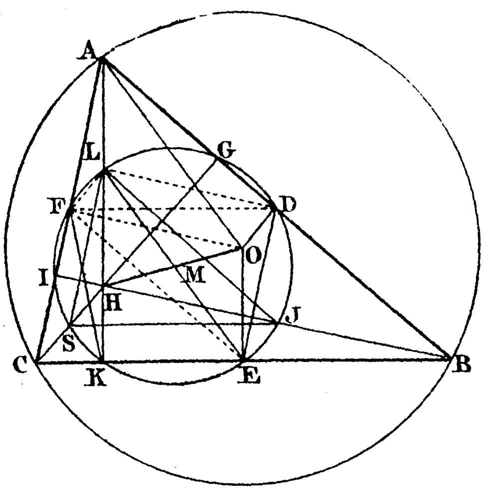


Fig. 430.

*Remarque.* Les *points d'Euler* des trois hauteurs d'un triangle donné et les points milieux des trois côtés devaient jouir des mêmes propriétés, puisqu'ils jouent le même rôle dans la figure d'ensemble formée par les quatre triangles ABC, ABH, BCH, CAH.

On pourrait déduire bien d'autres conséquences du théorème du cercle des neuf points ; en voici encore une assez remarquable : M est au milieu de HO, et, par suite, au milieu de la droite qui joindrait le sommet C au centre du cercle circonscrit au triangle AHB ; on a donc le théorème suivant :

**Théorème 149. — V.**

**726.** *Les circonférences circonscrites à chacun des triangles* ABC, ABH, BCH, CAH *sont égales. Les quatre droites qui joignent chaque sommet et le point* H *au centre du cercle circonscrit correspondant passent par le même point; ce point est le milieu de chacune de ces lignes.*

*Remarque.* Plusieurs des théorèmes précédents sont de CARNOT. (*Géométrie de position*, nos 129, 130, p. 162.)

**Théorème 149. — VI.**

**727.** *Dans un triangle* BAC, *l'angle* DEG, *formé par les droites qui joignent le point milieu* E *d'un côté de ce triangle au pied* G *de la hauteur et au point milieu* D *de* BC, *égale la différence des angles* B *et* C *du triangle.*

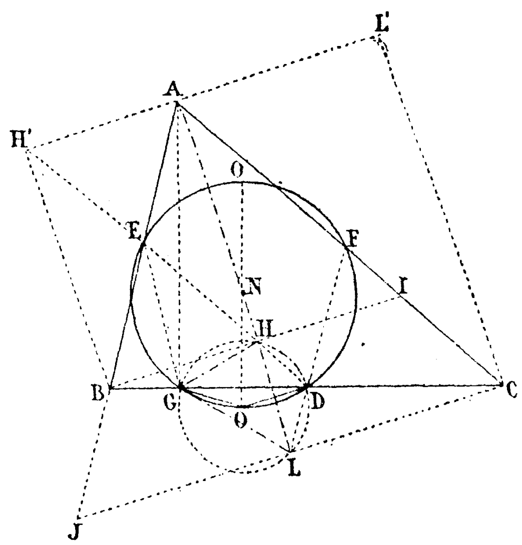


Fig. 431.

En effet, la droite DE, qui joint les milieux de deux côtés, est parallèle au troisième AC; donc

l'angle BDE = C.

Le triangle AGB étant rectangle, la médiane GE égale la moitié de la base; ainsi le triangle EBG est isocèle; donc

l'angle BGE = B.

Or

l'angle DEG = BGE — BDE,

donc DEG = B — C.

**Théorème 149. — VII.**

**728.** *Si l'on mène la bissectrice* AL *de l'angle* A *et qu'on abaisse les perpendiculaires* BH, CL, *le quadrilatère* DHGL *est inscriptible* (fig. 431).

Prolongeons BH et CL jusqu'à la rencontre des côtés opposés; les triangles ABI, ACJ seront isocèles. La droite DL, qui joint les points milieux de BC et de CJ, est parallèle à AB; elle est donc sur le prolongement de DF; donc l'angle $\mathrm{DLH} = \frac{\mathrm{A}}{2}$.

Le quadrilatère ABGH est inscriptible, car les angles AHB, AGB sont droits.

Ainsi HGD, supplément de $\mathrm{HGB} = \mathrm{BAH} = \frac{\mathrm{A}}{2}$.

Les angles DLH, DGH étant égaux, le quadrilatère DHGL est inscriptible.

**729.** *Corollaires.* 1° La droite DH, qui joint les milieux D, H de BC, BI, est parallèle à CA, elle est située sur DE, et

$$\text{l'angle } BDH = C.$$

Or $$\text{angle } GLH = GDH = C.$$

Ainsi $$\text{l'angle } GLD = C + \frac{A}{2}.$$

2° Lorsqu'on projette les sommets B et C en H′ et L′ sur la bissectrice extérieure de l'angle A, le quadrilatère DGH′L′ est inscriptible.

3° La droite DHE passe par le point H′.

### Théorème 149. — VIII.

**730.** *Le centre du cercle* DHGL *est sur le cercle des neuf points. Il en est de même du centre du cercle* DGH′L′ (fig. 431).

Soit O le centre du cercle circonscrit au quadrilatère DHGL.

L'angle au centre DOG = 2DLG,

donc $$DOG = 2\left(C + \frac{A}{2}\right) = 2C + A.$$

Mais $$\text{l'angle } DEG = B - C,$$

donc $$DOG + DEG = A + B + C = 180°.$$

Ainsi le quadrilatère DOGE est inscriptible; donc le centre O est sur le cercle des neuf points, puisque ce cercle passe par D, E, G.

**731.** *Remarques.* 1° On démontrerait aussi que le centre du cercle circonscrit au quadrilatère DGH′L′ est sur le cercle des neuf points.

2° Les bissectrices de l'angle B donneraient lieu à deux nouveaux cercles dont les centres seraient sur le cercle des neuf points; il en serait de même des bissectrices de l'angle C; donc on a *six nouveaux points* qui appartiennent au cercle d'Euler.

3° les centres O, O′ sont aux extrémités du diamètre ONO′ perpendiculaire au milieu du segment DG.

### Théorème 149. — IX.

**732.** *Le cercle des neuf points passe par les centres de vingt-quatre cercles que l'on peut déterminer directement.*

Les quatre triangles ABC, AHB, AHC, BHC, ont même cercle des neuf points (n° 726); or chacun de ces triangles donne lieu à six cercles; donc...

*Exemple.* La bissectrice de l'angle CAH donne les cercles O, O′.

Le cercle O passe par le milieu K du côté CH, par le pied P de la perpendiculaire AP abaissée sur CH et par les projections L, M des sommets C, H, sur la bissectrice AML.

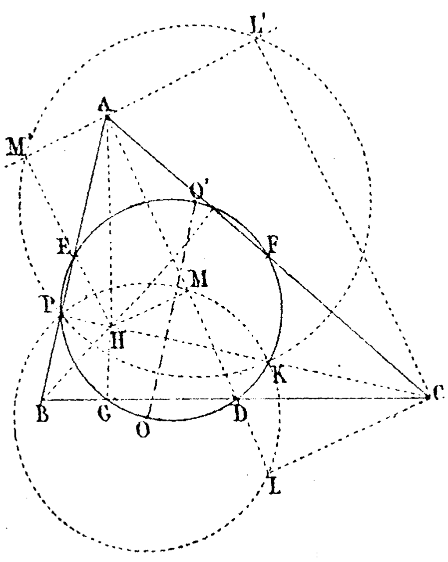


Fig. 432.

**733.** *Remarques.* 1° Rien n'est plus facile que de multiplier indéfiniment le nombre de points que l'on peut déterminer directement, et par lesquels passe néanmoins le *cercle des neuf points* d'un triangle donné ABC.

En effet, le cercle considéré est circonscrit au triangle DEF, que l'on peut nommer *triangle médian,* pour rappeler qu'il passe par les pieds des trois médianes (ou *triangle complémentaire* de M. NEUBERG, n° 432).

Or, en prenant G, pied de la hauteur AG, comme le point milieu de la base d'un triangle, on peut dire que EFG est le *triangle médian* auquel est circonscrit le cercle des neuf points.

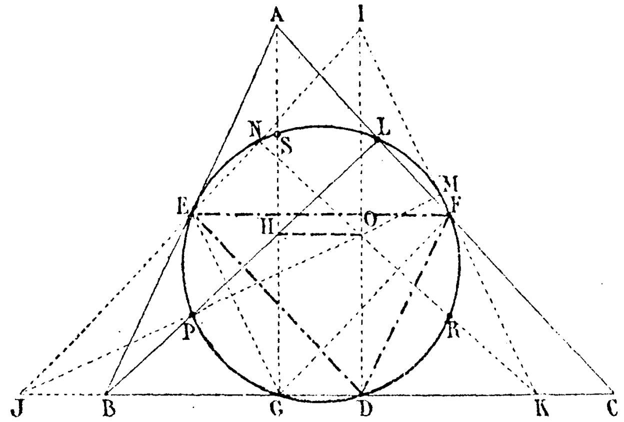


Fig. 433.

En menant par les sommets E, F, G des parallèles aux côtés opposés, on obtient IJK pour triangle principal; les points D, E, F, G sont communs aux deux triangles ABC et IJK. Il en est de même du point P, milieu de BH et en même temps milieu de OJ. Le point R est le milieu de OK et celui de CH; mais il y a trois points nouveaux : le point milieu de OI et les pieds M, N des perpendiculaires JM, KN.

On peut construire deux triangles analogues à IJK; donc les trois triangles ainsi formés donnent *neuf nouveaux points.*

**734.** 2° Le triangle dont ESF serait le *triangle médian* ou *triangle complémentaire* ne donnerait que deux nouveaux points, car le point milieu de OI serait le pied de la hauteur abaissée sur le côté parallèle à EF, et D serait le *point d'Euler.* Les deux autres hauteurs passeraient par P, R; mais le triangle correspondant à ELF donnerait aussi deux points. Il y aurait à considérer quatre autres triangles analogues pour les côtés DE, DF : donc on aurait *douze nouveaux points,* etc.

De la figure précédente (fig. 433), M. N. PLAKOVO déduit 48 cercles tangents au *cercle des neuf points.* (V. ci-après n° 1341 **b**, *note.*)

### Théorème de Mention 150.

**735.** *Les quatre centres des cercles inscrits et exinscrits à un triangle étant joints deux à deux donnent six longueurs; démontrer que les six milieux de ces droites sont sur la circonférence circonscrite au triangle donné.* (*The Mathematical monthly,* 1859, États-Unis. — Théorème indiqué dès 1849 par M. J. MENTION. — *N. A.*, 1850, p. 324.)

Soient ABC le triangle donné, O, D, E, F les quatre centres. Les bissectrices intérieures AD, BE, CF sont perpendiculaires aux bissectrices extérieures; elles sont donc les hauteurs du triangle DEF (n° 662). Dès lors le cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle des neuf points de

DEF. Il passe donc par le point L milieu de ID (nº 720) et par le point G milieu de FE, etc.

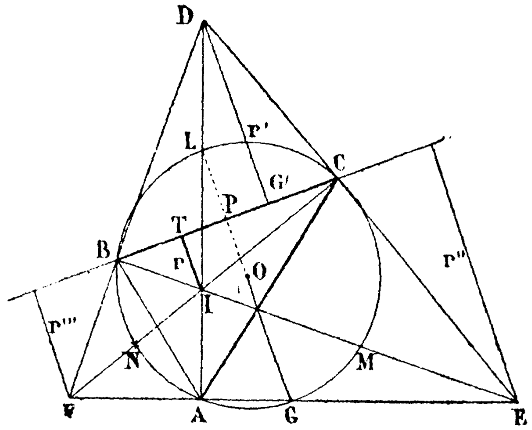



Fig. 434.

*Remarque.* On sait que LG est un diamètre du cercle des neuf points (nº 721, R).

**Théorème 150. — I.**

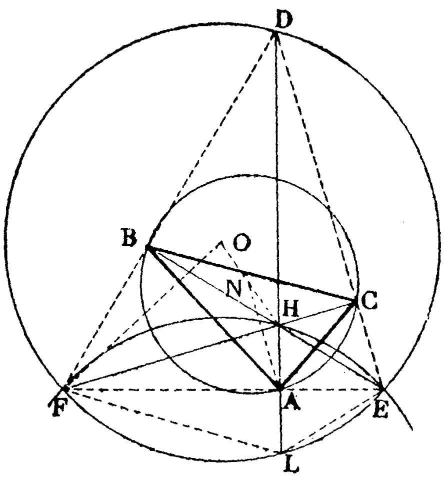



Fig. 434 *bis*.

**735 a.** *La circonférence qui passe par les centres* D, E, F, H, *de trois quelconques des quatre cercles qui touchent à la fois les trois côtés d'un triangle quelconque* ABC *est double de celle qui passe par les trois sommets de ce triangle* (Annales de GERGONNE, t. XII, 1821-1822, p. 321).

Le centre H du cercle inscrit est l'orthocentre de DEF; donc le cercle circonscrit ABC est le cercle des neuf points de DEF, par suite FO $= 2$ AN.

On sait en outre que AL $=$ AH; donc le cercle EHF $=$ le cercle DEF.

**735 b.** La démonstration ci-dessus, sauf pour la terminologie et diverses simplifications, est celle qui fut donnée par J.-B. DURRANDE, alors professeur de physique au collège royal de Cahors. — Deux autres démonstrations furent communiquées par PAGANI, ingénieur à Genève, et par QUERRET, chef d'institution à Saint-Malo. (*A. de G.*, t. XIII, 1822-1823, p. 141.)

**Théorème 151.**

**736.** *La somme des rayons des trois cercles exinscrits égale le rayon du cercle inscrit, augmenté de quatre fois le rayon du cercle circonscrit.*

Soient (fig. 434) R le rayon du cercle circonscrit, $r$ celui du cercle inscrit, $r'$, $r''$, $r'''$ les rayons des cercles exinscrits tangents aux côtés $a$, $b$, $c$.

$$\text{IT} = r, \quad \text{DG}' = r'; \quad \text{LG} = 2\text{R}.$$

Le point L étant le milieu de DI, on a :

$$LP = \frac{r' - r}{2} \text{ (n° 436, 3e cas),}$$

$$GP = \frac{r'' + r'''}{2},$$

d'où LG ou $2R = \frac{r' + r'' + r''' - r}{2}$ ou $r' + r'' + r''' = 4R + r.$

**Note.** Le théorème est dû à BOBILLIER ; à son tour, STEINER l'a donné ainsi que plusieurs autres inédits ou peu connus. (*A. de G.*, tome XIX, 1827-1828, p. 85 et 90.)

### Théorème 152.

**737.** *Dans tout triangle, la somme des rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit égale la somme des perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur chaque côté.* (CARNOT, *Géométrie de position*, n° 137, p. 167. — Démonstration de M. J. MENTION. — *N. A.*, 1850, page 325.)

Soient $d'$, $d''$, $d'''$ les distances du centre O aux trois côtés $a$, $b$, $c$.

On a trouvé au théorème précédent :

$$LP = \frac{r' - r}{2},$$

donc $d' = R - \frac{r' - r}{2}$,

d'où $2R = 2d' + r' - r;$ $(a)$

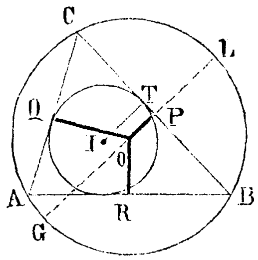




Fig. 435.

de même $d'' = R - \frac{r'' - r}{2}$,

d'où $2R = 2d'' + r'' - r;$ $(b)$

$$d''' = R - \frac{r''' - r}{2}; \text{ d'où } 2R = 2d''' + r''' - r. \quad (c)$$

La somme $(a) + (b) + (c)$ égale :

$$6R = 2(d' + d'' + d''') + (r' + r'' + r''') - 3r.$$

Mais (736) $r' + r'' + r''' = 4R + r,$ (1)

d'où $6R = 2(d' + d'' + d''') + 4R - 2r,$

ou $d' + d'' + d''' = R + r.$ (2)

*Remarque.* En désignant par $f'$, $f''$, $f'''$, la partie du rayon perpendiculaire à chaque côté, partie comprise entre la corde et l'arc, on a :

$$f' = R - d', \quad f'' = R - d'', \quad f''' = R - d''',$$

d'où $f' + f'' + f''' = 2R - r.$ (3)

*Remarque.* Si le triangle est obtusangle, le centre du cercle circonscrit est en dehors du triangle : la distance qui correspond au plus grand côté doit être prise négativement. Ainsi, en admettant que $d'''$ corresponde à ce plus grand côté, la formule (2) devient en réalité :

$$R + r = d' + d'' - d'''. \quad (4)$$

**737 a. Note.** 1° Pour la *formule de Carnot*, on peut voir, dans les *Annales de Gergonne*, tome XIX, p. 85, un article très intéressant de STEINER. — *N. A.*, 1872, p. 34, art. JAMET; consulter aussi *les Relations entre les éléments d'un triangle* (NONY, p. 40, formule 20), ainsi que *Mathesis*, 1904, p. 10, *sur une formule de Lemoine;* article de M. DROZ-FARNY et note de M. J. NEUBERG. Voir aussi, ci-après n° 1453 c.

2° On a aussi : $$\mathrm{R} - r = \frac{a^2r' + b^2r'' + c^2r'''}{(a+b+c)^2}.$$

Voir *Mathesis*, 1906, p. 144, question 1573, par H. G. A. VERKAART.

**Pentagramme de Miquel. 152. — I.**

**737 b.** *Si l'on circonscrit des circonférences aux triangles formés par chacun des côtés d'un pentagone et les prolongements des côtés adjacents, les cinq points d'intersection de ces lignes sont sur une même circonférence.*

Soient ABF, BCG, etc., les triangles demandés; les circonférences circonscrites se coupent en L, M, N, P, Q, et ces points appartiennent à une même circonférence.

Dans le quadrilatère complet ABCIFG, les circonférences circonscrites aux triangles ABF, BCG, FCI, se coupent au point L (n$^{os}$ 21 et 711).

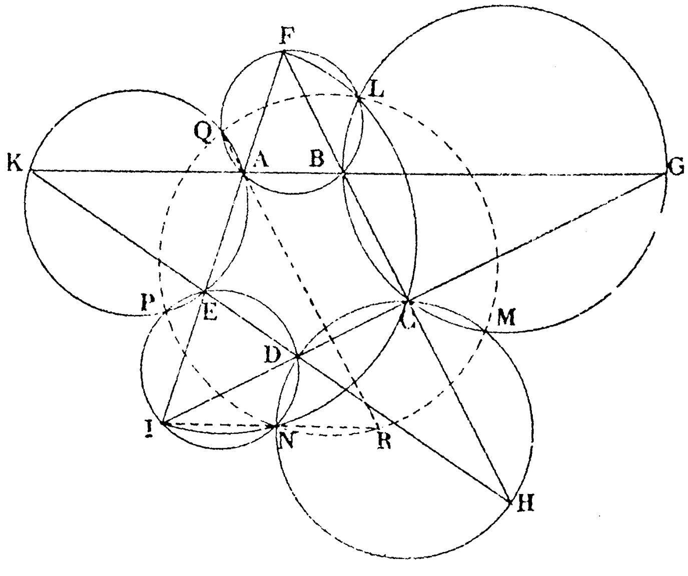



Fig. 435 *bis*.

De même, les circonférences circonscrites aux triangles CDH, EDI, FCI, du quadrilatère complet CDEFIH se coupent au point N.

La circonférence circonscrite au triangle FCI passe donc par les points L, N.

Les circonférences ABF, FCI ayant un point commun L avec la circonférence qui passerait par les points L, N, Q, et la droite FAI passant par l'intersection F des deux premières circonférences, il en résulte que si l'on joint les points A, I, aux intersections de ces deux lignes avec la troisième, les droites QA, IN prolongées, se coupent sur cette troisième circonférence.

En considérant le triangle ARI, et les points Q, N, E, situés sur les trois côtés, on reconnaît que les circonférences QRN, NEI, QEA, doivent se couper en un même point; donc la circonférence QLN passe au point P, intersection des circonférences DEI, AEK.

On reconnaîtrait de la même manière que cette ligne contient aussi le point M : ainsi les cinq points L, M, N, P, Q appartiennent à une même circonférence.

**737 c. Note.** La démonstration ci-dessus est empruntée à CATALAN (*Théorèmes et Problèmes,* 6e édition, 1879, ch. XXVII, p. 50). M. PAUL TERRIER procède autrement (*N. A.,* 1895, p. 1*); il démontre en outre que la même propriété a lieu pour le *pentagone étoilé;* enfin il généralise la question (pp. 1 à 5). Antérieurement, G. DE LONGCHAMPS avait obtenu des résultats fort remarquables et très généraux pour des questions analogues (*Nouvelle correspondance mathématique,* 1877, p. 306 et 340).

La démonstration de JOHN CASEY est dans ses Éléments d'Euclide (*A Sequel to the first six books of the Elements of Euclid,* 6e édition, no 42, p. 151).

On peut voir, comme documentation, l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1896, p. 82, question 809, J. d'AVILLEZ, Vte DE ROGUENGO (Portalegre).

Le savant M. S. KANTOR, de Vienne, a utilisé le *Cercle de Miquel du Pentagramme* pour l'étude de l'hypocycloïde à trois rebroussements (*Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques,* 1879, p. 138).

## Polygones circonscrits au cercle.

**738.** Les exercices relatifs aux polygones circonscrits demandent fréquemment l'emploi du théorème suivant :

*Les tangentes qui partent d'un même point sont égales. L'angle qu'elles forment entre elles est le supplément de l'angle des rayons de contact* (G., no 192).

### Théorème 153.

**739.** *Un angle quelconque* A *étant formé par deux tangentes* AD *et* AE *à une même circonférence, si l'on mène une troisième tangente* BC *mobile du côté du sommet, le triangle* ABC *ainsi formé a un périmètre constant,*

*Et l'angle au centre* BOC, *sous lequel est vue cette tangente mobile, est constant.*

*Examiner le cas où l'on mènerait la tangente à l'opposé du sommet en* B'C'.

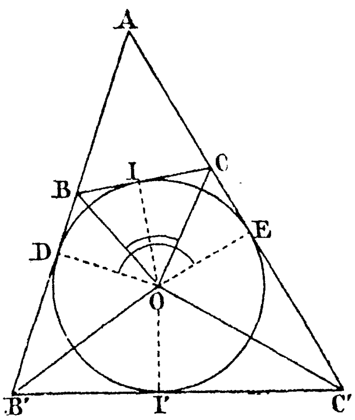


Fig. 436.

1o Menons les rayons OD, OE, OI, aux points de contact des tangentes.

On a BI = BD et CI = CE, comme tangentes issues d'un même point. Donc le périmètre du triangle ABC égale la somme des tangentes AD et AE, quantité indépendante de la position de BC.

2o La droite OB est bissectrice de l'angle DOI formé par les rayons qui vont aux points de contact (G., no 192), et de même OC est bissectrice de l'angle IOE. Donc l'angle BOC est la moitié de l'angle total DOE, lequel est constant et égal au supplément de A.

*Remarque.* L'angle $BOC + B'OC' = 180°$.

Si l'on considère la tangente $B'C'$, on voit qu'il faut retrancher cette droite $B'C'$ de la longueur $AB' + AC'$ pour avoir la valeur constante $AD + AE$.

Quant à l'angle $B'OC'$, il est constant, car il est la demi-somme des angles constants DOI' et EOI'.

On a donc le théorème suivant :

**Théorème 153. — I.**

**740.** *Lorsqu'un triangle circonscrit à un cercle donné a un angle constant, la somme des côtés qui comprennent cet angle, diminuée du côté opposé, est une quantité constante.*

*Le côté opposé est vu du centre sous un angle constant.*

**Note.** Le théorème de l'angle au centre constant, qui correspond à une tangente mobile, limitée à deux tangentes fixes, est de PONCELET. (*Traité des propriétés projectives des figures,* nos 462 et 463.)

L'illustre auteur en a déduit de belles propriétés relatives aux coniques. (G., no 633; *Exercices,* nos 2110, 2112.)

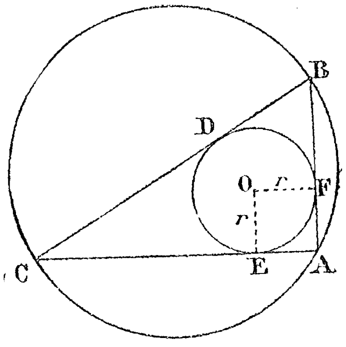


Fig. 437.

**Théorème 154.**

**741.** *Dans un triangle rectangle* ABC, *la somme des côtés de l'angle droit égale la somme des diamètres des deux circonférences inscrite et circonscrite.*

En joignant les trois points de contact au centre, on reconnaît que $b + c$ égale l'hypoténuse plus $2r$ ou $2R + 2r$.

*Remarque.* Le rayon du cercle inscrit est la moitié de la différence entre la somme des côtés de l'angle droit et l'hypoténuse.

**Théorème 154. — I.**

**742.** *Le rayon du cercle exinscrit tangent à l'hypoténuse d'un triangle rectangle, égale la somme des rayons des deux autres cercles exinscrits et du rayon du cercle inscrit.*

Il faut prouver qu'on a :

$$EL = FP + GK + IT,$$

ou

$$AL = AJ + AN + AM.$$

Il suffit donc de démontrer que $AM = NB$ et que $AJ = BL$.

1o
$$AM + AN = KT,$$
et
$$BM + BN = OV,$$
mais
$$KT = OV,$$
donc
$$AM + AN = BM + BN,$$
d'où
$$AM = BN.$$

2o Le triangle EBF est rectangle et isocèle, car l'angle EBF est droit comme angle des bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires (nº 402), et l'angle BEF égale 45°, puisque EF et EG sont bissectrices des angles complémentaires RES, SEL.

Donc BE = BF.

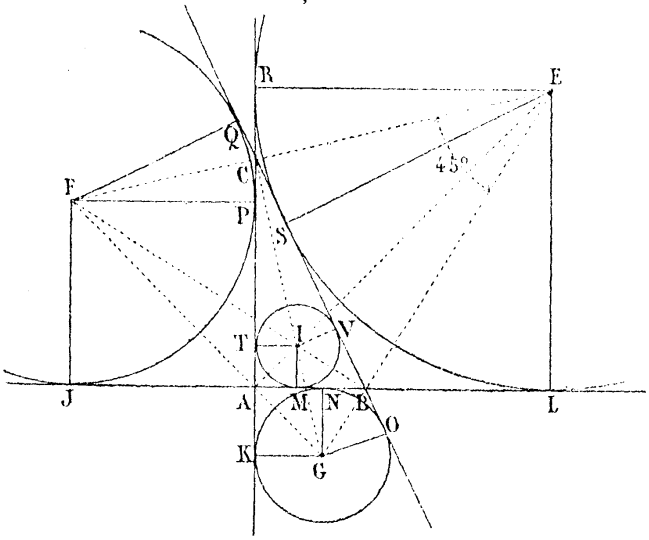



Fig. 438.

Les triangles rectangles BEL, BFJ sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et les angles aigus égaux, car les angles EBL et FBJ sont complémentaires, puisque EBF est droit; donc BL = AJ.

Ainsi EL ou AL = AN + BN + BL = GN + IM + FJ.

**Théorème 154. — II.**

**743.** *Dans tout triangle, le cercle inscrit détermine sur le périmètre de ce triangle six segments égaux deux à deux. En représentant par* p *le demi-périmètre, les trois segments distincts ont respectivement pour valeur :* p — a, p — b, p — c.

En effet, pour AL par exemple, on a successivement :

$$AL + AN = AB + BC + CA - (LB + BM + MC + CN),$$

ou $2l = 2p - (2m + 2n)$;

d'où $l = p - a$.

On aurait de même :

$$m = p - b\,; \quad n = p - c.$$

*Remarque.* 1º AE = AH = $p$.

2º LE = NH = $a$.

3º BM = FC, car LE = BM + BF

et NH = CF + CM.

4º FM = $a - 2m$;

ou bien FM = $b - c$.

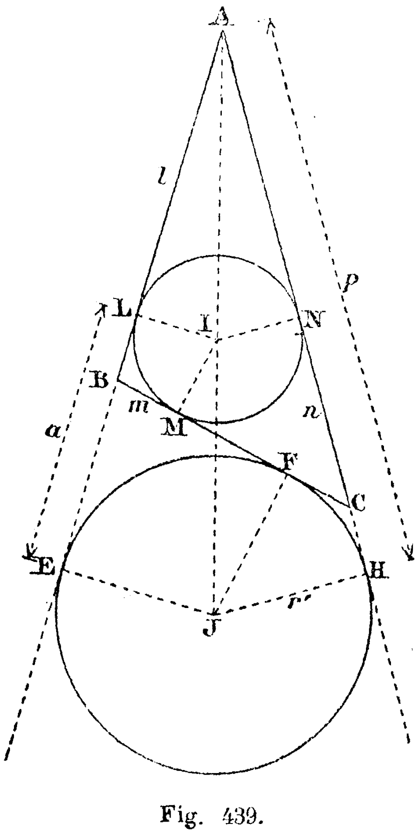



Fig. 439.

### Théorème 154. — III.

743 a. *Lorsque les côtés égaux* AM, AN *d'un triangle isocèle* MAN *sont coupés par un segment rectiligne* BC, *de manière que* BC = BM + CN, *le cercle* O *tangent aux côtés égaux en* M *et* N *est aussi tangent à* BC.

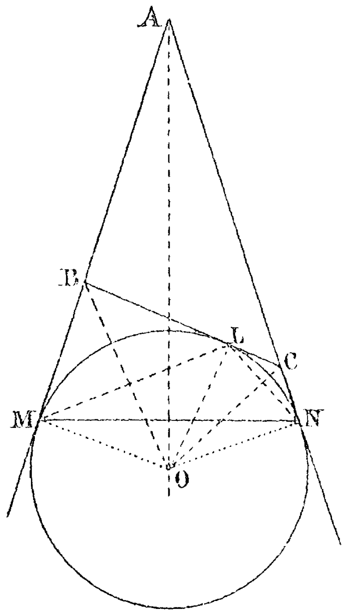


Fig. 440.

1re *Démonstration.* Prenons BL = BM, alors LC = CN.

Les médiatrices du triangle MLN se coupent en un point O équidistant des trois sommets; il faut prouver que le cercle qui passe par L, M, N est tangent aux trois droites AM, AN et BC.

Les médiatrices du triangle LMN sont en même temps les bissectrices des angles A, B, C, parce que les triangles MAN, MBL, LCN sont isocèles; donc les angles en L, OLB, OLC sont égaux entre eux comme étant respectivement égaux aux angles OMA et ONA égaux entre eux; donc ces quatre angles sont droits, et l'arc MLN est tangent à MB, à BC et à CN.

2e *Démonstration.* Par réduction à l'absurde, on démontre facilement le théorème, mais c'est peu élégant.

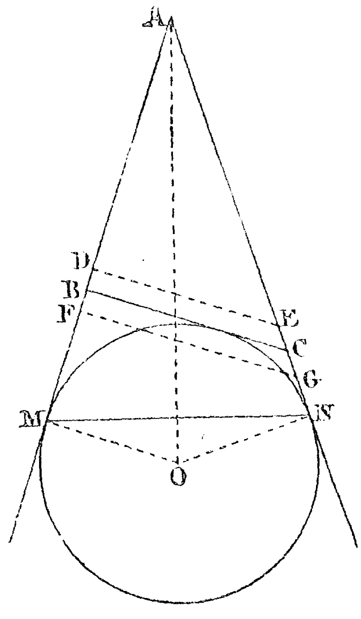


Fig. 441.

Soit le cercle de centre O, tangent aux côtés de l'angle A en M et N. Si la ligne BC n'était pas tangente au cercle, elle aurait une position telle que DE ou FG; or dans le premier cas DE est < BC, tandis que

$$DM + EN > BM + CN,$$

donc $\quad DE < DM + EN,$

de même, $\quad FG > FM + GN,$

ce qui est contraire aux données; il faut donc que BC soit tangent au cercle O.

### Théorème de Pitot 155.

744. *Dans tout quadrilatère circonscrit, la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres côtés.*

Car les tangentes menées d'un même point à un même cercle sont égales.

Note. * PITOT (1695-1771), ingénieur en Languedoc, auteur de la *Théorie de la manœuvre des vaisseaux;* on connaît le *Tube de Pitot,* pour mesurer la vitesse des cours d'eau. (Voir *Éléments de topographie,* par Edmond GABRIEL, p. 524, nº 948.)

### Théorème réciproque 156.

745. *Si un quadrilatère* ABCD *est tel que la somme de deux côtés opposés* AB *et* CD *soit égale à la somme des deux autres côtés* BC *et* AD, *ce quadrilatère est circonscriptible à un cercle.*

1re *Démonstration.* Pour le prouver, menons une circonférence tangente aux trois côtés AB, BC et CD, puis une droite AD′ tangente à cette circonférence.

Le quadrilatère ABCD′ donne :

$$AB + CD' = BC + AD'.$$

Mais on a supposé que

$$AB + CD = BC + AD.$$

En soustrayant membre à membre, il viendrait :

$$DD' = AD - AD'.$$

Or un côté d'un triangle ne peut être égal à la différence des deux autres; le triangle ADD′ est donc impossible : AD se confond nécessairement avec AD′, et le quadrilatère considéré est circonscriptible.

2e *Démonstration.* Menons les bissectrices des angles A et D, par exemple (fig. 442); décrivons le cercle de centre O tangent à trois côtés du quadrilatère en M, K, N. Ce même cercle est tangent au quatrième côté BC.

En effet, en prenant BL = BM, on a : CL = CN, et le cercle qui passe

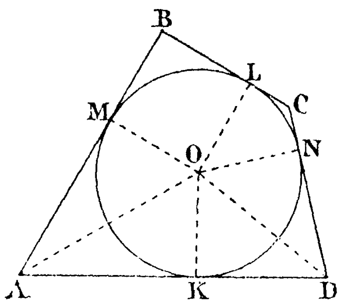



Fig. 442.

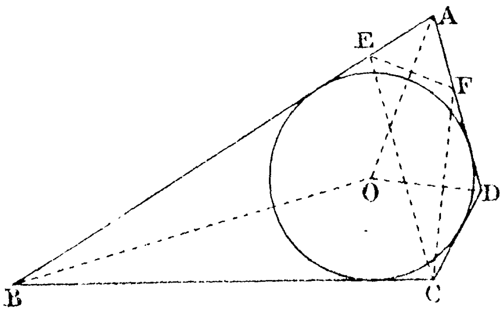



Fig. 443.

par M, L, N est tangent à BC et aux côtés latéraux en M, N; par conséquent, il a O pour centre, OM pour rayon, et se confond avec le premier cercle décrit.

*Démonstration directe.* Soit AB + CD = BC + DA (fig. 443).

Si AB > BC, écrivons : AB — BC = AD — DC.

Réalisons ces différences en prenant sur BA la longueur BE = BC, sur DA la longueur DF = DC; nous formons ainsi trois triangles isocèles BCE, AEF, DCF, dans lesquels les bissectrices des angles au sommet B, A, D sont perpendiculaires aux milieux des côtés opposés EC, EF, CF. Ces perpendiculaires considérées par rapport au triangle CEF concourent en un même point O, qui est équidistant des côtés du quadrilatère ABCD. — FRICKE de Brême; L. GÉRARD. (*Mathesis*, 1904, pages 13, 2° et 67, n° 10.)

**745 a. Note.** Dans les *Annales de Gergonne,* tome VI, 1815-1816, J.-B. DURRANDE démontre directement le théorème réciproque et prouve qu'il est vrai aussi pour le quadrilatère gauche et pour le quadrilatère sphérique. (Page 46 du tome VI.)

Ces théorèmes conduisent aux suivants : *Lorsque quatre cercles sur un plan, ou sur une sphère, sont tangents deux à deux, les quatre points de contact appartiennent à un même cercle.*

* J.-B. DURRANDE (1797-1825), bien qu'il soit mort prématurément, a donné de nombreux et intéressants articles aux *Annales de Gergonne;* il était professeur à Cahors.

* HENRI DURRANDE, de la même famille, né à Marmande, et mort récemment dans cette ville après avoir été recteur à Poitiers, auteur d'une étude sur la *surface des ondes*, a donné plusieurs articles aux *Nouvelles Annales mathématiques de Gérono.*

### Théorème 157.

746. *Lorsque le cercle tangent aux quatre côtés d'un quadrilatère est extérieur à cette figure, la différence des deux côtés opposés de ce quadrilatère égale la différence des deux autres côtés.* (STEINER, *Journal de Crelle,* 1846.)

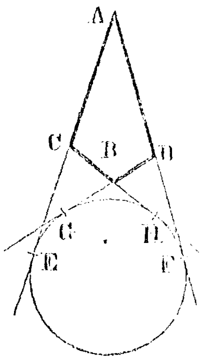


Fig. 444.

Soit $AE = AF = a, \quad BG = BH = b,$

$CE = CH = c, \quad DF = DG = d.$

On a : $AC = a - c$ et $DB = d - b;$

d'où $AC - DB = a + b - c - d,$

$AD = a - d$ et $CB = c - b;$

d'où $AD - CB = a + b - c - d.$

Donc $AC - DB = AD - CB.$

### Théorème 158.

747. *Dans le quadrilatère excirconscrit, on a deux côtés adjacents dont la somme égale celle des deux autres.*

Réciproquement, *quand ces sommes sont égales, le quadrilatère est excirconscriptible.*

On a (fig. 445) :

$$AC + CB = a - c + c - b,$$
$$AD + DB = a - d + d - b.$$

Donc $AC + CB = AD + DB.$

Le réciproque est analogue à celle de la question connue (nº 745).

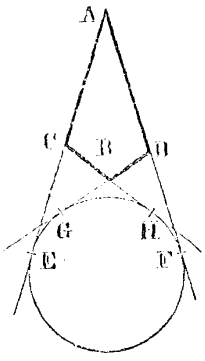


Fig. 445.

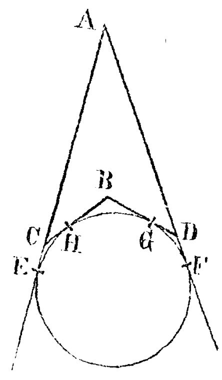


Fig. 446.

*Remarque.* Le théorème est vrai pour un quadrilatère non convexe.

$$AC + CB = a - c + c + b,$$
$$AD + DB = a - d + d + b;$$

d'où $AC + CB = AD + DB.$

On a aussi : $AC - BD = AD - BC.$

**748 Note.** Le *Théorème de Pitot* (n° 745) remonte à 1725. Il a été complété en 1846, par STEINER (cit. de BALTZER, § 4, n° 10. — *Nouvelles Annales*, 1849, p. 367). M. G. DARBOUX en a fait une étude complète dans le *Bulletin des sciences mathématiques et physiques*, 1879, p. 64. Il parvient au théorème suivant : *Étant donné un quadrilatère* ABCD *circonscriptible à un cercle, et qui se déforme de telle manière que les sommets* A et B *demeurent fixes, les grandeurs des côtés étant invariables, le lieu du centre du cercle inscrit est un cercle ayant pour diamètre le segment qui divise harmoniquement les deux diagonales* AC, BD *du quadrilatère, quand il est amené dans la position où il a ses quatre sommets en ligne droite.*

Pour le *théorème de Pitot* et sa réciproque, on peut voir aussi l'étude élémentaire fort complète due à M. COISSARD, page 214, n° 65, année 1895-96 du *Bulletin de mathématiques élémentaires*. Voir aussi l'étude de M. TH. CARONNET. (*Journal de mathématiques de M. Vuibert*, 1er novembre 1902.)

* M. G. DARBOUX, membre de l'Académie des Sciences, auteur de nombreuses études mathématiques; nous aurons à le citer à propos des *Inverseurs* (n° 1203), de même que nous avons eu à le citer dans les *Exercices de Géométrie descriptive*, 4e édition, nos 935, 936, *sections du tore*.

## Théorème 159.

**749.** *Lorsqu'un quadrilatère inscriptible a ses diagonales rectangulaires, le quadrilatère formé en joignant deux à deux les projections du point de concours des diagonales, sur les côtés de la figure donnée, est à la fois inscriptible et circonscriptible.*

*La circonférence qui passe par les quatre projections passe aussi par les quatre points milieux des côtés du quadrilatère donné.*

Soient ABCD le quadrilatère donné, O le centre du cercle circonscrit EFGH la nouvelle figure obtenue. Les quadrilatères AHME, EBFM, etc., sont inscriptibles.

Donc l'angle HEM = HAM,

FEM = FBM.

Mais HAM = FBM,

car ces angles ont pour mesure $^1/_2$ DC.

Donc HEM = FEM.

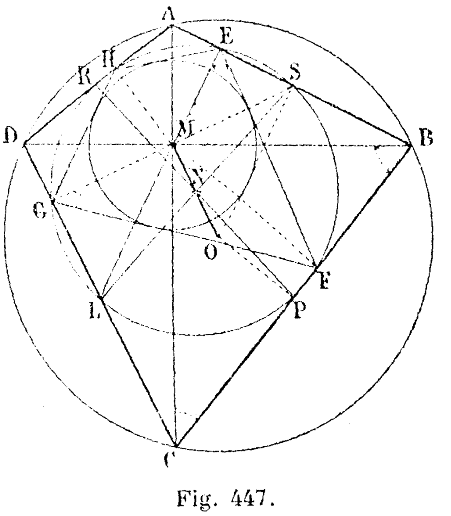



Fig. 447.

Ainsi EM est bissectrice de l'angle FEH; de même FM est bissectrice de l'angle F. Donc le quadrilatère EFGH est circonscriptible, car les quatre bissectrices se coupent au même point M.

1° Les angles

HEF + HGF = 2 (MBF + MCF).

Mais le triangle MBC est rectangle ; donc MBF + MCF = 1 droit.

Ainsi HEF + HGF = 2 droits, et le quadrilatère EFGH est inscriptible.

2° Joignons le point M au point L milieu de DC, et prouvons que ML est dans le prolongement de EM.

Dans le triangle rectangle CMD, la médiane LM = LC; donc

l'angle LMC = LCM = MBA = AME.

(Ces deux derniers sont complémentaires du même angle MAE.)

Les angles égaux LMC et AME prouvent que le prolongement de ME passe par le milieu de DC; de même pour les autres lignes. A cause des angles droits LES et LGS, ces points appartiennent à la circonférence décrite sur LS comme diamètre.

De même F et H appartiennent à la circonférence décrite sur le diamètre RP.

Mais le parallélogramme LRSP est rectangle, car ses côtés sont parallèles à AC et à DB; donc LS = RP, et les huit points appartiennent à une même circonférence.

Le centre N du cercle des *huit points* du quadrilatère ABCD est au milieu de MO.

Le point N est aussi le centre des moyennes distances des sommets du quadrilatère ABCD.

(*Mathesis*, 1904, p. 238, nº 1170. BARISIEN.)

**749 a. Note.** La question ci-dessus a été proposée en 1870, au *Concours général* pour les *mathématiques élémentaires* (*N. A.*, 1870, p. 383). Diverses propriétés sont connues depuis fort longtemps, d'autres ont été indiquées par M. SANCERY (*N. A.*, 1871, p. 487); on y trouve notamment les suivantes : 1º *La distance d'un côté d'un quadrilatère inscrit au centre du cercle circonscrit, égale la moitié du côté opposé* (p. 492, *Remarque*); 2º Le quadrilatère inscrit ABCD et le circonscrit qu'on obtient en menant des tangentes par les sommets A, B, C, D sont tels que les quatre points de concours des côtés opposés sont sur une même droite, et cette ligne est la polaire du point M par rapport au cercle circonscrit ABCD; 3º le quadrilatère circonscrit dont A, B, C, D, sont les points de contact est semblable au quadrilatère EFGH, etc.

La deuxième propriété montre que ABCD est un cas particulier du *quadrilatère harmonique,* considéré de nos jours dans la *Géométrie du triangle,* et que M est son *point de Lemoine;* mais rien n'indique la propriété fondamentale de ce point. Dans ses *Théorèmes et Problèmes de Géométrie,* 6e édition, en 1879, p. 134, M. CATALAN se borne à établir que les distances du point M à deux côtés opposés, tels que AB, CD, sont dans le même rapport que ces deux côtés, ce qui résulte immédiatement des triangles équiangles AMB, DMC.

Le quadrilatère inscrit jouit d'un grand nombre de propriétés, dont plusieurs sont connues depuis longtemps (Voir *Annales de Gergonne,* tome XV, 1824-1825, p. 133, article de DURRANDE); d'autres ont été indiquées plus récemment (Voir *Intermédiaire des Mathématiciens,* 1902, page 100, nº 279. V. AUBRY). — *Mathesis* indique aussi diverses propriétés du quadrilatère inscriptible : voir notamment 1902, p. 173, question 1194, par M. E. LEMOINE, 1906, p. 14, par J. NEUBERG.

Le quadrilatère à la fois inscriptible et circonscriptible est appelé parfois *quadrilatère bicentrique* (*Mathesis,* 1904, p. 103, nº 1465). Voir d'ailleurs, dans les *E. de G.,* les propriétés que possèdent les quadrilatères inscriptibles, nºˢ 1276, 1277, et 1277 **b**.

**Théorème. 159. — I.**

**749 b.** *Sur chacun des côtés d'un quadrilatère circonscriptible on construit deux triangles isocèles semblables. Soient* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *les points de rencontre des hauteurs des triangles extérieurs ;* $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ *ceux des hauteurs des triangles intérieurs.*

1º *Les médianes des deux quadrilatères,* $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ *se coupent en un même point qui est leur milieu.*

2º *Les médianes du quadrilatère* $\alpha\beta\gamma\delta$ *se coupent à angle droit.*

3º *Dans le cas du triangle, un des sommets du quadrilatère donné* *devient le point de contact de l'un des côtés du triangle avec le cercle inscrit.* Les deux propriétés précédentes *subsistent.*

*On demande quand les trois conditions sont remplies* (*N. A.* 1872, p. 480, n° 1099 H. BROCARD).

Solution par MORET-BLANC, 1878, p. 40.

La première partie peut être énoncée comme il suit : *Sur chacun des côtés d'un quadrilatère quelconque, on construit à l'extérieur et à l'intérieur des triangles isocèles semblables ayant pour sommets* A, B, C, D et A', B', C', D'; *les médianes des deux quadrilatères* ABCD, A'B'C'D' *se coupent en un même point* M.

### Théorème 160.

**750.** *Par le centre d'un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés, on mène une droite quelconque* XY ; *la somme des perpendiculaires abaissées des sommets situés d'un côté donné de la droite égale la somme des perpendiculaires abaissées des sommets situés de l'autre côté de cette droite.*

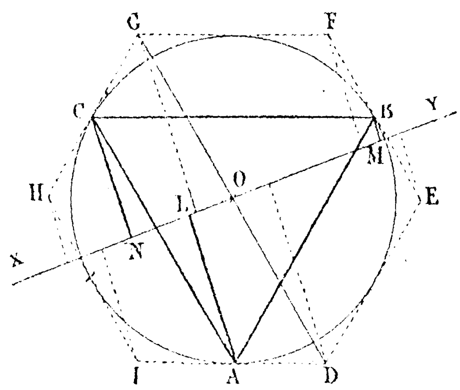


Fig. 448.

1° C'est évident quand le polygone a un nombre pair de côtés.

2° Si le polygone a un nombre impair de côtés, trois par exemple, circonscrivons une circonférence au triangle équilatéral donné ABC; puis, par les sommets A, B, C et les milieux de chaque arc, menons des tangentes afin de former un hexagone régulier circonscrit. (G., n° 161.)

Désignons chaque perpendiculaire par une lettre rappelant le sommet d'où elle est abaissée.

Il faut prouver qu'on a $\quad AL = BM + CN \quad$ ou $a = b + c$.

Or on sait que la perpendiculaire menée par le point milieu d'une droite est la demi-somme ou la demi-différence, suivant le cas, des perpendiculaires abaissées des extrémités de la droite (n° 436).

Donc $$a = \frac{d+i}{2}, \quad b = \frac{f-e}{2}, \quad c = \frac{h+g}{2},$$

$$b + c = \frac{f+g+h-e}{2} = \frac{f+g}{2}, \quad \text{car} \quad h = e \quad (1^{\text{o}}).$$

Donc cette somme égale $a$, car $d = g$ et $i = f$.

Ainsi $$AL = BM + CN.$$

*Remarques.* 1° On aurait de même $OM = OL + ON$, en projetant les sommets sur un axe parallèle à AL.

2° Le centre des moyennes distances des sommets est le centre même du polygone.

**Théorème japonais 160. — I.**

**750 a.** *Dans un quadrilatère inscriptible, la somme des rayons des cercles inscrits aux deux triangles que détermine une diagonale, égale la somme des rayons des cercles inscrits dans les deux triangles que détermine l'autre diagonale.*

Soient $r_1$, $r_2$, $r_3$, $r_4$, les rayons des cercles inscrits aux triangles qui ont respectivement pour sommet A, B, C, D, et $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$, $d_5$, $d_6$, les distances du centre O du cercle circonscrit, aux côtés AB, BC, CD, DA et aux diagonales AC et BD. En tenant compte de l'importante *Remarque* du nº 737, on aura :

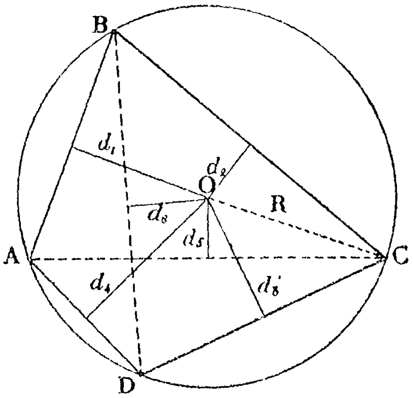


Fig. 448 *bis*.

$$R + r_1 = d_1 + d_2 + d_5$$
et
$$R + r_3 = d_3 + d_4 - d_5;$$
d'où
$$r_1 + r_3 = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 - 2R.$$
De même
$$r_2 + r_4 = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 - 2R;$$
donc
$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4.$$

*Remarque.* Le théorème est vrai pour un polygone inscrit d'un nombre quelconque de côtés.

**750 b. Note.** 1º Le théorème a d'abord été présenté comme d'origine chinoise, par M. Y. Mikami, de Tokio (*Mathesis,* 1905, p. 268, nº 26); puis M. T. Kayáshi, professeur à l'école normale de Tokio, a établi qu'il venait originairement du Japon. (*Mathesis,* 1906, pp. 257 à 260.)

2º Les centres des quatre cercles considérés dans le quadrilatère sont les sommets d'un rectangle (nº 710 **b.**)

## Lignes concourantes.

**751.** Pour démontrer que plusieurs droites concourent au même point, on utilise les remarques déjà faites (livre I, nº 439).

Divers théorèmes établis au livre II fournissent de nouveaux éléments de démonstration. (Voir Exercices 163, 164, nºs 757, 758.)

**Théorème 161.**

**752.** *D'un point quelconque, on abaisse des perpendiculaires sur trois droites données; la circonférence qui passe par les trois pieds des perpendiculaires coupe les droites données en trois autres points qui sont aussi les projections d'un même point.*

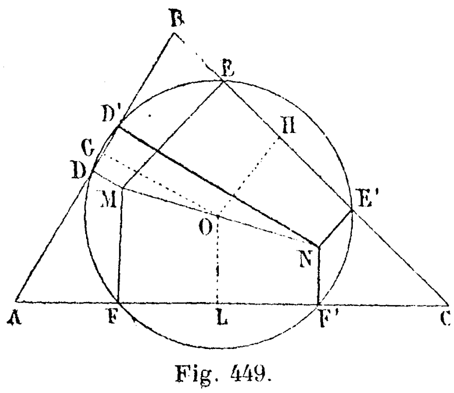


Fig. 449.

Soient M le point et D, E, F ses projections sur les côtés du triangle ABC; les trois autres points d'intersection D', E', F' sont aussi les projections d'un même point N.

En effet, joignons M au centre O du cercle qui passe par D, E, F. Prenons ON = OM. La droite NF' est perpendiculaire à AC, car $LF' = LF$ ; donc NF' est parallèle à MF; de même pour NE' et ND' ; donc...

*Remarque.* Quel que soit le nombre des côtés d'un polygone qu'une circonférence coupe en A, A'... D, D', etc., si les points A, B, C, D, etc., sont les projections d'un même point, il en est de même des points A', B', C', D', etc.

**Théorème 161. — I.**

**753.** *Les droites* AM, AN *sont également inclinées sur les côtés* AB, AC. *Il en est de même de* BM, BN *sur* BA, BC, *etc.* (fig. 449 et 450).

Les quadrilatères ADMF et AD'NF' sont inscriptibles, donc

$$1 = 1' \quad \text{et} \quad 2 = 2'.$$

Le quadrilatère ADMF, AF'ND' sont semblables, car ils sont équiangles, et l'on a en outre :

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AF'}{AD'};$$

donc l'angle $1 = 2$; par suite, $1' = 2'$.

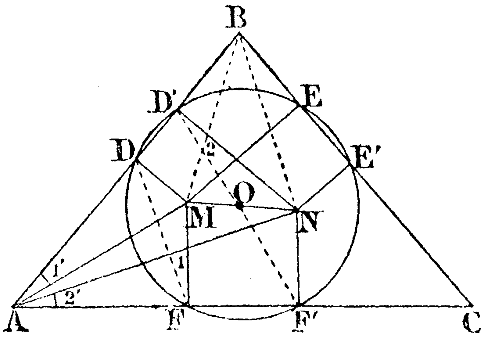


Fig. 450.

On aurait de même :

angle $ABM = CBN$

et angle $ACM = BCN$.

**Note.** Les droites AM, AN sont nommées *isogonales,* de même pour les deux autres couples; les points M et N sont dits *isogonaux.* (Voir ci-après nos 1118 a, 1344 a, et 2307.)

**Théorème 162.**

**754.** *Sur chaque côté d'un triangle, on construit un triangle équilatéral et l'on joint le troisième sommet de chacun de ces triangles au sommet opposé du triangle primitif; démontrer :*

1° *Que les trois droites ainsi menées sont égales entre elles;*

2° *Qu'elles se coupent au même point.*

1° Les triangles FAC, BAE sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux.

L'angle $FAC = BAE$, puis l'arc $FA = BA$, et $AC = AE$.

Donc $FC = BE$; on aurait de même $FC = AD$.

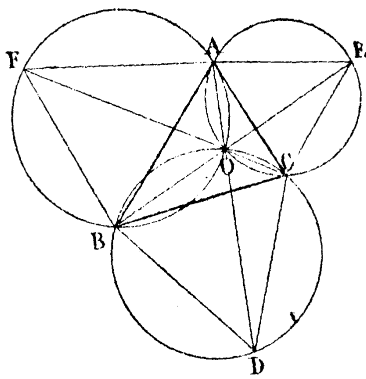


Fig. 451.

2° Les circonférences circonscrites aux deux triangles équilatéraux ABF, AEC se coupent en un point O, tel que les angles AOB, AOC sont égaux entre eux et valent 120°, comme suppléments des angles F, E qui valent 60°; donc l'angle BOC égale aussi 120°, et la circonférence circonscrite au triangle équilatéral BDC passe par le point de concours O des deux premières.

Joignons ce point O aux six sommets; pour démontrer la seconde partie du théorème, il suffit de prouver que OF et OC sont en ligne droite.

Or chaque angle formé autour du point O vaut 60°, car l'arc BF est le tiers de la circonférence, etc.; donc la somme des trois angles FOB, BOD, DOC vaut 180°, et les côtés extérieurs OF et OC sont en ligne droite.

*Remarques.* 1° Chaque côté du triangle ABC est vu du point O sous un même angle.

2° Le théorème est encore vrai lorsque chaque triangle équilatéral tel que ABF est rabattu sur ABC, au lieu d'être placé à l'extérieur, comme dans la figure précédente.

3° Le théorème subsiste lorsqu'on construit extérieurement sur chaque côté de ABC des triangles semblables, de telle manière que chacun des angles adjacents au sommet A soit égal à l'angle C; que chacun des angles adjacents à B soit égal à A, et chaque adjacent à C soit égal à B. (J.-M. DE BOURGET, 1879, p. 58.)

**754 a. Cas particulier.** Les trois sommets A, B, C, peuvent être en ligne droite (fig. 451 *bis*).

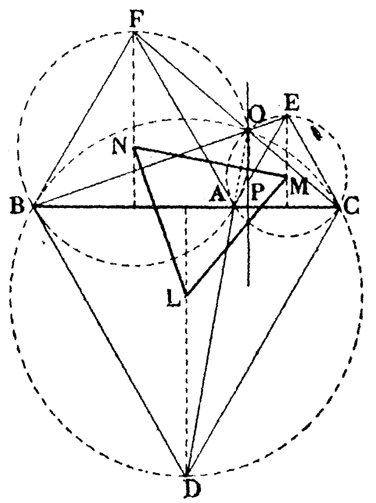



Fig. 451 *bis*.

Les angles

$$AOB = AOC = 60°, \quad BOC = 120°;$$

mais on a encore :

$$AD = BE = CF.$$

Lorsque les points D, E, F, sont les sommets de triangles isocèles semblables, mais dont l'angle à la base est quelconque, le lieu du point O est une perpendiculaire à BC.

Ainsi que dans une question qui sera étudiée plus tard, en joignant deux à deux les trois centres des triangles équilatéraux, on obtient un triangle équilatéral LMN (n° 1140 **a**).

Il en est de même pour le cas général (n° 754).

**755 Note.** 1° Les cercles circonscrits aux triangles équilatéraux ont été nommés *cercles de Torricelli* par M. NEUBERG.

Dans la nouvelle terminologie du triangle, le point de concours des circonférences circonscrites aux triangles extérieurs est désigné par $z$, et celui des triangles intérieurs par $z'$; ces deux points sont nommés *centres isogones* du triangle.

Le point $z$ est le point dont la somme des distances aux trois sommets du triangle donné est minima. La recherche du point donnant ce minima avait été proposée par FERMAT à TORRICELLI; ce dernier en donna plusieurs solutions. (*Mathesis,* 1889, p. 173, *renvoi,* et 1899, p. 131; *Généralisation d'un problème classique de minimum.*)

2° La question précédente (n° 754) a été traitée par LAMÉ, dans son *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie,* p. 82. — M. BOUTIN a parlé des *Centres isogones* dans divers articles du *J. M. E.*, DE LONGCHAMPS, 1889, p. 99, etc.

* TORRICELLI (1608-1647), connu surtout pour ses découvertes en physique.

### Théorème 162. — I.

**756.** *On peut construire un triangle* ABC, *connaissant les sommets* $A_1$, $B_1$, $C_1$, *des triangles équilatéraux construits sur les côtés.* (E. LEMOINE.)

Construire sur $A_1$, $B_1$, $C_1$ les triangles équilatéraux $A_1B_1C_2$, $A_1C_1B_2$, $B_1C_1A_2$;

les milieux de $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ sont les sommets A, B, C du triangle cherché. (KIEPERT.)

*Remarque.* Si les triangles équilatéraux sont construits extérieurement et intérieurement et ont pour centres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, les deux triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ sont équilatéraux. (LIONNET.)

**Note.** On peut voir à ce sujet les *N. A. Mathématiques,* 1869, p. 40 et 528; l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1902, p. 332, nº 2422, et *Mathesis,* 1889, p. 173; 1899, p. 131.

* LIONNET, professeur à Louis-le-Grand, auteur de questions et de solutions dans les *N. A.* pendant plus de quarante ans.

* KIEPERT, étudiant à Berlin en 1869, et dont une *hyperbole* rappelle le nom.

### Théorème 163.

**757.** *Les perpendiculaires abaissées des centres des cercles exinscrits sur les côtés du triangle se coupent au même point.*

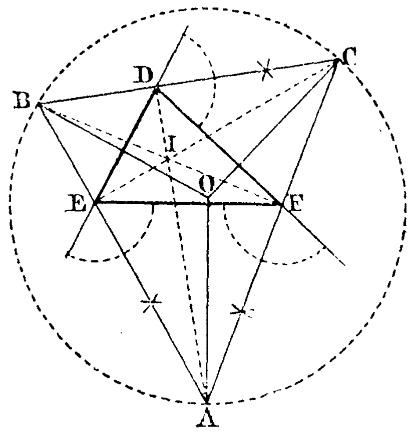


Fig. 452.

Soit DEF le triangle donné.

Le triangle orthique DEF, formé en joignant deux à deux les pieds des hauteurs d'un triangle ABC, a ces hauteurs pour bissectrices intérieures et les côtés de ABC pour bissectrices extérieures (nº 662); donc réciproquement, par rapport au triangle donné DEF, les points A, B, C sont les centres des cercles exinscrits.

Mais les rayons qui joignent les sommets d'un triangle ABC au centre du cercle circonscrit sont respectivement perpendiculaires aux droites DE, EF, FD qui joignent deux à deux les pieds des hauteurs de ABC (nº 663); donc les perpendiculaires abaissées des centres A, B, C des cercles exinscrits à DEF, ne sont autres que les rayons AO, BO, CO de la circonférence circonscrite à ABC; donc ils se coupent au même point O, et ce point est équidistant des trois centres donnés.

On peut démontrer le théorème proposé sans recourir au *Théorème de Nagel* (nº 663). Voir nº 1246, 2e *Démonstration.*

757 **a. Note.** 1º Les triangles ABC, DEF tels que les perpendiculaires abaissées des sommets de l'un d'eux sur les côtés de l'autre, et réciproquement, concourent en un même point, ont été nommés *triangles orthologiques* (*J.M.S.*, 1889, p. 63). Ces triangles ont été surtout étudiés par M. LEMOINE, principal instigateur des questions actuellement connues sous le nom de *Géométrie du triangle.* (*A. F.,* 1890 pp. 111 à 146.)

2º *Triangles parallélogiques.* Si deux triangles ABC, A'B'C' sont tels que les droites menées par les sommets A, B, C, respectivement parallèles aux côtés B'C', C'A', A'B', se coupent en un même point P, les droites menées par A', B', C', parallèlement à BC, CA, AB, se coupent en un même point P', les triangles sont appelés parallélogiques. Ils ont été étudiés par M. J. NEUBERG, (*Mathesis,* 1882, p. 144, questions 150 et 1883, p. 86); puis par M. RIPERT (*A. F.,* 1901, Ajaccio, p. 91).

3º Les triangles *orthologiques* et *parallélogiques* sont des cas particuliers des triangles *isogonologiques* de M. DURAN-LORIGA, commandant d'artillerie en retraite à La Corogne (Espagne). (*A. F.* 1902, Montauban, pp. 157 à 165.)

**Théorème 164.**

**758.** *Trois cercles* L, M, N *sont situés dans un même plan; si trois tangentes intérieures communes aux cercles pris deux à deux passent par un même point, les trois autres tangentes communes passent aussi par un même point.* (Mannheim. — *N. A.*, 1864, p. 210.)

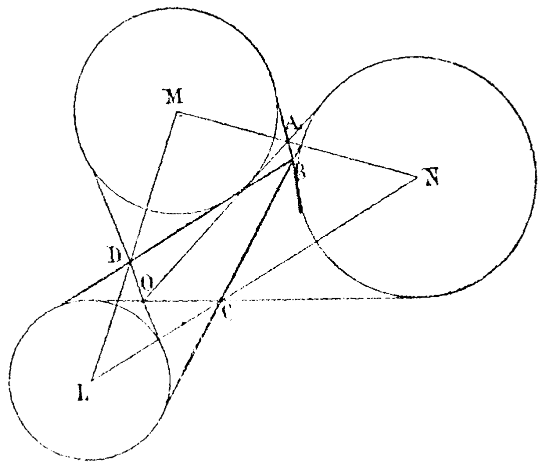


Fig. 453.

Supposons que trois tangentes intérieures se coupent en B. Soit O le point de rencontre de deux autres tangentes CO, OA. Par ce point, menons au cercle M la tangente OD; il suffit de prouver que OD est tangente au cercle L, pour que le théorème soit démontré.

Lorsqu'un quadrilatère est excirconscrit à un cercle, la somme de deux côtés adjacents égale la somme des deux autres côtés, et réciproquement (nº 747).

Or le quadrilatère BCOA est excirconscrit au cercle N; on a donc :

$$BC + CO = BA + OA.$$

Le quadrilatère BDOA est excirconscrit au cercle M; donc

$$BA + AO = OD + BD,$$

d'où
$$BC + CO = OD + BD.$$

Donc le quadrilatère BCOD est excirconscriptible, et comme trois de ses côtés sont tangents au cercle L, il en est de même du quatrième OD; donc...

**Théorème 164. — I.**

**758 a.** *Si une tangente intérieure du groupe* L, M, *une tangente extérieure de* M, N, *une extérieure de* N, L, *passent par un même point, il en est de même de la seconde tangente intérieure* L, M *et des autres tangentes extérieures des groupes* M, N *et* N, L.

Démonstration ci-dessus.

**Théorème 164. — II.**

**759.** *Les perpendiculaires abaissées du point milieu de chaque côté du triangle orthique, sur le côté correspondant du triangle donné, se coupent au même point.* (Édouard Lucas, *N. C. M.*, 1876, p. 218.)

**Note.** Le *triangle orthique* est celui qui a pour sommets les pieds des hauteurs du triangle donné.

* E. Lucas (1842-1891), savant professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis; ses publications, fort nombreuses, ont eu surtout pour objet l'arithmétique supérieure.

**Théorème 164. — III.**

**759 a.** *Si l'on construit sur un angle droit fixe* XOY *une suite de rectangles* OABC, *de périmètre donné* 4p, *la perpendiculaire* CZ *abaissée du sommet* C *sur la diagonale* AB *passe par un point fixe* D. (BRETON DE CHAMP.)

Le point D s'obtient en prenant sur OX et OY les longueurs $OA' = OB' = 2p$, et en construisant le carré OA'DB'.

La relation OA + OB montre que la droite AB enveloppe une parabole tangente aux axes en A' et B'. (G., n° 1015, 2°; J. NEUBERG; *Mathesis*, 1901, p. 226, n° 21.)

## Points en ligne droite.

**760.** Pour démontrer que trois points sont en ligne droite, on procède fréquemment comme il suit :

On joint un des points à chacun des deux autres, et l'on prouve que les deux droites sont dans la même direction, soit en établissant qu'elles sont parallèles à une même ligne, soit en prouvant qu'elles forment avec une autre droite, menée par le point commun, des angles égaux opposés par le sommet.

Malgré la différence apparente des questions, on reconnaît que pour démontrer que trois points sont en ligne droite, on procède à peu près comme pour prouver que trois droites concourent au même point. Les méthodes modernes rendent compte de cette analogie en établissant que les questions sont corrélatives.

**Théorème 165.**

**761.** *Les projections du sommet d'un triangle sur les quatre bissectrices des deux autres angles sont en ligne droite.* (A. LASCASES, de Lorient, *N. A.*, 1859, p. 171, n° 477.)

Soient les perpendiculaires AE, AD sur les bissectrices des angles B; les bissectrices BD, BE étant perpendiculaires l'une à l'autre, la figure ADBE est un rectangle. Par suite, la diagonale DE passe au point milieu M du côté AB, et $ME = MB$; donc on a :

angle $MEB = MBE = CBE$.

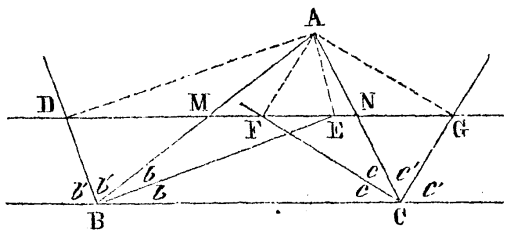


Fig. 454.

Donc les droites ME et BC sont parallèles, ME passe aussi par le point N milieu du second côté, et la ligne DE est déterminée de position; on démontrerait de même que FG est parallèle à BC et qu'elle passe par le point N; donc les deux projections F, G se trouvent sur la droite DE.

*Autre démonstration.* Soient F' et G' les points où les prolongements de AF et de AG rencontrent BC. On a :

$$AF = FF', \quad AG = GG';$$

donc FG est parallèle à BC, etc.

**Théorème de Simson 166.**

**762.** *Si d'un point pris sur la circonférence circonscrite à un triangle, on abaisse des perpendiculairees sur les trois côtés de ce triangle, les trois points ainsi obtenus sont en ligne droite.*

On peut donc énoncer le théorème comme il suit :

*Les projections d'un point quelconque de la circonférence circonscrite à un triangle, sur chaque côté de ce triangle, sont en ligne droite.*

La droite obtenue est nommée *droite de Simson.*

1re *Démonstration.* (Voir *Méthodes,* n° 22.)

*Remarque.* La démonstration de BALTZER est analogue à celle que nous avons exposée dans les méthodes ; mais afin de donner un exemple de concision géométrique, nous reproduisons la figure et la démonstration de cet auteur (*Planimétrie,* § IV, 3) :

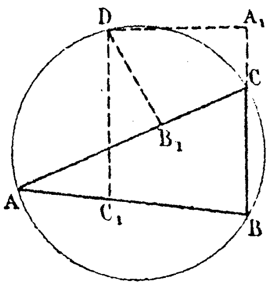


Fig. 455.

« Si quatre points A, B, C, D sont sur une circonférence, et si l'on mène les perpendiculaires $DA_1$, $DB_1$, $DC_1$ sur les côtés BC, CA, AB, du triangle ABC, les pieds $A_1$, $B_1$, $C_1$ se trouvent en ligne droite.

« Puisque $A_1$, $B_1$, C, D et $A_1$, B, $C_1$, D sont respectivement sur une circonférence, on a :

$$2DA_1B_1 = 2DCB_1 = 2DCA = 2DBA = 2DBC_1 = 2DA_1C_1.$$

« Par suite, on aura $2DA_1B_1 = 2DA_1C_1$ ; donc les points $A_1$, $B_1$, $C_1$, sont sur une droite. »

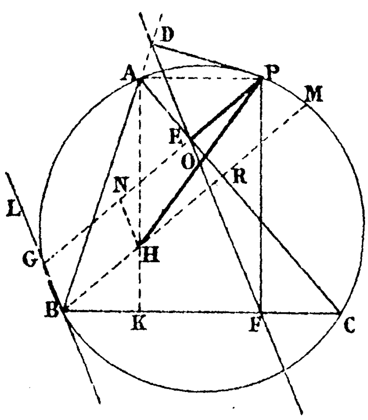


Fig. 456.

**763.** *Démonstration* (M. RETSIN). Prolongeons PE jusqu'à la circonférence et menons BG. Il suffit de prouver que les segments DE, puis EF, sont parallèles à la même droite BG (n° 760).

Dans le quadrilatère inscriptible ADPE, l'angle DEP = DAP, comme ayant même mesure.

Mais DAP = LGP = $^1/_2$ arc BAP,

donc l'angle DEP = LGP ;

l'angle PEF = 180° — PCF,

car le quadrilatère PEFC est inscriptible.

Or

angle PCF = $^1/_2$ arc BAP = angle LGP.

Ainsi l'angle PEF = PGB ;

donc les segments ED, EF parallèles à BG sont en ligne droite.

**764. Note.** Le théorème précédent est attribué à SIMSON, par SERVOIS, dans les *Annales de Gergonne,* tome IV, 1813-1814, p. 251 ; l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1894, p. 174, n° 136, le fait remonter à WALLACE, vers 1799 ou 1800 ; cette question, quel qu'en soit l'auteur, n'est qu'un cas particulier d'un théorème bien remarquable ; mais nous devons nous borner à l'énoncer et à indiquer les principales conséquences qui en découlent :

*D'un point* M *on abaisse des perpendiculaires sur chaque côté d'un triangle, et l'on joint deux à deux les pieds de ces perpendiculaires. Le lieu des points* M *tels que le triangle* DEF *ait une surface constante donnée, est une circonférence concentrique au cercle circonscrit au triangle primitif.*

1° Pour le point O, centre du cercle circonscrit, l'aire de IHJ égale $\frac{ABC}{4} = \frac{S}{4}$, chacun des côtés de ce triangle étant la moitié des côtés de l'autre.

2° Quand la distance OM croît de zéro à $R = OA = OB = OC$, la surface diminue de $\frac{S}{4}$ à zéro ; ainsi *le cercle circonscrit est le lieu des points* M *qui donnent une aire nulle.* En effet, d'après le théorème de Simson, il n'y a plus de triangle, mais seulement une ligne droite.

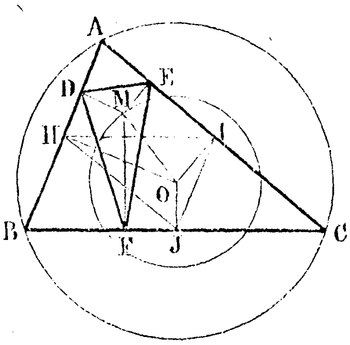


Fig. 457.

3° Quand OM croît indéfiniment à partir de R, la surface part de zéro et augmente indéfiniment.

4° pour toute valeur de l'aire comprise entre zéro et $\frac{S}{4}$, il y a deux réponses : une circonférence intérieure et une circonférence extérieure au cercle circonscrit. La relation des rayons $R_1$ et $R_2$ du lieu, et du rayon R du cercle circonscrit, est :

$$R_1^2 + R_2^2 = 2R^2.$$

La proposition relative au triangle est à son tour un cas particulier du théorème suivant :

*On donne un polygone quelconque ; d'un point* M *de son plan, on abaisse des perpendiculaires sur chaque côté (ou même des droites également inclinées sur chaque côté et dans le même sens, ou* droites isoclines) (n° 2458).

*Le polygone qui a pour sommets les projections du point* M *sur chaque côté a une certaine aire. Or, quel que soit le nombre de côtés du polygone primitif, le lieu des points* M *pour une aire donnée est une circonférence.*

*Le lieu pour des aires différentes* A, A'... *est formé par des circonférences concentriques.*

(*Revue des sociétés savantes,* tome V, année 1870, page 203. *Étude d'un lieu géométrique,* par M. Combette, ingénieur à Brest.)

Une solution analytique très élégante se trouve dans Briot (n° 113). *Leçons de Géométrie analytique,* par Briot et Bouquet, 13e édition, revue par M. Appell, professeur à la Faculté des Sciences. Les *Nouvelles Annales* étudient cette même question, 1875, page 470, question 1174.

On peut voir aussi le *Journal de Mathématiques élémentaires,* 1er janvier 1880, p. 49, Art. par M. Vuibert, et l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1898, p. 166, n° 1232. Démonstration par A. Duporcq, puis *note* par Mannheim, année 1902, pp. 212-214, R. Ricard et divers; 246, A. Durand. Ce dernier auteur a repris et développé sa solution dans le *Bulletin des sciences mathématiques et physiques,* 13e année (1907-1908), p. 225.

Ce théorème a été énoncé par Steiner dans les *Annales de Gergonne,* tome XIV, 1823-1824, et résolu dans le même volume, page 280, par Querret (1783-1839), alors chef d'institution à Saint-Malo, et, page 286, par Sturm, de Genève. La première communication de ce géomètre aux *A. de G.* se trouve à la page 13 de ce même tome XIV. — La question remonterait à Lhuilier.

* Retsin, professeur de mathématiques supérieures à l'Athénée de Gand.

* Durand (A.), petit-fils de Briot, professeur au lycée Saint-Louis.

* Querret, né à St-Malo en 1783, mort à Dinan en 1839. (Voir *N. A.,* 1855, p. 99 de la *Biographie.*)

* Appell, Poincaré, Darboux, Picard. (Voir leurs Biographies, par M. Ernest Lebon.)

**Théorème 167.**

**765.** *La droite de Simson divise en deux parties égales la droite qui joint le point* P *à l'orthocentre* H *du triangle.*

Soit H le point de concours des hauteurs AK et BR. Il faut prouver que DF passe par le milieu de PH (fig. 456).

Prolongeons la hauteur BR jusqu'en M, et prenons EN = EP.

On sait que RM = RH (nº 292 c)]; donc le trapèze NHMP est isocèle. Il en est de même d'ailleurs de GBMP; donc la droite NH est parallèle à BG et, par suite, à EF. Mais la ligne EF, parallèle à NH et passant par le point E, milieu de PN, passe donc aussi par le point milieu de PH.

**Note.** Le théorème est de Steiner (d'après M. J. Neuberg).

**Théorème 167. — I.**

**765 a.** 1º *Les droites de Simson relatives à deux points diamétralement opposés du cercle circonscrit à un triangle donné sont rectangulaires entre elles.*

2º *Le lieu des points de concours des droites rectangulaires est le cercle des neuf points du triangle proposé.*

Soient MOM′ un diamètre du cercle circonscrit au triangle donné ABC; $\gamma\alpha\beta$, $\alpha'\gamma'\beta'$ les droites de Simson relatives à M et M′, puis A′B′C′ le cercle des neuf points.

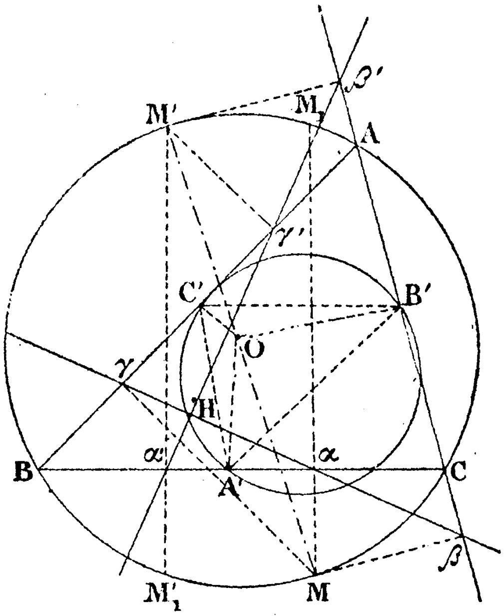


Fig. 458.

1º A′ est le milieu de $\alpha\alpha'$ comme projection du point milieu O de MM′; de même B′ est le milieu de $\beta\beta'$, et C′ de $\gamma\gamma'$.

Ainsi arc $CM = BM_1'$, donc

$$\text{angle } CM_1M = BM'M_1' = CBM.$$

Le quadrilatère $M\alpha\gamma B$ étant inscriptible, angle $M\gamma\alpha = CBM$; de même $M'\gamma'\alpha'B$ est inscriptible; donc

$$\text{angle } B\gamma'\alpha' = \beta'\gamma'A = BM'M_1',$$

donc angle $M\gamma\alpha = \beta'\gamma'A$.

D'ailleurs, les angles $\gamma M\beta$ et $\gamma'A\beta'$ sont supplémentaires de BAC; donc les triangles $\gamma M\beta$, $\gamma'A\beta'$ sont équiangles. Or les côtés $M\beta$, $M\gamma$ étant respectivement perpendiculaires à $A\beta'$, $A\gamma'$, il en est de même de $\beta\gamma$ et $\beta'\gamma'$; donc $\gamma\alpha\beta$, $\alpha'\gamma'\beta'$ sont rectangulaires.

2º Les triangles $\alpha H\alpha'$, $\beta H\beta'$ étant rectangles, on a :

$$HA' = \frac{\alpha\alpha'}{2} = A'\alpha \quad \text{et} \quad HB' = \frac{\beta\beta'}{2} = \beta B';$$

il s'ensuit : angle $A'H\alpha = A'\alpha H = C\alpha\beta$ et $B'H\beta = H\beta B' = C\beta\alpha$.

En additionnant, il vient : $A'HB' = ACB = A'C'B'$.

Ainsi le lieu du point H est le segment capable de l'angle A'C'B' décrit sur A'B', soit le *cercle des neuf points*. (M. N. GOFFART, *N. A.*, 1883, p. 479, et 1884, p. 397, et M. LEMOINE, *Journal de M. E.*, 1883, p. 246, X.)

Voir aussi la note sur la *droite de Simson*, par M. WEILL, professeur au collège Chaptal. (*J.M. S.*, 1884, p. 15, th. IX.)

Remarque. *Les deux droites de Simson orthogonales sont des droites réciproques de Longchamps;* car, les points M et M' étant aux extrémités d'un même diamètre, il en résulte que $B\alpha' = C\alpha$, $C\beta = A\beta'$ et $A\gamma' = B\gamma$.

**765 b. Note.** Le théorème précédent (nº 765 **a**) peut être complété comme il suit :

3º *Les droites de Simson des extrémités du diamètre* OI, *qui passe par les centres des cercles inscrit et circonscrit, se coupent au* point de Feuerbach, (*point de contact du cercle inscrit et du cercle des neuf points*).

4º *Si l'on projette un point quelconque* P *de* OI *sur les côtés du triangle, en* QRS, *le cercle* QRS *passe par le* point de Feuerbach (G. ALIZI, *Journal de Vuibert*, 1910, p. 126, et *N. A.*, 1904, p. 400, T. LEMOYNE). Les théorèmes 3º et 4º sont connus (voir ci-après nº 1242 **p**, 5 et 6). Néanmoins nous les indiquons afin de compléter le nº 765 **a**, et pour renvoyer au recueil mathématique qui en donne la démonstration élémentaire.

Le théorème 765 **a**, 2º se trouve aussi dans les *Esercitazioni di Geometria sulla circonferenzo di Eulero* (1909, p. 4. Estrado dal Pitagora, an XVI, n. 1-5.) Très belle étude élémentaire par M. Cristoforo ALASIA, auteur de *la Recente Geometria del triangolo* (1900).

*EMILE LEMOINE, ancien élève de l'École Polytechnique, promoteur de la *Géométrie du triangle*, en 1873, par les articles publiés, à cette époque, dans les *N. A.*, et où il faisait connaître un *point* remarquable et un *cercle* qui portent maintenant son nom.

On lui doit de nombreux articles publiés dans les *N. A.*, dans le *J. de M. E. et S.*, dans les comptes rendus de l'*Association pour l'avancement des sciences*, ainsi que la *Géométrographie et la Transformation continue*. (*J.M. E.*, 1892, p. 62.)

Voici quelques indications relatives à ses premières publications dans l'*A. F.* : 1873, Lyon, pp. 90-95. — 1874, Lille, pp. 1165-1168. — 1875, Nantes, pp. 173-178. — 1882, La Rochelle, p. 122. — 1885, Grenoble, p. 23. Généralisation des points K, ω, ω'. — 1886, Nancy, pp. 83-100. — 1887, Toulouse, p. 13. — 1888, Oran, pp. 165-175, etc.

M. LEMOINE et M. LAISANT ont fondé, en 1894, l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, revue que nous citerons fréquemment.

### Théorème 167. — II.

**765 c.** *Deux triangles* ABC, A'B'C' *sont inscrits dans une même circonférence; les droites de Simson de ces triangles, relatives à un même point* P *quelconque de la circonférence, se coupent sous un angle constant.* (DROZ-FARNY.)

**Note.** 1º Voir *Mathesis*, 1901, page 104, question 1090. Voir aussi la question dans nos *E. de G.*, nº 2161 (**b**).

Le théorème a été complété récemment par S. KANTOR et résolu par M. ABSOLONNE. (*Mathesis*, 1906, page 144, question 1575 et 1907, p. 23.)

2º Une belle étude élémentaire sur la *Droite de Simson* a été donnée par M. R. BÉRARD, professeur à Besançon ; voir le *Bulletin de Mathématiques, élémentaires* de M. CH. MICHEL, professeur au lycée Saint-Louis (14e année 1908-1909, pp. 178 et 194).

**Théorème 167. — III.**

**765 d.** *On considère deux triangles* ABC, DEF *inscrits à la même circonférence. Démontrer* 1° *que les droites de Simson des points* D, E, F *par rapport au triangle* ABC *forment un triangle* D'E'F' *semblable à* DEF, *et que les droites de Simson des points* A, B, C *par rapport au triangle* DEF *forment un triangle* A'B'C' *semblable à* ABC; 2° *Que les triangles* D'E'F', A'B'C' *sont inscriptibles à une même circonférence dont le centre est au milieu de la distance des orthocentres des triangles* ABC, DEF. (S. KANTOR de Vienne. *Mathesis*, 1907, p. 23.)

**Théorème de Salmon 168.**

**766.** *Si par un point* M, *pris sur une circonférence, on mène trois cordes, et que l'on décrive sur chacune d'elles, comme diamètre, une circonférence, ces trois courbes, qui ont un point commun, se coupent en trois autres points situés sur une même ligne droite.*

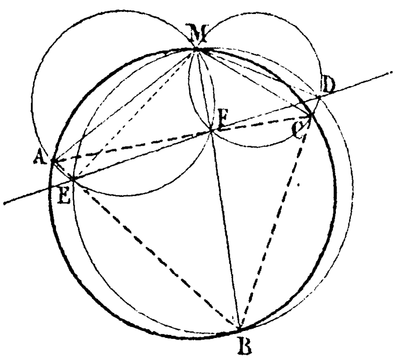


Fig. 459.

Soient les cordes MA, MB, MC.

Elles déterminent un triangle inscrit ABC. Or la perpendiculaire abaissée du point M sur le côté AB doit couper ce côté en un point situé sur la circonférence dont AM est le diamètre, et pour une raison analogue sur celle dont MB est le diamètre; donc cette perpendiculaire n'est autre que la corde commune ME. Le point E, où les circonférences se coupent, est situé sur AB, et il se trouve être le pied de la perpendiculaire abaissée du point M du cercle circonscrit sur le côté du triangle ABC. Il en est de même pour les points F et D; donc ces trois points E, F, D sont en ligne droite (nos 22, 662).

**766 a. Note.** D'après la démonstration précédente, on voit que le *théorème de Salmon* peut être considéré comme le corollaire de celui de *Robert Simson.*

Le théorème 766 se trouve dans la *Nouvelle correspondance mathématique,* par M. CATALAN, année 1876, page 401 ; mais le *théorème des trois cordes* semble dû à GERGONNE (*Annales*, tome IV, 1813-1814, p. 251, *note*).

La *Nouvelle correspondance mathématique* comprend six volumes, de 1874-75 à 1880; cette publication a des articles de grande valeur, mais elle ne pouvait pas avoir beaucoup de lecteurs. L'excellent recueil intitulé *Mathesis* a continué la *Correspondance*, avec une plus grande variété d'articles, et en répondant d'une manière plus directe aux besoins de l'enseignement moyen en Belgique.

**Théorème 168. — I.**

**766 b.** *Deux circonférences* Δ, Δ' *se coupent aux points* M, M'. *Trois cordes* MA, MB, MC *du cercle* Δ *rencontrent* Δ' *respectivement en* A', B', C'. *Démontrer que les circonférences* AA'M', BB'M', CC'M' *se coupent deux à deux en des points situés sur une droite.* (SOLLERTINSKI. — *J. M. E.*, DE LONGCHAMPS, 1893, p. 287. V. aussi *N. A.*, 1889, p. 72, IV, n° 11.) Cas particulier de l'*Étude géométrique d'une famille de coniques,* par Ch. FABRY, ancien élève de l'École Polytechnique.

**Théorème 169.**

**767.** *Les quatre orthocentres des quatre triangles formés par quatre droites qui se coupent deux à deux sont sur une même droite.* (AUBERT.)

On sait déjà que les circonférences circonscrites aux quatre triangles passent par un même point, *le point de Miquel* du quadrilatère. (*Méthodes*, nº 21.)

Du point M abaissons des perpendiculaires sur chacune des quatre

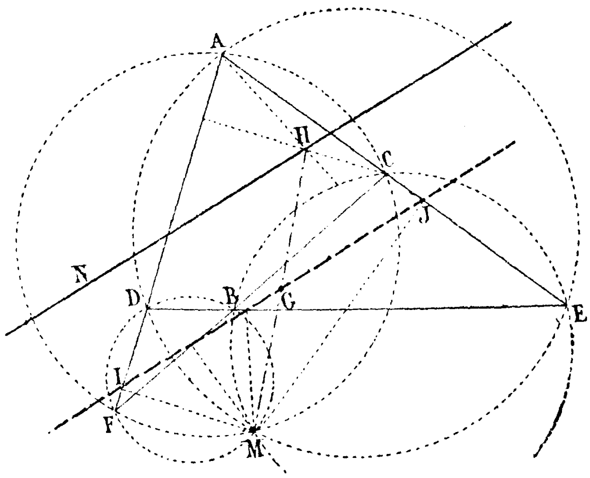



Fig. 460.

droites données ; les quatre points obtenus sont sur une même droite, car ils sont trois à trois en ligne droite d'après le théorème de SIMSON. (*Méthodes*, nº 22 et nº 762.)

Or la *droite de Simson* IJ passe au point milieu de la droite qui joint le point M à l'orthocentre de chaque triangle (nº 765 **a**).

Donc si H est un de ces points de concours, le point milieu G de MH appartient à IJ, et il en serait de même pour le point de concours des hauteurs de chacun des autres triangles ; et puisque les quatre points milieux sont sur IJ, les quatre orthocentres sont sur NH, parallèle à IJ et passant par le point H.

**767 a. Note.** Ce théorème peut se démontrer sans recourir à celui de Simson, mais la voie à suivre est beaucoup plus laborieuse. On peut consulter les *Nouvelles Annales,* 1846, page 13, et 1847, page 196.

Le théorème précédent est de STEINER (*Journal de Crelle,* 2, p. 97 ; voir BALTZER, *Planimétrie,* § 14, nº 11). D'autre part, ce même théorème est attribué à AUBERT, par MILLET, dans ses *Principales méthodes de la Géométrie moderne,* page 176. Le compte rendu fort élogieux de cet ouvrage se trouve dans les *N. A.,* 1871, p. 468.

* L. MILLET, professeur au lycée de Laval, en 1870.

* AUBERT, mentionné par les *N. A.* dès 1857, p. 44, 45 et 48 ; professeur à Rennes en 1876. (*N. A.,* 1876, p. 318.)

**Théorème 169. — I.**

**767 b.** *Sur les hauteurs* AA′, BB′, CC′ *d'un triangle* ABC, *on prend les segments* AL, BM, CN *respectivement égaux aux perpendiculaires abaissées d'un point quelconque* P *de la circonférence* ABC *sur les côtés,* *en ayant égard au sens des segments et des perpendiculaires. Démontrer que les points* L, M, N *sont collinéaires.* (DAVIS. — *Mathesis* 1910, p. 139).

La droite LMN est la droite de Simson du point P′ diamétralement opposé à P.

**Théorème 170.**

**768.** *Si trois circonférences passent par un même point de la circonférence menée par leurs trois centres, ces circonférences se coupent deux à deux en trois autres points situés en ligne droite.* (*N. A.*, 1881, p. 206.)

Soient A, B, C les centres et un point commun P pris sur la circonférence ABC; il faut prouver que D′, E′, F′ sont en ligne droite.

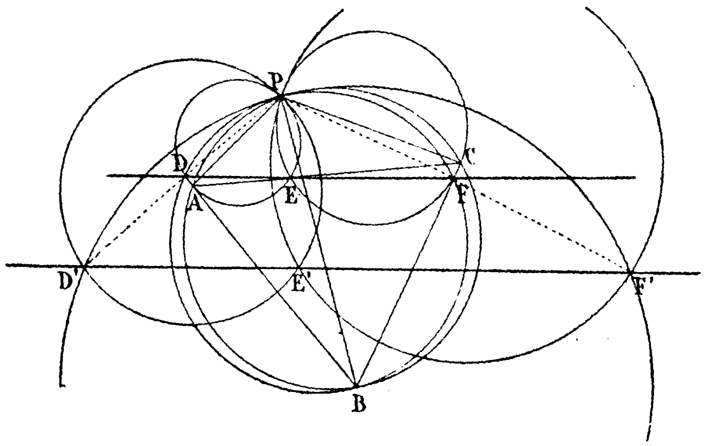



Fig. 461.

En effet, les circonférences de rayon moitié, c'est-à-dire celles qui ont pour diamètre PA, PB, PC, se coupent en trois points D, E, F situés en ligne droite (*Théorème de Salmon,* n° 766), et ces points sont les projections du point P sur les côtés du triangle, car les angles AEP, CEP sont droits comme inscrits dans des demi-circonférences; donc DEF est la *droite de Simson.*

Mais $PD' = 2PD, \quad PE' = 2PE, \quad PF = 2PF'.$

Donc D′, E′, F′ sont en ligne droite.

**Théorème 170. — I.**

**768 a.** *On donne un triangle* ABC *et un point quelconque* M *du cercle circonscrit, on prend les points symétriques* D, E, F *de ce point par rapport aux côtés* BC, CA, AB; *les trois points* D, E, F *sont sur une droite qui passe par l'orthocentre* H *du triangle donné.*

C'est un simple corollaire du théorème précédent (n° 768), mais on peut le démontrer directement et en conclure que la *droite de Simson* relative au point M divise AH en deux parties égales. (*Journal de Vuibert,* 1903, p. 129, et *Mathesis*, 1903, p. 167, n° 14.)

**Théorème de Nagel 171.**

**769.** *Le centre du cercle inscrit, celui du cercle circonscrit et le point de concours des perpendiculaires abaissées des centres des cercles ex-inscrits sur les trois côtés d'un triangle, sont trois points en ligne droite; le centre du cercle circonscrit est équidistant des deux autres points.* (NAGEL, *N. A.*, 1860, p. 355, Théorème III.)

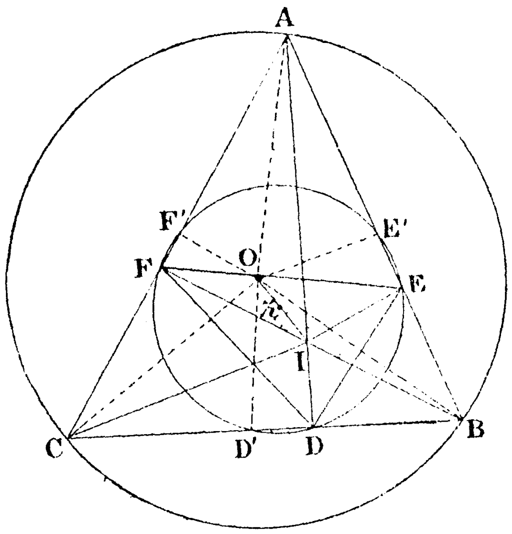


Fig. 462.

Soit le triangle DEF. Les bissectrices intérieures se coupent en I, et les extérieures donnent lieu au triangle ABC.

Les perpendiculaires abaissées des points de concours A, B, C sur EF, DE, FD, se coupent en un même point O (nº 757), et ce point est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, car ces perpendiculaires sont aussi les médiatrices de ce triangle.

Le point I est le centre du cercle inscrit à DEF.

Quant au cercle circonscrit au même triangle DEF, ce sera en même temps le cercle des neuf points du triangle ABC; car on sait que AD, BF, CE sont les hauteurs de ce triangle (nº 662), et que I est leur point de concours; or le centre $z$ du cercle des neuf points du triangle ABC est sur IO et à égale distance du point de concours I des hauteurs et du centre O du cercle circonscrit (nº 719); donc...

**Théorème de Chasles 172.**

**770.** *Si une figure plane* F *se déplace d'une manière quelconque dans son plan, elle peut être amenée d'une position* F *à l'autre* F′ *par une rotation autour d'un centre convenablement choisi sur ce plan.*

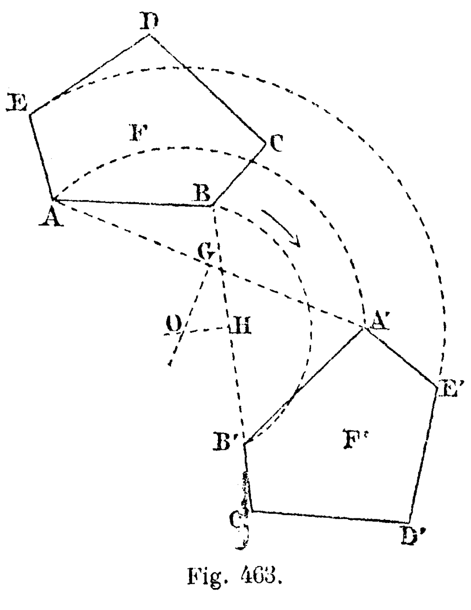


Fig. 463.

On suppose que les figures données sont *directement égales*, c'est-à-dire qu'on peut les superposer sans recourir à un retournement.

Le point A peut aller en A′ par un arc quelconque ayant pour corde AA′; le point B peut aller en B′ par un arc quelconque ayant pour corde BB′.

Les perpendiculaires élevées sur les milieux de ces cordes donnent, par leur rencontre en O, le centre de rotation cherché.

Car si l'on suppose le point O joint aux divers sommets A, B, C, D, E, les triangles OAB, OBC, ODC, etc., se transporteront simultanément en OA′B′, OB′C′, etc.

**770 a. Note.** Le théorème ci-dessus a été énoncé pour la première fois, d'une manière complètement générale et purement géométrique, par M. CHASLES, en 1830. Divers cas particuliers avaient été donnés par DESCARTES et JEAN BERNOULLI.

On sait que le *théorème de Chasles,* relatif au mouvement d'une figure dans l'espace, établit qu'une figure peut être amenée d'une position à une autre par un *mouvement hélicoïdal,* c'est-à-dire en parcourant un arc d'*hélice cylindrique* et combinant ainsi un mouvement de *rotation* avec celui de translation.

L'étude des figures invariables de forme, mais variables de grandeur et de position, vient de nous conduire à un théorème dont les précédents ne sont que des cas particuliers : *Deux figures semblables, à trois dimensions, correspondant à des figures égales par superposition* (à l'exclusion des solides égaux par symétrie), *peuvent être considérées comme étant deux positions différentes d'une même figure restant semblable à elle-même, pendant que chacun de ses points décrit une spirale logarithmique conique.* (7 juin 1894, voir ci-après, nº 2514.)

* DESCARTES, né en 1596 dans la Touraine, mort en 1650 à Stockholm, fait époque, dans l'histoire des mathématiques, par son *Application de l'Algèbre à la théorie des courbes.* Comme exemple, il donna la solution du problème *ad tres aut plures lineas* des anciens, et le désigna sous le nom de *problème de Pappus.* Il fit connaître aussi *une règle générale pour la détermination des tangentes aux courbes.*

* JEAN BERNOULLI, né à Bâle en 1667, mort en 1748, frère de JACQUES BERNOULLI (1654-1705), l'un et l'autre mathématiciens célèbres. Plusieurs de leurs descendants ont aussi fourni une carrière mathématique fort remarquable.

## Figures inversement égales.

**771.** *Fréquence de leur emploi.* Lorsqu'on donne deux figures égales dans un même plan, elles peuvent être indifféremment *directement* ou *inversement* égales ; il arrive même, dans les applications relatives à l'architecture, au dessin d'ornement, que l'on rencontre des figures symétriques par rapport à un axe, bien plus fréquemment que des figures directement égales : il convient donc d'étudier aussi les figures inversement égales situées dans un même plan. Enfin l'étude des figures dans l'espace conduit parfois à la considération des figures inversement égales ou semblables, dans le même plan.

**Note.** Ce paragraphe a été publié en 1896, dans le Complément aux *Éléments de Géométrie,* p. 508.

### Théorème 172. — I

**771 a.** *Lorsque deux figures sont inversement égales, les bissectrices des angles formés par deux côtés homologues quelconques sont parallèles entre elles.*

Soient ABC, A′B′C′, deux figures inversement égales et dans une situation quelconque. Menons la bissectrice DD′ de l'angle formé par deux côtés homologues AB, A'B'; il faut prouver que la bissectrice EE' de AC et de A'C' est parallèle à la première.

Or les côtés AC et A'C' sont également inclinés sur AB et A'B', et par suite sur la bissectrice DD'; donc...

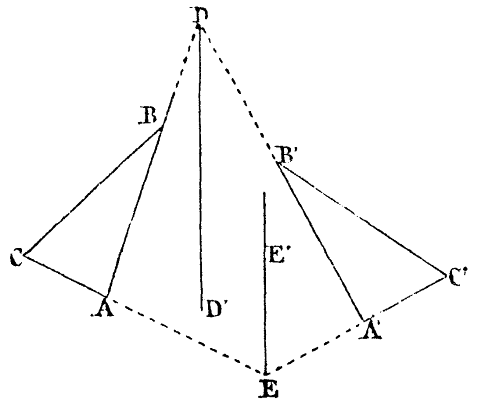


Fig. 464.

**Théorème 172. — II.**

**771 b.** *Le lieu géométrique du point milieu des droites qui joignent deux à deux les points homologues de deux figures inversement égales est une droite parallèle aux bissectrices des angles formés par les côtés homologues.*

Soient les figures inversement égales ABC, A'B'C'.

Déterminons le milieu M de AA'; menons les droites BD, B'D', respectivement égales et parallèles à MA, MA', puis MD, MD' et DD'.

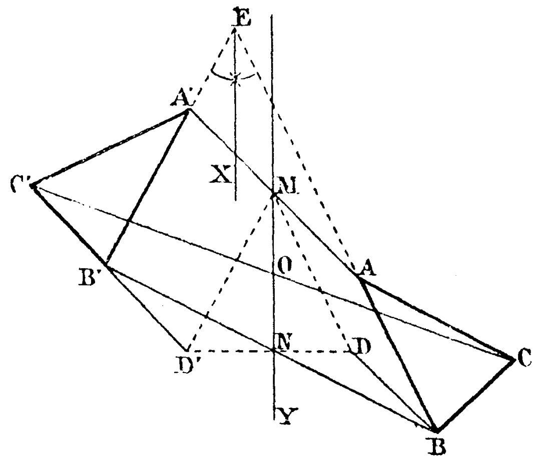


Fig. 465.

Les triangles BDN, B'D'N sont égaux comme ayant un côté égal BD = B'D', adjacent à deux angles égaux; donc le point N est le milieu de DD' et de BB'; or les droites MD, MD', sont respectivement égales et parallèles à AB et à A'B'; ainsi le triangle DMD' est isocèle, la hauteur MN est bissectrice de M et parallèle à EX; donc la droite MN qui joint les points milieux est parallèle à la bissectrice de l'angle de deux côtés homologues et passe par le point milieu de CC', car toutes les bissectrices sont parallèles.

**771 c.** *Remarque.* La droite MON peut être nommée *droite des milieux.* Ce nom a été donné par CHASLES au cas particulier où tous les points homologues A, B, C, D... A', B', C, D'... que l'on joint deux à deux se trouvent sur deux droites données, et déterminent ainsi deux ponctuelles égales.

**Théorème 172. — III.**

**771 d.** *Les points homologues de deux figures inversement égales sont équidistants de la droite des milieux* (fig. 465).

C'est une simple conséquence de l'égalité de MA, MA'; NB, NB', et de OC = OC'; mais, sans recourir à la propriété qu'a la droite MN d'être parallèle à la bissectrice des angles formés par les côtés homologues pris deux à deux, on démontre facilement que les distances de C et C' à la droite MN sont égales entre elles, dès qu'il en est ainsi des distances de A et A', comme de B et B'.

**771 e.** *Remarques.* 1° Dans cette seconde démonstration, on conclut que OC = OC′, c'est-à-dire que la droite MN des points milieux M et N passe aussi par le milieu O de toute autre droite telle que CC′.

2° Dans l'étude des figures inversement semblables, si M et N divisent AA′ et BB′ dans le rapport de la similitude, on en conclura que les ordonnées de C et C′ sont dans le même rapport et que, par suite, la droite MN divise CC′ dans le même rapport. On aura recours à cette propriété pour étudier les figures inversement semblables dans l'espace.

### Théorème 172. — IV.

**771 f.** *Deux figures inversement égales peuvent être rendues symétriques par rapport à une droite quelconque de leur plan.*

Soient données les figures inversement égales F et F′ et une droite XY dans leur plan.

Déterminons la figure F″ symétrique de F par rapport à XY; les figures F′ et F″, inversement égales de F, sont directement égales entre elles, il suffit de faire coïncider F′ avec F″ à l'aide d'une rotation ou d'une translation.

### Problème 172. — V.

**771 g.** *Amener deux figures inversement égales à être symétriques, en recourant à une rotation.*

Le problème est indéterminé, puisqu'il comporte une infinité de solutions; voici les deux solutions les plus remarquables :

1° *Un point de la figure mobile est pris pour centre de rotation.*

Soient ABC, A′B′C′ et A′ les figures et le centre donnés. Par le point milieu de AA′ (fig. 466), on mène une perpendiculaire XY à la droite AA′. La perpendiculaire menée est l'axe de symétrie; puis on prend PC″ = PC, où l'on décrit l'arc C′C″.

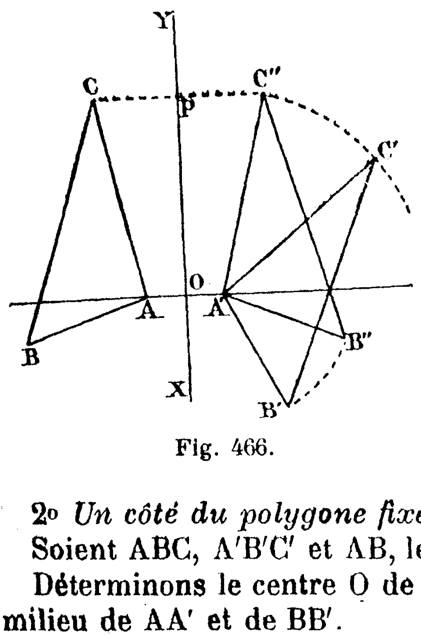



Fig. 466.

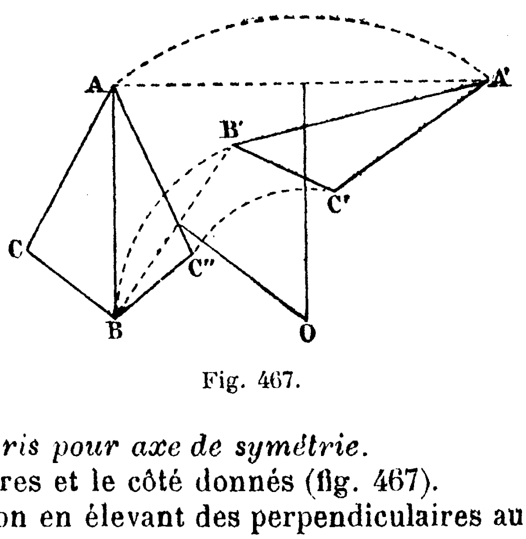



Fig. 467.

2° *Un côté du polygone fixe est pris pour axe de symétrie.*

Soient ABC, A′B′C′ et AB, les figures et le côté donnés (fig. 467).

Déterminons le centre O de rotation en élevant des perpendiculaires au milieu de AA′ et de BB′.

**Problème 172. — VI.**

**771 h.** *Amener deux figures inversement égales à être symétriques, en recourant à une translation.*

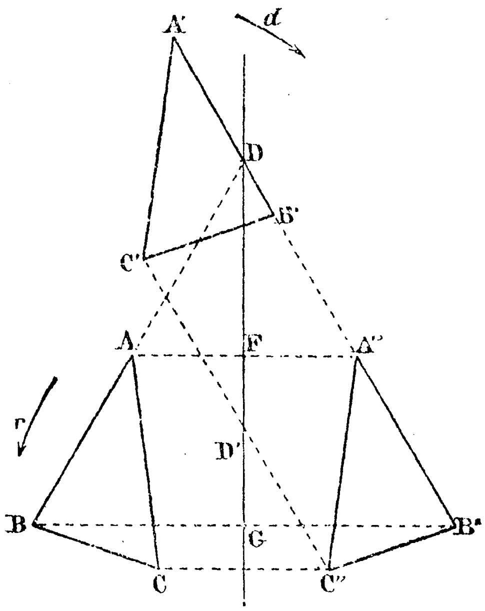



Fig. 468.

Le problème est indéterminé, car on peut prendre pour axe de symétrie toute parallèle à la bissectrice de l'angle formé par deux côtés homologues. Voici les deux constructions les plus intéressantes :

1re construction : *glissement suivant un des côtés de la figure mobile.*

Soient ABC, A'B'C' les figures données, et A'B' la direction de la translation.

Menons la bissectrice DD' de l'angle formé par AB, A'B'. Il suffit d'amener A' en A'' sur la perpendiculaire AFA'' menée à la bissectrice.

2e construction : *glissement parallèle à la droite des milieux.*

Soit MN la droite des points milieux (fig. 469) de AA', BB', CC'.

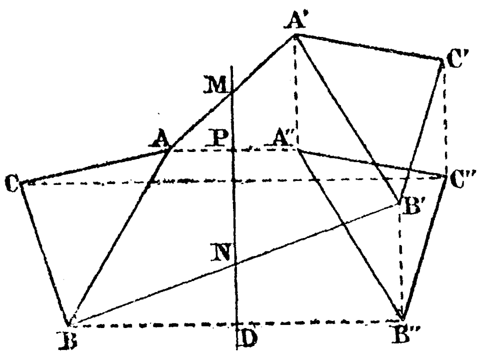



Fig. 469.

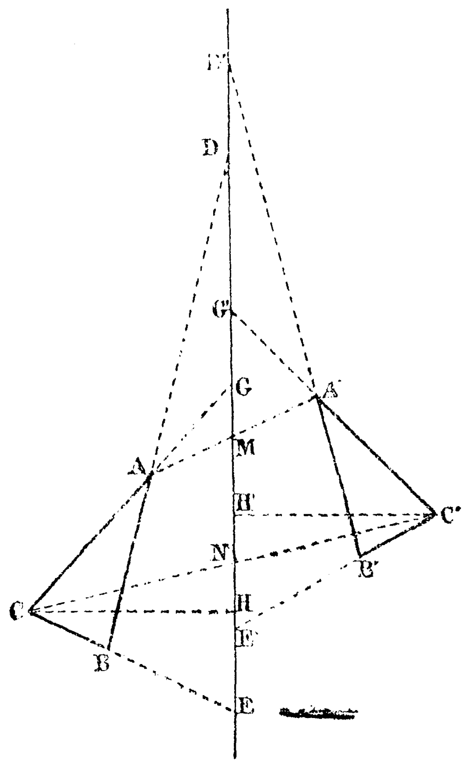



Fig. 470.

Menons une parallèle A'A'' à MN jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire AP; on aura PA'' = PA, etc.

**771 i.** *Remarque.* La *droite des milieux* est la droite suivant laquelle se coupent, en quelque sorte, les plans des deux figures données; elle est formée par la superposition de deux droites homologues; on peut l'appeler *droite double;* néanmoins les points homologues ne coïncident pas (fig. 470).

On énonce la propriété précédente comme il suit : Deux figures inversement égales déterminent des ponctuelles égales DGHE, D'G'H'E' sur la *droite des milieux;* en faisant glisser d'une quantité convenable une de ces ponctuelles suivant sa propre direction, les ponctuelles coïncident, les figures inversement égales sont alors symétriques par rapport à la droite double.

Ainsi, en faisant glisser le plan de la figure A'B'C' le long de la droite des milieux de manière que D' coïncide avec D, il arrive que E' coïncide avec E et G' avec G, etc.; car

$$DD' = EE' = GG' = HH'.$$

# LIEUX GÉOMÉTRIQUES

**772. Relation de distance.** Dans les questions traitées au livre II, on ne peut guère employer que les trois relations de distance que l'on va rappeler :

1° *Un point peut être à une distance constante d'un point donné;* le lieu est une circonférence ayant ce point pour centre et la distance donnée pour rayon.

2° *Un point peut être à une distance constante d'une droite ou d'une circonférence;* le lieu est une parallèle à la droite ou une circonférence concentrique à la première.

3° *Un point peut être équidistant de deux droites;* le lieu est la bissectrice de l'angle de ces deux droites.

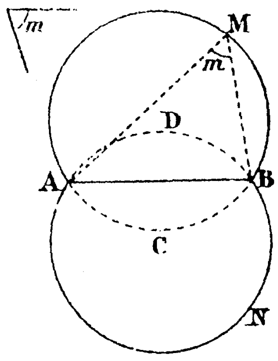


Fig. 471.

**772 a. Relation angulaire.** La relation la plus employée est celle de l'angle constant dont les côtés passent par deux points fixes. Le lieu du sommet de l'angle M est l'arc du segment capable de l'angle donné $m$; mais le lieu complet se compose de deux arcs symétriques AMB, ANB. Les arcs ponctués des circonférences ci-dessus correspondent à un angle égal à $(180^\circ - m)$.

**772 b. Lieux à proposer.** Lorsqu'un théorème est relatif à la détermination d'un point remarquable par rapport à une figure donnée, on peut se proposer de chercher le lieu de ce point lorsqu'on fait varier de grandeur ou de position une ou plusieurs des données, tandis qu'un certain nombre d'autres restent invariables.

Voici quelques exemples relatifs au triangle :

Les médianes se coupent au même point; et ce point, comme on l'établit en statique, est le centre de gravité de la surface du triangle.

Les trois hauteurs se coupent au même point.

Les trois bissectrices intérieures déterminent le centre du cercle inscrit.

Les bissectrices extérieures font connaître les centres des cercles exinscrits.

Les perpendiculaires élevées au milieu de chaque côté se coupent au centre du cercle circonscrit.

Le centre du cercle *des neuf points* est au milieu de la droite qui joint le point de concours des hauteurs au centre du cercle circonscrit.

Ceci rappelé, admettons, par exemple, que le triangle ABC ait une base BC invariable de longueur et de position et que l'angle opposé ait une valeur constante. A chaque position que prendra le sommet mobile A sur l'arc du segment décrit sur BC et capable de la valeur angulaire donnée, le point de concours M des médianes occupera une position différente sur le plan du triangle; l'ensemble de ces positions est le lieu demandé ; mais, dans bien des cas, l'étude du lieu peut exiger des connaissances plus étendues que celles que donnent les *Éléments de Géométrie.*

Dans l'exemple relatif à un triangle ABC :

Le point de concours des médianes donne un arc de cercle (livre III);

Le point de concours des hauteurs donne un segment capable d'un angle constant;

Il en est de même du centre du cercle inscrit et des centres des cercles exinscrits, le livre II suffit;

Le centre du cercle circonscrit est fixe;

Le centre du cercle des neuf points décrit un arc de cercle (livre III).

On peut encore proposer d'autres lieux :

Les pieds des hauteurs abaissées des sommets B et C se trouvent sur la demi-circonférence décrite sur le diamètre BC;

Le lieu du point milieu de chaque médiane, menée des sommets B et C, est un arc de cercle;

Le lieu des *points de Lemoine* est une ellipse (nº 2374).

## Emploi d'une relation linéaire.

### Lieu 173.

**773.** *Lieu des centres des circonférences tangentes en un point donné* P *d'une droite* AB *ou d'une circonférence* A'B'.

La droite AB doit être tangente en P à tous les arcs que l'on veut tracer; donc les centres peuvent être pris à volonté sur la droite indéfinie EF, menée par le point P, perpendiculairement ou normalement à la ligne donnée AB ou A'B'.

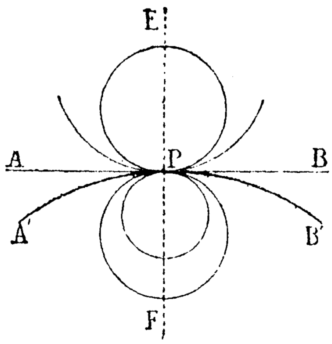


Fig. 472.

### Lieu 173 — I.

**774.** *Lieu des centres des circonférences tangentes à deux droites* AB *et* CD *qui se coupent.*

Ce lieu est le même que celui des points équidistants des deux droites AB et CD : c'est l'ensemble des deux droites indéfinies, qui servent de bissectrices aux angles formés en O.

**Lieu 174.**

**775.** *Lieu des points d'où un cercle* C *est vu sous un angle donné* m.

On mène deux tangentes faisant entre elles l'angle voulu, et l'on décrit une circonférence concentrique à la première et qui passe par le point de concours des deux tangentes.

**Lieu 174. — I.**

**776.** *Lieu des points d'où les tangentes menées à une circonférence donnée* A *sont d'une longueur donnée* m.

C'est une circonférence concentrique à la première.

**Lieu 175.**

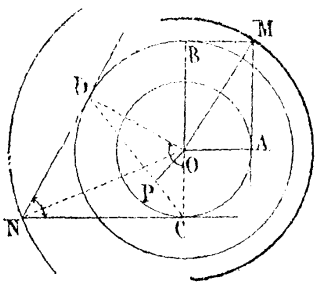


Fig. 473.

**777.** *Deux circonférences concentriques étant données, quel est le lieu du sommet d'un angle droit dont un côté est tangent à une des circonférences, tandis que l'autre côté est tangent à la seconde?*

La figure OAMB est un rectangle dont les côtés sont connus; donc la longueur OM est constante; le lieu du point M est une circonférence concentrique aux premières.

**Lieu 175. — I.**

**778.** *Lorsque les tangentes font un angle constant* N.

C'est encore une circonférence concentrique aux proposées, car le quadrilatère OCND est de grandeur connue, les angles des deux côtés adjacents étant connus.

**Enveloppe 175. — II.**

**779.** *Quelle est l'enveloppe de la droite* CD *des contacts, lorsque l'angle* N *est constant ?*

Pour *enveloppe,* voir n$^{os}$ 119 et suivants.

L'enveloppe est la circonférence décrite avec la perpendiculaire OP pour rayon, car la corde CD reste à une même distance OP du centre; donc cette corde est tangente à la circonférence OP.

**Lieu 176.**

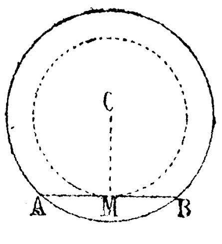


Fig. 474.

**780.** *Une corde de longueur donnée* AB *se meut dans un cercle* O; *quel est le lieu décrit par son milieu* M?

C'est une circonférence concentrique à la première.

Il en est de même pour un point quelconque de la corde de longueur constante.

La question du n° 776 est un cas particulier du n° 780.

### Lieu 176. — I.

**781**. *Un angle* ADB *de grandeur donnée a son sommet sur une circonférence; quel est le lieu géométrique du point milieu de la corde qui joint les extrémités des côtés de cet angle?*

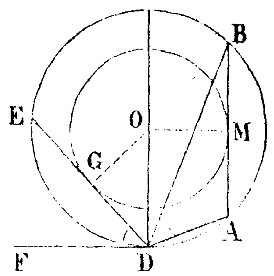


Fig. 475.

L'arc AB est constant pour un angle donné; il en est de même de la corde AB qui sous-tend cet arc; donc le point milieu M décrit une circonférence concentrique à la première.

### Lieu 176. — II.

**782**. *Un angle de grandeur donnée est inscrit dans une circonférence, un de ses côtés passe par un point donné (non situé sur la circonférence); quel est le lieu géométrique du point milieu de la corde interceptée?*

Le sommet se déplace, mais le lieu est encore une circonférence concentrique à la première.

### Lieu 176. — III.

**783**. *Lieu des points milieux des bases des trapèzes ayant pour diagonales deux sécantes menées par le point de contact de deux circonférences tangentes, lorsque ces sécantes se coupent sous un angle constant.*

Le point milieu de CE est une circonférence concentrique à la circonférence A; il en est de même pour le milieu de FD.

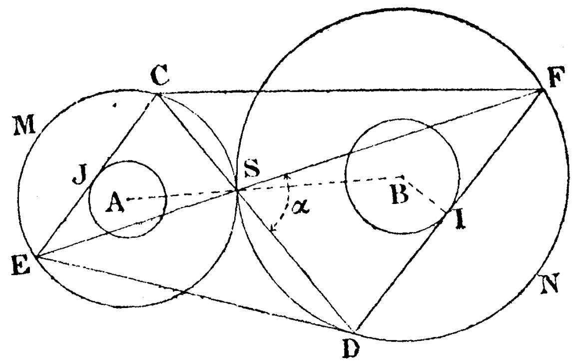


Fig. 476.

*Remarques.* 1° Lorsque les circonférences sont tangentes intérieurement, les sécantes forment les côtés non parallèles du trapèze.

2° Pour les points homologues situés sur les bases et sur une sécante donnée, le lieu se compose de deux circonférences concentriques aux proposées.

3° La question du n° 783 est une extension du n° 780.

### Lieu 177.

**784**. *Lieu des centres des circonférences décrites avec un rayon donné* r, *et qui interceptent sur une droite donnée* AB *des cordes d'une longueur donnée* m.

Ce lieu se compose de deux droites CD et EF menées parallèlement à AB, de part et d'autre de cette droite.

**Lieu 177. — I.**

**785**. *Lieu des centres des circonférences décrites avec un rayon* r, *et qui déterminent, en coupant une circonférence, une corde commune de longueur donnée.*

Le lieu se compose de deux circonférences concentriques à la circonférence proposée.

**Lieu 177. — II.**

**786**. *Lieu des centres des circonférences décrites avec un rayon* r, *et qui coupent orthogonalement une circonférence donnée* (n° 620).

C'est une circonférence concentrique à la circonférence donnée.

Il en est de même lorsque les circonférences doivent se couper sous un angle donné, mais de grandeur quelconque.

**Lieu 178.**

**787**. *Par chaque point d'une circonférence, on mène les droites parallèles sur lesquelles on prend une longueur constante* l; *quel est le lieu des points ainsi obtenus?*

(Voir *Méthodes,* n° 58.)

**Lieu 178. — I.**

**788**. Même question. *La figure donnée est quelconque.*

(Voir *Méthodes,* n° 59.)

**Lieu 178. — II.**

**789**. *On donne deux circonférences concentriques; par chaque point de la circonférence extérieure on mène des tangentes à l'autre circonférence; sur chacune de ces lignes, à partir de la circonférence extérieure, on prend une longueur constante; quel est le lieu des points ainsi obtenus?*

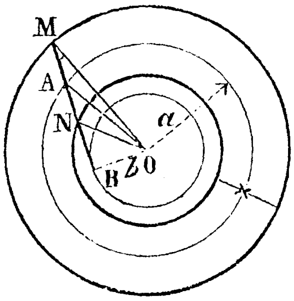


Fig. 477.

Soient OA, OB, les circonférences données.

On obtient deux circonférences concentriques aux circonférences proposées.

Le calcul des rayons OM, ON dépend du livre III. Soit $AM = AN = l$.

$$AB^2 = a^2 - b^2, \quad AB = \sqrt{a^2 - b^2},$$

$$BM = l + \sqrt{a^2 - b^2}, \quad BN = -l + \sqrt{a^2 - b^2},$$

$$OM^2 = BM^2 + b^2 = l^2 + 2l\sqrt{a^2 - b^2} + a^2 - b^2 + b^2.$$

Ainsi
$$OM^2 = l^2 + a^2 + 2l\sqrt{a^2 - b^2}, \qquad (1)$$

$$ON^2 = l^2 + a^2 - 2l\sqrt{a^2 - b^2}. \qquad (2)$$

*Vérification.* Dans le triangle MON, la droite AO est médiane; or (1) + (2) donnent, en effet, $OM^2 + ON^2 = 2l^2 + 2a^2$. (G., n° 254.)

**Lieu 178. — III.**

**790.** *Lieu du point milieu de chacun des trois côtés mobiles du parallélogramme* ABCD.

Le lieu du milieu de AB est une circonférence égale aux premières et ayant son centre au milieu de CD.

Le lieu du point milieu de CA est une circonférence décrite du centre C avec la moitié de CA pour rayon.

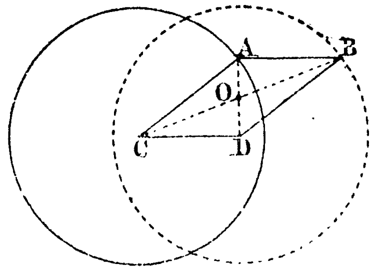


Fig. 478.

*Remarque.* Le lieu du point de croisement des diagonales dépend du livre III. Ce lieu est celui du point milieu d'une droite qui joint un point fixe C à chaque point d'une circonférence ayant D pour centre (n° 65).

**Lieu 179.**

**791.** *On fait tourner une circonférence autour de l'un de ses points, et dans chacune de ces positions on lui mène des tangentes parallèles à une droite fixe donnée; trouver le lieu des points de contact.* (Concours général, 1865; classe de troisième.)

Soient XY la direction donnée, A le point fixe, B le centre de la circonférence mobile dans une position quelconque, CT, DV, les tangentes parallèles à XY.

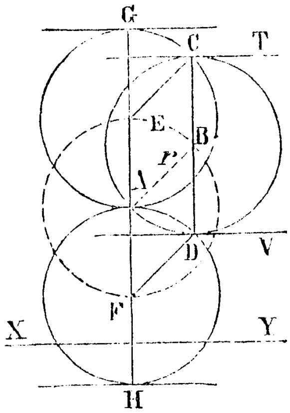


Fig. 479.

Le lieu des centres, tels que B, est une circonférence décrite du point fixe A, comme centre, avec un rayon égal à celui de la circonférence mobile.

Pour avoir les points de contact C et D, il faut mener par le centre B une perpendiculaire à XY. En menant EF perpendiculaire à cette même ligne XY, on reconnaît que les lignes EC, AB, FD sont égales et parallèles; donc le lieu des points C est la circonférence décrite du centre E avec $r$ pour rayon. Le lieu du point D est la circonférence qui a F pour centre.

*Remarque.* Le lieu est le même que celui que l'on obtient lorsque, par chaque point B d'une circonférence fixe FBE, on mène dans une direction donnée une droite BC d'une longueur connue $r$.

**Lieu 179. — I.**

**792.** Même problème. *Lorsque la circonférence mobile* M *est constamment tangente à une circonférence donnée* N.

C'est une circonférence concentrique à la circonférence donnée N.

### Lieu 180.

**793**. *Lieu décrit par le milieu* M *d'une droite finie* AB *qui se meut dans un angle droit* C, *de manière que ses extrémités glissent sur les côtés de l'angle.*

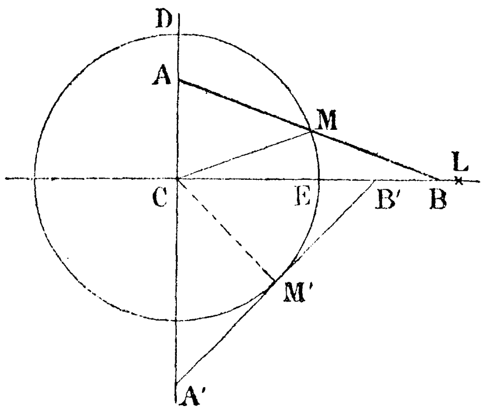


Fig. 480.

Soit AB une position quelconque de la droite mobile. Joignons son milieu M au point C.

La droite CM étant médiane sur l'hypoténuse du triangle rectangle ACB, égale $^1/_2$ AB; et comme AB est une longueur constante, il en est de même de CM. Ainsi le point M se meut sur l'arc DME, décrit du point C avec CM pour rayon.

**793 a. Note.** 1° Le lieu du point milieu d'une droite mobile finie, lorsque l'angle C n'est pas droit, est une ellipse, ayant C pour centre.

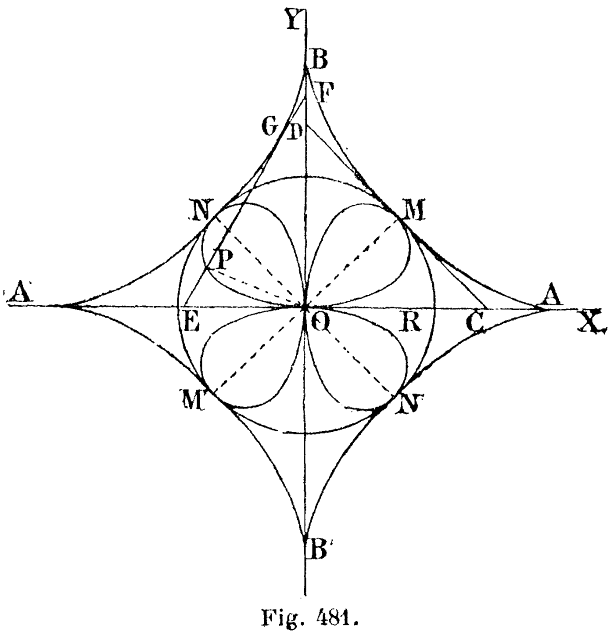


Fig. 481.

Le lieu d'un point de AB (autre que le point milieu) est une ellipse, même lorsque l'angle C est droit. (G., n° 643.)

2° Le lieu de la projection P du centre O sur le segment EF de longueur constante est la rosace à quatre branches OMNM'N'. Cette courbe est tangente au cercle de rayon OR ainsi qu'aux deux axes. (E. de D., n° 1228.)

3° L'enveloppe d'une droite de longueur constante *c*, qui se meut entre deux droites rectangulaires a été nommée *astroïde ;* elle a pour équation :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$$

L'astroïde est tangente au cercle et aux axes ; elle a quatre points de rebroussement A, B, A', B'.

Tout point lié invariablement au segment AB, et situé dans le plan BCD, décrit aussi une ellipse, d'après le *théorème de Schooten* (nos 144 et 2160).

Pour l'*Astroïde,* voir *N. A.* 1878, p. 321, Mannheim; ainsi que le n° 702 *a*, des *E. de G.*

### Lieu 180. — I.

**794**. *Lieu décrit par le point de concours des médianes d'un triangle rectangle* ABC, *dont l'hypoténuse de longueur constante a ses extrémités sur deux droites rectangulaires données* (fig. 480).

Les médianes se coupent aux deux tiers de leur longueur à partir des sommets ; or, comme la médiane CM a une longueur constante, il en résulte que le lieu du point de concours est une circonférence décrite du point C comme centre avec les deux tiers de CM pour rayon.

### Lieu 180. — II.

**795.** *Quel est le lieu du point de contact* O *de deux circonférences de rayons variables, tangentes entre elles et respectivement tangentes à une droite en deux points donnés* A *et* B?

*Quelle est l'enveloppe de la ligne des centres des deux circonférences?*

(Voir *Méthodes*, n° 125.)

*Remarque.* Ce problème n'est qu'un cas particulier d'une question qui sera traitée ultérieurement (n° 820).

### Lieu 181.

**796.** *Lieu du point milieu des cordes menées à une circonférence par un même point.*

(Voir *Méthodes*, nos 65 et 80.)

### Lieu 181. — I.

**797.** *Lieu des points milieux des côtés d'un triangle* ABC, *dont la base est fixe et l'angle au sommet constant.*

Soient AB la base, O le centre du segment capable de l'angle donné, le lieu se compose de deux circonférences égales décrites sur les diamètres AO et BO.

La partie de ces circonférences comprises entre la base AB et l'arc qui complète l'arc ABC, correspond aux triangles qui auraient $180^\circ - C$ pour angle au sommet.

### Lieu 181. — II.

**797 a.** *Lieu du point de contact de deux cercles tangents entre eux extérieurement et tangents à une circonférence* C *en des points donnés* A *et* B.

Soient les circonférences D et E tangentes entre elles en M et tangentes à la circonférence C l'une en A, l'autre en B; l'angle AMB égale $\frac{D+E}{2}$ ou $90^\circ - \frac{C}{2}$ or l'angle ACB ou C est constant, il en est de même de l'angle AMB, complément de sa moitié.

Donc le lieu du point de contact M est le segment AMB décrit sur la corde AB et capable de l'angle $90^\circ - \frac{C}{2}$.

L'autre partie du lieu correspond aux cercles D, E tangents intérieurement.

### Lieu 182.

**798.** *Dans une circonférence, une corde fixe* AB *est l'une des bases d'un trapèze inscrit; quel est le lieu géométrique du point milieu de chaque diagonale et de chacun des deux côtés adjacents à la base* AB?

Les points milieux des cordes AD, AE se trouvent sur la circonférence décrite sur AC comme diamètre (n° 796).

Les points milieux de BD, BE appartiennent à la circonférence décrite sur BC comme diamètre.

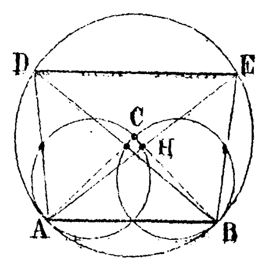


Fig. 482.

**Lieu 182. — I.**

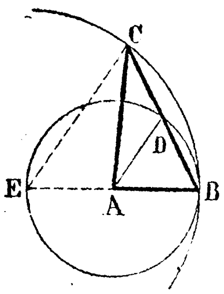


Fig. 483.

**799.** *Quel est le lieu géométrique du sommet* C *d'un triangle ayant* AB *pour base et dont la médiane* AD, *qui part du point* A, *a une longueur constante?*

Prenons AE = AB; la droite AD médiane de longueur constante, joignant les points milieux de BE et de BC, est parallèle à EC et en égale la moitié; donc EC égale 2AD; par suite, le lieu du point C est la circonférence décrite du point E comme centre avec un rayon double de la médiane donnée.

**Lieu 183.**

**800.** *Dans un quadrilatère, le côté* AB *est fixe, la diagonale* BD *et les deux autres côtés sont donnés de longueur; quel est le lieu du point* M *milieu de l'autre diagonale et le lieu du point* O *milieu de la droite* MN *qui joint les milieux des deux diagonales?*

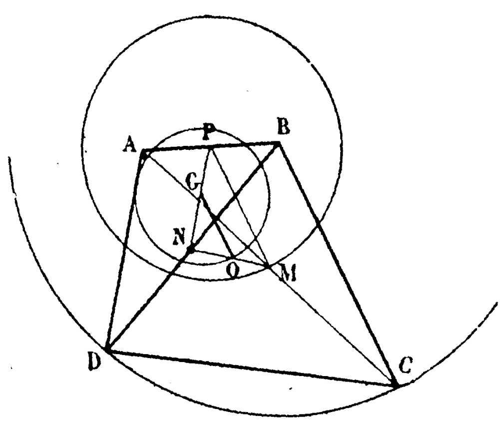


Fig. 484.

AB, AD, BD forment un triangle invariable; donc le lieu du point C est la circonférence décrite du centre B.

1° Si, par le point M, nous menons MP parallèle à BC, on aura:

$$PA = PB$$

et $MP = \frac{1}{2}BC =$ constante. Donc le lieu du point M est la circonférence décrite du centre P avec la moitié de BC pour rayon.

2° Pour le point O on trouve d'une manière analogue que la droite OG menée parallèlement à MP est constante; donc le lieu du point O est une circonférence décrite du point G avec la moitié de MP, ou le quart de BC pour rayon.

3° Le lieu du point milieu de la droite qui joint les milieux de AB et de DC, ainsi que celui du point milieu de la droite qui joint les milieux de AD et de BC, est le même que celui du point O (n° 548).

**Lieu 184.**

**801.** *Quel est le lieu des points* M, *tels que la droite* AB, *qui joint les pieds des perpendiculaires* MA, MB, *abaissées de ce point sur deux droites fixes* OX, OY, *ait une longueur constante* l ?

On peut voir *Méthodes*, n° 142; voici d'ailleurs une autre démonstration :

1° Soit AB = $l$ et M le point qui se projette en A et B.

La droite AB et l'angle opposé O ayant une valeur constante, il en est

**de même du diamètre OM du cercle circonscrit; donc le lieu du point M est le cercle décrit du point O comme centre, avec OM pour rayon.**

2° *Tous les points du cercle* MM' *appartiennent au lieu.*

Pour la position A'B', on obtient M'; or le quadrilatère OA'M'B' reste inscriptible, la diagonale A'B' et l'angle M' ont même valeur que AB et l'angle aigu O, considérés en premier lieu; donc OM' = OM, etc.

Le point C est donné par l'extrémité A, lorsque AB se trouve perpendiculaire à OY. On obtient le point D, lorsque A'B' est perpendiculaire à l'axe XOX'.

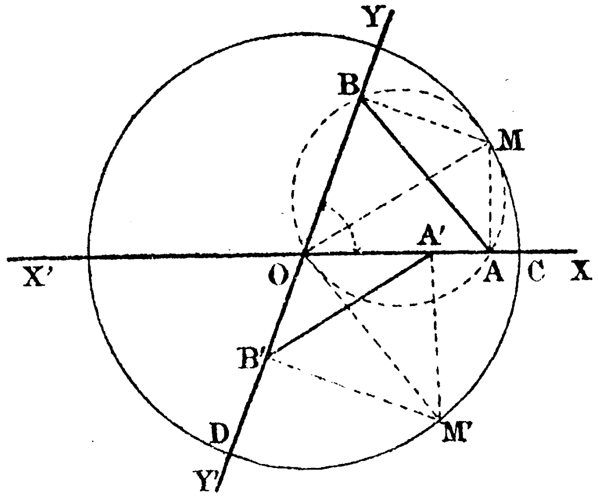


Fig. 485.

**801 a. Note.** 1° L'enveloppe du segment AB de longueur constante, dans le cas des axes obliques OX, OY, est une courbe analogue à l'*astroïde* (nos 702 a et 793 a); la courbe a pour axes de symétrie les bissectrices des angles formés par XOX' et YOY'.

2° Si par A et B, on menait des parallèles AN, BN aux axes OX, OY, le lieu du point N serait une ellipse rapportée à ses deux diamètres conjugués égaux; l'un est sur OX, le second est dirigé suivant OY.

On montre en cinématique que tout mouvement plan peut être produit par le roulement d'une courbe sur une autre courbe; dans le cas particulier où deux points A et B fixes du plan mobile, décrivent des droites du plan fixe OX, OY, la roulette est un cercle passant par les points donnés et par le point O d'intersection des deux droites; la base ou courbe sur laquelle roule le cercle AOB est un cercle de rayon OC double du rayon de la roulette et dont le centre est le point O d'intersection des droites directrices OX, OY.

Tout point du plan mobile décrit une ellipse (n° 2160); mais, en certains cas, cette courbe se réduit à une droite passant par O (n° 825).

Voir aussi l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1905, p. 203, n° 2901; question posée par M. Escott, traitée analytiquement par M. Mathieu (Saïgon).

**Lieu 185.**

**802.** *On donne une circonférence de centre* O *et un point fixe* A; *par ce point on mène une sécante* BAC; *par les points* A *et* B, *puis* A *et* C, *on décrit deux circonférences tangentes à la première et qui se coupent entre elles au point* M; *quel est le lieu de ce point?*

Les centres des circonférences tangentes se trouvent en D, E, sur les rayons OB, OC. Les triangles BOC, BDA, AEC sont isocèles et ont les angles égaux; donc la figure ADOE est un parallélogramme, et la droite DE,

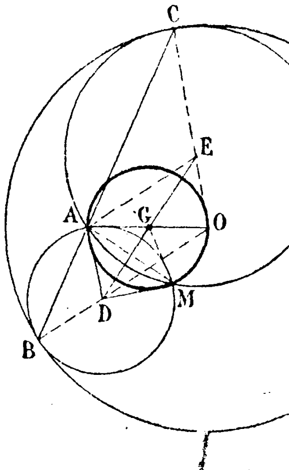


Fig. 486.

qui joint les centres des deux circonférences D, E, passe par le point G milieu de AO; donc le point G est fixe.

Or la droite DE est perpendiculaire au milieu de la corde commune AM; par suite, MG = AG; par conséquent, le lieu du point M est la circonférence décrite du point G comme centre avec AG pour rayon.

**803**. *Remarques*. 1° Le lieu demandé ne diffère pas de celui du point milieu des cordes BAC menées par le point A; on doit faire alors certaines restrictions. Ainsi, quand le point A est situé hors du cercle O, le lieu ne se compose que de la partie extérieure de la circonférence décrite sur AO comme diamètre (n° 80).

2° Pour déterminer le lieu du point M, on peut aussi recourir à une relation angulaire. En effet, la ligne AD est égale et parallèle à OE; d'ailleurs DM est symétrique de AD par rapport à la ligne des centres DE; donc la figure DMOE est un trapèze symétrique; la ligne MO est parallèle à DE, mais la ligne MA est perpendiculaire à cette même droite DE. Par suite, l'angle AMO est droit, et le lieu du point M est la circonférence décrite sur AO comme diamètre.

### Lieu 185. — I.

**804**. *Par l'un des points où deux circonférences* B *et* C *se coupent on mène une sécante; à partir du point d'intersection* A *on prend sur cette ligne des longueurs* AM, AN, *égales à la demi-somme des cordes interceptées; quel est le lieu des points* M *et* N?

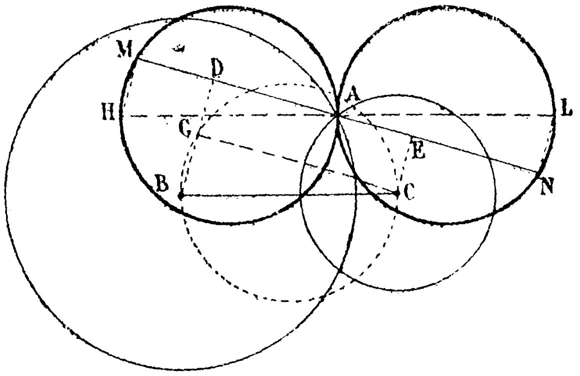



Fig. 487.

En abaissant les perpendiculaires BD, CE sur la sécante MN, la longueur DE égale la demi-somme des cordes.

On sait que si l'on décrit la demi-circonférence BC, la parallèle CG à MN égale DE; donc on prend

AM = AN = CG.

Le lieu du point M est donc une circonférence égale à la circonférence de diamètre BC.

Pour construire le lieu, il faut mener une parallèle HL à la ligne des centres, et prendre pour diamètre AH = AL = BC.

### Lieu 186.

**805**. *Dans un triangle* ABC, *la base* AB *est donnée de longueur et de position; l'angle* C *opposé est de grandeur constante; du point milieu* E *d'un des côtés variables on abaisse une perpendiculaire* EM *sur l'autre côté variable; quel est le lieu du point* M? (Vuibert.)

1re *Démonstration*. Les perpendiculaires élevées au milieu de chaque côté se coupent au centre O du cercle circonscrit,

Le sommet C se meut sur l'arc ACB, car l'angle C est constant. Du point G milieu de OD et des points D, B, E, abaissons des perpendiculaires sur AC ; menons AG, DF et GM ; nous allons prouver que GM a une longueur constante.

Le point D étant le milieu de AB, E le milieu de BC, on a :

$$AL = LP\,;\quad PM = MC\,;$$

d'ailleurs $AF = FC.$

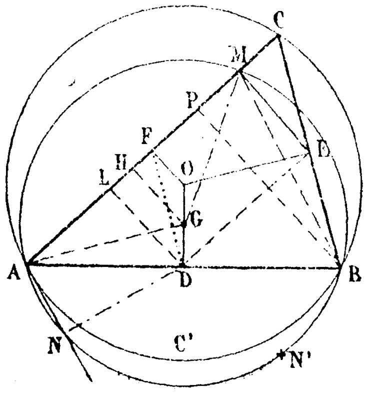


Fig. 488.

Les triangles rectangles LDF, MEC sont égaux, car DF est égal et parallèle à EC, et il en est de même de DL et EM.

Ainsi $LF = PM = MC\,;$

donc LH, moitié de LF, est aussi la moitié de PM ; et comme

$$AL = {}^1/_2\, AP,$$

on aura :

$$AH = {}^1/_2\, AM \quad \text{et} \quad AG = GM.$$

Le lieu du point M est la circonférence décrite du centre G avec le rayon AG.

*Remarque.* Quand le point C vient en B, la perpendiculaire passe par ce point; mais quand C vient au point A, la corde AC est remplacée par la tangente AN, menée à la circonférence O. Le point milieu de BC vient en D, et la perpendiculaire devient DN; donc l'arc BMAN est le lieu obtenu lorsque le point C décrit l'arc ACB. L'arc NB est le lieu lorsque C se meut sur l'arc AC'B.

La perpendiculaire abaissée de F sur BC donne l'arc AMBN' pour lieu cherché.

**806.** 2º *Démonstration.* La première démonstration précise bien la position du lieu et fait connaître le centre G; mais elle est longue. La suivante est beaucoup plus simple et plus rapide. Prouvons que l'angle AMB est constant (fig. 488).

Quelle que soit la longueur de la corde BC, comme le point E en est le milieu et que l'angle C est constant, il en est de même de l'angle BMA, qu'on obtient en joignant B au pied M de la perpendiculaire, car le triangle BPC reste semblable à lui-même; il en est de même de BMC, puisque BM est la médiane du premier; ainsi l'angle AMB ne varie pas. Donc le lieu du point M est un arc de segment décrit sur AB et passant par un point quelconque M du lieu demandé.

*Remarque.* La démonstration ci-dessus, qui repose sur les figures semblables, s'applique facilement au cas plus général où E divise BC dans un rapport donné (nº 1372).

### Lieu 186. — I.

**807.** *Sur une corde* AB *d'une circonférence* ABC *on décrit une seconde circonférence ayant cette ligne* AB *pour diamètre; par le point* A *on mène une sécante* APC ; *quel est le lieu du point* M *milieu du segment* PC *compris entre les deux circonférences ?*

D'après la question précédente, le lieu est la circonférence décrite du point G milieu de OD avec le rayon AG.

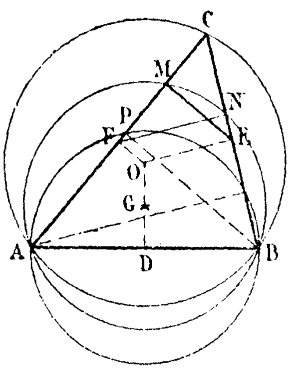



Fig. 489.

En effet, P est le pied de la perpendiculaire BP, donc le point milieu M est le pied de la perpendiculaire EM abaissée du point milieu de BC.

**Note**. Le lieu du n° 805 est emprunté au *Journal de Mathématiques élémentaires,* par M. Vuibert, tome II, n° 86.

Le *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. Vuibert paraît depuis le 1er janvier 1877 ; c'est un riche recueil de *questions d'examens* et d'exercices intéressants ; néanmoins nous ne lui avons fait qu'un petit nombre d'emprunts parce qu'il est d'un prix très abordable et qu'il se trouve en un grand nombre de mains.

### Lieu 187.

**808.** *Par un point fixe, pris dans un cercle, on mène deux cordes rectangulaires, on joint les extrémités deux à deux de manière à former un quadrilatère inscrit ; quel est le lieu du point milieu de chaque côté du quadrilatère et le lieu des projections du point de croisement des diagonales sur les côtés du quadrilatère?*

En se reportant au théorème précédent (n° 749), on reconnaît que la circonférence GLFS, de centre N, est le lieu demandé, car les points M et O sont fixes ; or N est le milieu de MO.

### Lieu 188.

**809.** *On donne une circonférence et un diamètre fixe* AB. *D'un point quelconque* C *pris sur le prolongement du diamètre on mène une tangente* CT, *puis la bissectrice de l'angle* ACT ; *quel est le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur la bissectrice ?*

(Énoncé de Blanchet. Voir *Méthodes*, n° 82.)

### Lieu 189.

**810.** *Lieu des points tels que la somme des distances de chacun d'eux aux trois côtés d'un triangle équilatéral* ABC *soit égale à une longueur donnée* z.

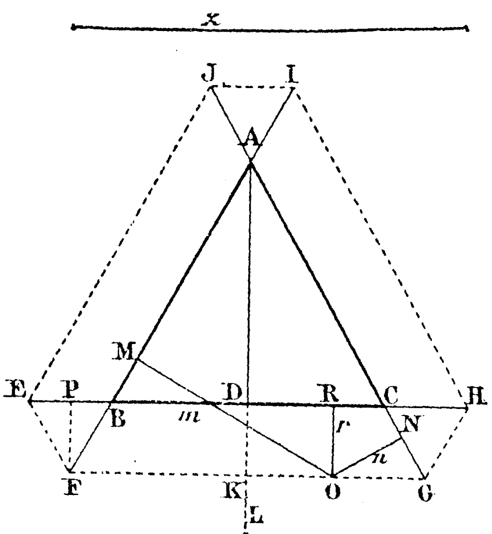



Fig. 490.

Considérons un point quelconque O en dehors du triangle équilatéral. Si l'on prend négativement la distance OR qui tombe à l'extérieur du côté BC, on a : $m + n - r = \text{AD}$, hauteur du triangle.

Ajoutons $2r$, il vient :

$$m + n + r = \text{AD} + 2r = \text{AL}.$$

Et cela sera vrai pour tout point pris sur l'une des lignes FG, HI, JE, menées parallèlement aux côtés, à la distance $r$.

Il en est de même pour tout point pris sur l'une des droites EF, GH IJ; car pour un point quelconque pris sur EF, la distance au côté AC est la même que pour le point F, ces deux lignes étant parallèles; et la somme des distances aux deux autres côtés est égale à FP ou $r$, l'une des hauteurs égales du triangle équilatéral EFB.

Ainsi la propriété est vraie pour tous les points du périmètre de l'hexagone EFGHIJ.

Il reste à indiquer la construction à faire pour que l'on ait $m+n+r=z$, longueur donnée. Or on a vu que $m+n+r=AD+2r=AL$; il suffit donc de mener la hauteur AD prolongée, de porter la longueur $z$ en AL. C'est à la distance DK, moitié de DL, qu'il faut mener des parallèles aux côtés.

**811.** *Remarque.* On peut demander quel est le *lieu des points tels que la somme des distances de chacun d'eux aux trois côtés d'un triangle quelconque soit égale à une longueur donnée* r.

Le lieu est analogue au précédent; mais pour déterminer les points extrêmes E, F, G... (fig. 490), il faut recourir à une construction déjà indiquée (nº 74), et employer les *lignes proportionnelles*, pour démontrer que pour tout point O du périmètre de l'hexagone EFGHIJ, la somme des distances égale la ligne donnée.

**Note.** A ce sujet, on peut voir une étude analytique par M. Moret-Blanc, dans les *N. A.*, 1876, p. 367.

### Problème 190.

**812.** 1º *Un des côtés d'un angle droit roule sur une circonférence pendant que le sommet décrit une circonférence concentrique à la première; quelle est l'enveloppe du second côté de l'angle droit?*

(Voir *Méthodes*, nº 122.)

2º Même question. *L'angle donné est constant, mais il n'égale pas un droit.*

L'enveloppe est encore une circonférence concentrique aux deux premières.

### Problème 191.

**813.** *Quelle est l'enveloppe de la base d'un triangle dont le périmètre est constant et dont l'angle opposé à la base est donné de grandeur et de position?*

(Voir *Méthodes*, nº 123).

**Note.** L'enveloppe de la base d'un triangle dont la somme des côtés latéraux est constante, et dont l'angle opposé à la base est donné de grandeur et de position, est une parabole. (G., nº 1015; E. de G., nº 2171.)

### Problème 191. — I.

**814.** *Les sommets d'un rectangle inscrit* CDC'D' *glissent sur la circonférence circonscrite pendant que le côté* CD *passe par un point fixe* F; *quelle est l'enveloppe du côté opposé* C'D'?

L'enveloppe de C'D' se réduit à un point F' symétrique de F, par rapport au centre O. En d'autres termes, le côté C'D' passe par un point fixe F'.

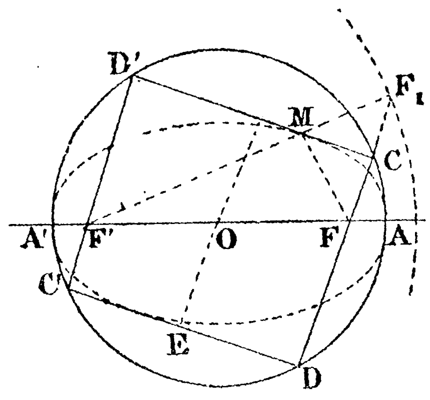



Fig. 491.

*Remarque*. L'enveloppe des côtés CD', DC' est une ellipse ayant AA' pour grand axe (n° 127).

**Problème 191. — II.**

**815**. *Enveloppe d'un cercle de rayon constant dont le centre décrit une circonférence donnée.*

(Voir *Méthodes*, n° 131.)

## Emploi d'une relation angulaire.

**Lieu 192.**

**816**. *Un triangle a pour base une corde fixe* AB *d'un cercle, et le troisième sommet* M *se meut sur l'arc sous-tendu* AMB; 1° *quel est le lieu décrit par le point de concours des bissectrices du triangle mobile?* — 2° *Quel est le lieu du point de concours des hauteurs de ce même triangle?*

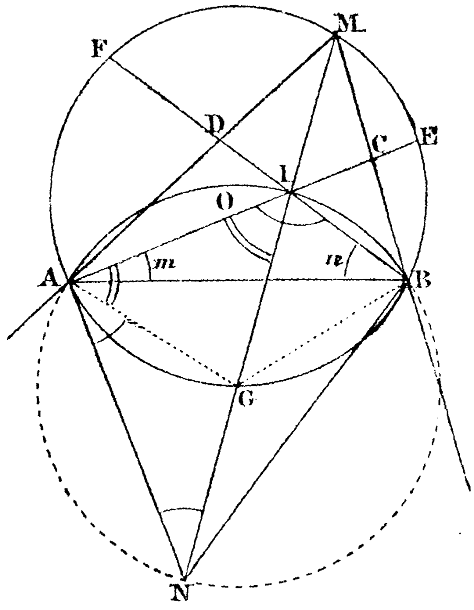



Fig. 492.

1° L'angle M est constant; donc les angles A et B du triangle ont une somme constante, et il en est de même de leurs moitiés $m$ et $n$.

Ainsi, dans le triangle AIB, l'angle I est constant, et le lieu du point I est l'arc AIB capable de l'angle I.

Cet angle I est le supplément de la somme $m + n$.

La somme

$$A + B + M = 2 \text{ droits};$$

donc $m + n + {}^1/_2 M = 1$ droit.

Ainsi la somme $m + n$ a pour complément ${}^1/_2$ M, et par suite, pour supplément, 1 droit $+ {}^1/_2$ M.

Donc l'angle I $=$ 1 droit $+ {}^1/_2$ M.

L'arc AIB est le lieu du point de concours des bissectrices intérieures; le reste de cette circonférence AIB est le point de concours des bissectrices extérieures des angles A et B.

2° L'angle formé par les hauteurs issues des sommets A et B est constant, car il est supplément de M; donc le lieu est un arc AHB, passant par l'orthocentre H et par les sommets A et B.

Cet arc est égal au plus petit des arcs sous-tendus par AB; en un mot l'arc AHB appartient au cercle symétrique du cercle circonscrit par rapport au côté fixe AB.

*Remarque.* Le centre du cercle ANBI est le point milieu de l'arc AGB et la distance $IG = AG = GB$.

En effet, soit G le point où la bissectrice MIN rencontre l'arc AGB; ce point est le milieu de l'arc AGB; de même E est le point milieu de l'arc BEM, donc l'angle $GAI = GIA$ comme ayant des mesures égales; par suite, le triangle AGI est isocèle, donc $GA = GI$.

De même, AGN est isocèle, car les angles en N et en A ont des compléments égaux, donc $GN = GA$; d'où $GN = GI$, et le point G milieu de l'hypoténuse NI est le centre du cercle ANBI.

### Lieu 193.

**817**. *Dans une circonférence on donne une corde fixe* AB, *une corde mobile* CD *de longueur constante; ces deux cordes sont les côtés opposés d'un quadrilatère; quel est le lieu du point de concours des deux autres côtés et le lieu du point de concours des diagonales?*

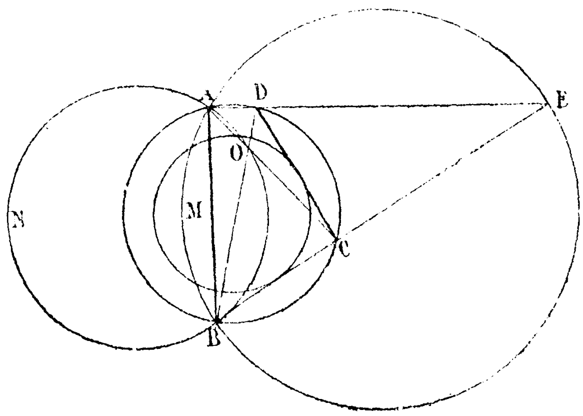


Fig. 493.

L'angle O est constant, car il a pour mesure la demi-somme des arcs AB et DC, qui ne varient pas de longueur.

L'angle E est aussi constant, car il a pour mesure la demi-différence des mêmes arcs.

Donc chaque lieu est un arc de segment capable d'un angle connu.

*Remarque.* Lorsque les cordes AB, DC se coupent, il faut les considérer comme étant les diagonales du quadrilatère.

### Lieu 193. — I.

**817 a.** *Soient* ABC *un triangle,* A′, B′, C′ *les points milieux des côtés* a, b, c; *par le sommet* A, *l'on mène une droite quelconque et l'on abaisse sur cette droite les perpendiculaires* BP, CQ; *puis l'on mène les droites* PC′M, QB′M. *Quel est le lieu du point* M? (Voir *Géométrie analytique de* PRUVOST, p. 553.)

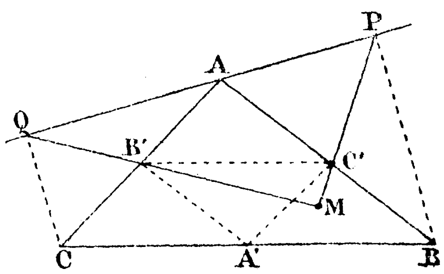


Fig. 494.

Les triangles AC′P et AB′Q sont isocèles, donc l'angle $M = BAC = B'A'C'$; par suite, M appartient au cercle circonscrit au triangle médian A′B′C′.

*Remarque.* On peut voir aussi la démonstration donnée par le *Bulletin de mathématiques élémentaires,* année 1895-96, page 3.

### Lieu 194.

**818.** *Par un des points d'intersection de deux circonférences* A *et* B *on mène une sécante mobile* MCN, *puis l'on joint chaque extrémité de cette sécante au centre correspondant : quel est le lieu des points de rencontre des droites* MAO, NBO? (Concours général de 1873, classe de troisième.)

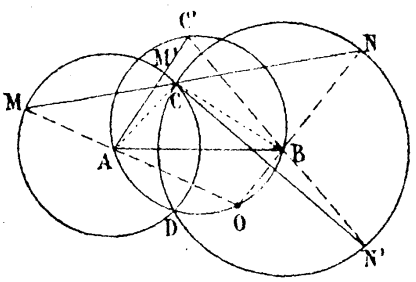


Fig. 495.

Joignons le point C aux deux centres; les triangles MAC, CBN étant isocèles, l'angle ACB est le supplément des angles M + N.

Mais l'angle O est aussi le supplément de M + N; donc l'angle O est constant. Le lieu demandé est le segment de cercle décrit sur AB, capable de l'angle ACB ou ADB.

*Remarques.* 1° L'arc du segment passe par le point D.

2° Pour la sécante M'N', le point de concours C' de AM' et de BN' est sur l'arc AC'B.

### Lieu 195.

**819.** *Par un point* B, *situé dans un angle* XOY, *on mène une sécante fixe* ABC *et une sécante mobile* DBE; *on circonscrit des circonférences aux triangles* ABD, BCE *ainsi obtenus; quel est le lieu du second point* M *d'intersection des deux circonférences?*

Joignons le point M aux trois points A, B, C de la sécante fixe.

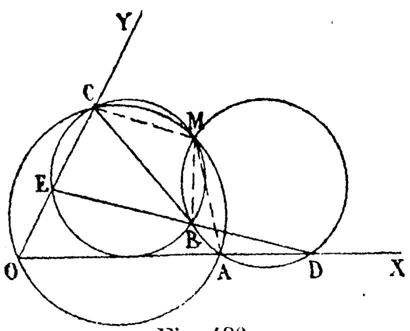


Fig. 496.

Prouvons que l'angle AMC est constant :

$$\text{angle AMB} = \text{D},$$

$$\text{angle BMC} = \text{BEO},$$

donc $$\text{AMC} = \text{ODE} + \text{OED},$$

$$\text{AMC} = 2 \text{ droits} - \text{DOE}.$$

Ainsi l'angle M est le supplément de l'angle O; donc le quadrilatère AMCO est inscriptible. Le lieu demandé est la circonférence circonscrite au triangle invariable AOC.

*Remarque.* 1° Le lieu est indépendant de la position du point B sur la sécante fixe.

2° Sans démonstration, on peut déduire le lieu d'un théorème précédent (nos 711 et 711 **a**).

**Note.** Cette question a servi de *thème* à une excellente étude : *les Lieux géométriques en Géométrie élémentaire* (n° 64, p. 39), par M. P. SAUVAGE, professeur au lycée de Montpellier, en 1893.

**Lieu 196.**

**820.** *Sur les côtés d'un angle* BAC *on a marqué deux points* B *et* C *inégalement éloignés du sommet* A ; *on a décrit deux circonférences tangentes entre elles, et dont l'une est tangente à* AB *au point* B *et l'autre à* AC *au point* C ; *quel est le lieu géométrique du point de contact des deux circonférences?* (ENDRÈS, *Manuel des ponts et chaussées,* sixième édition, tome I, p. 309.)

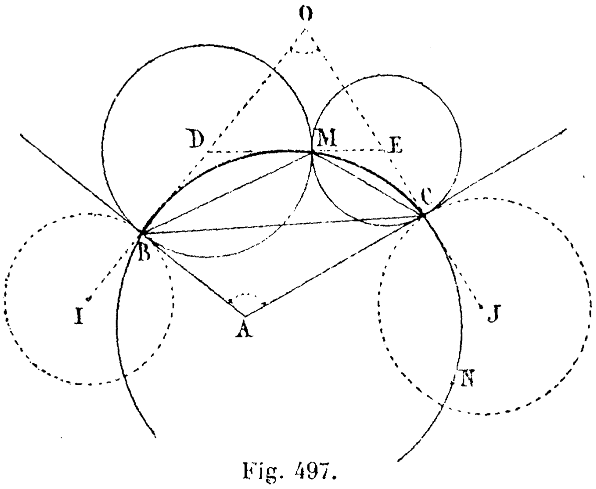



Fig. 497.

Menons MB, MC. Le quadrilatère ABOC a deux angles droits ; donc les angles A, O sont supplémentaires.

Or les triangles BDM, CEM sont isocèles ; ainsi

$$\text{l'angle DBM} = {}^1/_2\ \text{MDO},$$
$$\text{l'angle EMC} = {}^1/_2\ \text{MEO}.$$

Or $\qquad$ $\text{l'angle BMC} = 180^\circ - (\text{DMB} + \text{EMC}).$

$$\text{BMC} = 180^\circ - \frac{D}{2} - \frac{E}{2} = 180^\circ - \left(\frac{D+E}{2}\right).$$

Mais (D + E) est le supplément de l'angle O ;

donc
$$\frac{D+E}{2} = \frac{A}{2}.$$

Ainsi $\qquad$ $\text{l'angle BMC} = 180^\circ - \frac{A}{2}$, $\quad$ valeur constante ;

donc le lieu du point M est l'arc du segment décrit sur BC et capable d'un angle de $\left(180^\circ - \frac{A}{2}\right)$.

*Remarque.* L'arc BNC correspond à un contact intérieur.

(Voir ci-après nos 959 à 964.)

**Lieu 196. — I.**

**821.** Même problème, *en remplaçant les côtés de l'angle par deux circonférences* I, J, *les points de contact* B *et* C *étant donnés.*

On mène les tangentes BA, CA, et l'on retombe sur le cas précédent.

La détermination du lieu est proposée à l'occasion d'un problème de raccordement de deux lignes droites ou circulaires. (Voir ci-après nos 957 à 964.)

**Lieu 197.**

**822.** *D'un point quelconque* C *de l'arc d'un segment circulaire* ACB, *on abaisse une perpendiculaire* CP *sur la corde de l'arc; du point* C, *avec cette perpendiculaire pour rayon, on décrit une circonférence à laquelle on mène des tangentes sur les extrémités de la corde; quel est le lieu du point* M *où se coupent les tangentes* AM, BM?

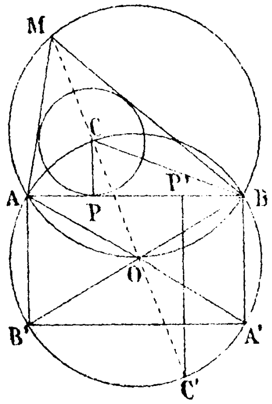



Fig. 498.

Joignons le centre C aux trois points A, B, M.

On sait que l'angle ACB se déduit de l'angle M, et réciproquement (no 466). Or le premier est constant; il en est donc de même du second.

En effet,

$$\text{angle } ACB = 180^o - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 180^o - \left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90^o - \frac{M}{2},$$

donc
$$ACB = 180^o - \left(90 - \frac{M}{2}\right) = 90^o + \frac{M}{2},$$

d'où
$$\frac{M}{2} = ACB - 90^o,$$

$$M = 2ACB - 180^o.$$

D'ailleurs les points A et B appartiennent au lieu, car ils correspondent au cas où le rayon CP est nul; donc le lieu est l'arc de segment décrit sur AB et capable de l'angle 2ACB — 180o.

*Remarque.* On peut étudier les particularités que présente la question lorsque le point C est sur ACB ou sur A'C'B', et lorsqu'il est sur AB' ou sur BA'.

**Lieu 198.**

**823.** *Sur les côtés d'un angle droit donné on prend deux grandeurs* OA, OB *dont la somme est constante* $= l$; *quel est le lieu des points* M *où la circonférence circonscrite au triangle* ABO *est rencontrée par la droite* OM *menée par le sommet* O *parallèlement à la base* AB? (Concours académique, Caen, 1877.)

Soit $OA + OB = l$, somme donnée.

Prenons $OC = OD = l$ et joignons le point M au points C et D.

On a :
$$AM = OB = AC,$$
$$OA = MB = BD;$$

donc les triangles MAC, MBD sont isocèles.

Or les angles au sommet MAC, MBD sont égaux comme suppléments des angles égaux OAM, OBM ; donc

$$\text{angle } OCM = ODM.$$

Par suite, les quatre points O, M, C, D sont concycliques ; donc le lieu des points M est la demi-circonférence décrite sur le diamètre CD.

*Remarques.* 1° Le lieu complet, pour les quatre angles formés autour du point O, se compose de quatre demi-circonférences.

2° Lorsque l'angle COD n'est pas droit, le lieu est l'arc du segment décrit sur la corde DC et capable de l'angle donné DOC.

Le lieu complet se compose de quatre arcs égaux deux à deux.

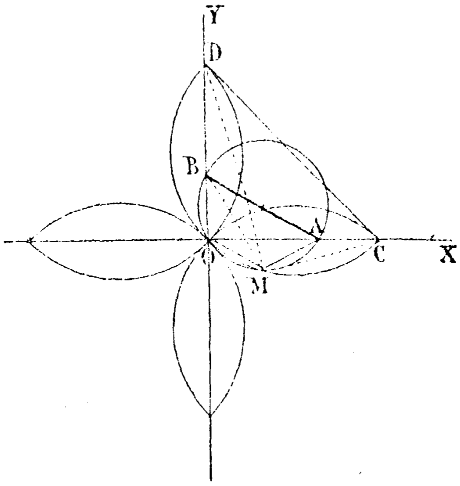


Fig. 499.

**824. Extension.** Livre VIII. L'enveloppe de AB est une parabole tangente à OD, OC, aux points C et D, quel que soit l'angle des axes OX, OY (n$^{os}$ 2165 et 2170). Le cercle BOA est circonscrit au triangle AOB formé par trois tangentes ; or ce cercle passe par le foyer ; donc les cercles tels que AOB passent par un point fixe.

### Lieu 199.

825. *Les sommets* B *et* C *d'un triangle* ABC *glissent sur deux droites* OX, OY *qui se coupent en faisant un angle supplémentaire de l'angle* A ; *quel est le lieu du sommet* A ?

*Discuter le problème, en admettant que le sommet* B *peut glisser sur le prolongement* OX' *de* OX, *et que le point* C *parcourt pendant ce temps la ligne* YOY'.

Soit ABC une position quelconque du triangle donné.

A cause des angles supplémentaires XOY et BAC, le quadrilatère ABOC est inscriptible ;

donc $\qquad \text{angle } AOX = ACB.$

Donc le point A se meut sur une droite menée par le point O et qui fait avec OX un angle égal à l'angle C du triangle, et par suite avec OY un angle égal à l'angle B.

826. *Discussion.* Il est évident que le lieu ne comprend pas toute la droite menée par le point de concours O, car le point A ne peut pas s'éloigner indéfiniment du point O.

Appliquons CB sur OX. Soit DEO la position du triangle. Pour l'angle XOY, le point E est une position limite du sommet A ; puis ce sommet vient en A et jusqu'à une position extrême M donnée par le triangle LMP, dont les côtés ML, MP sont respectivement perpendiculaires à OX, OY. Dans ce cas, la diagonale OM du quadrilatère inscriptible est le diamètre même de ce cercle. Puis le sommet glisse de M jusqu'à une autre position limite F, donnée par le triangle OFG.

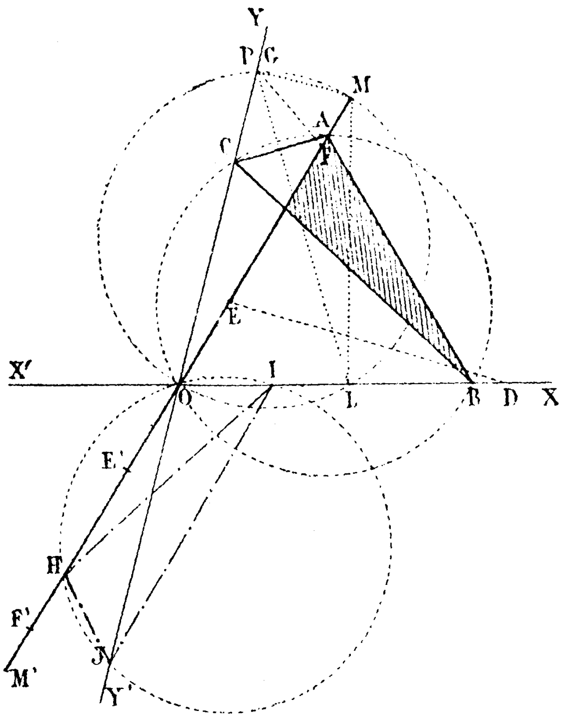



Fig. 500.

**Angle XOY'**. En faisant glisser B sur OX et C sur OY', le sommet A part du point E, glisse jusqu'au point O et continue, vient en H et jusqu'à une position limite F', telle que OF' = OF.

**Angle X'OY'**. En continuant le mouvement, le sommet A glisse de F' jusqu'en M', puis de M' repasse par les positions déjà occupées F', H et s'arrête en E'.

**Angle X'OY**. Enfin le sommet A part de E', passe en O, E, et s'arrête au point F.

En un mot, le sommet A décrit deux fois la droite MOM'.

*Remarques*. 1° L'énoncé doit être complété en disant que l'angle O doit être supplémentaire de l'angle A ou être égal à cet angle, car XOY' = A.

2° Lorsque l'angle A n'égale ni XOY ni son supplément XOY', le lieu du point A est une ellipse (n° 144). Le problème précédent n'est qu'un cas particulier de la question plus générale où le triangle ABC est quelconque par rapport à l'inclinaison des axes. Avec l'angle A, supplément de XOY, l'ellipse est infiniment aplatie et se réduit à son grand axe MOM', parcouru deux fois par le point mobile.

# PROBLÈMES

## Distances diverses.

**827**. La distance d'un point à une droite est donnée par la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.

La distance d'un point à une circonférence est la partie du rayon, ou du rayon prolongé, compris entre ce point et la circonférence.

La distance de deux circonférences se mesure sur la ligne des centres.

### Problème 200.

**828**. *Un chemin de fer* MN *passe en ligne droite à une certaine distance de deux villages* A *et* B, *qui doivent être desservis par une sta-*

*tion équidistante de l'un et de l'autre. Déterminer la position de cette station.*

La droite CD, perpendiculaire au milieu de AB, détermine sur MN un point D équidistant des deux points A et B, quelle que soit la ligne MN.

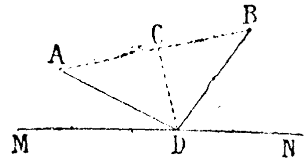


Fig. 501.

**Problème 201.**

**829.** *Une rivière dont le cours est rectiligne dans la partie considérée passe entre deux localités inégalement éloignées du cours d'eau. Où faut-il construire un pont perpendiculaire à la rivière pour que les deux localités soient à des distances égales de l'entrée correspondante du pont?*

(Voir *Méthodes*, n° 137.)

**Problème 201. — I.**

**830.** Mêmes données : *On demande le plus court chemin qui puisse desservir les deux localités.* (N. A., 1846, p. 45.)

On prend la distance BC égale à la largeur de la rivière; on joint AC, puis on mène MN par le point où la droite AC coupe la rive la plus proche de A. Le chemin le plus court est :

$$AM + MN + BN = AC + BC.$$

Tout autre chemin serait plus long, car il se composerait de BC et d'une ligne brisée allant du point C au point A.

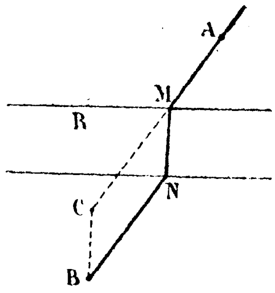


Fig. 502.

**831 Note.** 1° Si les distances AM, BN doivent être dans le rapport $\frac{m}{n}$, il faut décrire la circonférence, lieu des points dont les distances aux points A et C sont dans le rapport voulu, les points où la droite R rencontre la circonférence font connaître M. Il y a deux solutions.

2° On peut demander que le chemin ait une longueur donnée $2a$, la question se rapporte au livre VIII. *Trouver les points d'intersection de la droite* RM *et d'une ellipse ayant* A *et* C *pour foyers et* 2a *pour longueur du grand axe.* (G., n° 642.)

**Problème 202.**

**832.** *Par un point donné* A *mener une droite qui passe à égale distance des deux points donnés* B *et* C.

1° On joint le point A au point milieu de BC;
2° Par le point A, on mène une parallèle à BC.

**Problème 202. — I.**

**833.** *Mener une droite parallèle à une droite donnée et qui passe à égale distance de deux points donnés.*

Par le point milieu D, on mène une droite parallèle à la ligne donnée.

### Problème 202. — II.

834. *Mener une droite équidistante de trois points, non en ligne droite.*

Il suffit de joindre deux à deux les points milieux des côtés du triangle formé par les trois points.

Il y a trois droites qui répondent à la question.

### Problème 203.

835. *Trois points* A, B, C *étant donnés, mener par le point* A *une droite telle que la somme ou la différence des distances des deux autres points à cette droite égale une longueur donnée* l.

*Premier moyen.* Supposons le problème résolu, et $BM + CN = l$.

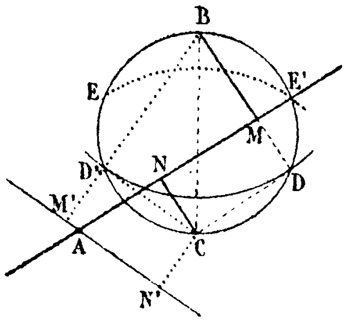


Fig. 503.

En prenant $MD = CN$, on reconnaît que $BD = l$ et que l'angle D est droit.

Donc, sur le diamètre BC, décrivons une circonférence. Du point B comme centre, avec $l$ pour rayon, coupons cette circonférence en D, D′, par le point A menons une parallèle à CD.

*Remarques.* 1° Lorsque AM passe entre les deux points B et C, on a une somme; tandis que AM′ correspond à une différence.

En effet $BM' - CN' = l$.

2° En décrivant du centre C un arc de rayon $l$, on obtient deux autres solutions.

*Second moyen* (fig. 504). En admettant que les deux perpendiculaires BM, CN, dont la somme égale $l$, soient de même sens, la propriété connue de la base moyenne du trapèze conduit à la construction suivante.

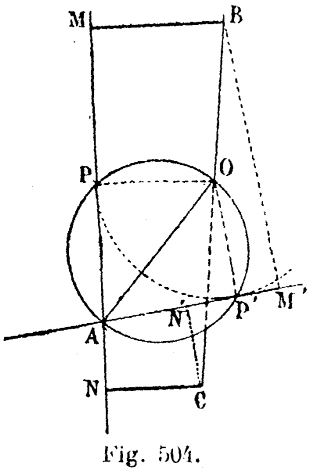


Fig. 504.

Il faut prendre le milieu O de BC. Sur le diamètre AO décrire une circonférence, et la couper par un arc décrit du centre O avec $\frac{l}{2}$ pour rayon. Enfin joindre le point A au point P.

On a : $BM + CN = 2 \cdot PO = l$.

*Remarques.* 1° On obtient une somme lorsque AP laisse d'un même côté les deux points donnés, et une différence dans le cas contraire.

Ainsi $BM' - CN' = 2 \cdot OP = l$.

2° Le problème admet généralement six solutions : sommes ou différences.

**Problème 203. — I.**

836. *Un point A étant donné sur l'un des côtés d'un angle B, trouver sur ce même côté un point équidistant du point donné et de l'autre côté de l'angle.*

Abaissons la perpendiculaire AC sur BY.

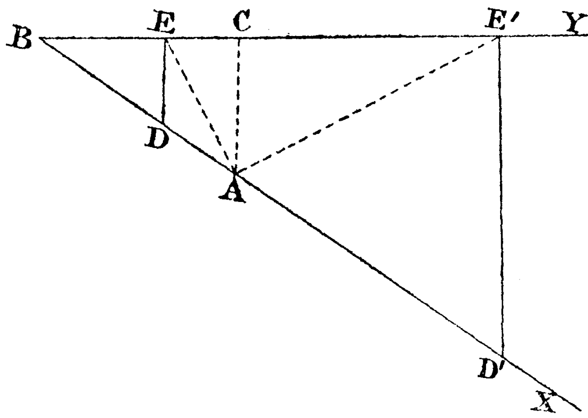



Fig. 505.

Les bissectrices des angles A déterminent les points E, E' qui répondent à la question, car DA = DE, puisque le triangle ADE est isocèle.
De même, D'A = D'E'.

**Problème 203. — II.**

837. *On donne une circonférence, une droite et un point A sur cette ligne. Trouver un second point sur cette droite qui soit équidistant du point donné et de la circonférence.*

Soit B le point tel que BA = BC.

Le triangle ABC est isocèle ; mais on ne peut pas déterminer immédiatement la position du point C, tandis que la parallèle OD donne un triangle isocèle facile à construire, car AD = le rayon.

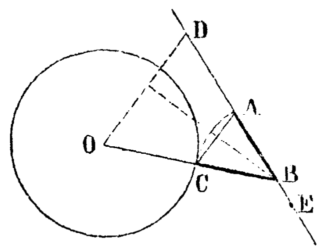



Fig. 506.

Il faut donc prendre AD = $r$, élever une perpendiculaire au milieu de OD, afin de déterminer le sommet B demandé.

*Remarque.* Il y a généralement deux solutions, car on peut porter $r$ de A en E.

**Problème 204.**

838. *Par un point A, mener une droite équidistante d'un point B et d'une circonférence de centre C.*

Soit $r$ le rayon de la circonférence donnée. Par le point A, il faut mener une droite telle que la différence de ses distances aux points C et B égale $r$ (n° 835).

### Problème 204. — I.

**839**. *Par un point* A, *mener une droite équidistante de deux circonférences données.*

1° Soient B et C, $r$, $s$, les centres et les rayons des circonférences données. Par le point A, il faut mener une droite telle que la différence de ses distances aux points B et C égale $r - s$ (n° 835).

2° Il suffit de mener une droite parallèle à une des tangentes communes aux deux circonférences. Il y a donc généralement quatre solutions.

### Problème 204. — II.

**840**. *Mener une droite équidistante de trois circonférences données.*

Chaque groupe de deux circonférences donne quatre tangentes communes, en tout douze tangentes communes à considérer ; chaque tangente donne deux droites qui lui sont parallèles, et qui répondent à la question; on a donc en tout vingt-quatre droites équidistantes des trois circonférences.

*Remarque*. La discussion est intéressante, mais n'offre aucune difficulté.

### Problème 204. — III.

**841**. *Avec un rayon donné* r, *décrire une circonférence qui passe à égale distance de trois points donnés* A, B, C.

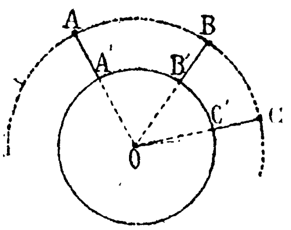



Fig. 507.

On cherche le centre O de la circonférence qui passerait par les trois points donnés, et de ce point on décrit la circonférence demandée.

*Remarque*. Ainsi que pour le problème suivant, n° 842, on peut avoir huit solutions; nous donnerons plus loin (n° 1536 **a**) un cas particulier à allure paradoxale : *Avec un rayon donné, décrire une circonférence qui passe à égale distance de trois points en ligne droite.*

### Problème 205.

**842**. *Trois points* A, B, C *étant donnés, décrire une circonférence équidistante de chacun d'eux, et telle que la distance de chaque point à cette circonférence ait une longueur donnée.*

On procède comme on l'a indiqué (n° 841, fig. 507); mais on porte la longueur donnée $l$ de A en A' et sur le prolongement du rayon OA, ce qui donne deux solutions.

**843**. *Remarques*. 1° Il n'y a que deux solutions lorsque les trois points donnés doivent être hors de la circonférence, ou tous les trois à l'intérieur, ou même sur la courbe; mais le problème général comporte *six* *autres solutions ;* car les points A, B peuvent être extérieurs et C intérieur, ou réciproquement, ce qui donne deux solutions.

Puis on aurait :

A et C d'un même côté et B de l'autre,

ou B et C d'un même côté et A de l'autre.

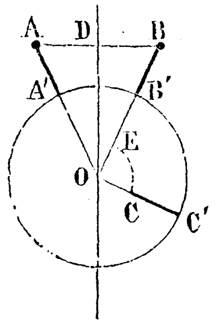


Fig. 508.

Supposons le problème résolu et $AA' = BB' = CC'$.

Le problème revient à déterminer sur la perpendiculaire DO élevée au milieu de AB un point O tel que la différence (OB — OC) ou BE de ses distances OB, OC à deux points donnés égale une grandeur donnée BE ou $2l$.

Ce *problème auxiliaire* dépend du livre VIII, et revient à déterminer les points d'intersection d'une droite donnée DO et d'une hyperbole ayant B et C pour foyers, et la longueur $2l$ pour axe transverse (n° 113, *b*).

2° On peut dire que le problème proposé revient à décrire une circonférence tangente aux trois circonférences égales qui auraient pour centres respectifs A, B, C. Le problème comporte huit solutions.

Lorsque les points donnés sont en ligne droite, deux des huit cercles tangents se transforment en deux tangentes communes aux trois circonférences de centre A, B, C.

3° L'exemple ci-dessus montre qu'il faut étudier les questions avec soin, pour qu'on puisse indiquer le nombre exact de solutions possibles.

### Problème 205. — I.

**844.** *Décrire une circonférence qui passe à égale distance de quatre points* A, B, C, D, *donnés non en ligne droite.*

On décrit une circonférence par trois quelconques de ces points, A, B, C, par exemple. Par le centre O et par le quatrième point D, on trace ODE; on prend le point I milieu de DE, et avec OI comme rayon on décrit la circonférence demandée.

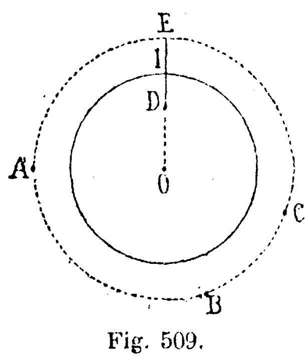


Fig. 509.

Chacun des points donnés pouvant être pris comme quatrième point, on aura, en général, quatre circonférences remplissant la condition imposée.

Le problème serait possible lors même que trois des points donnés seraient en ligne droite; mais l'une des quatre solutions disparaîtrait.

**844 a. Note.** La discussion complète n'offre aucune difficulté ; elle se trouve explicitement indiquée dans un ouvrage élémentaire publié tout récemment : *Méthodes de résolution et de discussion des Problèmes de Géométrie*, par G. Lemaire, professeur à l'école Hanley (1904).

Nous empruntons à cet ouvrage la question 875 **a**.

**Problème 206.**

**845.** *Trouver un point qui soit à une distance donnée* a, *de deux lignes données, droites ou circulaires.*

Pour chacune des deux lignes données, on construit le double lieu des points situés à la distance donnée $a$; les rencontres de ces lieux peuvent fournir huit points remplissant la condition demandée.

*Remarque.* Chacun des points obtenus peut servir de centre à une circonférence décrite avec le rayon $a$ tangentiellement aux deux lignes données.

**Problème 206. — I.**

**846.** *Avec un rayon donné* r, *décrire une circonférence qui passe par un point donné* A, *et dont la plus courte distance à une circonférence donnée* B *soit d'une longueur donnée* e.

La distance BD des deux centres doit être égale à la somme des rayons augmentée de la distance donnée $e$. Donc le centre D doit se trouver sur la circonférence décrite du point B, avec un rayon égal à cette longueur totale.

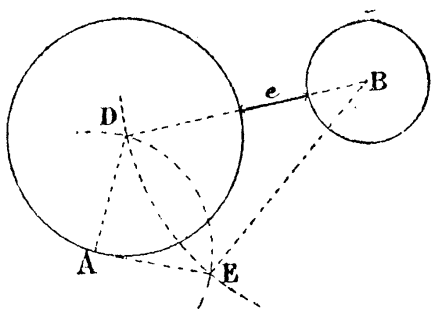


Fig. 510.

Puisque la circonférence demandée doit passer par le point A, son centre doit se trouver sur la circonférence décrite du point A avec le rayon $r$.

La rencontre de ces deux lieux géométriques donne généralement deux points D et E, et ce sont les centres des circonférences qui répondent à la question.

## Sécantes.

**847.** Les problèmes sur les sécantes sont nombreux et intéressants. Pour les résoudre, il faut utiliser non seulement les théorèmes du second livre des *Éléments de Géométrie*, mais encore plusieurs de ceux que l'on a proposés pour exercices; voici les théorèmes qu'on emploie le plus fréquemment :

*Les parties de parallèles comprises entre parallèles sont égales.*

*Les cordes égales sont équidistantes du centre de la circonférence.*

*Lorsque deux circonférences se coupent, la sécante commune la plus longue est parallèle à la ligne des centres* (nº 616).

**Problème 207.**

**848.** *Étant donnés un point fixe* A *et deux droites parallèles, mener par le point* A *une sécante telle que la partie comprise entre les deux parallèles soit d'une longueur donnée* l.

D'un point quelconque B pris sur l'une des parallèles, et avec un rayon égal à la longueur donnée $l$, on décrit un arc qui coupe l'autre parallèle en C et D ; puis par A, on mène des parallèles à BC et BD.

### Problème 208.

**849.** *Étant donnés un cercle* B *et un point fixe* A, *mener par ce point une sécante telle que la partie* CD *comprise dans le cercle soit d'une longueur donnée* m.

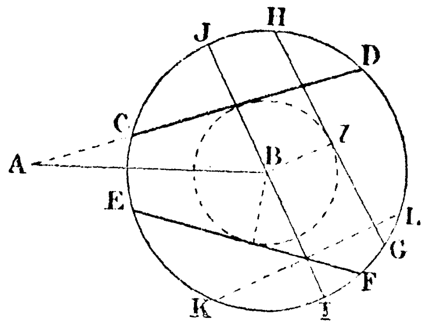


Fig. 511.

D'un point quelconque G, pris sur la circonférence donnée, et avec un rayon égal à la longueur donnée $l$, on décrit un arc qui coupe en H la circonférence donnée ; on décrit, du point B, une circonférence tangente à la corde GH, et l'on mène tangentiellement à cette circonférence auxiliaire les droites AD et AF, qui satisfont au problème.

Car les cordes CD, EF et GH sont égales, comme également éloignées du centre.

### Problème 208. — I.

**850.** *Par un point donné dans un cercle, mener une corde telle que la somme ou la différence des segments égale une longueur donnée* l.

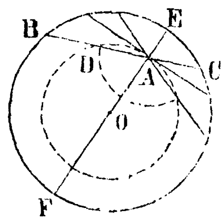


Fig. 512.

1° Pour la somme, on procède comme ci-dessus (n° 849).

2° Pour la différence, supposons le problème résolu.

Soit BAC la corde demandée telle que

$$AB - AC = l.$$

Pour retrancher AC de AB, on peut porter AC de B en D ; alors $AD = l$ ; mais A et D appartiennent à la circonférence décrite du centre O avec OA pour rayon ; donc il faut décrire la circonférence OA ; du point A avec $l$ pour rayon, couper la circonférence auxiliaire en D : la corde CADB répond à la question.

*Discussion.* Il y a généralement deux solutions.

La différence $l$ peut au plus égaler 2AO ; alors la sécante EOF passe par le centre. La différence peut devenir nulle, alors la sécante MN est tangente à la circonférence auxiliaire.

Dans les deux derniers cas, il n'y a qu'une seule solution.

### Problème 208. — II.

**851.** *On donne un point* A *et deux circonférences concentriques ; par le point donné, mener une sécante telle que la partie comprise entre les deux circonférences ait une longueur* l.

D'un point B pris sur l'une des circonférences (fig. 512), on coupe la seconde en D avec la longueur $l$; on décrit une circonférence concentrique aux premières et tangente à la droite BD prolongée; puis, par le point donné A, on mène une tangente à la circonférence décrite.

### Problème 209.

**852.** *Étant données deux circonférences non concentriques, mais dont l'une est intérieure à l'autre, mener à la circonférence intérieure une tangente telle que la corde comprise dans la grande circonférence ait une longueur donnée* l. *Entre quelles limites peut varier cette longueur?*

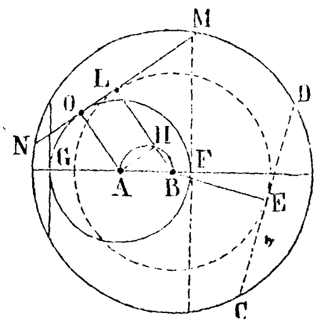



Fig. 513.

Soient A et B les centres des circonférences données, MN, la tangente demandée, égale à $l$.

1° Toutes les cordes égales sont également éloignées du centre. Donc il faut prendre $CD = l$, décrire une circonférence avec le rayon BE, et mener une tangente commune à la circonférence ainsi décrite et à la circonférence A.

2° La perpendiculaire élevée au point G est la plus petite corde que l'on puisse mener, et la perpendiculaire élevée en F est la plus grande.

Quand le point B n'est pas dans le cercle A, la plus grande corde est le diamètre tangent mené par le point B.

### Problème 209. — I.

**853.** Même énoncé, *mais la différence des segments* OM, ON *déterminés par le point de contact doit égaler une ligne donnée* $2d$.

En supposant le problème résolu, et menant les rayons AO, BL (fig. 513), puis la parallèle AH, on reconnaît que

$$OM - ON \quad \text{ou} \quad 2d = 2LO = 2AH$$

ou

$$AH = d.$$

Donc, sur le diamètre AB, il faut décrire une circonférence. Du point A comme centre, avec $d$, demi-différence donnée, couper cette circonférence en H et mener une tangente parallèle à AH.

### Problème 210.

**854.** *On donne un point sur une circonférence, ainsi qu'une corde. Mener par le point une seconde corde qui soit divisée par la première en deux parties égales.*

(Voir *Méthodes*, n° 92.)

**Problème 210. — I.**

855. *On donne un point sur une circonférence et une corde quelconque, etc.*

(Voir *Méthodes,* nº 93, *Remarques,* 2º.)

**Problème 210. — II.**

856. *On donne un point* A *et deux lignes. Mener une sécante* MAN *limitée à ces lignes et telle que* AM = AN.

1º *On donne deux droites.*
2º *Une droite et une circonférence.*
3º *Deux circonférences.*

On peut recourir aux lieux géométriques.

1º Soient les droites BC, BE et le point A (fig. 514).
Sur une droite quelconque AC, prenons AD = AC.
Menons la parallèle DN.

On aura : AN = AM.

On a fréquemment recours à une construction qui n'emploie pas les lieux géométriques (nº 857).

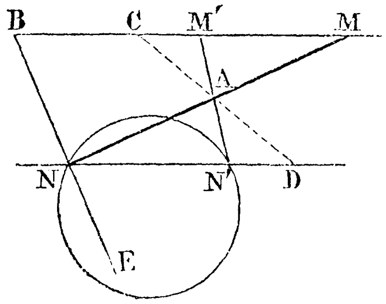


Fig. 514.

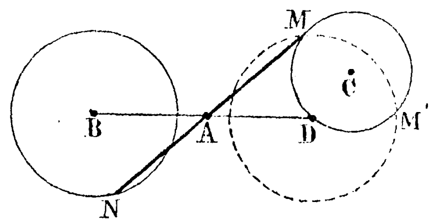


Fig. 515.

2º (Fig. 514). On procède comme dans le 1er cas. La parallèle peut couper la circonférence en deux points, lui être tangente ou ne pas la rencontrer.
On a donc deux solutions, une seule ou aucune.

3º (Fig. 515). Soient les circonférences B et C.
Il faut prendre AD = AB, décrire une circonférence D égale à B.

On aura : AM = AN.

857. *Remarques.* 1º La première question peut se traiter comme il suit :
Soit O le point donné dans l'angle A.
En supposant le problème résolu et OB = OC, on voit que la parallèle OD passe par le milieu de AB; donc il faut mener la parallèle OD, prendre DB = DA, et mener BOC.

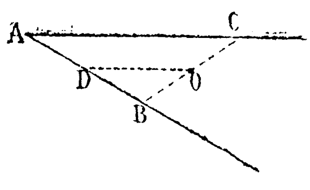


Fig. 516.

2º Le cas particulier suivant est le plus intéressant de tous, et il dépend d'une question déjà traitée (nº 138).

### Problème 210. — III.

858. *Par l'un des points d'intersection de deux circonférences* A *et* B, *mener une sécante qui ait ce point pour milieu.*

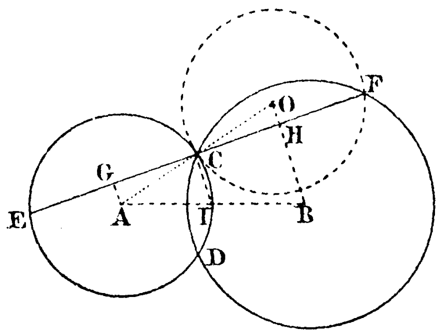



Fig. 517.

Soit EF une sécante qui ait pour milieu le point C.

1er *moyen.* Des centres A et B, menons les perpendiculaires AG et BH, puis CI également perpendiculaire à EF.

Les points G et H sont les milieux des cordes égales CE et CF ; on a donc CG = CH ; et dans le trapèze ABHG, la droite CI étant parallèle aux bases AG et BH, le point I est le milieu de AB. Ainsi la sécante EF est perpendiculaire à la droite CI qui joint le point C au point I, milieu de la ligne des centres.

2e *moyen.* Sur le prolongement de AC, prenons CO = CA, décrivons une circonférence égale à la première, et menons FCE.

### Problème 210. — IV.

859. *On donne deux circonférences concentriques; par un point donné sur la circonférence extérieure, mener une corde qui soit divisée en trois parties égales.*

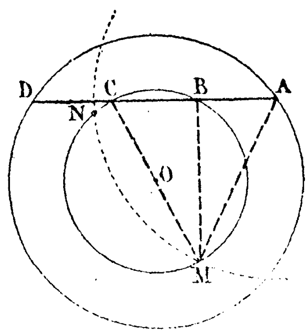



Fig. 518.

1re *Solution.* Soit AB = BC.

Si l'on élève la perpendiculaire BM, on aura AM = CM.

Mais l'angle B est droit, ainsi COM est un diamètre ; donc, du point donné A, comme centre, avec le diamètre de la circonférence intérieure pour rayon, il faut décrire un arc MN, puis mener MOC et AC.

2e *Solution.* On mène le diamètre qui passe par le point A ; sur le premier tiers, à partir de ce point A, on décrit une circonférence dont l'intersection avec le cercle intérieur détermine le point B.

### Problème 210. — V.

860. *Par deux points* A *et* B, *mener deux parallèles distantes l'une de l'autre d'une longueur donnée* l.

Sur AB, comme diamètre, on décrit une circonférence. Du point A, avec $l$, on coupe cette circonférence en C. On joint B à C et, par le point A, on mène une parallèle. La longueur AC ou $l$ est la distance des parallèles.

**Problème 210. — VI.**

**861.** *Par deux points* A *et* B, *faire passer deux circonférences concentriques, éloignées l'une de l'autre d'une longueur* l.

*On sait en outre que les rayons* CA, CB, *qui aboutissent aux points donnés, font entre eux un angle* 2m.

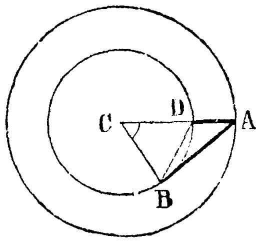



Fig. 519.

En supposant le problème résolu, on remarque que dans le triangle ABC on connaît le côté AB, la différence AD ou $l$ des deux autres et l'angle C. Or chacun des angles égaux CDB, CBD est le complément de la moitié de l'angle C;

donc $$\mathrm{CDB} = 90^\circ - m,$$

$$\mathrm{ADB} = 180^\circ - (90^\circ - m) = 90^\circ + m.$$

Ainsi, on peut construire le triangle ADB, dans lequel on connaît un angle et deux côtés.

**Problème 211.**

**862.** *Mener une parallèle aux bases d'un trapèze, de manière que le segment compris entre les diagonales ait une longueur donnée. Discuter le problème.*

(Voir *Méthodes*, n° 250.)

**Problème 212.**

**863.** *On donne deux circonférences et une droite, mener une perpendiculaire à cette droite, de manière que le segment déterminé par les circonférences soit divisé en deux parties égales par la droite donnée.*

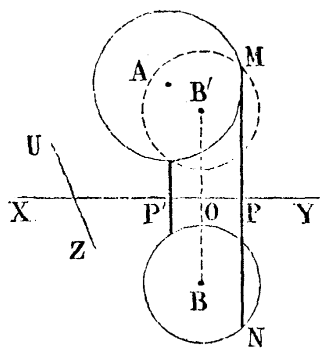



Fig. 520.

La solution est fournie immédiatement en recourant à la duplication. Il suffit de décrire une circonférence B' égale à B et symétrique, par rapport à XY.

MN et M'N' répondent à la question.

*Remarque.* On peut résoudre le problème, même lorsque la droite MN doit être parallèle à une droite UZ oblique par rapport à XY.

Par le point B, on mènerait BOB' parallèle à ZU, et l'on prendrait OB' = OB. D'ailleurs on arrive ainsi au problème suivant.

**Problème 213.**

**864.** *Entre deux circonférences données, inscrire une droite de longueur* l *qui soit parallèle à une ligne* xy.

(Voir *Méthodes*, n° 194 **b**.)

### Problème 214.

865. *On donne deux circonférences extérieures* A *et* B, *ainsi qu'une droite* xy. *Mener une sécante parallèle à* xy, *et telle que la somme des cordes interceptées égale une longueur donnée* l.

(Voir *Méthodes*, n° 194 c.)

### Problème 215.

866. *Par deux points* A *et* B *donnés sur l'un des côtés d'un angle* C, *mener deux sécantes parallèles, telles que la somme des segments interceptés sur ces parallèles ait une longueur donnée* 2l.

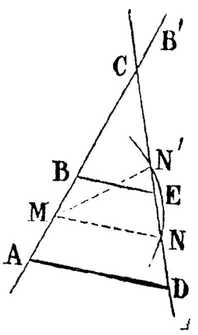


Fig. 521.

Supposons le problème résolu et $AD + BE = 2l$.

La base moyenne $MN = l$; donc, du point milieu M de AB, avec $l$ pour rayon, il faut couper CD.

*Remarques.* 1° Il y a deux solutions, une seule ou aucune, suivant que l'arc coupe CD en deux points, est tangent à cette ligne ou ne la rencontre pas.

2° Pour les points tels que A et B', placés de part et d'autre de C, la construction précédente donnerait deux parallèles, ayant $2l$ pour différence.

### Problème 215. — I.

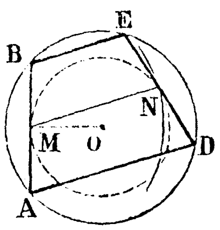


Fig. 522.

867. Même question. *Les deux points* A *et* B *appartiennent à une circonférence.*

Il faut décrire une circonférence avec le rayon OM et prendre $MN = l$.

On aura : $AD + BE = 2l$.

### Problème 216.

868. *Mener, à la base d'un triangle, une parallèle qui soit égale à la somme ou à la différence des segments déterminés sur les deux autres côtés, entre les deux parallèles.*

1° La droite parallèle doit être menée par le centre du cercle inscrit (n° 458).

2° La parallèle doit être menée par le centre du cercle exinscrit tangent à la base (n° 459).

### Problème 216. — I.

869. *Par un point donné* P, *mener une sécante* PBC *qui coupe un angle donné* A *de manière que le périmètre du triangle formé ait une longueur donnée.*

Supposons le problème résolu et soit

$$AB + BC + CA = 2p.$$

On sait que toute tangente menée au cercle exinscrit O donne un triangle de périmètre constant (n° 739).

Donc il faut prendre $AD = AE = p$, élever des perpendiculaires DO, EO, décrire le cercle et mener la tangente PBC.

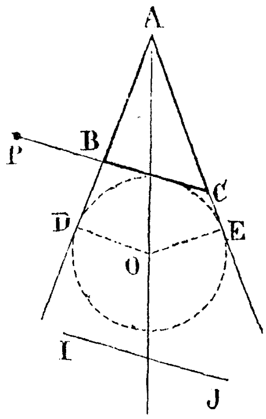


Fig. 523.

**Problème 216. — II.**

**870.** *Couper un angle donné* A *par une sécante* BC *qui soit parallèle à une droite* IJ, *et qui détermine un triangle de périmètre donné.*

Il faut, dans ce cas, mener la tangente BC parallèle à IJ.

**Problème 216. — III.**

**871.** *Questions analogues, lorsque* $AB + AC - BC$ *doit égaler* $2p$.

Il faut mener la tangente PBC de manière que la circonférence O soit inscrite, au lieu d'être exinscrite au triangle.

**Problème 217.**

**872.** *Par un point* P, *mener une sécante* PDE *qui coupe les côtés d'un triangle* BAC, *de manière que* DE *égale* $DC + BE$.

Supposons le problème résolu.

De la relation $DE = BE + CD$, on déduit :

$$AD + DE + AE = AB + AC.$$

Donc le périmètre du triangle ADE est connu, et l'on retombe sur un exercice connu (n° 869).

*Remarques.* 1° Lorsque les segments doivent être extérieurs, on a :

$$D'E' = BE' + CD',$$

donc $$AD' + AE' - D'E' = AB + AC. \qquad (\text{n° } 871)$$

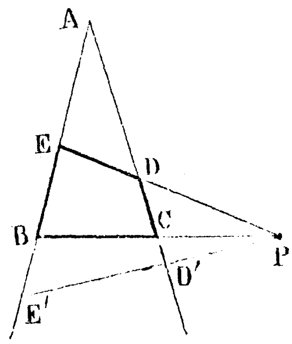


Fig. 524.

2° Solutions analogues, lorsque la sécante doit être parallèle à une ligne donnée (n° 870).

**Problème 217. — I.**

**873.** *Inscrire dans un triangle* ABC *une sécante* DE, *de longueur connue* l, *et telle que cette sécante égale la somme des segments* BD *et* CE.

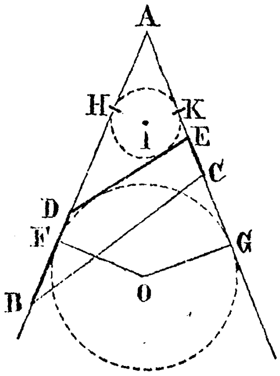


Fig. 525.

Soit le problème résolu, et

$$DE = BD + CE = l.$$

En prenant $AF = AG = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

Tout triangle, tel que ADE, a pour périmètre $AB + AC$. Il suffit donc de mener une tangente DE d'une longueur donnée $l$.

Or le côté DE, compris entre le cercle inscrit et le cercle exinscrit égale $FH = GK$ (nº 743); donc il faut prendre $FH = GK = l$.

Décrire le cercle de centre I, et mener la tangente intérieure DE commune aux deux cercles. (Voir aussi nº 1655 **d.**)

### Problème 218.

**874.** *Sur le côté* AB *d'un triangle* ABC, *déterminer un point* D *tel que la somme des parallèles* DE, DF *menées par ce point aux côtés* CA, CB *ait une longueur donnée* l.

*Entre quelles limites peut varier* l, *suivant la position du point* D.

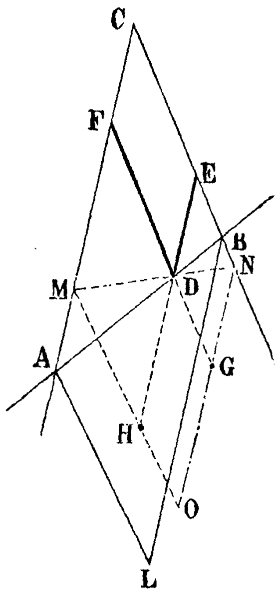


Fig. 526.

Soit le problème résolu, et $DE + DF = l$.

Par le point D, menons MN de manière à obtenir un triangle isocèle.

Pour tout point de la base, la somme sera constante (nº 268, Cor.); d'ailleurs cette somme égale $CM = CN$.

La construction du losange CMON rend la proposition évidente,

car $$DF + DE = FG = HE = MC.$$

On prend donc $CM = CN = l$, et la droite MN détermine le point D.

Pour le point B on a la plus petite longueur, car la somme des parallèles se réduit à BC. Lorsque le point D glisse vers le sommet A, la somme augmente pour atteindre son maximum AC au point A.

### Problème 218. — I.

**875.** Même problème. *Les droites* DE, DF *doivent être parallèles à deux droites données.*

La solution est analogue à la précédente, mais il faut recourir au IIIᵉ livre. Le lieu des points à somme constante n'est plus la base d'un triangle isocèle, mais bien celle d'un triangle scalène. (*Méthodes*, nº 269.)

### Problème 218. — II.

**875 a.** *On donne un triangle* ABC; *couper les côtés* AB, BC *par une droite* MN *qui ait une longueur donnée* l, *de manière que les segments* AM *et* BN *qu'elle détermine sur les côtés* AB, BC, *soient égaux entre eux,* En supposant le problème résolu, on arrive à la construction suivante : Une translation parallèle de MN en AD donnerait DN = AM = BN ; donc le triangle BND est isocèle, et comme DN est parallèle à AB, le point D est sur la bissectrice de l'angle B ; par suite, on doit mener la bissectrice de B, et on coupe cette ligne en D par un arc de cercle décrit du point A comme centre avec $l$ pour rayon ; puis on mène DN parallèle à AB et NM à DA.

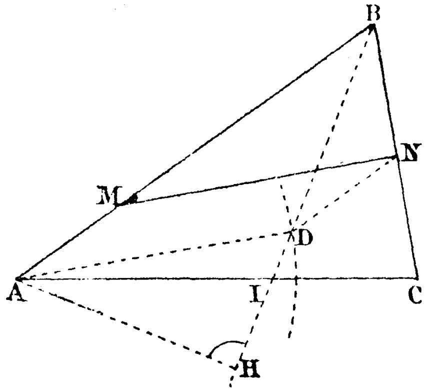


Fig. 527.

*Remarques*. 1° Il y a généralement deux solutions pour une même bissectrice BI.

2° La perpendiculaire AH est le minimum de $l$.

3° On peut considérer aussi la bissectrice extérieure de l'angle B.

4° Au point de vue purement géométrique, on peut avoir quatre solutions, trois, deux, une ou aucune ; tandis qu'au point de vue analytique, le cercle de centre A et de rayon $l$ coupe l'ensemble des deux bissectrices en quatre points réels ou imaginaires.

**Note.** Pour la source de cette question, voir n° 844 a.

### Problème 219.

**876**. *D'un point* A *donné comme centre, décrire une circonférence qui coupe deux circonférences concentriques, de manière que la droite menée par les deux points d'intersection passe par le centre des circonférences concentriques.* (Ritt, *Problèmes de Géométrie et de Trigonométrie*.)

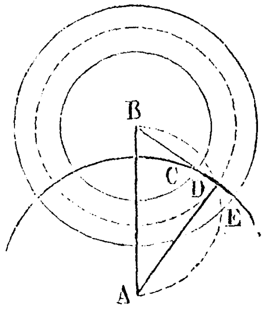


Fig. 528.

En supposant le problème résolu, on reconnait que la perpendiculaire AD sur la corde CE passe par un point D de la circonférence équidistante de deux circonférences données ; donc il suffit de mener une tangente AD à la circonférence équidistante BD, puis mener BD, et prendre AC = AE pour rayon de la circonférence demandée.

### Problème 219. — I.

**877**. *D'un point* B *donné comme centre, décrire une circonférence qui coupe les côtés d'un angle* A *de manière que la corde* MN *soit parallèle à une droite* CD.

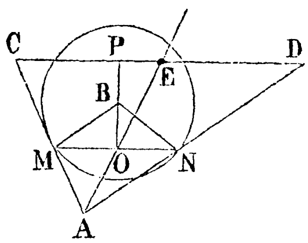


Fig. 529.

Supposons le problème résolu. Le milieu de la corde se trouve sur la perpendiculaire BP abaissée du centre sur la direction donnée CD, et si l'on mène AOE, cette droite sera la médiane du triangle ACD ; donc il faut joindre le point A au point milieu E de CD. Du centre B, abaisser une perpendiculaire sur CD. Par le point O ainsi déterminé, mener MN parallèle à CD : on aura BM = BN ; le rayon de la circonférence demandée sera BM.

**Problème 220.**

878. *Par l'un des points d'intersection de deux circonférences* A *et* B, *mener une sécante qui soit d'une longueur donnée.*

(Voir *Méthodes*, n° 139.)

**Problème 220. — I.**

879. *Par l'un des points d'intersection de deux circonférences* A *et* B, *mener la sécante la plus courte possible.*

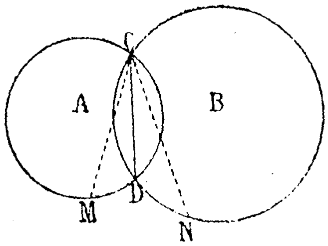


Fig. 530.

C'est la corde commune CD; car toute autre corde CM, CN, est plus longue comme étant plus rapprochée du centre.

*Variation de la sécante.* De la longueur *minima* CD, la sécante arrive à CM, augmente successivement lorsque le point M se rapproche de C, jusqu'à la position où cette ligne devient parallèle à la ligne des centres; à partir de cette position, où elle est *maxima*, elle décroît, devient CN, et atteint de nouveau la position limite CD.

**Problème 220. — II.**

880. *Par l'un des points d'intersection de deux circonférences, mener une sécante telle que la différence des cordes ait une longueur donnée* 2d. (Guilmin, *Exercices de Géométrie.*)

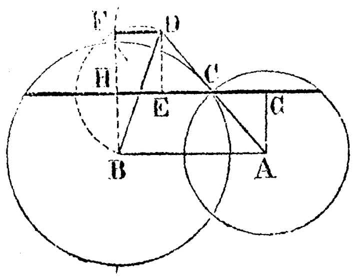


Fig. 531.

Supposons le problème résolu, et soit $CH - CG = d$.

Pour déterminer la différence, on pourrait porter CG de C en E, ou bien prolonger le rayon AC d'une quantité CD égale à CA; puis, abaissant les perpendiculaires DE, DF, on aurait $DF = HE = d$.

Donc, après avoir déterminé le point D, il faut décrire une circonférence sur le diamètre BD; puis du point D comme centre, avec la demi-différence $d$, couper DFB en F. La sécante demandée doit être menée parallèlement à DF.

880 a. **Note.** On ne peut pas résoudre avec la règle et le compas, le problème suivant auquel semblerait conduire le précédent : *Par un point quelconque* A, *mener une sécante telle que la différence des cordes interceptées par cette sécante dans deux circonférences données, soit égale à une longueur donnée.* (H. Lez, *N. A.* 1880, p. 480, question 1351, et *Intermédiaire des mathématiciens*, 1894, p. 131, question 238.)

Voir dans ce même dernier périodique, la réponse faite par M. E. Lemoine (1894, p. 207).

**Problème 221.**

881. *Décrire une circonférence qui intercepte sur trois droites données* AB, CD, EF, *des cordes égales et d'une longueur donnée.*

On inscrit une circonférence dans le triangle formé par les trois droites ; sur l'une de ces lignes à partir du point de contact, on porte une longueur égale à la moitié des cordes que l'on veut obtenir ; puis une circonférence concentrique au cercle inscrit et passant par le point déterminé sur la tangente répond à la question.

*Remarque.* Chacune des trois circonférences exinscrites fournit une autre solution.

**881 a. Note.** Lorsque les cordes interceptées doivent avoir des longueurs inégales $l$, $m$, $n$, la détermination du centre ne peut être effectuée avec la règle et le compas, car elle dépend de l'intersection d'hyperboles équilatères. Il y a quatre solutions. — Le problème du nº 1488 a en est le corrélatif. (Voir un bel article des *Annales de Gergonne,* tome XIX, 1828-1829, page 175, par un *abonné* de Lyon.)

### Problème 221. — I.

**882.** *Mener une sécante à deux circonférences de manière que la corde interceptée par la première circonférence égale une longueur donnée* l, *et que la corde interceptée par la seconde égale une longueur aussi donnée* l'.

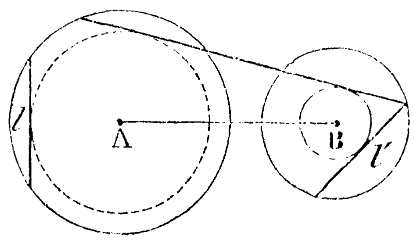


Fig. 532.

Dans la première circonférence, on mène une corde égale à $l$, et dans la seconde, une corde égale à $l'$.

La tangente commune aux circonférences tangentes aux cordes menées répond à la question. (G., nº 193.)

Il y a généralement quatre solutions ; car on peut mener quatre tangentes communes à deux circonférences extérieures. (G., nº 194.)

### Problème 221. — II.

**883.** *On donne un angle et deux longueurs* l *et* r. *Déterminer sur l'un des côtés de l'angle un point tel que la circonférence décrite de ce point comme centre, avec* r *pour rayon, intercepte sur l'autre côté de l'angle une longueur égale à* l.

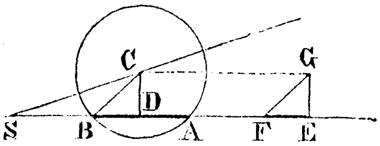


Fig. 533.

Supposons le problème résolu, et soient la corde $AB = l$ et $BC = r$.

Dans le triangle rectangle BDC on connaît $BD = \frac{l}{2}$ et $BC = r$; on peut donc le construire, déterminer sa hauteur et trouver sur l'un des côtés le point C ayant la distance voulue par rapport à l'autre côté de l'angle.

Donc, en un point quelconque E de SE, élevons une perpendiculaire illimitée ; prenons $EF = \frac{l}{2}$ ; du point F avec $r$ pour rayon, coupons la perpendiculaire en G ; par ce point, menons une parallèle GC à SE, le le centre C sera déterminé.

### Problème 221. — III.

884. *Avec un rayon donné* r, *décrire une circonférence qui intercepte sur deux droites données* AB *et* CD *des longueurs données* m *et* n.

Pour chaque droite donnée, on décrit le lieu des centres des circonférences qui, avec le rayon donné, intercepteraient des cordes égales à la longueur donnée (n° 881). Les rencontres de ces lieux donnent quatre centres et, par suite, quatre solutions.

### Problème 222.

885. *On donne deux droites* AA′, BB′ *et un point* C. *Du point donné comme centre, décrire une circonférence qui intercepte sur les lignes données des cordes dont la somme égale une ligne donnée* $2l$.

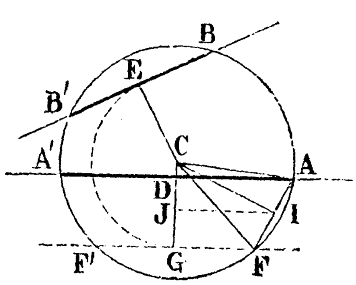


Fig. 534.

Supposons le problème résolu, et

$$AA' + BB' = 2l.$$

Il suffit de s'occuper de la moitié des cordes.

Prenons une corde FF′ égale à BB′, mais parallèle à AA′.

Prenons $CG = CE$; on aura $AD + FG = l$.

Menons la base moyenne du trapèze AFGD; on aura $IJ = \frac{l}{2}$, valeur connue.

Donc il faut joindre le centre C au point I que l'on vient de déterminer, élever une perpendiculaire AIF à la droite CI, et décrire une circonférence avec le rayon $CA = CF$.

*Remarque.* On procède d'une manière analogue quand on donne la différence; mais la perpendiculaire AF est alors une des diagonales du trapèze.

### Problème 223.

886. *Avec un rayon donné* r, *décrire une circonférence qui coupe en deux parties égales deux circonférences* A *et* B *données de grandeur et de position.*

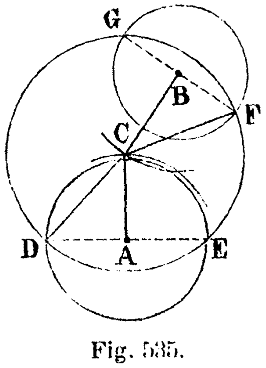


Fig. 535.

Supposons le problème résolu, et soient $CD = CF = r$ et les diamètres DE, FG.

On peut déterminer AC et BC, car dans chacun des triangles rectangles CBF, CAD, l'hypoténuse égale *r*, et l'un des côtés de l'angle droit égale AD ou bien BF.

Donc du centre A, avec la distance trouvée AC pour rayon, on décrit un arc qui coupe en C et C′ l'arc décrit du centre B, avec la seconde longueur obtenue.

**Problème 223. — I.**

**887**. *Avec un rayon donné, décrire une circonférence qui coupe une circonférence de centre* A, *suivant une corde de longueur donnée, et une circonférence* B, *suivant une corde de longueur aussi donnée.*

Solution analogue à la précédente (nº 886).

**Problème 223. — II.**

**888**. *Avec un rayon donné* r, *décrire une circonférence qui intercepte sur une circonférence donnée* A, *une corde* CD *parallèle et égale à une droite donnée* m.

**Problème 223. — III.**

**889**. *Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés* A *et* B, *et qui coupe une circonférence de centre* C, *suivant une corde parallèle à une droite donnée* xy.

Le centre O de la circonférence demandée se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB et sur la perpendiculaire abaissée du point C sur $xy$. Le rayon égale AO = BO.

**Problème 223. — IV.**

**890**. *Décrire une circonférence qui passe par un point* A, *qui coupe une circonférence* B *suivant une corde parallèle à une droite* uv *et une circonférence* C *suivant une corde parallèle à une droite* xy.

Le centre O de la circonférence demandée se trouve sur la perpendiculaire abaissée du centre B sur $uv$ et sur la perpendiculaire abaissée du centre C sur $xy$. Le rayon égale AO.

**Problème 224.**

**891**. *Couper les trois côtés d'un triangle* ABC *par une sécante* LMN *de manière que* LM = MN = $l$.

Recourons au problème contraire (nº 213). Soit ABC le triangle donné. Prenons L'M' = M'N' = $l$, et par les points L', M', N', faisons passer trois lignes formant un triangle A'B'C' égal au triangle donné. Sur L'M', il faut décrire un segment capable de l'angle A ; sur M'N', un segment capable du supplément de B. Puis par M', menons une sécante A'M'B' égale à AB (nº 878).

Le triangle obtenu A'B'C' sera égal à ABC, triangle donné. Il ne reste plus qu'à prendre AL = A'L' et BN = B'N'. La droite LMN sera égale à L'M'N'.

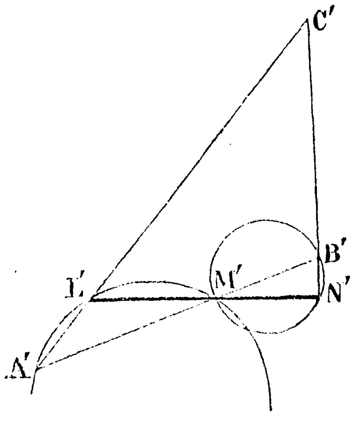


Fig. 536.

**Problème 224. — I.**

**892.** *Dans un triangle* ABC, *inscrire un triangle égal à un triangle donné* LMN.

On a recours au problème contraire, et l'on procède comme ci-dessus.

(Voir *Méthodes*, n° 215.)

**Problème 225.**

**893.** *On donne deux points* A *et* B *sur une circonférence, ainsi qu'un diamètre* EF *fixe de position. Déterminer sur la circonférence un point* C, *tel que les cordes* CA, CB *déterminent sur le diamètre fixe un segment* MN *de longueur donnée.*

(Voir *Méthode*, n° 101.)

**Problème 226.**

**894.** *On donne deux points* A *et* B *sur une circonférence, ainsi qu'un diamètre* EF *fixe de position. Déterminer sur la circonférence un point* C, *tel que les cordes* CA, CB *déterminent sur le diamètre fixe, à partir du centre* O, *des segments égaux* OM, ON.

(Voir *Méthodes*, n° 102.)

Pour les problèmes n$^{os}$ 893 et 894, on peut aussi recourir à la méthode algébrique, n$^{os}$ 330 et 331. En utilisant la relation de Fermat (n° 1329) on pourrait proposer des questions analogues aux deux précédentes.

**Problème 226. — I.**

**895.** *Sur un diamètre, à partir du centre, on donne deux segments égaux* OM, ON; *on joint un point quelconque* C *de la circonférence à* M, O, N *de manière à obtenir* A, T, B *sur la circonférence, on mène* ABG; *prouver que* GT *est tangente à la circonférence.*

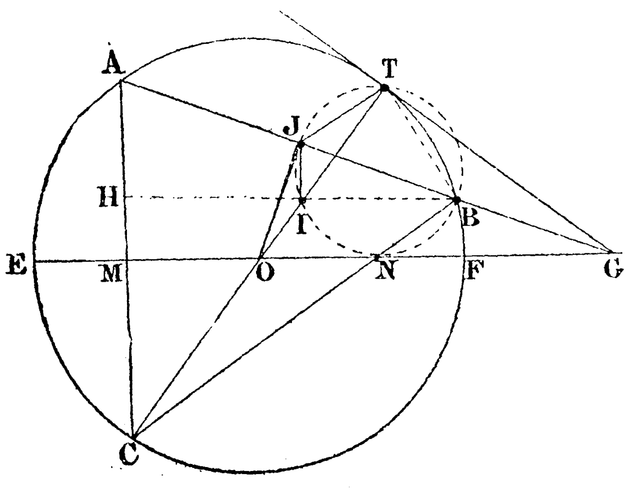



Fig. 537.

Menons la parallèle BH; elle est divisée en deux parties égales par COT.

Du centre abaissons la perpendiculaire OJ sur AB; le point J est le milieu de la corde; donc IJ est parallèle à AM.

On a :

angle IJB = CAB = ITB;

donc le quadrilatère IJTB est inscriptible.

Par suite, l'angle OTJ = IBJ = OGJ.

Les angles OTJ et OGJ étant égaux, le quadrilatère OJTG est inscriptible; donc l'angle OTG = OJG = 90°.

**Note.** Les questions 894 à 896 ont été proposées et résolues plusieurs fois: voir *Journal mathématique de Vuibert*, 1878, p. 108; *Applications de Blanchet* par Noël, en 1879; Vuibert, 1886, p. 13; 1891, p. 99, n° 2677. Proposée de nouveau par A.-S. RAMSEY, d'Edimbourg, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* en 1894, cette revue a répondu en 1894, p. 258, et 1895, p. 287, n° 382. Voir aussi le n° suivant des *E. de G.,* 895 b. Dès 1882, nos *Exercices de Géométrie* ont étudié et généralisé ce problème (n^os 102, 274 et 276).

**Théorème 226. — II.**

**895 a.** *Pour déterminer un point C, tel qu'en le joignant à deux points donnés* A *et* B, *on obtienne des segments égaux* OM, ON *sur un diamètre donné, il suffit de mener* ABG, *puis la tangente* GT *et le diamètre* TOC.

On retrouve ainsi la construction donnée par Georges RITT dans ses *Problèmes de Géométrie analytique,* et par DESBOVES dans ses *Questions de Géométrie,* 2e édition, p. 187 et 188. — IX.

On connaît une solution de ce même problème par *les polaires.*

(*Traité de Géométrie,* par MM. ROUCHÉ et COMBEROUSSE, 7e édition, n° 347, p. 244.)

**Note.** *Le Traité de Géométrie* a eu sept éditions (de 1866 à 1900). Charles DE COMBEROUSSE a collaboré aux six premières ; on lui doit la *partie classique* proprement dite; Eugène ROUCHÉ a fait les *Compléments,* et revu la septième édition. C'est à ce dernier que nous devons les renseignements relatifs au partage du travail entre les collaborateurs.

*Mathesis* a donné une courte notice sur E. ROUCHÉ. (Voir 1910, p. 241.)

* ROUCHÉ, né à Sommières (Gard), en 1832, mort à Lunel (Hérault), en 1910, membre de l'Institut, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, etc.

* DE COMBEROUSSE, ingénieur civil, professeur à l'École Centrale et au Conservatoire des Arts et Métiers.

**Problème 226. — III.**

**896.** 1° Question 894, *en remplaçant le diamètre par une corde donnée et son point milieu.*

(Voir *Méthodes,* n° 274.)

2° Même question ; *la droite donnée est quelconque, et le point* O *est donné sur cette droite.*

(Voir *Méthodes,* n° 276.)

## Angles.

**897.** Les problèmes proposés peuvent se rapporter à trois groupes principaux :

1° *Division des angles.* Ce groupe comprend toutes les questions où l'on doit mener la bissectrice d'un angle donné (n^os 898, 899) et la division d'un arc en trois parties égales (n^os 910, 912).

2° *Construction d'un angle égal à un angle donné* (n^os 900, 901, 917, 919). Dans ce groupe, on peut placer les questions où l'on demande que deux ou trois segments rectilignes donnés soient vus sous un même angle (n^os 902, 903, 904, 915, etc.).

3° Quelques exercices étudient la variation d'un angle dont le sommet se déplace, ou dont les côtés varient suivant une certaine loi (n^os 923, 924, 929).

Pour résoudre les problèmes des deux derniers groupes, on a surtout recours à l'*arc de segment capable d'un angle donné* (nos 904, 907, 919, 921, 924, 926) et à la *méthode par duplication* (nos 902, 914, 915, 925).

### Problème 227.

**898.** *Étant donnés la bissectrice* GH *et l'un des côtés* AB *d'un angle, trouver l'autre côté sans recourir au sommet.*

On prend deux points A et B sur le côté connu, et l'on détermine les points symétriques A′ et B′ par rapport à la bissectrice donnée.

### Problème 227. — I.

**898 a.** *Diviser un angle* A *en deux parties égales sans le secours du compas.*

A l'aide d'une règle divisée, on prend sur les côtés de l'angle, à partir du sommet S, des grandeurs SA, SA′ égales entre elles, et SB, SB′ égales entre elles; l'on mène AB′ et BA′; soit O leur point de concours : la droite SO est la bissectrice de l'angle S.

### Problème 227. — II.

**899.** *Dans un triangle mener une droite qui soit symétrique d'une médiane, par rapport à la bissectrice qui part du même sommet.*

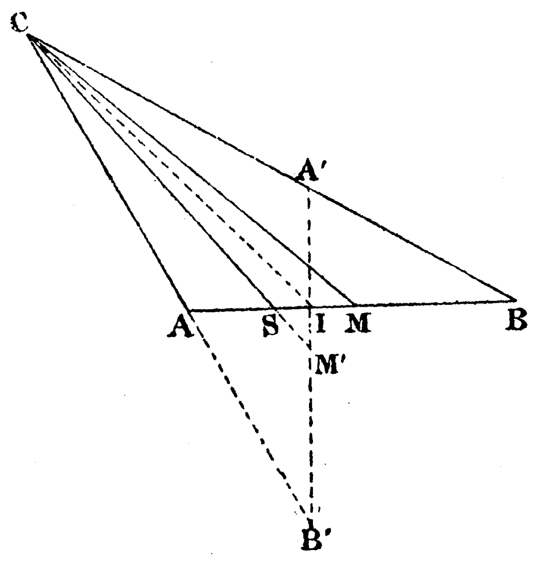


Fig. 538.

Soit AM = BM.

Il suffit de prendre CB′ = CB, CA′ = CA, joindre B′A′ et mener une droite du sommet C au point M′ milieu de B′A′.

Les droites CM, CM′ sont également inclinées sur la bissectrice CI.

(Voir ci-après no 1229, II.)

**899 a. Note.** La droite CM′, d'abord nommée *médiane antiparallèle* par M. Lemoine, est connue sous le nom de *symédiane*, que lui a donné M. Maurice d'Ocagne (*N. A.*, 1883, pages 450, 459 ; voir aussi 1884, p. 25 ; 1885, page 360).

M. Lemoine, dès 1873, dans les *N. A.*, a indiqué plusieurs propriétés du point commun au trois *médianes antiparallèles* d'un triangle; cette étude peut être regardée comme l'origine des recherches contemporaines qui ont conduit à la *Géométrie du triangle.* (Voir ci-après, nos 2330 et 2352.)

M. d'Ocagne a étudié d'une manière toute particulière les propriétés des lignes mêmes qu'il avait nommées *symédianes,* et ce dernier nom a prévalu.

La *Géométrie du triangle* est cultivée avec ardeur, elle a donné lieu à de nombreux travaux ; on en trouvera l'indication dans le *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales ;* on lira surtout avec intérêt l'*Étude bibliographique et terminologique* de M. Vigarié, 1887, et l'étude plus complète du même auteur en 1889, au *Congrès de Toulouse ;* cette belle étude est donnée comme supplément dans *Mathesis*, 1890. Plus tard, au congrès de Lyon de l'*A. F.*, en 1906, M. Brocard a donné la bibliographie de 1895 à 1905, d'après M. Alasia.

Nous nous bornerons à la menue monnaie de ces nouvelles découvertes, et à quelques modestes recherches personnelles ; cela suffira néanmoins pour enrichir notre recueil de plusieurs questions très intéressantes. (Voir *Géométrie du triangle*, n° 2260.)

### Problème 228.

**900**. *Par un point donné* A, *mener une droite qui coupe une droite donnée* BC *sous un angle donné* m.

En un point quelconque de BC, avec cette ligne pour un des côtés, on fait un angle égal à $m$; par le point A, on mène une parallèle au second côté de l'angle formé avec BC.

Il y a deux solutions.

### Problème 228. — I.

**901**. *On donne une droite et deux points hors de cette ligne. Déterminer un point sur cette droite de manière qu'une des médianes du triangle ainsi formé coupe la droite sous un angle donné.*

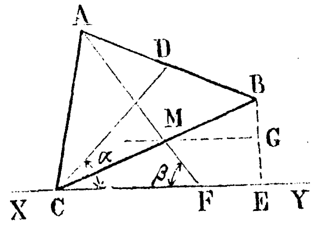


Fig. 539.

Soient ABC le triangle demandé; XY et A, B les données.

1° Pour la médiane DC, il suffit de mener par le point milieu D de la base AB une droite DC qui rencontre XY en faisant l'angle donné (n° 900).

2° Si on demande que la médiane parte d'un des deux sommets donnés, de A, par exemple, il faut mener AF formant l'angle donné. Le côté BC doit être divisé en deux parties égales par la médiane; il suffit donc de mener une parallèle GM équidistante de B et de XY, puis de mener BMC, car on aura BM = MC (n° 563).

### Problème 228. — II.

**902**. *Deux murs* OC *et* OD *forment un angle quelconque ; deux personnes placées en* A *et* B *dans cet angle sont tournées l'une vers le mur* OC, *l'autre vers le mur* OD. *On demande où il faut placer deux miroirs* E *et* F, *appliqués aux murs, pour que ces deux personnes puissent se voir l'une l'autre.*

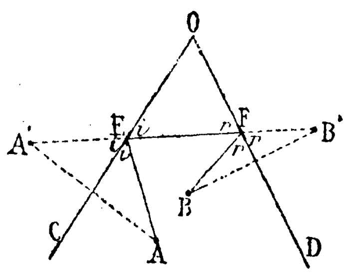


Fig. 540.

On détermine les points A′ et B′ symétriques de A et B par rapport aux droites OC et OD, et l'on trace A′B′, qui détermine en E et F les points demandés.

Car les angles $i$ sont égaux, ainsi que les angles $r$; donc le rayon lumineux AE se réfléchit suivant EF, et celui-ci revient suivant FB. Réciproquement, le rayon lumineux qui part de B suivra le chemin brisé BFEA.

**Problème 228. — III.**

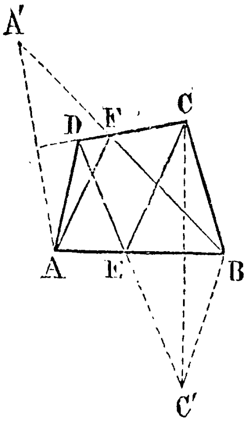



Fig. 541.

**903.** *Dans un quadrilatère quelconque* ABCD, *trouver les points du périmètre d'où deux côtés opposés*, AD *et* CB, *par exemple, sont vus sous le même angle.*

Pour avoir le point situé sur AB, par exemple, déterminons le symétrique C' de C (nº 902), et menons DC', puis EC; les angles AED, BEC sont égaux.

De même, en déterminant le point A' symétrique de A par rapport au côté DC, on obtient le point F, d'où les côtés AD, BC sont vus sous des angles égaux.

**Problème 229.**

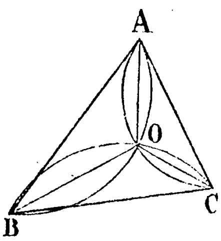



Fig. 542.

**904.** *Trouver un point d'où les trois côtés d'un triangle soient vus sous le même angle.*

Soit le problème résolu, et O le point demandé.

Puisque les angles en O sont égaux, chacun d'eux vaut les $^4/_3$ d'un droit. Donc sur deux côtés du triangle, il faut décrire un segment capable de 120°.

D'ailleurs voir une question antérieure (nº 754).

**Problème 229. — I.**

**905.** *Trouver un point d'où le côté* AB *d'un triangle soit vu sous un angle donné* m, *le côté* BC *sous un angle* n, *et le côté* CA *sous un angle* p.

1º Si le point est intérieur, on doit avoir $m + n + p = 4$ droits.

Sur AB, on décrit un segment AOB capable de $m$; sur AC, un segment AOC capable de $n$; le troisième angle BOC égalera $p$.

2º Si le point est extérieur, un des angles doit égaler la somme des deux autres; on procède d'ailleurs comme ci-dessus.

**Problème de Brocard 229. — II.**

**906.** *Trouver à l'intérieur d'un triangle* ABC *un point* O, *tel que les angles* OAB, OBC, OCA *soient égaux entre eux.* (*N. A.*, 1875, p. 192, question 1166, H. Brocard; résolue p. 286 par C. Chadu.)

Il faut décrire respectivement sur les côtés $a$, $b$, $c$ des segments capables du supplément des angles C, A, B.

1º Les trois segments se coupent au même point O, car leur somme correspond à $2\pi$.

2º L'angle $\text{OAB} = \text{OBC}$, car ils ont même mesure : demi-arc OB, puisque le segment AOB ou $\pi - \text{B}$ est tangent à BC.

De même l'angle OBC = OCA comme ayant pour mesure demi-arc OC.

*Remarques.* 1° On obtiendrait une seconde solution O', en décrivant des segments AO'B tangent à *b*, BO'C tangent à *c*, CO'A tangent au côté *a*.

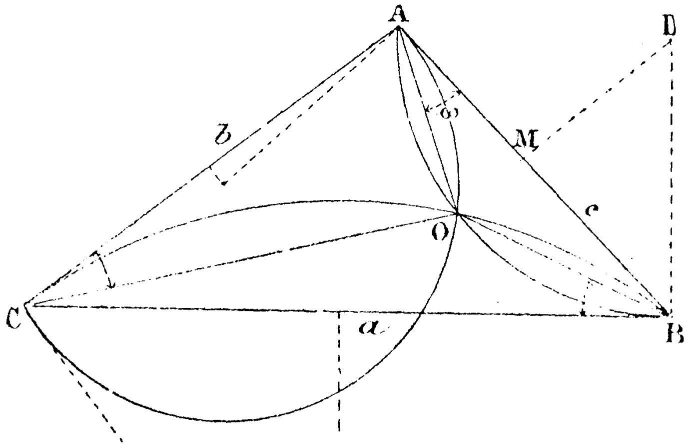



Fig. 543.

2° Les circonférences qui passent par deux des sommets d'un triangle, et qui sont tangentes à l'un de ses côtés adjacents, sont nommées *circonférences adjointes.*

3° Deux points O et O' répondent à la question posée ; ces points sont nommés *points de Brocard.*

**907. Note.** La question ci-dessus, proposée dans les *Nouvelles Annales* en 1875, est le point de départ de travaux nombreux et remarquables, qui, venant s'adjoindre au *point* et aux *cercles de Lemoine* (*N. A.*, 1873, p. 364), constituent les deux principales sources de la *Géométrie récente*, ou *Géométrie du triangle.*

Nous aurons l'occasion de revenir sur la question précédente et de parler de MM. Lemoine et Brocard. (Voir aussi les n$^{os}$ 1097 et 2430.)

M. Chadu, professeur au lycée de Mont-de-Marsan de 1874 à 1876, eut l'honneur de résoudre la question proposée au concours d'agrégation en 1874, question qui revenait à celle posée par M. Lemoine en 1873, puis la question de M. Brocard (*N. A.*, 1875, pages 175 et 286) ; son nom est souvent cité en 1875 et 1876.

**Problème de la Carte 230.**

**908.** *Trois points* A, B, C, *étant donnés, trouver un point d'où les distances* AB *et* BC *soient vues sous des angles donnés* r *et* s.

De part et d'autre de la droite AB, on décrit un segment ADFB, AGEB capable de l'angle *r*; on décrit de même, sur BC, les segments BDHC et BEMC, capables de l'angle *s*.

Les points D et E, communs aux arcs de ces segments, sont les points demandés.

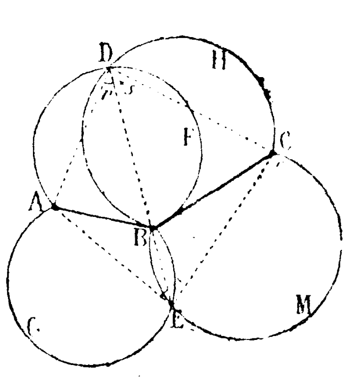



Fig. 544.

**909. Note.** 1° *Le problème de la Carte* est attribué à Pothenot, qui le publia dans les *Mémoires de l'Académie* en 1692. Pothenot fut adjoint à La Hire pour continuer la méridienne de Paris au Nord.

Les Anglais réclament la priorité pour John Collins, dont la solution se trouve dans les *Transactions philosophiques* de 1671.

Enfin le problème avait été déjà traité par Snellius, dans son *Eratosthenes batavus,* publié en 1624 ; il indique l'emploi de deux *segments capables* pour déterminer, par une seule station, la position d'un quatrième point, lorsqu'on connaît déjà les distances mutuelles de trois autres points. (*N. A.*, 1857 ; *Bulletin*, page 89, et *Mathesis*, 1884, p. 64.)

Le *problème de la Carte* se résout d'une manière élégante par la Trigonométrie. (*Trigonométrie*, F. J., n° 92.)

M. G. LEMAIRE a demandé l'historique du *problème de la Carte*, par l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1905, pages 266, 267, n°s 2974-2976. L'intéressante et savante Revue, utilisant toutes les bonnes volontés, a répondu surabondamment aux questions posées : 1906, p. 122, MM. H. BOSMANS, H. BROCARD ; p. 219, G. LEMAIRE : 1907, p. 15, N. PLAKOWO.

2° M. BELLAVITIS indique la construction suivante très simple (fig. 545).

On fait l'angle BCF $= r$, l'angle BAF $= s$, et l'on joint le sommet B au point F.

Le triangle BCF est semblable à BAD ; par suite, il suffit de faire l'angle

$$ABD = FBC \quad \text{et} \quad BAD = BFC \quad \text{ou} \quad BCD = BFA$$

La construction a été suggérée par la *Méthode des équipollences*. Dans cette méthode, « on considère les droites tracées sur un plan dans des directions quelconques ; puis, les représentant par des notations qui impliquent à la fois la grandeur et la direction, et cherchant à exprimer les relations géométriques qui lient entre elles les diverses parties des figures planes, on arrive à établir un calcul (*calcul des équipollences*), dont les règles sont les mêmes que celles du calcul algébrique ordinaire. On voit que, de la sorte, on se trouve mis en possession d'un instrument analytique facile à manier, et dont l'usage est très général en ce qui touche la géométrie plane. » (*Exposition de la méthode des équipollences*, par GIUSTO BELLAVITIS, traduit par C.-A. LAISANT.)

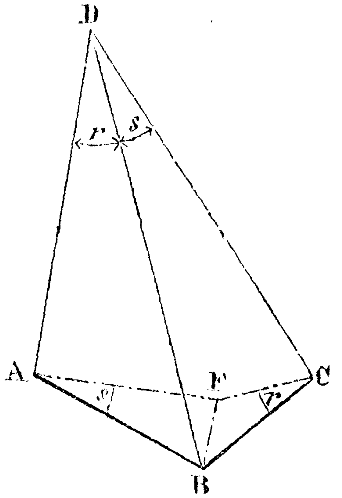


Fig. 545.

* SNELLIUS (1580, ou 1581 à 1626), géomètre hollandais, né à Leyde, où il professa avec distinction, publia plusieurs ouvrages remarquables; il aurait même découvert, dit *Huygens*, la véritable loi de la réfraction.

Tous les biographes indiquent l'année 1591 comme date de sa naissance; mais des recherches toutes récentes ont démontré qu'il est né en 1580 ou 1581. Nous devons ce renseignement à M. S. W. TESCH, de la Haye.

* M. TESCH, professeur à la Haye, a généralisé le *théorème de Joachimsthal*, relatif aux normales menées à une conique par un même point (d'après *Mathesis*, 1887, page 28). Il est un des collaborateurs de M. SCHOUTE pour la publication de l'utile *Revue semestrielle des publications mathématiques* (Amsterdam).

* BELLAVITIS (1803-1880), professeur à Padoue, auteur de la *méthode des Equipollences*.

**Problème 231.**

**910**. *Diviser un angle droit en trois parties égales.*

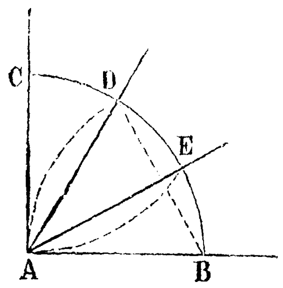


Fig. 546.

Du sommet A, avec un rayon quelconque, il faut décrire un arc de cercle ; des centres B et C, avec le même rayon, décrire les arcs AD et AE.

Le triangle DAB a les trois côtés égaux ; chaque angle vaut donc $^2/_3$ de droit; par suite, CAD vaut un tiers de droit.

**Note**. Le problème de la *trisection d'un angle quelconque* ne peut être résolu en n'employant que la règle et le compas (voir n° 501).

La moitié de l'angle CAD est le tiers de l'angle de 45°.

**Problème 232.**

**911.** *Par un point* B *donné sur un diamètre* AC, *mener une corde* DBE, *telle que l'arc* CE *soit triple de l'arc* AD.

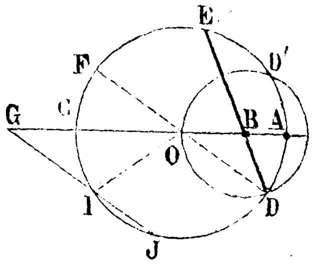


Fig. 547.

Supposons le problème résolu. Menons le diamètre DOF.

L'arc $CF = AD = \frac{1}{3}\,CE = \frac{1}{2}\,FE$.

Or l'angle D a pour mesure $\frac{1}{2}$ FE, et l'angle $BOD = COF$, qui a pour mesure arc $CF = \frac{1}{2}$ FE; donc l'angle $BOD = BDO$.

Ainsi le triangle BOD est isocèle ; par conséquent, du point B comme centre avec BO pour rayon, il faut couper la circonférence donnée et mener DBE.

*Remarque.* Il faut que $OB > AB$. Le point D′ correspond à une seconde solution.

**Problème 232. — I.**

**912.** Même question, *mais le point donné est sur le prolongement du diamètre.*

Quand le point donné G, par exemple, est extérieur au cercle, il faut couper la circonférence donnée par un arc décrit du point G avec OC pour rayon (fig. 547).

En effet, angle $G = GOI$, puisque le triangle GIO est isocèle par construction ; l'angle G, comme son égal GOI, a pour mesure CI.

Or G a aussi pour mesure : $\dfrac{\text{arc AJ} - \text{arc CI}}{2}$,

d'où $$\text{arc AJ} = 3\ \text{arc CI}.$$

**Problème 232. — II.**

**913.** *Sur une cévienne* AD *d'un triangle* BAC, *déterminer un point* O, *d'où les segments* BD, CD *soient vus sous des angles égaux.*

Déterminer le point C′, symétrique de C par rapport à AD, puis mener BC′O.

**Note.** On nomme *cévienne* toute droite qui part d'un sommet d'un triangle pour se limiter au côté opposé à ce sommet. (A. Poulain.) On dit aussi *transversale angulaire.* (J. Neuberg.)

**Problème 232. — III.**

**913 a.** *On donne deux droites concourantes* OX, OY, *et un point* M. *Par ce point, mener deux droites* MAB, MDC *formant entre elles un angle donné* V *et coupant les premières de manière que le quadrilatère* ABCD *soit inscriptible.*

Soit le problème résolu; le quadrilatère étant inscriptible, les angles opposés B et D sont supplémentaires; donc les angles aigus ABO et D sont égaux ; ainsi les droites MB, MD rencontrent XO, YY′ sous des angles égaux ; il suffit donc de mener MI parallèle à la bissectrice de l'angle XOY, puis faire des angles IMA, IMC égaux à la moitié de l'angle donné V.

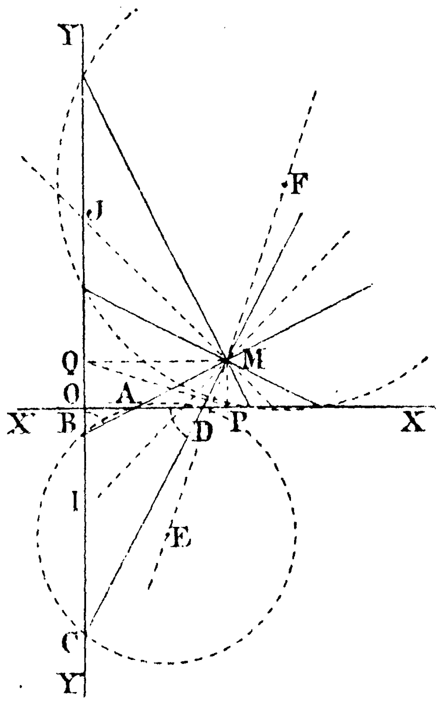



Fig. 548.

*Remarque.* La parallèle MJ à la bissectrice de XOY′ donne une seconde solution. Pour cette première partie, les axes OX, OY peuvent être quelconques.

**913 b. Note.** Voir l'étude très intéressante publiée par M. Dessenon, en 1889, alors professeur au lycée Saint-Louis. (*Examens de l'Ecole navale,* concours de l'Ecole navale en 1889, p. 23.)

1° Les axes OX, OY étaient orthogonaux ; l'énoncé ci-dessus n'est que la première partie de question analytique posée.

2° Le lieu des centres des cercles circonscrits aux quadrilatères divers qu'on obtient en faisant varier l'angle V est une droite passant par M et perpendiculaire à la diagonale PQ du rectangle MPOQ ; la diagonale PQ est l'axe radical commun de toutes les circonférences circonscrites.

3° Le lieu des centres E, F pour un angle donné V, lorsque M décrit une circonférence ayant l'origine O pour centre, se compose de deux ellipses égales ayant O pour centre, et dont les axes sont dirigés suivant les bissectrices des angles formés par XX′ et YY′.

### Problème 233.

**914.** *Sur une droite donnée* XY, *déterminer un point* C, *tel que les **tangentes menées** de ce point à deux circonférences **données*** A *et* B ***fassent des angles égaux** avec* XY.

(Voir *Méthodes,* n° 147.)

### Problème 233. — I.

**915.** *On donne une droite* XY *et deux points* A *et* B, *situés du même côté de la droite. Trouver un point* C *sur* XY, *tel que l'angle* ACX *soit double de l'angle* BCY.

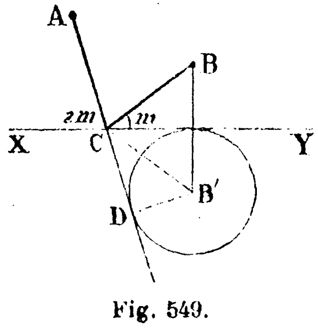



Fig. 549.

La solution est très simple en recourant à la duplication (n° 145).

Après avoir déterminé B′ symétrique de B, on décrit une circonférence tangente à XY, et par le point A on mène une tangente ACD.

On a : angle BCY = B′CY = B′CD,

d'où angle BCY = $^1/_2$ DCY = $^1/_2$ ACX.

**Problème 233. — II.**

**916.** *Déterminer le point* C, *de manière que la somme des angles* ACX *et* BCY *ait une valeur donnée; quel est le minimum de cette valeur?*

Sur AB, il faut décrire un segment capable de l'angle supplémentaire de la somme donnée.

Le minimum de la somme a lieu pour le maximum du supplément; or le maximum de l'angle ACB est donné par l'arc tangent à XY. Il y a deux maxima pour ce supplément; mais il faut savoir décrire les circonférences passant par deux points A, B, et tangentes à une droite XY. (*G.*, nº 298. *E. de G.*, nº 948.)

**Problème 233. — III.**

**916 a.** *Sur une cévienne* AD *d'un triangle* BAC, *déterminer un point* O, *d'où le segment* BD *soit vu d'un angle double de l'angle* DOC.

Déterminons le point C', symétrique de C, par rapport à AD; du centre C' décrivons une circonférence tangente à AD, et menons la tangente BO.

En considérant le prolongement de la cévienne, on a généralement deux solutions.

**Problème 234.**

**917.** *Trouver un point d'où deux cercles donnés* A *et* B *soient vus, sous un angle donné.*

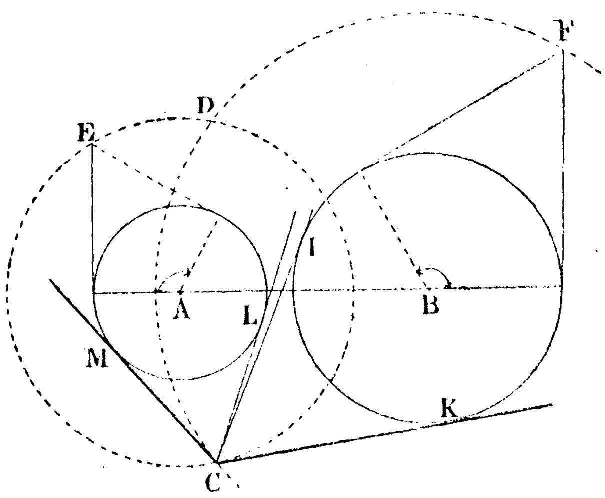



Fig. 550.

Pour chacun des deux cercles, on décrit le lieu des points d'où ce cercle est vu sous l'angle donné (nº 775). La rencontre des deux lieux donne généralement deux points C et D qui répondent à la question.

*Remarque.* La sécante MK détermine des cordes égales entre elles, dans les cercles A et B. Il en est de même de LI, ainsi que de MI et KL. (Voir ci-après, nº 1259 b, 2º.)

**Problème 234. — I.**

**918.** *Trouver un point d'où trois cercles égaux sont vus sous le même angle.*

C'est le centre du cercle qui passe par les centres des trois cercles donnés.

*Remarque.* Quand les rayons sont inégaux, le problème se rapporte au livre III. (Voir ci-après, n° 1359.)

**Problème 234. — II.**

**919.** *Deux circonférences égales* A *et* B *étant données, ainsi qu'un point* C *sur l'une d'elles, mener* MN *parallèle et égale à* AB, *et telle que l'angle* MCN *égale un angle donné.*

En supposant le problème résolu et MCN l'angle demandé, on est conduit à la construction suivante.

Sur DE, égale et parallèle à AB, on décrit un segment DOE capable de l'angle donné; tel est le segment qu'il faut faire glisser entre les deux circonférences, jusqu'à ce que l'arc passe par le point C. Il suffit de recourir à une translation parallèle, de manière à amener l'arc DE à passer par le point C.

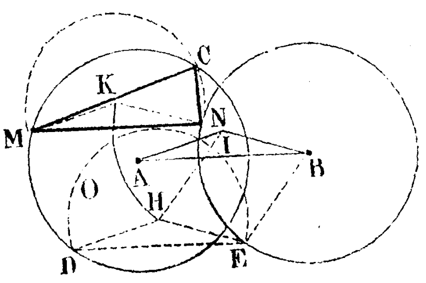


Fig. 551.

On peut déterminer la position de MN comme il suit :

On forme un triangle AIB égal à DHE. La figure HIBE est un parallélogramme. Du centre I, avec le rayon IH, on décrit un arc HK, que l'on coupe par un arc décrit du centre C avec DH pour rayon. K sera le centre de l'arc du segment capable de l'angle donné, et la corde MN sera égale et parallèle à AB.

**Problème 234. — III.**

**920.** *On donne deux droites égales* AB, A'B', *et l'on demande d'amener* AB *à coïncider avec* A'B', *à l'aide d'une rotation autour d'un centre à déterminer.*

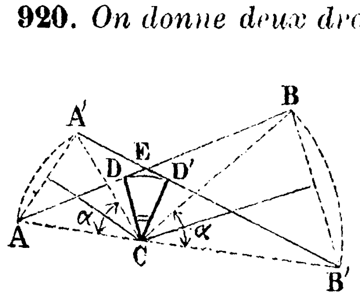


Fig. 552.

Menons AA' et BB'; élevons des perpendiculaires au milieu de chacune de ces lignes; le point C où les perpendiculaires se coupent est le centre demandé.

En effet, $CA = CA'$, $CB = CB'$ comme obliques également éloignées du pied de la perpendiculaire; puis les triangles ACB, A'CB' sont égaux comme ayant les trois côtés égaux.

**Note.** Voir à ce sujet deux articles de M. A. POULAIN dans *J. M. S.*, 1891, p. 193, et *J. M. E.*, 1894, p. 3, et nos *Eléments de Géométrie*, Complément, n° 1056.

**Problème 235.**

**921**. *Deux points* A *et* B *étant donnés sur une circonférence* AOB, *trouver sur cette courbe un troisième point* C, *tel que la somme des distances* AC + CB *égale une ligne donnée* $l$.

Soit C le point demandé, tel que AC + CB = $l$.

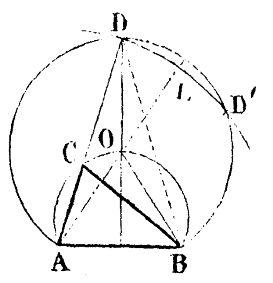


Fig. 553.

En prenant CD = CB, on obtient un triangle isocèle BCD, dans lequel l'angle D est la moitié de l'angle ACB ; donc il faut décrire un segment ADB capable d'un angle moitié de ACB, ou moitié de AOB, puis, du point A comme centre, avec $l$ pour rayon, décrire un arc DD', joindre AD et CB.

*Remarques*. 1° Le point O est le centre du segment ADD'B, car l'angle inscrit D est la moitié de l'angle au centre AOB.

2° Le maximum de $l$ est donné par le diamètre AOL ; il égale deux fois AO, côté du triangle isocèle inscrit.

3° Le problème proposé revient à construire un triangle ABC, connaissant la base AB, l'angle opposé C et la somme $l$ des côtés qui comprennent l'angle C.

**Problème 235. — 1.**

**922**. *Déterminer le point* C, *de manière que la différence* CB — CA *ait une longueur donnée.*

Solution analogue au problème précédent ; le segment auxiliaire doit être capable d'un angle de $90° + \frac{C}{2}$.

**Problème 236.**

**923**. *Dans un triangle, la base et la médiane correspondante ont des longueurs données. Comment varie l'angle au sommet ?*

Il y a trois cas à examiner, suivant les longueurs relatives des lignes données :

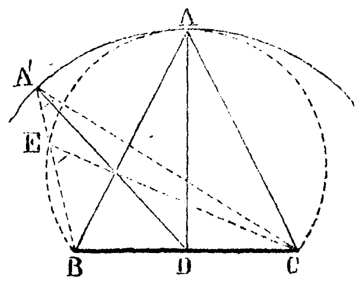


Fig. 554.

1° *La médiane* AD *est plus grande que la moitié de la base* BC.

Le triangle isocèle BAC donne l'angle maximum ; car si l'on décrit le segment BAC capable de l'angle A, et une circonférence AA' avec la médiane DA pour rayon, on reconnaît que l'angle A' est plus petit que l'angle E, qui égale A.

Ainsi, à partir du point A, l'angle diminue, et il devient nul lorsque le sommet vient se placer sur le prolongement de la base.

2° *La médiane* AD *égale la moitié de la base* (fig. 555).

Dans ce cas, le triangle est rectangle, l'angle est constant.

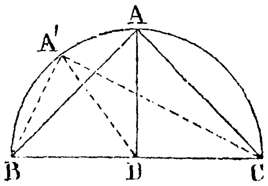


Fig. 555.

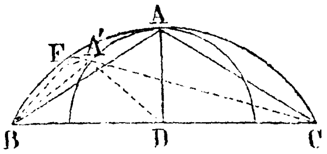


Fig. 556.

3° *La médiane est plus petite que la moitié de la base* (fig. 556).

Le triangle isocèle donne l'angle minimum.

Car on a A' ou BA'C > BFC. L'angle augmente et tend vers 180°, lorsque le sommet se rapproche de plus en plus de la base BC.

### Problème 237.

**924.** *Un segment rectiligne d'une longueur constante* MN, *glisse sur une droite illimitée. Deux points fixes* A *et* B *sont donnés; on mène* AMC, BNC. *Étudier les variations de l'angle* C *ainsi déterminé.*

(Voir *Méthodes*, n° 253.)

### Problème 237. — I.

**925.** *On donne un diamètre fixe* DOE, *un point* A *sur le prolongement de ce diamètre; on mène une corde* MN *parallèle au diamètre. Pour quelle position de cette corde la somme des angles* MAO *et* NAO *est-elle maxima?*

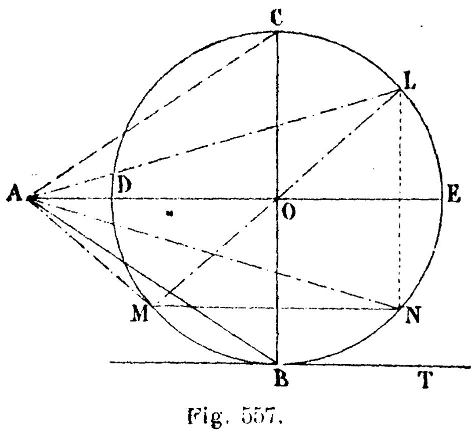


Fig. 557.

En menant le diamètre MOL, nous retombons sur une question précédente (n° 923); car

$$\text{MAO} + \text{NAO} = \text{MAL}.$$

Or la base ML est constante; il en est de même de la médiane AO; donc le maximum a lieu quand le triangle BAC est isocèle, car la médiane AO est plus grande que la moitié de la base ML. Dans ce cas, la parallèle devient la tangente BT, et l'on a :

$$2 \text{ fois BAO} > \text{MAO} + \text{NAO}.$$

*Remarque.* Lorsque le point A est dans la circonférence, le triangle isocèle BAC correspond à la somme minima, ainsi qu'on l'a vu précédemment (n° 923, 3°).

**Problème 238.**

**926.** *On donne deux parallèles et un point fixe* O. *A quelle distance de ce point faut-il mener une droite* CD *perpendiculaire aux parallèles, pour que l'angle* COD *soit maximum?*

(Voir *Méthodes*, n° 216.)

**Problème 238. — I.**

**927.** *Un point fixe* O *et deux parallèles sont donnés; mener une sécante* CD *parallèle à une droite* AB, *de manière que l'angle* COD *soit maximum.*

(Voir *Méthodes*, n° 272.)

**Problème 239.**

**928.** *On donne, de grandeur et de position, une circonférence et une droite* CD. *Pour quel point* A *de la circonférence l'angle* GAD *est-il maximum ou minimum.*

(Voir *Méthodes*, n° 341.)

**Problème 240.**

**929.** *On donne deux circonférences concentriques et un angle droit* EAF *dont le sommet est placé au centre commun. On projette les points* E, F *sur un diamètre fixe, et par les points* D, G, *on mène les parallèles* DN *et* GL. *Pour quelle position de l'angle droit* EAF *l'angle* LAN *atteint-il son maximum?* (Concours général pour les classes de logique, en 1860. — *N. A.*, 1861, p. 21.)

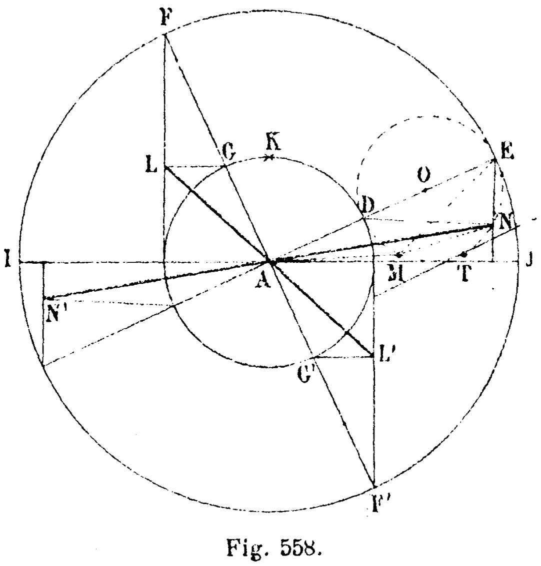


Fig. 558.

Le maximum a lieu lorsque la somme LAG + DAN est aussi grande que possible. Pour ramener cette question à une question déjà connue, il suffit de décrire une circonférence sur DE comme diamètre, et de prendre DM = GL.

Les trois triangles rectangles GLF, END, DME sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale; de plus les deux premiers ont des angles égaux, et le premier et le troisième ont le côté DM = GL; donc ce côté égale EN. Ainsi la droite MN est parallèle à DE; l'angle DAM = GAL, et l'on peut remplacer LAG + DAN par MAD + NAD.

Or le maximum de cette somme a lieu quand MN devient tangente. Alors l'angle DET égale 45°; mais pour que la projetante du point E fasse 45° avec AE, *il faut que* AE *fasse aussi* 45° *avec le diamètre fixe* IJ.

**930.** *Remarque.* On sait que LL′, NN′ sont deux diamètres conjugués de l'ellipse qui aurait AJ et AK pour demi-axes ; *donc l'angle maximum que peuvent faire entre eux deux diamètres conjugués est obtenu en projetant les extrémités de deux diamètres rectangulaires du cercle* AJ, *lorsque ces deux diamètres coupent* IJ *sous des angles de* 45°.

L'angle NAL′ est le supplément de NAL ; ainsi à l'angle maximum correspond l'angle minimum.

## Droites et Circonférences sécantes.

**931. Droite et circonférence.** — L'angle d'une circonférence et d'une sécante est l'angle formé par la droite donnée et la tangente à la circonférence au point d'intersection (n° 619).

Lorsque deux circonférences sont concentriques et qu'on mène des tangentes à la circonférence intérieure :

1° *Les cordes interceptées par la circonférence extérieure sont égales entre elles ;*

2° *Chaque tangente coupe la circonférence extérieure sous un angle constant.*

**932. Deux circonférences.** L'angle de deux circonférences sécantes est l'angle formé par des tangentes menées à chacune de ces courbes par un des points d'intersection (n° 619). Cet angle est le supplément de l'angle formé par les rayons qui joignent le point d'intersection considéré aux centres des cercles donnés.

Lorsqu'on a deux circonférences concentriques et que chaque point de l'une d'elles est pris pour centre d'une circonférence de rayon constant qui coupe la seconde circonférence donnée :

1° *La corde commune aux deux circonférences qui se coupent a une longueur constante;*

2° *Les deux circonférences sécantes se coupent sous un angle constant.*

### Problème 241.

**933.** *Par un point donné* A, *mener une droite qui coupe une circonférence donnée sous un angle donné* m.

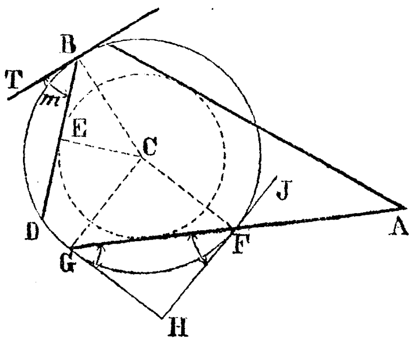


Fig. 559.

Par un point quelconque B de la circonférence, menons une tangente BT; formons l'angle donné $m$, et, par le point A, menons une sécante AFG telle que la corde interceptée $FG = BD$.

Il suffit de mener, du point A, une tangente à la circonférence de rayon CE.

L'angle $m = F = AFJ$ (n° 931).

*Remarque.* On pourrait faire un angle CBD complémentaire de l'angle donné $m$, afin de n'avoir pas de tangente BT à tracer.

**Problème 241. — I.**

**934.** *Mener une droite qui coupe une circonférence* A *sous un angle donné* m, *et une circonférence* B *sous un angle* n.

On procède comme ci-dessus, et l'on mène une tangente commune aux deux circonférences auxiliaires.

**Problème 241. — II.**

**935.** *Décrire une circonférence qui coupe chaque côté d'un triangle sous un angle donné* m.

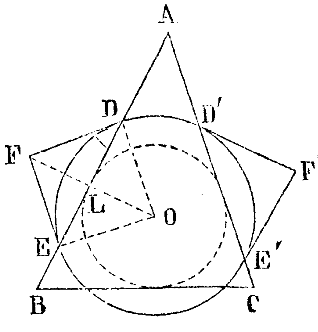


Fig. 560.

Soit le problème résolu et l'angle $D = m$.

Les trois cordes doivent être égales, car alors les triangles DFE, D′F′E′ sont égaux; donc le centre est équidistant des trois côtés; par suite, le point O est le point de concours des bissectrices du triangle. Le rayon OD est l'hypoténuse d'un triangle rectangle DLO, dans lequel on connaît OL et l'angle $O = D = m$.

*Remarques.* 1° Le problème admet quatre solutions; elles correspondent au centre du cercle inscrit et des trois exinscrits.

2° La question (n° 935) revient à un problème déjà résolu (n$^{os}$ 881 et 881 **a**).

**Problème 242.**

**936.** *On donne deux droites; décrire une circonférence avec un rayon donné : le centre doit être sur une des droites, et la circonférence doit couper l'autre droite sous un angle donné.*

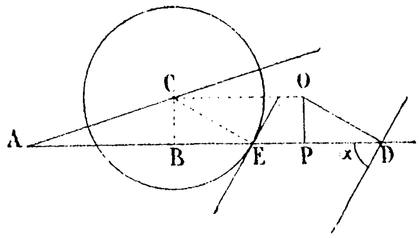


Fig. 561.

En supposant le problème résolu, on voit qu'il est facile de déterminer la distance OP du centre à la droite AB.

Il faut élever au sommet de l'angle $\alpha$ donné une perpendiculaire DO égale au rayon; mener une parallèle OC à la ligne AD; le centre C est déterminé.

**Problème 242. — I.**

**937.** *Décrire une circonférence de rayon donné, qui soit coupée sous un angle* m *par une droite, et sous un angle* n *par une autre droite aussi donnée de position.*

Solution analogue au problème précédent (n° 936).

**Problème 243.**

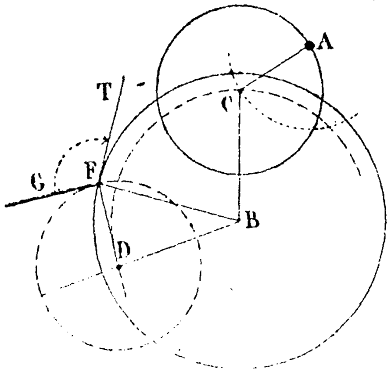


Fig. 562.

938. *Avec un rayon donné, décrire une circonférence qui passe par un point* A *et qui coupe une circonférence donnée* B *sous un angle donné.*

Cherchons le lieu des centres des circonférences coupant la circonférence donnée sous un angle donné.

Avec une tangente quelconque FT faisons l'angle donné TFG; élevons une perpendiculaire à FG, et prenons FD égale au rayon donné $r$. La circonférence décrite du point B comme centre, avec BD pour rayon, sera le lieu cherché; il suffit alors de le couper avec un arc décrit du point A comme centre avec $r$ pour rayon.

**Problème 244.**

939. *D'un point donné comme centre, décrire une circonférence qui coupe orthogonalement une circonférence donnée;* ou bien, *d'un point donné* A *comme centre, décrire une circonférence telle que la tangente menée d'un point donné* B *ait une longueur* l.

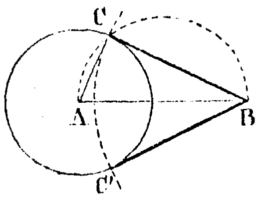


Fig. 563.

Deux cercles se coupent *orthogonalement* lorsque les tangentes menées respectivement à ces cercles, par un des points d'intersection, sont à angle droit (nº 620).

En supposant le problème résolu et la tangente $BC = l$, on voit qu'il suffit de décrire une circonférence sur AB comme diamètre, et de la couper par un arc décrit du centre B avec la longeur $l$. AC est le rayon demandé.

**Problème 244. — I.**

940. *Décrire une circonférence telle que les tangentes menées des trois sommets d'un triangle soient égales entre elles et égales à une ligne donnée* l.

Le centre du cercle circonscrit au triangle donné est le centre cherché, et l'on retombe sur le problème précédent.

**Problème 244. — II.**

941. *Avec un rayon donné* r, *décrire une circonférence qui passe par un point donné* A, *et telle que la tangente menée d'un second point* B *ait une longueur* l.

Supposons le problème résolu.

On connaît la longueur de BC et celle du rayon CO ; donc on peut déterminer la longueur de l'hypoténuse BO.

Pour cela, prenons $BD = l$, $DE = r$; BE est l'hypoténuse.

Du point B, avec le rayon BE, décrivons un arc EO et coupons-le par un arc décrit du point A avec $r$ pour rayon ; on obtient ainsi le point O comme centre de la circonférence demandée.

*Remarque.* Ce problème n'est qu'un cas particulier d'une question plus générale (nº 944 ci-après).

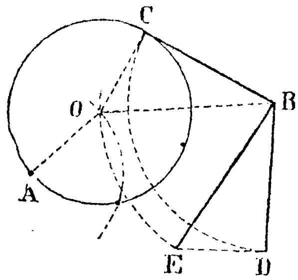


Fig. 564.

**Problème 244. — III.**

**942.** *Avec un rayon donné* r, *décrire une circonférence telle que la tangente menée d'un point* A *ait une longueur* k, *et la tangente menée d'un point* B *ait une longueur* l.

On construit deux lignes analogues à BE, etc.

*Remarque.* Ce problème peut aussi se ramener à un problème plus général (nº 945).

**Problème 244. — IV.**

**943.** *D'un point donné* A *comme centre, décrire une circonférence qui coupe une circonférence donnée* B, *sous un angle donné* m.

Supposons le problème résolu et l'angle $C = m$.

Chaque tangente est perpendiculaire au rayon du point de contact; donc les angles ACB et C ou $m$ sont supplémentaires comme ayant les côtés perpendiculaires et de même sens.

Ainsi $ACB = 180^\circ - m$. Il suffit donc de décrire sur AB un segment capable de $(180^\circ - m)$; il déterminera le point C, et on décrira une circonférence avec AC pour rayon.

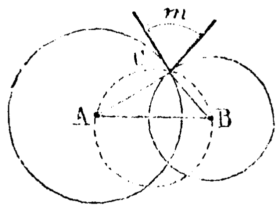


Fig. 565.

**Problème 245.**

**944.** *Avec un rayon donné, décrire une circonférence qui coupe une circonférence* B *et une droite* DE *sous des angles donnés* m *et* n.

Supposons le problème résolu. Soient A la circonférence demandée, et $m$, $n$ les angles donnés.

1º On peut construire le triangle BGH égal à BCA, car BG est donné ; l'angle $BGH = 180^\circ - m$, et BH égale le rayon aussi donné; donc le centre cherché est sur la circonférence décrite du point B avec le rayon BH.

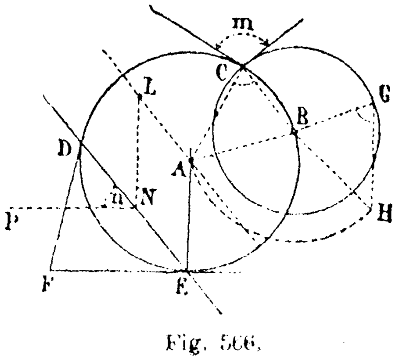


Fig. 566.

2° On fait l'angle PND $= n$, on élève une perpendiculaire NL égale au rayon donné BH ; le centre doit se trouver sur la parallèle LA à DE ; donc...

### Problème 245. — I.

**945.** *Avec un rayon donné, décrire une circonférence qui coupe une circonférence* A *sous un angle donné* m, *et une autre circonférence sous un autre angle aussi donné* n.

La question se résout comme précédemment.

**Cas particulier.** *Avec un rayon donné, décrire une circonférence qui coupe orthogonalement deux circonférences données* (n° 942).

## Tangentes et Raccordement des lignes.

**946.** Le raccordement des lignes droites ou circulaires dépend des problèmes relatifs aux circonférences et aux droites tangentes ; néanmoins il est utile de désigner les diverses questions qui s'y rattachent par l'énoncé que l'usage a consacré.

Les éléments de Géométrie fournissent directement la solution des questions suivantes.

*Raccordement de deux droites*, nos 197 et 200.

*Raccordement d'une droite et d'un arc circulaire*, nos 179 et 201.

Plusieurs questions de raccordement ne peuvent être traitées qu'après les problèmes du livre III.

### Problème 246.

**947.** *Avec un rayon donné* a, *décrire une circonférence tangente :*

1° *A deux droites ;*

2° *A une droite et à une circonférence ;*

3° *A deux circonférences.*

*Discuter ce dernier cas.*

Le problème proposé revient à *trouver un point situé à une distance donnée* a, *de deux lignes données droites ou circulaires.*

(Voir *Discussion*, n° 252.)

### Problème 247.

**948.** *Par deux points donnés* A *et* B, *faire passer une circonférence qui soit tangente à une droite donnée* XY.

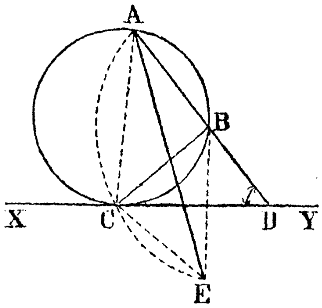



Fig. 567.

Supposons le problème résolu et ABC la circonférence tangente.

Déterminons le point E symétrique du point B, et menons AC, BC, CE. Cherchons la valeur de l'angle ACE.

$$ACE = ACY + DCE,$$

$$ACE = ACY + DCB = ACY + DAC.$$

Mais la somme ACY + DAC a pour supplément l'angle D ;

donc $$ACE = 180^\circ - D.$$

Ainsi sur AE il faut décrire un segment capable de l'angle $180^\circ - D$, c'est-à-dire un segment capable de l'angle ADY.

*Remarque*. Cette solution d'un problème connu (G., n° 298) est avantageuse, parce qu'elle n'exige que la connaissance du livre II.

Elle est due à M. E. Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique, principal promoteur de la *Géométrie récente du triangle* (*J. M. E.*, 1879, p. 21).

### Problème 247. — I.

**949**. *Inscrire un cercle dans un secteur circulaire.*

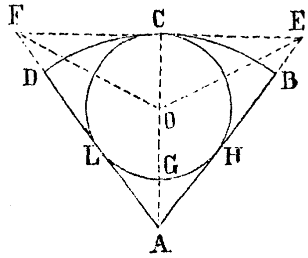


Fig. 568.

En supposant le problème résolu, on reconnaît qu'il suffit de mener une tangente ECF par le point milieu C de l'arc donné BCD, puis de mener les bissectrices des angles égaux E, F du triangle isocèle EAF.

*Remarque*. On procède de même pour inscrire un cercle au triangle formé par les tangentes AL, AH et l'arc HGL.

### Problème 248.

**950**. *Une circonférence de centre* A *étant donnée, décrire, d'un point* B *aussi donné pris pour centre, une autre circonférence, de manière que la tangente commune, mesurée entre les points de contact, ait une longueur donnée* l.

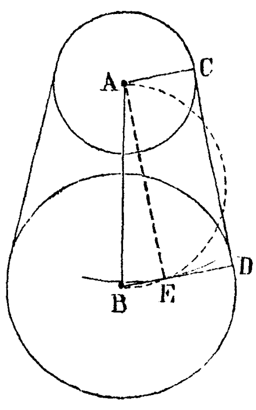


Fig. 569.

En supposant le problème résolu et $CD = l$, on voit que la parallèle AE égale aussi $l$.

Donc, sur AB comme diamètre, il faut décrire une circonférence; puis, du point A, la couper avec le rayon $l$; mener BE, prendre ED = AC.

*Remarque*. Lorsqu'on porte ED sur le prolongement de BE, la tangente est extérieure ; lorsqu'on prend ED sur EB, la tangente est intérieure.

### Problème 248. — I.

**951**. Même énoncé, *mais les deux tangentes doivent se couper sous un angle donné* 2m.

Par le point A (fig. 569), on mène AE coupant AB sous un angle $m$, et l'on abaisse une perpendiculaire BE, etc.

**Problème 249.**

952. *Deux points* A *et* B *étant donnés, décrire une circonférence avec un rayon donné, telle que les tangentes menées de* A *et de* B *fassent entre elles un angle donné* 2m *et que la différence des tangentes égale une ligne* l.

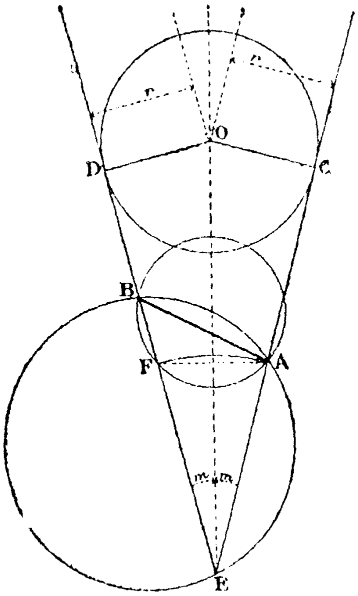



Fig. 570.

Soit le problème résolu;

$$AC - BD = l,$$

et l'angle $AEB = 2m$.

Prenons $EF = EA$;

on aura : $BF = l$.

On peut construire le triangle BAF, car on connaît AB, la longueur BF et l'angle AFB.

En effet, $AFE = 90^o - m$,

donc $AFB = 180^o - (90^o - m) = 90^o + m$.

Le triangle ABF étant construit, prolongeons FB jusqu'à la rencontre E du segment décrit sur AB et capable de $2m$; puis, entre les côtés de l'angle AEB, on détermine un point O, tel que $OC = OD = r$.

**Problème 249. — I.**

953. *Trois points*, A, B, C *étant donnés, du point* A, *comme centre, décrire une circonférence telle que les tangentes menées des points* B *et* C *fassent entre elles un angle donné.*

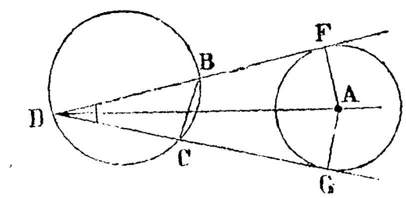



Fig. 571.

Sur BC il faut décrire un segment BDC capable de l'angle donné; joindre le centre A au point milieu de l'arc BC. Cette ligne AD est bissectrice de l'angle D; donc les perpendiculaires AF, AG sont égales.

**Problème 250.**

954. *Décrire une circonférence qui soit tangente à une droite* CD *et qui coupe une circonférence donnée en un point* A, *sous un angle* $\alpha$.

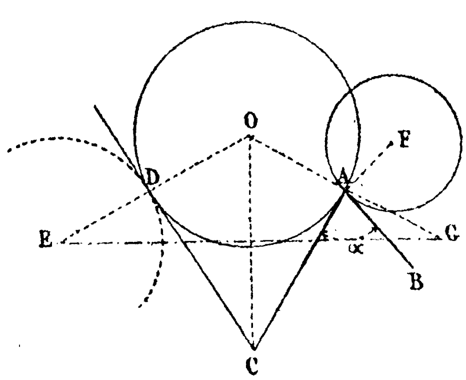



Fig. 572.

Par le point A, menons une tangente AB à la circonférence donnée; faisons l'angle BAC égal à $\alpha$. La droite AC doit être tangente à la circonférence demandée; donc le centre O se trouve sur la bissectrice de l'angle C et sur la droite AO perpendiculaire à la tangente AC.

**Problème 250. — I.**

**955.** *Décrire une circonférence qui soit tangente à une circonférence* E, *qui coupe une circonférence* F *en un point* A *sous un angle donné* $\alpha$ (fig. 572).

Comme précédemment, mais sur le prolongement du rayon OA, on prend une longueur AG égale au rayon de la circonférence E, puis on élève une perpendiculaire au milieu de EG.

**Problème 250. — II.**

**956.** *Avec un rayon donné* r, *décrire une circonférence tangente à une circonférence de centre* A *et coupant orthogonalement une circonférence de centre* B.

Soient $a$ et $b$ les rayons des circonférences données, O le centre de la circonférence demandée.

La distance AO des centres des circonférences tangentes égale $a \pm r$.

La distance BO des circonférences orthogonales est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant $b$ et $r$ pour côtés de l'angle droit.

**Problème 251.**

**957.** *Raccorder deux lignes données, droites ou circulaires, par un arc d'un rayon donné.*

Pour chaque ligne donnée, on trace le lieu des centres des circonférences qui peuvent être décrites avec le rayon donné, tangentiellement à la ligne donnée. Les rencontres de ces lieux donnent les centres des arcs à décrire. Les points de raccordement sont déterminés par des perpendiculaires abaissées des centres sur les droites, ou des normales communes aux deux courbes qui se raccordent (la normale commune passe par les deux centres).

On peut avoir à raccorder deux droites entre elles, deux arcs entre eux, ou une droite et un arc.

**958.** *Remarque.* Le raccordement des lignes est d'une grande utilité dans toutes les questions pratiques qui se rattachent au dessin linéaire. A un autre point de vue, le raccordement des lignes est aussi très important dans les opérations sur le terrain pour le *tracé des routes.* Ces diverses applications exigent des développements qui ne sauraient trouver place ici.

**Problème 252.**

**959.** *Raccorder deux alignements par des arcs tangents entre eux, ayant respectivement pour rayon deux longueurs données* a *et* b, *les angles au centre des deux arcs devant être égaux entre eux.*

Supposons le problème résolu et l'angle ADH = BEH.

A cause des angles égaux, le triangle FOJ est isocèle; donc la ligne des centres est parallèle à la bissectrice de l'angle O que forment les alignements donnés OM, ON; d'ailleurs, la distance du centre D à la droite OM est connue, etc.; donc on est conduit à la construction suivante :

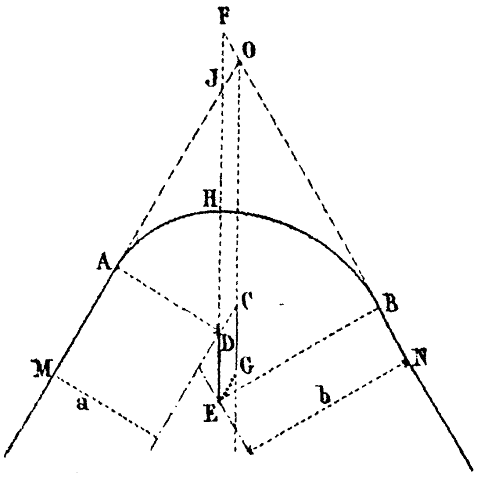


Fig. 573.

A une distance $a$, il faut mener une parallèle à MO. A une distance $b$, mener une parallèle à ON; déterminer la bissectrice OCG, prendre CG égale à la différence ou à la somme des rayons, mener GE parallèle à CD et ED parallèle à CG. Pour déterminer les points de contact, on abaisse les perpendiculaires DA, EB.

### Problème 252. — I.

**960**. *Raccorder deux alignements par deux arcs tangents entre eux.*

Avec les données suivantes :

1° *On connaît les points de contact, le rayon* a *et l'angle* ADH;

2° *On connaît les deux points de contact et une tangente à la courbe de raccordement;*

3° *On connaît le point de raccordement* H *et les deux rayons.*

4° *On connaît les deux points de contact et le rapport des rayons* (voir ci-après, n° 1655 **b**).

**960 a. Note.** Le cas particulièrement intéressant en architecture, où les droites à raccorder sont perpendiculaires l'une à l'autre, se rapporte à *l'anse de panier*. On peut demander que le raccordement ait plus de deux arcs et réalise certaines conditions. On peut voir, à ce sujet, les traités d'Architecture; comme étude mathématique, voir les *Annales de Gergonne*, t. IV (1813-1814) pages 256 et 259, par ARGAND et BÉRARD.

### Problème 252. — II.

**961**. *Raccorder deux alignements lorsque les deux droites à raccorder donnent lieu à deux arcs de sens contraire, et les arcs doivent être séparés l'un de l'autre par un segment rectiligne ayant une longueur donnée* l.

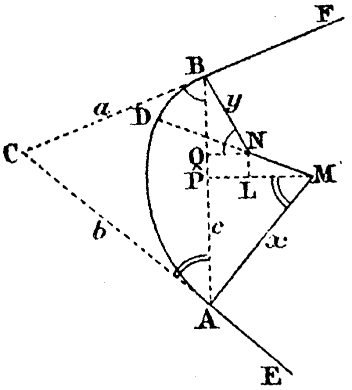


Fig. 574.

**962. Note.** Les questions précédentes 960 et 961 sont imposées par le tracé des routes et surtout des chemins de fer; mais dans les cas importants on les traite par le calcul. A ce sujet voir notre *Arpentage, Levé des plans, Nivellement*, 3e, 4e, 5e éditions, nos 613 à 618.

Nous nous bornerons ici à reproduire les formules principales.

*Raccordement à tangentes inégales par deux arcs de cercle tangents entre eux intérieurement* (fig. 574).

1° Entre les rayons $x$ et $y$ des arcs tangents et les données du triangle ABC on a la relation :

$$c(x \sin A + y \sin B) - 2xy \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{c^2}{2} \qquad (1)$$

qu'on peut écrire : $(ax + by) \sin C - 2xy \cos^2 \dfrac{C}{2} = \dfrac{c^2}{2}$. $\qquad$ (1')

2° Si les arcs devaient être tangents extérieurement, on aurait la relation suivante : $\quad c(x \sin A + y \sin B) + 2xy \sin^2 \dfrac{C}{2} = \dfrac{c^2}{2}$. $\qquad$ (2)

Dans le tracé des chemins de fer, *deux arcs de sens contraire doivent être séparés par un alignement ayant une longueur donnée* l (fig. 575).

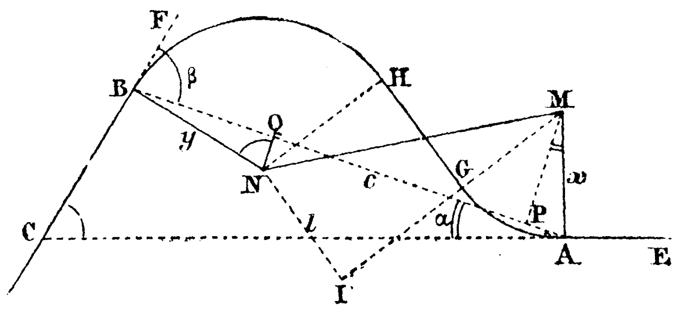


Fig. 575.

On obtient la formule ci-après :

$$c(x \sin A + y \sin B) + 2xy \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{c^2 - l^2}{2}. \qquad (3)$$

4° Le minimum du rapport des rayons $x$ et $y$ (fig. 574) correspond au cas où la tangente aux arcs, au point de raccordement D, se trouve parallèle à la corde AB ; on peut déterminer les rayons par une construction graphique. De même, lorsque les courbes sont de sens contraire, on peut déterminer graphiquement deux arcs tangents de même rayon (ENDRÈS, *Manuel du Conducteur des ponts et chaussées*, tome II, nos 103 et 107, ou *Traité de Géodésie*, par G. OSLET, nos 1253 et 1254) ; mais *il est préférable de recourir au calcul.*

**963.** RACCORDEMENT. *Étude sur le raccordement de deux droites* AX, BY *par deux arcs de cercle.*

1° Soient AM et BM deux arcs de cercle de centres $\alpha$ et $\beta$, tangents entre eux en M, et respectivement, l'un à AC au point A, et l'autre à BC au point B.

Leur tangente commune est DE, et l'on a .

(1) $\quad DA = DM, \quad EB = EM.$

Les bissectrices des angles ADM et BEM se coupent au point I, centre du cercle exinscrit au triangle CDE, situé sur la bissectrice de l'angle DCE. Ce cercle exinscrit $\gamma$ touche CD, CE, DE en $A_1$, $B_1$, $M_1$, et l'on a :

(2) $\quad DA_1 = DM_1, \quad EB_1 = EM_1.$

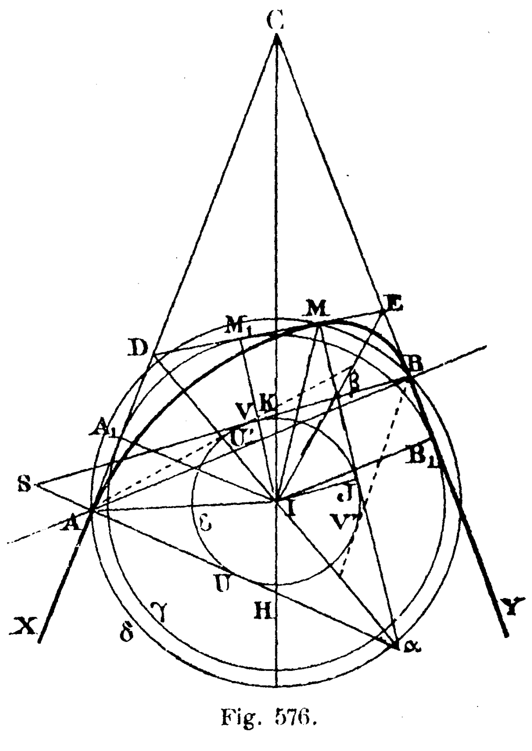


Fig. 576.

Le rapprochement des égalités (1) et (2) donne immédiatement :

$$MM_1 = AA_1 = BB_1 = \frac{CA - CB}{2},$$

et, par suite, si $A\alpha$ et $B\beta$ coupent la bissectrice CI en H et K, IH = IK, ce qui montre que *le point* I, milieu de HK qui est indépendant de M, *est un point fixe.*

Par conséquent, le cercle $\gamma$ de centre I, tangent à CA et CB, auquel DE est également tangente, est un cercle fixe.

Autrement dit : *L'enveloppe de la tangente commune* DE *est un cercle de centre* I *tangent aux droites* CA *et* CB.

Les triangles rectangles $IAA_1$, $IBB_1$, $IMM_1$, étant égaux comme ayant les côtés de l'angle droit respectivement égaux, il en résulte que

$$IA = IB = IM.$$

Donc : *Le lieu du point de contact* M *est un cercle de centre* I *passant par les points* A *et* B.

Enfin la distance IJ de la ligne des centres $\alpha\beta$ au point I étant égale à $MM_1$ est constante et égale à $\dfrac{CA - CB}{2}$.

Donc : *L'enveloppe de la ligne des centres* $\alpha\beta$ *est un cercle* $\varepsilon$ de *centre* I *et de rayon* $\dfrac{CA - CB}{2}$.

De chacun des points A et B on peut mener au cercle $\varepsilon$ une seconde tangente. Soient U et V les points de contact de AS et BS avec ce cercle, U' et V' ceux des secondes tangentes issues de A et de B.

Si le point de contact de la droite $\alpha\beta$ et du cercle $\varepsilon$ est sur un des arcs UU' ou VV', les cercles AM et MB sont tangents *intérieurement;* mais dans le premier cas le point M est *intérieur au triangle* ACB, dans le second il lui est *extérieur.*

Si le point de contact de $\alpha\beta$ est sur un des arcs UV' ou VU', les cercles AM et MB sont tangents *extérieurement.*

Donc, lorsqu'il s'agit d'effectuer un raccordement, *le point de contact de* $\alpha\beta$ *avec le cercle* $\varepsilon$ *ne doit être pris que sur l'arc* VV'.

Le segment $\alpha\beta$ de la tangente au cercle $\varepsilon$ compris entre les droites SA et SB est égal à la différence des rayons des arcs de raccordement : ce segment est minimum lorsque la droite $\alpha\beta$ forme avec SA et SB un triangle isocèle, c'est-à-dire est parallèle à la bissectrice CI.

*On obtient donc le raccordement par deux arcs de cercle dont la différence des rayons est minimum en menant au cercle* $\varepsilon$ *la tangente parallèle à la bissectrice de l'angle* ACB, *dont le point de contact se trouve entre ceux des tangentes menées à ce cercle de celui des points* A *ou* B *qui est le plus rapproché du point* C.

**963 a. Note.** 1° Nous venons de donner une belle étude géométrique de la question 960. L'auteur de ce travail, M. Maurice d'Ocagne, nous l'a communiquée lui-même, et l'a fait insérer dans les *Nouvelles Annales de mathématiques,* en 1898. — Dans l'ouvrage publié récemment par M. d'Ocagne, *Leçons sur la Topométrie,* etc., lire aussi le Ch. IV. : *Théorie générale des raccordements.*

2° Dans les *Annales des Ponts et Chaussées,* en mai 1860, M. Ph. Breton, ingénieur en chef des P. et Ch., avait déjà signalé la circonférence, lieu des points de contact, et la circonférence enveloppe de la ligne des centres.

C'est à M. BROCARD que l'on doit ce renseignement. (*Mathesis*, 1884, p. 43.)

3° M. CARLO JORIO a publié, dans l'*Acadamia reale delle Scienze di Torino* (anno 1902-1903), une fort belle étude de la question : *Contributio allo studio delle curve di raccordo a due centri.*

Le savant ingénieur italien rend pleine justice à ses prédécesseurs, notamment à RÉSAL, MANNHEIM, à M. D'OCAGNE. Il résout *numériquement* et *graphiquement* le problème dans tous les cas, notamment lorsqu'on demande le minimum de

$$x - y, \text{ ou de } \frac{x}{y}, \text{ ou enfin de } \frac{1}{y} - \frac{1}{x}.$$

* MAURICE D'OCAGNE, en 1904, ingénieur des ponts et chaussées, chef du service des cartes, plans et instruments de précision du département des Travaux publics, répétiteur à l'École Polytechnique.

* CARLO JORIO, ingénieur à Turin, en 1903.

## Construction des Triangles isocèles ou rectangles.

**964**. Pour construire un triangle quelconque, il faut connaître trois éléments du triangle, et l'un d'eux, au moins, doit être linéaire.

La ligne donnée peut être un côté, une médiane, une hauteur, etc.; la somme ou la différence de deux de ces lignes; le rayon du cercle inscrit ou celui du cercle circonscrit.

Les problèmes relatifs à la construction des triangles sont si nombreux et si variés, qu'on utilise successivement la plupart des théorèmes étudiés et des problèmes déjà résolus. Il n'est donc pas possible d'indiquer un mode général de résolution.

### Problème 253.

**965**. *Construire un triangle équilatéral, connaissant :*

1° *La hauteur ;*
2° *Le rayon du cercle inscrit;*
3° *Le rayon du cercle circonscrit.*

### Problème 254.

**966**. *Construire un triangle isocèle, connaissant :*

1° *La base et la hauteur*;
2° *La base et un des angles égaux*;
3° *La base et l'angle au sommet.*

### Problème 254. — I.

**967**. *Construire un triangle isocèle, connaissant :*

1° *La base et le rayon du cercle inscrit;*
2° *La base et le rayon du cercle circonscrit ;*
3° *La hauteur et l'un des angles égaux.*

**Problème 255.**

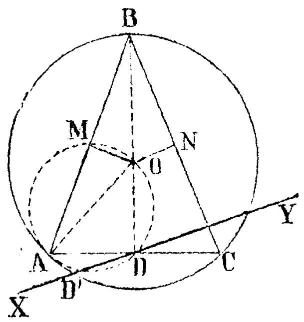


Fig. 577.

968. *Construire un triangle isocèle, connaissant la circonférence circonscrite et la position du point milieu, soit de la base; soit d'un des côtés égaux.*

1° Soit D le point milieu de la base, on mène ADC perpendiculaire au rayon OD.

2° Soit M le point milieu du côté.

La perpendiculaire AB, menée au rayon MO, est un des côtés; puis on mène le diamètre BOD et une perpendiculaire ADC sur ce diamètre, etc.

**Problème 255. — I.**

969. *Construire un triangle isocèle, connaissant le cercle circonscrit, sachant que le milieu de la base se trouve sur une droite donnée* XY, *et connaissant un sommet* A.

Sur AO pris pour diamètre (fig. 577); on décrit une circonférence, lieu géométrique du point milieu des cordes qui passent par le point A, puis on mène la base ADC et le diamètre DOB.

Le point D' fournit une seconde solution,

**Problème 256.**

970. *Construire un triangle rectangle, connaisant un côté de l'angle droit et la somme ou la différence de l'hypoténuse et de l'autre côté.*

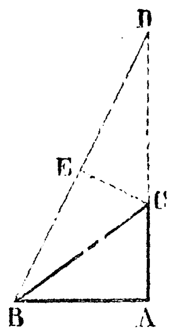


Fig. 578.

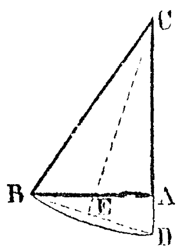


Fig. 579.

1° La somme $= l$.

Supposons le problème résolu, AB le côté donné et $BC + AC = l$.

Pour avoir la somme (fig. 578), on peut porter BC de C en D. Or le triangle rectangle BAD est déterminé, car $AD = l$; donc il suffit de construire ce triangle et d'élever une perpendiculaire EC au milieu de BD; le point C sera déterminé.

2° Soit $d$ la différence (fig. 579).

Un raisonnement analogue conduit à prendre $AD = d$ et à élever une perpendiculaire EC au milieu de BD.

On aura : $$BC - AC = AD = d.$$

**Problème 256. — I.**

971. *Construire un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et la somme ou la différence des côtés de l'angle droit.*

Le problème revient à *trouver un point sur une demi-circonférence* *de manière que la somme ou la différence de ses distances aux extrémités du diamètre égale une longueur donnée* (nº 921).

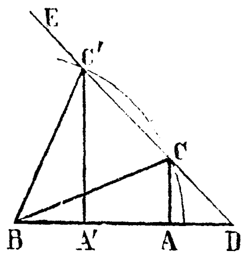


Fig. 580.

On peut aussi employer la construction suivante :

Supposons le problème résolu et $AB + AC = l$.

Pour avoir la somme, on peut porter AC de A en D. Or $D = 45°$ ; donc il faut prendre $BD = l$, faire un angle D de 45°, et du point B comme centre, avec l'hypoténuse donnée couper, DE en C et C'.

Il y a une solution analogue pour la différence, mais on fait un angle de $(180° - 45°)$ ou 135°.

### Problème 257.

**972.** *Construire un triangle rectangle, connaissant :*

1º *Les rayons* r *et* R *des cercles inscrit et circonscrit ;*

2º *L'un des angles aigus* C, *et le rayon* r *du cercle inscrit.*

L'hypoténuse $= 2R$, et la somme des côtés de l'angle droit égale $2R + 2r$ (nº 741) ; on est donc ramené au nº 971.

### Problème 257. — I.

**973.** *Construire un triangle rectangle, connaissant :*

1º *Un côté de l'angle droit et le rayon du cercle inscrit ;*

2º *La somme des côtés de l'angle droit et le rayon du cercle inscrit.*

### Problème 257. — II.

**974. Problème.** *Construire un triangle rectangle, connaissant :*

1º *Un côté de l'angle droit et la hauteur qui tombe sur l'hypoténuse ;*

2º *L'un des angles aigus et la somme ou la différence des côtés de l'angle droit ;*

3º *La médiane et la hauteur qui tombent sur l'hypoténuse.*

### Problème 258.

**975.** *Construire un triangle rectangle* ABC, *connaissant la longueur* a *de l'hypoténuse, le sommet* A *de l'angle droit, et sachant que les sommets* B, C *doivent se trouver respectivement sur deux droites rectangulaires données.*

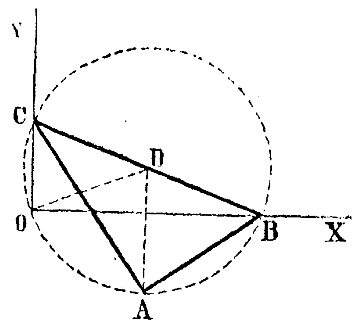


Fig. 581.

Soient XOY l'angle droit donné, A le sommet connu.

Le quadrilatère BAOC est inscriptible, car les angles BOC, BAC sont droits ; de plus, BC est le diamètre, et cette droite doit égaler $a$.

Mais, dans le triangle rectangle, la médiane OD est la moitié de l'hypoténuse ; donc, avec $\frac{a}{2}$ pour rayon, des points A et O comme centres décrivons des arcs ; ils se coupent en D, et, de ce point comme centre, décrivons une circonférence avec le même rayon $\frac{a}{2}$ ; elle fera connaître les points B et C.

## Construction des Triangles quelconques.

**Problème 259.**

**976.** *Construire un triangle, connaissant les milieux des trois côtés.*

Par chaque point on mène une parallèle à la droite qui joint les deux autres.

**Problème 259. — I.**

**977.** *Construire un triangle, connaissant deux côtés* a *et* b, *et la projection* n *du troisième côté sur le second.*

**Problème 259. — II.**

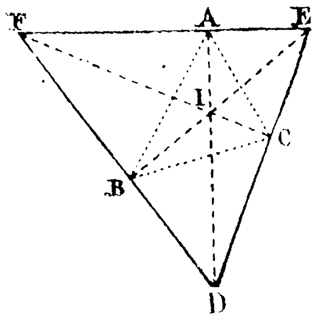



Fig. 582.

**978.** *Construire un triangle, connaissant les centres* D, E, F, *des cercles exinscrits.*

On sait que les centres des cercles exinscrits sont les sommets d'un triangle dont les hauteurs se confondent avec les bissectrices intérieures du premier triangle (nº 662). On retrouvera donc le triangle primitif en traçant le triangle DEF et ses trois hauteurs. Les pieds A, B, C, de ces hauteurs seront les sommets du triangle demandé.

**Problème 259. — III.**

**978 a.** *Construire un triangle, connaissant les données suivantes :*

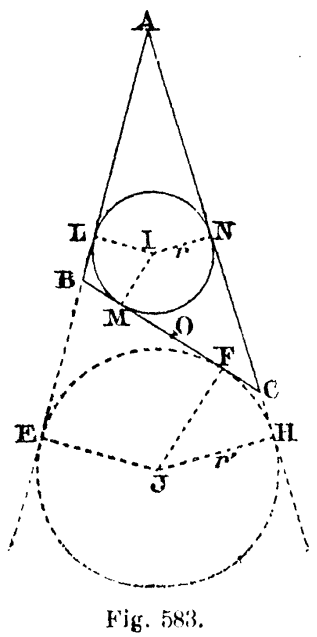



Fig. 583.

1º *Un côté, la différence des deux autres et le rayon du cercle inscrit ;*

2º *Un côté, l'angle opposé et le rayon du cercle inscrit, ou celui de l'exinscrit tangent au côté donné.*

En se reportant au nº 743, on fait les constructions suivantes :

1º On décrit le cercle I avec le rayon donné $r$; sur une tangente, on prend MF égale à la différence; à partir du point O, milieu de MF, on prend $OB = OC$ égale la moitié du côté donné, et l'on mène les tangentes BLA, CNA.

2º On fait l'angle A, on décrit avec le rayon $r$ un cercle tangent aux côtés de l'angle donné A, puis on prend $LE = NH$ égale le côté donné; on décrit le cercle exinscrit et l'on mène la tangente BC : cette ligne égale la base donnée. (Voir aussi *Méthodes*, nº 262, 3º.)

**Exercice 259. — IV.**

**978 b.** *Construire un triangle avec les données ci-après :*

*Les rayons* r *et* r'; *puis*

1º *Le côté tangent aux cercles dont on connaît les rayons ;*

2° *La différence des côtés tangents aux cercles dont on connaît* r *et* r'.

1° On prend LE égale le côté donné $a$, par exemple (fig. 583); on élève des perpendiculaires aux extrémités de cette droite, l'on prend $LI = r$ et $EJ = r'$, etc.

2° On décrit un cercle de rayon $r$; sur une tangente, on prend MF égale à la différence $b - c$; au point F, on élève une perpendiculaire sur MF, et l'on prend $FJ = r'$, etc.

**Problème 260.**

**979.** *Construire un triangle, connaissant les pieds* E, F, D, *des trois hauteurs.*

On sait que les trois hauteurs d'un triangle ABC servent de bissectrices au triangle DEF qui a pour sommets les pieds de ces mêmes hauteurs (n° 662).

On tracera donc le triangle DEF, puis ses trois bissectrices; par les points D, E, F, on mènera des perpendiculaires à ces bissectrices, ce qui donnera le triangle ABC.

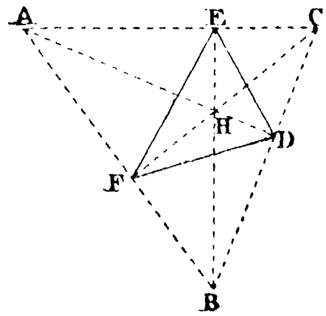


Fig. 584.

**Problème 261.**

**980.** *Construire un triangle, connaissant :*

1° *Deux côtés* AB *et* BC, *et la médiane* AD *qui tombe sur l'un d'eux;*

2° *Deux côtés* AB *et* AC, *et la médiane comprise* AD;

3° *Un côté* BC, *et les deux médianes* BE *et* CF *qui partent de ses extrémités;*

4° *Deux médianes* AD *et* BE, *et le côté* BC, *sur lequel tombe l'une d'elles;*

5° *Les trois médianes.*

Tous ces problèmes n'offrent aucune difficulté; nous indiquons le plus intéressant : 5° *Connaissant les trois médianes.*

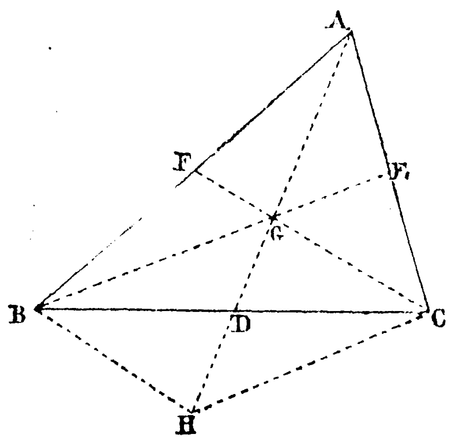


Fig. 585.

On construit le parallélogramme BGCH ayant pour côtés opposés les $^2/_3$ des médianes issues de B et de C, puis pour diagonale GH les $^2/_3$ de la médiane issue de A. La seconde diagonale BC est un des côtés du triangle. — On prend ensuite $GA = GH$.

**Problème 261. — I.**

**981.** *Construire un triangle, connaissant la base* AB, *la différence* $\delta$ *des angles adjacents à cette base et la différence* d *des deux autres côtés.*

L'angle ABD (fig. 587) égale $\dfrac{B - A}{2} = \dfrac{\delta}{2}$ (n° 994) et AD égale $AC - CB$; on peut donc construire le triangle ABD; le côté AD prolongé rencontre la perpendiculaire EC élevée au milieu de BD en un point C qui est le troisième sommet du triangle. — On doit avoir $AB > d \geqq AB \sin \dfrac{\delta}{2}$.

### Problème 262.

982. *Construire un triangle, connaissant :*

1° *Deux côtés* AB *et* BC, *et la hauteur* AD, *qui tombe sur l'un d'eux;*

2° *Deux côtés* AB *et* AC, *et la hauteur comprise* AD.

### Problème 262. — I.

983. *Construire un triangle, connaissant :*

1° *Un côté* BC *et les deux hauteurs* BE *et* CF, *qui partent de ses extrémités ;*

2° *Deux hauteurs* AD *et* BE, *et le côté* BC, *sur lequel tombe l'une d'elles.*

### Problème 263.

984. *Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et la hauteur abaissée du sommet de cet angle.*

(Voir *Méthodes*, n° 105.)

### Problème 263. — I.

985. *Construire un triangle, connaissant :*

1° *Un angle* B, *un côté* BC *de cet angle, et la hauteur* BE, *qui part du sommet de ce même angle ;*

2° *Un angle* B, *et les deux hauteurs opposées* AD *et* CF;

3° *Un angle* B, *la hauteur* BE, *qui tombe sur le côté opposé, et* AD *l'une des deux autres hauteurs.*

### Problème 263. — II.

986. *Construire un triangle, connaissant :*

1° *Un côté* BC, *un angle adjacent* B, *et la médiane* AD, *qui tombe sur ce côté;*

2° *Un côté* BC, *un angle adjacent* B, *et la médiane* CF, *qui tombe sur l'autre côté de cet angle.*

### Problème 264.

987. *Construire un triangle, connaissant le périmètre et les angles.*

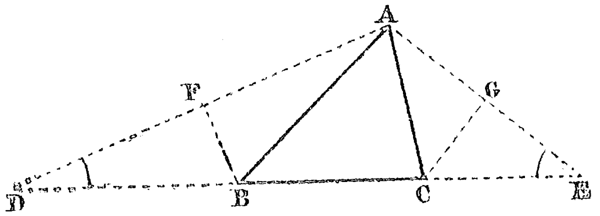


Fig. 586.

On trace une droite DE égale au périmètre donné, et on construit en D et E des angles qui soient moitié de deux des angles donnés; on obtient ainsi le sommet A; les perpendiculaires FB et GC, élevées sur les milieux de AD et AE, donnent les deux autres sommets B et C.

**Problème 265.**

**988.** *Construire un triangle, connaissant un côté, un angle adjacent, et la somme ou la différence des deux autres côtés.*

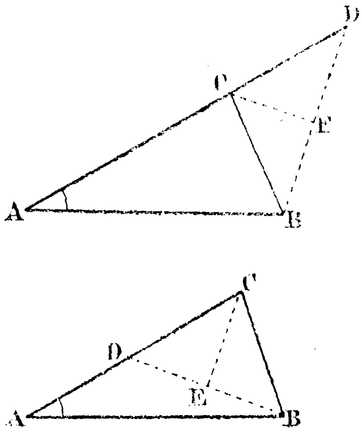



Fig. 587.

Soit un triangle ABC, dont on connaît le côté AB, l'angle A, et la somme ou la différence AD des deux autres côtés.

On peut construire l'angle A, et porter sur ses côtés les longueurs AB et AD. La partie CD étant égale à CB, le triangle BCD est isocèle ; on tracera donc BD, et, en son milieu, la perpendiculaire EC fera connaître le troisième sommet du triangle.

**Problème 266.**

**989.** *Construire un triangle, connaissant un côté* BC, *l'angle opposé* A, *et la somme* l *ou la différence* d *des deux autres côtés.*

Soit ABC le triangle demandé.

1° Prolongeons BA (fig. 588), et portons AC en AD ; le triangle CAD est isocèle, la somme des angles égaux C et D égale l'angle A, extérieur à cet triangle, ainsi l'angle $D = {}^1/_2\,A$.

On peut donc construire un angle D égal à la moitié de l'angle donné; prendre DB égal à la longueur $l$ somme de deux côtés; décrire, du point B, avec un rayon égal au côté donné, un arc qui coupe DC, ce qui

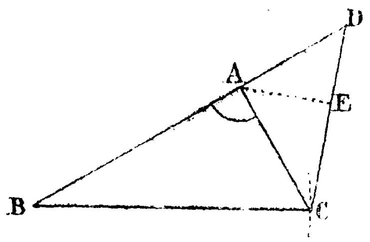



Fig. 588.

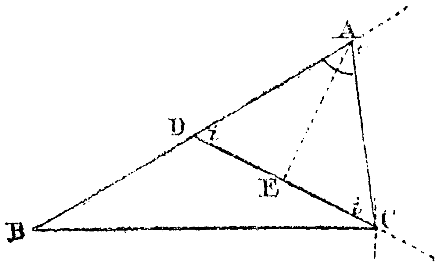



Fig. 589.

donne un second sommet C; enfin, élever au milieu de CD la perpendiculaire EA, qui détermine le troisième sommet.

2° En portant AC en AD (fig. 589); le triangle CAD est isocèle; la somme des angles égaux C et D est égale à l'angle extérieur $e$, supplément de A; ainsi l'angle $i = {}^1/_2\,e$.

On peut donc construire un angle ADC égal à la moitié du supplémen de l'angle donné, et prendre le prolongement DB égal à $d$, différence de deux côtés, ce qui donne un premier sommet B; du point B, avec un rayon égal au côté donné, on coupe DC, ce qui détermine un second sommet C; enfin on mène CD, et, en son milieu, la perpendiculaire EA, qui donne le troisième sommet A.

*Remarque.* Sur BC, on peut décrire un segment capable de l'angle connu A, et le problème peut s'énoncer comme il suit :

*Diviser un arc de cercle* BAC *en deux parties, telles que la somme ou la différence des cordes des deux arcs partiels obtenus ait une longueur donnée.*

Ce problème résolu directement (nº 921) donne une seconde méthode pour construire un triangle avec les données ci-dessus.

(Voir aussi *Méthodes*, nº 115.)

**Problème 267.**

**990.** *Construire un triangle, connaissant la base, la différence* m *des deux angles adjacents et la somme* l *des deux autres côtés.*

Soient ABC le triangle demandé, AB la base donnée, $AC + CB = l$, A et B les angles adjacents, tels que $A - B = m$.

Prolongeons AC d'une quantité CD égale à BC; dans ce cas, $AD = l$.

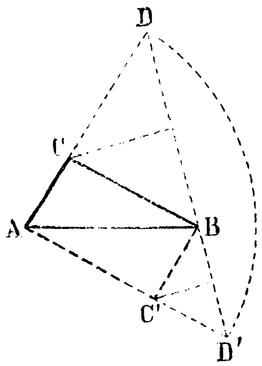


Fig. 590.

L'angle extérieur $ACB = D + CBD = 2CBD$;

d'où $$CBD = \frac{C}{2}.$$

Mais $$\frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2},$$

d'où $$CBD = 90^\circ - \frac{A+B}{2}.$$

$$\text{L'angle } ABD = B + CBD = \frac{2B}{2} + 90^\circ - \frac{A}{2} - \frac{B}{2};$$

d'où $$ABD = 90^\circ + \frac{B}{2} - \frac{A}{2}; \text{ ou } 90^\circ - \frac{A-B}{2}$$

$$ABD = 90^\circ - \frac{m}{2}.$$

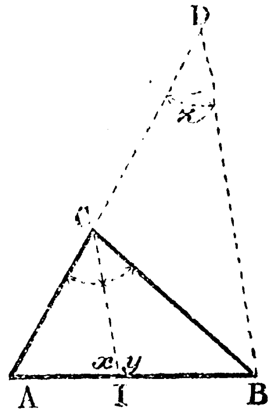


Fig. 591.

Ainsi l'angle ABD est connu. On peut le construire; puis du point A comme centre, avec une longueur AD égale à $l$, couper BD en D, élever une perpendiculaire au milieu de BD.

*Autre construction.* On connaît un premier lieu de D, puisque $AD = l$.

En menant la bissectrice CI, on a :

$$x + y = 180^\circ,$$

$$y - x = A - B \quad (\text{nº } 465),$$

donc $x = ABD$ est connu et fournit un deuxième lieu BD.

*Remarque.* On doit avoir AD ou $l > AB$. Le point D′ donne un second triangle ABC′ égal au premier.

**Problème 267. — I.**

**991.** *Construire un triangle, connaissant la base, la somme des deux angles adjacents et la différence des deux autres côtés.*

Cette question revient au problème connu : *Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et la différence des côtés qui comprennent cet angle* (nº 989, 2º).

**Problème 268.**

**992**. *Construire un triangle, connaissant la longueur de la base, une droite sur laquelle doit se trouver cette base, l'angle opposé et deux points par lesquels doivent passer les autres côtés.*

(Voir *Méthodes*, nº 108.)

**Problème 269.**

**993**. *Construire un triangle, connaissant le périmètre, un angle et la hauteur abaissée du sommet de cet angle.*

(Voir *Méthodes*, nº 134.)

**Problème 270.**

**994**. *Construire un triangle* ABC, *connaissant la base* AB, *la différence* m *des deux angles adjacents, et sachant que le sommet* C *doit se trouver sur une droite* XY. (COMPAGNON.)

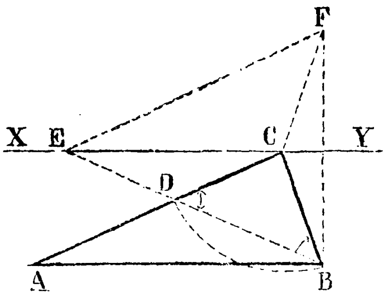


Fig. 592.

Supposons le problème résolu. Soit F le point symétrique de B, et $CD = CB$.

Les angles $A + B$ et $CDB + CBD$ ont même supplément C.

Donc $\quad CBE = \frac{A + B}{2}$;

$$ABE = B - CBD = B - \frac{A + B}{2} = \frac{B - A}{2} = \frac{m}{2}.$$

On peut donc mener la droite BDE et connaître l'angle BEF.

Or le quadrilatère EDCF est inscriptible, car l'angle EFC égal à EBC est le supplément de EDC.

Donc aussi l'angle ACF est le supplément de l'angle connu BEF.

Ainsi sur AF, il faut décrire un segment capable d'un angle qui a pour valeur $180° -$ BEF, et l'on obtiendra le point C.

**Note.** Le problème 994 se trouve dans l'ouvrage : *Questions proposées de Géométrie,* par COMPAGNON, p. 34, nº 158.

* M. COMPAGNON, professeur au collège Stanislas, auteur de divers ouvrages relatifs aux *Eléments de Géométrie.* Nous prendrons plusieurs énoncés dans les *Questions proposées de Géométrie* de cet auteur.

**Problème 270. — I.**

**995**. *Construire un triangle, connaissant la hauteur, la bissectrice qui part du même sommet et le rayon du cercle inscrit.*

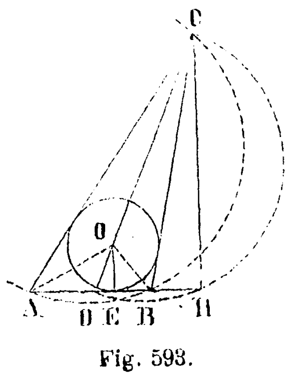


Fig. 593.

Supposons le problème résolu.

On connaît CD, CH et OE.

On construit le triangle rectangle DCH, et l'on détermine le point O tel que OE égale le rayon donné; puis, par le sommet C, on mène les tangentes CA, CB.

### Problème 270. — II.

996. *On donne la hauteur, la bissectrice et l'angle au sommet* C.

On fait l'angle C (fig. 593), sur la bissectrice de l'angle, on prend la longueur donnée CD, et du point C avec la hauteur on coupe en H la demi-circonférence décrite sur le diamètre CD.

### Problème 271.

997. *On donne la base, l'angle au sommet et le rayon du cercle inscrit.*

(Voir *Méthodes*, nº 262, 3º et nº 972 *a*, 2º.)

### Problème 271. — I.

998. *Construire un triangle, connaissant la médiane* AM, *la symédiane* AS *et la distance* MS *de leurs pieds.*

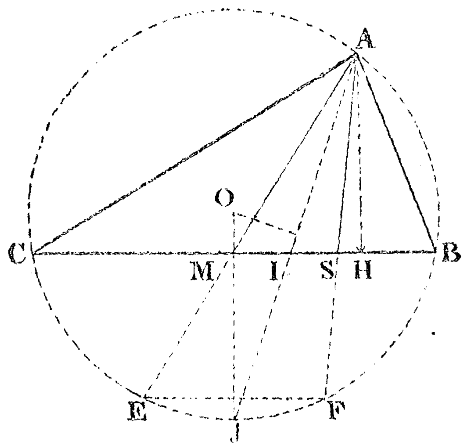


Fig. 594.

En supposant le problème résolu et se rappelant que la bissectrice du triangle est en même temps bissectrice de l'angle MAS et qu'elle passe par le point milieu J de l'arc CJB, on arrive à la construction suivante :

On construit le triangle AMS, on mène la bissectrice AI que l'on prolonge jusqu'à la médiatrice menée par M ; puis sur MJ on détermine le point O équidistant de A et de J ; ce point O est le centre du cercle circonscrit au triangle demandé ; il suffit alors de prolonger MS jusqu'au cercle circonscrit, en B et C.

### Problème 271. — II.

999. *Construire un triangle, connaissant la médiane, la symédiane et la hauteur qui partent d'un même sommet.*

On construit les triangles rectangles AHM, AHS (fig. 594), et l'on retombe sur la question précédente.

### Problème 271. — III.

1000. *Couper les côtés d'un angle* A, *de manière que le triangle déterminé ait un périmètre donné* 2p *et réalise une autre condition.*

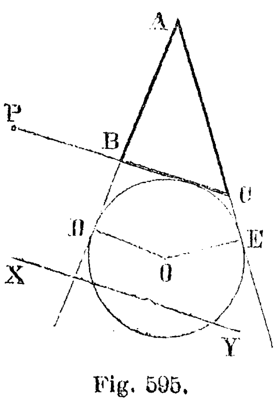


Fig. 595.

(a) *Le côté* BC *doit passer par un point donné* P.

On sait que lorsqu'une circonférence est tangente aux côtés d'un angle A, toute tangente, telle que BC, donne un triangle dont le périmètre constant égale 2AD (nº 739).

Donc il faut prendre $AD = AE = p$.

Élever les perpendiculaires DO, EO, décrire la circonférence et mener la tangente PBC.

(b) *On donne le rayon du cercle inscrit.*

Avec le rayon donné, on décrit une seconde circonférence tangente aux côtés de l'angle A, et le côté BC est donné par la tangente intérieure commune aux deux circonférences.

(c). *La hauteur abaissée du sommet* A *doit avoir une longueur donnée* h. (Voir n° 134.)

Du centre A, avec le rayon $h$, on décrit une seconde circonférence, et l'on mène la tangente intérieure commune aux deux circonférences.

(d). *La longueur de la bissectrice de l'angle* A *est donnée.*

Ce problème se ramène au n° 998; il en serait de même si l'on donnait la hauteur abaissée du sommet B. Le problème se ramènerait au n° 999, si l'on donnait l'angle B.

### Problème 271. — IV.

**1001.** *Construire un triangle, connaissant l'angle* A, *la hauteur* h *qui part du sommet* A *et la somme* l *des deux côtés* b *et* c *de l'angle donné.*

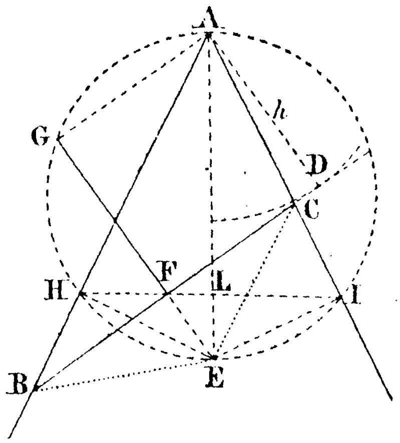


Fig. 596.

En supposant le problème résolu, on arrive facilement à la construction suivante :

On prend $AH = AI = \frac{l}{2}$, on élève les perpendiculaires HE, IE, puis on décrit une circonférence sur AE pris pour diamètre. Alors le problème revient à mener EFG de manière que $FG = h$ (question connue, c'est le *Problème de Francœur*, n° 320), et par le point F, mener BFC parallèle à GA.

Les quadrilatères BEFH, CIEF sont inscriptibles, les triangles rectangles BHE, CIE sont égaux, et $AB + AC = AH + AI = l$.

*Remarque.* Le problème auxiliaire se rapporte au livre III.

**1002. Note.** 1° La question précédente a reçu diverses solutions. Voir *Mathesis*, 1905, p. 79, n° 1471. Solutions par MM. Emmerich, E. Weber, Servais, Verheggen. En outre, le problème est résolu avec les données $b \pm c$, $bc$ ou $b : c$, dans les *Questions de Géométrie de* Desboves, 2e édition, p. 313, n° VI, 1°.

2° Le triangle BEC est semblable au triangle isocèle HEI ; on retrouve un théorème connu, n° 677.

Les droites telles que BC divisant AH et AI en segments égaux enveloppent une parabole qui a le point E pour foyer ; la courbe est tangente aux côtés de l'angle A, aux points H, I. (G., n° 1015.)

### Problème 272.

**1003.** *Inscrire dans une circonférence un triangle dont deux côtés soient parallèles à deux droites données, et dont le troisième passe par un point donné* A.

Soient A, $xy$ et $yz$ le point et les droites données.

Supposons le problème résolu.

L'angle D égale $y$; donc le segment et sa corde sont connus; par suite, par un point quelconque Y de la circonférence, menons des parallèles aux droites données et, par le point A, une sécante telle que la corde BC = la corde YZ; par le point C, menons CD parallèle à XY, et joignons B à D.

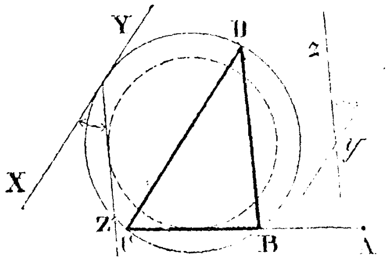


Fig. 597.

L'angle D égalant Y, le côté DB se trouve parallèle à YZ.

**Problème 272. — I.**

**1004.** *On donne deux points, A et B, et une circonférence. Déterminer sur cette courbe un point C, tel qu'en le joignant aux points donnés A et B, la base DE du triangle inscrit DCE ait une longueur donnée* l.

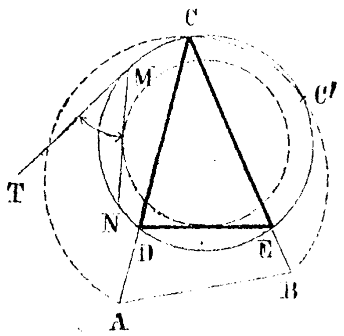


Fig. 598.

Soit le problème résolu, et DE $= l$.

Puisque la longueur de DE est connue, il en est de même de l'angle C, car il égale la moitié de l'arc DE. Pour le déterminer, prenons une corde MN égale à la longueur donnée $l$, menons la tangente MT : l'angle M est égal à celui du sommet C; donc, sur AB, décrivons un segment ACC'B capable de l'angle M.

*Remarque.* Il peut y avoir deux solutions, une seule ou aucune.

**Problème 273.**

**1005.** *Inscrire dans un cercle donné un triangle qui ait les côtés parallèles à trois droites données.*

1° Soient *ab*, *bc*, *ca* les trois droites données. Faisons un angle inscrit D égal à l'angle *a*; cet angle fait connaître la longueur EF du côté opposé à l'angle A.

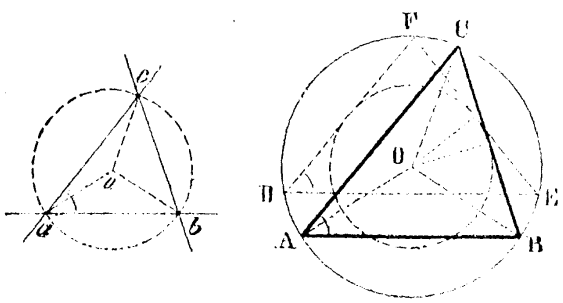


Fig. 599.

Décrivons donc une circonférence O tangente à EF; menons une tangente BC parallèle à *bc*, puis une parallèle AC à la droite *ac*; et joignons B et A. Cette droite sera parallèle à *ba*, car l'angle A = *a*, il a en effet même mesure $^1/_2$ FE ou $^1/_2$ CB, C = *c*; donc B = *b*; or CB est parallèle à *cb*; donc BA est parallèle à *ba*.

2° On peut aussi recourir au problème contraire, circonscrire une circonférence au triangle *abc*, et par le centre O mener des parallèles à *oa*, *ob*, *oc*.

3° On détermine la longueur d'un côté, comme on l'a fait précédemment (n° 1003).

**Problème 273. — I.**

**1006.** *On donne deux points* A *et* B, *ainsi qu'une circonférence ; sur cette courbe, déterminer un point* C *tel qu'en le joignant aux points* A *et* B, *on forme un triangle inscrit* CDE, *dont l'un des angles ait une grandeur donnée.*

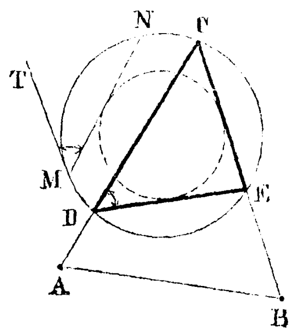


Fig. 600.

Soit l'angle D égal à l'angle donné.

La corde CE est déterminée, car l'angle D égal la moitié de l'arc CE.

Formons un angle inscrit TMN égal à l'angle donné, décrivons une circonférence tangente à la corde MN, et, par le point B, menons une tangente BEC à la circonférence auxiliaire; on aura D = M.

*Remarques.* 1° Par ce point B, on peut mener deux tangentes, ce qui donne deux solutions; si l'angle donné M doit être au point E, il faut mener les tangentes par le point A, ce qui donne deux autres solutions.

2° Lorsque C est l'angle donné, on procède comme on l'a déjà indiqué (n° 1004), et l'on a encore deux solutions; donc, en tout, on a six solutions.

**Problème 274.**

**1007.** *Construire un triangle* LMN, *sachant que ses côtés vont passer par trois points fixes* A, B, C, *que les sommets* M, N *sont sur un cercle fixe, passant par les points* A *et* B, *et enfin que l'angle* L *a une valeur donnée.* (Concours général de 1875, classe de seconde.)

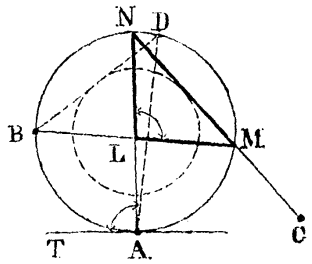


Fig. 601.

Soit le problème résolu, et LMN le triangle demandé.

L'angle L égale la demi-somme des arcs AB et MN; donc MN peut être connu; pour cela, faisons l'angle du segment TAD égal à l'angle donné : on aura l'arc BD = l'arc MN. Donc, par le point C, menons une tangente CMN à la circonférence concentrique à la première et tangente à la corde BD.

*Remarque.* On peut mener deux tangentes; l'une d'elles donne un angle L égal à l'angle donné, et l'autre correspond à un angle supplémentaire. (E. LARTIGUE.)

**Problème 274. — I.**

**1008.** *Inscrire, dans une circonférence, un triangle* ABC *dont l'angle* A *est connu et dont les deux côtés* AC *et* BC *sont tangents à deux cercles donnés.* (Concours général de 1875, classe de troisième.)

Soient O, D, E, les centres des circonférences données.

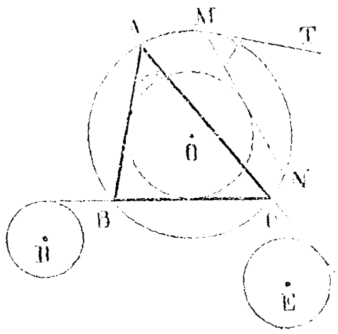


Fig. 602.

Puisque l'angle A est connu, il en est de même de l'arc et de la corde BC; pour cela, on peut mener une tangente MT, faire l'angle TMN égal à l'angle donné.

Du centre O, décrire une circonférence tangente à MN, et, puisque le côté BC doit être tangent à la circonférence D, il faut mener une tangente commune BC; puis, par le point C, mener une tangente à la circonférence E.

*Remarque.* A la tangente commune BC correspondent deux solutions. Et comme on peut mener généralement quatre tangentes communes à deux circonférences, on peut avoir huit solutions.

### Problème 275.

**1009.** *Deux circonférences concentriques étant données, construire un triangle dont les angles sont donnés, et qui ait un sommet sur une des circonférences, et les deux autres sommets sur la seconde circonférence.*

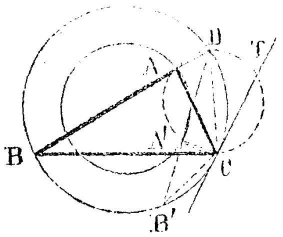


Fig. 603.

Supposons le problème résolu, ABC le triangle demandé.

Prolongeons BA. L'angle inscrit B étant connu, il en est de même de la corde CD. En effet, il suffit de faire avec une tangente quelconque CT un angle TCD égal à l'angle donné B, puis, sur CD, décrire un segment DAC capable de l'angle supplémentaire de l'angle A.

*Remarque.* On peut se donner un point C pour sommet d'un des angles donnés, et l'on trouve deux solutions CAB, CA'B'.

D'ailleurs, chacun des trois angles peut avoir son sommet sur la circonférence intérieure; on a donc six solutions, lorsqu'un seul sommet est sur la circonférence AA'. On trouve pareillement six solutions, avec la condition qu'un seul sommet doit être sur la circonférence extérieure.

**Note.** Question empruntée à FRANCŒUR, *Cours complet de mathématiques pures,* t. I.

* FRANCŒUR, né à Paris en 1773, mort en 1849; membre de l'Académie des sciences, auteur de plusieurs ouvrages mathématiques très estimés : *Cours complet de mathématiques pures, Uranographie, Traité de géodésie,* etc.

### Problème 276.

**1010.** *Dans un triangle donné, inscrire un triangle égal à un triangle donné.*

A l'aide du problème contraire, la question est ramenée à la suivante :

**Problème 276. — I.**

*Par trois points donnés, faire passer trois droites qui déterminent un triangle égal à un triangle donné.*

(*Méthodes*, n° 215.)

**Problème 276. — II.**

**1011.** *A un triangle donné* ABC, *circonscrire le triangle équilatéral maximum.*

Il faut décrire sur les côtés AB, BC et CA, des arcs capables d'angles de 60°, joindre les centres de ces arcs, et mener par les sommets du triangle donné, des paralèles aux lignes des centres.

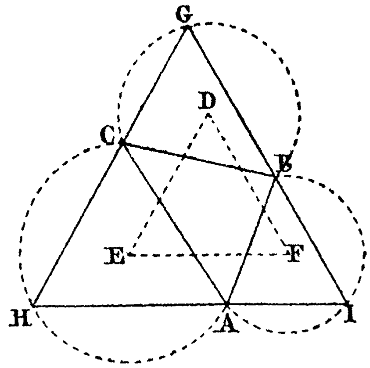



Fig. 604.

**Problème 276. — III.**

**1012.** *A un triangle équilatéral, circonscrire un carré ayant pour sommet un des sommets du triangle.*

Sur chaque côté pris pour diamètre, on décrit des demi-circonférences extérieures, etc.

**Problème 276. — IV.**

**1013.** *A un carré, inscrire un triangle équilatéral ayant pour un de ses sommets un des sommets du carré.*

Problème contraire au précédent.

## Construction des Quadrilatères.

**1014.** Chaque cas de construction de triangle peut en donner un pour le parallélogramme; mais comme il est très facile de passer de l'un à l'autre, nous ne dirons presque rien du parallélogramme.

Le trapèze offre quelques questions intéressantes, surtout quand on connaît le troisième livre de Géométrie. On peut en dire autant du quadrilatère inscriptible et du quadrilatère quelconque.

**Problème 277.**

**1015.** *Dans un carré donné, inscrire un autre carré ayant pour côté une ligne donnée* l. *Entre quelles limites peut varier cette longueur?*

1er *Moyen.* Du point de rencontre des diagonales du carré donné, il faut décrire une circonférence avec $\frac{l}{\sqrt{2}}$ pour rayon; les points d'intersection de cette circonférence avec les côtés du carré ABCD sont les sommets du carré demandé.

2e *Moyen.* Menons la bissectrice de l'angle droit BAE. Du point B comme centre, avec $l$ pour rayon, coupons la bissectrice en F, abaissons la perpendiculaire FH, menons HG parallèle à BF. Puis, sur GH, élevons des perpendiculaires GM, HL.

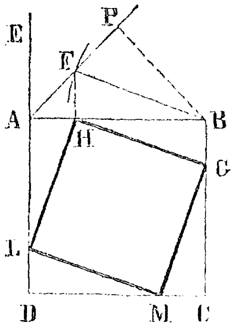


Fig. 605.

On a $GH = BF$. La figure GHLM est un carré, car $AH = HF = BG$ ; donc $BH = CG$, etc.

Le côté BF peut varier de BA à BP, perpendiculaire abaissée sur la bissectrice. On sait que $BP = \frac{AB}{\sqrt{2}}$.

1016. *Note.* Le 2e moyen est emprunté à W. COLLINS, *Key to exercises on Euclid's Elements of Geometry*, p. 20.

### Problème 278.

1017. *Construire un carré, connaissant la somme, ou la différence, de la diagonale et du côté de ce carré.*

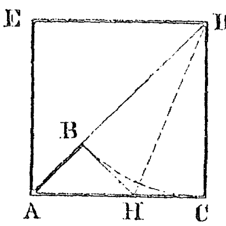


Fig. 606.

1° Pour la somme, voir *Méthodes*, n° 41.

2° Soit AB la différence donnée.

En supposant le problème résolu, et en élevant une perpendiculaire BH à AB, on reconnaît que le triangle ABH est rectangle isocèle, car l'angle A vaut 45°; puis le quadrilatère HBDC est formé de deux triangles égaux, comme étant rectangles, ayant l'hypoténuse DH commune et le côté $DB = DC$.

Donc $$HC = BH = BA.$$

Ainsi, on peut faire un angle droit CAE, mener la bissectrice AD, porter la différence de A en B, puis de B en H et de H en C, élever la perpendiculaire CD, etc.

### Problème 279.

1018. *Inscrire un carré dans l'espace compris entre deux circonférences égales qui se coupent.*

Par le point milieu de la partie de la ligne des centres, comprise entre deux arcs égaux des deux circonférences, il faut mener des lignes à 45°. On obtient ainsi les diagonales du carré.

### Problème 279. — I.

1019. *Dans un carré, inscrire quatre cercles égaux tangents entre eux et à deux côtés du carré. Exprimer le rayon en fonction du côté* a *du carré.*

Il suffit de diviser le carré donné en quatre carrés égaux, et inscrire un cercle dans chacun de ces carrés. Le rayon est le quart de $a$.

**Problème 280.**

**1020**. *Circonscrire un carré à un quadrilatère donné.*

Soit ABCD le quadrilatère donné.

Supposons le problème résolu. Le sommet E est sur le cercle dont AB est le diamètre ; de même pour F.

La diagonale FE, divisant chaque angle droit en deux parties égales, doit passer par le point N, milieu de ANB, et par M, milieu de DMC. Il suffit donc de joindre ces deux points milieux.

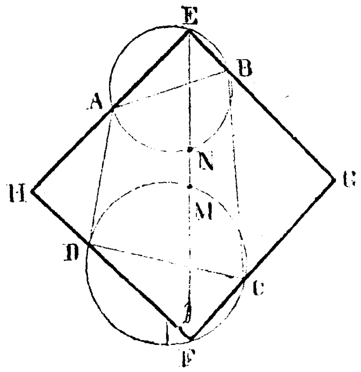



Fig. 607.

**1021**. *Remarques.* 1° *Le problème comporte quatre solutions.* Soient M, M′ les points milieux des demi-circonférences décrites sur le diamètre AB (fig. 608), puis N , N′ les points milieux relatifs aux demi-cercles CD.

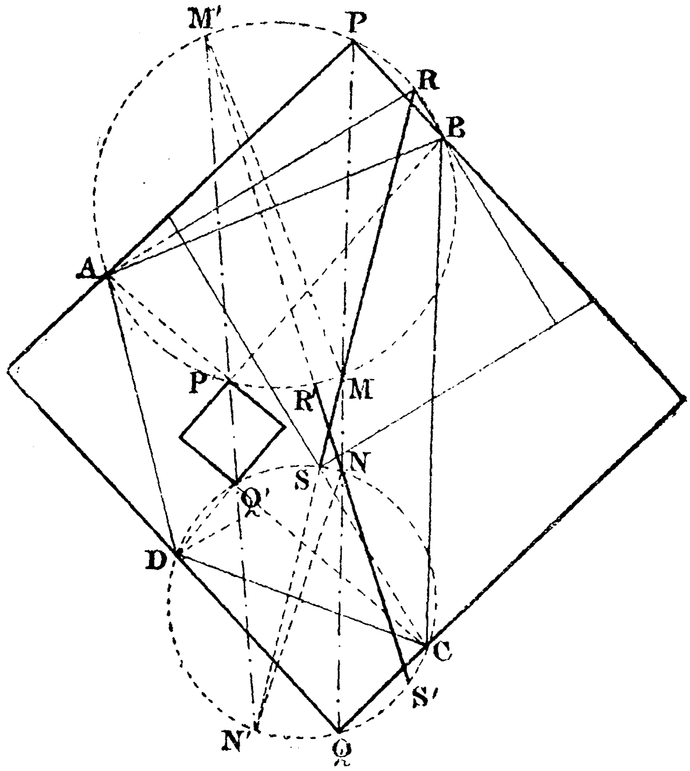



Fig. 608.

En joignant un des points milieux M ou M′ à N ou N′, on obtient une droite qui rencontre les deux autres demi-cercles aux extrémités d'une diagonale ; on obtient ainsi les quatres solutions qui correspondent aux diagonales PQ, P′Q′, RS et R′S′.

2° *Lorsque les diagonales du quadrilatère* ABCD *sont égales et orthogonales, on peut circonscrire une infinité de carrés ;* car par A et C on peut mener deux parallèles dans une direction quelconque ; puis, par B et D, abaisser des perpendiculaires sur les deux parallèles : on obtient un carré.

3° Dans le cas des diagonales égales et orthogonales, les quatre cercles décrits sur les côtés AB, BC, CD, DA passent par un même point qui est le *centre permanent de similitude* des carrés circonscrits (n° 2476).

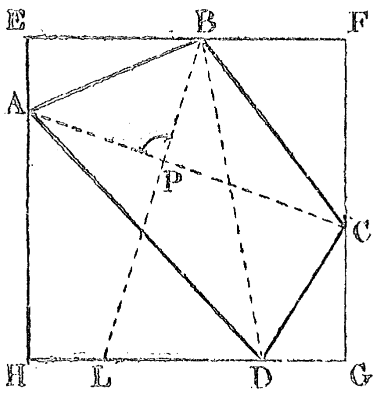


Fig. 609.

4° La solution ci-après est d'une extrême simplicité :

Soient A, B, C, D les quatre points donnés.

D'un de ces points, B, par exemple, abaissons la perpendiculaire BP sur la diagonale AC; prenons BL = AC et menons DL : on a la direction d'un côté du carré.

Cette solution est due à M. BIANDSUTTER, de Lucerne. (*Mathesis*, 1881, p. 8.)

### Problème 281.

1022. *Dans un parallélogramme donné inscrire un carré.*

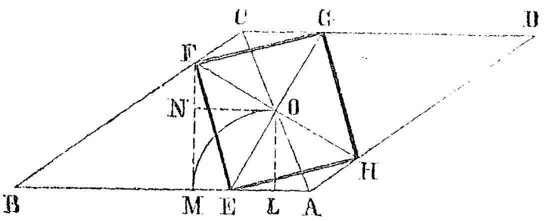


Fig. 610.

Soit le problème résolu; FE perpendiculaire à EH et FE = EH.

Le carré a pour centre le point de concours des diagonales du parallélogramme.

Abaissons les perpendiculaires OL, FM sur AB, et la perpendiculaire ON sur FM.

Les triangles rectangles OLE, ONF sont égaux, comme ayant les angles égaux et l'hypoténuse égale. En effet, OE = OF, et les angles LOE, NOF ont les côtés respectivement perpendiculaires.

Donc ON = OL.

De là on déduit la construction suivante :

Du centre O du parallélogramme, il faut abaisser la perpendiculaire OL sur AB, prendre LM = LO, et la perpendiculaire MF détermine le sommet F; puis on porte FN de L en E, et l'on mène FE, etc.

*Remarque.* La discussion est très intéressante, mais fort longue; elle emploie d'ailleurs la trigonométrie; il n'y a donc pas lieu de la donner ici; mais on peut la lire dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1859, p. 451 à 459 (J. MURENT, de Clermont).

### Problème 281. — II.

1023. *Dans un carré donné, inscrire un carré dont un côté passe par un point donné* A. (LONDRES. Examen *College of Preceptors.*)

Joignons le point donné A au centre O du carré aussi donné, faisons un angle droit et prenons OB = OA.

Sur le diamètre AB, décrivons une circonférence; elle coupera le côté du premier carré (prolongé s'il y a lieu) en deux points, ou lui sera tangent, ou ne le rencontrera pas; dans le premier cas, il y aura deux solutions, dans le second une seule et ce sera le carré inscrit minimum, et dans le troisième cas il n'y aura pas de solution.

*Remarque.* On peut traiter la question algébriquement et l'on obtient une équation du second degré, ce qui conduit aux mêmes résultats, mais par une voie un peu plus laborieuse.

### Problème 282.

**1024.** *Construire un rectangle lorsqu'on connaît :*

1° *Le périmètre et l'angle des diagonales.*

Connaître l'angle O, c'est connaître l'angle BAO et chacun des autres angles. On a donc à construire un triangle rectangle BAC, connaissant les angles et la somme des côtés de l'angle droit (974, 2°).

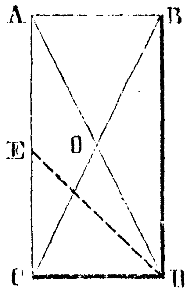


Fig. 611.

2° *L'angle des diagonales et la différence des côtés adjacents.*

Soit AE cette différence; on peut construire le triangle AED, car on connaît la base AE et les deux angles adjacents.

Ainsi l'angle $\text{DAE} = 90° - \frac{\text{AOC}}{2}$;

$$\text{AED} = 90° + 45° = 135°.$$

3° *Le périmètre et la diagonale.*

On a à construire un triangle rectangle ACD, connaissant l'hypoténuse AD et la somme des autres côtés (n° 989).

On peut aussi donner la diagonale et la différence des côtés adjacents.

### Problème 282. — I.

**1025.** *Construire un losange, connaissant le côté et la somme ou la différence des diagonales.*

En prenant la demi-somme ou la demi-différence, on est encore ramené à construire un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et la somme ou la différence des autres côtés.

### Problème 283.

**1026.** *Par un point de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, mener des parallèles aux côtés de l'angle droit, de manière que le rectangle obtenu réalise certaines conditions imposées.*

(**a**) *Le périmètre doit égaler une longueur donnée* (voir nos 99 **a** et 874).

(**b**) *La différence des deux côtés adjacents doit égaler une longueur donnée* (nos 99 **b** et 584).

(**c**) *Inscrire un carré* (n° 99 **b**, 2°).

(**d**) *La diagonale du rectangle doit être aussi petite que possible.*

Du point A, il faut abaisser une perpendiculaire sur l'hypoténuse.

**Problème 284.**

**1027.** *Dans un cercle inscrire un rectangle.*
(**a**) *Le périmètre doit égaler une longueur donnée* (voir nº 100 (*a*).
(**b**) *La différence des côtés adjacents doit égaler* d (voir nº 100 (*b*).

**Problème 284. — I.**

**1028.** *Construire un parallélogramme, connaissant :*

1º *Un côté et les deux diagonales;*
2º *Deux côtés et l'une des diagonales ;*
3º *Deux côtés adjacents et leur angle ;*
4º *Les diagonales et leur angle.*

Soit ABCD le parallélogramme demandé.

1º On peut construire le triangle BOC, avec le côté donné et les demi-diagonales; en prolongeant BO et CO, de manière à les doubler, on a les sommets A et D.

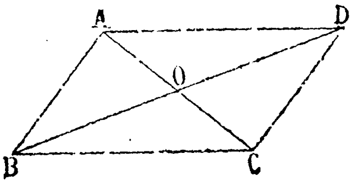


Fig. 612.

2º On peut construire le triangle ABC, et le parallélogramme s'achève par les droites AD et CD, parallèles aux côtés opposés.

Si l'on connaît AB et AD, et la diagonale AC, on remarque que donner AD, c'est donner BC, ou le cas qui vient d'être résolu.

3º On construit le triangle ABC, et le parallélogramme s'achève par les droites AD et CD, parallèles aux côtés opposés.

4º Enfin, connaissant les diagonales AC et BD, et leur angle, on trace deux droites indéfinies, se coupant sous l'angle donné, on porte de part et d'autre du point d'intersection les deux moitiés de l'une des diagonales sur l'une des droites, et les deux moitiés de l'autre diagonale sur l'autre droite, et on a les quatre sommets.

**Problème 285.**

**1029.** *Construire un trapèze* ABCD, *connaissant les quatre côtés.*

Supposons le problème résolu. En menant par le sommet C une parallèle CE au côté AD, on forme un triangle BCE, dont on connaît les trois côtés, car BE est la différence des deux bases, et BC, CE, les deux côtés non parallèles.

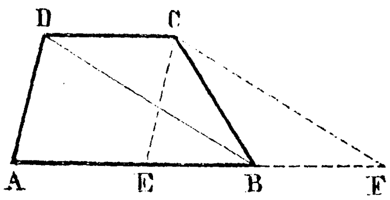


Fig. 613.

Donc il faut construire un triangle BCE ayant pour base la différence des bases du trapèze et les longueurs BC et AD pour côtés; puis, par le point C, mener une parallèle à BE et prendre CD = EA = la petite base du trapèze.

**Problème 285. — I.**

**1030.** *On donne les bases et les deux diagonales.*

Il faut construire un triangle AFC ayant pour base la somme des bases du trapèze, et pour côtés les diagonales données.

### Problème 286.

**1031.** *Construire un trapèze, connaissant le rayon du cercle inscrit et les deux côtés non parallèles.*

Après avoir décrit le cercle O et tracé deux tangentes parallèles, il faut mener une tangente AB égale à un des côtés GH non parallèles, et une tangente DC égale à l'autre côté.

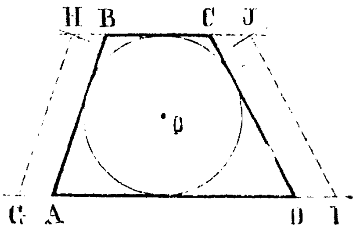


Fig. 614.

### Problème 286. — I.

**1032.** *On connaît le rayon du cercle inscrit, une base et un des côtés non parallèles.*

Après avoir mené AB (fig. 614), on prend BC de la longueur de la base donnée, on mène par le point C une tangente CD.

### Problème 286. — II.

**1033.** *Construire un trapèze, connaissant les bases et les angles.*

On porte les longueurs données pour bases en AB et AC, on fait les angles donnés A et B, et l'on mène CF parallèle à AD; on a :

$$EF = AC.$$

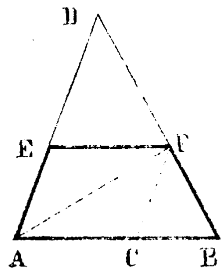


Fig. 615.

### Problème 286. — III.

**1034.** *On connaît les angles, une base* AB *et un des côtés non parallèles* AE, *ou une diagonale* AF (fig. 615).

### Problème 286. — IV.

**1035.** *On connaît la base* AB, *l'angle* B, *la diagonale* AF *et le côté* AE (fig. 615).

### Problème 286. — V.

**1036.** *Construire un quadrilatère, connaissant les milieux de trois côtés, et une droite parallèle et égale au quatrième côté.*

Considérons le quadrilatère ABCD; les milieux E, F, G, H, des côtés sont les sommets d'un parallélogramme (nº 542).

Donc, on peut construire ce parallélogramme, et trouver ainsi le milieu H du quatrième côté; on mène alors la droite AHD parallèle à *m;* on porte la moitié de la longueur *m* en HA et HD, ce qui donne deux sommets, A et D; on trace AEB et DGC; on porte EA en EB et GD en GC, ce qui donne les deux autres sommets.

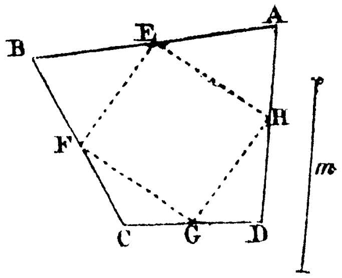


Fig. 616.

### Problème 287.

**1037.** *Construire un quadrilatère, connaissant les quatres côtés et la droite* EG *qui joint les milieux des côtés opposés.*

Soit ABCD le quadrilatère demandé ; E, F, G, H, les milieux des côtés, I et J les milieux des diagonales AC et BD. Traçons les quadrilatères EIGJ et HIFJ.

Dans le triangle ABD, la droite EJ est parallèle à AD, et en est la moitié ; dans le triangle ACD, la droite IG est parallèle à AD, et en est la moitié. Pareillement, chacune des lignes EI et JG est parallèle à BC, et en est la moitié. Ainsi EIGJ est un parallélogramme, dont on connait les côtés et la diagonale EG. On peut donc construire ce parallélogramme, et tracer sa diagonale IJ.

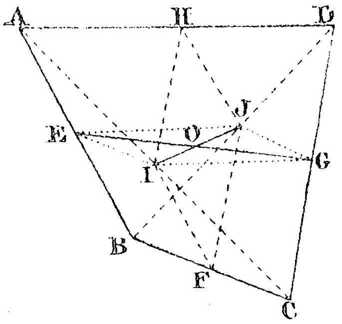


Fig. 617.

On construit de même le parallélogramme FIHJ, dans lequel chacun des côtés HI et JF est moitié de CD, et HJ, IF moitié de AB.

Alors on peut construire le quadrilatère ABCD, car on a les milieux des côtés, avec les directions et les longueurs de ces mêmes côtés.

**1037 a. Note.** On peut voir le *Journal de Mathémathiques* de M. Vuibert, 1892, page 93, n° 2887 ; ou Catalan, *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, 6e édition, P. VIII, p. 14.

Le problème a été proposé dans les *Annales de Gergonne*, tome II, 1811-1812, page 32. Le même volume, p. 117 et suivantes, donne les solutions de Lhuilier, alors professeur à l'Académie impériale de Genève ; de Rochat, professeur de mathématiques et de navigation à Saint-Brieuc ; de Pilatte, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Rennes.

Depuis la publication des *A. de G.*, le problème a passé dans les recueils de problèmes géométriques, où on le rencontre le plus souvent sans indication d'origine. — Il en est de même d'un assez grand nombre d'autres questions.

### Problème 287. — I.

**1038.** *Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les diagonales, l'angle qu'elles forment et le rayon du cercle circonscrit.*

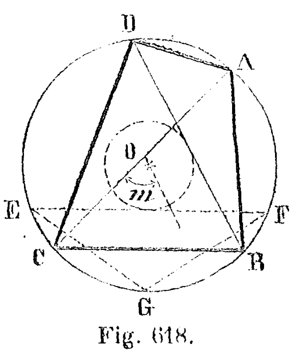


Fig. 618.

Dans le quadrilatère inscrit, les angles opposés sont supplémentaires. Donner une diagonale, un angle opposé à cette ligne, revient à donner le rayon du cercle circonscrit et la diagonale. Ainsi ce problème revient à construire un quadrilatère, connaissant les angles, les diagonales et leur angle.

On décrit le cercle avec le rayon donné, on prend AC, EF égales aux diagonales. Il faut décrire une circonférence tangente à la corde EF, et mener pour seconde diagonale une tangente DB formant, avec AC, l'angle donné $m$.

On a DB $=$ EF, comme cordes équidistantes du centre.

**Problème 287. — II.**

**1039.** *Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les angles, une diagonale* AC *et l'angle* m *qu'elle forme avec l'autre diagonale.*

Sur la diagonale connue AC (fig. 618), il faut décrire un segment capable de l'angle opposé D. On obtient ainsi le cercle circonscrit.

La seconde diagonale BD dépend de l'angle A ; donc, en un point quelconque G du cercle circonscrit, faisons l'angle EGF égal à l'angle donné A, puis menons une tangente DB, formant avec AC l'angle $m$.

**Problème 287. — III.**

**1040.** *Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant la diagonale* AC, *l'angle opposé* D, *un côté* AB *et l'angle des diagonales* (fig. 618).

**Problème 287. — IV.**

**1041.** *Construire un quadrilatère quelconque* ABCD *avec les données suivantes :*

1° *Une diagonale* AC, *un côté* AB *et les angles.*

Sur la diagonale AC, je décris un segment capable de l'angle B et un segment capable de D.

Du point A comme centre, avec la longueur AB, je coupe l'arc du segment. Je joins B au point C, et je fais l'angle donné BCD.

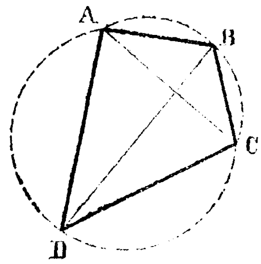


Fig. 619.

**1042.** 2° *Deux angles adjacents* B *et* C, *le côté* AB *adjacent à l'un d'eux et les diagonales.*

On construit d'abord le triangle ABC, dans lequel on connaît un angle B et deux côtés AB, AC. Puis on fait l'angle donné BCE, et l'on coupe CE par un arc décrit du point B avec la seconde diagonale BD pour rayon.

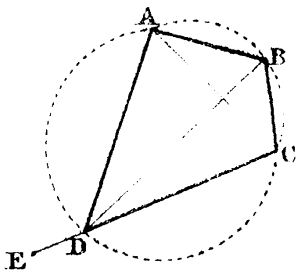


Fig. 620.

**Problème 288.**

**1043.** *Construire un quadrilatère, connaissant les deux diagonales, leur angle et deux angles opposés* B *et* D.

Sur AC, on décrit les segments capables des angles B et D. Par le centre O d'un de ces arcs, de ABC, par exemple, on mène une droite OF égale et parallèle à la seconde diagonale, et l'on décrit une circonférence égale à la circonférence O.

Par le point D, on mène une parallèle à FO, qui donne le sommet B; on est ramené à une question connue (n° 864).

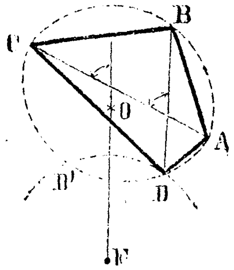


Fig. 621.

*Autre construction.* Avec les grandeurs connues AC, BD et l'angle des diagonales, on construit un parallélogramme ACEG; sur AC et EG, vers l'intérieur du parallélogramme, on décrit respectivement des segments capables des angles connus B et D. Chaque point d'intersection des deux segments peut être pris pour sommet B ou pour sommet D. (*Éducation mathématique*, par CH. BIOCHE, professeur à Louis-le-Grand, et H. VUIBERT, 1904, p. 146, n° 1572.)

### Problème 288. — I.

**1043 a.** *Construire un quadrilatère, connaissant :*

1° *Les quatre côtés et l'angle que deux côtés opposés font entre eux.* (LEMOINE, *J. M. E.*, 1884, p. 103.)

2° *Deux côtés opposés, les diagonales et l'angle que ces deux lignes font entre elles.* (Extrait de *Matriculation Geometry*. WORKMAN, BRACKNELL de Londres.)

1° En supposant le problème résolu et ABCD le quadrilatère demandé dont les côtés opposés AB, CD font entre eux l'angle donné ω, il suffit de mener par B et D des droites BE, DE respectivement parallèles à CD et CB; on obtient un triangle ABE qu'on peut construire, car les longueurs BA et BE font entre elles l'angle ω, et elles sont égales à deux côtés opposés ; puis on détermine C, en construisant le parallélogramme BEDC. (La figure est analogue à la fig. 125, p. 90.)

2° Le second problème est analogue au premier ; il en serait de même si l'on donnait l'angle de deux côtés opposés, au lieu de celui des diagonales.

### Problème 289.

**1044.** *Construire un quadrilatère, connaissant deux angles non opposés, les diagonales et leur angle.*

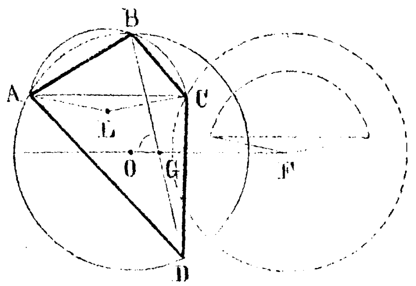


Fig. 622.

Sur la diagonale BD, on décrit un segment capable de l'angle donné BAD. Par le centre O, il faut mener une droite OF qui coupe BD, en faisant l'angle donné pour les diagonales; prendre OF égale à la seconde diagonale AC, décrire du centre F une circonférence égale à la première. Toute droite AC, parallèle à la ligne des centres, aura la longueur demandée ; il suffit de la mener de manière que l'angle ABC ait la grandeur donnée (n° 919).

### Problème 289. — I.

**1045.** *Construire un quadrilatère* ABCD, *connaissant les diagonales, leur angle, un angle* A *du quadrilatère et un côté* DC *non adjacent à l'angle connu.*

Comme au problème précédent (1044); mais du point D (fig. 622) avec le côté donné, on coupe en G le lieu de centre F, et l'on détermine ainsi la position de la seconde diagonale.

**Problème 289. — II.**

**1046.** *Construire un quadrilatère* ABCD, *connaissant les diagonales, leur angle et les angles opposés* A *et* C *du quadrilatère.*

Le point C (fig. 622) sera déterminé par l'intersection du lieu de centre F et du segment décrit sur BD et capable de l'angle C.

**Problème 290.**

**1047.** *Construire un quadrilatère* ABCD, *connaissant les angles et les diagonales.*

Supposons le problème résolu ; sur une diagonale BD, décrivons un segment capable de l'angle A. Soient E, F les points où les côtés sont coupés par cette circonférence ; menons la tangente MAN.

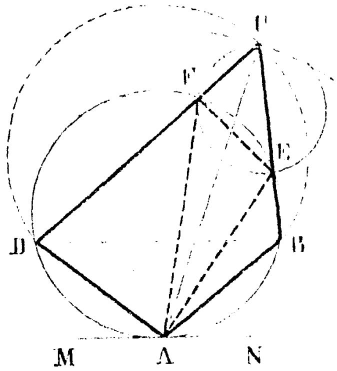


Fig. 623.

Les angles MAE, NAF sont connus, car ils égalent respectivement ABE, ADF ; donc la corde FE est connue. De là, on déduit la construction suivante :

A l'aide de la longueur connue BD et de l'angle BAD, on décrit une circonférence. En un point quelconque A, on mène une tangente, on fait les angles connus MAE, NAF. Sur la corde EF, on décrit le segment capable de l'angle C. Du point A comme centre, avec la seconde diagonale pour rayon, on coupe en C l'arc décrit, l'on mène CFD, CEB, puis AB, AD. (Desboves, *Questions de Géométrie,* 3e édit., p. 348.)

**1048.** *Variante.* En supposant le problème résolu, on peut procéder comme il suit :

Sur B'D' égal à $m$, on décrit un segment capable de l'angle A, et le sommet A est pris à volonté sur l'arc B'AD'.

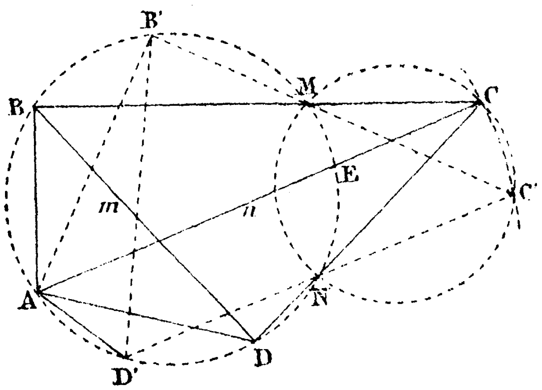


Fig. 624.

On fait les angles AB'C', AD'C' respectivement égaux aux angles donnés B et D. Il en résulte que l'angle C' égale le quatrième angle du quadrilatère, et l'arc MEN est déterminé.

Il suffit de décrire la circonférence MC'N, pour avoir sur la corde MN un segment capable du quatrième angle.

Enfin (du point A, pris pour centre), avec la longueur $n$ de la seconde diagonale, couper la circonférence MC'N en C, et mener CMB et CND.

**1048 a. Note.** Cette *variante* est due à M. Ivan Alexandroff, professeur au lycée de Tambov (Russie).

Voir *Problèmes de Géométrie élémentaire,* groupés d'après les méthodes employées pour leur résolution ; traduction par D. AITOFF, *Introduction*, pages VII et VIII.

* M. DESBOVES, professeur au lycée Fontanes, auteur des ouvrages suivants très estimés : *Questions de Géométrie, Questions d'algèbre, Questions de trigonométrie.*

### Problème 290. — I.

**1048 b.** *Deux cercles* BAD, BCD *se coupent suivant* BD (fig. 623). *Mener une sécante* AC, *d'une longueur donnée* l, *limitée aux deux cercles et telle qu'en joignant ses extrémités* A *et* C *à un des points* D *d'intersection, l'angle* ADC *ait une valeur donnée.*

Même problème que ci-dessus. On connaît les deux diagonales AC, BD et les angles A, C, D du quadrilatère ABCD.

### Problème de Lionnet 291.

**1049.** *Construire un pentagone, connaissant les milieux des côtés.* (LIONNET.)

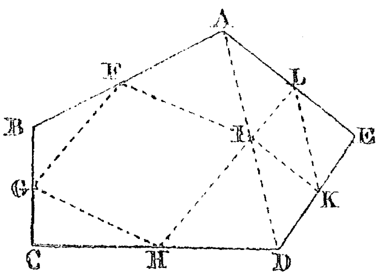


Fig. 625.

Soit ABCDE le pentagone demandé, et F, G, H, K, L, les milieux des côtés. Une diagonale quelconque AD partage ce polygone en un quadrilatère ABCD et un triangle ADE.

Avec les trois milieux F, G, H, on peut construire un parallélogramme FGHI, qui donne le milieu I de la diagonale AD ; et avec les trois milieux I, K, L, on peut construire le triangle ADE, qui donne trois sommets. On trouve les deux autres sommets en traçant AFB et DHC, et en portant FA en FB et HD en HC.

**1049 a. Note.** LIONNET, professeur à Louis-le-Grand, proposa ce problème, dans les *N. A.*, en 1843, p. 416, en demandant de construire le pentagone en n'employant que le compas. La solution fut donnée en 1844, page 19, par A. PROUHET, élève de mathématiques spéciales au collège d'Auch.

LIONNET professa avec distinction à Louis-le-Grand ; il est mort en 1885, après avoir collaboré pendant plus de quarante ans aux *Nouvelles Annales* de GÉRONO.

## Maxima et minima.

**1050.** *Périmètre minimum.* Les trois premiers exercices qui vont être résolus se rapportent au livre I. Tout périmètre minimum, étant développé entre deux points fixes, doit donner une ligne droite ou la plus petite ligne brisée que les données du problème puissent comporter.

*Angle maximum.* Le maximum de l'angle dont les côtés doivent passer par deux points fixes, est celui qui est inscrit dans le segment qui a le plus petit rayon possible, eu égard aux données. Le minimum de l'angle correspond au segment qui a le plus grand rayon. L'angle tend vers zéro. c'est-à-dire que ses côtés tendent à être parallèles lorsque le rayon tend vers l'infini.

*Méthodes*. Pour résoudre les exercices proposés, on a recours aux diverses méthodes déjà indiquées (nº 335).

Ainsi, suivant le cas, on emploie la *duplication*, les *lieux géométriques*, une *constante provisoire* ou les *principes déjà exposés*, etc.

**Problème 292.**

**1051**. *On donne un point* P *sur le périmètre d'un quadrilatère* ABCD; *quel est le chemin minimum qui, partant du point donné, aboutit à ce même point après avoir rencontré les trois autres côtés?*

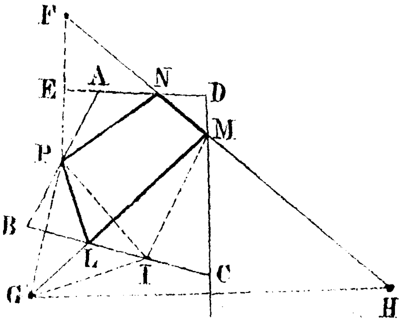



Fig. 626.

Il faut déterminer le point F symétrique de P par rapport à AD. Pour cela, on abaisse une perpendiculaire PE, qu'on prolonge d'une quantité EF égale à PE.

De même, on détermine le point G symétrique de P par rapport à BC, puis le symétrique H du point G par rapport à CD. Enfin on mène FH, NP, MG, LP. Le quadrilatère PLMNP a le périmètre minimum; il égale FH.

En effet, pour un autre point quelconque I, on a :

$$PI + IM > PL + LM. \qquad \text{(G., nº 176.)}$$

*Remarques*. 1º Dans l'énoncé de la question, le point d'arrivée peut être différent du point de départ; d'ailleurs, chacun de ces points peut être pris à l'intérieur du quadrilatère donné.

2º En prenant le symétrique $P_1$, de P, par rapport au côté AD; puis le symétrique $P_2$, de $P_1$, par rapport au côté DC; le symétrique $P_3$, de $P_2$, par rapport au côté suivant, etc., on peut résoudre le problème pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés.

**Note**. CATALAN, dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de LONGCHAMPS, a énoncé le théorème suivant : *Le périmètre du quadrilatère minimum inscrit dans un quadrilatère donné est constant, quel que soit le point* P *de départ sur le périmètre du quadrilatère donné, lorsque ce quadrilatère* ABCD *est inscriptible au cercle*. Le théorème a été démontré en 1891, p. 139, par M. SOLLERTINSKI, de Gatschina.

**Problème 292. — I.**

**1051 a**. *Trouver sur la hauteur d'un triangle isocèle le point dont le triangle podaire a le plus petit périmètre*. (SOONS.)

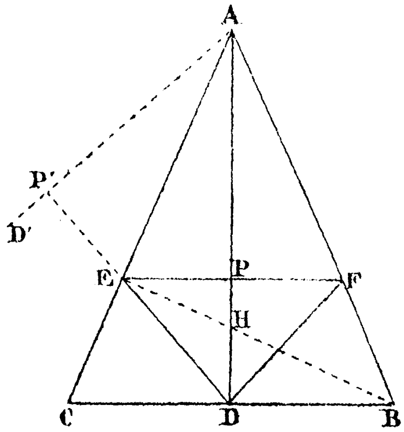



Fig. 627.

Le triangle podaire d'un point P est le triangle qu'on obtient en joignant deux à deux les projections du point P sur les côtés du triangle donné.

Il faut que la somme ED + EP soit minima.

En se reportant à un problème déjà résolu (nº 147 a), il suffit d'abaisser la perpendiculaire DEP′ sur la droite AD′ symétrique de AD, par rapport à AC. La bissectrice EHB de l'angle DEF est la hauteur BE abaissée du sommet B (nº 662); donc le point H est l'orthocentre du triangle donné, et ce point répond à la question.

*Remarque.* La solution précédente suppose que l'angle A est aigu; lorsque l'angle du sommet est droit ou obtus, le sommet A répond à la question, et le périmètre minimum du triangle podaire se réduit au double de la hauteur abaissée de A sur BC.

**Note.** Voir diverses solutions algébriques ou trigonométriques par MM. Bastin, Lez, Emmerich, Déprez, Brocard. (*Mathesis,* 1903, page 94, question 1373.)

### Problème 293.

**1052.** *Dans un triangle donné* ABC, *inscrire le triangle* DEF *de périmètre minimum.*

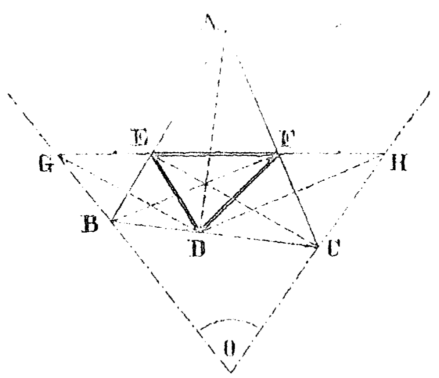


Fig. 628.

Le périmètre dépend de la position des points D, E, F.

1re *Solution.* Pour simplifier le problème, supposons qu'il n'y ait que deux sommets de position indéterminée.

En admettant que le sommet D soit connu, on aura le chemin minimum DEFD (G., nº 176) en cherchant le symétrique G de D par rapport à AB; le symétrique H de D par rapport à AC et en menant GH, car DE + EF + FD égale la droite GH.

Pour résoudre le problème, il suffit donc de trouver la droite minima GH; en menant GBO et HCO, on reconnaît que ces lignes sont fixes de position, car l'angle ABG = ABD, l'angle ACH = ACB. D'ailleurs BG = BD, CH = CD; donc la somme OG + OH des côtés qui comprennent l'angle O est constante, elle égale OB + BC + CO; donc la base GH sera minima lorsque le triangle GOH sera isocèle.

Ainsi il faut prendre $OG = OH = \dfrac{OB + BC + CO}{2}$.

Mener GH, déterminer le symétrique D du point G, et le triangle DEF a le périmètre minimum.

2º *Solution.* Pour un sommet D pris à volonté, cherchons à déterminer les deux autres E, F.

Déterminons les points G, H, symétriques de D, par rapport aux deux autres côtés; la droite GH égale au périmètre de DEF est le minimum relatif pour un sommet D.

Le triangle GAH est isocèle, puisque AG = AD = AH, et l'angle GAH égale deux fois l'angle A; donc il ne varie pas de grandeur, et la droite GH sera minima lorsque AD le sera; donc AD doit être la hauteur du triangle donné.

*Remarque.* Le triangle DEF est le *triangle orthique* de ABC; on l'obtient en joignant deux à deux les pieds des hauteurs du triangle donné.

par les hauteurs étant les bissectrices intérieures de DEF, les côtés DF, DE sont également inclinés sur BC, etc.

**1052 a. Note.** La première solution est par M. CATALAN (*Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire,* problème XII, page 17).

Voir une autre solution de M. LAUDI, professeur à la Realschule de Trieste (*Journal de Mathématiques élémentaires*, 1877, page 170).

On peut consulter aussi les *N. A.*, 1870, p. 212, solution par E. LINDELOF, de Finlande ; l'auteur donne une solution analogue pour le triangle sphérique.

La remarque que le triangle obtenu en joignant deux à deux les pieds des hauteurs, est le triangle inscrit de périmètre minimum, est de FAGNANO JUNIORE. (Cit. BALTZER, *Planimétrie*, § 4, n° 9.)

' FAGNANO CHARLES (1682-1766) est surtout connu par le théorème qui porte son nom et par ses études sur les *Propriétés du triangle rectiligne* et sur la *Lemniscate*.

Le *théorème de Fagnano* est relatif aux arcs d'ellipse. (PAUL SERRET, *Des Méthodes en géométrie,* page 139.)

Le théorème du triangle à périmètre minimum est dû à JEAN-FRANÇOIS FAGNANO, fils du précédent.

### Problème 293. — I.

1053. *Un segment rectiligne* MN *glisse sur une droite* XY *donnée de position; deux points* A *et* B *sont situés d'un même côté de la droite; placer* MN *de manière que la ligne brisée* AM + MN + NB *soit minima.*

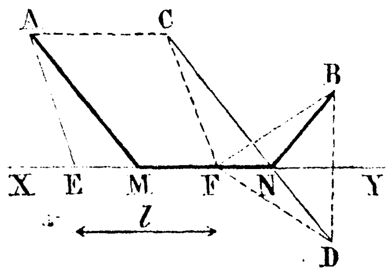



Fig. 629.

En supposant le problème résolu et en se reportant à une question connue (n° 137), on reconnait qu'il suffit de déplacer le point A parallèlement à XY, d'une quantité AC égale au segment donné $l$, puis de joindre le point C au point D symétrique de B.

Tout autre chemin AEFB ou ACFD est plus long que ACNB; donc...

*Remarque.* Le quadrilatère AMNB a deux angles égaux.

### Problème 293. — II.

1054. *Placer* MN *de manière que* AM = BN (fig. 629).

Il faut élever une perpendiculaire au milieu de CD jusqu'à la rencontre de XY.

### Problème 293. — III.

1055. *Placer* MN *de manière que* $\frac{AM}{BN} = \frac{m}{n}$ *ou* $AM^2 \pm BN^2 = k^2$.

Par rapport aux points C et D (fig. 629), on décrit le lieu des points dont le rapport des distances égale $\frac{m}{n}$. (G., n° 307.) Les points où ce lieu coupe XY répond à la question.

Pour $AM^2 \pm BN^2 = k^2$, on décrit le lieu des points dont la somme des carrés ou bien celui de la différence des carrés égale $k^2$.

**Problème 294.**

**1056.** *De tous les triangles qui ont même base et même hauteur, quel est celui dont l'angle au sommet est maximum?*

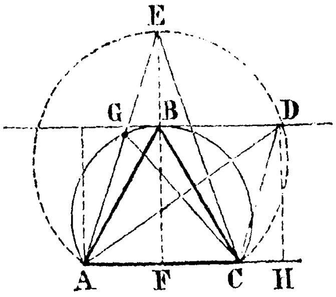


Fig. 630.

C'est le triangle isocèle ABC.

Soient ABC et ADC ayant leur sommet sur une parallèle BD à la base.

Pour tout point D non situé sur la perpendiculaire FB élevée au milieu de la base, l'arc du segment capable de l'angle D coupera EB en un point E tel que FE $>$ DH.

Or l'angle B est plus grand que E; en effet, $B = G$; or $G = E + GCE$; donc B est maximum.

**Problème 294. — I.**

**1057.** *De tous les triangles qui ont même base et dont l'orthocentre se trouve sur une droite donnée parallèle à la base, quel est celui dont l'angle au sommet est minimum?*

Les hauteurs abaissées des sommets A et C se coupent sous un angle égal au supplément de l'angle B; donc l'angle au sommet est minimum quand l'angle des hauteurs est maximum; on obtient donc aussi un triangle isocèle.

**Problème 295.**

**1058.** *On donne une droite AO; un angle constant pivote autour de son sommet placé à un point fixe* P *et intercepte un segment* MN *sur la droite; pour quelle position de l'angle le segment intercepté est-il minimum?*

Cet exercice est l'inverse du précédent (n° 1056). Les considérations qui suivent permettent, dans un grand nombre de cas, de déduire un problème de minimum d'un problème de maximum, et réciproquement.

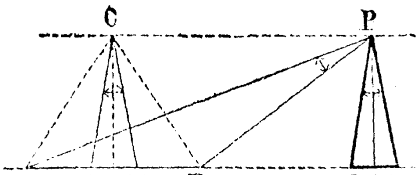


Fig. 631.

Soit APB l'angle donné; mais placé dans une position quelconque il intercepte un segment AB; mais d'après le problème précédent, pour un segment AB, l'angle ACB, qui a son sommet sur la perpendiculaire DC élevée au milieu de AB, est plus grand que l'angle APB; donc ce dernier ne donne pas le segment minimum, et, puisque pour un segment de longueur donnée le maximum de l'angle a lieu quand la perpendiculaire CD est bissectrice, formons l'angle ECF ou MPN égal à APB, mais de manière que la perpendiculaire soit bissectrice.

Ainsi le segment MN est minimum quand le point P se projette au milieu de MN.

**1059.** *Remarque.* La plupart des problèmes donnent lieu à une question inverse. Ainsi, pour une base et une hauteur données, l'angle a sommet est maximum quand le triangle est isocèle; donc, pour une hauteur et un angle au sommet donnés, la longueur de la base est minima quand le triangle est isocèle; mais pour une base et un angle au sommet donnés, le maximum de la hauteur a lieu quand le triangle est isocèle.

**Problème 295. — I.**

**1060**. *Parmi les triangles qui ont pour base une longueur donnée et qui sont circonscrits au même cercle, quel est celui dont l'angle au sommet est maximum?*

Considérons le triangle isocèle ABC et le triangle quelconque DEF, tels que AB = DE.

Les bissectrices des angles à la base se rencontrent au centre du cercle inscrit.

D'ailleurs, on sait (nº 466) que

$$\text{l'angle} \quad AOB = 90^\circ + \frac{C}{2};$$

$$DOE = 90^\circ + \frac{F}{2}.$$

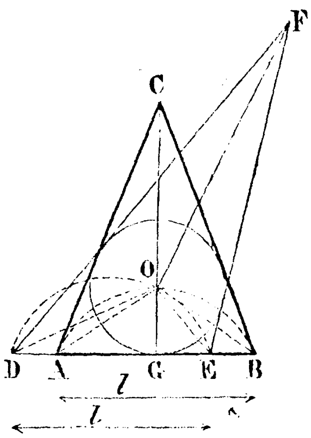



Fig. 632.

Donc, au plus grand angle au centre correspond le plus grand angle au sommet; par suite, il suffit de comparer les angles AOB et DOE.

Or, pour le triangle isocèle AOB, OG est la flèche du segment capable de l'angle AOB, tandis que pour le segment capable de l'angle DOE, OG n'est plus que l'ordonnée d'un point quelconque de cet arc; donc le segment BOA est $<$ que le segment EOD; donc l'angle DOE est $<$ AOB; d'où F $<$ C.

*Ainsi l'angle au sommet est maximum lorsque le triangle est isocèle.*

**Problème 296.**

**1061**. *Un mât vertical* AB, *d'une longueur donnée* a, *est placé au sommet d'une tour* BC, *de hauteur* b, *et qui repose sur un plan horizontal; à quelle distance de la tour faut-il se placer pour voir le mât sous un angle maximum?*

Soit le problème résolu; le segment capable de l'angle maximum doit être tangent au plan horizontal mené par l'œil du spectateur, car tout segment qui passe par AB et coupe CD a un rayon plus grand que OD; par suite, l'angle F est $<$ D.

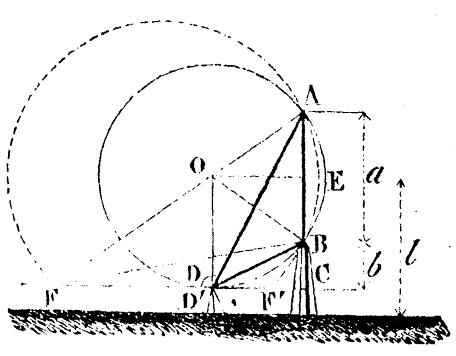



Fig. 633.

Le problème est donc ramené à faire passer une circonférence par les points A et B, de manière qu'elle soit tangente à l'horizontale CD.

Le rayon $OD = b + \frac{a}{2}$; donc du point B comme centre avec $b + \frac{a}{2}$ pour rayon, il faut couper en O la perpendiculaire élevée au milieu de AB; le point de contact D donne le sommet demandé.

**1062**. *Remarques*. 1° De la hauteur totale de la tour, il faut retrancher la hauteur DD′ de l'observateur.

2° L'angle maximum ADB égale le demi-angle au centre AOB, ou D = BOE. En supposant connus le troisième livre et la Trigonométrie,

on a : $$DC^2 = (a+b)b;\quad BE^2 = \frac{a^2}{4};$$

donc $$\frac{BE^2}{OE^2} \quad \text{ou} \quad \tang^2 BOE = \frac{a^2}{4(a+b)b}.$$

Le sinus est encore plus facile à calculer :

$$\sin D = \frac{BE}{OD} = \frac{a}{a+2b}.$$

3° On résoudrait tout aussi simplement le problème, si le terrain n'était pas horizontal : l'arc ADB devrait être tangent à la droite CDF, menée parallèlement au terrain. On aurait deux solutions.

**Problème 296. — I.**

**1063**. *On donne deux droites et une circonférence; par chaque point de la circonférence on mène des parallèles aux droites données; étudier la variation de la somme des côtés adjacents des parallélogrammes ainsi formés.*

(Voir *Méthodes*, n° 340.)

**Problème 297.**

**1064**. *De tous les triangles qui ont même base et même angle au sommet, quel est celui dont le périmètre est maximum ?*

1re *Démonstration*. C'est le triangle isocèle ABC (fig. 634).

En effet, en prolongeant AC d'une quantité CE égale à CB, puis AD d'une quantité DF égale à DB, l'angle $E = {}^1/_2 C$, $F = {}^1/_2 D$; donc les points E, F appartiennent au segment capable d'un angle égal à la moitié de l'angle donné. Or ce segment a le point C pour centre, car CE = CB; donc le diamètre ACE, qui correspond au triangle isocèle, donne le maximum.

Ainsi $$AC + CB > AD + DB.$$

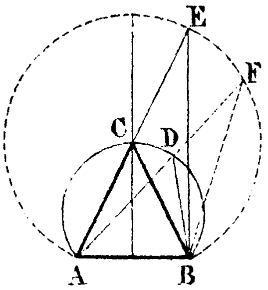


Fig. 634.

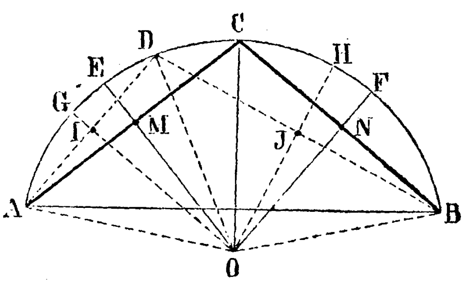


Fig. 635.

**1065**. 2e *Démonstration* (fig. 635). Du centre, abaissons les perpendiculaires OG, OH sur les cordes AD, DB; le maximum de la somme de ces cordes ou celui de leurs moitiés DI, DJ (n° 339) a lieu lorsque le point D est au milieu de l'arc; donc il faut que les deux cordes AC, CB soient égales.

En effet, dans ce cas, l'angle EOF égale GOH, car chacun d'eux est la moitié de AOB; or, dans les secteurs égaux EOF, GOH, la somme $CM + CN$, donnée par le point C milieu de l'arc, est plus grande que $DI + DJ$. Ainsi, pour un segment donné ADCB, les cordes doivent être égales.

**1066.** 3e *Démonstration.* La méthode par duplication conduit aussi fort simplement au résultat.

La bissectrice de l'angle D passe au point G milieu de l'arc AGB; la bissectrice de l'angle extérieur passe par suite par le point C, extrémité du diamètre GOC.

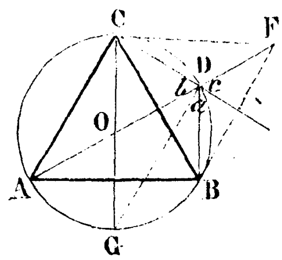


Fig. 636.

En déterminant le symétrique F du point B par rapport à CD, la droite DF viendra dans le prolongement de AD, car les angles $a$, $b$, $c$ sont égaux.

En outre, $\quad CF = CB.$

Or on a : $\quad AF < AC + CF,$

ou $\quad AD + DB < AC + CB.$

*Remarque.* Lorsque le sommet D se rapproche du point C, le périmètre $AD + DB$ augmente, car l'angle ACF grandit et a deux côtés de longueur invariable.

En effet, $\quad$ angle $ACF = ACB + 2$ fois BCD.

### Problème 298.

**1067.** *Dans un cercle, inscrire le triangle de périmètre maximum.*

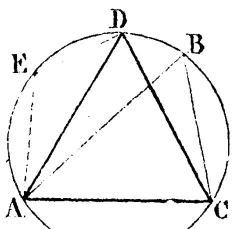


Fig. 637.

Soit ABC un triangle quelconque; regardons momentanément une des variables comme constante, soit donc une base connue AC; il faut trouver le triangle à périmètre maximum inscrit dans le segment ABC; or on sait que le triangle isocèle ADC répond à la question; donc, *quand il y a deux côtés variables* AB, CB, *ces côtés doivent être égaux entre eux.* Un raisonnement analogue prouve que les côtés AC, AD doivent être égaux entre eux lorsque CD est constant; donc le triangle à périmètre maximum est équilatéral.

### Théorème 298. — I.

**1068.** *Pour un nombre donné de côtés, le polygone régulier a le périmètre maximum.*

C'est une conséquence immédiate de la démonstration précédente.

### Théorème 298. — II.

**1069.** *De deux polygones réguliers inscrits dans le même cercle, le polygone qui a le plus grand nombre de côtés a le périmètre maximum.*

En effet, considérons par exemple le triangle équilatéral ADC et un quadrilatère ACDE (fig. 637); on a $AE + ED > AD$; donc le périmètre du quadrilatère est plus grand que celui du triangle; mais le carré inscrit dans le cercle donné a un périmètre plus grand que celui du quadrilatère considéré; donc le périmètre du carré est plus grand que celui du triangle équilatéral, etc.

### Problème 299.

**1070.** *En prenant pour base le diamètre, inscrire dans un demi-cercle le quadrilatère de périmètre maximum.*

Un raisonnement analogue à celui de l'exercice précédent prouve que les trois côtés variables doivent être égaux entre eux; le quadrilatère est donc le demi-hexagone régulier inscrit.

Dans les *Méthodes* (nº 357), on a appliqué directement à l'étude du quadrilatère la deuxième démonstration donnée pour prouver que de deux triangles qui ont même base et même angle au sommet, le triangle isocèle a le périmètre maximum (nº 1065).

### Problème 299. — I.

**1071.** *Dans un demi-cercle, inscrire un quadrilatère dont le périmètre fait une longueur donnée; le côté opposé au diamètre doit avoir une longueur donnée* l. *Quel est le quadrilatère de périmètre maximum?*

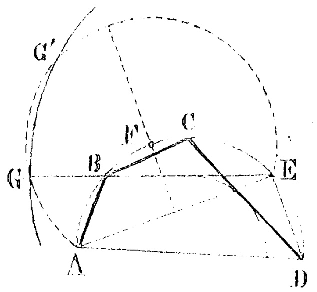


Fig. 638.

Soit $d$ la différence obtenue en retranchant $2r + l$ du périmètre donné.

En prenant DE égale à la corde donnée $l$, on voit que le problème est ramené à diviser l'arc AE, de manière que la somme des cordes AB + BE ait une longueur connue $d$; ou, ce qui revient au même, à construire un triangle connaissant la base, l'angle opposé et la somme des deux autres côtés (nºˢ 921 et 989).

Pour cela, du point F milieu de l'arc AFE, il faut décrire l'arc AGE; puis, du centre E avec $d$ pour rayon, couper l'arc décrit, enfin mener GE.

On a : $\quad AB + BE = d;$

donc, en prenant $\quad DC = BE,$

on aura : $\quad BC = DE = l,$

et le quadrilatère ABCD répond à la question.

*Maximum.* Le maximum est donné par des cordes égales AF, FE. Dans ce cas, la corde donnée $l$ doit être parallèle au diamètre.

### Problème 299. — II.

**1072.** *Par un point donné dans l'intérieur d'un angle, mener une droite qui forme avec les côtés de l'angle un triangle dont le périmètre soit minimum.*

Soit P le point donné dans l'angle A. Le théorème du triangle à périmètre constant (n° 739) conduit à la construction suivante : Il faut décrire une circonférence O passant par le point P et tangente aux côtés de l'angle, et mener la tangente BPC (n° 948).

Il suffit de prouver que le périmètre du triangle ABC est moindre que celui de AEF, dont la base est menée par le point donné ; or, BPC étant une tangente, EPF est une sécante, mais on peut mener une tangente GH parallèle à EF. Or le périmètre de AEF est plus grand que celui de AGH, et par suite de ABC; donc...

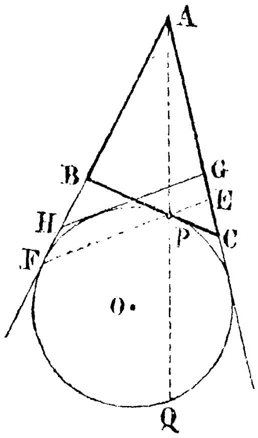


Fig. 639.

*Remarque.* Il y a deux circonférences tangentes; on prend la circonférence telle qu'en menant la sécante APQ, le point P soit plus rapproché du sommet A, que le second point d'intersection.

**Problème 299. — III.**

**1073.** *Par un point donné dans l'intérieur d'un angle* A, *mener une droite qui forme, avec les côtés de l'angle, un triangle tel que la somme des côtés de l'angle* A, *diminuée de la base du triangle, soit un minimum.*

La circonférence tangente doit être telle que P soit plus éloigné du sommet A que le second point d'intersection.

**Problème 299. — IV.**

**1073 a.** *Étant donné une demi-circonférence de diamètre* $AB = 2r$, *trouver sur la courbe un point* M, *tel qu'en le projetant en* P, *sur* AB, *on ait* $AP + MP = m$.

*Quel est le maximum de* $AP + MP$ ?

La question se résout comme un problème connu : *Par un point de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, mener des parallèles aux côtés de l'angle droit, de manière que le périmètre du rectangle ait une longueur donnée* (n° 99).

Sur une perpendiculaire élevée à l'extrémité A du diamètre, on prend $AD = m$, et l'on mène une droite DE à 45 degrés; cette ligne coupe la demi-circonférence :

1° En un seul point, pour $m < AB$;

2° En deux points, pour $m \geqq AB$, mais $< r(1 + \sqrt{2})$;

3° En deux points, réunis géométriquement en un seul, lorsque DE est tangente à la demi-circonférence ; alors c'est le maximum et

$$m = r(1 + \sqrt{2}).$$

4° Pour toute valeur plus grande, il n'y a pas de solution.

**Note.** Le problème précédent est emprunté au *Cours d'Algèbre élémentaire*, par E. Combette, p. 459 à 466. La discussion algébrique, faite en faveur des commençants, n'a pas moins de 7 pages.

E. Combette, ancien professeur au lycée Saint-Louis, inspecteur général en 1893.

**Problème 299. — V.**

**1073b.** *Dans une circonférence donnée* O, *l'on considère deux rayons* OX, OY, *à* 45 *degrés, et un rectangle* MNPQ *dont un côté* PQ *est sur* OX, *tandis que* M *est sur la circonférence et* N *sur* OY. *Déterminer* MN *de manière que la diagonale* MQ *ait une longueur donnée* m.

*Maximum de longueur de la diagonale.*

Sur OX, on prend $OB = m$; par B, on mène une parallèle BC à OY. Les points de rencontre de BC et de la circonférence donnent le sommet M. Discussion facile.

**Note.** Le problème est aussi de COMBETTE, n° 533, pages 501 à 507. Dans les deux problèmes précédents (n$^{os}$ 1073 a et b), on pourrait remplacer la circonférence par une courbe quelconque.

**Problème 300.**

**1074.** *Pour un arc donné* ABC, *quelle est la tangente limitée aux rayons* OA, OC, *dont la longueur est minima?*

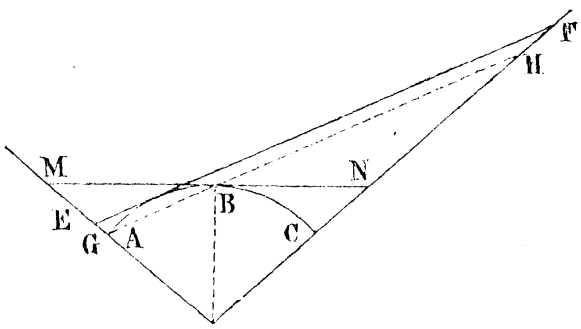


Fig.640.

Le point de contact B doit être au milieu de l'arc; en effet, la tangente EF est plus grande que sa parallèle GBH; mais cette ligne, menée par le point milieu B de la base d'un triangle isocèle, est plus grande que cette base MN; donc, *à fortiori*, $MN < EF$.

*Remarque.* Cette question ne diffère pas essentiellement d'une question déjà traitée (n° 1058).

**Problème 301.**

**1075.** *Un arc* ABC *est divisé en deux parties quelconques* AB, BC; *par les points extrêmes* A *et* C, *on mène des tangentes limitées au rayon* OB *prolongé; pour quelle position du point* B *la somme des tangentes est-elle minima?*

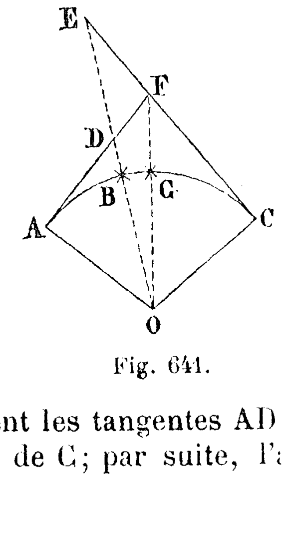


Fig. 641.

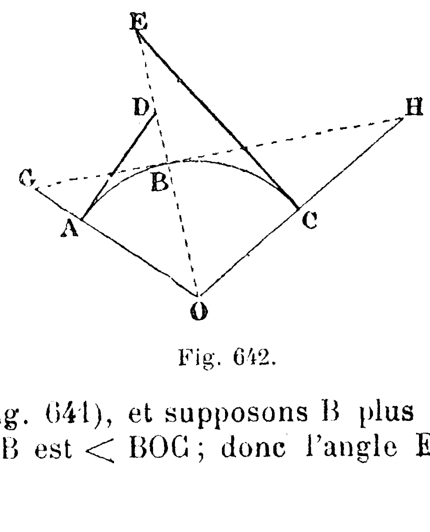


Fig. 642.

Soient les tangentes AD et CE (fig. 641), et supposons B plus près de A que de C; par suite, l'angle AOB est < BOC; donc l'angle EDF ou

ADO, complément de AOB, est plus grand que l'angle E, complément de BOC; ainsi DF, opposé à l'angle E, est moindre que FE; donc

$$AF + CF < AD + CE.$$

Ainsi le minimum $AF + FC$ a lieu lorsque les tangentes sont égales; le point G doit donc diviser l'arc donné en deux parties égales.

*Autre démonstration.* Menons la tangente au point B (fig. 642).

On a : $BG = AD, \quad BH = CE$;

donc la question revient à la précédente (nº 1074).

*Remarque.* Des deux questions ci-dessus (nºs 1074 et 1075) découlent les conséquences suivantes :

### Théorème 301. — I.

**1076.** 1º *Pour qu'une ligne brisée d'un nombre donné de côtés, circonscrite à un arc et limitée par les rayons qui terminent cet arc, ait une longueur minima, il faut que chaque côté soit divisé en deux parties égales par le point de contact, et que ces lignes soient égales entre elles.*

2º *Pour un nombre de côtés et un cercle donnés, le polygone régulier circonscrit a le périmètre minimum.*

### Problème 301. — II.

**1077.** *Par un point pris sur une circonférence, mener une corde telle que sa projection sur une droite donnée de position ait une longueur minima; étudier les variations de la projection des diverses cordes que l'on peut mener par le point donné A.*

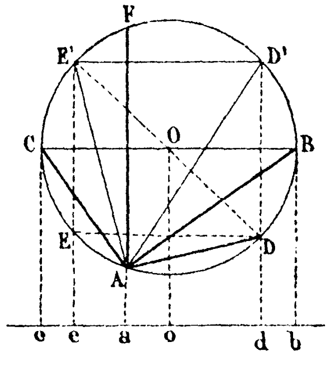


Fig. 643.

1º Quand la corde est nulle, la projection est nulle.

En allant vers la droite, AD donne *ad*, et la projection croît jusqu'au point *b* donné par la corde AB menée à l'extrémité du diamètre parallèle à la droite donnée *cb*; donc *ab* est un maximum, car à partir du point B les cordes telles que AD' donnent une projection plus petite. La projection décroît constamment; pour la perpendiculaire AF, elle s'annule de nouveau, puis devient *ae*, atteint un nouveau maximum *ac*, en valeur absolue, décroît de nouveau et s'annule en *a*.

*Remarque.* En tenant compte de la direction des projections et du signe conventionnel qu'on leur attribue (nº 412), on doit dire que *ae* a une valeur négative, et que *ac* est un minimum.

### Problème 301. — III.

**1078.** *Par un point donné* A *pris dans un cercle, mener une corde telle que la différence des projections des segments de cette corde sur une droite* xy *ait une longueur maxima.*

Pour une corde quelconque BAC, la différence des projections égale $ac - ab$, et si l'on prend $CD = AB$, la différence égale $ad$. Or le point D se trouve sur une circonférence concentrique à la première; la différence $ad$ est la projection de la corde AD de la circonférence AO; donc le maximum $ae$ est donné par la corde AE (nº 1077) :

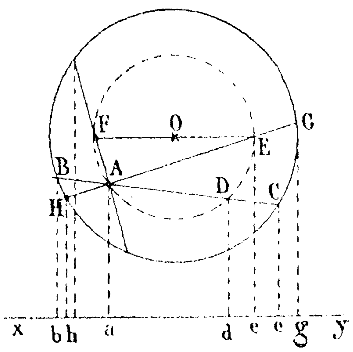


Fig. 644.

$$ag - ah = ae.$$

AF donne un second maximum, en valeur absolue; ou bien le *minimum,* si l'on regarde $ab$, $ah$ comme des grandeurs négatives (nº 412).

**Problème de Fermat. 302.**

**1079.** *Trouver un point dont la somme des distances aux trois sommets d'un triangle soit minima.*

Soit O le point cherché, tel que $AO + BO + CO$ soit un minimum.

Si AO est invariable, et par suite si le point O doit appartenir à une circonférence de rayon donné, le minimum de $BO + OC$ a lieu lorsque BO et CO sont également inclinés sur le rayon AO; car, pour la tangente DOE, on sait que dans ce cas $BO + CO$ est un minimum (G., 176); or, pour un autre point F de la circonférence, on aurait à plus forte raison une somme :

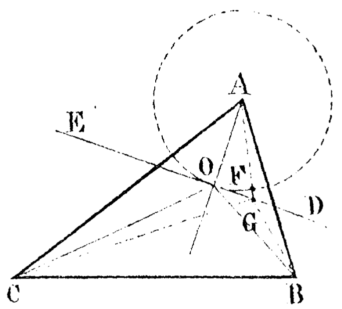


Fig. 645.

$$BF + FC > BG + GC > BO + OC.$$

Par un raisonnement analogue, en regardant BO comme fixe, on trouve que BO doit être également incliné sur AO et CO; donc le minimum a lieu lorsque les trois angles AOB, BOC, COA sont égaux ; par suite, sur deux côtés du triangle donné, il faut décrire des segments capables d'un angle de 120º.

**Note.** 1º Le problème fut proposé par FERMAT à TORRICELLI, et résolu par ce dernier, ainsi que par CAVALIERI et VIVIANI. (D'après M. A. AUBRY : *Etude élémentaire sur la théorie des maxima et des minima*, p. 49.)

2º La solution que nous donnons se trouve dans le *Manuel des candidats à l'Ecole Centrale*, tome II, par M. DE COMBEROUSSE, professeur à cette école ; mais elle a été donnée par LHUILIER en 1811, dans les ***Annales de Gergonne,*** tome I, années 1810-1811. Ce recueil a généralisé le problème et donné diverses solutions, pages 285, 297, 373 et 375, par TÉDENAT, VECTEN, etc.

Voir aussi HOUSEL, *Introduction à la Géométrie supérieure,* p. 138 à 144 ; nºs 290 à 296.

**Problème 302 — I.**

**1079 a.** *Deux villes* A *et* B *sont situées d'un même côté d'un canal rectiligne* XY. *Déterminer l'emplacement d'un point* C, *qui doit laisser passer une route* OC *perpendiculaire au canal, de manière que la somme des trois routes ou* AO + BO + CO *soit minima.*

Les trois embranchements doivent se rencontrer sous des angles de 120°. Sur la corde AB, du côté du canal, on décrit un segment capable de 120° ; soit D le point milieu de l'arc opposé à ce segment; de ce point D, on abaisse une perpendiculaire DOC sur le canal et l'on détermine ainsi le point O sur l'arc du segment, ainsi que le point C.

**Note.** La question est étudiée sous tous ses aspects dans un bel article des *Annales de Gergonne,* tome I, 1810-1811, p. 373 ; cet article est dû à VECTEN, alors professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nîmes. Voir aussi HOUSEL, *Introduction à la Géométrie supérieure,* p. 138 à 144, nos 290 à 296.

**Problème 303.**

**1080.** *De tous les triangles qui ont une base de longueur donnée et qui sont circonscrits au même cercle, quel est celui dont le périmètre est minimum ?*

Le triangle isocèle ABC a le périmètre minimum, car l'angle C est > F (n° 1060).

Or les triangles rectangles OMC, ONF ont un côté égal; donc à l'angle NFO < MCO correspond une oblique OF plus longue que OC et dont la distance NF au pied de la perpendiculaire est plus grande que MC.

Ainsi

$$MC + CL < FN + FP,$$

mais $DN + EP = DE$.

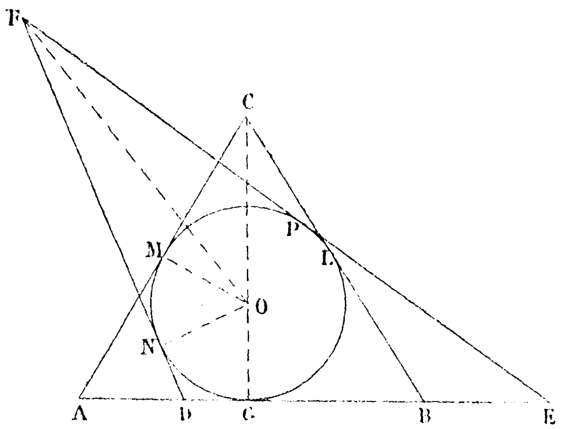



Fig. 646.

$AM + BL = AB = DE$ ; donc les variations de périmètre ne dépendent que de MC et de NF; donc le triangle isocèle a le périmètre minimum.

**1081.** *Remarques.* 1° Le triangle équilatéral circonscrit est le triangle qui a le périmètre minimum; car, pour AB et AC, on prouverait que le minimum a lieu lorsque ces côtés sont égaux entre eux.

2° Généralement l'étude du périmètre maximum ou minimum est plus difficile que celle des surfaces. Aussi on se borne à déduire le périmètre maximum ou minimum, circonscrit à un cercle, de l'étude de la surface (n° 1694, *Remarque*).

Néanmoins il est avantageux de traiter directement les périmètres sans recourir à des notions qui ne sont présentées qu'au livre IV.

## Questions diverses.

### Théorème 304.

**1082.** *Soient* A *et* B *les extrémités d'un diamètre,* C *un autre point quelconque de la demi-circonférence décrite sur* AB; *on prend des arcs égaux* BD, DE; *l'on mène* AD *et* BC *qui se coupent en* F, *et les droites* AE *et* CD *qui se coupent en* G : *démontrer que les droites* FG, AE *sont perpendiculaires.* (*Mathesis,* 1892, p. 31.)

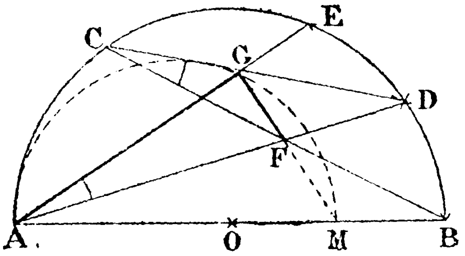



Fig. 647.

Les angles inscrits A et C sont égaux, donc le quadrilatère ACGF est inscriptible ; mais l'angle ACB est droit, il en est donc de même de l'angle AGF.

### Problème 305.

**1083.** 1° *Déterminer les points équidistants de trois droites qui se coupent deux à deux;* 2° *déterminer les droites équidistantes de trois points donnés. Étudier la dualité de ces deux questions, indiquer les solutions qui se correspondent deux à deux.*

Soient A, B, C les points de concours des droites concourantes données de la première question, et les points donnés de la seconde; soient $a$, $b$, $c$, les côtés opposés aux sommets A, B, C.

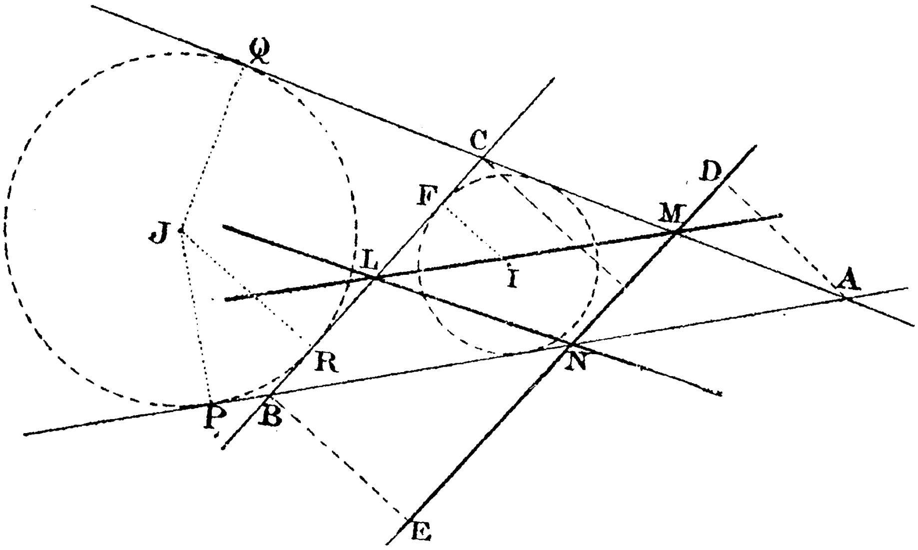



Fig. 648.

1° Les bissectrices intérieures et extérieures donnent quatre points qui répondent à la première question : le centre I du cercle inscrit et les centres tels que J des trois cercles exinscrits.

2° Les trois droites qui joignent deux à deux les points milieux de $a$, $b$, $c$, répondent à la seconde question.

*Dualité.* En tenant compte des signes, le point équidistant J correspond à la droite équidistante MN, car les distances JP, JQ ayant même direction que la distance du point I aux mêmes droites sont considérées comme positives, tandis que JR, de direction opposée à IF, est négative. De même pour MN, les distances de cette droite aux points B et C peuvent être regardées comme positives, et celle de A comme négative : ainsi les trois côtés du triangle médian LMN correspondent aux centres des trois cercles exinscrits.

Au point I, dont les trois distances sont positives, correspond la ligne de l'infini, car aucune droite à distance finie ne saurait être à distance égale, comme grandeur et comme signe, de trois points A, B, C qui ne sont pas eux-mêmes en ligne droite.

### Théorème 306.

**1084.** *Un triangle isocèle mobile reste semblable à lui-même, un des côtés égaux passe par un point fixe, tandis que les extrémités de la base glissent sur une circonférence donnée; prouver que le second des côtés égaux passe aussi par un point fixe.* (*J. M. E.*, 1890, p. 151, LAUVERNAY.)

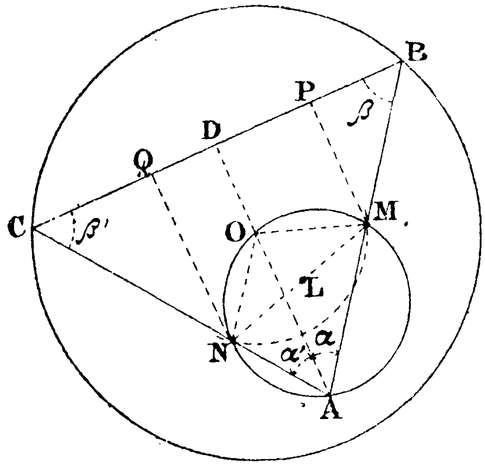


Fig. 649.

Soit ABC dans une position quelconque, M le point fixe, O le centre du cercle donné, AOD la hauteur du triangle isocèle.

L'angle $\alpha$ est le complément de l'angle invariable $\beta$; donc le lieu du sommet A est le segment décrit sur MO, capable de l'angle connu $\alpha$.

Mais $\alpha' = \alpha$; donc l'arc $=$ ON $=$ OM, et le point N se trouve déterminé indépendamment de toute position particulière du triangle; ainsi le côté AC passe par un point fixe N.

**1085.** *Remarques.* 1° L'enveloppe de la base mobile BC est une ellipse ayant M et N pour foyers; cette ellipse est bi-tangente au cercle donné (n° 2177).

2° Le lieu des projections P et Q des points fixes, sur la base mobile, est un cercle ayant son centre au point milieu L de MN (n° 1355), car le triangle MBP reste semblable à lui-même, pendant que B décrit une circonférence.

**1085 a. Note.** Le théorème précédent est l'énoncé simplifié du 176e *porisme d'Euclide;* ce porisme a été signalé par M. G. TARRY, comme pouvant conduire à plusieurs des propriétés des *points* et du *cercle de Brocard.* (*J. M. E.*, 1890, p. 35 et 83.) M. VIGARIÉ a prouvé l'exactitude de l'affirmation ci-dessus.

**Lieu 307.**

**1086.** *Par un point* D *commun à deux circonférences, on mène une corde commune* ADB, *aux extrémités de laquelle on fait des angles donnés* A *et* B : *quel est le lieu géométrique du sommet* C *du triangle ainsi formé ?*

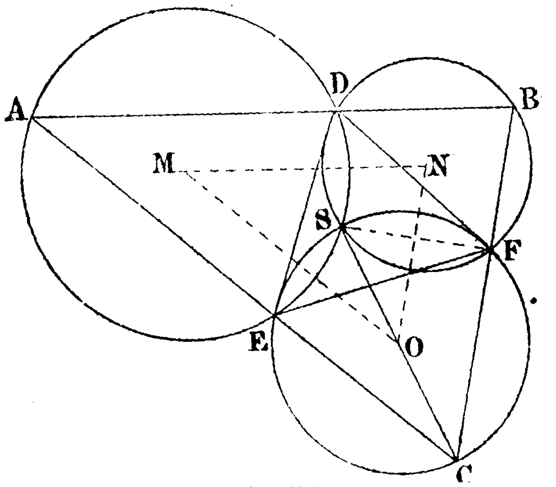


Fig. 650.

L'angle inscrit A, étant constant, intercepte un arc invariable DSE ; donc le côté AC passe constamment par un point fixe E ; de même BC passe par un point fixe F.

L'angle C est constant, donc le sommet C se meut sur l'arc du segment ECF, capable de $\pi - (A + B)$.

**1087.** *Remarques.* 1° Le cercle ECF passe par le point S où se coupent les cercles donnés M et N, car l'angle $ESF = 2\pi - DSE - DSF$ ; il est donc le supplément de C.

2° Lorsqu'on fait tourner la corde commune ADB autour du point D, le triangle maximum correspond aux cas où AB est parallèle à la ligne des centres, car $AB = 2MN$. Le minimum correspond au cas où la corde AB est perpendiculaire à la ligne des centres, en DS, alors le triangle circonscrit se réduit au point S.

3° Le diamètre SC est donné par la position C qui correspond au triangle maximum et par le point S qui correspond au minimum.

**Théorème 308.**

**1088.** *Si les diagonales d'un hexagone sont égales et que les côtés soient parallèles deux à deux, l'hexagone est inscriptible à une circonférence.* (CATALAN, *Mathesis*, 1890, page 94.)

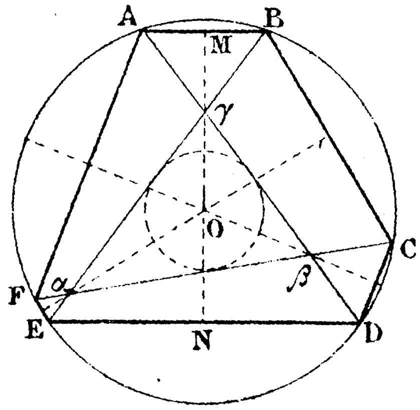


Fig. 651.

Soient α, β, γ, les points d'intersection des trois diagonales égales, considérées deux à deux.

La figure ABDE est un trapèze isocèle (n° 534), car AB et DE sont des lignes parallèles, et les diagonales AD et BE sont des lignes égales ; d'où il résulte que la bissectrice de l'angle AγB est perpendiculaire à AB, DE et passe en leur milieu. En désignant par O le point de concours des bissectrices intérieures du triangle αβγ, ce point est à l'intersection des perpendiculaires élevées aux milieux des six côtés de l'hexagone, et par suite il est à égale distance des six sommets.

**1089.** *Remarques.* 1° Ce théorème est la réciproque d'un théorème connu. (Catalan, *Théorèmes et Problèmes,* 6e édition, p. 132, th. LXV.)

2° Le centre du cercle circonscrit à l'hexagone est aussi le centre du cercle inscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ formé par les diagonales.

### Théorème 309.

**1090.** *Si un quadrilatère a deux côtés opposés égaux :* 1° *ces côtés sont également inclinés sur la médiane des deux autres côtés ;* 2° *leur projection sur la médiane est égale à cette médiane.* (Catalan, *Étude sur le parallélogramme de Watt;* voir *Mathesis,* 1885, page 154.)

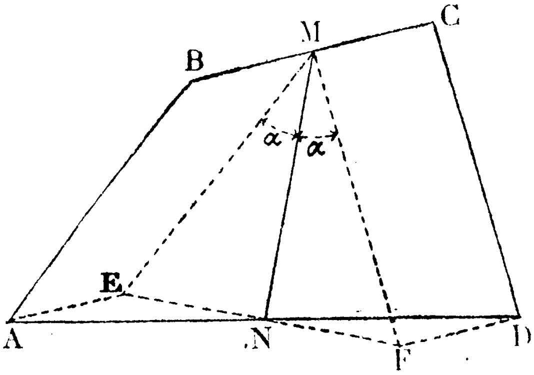


Fig. 652.

Formons les parallélogrammes ABME, DCMF.

On a : $ME = MF$.

Joignons le point milieu N aux points E, F.

Les segments NE, NF, sont en ligne droite, car les triangles NAE, NDF ont un angle égal $A = D$, compris entre deux côtés égaux ; donc les angles en N sont égaux, donc $NE = NF$ et ces deux segments sont en ligne droite.

Dans le triangle isocèle EMF, la droite MN qui joint le sommet au milieu de la base est bissectrice de l'angle M ; donc AB, CD sont également inclinés sur la médiane MN.

2° La projection de BA ou de ME sur la médiane est cette médiane MN, de même pour la projection de CD ; donc...

**Note.** Cette question se trouve dans *Théorèmes et problèmes,* 6e édit., 1879, Th. XIII, p. 10.

### Lieu 310.

**1091.** *Sur les côtés* AB, AC *d'un triangle* ABC, *on prend les distances* BD, CE *égales entre elles; quel est le lieu géométrique du point milieu* M *de* DE. (Catalan, *Mathesis,* 1885, page 222.)

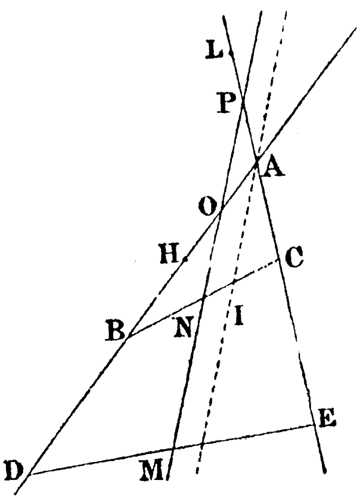


Fig. 653.

La médiane MN du quadrilatère DBCE est parallèle à la bissectrice de l'angle formé par les côtés BD, CE (n° 1090); donc le lieu du point M est la parallèle menée par le milieu N de BC à la bissectrice de l'angle A.

*Remarque*. La droite MN passe par le point O, milieu de la distance AH, qu'on obtient en prenant BH égal au petit côté AC.

**1091 a. Note**. La droite MNO est la *droite des milieux*, ainsi nommée par CHASLES. Les côtés de l'angle A sur lesquels on prend des grandeurs égales deux à deux, telles que BH = AC, BD = CE, etc., peuvent être considérés comme deux figures inversement égales (n° 771 b), et les points milieux M, N, O des droites DE, BC, HA, qui joignent deux à deux les points correspondants, sont sur une droite MNO parallèle à la bissectrice de l'angle A.

### Théorème 311.

**1092**. 1° *Dans tout triangle, la distance de l'orthocentre à un côté donné égale le prolongement jusqu'au cercle circonscrit, de la hauteur abaissée sur ce même côté ;*

2° *La distance d'un sommet à l'orthocentre est le double de la distance du centre du cercle circonscrit au côté opposé.*

1° Il faut prouver que PH = PL (fig. 654).

Voir *Méthodes*, n° 292 **c**; d'ailleurs $\alpha = \beta$ comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires; puis $\alpha$ et $\gamma$ ont même mesure, donc $\beta = \gamma$ et PH = PL.

2° Le centre K est au milieu de OH, et le point D milieu de AH appartient au *cercle d'Euler;* donc OE = DH = AD.

### Théorème 312.

**1093**. 1° *Les cercles circonscrits à un triangle donné, et aux triangles qui ont pour sommets l'orthocentre et deux des sommets du triangle donné, sont égaux entre eux.* (CARNOT.)

2° *Le triangle ayant pour sommets les centres des trois cercles symétriques ci-dessus est égal au triangle donné, et admet même cercle des neuf points.*

3° *Le triangle anticomplémentaire du triangle donné* (triangle obtenu en menant par chaque sommet d'un triangle une parallèle au côté opposé) *admet l'orthocentre du premier pour centre de son cercle circonscrit ; ce cercle est tangent aux trois cercles symétriques.*

1° On peut voir *Méthodes* n° 292 **e**; d'ailleurs il suffit de se rappeler que les triangles égaux CHB, CLB (fig. 654) admettent des cercles circonscrits égaux. *Le cercle circonscrit à* CHB *est symétrique*, par rapport à CB, du *cercle circonscrit à* CLB, c'est-à-dire à CBA.

2° Les points A′, B′, C′, symétriques du centre O par rapport aux côtés, sont les centres respectifs des trois cercles symétriques tels que CHA; or EF est parallèle à A′B′ et en égale la moitié; donc A′B′ égale AB, et lui est parallèle.

Le centre K du cercle des neuf points est le centre d'homothétie des triangles égaux ABC, A′B′C′.

Les triangles égaux ont même cercle des neuf points.

3° Des remarques précédentes, on peut conclure que H est le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C' et en déduire 3°; d'ailleurs, on sait que les hauteurs d'un triangle donné ABC sont les médiatrices du triangle supplémentaire A''B''C'', qu'on obtient en menant par les sommets A, B, C des parallèles aux côtés opposés (n° 445); ainsi H est le

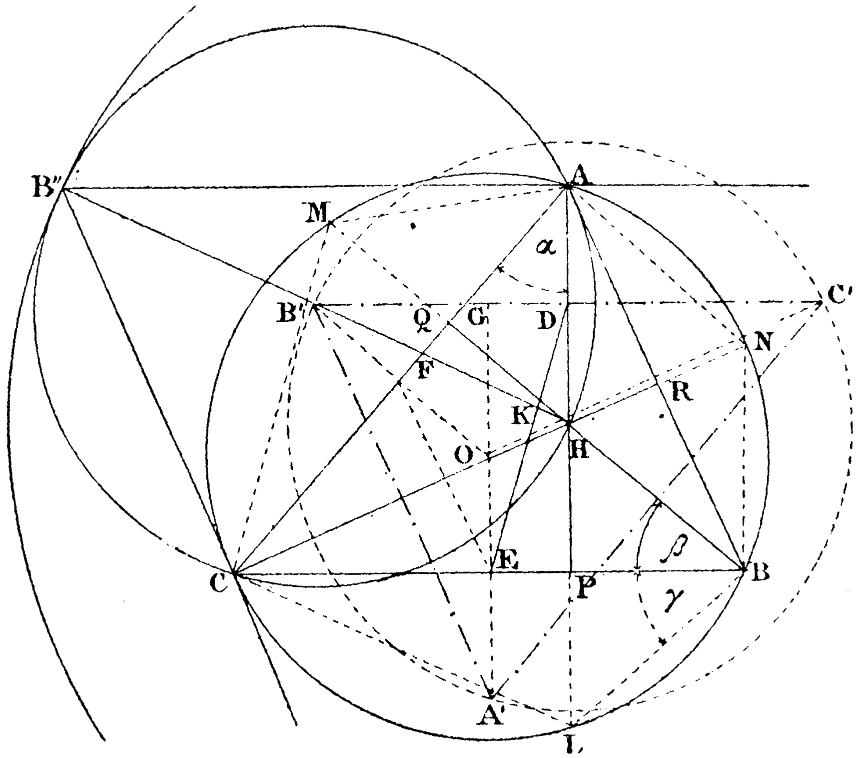



Fig. 654.

centre du cercle circonscrit au triangle A''B''C'', de même qu'il l'est pour A'B'C'; les cercles ayant pour centres respectifs H et B' sont tangents en B''.

### Théorème 312. — I.

**1094.** 1° *D'un point* H *on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle; on mène, par rapport à chaque côté, les droites symétriques des perpendiculaires : on obtient ainsi neuf droites qui se coupent trois à trois en quatre points (le point* H *y compris).*

2° *Lorsque le point* H *est l'orthocentre, les trois autres points obtenus sont sur le cercle circonscrit.*

1° Soient $HP_a$, $HP_b$, $HP_c$ les perpendiculaires abaissées sur les côtés $a$, $b$, $c$, et $H_a$, $H_b$, $H_c$ les points symétriques de H par rapport à ces mêmes côtés.

Les symétriques de $HP_a$ et de $HP_c$ par rapport au côté $a$ passent par le point symétrique $H_a$; ainsi les deux droites symétriques et la droite $HH_a$ passent par le même point; de même pour les autres côtés.

2° Le symétrique de l'*orthocentre*, par rapport à chaque côté du triangle, est sur le cercle circonscrit (n$^{os}$ 666 ou 1092); donc...

**Théorème 312. — III.**

**1095.** *Par les milieux des côtés du triangle donné, on mène les symétriques des côtés du triangle, par rapport à une direction donnée; les trois droites ainsi menées concourent en un point du cercle des neuf points du triangle donné.* (*J. M. E.*, 1889, p. 24, q. 305, E. Lemoine, solution en 1890, p. 118, par Vazou, professeur à Saulieu.)

Soient LMN le triangle donné, ABC le triangle médian, CD la direction donnée faisant des angles $\alpha$ et $\beta$ avec les côtés MN, LN.

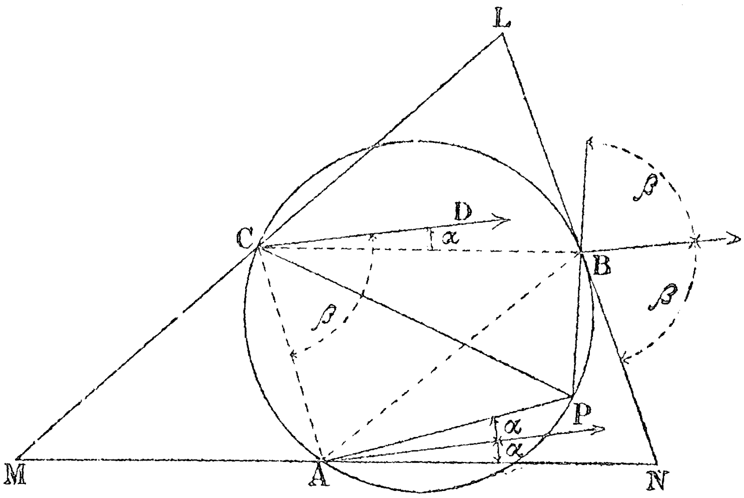



Fig. 655.

Menons les symétriques AP, BP : il suffit de démontrer que le point P appartient au cercle ABC, et pour cela prouvons que l'angle APB est le supplément de ACB ou N.

$$\text{Angle BAP} = M - 2\alpha,$$

$$ABP = L - PBN = L - (180^\circ - 2\beta) = L + 2\beta - 180^\circ;$$

donc $$APB = 180^\circ - (M - 2\alpha + L + 2\beta - 180^\circ).$$

Mais $$M + L - 180^\circ = -N \quad \text{et} \quad 2(\beta - \alpha) = 2N;$$

donc $$APB = 180^\circ - N.$$

*Remarques.* 1° La question ci-dessus revient au théorème suivant *Par chaque sommet d'un triangle* ABC, *on mène une droite qui soi symétrique du côté opposé, par rapport à une même direction donnée les trois droites ainsi menées se rencontrent en un même point du cercl circonscrit au triangle* ABC.

2° *Si l'on prend successivement les symétriques par rapport à deu directions à 45° l'une de l'autre, on obtient deux points diamétralemer opposés sur le cercle circonscrit, car* AP *et* AP′ *sont à angle droit.*

3° Théorème réciproque. *Les droites qui joignent chaque sommet d'u triangle à un même point du cercle circonscrit, sont respectivemer symétriques des côtés opposés par rapport à une même direction.*

### Lieu 312. — III.

**1096.** *On donne, en grandeur, deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit à un cercle donné; ces deux côtés sont mobiles et glissent sur la circonférence :*

1° *Quel est le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles formés par chacun des côtés donnés et le point de concours des diagonales?*

2° *Prouver que le rayon du lieu relatif à une des cordes égale le rayon du cercle circonscrit relatif à l'autre corde.*

3° Même question, *en considérant le point de concours des deux autres côtés.*

1° Soient AB, CD dans une position quelconque, I le point d'intersection des diagonales.

L'angle $\alpha$ est constant, car il a pour valeur la demi-somme des arcs sous-tendus par AB, CD; donc chaque cercle circonscrit a un rayon de longueur invariable, quelle que soit la position des cordes AB et CD, car AIB, par exemple, est le segment capable de l'angle $\alpha$, de même pour CID. Soient M et N les centres des segments; le lieu de M est le cercle décrit du centre O, avec OM pour rayon; de même pour N.

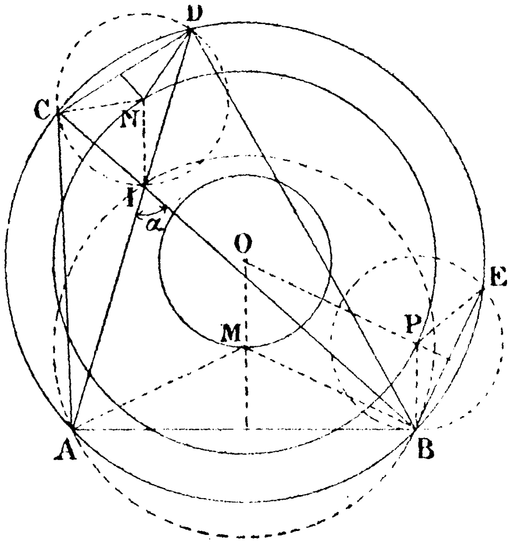


Fig. 656.

2° Si l'on prend BE = CD, l'angle ABE est le supplément de $\alpha$; donc pour obtenir les centres M, P des segments, il suffit d'élever des droites BM, BP respectivement perpendiculaires aux cordes, on obtient les centres M et P; or la figure MOPB est un parallélogramme; donc le lieu des centres M a pour rayon la valeur même BP du rayon du cercle circonscrit à CID, et le lieu du point N a pour rayon OP ou MB, rayon du cercle circonscrit au triangle AIB.

3° Pour le point de concours J des côtés AC, BD, l'angle est aussi constant, il a pour mesure la demi-différence des arcs AB, CD; le lieu de chaque centre est une circonférence de centre O; le rayon du lieu relatif à AJB égale le rayon du cercle circonscrit à CJD, et réciproquement. (D'après *J. M. E.*, 1888, p. 239, q. 294, FOUCHÉ, et 1891, p. 237.)

### Points de Brocard 312. — IV.

**1097.** *Sur les côtés* a, b, c *d'un triangle* ABC, *on décrit vers l'intérieur du triangle des segments respectivement capables des suppléments des angles* B, C, A; *les trois segments concourent en un même point* **M**, *et les angles* MAC, MCB, MBA *sont égaux entre eux.*

(Voir n° 906.) Deux points répondent à la question ; on les nomme *Points de Brocard*, et on les désigne assez souvent par $\omega$ et $\omega'$.

Les segments capables de $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - A$ décrits sur $a$, $b$, $c$ sont tangents à l'un des côtés adjacents ; on les nomme *circonférences adjointes* ou *cercles adjoints*.

### Théorème 312. — V.

**1098.** *Les circonférences symétriques, par rapport aux côtés considérés, des trois circonférences adjointes qui donnent le point de Brocard $\omega$, concourent en un même point J ; il en est de même des symétriques des trois autres circonférences adjointes.*

Soient 1, 3, 5 les centres respectifs des cercles adjoints qui donnent le point $\omega$ ; pour avoir les centres des circonférences symétriques, on prend 1′ symétrique de 1 par rapport au côté BC ; de même 3′ est le symétrique de 3 par rapport à CA, et 5′ l'est de 5 par rapport à AB.

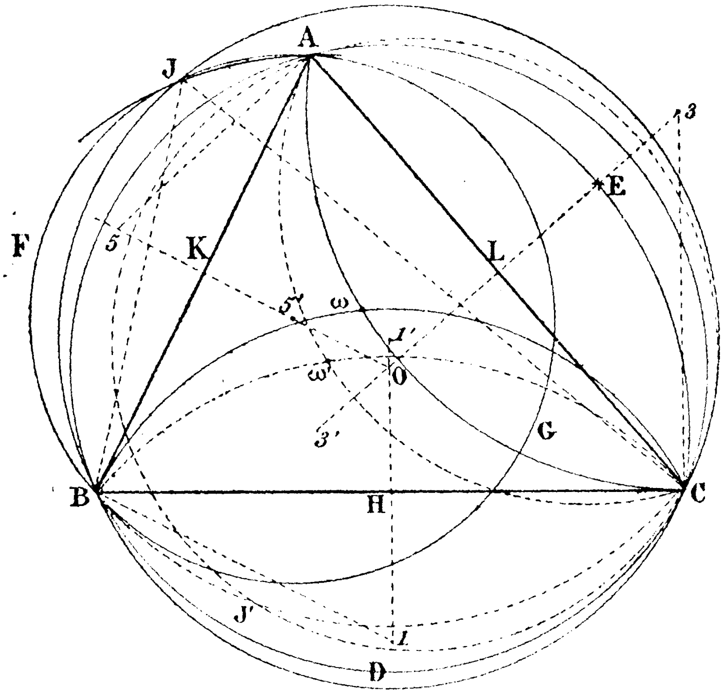



Fig. 657.

Soit J le point d'intersection des cercles décrits des centres 1′ et 3′ ; il suffit de prouver que le cercle décrit de 5′ passe par J. Or l'arc BDC égal à B$\omega$C est le double de la mesure d'un angle inscrit égal à B, donc l'angle BJC $=$ B ; de même AJC $=$ C, et l'angle AGB aurait pour mesure demi-arc AFB ; donc l'arc AGB est le double de la mesure de $(180° - C)$, c'est-à-dire de $(A + B)$, donc l'arc AFB passe par le point J.

De même les cercles symétriques des cercles adjoints qui se coupent en $\omega'$ donnent un second point J′.

*Remarque.* Les points J et J′ sont les *centres permanents de similitude* de deux triangles circonscrits semblables au triangle donné (voir ci-après, n° 2487).

**1099 Note.** L'emploi des cercles symétriques des cercles qui passent par les extrémités de chacun des côtés du triangle de référence, a conduit à un nouveau mode de transformation, car à trois cercles passant par un même point et par les extrémités de chacun des côtés d'un triangle, correspondent trois cercles symétriques qui passent aussi par un même point. Les deux points correspondants ont été nommés *points jumeaux*.

La transformation par cercles symétriques a été étudiée par M. SCHOUTE.

Comme cas particulier remarquable, on peut citer le cercle circonscrit; en prenant son symétrique par rapport à chaque côté, on obtient trois circonférences égales au cercle circonscrit, et qui passent par l'*orthocentre* H (nº 1093).

* H. SCHOUTE, savant géomètre hollandais, à Groningue.

### Cercle de Neuberg 312. — VI.

**1100.** *Sur chaque côté d'un triangle de référence, et du même côté de ce triangle, on construit des triangles équiangles à un autre triangle donné* ABC; *chaque groupe se compose de six triangles, dont les sommets opposés à la base commune* BC *appartiennent à une même circonférence.*

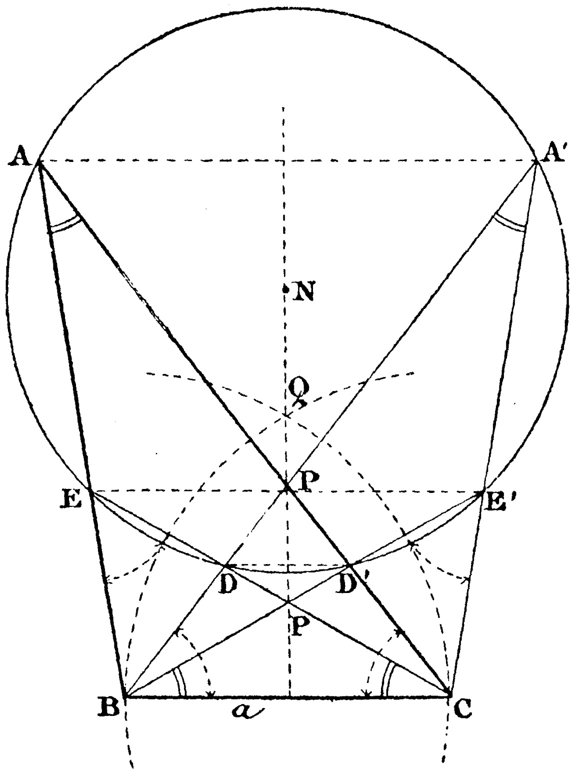


Fig. 658.

Au triangle donné ABC correspond directement le triangle symétrique A'CB; puis, si l'on fait l'angle BCE égal à l'angle A, les triangles BCE, BCD et leurs symétriques seront semblables au triangle donné : il faut prouver que les six sommets A, A', D, D', E, E' sont sur une même circonférence. Le trapèze symétrique AEE'A' est inscriptible; il suffit de prouver qu'il en est de même du quadrilatère AEDA'; or l'angle AA'C, ou A'AB supplémentaire de l'angle obtus B, est par suite supplémentaire de l'angle obtus D, donc...

**1100 a. Note.** 1º Les six triangles équiangles ont même angle ω de Brocard; on les nomme *triangles équibrocardiens*. Le cercle AED est le *cercle de Neuberg*, relatif au côté BC du *triangle de référence;* on aurait de même des cercles relatifs aux deux autres côtés du premier triangle donné.

Les cercles ci-dessus ont été nommés *Cercles de Neuberg*, du nom du savant professeur de l'université de Liége, qui le premier a étudié ces cercles et en a fait connaître les principales propriétés.

Le théorème a été proposé en 1882, dans *Mathesis*, p. 94, nos 126 et 127, et démontré p. 157 et 186.

Le *Journal de Mathématiques élémentaires,* dans divers articles de M. VIGARIÉ, a fait connaître les principales propriétés des *Cercles de Neuberg* (*J. M. E.*, 1887, p. 121, 145 et 169).

2° *Cercles du triangle.* Pour tout triangle donné, on considère actuellement un assez grand nombre de cercles intéressants ; voici les principaux :

*Cercle circonscrit ;*

*Cercle inscrit* et *cercles exinscrits ;*

*Cercle de Adams* (n° 2393) ;

*Cercle des neuf points* ou *cercle d'Euler* ou de Feuerbach (n° 27) ;

*Cercles adjoints* ou *circonférences adjointes*, pour déterminer les points de Brocard (n° 1097) ;

*Cercles d'Apollonius*, ou cercles ayant pour diamètre le segment déterminé sur chaque côté par les deux bissectrices issues du sommet opposé ;

*Cercle des hauteurs d'un triangle* (n° 1154) ;

*Cercle des moments égaux* ou *cercle des huit points* (nos 2410 et 2412) ;

*Cercles de Lemoine* (nos 2375 et suivants) ;

*Cercles de Tucker* (n° 2383) ;

*Cercle de Taylor* (n° 2391) ;

*Cercle de Brocard* (n° 2428) :

*Cercles de Neuberg* (n° 1100) ;

*Cercle de Longchamps* (*J. M. S.*, 1886, p. 57, n° 84, et *A. F.*, 1897, p. 136) ;

*Cercle de Furhmann*, cercle décrit sur Hν pris pour diamètre ;| ligne qui joint l'orthocentre au *point Nagel* (*Mathesis*, 1890, p. 105) ;

*Cercles de M'Cay* (*J. M. S.*, p. 56, n° 91) ;

*Cercles de Schoute* (*J. M. S.*, p. 57, n° 93) ;

Cercle GH, ou *Cercle orthocentroïdal*, (*M.*, 1890, p. 166 et 1893, p. 33) ;

Voir l'étude si intéressante de M. Vigarié sur les points, les droites, les cercles et autres courbes remarquables d'un triangle, dans le *Journal de Mathématiques spéciales*, années 1888 et 1889.

*Remarque.* Le théorème du n° 529 comporte des exceptions.

M. J. N. Visschers a formulé le théorème suivant : *Deux polygones de plus de quatre côtés peuvent avoir sans être égaux les* n *côtés égaux et les* n *angles égaux chacun à chacun.* (De Vriend der Wiskunde.)

# LIVRE III

## THÉORÈMES

### Lignes proportionnelles.

#### Théorème 313.

**1101.** *Toute parallèle à la base d'un triangle a son milieu sur la médiane qui part du sommet opposé.*

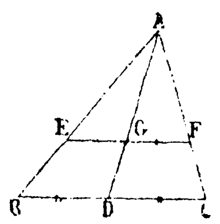


Fig. 659.

En effet, les trois droites AB, AD, AC, forment un faisceau qui divise dans un même rapport les parallèles BC et EF; et puisque la droite BC est divisée en deux parties égales, il en est de même de EF.

#### Théorème 313. — I.

**1102.** *Toute antiparallèle à la base d'un triangle a son milieu sur la symédiane qui part du sommet opposé.*

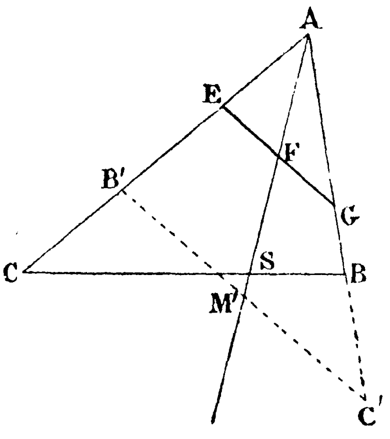


Fig. 660.

La symédiane AS est la droite symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice de l'angle A (nº 148). Pour l'obtenir, on prend $AB' = AB$, $AC' = AC$, et l'on mène la médiane AM' de AB'C'; or B'C' est antiparallèle à BC; donc le milieu F de toute droite antiparallèle EG se trouve sur la symédiane AS.

#### Théorème 314.

**1103.** *La droite* EF, *menée par les milieux des bases d'un trapèze* AC, *passe au point de concours des côtés non parallèles et à celui des diagonales.*

**Théorème 315.**

**1104.** *Le point de concours des diagonales d'un trapèze divise ces lignes en parties proportionnelles aux bases.*

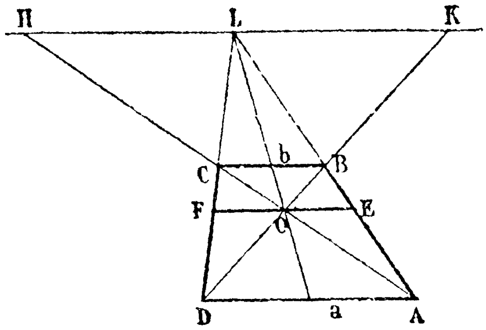


Fig. 661.

Les triangles COB, AOD sont équiangles ; donc

$$\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA} = \frac{BC}{AD} = \frac{b}{a}.$$

On peut écrire :

$$\frac{CO}{CA} = \frac{b}{a+b}.$$

*Corollaire.* La parallèle FOE donne aussi :

$$\frac{BE}{BA} = \frac{b}{a+b}, \quad \text{d'où} \quad BE = AB \cdot \frac{b}{a+b},$$

et

$$AE = AB \cdot \frac{a}{a+b}.$$

**Théorème 315. — I.**

**1105.** *Le point de concours des côtés non parallèles d'un trapèze divise ces lignes en segments soustractifs proportionnels aux bases.*

On a :
$$\frac{LB}{LA} = \frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{LA}{LB} = \frac{a}{b}.$$

On a aussi :
$$\frac{LA - LB}{LB} = \frac{AB}{LB} = \frac{a-b}{b};$$

d'où
$$LB = AB \cdot \frac{b}{a-b},$$

et
$$LA = AB \cdot \frac{a}{a-b}.$$

*Corollaire.* On a aussi :
$$\frac{HC}{HA} = \frac{b}{a}.$$

**Théorème 315. — II.**

**1106.** *Dans un triangle quelconque* ABC, *on forme des trapèzes par des parallèles* DE, FG... *à la base. Démontrer que les diagonales de ces trapèzes se rencontrent sur la médiane du triangle.*

**Théorème 315. — III.**

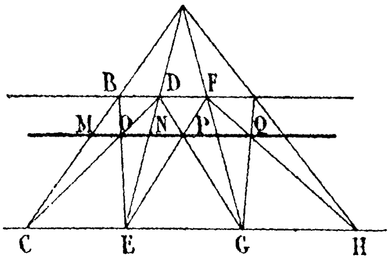


Fig. 662.

**1107.** *Par un point* A, *on mène des sécantes qui coupent deux parallèles données; les points de concours des diagonales des divers trapèzes ainsi formés se trouvent sur une même droite.*

Par le point O, menons MN parallèle à CE.

On a $\dfrac{DN}{NE}=\dfrac{BD}{CE}$ (*G.*, nº 231, et *Ex. de G.*, nº 1104, *Corollaire.*)

Mais $\dfrac{BD}{CE}=\dfrac{DF}{EG}$; donc la parallèle menée par le point P passe par N et se trouve sur le prolongement de MN, donc tous les points de concours O, P, Q appartiennent à une même droite.

**1108.** Théorème réciproque. *On donne trois parallèles* BF, MQ, CG; *par chaque point de* MQ, *on mène deux droites telles que* BOE, DOC; *prouver que les sécantes* CB, ED, GF, *etc., passent par le même point.*

**Théorème 316.**

**1109.** *Dans tout trapèze, la parallèle menée aux bases par le point de concours des diagonales est divisée en deux parties égales par ce point de concours.*

En effet, $\dfrac{EO}{BC}=\dfrac{AO}{AC}$ ou $\dfrac{EO}{b}=\dfrac{a}{a+b}$; (nº 1104)

d'où $$EO=\frac{ab}{a+b}.$$

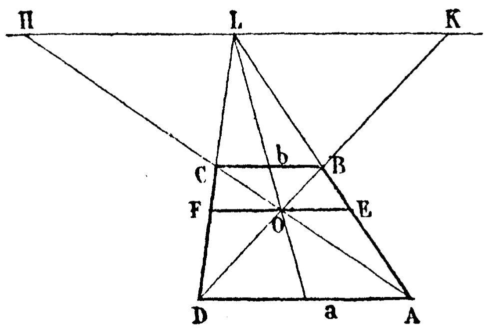



Fig. 663.

De même $$FO=\frac{ab}{a+b}.$$

Donc $$FO=EO.$$

*Autres démonstrations.*

1º On a : $$\frac{OF}{b}=\frac{DO}{DB}=\frac{AO}{AC}=\frac{OE}{b}$$

Donc $$OF=OE.$$

2º Le faisceau L(DOBK) est harmonique.
Donc FOE parallèle à LK est partagée en deux parties égales.

*Remarque.* En désignant par $l$ la longueur de FE, on a la relation

$$\frac{2}{l}=\frac{1}{EO}=\frac{a+b}{ab}=\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

**Théorème 316. — I.**

**1110.** *La parallèle menée aux bases par le point de concours des côtés non parallèles et limitée aux diagonales prolongées, est divisée en deux parties égales par le point* L.

$$\text{LH} = \frac{ab}{a-b} = \text{LK}.$$

*Remarque.* En désignant HK par $l'$, on a :

$$\frac{2}{l'} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}.$$

En combinant les résultats ci-dessus, on obtient :

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{b} \quad \text{et} \quad \frac{1}{l} - \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}.$$

**Théorème 316. — II.**

**1111.** *On donne un quadrilatère quelconque* ABCD, *on divise dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$, *à partir des sommets opposés* A *et* C, *les côtés adjacents à ces mêmes sommets ; prouver que la figure* EFHG *qui joint deux à deux les points de division est un parallélogramme.*

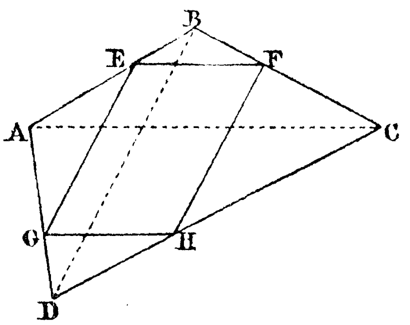


Fig. 664.

On a : $\frac{\text{AE}}{\text{EB}} = \frac{\text{AG}}{\text{GD}} = \frac{m}{n}$;

donc la droite EG est parallèle à BD, de même pour FH ; ainsi EG et FH sont parallèles ; de même pour EF et GH ; donc la figure EFHG est un parallélogramme.

*Remarques.* 1° Il en est encore ainsi même quand les côtés du quadrilatère donné ne sont pas dans un même plan.

2° La question n° 542 n'est qu'un cas particulier de 1111.

**Théorème 317.**

**1112.** *On mène des parallèles* AB, CD *à une des diagonales d'un quadrilatère. Prouver que les droites* AC, BD *se coupent sur l'autre diagonale.*

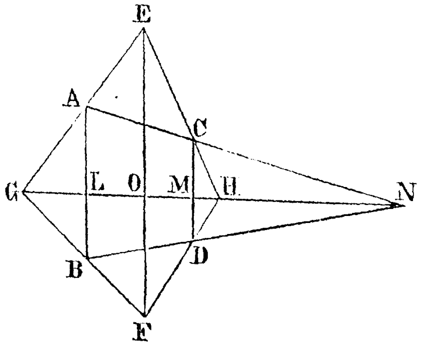


Fig. 665.

On a : $\frac{\text{AL}}{\text{BL}} = \frac{\text{EO}}{\text{FO}} = \frac{\text{CM}}{\text{DM}}$.

Donc les sécantes AC, LM, BD se coupent au même point. (G., n° 232.)

**1112 a.** Théorème réciproque. *On joint un point* N *d'une diagonale* GH, *aux extrémités* A *et* B *d'une parallèle à la seconde diagonale. Prouver que* CD *est parallèle à* EF.

**Théorème 318.**

**1113.** *Lorsque deux triangles ont deux angles respectivement égaux et deux angles supplémentaires, les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels aux côtés opposés aux angles supplémentaires.*

(*Méthodes*, nº 150.)

**Théorème 319.**

**1114.** *Par un point quelconque de la base* BC *d'un triangle* ABC, *on mène une parallèle* PMN *à la médiane qui aboutit au milieu de* BC; *cette parallèle coupe les côtés* BA, CA *aux points* M *et* N. *Prouver que la somme* PM + PN *est constante.*

(*Méthodes*, nº 266.)

*Remarque.* Lorsque le point est pris sur le prolongement de la base, une des distances doit être regardée comme négative.

**Théorème 319. — I.**

**1115.** *Par un point pris dans l'intérieur d'un triangle équilatéral, on mène des droites qui rencontrent chaque côté sous un même angle donné. Prouver que la somme de ces trois droites est constante.*

(*Méthodes*, nº 289 *a*.)

**Théorème 319. — II.**

**1116.** *Trois droites indéfinies* OA, OB, OC, *passent par un même point; si un point* M *se meut sur l'une d'elles, les distances de ce point aux deux autres droites sont dans un rapport constant.*

Soient M et N deux positions quelconques du point mobile. Il suffit de prouver que l'on a :

$$\frac{MD}{ME} = \frac{NF}{NG}.$$

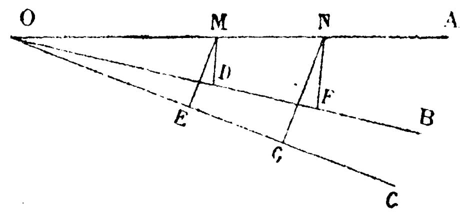



Fig. 666.

**1117.** Théorème réciproque. *Si un triangle* DME *se meut en restant semblable à lui-même, de manière que deux sommets* M, E *glissent sur deux droites données, et que dans toutes les positions les côtés homologues tels que* NG, ME *soient parallèles, le troisième sommet* D *décrit une droite qui concourt en un même point* O *que les deux premières.*

**Théorème 319. — III.**

**1117 a.** *On coupe les côtés d'un angle* A *par des parallèles* BC, B′C′; *par* B *et* B′ *on mène des parallèles dans une direction quelconque, par* C *et* C′ *des parallèles qui coupent les précédentes en* M *et* M′; *prouver que la droite* MM′ *passe par le sommet de l'angle* A.

Soit B'C' parallèle à BC. Menons AM et par B' une parallèle B'M' à BM; prouvons que C'M' est parallèle à CM.

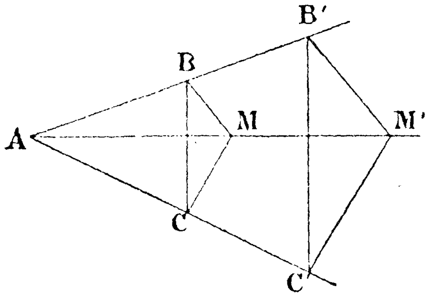


Fig. 667.

On a : $\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{BM}{B'M'}$;

donc les triangles CBM, C'B'M' sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, il en résulte que C'M' est parallèle à CM; donc, si l'on mène directement les droites B'M', C'M' respectivement parallèles aux premières, la droite M'M passera par le sommet A.

**1117 b.** *Remarques.* 1° On utilise ce théorème afin de mener par un point donné M une droite qui converge avec deux droites BB', CC' dont on ne peut avoir le point de concours A.

2° La considération d'un solide auxiliaire (nos 169 et suivants) d'un trièdre coupé par deux plans parallèles BCM, B'C'M' rend compte facilement de la question ci-dessus.

3° Le théorème précédent conduit à une démonstration très simple de l'hexagramme de Pascal. (Voir ci-dessous, n° 1117 c.)

### Hexagramme de Pascal 319. — IV.

**1117 c.** *Les côtés opposés d'un hexagone inscrit dans un cercle se coupent deux à deux, en trois points situés en ligne droite.*

Soit ABCDEF; menons BE, CF.

Les droites AI, AH et DI, DH étant supposées fixes, si on considère un cercle variable passant par A et D, les points d'intersection B, C, E, F de ce cercle avec les droites fixes se déplaceront sur ces droites.

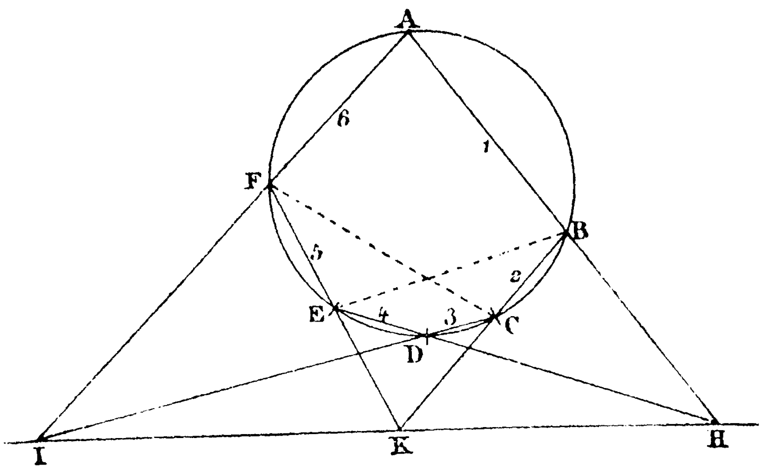


Fig. 668.

Chacune des droites BE, EF, BC conserve une direction fixe (n° 659) le triangle BEK a donc ses côtés parallèles à des directions fixes; or B, E décrivent des droites fixes passant par H; le troisième sommet K se meut donc aussi sur une droite passant par le point de concours H des deux premières (n° 1117 a).

On voit de même que le triangle CFK a ses côtés de directions fixes; comme C et F décrivent les droites fixes DI, AI, le troisième sommet K doit se trouver sur une droite passant par le point de concours I des deux premières.

Donc pour toute position des points d'intersection du cercle avec les côtés des angles IAH, IDH, le point de concours K de BC et de EF est sur IH. Donc les trois points de concours des côtés opposés d'un hexagone inscrit au cercle se trouvent en ligne droite.

**1117 d.** *Cas particuliers.* Un ou plusieurs côtés de l'hexagone inscrit peuvent se réduire à un point; dans ce cas, on considère la tangente menée au cercle par le sommet correspondant, et l'on obtient des théorèmes nouveaux. On verra plus loin celui qui est relatif au quadrilatère inscrit (nº 1237 **a**). Voici celui qui est relatif au triangle.

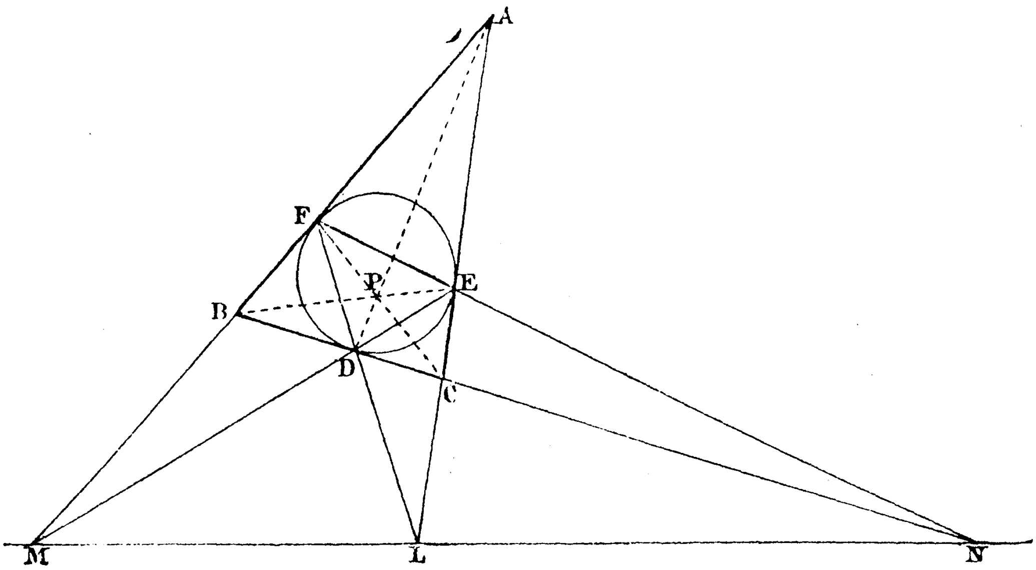



Fig. 669.

**Th.** *Les trois points de concours* L, M, N *des côtés d'un triangle inscrit, avec les tangentes menées par le sommets opposés, sont en ligne droite.* Comme théorème corrélatif on a le suivant :

**Th.** *Les trois droites* AD, BE, CF *qui joignent les sommets d'un triangle circonscrit aux points de contact des côtés opposés se coupent en un même point* P.

Le point P est le pôle de MN, et réciproquement la droite LMN est la polaire du *point de Gergonne* P du triangle ABC.

**1117 e. Note.** Le théorème de l'*hexagramme de Pascal* se démontre de bien des manières ; on peut voir à ce sujet un article de M. G. Lery (*N. A.*, 1903, p. 56, nº 10).

La démonstration très simple que nous avons donnée ci-dessus (nº 1117 c) est due à M. Parrod, professeur au lycée de Vesoul, en 1902. (*Journal de Vuibert,* 1902, p. 41.)

### Théorème 319. — V.

1118. 1° *Les distances aux côtés de l'angle de deux points pris respectivement sur deux droites isogonales sont inversement proportionnelles.*

2° *Les pieds des quatre perpendiculaires abaissées des deux points sur les côtés de l'angle appartiennent à une même circonférence.*

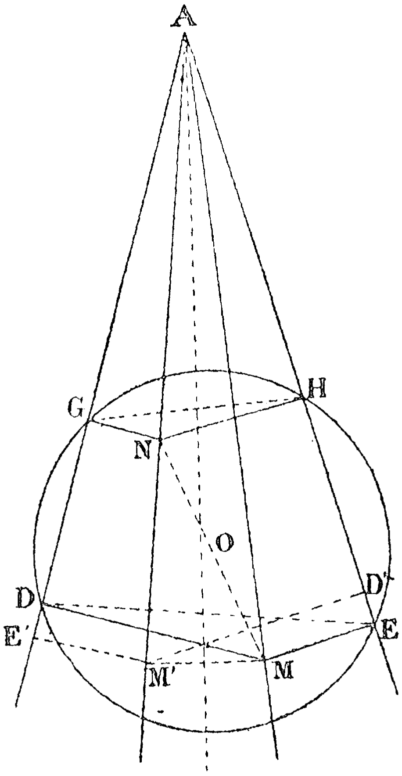


Fig. 670.

3° *La droite qui joint les deux projections d'un des points donnés est perpendiculaire à l'isogonale qui passe par l'autre point.*

On nomme *droites isogonales*, par rapport aux côtés d'un angle DAE, des droites AM, AN menées par le sommet et également inclinées sur la bissectrice de cet angle.

1° Par duplication ou retournement (n° 145), on a évidemment :

$$\frac{M'D'}{M'E'} = \frac{NH}{NG} \quad \text{ou} \quad \frac{MD}{ME} = \frac{NH}{NG};$$

$$2^{\circ} \quad \frac{AD'}{AH} = \frac{AE'}{AG} \quad \text{ou} \quad \frac{AD}{AH} = \frac{AE}{AG}.$$

Les droites DE, GH sont antiparallèles; par suite, le quadrilatère DEHG est inscriptible. Le centre est le point milieu de MN.

3° Le quadrilatère AGNH étant inscriptible, l'angle NGH = NAH = GAM; or AG est perpendiculaire sur GN, donc AM est aussi perpendiculaire sur GH. De même DE est perpendiculaire sur AN.

1118 a. Théorème réciproque. *Lorsqu'on a* $\frac{MD}{ME} = \frac{NH}{NG}$, *les points* M *et* N *appartiennent à des droites isogonales.*

### Théorème 320.

1119. *Dans un triangle, le point de concours des médiatrices élevées au milieu des côtés du triangle, le point de concours des médianes et celui des hauteurs sont en ligne droite.*

*La distance des deux derniers points est double de celle des deux premiers.* (Euler, en 1765.)

Soient H l'orthocentre, M le point de concours des médianes.

Prolongeons HM d'une quantité MO égale à la moitié de HM, et joignons le point O aux points milieux F et G. Il suffit de prouver que OF, OG sont perpendiculaires à BC et à AC.

Les médianes se coupent aux deux tiers de leur longueur. (G., n° 230.)

Ainsi MB = 2MG, mais MH égale aussi 2MO.

Donc les triangles BMH, GMO sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

Donc GO est parallèle à BH.

Ainsi GO est perpendiculaire à AC.

De même FO est perpendiculaire à BC; donc le point O est le point de concours des médiatrices; or les trois points H, M, O sont en ligne droite, et MH = 2MO ; donc...

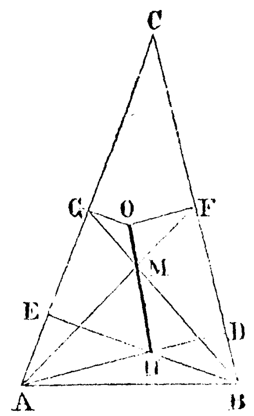



Fig. 671.

**1120.** *Remarques.* 1° La première partie du théorème peut s'énoncer comme il suit : *Dans un triangle, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre sont en ligne droite.*

2° *Le centre du cercle des neuf points forme avec* O, M, H *une division harmonique* (voir ci-après, n° 1262, 2°). La remarque est de SALMON, (*Géométrie analytique,* p. 109).

3° *La distance d'un sommet à l'orthocentre est double de la distance du côté opposé au centre du cercle circonscrit.*

En effet BH = 2GO car BM = 2GM.

**1120 a. Note.** Ce théorème est dû à EULER en 1765 (*Mémoires de Saint-Pétersbourg*). La droite qui joint l'orthocentre au centre du cercle circonscrit est nommée *droite d'Euler.* (Voir BALTZER, *Planimétrie,* § 12, n° 8.) Cette droite passe par le point de concours des médianes et contient aussi le centre du *cercle des neuf points* (n° 719).

Tout récemment, en 1904, le *théorème de Boutin* (n° 1242 o) a fait connaître une propriété remarquable de la *droite d'Euler.*

On lira avec fruit un remarquable article de TERQUEM sur les relations linéaires qui existent entre certains points du triangle. (*Nouvelles Annales,* 1842, p. 79.)

Le *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* (années 1879 et 1880) a reproduit une étude très complète du triangle par JAMES BOOTH, membre de la Société royale de Londres. La traduction est de M. MOREL, un des rédacteurs du journal, et dont le nom se trouve fréquemment dans les *Nouvelles Annales de M. Gérono.*

### Théorème 321.

**1121.** *Dans tout triangle, le centre du cercle inscrit, le point de concours des médianes et le centre du cercle inscrit au triangle médian, sont trois points en ligne droite, et la distance des deux premiers est double de celle des deux derniers.* (Voir *Introduction à la géométrie supérieure,* par HOUSEL, p. 123.)

Soient M le centre du cercle inscrit au triangle ABC, N celui du cercle inscrit au triangle DEF.

Les bissectrices AM, EN des angles opposés A, E d'un parallélogramme sont parallèles entre elles; il en est de même de BM et FN. Les triangles AMB, FNE sont semblables comme équiangles, car l'angle BAM est la moitié de A comme l'angle NEF est la moitié de E; de même l'angle NFE $=$ MBA.

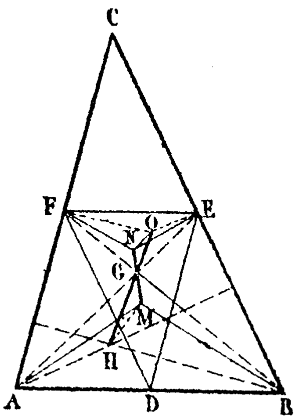



Fig. 672.

Mais $\quad EF = \frac{AB}{2}$; $\quad$ donc $EN = \frac{AM}{2}$.

Soit G le point où la médiane AE coupe MN.

Les triangles semblables AMG et ENG donnent :

$$\frac{EG}{AG} = \frac{NG}{MG} = \frac{EN}{AM} = \frac{1}{2}.$$

Donc G est le point de concours des médianes et $MG = 2GN$.

**1122. Th.** *Dans tout triangle, le centre du cercle inscrit, le centre de gravité de la surface et le centre de gravite du périmètre, sont trois points en ligne droite; la distance des deux premiers points est double de la distance des deux derniers.*

C'est un nouvel énoncé du théorème précédent (nº 1121), car le point de concours des médianes est le centre de gravité du triangle (*Mécanique*, nº 75). Le point de concours des bissectrices du triangle médian est le centre de gravité du périmètre de ce dernier triangle. (*Mécanique*, nº 72.)

**1123. Note.** 1º Le théorème 1121, que nous avions pris dans HOUSEL, remonte au moins à 1842, et pourrait bien être de TERQUEM, car il est indiqué dans un article remarquable de cet auteur (*N. A.*, tome I, 1842, p. 79, nº 2. Voir aussi *N. A.*, 1860, p. 354); en fait, c'est le théorème I de NAGEL.

2º M, centre du cercle inscrit ABC, est le *point de Nagel* du triangle médian DEF (voir ci-après, nº 1142 a). Le point N est le centre du cercle inscrit à DEF. Le point O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC, est l'orthocentre de DEF ; quant au point G, il est le centre de gravité de chaque triangle, et le centre d'homothétie de ces deux mêmes triangles.

3º La droite MGN (fig. 672) qui joint le centre du cercle inscrit au triangle ABC, au centre du cercle inscrit au triangle médian DEF, pourrait être appelée *droite de Housel*, à cause de son analogie avec la *droite d'Euler* (nº 1120).

Le centre du cercle inscrit au triangle médian est aussi le centre radical des trois cercles exinscrits au triangle donné ABC. (*Bulletin de mathématiques* de MM. GÉRARD et MICHEL, 1902-1903, p. 261.)

**Théorème 231. — I.**

**1123 a.** Dans un triangle dont le côté $a$, ou BC, est la moyenne de $b$ et $c$ :

1º *Le rayon du cercle inscrit est le tiers de la hauteur abaissée du sommet* A *sur le côté moyen;*

2º *Le centre du cercle inscrit, le centre de gravité du triangle, le point de Nagel et le centre de gravité du périmètre, sont sur une ligne droite parallèle au côté moyen;*

3° *La droite* $AI_a$ *est divisée en deux parties égales par le côté moyen* ($I_a$ étant le centre du cercle exinscrit tangent au côté $a$) ;

4° *Le rayon* $r_a$ *est égal à la hauteur de* A *sur* BC ;

5° *La perpendiculaire abaissée de* O *sur le côté moyen est égale à* R — r' ;

6° *La somme des perpendiculaires abaissées de* O *sur* b *et* c *égale* 2r ;

7° *Le segment de la bissectrice de l'angle* A *compris dans la circonférence circonscrite, est divisé par* I *en deux parties égales ;*

8° *Le centre* I *et le centre du cercle d'Euler sont sur une droite perpendiculaire au côté moyen ;*

9° *La tangente commune au cercle inscrit et au cercle des neuf points est parallèle au côté moyen ;*

10° On a la relation : $a^2 = 4\,(2R - r)r$.

(*Journal de M. E de Longchamps*, 1894, p. 193, DROZ-FARNY, à Porrentruy. — On peut voir aussi le *Bulletin de M. E.* de M. CH. MICHEL, 1910, p. 197, n° 2611. PÉGORIER, à Bône.)

**Théorème 322.**

**1124.** *Si les quatre côtés d'un parallélogramme passent par quatre points fixes en ligne droite, les diagonales passent par deux points fixes de cette même droite.*

(*Nouvelle correspondance mathématique* de CATALAN, 1877, p. 146.)

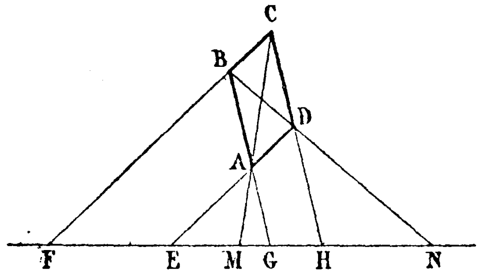


Fig. 673.

On a : $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MG}{MH}$.

Donc, pour obtenir le point M, il suffit de diviser GE en parties proportionnelles à GH et EF. Ainsi le point M est fixe.

Il en est de même du point N.

**Théorème 323.**

**1125.** *Un triangle* ABC *reste semblable à lui-même, un sommet* A *est fixe, tandis que le sommet* B *glisse sur une droite donnée. Prouver que le troisième sommet* C *décrit une autre droite.*

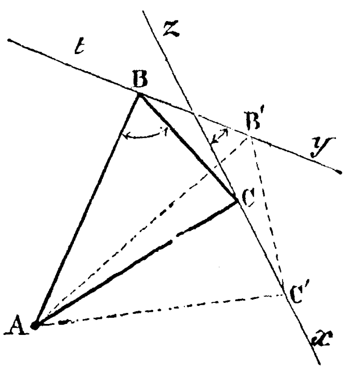


Fig. 674.

1re *Démonstration.* Considérons le triangle dans la position spéciale où le côté AB se trouve perpendiculaire à $By$. Par le point C, il faut mener $zx$ perpendiculaire à AC, et l'on a le lieu demandé.

En effet, menons une ligne quelconque AB' et formons l'angle B'AC' égal à l'angle BAC : le nouveau triangle sera semblable à ABC, car, les triangles rectangles ABB' et ACC' ayant un angle aigu égal, l'angle BAB' = CAC' sont équiangles ; donc on a les rapports égaux

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}.$$

Donc les triangles ABC, AB'C' sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre des côtés homologues proportionnels; par suite, si l'on construit directement un triangle AB'C' ayant B sur $ty$, et si ce triangle est semblable à ABC, le sommet C' sera sur $zx$.

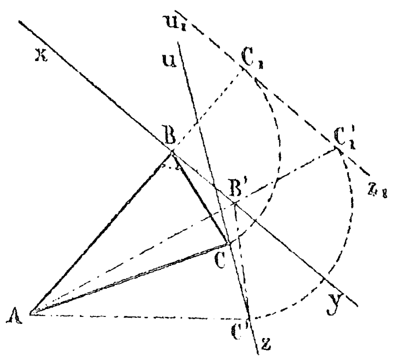


Fig. 675.

2e *Démonstration*. Le mode suivant peut être employé utilement pour toute figure qui reste semblable à elle-même, et dont un sommet reste fixe, tandis qu'un autre sommet décrit une ligne donnée.

Le rapport $\frac{AB}{BC}$ ou $\frac{AB'}{B'C'}$ est constant; sur le prolongement de AB, prenons $BC_1 = BC$; le lieu du point $C_1$ est une droite $u_1z_1$ parallèle à $xy$ (no 63). Lorsqu'on amène $C_1$ en C, $C_1'$ en C', en formant un angle $CBC_1 = C'B'C_1'$, la droite $u_1z_1$ vient en $uz$, et c'est par conséquent le lieu du troisième sommet du triangle.

### Théorème 324.

1126. *Lorsque la demi-circonférence décrite sur le côté oblique d'un trapèze rectangle, pris pour diamètre, coupe le côté opposé, chaque point d'intersection divise ce côté en deux segments dont le produit égale le produit des bases du trapèze.*

(*Méthodes*, no 24.)

### Théorème 324. — I.

1127. *Deux perpendiculaires* AB, CD *menées à une droite* BC, *sont dirigées en sens contraire l'une de l'autre; la circonférence décrite sur* AD, *comme diamètre, coupe le prolongement de* BC *en deux points* M, N *tels que chacun d'eux détermine deux segments soustractifs* BM, MC, *dont le produit égale le produit des perpendiculaires.*

(Voir *Méthodes*, no 24. R. 4o.)

### Théorème 324. — II.

1128. *La distance d'un point quelconque d'une demi-circonférence au point de contact d'une tangente fixe, est moyenne proportionnelle entre le diamètre du cercle et la distance du point considéré à la tangente fixe.*

Il faut prouver qu'on a : $a^2 = 2re$.

Menons le diamètre MOG; joignons le point A au point G (fig. 676).

Les triangles rectangles AEM, GAM sont semblables, car l'angle G égale l'angle MAE.

Donc $\frac{MG}{MA} = \frac{MA}{ME}$, d'où $a^2 = 2re$.

*Autre démonstration*. (fig. 677). Abaissons les perpendiculaires MH sur le diamètre AB. On a : $a^2 = AH \cdot AB$,

$a^2 = 2re$.

*Remarque.* 1° On en déduit $e = \frac{a^2}{2r}$ ; c'est d'ailleurs évident d'après la fig. 677.

2° Le théorème précédent peut être déduit, comme cas particulier, du théorème connu :

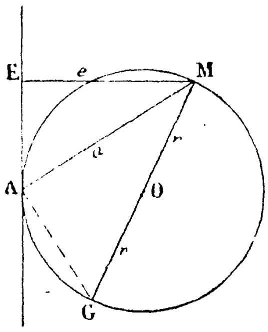


Fig. 676.

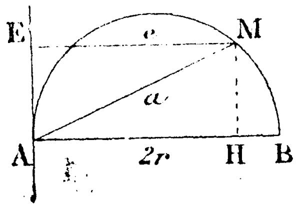


Fig. 677.

*Le produit des deux côtés d'un triangle égale la hauteur relative au troisième côté, multipliée par le diamètre du cercle circonscrit.* (G., n° 270.)

En effet, lorsque les deux extrémités de la base se réduisent à un point, cette base est tangente à la circonférence. Les deux côtés sont égaux entre eux et sont donnés par la corde qui joint le point considéré, au point de contact ; la hauteur est la perpendiculaire abaissée du même point sur la tangente ; donc...

3° Ce théorème n'est qu'un cas particulier du *théorème de Pappus*, relatif au quadrilatère inscrit (n° 1214) ; mais il convient de le présenter directement, car il conduit non seulement à une démonstration nouvelle du théorème du quadrilatère, mais encore à diverses extensions remarquables (nos 1176, 1178, 1179, 1222, 1224).

### Théorème 325.

**1129.** *La distance d'un point quelconque d'une circonférence à une corde donnée, est moyenne proportionnelle entre les distances du même point aux tangentes menées par les extrémités de la corde.*

(Voir *Méthodes*, n° 25.)

*Autre démonstration.* Soient $MA = a$, $MB = b$, $MD = d$, $ME = e$, $MF = f$.

On a : $d = \frac{ab}{2r}$, (G., n° 270.)

ou $d^2 = \frac{a^2b^2}{4r^2}$.

D'ailleurs $a^2 = 2re$, (n° 1128)

d'où $e = \frac{a^2}{2r}$.

De même $f = \frac{b^2}{2r}$,

donc $d^2 = \frac{a^2}{2r} \cdot \frac{b^2}{2r} = ef$.

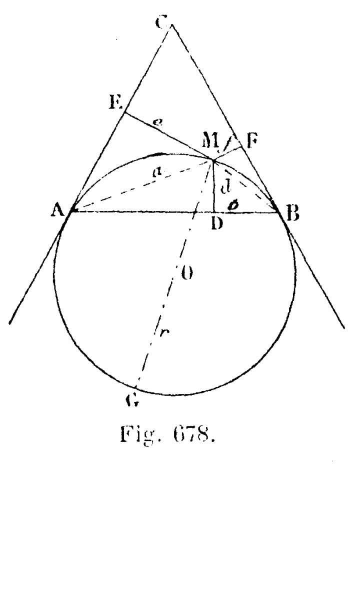


Fig. 678.

## Similitude et homothétie.

**1130. Définitions.** Deux polygones sont semblables, lorsqu'ils ont les angles respectivement égaux et les côtés homologues proportionnels (G., n° 220). Ces polygones sont composés de triangles semblables et semblablement placés.

Deux figures curvilignes sont semblables, lorsqu'elles peuvent être considérées comme étant les limites des polygones semblables.

Dans un grand nombre de cas, il n'est pas nécessaire de recourir à la décomposition en triangles pour reconnaître la similitude de deux figures. Il suffit d'utiliser les considérations suivantes et les conséquences qui en découlent (nos 1131 et 1133).

On nomme *figures homothétiques* les figures semblables et semblablement placées.

**Note.** L'étude des figures semblables est due à THALÈS. La considération des figures, non seulement semblables, mais *semblablement placées,* a été faite par PONCELET en 1822 (*Traité des propriétés projectives des figures,* tome I, chap. III). Enfin la dénomination de *figures homothétiques* a été donnée par CHASLES en 1827 (*Annales de Gergonne,* t. XVIII, p. 280).

**1131. Moyen principal.** 1° *Après avoir déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux figures soient égales, on conserve l'égalité des angles et on remplace l'égalité des lignes correspondantes par des rapports égaux.*

*Exemple.* Deux parallélogrammes sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux ; donc *deux parallélogrammes sont semblables, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés homologues proportionnels.*

2° *Les données qui permettent de construire une figure et de n'en construire qu'une seule, conduisent à un cas d'égalité, et par suite à un cas de similitude.*

*Exemple.* Avec une base donnée, la hauteur correspondante et l'angle opposé, on ne peut réellement construire qu'un seul triangle; donc, *deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal, la base opposée et la hauteur correspondante respectivement égales.*

Par suite :

*Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont un angle égal et que la base et la hauteur sont respectivement proportionnelles.*

**1132.** Remarque. *Lorsque les données fournissent plusieurs figures différentes de forme et de grandeur, on ne peut plus affirmer directement l'égalité de deux figures qui auraient les mêmes données, ni la similitude des figures que l'on déduirait des premières.*

Ainsi, lorsqu'on inscrit dans un cercle donné de rayon $r$ un triangle isocèle, connaissant la somme $l$ de la base et de la hauteur, on obtient deux triangles différents (n° 211). On ne peut donc pas dire que deux triangles isocèles sont égaux, lorsqu'ils sont inscrits dans des cercles égaux et que la somme de la base et de la hauteur de l'un d'eux égale la somme des éléments correspondants de l'autre. On doit faire une remarque analogue pour la similitude.

Pour énoncer une proposition vraie, on doit dire par exemple :

*Dans deux cercles de rayons* r *et* r′, *on inscrit des triangles isocèles ayant respectivement* l *et* l′ *pour sommes de la base et de la hauteur. On obtient ainsi dans le cercle* r *deux triangles* T *et* V ; *dans le cercle* r′ *on obtient deux triangles* T′ *et* V′ ; *or les triangles* T *et* T′ *sont semblables entre eux, et il en est de même de* V *et* V′, *lorsqu'on a la relation*

$$\frac{r}{r'} = \frac{l}{l'}.$$

**1133. Conséquences.** 1° *Toutes les figures d'espèce donnée sont semblables, lorsque la figure ne dépend que d'une seule longueur.*

*Exemple.* Les carrés sont des figures semblables. Il en est de même des triangles équilatéraux, des polygones réguliers d'un même nombre de côtés, des circonférences, des paraboles, des spirales d'Archimède, des cycloïdes.

2° *Les figures d'espèce donnée qui dépendent de deux longueurs sont semblables, lorsque les deux longueurs de la première sont directement proportionnelles aux longueurs correspondantes de la seconde.*

*Exemple.* Les rectangles sont semblables, lorsque les bases sont proportionnelles aux hauteurs.

Deux ellipses sont semblables, lorsque les axes de l'une sont proportionnels aux axes de l'autre.

3° *Les figures d'espèce donnée qui dépendent des angles et de certaines longueurs sont semblables, lorsque les angles sont égaux et que les côtés homologues sont proportionnels.*

On peut d'ailleurs, au point de vue des lignes, retomber sur un des deux cas précédents.

*Exemple.* Deux secteurs circulaires sont semblables, lorsqu'ils ont même angle au centre.

Deux parallélogrammes sont semblables, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés homologues proportionnels.

4° *La même question peut parfois être énoncée de deux manières différentes, suivant que l'on considère les angles ou les lignes.*

*Exemples.* Deux losanges sont semblables, lorsqu'ils ont un angle égal, *ou bien,* deux losanges sont semblables, lorsque les diagonales de l'un d'eux sont proportionnelles à celles de l'autre.

Deux triangles isocèles sont semblables, lorsqu'ils ont même angle au sommet, *ou bien,* lorsque les bases sont proportionnelles aux autres côtés.

**1134.** *Énoncés à proposer.* La considération des cas d'égalité de deux figures, ou celui des données nécessaires pour construire une figure, permet de proposer un grand nombre de questions. Aux exemples donnés, bornons-nous à ajouter quelques cas relatifs aux trapèzes.

Deux trapèzes sont semblables :

1° Lorsqu'ils ont les angles égaux et les bases respectivement proportionnelles ;

2° Lorsqu'ils ont les angles égaux et que les bases moyennes sont proportionnelles aux hauteurs ;

3° Lorsqu'ils ont les quatre côtés homologues proportionnels ;

4° Lorsqu'ils ont les bases et les diagonales proportionnelles ;

5° Lorsqu'ils ont les angles égaux et les diagonales proportionnelles. Mais on obtient dans ce dernier cas deux groupes différents de trapèzes semblables ; car, avec des angles et des diagonales donnés, on obtient deux trapèzes différents (n° 1132).

### Théorème 326.

**1135**. *Les droites également inclinées sur la bissectrice d'un angle déterminent des triangles semblables.*

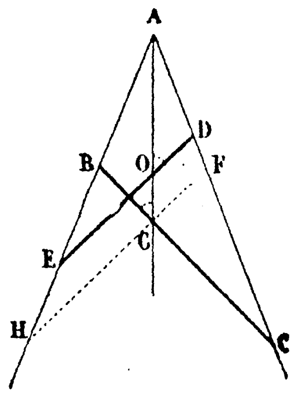


Fig. 679.

1° Les lignes sont parallèles. Le théorème est connu. (G., n° 212.)

2° Les lignes sont antiparallèles ; si les angles AOD, AGB sont égaux, les triangles AOD, AGB ont deux angles égaux ; donc B = D, et les triangles ABC, ADE sont équiangles ; donc ils sont semblables.

On peut aussi mener FGH parallèle à DE.

Les triangles ABC, AFH sont égaux ; donc ABC, ADE sont semblables.

*Remarque*. Par rapport aux côtés de l'angle A, les antiparallèles BC, DE, sont des droites isoclines (voir ci-après, n° 2458).

### Théorème 326. — I.

**1135 a**. *Dans un triangle* ABC, *toute parallèle* DNEF *à la médiane* AM *intercepte sur les côtés correspondants des segments proportionnels à ces côtés.*

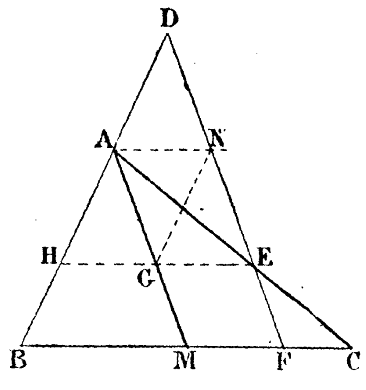


Fig. 680.

Il faut prouver qu'on a :

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}.$$

Menons AN, EH parallèles à la base ; N est le point milieu de DE, car AN = GE = HG. Ainsi GN est parallèle à DH, donc DN = AG, et par suite DA = AH.

Or la parallèle EH divise les côtés en parties proportionnelles, donc

$$\frac{AH \text{ ou } AD}{AE} = \frac{AB}{AC}.$$

**Théorème 327.**

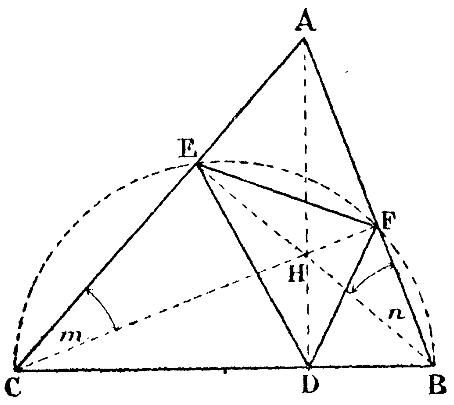


Fig. 681.

**1136.** *Les droites qui joignent deux à deux les pieds des hauteurs d'un triangle déterminent trois triangles semblables au triangle primitif.*

La demi-circonférence décrite sur le diamètre BC passe par les pieds E, F des hauteurs; donc FE est antiparallèle à BC, et les triangles ABC, AEF sont équiangles.

De même pour DBF et pour DCE.

*Remarque.* Le triangle DEF, obtenu en joignant deux à deux les pieds des hauteurs, est nommé *triangle orthique* (nos 292 **m** et 664 **b**).

**Théorème 327. — I.**

**1137.** *Les hauteurs d'un triangle sont les bissectrices de son triangle orthique.*

Les quadrilatères tels que CDHE sont inscriptibles, parce que les angles opposés D, E sont droits; donc

$$\text{angle ADE} = m\,; \quad \text{ADF} = n\,.$$

Mais $m = n$, donc angle ADE = ADF.

**Théorème 327. — II.**

**1138.** *Si, dans un triangle* ABC, *deux droites* BM, CN *se coupent sur la hauteur* AD, *cette hauteur est bissectrice de l'angle* MDN (fig. 682).

Abaissons les perpendiculaires MEF, NGH.

Les triangles OME, OGN sont équiangles, car G = M comme alternes-internes, et les angles en O sont égaux.

Donc $$\frac{\text{ME}}{\text{NG}} = \frac{\text{OE}}{\text{ON}} = \frac{\text{DF}}{\text{DH}} \qquad (1)$$

(DF, DH sont les hauteurs des triangles semblables).

Or $$\frac{\text{ME}}{\text{MF}} = \frac{\text{AO}}{\text{AD}} = \frac{\text{NG}}{\text{NH}}.$$

On peut écrire $$\frac{\text{ME}}{\text{NG}} = \frac{\text{MF}}{\text{NH}}. \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2) on trouve :

$$\frac{\text{DF}}{\text{DH}} = \frac{\text{MF}}{\text{NH}}.$$

Ainsi les triangles rectangles DFM, DHN sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés homologues proportionnels. Donc l'angle MDF = NDH, et la hauteur AD est bissectrice de l'angle MDN.

*Autre démonstration.* Les points P et Q divisent harmoniquement **MN**, et l'angle PDQ est droit. Donc DP est bissectrice de l'angle **MDN** (fig. 683).

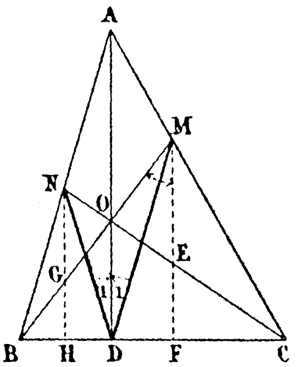


Fig. 682.

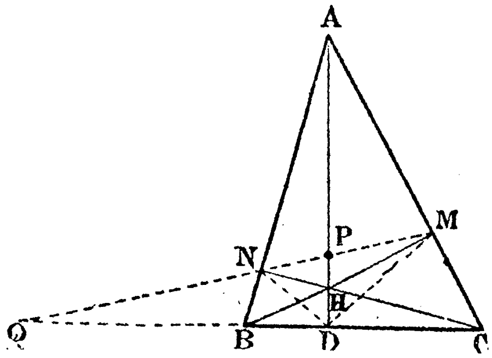


Fig. 683.

*Remarque.* Le théorème précédent (nº 1137) n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

La première démonstration que nous venons de donner (nº 1138) est analogue à celles que l'on trouve dans les ouvrages suivants : *Applications de Blanchet,* par E.-E. Neel, 1879, p. 11, nº 6, 2e moyen; on peut voir aussi le *Journal de mathématiques de Vuibert.*

### Théorème 328.

**1139.** *Avec des médianes d'un triangle, prises pour côtés, on construit un nouveau triangle. Démontrer que les médianes de ce second triangle sont les $^3/_4$ des côtés correspondants du premier.*

Soit ABC le triangle donné; les médianes se coupent en O aux $^2/_3$ de leur longueur.

En prenant $DM = DO$, on forme un parallélogramme BOCM, et le triangle OCM est formé par les $^2/_3$ des médianes, car $OM = {^2/_3}AD$, $OC = {^2/_3}FC$ et $CM = {^2/_3}BE$.

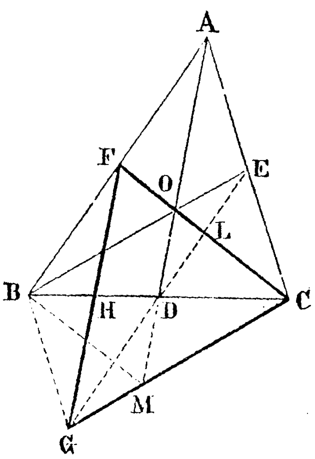


Fig. 684.

Donc, si par le point B nous menons BG parallèle à AC, nous avons $GC = BE$ et FG parallèle à OM, car CO et CM sont respectivement les $^2/_3$ de CF et de CG (G., nº 230); donc aussi $OM = {^2/_3}FG$, d'où $FG = AD$. Ainsi CFG est le triangle construit avec les médianes du triangle primitif.

Or DH, moitié de DC, égale la moitié de DB. En d'autres termes, CH, médiane du second triangle, est les $^3/_4$ du côté CB.

Il en serait donc de même des autres médianes.

*Remarque.* Les points G, D, E sont en ligne droite, et GL est parallèle à AB.

### Théorème 328. — I.

**1140.** *On donne un triangle 1. Avec les médianes de 1, prises pour côtés, on forme un triangle 2; avec les médianes du triangle 2, on forme un triangle 3, etc. Les triangles de rang impair 1, 3, 5... sont semblables entre eux. Les triangles de rang pair 2, 4, 6... sont semblables entre eux. Dans chaque groupe, les côtés d'un triangle sont les $^2/_3$ des côtés du triangle qui le précède.* (*N. A.*, 1863, p. 93 et 419, q. 640.)

### Théorème 328. — II.

**1140 a.** *Les centres des triangles équilatéraux construits, tous à l'extérieur ou tous vers l'intérieur, sur les côtés d'un triangle quelconque sont les sommets d'un triangle équilatéral.*

On a vu (nº 754) que $\quad AD = EB = FC;$

or l'angle

$$MCL = ACD = C + 60^{\circ},$$

de plus on a :

$$\frac{MC}{AC} = \frac{CL}{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

donc les triangles ADC et MLC sont semblables car ils ont un angle égal compris entre des côtés proportionnels; il en est de même des triangles ACF et MAN, CFB et NBL.

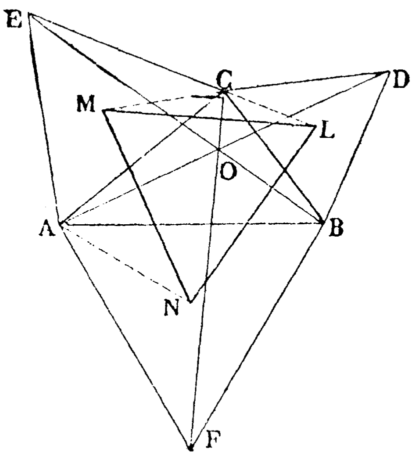


Fig. 684 *bis*.

Donc

$$\frac{ML}{AD} = \frac{MN}{FC} = \frac{NL}{FC} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Or $\quad AD = FC, \quad$ donc $\quad ML = MN = NL.$

*Remarque.* Le théorème reste vrai pour le cas particulier où les trois sommets A, B, C sont sur une même droite (fig. 684 *ter*).

Dans ce cas, le centre du triangle LMN est sur BC, car l'ordonnée de ce point est nulle puisqu'elle est la moyenne des ordonnées des trois sommets; or en ne tenant compte que de la grandeur numérique, l'ordonnée de L égale la somme des deux autres, de même que celle de F égale la somme des ordonnées de E et D.

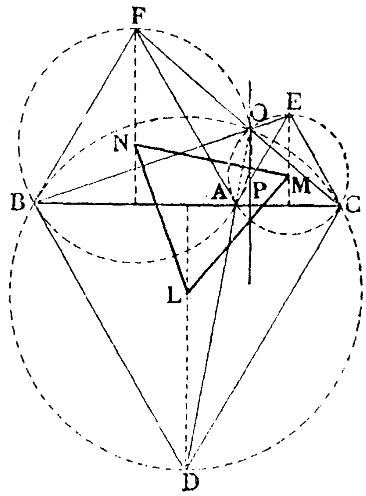


Fig. 684 *ter*.

**1140 b. Note.** 1º Lorsque BAC est une ligne droite, en prenant sur les médiatrices de BA, AC, BC, des grandeurs proportionnelles aux segments correspondants BA, etc., les droites analogues aux lignes AD, BE, CF se coupent en un même point. Lorsque le rapport varie, le lieu des points O est une droite OP perpendiculaire à BC; en désignant respectivement BC, AC, BA par $a$, $b$, $c$, on a :

$$BP = \frac{ac(a+c)}{a^2+b^2+c^2}$$

et

$$PC = \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2+c^2}$$

2° Lorsqu'on construit des carrés sur les trois côtés d'un triangle donné ABC, puis qu'on joint deux à deux les centres des carrés, on obtient un triangle A'B'C' ; si l'on construit des carrés sur ses côtés et qu'on joigne deux à deux les centres de ces carrés, on a un triangle A''B''C'' ; en répétant la même opération sur les côtés de ce troisième triangle, et en continuant de la même manière, les triangles obtenus successivement se rapprochent de plus en plus du triangle équilatéral quel que soit le triangle de départ ABC. (E. Collignon, A. F. 1891, Marseille, § 3, *série de triangles,* pages 43 à 52.)

### Théorème 329.

**1141.** *Tous les rectangles circonscrits à un quadrilatère dont les diagonales se coupent à angle droit sont semblables entre eux.*

Deux rectangles sont semblables, lorsque les côtés adjacents de l'un d'eux sont dans le même rapport que les côtés adjacents du second (n° 1133, 2°).

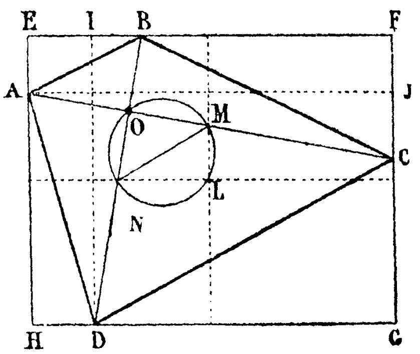


Fig. 685.

Soit EFGH un rectangle circonscrit.

Par les points A et D, menons des parallèles aux côtés. Les triangles rectangles AJC, DBI sont semblables, car les côtés sont respectivement perpendiculaires; donc,

$$\frac{AJ}{DI} = \frac{AC}{BD} \text{ rapport constant.}$$

### Théorème 329. — I.

**1142.** *Le lieu du point de concours des diagonales des rectangles circonscrits est la circonférence décrite sur la droite* MN, *qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère donné.*

En effet, le point de concours des diagonales est le même que le point de concours des droites qui joignent les points milieux des côtés opposés du rectangle ; or ces droites sont à angle droit et passent par M et N; donc le lieu des points L est la circonférence MON.

**Note.** Les théorèmes 1141 et 1142 répondent à la question 303 des *N. A* de 1855, page 365 (J. Murent, de Clermont-Ferrand).

### Théorème 329. — II.

**1142 a.** *Lorsqu'un quadrilatère* ABCD, *inscrit dans un cercle, tourne autour du centre* O *de ce cercle, les intersections de ses côtés avec leur homologues dans une nouvelle position du polygone sont les sommet d'un parallélogramme.* (E. Beyens, *Mathesis,* t. IX, 1889, p. 149 q. 624 et p. 150, 3°.)

**Théorème 330.**

**1143.** *On joint un point donné O à tous les sommets* A, B, C, D... ***d'une figure** donnée; sur chaque droite ainsi menée on détermine un point* A', B'... *tel qu'on ait :*

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{m}{n}, \textit{ rapport donné.}$$

*Prouver que les polygones* ABCD, A'B'C'D' *sont semblables et semblablement placés; c'est-à-dire prouver que ces polygones sont homothétiques* (n^os^ 1130 et 1144).

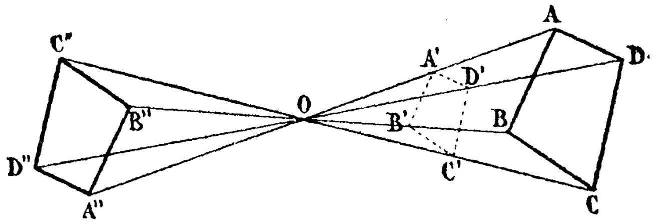



Fig. 686.

Les triangles tels que AOB, A'OB' sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés homologues proportionnels.

Donc $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{A'O} = \frac{m}{n},$$

et l'angle $OAB = OA'B'$,

De même $$\frac{AD}{A'D'} = \frac{m}{n},$$

et l'angle $OAD = OA'D'$,

donc l'angle $BAD = B'A'D'$,

et les triangles BAD, B'A'D' sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés homologues proportionnels; donc les polygones ABCD, A'B'C'D' sont semblables, comme étant composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés.

**1143 a. Th. R.** *Les droites menées par les points homologues de deux figures homothétiques concourent au même point.* (G., n° 811.)

**1144. Définitions.** Le point O est le *centre* de similitude ou d'homothétie. On nomme *axe de similitude* toute droite OA'A qui passe par le centre de similitude.

L'homothétie est *directe* ou *positive,* quand les polygones ABCD, A'B'C'D' sont d'un même côté du centre O d'homothétie.

Les rayons vecteurs correspondants OA, OA' étant dans la même direction ont le même signe; le rapport $\frac{OA}{OA'}$ est positif.

L'homothétie est *inverse* ou *négative* quand les polygones ABCD, A''B''C''D'' sont de part et d'autre du centre O.

Les rayons vecteurs correspondants OA, OA'' sont dans le prolongement l'un de l'autre, et, par rapport à l'origine O, ils sont de signe contraire; le rapport $\frac{OA}{OA''}$ est négatif.

**Note.** La dénomination *centre de similitude* et la considération de ces centres est due à EULER (*Actes de Saint-Pétersbourg*, page 154. — Cit. BALTZER, *Die Elemente der Mathematik*, § 7, n° 3).

**1145. Th.** *Toute droite menée par le centre d'homothétie de deux polygones coupe les côtés de ces polygones ou leur prolongement en des points homologues, et détermine des segments proportionnels.*

Réciproquement. *Toute droite qui joint deux points homologues est un axe de similitude, et passe par le centre de similitude.*

**1146. Définitions.** 1° *Figures planes directement semblables.* Deux figures situées dans un même plan sont directement semblables, lorsqu'elles correspondent à deux figures directement égales (fig. 686 *bis*).

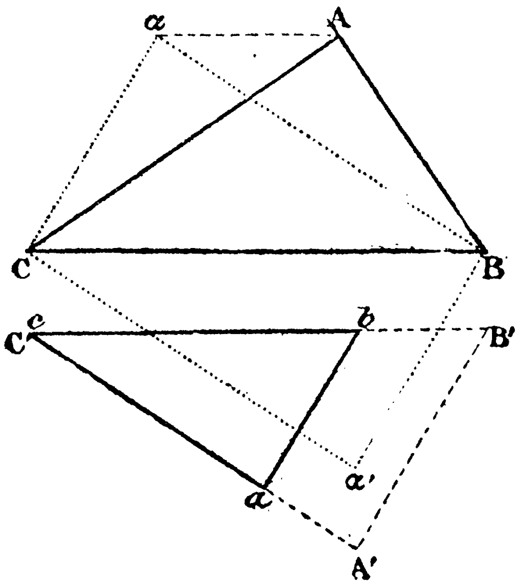


Fig. 686 *bis*.

2° *Centre de similitude* ou *point double.* On nomme centre commun de similitude, ou point double, de deux figures directement semblables, un point commun à ces deux figures; c'est-à-dire un point tel qu'en le joignant à deux points quelconques de l'une des figures et aux points homologues de l'autre figure, on obtienne deux triangles directement semblables. En un mot, le point double est le point commun aux deux plans considérés; il est constitué par la coïncidence de deux points homologues.

Les distances du point double à deux points homologues quelconques sont entre elles dans le rapport de similitude des figures semblables.

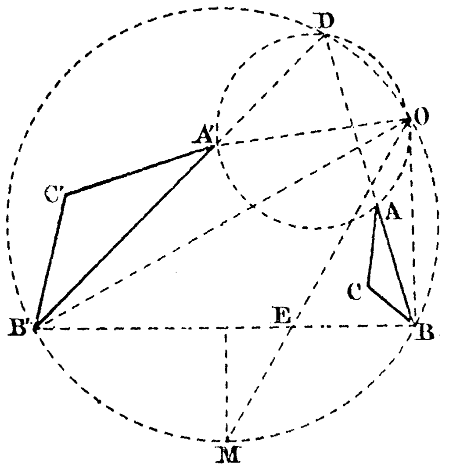


Fig. 687.

**Théorème 330. — I.**

**1146 a.** *Deux figures planes directement semblables admettent un centre commun de similitude, ou point double des deux figures.*

Il suffit de considérer deux segments homologues, soit AB et A'B'. Par le point de concours D des côtés et par deux points homologues A, A', puis B, B', faisons passer des circonférences; le second point commun O répond à la question, car les triangles ABO, A'B'O, sont directement semblables ; en effet, les angles AOA′, BOB′, sont respectivement égaux à l'angle D, donc l'angle AOB = A′OB′ ; en outre, les suppléments des angles obtus BAO, B′A′O, ont même mesure demi-arc DO.

**1146 b.** *Remarque.* Pour déterminer le point O avec plus de précision, on peut mener la bissectrice MEO de l'angle BOB′ ; il suffit de diviser BB′ en segments proportionnels à BO et B′O, c'est-à-dire aux segments donnés AB et A′B′ ; le segment est déterminé par l'intersection de la circonférence BDB′ et de la bissectrice ME ; on sait que M est le point milieu de l'arc BMB′.

**Problème 330. — II.**

**1146 c.** *Amener deux figures planes directement semblables à être homothétiques.*

On détermine le point double O ; puis, par une rotation convenable, on amène A′ en A″ sur OA, B′ en B″, etc.

L'homothétie est directe, si A″ est sur OA ; elle est inverse, si A″ est sur le prolongement du segment rectiligne OA.

**Théorème 330. — III.**

**1146 d.** *Lorsqu'on a deux figures directement semblables dans un même plan, et qu'on divise dans le même rapport en* A″, B″, C″, *etc., les droites* AA′, BB′, CC′, *etc., qui joignent deux à deux les points homologues, on obtient une figure* A″B″C″... *semblable aux deux premières.*

Il suffit de considérer deux triangles semblables ABC A′B′C′.

A l'aide d'une translation, amenons A′B′C′ en $AB'_1C'_1$, divisons BB′ et

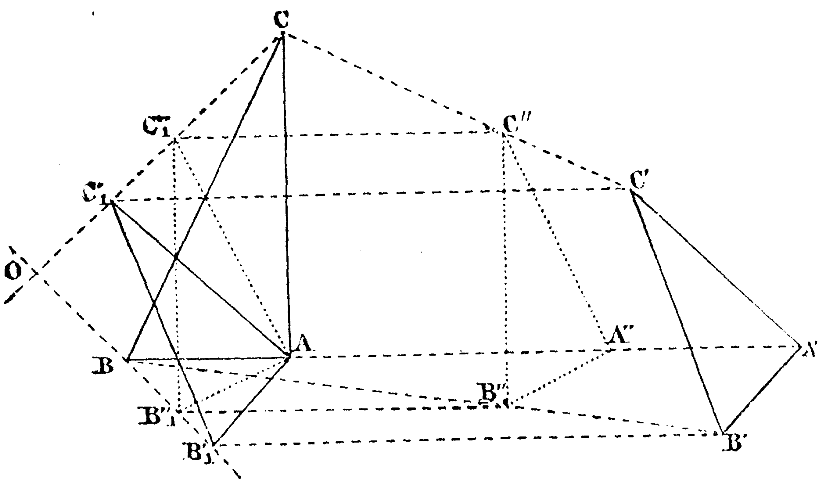



Fig. 688.

$BB'_1$, puis, CC′ et $C'C'_1$ dans le rapport voulu, et joignons les points homologues, le triangle A″B″C″ égale $AB''_1C''_1$ ; or celui-ci est semblable aux triangles donnés, donc il en est de même de A″B″C″.

**1146 e.** *Remarques.* 1° La question précédente conduit au théorème suivant, fort remarquable :

*Deux figures directement semblables, situées dans un même plan, peuvent être considérées comme étant deux positions différentes d'une même figure, invariable de forme, mais variable de grandeur, et dont tous les points glissent sur des droites.*

2° Parmi toutes les trajectoires que l'on peut faire décrire aux divers points d'une figure A'B'C' pour qu'elle arrive à coïncider avec la figure semblable ABC, il convient de mentionner la spirale logarithmique (voir ci-après, n° 2509).

3° Le théorème précédent (n° 1146 d) peut être considéré comme l'extension de celui qui a rapport à deux figures directement homothétiques (n° 1143).

4° Si l'on construit des triangles semblables $A\alpha A'$, $B\beta B'$, $C\gamma C'$, le triangle $\alpha\beta\gamma$ est semblable aux triangles donnés. (LAISANT, *Mathesis*, 1894, p. 164, n° 12.)

### Théorème 331.

1147. *Deux polygones semblables,* ABCD, A'B'C'D', *placés d'une manière quelconque sur un plan, ont un centre de similitude.*

Il faut prouver qu'on peut trouver un point O tel que :

$$\frac{AO}{A'O}=\frac{BO}{B'O}=\frac{CO}{C'O}, \text{ etc.}$$

et que l'angle $AOA' = BOB' = COC' = DOD'$, etc.

Prolongeons deux côtés homologues AB, A'B'; faisons passer une circonférence par AMA' et une autre par BMB'.

Ces deux circonférences se coupent en un point O qui est le point demandé. En effet, à cause des quadrilatères inscrits AOA'M, BOB'M, les angles AOA', BOB' sont égaux comme ayant le même supplément M; donc l'angle $AOB = A'OB'$.

D'ailleurs l'angle OAB égale OA'B', car ils ont le même supplément OA'M.

Ainsi les triangles OAB et OA'B' sont semblables, car ils sont équiangles ; d'où

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{m}{n}, \text{ rapport de similitude.}$$

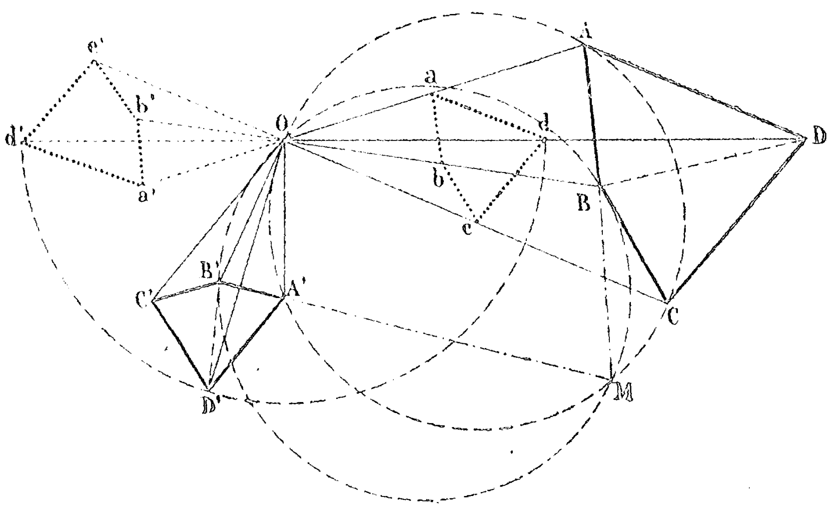



Fig. 689.

Mais on a aussi : $\frac{AD}{A'D'}=\frac{m}{n}=\text{donc } \frac{OA}{OA'}$,

et l'angle $BAD = B'A'D'$, car les triangles BAD, B'A'D' sont semblables par construction.

Ainsi les triangles AOD, A'OD' sont semblables comme ayant un angle égal $A = A'$ compris entre côtés homologues proportionnels, d'où

$$\text{l'angle}\quad AOD = A'OD' \quad\text{et}\quad \frac{OD}{OD'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{m}{n}.$$

Il en serait de même pour deux autres sommets homologues quelconques; donc O peut être considéré comme le centre de similitude des polygones donnés.

$$\frac{AB}{A'B'} \quad\text{ou}\quad \frac{m}{n} \quad\text{est le rapport de similitude.}$$

Les rayons vecteurs homologues tels que OA, OA', OB, OB' font entre eux un angle constant AOA' supplémentaire de l'angle M formé par deux côtés homologues quelconques.

**1147 a.** *Remarques.* 1° En faisant tourner A'B'C'D' de manière à l'amener en *abcd*, on obtient l'homothétie directe, et en l'amenant en *a'b'c'd'*, on obtient l'homothétie inverse. (Voir n° 1125, 2e *démonstration.*)

2° En prolongeant deux autres côtés homologues, par exemple BC et B'C' se coupant en un point N, les cercles BNB', CNC' passeraient par le point O déjà obtenu.

3° Le *centre de similitude* de deux polygones semblables est aussi nommé *point double* des deux figures semblables, parce que ce point est formé par la coïncidence de deux points homologues.

4° Les distances du point double à deux côtés homologues quelconques sont dans le même rapport que ces côtés. (Voir ci-après nos 2500 et suiv.)

5° Lorsque les figures données sont inversement semblables, elles admettent un axe de symétrie et on ne peut les rendre homothétiques qu'en faisant tourner l'une d'elles, *dans l'espace*, autour de cet axe de symétrie. Le *point double*, ou *centre de similitude*, se trouve sur la *droite double* qui est l'axe de symétrie (voir nos 2500 et suivants).

### Théorème 331. — I.

**1148.** *On joint un point* O *à tous les sommets d'un polyogne* ABCD ; *on forme des angles constants* AOA', BOB', *et l'on prend* $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{m}{n}$, *rapport donné ; on obtient ainsi un polygone* A'B'C'D' *semblable au premier.*

Ce théorème se déduit du précédent (n° 1147). Pour le démontrer, on peut considérer en premier lieu que les points *a, b, c, d* sont situés sur le prolongement de AO, BO,... puisque la figure *abcd* est amenée à la position A'B'C'D' par une rotation autour du point O (n° 1125, 2e D).

### Théorème 331. — II.

**1149.** *Les trois centres de similitude de trois polygones homothétiques, pris deux à deux, sont en ligne droite.*

Soit M le centre de similitude des polygones A et B, N celui de A et C. Il faut prouver que la droite MN passe par le point O, centre de similitude de B et C.

La ligne MN, passant par M, est un axe de similitude pour A et B (nº 1145); passant par N, elle est un axe de similitude pour A et C; donc MN est un axe de similitude pour B et C, et doit passer par leur centre O.

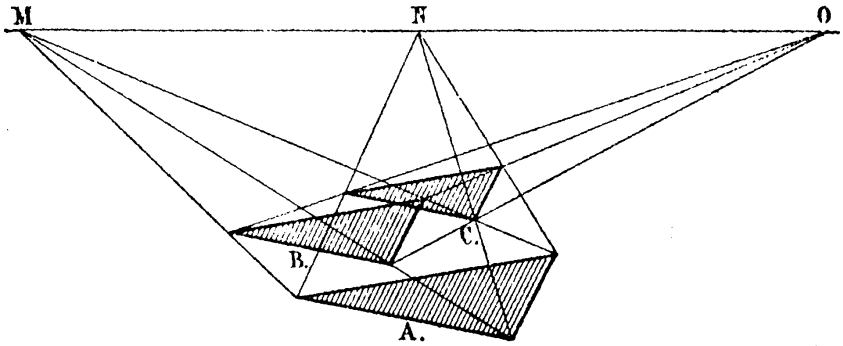



Fig. 690.

*Remarque.* La proposition peut aussi se démontrer à l'aide des transversales. (G., nº 821.)

Les trois centres de similitude sont externes, ou bien deux sont externes et l'autre interne.

## Figures planes inversement semblables.

**1150. Définition.** Deux figures situées dans un même plan sont inversement ou indirectement semblables lorsqu'elles correspondent à deux figures inversement égales (nº 771, etc.).

L'étude des figures inversement semblables est très utile pour mieux connaître les propriétés des figures inversement égales.

### Théorème 332.

**1150 a.** *Les bissectrices des angles formés par les côtés homologues de deux figures planes inversement semblables sont parallèles entre elles.*

Même démonstration que pour le théorème relatif à deux figures inversement égales (nº 771 **a**).

### Théorème 332. — I.

**1150 b.** *Le lieu des points qui divisent les droites de jonction des couples de points homologues de deux figures inversement semblables, dans le rapport de similitude, est une droite parallèle aux bissectrices des angles formés par les côtés homologues.*

Procédons d'une manière analogue à celle qu'on a employée pour deux figures inversement égales (nº 771 **c**).

Divisons AA′ en parties proportionnelles aux segments AB, A′B′; par le point M, menons MD égale et parallèle à AB, MD′ égale et parallèle à A′B′, puis joignons D à D′.

Prouvons que le point N divise BB' en parties proportionnelles aux segments considérés, et que MN est parallèle aux bissectrices des angles formés par les côtés homologues.

Les triangles semblables BDN, B'D'N, donnent :

$$\frac{BN}{B'N} = \frac{DN}{D'N} = \frac{BD}{B'D'},$$

$$\text{c'est-à-dire} = \frac{AB}{A'B'}.$$

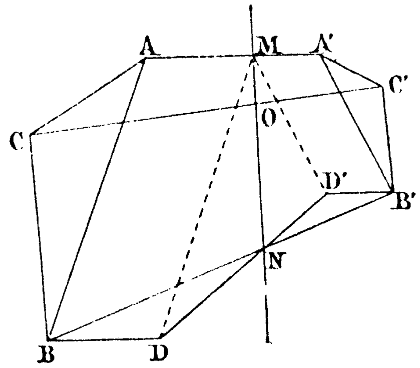


Fig. 691.

En outre, MN est bissectrice de l'angle M, puisque les segments DN, D'N, sont dans le même rapport que les côtés ; ainsi *la droite* MN *qui joint les points de divisions proportionnelles des droites de jonction des points homologues, est parallèle aux bissectrices des angles formés par les côtés homologues* AB, A'B'; AC, A'C', etc.

**Théorème 332. — II.**

**1150 c.** *Deux figures planes inversement semblables admettent une droite double, c'est-à-dire deux droites homologues superposées.*

La droite MN, qui divise AA', BB', CC' dans le rapport de similitude (fig. 691), considérée comme appartenant à l'une des figures, a cette même droite pour homologue par rapport à la seconde figure, et les points homologues sont dans la même direction.

**1150 d.** *Remarques.* 1° La droite des divisions proportionnelles, ou droite double, n'est pas composée de points doubles, car les deux figures données n'en ont qu'un seul ; mais il convient de donner quelques détails sur les ponctuelles semblables.

2° On peut considérer la droite double MN comme l'intersection de deux plans formant entre eux un angle de 180 degrés.

3° Les figures planes inversement semblables admettent un second couple de droites homologues superposées.

**1150 e. Définitions.** 1° *Ponctuelle.* On nomme *droite ponctuelle* ou simplement *ponctuelle*, une suite de points $a$, $b$, $c$,... en ligne droite.

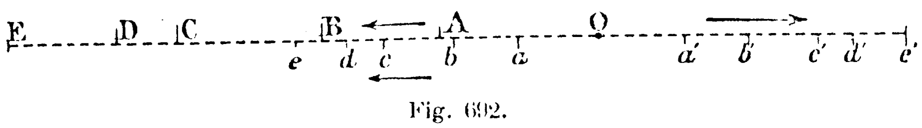


Fig. 692.

2° *Ponctuelles semblables.* Deux ponctuelles A, B, C,... et $a$, $b$, $c$,... sont semblables lorsqu'on a une suite de rapports égaux :

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD}, \text{ etc.}$$

Les ponctuelles A, B, C,... et $a$, $b$, $c$,... sont directement semblables lorsque les points homologues sont dans la même direction.

Les ponctuelles A, B, C,... et $a'$, $b'$, $c'$,... sont inversement semblables lorsqu'elles vont dans des sens différents.

3° *Point double.* Deux ponctuelles semblables, situées sur une même droite, ne peuvent avoir qu'un seul point commun, c'est-à-dire un point qui coïncide avec son homologue ; ainsi pour A, B, C,... et $a$, $b$, $c$,... on ne peut déterminer qu'un seul point O, qui donne :

$$\frac{aO}{AO} = \frac{ab}{AB}.$$

De même pour A, B, C,... et $a'$, $b'$, $c'$...

**Théorème 332. — III.**

**1150 f.** *Si l'on projette sur la droite double* MN (fig. 691) *les points homologues* A, B, C,... A', B', C',... *on obtient deux ponctuelles directement semblables*, car les ordonnées de A, B, C,... et celles de A', B', C',... sont entre elles dans le rapport de similitude, et il en est de même des distances des pieds de ces mêmes ordonnées; en désignant par $a$, $b$, $c$,... $a'$, $b'$, $c'$,... les projections des sommets, on aurait :

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{bc}{b'c'} = \frac{ca}{c'a'}, \text{ etc.} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Enfin les ponctuelles sont de même sens.

**1150 g.** *Remarque. Les droites homologues* AB, A'B', *etc., suffisamment prolongées, déterminent aussi sur la droite double* MN *des ponctuelles directement semblables.*

**Théorème 332. — IV.**

**1150 h.** *Deux figures planes inversement semblables admettent un point double. Les distances de ce point à deux points homologues quelconques sont dans le rapport de similitude des deux figures.*

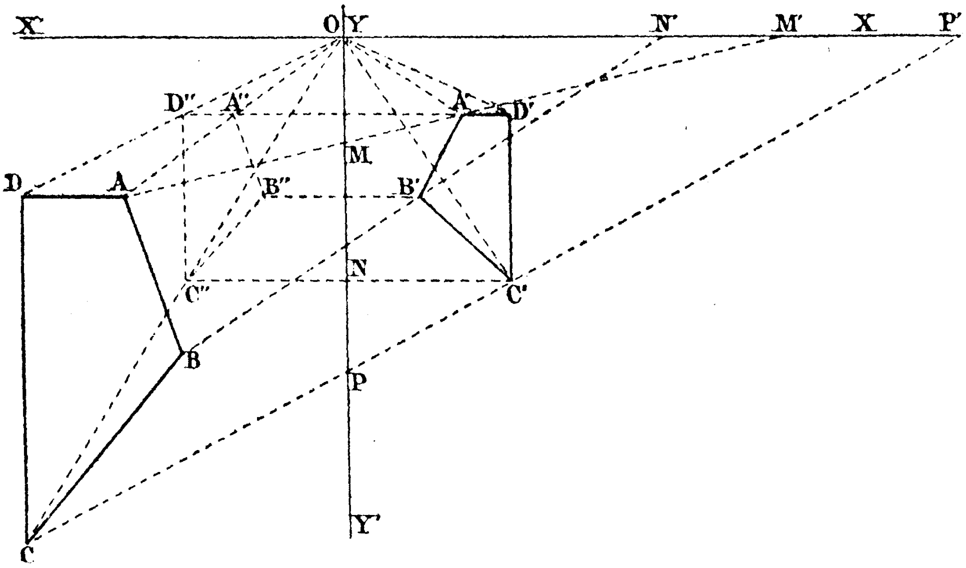



Fig. 693.

Déterminons MN, la droite des divisions proportionnelles et les points symétriques de A', B', C' par rapport à cette droite.

Les segments AB, A''B'' sont parallèles; les droites AA'', BB'', se coupent sur MN : le point O est le *point double*, car c'est un point de la figure ABC qui coïncide avec son homologue de la figure A'B'C'.

On a : $$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

**1150 i.** *Remarques.* 1° La droite OMN des divisions proportionnelles est bissectrice de tous les angles tels que AOA' formés par deux droites homologues.

2° Lorsque les figures données sont inversement égales, le *point double* est rejeté à l'infini.

### Théorème 332. — V.

**1150 j.** *Deux figures planes inversement semblables admettent deux droites homologues inversement superposées.*

Par le point double (fig. 693) menons une perpendiculaire à la droite double OMN; la perpendiculaire XOX', ainsi menée, correspond à deux droites homologues inversement superposées; car les lignes homologues des figures données déterminent sur XOX' des ponctuelles inversement semblables (n° 1150 **e**, 2°).

**1150 k.** *Remarques.* 1° La droite XOX' détermine sur AA', BB', etc., des segments soustractifs M'A, M'A' dans le rapport de similitude des figures données. On peut donc dire que YY' est la *droite des divisions directement proportionnelles*, et que XOX' est la *droite des divisions inversement proportionnelles*, des figures données.

2° Les deux droites doubles XX', YY' sont perpendiculaires l'une à l'autre; la première (n° 1150 **b**) est parallèle aux bissectrices intérieures des angles formés par les côtés homologues, et la seconde est parallèle aux bissectrices extérieures.

Nous nommons *bissectrice intérieure* de l'angle formé par deux segments rectilignes, la bissectrice de l'angle aigu, ou obtus, formé par deux segments de même direction par rapport au sommet de l'angle.

3° Dans le cas des figures inversement égales, la droite XOX' passe à l'infini.

4° *Il est nécessaire d'étudier les figures semblables pour bien connaître les propriétés des figures égales*, de même, comme on le sait depuis Poncelet, qu'il faut étudier l'intersection de deux coniques d'un même plan pour bien connaître celle de deux circonférences.

### Cas particulier 332. — VI.

**1150 l.** *Deux circonférences d'un même plan peuvent être considérées d'une infinité de manières, comme étant deux figures semblables, soit directement, soit inversement* (fig. 694).

Il suffit, en effet, de choisir deux points correspondants quelconques A et A' sur ces circonférences ; puis, à partir de ces deux origines, de prendre des arcs semblables deux à deux : AB et A'B', etc.; les circonférences sont des figures directement semblables, si l'on parcourt AB, A'B' dans le même sens; elles seront inversement semblables si les arcs AB, A'B' sont de sens différents.

Si l'on désigne par I le centre intérieur d'homothétie, et par E le centre extérieur, le cercle décrit sur le diamètre IE est le lieu des points dont les distances aux centres O et O′ sont dans le rapport de similitude (n° 61).

### Théorème 332. — VII.

1150 m. *Le point double de deux circonférences considérées comme directement semblables pour des origines données* A *et* A′, *se trouve sur le cercle* EI *des distances proportionnelles.*

Soient les circonférences de centre O et O′ parcourues dans le même

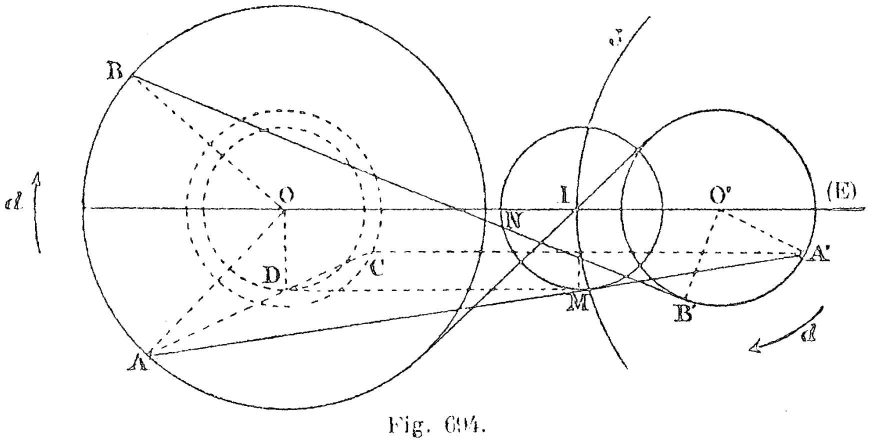



Fig. 694.

sens AB, A′B′; le point double du système est sur la circonférence IJE, car ses distances aux divers points homologues des figures directement semblables doivent être dans le rapport de similitude.

1150 n. *Remarques.* 1° *Si l'on divise* AA′ *en segments additifs dans un rapport donné, par exemple dans le rapport de similitude, le lieu du point* M *est une circonférence ayant pour centre le point intérieur* I *de similitude.*

Ce n'est qu'un cas particulier d'une question précédente (n° 1146 d, ou G., n° 1074); néanmoins il est bon de l'établir directement. En décrivant du centre O une circonférence égale à O′, menant la parallèle A′C divisant AC dans le rapport voulu, on reconnaît que OD a une valeur constante, car les lignes telles que AC ont une longueur constante; donc...

2° *Si l'on divise* AA′ *en segments soustractifs, le lieu est une circonférence ayant pour centre le point extérieur* E *de similitude.*

3° Les remarques 1° et 2° sont des cas particuliers de la proposition ci-après :

*Lorsqu'on a deux figures directement semblables situées dans un même plan, et qu'on divise dans un même rapport en* A″, B″, *etc., les droites* AA′, BB′, *etc., qui joignent les sommets homologues, on obtient un polygone* A″B″C″..., *semblable aux deux premiers.*

**Note.** Le cercle EI des *distances proportionnelles* est encore appelé : *Cercle de similitude,* ou *Cercle bissecteur* (d'après M. J. Neuberg. Voir compte rendu de la 4e édition des *Exercices de géométrie,* dans *Mathesis,* 1908, pages 152 à 154).

**Théorème 332. — VIII.**

**1150 o.** *Deux circonférences du même plan, considérées comme deux figures inversement semblables, admettent : 1° deux couples de droites homologues superposées perpendiculaires l'une à l'autre ;*

2° *Un point double placé sur le cercle* EI *des distances proportionnelles.*

1° (Voir *G.*, nos 1085 et suivants, ou *E. de G.*, nos 1150 **c**, **d**, etc.)

2° Le point de rencontre P des droites doubles est le point double du système : c'est le seul point commun aux deux figures inversement semblables. Le point double est sur le cercle EI des distances proportionnelles, car MN passe par le point I, et M'N' passe par le centre extérieur

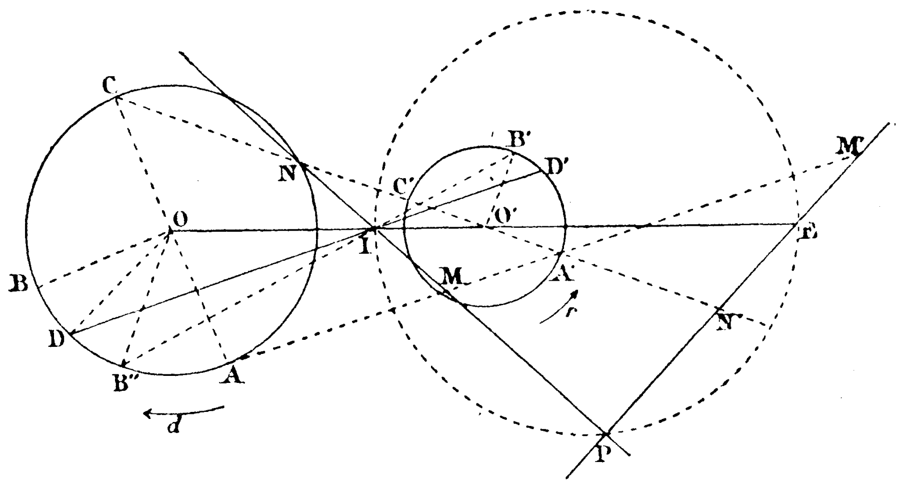



Fig. 695.

E ; en effet, menons B'IB'' et la bissectrice OD de l'angle BOB'', puis DID' ; les points D et D' divisent les arcs AB et A'B' dans le même rapport, ils appartiennent donc aux figures inversement semblables ; d'ailleurs ID et ID' sont dans le rapport de similitude, donc le point I appartient au lieu MN, de même pour E ; donc le point de concours P des deux lieux rectangulaires appartient au cercle décrit sur le diamètre EI.

**1150 p. Note.** Les théorèmes relatifs aux figures inversement égales, ou semblables (nos 771 et 1150), ont été publiés dès 1896, dans les *Compléments* de nos *Eléments de géométrie*, p. 508, etc.

Depuis, nous avons lu, dans *Mathesis* (1902, p. 85-89), un bel article de M. Neuberg *sur la similitude des cercles.*

## Relations numériques dans le Triangle.

**1151.** On peut trouver un grand nombre de relations numériques entre les côtés d'un triangle et les lignes principales telles que les hauteurs, les bissectrices, les médianes et les segments déterminés sur ces lignes par les divers points de concours auxquels elles peuvent donner lieu.

On emploie les triangles semblables, et on utilise aussi les relations déjà obtenues. (G., nos 245 et suivants.) On a recours très fréquemment au *Théorème de Pythagore.* (G., nos 247-249.)

**Note.** * PYTHAGORE, né à Samos en 569 av. J.-C., mort en 470, fut disciple de THALÈS. Il séjourna pendant vingt ans en Égypte, puis il fonda l'*École italique.* Il s'occupa beaucoup de la théorie des nombres. En géométrie on lui doit le théorème du carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

Le mot *hypoténuse* veut dire *sous-tendante,* c'est-à-dire ligne qui sous-tend l'angle droit du triangle rectangle.

Les Grecs nommaient *cathètes* les côtés de l'angle droit; les Italiens on conservé cette dénomination. (Voir *la Géométrie grecque,* par Paul TANNERY; Essai critique publié en 1887; in-4° de 188 pages.)

### Théorème 333.

**1151 a.** *Deux hauteurs quelconques d'un triangle sont inversement proportionnelles aux bases correspondantes.*

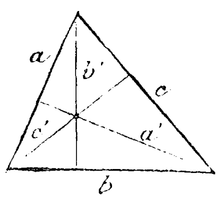


Fig. 696.

Si l'on appelle $a$ et $b$ deux côtés quelconques, $a'$ et $b'$ les hauteurs correspondantes, les triangles rectangles qui ont respectivement pour côtés $a$, $b'$ et $b$, $a'$ sont semblables, car ils ont un angle aigu commun; donc $\dfrac{a'}{b'} = \dfrac{b}{a}$.

Après l'étude du livre IV, on peut donner cette seconde démonstration : le double de l'aire du triangle est donné par $aa'$ ou $bb'$;

donc $aa' = bb'$; d'où $\dfrac{a'}{b'} = \dfrac{b}{a}$.

### Théorème 334.

**1152.** *Deux côtés quelconques* a *et* b *d'un triangle sont entre eux comme leurs projections l'un sur l'autre.*

Soient $a'$ la projection du côté $a$ sur $b$, et $b'$ la projection de $b$ sur $a$. Les triangles rectangles CDA et CBE sont semblables, car ils ont un angle aigu commun en C. On a donc la proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

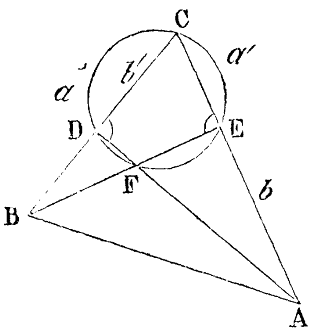


Fig. 697.

### Théorème 334. — I.

**1153.** *Le produit* AC . AE *d'un côté par le segment déterminé par la hauteur abaissée du sommet* B, *égale le produit* AD . AF *de la hauteur* AD *par le segment déterminé par la hauteur abaissée du sommet* B.

Le quadrilatère CDFE est inscriptible; on peut appliquer le théorème connu. (G., no 261.)

(Voir aussi *Méthodes,* no 292, **f.**)

**Théorème 334. — II.**

**1154.** *Les trois produits obtenus en multipliant l'un par l'autre les deux segments d'une même hauteur sont égaux.*

(*Méthodes*, n° 292, g.)

**Note.** *Cercle des hauteurs.* On nomme ainsi le cercle ayant pour centre l'orthocentre même du triangle et pour rayon la moyenne proportionnelle des segments de chaque hauteur, car les trois produits sont égaux entre eux.

Le *cercle des hauteurs* jouit de diverses propriétés signalées dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* par Steiner, Paul Serret, J. Mention (1849, p. 453 ; 1850, p. 5 ; 1864, p. 535).

Le cercle des hauteurs est le lieu des centres des hyperboles équilatères assujetties à être tangentes aux côtés d'un triangle; théorème de J. Mention (*N. A.*, 1865, p. 30).

**Théorème 334. — III.**

**1155.** *D'un point donné, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés d'un angle, on prolonge ces perpendiculaires de manière à rencontrer les deux côtés de cet angle ; démontrer que les côtés de l'angle sont divisés en parties inversement proportionnelles et qu'il en est de même des deux perpendiculaires.*

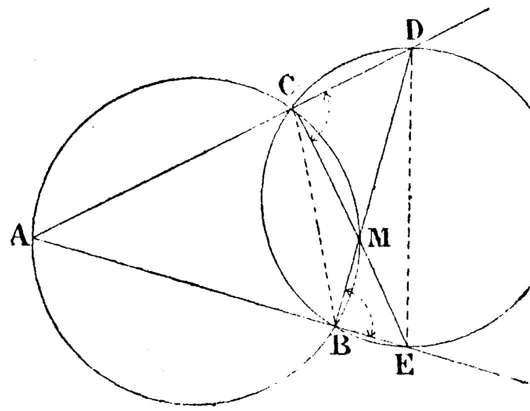



Fig. 698.

Soit M le point donné.

Le quadrilatère BCDE est inscriptible, donc

$$AB . AE = AC . AD$$

et $\quad MB . MD = MC . ME$

**Corollaire** On a aussi :

$$DA . DC = DM . DB \quad \text{et} \quad EA . EB = EM . EC.$$

**Théorème 334. — IV.**

**1155 a.** *Les bissectrices intérieures d'un triangle se divisent mutuellement en deux segments. 1° Les segments sont entre eux comme la somme des côtés adjacents au grand segment est au côté opposé. 2° Le grand segment est à la bissectrice entière comme la somme des côtés adjacents est au périmètre du triangle. 3° Dans les triangles de même périmètre la projection de la bissectrice sur un des côtés adjacents est une quantité constante, lorsque la somme de ces côtés adjacents est constante.*

Soit I le centre du cercle inscrit.

1° A cause des bissectrices BI, CI, on a :

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD};$$

d'où

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB + AC}{BC}. \tag{1}$$

2° De (1) on déduit :

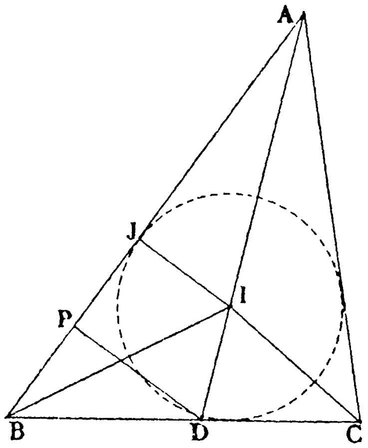



Fig. 698 *bis*.

$$\frac{AI}{AD} = \frac{AB + AC}{AB + AC + BC} = \frac{b + c}{2p}. \quad (2)$$

3° Soit IJ le rayon du point de contact et AP la projection de la bissectrice sur AB. On a :

$$\frac{AP}{AJ} = \frac{AD}{AI} = \frac{2p}{b + c},$$

$$AP = AJ \frac{2p}{b + c};$$

or $\qquad AJ = p - a, \qquad$ (n° 743)

donc $\qquad AP = \frac{2p(p - a)}{b + c};$

or cette quantité est constante, lorsque la somme $b + c$ est constante.

**Théorème 335.**

**1156.** *Lorsqu'on élève une perpendiculaire sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle, le produit* PM . PN *des distances de son pied* P *aux points* M *et* N *où elle coupe les côtés de l'angle droit, égale le produit des segments déterminés sur cette hypoténuse par le point* P.

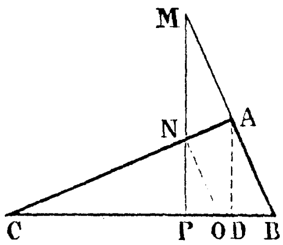



Fig. 699.

En effet, les triangles rectangles PMB et PCN sont semblables, car les angles M et C sont égaux;

donc $\qquad \frac{PM}{PB} = \frac{PC}{PN};$

d'où $\qquad PM . PN = PB . PC.$

**1156 a.** *Remarques.* 1° Si on prend PM . PN = PB . PC et qu'on mène les droites BM, CN, le lieu des points d'intersection A est la circonférence décrite sur BC comme diamètre.

2° *On a les relations :*

$$MA . MB = MN . MP \quad \text{et} \quad NA . NC = NP . NM.$$

En effet, le quadrilatère ABPN est inscriptible ; il en est de même du quadrilatère non convexe ACPM.

**Théorème 335. — I.**

**1157.** *Lorsque, par le sommet* B *d'un triangle* ABC, *on mène* BD *qui coupe* AC *ou son prolongement de manière qu'on ait l'angle* CBD = CAB, *le côté* BD *est moyen proportionnel entre* AD *et* CD.

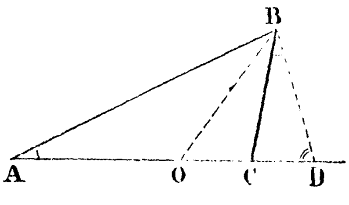



Fig. 700.

Les triangles ABD, BCD sont équiangles;

donc $\qquad \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{CD}; \quad BD^2 = AD . CD.$

**Théorème 336.**

**1158.** *Lorsque la différence des angles à la base d'un triangle égale un droit, la hauteur de ce triangle est moyenne proportionnelle entre les distances de son pied aux extrémités de la base.*

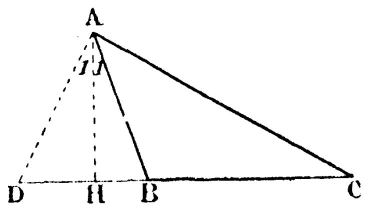


Fig. 701.

Soit $ABC - C = 90^o$.

Prenons $HD = HB$. On a :

$$\text{angle } HAD = HAB = C,$$

d'où $DAC = 90^o$;

donc $AH^2 = HD \,.\, HC = HB \,.\, HC$.

**Théorème 337.**

**1159.** *Dans tout triangle, les parallèles* x *et* y, *menées à deux côtés* AB, AC *par un point quelconque du troisième, donnent une somme constante lorsqu'on multiplie ces parallèles* x *et* y *par des coefficients* n *et* m *dont le rapport est inverse du rapport de* AB *à* AC. *Ainsi, pour* $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$, *on aura* $nx + my =$ *constante.*

(Voir *Méthodes*, n° 271.)

**Théorème 337. — I.**

**1160.** *Par un point quelconque* D *de la base d'un triangle, on mène des parallèles aux autres côtés ; la somme des rapports obtenus en divisant chaque droite ainsi menée, par le côté qui lui est parallèle, est une quantité constante.*

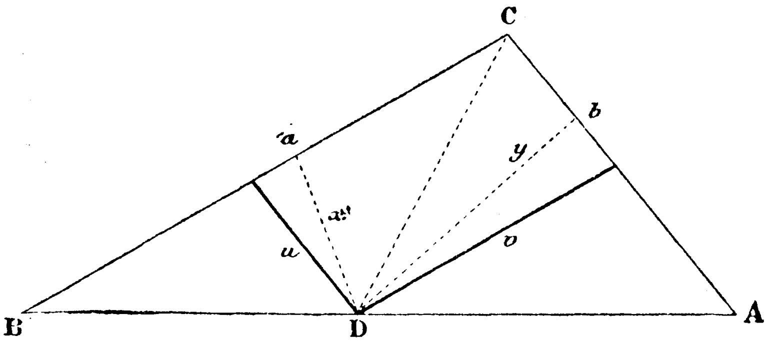


Fig. 702.

Soient $u$ et $v$ respectivement parallèles aux côtés AC, BC ; on a :

$$\frac{u}{b} = \frac{BD}{BA}\,; \quad \frac{v}{a} = \frac{DA}{BA}\,;$$

d'où
$$\frac{u}{b} + \frac{v}{a} = \frac{BD + DA}{BA} = 1.$$

La relation précédente est l'équation de la droite AB [par] rapport aux axes coordonnés CA, CB.

**Théorème 337. — II.**

**1160 a.** *Par un point quelconque de la base d'un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les autres côtés; la somme des rapports obtenus en divisant chaque perpendiculaire par le côté qui ne lui est pas relatif, est une quantité constante.*

On a : $$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=\text{constante}. \qquad (2)$$

Car les perpendiculaires $x$ et $y$ sont directement proportionnelles aux droites $u$ et $v$.

La constante dépend de l'angle C. Il est facile de la calculer, car

$$u=\frac{x}{\sin C}, \quad v=\frac{y}{\sin C},$$

donc la relation (1) $$\frac{u}{b}+\frac{v}{a}=1,$$

devient : $$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=\sin C,$$

ou $$ax+by=ab\sin C=2S, \qquad (3)$$

en représentant par S l'aire du triangle donné.

On arrive d'ailleurs directement et rapidement à la relation (3) en procédant comme il suit : $ax$ et $by$ représentent le double de l'aire des triangles CLB, CDA. Donc

$$ax+by=2S.$$

**Théorème 337. — III.**

**1161.** *Dans un triangle isocèle* ABC *ayant* BC *pour base, on abaisse la perpendiculaire* CD *sur un des côtés égaux; prouver que la somme des carrés des trois côtés du triangle égale* $BD^2+2DA^2+3CD^2$. (*Questions proposées sur les Éléments de géométrie*, par P.-F. Compagnon, n° 255.)

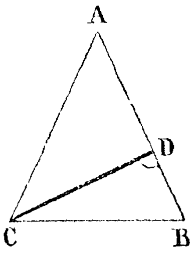


Fig. 703.

$$CB^2=CD^2+BD^2$$
$$AC^2=CD^2+AD^2$$
$$AB^2 \text{ ou } AC^2=CD^2+AD^2$$
$$\overline{\phantom{AB^2+AC^2+CB^2=BD^2+2AD^2+3CD^2}}$$
$$AB^2+AC^2+CB^2=BD^2+2AD^2+3CD^2$$

**Théorème 338.**

**1162.** 1° *La différence des carrés de deux côtés quelconques d'un triangle égale la différence des carrés de leurs projections sur le troisième côté.*

2° *La somme de deux côtés quelconques d'un triangle, multipliée par leur différence, égale la somme de leurs projections sur le troisième côté, multipliée par la différence de ces mêmes projections.*

Soient $a$ et $b$ les côtés considérés et $a'$, $b'$ leurs projections respectives sur le troisième côté; on a :

1° $$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2;$$

2° $$(a+b)(a-b) = (a'+b')(a'-b').$$

**Théorème 339.**

**1163.** *La différence des carrés de deux côtés quelconques d'un triangle égale deux fois le troisième côté, multiplié par la projection, sur ce même côté, de la médiane comprise entre les deux premiers.*

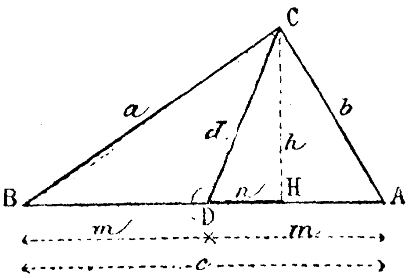


Fig. 704.

En effet, dans le triangle CDB, on a :

$$a^2 = d^2 + m^2 + 2mn; \qquad (1)$$

dans le triangle CDA,

$$b^2 = d^2 + m^2 - 2mn; \qquad (2)$$

d'où en soustrayant :

$$a^2 - b^2 = 4mn = 2cn.$$

*Remarque.* On peut écrire : $n = \dfrac{a^2 - b^2}{2c}$; donc, pour une différence constante $a^2 - b^2 = k^2$, le segment $n$ est constant; ainsi le lieu des points C est une perpendiculaire HC telle que $n = \dfrac{k^2}{2c}$.

Ce résultat est bien connu (n° 71); mais il est utile de montrer qu'on peut y parvenir par différentes voies.

**Théorème 339. — I.**

**1164.** *Deux triangles peuvent avoir, sans être égaux, les trois angles égaux et deux côtés égaux chacun à chacun.*

Dans ce cas, les côtés $x$, $y$, $z$ du premier et les côtés homologues $y$, $z$, $u$ du second sont en progression par quotient; on a :

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{u}.$$

La raison de la progression doit être comprise entre

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

mais à l'exception de l'unité.

On peut prendre pour côtés homologues :

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 12 | 18 |
| 12 | 18 | 27 |

**Note.** Ce théorème, d'apparence paradoxale, est dû à M. GELIN. (*Nouvelle correspondance mathématique,* 1876, p. 338.)

* M. l'abbé GELIN, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy ; auteur de plusieurs ouvrages mathématiques très estimés,

**Théorème 340.**

**1165.** *Lorsque deux triangles rectangles sont semblables, le produit des hypoténuses est égal à la somme des produits des côtés homologues.* (DOSTOR, *N. A.*, 1869, p. 433.)

Soient $a$, $b$, $c$ les côtés d'un triangle; $a'$, $b'$, $c'$ ceux du second. Si $m$ est le rapport de similitude des côtés des deux triangles, on aura :

$$a' = am; \quad b' = bm; \quad c' = cm.$$

Or la relation à démontrer, c'est-à-dire :

$$aa' = bb' + cc',$$

peut se représenter par $\quad aam = bbm + ccm,$

ou $\quad a^2 = b^2 + c^2,\quad$ égalité connue;

donc la relation est démontrée.

**Note.** La relation 1165 est due à M. DOSTOR.

* M. DOSTOR, professeur à l'Université catholique de Paris en 1896, auteur de nombreux articles publiés par les *Nouvelles Annales de mathématiques,* les *Archives de mathématiques et de physique,* etc. On lui doit aussi l'ouvrage suivant : *Éléments de la théorie des déterminants.*

**Théorème 340. — I.**

**1166.** *Si, du milieu d'un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, la différence des carrés des segments formés sur l'hypoténuse égale le carré de l'autre côté de l'angle droit.*

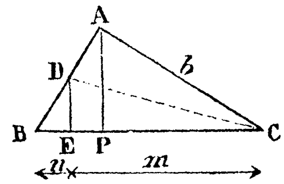


Fig. 705.

Soit $AD = DB$ et $EC = m$, $BE = n$;

$$m^2 = DC^2 - DE^2,$$
$$n^2 = BD^2 - DE^2;$$

d'où $$m^2 - n^2 = DC^2 - BD^2 = DC^2 - AD^2 = b^2.$$

**Théorème 340. — II.**

**1166 a.** *Dans un triangle rectangle* ABC, *on abaisse la hauteur* AD *sur l'hypoténuse, et l'on inscrit un cercle dans chacun des trois triangles obtenus. Prouver que la distance des centres des cercles inscrits dans les triangles partiels, égale le côté du carré inscrit au cercle du triangle* ABC. (L. A. SILVA.)

Les lignes qui joignent le point de contact de l'hypoténuse et du cercle inscrit dans ABC aux trois centres sont égales entre elles, les deux extrêmes sont à angle droit; donc...

*Remarque.* La figure formée par les trois triangles rectangles et leurs cercles inscrits conduit à divers théorèmes élémentaires. Voir aussi les nos 742 et 1599.

**1166 b. Note.** La question ci-dessus est tirée d'une intéressante publication : *Revista de Matematicas* (1904, page 245). Cette revue, publiée à *Santiago du*

*Chili*, a pour directeur et collaborateurs d'éminents professeurs des grandes écoles du Gouvernement : MM. Luis, A. Silva, Tafelmacher, Poenich, Mardones, Olavarrieta et Carlos Wargny.

**Théorème 340. — III.**

**1167.** *Pour avoir la moyenne proportionnelle entre deux lignes données* a *et* b, *on peut procéder comme il suit :*

*Sur une droite, on prend une longueur* AB *égale à* b, *la plus petite des lignes données, puis on prend* ABC *et* BAD $=$ a. *Des points* C *et* D *comme centres avec* a *pour rayon, on décrit des arcs qui se coupent au point* O. *La ligne* OA $=$ OB *est la moyenne proportionnelle demandée.* (*N. A.*, 1857, p. 125.)

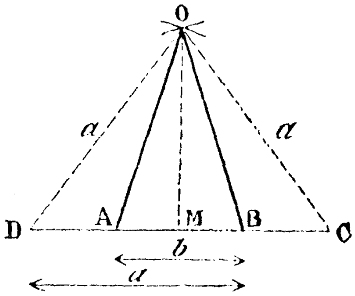


Fig. 706.

Abaissons la perpendiculaire OM.

$$AO^2 = AM^2 + OM^2;$$

$$AM^2 = \frac{b^2}{4}, \quad OM^2 = OD^2 - DM^2 = a^2 - \left(a - \frac{b}{2}\right)^2;$$

$$OM^2 = a^2 - a^2 + ab - \frac{b^2}{4} = ab - \frac{b^2}{4};$$

donc $\quad AM^2 + OM^2 \quad$ ou $\quad AO^2 = ab.$

**1167 a. Note.** Cette construction, indiquée par Gouzy, de Lausanne, en 1857 (*N. A.*, p. 125), puis par Bordage, en 1885 (*J. M. E. et S.*, p. 75), a été publiée par Wallis en 1685; elle est due à Thomas Strode. (Voir *J. M. E.* et *S.*, 1885, page 159.) Ce dernier renseignement est dû à M. Mackay, d'Édimbourg.

Une construction qu'on peut rattacher à la précédente et qui a donné lieu à diverses notes se trouve dans *Mathesis*, 1892, p. 192, nº 11 ; puis pages 250 et 275.

L'avantage que présente la construction ci-dessus est d'exiger moins d'opérations graphiques que la construction classique (G., nº 297).

* John Wallis (1616-1703). On lui doit un *Traité analytique des coniques* et l'*Arithmétique des Infinis*.

**Théorème 341.**

**1168.** *Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, les cubes des côtés de l'angle droit sont entre eux comme les projections des segments de l'hypoténuse sur les mêmes côtés.*

Soient $AC = b$, $AB = c$, $DC = m$, $DB = n$, $CE = p$, $BF = q$.

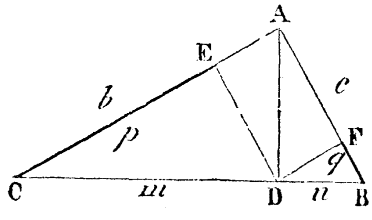


Fig. 707.

On a : $\dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{m}{n}$ ou $\dfrac{b^4}{c^4} = \dfrac{m^2}{n^2}$.

Or les triangles semblables ACD, DEC donnent :

$$\frac{m}{b} = \frac{p}{m}, \quad m^2 = bp;$$

de même $\dfrac{n}{c} = \dfrac{q}{n}, \quad n^2 = cq;$

donc $\dfrac{b^4}{c^4} = \dfrac{bp}{cq}$, d'où $\dfrac{b^3}{c^3} = \dfrac{p}{q}$.

**Théorème 341. — I.**

**1169.** *Soit* m *la projection de* b *sur l'hypoténuse,* $m_1$ *la projection de* m *sur* b, $m_2$ *celle de* $m_1$ *sur l'hypoténuse, etc.; on a :*

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{m}{n}; \quad \frac{b^3}{c^3} = \frac{m_1}{n_1}; \quad \frac{b^4}{c_4} = \frac{m_2}{n_2} \dots; \quad \frac{b^k}{c^k} = \frac{m_{k-2}}{n_{k-2}}.$$

**Théorème 342.**

**1170.** *La somme des carrés des trois médianes d'un triangle égale les $^3/_4$ de la somme des carrés des trois côtés.*

Soient $d, e, f$ les médianes qui aboutissent respectivement aux côtés $a, b, c$.

On sait que la somme des carrés de deux côtés quelconques d'un triangle égale deux fois le carré de la médiane du troisième côté, plus la moitié du carré de ce troisième côté. (G., n° 254.)

Donc
$$2d^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2,$$
$$2e^2 + \frac{b^2}{2} = a^2 + c^2,$$
$$2f^2 + \frac{c^2}{2} = a^2 + b^2;$$

d'où $2(d^2 + e^2 + f^2) + {}^1/_2\,(a^2 + b^2 + c^2) = 2\,(a^2 + b^2 + c^2)$;

d'où $d^2 + e^2 + f^2 = {}^3/_4(a^2 + b^2 + c^2)$.

**Théorème 342. — I.**

**1171.** *La somme des carrés des médianes des triangles rectangles qui ont même hypoténuse est une quantité constante.*

Soit $a$ l'hypoténuse constante; $d$, la médiane correspondante, est la moitié de l'hypoténuse.

D'ailleurs $b^2 + c^2 = a^2$;

donc la formule (1170) $d^2 + e^2 + f^2 = {}^3/_4\,(a^2 + b^2 + c^2)$,

devient : $d^2 + e^2 + f^2 = \dfrac{3}{4}\,(2a^2)$;

d'où $d^2 + e^2 + f^2 = \dfrac{3}{2}\,a^2$ quantité constante.

**Théorème 342. — II.**

**1171 a.** *La somme des quatrièmes puissances des médianes d'un triangle est égale aux neuf seizièmes de celle des côtés.* (E. Cesaro, *Mathesis*, 1882, p. 115.)

Les équations connues qui donnent les carrés des médianes sont, comme on vient de le rappeler (nº 1170) :

$$\begin{aligned} 4d^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2, \\ 4e^2 &= 2c^2 + 2a^2 - b^2, \\ 4f^2 &= 2a^2 + 2b^2 - c^2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Élevant au carré ces trois égalités, additionnant membre à membre et simplifiant, on trouve :

$$16(d^4 + e^4 + f^4) = 9(a^4 + b^4 + c^4).$$

**1171 b.** *Remarque.* On a trouvé précédemment (nº 1170) :

$$4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2). \qquad (3)$$

En retranchant (2) de l'équation (3) élevée au carré, il vient :

$$16(d^2e^2 + e^2f^2 + f^2d^2) = 9(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Donc *la somme des produits deux à deux des carrés des médianes d'un triangle, égale les neuf seizièmes des produits deux à deux des carrés des côtés.*

**Note.** Les théorèmes précédents ont d'abord été donnés par James Booth (*Journal de Mathématiques élémentaires de Bourget*, 1879, p. 272, n. 28).

* E. Cesaro (1859-1906), professeur à l'Université de Naples, auteur de nombreux et intéressants articles publiés par *Mathesis* et par les *Nouvelles Annales de mathématiques*. Le distingué professeur est mort prématurément à Torre Annunziata, en 1906. (Voir Notice par M. Alasia, dans l'*Enseignement mathématique*, 1907, p. 5.)

### Théorème 342. — III.

**1172.** *Dans tout triangle, le carré de la distance du centre du cercle circonscrit au point de concours des médianes égale le carré du rayon du cercle circonscrit, moins le neuvième de la somme des carrés des côtés.*

Projetons les sommets sur la droite OM ; on sait que

$$MH = MI + MJ. \qquad (\text{nº } 462 \text{ R.}) \qquad (1)$$

Dans le triangle AOM, on a $R^2 = MA^2 + MO^2 + 2MO \cdot MI$ ;

» COM » $R^2 = MC^2 + MO^2 + 2MO \cdot MJ$ ;

» BOM » $R^2 = MB^2 + MO^2 - 2MO \cdot MH$.

En ajoutant et tenant compte de la relation (1), on trouve :

$$3R^2 = MA^2 + MC^2 + MB^2 + 3MO^2.$$

Mais $AM = {}^2/_3AD$; donc $AM^2 = {}^4/_9AD^2$, et de même pour les autres médianes; ainsi la somme $MA^2 + MC^2 + MB^2$ est les ${}^4/_9$ de la somme des carrés des médianes; or celle-ci est les ${}^3/_4$ de la somme des carrés des côtés.

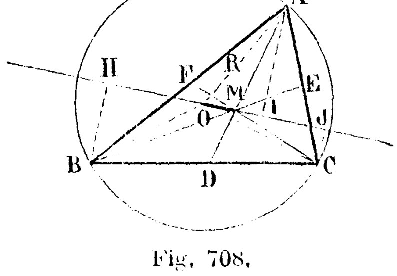


Fig. 708.

Ainsi $MA^2 + MB^2 + MC^2 = {}^3/_9(a^2 + b^2 + c^2)$ ;

d'où $$3MO^2 = 3R^2 - {}^3/_9(a^2 + b^2 + c^2);$$

donc $$MO^2 = R^2 - {}^1/_9(a^2 + b^2 + c^2).$$

**1172 a.** *Remarques.* 1° La distance du centre du cercle circonscrit au centre de gravité du triangle est le tiers de la distance OH du centre du cercle circonscrit à l'orthocentre (nº 1119);

donc $$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \qquad (2)$$

2° En se reportant à une question connue (nº 130, 2°), on peut formuler le théorème suivant : *La somme des carrés des trois côtés des triangles qui sont inscrits au même cercle et qui ont même orthocentre* (*ou même centre de gravité*) *est une quantité constante,* car on a :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2 - OH^2. \qquad (3)$$

**1172 b. Note.** La relation (2) peut être démontrée directement. On peut voir *J. M. E.* de LONGCHAMPS, 1896, p. 169, article de M. E.-N. BARBARIN, et l'ouvrage *Relations entre les Éléments d'un triangle* (2ᵉ édition), pages 72 et 82, formules 70 et 84.

Le *J. M. E.*, déjà cité, donne une étude de M. A. BOUTIN : *Distance des points remarquables d'un triangle* (1892, p. 248).

### Théorème de Stewart 343.

**1173.** *Si dans un triangle on joint le sommet à un point quelconque de la base, le carré de cette droite, multiplié par la base, égale la somme des carrés des autres côtés, chacun d'eux étant multiplié par le segment opposé de la base, moins le produit obtenu en multipliant la base par chacun de ses deux segments.*

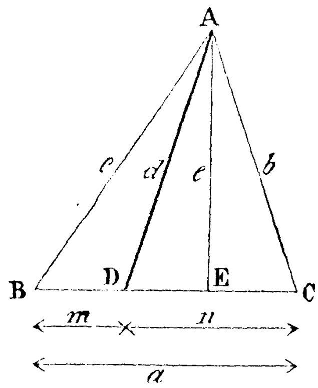


Fig. 709.

Le théorème proposé est l'extension du théorème connu des médianes, et se démontre d'une manière analogue.

Soient AD ou $d$ la ligne donnée, et AE la hauteur du triangle.

$$c^2 = d^2 + m^2 + 2m \cdot DE,$$
$$b^2 = d^2 + n^2 - 2n \cdot DE.$$

Multiplions tous les termes de la première égalité par $n$, et ceux de la seconde par $m$ :

$$c^2n = d^2n + m^2n + 2mn \cdot DE,$$
$$b^2m = d^2m + n^2m - 2mn \cdot DE;$$

d'où $$b^2m + c^2n = d^2(m + n) + m \cdot n(m + n) = d^2a + amn;$$

donc $$d^2a = b^2m + c^2n - amn.$$

**1173 a. Note.** La relation précédente est généralement attribuée à STEWART (*Aperçu historique,* page 175, et *Histoire des sciences mathématiques,* par MAXIMILIEN MARIE, VIII, p. 240). CARNOT, dans sa *Géométrie de position,* page 263, a donné ce même théorème. Néanmoins il serait dû, en réalité, à ROBERT SIMSON. (*Intermédiaire des mathématiciens,* 1908, pages 160 et 188.)

Le *Théorème de Stewart* se prête à un grand nombre d'applications; voir *Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre,* 1891, par M. C. THIRY.

Exemple : Pour la *médiane*, on a : $m = n = \frac{a}{2}$, d'où en divisant par $m$ : $2d^2 = b^2 + c^2 - 2m^2$.

Pour la bissectrice intérieure, on a : $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$.

Le théorème du nº 1174 peut être considéré comme scolie de celui de Stewart.

Voir aussi une belle étude élémentaire sur les applications du *Théorème de Stewart*, dans le *Bulletin de mathématiques élémentaires* de MM. NIEWENGLOWSKI et GÉRARD (année 1895-96, pages 113 à 118 et 1903-1904, p. 50).

* STEWART (1717-1785), mathématicien écossais, disciple de ROBERT SIMSON et de MACLAURIN, professa les mathématiques à l'Université d'Edimbourg.

* M. C. THIRY, professeur de mathématiques à Gand. (Voir *Mathesis*.)

### Théorème 343. — I.

**1173 b.** *Si* E, F *sont les points d'intersection des côtés opposés* AB *et* CD, AD *et* BC *d'un quadrilatère* ABCD *inscrit à un cercle de centre* O *et de rayon* R, on a la relation :

$$EF^2 = OE^2 + OF^2 - 2R^2. \qquad (1)$$

On a recours au *Théorème de Stewart* (THIRY).

De la relation (1) on déduit la suivante :

$$OE \cdot OF \cos EOF = R^2, \qquad (2)$$

ou vice versa (EMMERICH).

(*Mathesis*, 1902, p. 52, question 1325.)

### Théorème 343. — II.

**1174.** *L'hypoténuse d'un triangle rectangle est divisée en trois parties égales ; on joint le sommet de l'angle droit aux deux points de division. La somme des carrés de ces deux lignes, augmentée du carré du* $^1/_3$ *de l'hypoténuse, égale les* $^2/_3$ *du carré de l'hypoténuse.* (COMPAGNON, nº 268.)

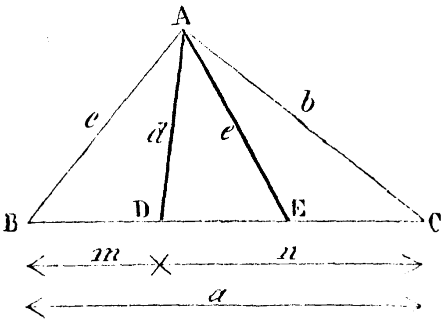



Fig. 710.

Lorsque $m = \frac{a}{3}$ et que $n = \frac{2a}{3}$, il faut prouver que l'on a :

$$d^2 + e^2 + DE^2 = {}^2/_3 a^2.$$

La formule connue (nº 1173) $d^2a = b^2m + c^2n - amn$,

lorsque $m = \frac{a}{3}$, $n = \frac{2}{3}a$ et qu'on simplifie,

devient : $d^2 = {}^1/_3 b^2 + {}^2/_3 c^2 - {}^2/_9 a^2$ ;

de même $e^2 = {}^2/_3 b^2 + {}^1/_3 c^2 - {}^2/_9 a^2$.

En ajoutant membre à membre ces deux égalités, on obtient successivement : $d^2 + e^2 = b^2 + c^2 - {}^4/_9 a^2$.

Mais $$DE^2 = \frac{a^2}{9} \quad \text{et} \quad b^2 + c^2 = a^2 ;$$

donc $$d^2 + e^2 + \frac{a^2}{9} = a^2 - \frac{4}{9} a^2 + \frac{a^2}{9},$$

ou $$AD^2 + DE^2 + AE^2 = {}^2/_3 a^2.$$

**Théorème 343. — III.**

**1175.** *On mène une parallèle LM à la base d'un triangle inscrit ABC, et l'on joint le sommet C aux points L et M. Prouver que le produit CM . CN égale le produit CA . CB des deux côtés.*

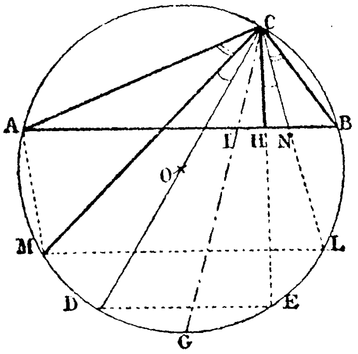



Fig. 711.

Les triangles BCN, ACM sont semblables, car ils sont équiangles.

En effet, l'angle inscrit B = M et l'angle BCN = ACM ;

donc $$\frac{CA}{CM} = \frac{CN}{CB} ;$$

d'où $$CA \,.\, CB = CM \,.\, CN.$$

**1175 a.** *Remarque.* Deux théorèmes connus (G., nos 270 et 268) ne sont que des cas particuliers du théorème que nous venons de donner.

1° *Le produit de deux côtés quelconques d'un triangle égale la hauteur relative au troisième côté, multipliée par le diamètre du cercle circonscrit.*

En effet, l'angle CAD est droit, il a pour mesure : $\dfrac{CB + BE + ED}{2}$.

L'angle droit H a pour mesure : $\dfrac{CB + ED + DA}{2}$

Donc BE = DA, et la corde DE est parallèle à AB ; donc

$$CA \,.\, CB = CD \,.\, CH.$$

2° *Le produit de deux côtés quelconques d'un triangle égale le carré de la bissectrice intérieure correspondante, plus le produit des segments déterminés sur le troisième côté par cette bissectrice.*

En effet, la parallèle extrême donne le point G milieu de l'arc AGB, et la droite CG est bissectrice de l'angle C. Les droites, telles que CM, CN, coïncident ; donc $CA \,.\, CB = CI \,.\, CG = CI^2 + AI \,.\, BI$.

De même pour la bissectrice extérieure.

**1175 b. Note.** 1° Le théorème s'énonce facilement comme il suit : *Deux droites isogonales, issues d'un même sommet d'un triangle, dont l'une est limitée au côté opposé et l'autre à la circonférence circonscrite, ont un produit constant.*

On sait que deux droites sont dites *isogonales* lorsque, partant d'un même sommet d'un triangle, elles sont également inclinées sur la bissectrice qui part de ce même sommet (no 1118).

2° Le théorème précédent (n° 1175) sert de base à l'*Inversion symétrique* (voir ci-après, n° 1342 c); nous l'avons donné en 1882 dans les *Exercices de Géométrie;* mais il est problable que cette question élémentaire n'était pas nouvelle.

L'*Inversion symétrique* est de 1890, 1891; elle est due à M. BERNÈS, ancien professeur de mathématiques à Paris; M. GOB en avait déjà traité quelque temps avant, à *l'Association française pour l'avancement des sciences.* (*J. M. E.*, 1890, 1891, etc.)

### Théorème 344.

**1176.** *Le produit des distances d'un point quelconque de la circonférence inscrite dans un triangle aux trois côtés de ce triangle, égale le produit des distances du même point aux trois côtés du triangle des contacts.*

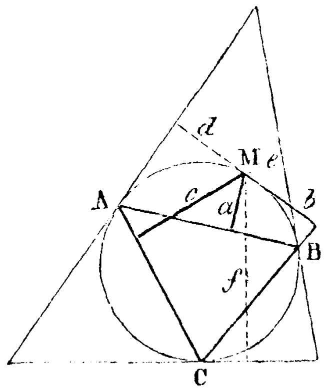


Fig. 712.

Soient $a$, $b$, $c$ les distances du point M aux côtés du triangle inscrit, et $d$, $e$, $f$ les distances du même point aux côtés du triangle circonscrit.

On sait que la distance du point M à une corde est moyenne proportionnelle entre les distances du même point aux tangentes menées par les extrémités de cette corde (n$^{os}$ 25 et 1129).

Donc $$a^2 = de, \quad b^2 = ef, \quad c^2 = fd;$$

d'où $$abc = def.$$

*Remarque.* On peut démontrer le théorème en utilisant directement les théorèmes connus : *Le produit de deux côtés d'un triangle égale la hauteur multipliée par le diamètre du cercle circonscrit* (G., n° 270); et *La distance d'un point quelconque d'une circonférence au point de contact d'une tangente fixe est moyenne proportionnelle entre le diamètre du cercle et la distance du point considéré à la tangente fixe* (n° 1128).

Ainsi $2ra = \text{MA} \cdot \text{MB}, \quad 2rb = \text{MA} \cdot \text{MC}, \quad 2rc = \text{MB} \cdot \text{MC};$

d'où $$8r^3abc = \text{MA}^2 \cdot \text{MB}^2 \cdot \text{MC}^2. \qquad (1)$$

Mais $2rd = \text{MA}^2, \quad 2re = \text{MB}^2, \quad 2rf = \text{MC}^2;$

d'où $$8r^3\, def = \text{MA}^2 \cdot \text{MB}^2 \cdot \text{MC}^2. \qquad (2)$$

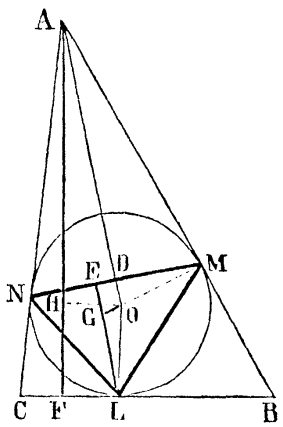
En comparant (1) et (2), on a :

$$abc = def.$$

### Théorème 344. — I.

**1177.** *Lorsque les points de contact* L, M, N *d'un triangle circonscrit* ABC *sont les sommets d'un triangle inscrit, le rapport des distances du centre à deux sommets opposés de ces deux triangles égale le rapport des distances de ces mêmes sommets aux côtés opposés.* (SALMON.)

Il faut prouver que l'on a : $\frac{AO}{LO} = \frac{AF}{LE}$.




OG doit être parallèle à MN.
Fig. 713.

Les triangles semblables AOH, OLG donnent :

$$\frac{AO}{LO} = \frac{AH}{LG}. \qquad (1)$$

Or $$AO.DO = OM^2 = OL^2,$$

d'où $$\frac{AO}{LO} = \frac{LO}{DO}. \qquad (2)$$

D'après les proportions (1) et (2), on peut écrire :

$$\frac{AO}{LO} = \frac{LO}{DO} = \frac{AH}{LG};$$

d'où $$\frac{AO}{LO} = \frac{LO + AH}{DO + LG} = \frac{AF}{LE}.$$

**1177 a. Note.** *Triangle tangentiel.* On nomme triangle tangentiel par rapport à un triangle donné LMN le triangle ABC qu'on obtient en menant des tangentes par chaque sommet L, M, N au cercle circonscrit.

Le triangle tangentiel de LMN est son *triangle polaire* par rapport au cercle circonscrit.

Dans la *Géométrie du triangle,* on considère fréquemment le triangle tangentiel ABC et le *triangle des contacts* LMN.

* SALMON (1819-1904), savant géomètre anglais, professeur à l'Université de Dublin, auteur de nombreux mémoires : on lui doit, entre autres ouvrages, un remarquable *Traité de géométrie analytique.*

### Théorème 345.

**1178.** *Par un point quelconque* M *d'une circonférence, on mène une sécante dans une direction donnée; elle coupe une corde fixe en un point* A *et les tangentes menées au cercle par les extrémités de la corde en des points* B *et* C ; *prouver que le rapport* $\frac{MB.\,MC}{MA^2}$ *est constant.*

(*Méthodes,* nº 290.)

### Théorème 345. — I.

**1179.** *On donne un triangle circonscrit à un cercle, et le triangle des contacts* (nº 1176) ; *si l'on coupe la circonférence et les deux triangles par des sécantes parallèles à une droite donnée, le produit des distances du point* M *aux points où la sécante rencontre les côtés du triangle inscrit est au produit des distances du même point* M *aux points où la sécante rencontre les côtés du triangle circonscrit, dans un rapport constant.*

### Théorème 345. — II.

**1180.** *Par un point quelconque de la circonférence inscrite dans un triangle, on mène une sécante dans une direction donnée; le produit des distances de ce point aux trois points d'intersection des cordes de contact et de la sécante, étant divisé par le produit des distances de ce même point aux trois côtés du triangle circonscrit, donne un rapport constant.*

Ce théorème, qu'on peut étendre à un polygone circonscrit d'un nombre quelconque de côtés et au polygone inscrit, obtenu en joignant deux à deux les points de contact du premier, se démontre d'une manière analogue au théorème de l'*Exercice* 344, mais en utilisant le théorème de l'*Exercice* 345 (nos 1176 et 1178).

Soient $a$, $b$, $c$ les distances du point de la circonférence aux trois points d'intersection de la sécante et des côtés du triangle inscrit; $d$, $e$, $f$ les distances du même point aux points où la sécante rencontre les côtés du triangle circonscrit; enfin représentons par $l$, $m$, $n$ des valeurs constantes; on aura :

$$\frac{a^2}{de} = l; \quad \frac{b^2}{ef} = m; \quad \frac{c^2}{fd} = n;$$

$$\frac{abc}{def} = \sqrt{lmn}.$$

**1181.** *Remarques.* 1° La constante dépend à la fois du triangle donné et de la direction de la sécante.

2° En représentant par $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $e'$, $f'$ les distances des mêmes points d'intersection au second point où la sécante coupe la circonférence, on aura, *quelle que soit la direction de cette sécante :*

$$\frac{abc}{def} = \frac{a'b'c'}{d'e'f'}$$

### Théorème d'Euler 346.

**1182.** *Dans tout triangle, la distance* d *du centre du cercle circonscrit au centre du cercle inscrit est donnée par la relation*

$$d^2 = R(R - 2r).$$

(Voir *Méthodes*, n° 327; voir aussi le *Journal de M. É.* de M. de Longchamps, 1895, p. 198.)

**1182 a.** *Autre démonstration.* La bissectrice AID passe par le milieu de l'arc BDC, et l'on sait que DI = DB = DC (n° 701 R et n° 816 R).

On a :

$$R^2 - d^2 = AI \cdot ID = AI \cdot BD.$$

Or si l'on mène le diamètre DE et le rayon IK, les triangles rectangles semblables AIK, BDE donnent :

$$\frac{AI}{r} = \frac{2R}{BD},$$

ou $$AI \cdot BD = 2Rr,$$

et par suite,

$$R^2 - d^2 = 2Rr,$$

ou $$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

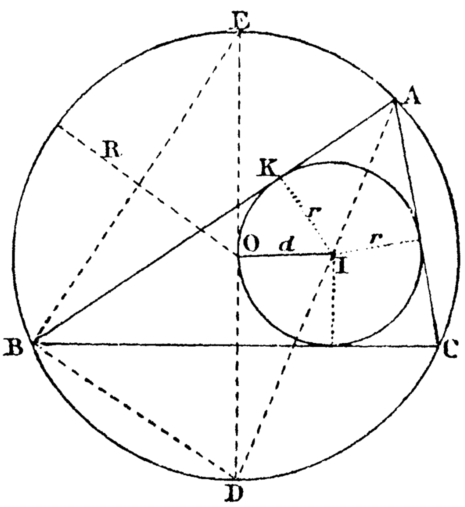


Fig. 714.

**Théorème R. — 346 I.**

**1182 b.** *Lorsqu'on a la relation* $d^2 = R^2 - 2Rr$, *on peut circonscrire au cercle* I *une infinité de triangles qui soient* ***inscrits*** *au cercle* O.

Par un point quelconque A du cercle O, menons les tangentes AB, AC. Le centre I est sur la bissectrice de l'angle BAC.

La relation $d^2 = R^2 - 2Rr$ prouve que $AI \cdot ID = 2Rr$; or les triangles AIK, BED sont semblables, et par suite on a $AI \cdot ID = 2Rr$; donc $ID = BD$ et par conséquent I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC; en d'autres termes, BC est tangent au cercle de centre I, et cela a lieu quel que soit le point A ; donc...

**1182 c. Note.** 1° La démonstration ci-dessus du *théorème d'Euler* et de sa réciproque a été empruntée au *Bulletin des sciences mathématiques et physiques élémentaires,* fondé par M. B. NIEWENGLOWSKI, inspecteur de l'Académie de Paris ; rédigé par MM. L. GÉRARD, professeur au lycée Buffon, et CH. MICHEL alors professeur au lycée de Douai (année 1903, p. 194, 2°). Ce *Bulletin* a cessé de paraître en octobre 1910.

On peut lire aussi une belle étude élémentaire sur le *théorème d'Euler* et sa généralisation dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. H. VUIBERT (année 1902-1903, p. 57).

2° On peut poser la question suivante : *De tous les triangles inscrits au cercle* O *et circonscrits au cercle* I, *quel est le triangle dont l'aire est maxima et celui dont l'aire est minima ?*

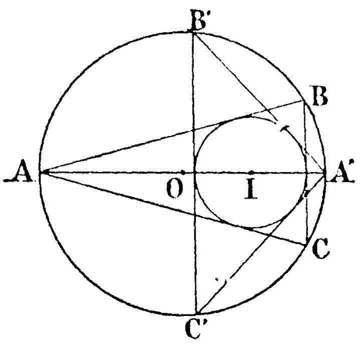


Fig. 715.

D'après une remarque antérieure (n° 573), on est conduit à considérer les triangles isocèles ayant respectivement pour sommets les extrémités du diamètre AOIA'.

Le maximum correspond au triangle ABC ; le minimum correspond au triangle A'B'C'.

$$S = (R + r + d)\sqrt{R^2 - (d + r)^2} ;$$
$$S' = (R + r - d)\sqrt{R^2 - (d - r)^2} .$$

(A. BOUTIN.)

(*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1904, pages 248 à 252 ; solutions diverses par MM. WEINMEISTER, MATHIEU, MALO, BOUTIN.)

3° Les triangles qui sont inscrits à un même cercle et circonscrits à un même second cercle, jouissent de diverses propriétés ; diverses quantités sont constantes ; il en est ainsi notamment des suivantes :

$$\frac{abc}{p}, \quad \frac{S}{p}, \quad AN + BH + CH,$$
$$r_1 + r_2 + r_3, \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}, \quad \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}.$$

Le centre du cercle des neuf points, l'orthocentre et centre de gravité décrivent des circonférences.

(*Mathesis,* 1901, page 271, n° 22.)

4° Les limites du périmètre d'un triangle inscrit à un cercle et circonscrit à un cercle donné sont les suivantes :

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq p^2$$
$$\leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

(*N. A.,* 1908, p. 558.)

**Théorème 346. — II.**

**1183.** *En désignant par* $r_a$ *le rayon du cercle exinscrit tangent au côté* a, *et par* $d_a$ *la distance de ce centre au centre du cercle circonscrit, on a* $d_a^2 = R(R + 2r_a)$.

(Voir *Méthodes*, n° 327 **b**.)

**1183 a. Note.** La *relation d'Euler* est le premier pas qui ait été fait dans une voie où d'illustres géomètres ont marché après lui : il s'agit des polygones à la fois inscrits et circonscrits à deux cercles, ou plus généralement à deux coniques. Nicolas Fuss, en 1792, chercha à résoudre un problème qui porte son nom : *Déterminer la relation qui lie les rayons et la distance des centres de deux circonférences dont l'une est inscrite et l'autre circonscrite à un polygone donné ;* mais il ne put réussir que pour quelques cas particuliers.

Plus tard, Poncelet, en 1817-1822, traita géométriquement le problème plus étendu de l'inscription et de la circonscription d'un même polygone à deux coniques, et le résolut dans toute sa généralité.

En 1828, Jacobi s'est occupé du même problème au point de vue analytique.

M. Moutard, en 1862, a traité la même question, mais d'une manière générale. (*Applications d'analyse et de Géométrie,* par Poncelet, tome I, note 3, page 535.)

Th. Moutard (1827-1901), inventeur des *courbes* et des *surfaces anallagmatiques,* c'est-à-dire des figures qui sont à elles-mêmes leurs propres transformées par rayons vecteurs réciproques, ou par *inversion* proprement dite. On peut citer les ovales de Descartes, la lemniscate, la strophoïde, la cissoïde. (D'après l'*Enseignement mathématique,* par Laisant et Fehr, n° du 15 mai 1901.)

Jacobi (Charles-Gustave), (1804-1851), célèbre analyste de Kœnigsberg, s'occupa, dès 1829, des *fonctions elliptiques ;* et son frère, Morin-Hermann Jacobi (1790-1874), découvrit la *galvanoplastie* en 1836.

**Théorème 346. — III.**

**1184.** *Dans tout triangle la somme des carrés des distances du centre du cercle circonscrit aux centres des quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle, égale douze fois le carré du rayon du cercle circonscrit.*

$$d^2 = R(R - 2r); \qquad (\text{n}^\text{o}\ 1182)$$
$$d_a^2 = R(R + 2r_a);$$
$$d_b^2 = R(R + 2r_b);$$
$$d_c^2 = R(R + 2r_c);$$
$$d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = R(4R + 2r_a + 2r_b + 2r_c - 2r).$$

Mais on sait que la somme des trois rayons des cercles exinscrits, étant diminuée du rayon du cercle inscrit, égale 4R (n° 736) ; donc le second membre devient : $\quad R(4R + 8R) \quad$ ou $\quad 12R^2$.

**Note.** Le théorème précédent est de l'auteur anonyme L. P. F. R. d'un article remarquable des *Annales de Gergonne,* tome XIX, 1828-1829, page 216. Le même article indique aussi d'autres relations, pages 211 à 218.

**Théorème 346. — IV.**

**1185.** *Si l'on mène un diamètre commun* MN *aux circonférences inscrite et circonscrite à un triangle* ABC, *le rayon de la circonférence inscrite est moyen proportionnel entre les segments* MP, NQ *compris entre les deux circonférences.* (*N. A.*, 1850, page 216.)

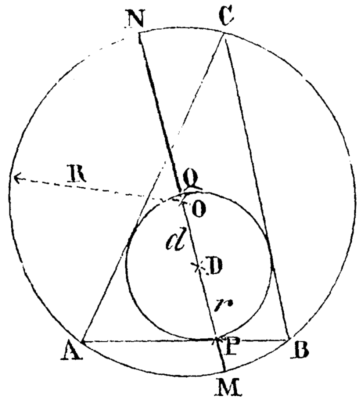



Fig. 716.

Soient $ON = OM = R$; $OD = d$;

$$DQ = DP = r.$$

$$MP = OM - OD - DP = R - r - d,$$

$$NQ = ND - DQ \quad = R - r + d,$$

$$MP \cdot NQ = (R - r)^2 - d^2.$$

Or, d'après le théorème d'*Euler*,

$$d^2 = R(R - 2r) \quad \text{ou} \quad R^2 - 2Rr;$$

donc $\qquad MP \cdot NQ = R^2 - 2Rr + r^2 - (R^2 - 2Rr),$

ou $\qquad MP \cdot NQ = r^2.$

*Remarques.* 1° $\qquad MQ \cdot NP = 4Rr + r^2.$

2° En représentant par S et S' la puissance des points P et Q du cercle inscrit par rapport au cercle circonscrit, on obtient la relation due à Grunert : $\qquad SS' = r^3 (4R + r).$

(*Nouvelles Annales*, 1858, p. 447.)

**1185 a. Note.** *Relations numériques.* La sixième édition des *Théorèmes et problèmes de Catalan* contient un assez grand nombre de relations ; il en est de même des recueils scientifiques que nous avons cités ; mais tout ce qu'il y a de plus intéressant, pour la Géométrie traditionnelle ou classique, se trouve réuni dans l'ouvrage suivant de M. Vuibert : *Relations entre les éléments du triangle* (1893). L'ouvrage comprend 110 relations entre les *Eléments linéaires*, 59 entre les *Eléments angulaires*, 104 entre les *Eléments linéaires et angulaires*, en tout, 273 formules avec leurs démonstrations.

Divers articles du *Journal de mathématiques élémentaires* de M. G. de Longchamps donnent de nombreuses relations pour la *Géométrie récente du triangle ;* il en est de même de *Mathesis* et des ouvrages de MM. Casey et Emmerich. (*A sequel to the first six Books of the Elements of Euclid,* by John Casey, et *Die Brocardschen Gebilde,* von Dr A. Emmerich.)

**Théorème 346. — V.**

**1185 b.** *On peut construire une infinité de triangles ayant même cercle circonscrit* et une des conditions suivantes :

1° *Même cercle inscrit;* 2° *même orthocentre;* 3° *même centre de gravité ;* 4° *même point de Lemoine.*

1° Si l'on donne deux cercles tels que ceux de centres O et D (fig. 716, n° 1185), dont les rayons R, $r$ et la distance des centres soient liés par la *relation d'Euler :*

$$d^2 = R(R - 2r),$$

toute tangente AB au cercle intérieur donne lieu à un triangle ABC inscrit dans le cercle O (n° 1182 a).

2° *Même orthocentre.* Voir n° 130, 2°.

3° *Même centre de gravité.* Menons une corde quelconque AGM, et prenons GM égale demi AG. Pour avoir un des triangles, il suffit de mener par M une corde BC perpendiculaire à OM; le point M sera son milieu.

La corde AGA′ donne un second triangle A′B′C′.

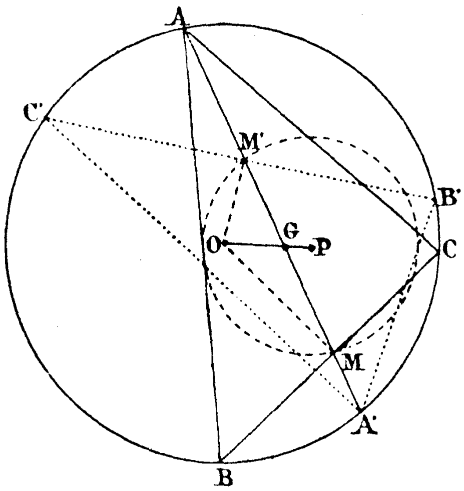


Fig. 717.

4° *Même point de Lemoine.* (Voir ci-après, n° 2442.)

*Remarques.* 1° Pour obtenir facilement les points M, M′, on peut prendre $GP = \frac{OG}{2}$, et la circonférence décrite du centre P avec $\frac{R}{2}$ pour rayon est le lieu des points M, M′.

2° Le *cercle des moments égaux* ou *cercle des huit points* (n° 2411) ayant OG pour diamètre est commun à tous les triangles tels que ABC, et passe par les huit points relatifs à chacun d'eux.

3° *Tous les triangles ont même orthocentre,* car on sait que $OG = \frac{OH}{3}$, donc H est un point fixe.

4° *La somme des carrés des trois côtés de chaque triangle est constante;* elle égale $9(R^2 - OG^2)$.

Voir n° 1172 et le *Journal de Mathématiques de Vuibert,* année 1902-1903, page 117, n° 5413.

### Théorème 346. — VI.

**1185 c.** *Le lieu des centres* $I_a$, $I_b$, $I_c$ *des cercles exinscrits* de tous les triangles qui ont *même cercle* inscrit I et même circonscrit O, est *un cercle* homothétique du cercle O, ayant un *rayon double* 2R.

En effet, le centre I est l'orthocentre du triangle $I_a\, I_b\, I_c$, et le centre O en est le cercle des neuf points; par suite, le cercle circonscrit au triangle et dont C serait le centre est homothétique du cercle O, et le point O divise IC en deux parties égales.

*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1901, p. 289, n° 2056. PH. WEINMEISTER (Tharandt), ERNEST DUPORCQ.

### Théorème 346. — VII.

**1185 d.** *Le lieu de l'orthocentre des triangles inscrits et circonscrits à deux cercles donnés de rayons* R et $r$ *est* une circonférence dont le rayon égale $\frac{R}{2} - r$. (G. SALMON.)

*Le centre de gravité décrit également une circonférence.*

Voir *N. A.*, 1861, p. 96, question 527 (J. MENTION et TRONSENS).

## Relations numériques dans le Quadrilatère.

**1186.** L'étude des relations numériques dans le quadrilatère offre un grand intérêt, par suite de l'emploi des *systèmes articulés*.

Un quadrilatère dont on connaît les quatre côtés, n'est pas complètement déterminé; on peut le déformer, rapprocher deux sommets et éloigner les deux autres; les relations qui peuvent lier certains points fixes pris sur les côtés ou sur les diagonales, permettent parfois de transformer un mouvement donné en un autre mouvement aussi donné. Nous citerons les exemples les plus simples et les plus remarquables, en étudiant d'abord le parallélogramme dont le losange est un cas particulier; puis le quadrilatère à diagonales rectangulaires, dont le losange est aussi un cas particulier; le trapèze et le quadrilatère quelconque.

### Théorème 347.

**1187.** *Pour tout point pris dans le plan d'un rectangle, la somme des carrés des distances à deux sommets opposés égale la somme des carrés des distances de ce même point aux deux autres sommets.*

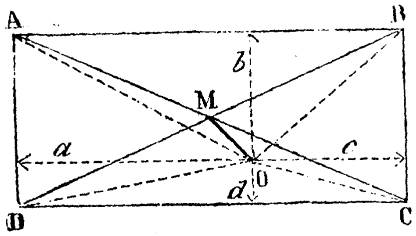


Fig. 718.

Par le point donné O, menons des parallèles aux côtés du rectangle. Soient $a$, $b$, $c$, $d$ les quatre segments de ces lignes.

$$AO^2 = a^2 + b^2,$$
$$CO^2 = c^2 + d^2;$$

donc $$AO^2 + CO^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Il en est de même de $BO^2 + DO^2$;

donc $$AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2.$$

### Théorème 347. — I.

**1188.** *La somme des carrés des distances d'un point O aux quatre sommets du rectangle égale le carré de la diagonale, plus quatre fois le carré de la distance du point donné au point de concours des diagonales.*

$$AO^2 + CO^2 = 2AM^2 + 2MO^2; \quad BO^2 + DO^2 = 2BM^2 + 2MO^2.$$

Mais $AM = BM$ et $4AM^2 = AC^2$;

donc $$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = AC^2 + 4MO^2.$$

### Théorème 348.

**1189.** *Dans un parallélogramme ABCD, les distances ME et MF d'un point quelconque d'une diagonale aux deux côtés adjacents sont dans un rapport inverse avec les côtés.*

Menons les droites MG et MH parallèles aux côtés du parallélogramme et considérons les triangles rectangles MEH et MFG ; leurs angles aigus G et H sont égaux comme ayant les côtés parallèles; ainsi ces triangles sont semblables (G., n° 223), et l'on a :

$$\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{MF}} = \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MG \text{ ou } AH}}.$$

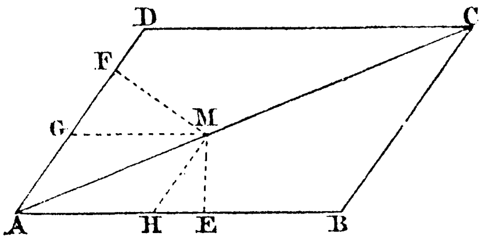


Fig. 719.

Or les triangles semblables AHM et ABC donnent :

$$\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{BC \text{ ou } AD}}{\mathrm{AB}}.$$

On a donc, à cause du rapport commun :

$$\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{MF}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}.$$

**1189 a.** *Remarques.* 1° De cette relation, on déduit $\mathrm{ME} \,.\, \mathrm{AB} = \mathrm{MF} \,.\, \mathrm{AD}$. Ainsi les produits des distances ME et MF par les côtés respectifs AB et AD sont égaux.

2° On obtient une démonstration très simple lorsqu'on a recours au livre IV (fig. 720).

On a : $$\frac{e}{f} = \frac{h}{k}.$$

Or $$\mathrm{AB} \,.\, h = \mathrm{AD} \,.\, k, \quad \text{d'où} \quad \frac{h}{k} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}.$$

Ainsi $$\frac{e}{f} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}.$$

3° La ligne AN est la médiane du triangle BAD ; donc *la médiane est le lieu des points dont les distances aux deux côtés correspondants d'un triangle sont inversement proportionnelles à ces mêmes côtés.*

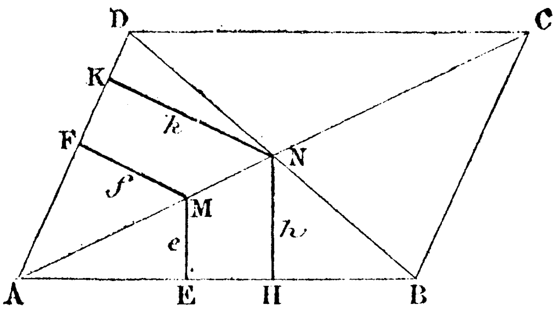


Fig. 720.

4° La symédiane (n° 899 a) étant la droite symétrique, ou la droite isogonale de la médiane, par rapport à la bissectrice (n° 1118), *la symédiane est le lieu des points dont les distances aux côtés correspondants d'un triangle sont directement proportionnelles à ces mêmes côtés.*

Nous démontrerons directement cette intéressante proposition (n° 2333).

### Théorème 348. — I.

**1190.** *Dans tout parallélogramme* ABCD, *la somme des carrés des côtés égale la somme des carrés des diagonales.*

Cette question est un cas particulier du *théorème d'Euler* (voir ci-après n° 1205); pour la démontrer directement, il suffit de recourir au théorème du carré de la médiane (G., n° 254).

**Théorème 348. — II.**

**1191**. *Par le sommet* A *d'un parallélogramme* ABCD, *on mène une sécante* AMN *qui coupe* BC *en* M *et* DC *en* N; *prouver que le produit* BM . DN *est constant.* (COMPAGNON, n° 222.)

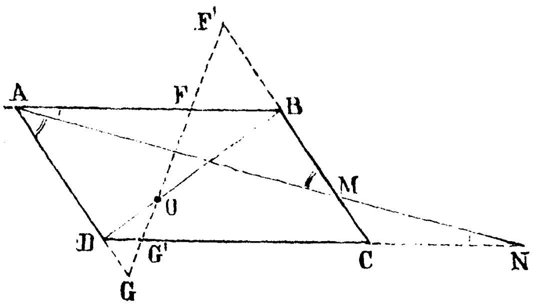


Fig. 721.

En effet, les triangles ABM, ADN sont équiangles; donc :

$$\frac{BM}{AB} = \frac{AD}{DN},$$

d'où

$$BM . DN = AB . AD \quad \text{quantité constante.}$$

**Théorème 348. — III.**

**1192**. *Par un point* O *pris sur la diagonale* BD *d'un parallélogramme, on mène une sécante qui coupe les côtés adjacents* AB, AD *en* F *et* G, *et qui coupe les deux autres en* F' *et* G'; *prouver que* OF . OG = OF' . OG'.

Les triangles OFB, ODG' sont semblables (fig. 721); il en est de même de OF'B, OGD; on a donc :

$$\frac{OF}{OG'} = \frac{OB}{OD} = \frac{OF'}{OG},$$

d'où $OF . OG = OF' . OG'$.

**Théorème 349.**

**1193**. *Sur les côtés d'un parallélogramme articulé* ABCD, *ou sur les prolongements de ses côtés, on prend quatre points* L, M, N, O, *situés en ligne droite. En admettant que ces points restent fixes sur les côtés respectifs auxquels ils appartiennent, tandis que le parallélogramme se déforme, prouver que le rapport des distances d'un de ces points à deux autres points reste constant.*

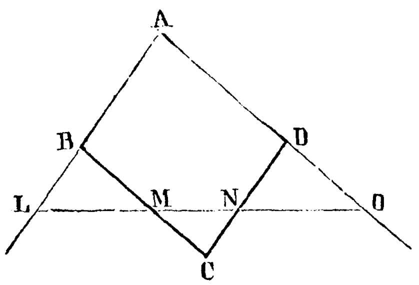


Fig. 722.

Soit, par exemple, L, M, N.

Les triangles semblables MBL, MCN donnent :

$$\frac{ML}{MN} = \frac{MB}{MC} \quad \text{rapport constant ; donc...}$$

De même $\frac{LM}{LO} = \frac{BM}{AO}$ rapport aussi constant, etc.

**1194. Pantographe.** Le *pantographe* repose sur le théorème précédent.

On sait que le pantographe est un instrument qui permet de reproduire rapidement un dessin, en l'amplifiant ou en le réduisant dans un rapport donné.

En fixant le point M, par exemple, et en faisant décrire au point L une figure donnée, le point N décrira une figure semblable à la première. Les deux figures homothétiques décrites par L et N auront M pour centre intérieur de similitude.

En fixant le point L, les points M et O décriront des figures homothétiques ayant L pour centre extérieur de similitude.

Il en est de même du point N, car on a :

$$\frac{LM}{MN}=\frac{MB}{MC}, \quad \text{d'où} \quad \frac{LM}{LM+MN}=\frac{MB}{MB+MC}, \quad \text{ou} \quad \frac{LM}{LN}=\frac{MB}{BC},$$

rapport constant.

*Remarque.* Dans les applications mécaniques, ABCD est ordinairement un losange; mais un parallélogramme jouit des mêmes propriétés.

### Théorème de Peaucellier 350.

**1195.** *Un point quelconque* P *pris sur la diagonale* AC *d'un losange* ABCD, *divise cette diagonale en deux segments dont le produit égale la différence* $AB^2 - PB^2$ *du carré du côté du losange et du carré de la distance* PB *du point* P *au sommet* B. (*N. A.*, 1864, p. 414.)

Prolongeons PB jusqu'à la rencontre de la circonférence décrite du centre B avec BA pour rayon :

$$AP.PC = PE.PF = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

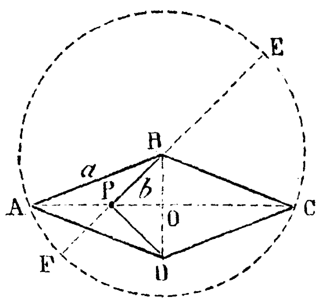


Fig. 723.

*Autre démonstration.* On sait que la différence des carrés des distances d'un point B à deux points donnés A et P, égale la différence des carrés des distances de la projection O du point B aux deux mêmes points A et P (n° 71), ou $AB^2 - BP^2 = AO^2 - OP^2$.

Donc $a^2 - b^2 = (AO - OP)(AO + OP)$, ou $a^2 - b^2 = AP . PC$.

**Note.** La démonstration ci-dessus est de M. MANNHEIM, *N. A.*, 1873, p. 73.

* M. PEAUCELLIER, capitaine de génie en 1864, depuis général de division, inventeur de l'*inverseur* qui porte son nom. (Voir la note relative aux ***inverseurs***, n° 1203.)

### Théorème 350. — I.

**1196.** *Le produit* AP . CP *est constant :*

1° *Lorsque le point* P *est sur le prolongement de la diagonale* AC *du losange* ABCD.

2° *Il en est de même lorsque le losange est remplacé par un quadri-*

*latère* BAEC, *dont la diagonale* BE *est perpendiculaire au milieu de* AC.

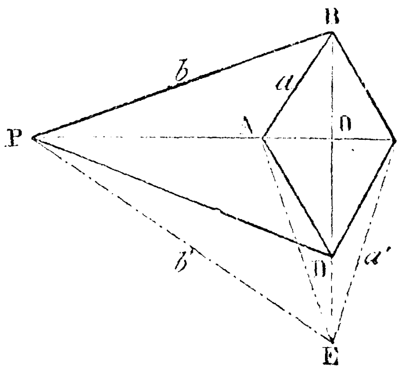



Fig. 724.

1° $b^2 - a^2 = OP^2 - OA^2 = (OP - OA)(OP + OA) = AP \cdot CP.$

2° $b'^2 - a'^2 = b^2 - a^2 = AP \cdot CP.$

**Théorème 350. — II.**

**1197.** *Lorsque la différence des carrés de deux côtés adjacents d'un quadrilatère égale la différence des carrés des deux autres côtés, et si le grand côté de chaque groupe part d'un même sommet, les diagonales du quadrilatère sont à angle droit.*

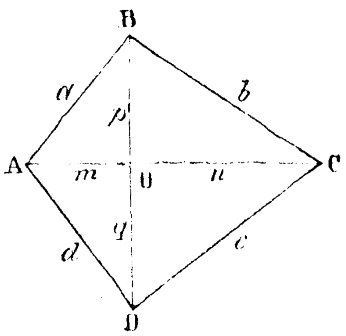



Fig. 725.

Admettons qu'on ait la relation

$$b^2 - a^2 = c^2 - d^2,$$

et que les plus grands côtés $b$ et $c$ partent d'un même sommet C. Il faut prouver que BD et AC sont des droites rectangulaires.

Soit O le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet B sur AC, et O' le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet D sur AC; il suffit de prouver que les points O et O' coïncident.

Or on a : $b^2 - a^2 = CO^2 - AO^2$ (n° 71),

$$c^2 - d^2 = CO'^2 - AO'^2;$$

donc $CO^2 - AO^2 = CO'^2 - AO'^2.$

Or cette égalité n'est possible qu'autant que O et O' coïncident.

**Théorème 350. — III.**

**1197 a.** *Dans le quadrilatère à diagonales orthogonales, la somme des carrés de deux côtés opposés égale la somme des carrés des deux autres côtés,* et réciproquement (fig. 725).

$$a^2 + c^2 = m^2 + p^2 + n^2 + q^2,$$

$$b^2 + d^2 = n^2 + p^2 + m^2 + q^2;$$

donc $$a^2 + c^2 = b^2 + d^2. \quad (1)$$

*Réciproquement*, de (1) on déduit :

$$c^2 - d^2 = b^2 - a^2;$$

donc la droite BD est perpendiculaire sur AC.

### Théorème 351.

**1198.** *Dans un quadrilatère* ABCD, *les diagonales* AC, BD *se coupent à angle droit. Si l'on déforme le quadrilatère en gardant les quatre mêmes côtés, mais en rapprochant deux sommets opposés* A *et* C, *les diagonales de la nouvelle figure se couperont aussi à angle droit* (fig. 725).

Les diagonales se coupant à angle droit, on a :

$$b^2 - a^2 = n^2 - m^2 = c^2 - d^2.$$

Mais la relation $b^2 - a^2 = c^2 - d^2$ subsiste constamment, car les quatre côtés ne varient pas de longueur; donc les points B et D appartiennent à une même droite perpendiculaire à AC (n° 1197).

**1198 a.** *Remarques.* 1° *Les carrés des quatre segments des diagonales donnent une somme constante :*

$$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = {}^1/_2\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

2° On nomme *quadrilatère à diagonales orthogonales*, ou même simplement *quadrilatère orthodiagonal*, le quadrilatère dont les diagonales sont à angle droit.

3° On nomme *pseudo-carré* le quadrilatère orthodiagonal dont les diagonales sont égales. (*Mathesis*, 1894, p. 268.)

4° On nomme *rhomboïde* un quadrilatère orthodiagonal symétrique par rapport à une de ses diagonales.

### Théorème 351. — I.

**1198 b.** *Lorsque deux rhomboïdes semblables* ABCD, CDEF *ont un côté* CD *et un angle* C *communs, la droite* AEH *est perpendiculaire à* BC.

1° Prolongeons les droites égales AD, DE.

Les triangles ABM, CDN ont deux angles respectivement égaux, donc l'angle $M = N$; par suite, la bissectrice de l'angle D du triangle isocèle ADE est parallèle à MN, et la base AE, perpendiculaire à la bissectrice, l'est donc aussi à BC.

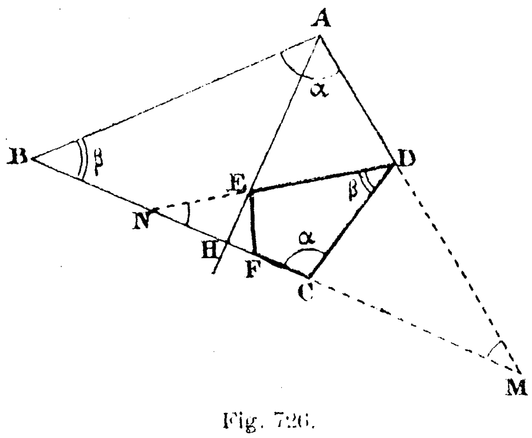


Fig. 726.

2° On pourrait dire aussi : dans le quadrilatère ABCD, l'angle $ADE = 360^\circ - 2(\alpha + \beta)$.

Les angles AED + DAE ou 2DAE $= 180^\circ -$ ADE $= 2(\alpha+\beta) - 180^\circ$.

$$\text{Angle DAE} = \alpha + \beta - 90^\circ.$$

Ainsi l'angle BAE $= \alpha + 90^\circ - (\alpha+\beta) = 90^\circ - \beta$;

par suite, angle BAH + B $= 90^\circ$.

D'où résulte que la droite AEH est perpendiculaire sur BC.

**Théorème 352.**

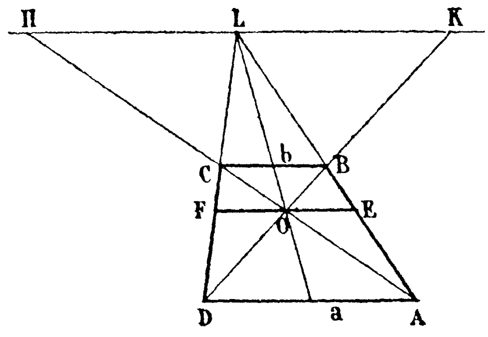


Fig. 727.

**1199.** *En désignant par* a *et* b *les bases d'un trapèze, par* d *la longueur de la parallèle menée aux bases par le point de concours des diagonales, on a la relation* $d = \dfrac{2ab}{a+b}$ (nº 1109).

2º *En désignant par* d' *la longueur de* HLK, *on a la relation*

$$d' = \frac{2ab}{a-b}.$$

**Théorème 352. — I.**

**1200.** *En désignant par* d *la longueur d'une parallèle* DL *aux bases du trapèze, par* $\dfrac{m}{n}$ *le rapport dans lequel cette parallèle divise les deux autres côtés, on a la relation*

$$d = \frac{an+bm}{m+n}.$$

Trois cas peuvent se présenter :

1º *Les bases* AM, BN *sont d'un même côté de* MN (fig. 728).

Menons BM. On a :

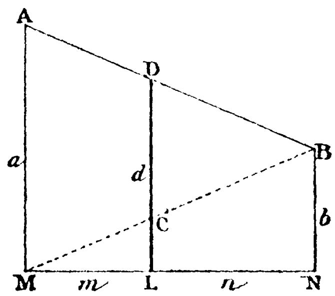


Fig. 728.

$$\frac{DC}{AM} = \frac{LN}{MN} \quad \text{ou} \quad \frac{DC}{a} = \frac{n}{m+n},$$

d'où $$DC = \frac{an}{m+n}.$$

De même, $$CL = \frac{bm}{m+n},$$

d'où $$d = \frac{an+bm}{m+n}. \qquad (1)$$

2º *Une base est nulle* (fig. 729).

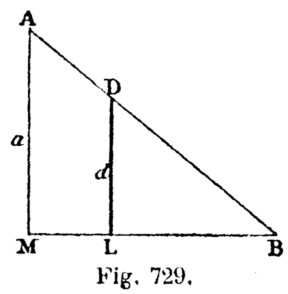


Fig. 729.

La formule (1) se réduit à

$$d = \frac{an}{m+n}. \qquad (2)$$

La figure donne immédiatement ce résultat, 3° *Les bases* AM, BN *sont de sens contraire* (fig. 730).

$$d \text{ ou } DC - CL = \frac{an - bm}{m + n}. \quad (3)$$

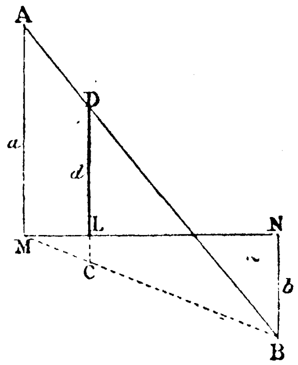


Fig. 730.

*Remarques.* 1° *Pour que la formule* (1) *convienne à tous les cas, il suffit de regarder les bases comme étant de même signe dans le* 1er *cas, et de signes contraires dans le* 3e (nos 412 et 436).

2° A cause de l'importance de cette question, il convient de la proposer aussi comme problème. (Voir ci-après, n° 1436.)

**Théorème 352. — II.**

**1201.** *En parcourant le périmètre d'un triangle dans un même sens, on divise les trois côtés dans un même rapport. Le triangle qui a pour sommets les trois points de division a même point de concours des médianes que le triangle donné.* (PAPPUS.)

Soit
$$\frac{AD}{BD} = \frac{BE}{CE} = \frac{CF}{AF} = \frac{m}{n}.$$

Il faut prouver que les triangles ABC, DEF ont même point de concours des médianes.

Par le point G de concours des médianes de ABC, menons une droite quelconque XY et abaissons les perpendiculaires $Aa$, $Bb$, $Cc$, et $Dd$, $Ee$, $Ff$. Représentons ces perpendiculaires par $a$, $b$, ... On sait que pour toute droite XY menée par le point G, on a :

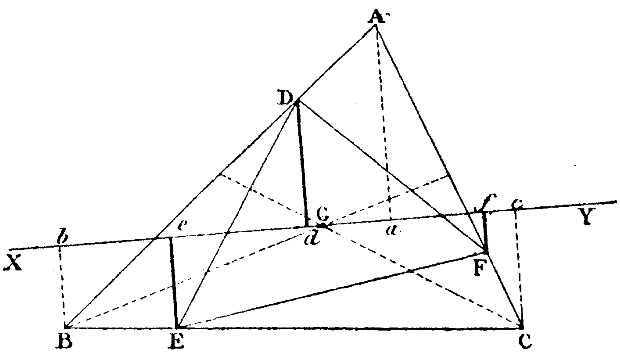


Fig. 731.

$$a = b + c \quad (\text{n}^\circ\ 462).$$

La somme algébrique $a + b + c$ est nulle, lorsqu'on regarde comme négatives des perpendiculaires $b$ et c.

**1201 a.** *Réciproquement.* Si l'on a la valeur absolue $a = b + c$, la droite XY doit passer par le point de concours des médianes ; donc, pour démontrer le théorème proposé, il suffit de prouver que $d = e + f$.

Or
$$d = \frac{an - bm}{m + n} \quad \ldots\ldots \quad (1200),$$

$$e = \frac{bn + cm}{m + n}; \quad f = \frac{cn - am}{m + n},$$

d'où
$$d = e + f,$$

car
$$\frac{an - bm}{m + n} = \frac{bn + cm}{m + n} + \frac{cn - am}{m + n},$$

ou $$an + am = bn + bm + cn + cm,$$
$$a(m + n) = b(m + n) + c(m + n),$$
ainsi $a = b + c$ relation bien connue; donc...

**1201 b. Note.** Le théorème précédent peut donner lieu à diverses observations. Ainsi :

1° *Le lieu du point milieu* L *de* EF *est la droite* MN *qui joint les points milieux des côtés* CA, CB.

Car DGL est médiane du triangle DEF, et puisque les médianes des deux triangles concourent au même point, et que ce point divise chacune d'elles aux deux tiers de sa longueur à partir du sommet, on a :

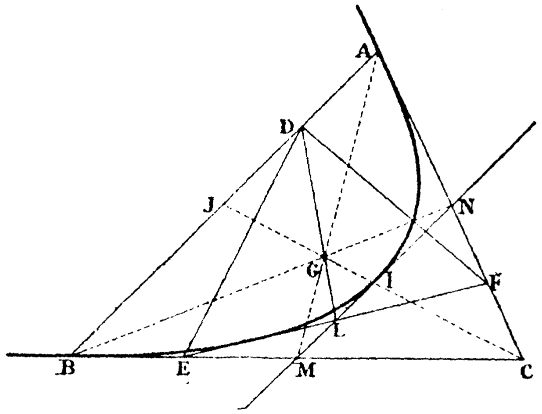


Fig. 732.

$$\frac{AG}{GM} = \frac{DG}{GL} = \frac{2}{1}.$$

Ainsi les triangles AGD, MGL sont semblables ; par suite, ML est parallèle à AD. Ainsi MLN est la droite qui joint les points milieux des côtés CA, CB.

2° Toute droite EF qui divise les côtés CA, CB en parties inversement proportionnelles, à partir du sommet C, est tangente à une parabole qui se raccorde elle-même aux droites CA, CB, aux points donnés A et B. (G., n° 712.) La droite MN est elle-même tangente à la même courbe au point I ; MN est la tangente au sommet lorsque CA = CB.

Ainsi *l'enveloppe du côté* EF *est la parabole* AIB.

Chacun des autres côtés DE, DF a aussi pour enveloppe une parabole. Ces trois paraboles, que nous avons indiquées dès 1882, sont nommées *paraboles de Artzt*, du nom du professeur qui les a signalées en 1884. On lira avec grand intérêt les articles de M. Brocard, commandant du génie en retraite, et G. de Longchamps. (*Journal de mathématiques élémentaires et spéciales*, 1885, page 76, et 1890, page 149.)

3° On prouvera, au livre IV, que parmi tous les triangles DEF, le triangle de surface minima est celui qu'on obtient en joignant deux à deux les points milieux J, M, N des côtés du triangle donné.

4° Le théorème ci-dessus (n° 1201) est l'énoncé géométrique du théorème suivant de Pappus. *Si trois mobiles égaux placés au sommet d'un triangle partent en même temps et parcourent respectivement les trois côtés, en allant dans le même sens et avec des vitesses proportionnelles à ces trois côtés, leur centre de gravité restera immobile.* (*N. A.*, 1881, p. 337.)

D'après le *théorème* de la composition des forces parallèles et la *détermination* du centre de gravité d'un triangle (*Mécanique*, F. J., n°s 48 et 72), il est très facile de démontrer le *théorème de Pappus*. En effet, admettons que trois poids égaux, $p$, soient simultanément aux points D, E, F qui divisent les côtés dans le rapport $\frac{m}{n}$ ; on peut remplacer le poids $p$ placé en D par des poids $\frac{np}{m+n}$, $\frac{mp}{m+n}$ placés en A et B et inversement proportionnels aux distances AD et BD. De même, le poids $p$ placé en E peut être remplacé par un poids $\frac{np}{m+n}$ placé en B et un poids $\frac{mp}{m+n}$ placé en C; remarque analogue pour le poids placé en F; or chaque sommet B, par exemple, a les poids $\frac{mp}{m+n}$

et $\dfrac{np}{m+n}$ ou $p$, donc le système correspond aux premières données, chaque sommet a un poids $p$, par suite G est bien le centre de gravité.

**1201 c. Autre démonstration.** La considération des solides auxiliaires ou des projections conduit à une méthode très utile pour démontrer facilement certains théorèmes. Aux exemples déjà donnés (nos 174, 176, 177) on peut joindre le suivant :

On sait qu'un triangle quelconque peut être projeté suivant un triangle équilatéral, ou, ce qui revient au même, qu'un prisme triangulaire qui aurait pour section un triangle donné, peut être coupé suivant un triangle équilatéral (no 1844 a, *note*); donc nous pouvons remplacer le triangle donné ABC par un triangle équilatéral correspondant, que nous désignons par *abc*.

Or les rapports se conservent en projection ; donc on aura :

$$\frac{ad}{ab} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}\,; \quad \frac{be}{bc} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BC}}\,, \text{ etc. ;}$$

mais
$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CA}}, \text{ donc } \frac{ad}{ab} = \frac{be}{bc} = \frac{cf}{ca}.$$

Or, dans le triangle équilatéral *abc*, les côtés *ab*, *bc*, *ca* sont égaux ; donc $ad = be = cf$, et le triangle *def* est équilatéral, car les trois triangles *adf*, *bed*, *cfe* sont égaux ; donc $de = ef = fd$. Mais il est évident que les médianes des triangles équilatéraux *abc*, *def*, dont le second est inscrit au premier, passent par un même point ; donc il en est de même des médianes des triangles ABC, DEF ; car à la médiane *dl* correspond DL, etc.

M. N. Agromonof de Reval (Russie) a donné un complément très intéressant du théorème précédent (*Mathesis*, 1907, p. 98, no 9).

M. Gohierre de Longchamps, né à Alençon en 1842, mort à Paris en 1906, pendant longtemps professeur de mathématiques spéciales au lycée Charlemagne. Depuis 1882, le *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales* fut sous sa direction. Dans nos *Exercices de Géométrie descriptive* (4e édition), nous avons eu à citer plusieurs fois la *Géométrie analytique* de ce savant auteur.

* M. Brocard, commandant du génie. Un des principaux auteurs de la *Géométrie du triangle ;* il a publié de nombreux articles dans le *J. M. E. et S.*, dans *Mathesis* et dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*.

### Théorème 352. — III.

**1201 d.** *Sur chaque côté d'un triangle* ABC, *on construit des triangles semblables* AA'B, BB'C, CC'A, *ayant même orientation, tous à l'extérieur, ou tous à l'intérieur du triangle donné; prouver que les médianes de* A'B'C' *se coupent au même point que celles de* ABC.

Joignons A' au point milieu M de AB, et prenons MD = MA'; le triangle ADB est égal à BA'A : prouvons que DB'CC' est un parallélogramme.

1o Les triangles DBB' et CAB sont semblables comme ayant un angle égal, compris entre côtés proportionnels, car angle ABC = DBB' et $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BB'}}$ à cause des triangles semblables ABD et CBB'; il en résulte que l'inclinaison des côtés homologues DB', AC est égale à l'angle DBA, égal lui-même à C'CA : ainsi les droites CC', DB' sont parallèles;

on prouverait de même que DC′ est parallèle à CB′, et la figure DB′CC′ est donc un parallélogramme.

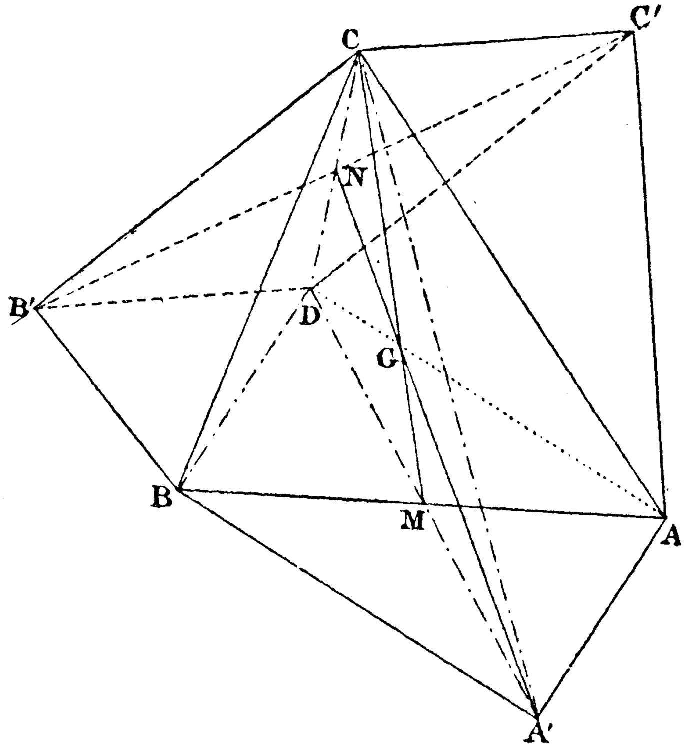



Fig. 733.

2° Dans le triangle CDA′ les médianes CM, A′N se coupent aux deux tiers de leur longueur; or CM est une des médianes du triangle donné ABC, et A′N est une des médianes du triangle obtenu A′B′C′; donc les deux triangles ont même centre de gravité G.

**1201 e. Note.** Pour la démonstration on peut voir aussi le traité de Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse, 1891. *Note* par M. Neuberg, page 462, n° 38.

Le théorème précédent est une généralisation de celui de Pappus (n° 1201); à son tour, il prête à diverses généralisations dues à MM. Neuberg, Laisant, Résal. (*Mathesis,* 1881, pages 166, 167 ; *N. A.*, 1881, page 337 ; *Projections et contre-projections,* par M. Neuberg, p. 52.)

* Laisant, auteur de nombreux articles insérés dans les *Nouvelles Annales,* la *Nouvelle correspondance mathématique, Mathesis ;* on connaît sa traduction des *Équipollences de Bellavitis* et son *Recueil de problèmes mathématiques* (1893).

* Résal, membre de l'Institut, auteur de savants travaux relatifs à la Mécanique.

### Théorème 352. — IV.

**1201 f.** *Si un triangle est inscrit à un triangle semblable, les projections de ses côtés sur les côtés homologues du triangle circonscrit sont respectivement égales aux moitiés de ces derniers côtés.* (E. Cesaro.)

(Voir *Mathesis,* 1885, p. 134, question 274.)

**Théorème de S. Roberts 353.**

**1202.** *Dans un trapèze isocèle articulé dont les deux côtés égaux et les diagonales ont des longueurs invariables, une droite* PMN, *menée parallèlement aux bases par un point fixe de* AB, *donne un produit* PM . PN *qui est constant, quel que soit le trapèze formé par les quatre droites données.* (*Nouvelle Correspondance de* M. CATALAN, 1877, p. 132.)

Soient
$$AP = m;\quad BP = n;$$
$$AB = CD = b;\quad AC = BD = a.$$

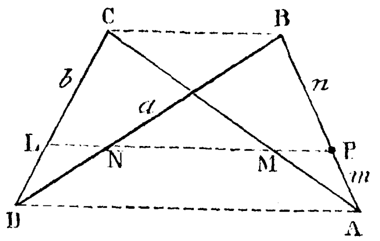



Fig. 734.

On a :
$$\frac{PM}{BC} = \frac{m}{m+n};\quad PM = BC \cdot \frac{m}{m+n},$$
$$\frac{PN}{AD} = \frac{n}{m+n};\quad PN = AD \cdot \frac{n}{m+n};$$
d'où
$$PM \cdot PN = AD \cdot BC \cdot \frac{mn}{(m+n)^2}. \tag{1}$$

Mais le trapèze isocèle est inscriptible; donc le produit des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés, ou
$$AD \cdot BC = a^2 - b^2;$$
donc
$$PM \cdot PN = (a^2 - b^2)\frac{mn}{(m+n)^2} \quad \text{quantité constante.}$$

*Remarques.* 1° $$MP \cdot ML = PM \cdot PN.$$

On peut donc prendre P ou M pour pôle d'inversion (nº 1203 **a**).

2° Le quadrilatère non convexe ABDC, dans lequel AC = BD et AB = CD, se nomme *contre-parallélogramme* (voir DOSTOR, *N. A.*, 1867, (2) VI, p. 57, et NEUBERG; *Mathesis,* 1887, p. 227).

3° Soit E le point de concours des diagonales égales, AE + EB = AC = constante ; donc, dans la déformation du quadrilatère articulé, lorsque AB est fixe, le point de concours E des diagonales décrit une ellipse, dont A et B sont les foyers.

**1203. Note sur les inverseurs.** L'*inverseur de M. Peaucellier* a résolu pour la première fois la transformation rigoureuse d'un mouvement circulaire en mouvement rectiligne. Cette découverte a été énoncée en termes généraux, et sous forme de question, en 1864, dans les *Nouvelles Annales de mathématiques,* p. 414. L'auteur en a donné un exposé détaillé, dans le même journal, en 1873, page 71 ; mais M. LIPKINE, de Saint-Pétersbourg, ayant trouvé la même solution en 1870, en avait présenté la description et la théorie à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1871.

Depuis cette époque, les études et les découvertes sur les inverseurs se sont succédé avec rapidité : M. SYLVESTER (1814-1897), célèbre géomètre anglais, a fait, en 1874, une lecture aussi belle que savante sur la *transformation du mouvement circulaire en mouvement rectiligne*. Deux autres savants de la même nation, MM. HART et KEMPE, ont établi de nouveaux modèles, pendant que M. PEAUCELLIER continuait à inventer de nouveaux *systèmes à tiges articulées*.

L'inverseur de HART n'a que cinq tiges ; il utilise le théorème de S. ROBERTS (n° 1202). L'*inverseur Peaucellier* en a sept ; il en est de même de celui de KEMPE (*N. A.*, 1875, page 552). Ce dernier inverseur repose sur le théorème suivant : *On donne un losange* ABCD, *un point* O *sur une de ses diagonales ; on forme ainsi un quadrilatère* AOCD *à diagonales rectangulaires ; sur* OC *considéré comme côté homologue de* CD, *on construit un quadrilatère* OCLM *semblable à* DAOC ; *prouver que la droite* AM *est perpendiculaire sur* AB.

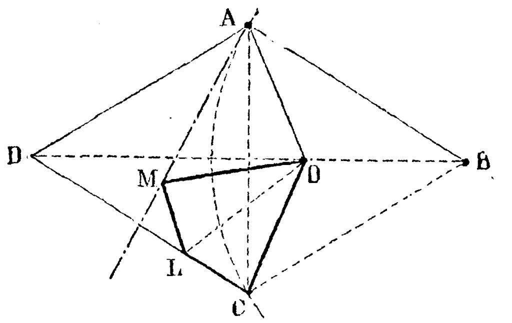


Fig. 735.

On peut recourir à la *Géométrie analytique* pour démontrer le *théorème de Kempe*, ou chercher une démonstration qui ne réclame que la connaissance des Éléments de Géométrie (n° 1198 **b**). (Voir aussi à ce sujet *N. A.*, 1875, page 553, et *Conférences de M. Neuberg*, citées ci-dessous.)

Depuis la rédaction de cette *note*, 1882, M. HART a fait connaître un nouvel inverseur à cinq tiges, et de son côté, M. KEMPE est parvenu au même résultat.

(Pour l'appareil de HART, voir *N. A.*, 1902, p. 127, art. de J. RÉVEILLE, professeur d'hydrographie.)

**1203 a. Pôle d'inversion.** Dans les *Inverseurs* de PEAUCELLIER, de HART, etc., on nomme *pôles d'inversion* l'origine P des rayons vecteurs PA, PC (fig. 723 et 724) ou PM, PN (fig. 734), dont le produit est constant.

Dans les inverseurs, à l'exception de celui de KEMPE, le pôle d'inversion et les deux extrémités des rayons vecteurs sont en ligne droite.

Pour tout ce qui est relatif aux inverseurs, il est utile de lire les articles suivants : dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1873, page 71 ; *Note sur une Question de géométrie de compas*, par M. PEAUCELLIER. — *Sur les Systèmes de tiges articulées*, par M. V. LIGUINE, professeur à Odessa, du même auteur, 1881, page 153. — *Étude du rapport des vitesses des divers mouvements à considérer dans l'inverseur Peaucellier*, par M. MAURICE D'OCAGNE, 1881, p. 456 ; 1884, p. 199, et 1882, p. 153, art. par LIGUINE.

On trouve dans la *Nouvelle correspondance mathématique* deux articles très remarquables, 1876, page 129 : *les Compas composés* de Peaucellier, Hart et Kempe, par M. P. MANSION, professeur à l'Université de Gand ; puis année 1877, pages 129 et 177, *sur la Production du mouvement rectilique exact, au moyen des tiges articulées*, par M. A.-B. KEMPE, de l'*Inner Temple*, ancien élève du collège de la Trinité, à Cambridge.

En 1879, dans le *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, pages 109, 144 et 151, M. G. DARBOUX a publié de savants articles sur les systèmes articulés.

En 1886, M. NEUBERG a donné *deux conférences sur quelques systèmes de tiges articulées ; tracé mécanique des lignes* (brochure de 48 pages). La démonstration du théorème de l'*inverseur de Kempe* (fig. 735) est à la page 18 de la publication du savant professeur de l'Université de Liége ; voir aussi la démonstration très simple que nous en donnons (n° 1198 **b**).

*Mathesis* (1894, page 111) offre encore une étude sur *quelques systèmes de tiges articulées*, par M. R. BRICARD, ingénieur à Dijon.

Enfin dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* (1902, p. 127), M. J. Réveille, professeur d'hydrographie, a publié une étude géométrique très intéressante sur le *système articulé de Hart* à cinq tiges, qui permet de décrire une droite ou une circonférence, et que MM. Darboux et Kœnigs avaient étudié par le calcul.

Dans la troisième partie des *Récréations mathématiques et Problèmes* de W. Rouse-Ball, traduits par M. Fitz-Patrick, le savant et très érudit M. A. Aubry a donné une fort belle étude sur la *Géométrie des systèmes articulés* (1909, p. 240 à 260.) Antérieurement, en 1900, le même auteur avait publié un travail remarquable : *Estudio sobre los cononicógrafios*, dans *El Progresso matemático* de Saragosse (1900, p. 337 à 363).

### Théorème 353. — I.

**1203 b.** *Si sur deux côtés opposés* AB, CD *d'un quadrilatère, on construit extérieurement et sur les deux autres côtés* BC, DA *intérieurement, les triangles* AA'B, CC'D, CB'B, AD'D, *semblables à un triangle donné, la figure* A'B'C'D' *sera un parallélogramme.* (H. Van Aubel, *Mathesis,* 1881, p. 167.)

Démonstration analogue à la première partie de 1201 **d.**

**Note.** * H. Van Aubel, professeur à l'Athénée d'Anvers, a proposé ou résolu d'intéressantes questions dans la *Nouvelle correspondance mathématique* (1874 à 1880).

### Théorème 353. — II.

**1203 c.** *On donne un quadrilatère quelconque* ABCD. *Sur chaque côté pris comme hypoténuse, on construit un triangle isocèle rectangle; les diagonales* A'C', B'D' *du quadrilatère des sommets* A'B'C'D' *sont égales et rectangulaires.*

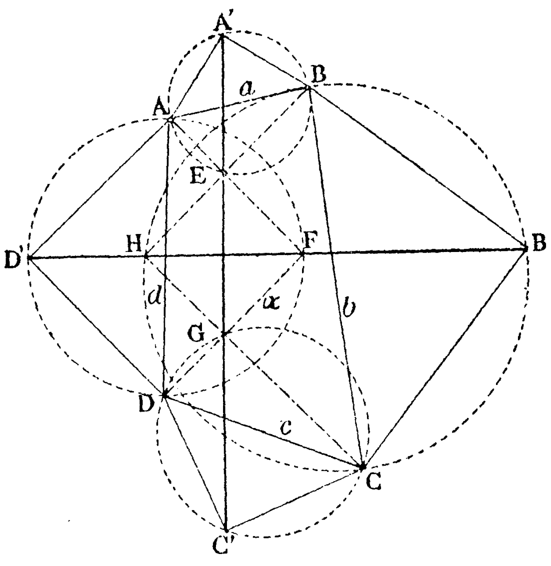



Fig. 735 *bis*.

1° Elles sont rectangulaires car elles sont les diagonales du carré EFGH circonscrit au quadrilatère ABCD (n° 1021).

2° Elles sont égales. Soit $\alpha$ le côté du carré EFGH.

La diagonale A'C' égale :

$$A'E + GC' + \alpha\sqrt{2}, \qquad (1)$$

et la diagonale D'B' égale :

$$D'F + HB' - \alpha\sqrt{2}; \qquad (2)$$

or dans le quadrilatère inscrit AEBA' on a :

$$AA' = A'B = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

et $$a \times A'E = (AE + EB)\frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad A'E = \frac{AE + EB}{\sqrt{2}},$$

de même,
$$GC' = \frac{DG + GC}{\sqrt{2}},$$

et
$$D'F = \frac{AF + DF}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad D'F = \frac{AE + DG + 2\alpha}{\sqrt{2}},$$

$$B'H = \frac{BH + HC}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad B'H = \frac{EB + GC + 2\alpha}{\sqrt{2}}.$$

En remplaçant les lignes des quantités (1) et (2) par leur valeur, on a :
$$A'C' = \frac{AE + EB + DG + GC}{\sqrt{2}} + \alpha\sqrt{2} = D'B'.$$

**Note.** L'énoncé est de M. Ed. Collignon, Inspecteur des ponts et chaussées (A. F., Marseille, p. 53).

### Théorème 354.

1204. *Dans un quadrilatère quelconque* ABCD, *la somme des carrés des diagonales* f *et* g *est double de la somme des carrés des deux droites* r *et* s *qui joignent les milieux des côtés opposés.*

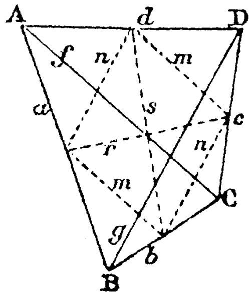


Fig. 736.

Les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme, dont les côtés sont moitié des diagonales du quadrilatère (nº 542) ; et dans ce parallélogramme, la somme des carrés des côtés égale la somme des carrés des diagonales (1190).

On a donc : $2m^2 + 2n^2 = r^2 + s^2,$

et $4m^2 + 4n^2 = 2(r^2 + s^2).$ (1)

Mais $4m^2 = (2m)^2 = f^2,$ et $4n^2 = (2n)^2 = g^2.$

L'égalité (1) devient donc : $f^2 + g^2 = 2(r^2 + s^2).$

**Note.** Ce théorème, proposé dans les *Annales de Gergonne,* tome II, 1811-1812, page 196, a été résolu page 310, par Encontre, Rochat, etc., dont les noms figurent fréquemment dans les *Annales.* L'étude de cette question a conduit à divers autres théorèmes, notamment aux suivants : *Dans tout tétraèdre la somme des carrés de deux arêtes opposées, plus le double du carré de la droite qui joint leurs milieux, est une quantité constante* (loc. cit., p. 314) ; puis au *Théorème d'Euler.* (*E. de G.*, nº 1205.)

### Théorème d'Euler 355.

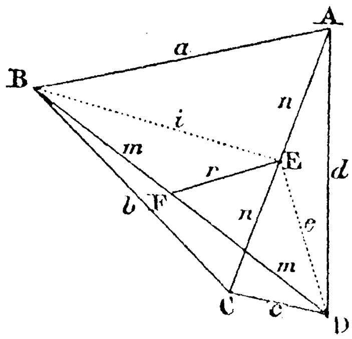


Fig. 737.

1205. *Dans un quadrilatère* ABCD, *la somme des carrés des côtés égale la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la droite* EF *qui joint les milieux des diagonales.*

Joignons le point E, milieu de l'une des diagonales, aux sommets opposés B et D. La droite BE sera une médiane du triangle ABC, DE une médiane du triangle CDA, et FE une médiane du triangle BED.

On aura donc : $a^2 + b^2 = 2i^2 + 2n^2,$

$$c^2 + d^2 = 2e^2 + 2n^2;$$

d'où, en additionnant :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2i^2 + 2e^2 + 4n^2.$$

Or $i^2 + e^2 = 2r^2 + 2m^2$; donc $2i^2 + 2e^2 = 4r^2 + 4m^2$,

et enfin $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (2m)^2 + (2n)^2 + 4r^2,$

ou $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \mathrm{BD}^2 + \mathrm{AC}^2 + 4r^2.$

**1206.** *Remarques.* 1° Le théorème est vrai pour le quadrilatère gauche, c'est-à-dire pour le quadrilatère dont les quatre côtés ne sont pas dans le même plan.

La démonstration est identique à celle qu'on vient de donner, bien que les diagonales du quadrilatère ne se rencontrent pas.

2° Le théorème 1190 n'est qu'un cas particulier de 1205; car, si le quadrilatère devient parallélogramme, la ligne qui joint les milieux des diagonales est nulle.

### Théorème 355. — I.

**1207.** *Dans un trapèze quelconque* ABCD, *la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des côtés non parallèles, plus deux fois le produit des bases.*

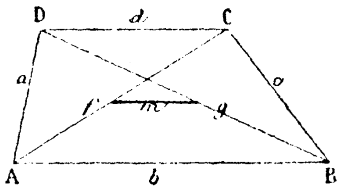



Fig. 738.

Menons la droite $m$ qui joint les milieux des diagonales. En appliquant au trapèze le théorème d'Euler (n° 1205), on a :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = f^2 + g^2 + 4m^2. \quad (1)$$

Or la droite $m$ qui joint les milieux des diagonales est égale à la demi-différence des bases (n° 530); on a donc :

$$b - d = 2m,$$

et, en élevant au carré, $b^2 + d^2 - 2bd = 4m^2.$ (2)

Si l'on retranche cette égalité de la première, il vient :

$$f^2 + g^2 = a^2 + c^2 + 2bd.$$

### Théorème 355. — II.

**1208.** *Lorsque, dans un trapèze, la petite base est la moitié de la grande base, la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés de la grande base et des côtés non parallèles.*

La droite $m$ est la demi-différence des bases; elle est donc la moitié de la petite base : $4m^2 = d^2.$

La formule connue

$$f^2 + g^2 + 4m^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

se réduit donc à $f^2 + g^2 = a^2 + b^2 + c^2.$

### 1er Théorème de Ptolémée 356.

**1209.** *Dans tout quadrilatère inscrit* ABCD, *le produit des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés.*

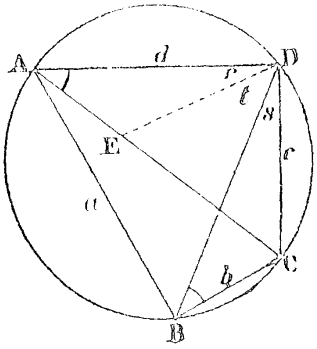


Fig. 739.

Il faut prouver que l'on a :

$$AC \cdot BD = ac + bd.$$

Faisons l'angle $r$ égal à l'angle $s$.

Les triangles DEA et DCB sont équiangles, car leurs angles A et B ont pour mesure la moitié de l'arc CD ; on a donc :

$$\frac{d}{BD} = \frac{AE}{b}; \quad \text{d'où} \quad bd = BD \cdot AE.$$

Les triangles CDE et BDA sont aussi équiangles, car leurs angles en C et B ont pour mesure la moitié de l'arc AD, et l'angle CDE ou $t + s$ de l'un égale ADB ou $t + r$ de l'autre ; on a donc :

$$\frac{c}{BD} = \frac{CE}{a}; \quad \text{d'où} \quad ac = BD \cdot CE.$$

En additionnant les résultats obtenus, on trouve :

$$ac + bd = BD(AE + CE) = BD \cdot AC.$$

**1209 a. Note.** Le théorème démontré (nº 1209) est celui que PTOLÉMÉE donne dans son *Almageste* pour la construction d'une table de la valeur des cordes inscrites dans le cercle, et répondant à des arcs donnés.

De ce théorème on peut déduire les principales formules de la Trigonométrie rectiligne, ainsi que CARNOT l'a montré dans sa *Géométrie de position.*

On peut voir à ce sujet l'*Aperçu historique* de CHASLES, et l'*Histoire des mathématiques,* par FERDINAND HOEFER.

Une démonstration très ingénieuse des *Théorèmes de Ptolémée* a été donnée par M. MANSION dans la *Nouvelle Correspondance mathématique,* 1876, p. 181.

Cette démonstration dans le cas où les diagonales sont orthogonales est due à BRAHMAGUPTA, géomètre indou du VIIe siècle.

Le *Traité de Géométrie* de MM. ROUCHÉ et COMBEROUSSE (septième édition, page 158, nº 240) donne une très belle démonstration qui a dû être suggérée par la construction de STURM du quadrilatère inscriptible (nº 151).

Voir aussi le *Bulletin de Mathématiques élementaires,* 1895-1896, page 144.

### 2e Théorème de Ptolémée 357.

**1210.** *Dans tout quadrilatère non inscriptible* ABCD, *le produit des diagonales est moindre que la somme des produits des côtés opposés.*

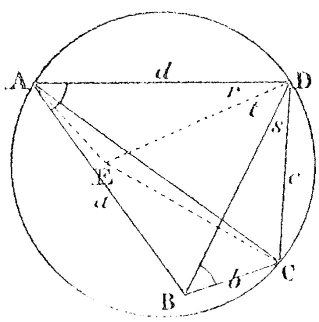


Fig. 740.

Il faut prouver que l'on a : $AC \cdot BD < ac + bd.$

Faisons passer une circonférence par trois des sommets, A, D, C, par exemple.

Faisons l'angle $r$ égal à $s$, et l'angle DAE égal à CBD, et menons EC. Le point B n'étant pas sur la circonférence, l'angle CBD n'a pas la même mesure que DAC, et ainsi la droite AE ne se confond pas avec AC.

Les triangles semblables DEA et DCB donnent :

$$\frac{d}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AE}}{b}\,; \quad \text{d'où} \quad bd = \mathrm{BD} \,.\, \mathrm{AE}. \qquad (1)$$

Ces mêmes triangles donnent encore $\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{DC}}$ ; et comme l'angle total $t + s = t + r$, les deux triangles CDE et BDA sont semblables, comme ayant en D un angle égal compris entre des côtés proportionnels, et l'on a :

$$\frac{c}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{CE}}{a}\,, \quad \text{d'où} \quad ac = \mathrm{BD} \,.\, \mathrm{CE}. \qquad (2)$$

En additionnant les résultats obtenus (1) et (2), on trouve :

$$ac + bd = \mathrm{BD}(\mathrm{AE} + \mathrm{CE}).$$

Et si l'on remplace $\mathrm{AE} + \mathrm{CE}$ par la valeur moindre AC, on aura :

$$\mathrm{BD} \,.\, \mathrm{AC} < ac + bd.$$

*Remarques.* 1° Le sommet B peut être indifféremment à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle, et l'énoncé n'est pas modifié.

2° Des deux premiers théorèmes de Ptolémée, on conclut que *si le produit des diagonales d'un quadrilatère est égal à la somme des produits des côtés opposés, le quadrilatère est inscriptible.*

### Théorème 357. — I.

**1211.** *Les diagonales d'un quadrilatère inscrit sont entre elles comme les sommes des produits des côtés qui aboutissent à leurs extrémités :* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{ab + cd}}{\mathrm{ad + bc}}$.

(La démonstration qui suit suppose connue la formule qui exprime la surface d'un triangle : l'aire du triangle ADC égale $^1/_2\, ny$, et l'aire du triangle ABC égale $^1/_2\, nz$; de sorte que l'aire du quadrilatère est $\frac{ny + nz}{2}$.)

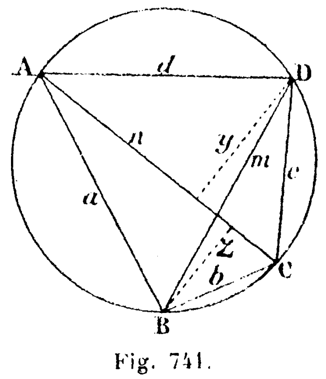



Fig. 741.

Appelons 2R le diamètre du cercle circonscrit.

On sait que le produit des deux côtés d'un triangle égale la hauteur relative au troisième côté, multipliée par le diamètre du cercle circonscrit. (G., nos 270 et 316, III.)

On a donc, dans les triangles ADC et ABC :

$$cd = 2\mathrm{R}y\,, \quad \text{d'où} \quad cdn = 2\mathrm{R}yn = 4\mathrm{R}\,\frac{yn}{2}\,;$$

$$ab = 2\mathrm{R}z\,, \quad \text{d'où} \quad abn = 2\mathrm{R}zn = 4\mathrm{R}\,\frac{zn}{2}.$$

Et en additionnant, $\quad n(ab + cd) = 4\mathrm{R} \times$ quadrilatère ABCD.

On trouverait de même : $m\,(ad + bc) = 4\mathrm{R} \times$ quadrilatère ABCD.

On a donc : $m(ad + bc) = n(ab + cd)$; d'où $\frac{m}{n} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$.

**1211 a. Note.** Le théorème relatif au rapport des diagonales d'un quadrilatère inscrit est souvent attribué par erreur à PTOLÉMÉE, mais il doit être postérieur à VIÈTE. (*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1900, page 323, n° 1719. Note de PAUL TANNERY.)

### Théorème 358.

**1212.** *Dans tout quadrilatère inscriptible, si l'on multiplie l'aire du triangle formé par trois des sommets, par le carré de la distance du quatrième sommet à un point quelconque du plan, la somme des produits relatifs aux deux triangles séparés par une même diagonale est égale à la somme des produits relatifs aux deux triangles séparés par l'autre diagonale* (*J. M. E. et S.*, 1882, p. 217. Note de X. ANTOMARI alors professeur à Carcassonne, mort à Paris, en 1902).

Les *théorèmes de Ptolémée* se déduisent facilement du théorème précédent.

### Théorème 358. — I.

**1212 a.** *Lorsque* DEF *est la* droite de Simson *du triangle* ABC *relativement au point* M, on a :

$$p \,.\, MA = q \,.\, MB = r \,.\, MC.$$

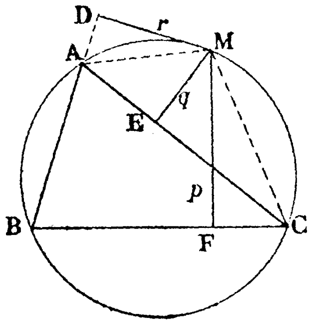


Fig. 741 *bis*.

En effet, les triangles rectangles MFC, MDA sont semblables, car les angles MCF, MAD ont même supplément ; donc on a :

$$\frac{MA}{r} = \frac{MC}{p};$$

d'où $$p \,.\, MA = r\, MC.$$

*Remarque.* La relation ci-dessus est utilisée pour l'étude du quadrilatère inscriptible : elle nous a été indiquée par M. E. LEMOINE, en 1907.

### Théorème 358. — II.

**1213.** *Lorsqu'une circonférence passe par le sommet* A *d'un parallélogramme et coupe la diagonale et les côtés aux points* L, M, N, *on a la relation* $AC \,.\, AL = AB \,.\, AM + AD \,.\, AN$.

Menons LM, LN, MN.

Le quadrilatère AMLN étant inscrit, on a :

$$AL \,.\, MN = AM \,.\, LN + AN \,.\, LM. (1)$$

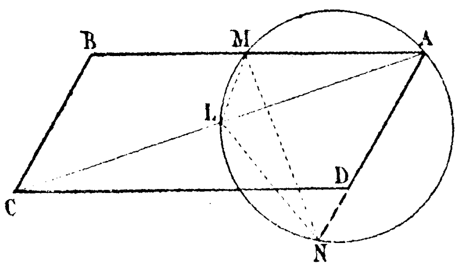


Fig. 742.

Les triangles ABC, NLM sont semblables ; donc

$$\frac{AC}{MN} = \frac{AB}{LN} = \frac{AD}{ML}. \qquad (2)$$

On peut multiplier chaque terme de l'égalité (1) par la même quantité ou par des quantités égales (2), et l'on trouve :

$$\frac{AC}{MN} \,.\, AL \,.\, MN = \frac{AB}{LN} \,.\, AM \,.\, LN + \frac{AD}{LM} \,.\, AN \,.\, LM,$$

d'où $$AC \,.\, AL = AB \,.\, AM + AD \,.\, AN.$$

*Remarque.* Les triangles semblables ABC, NLM donnent aussi :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{NL}{LM}, \quad \text{d'où} \quad AB \,.\, LM = AD \,.\, LN.$$

Le théorème connu (nº 1189) n'est qu'un cas particulier de celui que nous venons de démontrer.

### Théorème 358. — III.

**1213 a.** *Si sur les côtés d'un angle* A, *on prend deux points* M *et* N, *liés par la relation* $\beta \,.\, AM + \delta \,.\, AN = 1$, *où* $\beta$ *et* $\delta$ *sont des constantes, le cercle circonscrit au triangle* AMN *passe par un point fixe.* (*J. de M.* de VUIBERT, 1905, p. 87.)

En prenant $AB = \beta$, $AD = \delta$, le théorème précédent donne :

$$\frac{AB \,.\, AM + AD \,.\, AN}{AC \,.\, AL} = 1;$$

donc le point L est fixe sur la diagonale AC.

### Théorème de Pappus 359.

**1214.** *Le produit des distances d'un point quelconque* M *d'une circonférence à deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit* ABCD, *égale le produit des distances de ce même point aux deux autres côtés.*

Il faut prouver que l'on a : $ME \,.\, MG = MF \,.\, MH$ ou $eg = fh$.

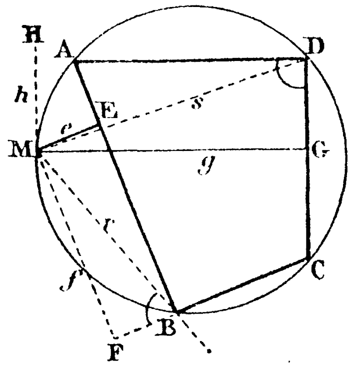
1re *Démonstration.* Joignons le point M à deux sommets opposés, B et D, par exemple, par les droites MB ou $r$, et MD ou $s$.

Les triangles MBE et MDH sont rectangles en E et H, et leurs angles en B et D ont l'un et l'autre pour mesure la moitié de l'arc AM; ainsi ces triangles sont semblables et donnent :

$$\frac{e}{h} = \frac{r}{s}. \qquad (1)$$

Les triangles MDG et MBF sont rectangles en G et F, et leurs angles en B et D ont l'un et l'autre pour mesure la moitié de l'arc CBM; ainsi ces triangles sont semblables et donnent :

$$\frac{g}{f} = \frac{s}{r}. \qquad (2)$$




MH perpendiculaire sur DA, et limitée à cette ligne.

Fig. 743.

En multipliant membre à membre les deux égalités obtenues, on a :

$$\frac{eg}{fh} = \frac{rs}{rs}; \quad \text{donc} \quad eg = fh.$$

2° *Démonstration.* On sait que le produit de deux côtés d'un triangle égale la hauteur abaissée sur le troisième côté, multipliée par le diamètre du cercle circonscrit. (G., n° 270.)

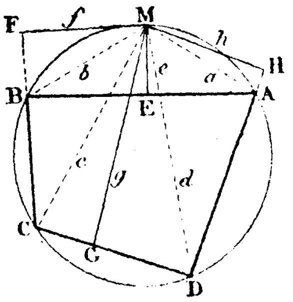


Fig. 744.

Prenons chaque côté du quadrilatère donné pour troisième côté d'un triangle qui aurait M pour sommet.

On aura : $ab = 2re$ et $cd = 2rg$,
$bc = 2rf$ et $da = 2rh$;

donc $abcd = 4r^2eg$,
$bcda = 4r^2fh$;

d'où $eg = fh$.

**1215. Cas particulier.** *Deux sommets C et D sont au même point.*

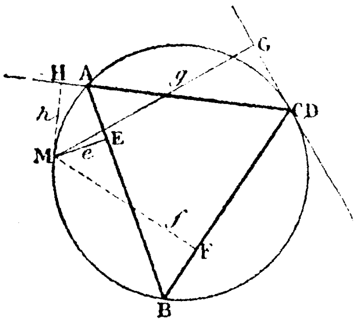


Fig. 745.

Le quadrilatère est remplacé par un triangle, et le côté CD est une tangente; on a encore :

$$eg = fh.$$

Ainsi on obtient le théorème suivant :

**1215 a.** *Lorsqu'une circonférence est circonscrite à un triangle, le produit des distances d'un point du cercle à deux côtés du triangle égale le produit des distances du même point au troisième côté et à la tangente menée par le sommet opposé.*

2° *Deux côtés opposés du quadrilatère* AB *et* CD *coïncident* (fig. 746).

On retrouve le théorème connu suivant :

**1215 b.** *La distance d'un point quelconque d'une circonférence à une corde donnée est moyenne proportionnelle entre les distances du même point aux tangentes menées par les extrémités de la corde.*

En effet, $eg = fh$ (fig. 746) revient à $e^2 = fh$.

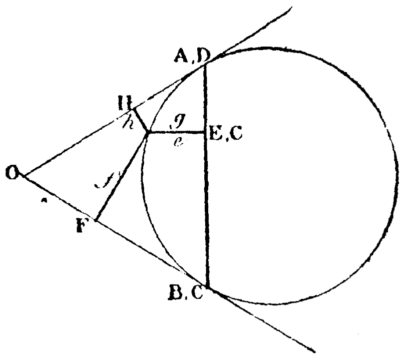


Fig. 746.

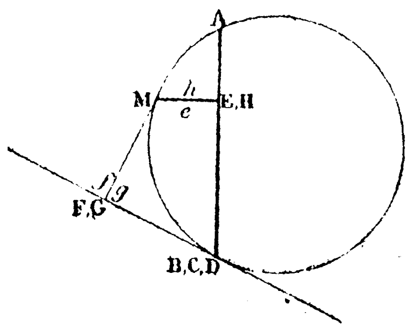


Fig. 747.

3° *Trois sommets* B, C, D *coïncident* (fig. 747).

La question n'offre plus d'intérêt, mais il est évident qu'on a encore :

$$eg = fh.$$

**1216.** 3e *Démonstration.* Le *théorème de Pappus* peut être démontré à l'aide d'un de ces cas particuliers (no 1215 **a**, 2o) établi directement. (*Méthodes*, no 25.) Cette nouvelle démonstration sera appliquée à une question beaucoup plus générale que celle du quadrilatère inscrit, et cette dernière elle-même deviendra ainsi un simple corollaire du théorème général que nous donnerons plus loin (no 1222).

**Théorème 359. — I.**

**1217.** *Le produit des distances d'un point quelconque* M *d'une circonférence à deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit, égale le produit des distances du même point aux deux diagonales.*

Démonstration analogue à celle qu'on a déjà donnée (no 1214).

D'ailleurs, il suffit de considérer les diagonales comme étant deux côtés opposés d'un quadrilatère.

**Théorème 359. — II.**

**1217 a** (nos 1214 et 1217). *Par un point quelconque* M *on mène une droite* e′ *qui coupe* AB *sous un angle donné* $\alpha$, *une droite* f′ *qui coupe* BC *sous un angle donné* $\beta$, *une droite* g′ *qui coupe* CD *sous un angle donné* $\gamma$, *et* h′ *qui coupe* DA *sous un angle* $\delta$. *Le rapport du produit des lignes qui coupent deux côtés opposés au produit des lignes qui coupent les deux autres côtés (ou les diagonales) est constant.*

La démonstration est identique à celle du théorème de *Desargues*, ci-après, relatif à l'involution (no 1219).

**Théorème 359. — III.**

**1218.** Théorème corrélatif du Théorème de Pappus. *Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, le produit des distances d'une tangente mobile à deux sommets opposés est au produit de ses distances aux deux autres sommets dans un rapport constant.* (Chasles.)

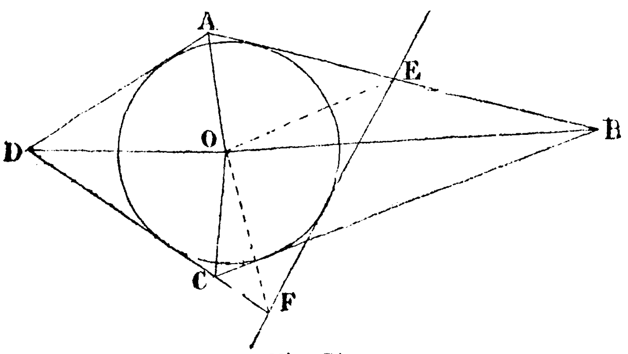



Fig. 748.

Soient $a$, $b$, $c$, $d$ les distances respectives des sommets A, B, C, D à la tangente EF.

Il faut prouver que $\dfrac{ac}{bd} = \textit{constante}.$

On a :
$$\frac{a}{b} = \frac{\text{AE}}{\text{BE}} = \frac{\text{tg AEO}}{\text{tg BEO}} = \frac{\text{AO sin AOE}}{\text{BO sin BOE}},$$
$$\frac{c}{d} = \frac{\text{CF}}{\text{DF}} = \frac{\text{tg CFO}}{\text{tg DFO}} = \frac{\text{CO sin COF}}{\text{DO sin DOF}},$$

donc $$\frac{ac}{bd} = \frac{AO \cdot CO}{BO \cdot DO} \cdot \frac{\sin AOE \sin COF}{\sin BOE \cdot \sin DOF}.$$

Or, les angles COB et FOE étant égaux (nº 739), il en résulte :

$$COF = BOE.$$

De plus, les angles FOE et AOD étant supplémentaires, il en résulte :

$$AOE + DOF = 180^\circ;$$

les sinus disparaissent deux à deux, et il reste :

$$\frac{ac}{bd} = \frac{AO \cdot CO}{BO \cdot DO} = constante.$$

### Théorème de Desargues 360.

**1219.** *Lorsqu'une sécante coupe une circonférence en deux points* M, M', *deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit en* A *et* A', *les deux autres côtés opposés en* B *et* B', *le rapport des produits des distances de* M *aux points déterminés sur les côtés opposés pris deux à deux égale le rapport des produits des distances de* M' *aux mêmes points.*

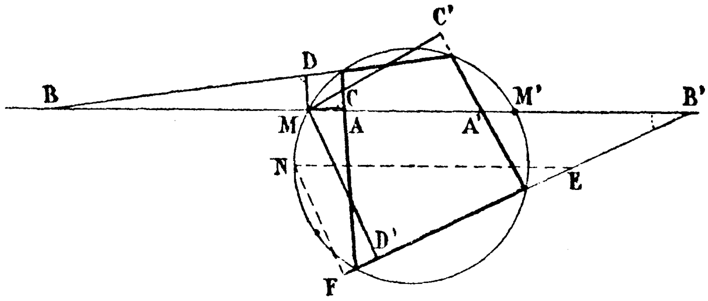



Fig. 749.

Du point M, abaissons les perpendiculaires MC, MC', MD, MD' sur les côtés du quadrilatère. On a (nº 1214) :

$$MC \cdot MC' = MD \cdot MD' \quad \text{ou} \quad \frac{MC \cdot MC'}{MD \cdot MD'} = 1. \qquad (1)$$

Or nous allons prouver que, pour une même direction de la sécante, le rapport $\frac{MA \cdot MA'}{MB \cdot MB'}$ est constant, quel que soit le point M.

Chaque triangle, tel que MD'B', reste semblable à lui-même; ainsi, pour un point N, on a le triangle NFE semblable à MD'B'; donc MB' = MD' multiplié par un rapport constant qui ne dépend que de l'angle B'; on aurait, en effet, $\frac{MB'}{MD'} = \frac{NE}{NF}$; d'où $MB' = MD' \cdot \frac{NE}{NF}$.

(D'ailleurs, le rapport $\frac{NE}{NF}$ n'est autre chose que l'inverse du sinus B' ou $\frac{1}{\sin B'}$.) Représentons $\frac{NE}{NF}$ par un rapport égal $\frac{1}{b'}$; on aura :

$$\frac{MB'}{MD'} = \frac{1}{b'}; \quad \text{d'où} \quad MD' = MB' \cdot b',$$

c'est-à-dire : $$MD' = MB' \sin B'.$$

On obtiendrait de même :

$$MD = MB \cdot b, \quad MC = MA \cdot a, \quad \text{et} \quad MC' = MA' \cdot a'.$$

Dans (1), remplaçons MC, MC', etc., par leurs valeurs respectives ;

on trouve : $\dfrac{MA \cdot a \times MA' \cdot a'}{MB \cdot b \times MB' \cdot b'} = 1$ ; d'où $\dfrac{MA \cdot MA'}{MB \cdot MB'} = \dfrac{bb'}{aa'}$.

Or $\dfrac{bb'}{aa'}$ est une quantité constante qui ne dépend que de la direction de la sécante ; on aurait donc aussi :

$$\frac{M'A \cdot M'A'}{M'B \cdot M'B'} = \frac{bb'}{aa'} ;$$

donc $$\frac{MA . MA'}{MB . MB'} = \frac{M'A \cdot M'A'}{M'B \cdot M'B'} .$$

**1220.** Corollaires. Le *théorème de Desargues* a un grand nombre de corollaires ; il faut se borner à citer les plus importants :

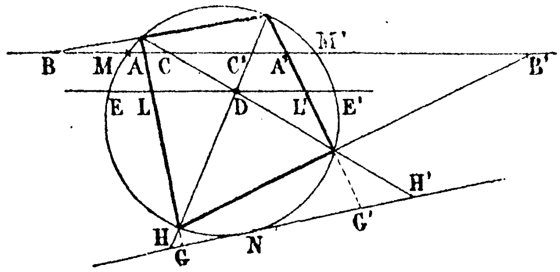


Fig. 750.

1° *Deux côtés opposés peuvent être remplacés par les deux diagonales.*

Les quatre couples de points A, A' ; B, B' ; C, C' ; M, M', étant pris trois à trois, donnent six points en involution ; on obtient quatre combinaisons différentes.

2° *Lorsque la transversale* EE' *passe par un point commun à deux côtés opposés ou aux diagonales, le point* D *est un point double.*

3° *Dans le cas particulier où le point* D *serait au milieu de la corde* EE', *les points* L, L' *seraient équidistants de* D ; *il en serait de même des points où la transversale couperait les deux autres côtés opposés.*

4° *La tangente* HH' *donne un point double* N.

5° *La transversale qui passerait par le point de concours* D *des diagonales et par le point de concours* A *de deux côtés opposés et qui rencontrerait la circonférence en* M *et* M', *donnerait une involution de quatre points, dont deux,* A *et* D, *seraient des points doubles.*

On aurait : $$\frac{MA^2}{MD^2} = \frac{M'A^2}{M'D^2} ,$$

car A et A' se confondent, et il en est de même de D et D'.

La proposition revient à $\dfrac{MA}{M'A} = \dfrac{MD}{M'D}$.

Ainsi M et M' sont les points conjugués qui divisent harmoniquement la droite AD.

**1221. Note sur l'involution.** Le *théorème de Desargues* est fondamental dans la *théorie de l'involution.*

L'égalité $$\frac{MA \cdot MA'}{MB \cdot MB'} = \frac{M'A \cdot M'A'}{M'B \cdot M'B'} , \tag{1}$$

qui a lieu entre huit quantités, peut se transformer en relation à six termes et donner : $$AB' \cdot BM' \cdot MA' = A'B \cdot B'M \cdot M'A. \tag{2}$$

Pour passer de la formule (1) à la formule (2), on peut recourir aux propriétés du *rapport anharmonique*. (Voir CHASLES, *Géométrie supérieure*, ch. IX, n° 184.)

On dit que six points, situés en ligne droite, sont en involution, lorsque le

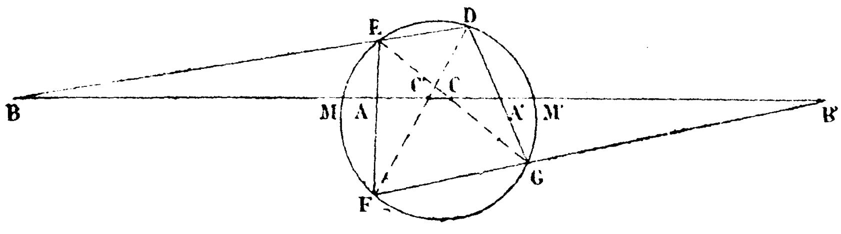



Fig. 751.

produit de trois segments rectilignes, n'ayant pas d'extrémité commune, égale le produit des trois autres segments.

*L'involution* est une méthode très féconde, surtout pour l'étude des coniques. DESARGUES a établi le théorème fondamental ; PASCAL l'a cité dans son *Essai sur les coniques*. CHASLES a rattaché l'involution à la théorie du *rapport anharmonique*.

Les principaux ouvrages que l'on peut consulter sont les suivants :

CHASLES, *Géométrie supérieure* ; HOUSEL, *Introduction à la Géométrie supérieure*. — CREMONA, *Géométrie projective* ; J. LENTHÉRIC, *Exposition élémentaire de la Géométrie moderne*. Ces deux derniers ouvrages se complètent l'un par l'autre : le premier est surtout descriptif, tandis que le second utilise principalement les relations algébriques.

On connaît aussi le bel Appendice au livre VIII du *Traité de Géométrie* de MM. ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE (7e édition).

Aucun ouvrage n'est plus élémentaire que l'*Introduction à l'étude de l'homographie* de M. RAYNAUD, professeur à Toulouse.

LENTHÉRIC, nom porté par trois honorables membres d'une même famille, successivement professeurs de mathématiques à Montpellier. Le premier, Pierre LENTHÉRIC (1793-1849), protégé par ENCONTRE, professeur à la faculté de Montpellier, auquel il succéda plus tard, a eu pour élèves : Ossian BONNET, l'abbé AOUST, E. ROCHE, son successeur à la faculté, et son neveu J. LENTHÉRIC, auteur de divers articles du *N. A.* (d'après O. TERQUEM, *N. A.*, 1850, p. 419). De nos jours, on connaît les ouvrages remarquables : *Les Villes mortes du golfe de Lion, le Rhône*, etc., par M. CH. LENTHÉRIC, ingénieur en chef des ponts et chaussées.

CREMONA, né à Pavie en 1830. On lui doit divers mémoires importants, ainsi que la *Géométrie projective*. Il professa à Crémone, Milan, Bologne et Rome, où il mourut en 1903.

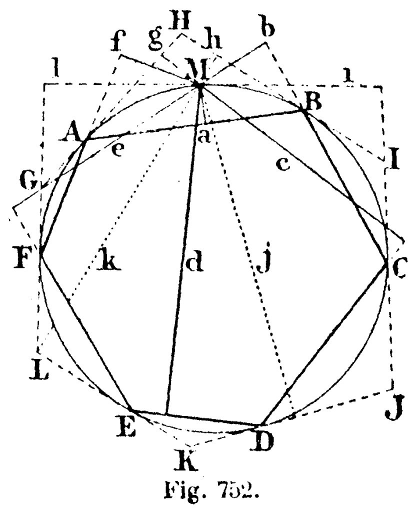



Fig. 752.

**Théorème 360. — I.**

**1222.** *Lorsqu'un polygone d'un nombre pair* 2n *de côtés est inscrit à une circonférence, le produit des distances d'un point quelconque de la circonférence à* n *côtés, n'ayant pas d'extrémité commune, égale le produit des distances du même point aux* n *autres côtés.*

Considérons des hexagones.

Soient $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ les distances de M aux côtés de l'hexagone inscrit, et $g, h, i, j, k, l$ les distances de M aux côtés de l'hexagone circonscrit, $a$ étant la perpendiculaire abaissée sur la corde qui correspond aux tangentes dont $g$, $h$ sont les distances au point M.

On sait que la distance d'un point M à une corde quelconque est moyenne proportionnelle entre les distances du même point aux deux tangentes correspondantes (nº 25); donc

$$a^2 = gh; \quad b^2 = hi; \quad c^2 = ij;$$
$$d^2 = jk; \quad e^2 = kl; \quad f^2 = lg;$$

donc
$$a^2c^2e^2 = gh \,.\, ij \,.\, kl,$$
$$b^2d^2f^2 = hi \,.\, jk \,.\, lg;$$

donc
$$ace = bdf.$$

**1223**. *Remarque*. Lorsque le polygone a un nombre impair de côtés $(2n - 1)$, on le considère comme étant un polygone de $2n$ côtés, en menant une tangente par l'un des sommets, ainsi qu'on l'a déjà indiqué (nº 1215).

### Théorème 360. — II.

**1224**. *Lorsqu'un polygone a pour sommets les points de contact d'un polygone circonscrit d'un nombre quelconque de côtés, le produit des distances d'un point quelconque de la circonférence aux côtés du polygone inscrit égale le produit des distances du même point aux côtés du polygone circonscrit.*

Soient $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ les distances de M aux côtés du polygone inscrit; $g$, $h$, $i$, $j$, $k$ les distances du même point aux côtés du polygone circonscrit.

Comme précédemment, on aura :

$$a^2 = gh; \quad b^2 = hi; \quad c^2 = ij; \quad d^2 = jk; \quad e^2 = kg;$$

d'où
$$abcde = ghijk.$$

### Théorème 360. — III.

**1225**. 1º Même énoncé pour les polygones inscrit et circonscrit (nº 1224). *Si l'on mène une sécante dans une direction donnée et qu'on désigne par* a, b, *etc.*, g, h, *etc.*, *les distances d'un point d'intersection* M *de la sécante et de la circonférence aux divers points où la sécante coupe les côtés, on aura :*

$$\frac{abcde}{ghijk} = \text{constante};$$

2º *En désignant par* a' b' ..... g', h' ..... *les distances du second point* M' *d'intersection de la circonférence aux points où la sécante coupe les côtés, on aura, quelle que soit la direction des sécantes menées :*

$$\frac{abcde}{ghijk} = \frac{a'b'c'd'e'}{g'h'i'j'k'}.$$

*Remarque*. La propriété fondamentale du quadrilatère inscriptible (nºs 1219 et 1221), relative à l'involution, est donc ainsi étendue à un polygone inscriptible quelconque (nº 1225, 2º).

## Transversales.

**1226.** Pour prouver que trois points donnés sont en ligne droite, ou que trois droites concourent au même point, il est parfois très utile de recourir aux théorèmes de *Ménélaüs* et de *Céva*. D'ailleurs la démonstration de ces deux théorèmes fondamentaux est si simple, qu'il serait très fâcheux d'en priver les élèves.

### Théorème de Ménélaüs 361.

**1227.** *Lorsqu'une transversale coupe les trois côtés d'un triangle, le produit de trois segments, n'ayant pas d'extrémité commune, égale le produit des trois autres segments.*

La démonstration donnée dans les *Éléments de Géométrie* (nº 743) est basée sur les lignes proportionnelles.

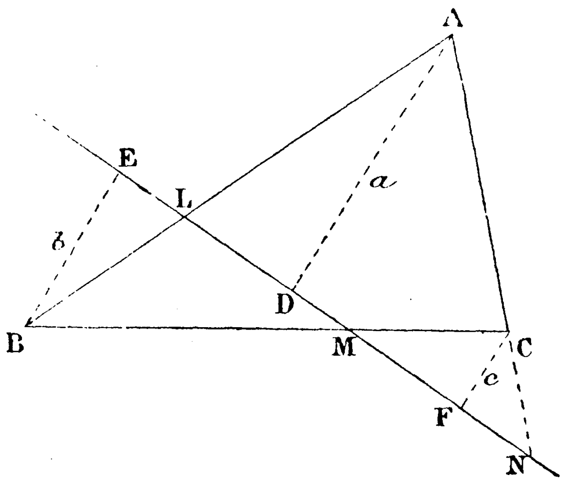


Fig. 753.

Dans les *Méthodes* (nº 166), on a recours aux surfaces auxiliaires. Au nº 180, la démonstration, extrêmement simple, est basée sur les projections, et se trouve indiquée dans le *Traité des propriétés projectives de Poncelet.*

Enfin, la démonstration suivante ne le cède en simplicité et en élégance à aucune des précédentes.

Par les trois sommets, menons trois droites parallèles entre elles; par exemple, des perpendiculaires $a$, $b$, $c$ à la transversale.

On a :

$$\frac{AL}{BL}=\frac{a}{b}, \quad \frac{BM}{CM}=\frac{b}{c}, \quad \frac{NC}{AN}=\frac{c}{a},$$

donc la relation à démontrer, ou

$$\frac{AL}{BL}\cdot\frac{BM}{CM}\cdot\frac{CN}{AN}=1,$$

revient à prouver qu'on a :

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1.$$

Or cette relation est évidente ; donc...

### Théorème R. 362.

**1228.** *Si trois points déterminent sur les côtés d'un triangle six segments tels que le produit de trois segments non consécutifs égale le produit des trois autres segments, les trois points sont en ligne droite.*

*Un seul des trois points doit se trouver sur le prolongement d'un côté, ou les trois points doivent se trouver sur les prolongements.*

On a recours à la *réduction par l'absurde.* (G., 745.)

### Théorème de Carnot. 362. — I.

**1229.** *Lorsqu'une transversale coupe les côtés d'un polygone plan, chaque côté est divisé en segments; le produit de tous les segments, n'ayant pas d'extrémité commune, égale le produit de tous les autres segments.*

(*Méthodes,* n° 181.)

### Théorème 363.

**1230.** 1° *Les bissectrices extérieures des angles d'un triangle rencontrent les côtés opposés en trois points situés en ligne droite.*

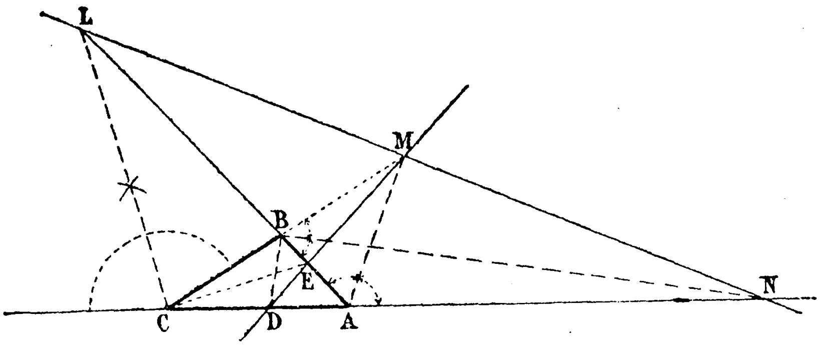



Fig. 754.

La bissectrice extérieure de l'angle C coupe le côté opposé AB au point L, etc. Il faut prouver que L, M et N sont en ligne droite.

Désignons les trois côtés du triangle par $a$, $b$, $c$.

Les segments AL, BL, déterminés par la bissectrice CL, sont proportionnels aux côtés AC et BC; on a donc :

$$\frac{AL}{BL}=\frac{b}{a}; \quad \frac{BM}{CM}=\frac{c}{b}; \quad \frac{CN}{AN}=\frac{a}{c};$$

d'où
$$\frac{AL}{BL}\cdot\frac{BM}{CM}\cdot\frac{CN}{AN}=\frac{bac}{abc}=1.$$

Donc les trois points L, M, N sont en ligne droite.

2° *Deux points* D, E *déterminés par les bissectrices intérieures et le point* M *de la bissectrice extérieure du troisième angle, sont en ligne droite.*

Même démonstration que précédemment (n° 1230).

On obtient trois nouvelles droites; ainsi les bissectrices intérieures et les bissectrices extérieures, en coupant les côtés opposés d'un triangle, donnent lieu à six points d'intersection.

*Remarque.* On peut voir pour ces théorèmes la *Géométrie supérieure* de CHASLES, n° 394.

### Théorème 363. — I.

**1231**. Transversales réciproques. *Une transversale coupe les côtés* a, b, c, *d'un triangle en trois points* L, M, N; *on prend les points symétriques de ces points par rapport au point milieu du côté considéré; prouver que* L′, M′, N′ *sont en ligne droite.*

La relation
$$\frac{AL}{BL}\cdot\frac{BM}{CM}\cdot\frac{CN}{AN}=1,$$
donne aussi :
$$\frac{AL'}{BL'}\cdot\frac{BM'}{CM'}\cdot\frac{CN'}{AN'}=1;$$
donc les trois nouveaux points sont en ligne droite.

**1231 a. Note.** Les points L, L′ symétriques par rapport au point milieu du côté *a*, etc., ont été nommés *points isotomiques ;* les droites AL, AL′ sont des *droites isotomiques.* (Voir ci-après, nº 2329.)

Les transversales LMN et L′M′N′ sont nommées *transversales réciproques.*

La théorie des *transversales réciproques* est due à M. G. DE LONGCHAMPS en 1866 ; le savant auteur en a donné depuis d'intéressantes et nombreuses applications : à ce sujet, on peut voir le *Journal de Mathématiques élémentaires,* 1880, page 272 ; le *J. de M. spéciales,* 1882, page 25 ; *Tranformation réciproque,* même année, pages 49, 77, 97 et 121.

Puis en 1885, *Essai sur la Géométrie de la règle et du compas ;* en 1886, *Généralités de la Géométrie du triangle.*

### Théorème 363. — II.

**1231 b.** *Une transversale donnée* DEF *coupe les côtés* a, b, c *d'un triangle* ABC; *elle divise le côté* a *au point* D *dans un certain rapport tel qu'on a :*
$$\frac{DB}{DC}=\frac{m}{n},$$
*de même*
$$\frac{EC}{EA}=\frac{p}{q}\quad et\quad \frac{FA}{FB}=\frac{r}{s};$$
*si* E′ *divise le côté* CA *dans le rapport* $\frac{m}{n}$, F′ *le côté* AB *dans le rapport* $\frac{p}{q}$, *et* D′ *le côté* BC *dans un rapport* $\frac{r}{s}$, *les trois points* D′, E′, F′ *sont en ligne droite.*

En effet, en exprimant chaque segment en fonction du côté correspondant et du rapport donné par le point de division, on peut remplacer
$$\frac{DB}{DC}\text{ par }\frac{am}{an},\quad \frac{EC}{EA}\text{ par }\frac{bp}{bq}\quad\text{et}\quad \frac{FA}{FB}\text{ par }\frac{cr}{cs}.$$
La relation connue devient :
$$\frac{am}{an}\cdot\frac{bp}{bq}\cdot\frac{cr}{cs}=-1. \tag{1}$$
Dans le second cas, c'est le côté *b* qui est divisé par E′ dans le rap-

port $\frac{m}{n}$, $c$ dans le rapport $\frac{p}{q}$ et $a$ dans le rapport $\frac{r}{s}$; donc on a :

$$\frac{ar}{as} \cdot \frac{bm}{bn} \cdot \frac{cp}{cq} = -1; \qquad (2)$$

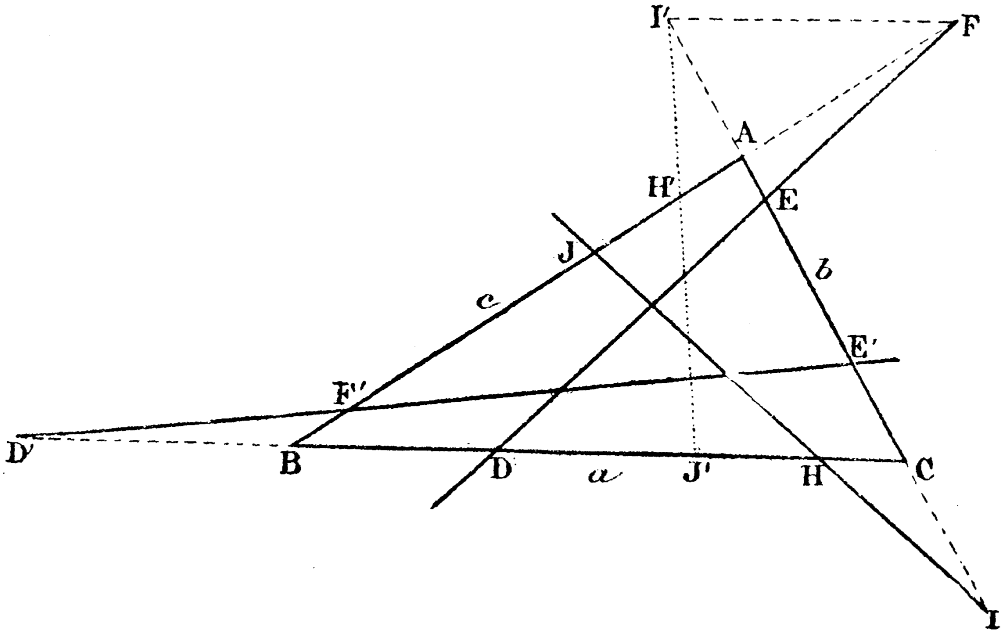



Fig. 755.

car le premier membre de (1) et de (2) sont identiques, puisque chacun d'eux se réduit à $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$.

**1231 c.** *Remarque.* Avec des rapports donnés, en suivant le périmètre du triangle dans un sens déterminé, on obtient trois transversales, et en suivant le périmètre en sens contraire, on obtient les transversales réciproques des trois premières.

On a donc en tout six groupes de trois points collinéaires.

Extension analogue pour le *théorème de Ceva ;* ce qui permet d'avoir en tout six points de concours, lorsque l'un d'eux est donné.

### Théorème 363. — III.

**1232.** *La médiane* AD *d'un triangle quelconque* BAC *coupe la corde* EF *d'un arc décrit du sommet* A, *et limité aux côtés du triangle en deux parties, dont le rapport est inverse de celui des côtés* AB, AC. (Housel, *Introduction à la Géométrie supérieure*, p. 175.)

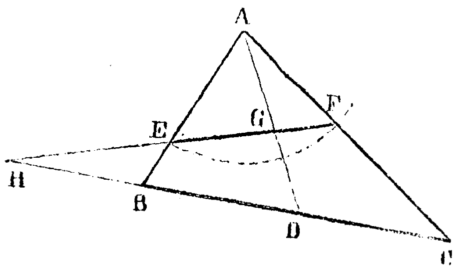



Fig. 756.

Prolongeons EF et BC jusqu'à leur rencontre; considérons les deux triangles BEH, CFH et la transversale AD; on a :

$$HD \cdot BA \cdot EG = BD \cdot EA \cdot HG,$$

$$CD \cdot FA \cdot HG = HD \cdot CA \cdot FG.$$

Multiplions ces deux égalités membre à membre, supprimons les facteurs HD, HG communs aux deux termes de l'égalité et les facteurs égaux AE, AF et BD, CD; on trouve :

$$BA \,.\, EG = CA \,.\, FG,$$

d'où

$$\frac{AB}{AC} = \frac{FG}{EG}.$$

*Remarque.* Lorsqu'on mène AD de manière que $\frac{CD}{BD} = \frac{BA}{CA}$, on a la relation

$$\frac{FG}{EG} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

**Théorème 364.**

**1233.** *Les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.* (Gauss, en 1810.)

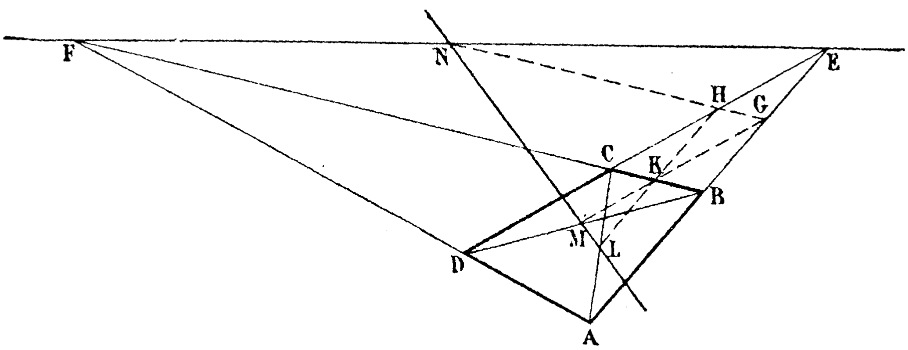



Fig. 757.

Pour prouver que L, M, N sont trois points en ligne droite, considérons le triangle GHK formé en joignant deux à deux les points milieux du triangle BCE.

Le côté HK passe par le point L milieu de AC, GK passe par M milieu de BD, et GH par N.

Il suffit donc de démontrer qu'on a la relation

$$\frac{GM}{MK} \cdot \frac{KL}{HL} \cdot \frac{HN}{GN} = 1. \qquad (\text{n}^\circ\ 1228)$$

Or chacun des six segments ci-dessus est la moitié du segment correspondant que la transversale ADF déterminerait sur les côtés du triangle BCE. En effet, $GM = {}^1/_2\,ED$, $KM = {}^1/_2\,CD$, etc. Donc la relation écrite est exacte, car les segments de longueur double, déterminés par la transversale ADF, donnent une relation analogue.

Ainsi, L, M, N sont en ligne droite.

**1233 a. Note.** La démonstration ci-dessus a été donnée par J. Mention dans les *N. A.* de 1853, p. 420; elle est plus élégante et plus rapide que celle de Bobillier ; cette dernière a été reproduite par Blanchet dans son *Appendice aux Éléments de Géométrie.*

La droite qui passe par les points milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet est appelée parfois *Droite de Newton*. On trouve aussi *ligne de Gauss* du quadrilatère.

(*Mathesis*, 1902, page 170. Question 1188 bis, 1906, p. 143, n° 1278.)

Voir aussi *Die Elémente der Mathematik*, von Dr Baltzer, ou *Elementi di Mathematica* del Dr B., § 7, n° 5.

### Théorème de Rochat 364. — I.

**1233 b.** Dans tout quadrilatère complet, les trois diagonales peuvent être prises deux à deux de trois manières différentes, ce qui permet de considérer trois quadrilatères simples; en appelant *centre* du quadrilatère, le centre des moyennes distances de ses quatre sommets, on a le théorème suivant :

1° *Le milieu des trois diagonales sont sur une même droite* (n° 1233).

2° *La droite qui contient les milieux des diagonales contient aussi les centres des trois quadrilatères simples, en sorte que six points sont sur une même droite.*

3° *Les distances entre les milieux de deux quelconques des diagonales sont doubles de la distance entre les centres des deux quadrilatères simples auxquels ces diagonales appartiennent.*

**Note.** Le nom de *Théorème de Rochat* est dû à Gergonne. (*Annales*, t. I, 1810-1811, p. 314.)

La première partie, due à Gauss, a été démontrée ci-dessus (n° 1233).

* Rochat, professeur de navigation à Saint-Brieuc, a donné le théorème qui porte son nom, à l'occasion de l'exercice du n° 548 ; ce même auteur a répondu fréquemment aux questions proposées dans les premiers volumes des *A. de G.*

### Théorème 365.

**1234.** *Si d'un point quelconque du cercle circonscrit à un triangle, on mène des droites qui fassent, dans le même sens, des angles égaux avec les côtés du triangle, les pieds de ces droites seront sur une même ligne droite.*

Soit l'angle CEO = CFO = BDO.

Les triangles COE, AOD sont semblables, car E = D, et les angles DAO, ECO sont égaux, comme suppléments l'un et l'autre de l'angle BAO ; donc

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AO}{CO}. \qquad (1)$$

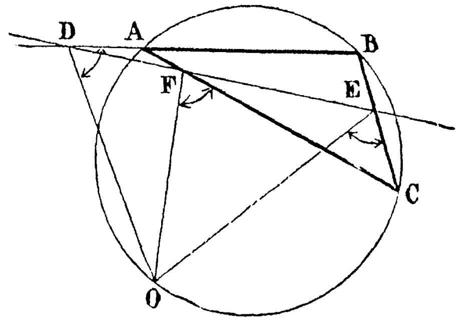


Fig. 758.

Les triangles OBE, AOF sont aussi semblables, car les angles en A et en B sont égaux, et il en est de même dans les angles en E et en F.

Donc $$\frac{BE}{AF} = \frac{BO}{AO}.$$

Les triangles COF, BOD sont aussi semblables, car les angles F et D sont égaux entre eux, et les angles OCF, OBD ont même mesure.

Donc
$$\frac{CF}{BD}=\frac{CO}{BO}.$$

En multipliant membre à membre les trois égalités, on trouve :
$$\frac{AD \cdot BE \cdot CF}{BD \cdot CE \cdot AF}=\frac{AO \cdot BO \cdot CO}{CO \cdot AO \cdot BO}=1.$$

Donc les trois points D, E, F sont en ligne droite (n° 1228).

**1235.** *Remarques.* 1° Le théorème de *Robert Simson* ou de *Wallace* (n° 22) n'est qu'un cas particulier du précédent.

L'extension ci-dessus (n° 1234) est de CARNOT.

2° Le théorème (n° 1234) est intuitif lorsqu'on connaît les propositions relatives aux *lignes isoclines* (n°s 2457 et suivants); c'est-à-dire aux lignes qui, partant d'un même point O, coupent les côtés d'un polygone sous le même angle et dans la même direction, en suivant le périmètre du polygone d'un mouvement continu.

Il suffit de dire :

Les normales issues d'un même point O du cercle circonscrit donnent lieu à un triangle podaire, qui se réduit à une droite ; il en est donc de même des isoclines menées par le même point, sous une inclinaison quelconque. (Voir ci-après, n° 2464.)

3° Le théorème attribué à SALMON (n° 766) peut recevoir l'extension suivante. *Lorsque sur trois cordes* AO, BO, CO (fig. 758), *issues d'un même point* O, *on décrit des arcs de segment capables d'un angle donné* $\alpha$, *on obtient six cercles qui se coupent deux à deux en six autres points placés trois à trois sur deux droites.*

**Théorème 365. — I.**

**1236.** *On donne une circonférence et deux points fixes* A *et* B; *par ce dernier on mène une corde quelconque* CBD *et les sécantes* ACC′, ADD′. *Prouver que la corde* C′D′ *passe par un point fixe.* (PONCELET, *Application d'analyse et de Géométrie.*)

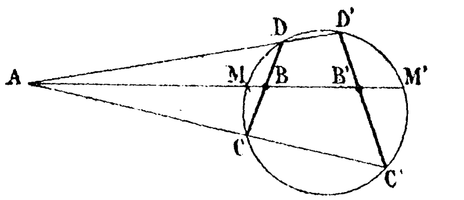


Fig. 759.

1re *Démonstration.* En appliquant l'*homologie* (n° 1249) on fait passer le point A à l'infini; les droites DD′, CC′ deviennent parallèles et sont menées dans une direction constante; dès lors la figure obtenue est un trapèze isocèle, et le côté C′D′ passe évidemment par un point fixe B′, symétrique de B par rapport au diamètre perpendiculaire aux bases (n° 607).

Donc, dans la figure donnée, le côté C′D′ passe aussi par un point fixe.

2e *Démonstration* (fig. 759). Le *Théorème de Desargues*, relatif à l'involution (n° 1249), donne la démonstration sans qu'il soit nécessaire de recourir à l'homologie.

En effet, A, étant le point de concours des côtés opposés du quadrilatère, est un point double de l'involution; on a :
$$\frac{MA^2}{MB \cdot MB'}=\frac{M'A^2}{M'B \cdot M'B'};\quad \text{d'où}\quad \frac{M'B'}{MB'}=\frac{M'A^2 \cdot MB}{M'B \cdot MA^2}.$$

Le membre de droite est constant; donc le rapport $\frac{M'B'}{MB'}$ est connu, et le point B' est déterminé de position (G., n° 208).

**1237.** 3e *Démonstration* (fig. 760). Soient O le point de concours de CD et C'D', puis P le point où la polaire de A coupe AB'. Cette polaire HP

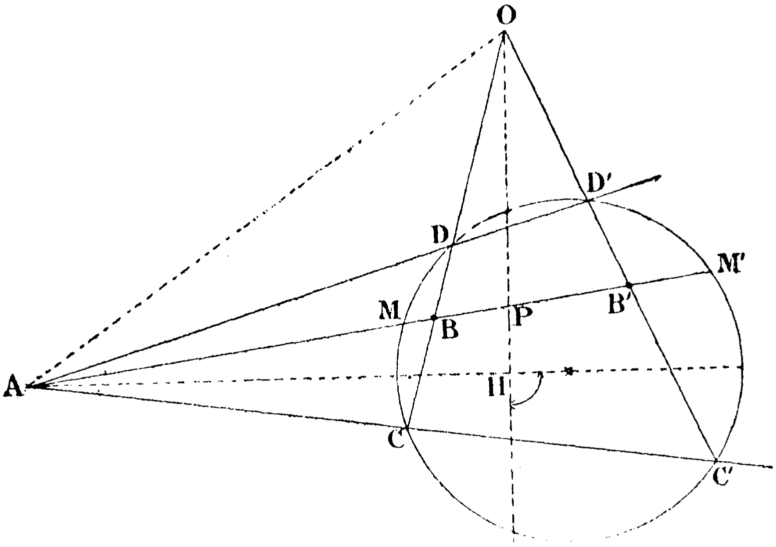



Fig. 760.

passe par le point de concours O des droites CD, C'D', et le faisceau (OA, ODBC, OP, OD'B'C') est harmonique. Par conséquent, les quatre points A, B, P, B' communs à ce faisceau et à la droite AB forment une division harmonique. Les points A, B, P étant fixes, il en est de même du quatrième B'. (D'après *J. M. E.*, 1890, page 208. SOLLERTINSKY.)

**Théorème 365. — II.**

**1237 a.** *Lorsqu'un quadrilatère* ABCD *est inscrit, les couples de tangentes menées au cercle circonscrit par les sommets opposés se coupent sur la troisième diagonale.*

Les tangentes BL, DL se coupent sur MN. Il en serait de même des tangentes FAE, GCH.

C'est un simple corollaire de l'*hexagramme de Pascal*. (*G.*, nos 747, 748, 2°, et *E. de G.*, n° 1117 c.)

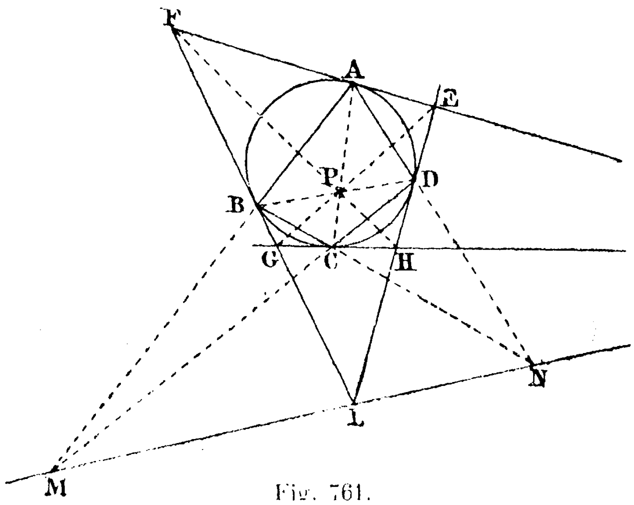



Fig. 761.

*Remarques*. 1° Le point de concours P des diagonales du quadrilatère circonscrit, ou *point de Brianchon* (G., n° 807), est le pôle de la *Pascale* MN du quadrilatère inscrit.

2° Les cordes de contact AC, BD passent par P.

**1237 b.** *Extension.* A un quadrilatère quelconque, on peut circonscrire une infinité de coniques; *les couples des tangentes menées à la conique circonscrite par les sommets opposés du quadrilatère se coupent sur la troisième diagonale de cette figure,* parce que les théorèmes de Pascal et de Brianchon sont applicables à une conique quelconque.

### Théorème 366.

**1238.** *Deux cordes* AD *et* BC *se coupent au milieu* O *d'une troisième corde* EF. *Prouver que les segments* OM, ON, *interceptés sur* EF *par les droites* AC *et* BD, *sont égaux.*

1re *Démonstration.* Il est possible de démontrer le théorème en se bornant à recourir aux *Éléments de Géométrie,* mais la marche à suivre est lente et pénible : inutile de la reproduire ici, car on peut consulter les précédentes éditions des *Exercices de Géométrie* (2e et 3e).

2e *Démonstration.* On peut utiliser le *théorème de Ménélaüs,* relatif aux transversales (no 1227).

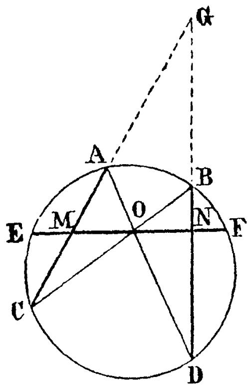


Fig. 762.

Le triangle MGN, coupé par BC et par AD, donne :

$$\frac{OM}{ON} \cdot \frac{BN}{BG} \cdot \frac{CG}{CM} = 1,$$

$$\frac{OM}{ON} \cdot \frac{DN}{DG} \cdot \frac{AG}{AM} = 1.$$

Multiplions membre à membre on trouve :

$$\frac{OM^2}{ON^2} \cdot \frac{BN \,.\, DN}{CM \,.\, AM} \cdot \frac{CG \,.\, AG}{BG \,.\, DG} = 1.$$

Nous pouvons supprimer la dernière fraction, car $CG \,.\, AG = BG \,.\, DG$,

d'où
$$\frac{OM^2}{ON^2} = \frac{AM \,.\, CM}{BN \,.\, DN}.$$

Nous retrouvons l'égalité connue (6) de la première démonstration,

donc
$$OM = ON.$$

3e *Démonstration* (fig. 762). La question proposée n'est qu'un cas particulier du *théorème de Desargues* sur l'involution (no 1219). En vertu de ce théorème, en prenant AC et BD comme côtés opposés du quadrilatère inscrit ABCD et AD, BC comme diagonales, on a :

$$\frac{EM \,.\, EN}{EO \,.\, EO} = \frac{FM \,.\, FN}{FO \,.\, FO}.$$

Mais le point O est le point milieu de EF; ainsi les dénominateurs sont égaux, et par suite il en est de même des numérateurs;

$$EM \,.\, EN = FM \,.\, FN,$$

d'où
$$\frac{EM}{FN} = \frac{FM}{EN}.$$

Or cette proportion ne peut être vérifiée que par $EM = FN$; donc..

4e *Démonstration.* On a recours aux polaires et aux faisceaux harmoniques. (G., no 803.)

**1239.** *Remarques.* 1o On peut énoncer le théorème comme il suit : *Les angles opposés d'un quadrilatère inscrit interceptent des segments égaux sur la perpendiculaire menée du point de concours des diagonales, sur la droite qui joint ce point au centre du cercle.*

2o En employant le *théorème de Desargues*, on reconnaît que le théorème proposé subsiste, lorsque les points I et J (fig. 763), au lieu de coïncider, sont équidistants du milieu O de la corde.

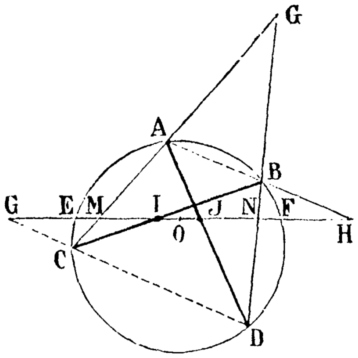


Fig. 763.

3o Les côtés opposés AB, CD donnent aussi OG = OH. Il suffit que les deux points d'un des trois couples IJ, MN ou GH soient équidistants du milieu de la corde, pour qu'il en soit de même des points des deux autres couples.

**1239 a. Note.** 1o L'exemple donné montre combien il est important d'étudier quelques théorèmes fondamentaux, tels que ceux de Ménélaüs sur les transversales (no 1227) ; de Desargues, pour les trois couples de points en involution (no 1219) ; et il en est de même de celui de Céva, pour les droites concourantes (no 1240), car rien n'est plus facile que de prendre un des cas particuliers de ces théorèmes et de le proposer comme question élémentaire ; mais il est souvent difficile de traiter la question à l'aide des seules ressources que fournissent les *Éléments de Géométrie.* Ainsi la 1re *démonstration,* uniquement basée sur les théorèmes les plus connus des *Éléments,* est extrêmement laborieuse ; la 2e *démonstration,* qui utilise les *transversales,* est encore assez longue ; tandis que la 3e *démonstration,* qui se rapporte à l'*involution,* est d'une très grande simplicité ; il en est de même de la 4e, donnée dans les *Éléments* (G., no 803), et qui se base sur la *théorie des polaires.*

2o L'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1907, p. 3266, demande le *théorème dualistique* du précédent (E.-B. Escott). M. H. Brocard renvoie à divers ouvrages, notamment aux *Exercices de Géométrie,* pages 523-525.

Voir aussi E.-A. Majol et M. Lerch, dans l'*Intermédiaire,* 1908, pages 20 à 22, no 3266 ; page 140, par M. Plancherel.

### Théorème de Céva 367.

**1240.** *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle à un même point déterminent sur les côtés six segments tels que le produit de trois d'entre eux, n'ayant pas d'extrémité commune, égale le produit des trois autres.*

(G., no 749; *Méthodes,* no 167.)

*Autres démonstrations.* 1o A cause du quadrilatère complet OMAN, les points L et P sont conjugués harmoniques par rapport à BC.

On a : $$\frac{LB}{LC} = -\frac{PB}{PC};$$

donc les relations $\frac{NC}{NA} \cdot \frac{MA}{MB} \cdot \frac{LB}{LC} = -1$,

$\frac{NC}{NA} \cdot \frac{MA}{MB} \cdot \frac{PB}{PC} = 1$ s'entraînent mutuellement.

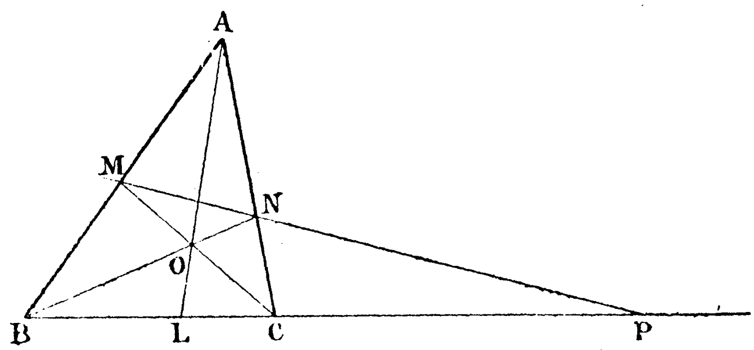



Fig. 764.

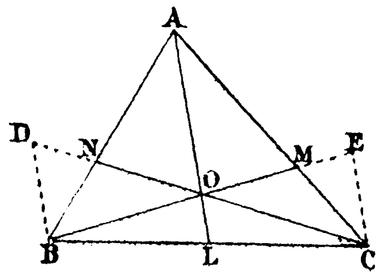



Fig. 765.

2° Menons BD, CE parallèles à AL; on a :

$$\frac{LB}{LC} = \frac{BD}{EC},$$

$$\frac{MC}{MA} = \frac{EC}{OA}; \quad \frac{NA}{NB} = \frac{OA}{DB};$$

d'où $$\frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1,$$

**1240 a. Note.** 1° La 2e démonstration est de M. Monsallut, professeur au lycée de Limoges. (*Journal de Math. élém. de Vuibert,* 1er janvier 1901.)

2° On peut nommer *céviennes* les droites qui partent du sommet d'un triangle (n° 167 R) ; alors le théorème s'énonce comme il suit : *Trois céviennes concourantes déterminent,* etc.

Le terme *cévienne* a été proposé par M. Poulain (voir *J. M. E.,* 1888, p. 278).

' Poulain, S. J., professeur à la Faculté catholique d'Angers, auteur de nombreux articles dans le *J. M. E. et S.,* ainsi que du remarquable travail intitulé : *Principes de la nouvelle Géométrie du triangle.*

### Théorème 368.

**1241.** *Si trois points situés sur les côtés d'un triangle divisent les côtés en six segments tels que le produit de trois segments non consécutifs égale le produit des trois autres, les trois droites, qui joignent chacun de ces points au sommet opposé, passent par un même point.*

*Les trois points sont sur les côtés, ou bien un seul est sur un côté et les deux autres sur les prolongements.*

Pour ce théorème réciproque, on a recours à la démonstration par l'absurde. (G., n° 751.)

### Théorème 368. — I.

**1241 a.** *Trois droites issues des sommets d'un triangle se coupent en un même point, si elles partagent les côtés opposés en parties proportionnelles aux angles adjacents.*

Le théorème peut être généralisé : il suffit que *les grandeurs soient proportionnelles aux mêmes fonctions des angles adjacents*, ou même à trois grandeurs quelconques, chacune d'elles correspondant à un des côtés. (Général DE COATPONT; voir *N. C. M.*, 1879, pp. 384 et 438.)

*Exemple :* Si l'on divise les côtés en parties proportionnelles aux nombres de degrés des angles adjacents, on peut représenter les deux segments de $a$ par $a \, . \, B^o$ et $a \, . \, C^o$, etc.

On a :
$$\frac{a \, . \, B^o}{a \, . \, C^o} \cdot \frac{b \, . \, C^o}{b \, . \, A^o} \cdot \frac{c \, . \, A^o}{c \, . \, B^o} = 1.$$

**1241 b.** *Remarque.* La question précédente offre l'exemple, fort rare, d'une relation directe entre des angles et des lignes, et c'est avec raison que l'auteur de la question appelle l'attention sur cette particularité. (*Nouvelle Correspondance mathématique,* 1879, p. 438.)

**Théorème 369.**

**1242.** 1° *Les droites qui joignent les points de contact du cercle inscrit à un triangle, aux sommets opposés, se coupent au même point.*

2° *Il en est de même pour les points de contact de chaque cercle exinscrit.*

1° On a :
$$BE = BD,$$
$$CF = CE,$$
$$AD = AF.$$

En multipliant membre à membre, on trouve :
$$BE \, . \, CF \, . \, AD = BE \, . \, CE \, . \, AF.$$

Donc, d'après le *théorème de Céva* (n° 1240), les droites se coupent en un même point O.

2° Les *cévriennes* AE', BF', CD', relatives au même cercle exinscrit, se coupent en un même point O'.

3° Même démonstration pour les trois droites analogues à la ligne AE', qui joignent chaque sommet au point de contact du cercle exinscrit opposé.

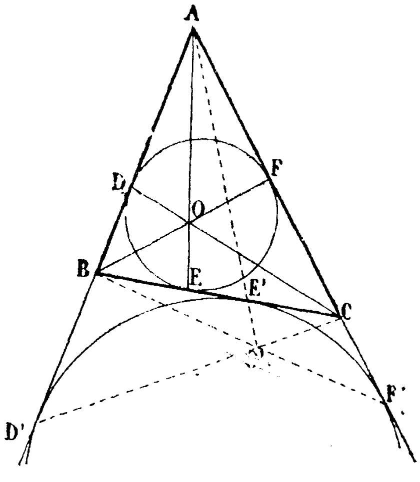


Fig. 766.

**1242 a. Note.** 1° Le point de concours des droites qui joignent chaque sommet au point de contact du cercle inscrit est appelé *point de Gergonne*, parce que ce mathématicien avait proposé comme question, dans ses *Annales*, le théorème ci-dessus.

2° Les trois points tels que O', relatif à un même cercle exinscrit, sont les *points adjoints au point de Gergonne*. (*Mathesis*, 1887, p. 59, n° 0.)

3° Le point de concours des droites qui joignent chaque sommet au point de contact du cercle exinscrit opposé est nommé *point de Nagel*.

4° Les points de Gergonne et de Nagel d'un triangle ABC sont des *points réciproques de Longchamps* (voir n° 1242 d).

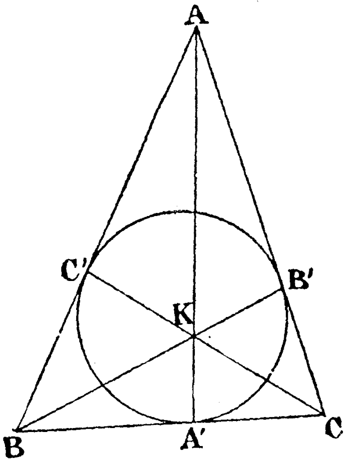
Pour le point de Nagel, on peut voir *J. M. E.*, 1886, page 158, article de M. VIGARIÉ, et *Mathesis,* 1887, p. 57 ; puis 1906, p. 93, n° 10. On le nomme parfois : *Point isopérimétrique*.

5° Le *point de Gergonne* a été signalé par JEAN CÉVA (*Aperçu historique de Chasles,* note VII, page 296 ; d'après l'*I. des M.*, 1900, page 84, n° 1787).

6° Le lieu des *points de Gergonne,* quand la base BC (fig. 766) varie, est une ellipse tangente en D, F. (*J. M. E.*, 1893, page 225. BOUTIN.)

**Théorème 369. — I.**

**1242 b.** *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle* ABC *aux points de contact* A′, B′, C′ *des côtés opposés et du cercle inscrit se coupent en un point* K, *tel que*




Fgi. 767.

$$\frac{AK \cdot BK \cdot CK}{A'K \cdot B'K \cdot C'K} = \frac{4R}{r}.$$

(*Mathesis*, 1884, p. 245. THIRY.)

Le triangle ABA′ coupé par CC′ donne :

$$\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BC}{A'C} \cdot \frac{A'K}{AK} = 1,$$

d'où

$$\frac{AK}{A'K} = \frac{AC' \cdot BC}{BC' \cdot CA'} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)};$$

de même : $\dfrac{BK}{B'K} = \dfrac{b(p-b)}{(p-a)(p-c)}$, et $\dfrac{CK}{C'K} = \dfrac{c(p-c)}{(p-a)(p-b)}$;

d'où

$$\frac{AK \cdot BK \cdot CK}{A'K \cdot B'K \cdot C'K} = \frac{abcp}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{4RSp}{S^2} = \frac{4R}{r}.$$

**Théorème 369. — II.**

**1242 c.** *Les trois droites qui joignent respectivement le point milieu de chaque côté d'un triangle au point milieu de la hauteur correspondante se coupent au même point.*

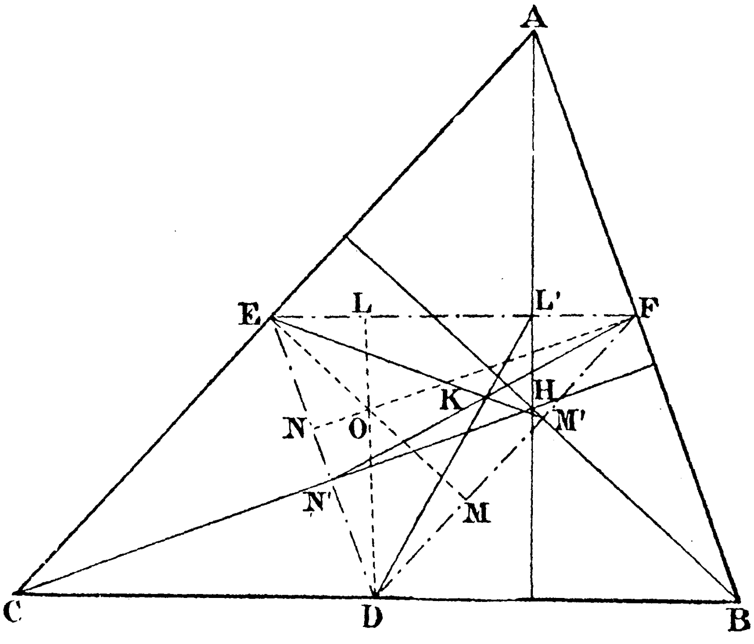



Fig. 768.

Traçons le triangle complémentaire DEF; ses hauteurs se coupent au centre O du cercle circonscrit au triangle donné ABC, et par suite, elles vérifient les relations de Céva; or EL = FL', etc., car les triangles DEF, AFE

sont égaux; donc on a aussi : $\frac{DN'}{N'E} \cdot \frac{EL'}{L'F} \cdot \frac{FM'}{M'D} = 1$,

et les trois droites DL', EM', FN' sont concourantes.

**1242 d. Note.** 1° Le théorème n'est qu'un cas particulier du théorème des *Droites isotomiques* (n° 2329) ou droites DL, DL' qui partent d'un même sommet et aboutissent à des points L, L' équidistants du point milieu du côté opposé. *Si trois céviennes sont concourantes*, en O par exemple, *leurs trois isotomiques le sont aussi.*

La considération des droites isotomiques est due à M. G. DE LONGCHAMPS (n° 2330); les points O et K sont appelés *points réciproques.*

Le point obtenu K est le *point de Lemoine* (n° 2352). Ainsi le centre du cercle circonscrit et le point de Lemoine d'un triangle ABC sont des points réciproques par rapport au triangle complémentaire DEF.

Le théorème précédent (n° 1242 c) est attribué généralement à M. LEMOINE (*N. A.*, 1884, page 27). « La droite qui joint le milieu d'un côté au milieu de la hauteur correspondante passe par le *centre* K *des symédianes*. Cette droite est le lieu du centre des rectangles inscrits dans le triangle et ayant leur base sur le côté considéré; » ce théorème a été publié en 1873 ou 1874, ainsi que l'indique la *Note sur la symédiane*, par M. MAURICE D'OCAGNE, et celle de M. VIGARIÉ, dans *J. M. E.*, 1886, p. 180. Voir d'ailleurs A. F. 1874, Lille, p. 1166, 2°.

Dans un article de 1887, M. CESARO attribue la construction précédente du point K à M. SCHLÖMILCH (*N. A.*, 1887, page 223). M. TESCH, de la Haye, a donné antérieurement un renseignement analogue dans *Mathesis*, 1881, p. 151. L'auteur allemand M. SCHLÖMILCH est bien connu de nom par les lecteurs du *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales* (1889, page 251, article de M. MOREL) et aussi par ceux de *Mathesis* (*M.*, 1890, page 28, art. de M. MANSION).

Pour démontrer le théorème proposé n° 1242 c, on peut voir aussi *Mathesis*, 1881, p. 185. et *J. M. E.*, 1885, p. 265. n° 27 et *note* **; puis 1887, p. 117 *note.*

2° Le théorème (n° 1242 c) peut être généralisé, car on peut remplacer les trois hauteurs par trois céviennes concourantes quelconques (*Mathesis*, 1883, p. 103 et 104 *b*, par KIEHL, professeur à Bromberg).

### Théorème 369. — III.

**1242 e.** *Lorsque trois céviennes d'un triangle* ABC *sont concourantes et qu'elles rencontrent respectivement les côtés opposés en* A', B', C', *les trois points d'intersection des couples de droites* AB, A'B', BC, B'C', *et* CA, C'A' *sont en ligne droite.*

C'est une simple conséquence des théorèmes de Ménélaüs et de Céva (n$^{os}$ 1227 et 1240).

Soient D le point d'intersection de MB et de AA', E le point de concours de LA et de BB', F celui de MB et de CC'; les quatre points L, F, A, E sont en ligne droite; on a de même les droites MFBD et NECD.

LMN est la polaire du point K de Céva, par rapport au triangle donné ABC.

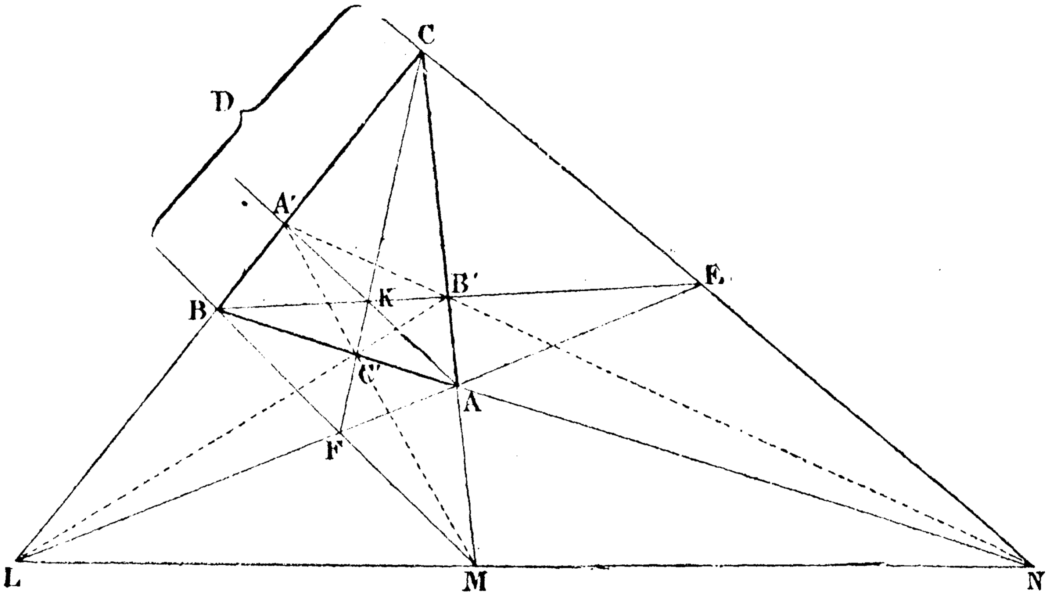



Fig. 769.

**1242 f.** *Remarques.* 1° On peut énoncer le théorème comme il suit : *Les côtés du triangle pédal du point de concours de trois céviennes rencontrent les côtés opposés du triangle donné, en trois points en ligne droite.*

2° On nomme *triangle pédal* d'un point donné K, le triangle A'B'C' formé en joignant deux à deux les pieds des trois céviennes de ce point K.

**Théorème 369. — IV.**

**1242 g.** *A trois céviennes concourantes, correspondent trois céviennes qui rencontrent les côtés opposés du triangle en trois points en ligne droite*, et réciproquement.

*Les six céviennes se rencontrent trois à trois en quatre points.*

On retrouve le théorème précédent (n° 1242 e), mais avec l'énoncé général qui lui est propre.

A toute cévienne CC' (fig. 769) correspond la cévienne CN, telle que N est le conjugué harmonique de C' par rapport à AB. En d'autres termes, on a, au signe près :

$$\frac{NA}{NB} = \frac{C'A}{C'B}.$$

Tout point K peut être considéré comme point de concours de trois céviennes et il a trois points associés D, E, F; ainsi E par exemple est le point de concours des céviennes extérieures CE, AE et de la cévienne intérieure BE.

*Remarques.* Le centre I du cercle inscrit a pour associés les centres des cercles exinscrits; le point K de Lemoine a pour associés les sommets du triangle tangentiel (n° 2293); le point G des médianes a pour associés les sommets du triangle anticomplémentaire (n° 434 b). De même l'*orthocentre*, le centre du cercle circonscrit, etc., ont des points associés.

**Théorème 369. — V.**

**1242 h.** *On peut construire une infinité de triangles ayant un triangle donné* DEF *pour triangle pédal de trois céviennes concourantes.*

On se donne à volonté la direction XDY d'un côté; puis on détermine le point N conjugué harmonique de M, et l'on obtient la direction DNZ de

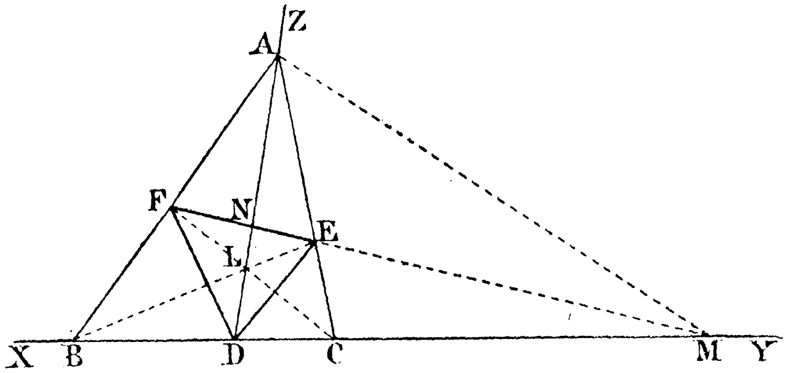



Fig. 770.

la cévienne correspondante. Tout point A, pris sur DZ, répond à la question, car toute transversale MCDB du faisceau harmonique de sommet A est divisée harmoniquement; donc les diagonales BE, CF se coupent sur AD, et le triangle ABC répond à la question.

**1242 i.** *Remarques.* 1° On peut se donner un sommet, B par exemple. 2° Lorsque le triangle demandé et le triangle pédal que l'on donne présentent quelques particularités dans leurs relations respectives, la solution peut être unique, ou du moins, en nombre limité.

Ainsi, on détermine facilement le seul triangle ABC qui répond à la question lorsque le triangle pédal est celui des médianes (triangle complémentaire) ou qu'il est celui des hauteurs (triangle orthique); mais il en est tout autrement, lorsque le triangle pédal est celui des bissectrices ou celui des symédianes; ces deux derniers problèmes, du moins jusqu'à ce jour, n'ont pas été résolus par des moyens assez élémentaires pour pouvoir trouver place dans nos *Exercices de Géométrie*.

On peut voir à ce sujet l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1898, p. 33, q. 268, par M. Ricalde de Mérida (Yucatan); 1899, p. 54, n° 268, Bioche; p. 55 à 58, Barbarin; puis 1903, p. 64, n° 245 (Brocard, Plakhowo, Duran-Loriga).

**Théorème de Van Aubel 369. — VI.**

**1242 j.** *Pour trois céviennes concourantes quelconques, on a :*

$$\frac{AO}{OD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{AC}.$$

Les aires des triangles AOC, BOC sont entre elles comme AF et FB, et les aires de AOB et BOC sont comme AE et CE;

donc $\frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{AOB + AOC}{BOC}$.

De même, en comparant AOB et BOD, AOC et COD, on a :

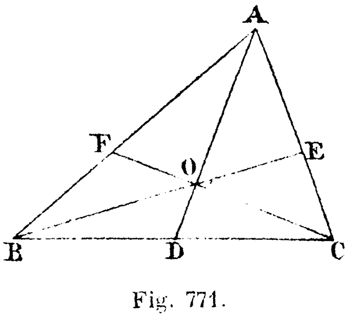



Fig. 771.

$$\frac{AO}{OD}=\frac{AOB}{BOD}=\frac{AOC}{COD}=\frac{AOB+AOC}{BOC}\text{ ; donc, etc.}$$

*Applications.* 1° Si O est le point de concours des bissectrices intérieures, on a :

$$\frac{AF}{FB}=\frac{b}{a};\quad \frac{AE}{EC}=\frac{c}{a};\quad \text{d'où}\quad \frac{AO}{OD}=\frac{b+c}{a}.$$

2° Si O est le point de concours des médianes,

$$\frac{AO}{OD}=1+1=2.$$

3° Si O est le point de concours des hauteurs,

$$\frac{AF}{FB}=\frac{\text{tg B}}{\text{tg A}},\quad \frac{AE}{EC}=\frac{\text{tg C}}{\text{tg A}};\quad \text{d'où}\quad \frac{AO}{OD}=\frac{\cos A}{\cos B\cos C}.$$

4° Si O est le point de Lemoine,

$$\frac{AF}{FB}=\frac{b^2}{a^2},\quad \frac{AE}{EC}=\frac{c^2}{a^2};\quad \text{d'où}\quad \frac{AO}{OD}=\frac{b^2+c^2}{a^2}.$$

5° Si O est le point de Gergonne,

$$\frac{AF}{FB}=\frac{p-a}{p-b},\quad \frac{AE}{EC}=\frac{p-a}{p-c};\quad \text{d'où}\quad \frac{AO}{OD}=\frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}.$$

6° Si O est le premier point de Brocard.

$$\frac{AF}{FB}=\frac{b^2}{c^2},\quad \frac{AE}{EC}=\frac{b^2}{a^2};\quad \text{d'où}\quad \frac{AO}{OD}=\frac{a^2b^2+b^2c^2}{a^2c^2}.$$

7° Si O est le second point de Brocard, on a :

$$\frac{AF}{FB}=\frac{c^2}{a^2},\quad \frac{AE}{EC}=\frac{c^2}{b^2};\quad \text{d'où}\quad \frac{AO}{OD}=\frac{b^2c^2+a^2c^2}{a^2b^2}.$$

**1242 k. Note.** 1° Le théorème 1242 j a été proposé dans *Mathesis*, n° 128, et dans le *Journal de M. de Longchamps*, n° 237.

La solution ci-dessus, et les conséquences qu'on en déduit, ont été données, par M. N. Plakhowo, dans le *Bulletin des sciences mathématiques et physiques élémentaires*, par B. Niewenglowski et L. Gérard, année 1899-1900, page 289.

**1242 l.** 2° La question d'apparence élémentaire, où l'on demanderait de déterminer un point D, tel que les trois céviennes donnent DE = DG = DH, a été étudiée par J.-W. Tesch, de La Haye. (*Intermédiaire des mathématiciens*, 1900, p. 17, n° 1044.) La détermination du point D pour un triangle quelconque, exigerait la résolution d'une équation du septième degré.

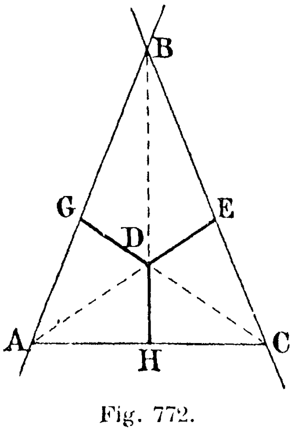


Fig. 772.

Dans le cas même où le triangle ABC est isocèle, le point D est donné par une équation du troisième degré, et le point D situé sur la hauteur BH ne saurait être déterminé avec la règle et le compas ; mais on l'obtiendrait facilement en construisant la *strophoïde* qui aurait A pour sommet et H pour point double.

Pour l'équation et les propriétés de la strophoïde, voir la *Géométrie analytique* de Briot, etc.

3° La question précédente, posée en 1898, par M. VERKAART, ayant été rappelée par M. BARISIEN, en 1910, M. G. LEMAIRE a répondu peu de temps après (*I. M.*, 1910, p. 264, q. 3744). Il a bien voulu citer les *E. de G.* de 1907.

Dans le cas du triangle isocèle, en représentant la base par $b$, la hauteur par $h$, la distance DH = DE par $k$, M. A. TAFELMACHER a obtenu l'équation du troisième degré

$$b^2(h-k)^2 = 16hk^3,$$

qui n'est réductible que dans quelques cas particuliers, déjà indiqués par M. TESCH, de La Haye.

4° On peut se proposer de *déterminer trois céviennes concourantes qui aient même longueur totale.*

Si F est leur point de concours, ce point est le foyer de la conique circonscrite au triangle donné, et qui a pour centre le centre de gravité du triangle (L. BICKART, *I. M.*, 1910, p. 170, n° 3724). Voir comme réponse, p. 256 à 260, art. par MM. WELSCH, E. MALO, etc.

### Théorème 369. — VII.

**1242 m.** *Sur les rayons* ID, IF, IF *qui vont au point de contact du cercle inscrit et des côtés* BC, CA, AB, *on prend des distances égales* ID′, IE′, IF′; *les droites qui joignent les points* D′, E′, F′ *aux sommets opposés* A, B, C *du triangle se coupent en un même point.* (LEMOINE, BOUTIN, RETALI, KARIYA.)

Par les points D′, E′, F′ menons des parallèles aux côtés du triangle ABC, les trapèzes rectangles F′PBF et RD′DB sont égaux, car BF = BD, FF′ = DD′; et les angles DBR et FBP sont égaux comme opposés par le sommet;

$$\left.\begin{array}{ll}\text{donc} & F'P = D'R.\\ \text{On aurait de même :} & SD' = TE' \text{ et } E'U = F'V\end{array}\right\} \quad (1)$$

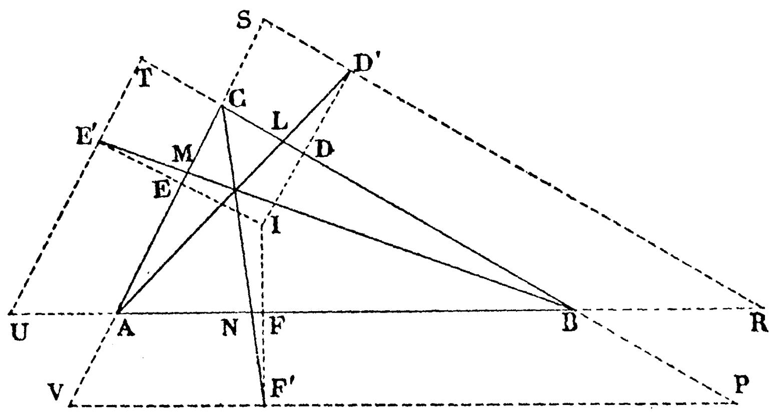



Fig. 772 *bis*.

or les concourantes CV, CF′, CP, coupées par les parallèles AB et VP,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{donnent :} & \dfrac{AN}{BN} = \dfrac{VF'}{PF'}.\\[2ex] \text{On aurait de même :} & \dfrac{BL}{CL} = \dfrac{RD'}{SD'};\\[2ex] \text{et} & \dfrac{CM}{MA} = \dfrac{TE'}{UE'}.\end{array}\right\} \quad (2)$$

En multipliant les égalités (2) membre à membre, on a, à cause des égalités (1) : $\dfrac{AN \times BL \times CM}{BN \times CL \times MA} = \dfrac{VF' \times RD' \times TE'}{PF' \times SD' \times UE'} = 1$;

donc les droites AD′, BF′, CF′ sont concourantes.

**1242 n. Note.** 1° L'énoncé ci-dessus est de M. KARIYA, de Tokio ; mais le théorème n'est pas nouveau, car il n'est qu'une partie d'un théorème donné par MM. LEMOINE et BOUTIN, quinze ans plus tôt (1889-1890).

Cette question, présentée isolément, et venant du Japon en 1904, a suscité de nombreuses notes ; voir *Enseignement mathématique* en 1904, pages 131, 236, 406, et 1905, page 44.

Parmi les remarques, démonstrations et extensions provoquées par l'article de M. KARIYA, on peut citer celles de M. BARBARIN de Bordeaux, DEMOULIN de Gand, HAROLD HILTON de Bangor, DANIELS de Fribourg (Suisse), FRANKE de Berlin, P. FAURE de Paris et surtout CANTONI de Mantoue.

L'*Enseignement mathématique* paraît depuis 1899, sous la direction de MM. C.-A. LAISANT de Paris et H. FEHR de Genève.

2° La démonstration élémentaire donnée par M. KARIYA est longue et peu élégante. (Voir l'*Enseignement mathématique*, tome VI, 1904, p. 131, ou la *Revista de matematicas* de Santiago du Chili, 1905, p. 139.) Un collaborateur dévoué nous a fourni celle que nous donnons ci-dessus, et qui ne laisse rien à désirer, ce semble, comme brièveté et simplicité.

**Historique.** Ainsi qu'il arrive fréquemment dans les recherches de la *Géométrie du triangle*, le théorème que M. KARIYA a cru découvrir en 1904 n'est qu'un cas particulier du théorème suivant donné par M. LEMOINE dès 1889.

*Si d'un point* M d'un triangle ABC *on abaisse des perpendiculaires* MX, MY, MZ *sur les côtés* BC, CA, AB *et que l'on prenne sur ces droites des longueurs* XA′, YB′, ZC′, *inversement proportionnelles aux longueurs* MX, MY, MZ, *les trois droites* AA′, BB′, CC′, *se coupent en un même point* L.

*Le lieu de ce point quand* M *se déplace est une hyperbole équilatère qui passe par les sommets* A, B, C *et par* M. (*A. F.*, 1889, Paris, p. 202 à 206.)

Peu de temps après M. LEMOINE, M. A. BOUTIN, dans une très belle étude : *Sur un groupe de quatre coniques remarquables du plan d'un triangle*, avait donné le théorème suivant : A′, B′, C′ étant les points de contact du cercle inscrit avec les côtés de ABC, si l'on porte dans le même sens sur IA′, IB′, IC′, les longueurs IA″, IB″, IC″ = $l$, les droites AA″, BB″, CC″ sont concourantes ; le lieu de leur point de concours lorsque $l$ varie est la conique (B); c'est-à-dire l'hyperbole équilatère qui est la transformée isogonale de OI. (*J. M. S.*, 1890, p. 105, 124 ; voir aussi p. 265, *Problème sur le triangle*.)

Le théorème attribué à M. KARIYA a été revendiqué par M. RETALI, de Milan, qui l'avait publié en 1896; enfin dans *Mathesis*, mais en 1903, p. 265, le Dr H.-A.-W. SPECKMAN d'Arnhem a donné l'énoncé même retrouvé par M. KARIYA.

Notre attention sur la question précédente a été appelée par le savant et très érudit M. NEUBERG (*Mathesis*, 1905, pages 117, 118), et par l'auteur même, M. BOUTIN, dont les articles très remarquables ont enrichi le *J. M. S. de Longchamps*, durant plusieurs années, mais sans arriver au retentissement que nous avons vu se produire en 1904. (*L'enseignement mathématique*, pp. 130, 236 et 411. A ce sujet, voir aussi 1910, p. 142.)

3° *L'hyperbole équilatère* (fig. 772 *ter*), transformée isogonale de OI, est associée aux trois hyperboles équilatères qui correspondent à $OI_a$, $OI_b$, $OI_c$. Ces quatre coniques, si bien étudiées par M. A. BOUTIN, devraient légitimement porter son nom ou celui de M. LEMOINE ; néanmoins la première, qui se rapporte au cercle inscrit, a été nommée *hyperbole de Feuerbach*, bien que ce mathématicien ne s'en soit point occupé, parce que son centre est le *point de Feuerbach* (n° 1341 b) où le *cercle des neuf points* est tangent au cercle inscrit. (*A. F.*, 1889, page 203, M. E. LEMOINE. *J. M. S.*, 1890, page 105, M. A. BOUTIN.)

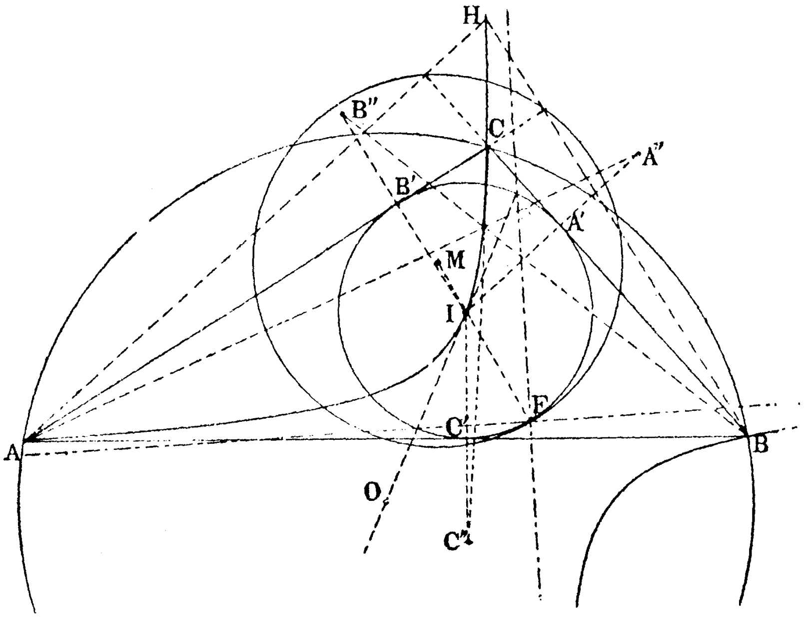



Fig. 772 *ter*.

4° *L'hyperbole de Feuerbach* peut aussi être obtenue comme il suit : *sur les médiatrices* A'O, B'O, C'O du triangle ABC, *on prend trois longueurs égales :*

$$A'P_a = B'P_b = C'P_c = l,$$

*toutes trois vers* O, *ou dans le sens opposé, et l'on trace le triangle* $P_aP_bP_c$ ; *les perpendiculaires abaissées de* A, B, C, *sur les côtés* $P_bP_c$, etc., *se coupent en un même point* P, *dont le lieu, lorsque* l *varie, est l'hyperbole de Feuerbach.*

Les perpendiculaires se coupent en un même point P, parce que $A'P_a$, $B'P_b$, $C'P_c$ se coupent en un même point O. (*Mathesis,* 1893, p. 80, MM. NEUBERG et MANDART.)

5° *Point de Kariya.* Nous proposons de continuer à dire *point de Kariya,* puisque l'estimable auteur japonais en a manifesté le désir, et que MM. LEMOINE et BOUTIN ne s'y opposeront pas ; d'ailleurs, le principal auteur de la *Géométrie du triangle* est d'une extrême richesse en fait de théorèmes et de points remarquables ; pour s'en convaincre, il suffirait de revoir l'étude déjà citée : *A. F.*, 1889, Paris, pages 197 à 222. Quant au second, les nombreux et savants articles publiés dans le *J. M. S.*, lui assurent une place très honorable parmi les géomètres contemporains. (Pour diverses hyperboles, voir n° 1242.

**Théorème 369. — VIII.**

**1242 o.** *Soient* OD, OE, OF *les distances du centre du cercle circonscrit aux trois côtés du triangle* ABC ; *si l'on prend respectivement et sur ces droites des points* D', E', F' *tels qu'on ait :*

$$\frac{OD'}{OD} = \frac{OE'}{OE} = \frac{OF'}{OF},$$

*les droites* AD', BE', CF' *se coupent en un même point, et ce point* P *est situé sur la droite d'Euler* OGH *du triangle.* (BOUTIN, puis FRANKE.)

Pour simplifier, il suffit de considérer les médiatrices OD, OE qui correspondent à deux sommets A et B et les céviennes qui partent des deux mêmes points.

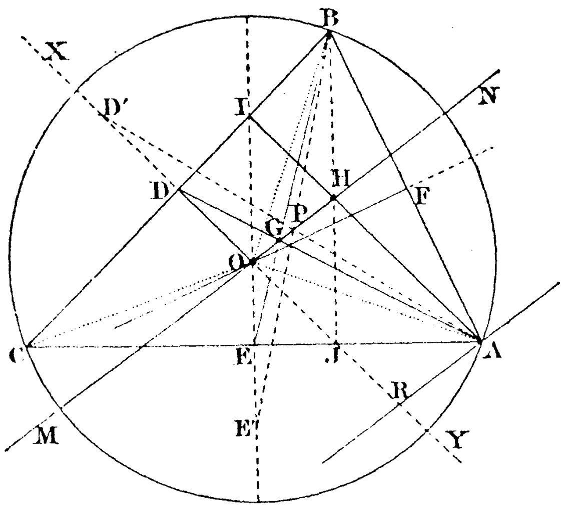


Fig. 773.

Les rayons AO, BO se rencontrent au point O; les médianes AD, BE en G, les hauteurs en H, les droites AD', BE' en un point P. Il faut prouver que P est sur la ligne d'Euler OGH.

Or les hauteurs sont parallèles à OD, OE; par suite, elles sont les céviennes qui correspondent au point situé à l'infini sur OD, OE; il en résulte que les faisceaux ayant A et B pour sommets et qui sont déterminés par les ponctuelles semblables ODD', OEE', ont trois couples de rayons qui se coupent en trois points O, G, H situés en ligne droite; donc tout autre couple AD', AE' doit se couper aussi sur OH; ainsi les droites telles que AD', AE', AF', se coupent en un point situé sur la *droite d'Euler*. (G., n° 779.) Nous continuerons à nommer ce point *Point de Franke* (n° 1242 p, 1°).

*Remarques*. 1° Pour D', situé entre O et D, P est entre O et G; pour D' au delà de D, il est entre G et H.

D' à l'infini dans la direction OX, on obtient H.

Menons AR parallèle à OH. Si le point D' est entre les points O et R, le point P sera sur OM; si D' vient en R, le *point de Franke* passe à l'infini sur la *droite d'Euler*; avec D' au delà de R, on obtient N sur NH, et le point se rapproche de H, lorsque D' s'éloigne indéfiniment dans la direction RY.

Ainsi la ligne illimitée MOHN appartient au lieu.

2° En résumé, les points D' et P offrent un mode de correspondance assez remarquable : ainsi D' à l'infini au delà de X, cheminant sur XOY jusqu'à l'infini, le point P part de H, s'avance vers M et s'éloigne indéfiniment dans cette direction, passe par l'infini, revient vers N et se rapproche de H pour se confondre avec ce point, quand D' s'est éloigné indéfiniment dans la direction ORY.

Remarque analogue pour le mouvement de D' sur XY, lorsque P parcourt MON; mais à tout déplacement de P, correspondent des positions déterminées pour les points D', E', F', les trois ponctuelles OD, OE, OF étant semblables entre elles.

3° Ainsi que nous venons de l'établir, la *droite d'Euler* prolongée indéfiniment est le lieu des *points de Franke* du triangle donné. Il n'y a aucune contradiction proprement dite entre ce théorème et la remarque qui termine le n° 293 pour les *points analogues* d'une figure donnée, parce qu'on sait actuellement que les points O, G, H, dont les propriétés particulières sont si remarquables et si distinctes les unes des autres, ont une propriété commune qui permet de les grouper dans le nombre illimité des *points de Franke*.

4° La *droite d'Euler* d'un triangle ABC est aussi le lieu de certains points bien déterminés : ainsi le centre du cercle circonscrit au triangle tangentiel du triangle donné ABC se trouve sur cette droite. Voir *Notes de Géométrie récente*, par M. A. Gob, professeur agrégé de l'enseignement moyen. (Supplément de *Mathesis*, t. IX, 1889.)

**1242 p. Note.** 1° Le théorème précédent est de M. A. Boutin. Il l'a donné dès 1890 (*J. M. S.*, page 266 : « En considérant..., etc. »). Mais cette belle question, traitée en quelques lignes, est passée inaperçue. Il en a été tout autrement lorsque M. Franke de Berlin, quatorze ans plus tard, a indiqué ce même théorème dans l'*Enseignement mathématique* (1904, p. 407, V).

Nous proposons néanmoins de continuer à appeler *point de Franke*, le point qui avait reçu ce nom ; ce sera une sorte de dédommagement pour le géomètre qui s'est laissé devancer.

2° *Lorsque l'on prend sur les médiatrices* OD, OE, OF, *des longueurs* OD′, OE′, OF′ *inversement proportionnelles aux médiatrices, c'est-à-dire telles que l'on ait :* OD . OD′ = OE . OE′ = OF . OF′ = $K^2$, les droites AD′, BE′, CF′ *se coupent en un même point* Q. *Le lieu du point* Q, *lorsque la puissance* $K^2$ *varie, est une hyperbole équilatère circonscrite au triangle.*

Les triangles ABC, D′E′F′ sont homologiques, Q est *le centre d'homologie.* (*A. F.*, 1889, pages 202 et 203, E. Lemoine.) L'énoncé du savant auteur a lieu quel que soit le point que l'on projette sur les côtés du triangle ; mais nous nous bornons au cas qui se rapporte à la *droite d'Euler ;* c'est la contre-partie du *théorème de Boutin.* — L'hyperbole passe par le *point de Lemoine* K, ce qui permet de l'identifier avec l'*hyperbole de Jerabeck.*

3° La *transformée isogonale* (inversion du capitaine Mathieu, *N. A.*, 1865, pages 393, 481 et 529) de toute droite du triangle ABC est une conique circonscrite au triangle : c'est une ellipse, si elle ne coupe pas le cercle circonscrit à ABC ; c'est une parabole si la droite est tangente, et une hyperbole si elle coupe le cercle. En outre, l'hyperbole est équilatère si la droite passe par le point O centre du cercle circonscrit, parce que dans ce cas l'hyperbole passe par l'orthocentre H, point inverse de O ; or l'hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC doit passer en effet par H, d'après un *théorème de Brianchon et Poncelet* (n° 2183 **b**).

4° La transformée de la *droite d'Euler* OGH est l'*hyperbole de Jerabeck* (*Mathesis*, 1888, p. 81, J. Neuberg, et *J. M. S.*, 1890, p. 266, A. Boutin).

L'hyperbole passe par le *point de Lemoine* K, point inverse de G.

La transformée de OK a été nommée *hyperbole de Kiepert.* (Voir ci-après, n° 1773 **o**.)

La transformée de OI est l'*hyperbole de Feuerback.* (Pour ces diverses hyperboles, voir *A. F.*, 1889, p. 203, E. Lemoine ; *J. M. S.*, 1890, pages 105 et 124, A. Boutin ; *Mathesis*, 1887, p. 208, M'Cay, du Trinity College de Dublin ; 1891, pages 191 et 192 ; 1892, p. 241, J. Neuberg ; 1893, p. 81, Neuberg et Mandart ; 1893, p. 265, Speckman d'Arnhem ; 1905, p. 118, J. Neuberg ; *N. A.*, 1887, p. 231, n° 15, E. Cesaro. — Voir aussi d'assez nombreux articles du *J. M. S.*, 1884, 1885, 1886, 1889, 1890.

5° Les transformées isogonales qui joignent le centre O, soit au *point de Gergonne*, de *Nagel* ou de *Brocard*, sont aussi des hyperboles équilatères circonscrites au triangle ABC.

*Le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites est le cercle des neuf points du triangle donné* (n° 2183 **c**.) (*N. A.*, 1863, pages 475 et 476, J.-J.-A. Mathieu, alors capitaine d'artillerie, et *Mathesis*, 1891, p. 192).

6° Pour obtenir les asymptotes d'une hyperbole équilatère circonscrite au triangle donné, il suffit de tracer les droites rectangulaires de Simson (n° 765 a), qui correspondent aux extrémités du diamètre dont l'hyperbole est la transformée isogonale : ainsi pour l'*hyperbole de Kiepert*, on considère le diamètre déterminé par OK; pour celle de JERABECK, c'est OH, et pour celle de FEUERBACH, c'est OI. Pour cette dernière, les *droites de Simson* passent par le *point de Feuerbach*, puisque ce point est le centre de la courbe (*Mathesis*, 1893, p. 86).

### Théorème 369. — IX.

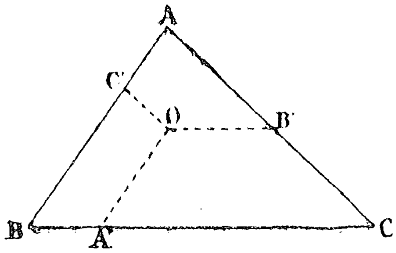



Fig. 774.

**1242 q.** *Par un point quelconque O d'un triangle, on mène des parallèles OA', etc., aux côtés du triangle ; on a :*

$$\frac{BA'}{BC} + \frac{CB'}{CA} + \frac{AC'}{AB} = 1.$$

(*Journal de Mathématiques élémentaires de M. Vuibert*, 15 mars 1900, page 95, n° 4753.)

### Théorème 370.

**1243.** *Les perpendiculaires abaissées d'un même point, sur les trois côtés d'un triangle, déterminent six segments tels que la somme des carrés de trois d'entre eux non consécutifs égale la somme des carrés des trois autres segments.*

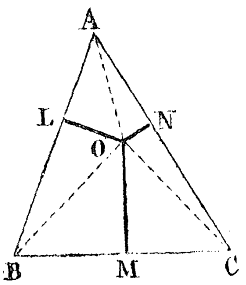



Fig. 775.

Soient les perpendiculaires OL, OM, ON.

D'après un théorème connu (n° 1162), on a :

$$AL^2 - BL^2 = AO^2 - BO^2,$$
$$BM^2 - CM^2 = BO^2 - CO^2,$$
$$CN^2 - AN^2 = CO^2 - AO^2.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, on trouve :

$$AL^2 + BM^2 + CN^2 - BL^2 - CM^2 - AN^2 = 0,$$

ou

$$AL^2 + BM^2 + CN^2 = BL^2 + CM^2 + AN^2. \quad (1$$

### Théorème 371.

**1244.** *Lorsque trois points déterminent sur les côtés d'un triangle six segments tels que la somme des carrés de trois d'entre eux non consécutifs égale celle des trois autres, les trois points peuvent être considérés comme étant les projections d'un même point.*

On démontre ce théorème réciproque par la réduction à l'absurde ainsi qu'on l'a fait pour les réciproques des théorèmes de *Ménélaüs* et de *Céva* (n$^{os}$ 1228 et 1241).

**1245.** Application. *Les médiatrices des trois côtés d'un triangle se coupent au même point ; il en est de même des trois hauteurs de ce triangle.*

1° La relation $AL^2 + BM^2 + CN^2 = BL^2 + CM^2 + AN^2$ (nº 1243) a lieu évidemment, lorsqu'on élève des perpendiculaires au milieu de chaque côté d'un triangle ; car, dans ce cas, $AL = BL$, $BM = CM$ et $CN = AN$ par construction ; donc les trois perpendiculaires concourent au même point (nº 1244).

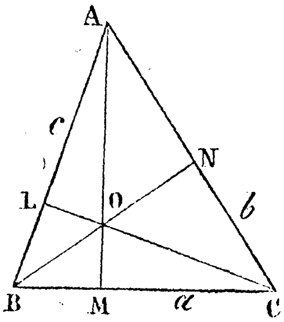


Fig. 776.

2° Considérons les hauteurs ; $a$, $b$, $c$ désignant les côtés du triangle, on a (nº 1162) :

$$AL^2 - BL^2 = AC^2 - BC^2,$$

ou

$$AL^2 - BL^2 = b^2 - a^2,$$

$$BM^2 - CM^2 = c^2 - b^2,$$

$$CN^2 - AN^2 = a^2 - c^2;$$

d'où $AL^2 + BM^2 + CN^2 - (BL^2 + CM^2 + AN^2) = 0$.

**Théorème 371. — I.**

**1246.** *Les perpendiculaires élevées sur les côtés d'un triangle, aux trois points où les cercles exinscrits sont tangents à ces côtés, se coupent au même point.*

1re *Démonstration* (nº 757).

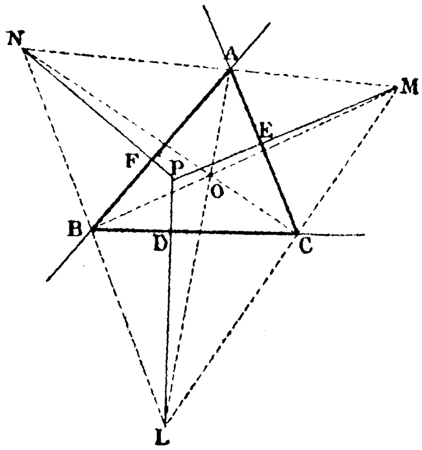


Fig. 777.

2e *Démonstration.* Soient L, M, N les points de concours des bissectrices extérieures ; il faut prouver que les perpendiculaires LD, ME, NF se coupent au même point.

Il suffit de prouver que

$$BD^2 + CE^2 + AF^2 = DC^2 + AE^2 + BF^2.$$

Or les six segments sont égaux à ceux que déterminent les points de contact du cercle inscrit, et ces derniers sont égaux deux à deux, ce qui vérifie la relation du *théorème de Carnot* (nº 1244) ; donc les perpendiculaires se coupent en un même point P.

3e *Démonstration.* Les trois points de contact D, E, F des cercles exinscrits sont les points isotomiques des trois points de contact du cercle inscrit ; donc les trois perpendiculaires considérées se coupent en un même point P, puisqu'il en est ainsi des trois rayons du cercle inscrit qui leur correspondent. Le théorème proposé (nº 1246) peut être considéré comme un cas particulier d'un théorème précédent (nº 752). Le point P et le centre O du cercle inscrit (fig. 777) sont symétriques par rapport au centre du cercle circonscrit.

**1246 a. Note.** 1° Si l'on prend sur PD, PE, PF des longueurs PD', PE', PF' inversement proportionnelles à ces mêmes lignes, les droites AD', BE', CF' se coupent en un même point. (Lemoine, nº 1142 **n**, *historique*.)

Ce théorème est analogue à ceux de Kariya (nº 1242 **m**) et de Franke (nº 1242 **o**). Le *point de Nagel*, l'orthocentre et le point P, point isotomique du centre du cercle inscrit, appartiennent au lieu des points ainsi obtenus.

2° On peut se poser la question suivante : *Quel est le lieu d'un point* Q, *tel que ses projections* A', B', C' *sur les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC *soient les pieds des trois céviennes* AA′, BB′, CC′ *qui concourent en un même point* P ? (E. LUCAS, *N. C.*, 1876, p. 94, question 83, et *N. A.*, 1876, p. 240, nº 1207.)

La question a été traitée par différents auteurs ; nous citons d'abord H. VAN AUBEL, à cause de la figure dont il a accompagné sa solution. (*Correspondance mathématique*, t. IV, 1878, pages 261 à 272.)

Le lieu est une *cubique* remarquable qui passe par les trois sommets A, B, C, par l'orthocentre H, le centre O du cercle circonscrit, par les centres I, I′, I″, I‴ des cercles inscrit et exinscrits et par les points symétriques des sommets, par rapport au centre O, ou plus simplement, le point O est le centre de la courbe; elle a pour asymptotes les trois *médiatrices* du triangle.

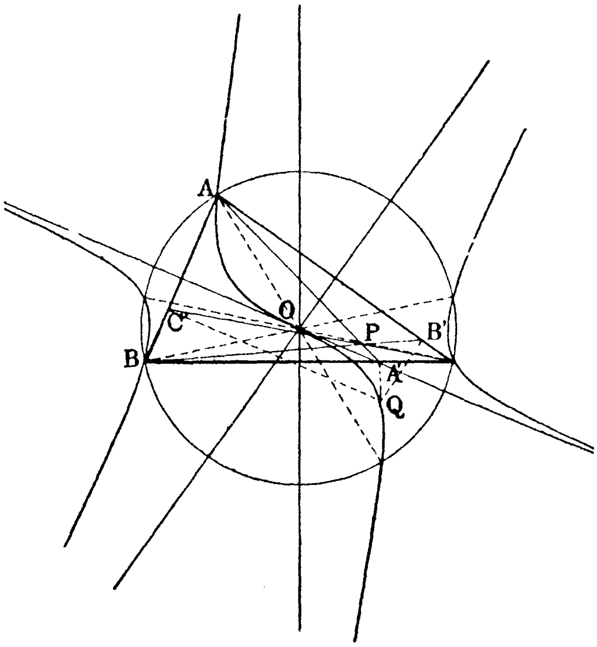


Fig. 777 *bis*.

Si le triangle donné est isocèle, le lieu se compose de la bissectrice de l'angle au sommet et d'une hyperbole qui passe par les extrémités de la base, et dont les médiatrices des côtés égaux du triangle sont les asymptotes.

*Le lieu des points* P *de trois céviennes telles que leurs pieds* A′, B′, C′ *soient les projections orthogonales d'un même point* Q, *est une cubique* indiquée par GRÉER, dès 1865-66; elle a quatre points communs avec la précédente : ainsi elle passerait par les trois sommets et l'orthocentre H ; puis par G (et non par O) et par les points d'intersection des droites qui joignent les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés avec le cercle inscrit, ou avec un des cercles exinscrits. (*N. A.*, 1876, pages 550 à 555, E. DEWULF, et *N. C.*, 1880, p. 56, VAN AUBEL.)

Pour plus de développements et pour les notes bibliographiques, voir le *Journal de mathématiques spéciales de Longchamps*, 1890, pages 63 à 69, art. de M. E. VIGARIÉ ; citation de l'étude de H.-R. GRÉER, page 66. Voir aussi le bel article de M. BOUTIN, 1889, pages 265 à 268.

**Théorème 371. — II.**

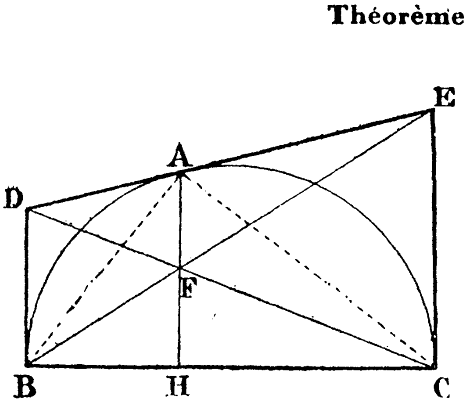


Fig. 778.

**1246 b.** *Dans un trapèze rectangle circonscrit au demi-cercle décrit sur le côté perpendiculaire aux bases, pris pour diamètre, les diagonales se coupent au point milieu de la parallèle menée aux bases, par le point de contact du quatrième côté.*

Soit F le point où BE rencontre AH ; il suffit de prouver que

$$AF = FH.$$

On a : $\frac{FH}{CE} = \frac{BH}{BC} = \frac{DA}{DE}$, d'où $FH = \frac{DA \cdot CE}{DE}$;

$$\frac{AF}{BD} = \frac{AE}{DE}, \text{ d'où } AF = \frac{BD \cdot AE}{DE};$$

donc $$AF = FH.$$

*Remarques.* 1° Les diagonales et la hauteur AH sont les symédianes du triangle rectangle BAC ; or on démontre directement que les symédianes qui partent des sommets B et C se coupent au point milieu de la hauteur relative à l'hypoténuse.

2° On pourrait prouver d'abord que les diagonales se coupent sur AH, puis se rappeler que la parallèle aux bases d'un trapèze, menée par le point de concours des diagonales, est divisée en parties égales par ce point (n° 1109). Mais établir la première partie serait aussi long que la démonstration donnée ci-dessus.

### Théorème de Desargues 372.

**1247.** *Lorsque les côtés de deux triangles se coupent deux à deux en trois points situés en ligne droite, les droites qui joignent deux à deux les sommets correspondants se coupent au même point.*

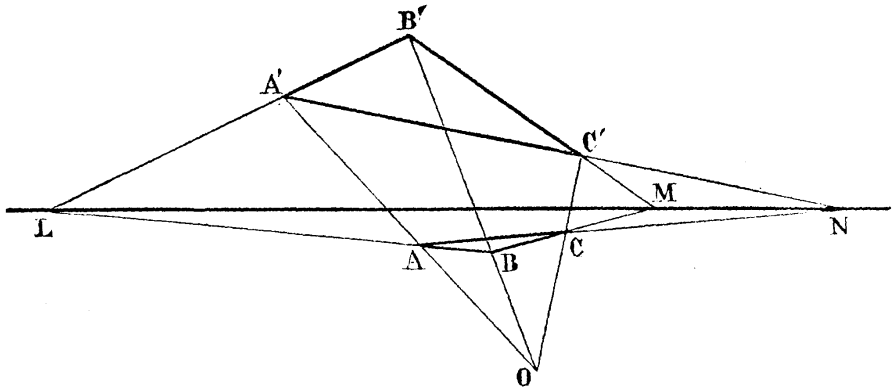



Fig. 779.

Soient les triangles ABC, A'B'C' tels que les points L, M, N soient en ligne droite ; il faut prouver que les lignes A'A, B'B, C'C concourent en un même point O.

1° On peut démontrer ce théorème à l'aide des transversales et du *théorème de Céva ;*

2° En employant le rapport anharmonique (G., n° 782) ;

3° En recourant à un solide auxiliaire (*Méthodes*, n° 177).

### Théorème R. 373.

**1248.** *Lorsque les sommets de deux triangles sont deux à deux sur trois droites qui concourent en un même point, les côtés des triangles se coupent deux à deux en trois points situés en ligne droite.*

**1249. Note sur l'homologie.** L'*homologie* est due à l'illustre Poncelet. Le *théorème de Desargues* et le *théorème réciproque* (n$^{os}$ 1247, 1248) servent de base aux recherches et aux constructions relatives à cette méthode. Lorsqu'on met une figure plane en perspective et qu'on rabat le *tableau* sur le plan de projection, on obtient deux *figures homologiques*, c'est-à-dire deux figures telles que les points se correspondent deux à deux et sont situés sur des droites qui concourent en un même point nommé *centre d'homologie*. Les perspectives de deux *figures homothétiques* sont aussi homologiques.

Les droites qui joignent entre eux deux points d'une des figures et les deux points correspondants de l'autre figure, se coupent sur une droite nommée *axe d'homologie*.

L'*homologie* est un mode de transformation de figures qui permet, par exemple, de remplacer une ellipse ou une hyperbole par un cercle, dont la première courbe pourrait être regardée comme la perspective.

Pour se rendre compte du merveilleux instrument que Poncelet a créé, il suffit de lire le *Traité des Propriétés projectives des figures* de cet auteur.

Les premières recherches de PONCELET relatives à l'homologie ont été communiquées par leur auteur, dès 1814, à FRANÇAIS et SERVOIS. (*Traité des Propriétés projectives des figures*, 2e édition, Préface, page VI.)

* J.-F. FRANÇAIS et SERVOIS, professeurs à l'École de l'artillerie et du génie à Metz, auteurs, l'un et l'autre, de nombreux articles dans les *Annales de Gergonne*, de 1813 à 1815.

### Théorème de Carnot 374.

**1250.** *Lorsqu'une circonférence coupe les côtés d'un triangle* ABC, *le côté* AB *aux points* D *et* D', BC *en* E *et* E', CA *en* F *et* F', *on a la relation suivante :*

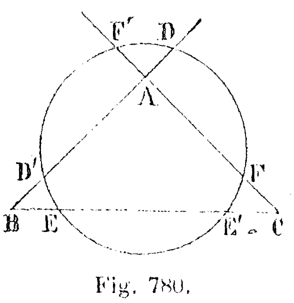


Fig. 780.

$$\frac{AD \cdot BE \cdot CF}{BD \cdot CE \cdot AF} \times \frac{AD' \cdot BE' \cdot CF'}{BD' \cdot CE' \cdot AF'} = 1.$$

En effet,
$$AD \cdot AD' = AF \cdot AF',$$
$$BE \cdot BE' = BD \cdot BD',$$
$$CF \cdot CF' = CE \cdot CE'.$$

En multipliant ces égalités membre à membre, on trouve la relation ci-dessus.

*Remarque.* Le *théorème de Carnot* (n° 1250), aussi bien que le *théorème de Pappus* (n° 1214) et le *théorème de Desargues* (n° 1219), ont leurs analogues lorsqu'on remplace la circonférence par une conique quelconque.

### Théorème de Terquem 374. — I.

**1251.** *Lorsqu'on joint un point* M *aux trois sommets d'un triangle, la circonférence qui passe par les trois points* D, E, F *déterminés sur les côtés par les droites* AM, BM, CM, *coupe les côtés en trois autres points* D', E', F' *tels que les droites qui les joignent aux sommets opposés se coupent en un même point* M'. (*N. A.*, 1842, p. 403.)

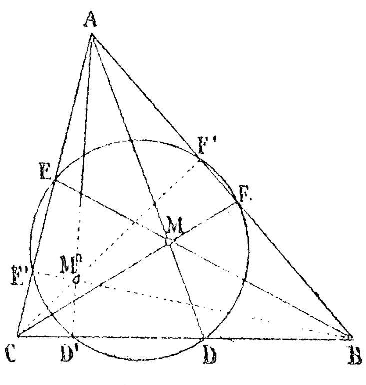


Fig. 781.

D'après le *théorème de Céva* (n° 1240), on a :

$$BD \cdot AF \cdot CE = CD \cdot BF \cdot AE.$$

Mais on peut écrire les égalités suivantes :

$$BD' . BD = BF' . BF,$$

$$AF' . AF = AE' . AE,$$

$$CE' . CE = CD' . CD.$$

Multiplions ces égalités terme à terme ; on trouve :

$$BD' . AF' . CE' \times BD . AF . CE = BF' . AE' . CD' \times BF . AE . CD.$$

Mais, d'après les données, le produit des trois derniers facteurs du premier membre égale celui des trois derniers du second ; donc

$$BD' . AF' . CE' = BF' . AE' . CD',$$

et par suite les droites se coupent en un même point M'.

**1251 a. Note.** 1° Les points correspondants M et M' ont été nommés *points de Terquem*, par Candido de Pise (*N. A.*, 1900, p. 251). Le centre de gravité G et l'orthocentre H sont des points de Terquem.

Deux points correspondants sont réunis au point de Gergonne et à chacun de ses associés.

2° Dès 1842, en rendant compte de l'ouvrage suivant : *Application de la méthode des projections à la recherche de certaines propriétés géométriques*, par L.-A.-S. Ferriot, recteur honoraire de l'Académie de Grenoble, le savant et judicieux Terquem ajoute : « Au milieu de l'océan de propriétés qu'on a accumulées sur les lignes et surfaces du second degré, il est difficile de reconnaître ce qui est *nouveau*. » (*N. A.*, 1842, p. 40.) Que ne pourrait-il pas dire de nos jours des questions sans nombre relatives à la *Géométrie récente du triangle* : aussi que de découvertes de théorèmes déjà connus, que de revendications de priorité !

3° M. E. Lemoine, en 1884, a proposé la question suivante : On donne un triangle ABC, et deux points D, D' sur l'un des côtés ; faire passer par ces deux points une circonférence qui coupe les autres côtés de manière que les céviennes AD, BE, CF soient concourantes. (*J. M. E.*, 1885, p. 262.)

### Théorème de M'Kensie 374. — II.

**1251 b.** *On coupe les côtés d'un triangle* ABC *par une droite quelconque* A'B'C' ; *par les sommets du triangle donné, on mène des parallèles à la sécante; les parallèles rencontrent le cercle circonscrit en* A'', B'', C'' ; *prouver que les droites* A'A'', B'B'', C'C'' *se rencontrent en un même point* M *du cercle circonscrit.* (*J. M. S.*, 1887, p. 201.)

On peut ajouter quelques développements au théorème principal ; ainsi : le triangle A''B''C'' est égal à ABC ; les côtés égaux AB, A''B'', etc., se coupent en trois points situés sur une droite perpendiculaire à la sécante ; cette même sécante coupe les côtés de A''B''C'' en trois points qui, joints aux sommets correspondants, donnent un point M'' du cercle circonscrit et les points M, M'' sont équidistants de la sécante.

Menons A''A' et B''B' qui se coupent en M ; il suffit de prouver que ce point est sur le cercle circonscrit, c'est-à-dire prouver que les angles M et C sont égaux, car les cordes AB et A''B'' sont égales.

Or la somme des angles $A + B$ égale la somme $A'' + B''$.

En effet $2(A + B) = BA'' + A''C + AM + MC,$

$$2(A'' + B'') = B''A + AM + A''C + MC$$

Ces sommes sont égales, donc l'angle $M = C$.

La troisième droite $C''C'$ passe aussi par M.

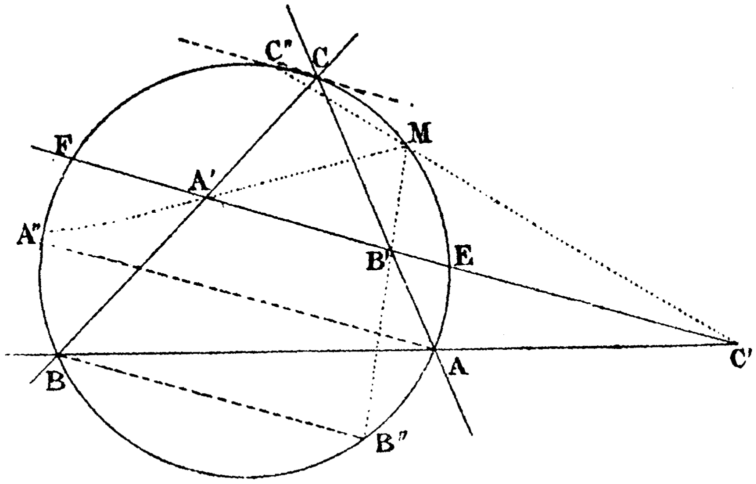



Fig. 782.

**Note.** Un théorème bien intéressant, offrant quelque analogie avec le précédent, est dû à M. NEUBERG. (Voir *Nouvelles Annales mathématiques*, 1898, p. 336, question 1556, avec solution, par M. H. LEZ. Voir aussi la note 1251 d, ci-après.)

**Théorème d'Aubert 374. — III.**

**1251 c.** *Par les sommets d'un triangle* ABC, *on mène trois droites* $AA''$, *etc., parallèles entre elles ; elles rencontrent le cercle circonscrit en* $A''$, $B''$, $C''$. *On joint un point quelconque* M *du cercle circonscrit aux trois points* $A''$, $B''$, $C''$. *La droite* $MA''$ *coupe* BC *en* $A'$, *etc. ; prouver que les trois points* $A'$, $B'$, $C'$ *sont en ligne droite ; la droite* $A'B'C'$ *est parallèle aux lignes* $AA''$, $BB''$, $CC''$.

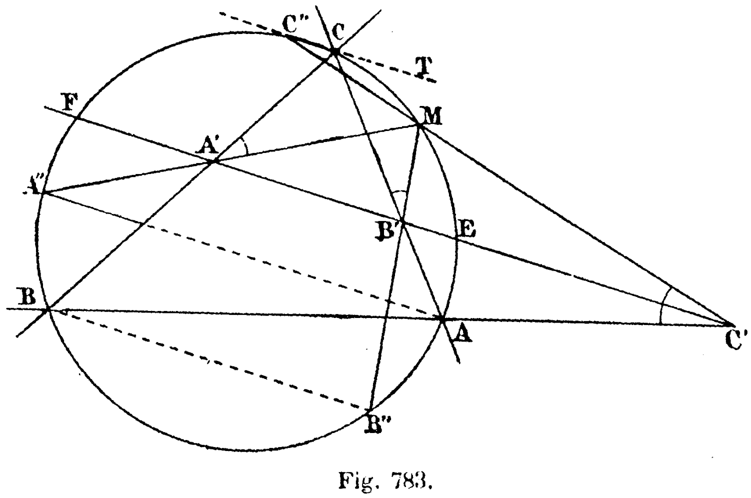



Fig. 783.

Les angles $A'$, $B'$, $C'$ sont égaux comme ayant même mesure ; on a, en effet : $2A' = \text{arcs } MC + BA''$; $2B' = MC + AB''$,

$$2C' = \text{arcs } BC'' - AM = MC + AB''$$

Les droites MA', MB', MC', également inclinées sur les côtés correspondants du triangle donné, ont leurs pieds en ligne droite, d'après le théorème généralisé de *Robert Simson*, nos 1234 et 2464.

Le quadrilatère MCA'B' est inscriptible; donc angle A'B'C = A'MC, ou A''MC = donc A''AC; ainsi A'B'C' est parallèle à A''A.

**1251 d. Note.** La réciproque du théorème de M'KENSIE est démontrée et généralisée dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de VUIBERT, numéro du 1er octobre 1899, page 2, no 4604.

Ce théorème réciproque est de M. PAUL AUBERT, professeur au collège Stanislas, à Paris.

Les *N. A.* de 1889 ont publié la note de l'auteur sous le nom de : *Généralisation du problème de Pascal donnant neuf points en ligne droite.*

On sait que le *Théorème de M'Kensie* a été énoncé et signalé dès 1887 dans le *Journal de mathématiques spéciales* de M. G. DE LONGCHAMPS.

Voir aussi *Mathesis,* 1908, p. 159, par M. J. NEUBERG, et page 257, par M. J. JUHEL-RÉNOY.

## Circonférences. — Situations.

### Théorème 375.

**1252.** *Un rectangle* ABCD *a pour base une droite* AB *double de la hauteur* BC; *on joint le point* A *au point* F *situé au quart de* DC. *Prouver que le point* M *où cette ligne coupe la diagonale* BD *appartient à la demi-circonférence décrite sur* AB *comme diamètre.*

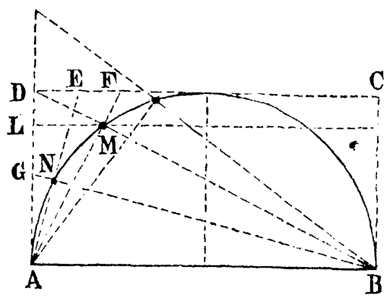


Fig. 784.

Soit DF = $^1/_4$ DC.

Le point M appartient à la demi-circonférence AB. En effet :

Les triangles ADF, BAD sont semblables comme ayant un angle droit compris entre côtés homologues proportionnels; donc les angles DAF, ABD sont égaux, ainsi ABM est le complément de BAM.

Donc l'angle M est droit, et son sommet est sur la demi-circonférence.

### Théorème 375. — I.

**1253.** 1o *Le point* N *appartient à la demi-circonférence, lorsqu'on prend* AG = 2DE.

Les triangles rectangles ABG, DAE sont semblables, car AB est double de AD, et AG est double de DF.

2o *On prend* AL = $^4/_5$ AD; *la parallèle* LM *coupe la diagonale* BD *en un point* M *qui appartient à la demi-circonférence.*

*Remarque.* Ces théorèmes sont utilisés pour mettre une circonférence en perspective. (*Géométrie descriptive,* no 568.)

### Théorème 375. — II.

**1254.** *On construit des carrés sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle. La circonférence décrite sur l'hypoténuse comme diamètre passe par le point milieu de la droite qui joint les deux sommets opposés des deux carrés.*

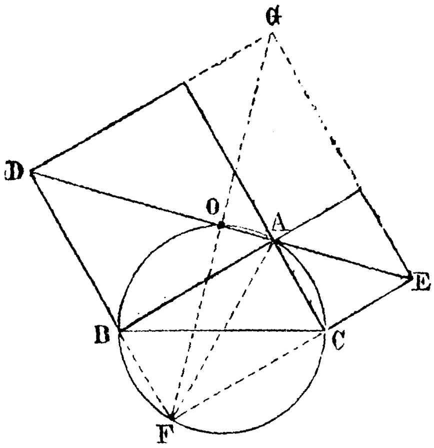



Fig. 785.

Il faut prouver que le point O, milieu de DE, appartient à la circonférence.

En prolongeant les côtés qui aboutissent aux points D, E, on forme un carré DFEG, dont le sommet F est sur la circonférence décrite; or AF, diagonale du rectangle ABFC, est un diamètre; donc l'angle droit AOF, formé par les diagonales du carré, doit avoir son sommet sur la circonférence.

### Théorème 376.

**1255.** *Deux cercles quelconques* A *et* B *étant donnés de grandeur et de position, si deux rayons* AC *et* BD *se meuvent en restant constamment parallèles l'un à l'autre, les droites menées par leurs extrémités rencontrent la ligne des centres en un même point.*

Soit CDN la droite menée par les extrémités des rayons, en l'une quelconque de leurs positions. Les triangles semblables NAC et NBD donnent $\frac{NA}{NB} = \frac{AC}{BD}$; ainsi le rapport $\frac{NA}{NB}$ est constamment égal au rapport des rayons AC et BD; et comme il n'y a, sur la droite AB, qu'une seule position du point N qui donne le rapport $\frac{NA}{NB}$ égal au rapport $\frac{AC}{DB}$ (G., nos 208 et 209), ce point N est donc déterminé, car sa distance NA est indépendante de la direction des rayons parallèles.

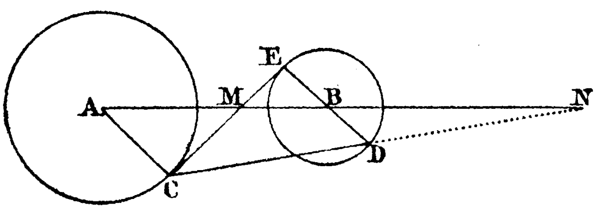



Fig. 786.

**Scolie.** Si les rayons parallèles sont tracés dans des directions opposées AC et BE, la sécante CE rencontre la ligne des centres en un point M dont la position est déterminée par la proportion

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{BE}.$$

La ligne des centres est divisée *harmoniquement*, car on a :

$$\frac{MA}{MB} = -\frac{NA}{NB}.$$

**Théorème 376. — I.**

**1256.** *Trois circonférences sont tangentes deux à deux, on joint le point de contact des deux premières à chacun des autres points de contact; ces deux droites rencontrent la troisième circonférence aux extrémités d'un même diamètre, et ce diamètre est parallèle à la ligne des centres des deux premières circonférences.*

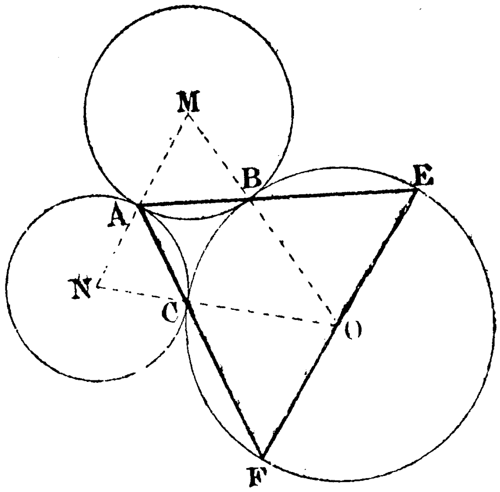


Fig. 787.

Menons ABE, ACF; joignons OE, OF, et prouvons que EOF est parallèle à MN. Le point B est le centre de similitude des circonférences M et O, donc OE est parallèle à AM; de même OF est parallèle à AN, donc...

**Note.** *J. M. E.*, 1890, page 113, BOUTIN.

* M. A. BOUTIN, né à Paris, en 1858, professeur de mathématiques, auteur de nombreux articles insérés dans *J. M. E.* et *J. M. S.*, depuis 1885, membre de la Société mathématique de France.

**Théorème 376. — II.**

**1257.** *Les droites qui joignent un point quelconque d'une circonférence, aux extrémités d'une corde perpendiculaire à un diamètre donné, divisent harmoniquement ce diamètre* (*Porismes d'Euclide*, ou *de Chasles*, p. 95 et 255).

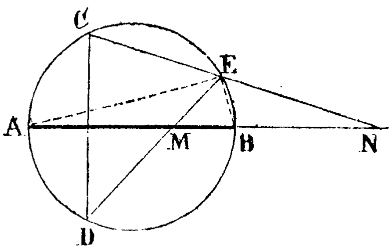


Fig 788.

Soit CD perpendiculaire à AB, E un point quelconque; il faut prouver que les points A, M, B, N donnent des segments en proportion harmonique. (G., nos 219 et 786.)

Joignons le point E aux points A et B.

Les angles AED, AEC sont égaux comme ayant même mesure; donc AE est bissectrice de l'angle CED.

De même $\quad\text{angle DEB} = \frac{\text{DB}}{2}.$

Or l'angle BEN, supplément de BEC, a pour mesure $\frac{\text{CB}}{2}$; mais l'arc DB = CB, donc l'angle DEB = BEN; EB est la bissectrice intérieure de l'angle MEN, donc (G., no 219)

$$\frac{\text{AM}}{\text{AN}} = \frac{\text{BM}}{\text{BN}}.$$

**1258. Note.** *Les Trois livres des Porismes d'Euclide*, par M. CHASLES. Pour donner une juste idée de ce qu'il faut entendre par porisme, dans le sens des anciens, nous allons citer textuellement quelques lignes de l'ouvrage même que nous venons d'indiquer (pages 54 et 55).

« *Les porismes sont des théorèmes non complets, exprimant certaines relations entre des choses variables suivant une loi commune,* relations indiquées dans l'énoncé du porisme, mais qu'il faudrait compléter par la détermination de grandeur ou de position de certaines choses qui sont la conséquence de l'hypothèse, et qui seraient déterminées dans l'énoncé d'un théorème proprement dit ou *théorème complet.*

« Exemple de porisme : *Dans un cercle, l'angle sous lequel on voit, du centre, la partie de chaque tangente comprise entre deux tangentes fixes, est constant ;* ou bien *est donné,* afin d'énoncer le porisme dans le style même d'Euclide.

« *Exemple du théorème complet :* Dans un cercle, l'angle sous lequel on voit, du centre, la partie de chaque tangente comprise entre deux tangentes fixes est égale à la moitié de l'angle formé par les rayons qui aboutissent aux points de contact des tangentes fixes. »

Les porismes sont employés pour déterminer les lieux géométriques et pour résoudre les problèmes.

L'ouvrage d'Euclide était en trois livres et contenait 171 propositions. Pappus ramène 171 porismes à XXIX énoncés qu'il appelle *genres*. Pour démontrer les porismes d'Euclide, Pappus établit d'abord XXXVIII lemmes.

De nombreuses tentatives ont été faites pour rétablir le texte d'Euclide, d'après les indications laissées par Pappus.

L'astronome HALLEY s'en est occupé ; Robert SIMSON a rétabli le texte de trois porismes principaux ; M. BRETON DE CHAMP, ingénieur distingué, auquel on doit des traités de levé des plans et de nivellement, a publié en 1855, puis en 1858, ses *Recherches nouvelles sur les porismes d'Euclide.* Enfin, M. CHASLES, en 1860, a donné les *Trois livres des porismes d'Euclide,* rétablis d'après la notice et les lemmes de Pappus et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions. Nous devons encore mentionner la réclamation de M. BRETON DE CHAMP (*N. A.*, 1867, p. 522), et dire avec PONCELET qu'on attribue, ce semble, un peu trop facilement aux anciens certaines théories, ou certains théorèmes, dont ils n'ont connu peut-être que quelques cas particuliers.

L'assertion de Poncelet a reçu tout récemment une confirmation bien inattendue : ainsi M. TARRY a signalé le 176e *porisme d'Euclide* comme pouvant conduire à plusieurs des propriétés des *points* et du *cercle de Brocard :* questions toutes récentes s'il en fut jamais (*J. M. E.*, 1890, pages 35 et 83) ; nous en avons donné une démonstration très simple (no 1084).

Nous utiliserons un certain nombre de porismes, soit qu'ils viennent en réalité d'EUCLIDE, soit qu'ils procèdent de CHASLES ; mais dans la forme des énoncés, nous nous conformerons généralement aux habitudes modernes.

Pour la définition des *porismes*, voir aussi la *Géométrie grecque* de P. TANNERY, page 152, etc. On lira avec intérêt et profit l'étude historique précédente. (Grand in-8o de 188 pages, publié en 1887 chez GAUTHIERS-VILLARS.)

* M. G. TARRY, inspecteur des contributions à Alger, a fait de nombreuses découvertes dans le champ de la *Géométrie du triangle ;* voir notamment le *point de Tarry* et la *ligne de Tarry* (*J. M. E. et S., Mathesis ;* CASEY, page 142).

* PAUL TANNERY (1843-1904), historien mathématique de très grande valeur ; on peut s'en rendre compte par la notice que lui a consacrée M. A. BOSMANS (supplément à *Mathesis* en 1905).

### Théorème 376. — III.

**1259.** *Deux circonférences ont pour centres* A *et* B ; *la circonférence décrite sur* AB, *comme diamètre, passe par les quatre points d'intersection des tangentes intérieures et des tangentes extérieures.* (*N. A.*, 1869, p. 458.)

Il faut prouver que l'angle AEB est droit.

En effet, le rayon AE est bissectrice de l'angle DEC formé par deux

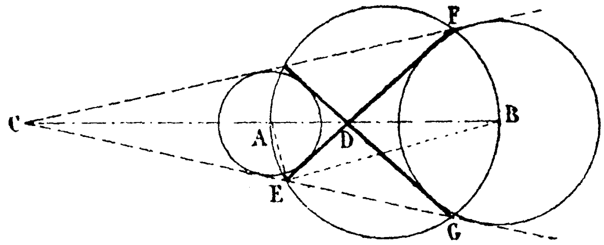



Fig. 789.

tangentes; de même la droite BE est bissectrice de l'angle supplémentaire FEG; donc AEB est droit. Donc...

**1259 a. Note.** M. Barisien, dans *Mathesis* (1905, p. 156), a démontré le théorème suivant: 1° *Le centre intérieur de similitude de deux cercles est le point de la ligne des centres dont la somme des tangentes issues de ce point aux deux cercles est maxima.*

2° *Le centre extérieur de similitude est le point de la ligne des centres dont la différence des tangentes est minima.*

Dans le premier cas on ne considère que la partie de la ligne des centres comprise entre les cercles donnés, et dans le second cas, que les parties extérieures à ces cercles.

### Théorème 376. — IV.

**1259 b.** *Lorqu'une transversale détermine dans deux cercles* O, O' *des cordes* AB, A'B' *égales entre elles, du point de concours* M *des tangentes* AM, B'M, *on voit les cercles* O, O' *sous des angles égaux* AMC, B'MC'.

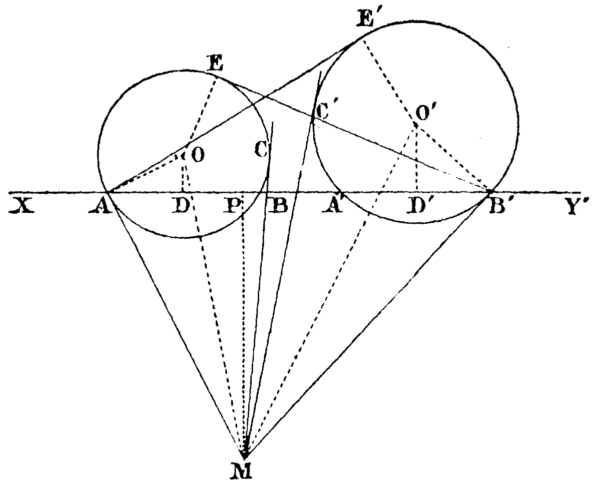



Fig. 790.

Il suffit de prouver que l'angle AMO = B'MO'.

Abaissons sur la transversale les perpendiculaires OD, O'D', MP. Les triangles ADO, MPA sont semblables; donc

$$\frac{AO}{AM} = \frac{AD}{MP};$$

de même

$$\frac{B'O'}{B'M} = \frac{B'D'}{MP};$$

mais AD = B'D' comme moitiés de cordes égales, donc

$$\frac{AD}{MP} = \frac{B'D'}{MP}, \quad \text{d'où} \quad \frac{AO}{AM} = \frac{B'O'}{B'M};$$

donc les triangles AMO, B'MO' sont semblables, d'où il résulte que l'angle AMO = B'MO'.

**1259 c.** *Remarques.* 1° Les tangentes AE′, B′E sont égales, car leurs carrés égalent respectivement AB′ . AA′ et B′A . B′B.

2° La réciproque du théorème est vraie : si les angles AMO, B′MO′ sont égaux entre eux, les cordes AA′, BB′ sont égales entre elles.

**Note.** Le théorème précédent emprunté à CATALAN, *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire,* 6e édition, page 166, se trouve aussi dans la 7e édition du *Traité de Géométrie* de M. ROUCHÉ (page 312, 1°). Il sert de lemme au *Problème de Malfatti* (voir ci-après, n° 1546 **h** et **i**).

### Théorème de d'Alembert 377.

**1260.** *Trois circonférences, considérées deux à deux, ont six centres de similitude ; les trois centres extérieurs sont en ligne droite ; il en est de même de deux centres extérieurs et d'un centre intérieur.*

La démonstration est identique à celle qu'on a déjà donnée pour les centres de similitude de trois polygones homothétiques pris deux à deux (n° 1149). Voir aussi n° 212.

Les transversales donnent aussi une bonne démonstration. (G., n° 821, 2°.)

Enfin l'emploi des *volumes auxiliaires* a conduit MONGE à une démonstration très simple et très élégante. (*Méthodes,* n° 176.)

**1260 a. Note.** CHASLES, dans son *Aperçu historique,* page 293, dit que FUSS attribue le théorème à D'ALEMBERT. D'autre part, CARNOT, dans son *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances relatives à cinq points quelconques pris dans l'espace,* suivi d'un *Essai sur la théorie des Tranversales,* l'attribue à MONGE. Ce dernier, tout au moins, l'a vulgarisé dans ses *Éléments de Géométrie descriptive.* (Voir *Intermédiaire des Mathématiciens,* 1898, page 271, n° 1418.)

### Théorème 378.

**1261.** *Le rayon du cercle des neuf points est la moitié de celui du cercle circonscrit. Le point de concours des hauteurs, ou orthocentre, est le centre de similitude de ces deux cercles.*

1re *Démonstration.* (*Méthodes,* n° 28.)

2e *Démonstration* (fig. 791). 1° Le cercle des neuf points passe par les points D, G, F, I ; son centre est donc en N, au milieu de OH. Le cercle des neuf points est circonscrit au triangle DEF, dont les côtés sont les moitiés des côtés de ABC ; donc ND doit égaler $\frac{1}{2}$AO.

On peut encore dire : les triangles AHO, DON sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés homologues proportionnels, car $OD = \frac{1}{2}AH$, $ON = \frac{1}{2}OH$ ; donc $ND = \frac{1}{2}AO$.

2° H est centre de similitude, car $\frac{HN}{HO} = \frac{1}{2} = \frac{ND}{AO}$.

Ainsi, *toute droite menée par le point H, limitée à la grande circonférence, est divisée en deux parties égales par le cercle des neuf points.*

On a prouvé directement que le point I, milieu de AH, appartient au cercle des neuf points (n° 720), et que HG = GL (n° 292 **c**).

**Théorème 378. — I.**

**1262.** 1° *Dans tout triangle, la distance d'un côté quelconque au centre du cercle circonscrit est la moitié de la distance du sommet opposé à l'orthocentre.*

2° *Le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, le centre du cercle des neuf points et l'orthocentre, forment une division harmonique.*

1° On a déjà démontré cette proposition (nos 666 et 292 c), mais il est facile de la prouver directement.

Soient H l'orthocentre, M le point de concours des médianes, O le centre du cercle circonscrit.

D'après le *théorème d'Euler* (n° 1119), on sait que les points H, M, O de la *droite d'Euler* sont en ligne droite.

Or

AM = 2MD (G., n° 230),

donc AH = 2OD.

On peut dire aussi : Les triangles FON, BHO sont semblables,

or HO = 2NO,

donc BH = 2FO.

2° Les médianes se coupent aux deux tiers de leur longueur, à partir des sommets ; donc aussi OM égale le tiers de OH, par suite MN en est le sixième, et MN est la moitié de MO ; on a donc la proportion

$$\frac{MO}{MN} = \frac{HN}{HO}.$$

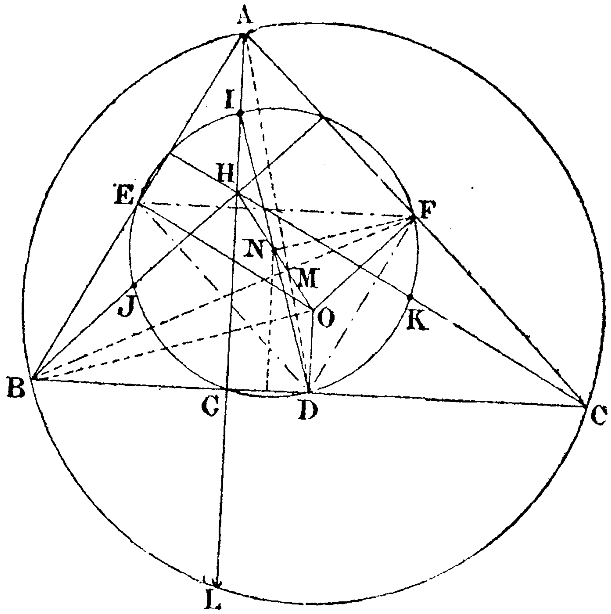


Fig. 791.

**Note.** 1° Voir nos 734 et 1341 **b** ; ainsi qu'aux *Méthodes*, nos 130 et 292 **k**.

2° Le cercle des neuf points a d'abord été simplement le cercle des six points d'EULER. A cette occasion, nous indiquons une belle étude élémentaire de M. V. THÉBAULT, professeur à Ernée, sur le *Système de six points concycliques.* (*Bulletin de mathématiques élémentaires*, de M. CH. MICHEL, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris, 1910, p. 25.)

**Théorème 378. — II.**

**1263.** *Deux circonférences égales se coupent suivant une corde commune CD. Toute circonférence, tangente à cette corde au point C ou au point D, coupe les deux circonférences en deux points M, N, qui sont en ligne droite avec le point O, milieu de la distance AB des centres des circonférences données.*

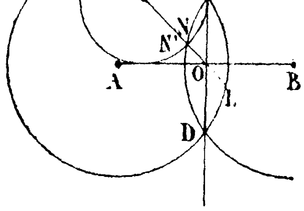


Fig. 792.

Joignons le point milieu O au point M.

Soit N' le point où cette ligne coupe le cercle E, N le point où elle coupe le cercle B.

La droite OC est tangente au cercle E;

donc $$OM . ON' = OC^2.$$

Mais $$OM . OL = OC . OD = OC^2.$$

Donc $$OM . ON' = OM . OL.$$

Mais $OL = ON$; donc $ON = ON'$; ainsi N et N' se confondent, et les trois points M, N, O sont en ligne droite.

### Théorème 379.

**1264.** *Le lieu des points d'égale puissance, par rapport à deux circonférences, est une perpendiculaire à la ligne des centres.*

*Ce lieu se nomme axe radical des deux circonférences.*

(G., nº 830.)

### Théorème 380.

**1265.** *L'axe radical de deux circonférences est le lieu des points d'où l'on peut mener à ces circonférences des tangentes égales.*

(G., nº 833.)

**1265 a. Note.** L'epression *axe radical* a été proposée par GAULTIER, de Tours, dans un mémoire sur les contacts des cercles. (*Journal de l'École Polytechnique,* XVIᵉ cahier, année 1813.)

(Citation d'après PONCELET et CHASLES : *Traité des propriétés projectives des figures,* tome I, page 41 ; *Géométrie supérieure,* page 501.)

L'axe radical a été nommé parfois *droite dishomologue.* (RITT, *Problèmes de Géométrie.*)

PONCELET a généralisé la notion précédente, en l'étendant à deux coniques quelconques, situées dans un même plan ; il a d'ailleurs remplacé l'expression d'*axe radical,* qui ne convient qu'à deux cercles, par celle de *sécante commune ;* l'étude de deux coniques conduit à dire : *Deux cercles ont deux sécantes communes: l'une à distance finie* (axe radical) et l'autre à distance infinie (droite de l'infini). L'axe radical rencontre chaque cercle en deux points réels ou imaginaires, suivant que les cercles se coupent, ou ne se rencontrent pas. On nomme *points circulaires à l'infini,* les points imaginaires d'intersection de chaque cercle avec la sécante commune de l'infini.

### Théorème 381.

**1266.** *Lorsque, par le centre de similitude de deux circonférences, on mène une sécante qui les coupe en quatre points, les quatre tangentes menées en ces points aux circonférences forment un parallélogramme dont l'une des diagonales passe par le centre de similitude et dont l'autre est sur une droite donnée de position.* (*Porismes d'Euclide,* p. 315.)

Les triangles isocèles MTN, M'T'N' sont semblables, car les angles T, T' sont les suppléments des angles égaux O, O' (nº 1256).

Les triangles MHN', NLM' ont les angles aigus égaux aux angles des deux premiers triangles, ils sont donc isocèles; ainsi $LN = LM'$,

$MH = HN'$, et les tangentes étant égales, les points H, L appartiennent à l'axe radical, ligne qui est perpendiculaire à OO′ (nº 1265).

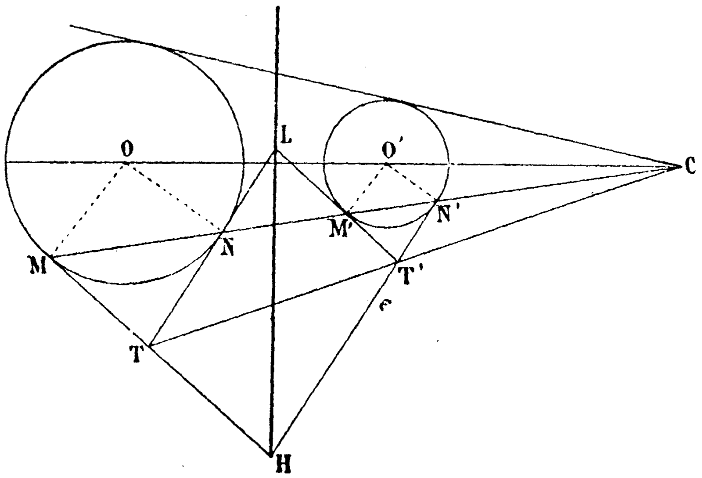



Fig. 793.

Les points T, T′ étant homologues, la droite TT′ est un axe de similitude et doit passer par le centre C (nº 1145).

**Théorème 382.**

**1267.** *L'axe radical de deux circonférences est le lieu des centres des circonférences qui les coupent orthogonalement.*

(G., nº 835.)

**Théorème de Poncelet 383.**

**1268.** *Toutes les circonférences qui coupent orthogonalement deux cercles donnés, extérieurs l'un à l'autre, passent par deux points fixes.* Ces points se nomment *points limites de Poncelet.*

(Voir *Méthodes,* nº 231.)

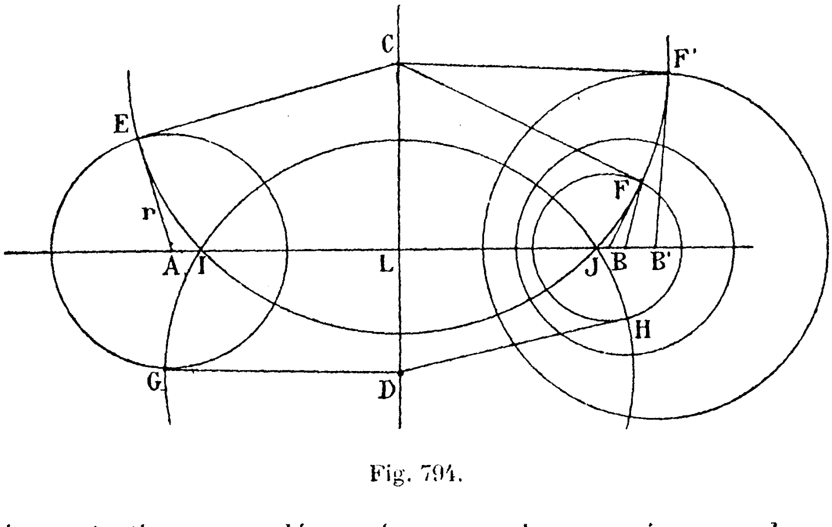



Fig. 794.

La démonstration rappelée présuppose la connaissance des notions relatives à l'axe radical; il peut donc être utile de donner une autre démonstration.

Rappelons qu'une circonférence C coupe orthogonalement une circonférence A, lorsque les rayons AE, CE du point d'intersection sont perpendiculaires l'un à l'autre ; chacun de ces rayons est tangent à la seconde circonférence, ainsi CE est tangent au cercle A, de même que AE est tangent au cercle C (nº 620).

La circonférence C coupant orthogonalement les cercles A et B, les tangentes CE, CF doivent être égales, puisque ce sont des rayons.

Soient I et J les points d'intersection ; il suffit de prouver que la position de ces points est indépendante du rayon CE : on sait que

$$LI = LJ.$$

Or $$AI \cdot AJ = r^2,$$

d'où $$(AL - LI)(AL + LI) = r^2,$$

d'où $$AL^2 - LI^2 = r^2, \text{ quantité constante.}$$

On aurait de même : $$BL^2 - LJ^2 = r'^2.$$

Ainsi la position des points I, J est indépendante du rayon CE.

**Théorème 383. — I.**

**1269.** *Si d'un point pris à volonté sur le plan d'une suite de cercles ayant même axe radical, on mène deux tangentes à chaque cercle de la série, le point milieu de chaque corde des contacts se trouve sur une circonférence coupant orthogonalement les premières.* (Poncelet, *Applications d'Analyse et de Géométrie,* t. II, p. 397.)

Soit C un des cercles dont OD est l'axe radical commun, A le point donné, AE, AF les tangentes, B le point milieu de la corde des contacts.

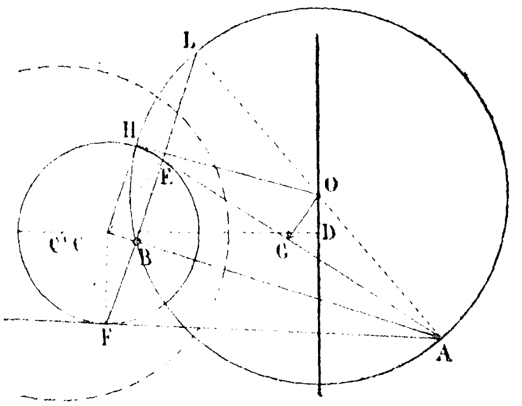


Fig. 795.

Tout cercle qui coupe orthogonalement des cercles donnés doit avoir son centre sur OD. Faisons donc passer par les points A et B un cercle dont le centre soit sur l'axe radical ; il suffit d'élever une perpendiculaire au milieu de AB. Le théorème sera démontré, si nous prouvons que l'angle CHO est droit, car le cercle de centre O sera le cercle orthogonal qui passe par le point A, et ce cercle passera en outre par le point B.

Or le triangle rectangle CEA donne :

$$CE^2 = CB \cdot CA.$$

Mais $$CE^2 = CH^2; \quad \text{donc} \quad CH^2 = CB \cdot CA.$$

Ainsi la droite CH est tangente au cercle, car son carré égale le produit de la sécante CA par la partie extérieure CB. Donc l'angle CHO est droit. Le cercle orthogonal de centre O, ne dépendant que du point A et de l'axe radical commun DO, est donc le lieu du point milieu B des cordes de contact de tous les cercles, tels que ceux qui ont respectivement pour centres les points C, C'...

**Théorème 383. — II.**

**1270.** *Dans le théorème précédent, toutes les cordes des contacts passent par un même point, quel que soit le cercle considéré.*

En effet, l'angle ABE étant droit, toute corde telle que FE passe par le point L, extrémité du diamètre AOL.

**Théorème 384.**

**1271.** *Lorsque trois cercles* M, N, R *se coupent, les trois cordes d'intersection se rencontrent en un même point.* (MONGE.)

1re *Démonstration.* Soit O le point de rencontre de deux cordes AB et CD; menons EO, et appelons F et G les points de rencontre de cette droite avec les circonférences N et R.

Désignons par $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, les segments des cordes. On a (G., nos 259 et 261) :

Dans le cercle M : $ab = cd$; (1)

Dans le cercle N : $ab = ef$; (2)

Dans le cercle R : $cd = eg$. (3)

Les deux dernières égalités ont le premier membre égal, comme on le voit par la première; on a donc : $ef = eg$, et par suite $f = g$, ou $OF = OG$. Ainsi les points F et G se confondent.

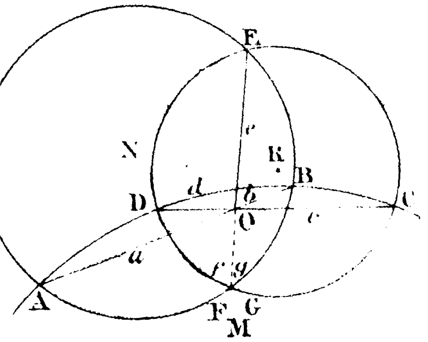


Fig. 796.

2e *Démonstration.* On peut recourir aux *solides auxiliaires* (nos 169 et suivants). Admettons que les trois circonférences données (fig. 796) soient les grands cercles de trois sphères ayant respectivement pour centres les points M, N, R. Les sphères M et N se coupent suivant un petit cercle qui se projette en AB, les sphères M et R se coupent suivant un petit cercle qui se projette en CD; donc le point projeté en O, et qui se trouve sur le cercle AB et sur le cercle CD, appartient aux trois sphères; donc il doit se trouver sur le cercle EF commun aux sphères N et R; donc EF doit passer par le point O.

**1271 a.** *Remarques.* 1o La rencontre peut avoir lieu sur les prolongements des cordes; la première démonstration ci-dessus s'applique également à ce cas (fig. 797).

2° Les cercles peuvent se déplacer de manière à devenir tangents : chaque corde devient nulle en longueur, mais sa direction limite est la

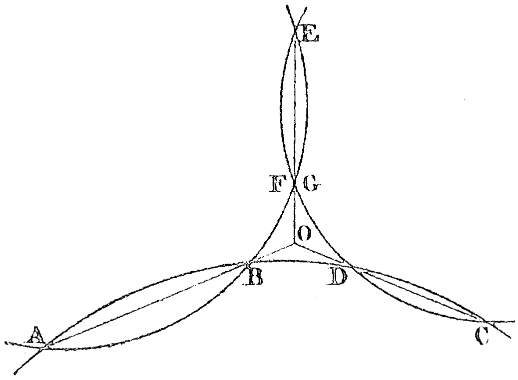



Fig. 797.

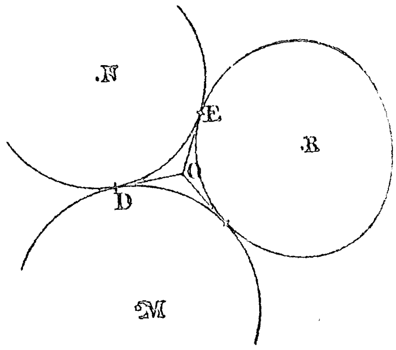



Fig. 798.

tangente commune. Donc, *lorsque trois cercles sont tangents entre eux, les trois tangentes communes se rencontrent en un même point.*

**Note.** Ces deux théorèmes ne sont que des cas particuliers du théorème suivant (n° 1272).

Le théorème 1271 est de Monge, dans le cas où les sécantes sont réelles. (D'après Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures,* tome I, p. 40.)

* Monge, né à Beaune en 1746, mort en 1818, est le véritable créateur de la *Géométrie descriptive.*

### Théorème 384. — I.

**1272.** 1° *Les axes radicaux de trois cercles, pris deux à deux, concourent au même point.*

2° *Le point de concours des axes radicaux,* ou centre radical des trois cercles, *est le centre d'un cercle orthogonal aux cercles donnés.*

(Voir G., n° 838.)

### Théorème 385.

**1273.** *La corde commune aux circonférences décrites sur les diagonales d'un trapèze, prises pour diamètres, passe par le point de concours des côtés non parallèles.*

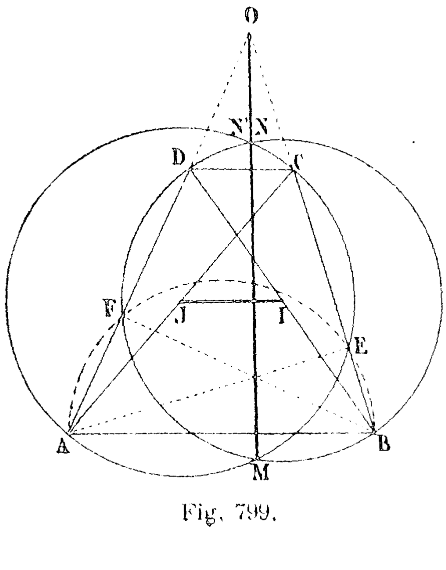



Fig. 799.

La circonférence qui a BD pour diamètre détermine le point F, pied de la hauteur BF, car l'angle BFD est droit.

De même AE est perpendiculaire sur OB ; les points E, F appartiennent donc à la circonférence décrite sur AB comme diamètre.

Soit N le point où la droite OM coupe la circonférence MBN et N' le point où OM coupe la circonférence MAN'. Il suffit de prouver que les points N et N' coïncident.

On a : $$OM \,.\, ON = OD \,.\, OF, \quad (1)$$
$$OM \,.\, ON' = OE \,.\, OC. \quad (2)$$

Prouvons que les produits OD . OF et OE . OC sont égaux.

Le demi-cercle AFEB donne :

$$OB \,.\, OE = OA \,.\, OF. \quad (3)$$

Les parallèles AB, CD donnent :

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OD},$$

d'où $$OB \,.\, OD = OA \,.\, OC. \quad (4)$$

Divisons (3) par (4); on trouve :

$$\frac{OE}{OD} = \frac{OF}{OC},$$

d'où $$OE \,.\, OC = OD \,.\, OF.$$

Ainsi, en comparant (1) et (2), on a :

$$OM \,.\, ON = OM \,.\, ON',$$

d'où $$ON = ON'.$$

### Théorème de Newton 386.

**1274**. *Les diagonales d'un quadrilatère circonscrit à un cercle et les cordes des points de contact des côtés opposés se coupent au même point.*

Ou bien : *Lorsqu'un quadrilatère inscrit à un cercle a pour sommets les points de contact d'un quadrilatère circonscrit à ce même cercle, les diagonales des deux quadrilatères se coupent au même point.*

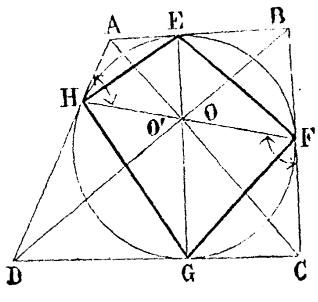


Fig. 800.

*Démonstration de L. Anne.* On sait que lorsque deux triangles ont deux angles égaux et deux angles supplémentaires, les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels aux côtés opposés aux angles supplémentaires (nº 150).

Soit O le point d'intersection de AC et HF.

Les triangles AOH, CFO ont des angles égaux au point O, et les angles en F et H sont supplémentaires, comme formés par des tangentes aux extrémités d'une même corde FH; donc

$$\frac{AH}{CF} = \frac{AO}{CO}.$$

Soit O' la rencontre de AC et de EG; on aura :

$$\frac{AE}{CG} = \frac{AO'}{CO'}.$$

Mais $AH = AE$, $CF = CG$; donc

$$\frac{AO}{CO} = \frac{AO'}{CO'}.$$

Ainsi les points O et O' se confondent.

NOTE. * LÉON ANNE, ancien élève de l'École Polytechnique, répétiteur au collège Louis-le-Grand. Les *Nouvelles Annales* lui doivent plusieurs démonstrations très ingénieuses.

**Théorème 386. — I.**

**1275.** *Lorsque deux quadrilatères, dont l'un est inscrit et l'autre circonscrit à un cercle, sont tels que les sommets du premier sont les points de contact des côtés du second, les côtés opposés de chaque quadrilatère concourent deux à deux en quatre points situés en ligne droite, et les diagonales des deux polygones concourent au même point.*

Soient les quadrilatères ABCD et EFGH.

1° Soit O le point de concours des cordes de contact EG, FH; la troisième diagonale MN du quadrilatère complet est la polaire du point O. (G., n° 798, 3°.)

Le point L est le pôle de la corde EG (G., n° 806), K est celui de FH; donc LK est la polaire du point O (G., n° 805); ainsi les quatre points K, L, M, N sont en ligne droite.

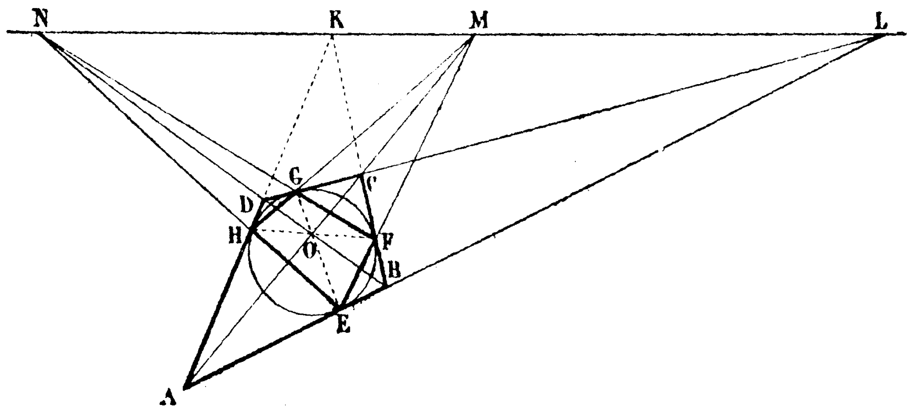



Fig. 801.

2° B est le pôle de EFM, O celui de MK et D celui de HGM.

Or les trois droites ME, MH, MK concourent en un même point M; donc les trois points B, O, D sont en ligne droite (G., n° 804, 2°), et cette ligne BOD est la polaire du point M.

De même AC passe par le point O.

3° Les diagonales du quadrilatère circonscrit passent par les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit, car les droites HG, AC, EF sont les polaires des trois points D, N et B situés en ligne droite. (G., n° 804, 1°.)

**1275 a. Note.** Le *Théorème de Newton* est vrai pour une conique quelconque. Ainsi que nous l'avons indiqué, la démonstration que nous avons donnée (n° 1274) est de LÉON ANNE (*N. A.*, 1842, page 186; 1844, pages 28 et 465).

Catalan, dans ses *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, 6e édition, 1879, Th. LIX, page 127, reproduit la solution même donnée par Newton.

Bobillier (*Géométrie*, 11e édition, page 361) reproduit une démonstration donnée par Carnot dans sa *Géométrie de position*.

Les mots *pôle* et *polaire* ont été employés en 1809 par Servois, ancien professeur de l'école de Metz, auteur d'un essai sur la Géométrie de la règle: *Solutions peu connues de différents problèmes de Géométrie pratique.* (Voir M. G. de Longchamps, *Géométrie de la règle et de l'équerre*, 1890.)

### Théorème 387.

**1276.** *Lorsqu'on prolonge les côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible et qu'on mène les bissectrices des deux angles ainsi obtenus, le point d'intersection de ces deux lignes et les points milieux des diagonales du quadrilatère donné sont en ligne droite.* (*N. A.*)

On sait que la figure IJGH est un losange (nº 675).

Prouvons d'abord que les côtés de ce losange sont parallèles aux diagonales du quadrilatère.

La bissectrice FJ donne : $\frac{AJ}{BJ} = \frac{AF}{BF}$.

Les triangles semblables AFC, BFD donnent :

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BD};$$

donc

$$\frac{AJ}{BJ} = \frac{AC}{BD}. \qquad (1)$$

La bissectrice EH et les triangles semblables AEC, DEB donnent :

$$\frac{AH}{DH} = \frac{AE}{DE} = \frac{AC}{BD}. \qquad (2)$$

A cause du rapport commun aux proportions (1) et (2), on peut écrire :

$$\frac{AJ}{BJ} = \frac{AH}{DH}.$$

Donc la droite HJ est parallèle à BD, car elle divise en parties proportionnelles les côtés du triangle BAD.

De même HI est parallèle à AC.

Soient M et N les milieux des diagonales.

Menons MB, MD et la droite LK qui joint les deux points obtenus.

BM est la médiane du triangle ABC; donc elle divise la parallèle GJ en deux parties égales; de même le point L est le milieu de HI.

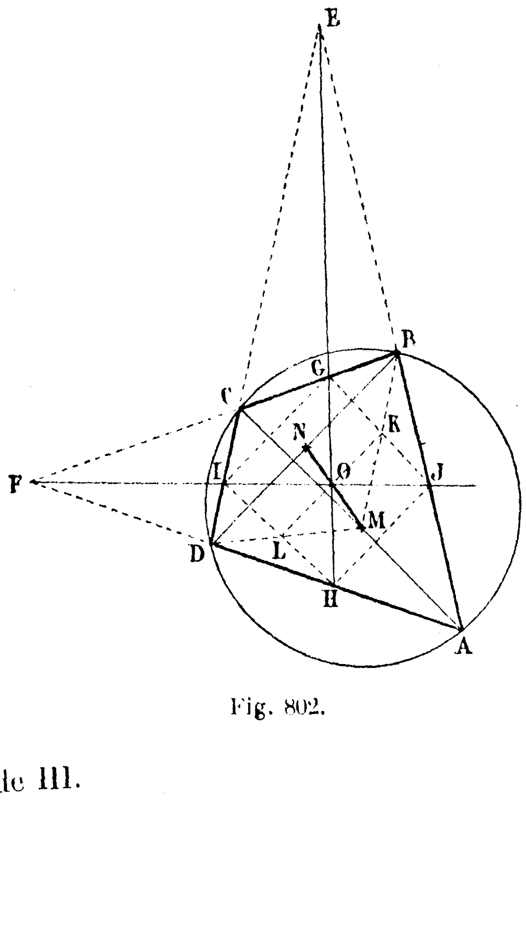



Fig. 802.

La droite LK, qui joint les milieux des côtés opposés du losange, passe donc par le point O où les diagonales se coupent, et se trouve en outre parallèle à IG et à BD. Son point milieu O appartient donc à la médiane MN du triangle BMD.

**Théorème 387. — I.**

**1276 a.** *Les bissectrices des angles formés par les côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible, et les droites qui joignent deux à deux les milieux des côtés opposés de ce quadrilatère, passent par un même point.*

En effet, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés se rencontrent au milieu de la droite MN qui joint les milieux des diagonales (nº 548) ; donc les bissectrices et les droites qui joignent les milieux des côtés opposés passent par le même point O, milieu de MN.

**Théorème 387. — II.**

**1276 b.** *Soit un quadrilatère inscriptible* ABCD; *on considère les quatre triangles formés par trois sommets; pour chacun d'eux, pour* ABC *par exemple, du sommet* D *on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés; les quatre droites de Simson ainsi obtenues passent par un même point, et ce point est commun aux cercles des neuf points des quatre triangles.* (Lemoine, *N. A.*, 1869, pages 174 et 317.)

La solution a été donnée par Figa Bartolomeo de Turin; Jansen, élève du lycée de Douai; Kiepert, étudiant en mathématiques à Berlin; Morel, répétiteur à Sainte-Barbe. Voir aussi *N. A.*, 1871, p. 206, et Millet, *Principales méthodes de la géométrie moderne*, p. 138 et 139.

**Théorème 388.**

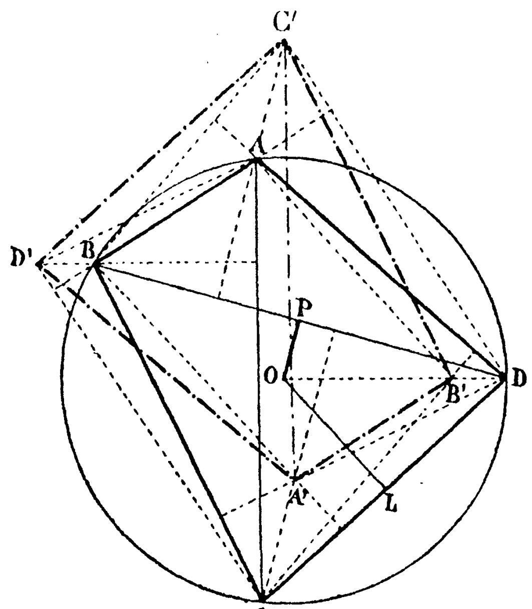


Fig. 803.

**1277.** *Les points de concours des hauteurs des quatre triangles, formés par deux côtés adjacents et par une diagonale d'un quadrilatère inscriptible, sont les sommets d'un quadrilatère égal au premier.*

Soit ABCD le quadrilatère inscriptible, A' le point de concours des hauteurs du triangle BCD, C' celui de BAD, B' celui de ADC et D' celui de ABC; il faut prouver que $A'B'C'D' = ABCD$.

On sait que la distance OP du centre du cercle circonscrit à la base BD du triangle inscrit BAD est la moitié de la distance AC' du sommet opposé (nº 1261) au point de concours des hauteurs.

Donc $AC' = 2PO = CA'$.

La figure ACA'C', ayant deux côtés opposés égaux et parallèles, est un parallélogramme; donc la diagonale A'C' est égale est parallèle à AC; de même B'D' est égal et parallèle à BD.

Dans le triangle BCD, BA', perpendiculaire à CD, égale 2 . OL.

Dans le triangle CAD, AB', perpendiculaire à CD, égale 2 . OL.

Donc la figure ABA'B' est un parallélogramme, comme ayant deux côtés BA', AB' égaux et parallèles; donc AB et A'B' sont des côtés égaux et parallèles.

On démontrerait de même l'égalité et le parallélisme des autres côtés; donc les quadrilatères ABCD, A'B'C'D' sont égaux.

**Théorème 388. — I.**

**1277 a.** *Si l'on considère le cercle des neuf points de chacun des quatre triangles formés par deux côtés adjacents et par une diagonale d'un quadrilatère inscriptible, les quatre centres des cercles obtenus sont les sommets d'un quadrilatère semblable au quadrilatère donné.*

On sait que le centre du *cercle des neuf points* du triangle BCD est au point milieu de la droite OA' qui joint le centre O du cercle circonscrit au point de concours A' des hauteurs du triangle (nº 28); ainsi le centre du second cercle est au milieu de OB', etc. (fig. 803); donc les centres A'', B'', etc., forment un quadrilatère A''B''C''D'' homothétique de A'B'C'D', et semblable, par suite, au quadrilatère ABCD; d'ailleurs

$$A''B'' = {}^1/_2 A'B' + {}^1/_2 AB.$$

**Théorème 388. — II.**

**1277 b.** *Dans un quadrilatère inscriptible, on a quatre triangles en considérant deux côtés adjacents et la diagonale qui joint leurs extrémités.*

1º *Les quatre* droites de Simson *de ces triangles, lorsqu'on prend pour chacun d'eux le quatrième sommet du quadrilatère, et les* cercles d'Euler *de ces mêmes triangles, passent par un même point.* (Lemoine, 1869.)

2º *Les droites qui joignent chaque sommet du quadrilatère à l'orthocentre du triangle formé par les trois autres passent aussi par le même point; ce point est le symétrique* du centre *du cercle circonscrit, par rapport au point de concours des trois symédianes du quadrilatère.* (Mathot, *Mathesis,* 1901, p. 25, nº 2.)

3º *Vingt-sept droites très particulières du quadrilatère inscriptible passent par un même point.* (Deteuf, *N. A.,* 1908, p. 442.)

**1277 c. Note.** 1º Le point si remarquable du quadrilatère inscrit a été signalé et situé par J. Mathot (*Mathesis,* 1901, page 25), mais il avait été rencontré antérieurement (nº 676, fig. 401, point N).

2º M. H. Brocard, dans les *N. A.,* 1909, page 136, a établi que le théorème principal est de M. E. Lemoine (*N. A.,* 1869, page 47, question 908), et que la solution a été donnée dans le même volume, page 174, par Figa Bartolomeo de Turin et Kiepert de Berlin, puis page 317, par Morel, alors répétiteur à Sainte-Barbe.

On peut rappeler à ce sujet, la question 279, posée par M. J. Franel de

Zurich, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, et la réponse de M. E. LEMOINE, 1894, pages 151 et 223 ; on y signale même un travail de M. S. KANTOR, sur le même sujet.

Il conviendrait d'appeler *point de Mathot* d'un quadrilatère inscriptible, le point symétrique du centre du cercle circonscrit, par rapport au point de concours des bimédianes du quadrilatère, c'est-à-dire des droites qui joignent les points milieux des côtés opposés et des diagonales ; car le *quadrilatère harmonique* a son *point de Lemoine*.

3° On pourrait citer de nombreuses propriétés du quadrilatère inscriptible voici quelques indications : *N. A.*, 1901, page 374, par M. E. LEGRAND ; 1904, page 400, M. T. LEMOYNE ; 1908, p. 442, A. DETEUF, ingénieur des Ponts et Chaussées ; *Mathesis*, 1904, p. 77, question 1442 ; page 79, n° 1141.

Le journal de G. DE LONGCHAMPS donne de nombreuses formules relatives au quadrilatère inscriptible, par LECOCQ, ancien professeur au lycée d'Avignon (*J. M. E.*, 1897, pages 9, 32, 53, 78, 111, 134, 151, 174. La table manque). Ce même volume contient des articles très intéressants de M. A. AUBRY, sur la *Géométrie de la Mesure*.

### Théorème 388. — III.

**1277 c.** *Le quadrilatère ayant pour sommets les centres de gravité des quatre triangles d'un quadrilatère donné* ABCD, *est homothétique à ce même quadrilatère* ABCD. (*Journal de Mathématiques* de VUIBERT, 1905-1906, p. 44, n° 6079.)

### Théorème 389.

**1278.** *Si deux polygones réalisent les conditions suivantes : 1° sont semblables, 2° ont les côtés homologues parallèles, 3° ont des intervalles égaux entre les côtés homologues, ces deux polygones sont circonscriptibles à des cercles.* (BORDONI, professeur à Pavie. — *N. A.*, 1860, p. 306.)

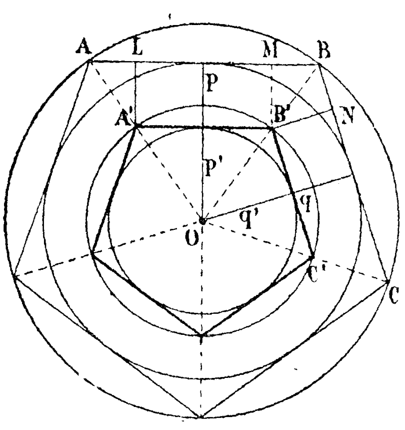


Fig. 804.

Les deux polygones sont *homothétiques*, c'est-à-dire semblables et semblablement placés.

Soit O le centre de similitude ou d'homothétie.

Abaissons les perpendiculaires $p$ et $p'$ sur deux côtés homologues AB et A'B', et les perpendiculaires $q$, $q'$ sur les côtés BC, B'C'.

Ces perpendiculaires sont des lignes homologues, ainsi

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'},$$

$$\frac{p - p'}{p'} = \frac{q - q'}{q'}.$$

Mais les différences sont égales par construction ; donc $p' = q'$ et $p = q$ ; donc les côtés sont tangents à des circonférences ayant O pour centre.

*Remarques.* 1° Les polygones donnés (n° 1278) sont inscriptibles lorsque

AB = BC, etc.

2° Le théorème proposé peut être énoncé comme il suit : *Deux polygones semblables dont les côtés homologues sont parallèles et équidistants sont circonscriptibles à des cercles concentriques.*

### Théorème 390.

**1279.** *Lorsque trois circonférences ont une même corde commune* AB, *toute sécante* AMON, *menée par un des points d'intersection et qui coupe les trois courbes en* M, O, N, *détermine des segments* MO, ON, *dont le rapport est constant.*

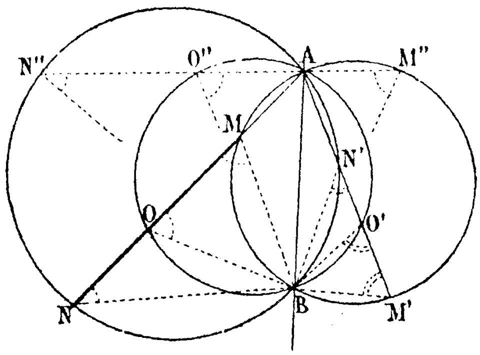



Fig. 805.

Joignons le second point d'intersection B aux trois points M, O, N, et prouvons que la figure MONB reste semblable a elle-même, quelle que soit la direction de la sécante AN.

Les angles M, O, N ont une valeur constante, car M est le supplément de AMB qui égale $^1/_2$ arc AM″M′B.

$$O = {}^1/_2 \text{arc AO'B}, \quad N = {}^1/_2 \text{arc AN'B}.$$

Donc le rapport $\frac{MO}{ON}$ est constant.

**1279 a.** *Remarques.* 1° Il en est de même des rapports $\frac{BM}{BN}$, $\frac{BM}{BO}$, etc.

2° Ce théorème peut être déduit comme *remarque* d'un lieu géométrique (n° 1372).

3° La sécante AM′ donne $\frac{M'O'}{O'N'} = \frac{MO}{ON}$, car l'angle $M' = M$, $O' = O$, $N' = N$.

4° La sécante AM″ donne aussi $\frac{M''O''}{O''N''} = \frac{MO}{ON}$, car $M'' = M' = M$, $O'' = O$, $N'' = N$.

Ainsi *toute sécante menée par le point* A *donne lieu à un rapport constant.*

### Théorème réciproque 390. — I.

**1279 b.** *Lorsqu'on mène une corde quelconque* AMN (fig. 805) *par l'un des points de concours de deux circonférences sécantes, et qu'on divise* MN *en deux parties* MO, ON *qui soient dans un rapport donné, le point* O *se trouve sur une circonférence* AOBO′ *qui passe par les points de concours des deux circonférences données.*

### Théorème 390. — II.

**1280.** *Lorsque trois circonférences ont une corde commune* AB, *toute tangente menée par le point* A *à une des circonférences est divisée par* *les deux autres et par le point A en deux segments dont le rapport est constant.*

Si une droite $mAn$ est tangente à la circonférence OO'O'' (fig. 805), le point A tiendra lieu du point O, et l'on aura :

$$\frac{mA}{nA} = \frac{MO}{NO}.$$

Si la droite est tangente à la circonférence MM'M'', le point A tiendra lieu du point M, et l'on aura, par exemple :

$$\frac{Ao'}{o'n'} = \frac{MO}{ON},$$

d'où

$$\frac{mA}{nA} = \frac{Ao'}{o'n'}.$$

Enfin la droite pourrait être tangente à la circonférence NN'N''.

### Théorème 390. — III.

**1281.** *Lorsqu'un triangle* LMN *se meut dans son plan en restant semblable à lui-même, tandis que deux sommets* M, N *se meuvent sur deux circonférences ayant une corde commune* AB, *et que le côté* AMN *passe par un des points d'intersection* A, *le troisième sommet* L *décrit une circonférence qui passe par le point* B.

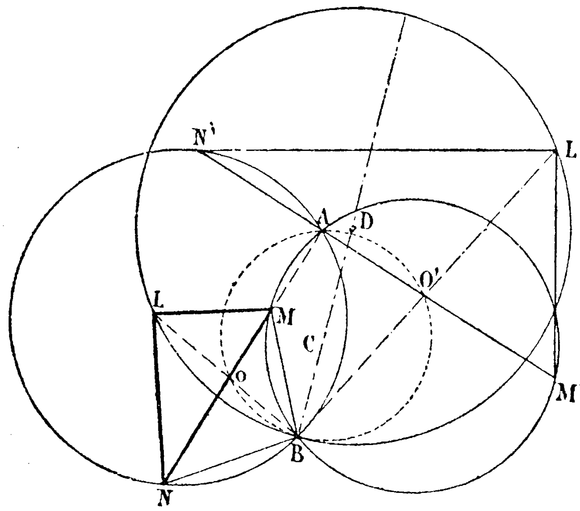



Fig. 806.

Joignons le point B au point L ; soit O le point où la ligne BL coupe MN.

Le quadrilatère LMBN reste semblable à lui-même, car tous les angles sont constants, et il en est de même du rapport $\frac{BM}{BN}$ (nº 1279). Donc la diagonale BL divise MN en deux segments dont le rapport $\frac{MO}{ON}$ est constant ; donc le point O décrit une circonférence AOB qui passe par les points d'intersection A et B des deux premières ainsi qu'on l'a démontré (nº 1279).

Le quadrilatère LMBN restant semblable à lui-même, le rapport $\frac{BO}{BL}$ est constant ; donc les points L, O décrivent des circonférences ayant le point B pour centre extérieur de similitude (nº 1279 **b**).

### Théorème 390. — IV.

**1282.** *Par un des points d'intersection de deux circonférences qui se coupent, on mène des sécantes* ABC ; *sur chacune d'elles on construit* *des figures semblables entre elles. Les points homologues de toutes ces figures se trouvent sur une même circonférence.*

Il suffit de combiner les théorèmes déjà démontrés (nos 1279 et 1281).

### Théorème 391.

**1283.** *Lorsqu'une figure se meut dans son plan, en restant semblable à elle-même, et que trois de ses droites passent respectivement par trois points fixes, tout point de la figure donnée décrit une circonférence.* (Julius Petersen, *N. A.*, 1867, p. 80.)

Soient A, C, D les trois points fixes, MNP le triangle formé par les trois droites qui passent par les points fixes, L un point quelconque de la figure mobile.

Joignons L à deux sommets M et N.

Le triangle MNP reste semblable à lui-même ; donc M se meut sur l'arc de segment AMC, capable de l'angle donné M.

De même, N se meut sur l'arc AND.

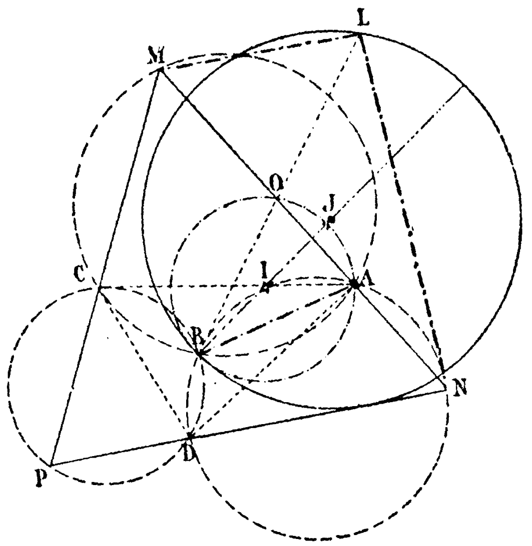


Fig. 807.

Nous retombons ainsi sur la question précédente ; soit B le second point d'intersection des circonférences AMC, AND ; les points M, N glissent sur deux circonférences ; donc le point O décrit une circonférence BAO, et le point L une circonférence ayant son centre J sur le prolongement du rayon BI.

**1283 a.** *Remarque. Toutes les circonférences, lieu des points* L, *passent par un même point* B.

En effet, l'angle $ABC = 2d - M$, $ABD = 2d - N$.

Donc $CBD = 4d - (M + N)$ ou $CBD = 2d - P$.

Ainsi le point B appartient à la circonférence CPD et à toute circonférence L.

**1284. Note.** Nous avons déjà cité l'ouvrage si remarquable de M. Petersen, professeur à l'École polytechnique de Copenhague : *Méthodes et Théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques.*

Cet ouvrage, traduit en français en 1880, par M. O. Chemin, ingénieur des ponts et chaussées, d'après la 17e édition, est bien propre à montrer tout le parti qu'il est possible de tirer de quelques méthodes bien appliquées; cependant nous devons donner quelques renseignements bibliographiques relativement à l'origine du théorème fondamental :

Les théorèmes précédents 1281 à 1284, proposés par M. J. P., dans les *N. A.*, de 1866, page 480, et résolus en 1867, page 80, se trouvent indiqués dans le même recueil, dès 1855, p. 266 ; 1858, p. 48, dans divers articles de M. de Lafitte, professeur, et donnés comme cas particuliers des *figures homographiques.*

### Théorème de Lafitte 391. — I.

*Lorsqu'une figure varie de grandeur et de position, en restant semblable à elle-même :*

1° *Si trois droites tournent chacune autour d'un point fixe, toute autre droite tourne autour d'un point fixe, et un point quelconque décrit un cercle. Tous ces cercles passent par un même point, qui est un point double commun à toutes les figures.*

2° *Si trois points décrivent chacun une ligne droite, tout autre point décrit une ligne droite, et une droite quelconque enveloppe une parabole.*

Les deux théorèmes précédents sont fondamentaux dans l'étude élémentaire des figures qui varient de grandeur et de position, tout en restant semblables à elles-mêmes.

**Note**. Voir aussi *Nouvelle Correspondance mathématique* de CATALAN, 1880, pages 72, 172, 219, article de M. NEUBERG ; puis page 321, lettre de M. LAQUIÈRE, officier d'artillerie, rappelant la publication, en 1872, d'une étude analogue par M. GROUARD, officier de la même arme.

* P. DE LAFITTE, officier d'artillerie, en 1855. — Voir ses *Neuf théorèmes de Géométrie segmentaire,* et ses *Théorèmes homographiques* (*N. A.,* 1857, p. 202 ; 1858, p. 48).

### Théorème de La Hire 392.

**1285.** *Si un cercle roule sans glissement à l'intérieur d'une circonférence de rayon double, un point quelconque de la circonférence mobile décrit un diamètre du grand cercle.*

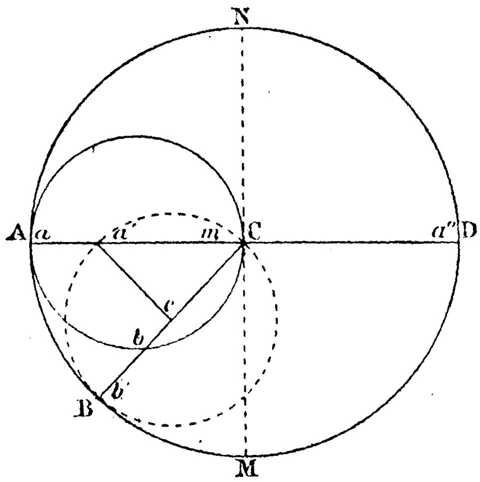


Fig. 808.

Soit AC le rayon de la grande circonférence, et en même temps le diamètre de la petite. Supposons que le petit cercle, placé d'abord en $abC$, roule sans glissement à l'intérieur de la grande circonférence ; et soit $a'b'C$ une position quelconque du cercle mobile. Menons la droite CB au nouveau point de contact B. Nous allons prouver que le point $a$ décrira le diamètre AD.

1° Le point $a$ vient en $a'$, car l'angle $a'cb'$ égale deux fois l'angle ACB ; donc les arcs AB et $a'b'$ ont même longueur.

2° Le point $m$, diamétralement opposé au point $a$, vient d'abord en M ; après un tour complet de roulement du petit cercle, le point $a$ vient en $a''$. Pendant le second tour, le point $a$ décrit de nouveau le diamètre $a''ma$.

3° Le point $m$ du petit cercle décrit le diamètre MCN perpendiculaire au premier.

**1285 a. Note.** Ce théorème, souvent attribué à LA HIRE (*N. A.*, 1843, p. 499; 1854, page 297), l'est parfois à CARDAN (*N. A.*, 1845); mais du moins on doit à La Hire la construction de l'engrenage intérieur, dont le principe repose sur le théorème précédent; cet engrenage permet de transformer un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne alternatif.

On sait que tout point d'une circonférence qui roule sur une autre circonférence décrit une *épicycloïde* (G., n° 892).

Lorsque le cercle qui roule à l'extérieur a pour diamètre le rayon de la circonférence fixe, la courbe décrite est une *cardioïde*, et tout point du plan du cercle mobile décrit un *Limaçon de Pascal,* dont la cardioïde est un cas particulier.

Lorsque la circonférence roule à l'intérieur, on obtient une *hypocycloïde;* dans le cas particulier où le rayon de la circonférence intérieure est la moitié du rayon de la circonférence directrice, l'hypocycloïde se transforme en ligne droite. Tout point du plan du cercle mobile de rayon moitié décrit une ellipse sur le plan du cercle fixe (n° 2162).

* CARDAN, né à Pavie en 1501, est mort à Rome en 1576. Il fit connaître la résolution de l'équation du troisième degré, et parvint à résoudre celle du quatrième degré. On connaît le *Joint universel* qui porte son nom.

## Relations numériques. — Circonférence.

### Théorème 393.

**1286.** *Les diagonales d'un pentagone régulier se divisent mutuellement en moyenne et extrême raison.*

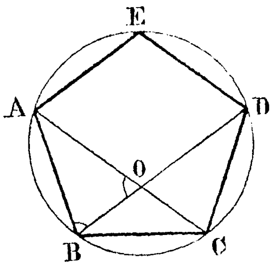


Fig. 809.

Le triangle COB est isocèle, car les angles en C et en B ont même mesure.

Les triangles isocèles COB, CAB sont semblables, car ils ont un angle commun; donc

$$\frac{CO}{CB} = \frac{CB}{CA}, \quad CB^2 = CO \cdot CA.$$

Mais le triangle OAB est aussi isocèle, car les angles en O et en B ont même mesure; donc

$$OA = AB = BC.$$

Ainsi $$AO^2 = CO \cdot CA.$$

**1286 a. Note.** On peut donner de nombreuses démonstrations de ce théorème (Voir l'*Éducation chrétienne,* 2ᵉ année (1892-1893), supplément, page 108, question 15. H. M.).

L'*Éducation chrétienne,* revue pédagogique hebdomadaire, publie chaque quinze jours un *supplément* relatif à l'*enseignement primaire supérieur* et à l'*enseignement secondaire moderne.* La partie mathématique, la seule dont nous ayons à nous occuper ici, traite les problèmes d'examen avec une rare élégance et avec une grande richesse de développements; par suite, nous renonçons à compléter nos *Exercices de Géométrie* par des problèmes de *brevet supérieur* et de *baccalauréat,* et nous nous bornerons à renvoyer à l'utile publication dont nous venons de parler. (Note de 1896.) — Cette publication a été continuée jusqu'en 1910.

**Théorème 393. — I.**

**1287.** *Lorsqu'une droite est divisée en moyenne et extrême raison, la somme du carré de la ligne entière et du carré du petit segment égale trois fois le carré du grand segment.*

En effet, soit $a$ la ligne entière, $m$ le grand segment et $n$ le petit; $m$ est la différence de $a$ et de $n$; donc

$$m^2 = a^2 + n^2 - 2an.$$

Mais, par définition $\quad m^2 = an\,;$

donc $\quad 3m^2 = a^2 + n^2.$

*Remarque.* On a aussi : $\quad a^2 + n^2 = 3an.$

**Note.** On lira avec intérêt un bel article de M. CLÉMENT THIRY sur *Quelques propriétés d'une droite divisée en moyenne et extrême raison.* (Voir *Mathesis,* 1894, page 22.)

**Théorème 394.**

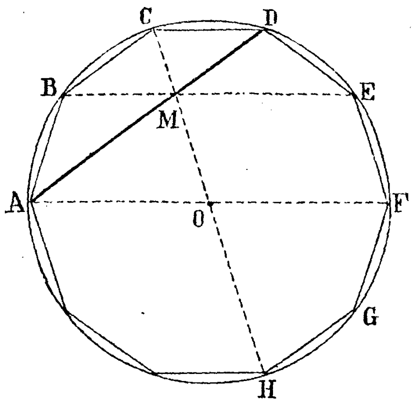


Fig. 810.

**1288.** *La corde qui sous-tend un arc triple de celui qui correspond au côté du décagone inscrit, égale la somme du rayon et du côté du décagone.*

Il faut prouver que

$$AD = AO + CD.$$

Les angles DCM et DMC sont égaux, comme ayant même mesure, de même pour les angles en M et en O; donc les triangles CDM, MAO sont isocèles; ainsi

$$AD = AO + CD.$$

**Théorème 395.**

**1289.** *Dans la méthode des isopérimètres, si on représente par* r *et* a *le rayon et l'apothème du polygone de* n *côtés et par* r′ *et* a′ *le rayon et l'apothème du polygone de* 2n, *on a* $r' - a' < \frac{1}{4}(r - a)$. (*N. A.*, 1847, p. 27.)

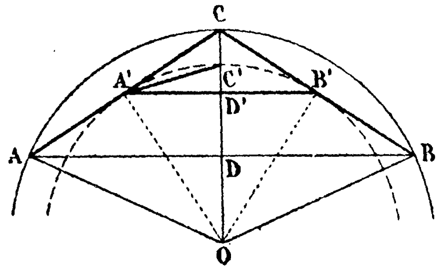


Fig. 811.

Soit AB le côté du polygone inscrit ayant AO pour rayon, OD pour apothème. En joignant les milieux A′ et B′ des cordes égales AC, CB, on obtiendra A′B′ pour côté du polygone isopérimètre d'un nombre double de côtés, car $A'B' = \frac{1}{2}AB$, et l'angle $A'OB' = \frac{1}{2}AOB$.

Or $\quad r' = A'O \quad \text{et} \quad a' = OD'\,;$

donc $\quad r - a = CD, \quad r' - a' = C'D'.$

Mais $CD' = \frac{1}{2}CD$; ainsi $CD' = DD'$. Il suffit de prouver que C′D′ est

$<$ CC'. La droite A'C' est bissectrice de l'angle du segment CA'D', et, comme A'D' est $<$ A'C, il en résulte C'D' $<$ CC' (no 182); donc

$$C'D' < {}^1/_2 CD' < {}^1/_4 CD.$$

On aurait de même : $r'' - a'' < {}^1/_4 (r' - a')$,

donc $r'' - a'' < {}^1/_{16}(r - a)$, etc.,

et généralement $r_n - a_n < \frac{1}{4^n}(r - a)$.

La différence du rayon et de l'apothème tend donc vers zéro.

**1289 a. Note.** La *méthode des isopérimètres,* attribuée à SCHWAB, est due à DESCARTES ; elle a été reproduite par EULER dans un de ses mémoires. (Citation de M. CATALAN, *N. A.*, 1864, page 545.)

* J. SCHWAB est né en 1765 à Mannheim ; mais quand il a publié la *Méthode des figures isopérimétriques,* il était citoyen français; car dès 1793 il avait quitté définitivement l'Allemagne pour venir habiter la France. Sa *Géométrie plane* a été publiée à Nancy en 1813; l'auteur mourut dans cette ville le 23 novembre de la même année.

### Théorème 396.

1290. *La différence des périmètres des polygones réguliers de* 2n *côtés inscrit et circonscrit à un cercle, est moindre que le* $^1/_4$ *de la différence des périmètres, des polygones réguliers de* n *côtés inscrit et circonscrit au même cercle.* (*N. A.*, 1843, p. 188.)

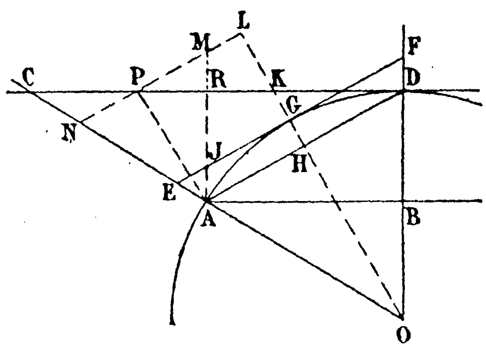



Fig. 812.

Soient AB, CD deux demi-côtés des polygones de $n$ côtés, et AD, EF les côtés des polygones de $2n$ côtés.

Menons le rayon OG perpendiculaire à EF, AP parallèle à ce rayon, AJM parallèle à OD, et PML parallèle à AD.

EJ est la différence des côtés des polygones $2n$, CR la différence des demi-côtés des polygones $n$.

Il suffit donc de prouver qu'on a :

$$EJ < {}^1/_4 CR.$$

A cause des triangles égaux OGF, ODK, la ligne DF égale GK, mais la perpendiculaire GH est plus courte que l'oblique DF; d'ailleurs

$$HK = LK,$$

car $$PK = DK;$$

donc HG $<$ GK, d'où HG $< {}^1/_2$HK ou HG $< {}^1/_4$AP.

Mais les triangles semblables EAJ, NAM ont des bases proportionnelles à leurs hauteurs; donc

$$EJ < {}^1/_4 NM.$$

D'ailleurs la perpendiculaire MPN, menée à la bissectrice AP, est plus petite que CR; donc, *a fortiori,* EJ $< {}^1/_4$CR.

**Théorème 397.**

**1291.** *Par l'extrémité d'une corde, on mène deux autres cordes également inclinées sur la première. Par un second point de la circonférence, on mène des parallèles aux trois lignes déjà considérées; prouver que la somme des côtés du premier angle est à celle des côtés du second dans le même rapport que les cordes qui servent de bissectrices à ces angles.* (MACLAURIN, en 1743; *Traité des fluxions.*)

Soit AB bissectrice de CAD ; menons le diamètre EF parallèle à AB, et les cordes EG, EH parallèles aux côtés de l'angle CAD.

Le triangle GEH sera isocèle. Il suffit de s'occuper des moitiés des cordes ; donc, du centre O, abaissons les perpendiculaires OMN, IOJ et OP. Cette dernière sera bissectrice de l'angle LOK ; donc

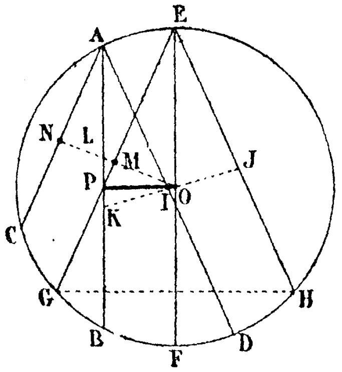


Fig. 813.

$$PL = PK,$$

d'ailleurs $ME = JE.$

Les triangles semblables LAN, OME donnent:

$$\frac{AN}{AL} = \frac{ME}{OE}.$$

Les triangles semblables AIK, EJO donnent :

$$\frac{AI}{AK} = \frac{JE}{OE};$$

donc $$\frac{AN}{AL} = \frac{AI}{AK} = \frac{ME}{OE},$$

d'où $$\frac{AN + AI}{AL + AK} = \frac{ME}{OE}.$$

Mais AL + AK revient à 2AP ou AB.

Donc $$\frac{AN + AI}{AB} = \frac{ME}{OE} = \frac{EG}{EF},$$

ou $$\frac{AC + AD}{AB} = \frac{EG + EH}{EF}.$$

On peut écrire: $$\frac{AC + AD}{EG + EH} = \frac{AB}{EF}.$$

**1291 a.** *Calcul.* Tout revient à prouver que

$$\frac{AC + AD}{AB} = \text{constante.}$$

Posons: $AC = 2c, \quad AB = 2b, \quad AD = 2d,$

angle $CAB = BAD = \alpha$, angle $BAO = x$.

On a : $c = R\cos(\alpha + x), \quad d = R\cos(\alpha - x),$

et $b = R\cos x,$

d'où $$\frac{c + d}{b} = \frac{\cos(\alpha + x) + \cos(\alpha - x)}{\cos x} = 2\cos\alpha = \text{constante.}$$

### Théorème 398.

**1292.** *Par deux points* A *et* B *également éloignés du centre et pris sur un même diamètre, on mène deux droites parallèles* AM, BN *terminées à la même demi-circonférence; prouver que le produit* AM . BN *est constant.* (*Porismes d'Euclide,* par CHASLES, page 306.)

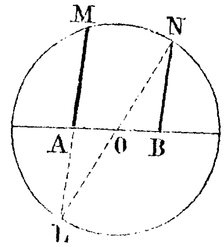


Fig. 814.

Soit $OA = OB$; prolongeons MA et NO jusqu'à leur rencontre : le point L appartient à la circonférence.

En effet, les triangles AOL, BON sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, car $A = B$, comme alternes-internes; donc $OL = ON$, $AL = BN$.

Or AL . AM est une quantité constante pour un même point donné A (G., n° 259); donc il en est de même de AM . BN.

*Remarque.* $AM . BN = r^2 - AO^2$. Ce théorème conduit à une propriété bien connue de l'ellipse. (Voir ci-après, n° 2084.)

### Théorème 398. — I.

**1293.** *On donne un cercle et une tangente fixe dont* A *est le point de contact; prouver que deux tangentes parallèles déterminent sur la tangente fixe deux segments* AM, AN *dont le produit est constant.* (*Porismes d'Euclide,* page 305.)

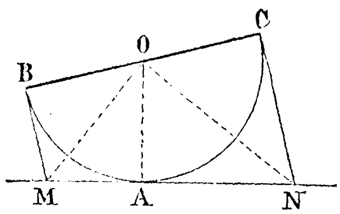


Fig. 815.

L'angle MON est droit, car les angles MOB, MOA sont égaux; il en est de même de NOC, NOA.

Dans le triangle rectangle MON, on a :

$$AM . AN = AO^2. \text{ Donc...}$$

*Remarque.* On a aussi : $BM . CN = AO^2$. (Voir n° 1300.)

### Théorème 398. — II.

**1294.** *Dans un cercle quelconque, on mène une corde* CD *perpendiculaire au diamètre* AB ; *par un point* M *mobile sur* CD, *on mène une corde* AME; *démontrer que le produit* AM . AE *est constant.*

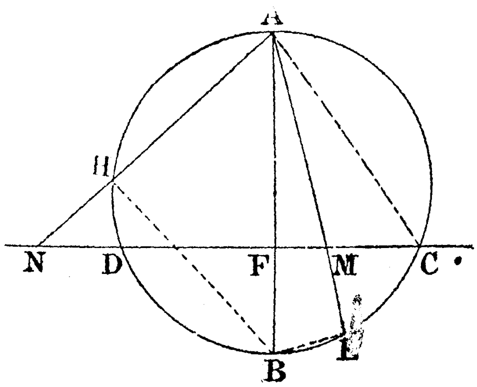


Fig. 816.

1re *Démonstration.* Menons BE. Le quadrilatère BFME a deux angles opposés droits E et F; donc il est inscriptible et l'on a :

$AE . AM = AB . AF$, quantité constante.

De même,

$$AN . HA = AB . AF = AC^2.$$

2° *Démonstration.* Les triangles AMF, ABE sont semblables, car ils sont équiangles ;

donc $$\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AM}, \quad \text{d'où} \quad AE \cdot AM = AB \cdot AF.$$

*Remarques.* 1° La droite CD, infiniment prolongée, est la figure inverse de la circonférence, par rapport à l'origine A. (*G.*, n° 825; *E. de G.*, n° 223.)

2° Le théorème ci-dessus n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général (n° 1175).

### Théorème 398. — III.

**1295.** *Étant donné un triangle rectangle* ABC *inscrit dans un cercle, on élève, en un point quelconque du diamètre, une perpendiculaire* DG *allant rencontrer les deux autres côtés du triangle. Démontrer que la partie* DF *de cette perpendiculaire comprise entre le diamètre et la circonférence est moyenne proportionnelle entre la ligne entière* DG *et la partie* DE *de cette même ligne comprise à l'intérieur du triangle.*

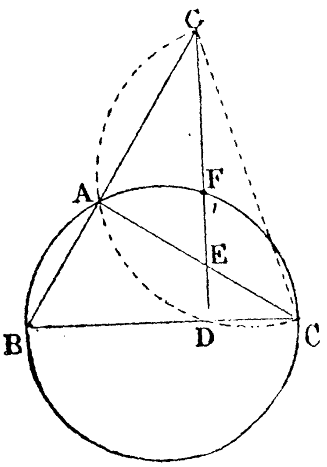


Fig. 817.

Il faut démontrer que

$$\frac{DG}{DF} = \frac{DF}{DE},$$

ou que $DF^2 = DG \cdot DE.$

Or $DF^2 = BD \cdot DC.$

Il suffit donc de prouver que

$$DG \cdot DE = BD \cdot DC \quad \text{ou que} \quad \frac{DG}{BD} = \frac{DC}{DE}.$$

Ce qui est évident, puisque les triangles BDG et CDE sont semblables comme étant rectangles et ayant un angle aigu $C = G$. Donc...

*Remarque.* $DE \cdot EG = DF^2 - DE^2 = AE \cdot EC.$

Le quadrilatère inscriptible CADG donne : $DE \cdot EG = AE \cdot EC.$

### Théorème 399.

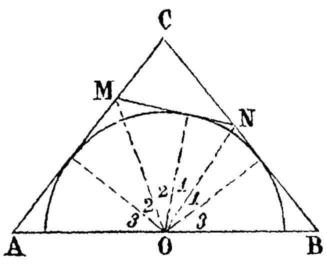


Fig. 818.

**1296.** *Du point milieu de la base* AB *d'un triangle isocèle, on décrit une demi-circonférence tangente aux deux autres côtés; une tangente* MN *coupe ces deux côtés; prouver que le produit* AM . BN *est constant.* (*Porismes*, page 297.)

Les triangles AOM, BON sont équiangles. En effet, les angles 1, 1, sont égaux entre eux ; $2 = 2$, $3 = 3$.

Or N est le complément de 1.

AOM + 1 = 1 droit, car les angles au point O valent deux droits;

donc $\frac{AM}{AO} = \frac{OB}{BN}$; d'où $AM \cdot BN = AO^2$.

**Théorème 399. — I.**

**1297.** *Par un point* L *pris sur un diamètre* AB, *on mène une corde quelconque* CLD *et les droites* BCE, BDF *jusqu'à la rencontre de la tangente* EAF *menée par le point* A; *prouver que le produit de* AE *par* AF *est constant.*

Menons MLN parallèle à la tangente.

Les droites CM, DN sont antiparallèles.

En effet, l'angle $M = {}^1/_2(BJ - CI) = {}^1/BC$,

mais angle $D = {}^1/_2 BC$,

donc angle $M = D$.

Ainsi le quadrilatère CMND est inscriptible, et l'on a :

$$LM \cdot LN = LC \cdot LD = LI^2;$$

donc $AE \cdot AF = AG^2$,

quantité constante.

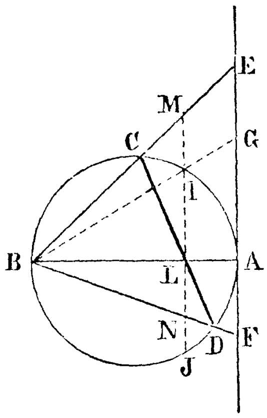



Fig. 819.

**Théorème 400.**

**1298.** *On donne une droite* XY, *une circonférence et deux points* A *et* B *sur cette courbe; on joint chaque point* M *de la circonférence aux points* A *et* B, *l'on détermine ainsi des points* C, D *sur la droite ; prouver qu'il existe sur* XY *deux points fixes* I, J, *tels que le produit* CI . DJ *soit constant.* (*Concours de* 1876, *Mathématiques élémentaires.*)

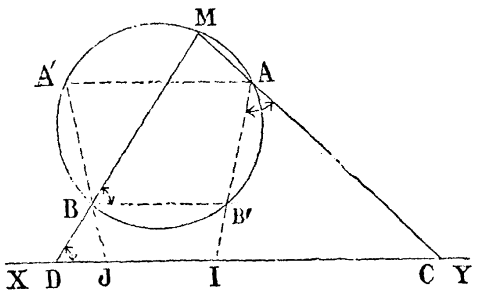



Fig. 820.

On ne peut être conduit à la détermination des points I et J, qu'en présupposant l'existence d'une certaine symétrie dans les éléments de la figure. En menant les parallèles AA', BB' et les sécantes AB'I, A'BJ, on obtient deux triangles semblables AIC, DJB; car l'angle I = J, l'angle A = MBB', parce qu'ils ont le même supplément MAB'; donc l'angle CAI = D.

On a : $\frac{IC}{BJ} = \frac{AI}{DJ}$; d'où $CI \cdot DJ = AI \cdot BJ$.

Or le produit AI . BJ est constant; donc il en est de même de CI . DJ.

**1298 a. Note sur l'homographie.** Les côtés d'un angle constant M, qui passent par deux points fixes A et B, déterminent sur une même droite XY deux *divisions homographiques,* c'est-à-dire deux suites de points se correspondant deux à deux, et tels que le produit des distances CI, DJ, de deux points correspondants C et D à deux points fixes I, J, est constant. Les divisions homographiques peuvent appartenir à deux droites différentes.

L'*homographie* est due à M. CHASLES (*Géométrie supérieure,* chap. IV et VII). L'illustre auteur définit l'homographie par la propriété que présentent quatre points quelconques d'une division d'avoir même rapport anharmonique que les quatre points correspondants de la seconde division. Il traite l'involution comme cas particulier de l'homographie (chap. IX), et établit un grand nombre de propriétés nouvelles relatives à une suite de points en involution.

Puis, à l'aide du puissant instrument qu'il a créé, il s'empare des travaux de ses devanciers, et rattache les uns aux autres les théorèmes les plus célèbres relatifs aux coniques : c'est ainsi que l'*hexagramme de Pascal* (G., n° 747), le *quadrilatère de Pappus* (n° 1214), l'*involution de Desargues* (n° 1219), le *théorème de Carnot,* relatif au triangle et à une conique (n° 1250), le *théorème de Brianchon* (G., n° 807), le *théorème de Newton,* relatif aux sécantes parallèles, etc., se déduisent facilement les uns des autres. (CHASLES, *Traité des sections coniques,* chap. II et III.)

Dans ses *Éléments de Géométrie projective,* M. CREMONA fait dériver l'*homographie* de la *projection centrale.* Pour cet auteur, une suite de points en ligne droite est une *ponctuelle;* les *divisions homographiques* sur deux droites différentes constituent deux *ponctuelles projectives;* deux divisions sur la même droite donnent lieu à deux *ponctuelles projectives superposées.* Avec cette nomenclature, les théorèmes peuvent être énoncés avec plus de concision.

Les *Éléments de Géométrie projective* de M. CREMONA ont été traduits par M. ED. DEWULF, alors chef de bataillon du génie, plus tard général de brigade en retraite. L'ouvrage contient de nombreuses citations; on y rencontre les noms des plus illustres géomètres, et la *France* y est dignement représentée par DESARGUES, PASCAL, LA HIRE, CARNOT, BRIANCHON, PONCELET, CHASLES, etc.

### Théorème 400. — I.

**1299.** *Par un point* L *pris sur un diamètre* AB *ou sur son prolongement, on mène une sécante* CD, *on élève une perpendiculaire* LM *sur le diamètre, et l'on mène les droites* BCM, BDN *jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire ; prouver que le produit* LM . LN *est constant.* (*N. A.*, **1844**, page 502.)

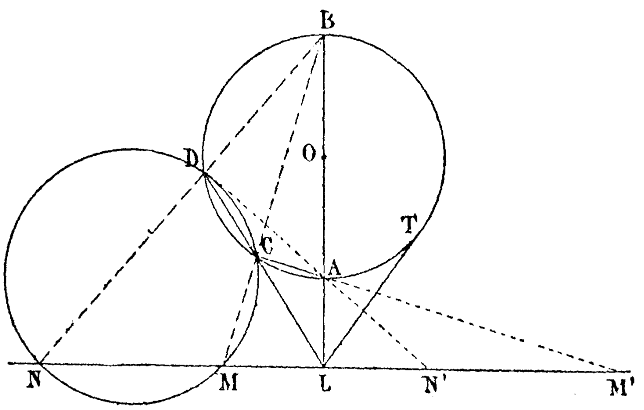



Fig. 821.

Le quadrilatère CDNM est inscriptible.

En effet, l'angle $N = DAB = DCB$ ;
donc l'angle exinscrit MCD, supplément de BCD, l'est aussi de l'angle N.
Les quatre points C, D, N, M sont concycliques ; on a :

$$LM . LN = LC . LD = LT^2.$$

On trouve aussi : $$LM' . LN' = LT^2.$$

*Remarque.* Les points M et N déterminent deux divisions homographiques (1298 a).

**Théorème 400. — II.**

**1300.** *Si d'un point* P *pris sur le diamètre* AB *d'un demi-cercle, on mène une droite à chaque point* M *de la circonférence, et que par ce point on mène à cette droite une perpendiculaire qui rencontrera en deux points* C *et* D *les tangentes en* A *et en* B, *le rectangle* AC . BD *sera donné.* (*Porismes d'Euclide* ou *de Chasles*, p. 295, énoncé textuel.)

Il suffit de prouver que

$$AC . BD = AP . PB = \text{constante}.$$

Les angles MCP, MPD sont égaux entre eux comme étant respectivement égaux aux angles égaux $a$ et $b$.

En outre, les angles ACM, BPM sont égaux parce qu'ils sont supplémentaires du même angle APM ; mais si de ces angles égaux on retranche les angles égaux MCP et MPD, on a $c = p$, et les triangles rectangles CAP et PBD sont semblables;

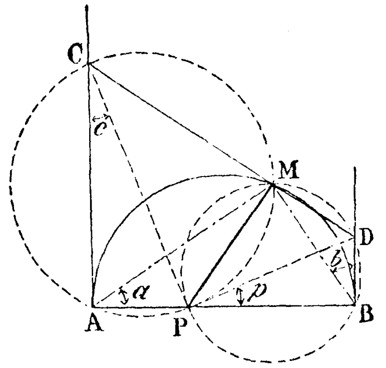


Fig. 822.

donc $$\frac{AC}{AP} = \frac{BP}{BD}.$$

*Remarque.* On a aussi : $MC . MD = PM^2$.

**Théorème 400. — III.**

**1301.** *On donne deux cercles, le centre* A *de l'un d'eux est sur la circonférence du second; si l'on mène au cercle* A *une tangente* BMN *qui coupe le second aux points* M *et* N, *le produit des distances* AM *et* AN *est constant.* (*Porismes*, pages 305.)

Menons le diamètre AC et le rayon AB du point de contact; les triangles rectangles CAN, BAM sont semblables, car l'angle AMB égale C comme supplément du même angle AMN ;

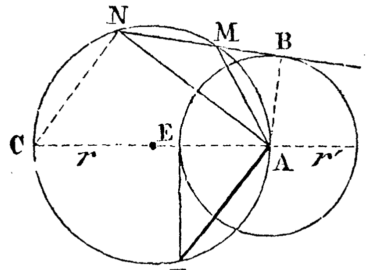


Fig. 823.

donc $$\frac{AC}{AM} = \frac{AN}{AB},$$

d'où $$AM . AN = 2rr'.$$

*Remarque*. Si on élève la perpendiculaire EF, on trouve :

$$AF^2 = 2rr';$$

donc $$AM \,.\, AN = AF^2.$$

**Théorème 401.**

**1302.** *Deux circonférences ont une corde commune* AB; *par un point* C *de l'une d'elles, on mène une tangente* CD *à la seconde; prouver que le rapport* $\frac{CD^2}{CA \,.\, CB}$ *est constant.*

En effet, $$CD^2 = CA \,.\, CE.$$

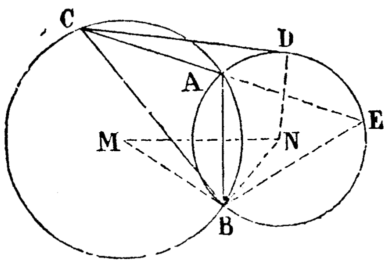


Fig. 824.

Mais les triangles CBE, MBN sont semblables, car l'angle au centre M a pour mesure $^1/_2$ arc AB, aussi bien que l'angle inscrit ACB.

De même, l'angle E = N ; donc

$$\frac{CE}{CB} = \frac{MN}{MB}; \quad CE = CB. \frac{MN}{MB}.$$

Ainsi $$CD^2 = CA \,.\, CB. \frac{MN}{MB};$$

d'où $$\frac{CD^2}{CA \,.\, CB} = \frac{MN}{MB}, \text{ quantité constante.}$$

**Théorème 401. — I.**

**1303.** *Lorsqu'on joint un point* A *pris sur une circonférence à deux points* M *et* N *équidistants du centre et pris sur un même diamètre* EF *et qu'on mène les cordes* AMB, ANC, *la somme* $\frac{AM}{BM} + \frac{AN}{CN}$ *est constante.*

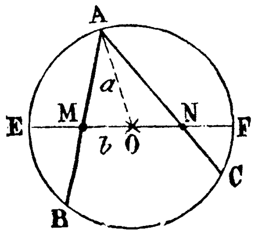


Fig. 825.

Soient :

$$AO = a; \quad MO = ON = b; \quad EM \,.\, MF = a^2 - b^2;$$

on a : $$AM \,.\, BM = EM \,.\, MF = a^2 - b^2. \qquad (1)$$

Pour avoir le rapport $\frac{AM}{BM}$, on divise $AM^2$ par chacun des membres de l'égalité (1) ; on obtient ainsi :

$$\frac{AM^2}{AM \,.\, BM} = \frac{AM^2}{a^2 - b^2};$$

ou $$\frac{AM}{BM} = \frac{AM^2}{a^2 - b^2}.$$

De même, $$\frac{AN}{BN} = \frac{AN^2}{a^2 - b^2};$$

d'où $$\frac{AM}{BM} + \frac{AN}{CN} = \frac{AM^2 + AN^2}{a^2 - b^2} = \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 - b^2}, \text{ quantité constante}$$

### Théorème 401. — II.

**1304.** *Un triangle isocèle* ABC *a pour base la ligne* BC; *on mène une sécante* ADE *qui coupe la base au point* D *et le cercle circonscrit au point* E; *prouver qu'on a* $AB^2 = AD \cdot AE$.

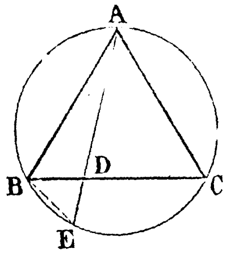


Fig. 826.

Les triangles ABD, EAB sont semblables, car ils ont un angle commun, et l'angle ABD a même mesure que l'angle AEB; donc

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE};$$

d'où $$AB^2 = AD \cdot AE.$$

*Remarque.* Ce théorème se rapporte à une question connue (n° 1294).

### Théorème 402.

**1305.** *Lorsque deux cercles sont tangents extérieurement, la distance des points de contact d'une tangente extérieure commune aux deux cercles est moyenne proportionnelle entre les diamètres des cercles.*

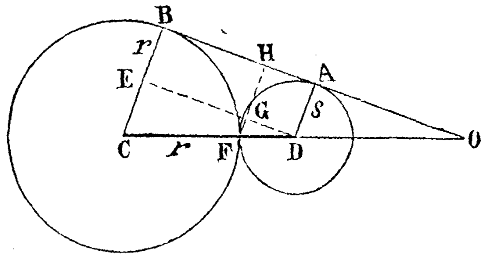


Fig. 827.

Soient $r$ et $s$ les rayons des cercles, $t$ la distance AB.

1re *démonstration.*

$$AB^2 = DC^2 - CE^2;$$

mais $$DC = r + s, \quad CE = r - s,$$

$$t^2 = (r + s)^2 - (r - s)^2,$$

$$t^2 = 2r \cdot 2s.$$

*Autres démonstrations.* 2° Les triangles équiangles ABN, ABM (fig. 828) donnent : $\frac{AB}{AM} = \frac{BN}{AB}$; donc...

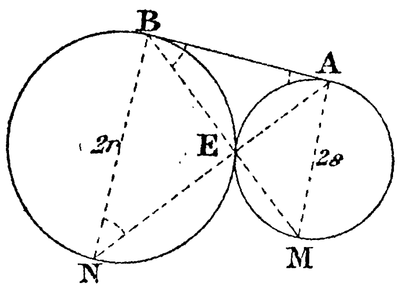


Fig. 828.

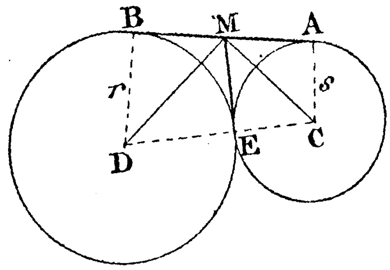


Fig. 829.

3° Les quadrilatères AMEC, BMED sont semblables (fig. 829);

on a : $$MA = MB = ME = \frac{t}{2}.$$

Le triangle rectangle DMC donne :

$$\frac{t^2}{4} = \mathrm{DE} \,.\, \mathrm{EC} = r.s\,;$$

d'où
$$t^2 = 2r \,.\, 2s.$$

**Théorème 402. — I.**

**1306.** *La distance* FH *du point de contact à la tangente extérieure égale* $\frac{2rs}{r+s}$ *; c'est une quatrième proportionnelle à la demi-somme des rayons et à chacun de ces rayons* (fig. 827).

$$\mathrm{FH} = \mathrm{FG} + s\,;$$

$$\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{CE}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{DC}}\,; \quad \frac{\mathrm{FG}}{r-s} = \frac{s}{r+s}\,;$$

$$\mathrm{FG} = \frac{s(r-s)}{r+s}\,;$$

$$\mathrm{FH} = \frac{rs - s^2}{r+s} + s = \frac{2\,rs}{r+s}.$$

**Théorème 402. — II.**

**1307.** *La distance* FO *du point de contact au centre extérieur de similitude des deux cercles est donnée par* $\frac{2rs}{r-s}$ (fig. 827).

$$\frac{\mathrm{FO}}{\mathrm{FH}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CE}}\,; \quad \mathrm{FO} = \frac{2rs}{r+s} \cdot \frac{r+s}{r-s} = \frac{2rs}{r-s}.$$

*Remarque.*
$$\frac{1}{\mathrm{FH}} + \frac{1}{\mathrm{FO}} = \frac{1}{s}\,; \quad \frac{1}{\mathrm{FH}} - \frac{1}{\mathrm{FO}} = \frac{1}{r}\,;$$

$$\frac{1}{\mathrm{FH}} : \frac{1}{\mathrm{FO}} = \frac{r+s}{r-s}\,; \quad \frac{1}{\mathrm{FH}} \cdot \frac{1}{\mathrm{FO}} = \frac{r^2 - s^2}{4r^2s^2}.$$

**Théorème 403.**

**1308.** *Lorsque trois circonférences sont tangentes deux à deux et inscrites dans le même angle, le rayon de la circonférence intermédiaire est une moyenne proportionnelle aux rayons des circonférences extrêmes.*

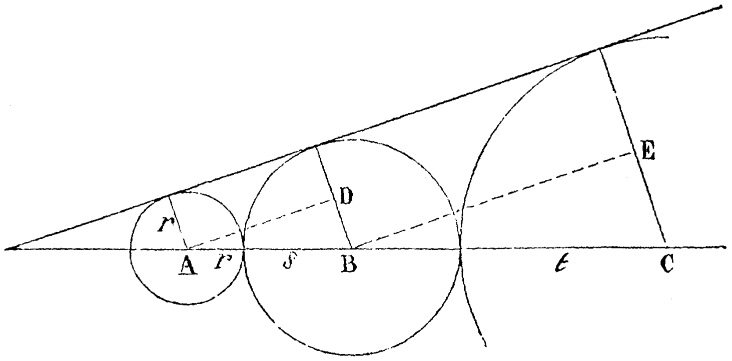



Fig. 830.

Soient $r$, $s$, $t$ les rayons donnés. Il faut prouver qu'on a :

$$\frac{t}{s} = \frac{s}{r}, \quad \text{ou} \quad \frac{t-s}{t+s} = \frac{s-r}{s+r}, \quad \text{ou} \quad \frac{CE}{CB} = \frac{BD}{AB}.$$

Or les triangles ABD, CBE sont équiangles; donc...

**Théorème 404.**

**1309.** *Lorsqu'une même circonférence AO est inscrite et circonscrite à deux polygones réguliers semblables, sa longueur est moyenne proportionnelle entre la circonférence circonscrite au polygone extérieur et la circonférence inscrite au polygone intérieur.*

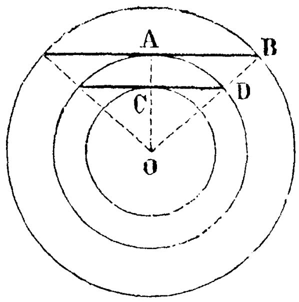


Fig. 831.

OB est le rayon de la circonférence circonscrite, CO celui de l'inscrite.

Les circonférences sont entre elles comme leurs rayons; il suffit donc de prouver qu'on a :

$$AO^2 = BO \cdot CO.$$

Or
$$\frac{BO}{DO} = \frac{AO}{OC} \quad \text{ou} \quad \frac{BO}{AO} = \frac{AO}{OC};$$

d'où
$$AO^2 = BO \cdot CO.$$

**Théorème 404. — I.**

**1310.** *Toute circonférence tangente à deux circonférences concentriques égale leur demi-somme ou leur demi-différence.*

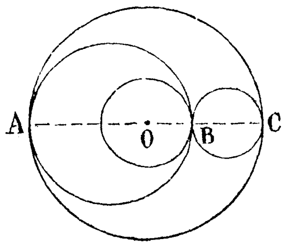


Fig. 832.

Soient $AO = a$; $OB = b$.

Le rayon de la circonférence, dont AB est le diamètre, égale $\frac{a+b}{2}$.

Celui de la circonférence, dont BC est le diamètre, égale $\frac{a-b}{2}$.

**Théorème 404. — II.**

**1311.** *La somme des deux circonférences tangentes aux deux circonférences données égale la plus grande des circonférences données; la différence égale la plus petite des circonférences données.*

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a \quad \text{et} \quad \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b.$$

**Théorème 405.**

**1312.** *La somme des inverses des distances d'un point fixe aux deux tangentes menées à une circonférence par les extrémités de toute corde* *qui passe par ce point, est une quantité constante.* (*Journal de Mathématiques* de M. Vuibert, 15 janvier 1878, page 60.)

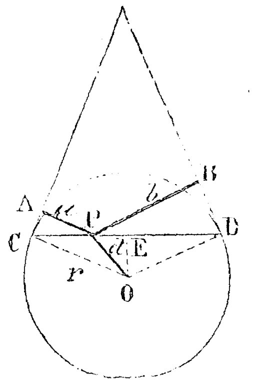



Fig. 833.

Soient $AP = a$; $PB = b$; $PO = d$; $OC = r$.

Les triangles rectangles CAP, OEC sont semblables, car

$$\text{l'angle } OCE = APC;$$

donc
$$\frac{CP}{a} = \frac{r}{CE}.$$

En divisant chaque membre par CP, on trouve :

$$\frac{1}{a} = \frac{r}{CE} \cdot \frac{1}{CP};$$

de même,
$$\frac{1}{b} = \frac{r}{CE} \cdot \frac{1}{DP};$$

d'où
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{r}{CE}\left(\frac{1}{CP} + \frac{1}{DP}\right) = \frac{r}{CE}\left(\frac{DP + CP}{CP \cdot DP}\right).$$

Mais $DP + CP = 2CE$; on pourra supprimer le facteur commun CE, puis le produit CP . DP des segments d'une corde menée par un point fixe P est une quantité constante (G., n° 257); ce produit égale celui des segments du diamètre mené par le point donné ; il égale donc :

$$(r + d)(r - d) \text{ ou } r^2 - d^2;$$

donc
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2r}{r^2 - d^2}, \text{ quantité constante.}$$

**1312 a.** *Autre démonstration.* Les trois triangles rectangles PAC, PBD, CDF sont semblables et donnent :

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \frac{2r}{m + n};$$

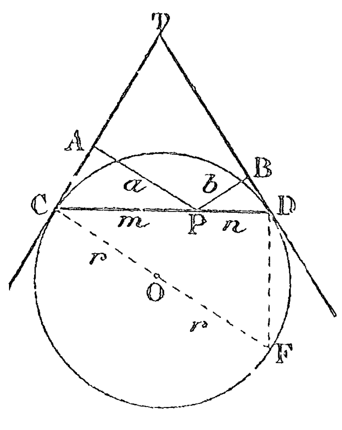



Fig. 834.

d'où
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2r}{m + n}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = \frac{2r}{mn} = \text{constante.}$$

### Théorème 406.

**1313.** *Lorsque deux circonférences égales se coupent à angle droit, la somme des carrés des cordes interceptées par les circonférences sur une sécante quelconque menée par le point commun* A, *est une quantité constante.*

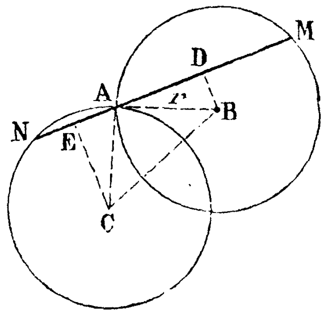


Fig. 835.

Il suffit de prouver que $AD^2 + AE^2$ est une quantité constante.

Les triangles rectangles ACE, ADB sont égaux, car $AB = AC$; l'angle $DAB = ACE$ comme ayant les côtés perpendiculaires.

Ainsi $AD^2 + AE^2 = EC^2 + BD^2 = r^2$,

$$AM^2 + AN^2 = 4r^2.$$

### Théorème 406. — I.

**1314.** *Dans un cercle, par un point donné* A, *on mène une corde quelconque* BAC; *démontrer que le produit des segments de la corde, augmenté du carré de la distance du point fixe au centre du cercle, égale le carré du rayon.*

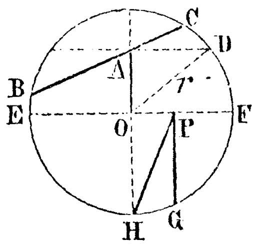


Fig. 836.

Menons la corde perpendiculaire à AO.

On a : $AB \cdot AC + AO^2 = AD^2 + AO^2 = r^2$.

### Théorème 406. — II.

**1315.** *On élève la perpendiculaire* PG *et on mène* PH; *démontrer que l'on aura* $PG^2 + PH^2 = {}^1/_2\, EF^2$ (fig. 836).

En effet, $PH^2 = PO^2 + r^2$;

$PG^2 = PE \cdot PF = r^2 - PO^2$;

donc $PH^2 + PG^2 = 2r^2$ ou ${}^1/_2\, EF^2$.

### Théorème 407.

**1316.** *Lorsqu'une corde* ABC *coupe un diamètre sous un angle de* 45°, *la somme des carrés des segments* AB, BC *égale* $2r^2$.

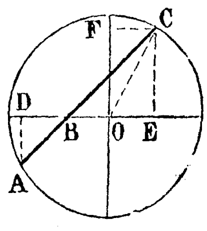


Fig. 837.

En effet, $AB^2 = 2BD^2 = 2CF^2$,

$BC^2 = \quad 2CE^2$;

donc $AB^2 + BC^2 = 2CO^2 = 2r^2$.

**Théorème 407. — I.**

**1317.** *Si deux circonférences quelconques sont concentriques, la somme des carrés des distances d'un point quelconque de l'une aux deux extrémités d'un diamètre de l'autre est constante.*

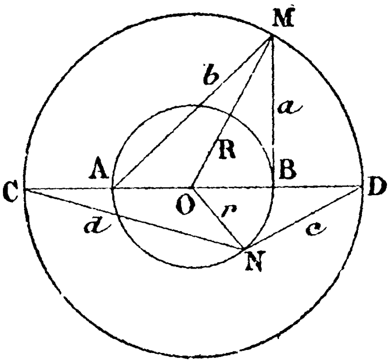


Fig. 838.

Soit M un point quelconque de la grande circonférence, et AB un diamètre quelconque de la petite. Menons le rayon OM, qui sera une médiane du triangle AMB.

On a donc (G., n° 254) :

$$a^2 + b^2 = 2R^2 + 2OA^2 = 2R^2 + 2r^2,$$

quantité constante.

De même, le triangle CND donne :

$$c^2 + d^2 = 2r^2 + 2OC^2 = 2r^2 + 2R^2,\ \text{quantité constante.}$$

**Théorème 407. — II.**

**1318.** *Sur un diamètre, on prend, à partir du centre, des grandeurs égales OA, OB; par un de ces points on mène une corde quelconque CBD, et l'on joint le point A aux points C et D ; prouver que la somme des carrés de AC, AD, CD est constante.* (Compagnon, n° 269.)

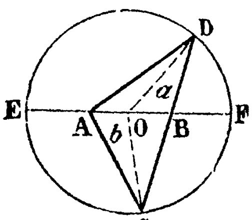


Fig. 839.

On a : $AD^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2$;

$$AC^2 + BC^2 = 2a^2 + 2b^2;$$

$$2DB \cdot BC = 2BE \cdot BF = 2a^2 - 2b^2;$$

$$AD^2 + AC^2 + CD^2 = 6a^2 + 2b^2 = 2(3a^2 + b^2),\ \text{quantité constante.}$$

**Théorème de Faure 408.**

**1319.** *Étant donnés deux cercles qui se coupent orthogonalement, si l'on fait passer un cercle par leurs centres et par leurs points d'intersection, la somme des puissances d'un point de ce cercle, par rapport aux cercles donnés, est nulle.* (H. Faure, *N. A.*, 1868, p. 240, q. 887.)

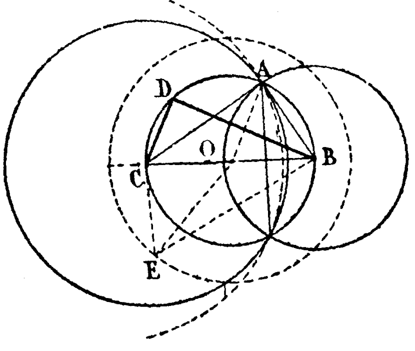


Fig. 840.

La *puissance d'un point* par rapport à un cercle donné égale le carré de la distance de ce point au centre du cercle, moins le carré du rayon du cercle (G., n° 825); pour un point quelconque D, la puissance par rapport au cercle de centre B égale $DB^2 - AB^2$.

La puissance par rapport au cercle C égale $DC^2 - AC^2$.

Ajoutons : $DB^2 + DC^2 - (AB^2 + AC^2)$.

Or cette somme algébrique est nulle, car

$$DB^2 + DC^2 = CB^2 = AB^2 + AC^2,$$

donc...

*Remarque.* Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un théorème général (nº 1321).

### Théorème 408. — I.

**1320.** *Pour tout point de la circonférence décrite du point O milieu de CB pris pour centre, la somme des puissances par rapport aux deux cercles qui se coupent orthogonalement est une quantité constante.*

Soit O le centre du cercle décrit sur BC comme diamètre (fig. 840).

La somme des puissances est donnée par

$$s = EC^2 - AC^2 + EB^2 - AB^2.$$

Or $\quad EC^2 + EB^2 = 2OE^2 + 2CO^2 \quad$ et $\quad AC^2 + AB^2 = 4CO^2$ ;

donc $\quad s = 2EO^2 - 2CO^2, \quad$ quantité constante.

**1320 a. Note.** La dénomination de *puissance d'un point*, par rapport à un cercle, est due à STEINER. (*Journal de Crelle*, tome I, p. 164, cit. BALTZER.)

* M. H. FAURE, commandant d'artillerie, décédé en 1892 ; auteur de nombreux articles dans les *Nouvelles Annales*.

Bien que nous n'ayons pas eu l'honneur de connaître personnellement M. H. FAURE, il a fait le compte rendu de la deuxième édition des *Exercices de Géométrie* (*N. A.*, 1883, page 516) dans des termes tels, que nous avons regretté vivement de ne pouvoir pas lui offrir l'édition de 1896 comme sincère témoignage de notre respectueuse reconnaissance.

### Théorème 408. — II.

**1321.** *On donne deux circonférences qui ont pour centres respectifs* A *et* B *et qui se coupent suivant une corde commune* CD ; *du point* O *milieu de* AB *pris pour centre, on décrit un cercle qui passe par* C *et* D ; *prouver que la somme des puissances de chaque point de ce cercle, par rapport aux cercles donnés, est nulle.*

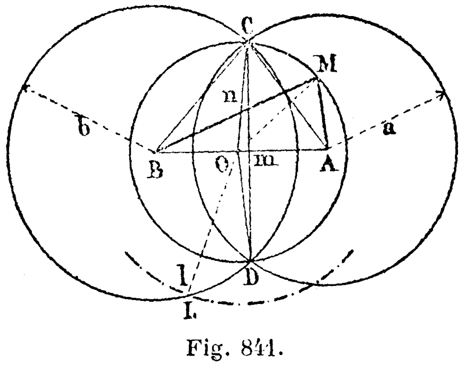


Fig. 841.

Soient $OA = OB = m$ ; $\quad OC = n$ ;
$a$ et $b$ les rayons donnés.

Pour le point C, la somme des puissances est nulle, car la puissance est nulle pour chaque cercle.

Or, pour le point M, on a pour somme des puissances :

$$MA^2 - a^2 + MB^2 - b^2. \qquad (1)$$

Or $\quad MA^2 + MB^2 = 2n^2 + 2m^2 = CA^2 + CB^2 = a^2 + b^2$ ;

donc la somme algébrique (1) est nulle.

**1321 a.** Remarque. *Pour décrire une circonférence dont la somme des puissances de chaque point, par rapport à deux circonférences données, ait une valeur* k² (fig. 841), *il faut prendre pour rayon* OL, *la longueur* l *que donne la relation*

$$2m^2 + 2l^2 - a^2 - b^2 = k^2,$$

d'où
$$l^2 = \frac{k^2 + a^2 + b^2}{2} - m^2.$$

**Théorème 408. — III.**

**1322.** *On donne un point fixe* P, *un cercle* B *et une tangente* DT *à ce cercle; par le point fixe* P, *on mène une droite quelconque* PM, *qui rencontre la tangente en* M; *sur la droite ainsi menée, on prend un point* N, *tel que le produit* PM . PN *soit égal à la puissance du point* P *par rapport à la circonférence donnée; le lieu du point* N *est un cercle qui passe par* P *et qui est tangent au cercle* B *considéré.*

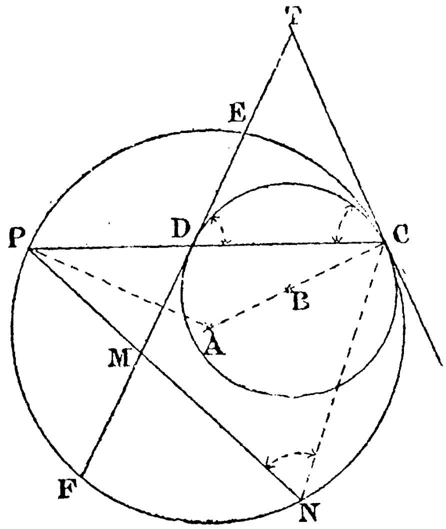



Fig. 842.

Menons PDC. Le carré de la tangente que l'on mènerait du point P au cercle B donne :

$$PM . PN = PC . PD.$$

Ainsi le quadrilatère DMNC est inscriptible, l'angle N égale D = C; donc le lieu du point N est la circonférence PNC qui est tangente à la première au point C.

*Remarque.* Ce théorème élémentaire conduit à une belle démonstration du *théorème de Feuerbach* (voir ci-après, nº 1341).

**Théorème 408. — IV.**

**1323.** *Par un point quelconque* M *pris dans un cercle, on mène deux cordes rectangulaires; la somme des carrés des quatre segments de ces cordes est une quantité constante.*

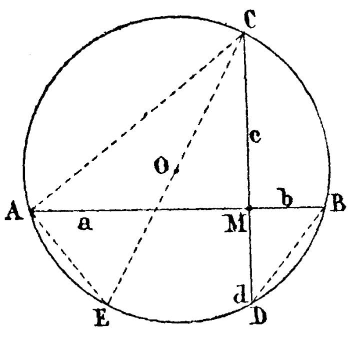



Fig. 843.

$$a^2 + c^2 = AC^2, \quad b^2 + d^2 = BD^2;$$

d'où $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = AC^2 + BD^2.$

Menons le diamètre COE; on aura :

$$AE = BD,$$

car les angles droits CAE, BMD ont respectivement pour mesure :

$$\frac{\text{arcs CA + AE}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\text{arcs CA + BD}}{2};$$

donc $$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4r^2.$$

**1324.** *Remarque.* Le théorème est vrai, quelle que soit la position du point M ; mais, quand ce point est extérieur, il faut prendre le carré de la sécante entière, moins le carré de sa partie extérieure.

### Théorème 409.

**1325.** *Si d'un point donné* P, *on mène à une circonférence donnée deux sécantes quelconques* AB *et* CD *perpendiculaires entre elles, la somme des carrés* $AB^2$ *et* $CD^2$ *des parties intérieures de ces sécantes est constante.* (ARCHIMÈDE.)

Procédons ainsi qu'il a été indiqué précédemment (*Méthodes*, n° 30).

**1er Cas.** *Point intérieur.* Soient $a$ et $b$ les demi-longueurs des cordes rectangulaires données, $r$ le rayon du cercle, $a'$ et $b'$ les distances du centre du cercle aux deux cordes.

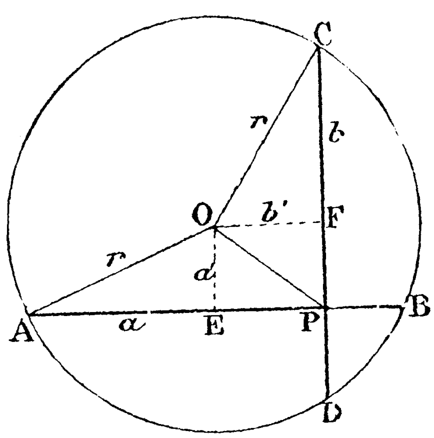


Fig. 844.

Il faut prouver qu'on a :

$$4a^2 + 4b^2 = \text{constante}.$$

Or $a^2 = r^2 - a'^2$ et $b^2 = r^2 - b'^2$,

d'où $\quad a^2 + b^2 = 2r^2 - (a'^2 + b'^2)$.

Il suffit de prouver que la quantité à soustraire est constante.

Or $a'$ et $b'$ sont les côtés d'un rectangle ayant pour diagonale la longueur invariable OP ; donc $a^2 + b^2 = 2r^2 - OP^2$, quantité constante, et le théorème est démontré.

**1326. 2e Cas.** *Le point donné* P *est hors du cercle* (fig. 845).

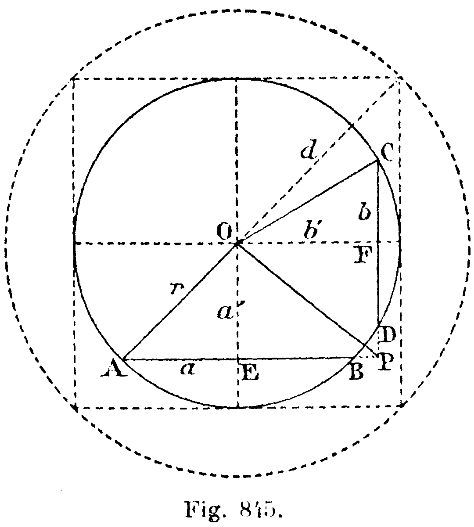


Fig. 845.

$$a^2 + b^2 = 2r^2 - (a'^2 + b'^2),$$
$$a^2 + b^2 = 2r^2 - OP^2; \quad \text{donc...}$$

*Remarque.* $OP^2$ peut au plus égaler $2r^2$ ou $d^2$ ; donc le point P doit être à une distance OP au plus égale à la moitié $d$ de la diagonale du carré circonscrit.

### Théorème 409. — I.

**1327.** *Par le point de contact de deux circonférences tangentes extérieurement, on mène deux sécantes rectangulaires ; prouver que la somme des carrés des deux droites interceptées égale le carré de la somme des diamètres des circonférences données.*

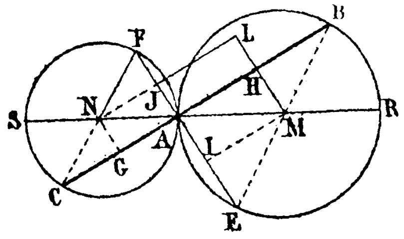


Fig. 846.

Menons NL parallèle à GH :

$$NL = {}^1/_2\, CAB; \quad ML = {}^1/_2\, EF;$$
$$MN = {}^1/_2\, RS.$$

Or $\qquad MN^2 = NL^2 + ML^2;$

donc $\qquad RS^2 = BC^2 + EF^2.$

### Théorème 409. — II.

**1328.** *Lorsqu'on mène deux sécantes rectangulaires* (fig. 846), *la somme des carrés des distances, comptées sur les sécantes, depuis le point* A *jusqu'aux circonférences, est constante.*

$$AH^2 + AI^2 = AM^2; \quad AJ^2 + AG^2 = AN^2,$$

donc $\qquad AB^2 + AC^2 + AE^2 + AF^2 = AR^2 + AS^2;$

on peut dire encore :

$$AB^2 + AE^2 + AC^2 + AF^2 = BE^2 + CF^2, \text{ quantité constante.}$$

*Remarque.* Les relations précédentes (nos 1327 et 1328) sont analogues à celle qu'on obtient pour un cercle et un point P (no 1325).

### Théorème de Fermat 410.

**1329.** *Soient* ABCD *un rectangle dans lequel* $AB = BC\sqrt{2}$, E *un point quelconque de la demi-circonférence décrite sur* AB *comme diamètre ;* F *et* G *les points d'intersection des droites* ED, EC *avec le diamètre* AB ; *on a la relation*

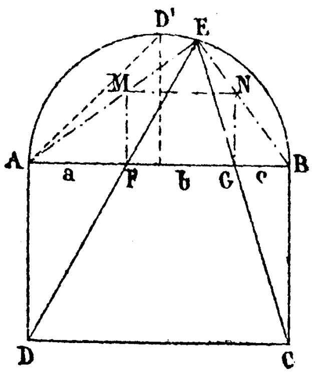


Fig. 847.

$$AG^2 + BF^2 = AB^2.$$

(FERMAT. Question 957, *N. A.*, 1869, p. 479 et 558 ; puis 1870, p. 189.)

Soit $AF = a;\quad FG = b;\quad BG = c.$

Pour vérifier la relation, remplaçons chaque ligne par sa valeur en fonction des segments $a$, $b$, $c$.

Il faut prouver qu'on a l'égalité suivante :

$$(a + b)^2 + (b + c)^2 = (a + b + c)^2; \qquad (1)$$

développons et réduisons :

$$a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2,$$

tout se réduit à prouver qu'on a $b^2 = 2ac.$ $\qquad$ (2)

Élevons des perpendiculaires FM, GN; on obtient un rectangle semblable au rectangle donné.

En effet,

$$\frac{FM}{AD} = \frac{EF}{ED} = \frac{EG}{EC} = \frac{GN}{BC} = \frac{FG}{DC};$$

donc $$FM = NG,$$

et $$FG^2 \text{ ou } b^2 = 2MF^2.$$

Les triangles rectangles AMF, NBG sont semblables, car ils sont équiangles ;

donc $$\frac{a}{MF} = \frac{NG}{c}, \quad \text{d'où} \quad MF^2 = ac;$$

donc l'égalité hypothétique (1) est vérifiée, et le théorème est démontré.

**1329 a. Note.** CATALAN, dans ses *Théorèmes et problèmes de Géométrie*, 6e édit., 1879, donne deux démonstrations, pages 168, 169. La solution donnée par les *N. A.*, 1870, page 190, est de LIONNET, ancien professeur à Louis-le-Grand, auteur de nombreux articles des *Nouvelles Annales*, de 1868 à 1885.

Voir aussi *Mathesis*, 1907, page 181, no 17, note de M. J. NEUBERG; historique de la question d'après M. MAX SIMON, puis solution par le savant auteur de la note. Enfin le même recueil, 1907, page 264, donne encore une démonstration du *théorème de Fermat*, par M. L. HACKEN.

* FERMAT (1601-1665), conseiller au présidial de Toulouse, cultiva les mathématiques avec un grand succès. On lui doit la méthode de *maximis et minimis*. Il s'occupa surtout de la *théorie des nombres*. La proposition suivante n'a pas encore été démontrée dans toute sa généralité : *Au-dessus du carré, la somme de deux puissances de même nom n'est jamais une puissance de même nom*, c'est-à-dire que, sauf pour $n$ égale 2, il n'est pas possible de résoudre, en nombres entiers, l'équation $x^n + y^n = z^n$.

## Figures inverses.

**1330. Définition.** Par rapport à une origine donnée O, deux points M et N sont *réciproques* ou *inverses*, lorsqu'ils sont situés sur une même droite OMN, et que le produit OM . ON égale une valeur constante $k^2$, nommée *puissance d'inversion*.

Deux figures réciproques ou inverses sont composées de points inverses, deux à deux, par rapport à une même origine donnée, prise pour centre d'inversion.

### Théorème 411.

**1330 a.** *Deux couples de points inverses appartiennent à une même circonférence.*

(*Méthodes*, no 218.)

### Théorème 412.

**1331.** *La droite qui joint deux points d'une figure, et la droite qui joint les deux points correspondants de la figure inverse, sont antiparallèles par rapport aux deux rayons vecteurs menés aux deux couples de points considérés.*

(*Méthodes*, no 218.)

**Théorème 413.**

**1332**. *La longueur d'une corde s'obtient en multipliant la corde correspondante par la puissance d'inversion, et en divisant ce résultat par le produit des rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités de cette seconde corde.*

(*Méthodes*, n° 219.)

**Théorème 414.**

**1333**. *L'angle de deux lignes d'une figure donnée égale l'angle des lignes réciproques de la figure inverse.*

(*Méthodes*, n° 221.)

**Théorème 415.**

**1334**. *L'inverse d'une circonférence, lorsque le centre d'inversion est sur cette courbe, est une droite perpendiculaire au diamètre qui passe par l'origine donnée.*

(*Méthodes*, n° 223.)

**Théorème 416.**

**1335**. *L'inverse d'une droite donnée est une circonférence qui passe par l'origine; le diamètre mené par ce point est perpendiculaire à la droite donnée.*

(*Méthodes*, n° 224.)

**Théorème 417.**

**1336**. *L'inverse d'une circonférence, lorsque le centre d'inversion n'est pas sur la courbe donnée, est une circonférence homothétique de la première par rapport à l'origine donnée.*

(*Méthodes*, n° 225.)

**Théorème 417. — I.**

**1337**. Quadrilatère harmonique. *Lorsque les rectangles formés par les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit sont équivalents, toute droite qui coupe le faisceau formé en joignant les quatre sommets du quadrilatère à un point quelconque du cercle circonscrit est divisée harmoniquement par ce faisceau.*

(*Méthodes*, n° 227.)

**Théorème 418.**

**1338**. *Deux cercles qui ne se coupent point se transforment en cercles concentriques, lorsqu'on prend pour origine un des points limites.*

(*Méthodes*, n° 233.)

**Théorème 418. — I.**

**1339.** *Deux cercles qui se coupent se transforment en cercles égaux, lorsqu'on prend pour origine un point quelconque d'un des cercles bissecteurs des cercles donnés.*

(*Méthodes*, nº 235.)

**Théorème 418. — II.**

**1340.** *Entre deux cercles intérieurs non concentriques* A *et* B, *on inscrit un cercle* C *tangent aux deux premiers; puis un cercle* D *tangent aux cercles* A, B, C; *un cercle* E *tangent aux cercles* A, B, D, *etc.*

1º *Les points de contact communs aux cercles* C, D, E... *sont sur une même circonférence.*

2º *Si un cercle* N, *de rang* n, *ferme la série en se trouvant tangent au cercle* C, *une nouvelle série, commençant en un point quelconque, se terminera après* n *cercles consécutifs.*

(*Méthodes*, nº 237.)

**Théorème 418. — III.**

**1340 a.** *On donne un angle* XOY, *et un cercle inscrit* I. *Une tangente* AB *à ce cercle détermine un triangle* AOB; *le cercle* C *circonscrit à ce triangle reste tangent à un cercle fixe quelle que soit la tangente* AB. (MANNHEIM.)

En réalité il y a deux cercles fixes inscrits eux-mêmes à l'angle XOY; l'un d'eux correspond au cas où le cercle I est inscrit au triangle AOB, et le second au cas où le cercle I est exinscrit au même triangle.

Voir CATALAN, *Théorèmes et Problèmes*, 6e éd., p. 162 à 164, XCVI et XCVII. — DESBOVES, *Questions de Géométrie*, 2e éd., p. 244, nos 97 et 98. — *Bulletin des Sciences Mathématiques et Physiques élémentaires*, 10e année, p. 89, nº 1505, et 13e année, p. 290 ef 291.

**Théorème de Feuerbach 419.**

**1341.** *Le cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits.*

1re *Démonstration.* On peut recourir à l'*Inversion.* (Voir *Méthodes*, nº 238.)

2e *Démonstration.* (M. MILNE.)

Soient I, J, les centres du cercle inscrit et d'un cercle exinscrit; R, S, les points de contact, FDE le triangle médian, GH la quatrième tangente.

La droite CG, la bissectrice AI, la ligne DE des milieux se coupent en un même point K.

On sait que $\quad BR = CS \quad$ et $\quad RS = AB - AC$;

donc $$DR = DS = \frac{AB - AC}{2} = \frac{BG}{2} = DK.$$

La droite DK parallèle à AB donne :

$$\frac{DL}{DK} = \frac{BG}{BA} = \frac{DK}{DE},$$

d'où $$DL \cdot DE = DK^2 = DR^2 = DS^2.$$

De même, $$DM \cdot DF = DK^2 = DR^2 = DS^2.$$

Mais on sait que le lieu des points E, F tels que les produits DL . DE et DM . DF soient égaux à la puissance du point D par rapport aux cercles

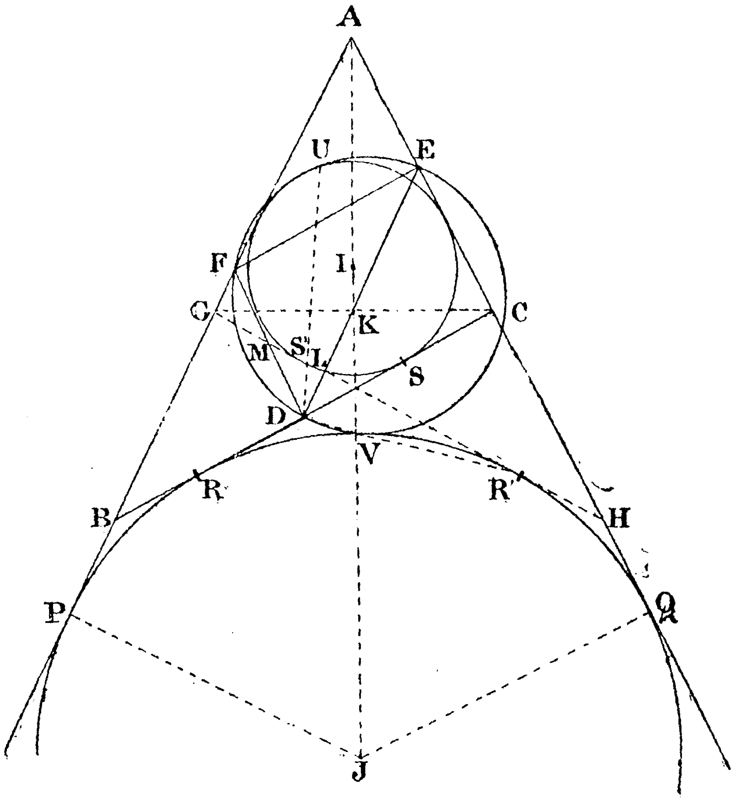



Fig. 848.

I et J est un cercle DEF tangent aux cercles I et J (n° 1322); donc le *cercle des neuf points* ou *cercle d'Euler* est tangent au cercle inscrit et aux cercles exinscrits.

Les points de contact U et V s'obtiennent en joignant le point D aux points de contact R' et S' de la tangente fixe GH.

U et V et les deux autres points analogues ont été nommés *Points de Feuerbach.*

**1341 a. Note.** Le *théorème de Feuerbach* a été donné en 1822. (*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1902, p. 30, n° 2145. Note de M. Brocard.)

Ce théorème, démontré d'abord par Hamilton, puis par Gerono, en 1865 (*N. A.*, 1903, page 13), peut être traité de bien des manières; mais il n'en est pas de plus élégante que celle qui procède de l'*inversion.* Nous avons reproduit cette démonstration (n° 238) ainsi que l'avaient fait MM. Rouché et de Comberousse, dans leur remarquable *Traité de Géométrie élémentaire.* Elle est due à J. P. Taylor (*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1900, p. 314, n° 1544); mais elle est parfois attribuée à M. Milne (*J. M. E.*, 1890, p. 3).

La démonstration donnée par Baltzer dans ses *Elemente de Mathematik,* Planimétrie, § 12, n° 8, est simple, mais assez longue.

Plusieurs articles des *Nouvelles Annales mathématiques* s'occupent du *Théorème de Feuerbach :* on y trouve deux démonstrations dues à M. J. MENTION, 1846, p. 403, et 1850, p. 101. Le savant rédacteur des *Annales*, à cette époque, M. GERONO, a donné le moyen de déterminer les points de contact du *Cercle des neuf points* avec les cercles inscrit et exinscrits, en n'employant que la règle, sans avoir une seule circonférence à décrire (1865, p. 220). M. LEMOINE a donné une construction très simple pour déterminer les *points de Feuerbach*. (*A. F.*, 1891, Marseille, p. 136.) Depuis, M. CANON (MANNHEIM) a donné une démonstration assez courte et très élégante (*N. A.*, 1902, p. 500, et 1905, p. 257); plus tard, en 1903, p. 13, et 1906, p. 226, il a retrouvé la démonstration de la construction donnée par HAMILTON, pour la détermination du point de contact du cercle des neuf points et du cercle inscrit. Il y a lieu de voir aussi la *remarque* de M. FONTENÉ (1903, p. 183, et 1905, p. 260), ainsi qu'un bel article de ce même auteur dans le *Bulletin* de MM. L. GÉRARD et CH. MICHEL, 1906, p. 113. — M. FONTENÉ a d'ailleurs généralisé le *théorème de Feuerbach* (*N. A.*, 1905, p. 52, et 1906, pages 55 à 63) et le *théorème de la droite de Simson* (*N. A.*, 1906, p. 145).

M. E. WEBER a aussi généralisé le *théorème de Feuerbach*, dans son article : *Sur quelques cercles du plan d'un triangle.* (*N. A.*, 1906, p. 343.) On peut voir divers autres articles de MM. A. VACQUANT, G. FONTENÉ, R. BOUVAIST. (*N. A.*, 1906, pages 392, 508, 510, 1907, p. 158.)

Le *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* (1879), page 359, donne la solution de JAMES BOOTH, membre de la Société royale de Londres. Cette solution est analogue à la première de M. MENTION. Elle est fondée sur le calcul de la distance du centre du cercle des neuf points au centre du cercle inscrit. On peut voir aussi les démonstrations données par ce même journal (1886, page 3 ; 1890, page 193) ; et encore la démonstration de M. L. VAUTRÉ, professeur à Autrey (Vosges), 1895, p. 83.

Pour l'historique du *théorème de Feuerbach*, on peut voir un article de M. BROCARD, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1902, p. 30, nº 2145.

Le cercle des neuf points continue à provoquer des recherches. On peut voir *Mathesis*, 1908, p. 33, et un article par M. W. GALLATLY. *Note sur le cercle des neuf points*, dans l'*Educational Times*, de juillet 1908 (communiqué par l'auteur). Voir aussi à ce sujet *Mathesis*, 1908, p. 201, article par M. J. NEUBERG. Enfin *N. A.*, 1909, où M. G. FONTENÉ considère le *Cercle des neuf points* comme cas particulier des coniques d'un triangle, pages 1, puis 33, *Remarque* III.

M. CH. MICHEL, dès 1895, a énoncé un beau théorème relatif au *point de Feuerbach* du cercle inscrit (*J. M. S.*, 1895, p. 11 et 12).

Le *Bulletin de Mathématiques élémentaires* est revenu sur cette question, à l'occasion d'un bel article de M. V. THÉBAULT (*B. M. E.*, 1910, pages 97 à 100).

On nomme *point de Feuerbach* le point de contact du cercle des neuf points et du cercle inscrit.

On peut appliquer le même nom aux points de contact du même cercle des neuf points avec les trois cercles exinscrits.

Le *point de Feuerbach* a donné son nom à une hyperbole dont il est le centre (nº 1242 n).

* J. MILNE, membre de la Société mathématique de Londres, auteur de *Weekly problem papers* et de *Companion to the Weekly problem papers ;* nous aurons occasion de citer ce remarquable ouvrage.

* J. MENTION, élève de mathématiques spéciales en 1845, puis professeur à Paris, a donné divers articles très intéressants, de 1845 à 1867, dans les *Nouvelles Annales de mathématiques.*

**Théorème 419. — I.**

**1341 b.** *Le cercle des neuf points d'un triangle donné est l'enveloppe des cercles inscrits et exinscrits de tous les triangles qui ont même orthocentre et même cercle circonscrit.*

C'est une simple conséquence de ce que l'orthocentre donné appartient à une infinité de triangles (nº 130, 2º). A cause de l'intérêt de la proposition, nous allons donner quelques développements :

Le centre N du cercle des neuf points est au point milieu de OH, puis le rayon NI est la moitié du rayon OA ; par suite, H est le centre de similitude des deux cercles (nº 1261). Ainsi, toute droite telle que HB, HB' est divisée en deux parties égales en J, ou J' par le cercle des neuf points ; or I, J, K, sont les *points d'Euler* des hauteurs ; il en serait de même de J', etc., pour la construction d'un nouveau triangle ayant H pour orthocentre, et qui serait inscrit dans le cercle O ; donc ce nouveau triangle A'B'C' admet le même cercle des neuf points que ABC.

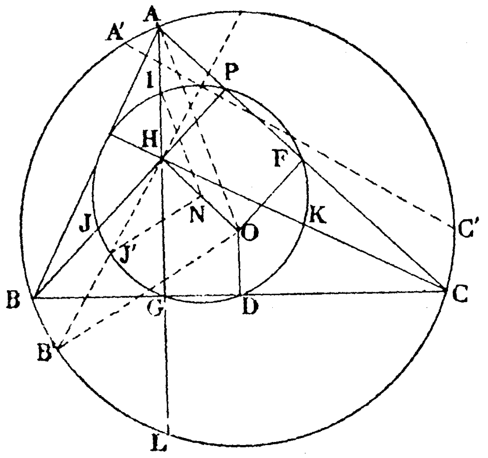


Fig. 848 *bis*.

Le cercle des neuf points renferme tous les cercles inscrits, et il est tangent extérieurement à tous les cercles exinscrits.

*Remarque.* Le *théorème d'Hamilton* (nº 1341 **d**) conduit à une seconde généralisation, puisque les quatre triangles AHC, ABH, HBC, CHA ont même cercle des neuf points, et que chacun des quatre triangles a son cercle inscrit et ses trois exinscrits distincts.

**1341 c. Note.** 1º M. N. PLAKOVO a répondu à la question ci-dessus posée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (1909, pages 163 et 178, nº 3504). Il cite les *Exercices de Géométrie*, 4ᵉ édition, déduit de la figure 433 (nº 733) que le cercle des neuf points est tangent à 48 cercles ; puis rappelle que le théorème attribué à PAUL SERRET (nº 130) conduit à une infinité de cercles tangents ; enfin que les *Théorèmes et Problèmes* de CATALAN, 6ᵉ édition, p. 181, indiquent, d'après CASEY, un nouveau groupe illimité de cercles tangents.

2º Le rayon $\rho$ du cercle tangent aux trois cercles exinscrits de manière à les contenir est donné par la formule

$$\rho = \frac{r^2 + p^2}{4r}.$$

*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1901, p. 119, nº 1930, STOLL (Bensheim).

**Théorème d'Hamilton 419. — II.**

**1341 d.** *Soit* H *le point de concours des hauteurs d'un triangle* ABC ; *les quatre triangles ayant pour sommets les points* A, B, C, H, *pris trois à trois, ont même cercle des neuf points, et ce cercle est tangent aux seize cercles inscrits ou exinscrits aux quatre triangles.*

(*Méthodes,* nº 292 **k**.)

**Note.** Sir WILLIAM HAMILTON a énoncé ce théorème, en 1861, dans *The Quarterly Journal* (Cit. CATALAN, *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, 6e édition, page 178).

### Théorème 419. — II$^{bis}$.

**1342.** *Les distances du point de Feuerbach*

1° *aux pieds des hauteurs d'un triangle, égalent respectivement les perpendiculaires abaissées des sommets sur la droite* OI ;

2° *aux sommets du triangle, sont égales respectivement aux distances des pieds des hauteurs aux projections des sommets sur la droite* OI.

(V. THÉBAULT, *N. A.*, 1910, p. 275.)

**Note.** 1° Dans une belle étude *sur quelques théorèmes de Géométrie élémentaire,* M. THÉBAULT, professeur à Ernée (Mayenne) donne un grand nombre de propositions relatives au *point de Feuerbach,* en les déduisant comme cas particuliers de théorèmes plus généraux qu'il a proposés et démontrés.

L'auteur rend pleine justice à ses devanciers pour certains de ces cas : à M. BOUVAIST et à MANNHEIM (*N. A.,* 1906, p. 310, et 1907, p. 43).

2° Le *théorème de Feuerbach* continue à intéresser les chercheurs, car dans *l'Enseignement mathématique* (1911, p. 31 à 49) M. Y. SAWAYAMA de Tokio en donne neuf démonstrations.

Ce même auteur avait donné une démonstration très simple et très élégante du *Théorème japonais* (n° 750 a). A ce sujet, voir *Mathesis*, 1906, p. 259.

## Inversion symétrique.

### Théorème 419. — III.

**1342 a.** *Par le sommet* A *d'un triangle, on mène une droite quelconque* AD *limitée à la base* BC; *sur la droite symétrique de* AD, *par rapport à la bissectrice de l'angle* A, *on prend une longueur* AG *telle que le produit* AD . AG *égale le produit* bc : *prouver que le lieu du point* G *est la circonférence circonscrite au triangle* ABC.

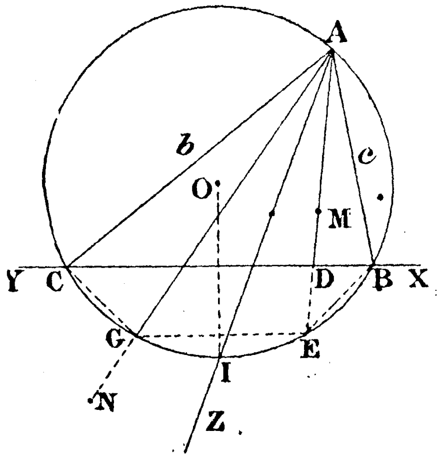


Fig. 849.

Les triangles ACG et ADB sont semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels ; en effet l'angle CAG $=$ DAG,

et l'on a AD . AG $= bc$ ou $\dfrac{b}{\mathrm{AD}} = \dfrac{\mathrm{AG}}{c}$.

Ainsi les angles CGA et CBA sont égaux, le quadrilatère ACGB est inscriptible ; le point G est donc sur la circonférence circonscrite au triangle BAC.

**1342 b.** *Remarque.* Réciproquement, si le point G se meut sur le cercle, le lieu du point inverse D est la droite BC.

Le pied de la hauteur et l'extrémité du diamètre mené par le sommet A sont des points inverses.

**1342 c. Inversion symétrique.** Le théorème précédent est la base de la méthode de transformation connue sous le nom d'*inversion symétrique*: à un point quelconque M on fait correspondre un point N, situé sur la droite symétrique de la première, et tel qu'on ait : $AM \cdot AN = bc$.

1° La figure inverse d'une droite qui passe par le pôle d'inversion est une droite qui passe aussi par le pôle.

2° L'inverse d'une droite XY, qui ne passe point par A, est une circonférence qui passe par le pôle, ou centre d'inversion.

3° L'inverse d'un cercle qui passe par le pôle est une droite telle que XY.

4° L'inverse d'un cercle qui ne passe point par le centre d'inversion est un autre cercle qui n'y passe pas non plus. (Voir ci-après, n° 1342 **f**.) Cette proposition est connue lorsque les points M et N sont sur un même rayon vecteur, or il suffit d'opérer une duplication autour de la bissectrice du lieu des points inverses N; le cercle obtenu dans le premier cas est remplacé par son symétrique par rapport à la bissectrice AI.

**1342 d. Note.** Nous avons trouvé le théorème fondamental en 1882 (*Exercices de Géométrie*, 2e édition, n° 1175), puis il a paru dans la 5e édition des *Eléments de Géométrie* (1885); mais il est très probable qu'il est connu depuis longtemps, car il est d'une grande simplicité. Quoi qu'il en soit, M. Bernès, ancien professeur de mathématiques, l'a pris pour base d'un mode de transformation qu'il a nommé *inversion symétrique*. La publication du remarquable travail du savant professeur a été faite en 1891, 1892 et 1893, dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

Une note de l'auteur (*J. M. E.*, 1891, page 175) nous fait connaître que M. Gob avait, de son côté, traité de la transformation par inversion symétrique, sous le nom d'*involution*, en 1890, au Congrès scientifique de Limoges; il ajoute : « Quant au théorème qui sert de principe à la méthode, la priorité paraît appartenir à M. Neuberg. » Mais nous ignorons à quelle époque le savant professeur de l'Université de Liége aurait fait connaître le théorème fondamental (n° 1175).

### Problème 419. — IV.

**1342 e.** *On donne le pôle* A, *l'axe* AZ *et la puissance* $k^2$; *trouver la figure inverse symétrique :* 1° *d'un cercle qui passe par le pôle* A; 2° *d'une droite* XY.

La figure inverse d'un cercle est une droite, et le diamètre du cercle multiplié par la distance $h$ du pôle à la droite cherchée égale $k^2$ (n° 1342 **a**); donc portons :

$$AL = \frac{k^2}{2R}$$

sur la droite AE symétrique du diamètre et menons la perpendiculaire XY.

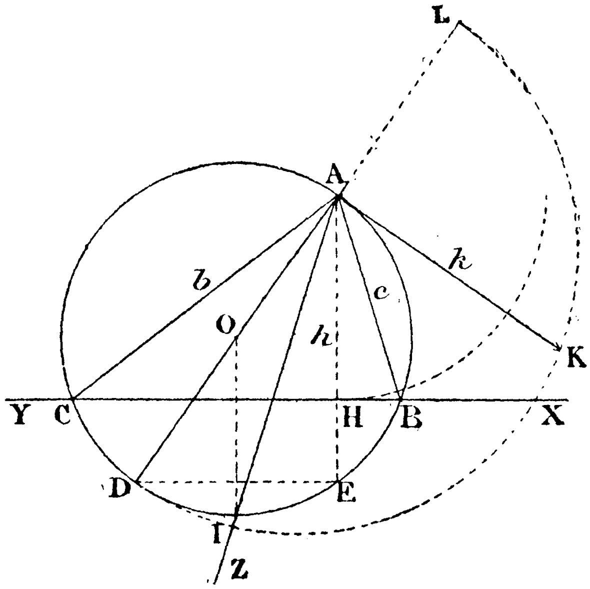



Fig. 850.

2° Déterminons AL (fig. 851) de manière qu'on ait :

$$AL = \frac{k^2}{h},$$

et portons AL en AD sur la droite symétrique de AH ; la circonférence décrite sur le diamètre AD est la figure inverse de XY, car $bc = k^2$.

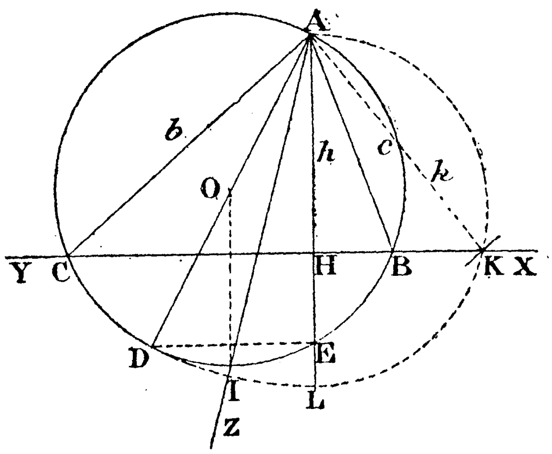



Fig. 851.

**Problème 419. — V.**

**1342 f.** *On donne le pôle* A, *l'axe* AZ *et la puissance* $k^2$ ; *trouver la figure inverse symétrique d'un cercle qui ne passe point par le pôle.*

Le moyen le plus rapide est de déterminer la circonférence O′ telle que $AB \,.\, AD' = k^2$, puis de prendre le symétrique O du cercle O′.

**1342 g.** *Remarque.* M et N sont des points inverses; il en est de même des points E, F; mais on sait que les centres C et O' ne sont pas

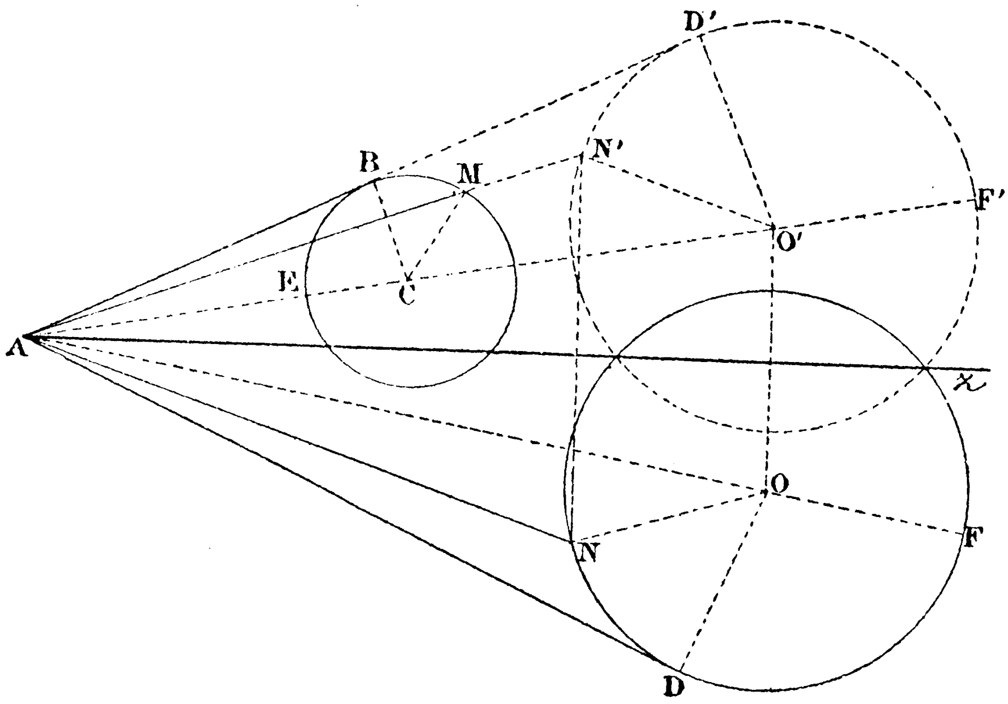



Fig. 852.

inverses; par suite, dans l'*inversion symétrique,* les centres C et O ne sont pas non plus des points inverses.

## Problème 419. — VI.

**1342 h.** *En inversion symétrique, déterminer l'inverse d'un point donné* M, *par rapport au sommet* A *d'un triangle pris pour pôle, et à la puissance* bc *des deux côtés* AB, AC.

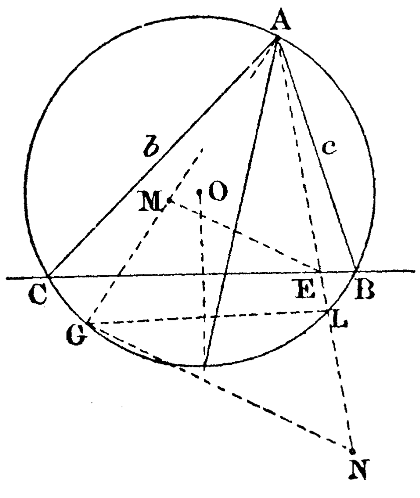



Fig. 853.

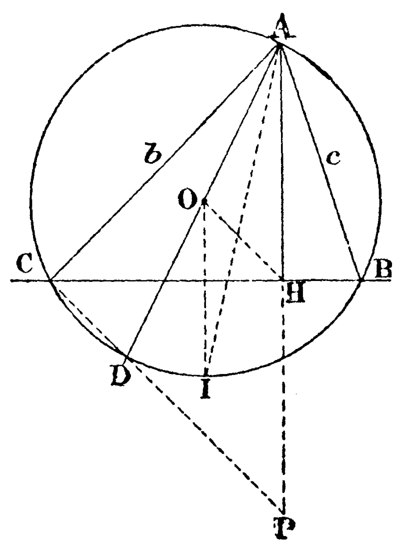



Fig. 854.

On mène AMG, la parallèle GL à la base détermine la droite symétrique de AG ; on trace ME, et sa parallèle GN.

On a : $$\frac{AM}{AG} = \frac{AE}{AN},$$

d'où $$AM \,.\, AN = AE \,.\, AG = bc.$$

**1342 i.** Remarque. *L'inverse* P *du centre du cercle circonscrit est symétrique du sommet* A *par rapport à la base* BC, car on a :

$$2AO \,.\, AH = bc, \quad \text{d'où} \quad AO \,.\, 2AH = bc.$$

La construction conduit à la même conclusion.

**Théorème 419. — VII.**

**1342 j.** *Lorsqu'on donne un triangle quelconque* ABC, *un point* M *dans son plan, et qu'on prend le point* A *pour pôle,* bc *pour puissance, le point inverse symétrique* N *et le point isogonal* M' *d'un point donné* M *se trouvent sur une droite* AM'N *passant par le pôle* A *et sur une circonférence passant par* B *et* C.

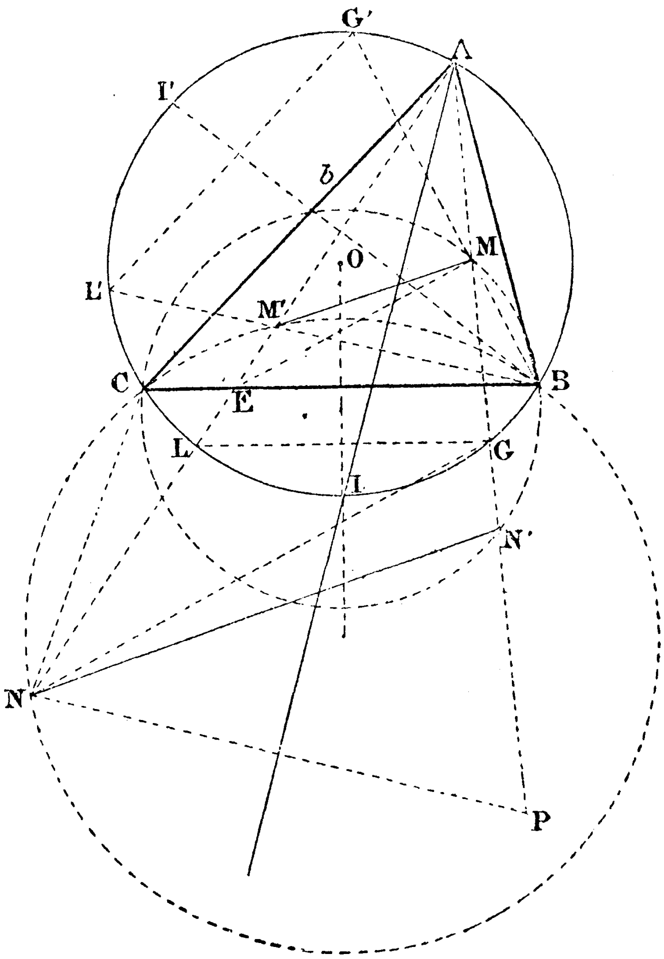



Fig. 855.

Deux points M et M' sont isogonaux, lorsqu'ils sont obtenus par deux couples de droites isogonales AG, AL et BG', BL'. (Voir nos 753, 1118 a, 1344 a et 2307.)

Pour obtenir l'isogonal M′ de M, on peut mener AMG, BMG′; GL parallèle à BC, et G′L′ parallèle à AC, puis les droites LA, L′B.

Pour avoir le point inverse N, on peut recourir à un problème connu (nº 2317), ou prendre $AP \cdot AM = bc$, puis le symétrique N de P par rapport à la bissectrice.

1° Les points A, M′, N sont sur la droite symétrique de AMP.

2º Les triangles ACN, AMB sont semblables comme ayant un angle égal en A, compris entre côtés proportionnels, car de $AN \cdot AM = bc$

on déduit : $$\frac{AN}{c} = \frac{b}{AM};$$

donc l'angle $CNA = MBA = CBM'$;

donc M′ est sur le cercle BNC.

**1342 k.** *Remarques.* 1º On nomme *points isocycliques*, par rapport à BC, les points N et M′ situés sur une circonférence passant par B et C et sur une droite passant par le pôle A. De même, M et N′ sont isocycliques.

*Si l'on décrit le cercle* BM′C, *on obtient en* N *l'inverse symétrique du point* M; de même, la circonférence BMC détermine l'inverse symétrique N′ de l'isogonal M′.

2º Les droites MM′, NN′ sont parallèles; *les points* N *et* N′, *inverses symétriques des points isogonaux* M *et* M′, *sont eux-mêmes isogonaux.*

3º L'emploi de l'inversion symétrique permet de transformer les questions déjà connues et de formuler de nouveaux théorèmes; mais il suffit d'en indiquer le principe. Voir d'ailleurs le remarquable travail déjà cité de M. Bernès (*J. M. E.*, 1891, p. 121, 145, etc.).

4º L'étude des figures semblables, non homothétiques, a conduit à d'intéressantes questions dans la *Géométrie du triangle;* il en serait de même si l'on recourait à l'*inversion angulaire*, c'est-à-dire à l'inversion lorsque les rayons vecteurs des points inverses forment entre eux un angle constant; rien n'empêcherait d'ailleurs de prendre la figure symétrique de l'inverse obtenue directement.

**Théorème de Miquel 419. — VIII.**

**1342 l.** *Lorsque trois circonférences, se coupant deux à deux, ont un point commun, la somme des angles du triangle curviligne ayant pour sommets les trois autres points d'intersection des circonférences est égale à deux angles droits.* (Miquel, *Journal de Liouville,* tome IX, page 24. — Citation de Baltzer, *Planimétrie,* § 3, nº 6.)

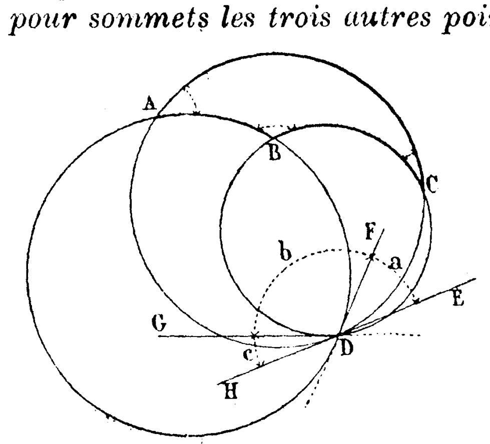


Fig. 855 *bis.*

1re *Démonstration.* Soient trois circonférences passant par un même point D; il faut prouver que la somme des angles du triangle curviligne ABC égale deux droits.

Les angles de ce triangle sont égaux aux angles formés en D.

Ainsi l'angle A égale l'angle ayant D pour sommet, ACD, BAD pour côtés curvilignes; or, si l'on mène les tangentes à ces deux arcs, on aura l'angle $A = a$.

De même, $B = b, \quad C = c;$

donc $A + B + C = a + b + c = 2$ droits.

2e *Démonstration.* En prenant le point D pour *Centre d'inversion* proprement dite (nos 217 à 249), les trois cercles se transforment en un triangle ayant les angles égaux à ceux des trois cercles; donc

$$a + b + c = 2 \text{ droits.}$$

**Note.** Pour MIQUEL, voir nos 711, 712 **b** et 737 **b** et **c**.

### Note sur l'inversion.

**1342 m.** Nous avons traité assez longuement de l'*Inversion* proprement dite (nos 217 à 249); nous venons de parler de l'*Inversion symétrique* (nos 1342 **a**, 1342 **k**), et nous signalerons aussi l'*Inversion isogonale.* Toute relation, toute construction graphique qui fait correspondre un point à un point peut être la base d'une méthode de transformation. Pour l'*inversion* proprement dite, elle conserve les angles et s'applique à la sphère, à l'espace, en un mot, aussi facilement qu'aux figures planes : ainsi toute propriété du triangle plan en donne une pour le triangle sphérique; on peut d'ailleurs en déduire une propriété du triangle curviligne plan, formé par trois arcs de cercle.

Dans l'espace, l'inversion du tore permet d'étudier facilement la *cyclide*, bien que cette surface, qui admet deux séries de cercles orthogonaux, offre une grande variété de forme et d'aspect. (*Exercices de Géométrie descriptive,* 4e édition, pp. 850 à 871.)

L'*inversion isogonale* s'obtient en faisant correspondre deux à deux les *points isogonaux* (no 753).

Si M décrit une figure donnée, son isogonal N en décrira une autre, qui sera la *transformée isogonale* de la première. (Voir nos 753, 1118 **a**, 1344 **a**, 2307.)

Cette transformation a donné d'intéressants résultats dans la *Géométrie du triangle.* Ainsi toute droite se transforme en une conique qui passe par les sommets du triangle; suivant que la droite ne rencontre pas, est tangente, ou sécante par rapport au cercle circonscrit, la transformée est une ellipse, une parabole ou une hyperbole (no 1242 **p**) ; mais le cercle donne une *cubique,* dont l'étude échappe aux *Éléments de Géométrie.* (Voir *Revue de mathématiques spéciales* de VUIBERT 1890, p. 11.)

Pour l'historique de l'*inversion isogonale,* voir ci-après, no 2306.

### Théorème 419. — IX.

**1342 n. Théorème.** *On joint un point* O *aux sommets d'un triangle* ABC; *les perpendiculaires élevées en* O *aux droites* OA, OB, OC, *rencontrent les côtés opposés en trois points* D, E, F, *en ligne droite.*

(Question proposée par M. H. BROCARD.)

Si les trois points D, E, F sont en ligne droite, on doit avoir, d'après le théorème de Ménélaüs : $\dfrac{AD \cdot BF \cdot CE}{CD \cdot AF \cdot BE} = 1.$

Les transversales DJ, EK, FL, donnent les égalités suivantes :

$$\frac{AD \cdot BG \cdot CJ}{CD \cdot AG \cdot BJ}=1, \quad \frac{CE \cdot AK \cdot BH}{BE \cdot CK \cdot AH}=1, \quad \frac{BF \cdot CI \cdot AL}{AF \cdot BI \cdot CL}=1,$$

dont le produit égale $\dfrac{AD \cdot BF \cdot CE}{CD \cdot AF \cdot BE} \times \dfrac{BG \cdot CJ \cdot AK \cdot BH \cdot CI \cdot AL}{AG \cdot BJ \cdot CK \cdot AH \cdot BI \cdot CL}=1.$ (1)

Les angles droits COI, BOJ étant égaux, il en est de même de COJ et BOI;

on a donc : $\dfrac{CO \cdot OI}{BO \cdot OJ}=\dfrac{CI}{BJ}, \quad \dfrac{CO \cdot OJ}{BO \cdot OI}=\dfrac{CJ}{BI};$

de même : $\dfrac{BO \cdot OG}{AO \cdot OH}=\dfrac{BG}{AH}, \quad \dfrac{BO \cdot OH}{OA \cdot OG}=\dfrac{BH}{AG},$

$$\frac{AO \cdot OK}{CO \cdot OL}=\frac{AK}{CL}, \quad \frac{AO \cdot OL}{CO \cdot OK}=\frac{AL}{CK};$$

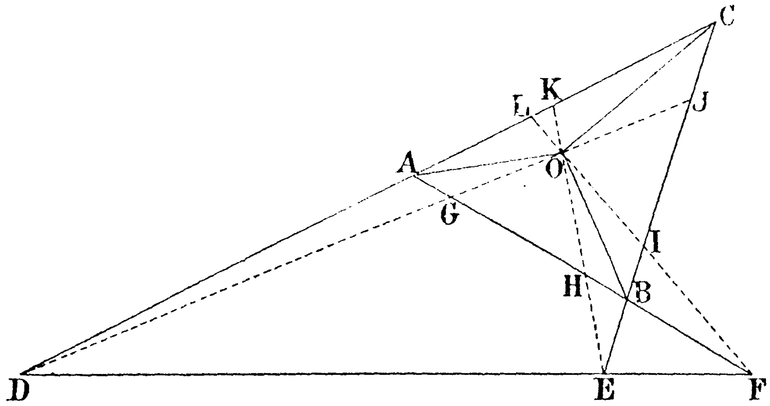



Fig. 855 *ter*.

en multipliant entre elles ces proportions, on obtient :

$$\frac{CO^2 \cdot BO^2 \cdot AO^2}{BO^2 \cdot AO^2 \cdot CO^2}=\frac{CI \cdot CJ \cdot BG \cdot BH \cdot AK \cdot AL}{BI \cdot BJ \cdot AH \cdot AG \cdot CL \cdot CK}; \qquad (2).$$

or le premier membre de l'égalité (2) est l'unité, donc le deuxième membre égale l'unité, mais ce dernier est identique au 2e facteur de l'égalité (1); ainsi le premier facteur égale aussi l'unité et les trois points D, E, F, sont en ligne droite.

*Remarque.* Les circonférences décrites sur AE, BD, CF comme diamètres passent par le point O et déterminent un point O′, symétrique du premier par rapport à la ligne des centres, qui a les mêmes propriétés par rapport à la transversale DEF; ces centres sont en ligne droite puisqu'ils sont les points milieux des trois diagonales du quadrilatère complet ABEDCF. (Voir no 1546 e, note 2o.)

## LIEUX GÉOMÉTRIQUES

### Relation de rapport et point de concours.

**1343. Relations numériques.** La détermination d'un point dépend de deux grandeurs données; or les deux variables peuvent être liées ensemble par une relation numérique connue.

On peut avoir une des relations suivantes :

1o La somme des deux distances est constante;

2° La différence est constante;
3° Le rapport des distances est constant;
4° Le produit est constant;
5° La somme des carrés des deux distances est constante;
6° La différence des carrés est constante.

En représentant $x$ et $y$ les deux longueurs propres à déterminer le point, et les quantités connues par $a, b, \ldots k, l, m, n$, on peut écrire les relations comme il suit :

1° $$x + y = l,$$
2° $$x - y = d,$$
3° $$\frac{x}{y} = \frac{m}{n},$$
4° $$xy = k^2,$$
5° $$x^2 + y^2 = a^2$$
6° $$x^2 - y^2 = b^2.$$

**Lieu 420.**

**1344.** *Quel est le lieu des points dont le rapport des distances à deux droites égale un rapport donné* $\frac{m}{n}$?

La question a été indiquée dans les *Méthodes* (n° 60), mais il convient de la présenter d'une façon générale.

Soient les droites données OX, OY.

Le lieu complet se compose de quatre droites symétriques deux à deux, par rapport aux bissectrices OI, OI′ des droites données.

1° Soient A et A′ des points tels qu'on ait :

$$\frac{AM}{AN} = \frac{m}{n}; \quad \frac{A'M'}{A'N'} = \frac{m}{n}.$$

Les droites OA, OA′ répondent à la question.

2° Lorsque l'ordonnée qui correspond à $m$ tombe sur OY, on trouve encore OB, OB′ comme appartenant au lieu.

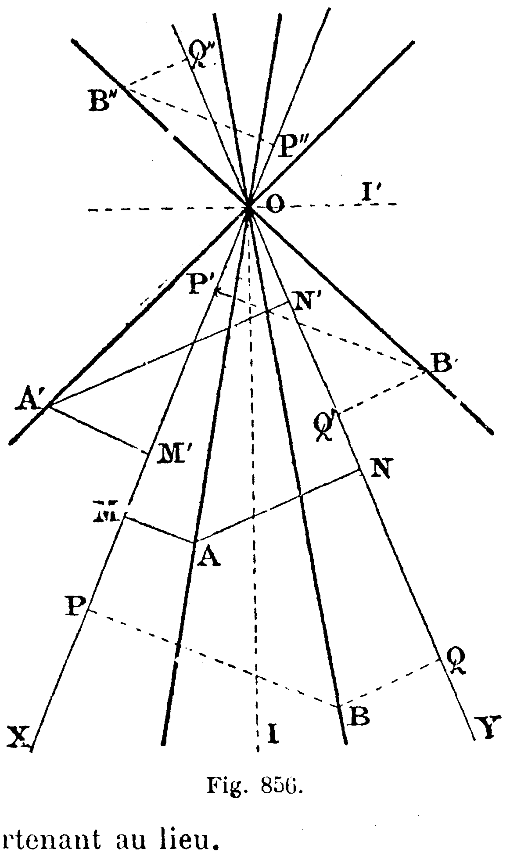


Fig. 856.

**1344 a.** *Remarques.* 1° OA est symétrique de OB, OA′ de OB′.

2° Lorsque l'ordonnée qui se rapporte à $m$ doit être abaissée sur OX, on n'a plus que OA et OA′.

3° Pour distinguer chaque partie, on a recours à la convention des signes; *on peut considérer comme positives* les ordonnées AM, AN lorsque le point est dans l'angle aigu des droites données, et avec cette convention on écrirait :

$$\frac{AM}{AN}=\frac{m}{n},\quad \frac{A'M'}{A'N'}=-\frac{m}{n},$$
$$\frac{BP}{BQ}=\frac{n}{m},\quad \frac{B'P'}{B'Q'}=-\frac{n}{m}.$$

4° Les droites OA, OB symétriques par rapport à la bissectrice OI sont appelées *droites isogonales;* OA' et OB' sont isogonales entre elles. Pour deux droites isogonales OA, OB par exemple, les rapports des distances $\frac{m}{n}$, $\frac{n}{m}$ sont inverses l'un de l'autre.

5° Les *points isogonaux* M, M' d'un triangle ABC (fig. 855) sont les points d'intersection de deux couples de droites isogonales AG, AL et BG', BL'.

6° Les droites OA, OA' (fig. 856) qui ont même rapport en valeur absolue, mais de signes contraires, sont des *droites conjuguées* par rapport à OX et OY; elles forment avec ces dernières un *faisceau harmonique.* On sait que toute transversale qui couperait le faisceau donnerait lieu à une *division harmonique.*

Toute transversale qui couperait le système des six droites OA', OX, OA, OB, OY, OB', donnerait *six points en involution.*

**Lieu 420. — I.**

**1345.** *Quel est l'ensemble des droites dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné?*

Soient A, B et $\frac{m}{n}$ les points et le rapport donnés.

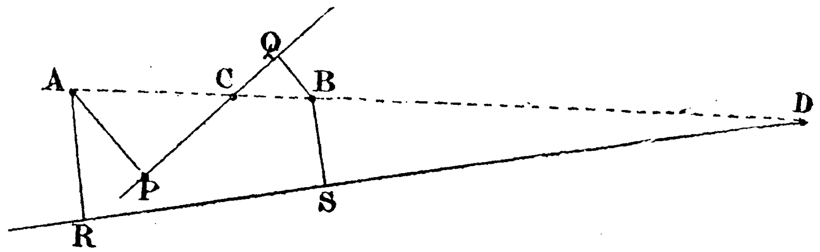



Fig. 857.

Il suffit de déterminer sur AB les points C et D qui donnent deux segments dans le rapport donné, car toutes les droites menées par C ou par D répondent à la question ; on a, en effet :

$$\frac{AP}{BQ}=\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n}\quad\text{et}\quad\frac{AR}{BS}=\frac{AD}{BD}=\frac{m}{n}.$$

*Remarque.* Si l'on tient compte du signe, un seul point C ou D répond à la question, puisque les rapports $\frac{AC}{BC}$ et $\frac{AD}{BD}$, égaux en valeur absolue, ont des signes contraires.

Lorsque $m=n$, le point C est au milieu de AB, le point D s'éloigne à l'infini, et les droites telles que RS sont alors parallèles à AB.

### Lieu 420. — II.

**1345 a.** *Deux droites* AX, AY *sont coupées par une série de parallèles telles que* BC. *Sur chacune d'elles, on prend un point* M *qui divise chacune d'elles dans un rapport donné; quel est le lieu du point* M?

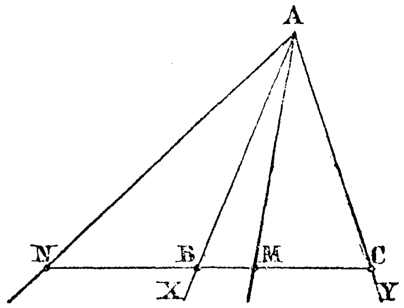


Fig. 858.

Soit $\frac{m}{n}$ le rapport donné.

1° Si l'on a $\frac{BM}{MC} = \frac{m}{n}$, le lieu demandé est la droite AM.

2° Si l'on a $\frac{NB}{NC} = \frac{m}{n}$, le lieu du point N est la droite AN.

*Remarque.* Les droites AB, AC et AM, AN forment un faisceau harmonique.

### Lieu 420. — III.

**1346.** *Sur deux droites* OX, OY *on prend des longueurs telles qu'on ait* $\frac{MO}{NO} = \frac{M'O}{N'O} = \frac{m}{n}$; *par les points* M, M' *on mène des parallèles à une droite donnée; par* N, N' *on mène des parallèles à une autre droite aussi donnée; quel est le lieu des points d'intersection* A, A' *des parallèles correspondantes?*

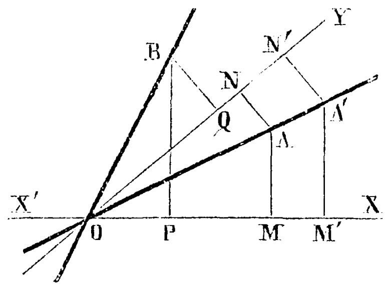


Fig. 859.

La question peut être énoncée comme il suit :

*On coupe un angle* XOY *par des parallèles* MN, M'N'; *par les points* M, M', *etc.*

Le lieu est une droite qui passe par le sommet de l'angle.

### Lieu 420. — IV.

**1346 a.** *Entre des droites* OX, OY, *on inscrit des droites* MP, NQ, *respectivement parallèles à des directions données et qui soient entre elles dans un rapport donné* m; *quel est le lieu du point de concours* L *de ces droites?*

C'est une droite OL comprise dans l'angle XOY.

Le lieu se compose aussi de la droite OL' comprise dans l'angle adjacent X'OY.

### Lieu 421.

1347. *On joint un point donné O aux divers points M d'une droite, et l'on prend sur chaque ligne ainsi menée une distance* ON, *telle que* $\frac{OM}{ON} = \frac{m}{n}$ ; *quel est le lieu des points* N ?

(Voir *Méthodes*, n° 63.)

### Lieu 422.

1348. *On joint un point donné* O *aux divers points* M *d'une circonférence, et l'on prend sur chaque ligne ainsi menée une distance* ON, *telle que* $\frac{OM}{ON} = \frac{m}{n}$ ; *quel est le lieu des points* N?

(Voir *Méthodes*, n° 65.)

### Lieu 423.

1349. *On donne une droite* XX′ *et un point extérieur* A ; *par ce point on mène une droite quelconque* AB *limitée à* XX′, *on fait un angle donné* BAC, *et l'on prend une longueur* AC *telle que* $\frac{AB}{AC}$ *égale un rapport donné* $\frac{m}{n}$ ; *quel est le lieu du point* C ?

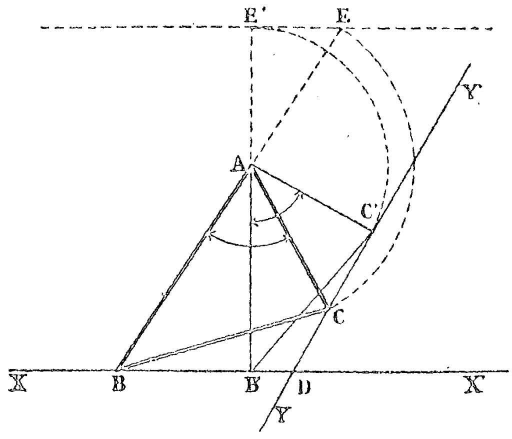


Fig. 860.

1re *Démonstration*. Afin de retrouver une question connue, prolongeons BA d'une quantité AE égale à AC ; le lieu du point E est une parallèle à XX′ (n° 1347).

On a, en effet : $\frac{AB'}{AE'} = \frac{m}{n}$.

La connaissance de ce lieu conduit immédiatement à la construction suivante : *Abaissons la perpendiculaire* AB′, *formons l'angle* B′AC′ = BAC *et élevons une perpendiculaire* C′Y *à la droite* AC′ ; les angles X′DC′ et B′AC′ sont égaux comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires ; donc, *par un point* C *quelconque du lieu, il faut mener une droite* CY *qui fasse avec* XX′ *un angle égal à l'angle donné*.

2e *Démonstration*. La question se traite facilement par synthèse, de la manière suivante : Par le point C, menons CD formant un angle CDX′ égal à l'angle BAC ; pour prouver que CD est le lieu demandé, il suffit de mener une ligne quelconque AB′, de faire l'angle B′AC′ = BAC

et de prouver qu'on a : $$\frac{AB'}{AC'} = \frac{m}{n}$$

En effet, le quadrilatère ABDC est inscriptible, car les angles opposés BAC, BDC sont supplémentaires ; donc l'angle ABD est le supplément de ACD ; donc l'angle ABB′ = ACC′.

Le quadrilatère AB'DC' est aussi inscriptible, car l'angle B'DC' est le supplément de B'AC'; ainsi l'angle AB'B = AC'C; donc les triangles ABB', ACC' sont équiangles, et par suite semblables;

donc
$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}.$$

**1350.** *Remarques.* 1° La question est souvent énoncée comme il suit :

*Un triangle* ABC *reste semblable à lui-même, tandis qu'il tourne dans son plan autour de son sommet fixe* A *et que le sommet* B *décrit une ligne droite ; quel est le lieu décrit par le sommet* C?

A l'exemple de PONCELET, on peut dire aussi :

*Un triangle* ABC *reste semblable à lui-même, tandis qu'il pivote autour de son sommet fixe* A, etc.

2° Le premier mode de démonstration conduit à dire immédiatement :

*Le sommet* C *décrit constamment une figure semblable à la figure que décrit le sommet* B.

Néanmoins, à cause de l'importance de la question, nous étudierons le cas où le point B décrit une circonférence donnée (n° 1355).

### Théorème 423. — I.

**1350 a.** *Lorsqu'un triangle* ABC *reste semblable à lui-même, tandis qu'il tourne dans son plan autour du sommet fixe* A, *et que le sommet* B *décrit une droite donnée, la circonférence circonscrite au triangle passe par un second point fixe* (fig. 860).

En effet, pour tout triangle, la circonférence circonscrite doit passer par le point fixe D.

### Théorème 423. — II.

**1351.** *Lorsqu'une figure varie de grandeur et de position, en tournant autour de l'un de ses points, qu'elle reste semblable à elle-même et qu'un second point décrit une ligne droite, tout autre point de cette figure décrit aussi une ligne droite; le point fixe est le centre permanent de similitude de la figure, qui reste semblable à elle-même, tout en variant de grandeur et de position.* (Voir NOTE, n° 1284, le *théorème général* n° 1357, et le paragraphe des n°s 2476 et suivants.)

### Lieu 423. — III.

**1352.** *Deux triangles semblables ont même sommet* A; *l'un d'eux,* B'AC', *tourne dans son plan autour du sommet* A; *quel est le lieu du point* D *d'intersection des lignes* BB', CC'?

1° On reconnaît facilement que la question posée peut se rattacher à la précédente : car les triangles ABC, AB'C' sont deux positions du triangle qui reste semblable à lui-même; donc, si B décrit la droite BB', le point C décrira une droite CC′ coupant la première sous un angle BDC supplémentaire de A ; ainsi le lieu est la circonférence circonscrite au triangle donné ABC.

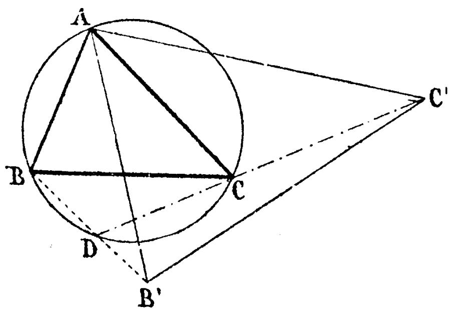


Fig. 861.

Voici d'ailleurs une démonstration directe :

2° On a, par construction :

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'},$$

et l'angle BAB′ = CAC′, car l'angle BAC = B′AC′ ; donc les triangles ABB′, ACC′ sont semblables.

Ainsi l'angle ACC′ = ABB′ ; donc l'angle ACD, supplément de ACC′, est aussi le supplément ABD, et le quadrilatère ABDC est inscriptible.

Ainsi le lieu du point D est le cercle circonscrit au triangle fixe.

### Lieu 423. — IV.

**1353**. *Par un point* A *on mène une sécante* AMN *qui coupe deux parallèles aux points* M *et* N ; *sur* MN *on construit un triangle* MNO *semblable à un triangle donné ; quel est le lieu du sommet* O ?

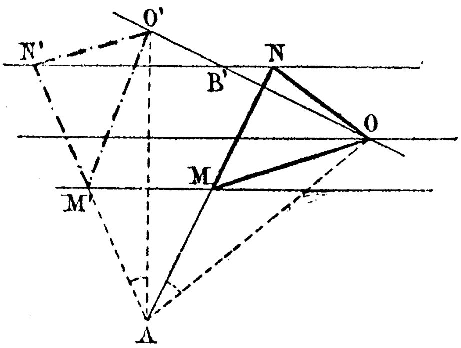


Fig. 862.

Soient MNO, M′N′O′ deux positions du triangle.

On a :

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AM'}{AN'} = \frac{MN}{M'N'} = \frac{NO}{N'O'}, \text{ etc.}$$

Les triangles ANO, AN′O′ sont semblables, et l'on retombe sur une question connue (n° 1350).

Le lieu du sommet O est une droite OB′O′ qui coupe les parallèles sous un angle égal à l'angle NAO.

### Lieu 423. — V.

**1354**. *Sur la diagonale* MN (fig. 862) *on construit un carré ; quel est le lieu des deux autres sommets ?* Ou plus généralement : *On construit sur* MN *une figure semblable à une figure donnée.*

Chaque sommet a pour lieu une droite que l'on détermine comme OB′O′. Chaque point de la figure décrit aussi une droite.

### Lieu 424.

**1355**. *Lorsqu'un triangle* ABC *reste semblable à lui-même, tandis qu'il tourne dans son plan autour de son sommet fixe* A *et que le sommet* B *décrit une circonférence, quel est le lieu décrit par le troisième sommet* C ?

1re *Solution.* Le triangle ABC restant semblable à lui-même, le rapport $\frac{AB}{AC}$ est constant; il en est de même de l'angle BAC.

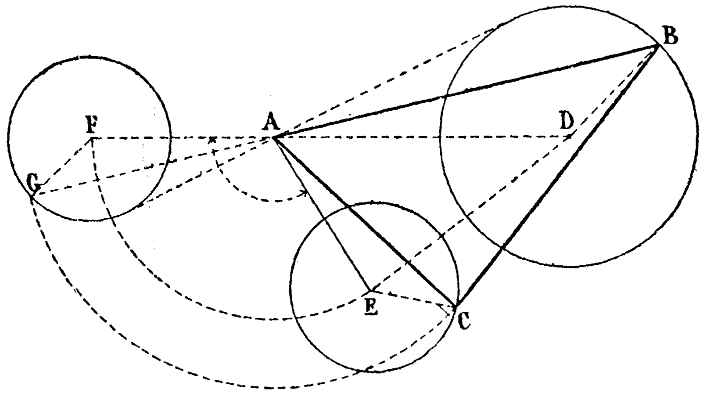


Fig. 863.

Joignons le point A au centre D, faisons l'angle DAE égal à BAC, et prenons AE de manière qu'on ait :

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}.$$

Les deux triangles BAD, CAE seront semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés homologues proportionnels; donc

$$\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}; \quad \text{d'où} \quad CE = BD.\ \frac{AC}{AB}.$$

La longueur CE est constante; par suite, le lieu du point C est une circonférence décrite du point E comme centre avec la valeur ci-dessus pour rayon.

2e *Solution.* En reportant AE de A en F en prenant A pour centre de similitude, on a constamment $\frac{AB}{AG} = \frac{BD}{FG}$; donc le lieu du point G est une circonférence, et il en est de même pour le point C; car les figures AEC, AFG sont égales entre elles.

**1356.** *Remarque.* Lorsque, dans l'énoncé, on donne l'angle B constant et $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$, on est ramené à la question ci-dessus; car les triangles successifs ABC, AB'C' sont semblables comme ayant un angle $B = B'$ compris entre deux côtés homologues proportionnels ou $\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'}$. (Voir no 1351.)

### Théorème 424. — I.

**1357.** Énoncé général. *Lorsqu'une figure plane tourne dans son plan autour d'un de ses points* A *et reste semblable à elle-même, pendant qu'un autre de ses points,* B *par exemple, glisse le long d'une ligne donnée, chacun de ses autres points* C *décrit une ligne semblable à la proposée, et qu'on rendrait homothétique à celle que décrit* B, *en la faisant tourner de l'angle* BAC *que forment entre eux les rayons* AB, AC. (Voir fig. 863.)

### Lieu 424. — II.

**1358.** *On donne deux droites* OX, OY, *un point* A *sur l'une d'elles et* B *sur l'autre, on prend à partir de ces deux origines dans un sens déterminé, des segments égaux* $AC = BD$, *puis* $CE = DF$, *etc., lieu du point milieu de* AB, CD, EF.

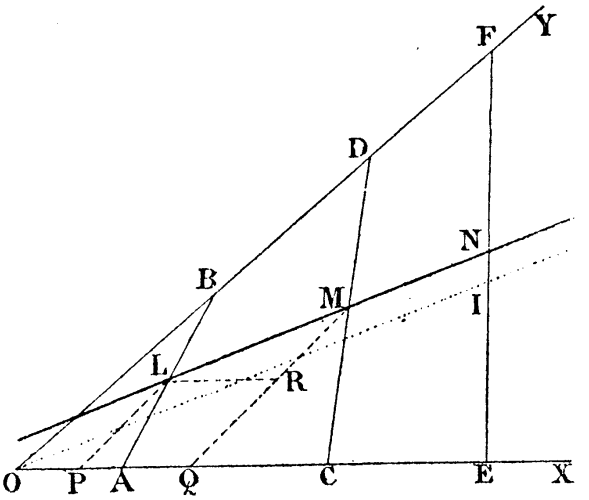



Fig. 864.

En menant les parallèles LP, MQ et LR aux droites OY, OX, on a :

$$LP = \frac{OB}{2}, \quad MQ = \frac{OD}{2}, \quad \text{donc} \quad MR = \frac{BD}{2};$$

de même, $$OP = \frac{AO}{2}, \quad OQ = \frac{OC}{2}, \quad \text{donc} \quad LR = \frac{AC}{2};$$

donc $LR = MR$, et le triangle LMR est isocèle; par suite, LM est parallèle à la bissectrice OI; il en serait de même de MN, donc la droite LMN est le lieu cherché.

**Note.** La droite LMN porte le nom de *droite des milieux* que lui a donné CHASLES, en 1860 (*Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre*, par M. G. DE LONGCHAMPS, p. 149).

La question ci-dessus n'est guère qu'un cas particulier d'un théorème donné antérieurement (nº 771 **b**).

### Lieu 424. — III.

**1358 a.** *Sur deux droites* OX, OY, *on prend des grandeurs correspondantes* AC *et* BD, *puis* CE *et* DF, *etc., qui soient entre elles dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$; *enfin on divise* AB, CD, EF, *etc., dans le même rapport* $\frac{m}{n}$; *quel est le lieu des points* L, M, N, *etc.?*

Les constructions auxiliaires et la démonstration sont analogues aux précédentes (nº 1358, fig. 864).

**Note.** La question posée ci-dessus n'est qu'un cas particulier d'un théorème relatif aux figures inversement semblables (nº 1150 **b**). La droite LMN peut être nommée : *droite des divisions proportionnelles*.

**Lieu 425.**

**1359.** *Lieu des points tels que, de chacun d'eux, deux cercles donnés,* A *et* B, *soient vus sous un même angle.*

Il est évident que les points de concours I et O des tangentes communes aux deux cercles font partie du lieu demandé.

Soit M un autre point, tel que l'on ait l'angle $CMG = DMH$ ; leurs moitiés sont aussi égales, et les triangles rectangles ACM et BDM sont semblables, et donnent $\frac{e}{f} = \frac{r}{r'}$, rapport constant.

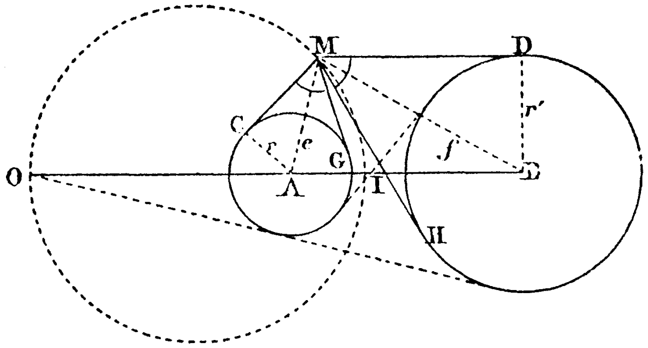



Fig. 865.

Le lieu demandé est donc le même que *celui des points dont les distances aux deux points* A *et* B *sont dans le rapport* $\frac{r}{r'}$. (G., n° 307.) Ce lieu est la circonférence décrite sur OI comme diamètre.

**1359 a. Note.** 1° Les points O et I divisent harmoniquement la droite AB ; le cercle décrit sur OI comme diamètre a été nommé *cercle d'Appollonius* par M. Neuberg. La recherche du *lieu des points dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné* (G., n° 307) peut se faire d'une manière élégante et rapide en employant le *théorème de Stewart* (n° 1173). Voir à ce sujet la belle solution donnée dans le *Bulletin de Mathématiques élémentaires,* 1896-97, p. 65, par M. J. Tannery, alors directeur des études scientifiques à l'École Normale supérieure de Paris (Mort en 1910).

2° On donne trois cercles; en les considérant deux à deux, on détermine trois circonférences analogues au lieu ci-dessus ; elles se coupent en deux points d'où l'on voit les trois cercles sous le même angle (n° 1546 e). — On peut voir à ce sujet un bel article des *Annales de Gergonne,* tome XX (1829-1830), p. 305, par Vallès, ingénieur des Ponts et Chaussées).

**Lieu 425. — I.**

**1360.** *Le sommet* C *de l'angle droit d'un triangle rectangle se meut sur la circonférence décrite sur l'hypoténuse* AB, *cette dernière ligne restant fixe; on prolonge l'un des côtés* BC *de l'angle droit de sa propre longueur au delà du sommet mobile, et l'on joint le centre à l'extrémité du prolongement. On demande le lieu de la rencontre de* ED *avec* AC.

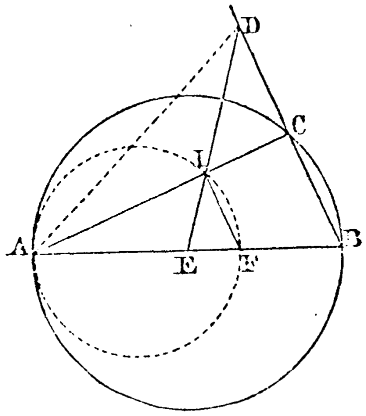



Fig. 866.

Menons AD, puis IF parallèle à CB.

Dans le triangle ABD, les droites AC et DE sont des médianes; ainsi le point I est aux $^2/_3$ de AC, et puisque IF est parallèle à CB, le point F est aux $^2/_3$ de AB.

Or l'angle AIF est droit; donc le lieu du point I est la circonférence décrite sur AF.

### Lieu 426.

**1361.** *Sur une même droite, on donne quatre points* A, B, C, D; *quel est le lieu des points d'où l'on voit les segments* AB *et* CD *sous des angles égaux?*

Soit M un point du lieu. Les triangles qui ont un angle égal sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent les angles égaux; d'ailleurs, les triangles qui ont même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

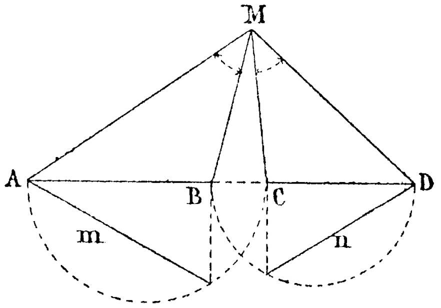



Fig. 867.

Ainsi les triangles AMB, CMD donnent :

$$\frac{AM \cdot BM}{CM \cdot DM} = \frac{AB}{CD}. \quad (1)$$

Les triangles AMC, BMD donnent :

$$\frac{AM \cdot CM}{BM \cdot DM} = \frac{AC}{BD}. \quad (2)$$

Multipliant membre à membre les relations (1) et (2), on a :

$$\frac{AM^2}{DM^2} = \frac{AB \cdot AC}{CD \cdot BD}.$$

Déterminons les moyennes proportionnelles, ou cherchons les carrés équivalents $m^2 = AB \cdot AC$; $n^2 = CD \cdot BD$.

Nous aurons : $\frac{AM^2}{DM^2} = \frac{m^2}{n^2}$; d'où $\frac{AM}{DM} = \frac{m}{n}$.

Ainsi le lieu demandé est le lieu des points dont le rapport des distances à deux points A et D égale un rapport connu $\frac{m}{n}$. C'est donc un cercle (G., nº 307).

**Note.** La solution que nous venons de donner est empruntée à la 5e édition des *Théorèmes et problèmes de Géométrie* de CATALAN, p. 196.

M. BURAT a donné une belle solution de ce même problème dans le *Supplément du Manuel général* du 28 juin 1884, p. 206.

Lorsque les segments AB, CD ne sont pas en ligne droite, le lieu du point M est une courbe du troisième degré.

L'étude complète de la question a été faite par STEINER en 1852; voir *J. M. E.*, 1886, p. 16; *J. M. S.*, 1895, p. 98, E. LEBON.

Comme renseignements bibliographiques, voir une note de M. H. BROCARD dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1906, p. 227, nº 3037.

### Lieu 427.

**1362.** *Quel est le lieu du point de concours des diagonales des parallélogrammes inscrits dans un quadrilatère donné?* (A. LONGCHAMPT, *Recueil de problèmes*, in-4º, p. 152.)

Pour inscrire un parallélogramme BEGH dans un quadrilatère donné ABCD, il suffit de mener EF parallèle à la diagonale BD, FG parallèle à la diagonale AC.

Les droites EH, GH, respectivement parallèles aux deux premières, se coupent sur CD.

Le point O de concours des diagonales est au milieu de la droite LK, qui joint les milieux de deux côtés opposés; mais le lieu du point K est la médiane AM du triangle ABD. Le lieu du point L est la médiane CM du triangle BCD; enfin le lieu du point O, milieu de LK, est la médiane MN du triangle AMC; donc le lieu du point de concours des diagonales est la droite MN qui joint les points milieux des diagonales du quadrilatère.

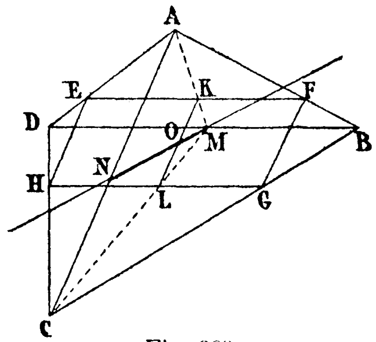


Fig. 868.

*Remarques.* 1° Les prolongements de MN correspondent aux points de concours des parallélogrammes dont les sommets sont placés sur le prolongement des côtés de ABCD.

2° Le théorème est vrai pour le quadrilatère gauche (voir ci-après, *livre* VI).

**Note.** * M. A. LONGCHAMPT, directeur des études à l'Institution polytechnique; son *Recueil de problèmes* autographié est de 1865. La question précédente est à la page 159.

**Lieu 427. — I.**

**1363.** *Lieu du point de rencontre des diagonales des rectangles inscrits dans un triangle donné.*

Pour inscrire un rectangle, il suffit de mener une parallèle DG à la base BC, et d'abaisser des perpendiculaires des points D et G.

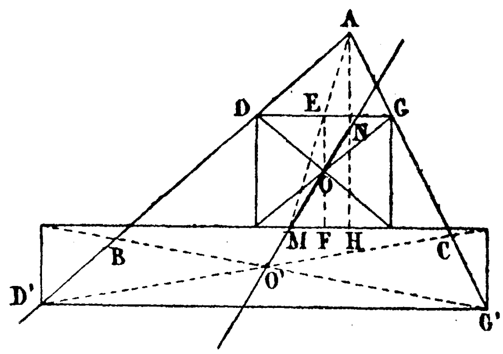


Fig. 869.

Le point de concours O est au milieu de EF.

Le point E, milieu de DG, est sur la médiane AM du triangle ABC; donc le lieu du point O est la médiane MN du triangle MAH.

Ainsi le lieu du point O est la droite MN qui joint le milieu de la base BC au milieu de la hauteur AH.

*Remarque.* Chaque côté pris pour base donne un lieu analogue. Les trois droites telles que MN, qui joignent le milieu de la hauteur au milieu du côté correspondant, se coupent au *point de Lemoine* du triangle (n° 1242 c) (pour la démonstration, voir MATHESIS, 1881, p. 185, ou *J. M. E.*, 1887, p. 117, ainsi qu'un théorème antérieur, n° 1242 c) ; il en résulte que le point d'intersection est le centre de trois rectangles inscrits. Ce même point jouit d'un grand nombre de propriétés (voir ci-après, n° 2375) : après le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité, il semble le plus intéressant des points d'un triangle.

### Lieu 427. — II.

**1364.** *Par un point* A, *on mène une sécante* ABD *qui coupe une circonférence donnée* C *en deux points* B *et* D; *quel est le lieu du point* M *d'intersection des circonférences menées par les points* A *et* B *et par les points* A *et* D, *lorsque ces circonférences sont tangentes au cercle donné?* (*N. A.*, 1872, p. 468.)

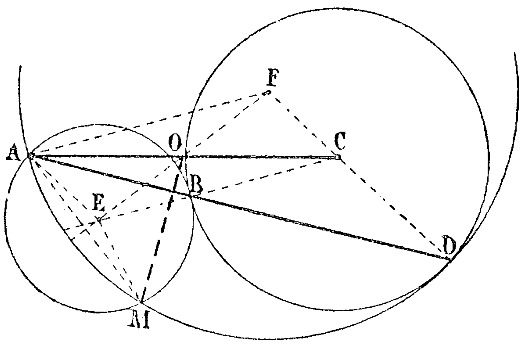


Fig. 870.

Les centres E, F sont sur les rayons BC, DC.

Les triangles AFD, BCD, ABE sont isocèles et semblables; la figure AFCE est un parallélogramme; ainsi les diagonales EF, AC se coupent en leur milieu O; mais la ligne des centres EF est perpendiculaire au milieu de la corde commune AM;

donc $$OM = OA = OC.$$

Le lieu du point M est la circonférence décrite du point O comme centre avec $^1/_2$ AC pour rayon.

### Lieu 427. — III.

**1364 a.** *Par le point de contact* A *de deux circonférences tangentes entre elles, on mène des groupes de deux sécantes quelconques* BAC, DAE; *quel est le lieu d'intersection des circonférences* BAE, CAD? (H. Brocard, *Nouvelle correspondance mathématique*, 1877, p. 176, question 254, et p. 253.)

*Le lieu est une circonférence tangente aux deux premières au point* A. Il suffit de recourir à l'*inversion*, car on sait que si l'on donne deux parallèles et un point A et qu'on mène deux sécantes BAC, DAE, le lieu du point M d'intersection de BAE, CAD est une droite parallèle aux deux premières.

### Lieu 428.

**1365.** *Un des côtés non parallèles d'un trapèze est donné de grandeur et de position, on connaît aussi les longueurs* a *et* b *des deux bases; quel est le lieu du point de concours des diagonales et celui du point milieu du côté inconnu?*

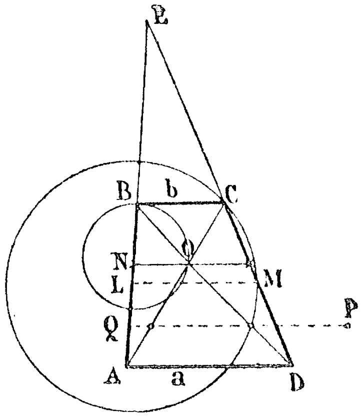


Fig. 871.

Soient AB le côté fixe, AD et BC ayant pour longueur $a$ et $b$.

On sait que les diagonales d'un trapèze se divisent respectivement en parties proportionnelles aux bases.

On a : $$\frac{AO}{OC} = \frac{a}{b}, \qquad \text{ou } [illegible]$$

De plus, lorsqu'on divise un côté AB dans un rapport donné $\frac{m}{n}$, la parallèle menée aux bases a une longueur constante, car elle ne dépend que des bases $a$ et $b$ et du rapport $\frac{m}{n}$; donc

1° $NO = \frac{ab}{a+b}$ (n° 1109); 2° $LM = \frac{a+b}{2}$;

donc le lieu du point O est la circonférence décrite du centre N avec $\frac{ab}{a+b}$ pour rayon.

Le lieu du point M est la circonférence décrite du centre L avec $\frac{a+b}{2}$ pour rayon.

*Remarque.* Tout point de DCE, de AC, ou de DB, décrit une circonférence ayant son centre sur ABE.

Il en est de même de tout point P, lié au trapèze par une parallèle PQ de longueur constante, pourvu que la parallèle passe par un point donné sur l'axe.

### Lieu 429.

**1366.** *On donne les longueurs* a *et* b *des bases d'un trapèze; l'une d'elles,* AD, *est fixe de position; on connaît aussi la longueur* c *d'un des autres côtés. Quel est le lieu du point de concours des côtés non parallèles et le lieu du point de concours des diagonales?*

1° Puisque AB a une grandeur constante, le point B décrit une circonférence ayant A pour centre et AB pour rayon.

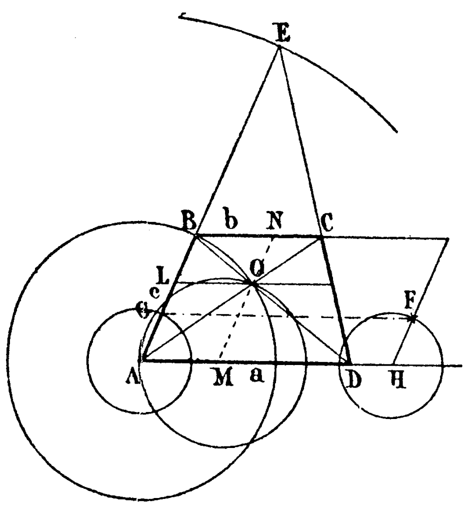


Fig. 872.

Chaque point de ABE décrit aussi une circonférence ayant A pour centre.

Or $$\frac{AE}{AB} = \frac{a}{a-b},$$

d'où $$AE = \frac{ac}{a-b},$$

quantité constante; donc le point E décrit une circonférence, car sa distance au point A est constante.

2° Pour avoir le lieu du point O, menons les droites OL, OM parallèles à AD et à BA.

On sait que AM et MO ont des longueurs constantes.

En effet, $$AM = LO = \frac{ab}{a+b}; \quad (\text{n° } 1109) \qquad (1)$$

$$\frac{OM}{MN} = \frac{OD}{BD} = \frac{a}{a+b}; \quad \frac{OM}{c} = \frac{a}{a+b}; \text{ d'où } OM = \frac{ac}{a+b}; \qquad (2)$$

donc le lieu du point O est une circonférence décrite du point M comme centre avec OM pour rayon.

**Lieu 429. — I.**

**1367**. *Quel est le lieu d'un point* F, *relié au trapèze par une parallèle* FG *de longueur donnée qui rencontre* AB *en un point fixe* G *de cette ligne* (fig. 872)?

Le point G décrit une circonférence ayant A pour centre et AG pour rayon; donc le point F décrit une circonférence ayant le point H pour centre et FH pour rayon (nº 58).

**Lieu 429. — II.**

**1368**. *Dans un trapèze* ABCD, *la base* AD *est donnée de grandeur et de position; la base* BC *est donnée de longueur; quel est le lieu du point de concours des côtés non parallèles et celui du point de concours des diagonales, lorsque le sommet* B *décrit une ligne droite ou une circonférence donnée?*

On donne $AD = a$, et la longueur $b$ de l'autre base; en outre, le sommet B glisse sur la droite BB″.

Tout point de AB décrira une droite parallèle à BB″.

Ainsi
$$AL = AB \cdot \frac{a}{a+b};$$
donc L se meut sur LL″ parallèle à BB″.

En effet, pour une position quelconque B′ du sommet, on a :
$$AL' = AB' \cdot \frac{AL}{AB} = AB' \cdot \frac{a}{a+b};$$

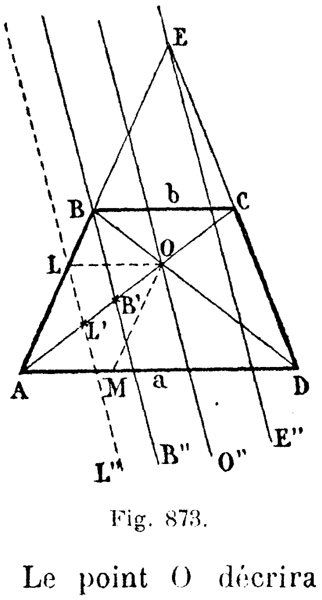


Fig. 873.

donc L′ est bien la nouvelle position de L.

De même, $AE = AB, \dfrac{a}{a-b};$

donc les points B, E décrivent simultanément des droites parallèles.

La longueur LO ou $\dfrac{ab}{a+b}$ étant constante, le point O décrit une droite OO″ parallèle à LL″.

Si B décrit une circonférence, E décrira aussi une circonférence; il en sera de même de L. Le point A sera le centre extérieur de similitude de toutes ces circonférences.

Le point O décrira une circonférence égale à celle que décrit le point L.

**Lieu 429. — III.**

**1369**. *On donne la base* AD *d'un trapèze* ABCD, *ainsi que la longueur* b *de l'autre base* BC; *quel est le lieu du point de concours des* *côtés non parallèles et du point de concours des diagonales, lorsque les côtés non parallèles* AB, CD *sont entre eux dans un rapport donné* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ ?

D'après les exemples précédents, il suffit de connaître le lieu décrit par un point de AB, par exemple par le point B.

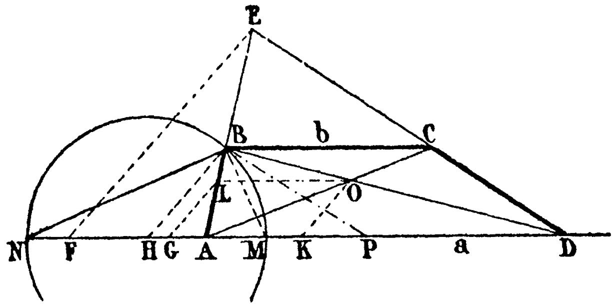



Fig. 874.

Pour cela il suffit de mener BP parallèle à CD.

Le point P est fixe, car

$$AP = a - b,$$

puis $\frac{AB}{BP} = \frac{m}{n}$;

donc le lieu du point B est la circonférence MN, lieu des points dont le rapport des distances aux points A et P égale $\frac{m}{n}$. (G., n° 307.)

Il suffit de mener les deux bissectrices des angles formés par AB et BP.

Tous les points considérés décriront des lieux analogues, car on a :

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{BP} = \frac{m}{n}.$$

La parallèle EF est le rayon de la circonférence lieu des points E.

Les parallèles LG, OK donnent le centre et le rayon du lieu pour les points L, O.

### Lieu 429. — IV.

**1370.** *Mêmes données, mais les côtés parallèles* AB, CD *sont liés par la relation* $AB^2 \pm CD^2 = k^2$.

On détermine le lieu du point B.

Pour la somme des carrés égale $k^2$, le lieu du point P est une circonférence ayant pour centre le point milieu de AP (n° 69); le lieu relatif à la différence des carrés se compose de deux perpendiculaires à AP. (Voir *Méthodes*, n° 71.)

### Lieu 430.

**1371.** *Deux côtés opposés* AB, CD *d'un quadrilatère sont donnés; ils se coupent en un point* O. *Un des côtés* AB *est fixe, l'autre côté* CD *tourne autour du point* O. *Quel est le lieu du point de concours des deux autres côtés, et le lieu du point d'intersection des diagonales du quadrilatère ?*

(Voir *Méthodes*, n° 84.)

### Lieu 430. — I.

**1372.** *Dans un triangle* ABC, *la base* AB *est donnée de longueur et de position; l'angle opposé* C *est de grandeur constante; sur* BC *on prend un point* E *qui divise ce côté dans un rapport donné* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ ; *par* *ce point* E, *on mène une droite* EM *qui coupe le côté opposé sous un angle donné* AME. *Quel est le lieu des points* M ?

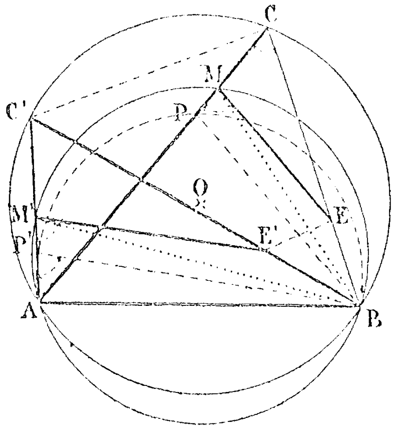



Fig. 875.

Considérons deux positions différentes C, C' du sommet.

On a : $\frac{BE}{EC} = \frac{BE'}{E'C'} = \frac{m}{n}$;

puis angle AM'E' = AME.

Par suite, les triangles EMC, E'M'C sont semblables comme ayant deux angles égaux.

Puis les triangles BME, BM'E' sont semblables comme ayant un angle égal E = E' compris entre deux côtés homologues proportionnels. Ainsi l'angle AM'B = AMB; donc le lieu du point M est un segment AMB capable de l'angle AMB déterminé par une position quelconque du point C.

*Remarques.* 1° La parallèle BP à EM donne un point P qui se trouve constamment sur l'arc AP'PB. De plus on a :

$$\frac{MP}{MC} = \frac{M'P'}{M'C'} = \frac{m}{n};$$

donc si par le point A où deux circonférences APB, ACB se coupent, on mène une corde quelconque APC, et qu'on divise le segment PC compris, dans un rapport donné $\frac{m}{n}$, le lieu du point M est une autre circonférence qui passe par les deux points A et B communs aux deux premières. Ce théorème a déjà été démontré directement (1279).

2° L'*exercice* 186, n° 805, n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

### Théorème et Lieu 430. — II.

**1372. a.** *On projette les sommets d'un triangle* ABC *en* A', B', C' *sur une droite quelconque* m *du plan de* ABC; *on mène ensuite les droites* A'A'', B'B'', C'C'' *respectivement perpendiculaires sur* BC, CA, AB.

1° *Ces droites concourent en un même point* M. (J. Neuberg.)

2° *Lorsque la droite* m *passe par le centre* O *du cercle* ABC, *le point* M *est sur le cercle des neuf points du triangle* ABC. (Soons.)

Voir *Mathesis*, 1896, p. 57. M. Soons était professeur à Tirlemont.

### Lieu 430. — III.

**1372 b.** *Dans un cercle de centre* O, *on donne deux cordes; l'une d'elles* AB *est fixe, l'autre* CD *est mobile, mais ses extrémités se déplacent sur la circonférence donnée. Pour le quadrilatère inscrit* ABCD, *on demande :*

1° Lieu du point de concours des diagonales;

2° Lieu du centre des bimédianes ;

3° Lieu du *point de Mathot*.

Chaque lieu est une circonférence facile à déterminer.

## Relations de Produits ou de Carrés.

### Lieu 431.

**1373.** *Par un point donné* O, *l'on mène une sécante quelconque qui rencontre une droite donnée en un point* N; *on prend sur la sécante une longueur* OM, *tel que le produit* OM . ON *ait une valeur constante* $k^2$. *Quel est le lieu des points* M?

(Voir *Méthodes*, nos 67 et 68, 2o, 3o.)

### Lieu 431. — I.

**1374.** *Étant donnés un point* A *et une droite indéfinie* CD, *on mène du point à la droite une sécante mobile* AM, *et en chaque position, on prend un point* N *tel que l'on ait :*

$$AM \cdot AN = k^2 = 2AD^2.$$

*Trouver le lieu des points* N.

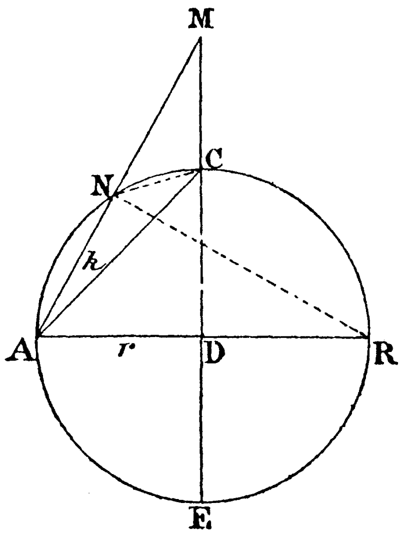


Fig. 876.

Ce problème n'est qu'un cas particulier de l'exercice précédent (no 1373); mais il offre quelque intérêt à cause de la valeur $2AD^2$, attribuée à la constante $k^2$.

Prenons le point R symétrique de A. Le lieu demandé est la circonférence décrite sur AR, le centre est en D; et si l'on appelle $r$ la distance AD, on a :

$$k^2 = AD \cdot AR = r \cdot 2r = 2r^2 = DA^2 + DC^2 = AC^2; \quad \text{d'où } k = AC.$$

Si l'on joint le point N au point R, on considère les triangles rectangles ADM et ANR, qui sont semblables comme ayant l'angle A commun ; et l'on a :

$$\frac{AM}{AR} = \frac{AD}{AN}; \quad \text{d'où } AM \cdot AN = AD \cdot AR = k^2.$$

On peut aussi démontrer directement que $AM \cdot AN = AC^2$ ou $k^2$. On considère les triangles ACM et ANC. L'angle A est commun; l'angle M a pour mesure $\frac{AE - NC}{2}$ ou $\frac{AN}{2}$, et l'angle NCA a aussi pour mesure $\frac{AN}{2}$.

Ainsi les triangles considérés sont semblables, et l'on a :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AC}{AN}; \quad \text{d'où } AM \cdot AN = AC^2 \text{ ou } k^2.$$

*Remarque.* On reconnaît graphiquement que ce cas remarquable a lieu lorsqu'en coupant CD du point A comme centre avec $k$ pour rayon, on trouve $CD = DA$.

Cette question ne diffère pas, au fond, de celle du no 1294.

**Lieu 431. — II.**

**1375.** *Un angle* A *de grandeur constante se meut autour de son sommet; ses côtés varient de longueur, mais en restant toujours dans le même rapport, ou bien en donnant toujours le même produit; l'un de ces côtés a son extrémité mobile* B *sur une droite donnée* CD *ou sur une circonférence* C. *On demande le lieu décrit par l'extrémité* M *de l'autre côté.*

(Voir nos 1349 et 1351.)

**Lieu 431. — III.**

**1376.** *Par un point* D *pris dans un cercle, on mène une corde quelconque* BDC; *sur cette corde prise pour hypoténuse, on construit un triangle rectangle* BAC *dont le sommet se projette sur l'hypoténuse au point* D. *Quel est le lieu du sommet* A?

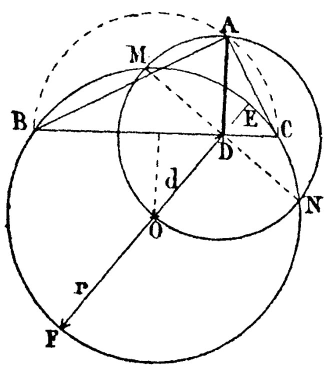



Fig. 877.

On a : $AD^2 = BD \cdot DC$.

Or le produit $BD \cdot DC$ est constant pour un point D donné; donc le lieu du point A est le cercle décrit du point D comme centre avec $\sqrt{BD \cdot DC}$ ou $\sqrt{r^2 - d^2}$ pour rayon.

*Remarque.* La droite MN, perpendiculaire à OD, est le diamètre du lieu, car

$$DM^2 = DE \cdot DF = DB \cdot DC.$$

**Lieu 431. — IV.**

**1377.** *Par le centre intérieur* I *de similitude de deux circonférences, on mène une droite* BCIC'B'; *les points extrêmes* B *et* B' *sont homologues; il en est de même des intermédiaires* C *et* C', *tandis que* B *et* C', C *et* B' *sont antihomologues.* (G., no 818.) *Quel est le lieu du sommet* A *du triangle rectangle* BAC', *dont le sommet se projette au point* I?

On retrouve la question précédente : le lieu demandé est le cercle AI; car le produit $IB \cdot IC'$ est constant. (G., no 818, 2o.)

**Lieu 431. — V.**

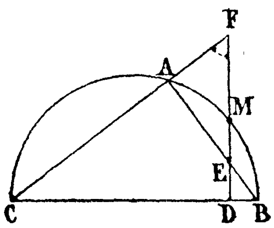



Fig. 878.

**1378.** *Sur l'hypoténuse* BC *d'un triangle rectangle* BAC, *on élève une perpendiculaire* DEF *qui coupe* BA *au point* E *et* CA *au point* F; *sur cette même perpendiculaire on prend une longueur* DM, *telle que* $DM^2 = DE.DF$. *Quel est le lieu du point* M?

Les triangles rectangles CDF et DBE sont semblables; car, outre les angles droits A et D, les deux angles B et F sont égaux comme ayant même complément C, et

l'on a : $\frac{CD}{DE} = \frac{DF}{BD}$, d'où $DE \,.\, DF = CD \,.\, BD$ ;

donc $DM^2 = BD \,.\, CD.$

Le lieu du point M est la circonférence décrite sur le diamètre BC.

**Lieu 431. — VI.**

**1379.** *Sur une perpendiculaire* DEF *à une droite* BDC, *on prend deux points* E, F *tels que* $DE \,.\, DF = BD \,.\, CD$ ; *quel est le lieu des points* A *où se coupent* BEA, CAF?

On prouve que le triangle BAC est rectangle.

**Lieu 431. — VII.**

**1380.** *Sur une droite* CB *on élève une perpendiculaire* DF, *on mène une droite* CF *et l'on prend* CA, *de manière que* $CA \,.\, CF = CD \,.\, CB$ ; *quel est le lieu du point* A?

C'est la circonférence BAC, inverse de la droite DF. (G., n° 826.)

On a aussi : $BE \,.\, BA = BD \,.\, BC$ et $BE \,.\, AE = DE \,.\, FE$ (fig. 878).

**Lieu 432.**

**1381.** *On donne un triangle isocèle, et l'on demande le lieu des points tels que la distance de chacun d'eux à la base du triangle soit moyenne proportionnelle entre les distances du même point aux deux autres côtés.*

(Voir *Méthodes,* n° 86.)

**Lieu 433.**

**1382.** *On donne un triangle* ABC; *sur la bissectrice extérieure de l'angle* A *on prend des distances* AD, AF, *telles que leur produit égale constamment* $AB \times AC$ ; *quel est le lieu géométrique des points* M *où les droites* DB *et* FC *se rencontrent ?*

Soit $AF \,.\, AD = AC \,.\, AB.$

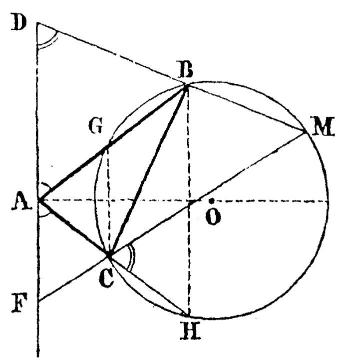


Fig. 879.

1re *Solution.* De l'*Exercice* 400 (n° 1298) on peut conclure que le lieu des points M est une circonférence qui passe par les points B et C, ainsi que par les symétriques G, H de ces points, par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle A; d'ailleurs la démonstration est très simple.

2e *Solution.* De l'égalité $AF \,.\, AD = AC \,.\, AB$ on déduit $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AF}$ ; donc les deux triangles ADB, ACF sont semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés homologues proportionnels; donc l'angle C = D, F = ABD. Mais l'angle M est le supplément de D + F, donc il égale l'angle BAD, supplément de D + ABD; par suite, le lieu des points M est le segment décrit sur BC, capable de l'angle DAB = M.

*Remarque.* Le point H, symétrique de B, donne l'angle H, égal à CAF, etc.; ainsi le lieu géométrique est la circonférence qui passe par B, C, G, H.

### Lieu 434.

**1383.** *Une sécante* AC, *menée à un cercle donné* O, *se meut autour d'un point fixe* A; *aux deux points d'intersection avec la circonférence, on mène deux tangentes* BM *et* CM. *On demande le lieu des points de concours de ces couples de tangentes.*

Menons MP perpendiculaire sur AO.

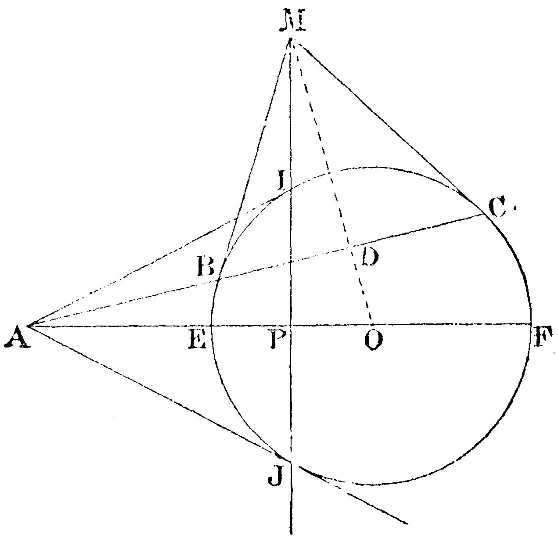


Fig. 880.

Les triangles rectangles ODA et OPM sont semblables, comme ayant en O un angle aigu commun; on a donc :

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OM}{OP},$$

d'où $OA . OP = OM . OD$ (1).

Or la droite OM est perpendiculaire à la corde des contacts BC. Dans le triangle rectangle OCM, on a donc (G., n° 247) :

$$\overline{OC}^2 = OM . OD. \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2) résulte

$OA.OP = \overline{OC}^2$; d'où $OP = \frac{\overline{OC}^2}{OA}$ quantité constante.

Donc le lieu du point M est la droite indéfinie MP menée perpendiculairement à AO, à une distance OP donnée par la relation

$$OP = \frac{\overline{OC}^2}{OA}.$$

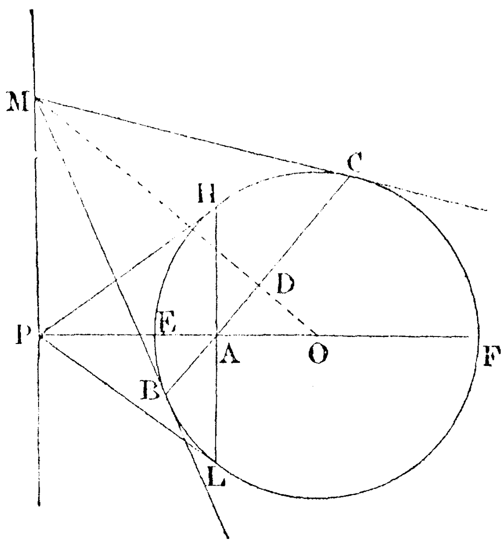


Fig. 881.

*Remarques.* 1° La partie intérieure IJ de cette droite (fig. 880) ne fait pas partie du lieu, ou du moins elle ne correspond pas à des tangentes réelles; mais la question peut être énoncée d'une manière plus générale (G., n° 802); et, dans ce cas, toute la droite appartient au lieu demandé.

2° Lorsque le point A est intérieur (fig. 881), le lieu MP est extérieur.

### Théorème R. 434. — I.

**1384.** *Étant donnés une droite indéfinie* MP *et un cercle* O, *si, d'un point* M *mobile sur* MP, *on mène des tangentes* MB *et* MC, *la corde* BC *des contacts passera constamment par le point* A. *Ce point est sur* OA *perpendiculaire à* MP, *à une distance* OA *donnée par la relation* $OA \cdot OP = OC^2$ *ou* $OA = \frac{OC^2}{OP}$ (fig. 880 et 881).

Rappelons que, par rapport au cercle O, le point A est appelé le *pôle* de la droite MP, et cette droite est appelée la *polaire* du point A. A chaque *pôle* correspond une *polaire*, et réciproquement. (G., n° 801.)

Lorsque le pôle A est extérieur au cercle, le point P est intérieur, et réciproquement. Si le pôle est sur la circonférence, la polaire correspondante est la tangente menée par le pôle lui-même.

**1385.** *Remarque.* Du théorème ci-dessus (n° 1384), MONGE a donné une démonstration très simple, basée sur la considération des *solides auxiliaires* (n° 169).

Remplaçons le cercle par une sphère de même centre et de même rayon ; chaque point de la droite peut être pris pour sommet d'un cône circonscrit à la sphère ; la ligne de contact est une circonférence.

Or, si par la droite donnée on mène deux plans tangents à la sphère, chaque courbe de contact passera par les deux points de contact ainsi obtenus; donc toutes les circonférences ont une corde commune, et le point où cette droite rencontre le cercle donné est un point par lequel passent les cordes des contacts de divers groupes de tangentes menées au cercle.

### Lieu 435.

**1386.** *Quel est le lieu du point milieu* M *de l'hypoténuse* BC, *d'un triangle rectangle* BAC *qui tourne autour de son sommet* A, *tandis que les sommets* B *et* C *décrivent une circonférence donnée?*

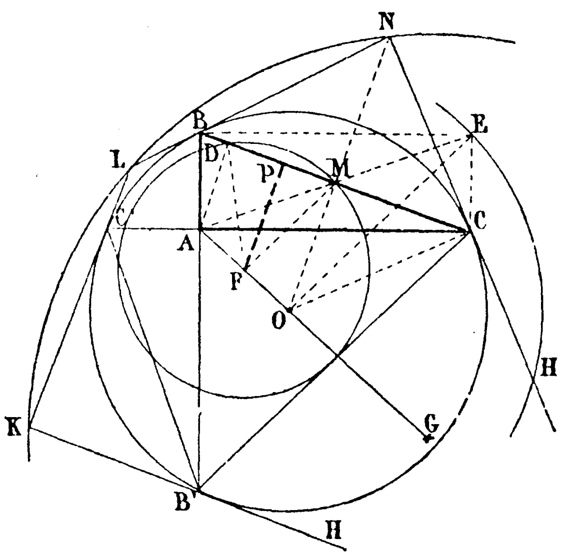


Fig. 882.

Il suffit de se reporter à un théorème du II$^e$ livre, n° 749, pour reconnaître que le lieu du point milieu M est le cercle décrit du point F, milieu de AO, avec le rayon FM.

Mais on peut rechercher directement ce lieu et donner ainsi une seconde démonstration du théorème précité.

Dans le triangle rectangle BAC, la médiane AM égale MC; or $OM^2 + MC^2 = OC^2 = r^2$; donc $AM^2 + OM^2 = r^2$.

Ainsi le lieu du point M est le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes A, O, est constante; donc le lieu est une circonférence décrite du point F, milieu de AO, avec le rayon FM (nº 69 ; voir aussi nº 1394, ci-après).

**Lieu 435. — I.**

**1387.** *Dans le triangle rectangle mobile* ABC (fig. 882), *quel est le lieu de la projection* D *du point* A *sur l'hypoténuse?*

On sait que c'est la même circonférence FM (nº 749). D'ailleurs, on peut le prouver comme il suit :

Abaissons la perpendiculaire FP ; elle tombe au milieu de MD, car F est le milieu de AO ; ainsi FD = FM ; donc...

**Lieu 435. — II.**

**1388.** *En considérant le triangle rectangle mobile* ABC, *quel est le lieu du sommet* E *du rectangle* BACE *construit sur* AC *et* AB?

$$AE = 2AM\ ,\quad AO = 2AF\ ;$$

donc c'est la circonférence décrite du centre O, avec OE pour rayon.

On peut en conclure les théorèmes suivants :

**Théorèmes 435. — III.**

**1389.** *Par les sommets d'un quadrilatère inscrit* BCB'C' *à diagonales rectangulaires, on mène des parallèles à ces diagonales; les sommets du rectangle ainsi formé se trouvent sur une circonférence concentrique à la première.*

En effet, le point E (fig. 882) est un des sommets de ce rectangle ; donc... (nº 1388).

**1390.** *Le rectangle circonscrit a sa surface maxima lorsque les droites* BB', CC' *sont égales entre elles.*

Dans ce cas, elles rencontrent OA sous des angles de 45º.

**1391.** *En faisant tourner autour du point* A *le système orthodiagonal* BB', CC', *tous les quadrilatères tels que* BCB'C' *ont même centre de gravité.*

Le centre commun de gravité est au tiers de OA, à partir du centre O. (*J. M. E.*, 1881, p. 256, nº 6; voir aussi 1879, p. 365, note par R. Malloizel, alors professeur à Sainte-Barbe.)

**Lieu 435. — IV.**

**1392.** *En considérant un triangle rectangle* ABC *mobile autour du sommet* A *de l'angle droit* (fig. 882) *et dont les points* B *et* C *glissent sur une circonférence de point* O, *quel est le lieu du point de concours des tangentes* BN, CN *menées à la circonférence donnée?*

Le triangle rectangle OCN fournit la relation

$$OM\,.\,ON = OC^2 = r^2\ ;$$

donc, par rapport à l'origine O, le point N décrit la figure inverse du cercle FM. Le lieu est donc un cercle facile à déterminer. (G., nº 827.)

*Le quadrilatère* HKLN, *formé par les quatre tangentes, est inscriptible ; ses diagonales passent par le point* A (nº 1274).

**Lieu 436.**

**1393.** *Lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux droites rectangulaires égale un carré donné.*

(Voir *Méthodes*, n° 72.)

**Lieu 437.**

**1394.** *Lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes égale un carré donné* $k^2$.

(Voir *Méthodes*, n° 69.)

Pour la différence des carrés, voir n° 1397.

**Lieu 437. — I.**

**1395.** *On donne deux points* A *et* B; *quel est le lieu des points* C *tels que* $2AC^2 + BC^2 = k^2$ ?

Prenons un point quelconque O sur AB; abaissons la perpendiculaire CD, et l'on a :

$$2 \,.\, AC^2 = 2 \,.\, AO^2 + 2 \,.\, CO^2 + 2 \,.\, 2AO \,.\, OD,$$
$$BC^2 = BO^2 + CO^2 - 2BO \,.\, OD \quad \text{(G., n}^{\text{os}}\ 251 \text{ et } 252).$$

La somme des deux membres de gauche est connue; elle égale $k^2$.

Pour que cette somme soit indépendante de la position du point C, il suffit d'éliminer la distance OD, qui particularise la position de C, Mais pour que $4AO \,.\, OD$ et $-2BO.OD$ donnent une somme algébrique nulle, il suffit que $BO = 2AO$, ou que $AO = {}^1/_3\, AB$.

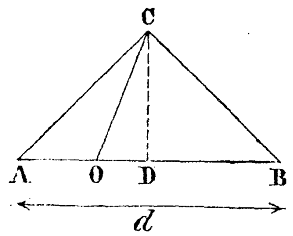


Fig. 883.

Prenons donc $AO = \frac{d}{3}$; $BO = \frac{2d}{3}$.

Dans ce cas, on a : $CO^2 = \frac{3k^2 - 2d^2}{9}$.

CO étant une quantité constante, le lieu est une circonférence décrite du point O, pris au tiers de AB, avec un rayon dont le carré égale $\frac{3k^2 - 2d^2}{9}$.

**Lieu 437. — II.**

**1396.** *On donne deux points* A *et* B; *quel est le lieu des points* C, *tels que* m *fois* $AC^2$ *plus* n *fois* $BC^2$ *égale* $k^2$ ?

Par extension de la question précédente et par analogie, divisons $d$ en parties inversement proportionnelles à $m$ et $n$; ainsi prenons :

$$AO = \frac{nd}{m+n}, \quad BO = \frac{md}{m+n},$$
$$m \,.\, AC^2 = m \,.\, AO^2 + m \,.\, CO^2 + 2mAO \,.\, OD;$$

ou

$$m \,.\, AC^2 = \frac{mn^2d^2}{(m+n)^2} + mCO^2 + \frac{2mnd}{m+n}\, OD,$$
$$nBC^2 = \frac{nm^2d^2}{(m+n)^2} + nCO^2 - \frac{2mnd}{m+n}\, OD;$$

donc $m \,.\, AC^2 + nBC^2$ ou $k^2 = \frac{mn(m+n)d^2}{(m+n)^2} + (m+n)CO^2$.

Ainsi le lieu est une circonférence, dont O est le centre ; le rayon est donné par
$$CO^2 = \frac{k^2}{m+n} - \frac{mn}{(m+n)^2}d^2.$$

*Remarque.* Le lieu demandé (nº 1396) dépend du *théorème de Stewart* (nº 1173.)

**Lieu 437. — III.**

**1397.** *Lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux points donnés égale un carré donné.*

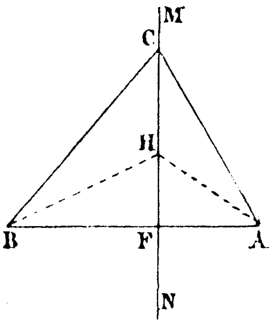


Fig. 884.

(Voir *Méthodes*, nº 71.)

D'ailleurs, on a directement :
$$BC^2 = BF^2 + CF^2 \quad \text{et} \quad AC^2 = AF^2 + CF^2,$$
d'où $BC^2 - AC^2 = BF^2 - AF^2 =$ constante.

**1397 a.** *Remarques.* 1º Pour un point quelconque de la perpendiculaire illimitée MN on a :
$$HB^2 - AH^2 = CB^2 - CA^2 = a^2 - b^2.$$

2º De la remarque précédente, on déduit une démonstration très élégante du théorème suivant : *Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

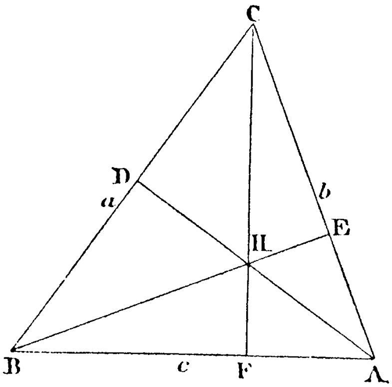


Fig. 885.

En effet, soit H le point de concours des hauteurs AD et BE ;
$$BH^2 - CH^2 = c^2 - b^2,$$
et
$$CH^2 - AH^2 = a^2 - c^2,$$
d'où
$$BH^2 - AH^2 = a^2 - b^2.$$

Ainsi le point H appartient à la hauteur CF ; donc, etc.

3º Cette démonstration s'applique très simplement en *Géométrie analytique*, avec des axes rectangulaires et un triangle placé d'une manière quelconque par rapport à ces mêmes axes ; tandis que la démonstration ordinaire n'est guère qu'une laborieuse vérification d'un théorème connu.

**Lieu 438.**

**1398.** *Lieu des points tels que, pour chacun d'eux, les tangentes menées à deux cercles donnés,* A *et* B, *soient égales.*

Soit M un point tel que les tangentes MC et MD soient égales. Menons aux points de contact les rayons AC et BD, puis les droites MA et MB.

Les triangles rectangles ACM et BDM donnent :
$$g^2 = c^2 + r^2 \quad \text{et} \quad f^2 = c^2 + r'^2,$$
d'où
$$g^2 - f^2 = r^2 - r'^2 \quad \text{quantité constante.}$$

Ainsi le lieu demandé est le même que *le lieu des points tels que la différence des carrés de leurs distances aux deux centres* A *et* B *soit d'une valeur donnée* $r^2 - r'^2$.

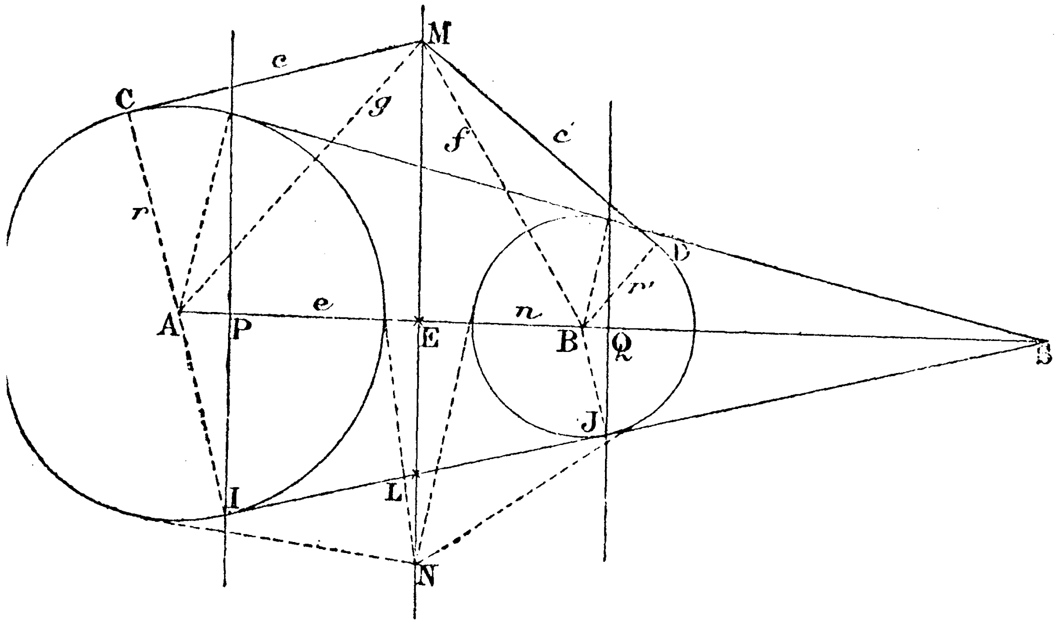



Fig. 886.

Or (nos 1397 et 71) ce lieu est une perpendiculaire indéfinie menée à la droite AB par un point E dont la position est déterminée par la relation

$$r^2 - r'^2 = e^2 - n^2 = (e+n)(e-n),$$

d'où
$$e - n = \frac{r^2 - r'^2}{e+n}.$$

*Remarques.* 1° La droite MN est l'*axe radical* des deux cercles. (G., appendice, nos 829 à 839. — *Exercices de Géométrie*, nos 1264, 1265 et surtout 1265 **a**.)

2° Le lieu MN passe au milieu L de la tangente commune IJ; par suite, l'axe radical MEN est équidistant des polaires PI, QJ du centre extérieur S de similitude ; il est de même équidistant des polaires du centre intérieur de similitude.

3° Pour tout point N de l'axe radical, les quatre tangentes sont égales.

4° *L'axe radical est le lieu des centres des cercles qui coupent orthogonalement deux cercles donnés* A *et* B, car tout cercle décrit d'un point de cet axe, de M par exemple, avec la tangente MC pour rayon, coupe orthogonalement les cercles AC et BD.

**Note.** L'auteur des *Problèmes de Géométrie et de Trigonométrie, avec la méthode à suivre pour la résolution des Problèmes de Géométrie, et les solutions,* Georges Ritt, ancien Inspecteur Général de l'Instruction publique, donne aussi à l'*Axe radical,* le nom de *Dishomologue,* qui rappelle la propriété d'être deux fois homologue. (*Loc. cit.,* 9e édition, 1894, p. 47.)

**Lieu 438. — I.**

**1399.** *Lieu des points d'où la différence des carrés des tangentes menées à deux cercles donnés est constante* (fig. 886).

Soient M un point du lieu et $MC^2 - MD^2 = k^2$.

On a donc : $g^2 - r^2 - (f^2 - r'^2) = k^2$,

d'où $g^2 - f^2 = k^2 + r^2 - r'^2$,

Or le membre de droite est constant; donc le lieu des points M est une droite perpendiculaire à AB (nº 71).

### Lieu 439.

**1400.** *Pour un point donné* D *pris dans un cercle, quel est le lieu des points* M *tels que la tangente* MT *égale la distance* MD ? (*Porismes d'Euclide*, p. 263.)

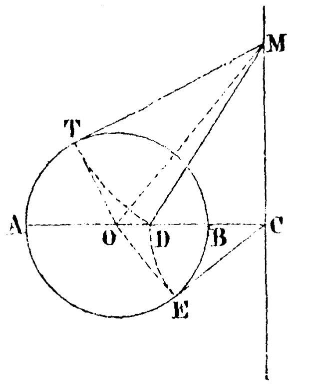


Fig. 887.

Soit M un point du lieu.

On a, par construction, $MD = MT$.

Projetons le point M sur le diamètre ADC :

$$MD^2 = MT^2 = MO^2 - R^2;$$

retranchons $MC^2$ de chaque membre de cette égalité, on trouve :

$$MD^2 - MC^2 = MO^2 - MC^2 - R^2,$$

ou $$DC^2 = OC^2 - R^2;$$

mais $OC^2 - R^2 = (OC + R)(OC - R) = AC \times BC$.

Donc le lieu des points M est la perpendiculaire MC, telle qu'on ait :

$$AC \cdot BC = DC^2.$$

### Lieu 440.

**1401.** *Quel est le lieu des centres des cercles qui coupent deux cercles donnés suivant des diamètres?* (*N. A.*, 1846, page 532, et *Problèmes*, par AMIOT et DESVIGNES, page 285, P. VII.)

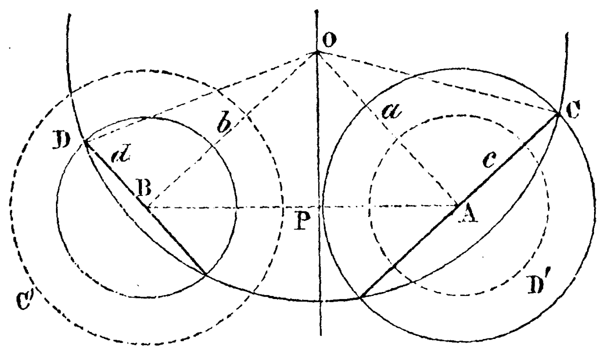


Fig. 888.

Soient $a$, $b$ les distances OA, OB des centres donnés à un point du lieu, et $c$, $d$ les rayons BD et AC; donc

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2,$$

d'où

$$c^2 - d^2 = b^2 - a^2.$$

Mais

$$b^2 - a^2 = BP^2 - AP^2.$$

(nº 1397 a)

Il suffit donc de diviser AB en deux parties dont la différence des carrés $BP^2$ et $AP^2 = c^2 - d^2$.

*Remarque.* Au plus grand rayon $c$ correspond la plus petite distance AP; donc le lieu OP est l'axe radical des cercles BC', AD' égaux aux cercles donnés.

### Lieu 440. — I.

**1402.** *Lieu des centres* O *des cercles qui coupent le cercle* A *suivant un diamètre, et qui coupent le cercle* B *orthogonalement.*

On a : $OC = OD$;

donc $b^2 - d^2 = a^2 + c^2$,

d'où $b^2 - a^2 = d^2 + c^2$.

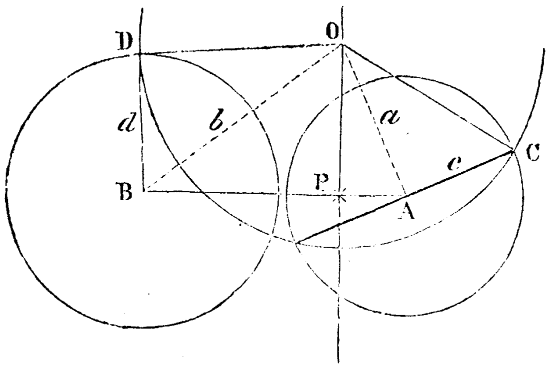



Fig. 889.

La différence des carrés $b^2$ et $a^2$ est encore constante ; le lieu demandé est donc une perpendiculaire OP à la ligne des centres, de manière que

$$BP^2 - AP^2 = c^2 + d^2.$$

Mais il faut connaître le problème suivant :

*Diviser une droite* AB *en deux parties dont la différence des carrés égale une quantité donnée* (n° 1429, ci-après).

### Cas particuliers.

**1403.** *Lieu des centres des cercles qui passent par un point* B *et qui coupent un cercle* A *suivant un diamètre.*

$d$ est nul ; on n'a plus que :

$$b^2 - a^2 = c^2.$$

Le lieu est encore une droite perpendiculaire à la ligne des centres.

**1404.** *Lieu des centres des cercles qui coupent orthogonalement un cercle* B *et qui passent par un point* A.

Le rayon $c$ est nul, et l'on a :

$$b^2 - a^2 = d^2.$$

**1404 a. Note.** Les théorèmes précédents (nos 1398, 1401 et 1402) permettent de résoudre un grand nombre de questions particulières : le premier, 1398, donne le moyen de décrire un cercle qui coupe orthogonalement trois cercles donnés, et le second, 1401, de décrire un cercle qui en coupe trois autres suivant un diamètre de chacun d'eux. (Voir ci-après, nos 1478 à 1488.)

### Lieu 440. — II.

**1404 b.** *Quel est le lieu des points tels qu'en joignant chacun d'eux aux sommets d'un triangle équilatéral, les trois céviennes déterminent six segments, dont le produit de trois d'entre eux non consécutifs, égale le cube du côté du triangle équilatéral.*

C'est le cercle circonscrit. (*J. M. E.*, 1884, p. 210 et 211. — Ch. Derigny.)

### Lieu 441.

**1405.** *Quel est le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux sommets d'un polygone régulier quelconque soit égale à un carré donné* $k^2$ ?

Le cas le plus difficile est celui où le polygone régulier a un nombre impair de côtés; d'ailleurs la démonstration étant la même, quel que soit ce nombre impair, on peut donc se borner au triangle équilatéral.

Soient M un point du lieu, $a$ le rayon du cercle circonscrit et $m$ la distance OM.

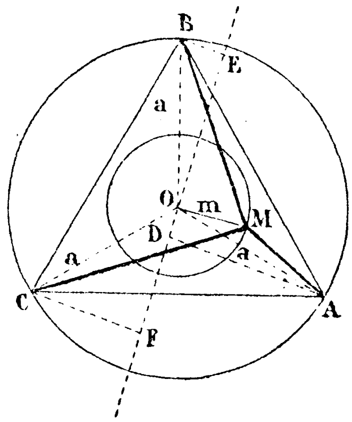



Fig. 890.

Projetons les sommets sur une droite perpendiculaire à OM.

Les théorèmes relatifs au carré du côté opposé à un angle aigu, ou à un angle obtus, donnent les relations suivantes :

Triangle AOM, $AM^2 = a^2 + m^2 - 2m.\, AD$,

car AD est la projection du côté AO sur la direction du côté OM ;

Triangle BOM, $BM^2 = a^2 + m^2 + 2m\,.\,BE$ ;

Triangle COM, $CM^2 = a^2 + m^2 + 2m\,.\,CF$ ;

d'où $AM^2 + BM^2 + CM^2$,

ou $k^2 = 3a^2 + 3m^2 + 2m(BE + CF - AD)$.

Or, pour un axe quelconque EDF (nº 750) mené par le centre des moyennes distances des sommets d'un polygone, la somme des perpendiculaires qui tombent d'un côté de l'axe égale celle des perpendiculaires qui tombent de l'autre côté; donc la parenthèse est nulle, et l'on a :

$$k^2 = 3a^2 + 3m^2, \text{ d'où } m^2 = \frac{k^2}{3} - a^2 \text{ quantité constante ;}$$

donc le lieu du point M est le cercle décrit du centre O avec $m$ pour rayon.

### Lieu 441. — I.

**1406.** *Quel est le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux trois sommets d'un triangle égale un carré donné* $k^2$?

C'est une circonférence décrite du point de concours des médianes avec une longueur donnée par

$$m^2 = \frac{k^2 - (a'^2 + b'^2 + c'^2)}{3},$$

lorsqu'on représente par $a'$, $b'$, $c'$ les $^2/_3$ de chaque médiane.

Théorème. *Le lieu des points dont la somme des carrés des distances à tous les sommets d'un polygone quelconque est constante, est aussi une circonférence ayant pour centre le centre des moyennes distances de tous les sommets.*

Voir Bobillier, *Cours de Géométrie,* IIe section, § 4, prop. 8.

### Lieu 441. — II.

**1407.** *Quel est le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux côtés d'un polygone régulier égale un carré donné* $k^2$?

On sait que si l'on projette un point sur des droites concourantes formant les angles au centre d'un polygone régulier, on forme un nouveau polygone régulier en joignant deux à deux les projections obtenues, la question proposée se ramène à la question déjà résolue (nº 1405). En effet, projetons le centre O sur les trois droites MD, ME, MF : le triangle JKL sera équilatéral, en nous bornant à considérer un triangle équilatéral ABC.

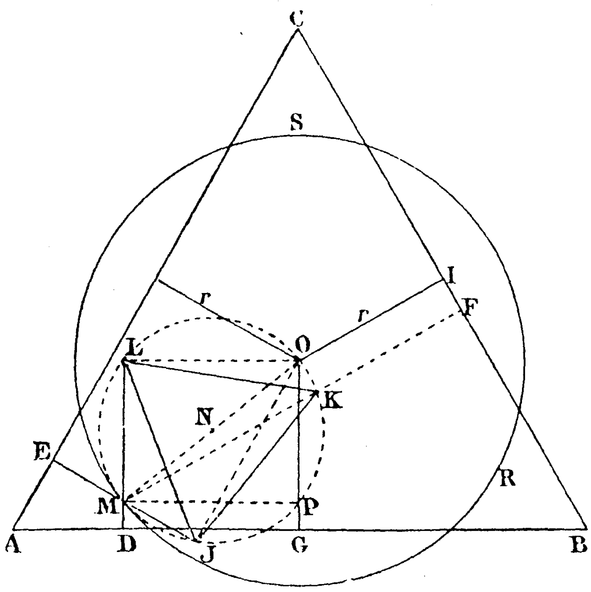



Fig. 891.

Soit $OI = OG = r, \quad OM = m.$

On a : $MD = r - ML$, d'où $MD^2 = r^2 - 2rML + ML^2$;

$ME = r - MJ$, » $ME^2 = r^2 - 2rMJ + MJ^2$;

$MF = r + MK$, » $MF^2 = r^2 + 2rMK + MK^2$;

d'où $MD^2 + ME^2 + MF^2$,

ou $k^2 = 3r^2 + (ML^2 + MJ^2 + MK^2) + 2r(MK - ML - MJ).$

Le dernier terme est nul; l'avant-dernier est la somme des carrés des distances d'un point M du cercle circonscrit aux sommets du triangle équilatéral ; ainsi

$$ML^2 + MJ^2 + MK^2 = 3MN^2 + 3MN^2 = 6MN^2 = {}^3/_2 MO^2 = {}^3/_2 m^2.$$

Ainsi $\dfrac{3m^2}{2} + 3r^2 = k^2$; d'où $m^2 = \dfrac{2k^2}{3} - 2r^2$, quantité constante.

Le lieu du point M est un cercle concentrique au cercle circonscrit ABC.

**1407 a.** *Cas particuliers.* 1° Le minimum correspond à $m = 0$. Le cercle MRS se réduit à son centre ; dans ce cas, la formule

$$k^2 = \frac{3m^2}{2} + 3r^2$$

se réduit à $k^2 = 3r^2$, ainsi qu'on le vérifie directement.

2° Pour obtenir le cercle circonscrit, il suffit de prendre $m = AO = 2r$,

On a : $k^2 = 6r^2 + 3r^2 = 9r^2,$

comme on le vérifie directement, car la somme des carrés des distances du point A aux trois côtés du triangle équilatéral se réduit à

$$k^2 = AI^2 = (3r)^2 = 9r^2.$$

### Lieu 441. — III.

**1407 b.** *Quel est le lieu des points* M *dont la somme des troisièmes puissances des distances aux quatre côtés d'un carré est constante et égale une valeur donnée?*

C'est une circonférence ayant pour centre le point O de concours des diagonales.

En désignant par $a$ la moitié du côté du carré et par $d$ la distance OM, on trouve que la somme des cubes des quatre distances a pour valeur $2a(2a^2+3d^2)$, valeur constante pour tout point de la circonférence. (Voir n° 1773 j, note, et *N. A.*, 1910, p. 424, n° 2130. BARISIEN.)

### Lieu 442.

**1407 c.** *Sur une droite illimitée* XX′ *on prend chaque point,* A *par exemple, pour centre d'un cercle de rayon donné* r. *D'un point* O *pris sur* XX′ *comme centre fixe, mais avec un rayon variable, on décrit un cercle qui coupe le premier en* B *et* C; *quel est le lieu de ces points lorsque le rayon variable est égal à l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés le rayon donné* r *et la distance* AO?

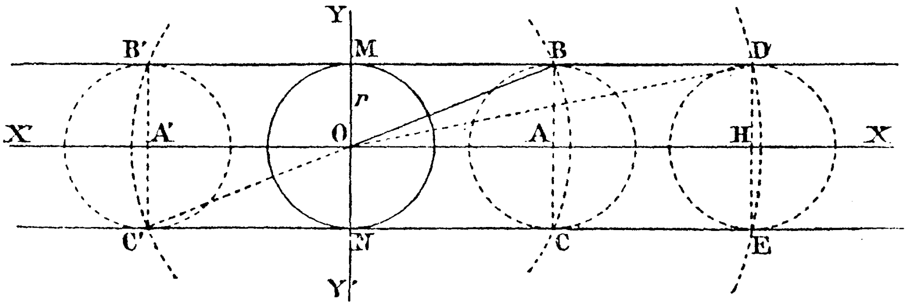



Fig. 892.

Il est évident que le lieu comprend deux droites BB′, CC′ parallèles à OX; mais ce lieu comprend aussi le cercle décrit du centre O, avec $r$ pour rayon; car chaque point de ce cercle est commun au cercle de rayon constant mais à centre variable, et au cercle de centre fixe mais de rayon variable.

**1407 d. Note.** 1° Chaque cercle de rayon variable donne quatre points d'intersection B et C, B′ et C′; aussi l'ensemble du lieu est du quatrième degré. Dans le cas particulier où la droite XX′ passe par le centre fixe O, l'équation du lieu se décompose en plusieurs équations partielles : l'une d'elles, $x^2+y^2=r^2$, est l'équation du cercle MN, et l'autre partie, $y^2-r^2=0$, ou $(y+r)(y-r)=0$, correspond aux deux droites MD, NE.

2° Lorsque XX′ ne passe pas par le centre fixe O, l'équation du quatrième degré ne peut pas se décomposer en plusieurs autres; le lieu a la droite YY′ pour axe de symétrie.

3° Le lieu donné ci-dessus comme exemple de lieu composé est la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'intersection d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, par un cylindre ayant pour directrice le cercle de gorge de l'hyperboloïde, et dont les génératrices sont parallèles à deux génératrices parallèles entre elles de l'hyperboloïde.

4° Il serait facile de trouver d'autres lieux composés, en considérant les projections de l'intersection de deux quadriques dans certains cas particuliers.

5° Le lieu étudié dans les *Méthodes*, n° 85 **a**, est du troisième degré. Lorsque le triangle ABC n'est point isocèle, on obtient une courbe continue, une *cubique*.

6° Le lieu étudié précédemment, n° 1361, lorsque les segments MO, ON *ne sont pas en ligne droite et ont un point commun*, est aussi une *cubique* : c'est une *strophoïde oblique* dont le point double est au point O. (*J. M. S.*, 1895, p. 98. Ernest LEBON, professeur au lycée Charlemagne.) Lorsque les segments OM, ON sont égaux, le lieu se décompose : il comprend la *bissectrice* de l'angle MON, lieu d'où les segments sont vus sous des angles égaux, et la *circonférence* circonscrite au triangle MON, et d'où les segments sont vus sous des angles complémentaires. (*N. A.*, 1850, p. 249, n° 2. MARTOREY, élève de CATALAN.) On retrouve le même lieu dans une question très intéressante du VIII<sup></sup>e livre. (Voir ci-après, n° 2166 **a**.)

7° Les *Exercices de Géométrie descriptive* (4e édition, n° 1232 A) donnent un exemple d'*enveloppe composée*. (M. BROCARD a bien voulu le citer, *I. M.*, 1910, p. 115, 116, q. 3631. *Recta*.)

# PROBLÈMES

## Lignes proportionnelles.

### Problème 443.

**1408.** *Par un point donné* E, *mener une droite* EF *qui passe par le point de concours de deux droites qu'on ne peut pas prolonger.*

1re *Construction*. Les trois droites AB, CD et EF (fig. 893), devant concourir en un même point, divisent en parties proportionnelles deux parallèles quelconques AE et BF qui les traversent. (G., n° 232.)

On tracera donc par le point donné E, une transversale quelconque EA, et une autre droite quelconque BF parallèle à EA; on cherchera le quatrième terme de la proportion $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF \text{ ou } x}$, ce qui déterminera un second point F de la droite demandée.

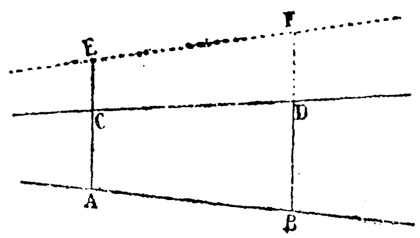



Fig. 893.

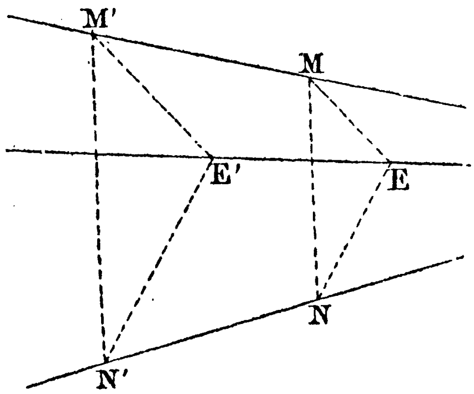



Fig. 894.

2e *Construction*. La considération des *solides auxiliaires* conduit à une construction très rapide (fig. 894) :

On mène deux parallèles MN, M'N' qui coupent les droites données; on joint le point E aux points M et N; puis, par M' on mène une parallèle à ME, par N' une parallèle à NE; soit E' le point de rencontre des deux droites M'E', N'E'; la ligne EE' sera la droite demandée.

**Problème 443. — I.**

**1409.** *On donne trois droites concourantes et un point A. Par ce point, mener une transversale telle que les segments interceptés* BC, CD *soient entre eux dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

En supposant le problème résolu et $\frac{BC}{CD} = \frac{m}{n}$, on voit que le même rapport aura lieu pour une parallèle quelconque B′C′D′. Or, pour mener cette dernière ligne, on peut prendre sur une droite quelconque, passant par le sommet O, deux grandeurs telles qu'on ait $\frac{OM}{ON} = \frac{m}{n}$, puis tracer des parallèles MB′, ND′ à OC, et joindre B′ à D′. Enfin AD parallèle à B′D′ est la droite demandée.

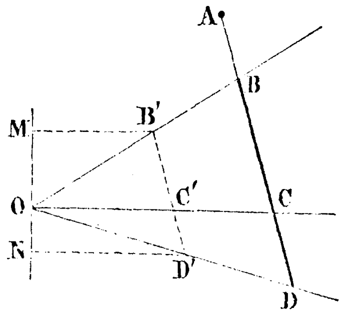


Fig. 895.

**Problème 443. — II.**

**1410.** *Trouver une ligne qui soit à une ligne connue dans le même rapport que deux carrés donnés.*

(Voir *Méthodes*, n° 294 **h**.)

**Problème 443. — III.**

**1410 a.** *Trouver deux lignes qui soient entre elles dans le rapport de deux cubes donnés.*

On peut recourir à un théorème déjà démontré (n° 1168); d'ailleurs l'intérêt que présente ce problème nous engage à le résoudre complètement, sans renvoyer au théorème rappelé.

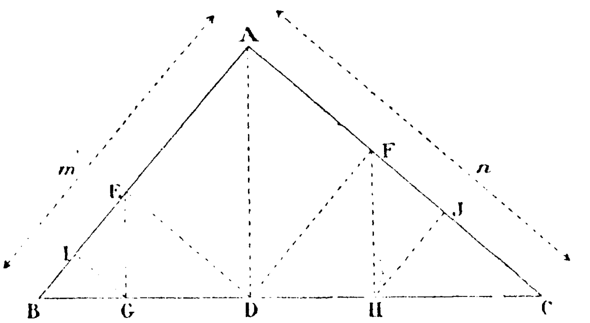


Fig. 896.

Soient $m$ et $n$ les côtés des cubes donnés.

Construisons un triangle rectangle BAC, ayant pour côtés de l'angle droit les longueurs données $m$ et $n$.

Abaissons la perpendiculaire AD sur l'hypoténuse et les perpendiculaires DE sur AB et DF sur AC.

On aura : $\frac{BE}{CF} = \frac{m^3}{n^3}$.

En effet, dans les triangles rectangles ADB, ADC, on a :

$$BE = \frac{BD^2}{AB} \quad \text{ou} \quad BE = \frac{BD^2}{m},$$

$$CF = \frac{DC^2}{AC} \quad \text{ou} \quad CF = \frac{CD^2}{n},$$

d'où
$$\frac{BE}{CF} = \frac{BD^2 . n}{CD^2 . m}.$$

Remplaçons $\frac{BD^2}{CD^2}$ par le rapport $\frac{AB^4}{AC^4}$ ou $\frac{m^4}{n^4}$; on aura :
$$\frac{BE}{CF} = \frac{m^4 . n}{n^4 . m} = \frac{m^3}{n^3}.$$

**1410 b.** *Remarque.* En abaissant les perpendiculaires EG, FH, GI, HJ, on a :
$$\frac{BG}{CH} = \frac{m^4}{n^4}, \quad \frac{BI}{CJ} = \frac{m^5}{n^5}, \text{ etc.}$$

**1410 c. Note.** M. BOUBALS, professeur à l'École du génie, à Montpellier, en 1885, a donné un procédé très simple pour diviser la base d'un triangle en segments proportionnels et inversement proportionnels aux puissances quelconques des cotés adjacents. (*J. M. E.*, 1885, p. 31 et 204.)

On peut voir aussi un article de M. D'OCCAGNE (*N. A.*, 1883, p. 497), ainsi que la solution donnée antérieurement dans ce même recueil, par M. POUDRA, chef d'escadron d'état-major en retraite. (*N. A.*, 1856, p. 217.)

**Problème 443. — IV.**

**1411.** *On donne un point et deux droites ; par le point donné, mener une sécante limitée aux droites et qui soit divisée par ce point dans un rapport donné.*

(Voir *Méthodes*, n° 94.)

**Problème 444.**

**1412.** *On donne un point* O, *une droite et une circonférence; par le point donné, mener une sécante* MON, *limitée aux deux lignes et telle que les segments interceptés* OM, ON *soient entre eux dans un rapport donné.*

(Voir *Méthodes*, n° 95.)

**Problème 444. — I.**

**1413.** *Les droites sont remplacées par des circonférences.*

(Voir *Méthodes*, n° 96.)

**Problème 445.**

**1414.** *Étant données deux circonférences sécantes, mener par un des points d'intersection une sécante qui soit divisée par ce point dans un rapport donné.*

Ce c'est qu'un cas particulier du problème précédent (n° 1413); néanmoins il est utile de connaître une solution directe très simple.

(Voir *Méthodes*, n° 138.)

**Problème 445. — I.**

**1415.** *Par un point* A *donné dans le plan du cercle* O, *mener une sécante* AC *telle que les distances* AB *et* AC *du point donné aux deux intersections soient dans un rapport donné,* $^2/_5$, *par exemple.*

La question a été traitée d'une manière générale (*Méthodes*, nº 96).

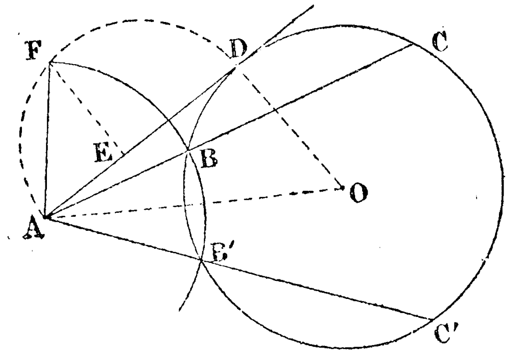



Fig. 897.

Voici une solution particulière. Menons la tangente AD. On a

$$AB \cdot AC = AD^2;$$

on doit avoir aussi :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2}{5},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$AB^2 = \frac{2}{5} AD^2.$$

De là on conclut la construction suivante : prendre AE égal aux $\frac{2}{5}$ de AD ; sur AD, décrire une demi-circonférence; mener EF perpendiculaire sur AD ; du point A, avec AF pour rayon, couper la circonférence donnée, et mener ABC, qui répond à la question.

En effet, $AB^2 = AF^2$ ; et le carré de la corde AF est au carré du diamètre AD, comme la projection AE de cette corde est au diamètre entier. (G., nº 258, 1º.) On a donc : $AB^2 = \frac{2}{5} AD^2$;

si l'on divise par la relation connue $AB \cdot AC = AD^2$,

il vient : $$\frac{AB}{AC} = \frac{2}{5}.$$

*Remarques.* 1º La sécante menée par les points A et B' serait égale à la première, et satisfera également à la condition.

2º La solution par l'emploi des *lieux géométriques* est beaucoup plus simple, soit comme construction, soit comme justification.

**Problème 445. — II.**

**1416.** *On donne un angle* PyZ *et une circonférence ; mener une droite perpendiculaire à* Py *et telle que le segment compris entre la circonférence et* Py *soit la moitié du segment compris entre* Py *et* Zy.

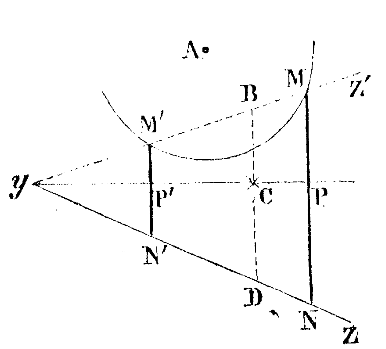



Fig. 898.

On mène une perpendiculaire quelconque, et l'on prend

$$BC = \frac{1}{2} CD.$$

On a : $MP = \frac{1}{2} PN$, $M'P' = \frac{1}{2} P'N'$.

**Problème 445. — III.**

**1417.** Questions analogues. *Pour un rapport quelconque* $\frac{MP}{PN} = \frac{m}{n}$ *et lorsque* MN *doit être parallèle à une droite donnée.*

### Problème 446.

**1418.** *On donne une circonférence et une corde* AB; ***déterminer sur la circonférence un** point* C *dont **le rapport** des distances* CA, CB ***égale** un **rapport donné*** $\frac{m}{n}$.

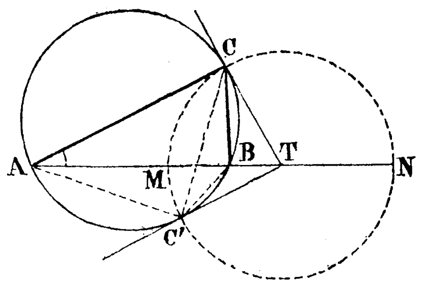


Fig. 899.

1re *Solution*. Voir *Méthodes*, nº 42.

2e *Solution. Emploi des lieux géométriques*. Déterminons les points conjugués M et N tels qu'on ait :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}. \quad (G., n^o\ 304.)$$

La circonférence décrite sur MN comme diamètre fait connaître les points C et C'. (G., nº 307.)

3e *Solution*. (Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie*, tome II, p. 280.)

Soit $$\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}, \text{ rapport donné (fig. 899).}$$

Menons la tangente CT. Les triangles ACT, TCB sont semblables, car l'angle T est commun et l'angle BCT = BAC.

Donc $$\frac{AC}{CB} = \frac{CT}{BT}, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{AT}{CT}.$$

Nous pouvons remplacer $\frac{AC}{BC}$ par $\frac{m}{n}$. En multipliant, terme à terme, les deux proportions et supprimant le facteur CT commun aux deux termes du second rapport, on trouve :

$$\frac{AT}{BT} = \frac{m^2}{n^2},$$

d'où $$\frac{AT - BT}{BT} = \frac{m^2 - n^2}{n^2};$$

mais $$AT - BT = AB,$$

donc $$\frac{BT}{AB} = \frac{n^2}{m^2 - n^2}.$$

Il faut trouver une ligne BT qui soit à AB dans le même rapport que deux carrés donnés. (G., nº 346, II.)

### Problème 446. — I.

**1419.** *On donne un point* A *sur un diamètre dont* B ***est** une des extrémités; **déterminer sur** la circonférence un **point*** C, *tel que le rapport de ses distances aux points* A ***et*** B *égale un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

*Discuter le problème.*

Il faut recourir au lieu des points dont le rapport des distances aux points A, B égale $\frac{m}{n}$. (G., n° 307.)

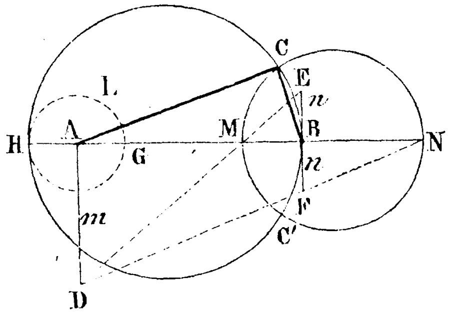


Fig. 900.

On détermine d'abord les points conjugués M, N (G., n° 304), et l'on décrit la circonférence dont MN est le diamètre.

On a : $\frac{AC}{BC} = \frac{m}{n}$.

*Discussion.* **a.** L'emploi du lieu donne une solution tout à fait générale ; ainsi la circonférence peut être dans une position quelconque par rapport aux points A et B ; elle peut même être remplacée par une courbe quelconque.

**b.** En reprenant les données de la question, on reconnaît qu'il y a deux points symétriques C et C'.

**c.** Quand $m$ est $> n$, il y a toujours deux solutions, car le point M est entre A et B, tandis que N est hors de la circonférence; *donc le cercle* MN coupe le cercle BH.

**d.** Quand $m$ est $< n$, le rapport $\frac{m}{n}$ ne doit pas descendre au-dessous d'une certaine *valeur minima*, car il faut que le point N ne soit pas dans la circonférence HB.

Donc le minimum de $\frac{m}{n}$ est donné par $\frac{HA}{HB}$.

En prenant $\frac{GA}{GB} = \frac{HA}{HB}$, le lieu HLG est tangent au cercle donné.

Les deux points C, C' se confondent en un seul H.

**e.** Les points A et B peuvent avoir une position quelconque, non seulement sur le diamètre HB, *mais même une position quelconque dans le plan du cercle donné.* Le problème aura deux solutions, une seule, ou aucune, suivant que le lieu géométrique MCNC' coupera en deux points la ligne donnée HCBC', lui sera tangente, ou ne la rencontrera pas.

### Problème 447.

**1420.** *Dans le plan d'un triangle, mener une droite telle que les perpendiculaires abaissées des sommets du triangle sur cette droite soient proportionnelles à des grandeurs données* l, m, n. (GUILMIN.)

1re *Solution.* Admettons qu'on ait :

$$\frac{AL}{l} = \frac{BM}{m} = \frac{CN}{n}.$$

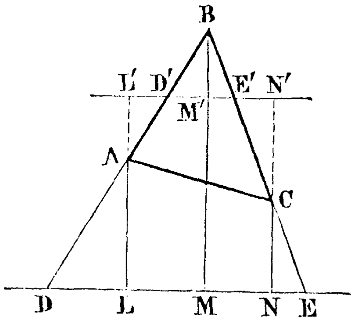


Fig. 901.

Les triangles semblables DAL, DBM donnent : $\frac{DB}{DA} = \frac{BM}{AL} = \frac{m}{l}$,

d'où $$\frac{DB - DA}{DA} = \frac{m - l}{l},$$

d'où $$DA = AB \cdot \frac{l}{m - l}. \qquad (1)$$

De même,
$$\frac{EB}{EC} = \frac{BM}{CN} = \frac{m}{n},$$
$$\frac{EB - EC}{EC} = \frac{m - n}{n},$$
d'où
$$EC = BC \cdot \frac{n}{m - n}.$$

On peut donc construire les longueurs AD, CE et joindre D au point E.

*Remarque.* Lorsque la droite demandée doit couper le triangle,

on a :
$$\frac{D'B}{D'A} = \frac{BM'}{AL'}, \quad \frac{D'B + D'A}{D'A} = \frac{m + l}{l},$$
d'où
$$AD' = AB \cdot \frac{l}{l + m};$$
de même,
$$CE' = BC \cdot \frac{n}{m + n}.$$

On peut résoudre le problème d'une manière plus générale, en procédant comme il suit :

**1420 a.** 2e *Solution.* Si l'on décrit deux circonférences des centres A et B avec des rayons respectivement proportionnels à $l$ et $m$, et qu'on détermine leurs centres de similitude, soit L le centre extérieur et L′ le centre intérieur, les distances des points A et B à toute droite menée par L ou L′ seront dans le rapport de $l$ à $m$; car la détermination des points conjugués de A et B ne dépend que du rapport $\frac{l}{m}$. (G., nos 304 et 305; *Ex de G.*, no 1257.)

De même pour B et C, soient M et M′ les points conjugués relatifs au rapport donné $\frac{m}{n}$, le point M étant le centre extérieur de similitude, et M′ l'intérieur.

Enfin, pour CA, soient N et N′ les points conjugués relatifs au rapport $\frac{n}{l}$.

D'après le *théorème de d'Alembert* (no 1260), les six centres donnent lieu aux quatre droites LMN, LM′N′, L′MN′, L′M′N.

Or *chacune de ces lignes répond à la question proposée* (no 1420).

Il y a donc quatre solutions ; la seule droite LMN est extérieure au triangle ABC.

**Note.** Le problème précédent (no 1240) est emprunté aux *Exercices de Géométrie* de M. Guilmin (livre III, no 82).

* M. Guilmin, ancien professeur de l'Université, a été un auteur fécond d'ouvrages élémentaires de mathématiques : *Géométrie*, *Algèbre*, etc.

## Problème 448.

**1421.** *On donne deux points* A *et* B *sur une circonférence, ainsi qu'une corde fixe* EF; *déterminer sur la circonférence un point* C *tel* *que les cordes* CA, CB *interceptent sur la corde fixe* EF, *à partir du milieu* O, *des segments* OM, ON *qui soient entre eux dans un rapport donné.*

(Voir *Méthodes*, n° 275.)

**Problème 449.**

**1422.** *On donne un triangle quelconque* ABC ; *on demande de mener, par un point de la base, des droites limitées aux deux côtés, de manière que la somme* OM + ON *ait une longueur donnée, et que pour tout autre point de la base, les parallèles menées aux droites* OM, ON *aient constamment pour somme la longueur donnée.*

(Voir *Méthodes*, n° 44.)

**Problème 450.**

**1423.** *Par un point* L *pris sur la base d'un triangle* ABC, *mener la droite* LMN *qui détermine deux segments égaux* AM *et* BN.

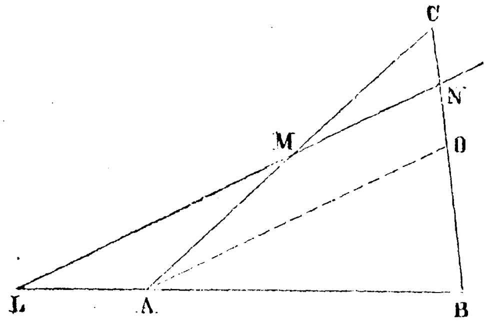



Fig. 902.

Le théorème des transversales donne la relation

$$\frac{AM}{CM} \cdot \frac{CN}{BN} \cdot \frac{BL}{AL} = 1.$$

Supprimons les facteurs égaux AM et BN, puis divisons les deux membres de l'égalité par $\frac{BL}{AL}$ ; on trouve $\frac{CN}{CM} = \frac{AL}{BL}$.

Or le rapport $\frac{AL}{BL}$ est connu. Il suffit donc de prendre deux grandeurs CO, CA proportionnelles à AL, BL ; puis, par L, mener une parallèle LMN à AO.

**Problème 450 — I.**

**1423 a.** *Couper deux droites données* AX, BY, *par une droite* MN, *de manière que* AM, BN *soient dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

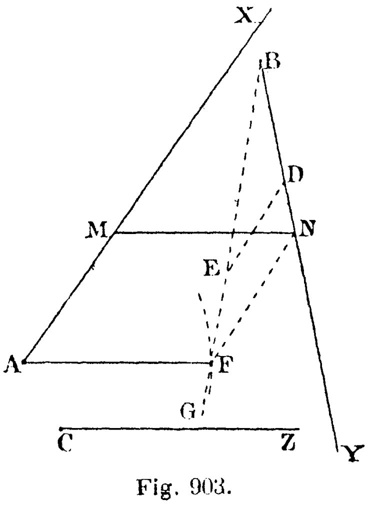



Fig. 903.

1° *La sécante* MN *doit être parallèle à une droite donnée* CZ.

2° *La sécante* MN *doit avoir une longueur donnée* l.

Soit le problème résolu, MN parallèle à CZ, ou $MN = l$ et $\frac{AM}{BN} = \frac{m}{n}$ ; en menant les parallèles NF à AM et AF à MN, on reconnaît que tout revient à déterminer le point F, d'où la construction suivante :

On prend BD quelconque; par D, on mène une parallèle à AX et l'on prend DE, de manière qu'on ait $\frac{DE}{BD} = \frac{m}{n}$ et l'on mène BEG.

1° Par A, on mène AF parallèle à CZ, puis FN parallèle à AX et NM parallèle à CZ.

2° Du point A, comme centre, avec un rayon égal à $l$, on coupe BG en F, et l'on termine comme précédemment.

**1423 b.** *Remarques.* 1° On suppose que la direction des segments AM, BN est donnée; s'il en était autrement, le n° 1 comporterait quatre solutions.

2° Avec des directions données, le n° 2 comporte généralement deux solutions; il n'y en a qu'une seule, lorsque l'arc décrit du centre A est tangent à BG; aucune si $l$ est moindre que la distance du point A à BG.

### Problème 450. — II.

**1423 c.** *On donne deux droites* AX, BY; *on demande de les couper par une troisième droite* MN *de longueur donnée* l, *de manière que la somme des segments* AM + BN *ait une valeur donnée* d.

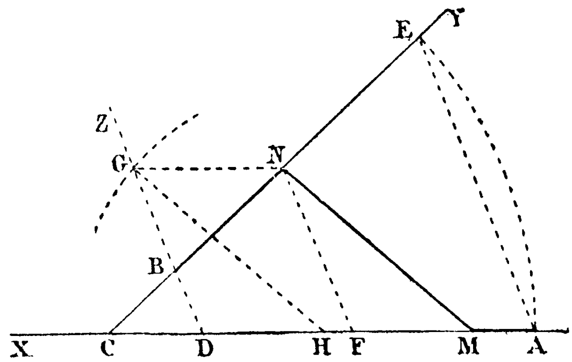


Fig. 904.

En supposant le problème résolu, on arrive à la construction suivante :

En prenant CE = CA et CD = CB, puis CF = CN, on a DF = BN.

La somme des segments ou $d$ revient à AM + DF, donc FM est connu, il en est de même du côté MN = $l$ et de l'angle F; on peut donc construire un triangle DHG égal à FMN.

Ainsi prenons DH = AD — $d$; du point H, comme centre, avec $l$ pour rayon, coupons DZ en G, menons GN parallèle à CA, puis NM parallèle à GH; on aura AM + BN = $d$ et MN = $l$.

### Problème 451.

**1424.** *On donne une circonférence, un diamètre fixe* AB *et une droite* xy; *mener une corde parallèle à* xy *et telle que sa projection sur le diamètre fixe ait une longueur donnée* l.

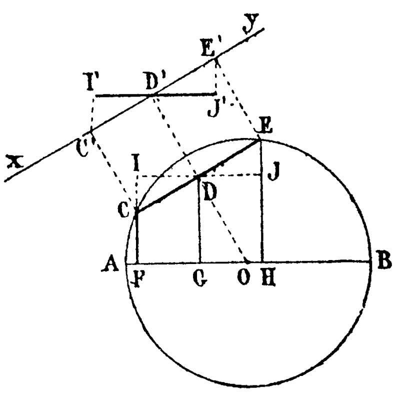


Fig. 905.

Supposons le problème résolu, FH = $l$.

Par le milieu D de la corde, menons une ligne IJ égale et parallèle à FH.

Une *translation parallèle* conduit immédiatement à la solution suivante.

Il faut mener ODD'; sur une parallèle à AB, prendre :

$$D'I' = D'J' = \frac{l}{2}.$$

Élever les perpendiculaires J'E', I'C'; on aura D'C' = D'E', et reporter C'E' en CE à l'aide des projetantes E'E, C'C parallèles à D'D.

### Problème 451. — I.

**1424 a.** *Par un point* P, *mener une sécante telle que la corde* AB *interceptée par une circonférence de centre* O, *se projette sur le diamètre mené par* P *suivant une droite* A'B' = l.

Pour résoudre le problème, on considère la polaire du point P. On peut voir à ce sujet les *Questions de Géométrie* de Desboves, 2e édition, p. 344, ou l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1899, p. 165, no 1412. La solution a été indiquée par MM. Espanet, E. Fauquembergue, G. Jung, J. Lebel et P. Tannery.

### Problème 452.

**1425.** *Étant donné un triangle* ABC, *on demande de mener par le sommet* C *une droite* CE *telle que la somme des projections des côtés* CA *et* CB *sur cette droite soit égale à une longueur donnée* l.

*On discutera le problème.* (Concours général, classe de philosophie. — *N. A.*, 1864, p. 313.)

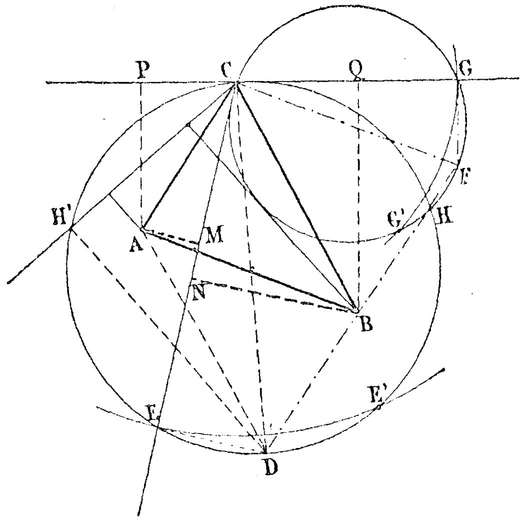



Fig. 906.

Soient CE la droite demandée, AM, BN des perpendiculaires abaissées des points A et B sur CE, afin d'obtenir les projections CM et CN des côtés CA et CB.

Soit enfin CM + NC = $l$.

Les droites égales et parallèles ont des projections égales; nous sommes donc conduit à construire le parallélogramme ACBD; il faut que la projection de la diagonale CD = $l$; donc sur le diamètre CD décrivons une circonférence. Du centre C, coupons-la par un arc ayant $l$ pour rayon.

Soit E un des points d'intersection.

On aura CM = NE comme projections de deux droites égales et parallèles; donc

$$CM + CN = CE = l.$$

E' donne un deuxième solution.

Les projections peuvent être de part et d'autre du point C; on peut demander que

$$PCQ = l.$$

Un raisonnement analogue au précédent conduit à construire le parallélogramme CABF, à décrire une circonférence sur le diamètre CF; du point C avec la longueur donnée, à couper cette circonférence en G et en G'; on a :

$$PQ = CG.$$

*Discussion*. Soit : $AB < CD$.

1° Pour $l < AB$, il y a quatre solutions; elles sont données par les points G, H, G', H'.

2° $l = AB$. Trois solutions, car l'arc de centre C sera tangent à la circonférence CF.

3° $l > AB$ mais $< CD$, deux solutions.

4° $l = CD$, une solution.

5° $l > CD$, point de solution.

### Problème 453.

**1426.** *Par un point* O *donné dans l'intérieur d'un angle* BAC, *mener une droite* BC *telle que le produit de ses deux segments soit égal au carré d'une ligne donnée.*

On peut recourir aux lieux géométriques. (*Méthodes*, n° 97.)

Voici une solution particulière, moins simple d'ailleurs que la solution générale.

On doit avoir $OB \cdot OC = k^2$; au triangle ABC, circonscrivons une circonférence, menons AOD et CD.

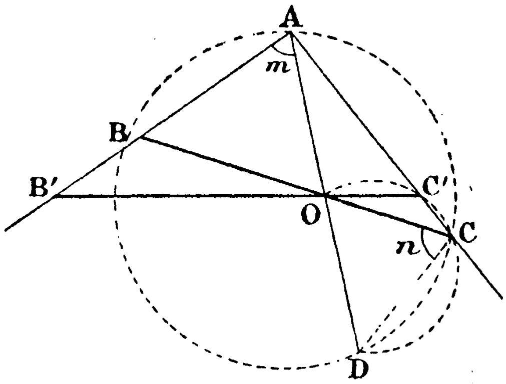


Fig. 907.

Les deux cordes AD et BC donnent $OA \cdot OD = OB \cdot OC = k^2$. Comme on connaît AO, on peut trouver OD, car on a :

$$\frac{AO}{k} = \frac{k}{OD}.$$

Les deux angles inscrits $m$ et $n$ sont égaux, on peut donc décrire sur OD un arc OCD capable de l'angle $m$, qui est connu; la rencontre de cet arc avec l'un des côtés donnés détermine le point C, et par suite, la droite COB.

### Problème 453. — I.

**1427.** *Par l'un des points d'intersection de deux circonférences, mener une sécante telle que le produit des cordes interceptées égale un carré donné.*

On peut recourir aux lieux géométriques. (*Méthodes*, n° 97.)

Sur le diamètre GAC, prendre $CE \times CG = k^2$ et mener la droite EN perpendiculaire à CG.

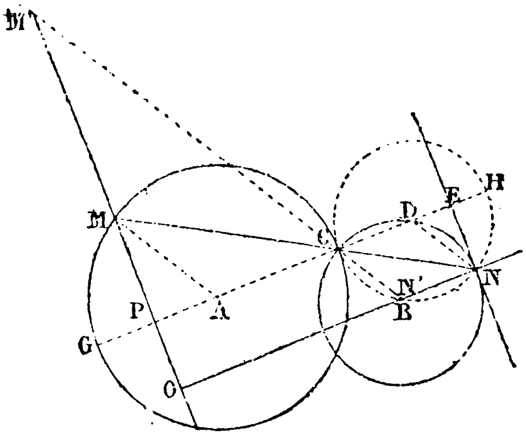


Fig. 908.

### Problème 453. — II.

**1427 a.** *Étant donnés, sur une circonférence* O, *deux points* A *et* B, *mener une tangente telle que le produit de ses distances aux points* A *et* B *égale un carré donné* $k^2$. (*Mathesis*, 1892, p. 238.)

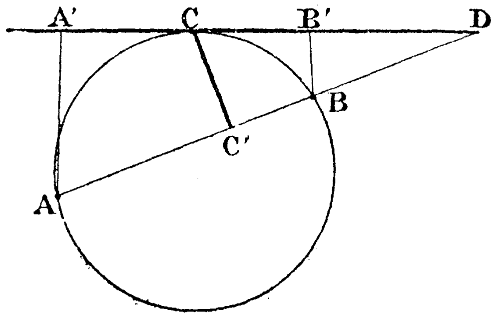


Fig. 909.

On mène des parallèles à AB qui soient éloignées de cette ligne de la distance $k$; les points d'intersection sont les points de contact.

Soit C un de ces points; projetons A, B sur la tangente, et C sur la corde AB.

Les triangles DAA′ DBB′, DCC′ sont semblables;

$$\text{donc} \qquad \frac{DA}{AA'} = \frac{DC}{CC'} \quad \text{et} \quad \frac{DB}{BB'} = \frac{DC}{CC'},$$

$$\text{d'où} \qquad AA' = CC' \cdot \frac{DA}{DC} \quad \text{et} \quad BB' = CC' \cdot \frac{DB}{DC};$$

$$\text{donc} \qquad AA' \cdot BB' = CC'^2 \cdot \frac{DA \cdot DB}{DC^2} = CC'^2.$$

**Note.** La solution a été donnée par MM. Sollertinski, Droz, Bellens, Denys, Emmerich, Delahaye et Déprez.

### Problème 454.

**1428.** *Diviser une droite en deux segments dont la somme des carrés égale* $a^2$.

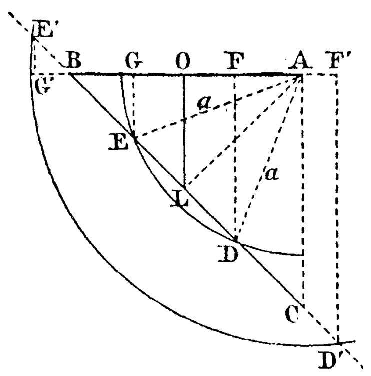


Fig. 910.

Soit $AF^2 + BF^2 = a^2$.

Pour avoir la somme des carrés, nous pouvons porter FB sur une perpendiculaire FD; alors on a $AD = a$, et le triangle FDB est isocèle rectangle; donc on peut procéder comme il suit:

Construisons un triangle isocèle rectangle BAC en prenant sur une perpendiculaire $AC = AB$; du point A comme centre, avec $a$ pour rayon, décrivons un arc DE et projetons les points D, E sur AB.

On a, en effet:

$$AG^2 + BG^2 = AG^2 + GE^2 = a^2.$$

(Julius Petersen, *Méthodes et théories*, p. 10.)

*Discussion.* Il y a généralement deux solutions.

Le minimum $a^2$ est donné par la perpendiculaire AL, car alors l'arc est tangent: $AL^2 = 2AO^2 = {}^1/_2\, AB^2$.

Lorsque $a$ est $< \frac{AB}{\sqrt{2}}$ ou $AO\sqrt{2}$, il n'y a pas de solution.

Enfin $a$ peut avoir une valeur supérieure quelconque. Mais pour $a^2 = AC^2 = AB^2$, un des segments est nul, et pour les valeurs supérieures à $AB^2$, on a des segments soustractifs :

$$F'A^2 + F'B^2 = G'B^2 + G'A^2 = E'A^2 = a^2.$$

### Problème 455.

**1429.** *Diviser une droite en deux segments, dont la différence des carrés égale un carré donné* $a^2$.

Soit $BF^2 - AF^2 = a^2$.

Si l'on prend un point quelconque de la perpendiculaire FD, on a :

$$BD^2 - AD^2 = BF^2 - AF^2 = a^2,$$

Donc on peut élever une perpendiculaire AC égale à la ligne $a$; du centre B avec BC pour rayon, décrire un arc; du centre A avec AB, couper le premier arc en D, E et mener la ligne DFE.

En permutant les rayons, on obtient D'E' et un point G symétrique de F, par rapport au milieu O.

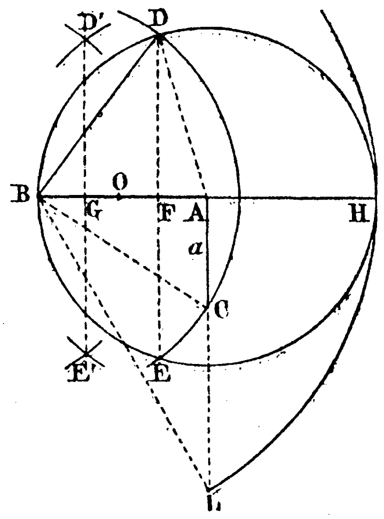


Fig. 911.

*Discussion.* 1° La différence peut être nulle; on obtient alors le point O milieu de AB.

2° Généralement il y a deux solutions F, G.

3° Lorsque $a = AB$, les points A et B répondent à la question; un des segments est nul.

4° Des valeurs de $a$ plus grandes que AB donnent des segments soustractifs.

### Problème 455. — I.

**1430.** *Sur un des côtés d'un angle quelconque* O, *on porte une longueur* OU, *que l'on prend pour unité. On porte sur l'autre côté une longueur* OA, *représentant un nombre quelconque* a. *On trace* UA, *et l'on reproduit l'angle* OUA *en* OAB, *en* OBC, *en* OCD, *et ainsi de suite. On demande d'exprimer les longueurs* OB, OC, OD, OE... *en fonction du nombre* a.

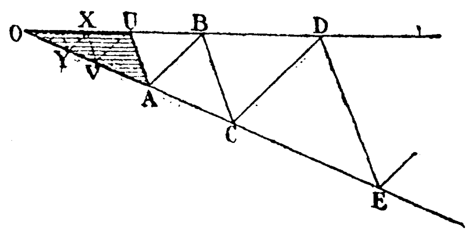


Fig. 912.

Désignons par $u$, $a$, $b$, $c$, $d$, $e$... les distances OU, OA, OB, OC, etc.

Il résulte de la construction que les droites UA, BC, DE... sont parallèles, aussi bien que AB, CD, etc., et que tous les triangles OUA, OAB, OBC, OCD... sont semblables. Si donc on considère successivement le premier triangle avec le second, le second avec le troisième, le troisième avec le quatrième, et ainsi de suite, on obtient une suite indéfinie de rapports égaux, savoir :

$$\frac{OU}{OA}=\frac{OA}{OB}=\frac{OB}{OC}=\frac{OC}{OD}=\frac{OD}{OE}\cdots$$

ou

$$\frac{u}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}\cdots$$

On prendra successivement le premier rapport avec le deuxième, le deuxième avec le troisième, etc., et on en tirera :

$ub=a^2$ ; et, comme $u=1$, on a. . . . . $b=a^2$,

$ac=b^2=a^4$, d'où, en divisant par $a$. . . $c=a^3$,

$bd=c^2=a^6$, ou $a^2d=a^6$, d'où. . . . . $d=a^4$,

$ce=d^2=a^8$, ou $a^3e=a^8$, d'où. . . . . $e=a^5$.

Et ainsi de suite.

**Note.** On peut voir divers articles du *J. M. E.* et notamment 1893, p. 246, par M. G. Darzens.

## Recherche des Relations numériques.

### Problème 456.

**1431.** *Par le sommet* A *d'un parallélogramme* ABCD, *on mène une sécante* AMN ; *elle coupe les côtés* CB, CD *ou leurs prolongements en* M *et* N. *Quelle est la relation qui existe entre les distances* BM, DN *et les côtés du parallélogramme?*

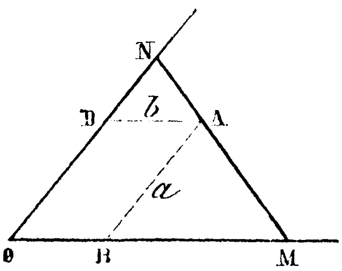



Fig. 913.

Soient $AB=CD=a$, $AD=BC=b$.

Les triangles semblables ABM, NDA donnent :

$$\frac{BM}{a}=\frac{b}{DN},$$

où

$$BM\,.\,DN=ab. \qquad (1)$$

*Le produit des segments est constant.*

**1432.** *Remarque.* Les points M et N décrivent sur les côtés de l'angle C *deux divisions homographiques* (nº 1298 **a**).

### Problème 456. — I.

**1433.** *Relation entre* CM *et* CN.

$$BM=CM-b,\quad DN=CN-a.$$

Dans (1) remplaçons BM et DN par les valeurs trouvées ci-dessus; on a :

$$(\text{CM} - b)(\text{CN} - a) = ab, \quad \text{CM} \cdot \text{CN} - a \cdot \text{CM} - b \cdot \text{CN} + ab = ab,$$

ou

$$\text{CM} \cdot \text{CN} = a \cdot \text{CM} + b \cdot \text{CN}. \qquad (2)$$

### Problème 456. — II.

**1434.** *Relation entre* CM *et* CN, *lorsque le point* A *est sur la bissectrice.*

Dans ce cas, la figure ABCD est un losange : $b = a$. La formule (2) devient :

$$\text{CM} \cdot \text{CN} = a(\text{CM} + \text{CN}).$$

*Le produit des segments égale la somme de ces mêmes segments multipliée par* a.

Ou, en divisant chaque membre par $a \cdot \text{CM} \cdot \text{CN}$,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\text{CM}} + \frac{1}{\text{CN}}.$$

**1435. Note.** MACLAURIN a appelé *moyenne harmonique* de plusieurs quantités, la quantité dont l'inverse est la moyenne arithmétique des inverses de toutes les autres. Ainsi $a$ est la moyenne harmonique de CM et CN.

PONCELET, dans son remarquable *Traité des propriétés projectives des figures,* a étendu la notion de *moyenne harmonique* en l'appliquant à un nombre quelconque de points en ligne droite, et en l'utilisant pour étudier les *courbes algébriques*.

Voir tome II, section première : *Théorie générale des centres de moyennes harmoniques* (pages 1 à 50).

### Problème 457.

**1436.** *On divise le côté* AB *d'un trapèze quelconque en deux parties* AD, DB *proportionnelles à* m *et* n. *Par le point obtenu, on mène une parallèle aux bases* a *et* b. *Exprimer la longueur de cette parallèle en fonction des bases et de* m *et* n.

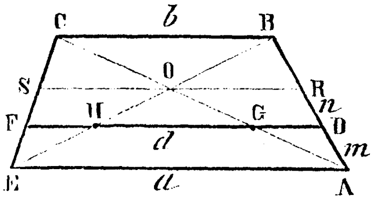


Fig. 914.

La question a déjà été traitée comme théorème (n° 1200), en vue des applications ultérieures; mais il convient de la proposer comme problème à résoudre.

$$\text{AE} = a, \quad \text{BC} = b, \quad \text{DF} = d \quad \text{et} \quad \frac{\text{AD}}{\text{DB}} = \frac{m}{n}.$$

Menons la diagonale AC; nous aurons :

$$\frac{\text{DG}}{\text{BC}} = \frac{\text{AD}}{\text{AB}} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{DG}}{b} = \frac{m}{m+n},$$

d'où

$$\text{DG} = b \cdot \frac{m}{m+n},$$

$$\frac{\text{FG}}{\text{EA}} = \frac{\text{BD}}{\text{AB}} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{FG}}{a} = \frac{n}{m+n},$$

d'où $$FG = a \cdot \frac{n}{m+n};$$

donc $$d = \frac{an+bm}{m+n}. \qquad (1)$$

**1437.** *Remarque.* 1° La partie GH comprise entre les diagonales égale,

$$DH - DG = FG - DG,$$

donc $$GH = \frac{an - bm}{m+n}. \qquad (2)$$

2° Pour avoir la valeur de la parallèle ROS, menée par le point de concours des diagonales, en recourant à la formule

$$d = \frac{an+bm}{m+n},$$

il faut remplacer $n$ par $b$ et $m$ par $a$, car $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$; (3)

on trouve : $$d = \frac{2ab}{a+b}, \qquad (4)$$

valeur déjà connue (nº 1199).

**Problème 457. — I.**

**1438.** *Sur le prolongement du côté* AB *d'un trapèze, on prend un point* D *tel que* $\frac{AD}{BD} = \frac{m}{n}$. *Par le point obtenu, on mène une parallèle aux bases* a *et* b. *Exprimer la longueur de la ligne* GH *comprise entre les diagonales prolongées.*

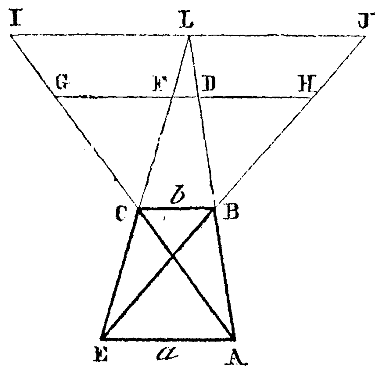


Fig. 915.

On trouve :

$$DH = \frac{an}{m-n} \quad \text{et} \quad DG = \frac{bm}{m-n};$$

donc $$GH = \frac{an+bm}{m-n}. \qquad (6)$$

**1439.** *Remarques.* 1° $$DG = FH,$$

donc $$DF = DG - DH = \frac{bm - an}{m-n}. \qquad (7)$$

2° Pour avoir la longueur de IJ, il suffit de remplacer dans la formule (6) $n$ par $b$ et $m$ par $a$, car $\frac{LB}{LA} = \frac{b}{a}$.

Donc $$IJ = \frac{2ab}{a-b}, \qquad (8)$$

valeur déjà connue (nº 1199).

### Problème 458.

**1440.** *En fonction des quatre côtés d'un trapèze, exprimer la longueur de la droite qui joint les milieux des côtés parallèles.*

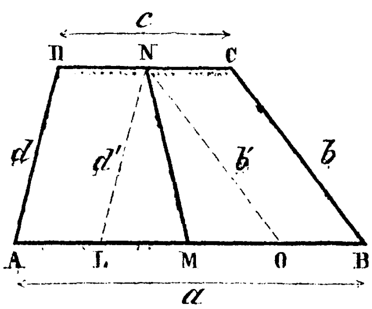


Fig. 916.

Soient $a$, $c$ les bases du trapèze, $b$, $d$ les deux autres côtés.

Par le point N, menons des parallèles à DA et CB.

On aura : $LM = MO = {}^1/_2 (a - c)$.

Le triangle ONL est déterminé, car ses trois côtés sont connus.

Pour avoir la longueur de MN, il suffit d'employer le théorème des médianes :

$$2MN^2 = b^2 + d^2 - 2MO^2 = b^2 + d^2 - {}^1/_2 (a - c)^2 ;$$

d'où
$$MN^2 = \frac{b^2 + d^2}{2} - \frac{1}{4}(a - c)^2.$$

On peut écrire :

$$MN^2 = \frac{2(b^2 + d^2 + ac) - (a^2 + c^2)}{4}.$$

### Problème 458. — I.

**1441.** *Exprimer* MN *en fonction des bases* a , c *et des diagonales* f, g.

En menant par le point N des parallèles aux diagonales, on forme un triangle dont la moitié de la base $= {}^1/_2 (a + c)$ ; on a :

$$MN^2 = \frac{f^2 + g^2}{2} - \frac{1}{4}(a + c)^2,$$

ou
$$MN^2 = \frac{2(f^2 + g^2 - ac) - (a^2 + c^2)}{4}.$$

### Problème 458. — II.

**1442.** *Un triangle isocèle rectangle est inscrit dans une circonférence, on décrit une circonférence tangente à la première et aux deux côtés de l'angle droit du triangle donné; exprimer le rayon de cette circonférence en fonction de celui de la première.*

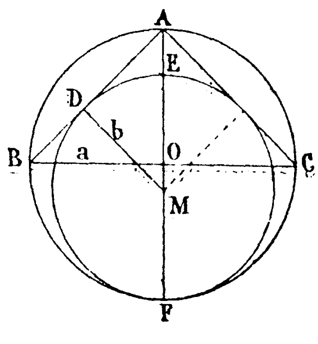


Fig. 917.

Soient $BO = AO = OF = a$,

$AD = DM = MF = b$,

$AE \,.\, AF = AD^2$ ou $(2a - 2b)\, 2a = b^2$,

$4a^2 - 4ab = b^2$ ou $b^2 + 4ab = 4a^2$.

Telle est la relation qui existe entre $a$ et $b$.

### Problème 458. — III.

**1443.** *Deux circonférences se coupent; par l'un des points d'intersection, on mène une sécante commune. Quelle est la relation qui existe entre les longueurs des deux cordes obtenues, la distance des centres et les rayons des circonférences ?*

(Voir *Méthodes*, n° 308.)

En désignant par $d$ la distance des centres, par $x$ et $y$ les demi-cordes, par $r$ et R les rayons, on a :

$$d^2 = (x+y)^2 + (\sqrt{R^2-y^2} - \sqrt{r^2-x^2})^2.$$

### Problème 459.

**1444.** *Lorsqu'on a deux points fixes* A *et* B *sur une circonférence, ainsi qu'une corde* EF *donnée de position, et qu'on joint un troisième point* C *quelconque de la circonférence aux points* A, B, *on divise la corde* EF *en trois segments* EM, EN, NF. *Trouver une relation entre ces trois segments.*

(Voir *Méthodes*, n° 326.)

### Problème 460.

**1445.** *Exprimer la longueur de la corde de la somme de deux arcs et celle de leur différence, en fonction des cordes de ces arcs et du diamètre du cercle.*

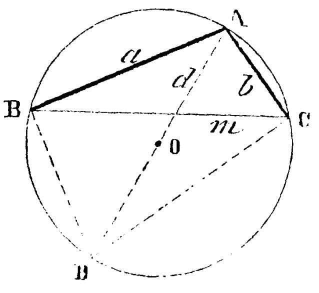


Fig. 918.

Soient $a$, $b$ deux cordes données, $d$ le diamètre, $m$ la corde de la somme et $n$ celle de la différence.

Dans tout quadrilatère inscrit, le produit des diagonales égale la somme des rectangles formés par les côtés opposés (n° 1209); donc

$$md = a \,.\, DC + b \,.\, BD.$$

Mais à cause du diamètre AOD, le triangle ABD est rectangle; ainsi

$$BD = \sqrt{d^2 - a^2},$$

de même

$$DC = \sqrt{d^2 - b^2};$$

donc on a :

$$m = \frac{a\sqrt{d^2-b^2} + b\sqrt{d^2-a^2}}{d};$$

on aurait aussi :

$$n = \frac{a\sqrt{d^2-b^2} - b\sqrt{d^2-a^2}}{d}.$$

### Problème 461.

**1446.** *Deux circonférences extérieures ont pour centres respectifs* A *et* B, *pour rayons* r, s, *et* d *pour distance des centres. En fonction de ces* *données, exprimer les distances* AO, BO *de chaque centre au point* O *de concours des tangentes extérieures, la longueur des cordes de contact et la distance de chaque corde au centre de la circonférence correspondante.*

Menons BL parallèle à CD ;

$$AL = r - s, \quad l = \sqrt{d^2 - (r - s)^2}.$$

1° Les triangles semblables AOC, ABL, BOD donnent :

$$\frac{AO}{AB} = \frac{AC}{AL}, \quad \frac{AO}{d} = \frac{r}{r - s}, \quad AO = \frac{rd}{r - s}, \qquad (1)$$

$$\frac{BO}{AB} = \frac{BD}{AL}, \quad \frac{BO}{d} = \frac{s}{r - s}, \quad BO = \frac{sd}{r - s}. \qquad (2)$$

On aurait de même :

$$CO = \frac{rl}{r - s}, \quad DO = \frac{rl}{r - s}.$$

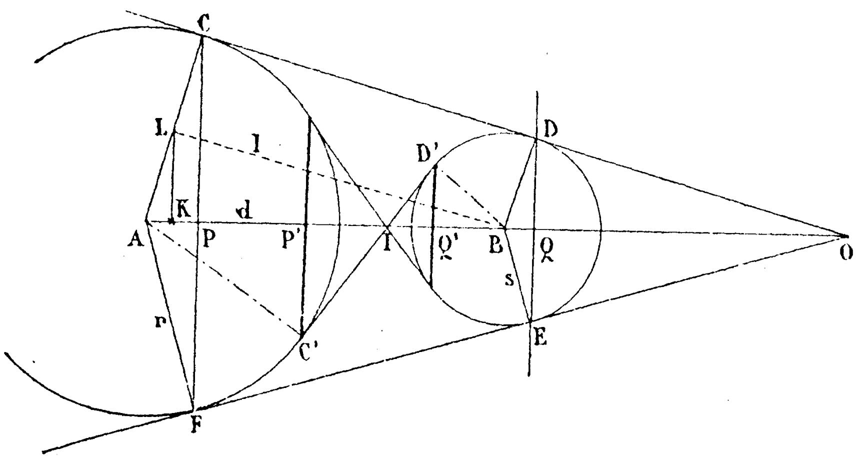



Fig. 919.

2° $$AP = \frac{r(r - s)}{d}, \qquad (3)$$

de même $$BQ = \frac{s(r - s)}{d}. \qquad (4)$$

3° $$CP = \sqrt{AP \cdot PO} = \frac{rl}{d}. \qquad (5)$$

de même $$DQ = \frac{sl}{d}, \qquad (6)$$

4° $$PQ = \frac{l^2}{d}. \qquad (7)$$

*Remarque.* Les droites CP, DQ sont les polaires du centre extérieur O de similitude, et C'P', D'Q' les polaires du centre intérieur I.

**Problème 461. — I.**

**1447.** Même question. *Pour le centre intérieur de similitude, on sait que le point* I *est obtenu en menant les tangentes intérieures.*

Il suffit de remplacer $r - s$ par $r + s$, $l' = \sqrt{d^2 - (r+s)^2}$.

$$AI = \frac{rd}{r+s}, \quad (1') \qquad BI = \frac{sd}{r+s}, \quad (2')$$

$$C'I = \frac{rl'}{r+s}, \qquad D'I = \frac{sl'}{r+s},$$

$$AP' = \frac{r(r+s)}{d}, \quad (3') \qquad BQ' = \frac{s(r+s)}{d}. \quad (4')$$

$$C'P' = \frac{rl'}{d}, \quad (5') \qquad D'Q' = \frac{sl'}{d}, \quad (6')$$

$$P'Q' = \frac{l'^2}{d}. \quad (7')$$

**Problème 462.**

**1448.** *Quelle est la longueur du côté et de l'apothème du dodécagone régulier inscrit en fonction du rayon?*

Le côté C' d'un polygone inscrit d'un nombre double de côtés est donné par la formule

$$C' = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - C^2}}. \qquad \text{(G., n° 286.)}$$

Le côté de l'hexagone régulier égale le rayon ; donc

$$C' = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - r^2}},$$

$$C' = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{3}} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}. \qquad \text{côté.}$$

L'apothème $a'$ est donné par

$$a'^2 = r^2 - \frac{C'^2}{4},$$

$$a'^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}(2 - \sqrt{3}) = \frac{r^2(2+\sqrt{3})}{4},$$

$$a' = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}. \qquad \text{apothème}$$

**Problème 463.**

**1449.** *Trouver une relation entre deux cordes parallèles, la corde équidistante et la distance des deux premières.*

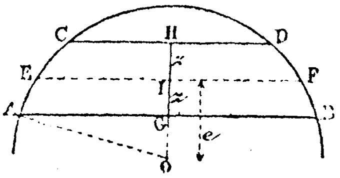


Fig. 920.

Si l'on appelle $r$ le rayon, $2m$ la corde AB, $2n$ la corde CD, $2s$ la corde EF, $2z$ la distance des deux premières cordes, et $e$ la distance du centre à la corde médiane, on a :

$$OA^2 = AG^2 + OG^2,$$

ou $$r^2 = m^2 + (e-z)^2 = m^2 + e^2 + z^2 - 2ez. \quad (1)$$

De même, $$r^2 = n^2 + (e+z)^2 = n^2 + e^2 + z^2 + 2ez, \quad (2)$$

$$r^2 = s^2 + e^2 \quad \text{et} \quad 2r^2 = 2s^2 + 2e^2. \quad (3)$$

La somme des deux premières égalités, diminuée de la troisième, donne :

$$0 = m^2 + n^2 - 2s^2 + 2z^2,$$

d'où

$$m^2 + n^2 = 2s^2 - 2z^2.$$

Si l'on multiplie par 4, il vient :

$$4m^2 + 4n^2 = 8s^2 - 8z^2,$$

ou

$$(2m)^2 + (2n)^2 = 2(2s)^2 - 2(2z)^2,$$

ou bien

$$AB^2 + CD^2 = 2EF^2 - 2GH^2.$$

Ainsi *la somme des carrés de deux cordes parallèles égale le double du carré de la corde équidistante, moins le double du carré de la distance des cordes données.*

### Problème 464.

**1450.** *Connaissant le rayon d'un cercle et une corde de ce même cercle, on demande d'exprimer :*

1° *La distance du centre à la corde, ainsi que la flèche de cette même corde ;*

2° *La corde qui sous-tend l'arc moitié;*

3° *La tangente parallèle à la corde, et limitée par les mêmes rayons prolongés.*

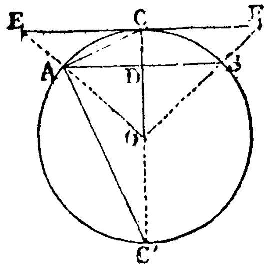


Fig. 921.

Soit AB ou $a$ une corde donnée, ainsi que le rayon AO ou $r$ du cercle.

Dans le triangle rectangle ADO, on connaît l'hypoténuse OA et le côté AD égal à $\frac{a}{2}$ ; on peut donc calculer OD distance du centre à la corde AB :

$$OD^2 = r^2 - \frac{a^2}{4}, \quad \text{d'où} \quad OD = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

La flèche $\quad DC = OC - OD,$

$$DC = r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

2° La corde AC qui sous-tend l'arc AC, moitié de ACB, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ADC dont on connaît les côtés de l'angle droit ; donc

$$AC^2 = \frac{a^2}{4} + \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\right)^2.$$

3° Pour calculer EF, on a recours aux triangles semblables EOF, AOB.

Ces triangles donnent :

$$\frac{EF}{AB} = \frac{OC}{OD},$$

d'où

$$EF = \frac{AB \times OC}{OD},$$

$$EF = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}.$$

**Problème 465.**

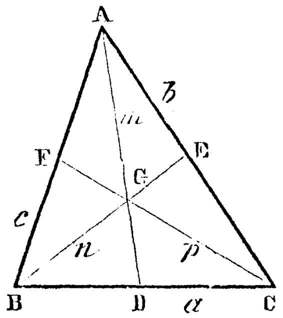


Fig. 922.

**1451**. *Exprimer en fonction des carrés des côtés d'un triangle, la somme des carrés des distances aux trois sommets du point de concours des médianes.*

On trouve : $m^2 + n^2 + p^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Ainsi *la somme des carrés des distances du point de concours des médianes aux trois sommets égale le tiers de la somme des carrés des côtés du triangle.*

**Problème 465. — I.**

**1452**. *On divise la base d'un triangle en trois parties égales, les deux points de division sont joints au sommet opposé. Exprimer la somme des carrés des deux lignes ainsi menées, en fonction des carrés des côtés du triangle.*

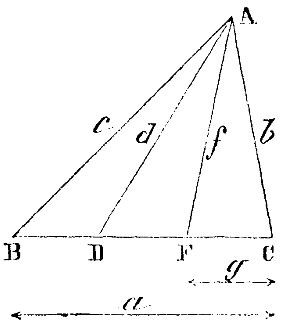


Fig. 923.

En appliquant le théorème relatif au carré de la médiane (G., n° 254), on a :

$$2f^2 + 2g^2 = b^2 + d^2,$$

$$2d^2 + 2g^2 = f^2 + c^2,$$

d'où
$$d^2 + f^2 = b^2 + c^2 - \frac{4}{9}a^2.$$

*La somme des carrés des droites qui joignent un sommet aux points situés au tiers et aux deux tiers de la base d'un triangle, égale la somme des carrés des côtés qui aboutissent au sommet considéré, moins les* $\frac{4}{9}$ *du carré de la base.*

*Remarque*. Lorsque $BD = FC = \frac{a}{4}$, on trouve :

$$d^2 + f^2 = b^2 + c^2 - \frac{3a^2}{8}.$$

**Problème 466.**

**1453**. *Exprimer en fonction des côtés* a, b, c *d'un triangle donné :*

1° *Les hauteurs* $h_a$, $h_b$, $h_c$ *du triangle ;*

2° *Les distances* $k_a$, $k_b$, $k_c$ *du centre* O *du cercle circonscrit, aux côtés de ce même triangle.*

On trouve :

1°
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$2^\circ \qquad \begin{aligned} k_a &= \sqrt{\frac{(abc)^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)} - \frac{a^2}{4}}, \\ k_b &= \sqrt{\frac{(abc)^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)} - \frac{b^2}{4}}, \\ k_c &= \sqrt{\frac{(abc)^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)} - \frac{c^2}{4}}. \end{aligned}$$

En représentant par S la surface du triangle et par R le rayon du cercle circonscrit, on sait qu'on a :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

**Problème 466. — I.**

**1453 a.** *Exprimer en fonction des côtés* a, b, c *d'un triangle :*

3° *Les bissectrices intérieures* $i_a$, $i_b$, $i_c$;

4° *Les bissectrices extérieures* $e_a$, $e_b$, $e_c$.

On trouve :

$$3^\circ \qquad \begin{aligned} i_a &= \sqrt{bc - \frac{a(abc)}{(b+c)^2}} && \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc}, \\ i_b &= \sqrt{ac - \frac{b(abc)}{(a+c)^2}} \quad \text{ou} && \frac{2}{a+c}\sqrt{p(p-b)ac}, \\ i_c &= \sqrt{ab - \frac{c(abc)}{(a+b)^2}} && \frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-c)ab}. \end{aligned}$$

$$4^\circ \qquad \begin{aligned} e_a &= \frac{2}{b-c}\sqrt{(p-b)(p-c)bc}, \\ e_b &= \frac{2}{a-c}\sqrt{(p-a)(p-c)ac}, \\ e_c &= \frac{2}{a-b}\sqrt{(p-a)(p-b)ab}. \end{aligned}$$

**Problème 466. — II.**

**1453 b.** *Exprimer en fonction des côtés d'un triangle :*

5° *Les médianes* $m_a$, $m_b$, $m_c$, *de ce triangle ;*

6° *Les symédianes intérieures* $s_a$, $s_b$, $s_c$ ;

7° *Les symédianes extérieures* $s'_a$, $s'_b$, $s'_c$.

On trouve :

$$5^\circ \qquad \begin{aligned} m_a &= \sqrt{{}^1/_2\,(b^2 + c^2 - {}^1/_2 a^2)}, \\ m_b &= \sqrt{{}^1/_2\,(c^2 + a^2 - {}^1/_2 b^2)}, \\ m_c &= \sqrt{{}^1/_2\,(a^2 + b^2 - {}^1/_2 c^2)}. \end{aligned}$$

6°
$$s_a^2 = \frac{2b^2c^2}{b^2+c^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2},$$
$$s_b^2 = \frac{2a^2c^2}{a^2+c^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+c^2)^2},$$
$$s_c^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

7°
$$s'_a = \frac{abc}{b^2-c^2}, \quad s'_b = \frac{abc}{c^2-a^2}, \quad s'_c = \frac{abc}{a^2-b^2};$$

d'où
$$\frac{1}{s'_a} + \frac{1}{s'_b} + \frac{1}{s'_c} = 0.$$

On a aussi :
$$\frac{a^2}{s'_a} + \frac{b^2}{s'_b} + \frac{c^2}{s'_c} = 0.$$

**1453 c.** Note. Pour les démonstrations des cinq premières relations, on peut se reporter aux trois premières éditions des *Exercices de Géométrie.*

Une démonstration très simple pour les bissectrices a été donnée par M. LAUVERNAY. (*J. M. E.*, DE LONGCHAMPS, 1896, p. 36.)

Les numéros 6° et 7°, donnés par M. C. THIRY, dans *J. M. E.*, 1888, p. 2?, ne présentent aucune difficulté.

L'application du *Théorème de Stewart* (n° 1173) conduit aux relations 6°, et les symédianes extérieures sont encore plus faciles à calculer (n° 2342).

L'ouvrage déjà cité de MM. VUIBERT et NONY, *Relations entre les éléments d'un triangle,* contient deux cent soixante-treize formules avec leurs démonstrations. (Voir aussi n° 1172 b.)

### Distance de deux points remarquables d'un triangle.

**1453 d.** On peut consulter l'ouvrage précédent et un travail remarquable de M. A. BOUTIN, publié dans le *Journal de mathématiques élémentaires* de M. DE LONGCHAMPS, 1892, p. 248. Voir aussi 1879, p. 12, art. COMBIER.

En représentant, suivant l'usage, par : O le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit, G le centre de gravité, H l'orthocentre, K le point de Lemoine ; puis par M le point de Gergonne, N celui de Nagel ; par $\theta$, $\Omega$, $\Omega'$ l'angle et les points de Brocard ; enfin, R, $r$ étant les rayons des cercles circonscrit et inscrit, S la surface du triangle, on a :

$$\overline{OI}^2 = R(R-2r),$$
$$ON = R - 2r,$$
$$\overline{OH}^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C), \quad \text{ou} \quad 9R^2 - (a^2+b^2+c^2),$$
$$\overline{IH}^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2,$$
$$\overline{OM}^2 = R^2 - \frac{4Sp(R+r)}{(4R-r)^2},$$
$$9\overline{GI}^2 = p^2 + 5r^2 - 16Rr,$$
$$9\overline{GO}^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2), \quad \text{ou} \quad 9R^2 - 2(p^2 - r^2 - 4Rr),$$
$$\overline{KI}^2 = \frac{2Rr(4R+r)}{S\cot g\,\theta} - 3R^2\mathrm{tg}^2\theta,$$
$$\overline{KH}^2 = R^2\left[\mathrm{tg}^2\theta - 4\cos A\cos B\cos C(1-\mathrm{tg}^2\theta)\right],$$
$$9\overline{KG}^2 = \frac{4S(1+2\sin^2\theta)}{\sin 2\theta} - 27R^2\mathrm{tg}^2\theta.$$

Dans les formules suivantes, on représente $4R + r$ par $\delta$ :

$$\overline{\Omega I}^2 = 2R\left[\frac{a^3c + b^3a + c^3b}{(p^2 - r\delta)^2 + 4S^2} - 1\right],$$

$$\Omega O = \Omega' O = R\sqrt{1 - 4\sin^2\theta},$$

$$IM = \frac{r}{\delta}\sqrt{\delta^2 - 3p^2},$$

$$\Omega\Omega' = 2R\sin\theta\sqrt{1 - 4\sin^2\theta},$$

$$OK = \frac{R}{\cos\theta}\sqrt{1 - 4\sin^2\theta},$$

$$\Omega K = \Omega' K = R\,\mathrm{tg}\,\theta\sqrt{1 - 4\sin^2\theta}.$$

L'ouvrage : *la Recente geometria del Triangolo*, publié en 1900 par le professeur Cristoforo Alasia, indique cinq cent soixante-six formules relatives au triangle. (Pages 304 et suivantes.)

### Problème 466. — III.

1454. *Dans un triangle* ABC *on joint chaque point de contact* D, E, F *du cercle inscrit au sommet opposé; la droite* AD *rencontre le cercle inscrit en un second point* D', *etc. On demande quelle est la valeur de la somme des produits :*

$$AD \,.\, AD' + BE \,.\, BE' + CF \,.\, CF',$$

*en fonction des côtés* a, b, c *du triangle.*

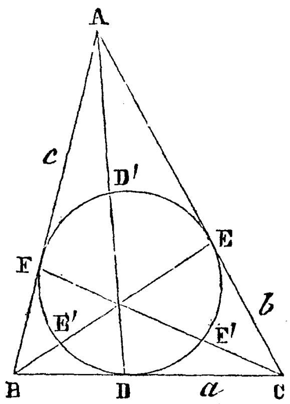


Fig. 924.

$$AD \,.\, AD' = AF^2,$$
$$BE \,.\, BE' = BD^2,$$
$$CF \,.\, CF' = CD^2;$$

mais
$$AF = \frac{b + c - a}{2},$$
$$BD = \frac{a + c - b}{2},$$
$$CD = \frac{a + b - c}{2}; \quad \text{(G., 350)}$$

donc la somme S des produits ou

$$AD.AD' + BE.BE' + CF.CF' = \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2,$$

ou, en opérant et réduisant, la somme a pour valeur :

$$\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2}(ab + ac + bc).$$

### Problème 467.

1455. *Étant données deux circonférences concentriques, exprimer la différence de leurs longueurs en fonction de la distance* l *qui les sépare.*

Appelons $r$ le rayon de la circonférence intérieure; celui de la circonférence extérieure est $r + l$; les longueurs sont :
pour la circonférence intérieure, $2\pi r$,
pour l'extérieure, $\quad 2\pi(r + l)$ ou $2\pi r + 2\pi l$.

Ainsi *la différence de longueur entre deux circonférences concentriques égale la circonférence qui aurait pour rayon la distance des deux circonférences considérées.*

**1455 a.** *Remarque.* L'arc de $n$ degrés a pour expression :

dans la circonférence intérieure, $\dfrac{\pi rn}{180}$,

et dans l'extérieure, $\dfrac{\pi(r+l)n}{180}$ ou $\dfrac{\pi rn}{180} + \dfrac{\pi ln}{180}$.

Ainsi *la différence de longueur entre deux arcs semblables appartenant à des circonférences concentriques, égale l'arc semblable de la circonférence qui aurait pour rayon la distance de deux circonférences considérées.*

**Problème 467. — I.**

**1456.** *Étant données deux courbes* ABC *et* A'B'C' *formées de plusieurs cercles concentriques deux à deux, exprimer la différence de longueur de ces deux courbes entre des normales communes.*

1° Soient $m$ et $n$ les angles formés par les rayons des deux arcs AB et BC (fig. 925), et soit $l$ la distance des arcs parallèles. On a (nº **1455 a**) :

$$\text{Arc } A'B' = AB + \frac{\pi lm}{180},$$

$$\text{Arc } B'C' = BC + \frac{\pi ln}{180}.$$

Donc $\quad \text{arc } A'B'C' = ABC + \dfrac{\pi l(m+n)}{180} = ABC + \text{arc } abc.$

Ainsi la différence des deux courbes égale l'arc $abc$, qui a pour rayon $l$, et pour angle au centre l'angle P formé par les rayons extrêmes.

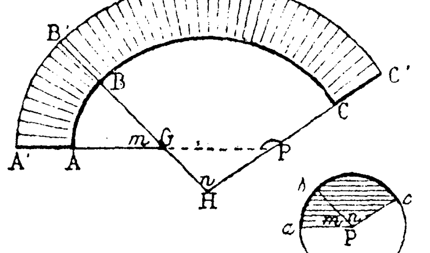


Fig. 925.

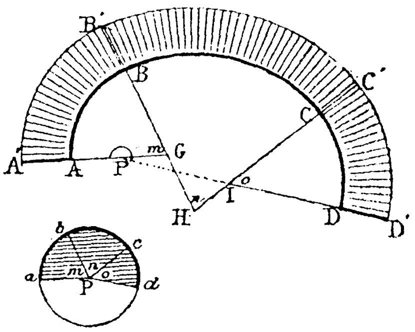


Fig. 926.

Pour trois arcs, correspondant aux angles $m$, $n$, $o$ (fig. 926),

on a : $\text{arc } A'B'C'D' = ABCD + \dfrac{\pi l(m+n+o)}{180} = ABCD + abcd.$

Ainsi la différence des deux courbes égale l'arc $abcd$ qui a pour rayon $l$, et pour angle au centre l'angle P formé par les rayons extrêmes.

3° Soit le cas où la courbure des arcs n'est pas de même sens (fig. 927). On a :

$$\text{arc } A'B'C'D' = ABCD + \frac{\pi l(m+n-o)}{180} = ABCD + ab + bc - cd = ABCD + ad.$$

Ainsi la différence des deux courbes égale l'arc $ad$, qui a pour rayon $l$, et pour angle au centre l'angle P formé par les rayons extrêmes.

Donc *si deux courbes sont formées de plusieurs arcs concentriques deux à deux, la différence de longueur de ces deux courbes égale un arc circulaire qui aurait pour rayon la distance des deux courbes, et pour angle au centre la valeur angulaire comprise entre les rayons extrêmes.*

Pour trouver *la valeur angulaire comprise entre les rayons extrêmes*, il faut considérer *le mouvement angulaire* que ferait le premier rayon, dans le sens des arcs, pour prendre une position parallèle au dernier rayon.

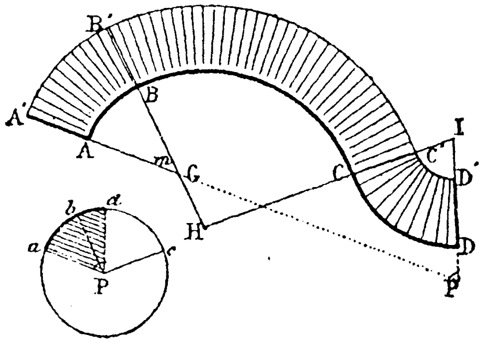


Fig. 927.

*Remarque.* Cette propriété est vraie pour deux *courbes parallèles quelconques,* mais nos exemples se rapportent aux *Éléments de Géométrie.*

**1457. Note.** La surface comprise entre deux courbes parallèles quelconques se nomme *bandeau.* Nous venons d'indiquer la manière de calculer une des courbes en fonction de l'autre courbe et de la largeur $l$; puis, au livre IV (n^os^ 1584 à 1586), nous apprendrons à évaluer la surface. Les *bandeaux* se rencontrent fréquemment dans les constructions : ainsi la surface de tête des voussoirs d'un pont biais à voûte cylindrique circulaire, est un bandeau compris entre l'arc elliptique de l'intrados et une courbe parallèle à cet arc, limitant l'extrados de la voûte.

Tout ce qui est relatif à la mesure des courbes et de la surface des bandeaux est indiqué, sans démonstration, dans le *Traité des mesurages et des métrages,* etc., par M. E. SERGENT, ingénieur civil.

### Problème 468.

**1458.** *Étant donnés les périmètres* p *et* P *de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, exprimer les périmètres* p' *et* P' *des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre double de côtés.*

On trouve : $$P' = \frac{2pP}{p+P} \quad \text{et} \quad p' = \sqrt{pP'} .$$

*Remarque.* Ce problème permet de calculer facilement le nombre $\pi$. Ces formules sont dues à SAURIN (1659-1737), membre de l'Académie des sciences, en 1723. (*N. A.*, 1842, page 190.)

## Circonférences tangentes.

### Problème 469.

**1459.** *Décrire une circonférence tangente à deux droites* OA, OB *et à une circonférence donnée C.*

Soit D le cercle demandé. Son centre doit se trouver sur la bissectrice OD de l'angle O.

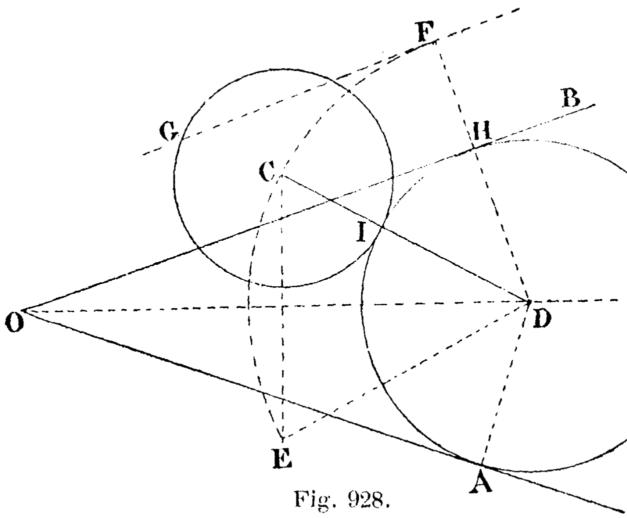



Fig. 928.

Menons CE perpendiculaire à OD, et DF perpendiculaire à OB : du point D avec DC pour rayon, décrivons l'arc ECF, et menons FG perpendiculaire à DF, et par suite, parallèle à OB. On a :

$$DF = DC;$$

retranchons : $$DH = DI;$$

il vient : $$HF = IC = r.$$

Ainsi, il faut tracer la droite indéfinie GF parallèlement à OB, et à une distance égale à $r$; déterminer E symétrique de C par rapport à OD, et enfin décrire l'arc ECF par les deux points E et C, et tangentiellement à la droite GF. (G., n° 298.)

Le centre de cet arc est le centre de la circonférence demandée.

*Remarque.* Un second arc pouvant être tracé par les deux points E et C tangentiellement à GF, il y a une seconde solution. Deux autres solutions seront obtenues, si l'on prend le centre sur la bissectrice de l'angle obtus formé par les deux droites. — Si les deux droites données étaient parallèles, la bissectrice serait remplacée par la droite équidistante.

**1459 a. Note.** Les cercles tangents à deux côtés d'un triangle et au cercle circonscrit, à l'intérieur de ce cercle, ont donné lieu à d'intéressantes études. (*J. M. E.*, 1893, p. 196. H. VERRIÈRE.)

### Problème 470.

**1460.** *Décrire une circonférence tangente à une circonférence* A *et à une droite donnée* CD, *et qui passe par un point donné* B.

Soit I cette circonférence. La droite AI, qui joint les deux centres, passe par le point de contact L.

Par le centre A, menons OG perpendiculaire à CD, puis OLD, OBH, ID et LF.

Les triangles isocèles OAL et LID ont leurs angles en L égaux ; donc leurs angles O et D sont aussi égaux. Ainsi ID est parallèle à OG, et, par conséquent, perpendiculaire à CD ; et le point $d$ est le point de contact de la circonférence avec la droite CD.

L'angle inscrit OLF est droit; donc le quadrilatère LFGD a deux angles opposés L et G droits, et ce quadrilatère est inscriptible. On a donc :

$$OF \,.\, OG = OL \,.\, OD = OB \,.\, OH.$$

D'où $\dfrac{OB}{OF} = \dfrac{OG}{OH}$, égalité qui permet de trouver OH, et par suite le point H.

Le problème se trouve ainsi ramené à celui-ci : Décrire une circonférence qui passe par les deux points B et H, et qui soit tangente à la droite CD. On sait que ce problème est susceptible de deux solutions. (G., n° 298.)

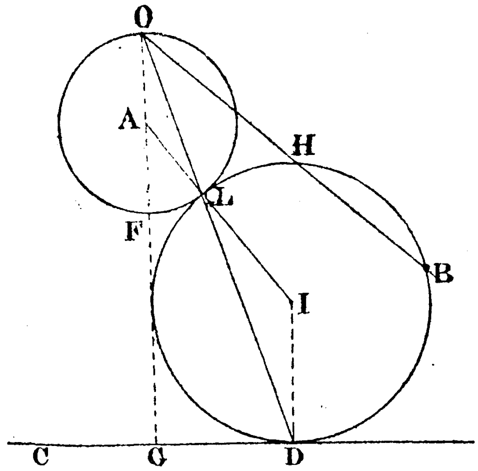


Fig. 929.

*Remarque.* La longueur OH pourrait être portée, en sens inverse, sur le prolongement de BO ; ce qui fournirait deux autres solutions.

## Problème 471.

**1461.** *Décrire une circonférence tangente à une droite* AB, *et à deux circonférences données* C *et* D.

Soit EGH cette circonférence. Menons OC, OD et CD; puis OF perpendiculaire sur AB.

Du point O, avec un rayon égal à la plus petite des distances OC et OD, décrivons la circonférence CFL ; avec DL pour rayon, décrivons une autre circonférence; et par le point F, menons MN perpendiculaire à OF, et par suite parallèle à AB.

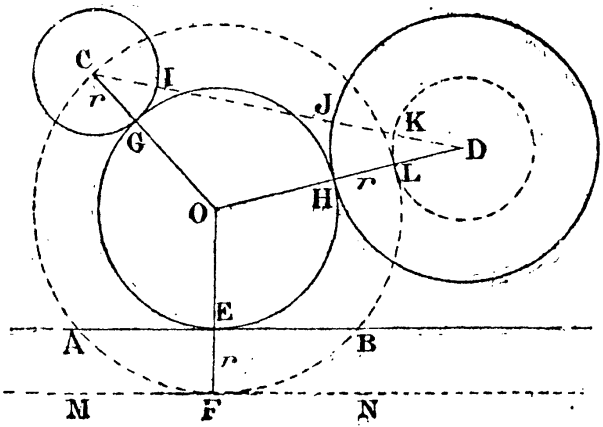


Fig. 930.

Il faut donc tracer MN parallèle à AB, à la distance $r$; décrire du point D la circonférence auxiliaire qui a pour rayon la différence des rayons des circonférences données.

Puis décrire une circonférence qui passe par le point C, et qui soit tangente à la droite MN et à la circonférence auxiliaire. (G., n° 299.)

Le centre de cette circonférence est aussi le centre de la circonférence demandée.

*Remarque.* Comme on peut mener, par le point C, quatre circonférences tangentes à MN et à la circonférence auxiliaire DL, le problème actuel a aussi quatre solutions.

### Problème 472.

**1462.** *Décrire une circonférence tangente à deux circonférences données* A *et* B, *et qui passe par un point donné* C.

Ce problème et le suivant (nº 1463) ont déjà été résolus (nºs 46 et 47), néanmoins il est bon de les traiter de nouveau.

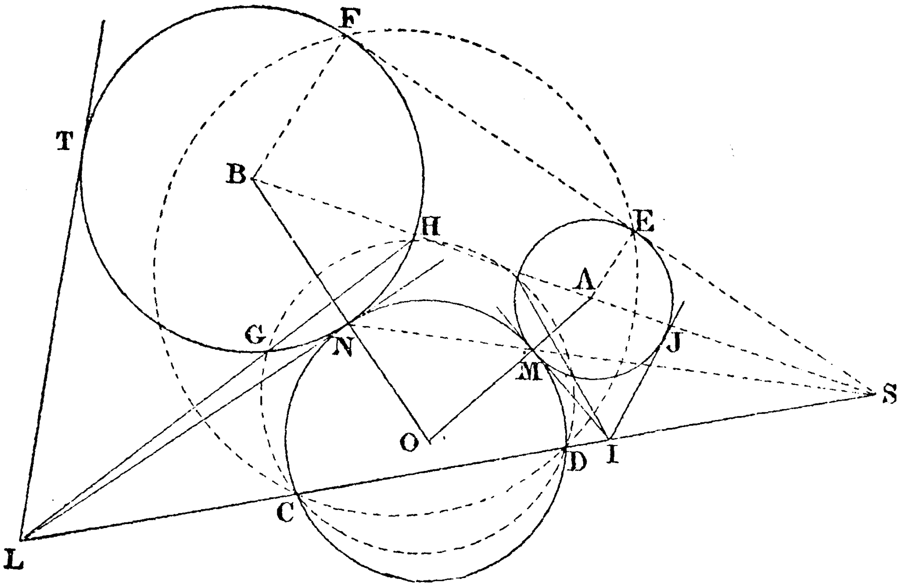



Fig. 931.

Soit CDMN la circonférence tangente.

La ligne MN des contacts passe par le centre extérieur de similitude S des cercles donnés A et B ; il faut donc déterminer ce point S, par exemple, en menant la tangente commune FES.

Le cercle mené par C, E, F détermine sur SC un point D qui appartient à la circonférence demandée, car on a :

$$SC \cdot SD = SM \cdot SN = SE \cdot SF.$$

Le problème est donc ramené à la question connue : par deux points C, D faire passer une circonférence qui soit tangente au cercle B. (G., nº 299.)

On sait qu'il faut faire passer un cercle par C et D qui coupe le cercle B, mener HGL ; par L, mener une tangente LN au cercle B. Puis la circonférence qui passera par les trois points C, D, N répond à la question.

*Remarque.* On peut déterminer directement le point de contact M.

Les tangentes LT, IJ, déterminent un cercle CDJT qui répond aussi à la question.

Le centre intérieur de similitude de A et B fournirait à son tour deux autres solutions ; donc, en tout, le problème comporte quatre solutions.

### Problème d'Apollonius 473.

**1463.** *Décrire une circonférence tangente à trois circonférences données* A, B, C.

Voir *Méthodes,* nº 46.

*Remarque.* Il y a huit solutions ; lorsque les trois cercles sont extérieurs l'un à l'autre, les circonférences obtenues sont conjuguées deux à deux ; ainsi à la circonférence tangente extérieurement aux trois cercles donnés, correspond une circonférence tangente intérieurement aux trois mêmes cercles.

A la circonférence tangente extérieurement aux circonférences A et B et intérieurement à C, correspond une circonférence tangente intérieurement aux deux premières et extérieurement à la troisième, etc.

**1463 a. Note.** Le problème avait été traité par APOLLONIUS, dans un ouvrage dont le titre seul a été transmis par PAPPUS. — ADRIANUS ROMANUS (1561-1615) reconnut que le problème pouvait être résolu par l'intersection de deux hyperboles; peu après, VIÈTE donna la solution que nous avons reproduite (n° 46). NEWTON démontra qu'on n'avait pas besoin de construire les hyperboles proposées par Romanus; DESCARTES, EULER, PONCELET et plusieurs autres géomètres s'en sont occupés. On connaît la belle solution de GERGONNE et BOBILLIER; elle se trouve reproduite dans les premières éditions du *Traité de Géométrie* de MM. ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE. De nos jours, le même problème a donné lieu à de nouvelles études; il a même été traité comme cas particulier de la question plus générale qui consiste à décrire une circonférence qui coupe trois circonférences données, sous des angles déterminés ; voir à ce sujet *N. A.*, 1883, pages 272 et 348 ; 1884, p. 316 ; 1886, p. 539 ; 1891, p. 339 ; 1892, pp. 227 et 331. Comme extension, on arrive à décrire un cercle tangent à trois cercles d'une sphère et à décrire une sphère tangente à quatre sphères données, 1892, pages 406 et 410.

Enfin, M. EMILE LEMOINE (*N. A.*, 1892, page 453), comparant les diverses solutions du *problème d'Apollonius,* au point de vue de la simplicité et de l'exactitude des constructions, place en premier lieu la solution donnée par M. MANNHEIM (1885, page 108), puis en second lieu celle de VIÈTE, ci-dessus, et celle de M. FOUCHÉ (1892, page 227), et comme la moins bonne, au point de vue du tracé graphique, la solution si élégante et si remarquable d'ailleurs de GERGONNE et BOBILLIER. La solution donnée par M. FOUCHÉ, dans les *Nouvelles Annales mathématiques,* ne diffère pas essentiellement de celle qu'a donnée PONCELET dans son *Traité des propriétés projectives des figures,* page 139, figure 39. — M. G. DE LONGCHAMPS; qui a signalé ce fait dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires* (année 1898-1899, page 81), dit que la solution de PONCELET est incomparablement supérieure à celle de GERGONNE. — Enfin PONCELET a donné plusieurs autres solutions dans ses *Applications d'Analyse et de Géométrie* (t. I, pages 29 et 444). — Une belle solution élémentaire, due à M. GÉRARD, alors professeur au lycée Ampère, à Lyon, mérite aussi d'être citée. Voir année 1897-98, page 49, du *Bulletin de Sciences mathématiques et physiques élémentaires.* — C'est à dater de 1897-98 que le *Bulletin de Mathématiques élémentaires* a pris le nom ci-dessus.

La septième édition du *Traité de Géométrie,* revue par M. ROUCHÉ, a fait choix de la solution FOUCHÉ-PONCELET.

La construction de M. FOUCHÉ se prête facilement à la discussion simple et complète de la réalité des solutions et de la nature des contacts. (Voir G. ROUCHÉ ET DE COMBEROUSSE, 7e édition, page 297.)

Il en est de même de la construction donnée par M. MANNHEIM. Voir une note de M. G. LERY. (*N. A.*, 1903, p. 49.)

Récemment, M. R. BRICARD, ingénieur et répétiteur à l'Ecole Polytechnique, a traité de nouveau le *Problème d'Apollonius,* en utilisant les cycles de LAGUERRE. (*N. A.*, 1907, p. 491). Peu après (1908, pp. 116 et 162), M. MAURICE FOUCHÉ, aussi répétiteur à l'École Polytechnique, déduit la méthode donnée par son collègue de celle indiquée autrefois par PONCELET, et reproduite, légèrement modifiée, en 1892, p. 227, dans les *N. A.*

**Problème 473. — I.**

**1463 b.** *On demande trois cercles tels que chacun d'eux touche les deux autres, et qui satisfassent de plus aux conditions suivantes : 1° que les points de contact de l'un d'entre eux avec les deux autres soient deux points donnés; 2° que ces deux derniers touchent une droite donnée.* (Annales de Gergonne, t. V, 1814-1815, p. 92.)

La solution a été donnée dans ce même recueil, p. 295, par J.-B. Durrande, alors âgé de dix-sept ans, qui avait appris les mathématiques sans autre secours que celui des livres (note de G.-D. Gergonne).

**Problème 474.**

**1464.** *On donne deux points* A, B *et une droite* xy; *sur cette ligne déterminer un point* C, *tel que la somme des carrés des distances* AC, BC *soit minima.*

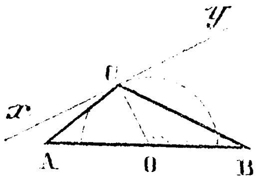


Fig. 932.

On sait que le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points A et B est constante, est une circonférence décrite du point milieu O comme centre.

Le minimum de la somme des carrés a donc lieu pour la circonférence tangente.

Donc il suffit d'abaisser la perpendiculaire OC sur $xy$.

*Remarque.* Pour une somme de carrés égale à une valeur donnée $k^2$ on prendrait un rayon OM donné par

$$OM^2 = \frac{k^2}{2} - AO^2.$$

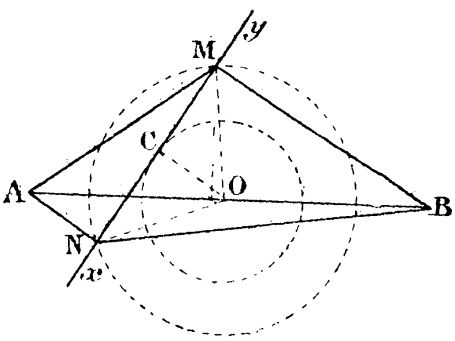


Fig. 933.

On obtient, comme dans tous les problèmes du second degré, deux solutions, une seule ou aucune, suivant que la circonférence décrite coupe $xy$ en deux points, est tangente à cette ligne, ou ne la rencontre pas.

**Problème 474. — I.**

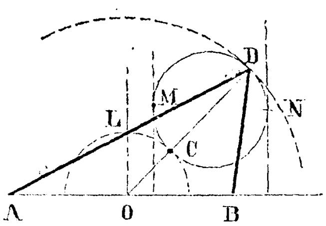


Fig. 934.

**1465.** *On donne deux points et une circonférence; déterminer sur la courbe un point* D *tel que* $AD^2 + BD^2$ *soit maximum ou minimum.*

Il faut joindre le milieu O au centre du cercle donné. C correspond au minimum et D au maximum.

**1466.** *Mêmes données; déterminer* C *de manière que la différence des carrés soit minima ou maxima.*

Il faut mener des tangentes perpendiculaires à AB.

1° Lorsque OL ne rencontre pas la circonférence donnée, M correspond au minimum et N au maximum.

2° Lorsque OL coupe la circonférence, chaque tangente donne un maximum, et la différence décroît lorsque le point s'approche de OL.

La différence est nulle pour les points où OL coupe la circonférence.

### Problème 475.

**1467.** *Trouver un point dans l'intérieur d'un triangle tel que la somme des carrés des distances de ce point aux trois sommets soit minima.*

(Voir *Méthodes*, n° 358.)

### Problème 475. — I.

**1468.** *Étant données deux circonférences* A *et* B, *trouver un point tel que les tangentes menées à l'une et à l'autre soient égales et se coupent sous un angle donné.*

Soit O ce point.

Par les points de contact, menons les rayons CA et DB, prolongés jusqu'à leur rencontre en E, et traçons OE.

Le quadrilatère OCED ayant deux angles droits, C et D, les deux autres angles en O et E sont supplémentaires.

Les triangles rectangles OEC et OED sont égaux comme ayant même hypoténuse OE, et un autre côté OD égal à OC; on a donc : $EC = ED$

ou $a + r = b + R$,

$a - b = R - r$,

quantité connue.

Ainsi, dans le triangle ABE, on connaît la base AB, l'angle opposé E (supplément de l'angle donné O), et la différence $a - b = R - r$ des deux autres côtés.

On peut donc construire ce triangle ABE (n° 989), prolonger AE et EB, et mener en C et D les tangentes qui déterminent le point O.

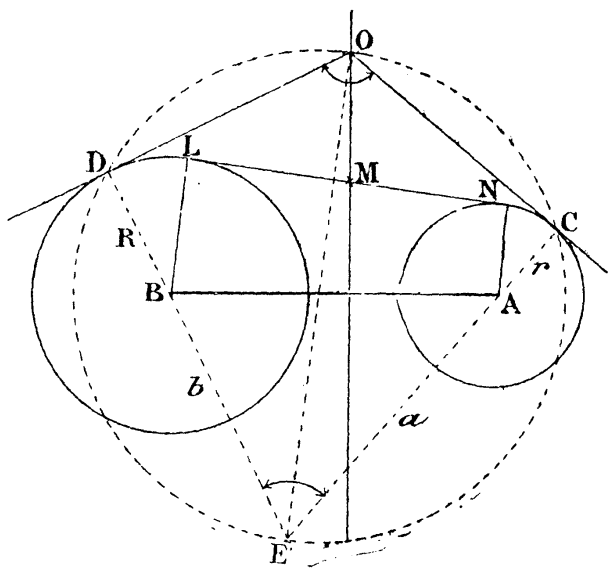


Fig. 935.

*Remarque.* On sait que le lieu des points d'où l'on peut mener des tangentes égales à deux circonférences est l'axe radical (G., n° 833; E. de G., n° 1398); ainsi le point O peut s'obtenir par l'intersection de l'axe radical des deux cercles, avec le segment AEB capable d'un angle supplémentaire de l'angle donné.

### Problème 476.

**1469.** *Sur une base donnée* EF, *on construit des triangles* EMF *dont la somme des côtés* EM, MF *est constante. Sur chaque côté* EM, MF, *pris pour diamètre, on décrit des circonférences. Quelle est l'enveloppe de ces circonférences?*

L'enveloppe est évidemment symétrique par rapport à EF, car le triangle peut être construit au-dessous de cette ligne aussi bien qu'au-dessus. Le point O, milieu de EF, doit être le centre de l'enveloppe, car à tout triangle EMF correspond un triangle égal tel que la longueur EM aboutirait au point F et la longueur FM aboutirait au point E.

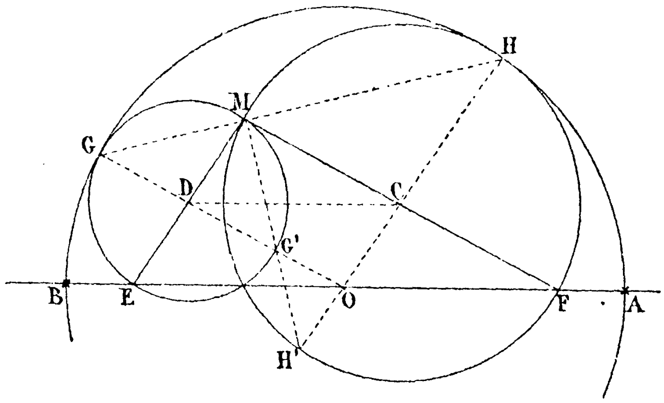



Fig. 936.

Nous sommes donc conduits à joindre le point O aux centres C et D, milieux respectifs de EM et MF; la figure DOCM est un parallélogramme.

Ainsi $$OH = OC + CM = OD + DM = OG;$$

donc l'enveloppe est un cercle décrit du point O comme centre, avec un rayon OH égal à la demi-somme constante MC + MD.

**1470.** Remarque. *Avec les données précédentes* (nº 1469). *Les trois points* G, M, H *sont en ligne droite. Les trois points* M, G', H' *sont aussi en ligne droite.*

**Problème 477.**

**1471.** *On donne deux cercles dont les centres* A *et* B *sont fixes et dont les rayons* a *et* b *doivent satisfaire à la relation*

$$an + bm = p^2,$$

*dans laquelle* m, n, p *représentent des lignes.*

*On demande l'enveloppe des tangentes communes à ces deux cercles.* (*N. A.*, 1851, p. 340.)

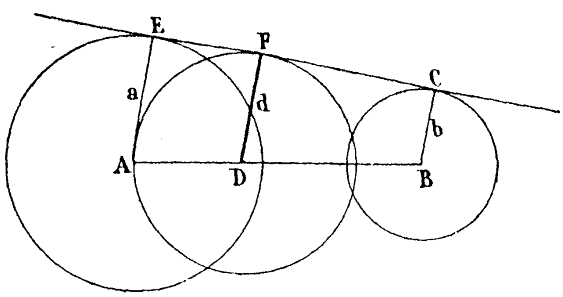



Fig. 937.

Divisons AB en parties inversement proportionnelles à $m$ et à $n$, c'est-à-dire prenons :

$$\frac{AD}{BD} = \frac{m}{n}.$$

Pour le trapèze ABCE formé par les rayons des points de contact, on aura (nº 1200) : $d = \frac{an + bm}{m + n} = \frac{p^2}{m + n}$.

Or $\frac{p^2}{m + n}$ est une quantité constante; donc l'enveloppe des tangentes est la circonférence décrite du point D comme centre avec $d$ pour rayon.

## Droites et Circonférences sécantes.

### Problème 478.

**1472.** *D'un point* C *donné comme centre, décrire une circonférence qui coupe les côtés d'un angle* O *de manière que la corde obtenue soit parallèle à une droite donnée* xy.

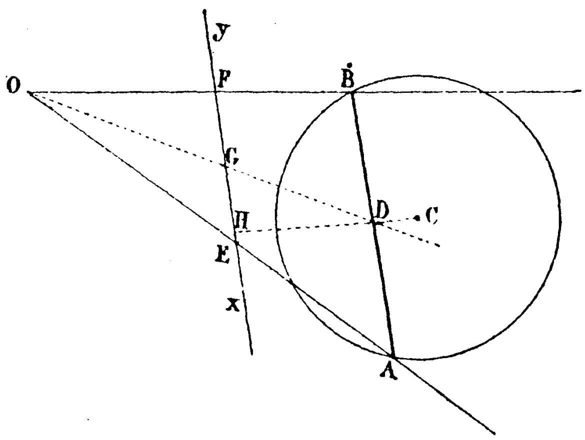



Fig. 938.

En supposant le problème résolu, on reconnaît que le point milieu D de la corde demandée doit se trouver sur la médiane OGD du triangle OEF et sur la perpendiculaire CDH abaissée du centre C sur $xy$.

### Problème 478. — I.

**1473.** *Avec un rayon donné, couper les côtés d'un angle donné de manière à obtenir un trapèze isocèle dont les bases soient dans un rapport donné.*

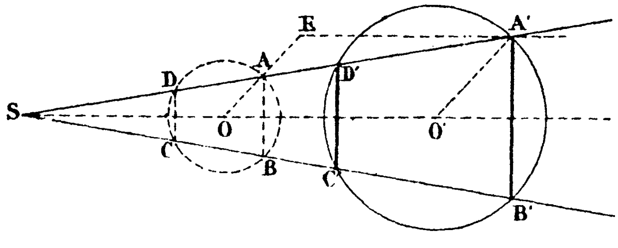



Fig. 939.

Le centre doit être sur la bissectrice; les bases sont perpendiculaires à cette ligne.

On emploie les figures semblables. On mène deux perpendiculaires AB, CD dont les longueurs soient dans le rapport donné; on circonscrit une circonférence au trapèze isocèle ABCD; soit O le centre, $OA = OB = OC = OD$ le rayon. On détermine facilement la position du centre O' tel que $O'A' = r$. Il suffit de prendre $OE = r$ et de mener EA' parallèle à la bissectrice SO.

### Problème 478. — II.

1474. *On donne une droite XY et deux points A et B situés de part et d'autre de cette droite; par les deux points, faire passer une circonférence qui intercepte sur XY la plus petite corde possible.*

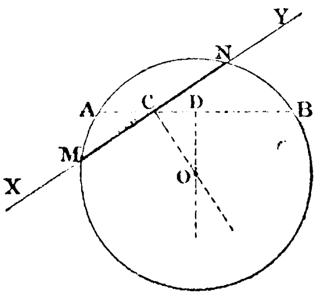


Fig. 940.

Supposons le problème résolu, et soit OB le rayon du cercle qui détermine la corde minima MN.

On sait que dans un cercle donné, la plus petite corde qu'on puisse mener par un point C est perpendiculaire au rayon qui passe par ce point.

Donc, pour déterminer le centre O du cercle demandé, il faut élever une perpendiculaire sur XY au point C, puis une perpendiculaire DO au milieu de AB.

Le point O sera le centre demandé.

### Problème 479.

1475. *Par deux points donnés A et B, faire passer une circonférence qui coupe en deux parties égales une circonférence donnée C.*

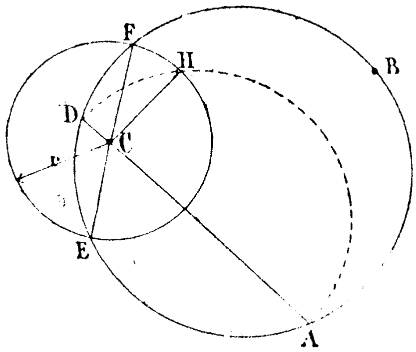


Fig. 941.

Soit le problème résolu et EF un diamètre du cercle donné C.

En menant ACD, on a (G., n° [illegible])

$$AC \cdot CD = CF \cdot CE = r^2.$$

Donc DC est une troisième proportionnelle à CA et $r$, et le problème est ramené à faire passer une circonférence par les trois points A, B, D.

Pour trouver la longueur de CD, on peut décrire une demi-circonférence ayant son centre sur AC, passant par A et par le point H extrémité du rayon CH perpendiculaire à AC, car on aura :

$$DC = \frac{CH^2}{AC}. \qquad \text{(G., n° 256.)}$$

### Problème 480.

1476. *Par deux points A et B, faire passer une circonférence qui coupe une circonférence C de manière que la corde commune ait une longueur donnée l.*

1° En supposant le problème résolu, et $MN = l$, on reconnaît qu'il faut déterminer le point O, où les cordes AB, MN doivent se couper.

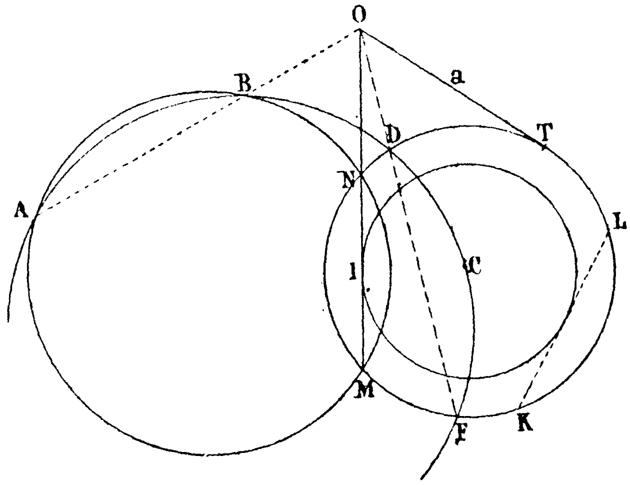



Fig. 942.

Il suffit de décrire une circonférence auxiliaire ABDF qui coupe le cercle C et de mener ABO, FDO.

En désignant OM par $x$, $ON = x - l$.

La relation connue $OM \cdot ON = a^2$ devient $x(x - l) = a^2$, et l'on est ramené à la question connue : *Déterminer les côtés d'un rectangle, connaissant leur différence* l *et leur produit* $a^2$. (G., n° 341.)

2° On peut aussi prendre une corde $KL = l$, décrire une circonférence de centre C tangente à cette corde, et par le point O mener une tangente ONM ; enfin faire passer une circonférence par les quatre points A, B, M, N qui donnent lieu à la relation

$$OA \cdot OB = OM \cdot ON.$$

**Problème 481.**

**1477.** *On donne trois points* A, B, C; *par deux de ces points* A *et* B, *faire passer une circonférence telle que la tangente menée du troisième point* C *ait une longueur donnée* l.

En supposant le problème résolu, et $CT = l$, on voit qu'en joignant le point C au point A on a :

$$CD \cdot CA = CT^2 = l^2.$$

On peut donc déterminer CD.

Pour cela, décrivons une demi-circonférence sur le diamètre AC, prenons $CE = l$ et abaissons la perpendiculaire ED.

Il faudra faire passer une circonférence par les trois points A, B, D.

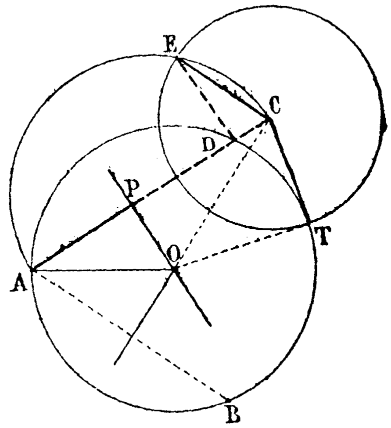



Fig. 943.

**Problème 481. — I.**

**1478.** *Par deux points donnés* A *et* B, *faire passer une circonférence qui coupe orthogonalement un cercle donné* C.

C'est la même question (fig. 943), car la longueur de la tangente CT est connue, elle égale le rayon du cercle C.

Mais on peut traiter la question en suivant une marche plus générale qui sera utilisée assez fréquemment.

Joignons le centre O, supposé connu, aux points A, C, T.

On a : $\overline{OC}^2 - \overline{OT}^2 = \overline{CL}^2 = l^2$; donc $\overline{OC}^2 - \overline{OA}^2 = l^2$.

Ainsi le centre O est sur la perpendiculaire PO, telle que la différence des carrés des distances de chacun de ses points à deux points C et A égale un carré donné $l^2$.

D'ailleurs, le centre se trouve aussi sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB.

**Problème 481. — II.**

**1479.** *Décrire une circonférence telle que les tangentes menées de trois points donnés* A, B, C *aient respectivement pour longueurs des lignes données* a, b, c.

Le problème proposé revient à *décrire un cercle qui coupe orthogonalement trois cercles donnés.*

Le centre du cercle demandé est le point de concours des axes radicaux des cercles considérés deux à deux. (G., nº 837.)

**Problème 481. — III.**

**1480.** *Décrire une circonférence qui passe par un point et qui coupe orthogonalement deux cercles donnés.*

C'est un cas particulier du précédent.

**Problème 482.**

**1481.** *Décrire une circonférence qui coupe orthogonalement trois circonférences données.*

Le centre du cercle demandé est le *centre radical* des trois cercles donnés, car les tangentes menées de ce point sont égales entre elles; il suffit de prendre la longueur de ces lignes pour rayon.

(G., nº 837, *Remarques* 1º ; E. de G., nº 1404 **a.**)

**Problème 483.**

**1482.** *Décrire une circonférence qui coupe trois cercles donnés suivant un diamètre.*

Lorsqu'un cercle en coupe deux autres A et B suivant des diamètres, le centre O se trouve sur une droite DO perpendiculaire à la ligne AB des centres et telle que, pour un point quelconque, on ait la relation :

$a^2 - b^2 = m^2 - l^2$ (nº 1401) (1).

De même, pour B et C, il faut qu'on ait :

$$b^2 - c^2 = n^2 - m^2. \qquad (2)$$

L'intersection des perpendiculaires DO, EO, est le centre demandé.

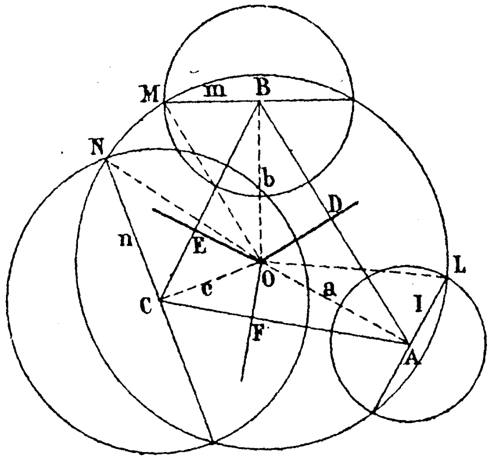


Fig. 944.

**1483.** Remarque. *Les trois lieux* DO, EO, FO *se coupent au même point.*

Le point O, où se coupent DO, EO, appartient au lieu des centres des cercles qui coupent A et C suivant un diamètre.

Les formules (1) et (2) conduisent au même résultat.

En effet, en les additionnant membre à membre, elles donnent :

$$a^2 - c^2 = n^2 - l^2, \qquad (3)$$

relation qui caractérise chaque point du lieu FO.

**Problème 483. — I.**

**1484.** *Par deux points donnés* B *et* C, *faire passer un cercle qui coupe un cercle* A *suivant un diamètre.*

Les lieux DO, FO sont déterminés par les relations (fig. 944) :

$$a^2 - b^2 = -l^2 \ (1 \ bis) \quad \text{ou} \quad b^2 - a^2 = l^2,$$

$$a^2 - c^2 = -l^2 \ (3 \ bis) \quad \text{ou} \quad c^2 - a^2 = l^2.$$

D'ailleurs, il suffit de construire un seul des lieux DO, FO, car le centre est aussi sur la perpendiculaire élevée au milieu de BC.

(Voir aussi le nº 1475.)

**Problème 483. — II.**

**1485.** *Par un point* C, *faire passer une circonférence qui coupe deux cercles donnés* A *et* B *suivant des diamètres.*

Les lieux sont déterminés par les relations suivantes :

DO $\qquad a^2 - b^2 = m^2 - l^2,$

EO $\qquad b^2 - c^2 = -m^2, \qquad$ (fig. 944)

FO $\qquad a^2 - c^2 = -l^2.$

On construit deux quelconques de ces lieux.

**Problème 483. — III.**

**1486.** *Décrire un cercle qui coupe orthogonalement les deux cercles* A *et* B *et le cercle* C *suivant un diamètre.*

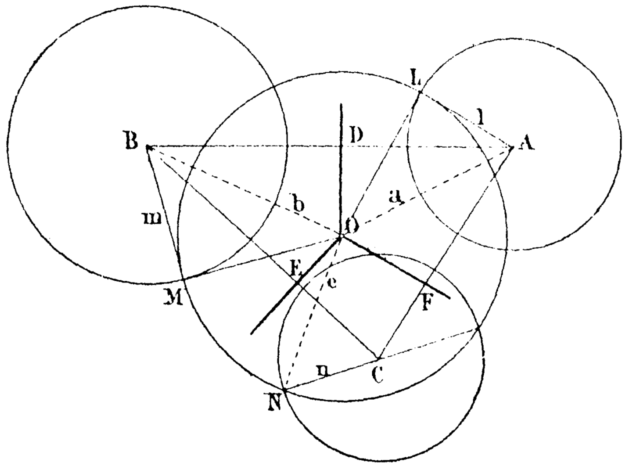



Fig. 945.

Pour A et B, le lieu DO est l'axe radical des deux cercles.

Pour A et C, B et C, la relation a été déterminée (nos 1401 et 1482).

| | |
|---|---|
| DO | $b^2 - a^2 = m^2 - l^2,$ |
| EO | $b^2 - c^2 = m^2 + n^2,$ |
| FO | $a^2 - c^2 = n^2 + l^2.$ |

On construit deux de ces lieux.

On peut se proposer les problèmes suivants :

**Problème 483. — IV.**

**1487.** 1° *Un cercle doit passer par un point* A, *couper orthogonalement* B *et couper* C *suivant un diamètre.*

2° *Un cercle doit couper orthogonalement un cercle* A *et couper* B *et* C *suivant des diamètres.*

**Problème 484.**

**1488.** *Par deux points* A *et* B, *faire passer une circonférence qui coupe une autre circonférence donnée sous un angle donné.*

(Voir *Méthodes*, no 228.)

**Note.** On lira avec intérêt dans les *Nouvelles Annales de mathématiques,* 1892, pp. 227 et 331, la belle étude *sur les cercles qui touchent trois cercles donnés, ou qui les coupent sous un angle donné,* par M. FOUCHÉ, agrégé de l'Université.

Voir aussi dans le *compte rendu du troisième congrès scientifique international des catholiques, tenu à Bruxelles du* 3 *au* 8 *septembre* 1894, la remarquable étude du R. P. POULAIN, S. J., sur *Quelques propriétés angulaires des cercles.*

**Problème 484. — I.**

**1488 a.** *On donne un triangle* ABC : *décrire un cercle qui soit vu respectivement de* A, B, C, *sous des angles* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Le centre du cercle demandé est celui d'où l'on verrait, sous des angles égaux, trois cercles qui auraient pour centres les sommets du triangle et dont les rayons seraient respectivement proportionnels aux cosécantes des moitiés des angles donnés.

CATALAN a cette même question dans ses *Théorèmes et Problèmes*, 6e édition, p. 225, P. XLVI.

Le problème énoncé antérieurement, no 881 **a**, est le corrélatif de 1488 **a**. (*Annales de Gergonne*, tome XIX, 1828-1829, p. 178.)

## Figures inscrites ou circonscrites.

**Problème 485.**

**1489.** *Par un point de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, mener des parallèles aux côtés de l'angle droit, de manière que le rectangle réalise certaines conditions imposées.*

*Le rapport des côtés doit égaler* $\frac{m}{n}$. (Voir *Méthodes*, no 99, *c.*)

*La somme des carrés des côtés adjacents doit égaler* $k^2$. (*d.*)

*Le produit des côtés adjacents du rectangle doit égaler* $k^2$. (Voir *Méthodes*, 99, **e.**)

**Problème 485. — I.**

**1490.** *Inscrire un carré dans un triangle* ABC.

Les deux premières constructions se rapportent à la méthode du problème contraire (no 213).

1re *Construction* (fig. 946). On construit un carré F'G'I'J' ayant un côté sur la base AC et un sommet J' sur un des deux autres côtés; puis l'on mène AI'I, ce qui permet de construire le carré FGIJ.

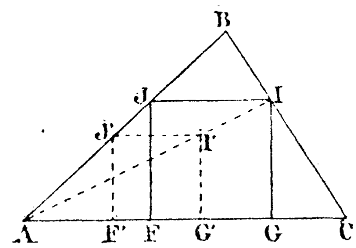


Fig. 946.

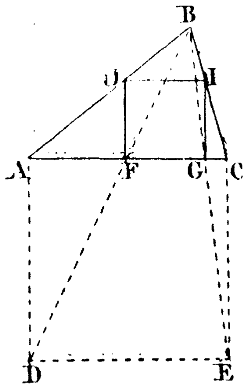


Fig. 947.

2e *Construction* (fig. 947). Sur la base AC, ou sur une parallèle à cette base, limitée aux deux autres côtés, on construit un carré ADEC et l'on mène DB, ce qui détermine le sommet F du carré demandé FGIJ.

3° *Méthode algébrique* (fig. 949). Soit $AC = b$, $BH = h$ et le côté du carré $= x$; on a :

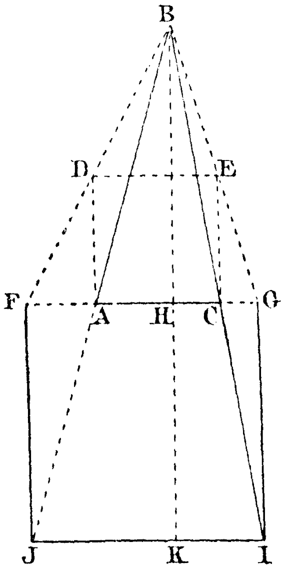


Fig. 948.

$$\frac{IJ}{AC} = \frac{BK}{BH} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{b} = \frac{h - x}{h};$$

d'où
$$x = \frac{bh}{b + h}. \qquad (1)$$

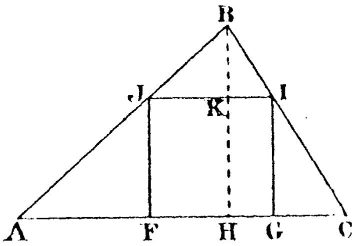


Fig. 949.

**1490 a.** *Remarques.* 1° Dans la 2e *construction*, si l'on construit le carré auxiliaire ACED sur la partie du plan occupée par le triangle ABC (fig. 948), on obtient le carré exinscrit FGIJ.

Si le sommet B était sur DE, c'est-à-dire si l'on avait $h = b$, le carré exinscrit serait infini ; si le sommet B était à l'intérieur du carré auxiliaire ACED, le carré exinscrit serait dans la région même du plan occupée par le triangle ABC.

2° Dans le cas du carré exinscrit (fig. 948), on a :

$$\frac{x}{b} = \frac{h + x}{h}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{bh}{h - b}.$$

Cette formule rend compte des diverses particularités que présente le carré exinscrit suivant la grandeur de la hauteur, par rapport à la base.

3° En représentant par $x$ et par $x'$ les côtés des carrés inscrits et exinscrits dans le triangle ABC (fig. 948), et prenant les inverses, on a :

$$\frac{1}{x} = \frac{b + h}{bh} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x'} = \frac{h - b}{bh}; \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2}{b}.$$

La base est moyenne harmonique entre les côtés des deux carrés relatifs à un même côté du triangle donné.

4° La formule
$$x = \frac{bh}{b + h},$$

qui donne la longueur du côté du carré inscrit dans un triangle, lorsque ce carré a deux sommets sur AC ou $b$, permet de comparer entre eux les trois carrés que l'on peut inscrire dans un même triangle. Le produit $bh$ est le double de l'aire du triangle, dont la longueur du côté du carré varie avec $b + h$, $a + h'$, $c + h''$; or les produits $bh$, $ah'$, $ch''$, sont égaux entre eux et constants pour un triangle donné; donc le minimum de la somme $b + h$, ou $a + h'$, $c + h''$ a lieu lorsque les deux facteurs sont égaux (n° 344) ; donc *le plus grand des trois carrés inscrits est celui qui repose sur le côté du triangle qui diffère le moins de la hauteur correspondante.*

Pour $b=h$, le côté du carré maximum égale $\frac{b}{2}=\frac{h}{2}$, et la surface du carré est la moitié de celle du triangle.

Le problème général peut s'énoncer comme il suit :

### Problème 485. — II.

**1490 b.** *On donne trois droites concourantes deux à deux; construire un carré ayant deux sommets sur l'une d'elles, et chacun des autres sommets respectivement placé sur les deux autres droites.*

Il y a généralement six carrés qui répondent à la question.

### Problème 485. — III.

**1490 c.** *Inscrire un carré dans un secteur circulaire* OABC.

1re *Construction* (fig. 950). Sur la corde AC, ou sur une de ses parallèles M'N', on construit un carré L'M'N'P' et l'on mène OL', OP', ce qui détermine le carré LMNP.

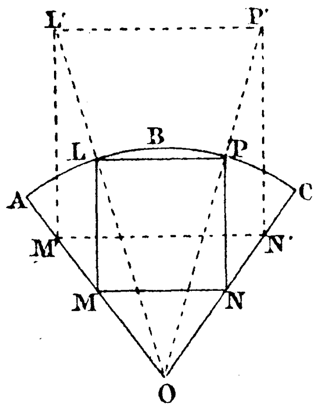



Fig. 950.

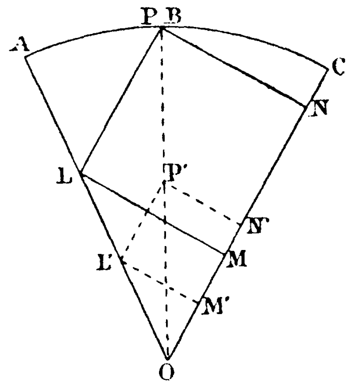



Fig. 951.

2e *Construction* (fig. 951). Si un côté du carré peut être appliqué sur un des rayons, on construit un carré auxiliaire L'M'N'P' et l'on mène OP'P, ce qui donne le carré LMNP.

**Note.** On pourrait considérer aussi le cas où le carré auxiliaire de la première construction est du côté du centre O par rapport à M'N'.

Le problème précédent est aussi résolu d'une manière fort simple dans le *Journal de mathématiques élémentaires* de M. DE LONGCHAMPS, 1897, p. 86 et 108.

### Problème 486.

**1491.** *Dans un cercle, inscrire un rectangle qui soit semblable à un rectangle donné.*

(Voir *Méthodes*, no 100, c.)

**Problème 486. — I.**

**1491 a.** *Dans un demi-cercle, inscrire un rectangle semblable à un rectangle donné.*

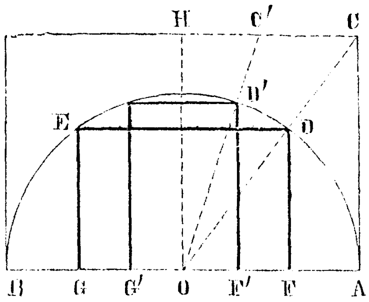


Fig. 952.

Il faut recourir aux figures semblables ou aux lieux géométriques.

1° Prenons $\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n}$ ; menons CO ; on aura :

$$\frac{DF}{FG} = \frac{CA}{AB} = \frac{m}{n}.$$

2° Si la petite base du rectangle doit être sur le diamètre, on peut prendre HC' tel que :

$$\frac{OH}{2HC'} = \frac{m}{n}, \quad \text{d'où} \quad \frac{F'G'}{D'F'} = \frac{m}{n}.$$

**Problème 486. — II.**

**1492.** *Dans un cercle, inscrire un rectangle dont la différence des carrés des côtés adjacents égale* $k^2$.

(Voir *Méthodes*, n° 100, **e.**)

**Problème 487.**

**1493.** *Dans un triangle, inscrire un rectangle de périmètre donné* 2p.

Discuter le problème, en attribuant à $p$ toutes les valeurs possibles et en prenant pour le triangle donné :

$$1° \ b < h, \quad 2° \ b = h, \quad 3° \ b > h.$$

(Voir *Méthodes*, nos 190 et 256.)

**Problème 487. — I.**

**1494.** *Dans un triangle, mener une parallèle* MN *à la base ; par les points* M, N, *mener des droites parallèles à une ligne donnée, de manière que le périmètre du parallélogramme inscrit ait une longueur donnée.*

(Voir *Méthodes*, n° 192.)

**Problème 488.**

**1495.** *Dans un triangle donné, inscrire un rectangle ayant pour diagonale une longueur donnée. — Minimum de cette diagonale.*

(Voir *Méthodes*, nos 193 et 195.)

**Problème 488. — I.**

**1496.** *Dans un triangle donné* ABC, *inscrire un rectangle dont une diagonale soit parallèle à une droite donnée* CX.

On transporte le sommet B en B', sur une perpendiculaire à la base AC (nº 186). On mène AF' parallèle à CX.

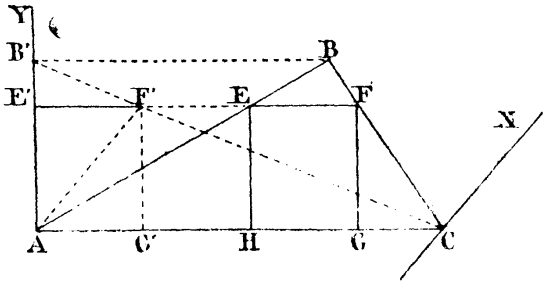


Fig. 953.

Le rectangle E'F'G'A fait connaître le rectangle égal EFGH.

### Problème 488. — II.

**1497.** *Dans un triangle quelconque, inscrire un rectangle semblable à un rectangle donné.*

(Voir *Méthode géométrique*, nº 209.)
(Voir *Méthode algébrique*, nº 303, a.)

### Problème 489.

**1498.** *Dans un triangle isocèle, inscrire un rectangle dont le périmètre soit le double du périmètre du triangle isocèle partiel qui surmonte le rectangle.*

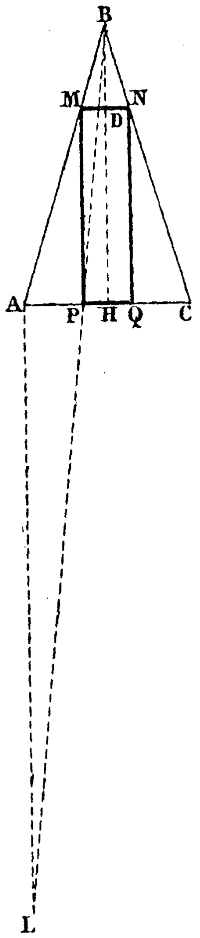


Fig. 954.

Soit $2(MP + MN) = 2(MN + 2BM)$ (fig. 954).

Le problème est ramené à trouver un point M tel que la hauteur MP soit égale à deux fois BM.

Il suffit de recourir aux figures semblables et d'élever une perpendiculaire AL égale à 2AB.

La droite LB détermine le point P.

### Problème 489. — I.

**1499.** *Dans un triangle isocèle, inscrire un rectangle tel que le périmètre du triangle partiel soit les $^2/_3$ du périmètre du rectangle.*

Représentons la longueur de la base par $2b$, la hauteur par $h$, AB par $l$ et BD par $x$; on trouve :

$$BM + MD = \frac{2}{3}(MP + 2MD),$$

ou
$$\frac{lx}{h} + \frac{bx}{h} = \frac{2}{3}\left(h - x + \frac{2bx}{h}\right),$$

d'où
$$x = \frac{2h^2}{3l + 2h - b}.$$

Quatrième proportionnelle facile à construire.

*Remarque.* On procéderait d'une manière analogue pour un rapport quelconque.

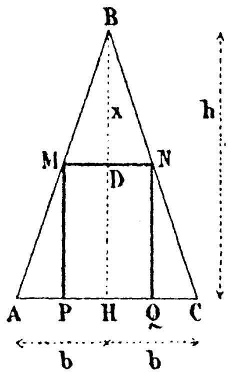


Fig. 955.

**Problème 489. — II.**

**1500.** Même problème. *La somme des périmètres du triangle partiel et du rectangle doit avoir une valeur donnée* s.

En utilisant les valeurs trouvées précédemment,

$$\frac{lx}{h} + \frac{bx}{h} + h - x + \frac{2bx}{h} = s,$$

on trouve :

$$x = \frac{h(s-h)}{l+3b-h}.$$

**Problème 489. — III.**

**1501.** Même problème. *La différence des périmètres du rectangle et du triangle doit égaler* d.

On trouve : $x = \dfrac{h(d-h)}{b-l-h}$ ou $x = \dfrac{h(h-d)}{h+l-b}$.

**Problème 490.**

**1502.** *Inscrire dans un triangle un autre triangle dont les côtés soient parallèles à des directions données.* (Paul SERRET, *des Méthodes en Géométrie*, 14.)

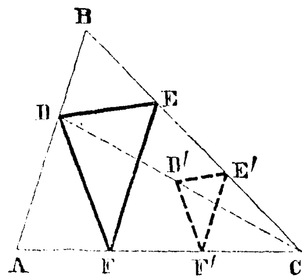


Fig. 956.

Il faut mener une droite E′F′ parallèle à une des lignes données ; par les points E′, F′, mener des parallèles E′D′, F′D′ aux deux autres droites données.

Le triangle D′E′F′ répondrait à la question, si le sommet D′ était sur AB ; il suffit donc de mener CD′D, puis DE, DF parallèles à D′E′, D′F′, et le côté EF sera parallèle à E′F′.

**1502 a.** *Remarque.* 1° Le problème comporte trois autres solutions :

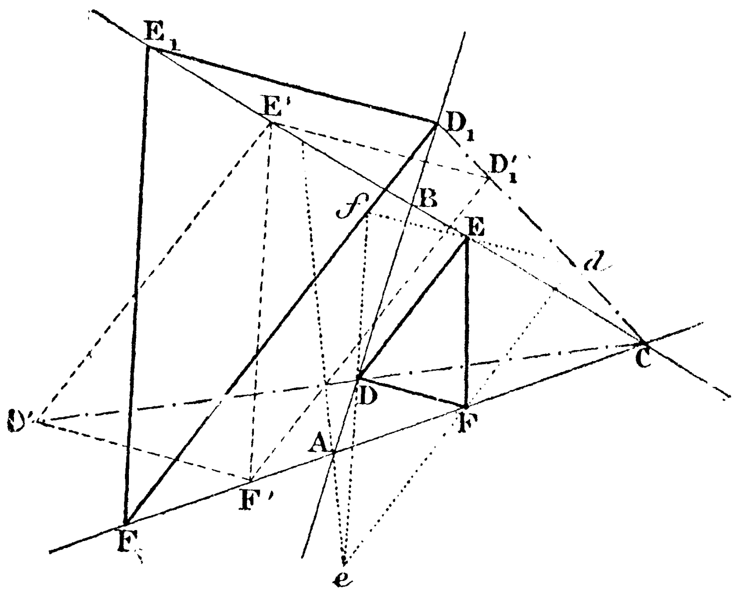


Fig. 957.

Ainsi en menant la droite E'F' parallèle à EF, puis $E'D'_1$ et $F'D'_1$ (fig. 957), enfin $CD'_1D_1$, on obtient le triangle $D_1E_1F_1$ qui répond à la question. On peut l'appeler *exinscrit* par rapport au triangle donné ABC.

Dans l'exemple proposé, la première droite parallèle E'F' est inscrite dans l'angle C ; or, si l'on inscrit dans l'angle A une parallèle à D'F', on retrouvera le triangle inscrit DEF et un exinscrit, relatif au côté BC ; puis une parallèle à D'E' inscrite dans l'angle B donnera encore DEF et un exinscrit relatif au côté AC.

2° Lorsque le triangle inscrit DEF est connu, on obtient facilement les trois triangles exinscrits : il suffit de tracer le triangle anticomplémentaire *def* de DEF. Le sommet *d* détermine $CdD_1$. La ligne *e*A donnerait le sommet d'un exinscrit sur le côté CB, et *f*B celui de l'exinscrit relatif au côté AC.

3° Lorsque les droites données comme direction sont respectivement parallèles aux côtés du triangle donné, le triangle inscrit n'est autre chose que le *triangle médian* ou *triangle complémentaire* de ABC (n° 432, Rem.) ; mais au point de vue géométrique, il n'y a pas lieu de chercher les exinscrits, car C et *d* coïncident.

### Problème 490. — I.

**1502 b.** *Dans un triangle donné* ABC, *inscrire un triangle* def *égal à un triangle donné* DEF.

On a recours au problème contraire. (Voir *Méthodes,* n° 215.)

**Note.** Ce problème est exposé dans le premier livre des *Principia mathematica philosophiæ naturalis,* de NEWTON (d'après IVAN ALEXANDROFF). *Problèmes de Géométrie élémentaire, groupés d'après les Méthodes employées pour leur résolution,* pages 83 et 84, n° 425.

### Problème 491.

**1503.** *Dans un cercle donné, inscrire un triangle isocèle, connaissant la somme de la base et de la hauteur.*

*Discuter le problème.*

(**a**) *Construction.* On sait qu'on prend $BE = \frac{l}{2}$, $BL = l$, et qu'on joint EL (n° 211).

Il peut y avoir deux solutions BAC, BA'C'.

Pour discuter le problème, il suffit de mener des droites parallèles à une ligne EL telle que $BE = {}^1/_2 BL$.

(**b**) *Maximum de* l. Le maximum de la somme *l* est donné par la tangente GH.

Les triangles POM, BGH sont semblables ; ainsi $OP = {}^1/_2 PM$.

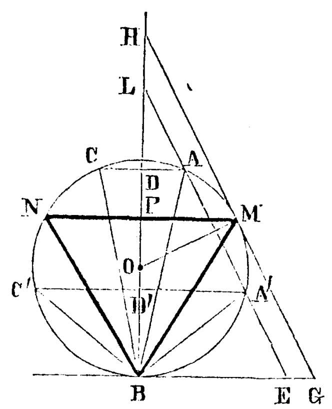


Fig. 958.

Donc $$PM^2 + \frac{PM^2}{4} = OM^2 = r^2, \quad PM^2 = \frac{4r^2}{5} ;$$

d'où $$PM = \frac{2r}{\sqrt{5}}, \quad OP = \frac{r}{\sqrt{5}}.$$

Or $$\mathrm{OH} = \frac{\mathrm{OM}^2}{\mathrm{OP}} = r^2 : \frac{r}{\sqrt{5}} = r\sqrt{5},$$

donc $$\mathrm{BH} \text{ ou } l = \mathrm{OH} + \mathrm{OB} = r(\sqrt{5}+1).$$

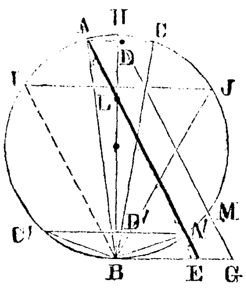


Fig. 959.

(c) (fig. 959) $l = 2r$.

Une solution est déterminée par le point M ; l'autre, donnée par le point H, se réduit à une droite.

(d) (fig. 959) $l < 2r$ ; soit $\mathrm{BL} = l$.

A' donne une solution telle que

$$\mathrm{A'C'} + \mathrm{BD'} = l.$$

A donne en réalité $\mathrm{BD} - \mathrm{DL}$,

ou $$\mathrm{BD} - \mathrm{AC} = l.$$

Ainsi, lorsque la droite EL coupe le diamètre, et non son prolongement supérieur, c'est-à-dire quand on a $l < 2r$, mais $l >$ zéro, une des solutions correspond à l'énoncé direct, tandis que l'autre solution correspond au problème suivant.

**1504. P.** *Inscrire un triangle isocèle tel que la hauteur diminuée de la base égale* l.

$l$ peut décroître de $2r$ à zéro.

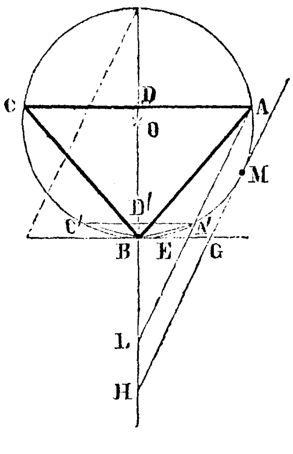


Fig. 960.

(e) $l = 0$.

La solution de la somme se réduit à un point ; celle de la différence, ou BIJ, donne un triangle tel que la hauteur égale la base (fig. 959).

(f) $l < 0$, c'est-à-dire $l$ porté à l'opposé de BH (fig. 960).

On prend encore $\mathrm{BE} = {}^1/_2 l$, $\mathrm{BL} = l$.

Ainsi $$\mathrm{A'C'} = \mathrm{D'L},$$

d'où $$\mathrm{A'C'} - \mathrm{BD'} = \mathrm{BL} = l,$$

de même $$\mathrm{AC} - \mathrm{BD} = \mathrm{BL} = l.$$

Ainsi il y a généralement deux solutions. Elles répondent à la question suivante.

**1504 a. P.** *Inscrire un triangle isocèle tel que la base diminuée de la hauteur égale* l.

(g) *Maximum de la différence* l.

Le maximum de BH correspond à la tangente MH.

Or $$\mathrm{OB} = r \quad \text{et} \quad \mathrm{OH} = r\sqrt{5},$$

donc $$\mathrm{BH} = r(\sqrt{5} - 1).$$

**Problème 491. — I.**

**1505.** *Dans un cercle, mener une corde parallèle à une tangente donnée, de manière que le rectangle inscrit qui aurait cette corde pour côté et le côté opposé sur la tangente ait un périmètre donné.*

Le périmètre du rectangle est double de la somme de la base et de la hauteur du triangle isocèle qui aurait la corde pour base et le point de contact pour sommet.

**Problème 492.**

**1506.** *On donne une circonférence et une droite; mener une corde telle que le carré qui aurait cette ligne pour un de ses côtés ait le côté opposé sur la droite donnée. Discuter le problème, en admettant que la droite varie de position par rapport au centre de la circonférence.*

(Voir *Méthodes*, n° 255; on peut consulter aussi : *Exercices d'Algèbre*, 4e édition, n° 1460, p. 743.)

**Problème 492. — I.**

**1507.** Question analogue. *La corde doit être un des côtés d'un rectangle semblable à un rectangle donné.*

Même solution. Sur XY on construit un rectangle semblable à celui qui est donné, $mn$ par exemple.

*Discussion.* Soit $m > n$.

Il y a deux parties principales :

1° Lorsque la corde doit être l'homologue de $m$;

2° Lorsqu'elle doit être l'homologue de $n$.

Chacune de ces parties donne lieu à une discussion complète analogue à celle du carré.

**Problème 493.**

**1508.** *On donne une circonférence et une droite; mener une corde telle que le rectangle qui aurait cette ligne pour un de ses côtés, ait le côté opposé sur la droite donnée et que le périmètre ait une longueur* 2p.

*Discuter le problème :*

1° *Lorsque la droite est fixe de position et que* 2p *varie;*

2° *Lorsque* 2p *est constant et que la distance de la droite au centre est variable.*

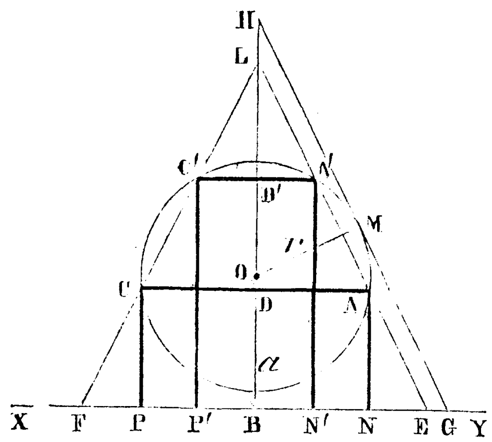


Fig. 961.

Le problème connu : *Dans un cercle, inscrire un triangle isocèle dont la somme de la base et de la hauteur ait une longueur donnée* l (nos 211 et 1503), conduit immédiatement à la construction suivante :

Il faut prendre $BE = \frac{p}{2}$, $BL = p$, et mener EL.

En effet, $AC = DL$,

donc $AC + BD = BL = p$.

Ainsi $2AC + 2AN = 2p$.

*Discussion.* 1° Pour une position donnée de XY, lorsque $p$ varie, la discussion est analogue à celle du triangle isocèle; le maximum de $p$ ou BH est donné par la tangente GMH.

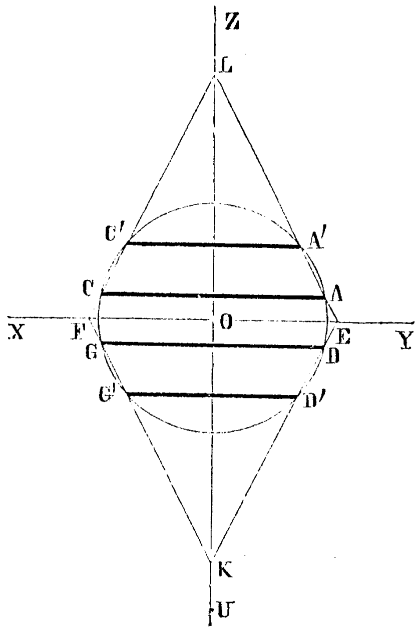


Fig. 962.

En désignant par $a$ la distance OB,

on a : $OH = r\sqrt{5}$, $OB = a$;

donc BH ou $p = a + r\sqrt{5}$.

2° Soit $p$ invariable et $a$ variable.

La discussion n'offre aucune difficulté; il suffit d'indiquer le moyen de reconnaître immédiatement les solutions au simple aspect de la figure, en déplaçant XY à partir du centre et d'un seul côté de la figure.

En prenant $OE = OF = {}^1/_2 p$,

$OL = OK = p$;

on a : $EF = p$, $LK = 2p$,

Déplacer XY revient à faire glisser le losange le long de UZ.

1° *Il y a autant de solutions qu'il y a de cordes communes au cercle et au losange.* Ainsi il peut y en avoir quatre.

2° *Lorsque le côté même du losange rencontre le cercle, la base plus la hauteur égalent* p. Ainsi : $b + h = p$.

3° *Quand le prolongement des côtés aux points* L *et* K *coupent le cercle*, on a : $h - b = p$.

4° *Lorsque, par suite de la valeur donnée à* p, *les prolongements des côtés aux points* E, F *coupent le cercle*, on a :

$$b - h = p.$$

5° *Quand deux côtés tels que* EL, FL, *par exemple, deviennent tangents, deux solutions se réduisent à une seule, et pour la position donnée à* XY, *la longueur* p *est maxima.*

6° *Suivant les valeurs relatives attribuées aux grandeurs* a, p, r, *on peut avoir quatre solutions, trois, deux, une ou aucune.*

**Problème 494.**

**1509.** *On donne deux points et une circonférence; trouver un point sur la circonférence tel qu'en le joignant aux deux points donnés la corde soit parallèle à la ligne qui joint les deux points.*

1re *Solution.* Rappelons sommairement la solution développée aux *Méthodes* (n° 140).

En supposant le problème résolu, menant la tangente AE (fig. 963), tout revient à déterminer le point E ; or les triangles ADE, FDC sont semblables, d'où $\frac{DE}{DC} = \frac{DA}{DF}$ ; $DE = \frac{DA \cdot DC}{DF} = \frac{DT^2}{DF}$,

quantité que l'on sait construire.

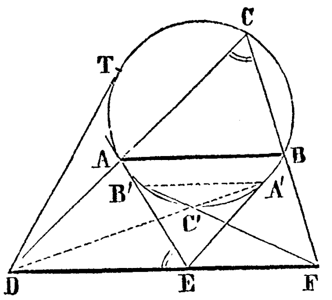



Fig. 963.

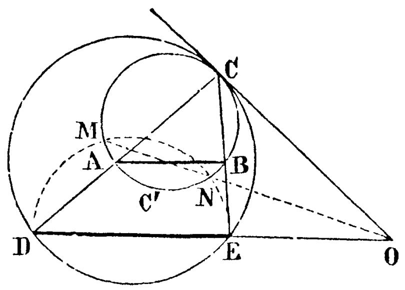



Fig. 964.

2° *Solution* (fig. 964). On sait que les circonférences tangentes interceptent des cordes parallèles AB, DE sur tout angle dont le sommet C est au point de contact; donc le problème revient à décrire une circonférence qui passe par deux points D, E et qui soit tangente à une circonférence donnée ABC. (G., n° 299.)

*Construction.* Par D, E faisons passer un arc qui donne lieu à la sécante MNO.

Menons la tangente OC ; C est le point demandé. La tangente OC′ donne une seconde réponse.

*Remarque.* On peut être conduit à la solution précédente en remarquant que le point C, supposé connu, est le centre de similitude des triangles CAB, CDE et des circonférences circonscrites à ces mêmes triangles ; donc, pour obtenir le point C, il faut faire passer par D, E une circonférence qui soit tangente à la circonférence donnée AMB.

### Problème 495.

**1510.** *On donne deux points, une circonférence et une droite; déterminer sur la corde un point tel qu'en le joignant aux deux points, la corde soit parallèle à la droite donnée.*

(Voir *Méthodes*, n° 52.)

### Problème de Castillon 496.

**1511.** *On donne trois points et une circonférence; inscrire dans cette circonférence un triangle tel que chaque côté passe par un des points donnés.*

(Voir *Méthodes*, n° 51.)

**1511 a. Note.** Pappus résolut le problème lorsque les trois points donnés sont en ligne droite. Gabriel Cramer, l'auteur des formules de ce nom, généralisa la question en prenant trois points quelconques, et la proposa à Castillon ; ce dernier en donna une solution synthétique en 1776, déduite de celle de Pappus.

La même année, LAGRANGE publia une solution analytique très simple ; mais la construction la plus élégante est celle que nous avons donnée ; elle est due à un jeune Napolitain, ANNIBALE GIORDANO DI OTTAIANO. D'autres savants ont aussi résolu le même problème ; on doit citer MALFATTI, LHUILIER, SERVOIS et PONCELET. (*N.A.*, 1844, page 463, note de TERQUEM.)

*Les Annales de Gergonne* donnent la solution du problème 496 et du suivant, par VECTEN, ROCHAT et FAUQUIER (Tome II, 1811-1812, pp. 27 et 29), et par J.-B. DURRANDE (Tome XIV, 1823-1824, pp. 46 et 48).

* LAGRANGE, né à Turin en 1736, mort à Paris en 1813. On lui doit le *Calcul des variations*, un traité de *Mécanique analytique*, la *Théorie des fonctions analytiques*, la *Résolution des équations numériques*.

* CASTILLON (1709-1791) J.-F SALVEMINI, né à Castiglione, en Toscane, dont il prit le nom ; professeur à l'École d'artillerie et membre de l'Académie de Berlin.

### Problème 496. — I.

**1511 b.** *A un cercle circonscrire un triangle dont chaque sommet soit sur une droite donnée.*

Ce problème est corrélatif de celui de Castillon et se résout facilement à l'aide des polaires réciproques. (*A. de G.*, tome I, 1810-1811, p. 125.) SERVOIS, alors professeur à l'École d'artillerie de Lafère, en a donné une solution en n'employant que la règle. (Voir p. 337 du même tome des *Annales de Gergonne.*)

### Problème 496. — II.

**1512.** *A un quadrilatère* ABCD *cicronscrire un quadrilatère semblable à un quadrilatère donné* egfh. (LAMÉ, p. 16, nº 12, de *Examen*, etc.)

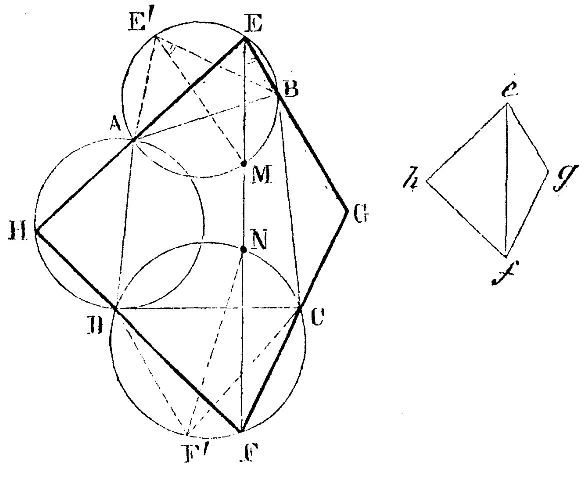


Fig. 965.

En procédant d'une manière analogue à celle qu'on a employée pour circonscrire un carré à un quadrilatère quelconque (nº 1020), on est conduit aux constructions suivantes :

Sur AD, décrire un segment capable de l'angle *h* ; sur AB, un segment capable de l'angle *heg*, et sur DC, un segment capable de *gfh*. Actuellement, il faut trouver un point H, tel que le triangle EHF soit semblable à *ehf*. Pour cela on divise l'arc AMB en deux parties, telles que l'angle AEM $=$ *hef*, et par suite MEB $=$ *feg*.

Il suffit de faire l'angle AE'M égal à *hef*. De même, il faut faire DF'N $=$ *hfe*, puis mener MN ; cette droite détermine les sommets E, F. Les quadrilatères EGFH, *egfh* sont semblables comme formés de triangles respectivement semblables.

**1512 a. Note.** On peut traiter directement le cas particulier suivant :
*Étant données quatre droites* a, b, c, d, *situées dans un même plan, mener*

*une transversale qui les rencontre en quatre points* A, B, C, D, *de manière qu'on ait :* AB = BC = CD.

Voir *Des Méthodes en Géométrie,* par Paul SERRET, p. 13, problème I, et *Mathesis,* 1903, page 88, solution par DELAHAYE de Roye.

* LAMÉ (1795-1870), auteur de: *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie,* 1818, G. LAMÉ, alors élève ingénieur au Corps royal des Mines.

Cet ouvrage est cité par MM. RITT (*Problèmes de Géométrie*), PAUL SERRET (*Des Méthodes en Géométrie*), CH. DE COMBEROUSSE (*Cours de Mathématiques à l'usage des candidats à l'École Centrale,* tome II). — Il a été reproduit de nos jours.

## Construction des Triangles.

### Problème 497.

**1513**. *Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et le rapport des deux autres côtés.*

### Problème 497. — I.

**1514**. *Construire un triangle, connaissant deux côtés et le pied de la bissectrice qui tombe sur l'un d'eux.*

### Problème 498.

**1515**. *Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et les produits des deux côtés qui comprennent cet angle.*

(Voir *Méthodes,* nº 106.)

### Problème 499.

**1516**. *Construire un triangle, connaissant un angle, le produit des côtés qui comprennent cet angle, et sachant que la longueur de la base doit être minima.*

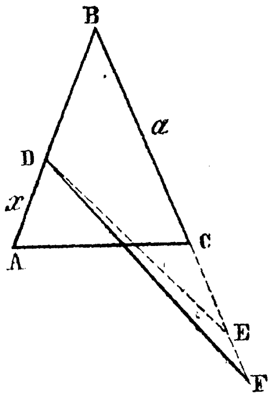


Fig. 966.

Construisons un triangle isocèle ABC et un triangle quelconque DBF tels que

$$AB \cdot BC = DB \cdot BF.$$

Soit $AB = BC = a$; prenons deux grandeurs égales AD et CE, soit $x$ cette longueur.

Le produit $AB \cdot BC = a^2$.

$$DB \cdot BE = (a - x)(a + x) = a^2 - x^2.$$

Quelque petit que soit $x$, ce produit est moindre que $a^2$. Or, pour que $DB \cdot BF = a^2$, il faut donc que CF soit plus grand que CE; donc $DF > DE$; mais on a vu (nº 581) que AC est $<$ DE; donc, *a fortiori*, on a $AC < DF$.

Par conséquent, *le triangle isocèle est celui dont la base est minima.*

### Problème 500.

**1517**. *Construire un triangle, connaissant la base, la hauteur et la somme des carrés des deux autres côtés.*

(Voir *Méthodes,* nº 107.)

**Problème 501.**

**1518.** *Construire un triangle, connaissant deux côtés et la longueur de la bissectrice de l'angle compris entre ces côtés.*

(Voir *Méthodes*, n° 43.)

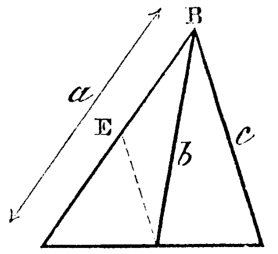



Fig. 967.

A cette solution on peut rattacher la suivante (*Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, 1877, p. 303).

On mène DE parallèle à AB.

On a : $$\frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA} = \frac{a}{a+c},$$

car $$\frac{CD}{DA} = \frac{a}{c};$$

$$\frac{CE}{a} = \frac{a}{a+c}, \quad CE = \frac{a^2}{a+c}.$$

D'ailleurs $$BE = a - \frac{a^2}{a+c} = \frac{a^2 + ac - a^2}{a+c} = \frac{ac}{a+c}.$$

On peut construire le triangle isocèle DEB, dont les trois côtés sont connus, puis prendre $BC = a$, etc.

*Remarque.* On peut encore donner la solution ci-après (DE COMBEROUSSE, *Cours de Mathématiques à l'usage des candidats à l'École Centrale*, t. II, p. 224) :

Supposons le problème résolu.

Prenons $BE = BA$; la droite AE est perpendiculaire à la bissectrice BD; menons la parallèle MDN.

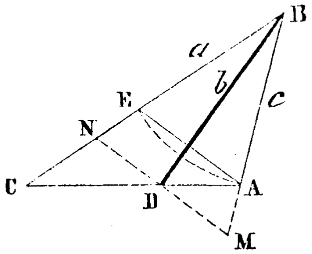



Fig. 968.

On a : $$\frac{a}{c} = \frac{CD}{DA};$$

mais $$\frac{CN}{NE} = \frac{CD}{DA} = \frac{a}{c}.$$

Ainsi on peut connaître le point N, car il suffit de diviser CE, différence des côtés donnés, en segments proportionnels à ces mêmes côtés $a$ et $c$.

Puis construire un triangle rectangle NBD, connaissant la hauteur BD et l'hypoténuse BN. Ce triangle fera connaître l'angle CBD et, par suite, l'angle ABC.

**Problème 501. — I.**

**1519.** *Construire un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et la différence des carrés des côtés de l'angle droit.*

Soit $a$ l'hypoténuse et $m^2$ la différence données.

1er *Moyen.* On a : $$b^2 + c^2 = a^2,$$
$$b^2 - c^2 = m^2;$$

d'où $$b^2 = \frac{a^2 + m^2}{2} \quad \text{et} \quad c^2 = \frac{a^2 - m^2}{2}.$$

On peut donc connaître $b$ et $c$ et construire le triangle.

Comme construction graphique, le moyen suivant est plus rapide.

2e *Moyen.* Sur l'hypoténuse donnée BC, décrivons une demi-circonférence; puis construisons le lieu géométrique DA des points dont la différence des carrés des distances aux points B et C égale $m^2$ (nº 71).

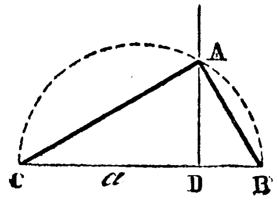


Fig. 969.

Le point A où DA coupe la demi-circonférence est le sommet de l'angle droit.

### Problème 502.

**1520.** *Construire un triangle semblable à un triangle donné* T, *et dont les sommets se trouvent sur trois parallèles données* M, N, P.

Soit ABC un triangle semblable à T. Considérons trois parallèles quelconques M, N, P, menées par les sommets; traçons la circonférence circonscrite, et menons CD et AD.

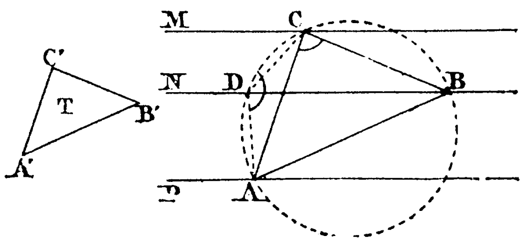


Fig. 970.

L'angle inscrit $BDC = BAC = A'$, qui est donné; de même l'angle inscrit $BDA = BCA = C'$, qui est donné.

On peut donc prendre le point D à volonté sur la droite du milieu N, construire l'angle A' au-dessus et l'angle C' au-dessous, et décrire une circonférence par les trois points A, D, C. Le triangle ABC sera le triangle demandé.

On remarquera que les deux angles qu'il faut construire de part et d'autre de la droite du milieu, sont ceux dont les sommets doivent être sur les deux autres lignes.

*Remarque.* On peut avoir six solutions différentes, quant à la grandeur des triangles obtenus.

### Problème 502. — I.

**1520 a.** *Construire un triangle semblable à un triangle donné* T, *et dont les sommets se trouvent sur trois circonférences concentriques données.*

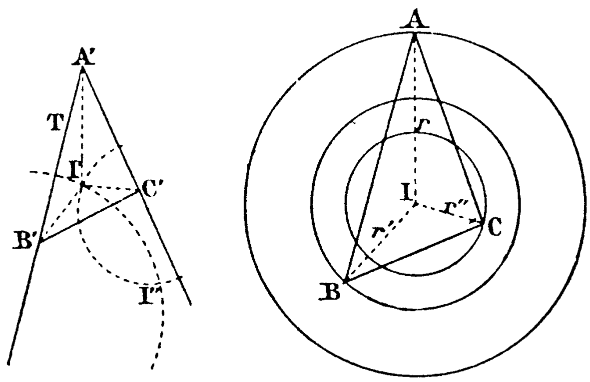


Fig. 971.

Soit ABC un triangle semblable à T. D'un point quelconque I, avec les distances IA, IB, IC, décrivons trois circonférences concentriques.

Sur A'B', construisons le triangle A'B'I' semblable à ABI; le point I' est homologue de I, les distances I'A' et I'B' sont dans le rapport $\frac{r}{r'}$, et le point I' appartient à un lieu géométrique connu. (G., nº 307.) De même, les distances I'A' et I'C' sont dans le rapport $\frac{r}{r''}$, et le point I' appartient au second lieu géométrique analogue au premier.

De ces considérations résulte la construction suivante, qui suppose donnés le triangle T et les trois circonférences ayant pour rayons $r$, $r'$, $r''$.

Construire sur A'B' le lieu des points dont les distances aux deux points A' et B' sont dans le rapport $\frac{r}{r'}$, et sur A'C' le lieu des points dont les distances aux deux points A' et C' sont dans le rapport $\frac{r}{r''}$; joindre le point de rencontre des deux lieux aux trois sommets du triangle T; mener IA quelconque : construire les angles AIB et AIC égaux respectivement à A'I'B' et A'I'C', et achever le triangle ABC.

*Remarque*. On peut prendre pour homologue du centre I le second point de rencontre I'' des deux lieux ; ce qui donnerait une seconde solution.

Enfin, on peut réserver pour la circonférence extérieure l'un quelconque des trois sommets A, B, C ; et ainsi l'on peut avoir douze solutions différentes, quant à la grandeur des triangles obtenus.

Si les lieux ne se rencontraient pas, le problème serait impossible.

**1520 b. Note.** Consulter sur ce problème une *Note de Géométrie*, par M. Combier, ingénieur en chef des ponts et chaussées. L'auteur donne une étude trigonométrique très complète de la question proposée, et en étudie plusieurs autres et notamment la détermination d'un triangle, connaissant les points G, I, O, le centre de gravité, le centre du cercle inscrit et celui du cercle circonscrit ; mais on ne peut pas construire le triangle en n'employant que la droite et le cercle. (*Nouvelles Annales*, 1870, p. 311, Lemoine ; et *Journal de Mathématiques élémentaires* de MM. Bourget et Kœhler*, 1879, pages 120 et 133.)

Lamé, dans son *Examen des Méthodes, etc.*, a traité la question 1520 a, dans le cas où le triangle demandé doit être équilatéral (p. 81, nº 31, *Problème*).

**1520 c.** *Problème d'Euler*. Le problème précédent de Combier revient au problème d'Euler : *Construire un triangle, connaissant* I, G, H, car on obtient O en prolongeant HG d'une grandeur GO égale à la moitié de HG. La question a été résolue par Lemoine, mais dans le cas général on ne peut pas construire le triangle ainsi qu'on vient de le dire (*N. A.*, 1870, pp. 311 et 315 ; *Intermédiaire des Mathématiciens* 1904, p. 301, nº 2815. MM. H. Brocard et E. A. Majol). On peut lire utilement la *discussion d'un triangle donné par les points remarquables* O, I, H, par M. G. Fontené, inspecteur à Paris (*N. A.*, 1905, p. 241) et la *Correspondance* (*N. A.*, 1908, p. 558).

*Construire un triangle, connaissant trois points remarquables de ce triangle*, peut donner lieu à un très grand nombre d'intéressants exercices, surtout lorsqu'on utilise les points K, Ω, Ω' de Lemoine et de Brocard bien connus maintenant ; nous nous bornons à en indiquer les suivants :

ABG — AGO — AGK — AOK — ABK

ABΩ — AOΩ.

(*Mathesis*, tome VII, 1887, p. 246, d'après le Dr A. Emmerich.)

Pour la construction des triangles, voir aussi la note 1523 e.

* Kœhler, décédé en 1889, directeur des études du cours préparatoire de Sainte-Barbe, bien connu par ses *Problèmes de Géométrie analytique*. (*J. M. S.*, 1889, page 68.)

### Problème 503.

**1521.** *Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et le rapport de la somme à la différence des deux autres côtés.* (Diplôme de fin d'études, Clermont-Ferrand, 1871.)

Supposons le problème résolu ; BAC le triangle demandé.

Le lieu du point D tel que, pour tout triangle inscrit dans le segment BAC, on ait $BD = AB + AC$, est l'arc de segment capable de l'angle $\frac{A}{2}$ (n° 921).

Le lieu du point E, pour lequel

$$BE = AB - AC,$$

est l'arc de segment capable de $90^\circ + \frac{A}{2}$ (n° 922).

On connaît le rapport $\frac{BD}{BE} = \frac{m}{n}$.

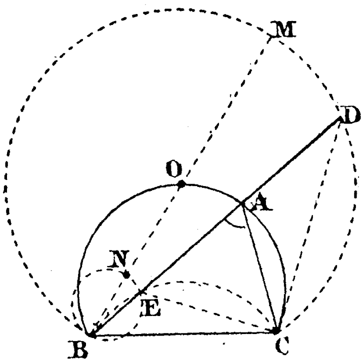


Fig. 972.

Donc, par rapport au point B et à l'arc BDC, il faut écrire le lieu des points qui divisent les cordes telles que BD dans le rapport donné.

Ainsi, on peut mener le diamètre BM, prendre BN tel que $\frac{BM}{BN} = \frac{m}{n}$, et décrire une circonférence sur le diamètre BN.

L'intersection de ce lieu et de l'arc de segment capable de $90^\circ + \frac{A}{2}$ fait connaître le point E.

### Problème 503. — I.

**1522.** *Construire un triangle* ABC, *connaissant la bissectrice, la hauteur qui partent du sommet* A *et le produit des côtés issus de ce même sommet.*

En supposant le problème résolu, on construit le triangle rectangle HAI ayant la bissectrice pour hypoténuse et $h$ pour un de ses côtés ; on sait que la bissectrice divise en deux parties égales l'angle formé par la hauteur et le diamètre du cercle circonscrit ; donc, en prenant la droite symétrique de $h$ par rapport à AI, on aura la direction du diamètre AOD ; d'ailleurs, on sait que le produit de la hauteur par le diamètre égale celui des deux côtés $b$ et $c = k^2$, produit connu, donc

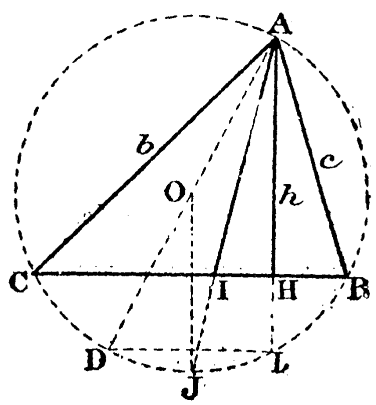


Fig. 973.

$$2R = \frac{bc}{h} = \frac{k^2}{h}.$$

La circonférence décrite sur le diamètre AOD détermine les sommets B et C.

**Problème 503. — II.**

**1322 a.** *Construire un triangle* ABC, *connaissant trois quelconques des lignes suivantes : hauteur, bissectrice, médiane, symédiane, qui partent d'un même sommet.*

Soient A le sommet commun, $h$, $i$, $m$, $s$, les quatre lignes ; on a les quatre combinaisons ci-après :

$$h,\ i,\ m. — h,\ i,\ s. — h,\ m,\ s. — i,\ m,\ s.$$

1° On donne $h$, $i$, $m$.

Soit AH la hauteur (fig. 974) ; on mène une perpendiculaire à cette ligne par le point H ; puis, avec les longueurs $m$ et $i$, on coupe la perpendiculaire en M et en I. Prolongeons la bissectrice AI jusqu'au point J, où elle rencontre la perpendiculaire élevée sur MH par le point M de la médiane.

Le centre O du cercle circonscrit au triangle demandé est à l'intersection de cette perpendiculaire MO et de celle qui passe par le milieu P de AJ.

2° On donne $h$, $i$, $s$.

Il faut joindre comme ci-dessus et l'on détermine la position de AH, AI, AS ; puis on mène AM, faisant avec la bissectrice un angle égal à l'angle SAI, et l'on retombe sur le n° 1.

3° On donne $h$, $m$, $s$.

On détermine la position de AH, AM, AS, puis la bissectrice de l'angle MAS ramène au n° 1.

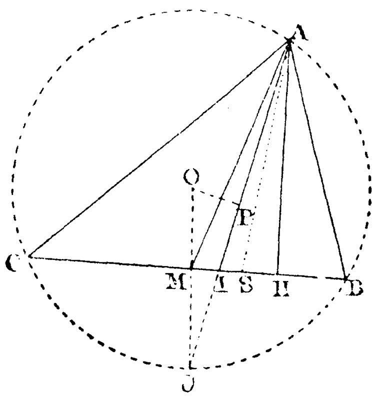


Fig. 974.

4° On donne $i$, $m$, $s$.

Pour être ramené au n° 1, il faut construire un triangle MAS tel que la ligne AI $= i$ soit bissectrice de l'angle MAS.

On prend d'abord AI ; du centre A, avec les rayons $m$ et $s$, on décrit des circonférences concentriques ; le problème revient à mener par le point I une droite MIS qui rencontre les deux circonférences de manière qu'on ait : $\frac{\text{MI}}{\text{SI}} = \frac{\text{MA}}{\text{SA}} = \frac{m}{s}$, il suffit de recourir à un lieu géométrique bien connu. (Voir *Méthodes*, n° 65.)

*Remarque.* On peut remplacer la bissectrice intérieure $i$ de l'angle BAC par sa bissectrice extérieure $e$.

Les deux bissectrices sont les côtés d'un triangle rectangle IAE, dont AH est la hauteur, d'où il résulte que les données $e$, $h$, $i$ ne correspondent qu'à deux conditions, et que l'on peut remplacer $h$, $i$, n$^{os}$ 1 et 2, par $e$, $i$.

**Problème 503. — III.**

**1322 b.** *Construire un triangle, connaissant la bissectrice* AI *de l'angle* A, *le rectangle* bc *des deux côtés qui comprennent cet angle, et la différence* $\delta$ *des angles à la base* (fig. 973 et 974).

La différence des angles adjacents I égale $B - C = \delta$ (n° 465); on peut donc construire le triangle rectangle AIH et déterminer ainsi la hauteur AH; or $2Rh = bc$, ce qui donne le diamètre du cercle circonscrit AOD. On connaît la direction de ce diamètre puisque la bissectrice divise en parties égales l'angle DAH formé par la hauteur et le diamètre issus du même sommet A.

Le problème précédent a été proposé dans le *J. M. E.* de LONGCHAMPS, et résolu en 1883, page 158.

**Problème 503. — IV.**

**1522 c.** *Construire un triangle* ABC, *connaissant la base* BC, *la médiane partant de* A *et la différence* $\delta$ *des angles* B *et* C.

Soient $AD = m$, $BC = a$, $B - C = \delta$.

1<sup>re</sup> *Solution*. On a :

$$\overline{AD} \cdot DM = BD^2 = \frac{a^2}{4};$$

d'où
$$DM = \frac{a^2}{4m}.$$

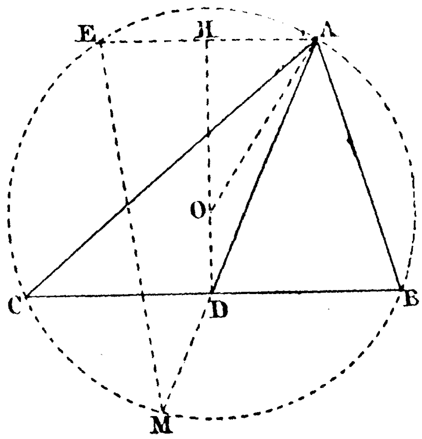


Fig. 975.

En menant la parallèle AE, on a :

$$\text{angle } AOH = AME = \delta,$$

donc
$$\text{angle } AOD = 180^\circ - \delta.$$

*Construction*. Sur la médiane AD, on décrit un segment capable de $180^\circ - \delta$; on prolonge AD d'une longueur $DM = \frac{a^2}{4m}$; puis on élève une perpendiculaire sur le milieu de la corde AM, afin de déterminer le centre O du cercle circonscrit; enfin du point D, avec $\frac{a}{2}$ pour rayon, on coupe le cercle circonscrit en B et C.

2<sup>e</sup> *Solution*. En supposant le problème résolu et ABC le triangle demandé, sur DA pris pour homologue de DB, construisons un triangle DAM qui soit directement semblable à DBA.

On a angle $BAM = CDA$ et $\frac{BA}{AM} = \frac{CD}{DA}$,

donc l'angle $ABM = C$, et l'angle $MBC = \delta$; enfin $DM = \frac{DA^2}{DB}$, longueur facile à construire.

Donc : 1° Tracer la droite BM faisant l'angle $\delta$ avec BC.

2° Construire $\frac{DA^2}{DB}$ ou $\frac{2m^2}{a}$, ce qui donne la longueur de DM; du point D comme centre, avec la longueur précédente, couper BM en M.

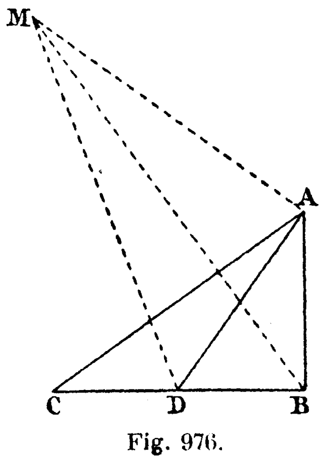


Fig. 976.

3° La bissectrice de l'angle BDM est DA; et comme $DA = m$, la construction est terminée.

**1522 d. Note.** La 1re solution est de MM. B. NIEWENGLOWSKI et WILD. La 2e est de M. LAISANT. — Dans les comptes rendus de l'*Association française pour l'avancement des Sciences*, des congrès de Boulogne-sur-Mer, en 1899, et de Paris, en 1900, M. LEMOINE a comparé quatorze solutions géométriques du problème, au point de vue géométrographique, et il a donné la préférence à la solution de M. LAISANT.

Les autres solutions sont dues à MM. PAUL NIEWENGLOWSKI, E. COLLIGNON, DESBOVES, BESSEL, cité par BROCARD ; même solution donnée par W. SCOTT, ESPANET, BARBARIN, DURAND-LORIGA, SANCHEZ DE LA CAMPA, A. P. ERICSSON.

Voir aussi la solution de M. MOZZICONACCI de Sollacaro (Corse), dans le *Bulletin* de MM. GÉRARD et MICHEL, 1903-1904, p. 298.

Dès 1875, dans la 2e édition des *Questions de Géométrie élémentaire*, M. DESBOVES avait indiqué deux solutions de ce problème. La première, avec discussion complète, était de M. NIEWENGLOWSKI, alors professeur de mathématiques spéciales à Reims.

M. DESBOVES a donné divers autres cas intéressants de construction de triangles. (Loc. cit., pp. 310 à 332.)

### Problème 503. — V.

**1522 e.** *Construire un triangle, connaissant le produit de deux côtés, la différence des angles opposés et le troisième côté.* (ANSERMET, de Vevey, *Intermédiaire des Mathématiciens,* 1909, p. 7, no 3511.)

Voir dans le même recueil les solutions suivantes : par BARBARIN, p. 167 ; par WELSCH, p. 179.)

### Problème 504.

**1523.** *Construire un triangle, connaissant les rayons de deux des cercles tangents aux trois côtés et le rayon du cercle circonscrit.* (Van AUBEL, *Nouvelle Correspondance mathématique,* 1876, p. 315.)

Soit ABC le triangle demandé.

On sait que les quatre points B, O, C, O′ appartiennent à une circonférence dont le centre est au point F ; par suite, DF $=$ R (no 1259).

D'ailleurs, le *théorème d'Euler* (no 327) donne :

$$OD^2 = R(R - 2r),$$
$$O'D^2 = R(R + 2r').$$

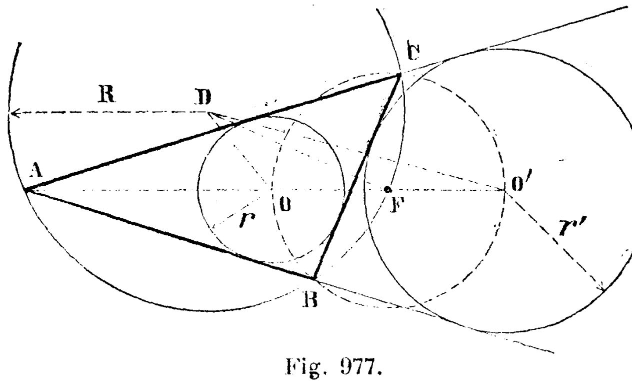



Fig. 977.

Ainsi dans le triangle ODO′, on connaît deux côtés OD, O′D et la médiane DF du troisième côté, et l'on peut construire le triangle (no 980, 2o).

Puis on décrit les cercles O et O′, et l'on mène les tangentes communes AB, AC, BC.

**Problème 504. — I.**

**1523 a.** *Construire un triangle rectangle, sachant que la différence des carrés des côtés de l'angle droit égale un carré donné* $k^2$, *et que les sommets du triangle doivent se trouver respectivement sur trois droites parallèles données.*

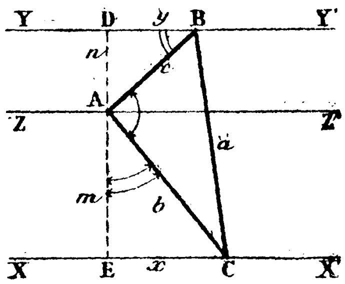


Fig. 978

Soit ABC le triangle demandé, $m$, $n$, les distances données et $k^2$ la valeur de $b^2 - c^2$.

On peut prendre un sommet A à volonté sur l'une des droites. Le triangle sera déterminé, si l'on connaît BD.

Soit donc $EC = x$ et $BD = y$.

On a les relations suivantes :

$$b^2 = m^2 + x^2,$$
$$c^2 = n^2 + y^2,$$
$$b^2 - c^2 \quad \text{ou} \quad k^2 = m^2 + x^2 - n^2 - y^2,$$

ou
$$x^2 - y^2 = k^2 + n^2 - m^2. \tag{1}$$

Les triangles rectangles AEC, ABD sont semblables, car l'angle ACE égale BAD ; donc

$$\frac{x}{m} = \frac{n}{y}, \quad \text{d'où} \quad xy = mn. \tag{2}$$

Le problème peut être regardé comme résolu, puisqu'on a les relations (1) et (2).

**Problème 504. — II.**

**1523 b.** *Construire un triangle* ABC, *connaissant les points* D, E, F *où les prolongements des bissectrices intérieures* AID, BIE, CIF *rencontrent le cercle circonscrit au triangle demandé.*

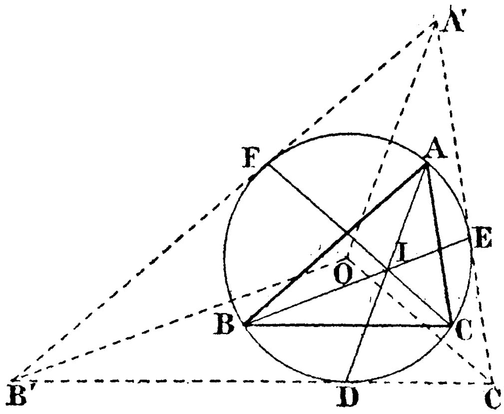


Fig. 979.

Le point D est le milieu de l'arc BC ; donc la tangente menée au cercle par le point D est parallèle au côté BC, donc le triangle A'B'C', obtenu en menant des tangentes par les points D, E, F, est homothétique du triangle demandé.

Le centre O du cercle circonscrit donné est le point de concours des bissectrices intérieures de A'B'C' et correspond au point I de ABC ; donc par D, E, F il faut mener des parallèles aux bissectrices de A'B'C', et l'on obtient les sommets de ABC.

**1523 c. Note.** 1° On peut voir aussi le *Journal de Mathématiques E.* et *S.*, de BOURGET, 1880, p. 512.

2° La construction de ABC, lorsqu'on connaît les points où les prolongements des hauteurs rencontrent le cercle circonscrit, est très simple (n° 666).

3° On sait construire ABC, lorsqu'on connaît les points où les médianes rencontrent le cercle circonscrit. La solution a été donnée par M. FITZ-PATRICK, alors professeur à Valenciennes; elle est fort belle, ainsi que les Remarques faites par M. J. NEUBERG (*Mathesis*, 1904, pages 107 à 110).

4° On construit facilement un triangle ABC lorsqu'on connaît les points A', B', C', où les droites AI, BI, CI rencontrent le cercle inscrit dont I est le centre; car l'angle $\frac{A}{2} = B'IC' - 90°$. (CRISTESCO, voir *Mathesis*, 1904, p. 158, n° 9.)

5° *Étant donnés les symétriques* A', B', C' *des sommets* A, B, C *d'un triangle, par rapport aux côtés opposés, construire le triangle.*

*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1900, p. 356, n° 1955, et 1902, pp. 17 à 20. La solution dépend d'une équation du septième degré et ne saurait s'obtenir en n'employant que la règle et le compas, sauf en certains cas particuliers. G. ESPANET.

6° La construction d'un triangle, connaissant les pieds des bissectrices intérieures (CH. BIOCHE), conduit à une équation du quatrième degré. (I. M., 1898, p. 33; G. RICALDE de Merida, Yucatan.)

7° La construction d'un triangle, connaissant les pieds des trois symédianes, proposée par E.-N. BARISIEN, conduirait à une équation du douzième degré. (G. ESPANET, I. M., 1905, p. 21, n° 2585.)

### Problème 504. — III.

**1523 d.** *Construire un triangle* ABC, *connaissant les trois hauteurs* a', b', c'.

On a :
$$aa' = bb', \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{b'} = \frac{b}{a'}; \tag{1}$$

de même
$$bb' = cc', \quad \text{d'où} \quad \frac{b}{c'} = \frac{c}{b'}. \tag{2}$$

Pour obtenir $\frac{b}{a'}$ dans (2), multiplions les deux rapports par $\frac{c'}{a'}$, ce qui donne :
$$\frac{b}{a'} = \frac{cc'}{a'b'} = \frac{c}{\frac{a'b'}{c'}}; \tag{3}$$

donc
$$\frac{a}{b'} = \frac{b}{a'} = \frac{c}{\frac{a'b'}{c'}}. \tag{4}$$

Ainsi, en construisant un triangle avec les trois lignes $b'$, $a'$ et $\frac{a'b'}{c'}$, on obtiendra un triangle semblable à celui qui a pour côtés homologues $a$, $b$, $c$, etc. (Voir pour la construction, n° 1617.)

**1523 e. Note.** On sait construire un triangle, connaissant les trois médianes (n° 980), ou les trois hauteurs (n° 1617); mais c'est à peu près tout. Ainsi, CATALAN, ayant proposé dans son *Manuel des Candidats à l'École Polytechnique* (publié, en 2 vol. in-12, en 1857-1858), la construction d'un triangle, connaissant les trois bissectrices, a provoqué de nombreuses tentatives; mais le triangle est encore à construire. Cependant, par le calcul, M. BARBARIN, professeur au lycée de Bordeaux, en 1896, a indiqué que la résolution du problème, quand on connaît trois bissectrices concourantes, dépend d'une équation du quatorzième degré. (*Mathesis*, 1896, pages 143 et 154; 1902, p. 159, bel article par M. DELITALA, professeur à l'institut technique de Sassari (Sardaigne). Pour la même question, voir aussi l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1896,

p. 275; 1903, p. 64; 1904, p. 149, question 270, H. Lez; 1904, p. 171. Notes bibliographiques de M. H. Brocard.

On peut citer encore les deux problèmes suivants :

*Construire un triangle, connaissant : 1° les trois distances du centre* O *du cercle circonscrit aux trois côtés; 2° les trois distances du centre* I *du cercle inscrit aux trois sommets du triangle.*

On sait résoudre ces problèmes, mais non effectuer la construction, car chacun d'eux dépend d'une équation du troisième degré. (Vallès, ingénieur des ponts et chaussées.) Voir *A. de G.,* tome XXI, p. 65. — Voir aussi p. 98, où l'on ramène les deux problèmes proposés au *problème de Newton :* Connaissant trois cordes dont la somme des arcs sous-tendus égale 180°, déterminer le rayon du cercle. — La solution de cette dernière question est dans la *Géométrie analytique* de Lefébure, auteur bien connu d'un cours de *Géométrie descriptive.* Voir aussi une note antérieure (n° 1520 **b**.)

**1523 f.** On peut poser aussi la question suivante : *Construire un triangle, connaissant une hauteur, une bissectrice et une médiane : chacune de ces trois lignes partant d'un sommet différent.* (E. Coupy, professeur en 1855 au Prytanée militaire de la Flèche.) La solution par Poudra, chef d'escadron en retraite, revient à l'intersection d'une circonférence par une courbe du troisième degré. (*N. A.,* 1855, pp. 117 et 413.) — La même question posée, par M. A. Rebière, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1895, p. 203, n° 600, a été résolue par le calcul par M. Ph. Fay; on arrive à une équation du sixième degré. M. H. Brocard a signalé la question posée et la solution donnée par les *N. A.* (I. M. 1896, pp. 93 à 95; 1902, p. 284, n° 2323, H. Brocard, N. Plakhowo.)

(Voir aussi une note antérieure (*E. de G.,* n° 1520 **b**.)

### Problème 504. — IV.

**1523 g.** *Un triangle* ABC *tourne autour d'un point fixe* X *de son plan. Soient* A'B'C' *les intersections des côtés homologues de deux positions quelconques du triangle, démontrer que le quadrilatère* XA'B'C' *est toujours semblable à lui-même, et trouver comment il faut choisir le point* X, *par rapport à* ABC, *pour qu'il soit le centre du cercle circonscrit ou inscrit à* A'B'C' *ou l'orthocentre, ou le centre de gravité de ce même triangle.* (J. Neuberg, *Mathesis,* t. IX, 1889, pp. 149 à 151.)

## Construction des Quadrilatères.

**1524.** Les problèmes relatifs à la construction des triangles pourraient fournir assez souvent des problèmes relatifs aux quadrilatères, mais il n'y a pas lieu d'insister sur ce point.

D'autre part, plusieurs cas intéressants, pouvant se rapporter à divers paragraphes, ont déjà été donnés (n°s 1490,... 1499, 1512); nous nous bornerons donc à un petit nombre de questions.

L'étude du quadrilatère est devenue très intéressante par suite de son emploi dans les *Inverseurs,* et d'une manière générale, dans les *systèmes à tiges articulées* (n°s 1195, 1203).

**Problème 505.**

**1524 a.** *Construire un rectangle avec les données suivantes :*
1° *Le périmètre et la somme des carrés des côtés adjacents;*
2° *Le périmètre et la différence des carrés des deux côtés adjacents;*
3° *Le périmètre et le rapport des côtés.*

(Voir *Méthodes*, n° 104.)

2° On construit le triangle isocèle ADE (fig. 62), et l'on mène le lieu PM de la différence des carrés de manière que $PA^2 - PE^2 = k^2$; car on trouve ainsi $PA^2 - PM^2 = k^2$.

3° On construit le triangle isocèle ADE; par le point A, on mène la droite, lieu des points dont le rapport des distances à AX, AY égale $\frac{m}{n}$.

**Problème 505. — I.**

**1525.** *Construire un trapèze, connaissant les angles et les diagonales.*

(Voir *Méthodes*, n° 110.)

**Problèmes 505. — II.**

**1525 a.** 1° *Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les distances des quatre côtés au point de rencontre des diagonales.*

2° *Construire un quadrilatère circonscriptible, connaissant les distances du centre du cercle inscrit aux quatre sommets.*

Voir *Mathesis*, 1885, p. 68, question 378.

**Problème de Sturm 506.**

**1526.** *Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les quatre côtés.*

(Voir *Méthodes*, n° 151.)

**1526 a. Note.** 1° LAMÉ a traité cette même question dans son remarquable travail publié en 1818 : *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie* (p. 19, n° 14).

2° Avec quatre côtés donnés on peut construire trois quadrilatères inscriptibles dans le même cercle; ils sont équivalents entre eux, mais non superposables. (GUÉNEAU D'AUMONT, *A. G.*, 1822, p. 269.)

En représentant par $x$, $y$, $z$ les trois diagonales différentes que peuvent donner les trois quadrilatères convexes, par S la surface de chacun d'eux, par R le rayon du cercle circonscrit, on a la relation de M. G. FONTENÉ :

$$xyz = 4RS.$$

(*Bulletin Gérard et Michel*, 1903-1904, p. 147.)

3° On peut construire d'une manière analogue un quadrilatère quelconque, connaissant les quatre côtés et la somme des deux angles opposés.

*Mathesis*, 1903, pages 61 à 63; élégante solution et belle étude par M. LAUVERNAY, ancien professeur.

4° Pour les quadrilatères inscriptibles, voir un bel article de M. NEUBERG, *Mathesis* 1906, p. 14. — On peut consulter avec profit le travail publié en 1868, par DOSTOR : *Propriétés nouvelles des quadrilatères en général, avec application aux quadrilatères inscriptibles, circonscriptibles, etc.*

**Problème 506. — I.**

**1526 b.** *Étant donnés dans un même plan deux triangles* OAB, OCD, *de même sommet, faire tourner l'un d'eux autour de* O, *de manière que les quatre points* A, B, C, D *deviennent concycliques.* (*Educational Times.*)

Voir *Mathesis*, 1902, p. 71. Question 1302; solution par M. EMMERICH.

**Centre de similitude 506. — II.**

**1527.** *Déterminer le centre de similitude, ou* point double, *de deux figures directement semblables.*

On nomme figures directement semblables deux figures semblables ABC, A'B'C', qu'on peut amener à être homothétiques, par la rotation de l'une d'elles autour du centre de similitude S (n° 1146).

Considérons deux segments rectilignes homologues AB et A'B', ils se rencontrent en D'.

1er *Moyen.* Déterminons le *point de Miquel* du quadrilatère convexe ABB'A' (n° 21), par exemple, en décrivant les cercles circonscrits AA'D et BB'D'. Le point S est le point double demandé, car les triangles SAB, SA'B' sont directement semblables, parce que, les angles SAB, SA'B' ont même mesure, et que les angles SBA, SB'A' sont aussi égaux;

donc $$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Les cercles DAB, DA'B' donneraient le même point S. Ces quatre cercles peuvent être nommés *cercles de Miquel* du quadrilatère AA'B'B.

2e *Moyen.* Déterminons les points conjugués M et M' tels qu'on ait :

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{M'A}{M'A'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Le cercle dont MM' est le diamètre est le lieu des points dont le rapport des distances aux points fixes A et A' égale le rapport des côtés homologues AB, A'B', donc ce cercle passe par le point S. De même pour le cercle analogue ayant NN' pour diamètre; ainsi le *point double* S peut être obtenu par l'intersection des cercles MM' et NN'.

Ce moyen donne aussi le centre S' de similitude pour deux figures inverses ABC, A'B'C''.

Le *point de Miquel* S étant aussi le centre de similitude directe pour AA' et BB', il en résulte qu'en déterminant P et Q, puis P' et Q', de manière qu'on ait : $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = \frac{AA'}{BB'}$ et $\frac{P'A'}{P'B'} = \frac{Q'A'}{Q'B'} = \frac{AA'}{BB'}$,

les cercles ayant pour diamètre respectif PQ et P'Q' passent par le point S.

Les quatre cercles dont on vient de parler peuvent être nommés *cercles d'Apollonius* du quadrilatère ABB'A'. On a donc huit cercles qui passent par le point double de deux figures directement semblables.

3e *Moyen.* On peut tracer la droite qui est le lieu des distances proportionnelles aux deux segments AB et A'B', ainsi que la droite, lieu des divisions proportionnelles (voir ci-après 2395 et 2396); chacun de ces lieux passe évidemment par le point S, puisque ce point réalise à la fois les deux conditions de ces lieux. Il en est de même des droites analogues pour les segments AA′ et BB′; voilà donc quatre droites faciles à tracer qui passent par le point double S.

Enfin, on trouve encore huit autres droites.

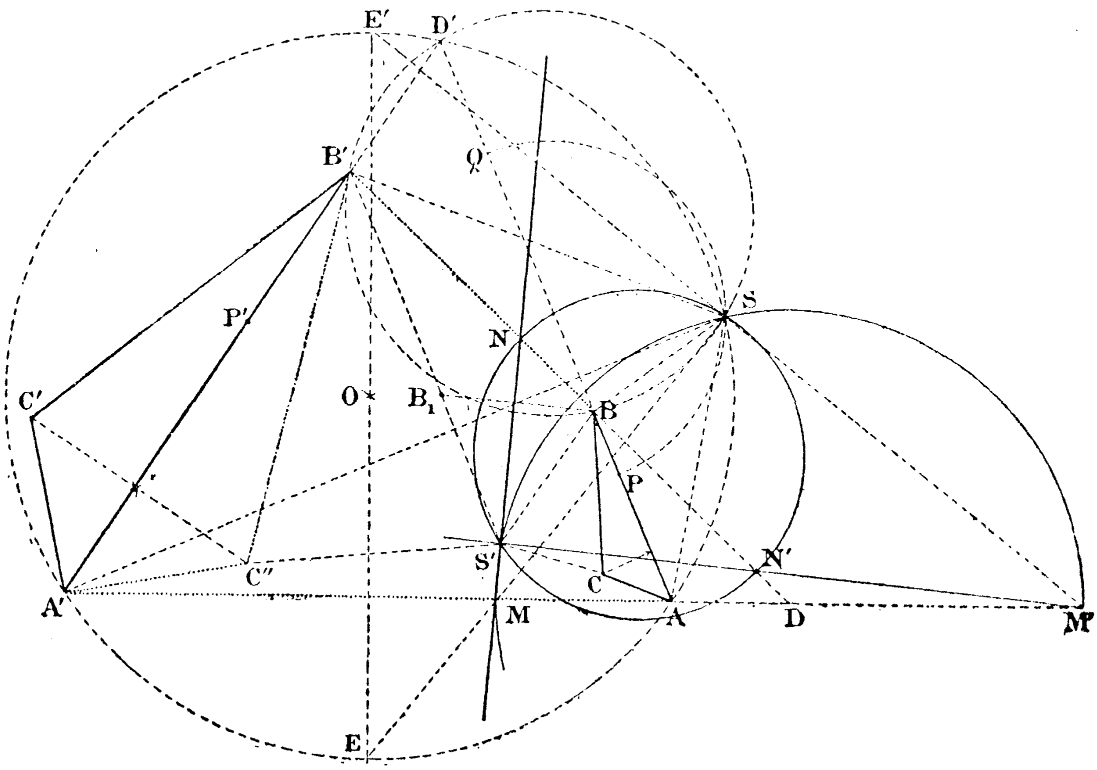



Fig. 980.

4e *Moyen*. En supposant connu le point demandé S, on voit que l'angle ASA′ égale l'angle connu D′ que font les deux segments considérés : il faut d'ailleurs qu'on ait les rapports égaux $\frac{SA}{SA'} = \frac{AB}{A'B'}$ ; donc le point cherché est sur la bissectrice EMS; de là, la construction suivante : On décrit le segment AD′A′ capable de l'angle D′ des deux segments ; on divise AA′ en parties proportionnelles aux côtés AB, A′B′, et l'on joint le point milieu E de l'arc AEA′ au point M, afin d'obtenir S.

Ce moyen a été indiqué par M. G. Tarry. (*Mathesis*, 1885, pp. 79 et 83.)

On peut déterminer aussi le point M′ tel que $\frac{M'A}{M'A'} = \frac{SA}{SA'}$ ; on obtient la bissectrice extérieure M′E′, et cette droite passe encore par le point S. Avec le cercle BB′D′, on pourrait utiliser les bissectrices NS et N′S.

Pour chacun des autres cercles de Miquel, on aurait aussi deux bissectrices; donc en tout huit bissectrices, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

**1527 a. Th.** *Huit cercles et douze droites, faciles à déterminer, passent par le point double de deux figures directement semblables.*

**1527 b.** *Nombre de constructions distinctes.* Deux lignes, droite ou cercle, suffisent pour déterminer le point S; mais le tracé de la bissectrice EMS, par exemple, comporte aussi le tracé du cercle AA'E'. Il n'y a donc pas lieu de tenir compte de l'intersection de EMS et de l'un quelconque des sept autres cercles, car en réalité on aurait construit deux cercles et une droite. Ainsi les bissectrices ne donnent lieu qu'à *huit constructions distinctes;* quant aux huit cercles et aux quatre autres droites, ils donnent lieu à $\frac{12.11}{2} = 66$ constructions distinctes; donc, en tout, on peut obtenir le point S par $66 + 8 = 74$ tracés graphiques différents.

Pour deux triangles ABC, A'B'C' directement semblables, le point S peut être déterminé à l'aide de 453 constructions distinctes ; du moins lorsque ABA'B' est un quadrilatère convexe, seul cas que nous ayons examiné. (Voir ci-après, n° 1546 **f**.)

### Problème 506. — III.

**1527 c.** *Déterminer l'axe de symétrie, ou* ligne double, *et le centre de similitude de deux figures inversement, ou indirectement semblables.*

Soient ABC et A'B'C' (fig. 980).

Les cercles ayant pour diamètres MM' et NN' donnent immédiatement le centre S' de similitude inverse, car les triangles AS'B et A'S'B' sont inversement semblables.

Le lieu des points des distances proportionnelles, et celui des divisions proportionnelles donneraient aussi par leur intersection le point double S'.

L'axe de symétrie est la bissectrice des angles tels que BS'B', AS'A', etc.; cet axe est donc facile à déterminer lorsqu'on connait S'.

On peut aussi déterminer d'abord l'axe et l'utiliser pour arriver à trouver S'. En effet, pour obtenir l'axe de symétrie, il suffit de mener MN, puisque chacun des points M et N divise AA' ou BB' en parties proportionnelles aux côtés homologues AB, A'B'. Ayant tracé l'axe, on prend le symétrique $B_1$ du point B, et l'on mène $B'B_1S'$. Enfin, on peut obtenir S' par l'intersection de MN et de M'N'.

Par une rotation de 180° autour de MN, d'une des figures données, on obtiendrait deux figures homothétiques.

**1527 d.** *Figures égales.* Pour deux figures égales, on peut employer la construction de CHASLES (n$^{os}$ 770 et 920) ou celles que l'on vient d'indiquer pour deux figures semblables, mais avec les simplifications convenables; ainsi le tracé des bissectrices intérieures et celui des cercles ayant pour diamètres MM' et NN' reviennent à la construction de Chasles, car on obtient les perpendiculaires élevées au milieu de AA' et de BB'.

### Problème 506. — IV.

**1527 e.** *Dans un cercle donné* O, *inscrire un quadrilatère* ABCD, *dont on connait les trois diagonales* $AC = d$, $BD = d'$ et $EF = d''$. (Question proposée dans le *Traité de Géométrie* de ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, 7$^e$ édition, 1900, p. 406, n° 363.)

La solution donnée par *Mathesis*, d'après l'*El progresso matematico*, exige la connaissance élémentaire des polaires; elle est d'ailleurs très élégante. (*Mathesis,* 1895, p. 12, n° 2.)

## Applications des Relations numériques.

### Problème 507.

**1528.** *Par deux points donnés sur une circonférence, mener deux cordes parallèles dont le rectangle soit équivalent à un carré donné.*

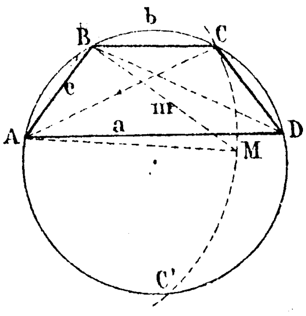


Fig. 981.

Soient A et B les points donnés et $m^2$ le carré donné. Le trapèze inscrit ABCD est symétrique :

$$AB = CD\,, \quad AC = BD.$$

Or, dans tout trapèze, la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des côtés non parallèles, plus deux fois le produit des bases (n° 1207); donc, en désignant les bases par $a$ et $b$, chaque diagonale par $d$ et le côté connu $AB = CD$ par $c$, on a :

$$2d^2 = 2c^2 + 2ab, \quad \text{mais } ab = m^2\,;$$

donc $$d^2 = c^2 + m^2.$$

Il suffit de construire un triangle rectangle AMB, ayant $m$ et $c$ pour côtés de l'angle droit, puis porter AM de A en C.

### Problème 508.

**1529.** *On donne deux tangentes à un cercle; mener une troisième tangente telle que le segment intercepté sur cette ligne par les deux premières ait une longueur donnée.*

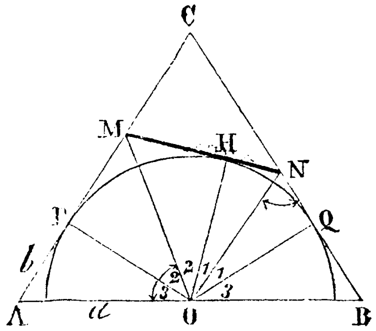


Fig. 982.

1° On peut employer une relation algébrique (n° 239), ou recourir à une construction graphique (n° 978 **a**).

2° On sait que l'angle MON est constant, car il est la moitié de POQ, supplément de l'angle connu C ; donc, par le *problème contraire* (n° 213), on est ramené à construire un triangle MON, connaissant la longueur de la base MN, l'angle au sommet MON et la hauteur OH (n° 105).

3° On peut recourir aussi à des questions déjà traitées (n°s 262 et 978 **a**).

### Problème 508. — I.

**1530.** *Diviser un arc de cercle en deux parties, de manière que les cordes des arcs ainsi déterminés soient entre elles dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

Ce problème, déjà résolu (n° 1418), n'est rappelé qu'à cause du groupe naturel qu'il forme avec les questions suivantes (n°s 1531 à 1535).

**Problème 508. — II.**

**1531.** *Diviser un arc de cercle en deux parties, de manière que la somme des cordes égale une longueur donnée* l.

La question revient à construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et la somme des deux autres côtés.

(Voir *Méthodes*, nº 115 et nºs 921, 989.)

**Problème 508. — III.**

**1532.** *Diviser un arc de cercle en deux parties, de manière que la différence des cordes égale une longueur donnée* d.

La question revient à la suivante :

*Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et la différence des deux autres côtés.*

(Voir nºs 922 et 989.)

**Problème 508. — IV.**

**1533.** *Diviser un arc de cercle en deux parties, de manière que la somme ou la différence des carrés des cordes ainsi déterminées égale* $k^2$.

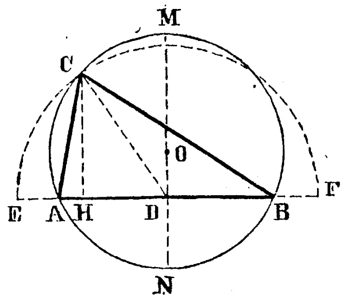


Fig. 983.

1º On emploie le lieu géométrique des points dont la somme des carrés des distances aux extrémités de la corde donnée égale $k^2$ (nº 69).

Du point D, milieu de la corde donnée AB, on décrit une circonférence ECF, avec un rayon DC tel que $2CD^2 + 2AD^2 = k^2$.

2º On a recours au lieu de la différence des carrés (nº 71).

**Problème 508. — V.**

**1534.** *Diviser un arc de cercle en deux parties, de manière que le produit des deux cordes égale* $k^2$.

Le produit des deux côtés d'un triangle égale le diamètre multiplié par la hauteur (G., nº 270); donc $CH = \dfrac{k^2}{MN}$.

Le problème revient à construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et la hauteur (nº 105).

**Problème 508. — VI.**

**1535.** *Dans un demi-cercle ayant* BC *pour diamètre, mener une corde* BA, *telle que cette corde et sa projection* BD *sur le diamètre* BC *aient entre elles une relation donnée.*

En représentant par $r$ le rayon du demi-cercle, par $c$ la corde et par $x$ sa projection, on a la relation générale connue :

$$c^2 = 2rx. \qquad (1)$$

Lorsqu'on donne en outre la *somme*, la *différence* de la corde et sa projection, on obtient une équation du second degré ; il en est de même lorsqu'on connaît la somme ou la différence des carrés de la corde et de sa projection.

Le maximum de la somme des deux lignes est $4r$, le maximum de la différence est $\frac{r}{2}$; dans ce cas la corde égale $r$, c'est le côté de l'hexagone régulier inscrit.

Lorsqu'on donne le *rapport* de la corde à sa projection, on obtient une équation du premier degré, et quand c'est le *produit*, on a une équation du troisième degré, dont on ne peut pas construire la racine réelle avec la règle et le compas.

### Problème 508. — VII.

**1535 a.** *Par un point* P, *mener à un cercle une sécante déterminant une corde* AB, *qui se projette en* A'B' *sur le diamètre passant par* P, *de telle sorte que* A'B' *ait une longueur donnée.*

Voir *Questions de Géométrie de Desboves,* 2e édition, p. 344.

*Intermédiaire des M.,* 1899, p. 165, nº 1412. Solutions données par MM. Espanet, Fauquembergue, G. Jung, F. Lebel, P. Tannery; résumées par M. C.-A. Laisant.

### Problème 509.

**1536.** *Par le point milieu d'un arc de cercle, mener une droite telle que le segment compris entre la corde de l'arc et l'autre partie de la circonférence ait une longueur donnée* (*4 solutions*). (Francœur, *Cours de Mathématiques,* t. I.)

(Voir *Méthodes,* nº 320.)

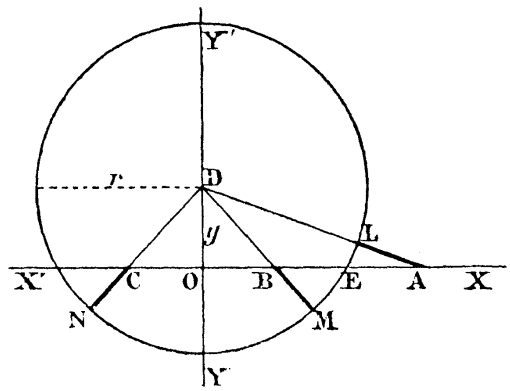


Fig. 984.

### Problème 509. — I.

**1536 a.** *Avec un rayon donne* r, *décrire une circonférence qui passe à égale distance de trois points* A, B, C *en ligne droite.*

Soient $AL = BM = CN$;

$$OA = a, \quad OB = b.$$

Le centre D doit se trouver sur la perpendiculaire YY' élevée au milieu de BC.

Il faut déterminer OD ou $y$.

Les triangles rectangles DOB, DOA permettent d'exprimer AD, BD en fonction des connues $a$, $b$ et de l'inconnue $y$; on a donc :

$$AL = \sqrt{a^2+y^2} - r, \quad BM = r - \sqrt{b^2+y^2},$$

d'où

$$\sqrt{a^2+y^2} - r = r - \sqrt{b^2+y^2},$$

$$\sqrt{a^2+y^2} + \sqrt{b^2+y^2} = 2r.$$

On obtient deux valeurs égales et de signes contraires.

*Remarque.* En prenant A et B comme devant être en même temps à l'intérieur du cercle, on aurait deux autres solutions; en groupant A et C, on aurait ces deux points à l'extérieur et B à l'intérieur, ce qui fournirait encore deux solutions : en tout six solutions.

### Problème de Pappus 510.

**1537**. *Par un point pris sur la bissectrice d'un angle donné, mener une sécante limitée aux côtés de cet angle et telle que le segment intercepté ait une longueur donnée.*

La solution algébrique (n° 300) se rapporte au cas où l'angle est droit.

A l'aide du *problème contraire* (n° 213), la question se ramène aux problèmes connus (n^os^ 320 et 321.)

**1538. Note.** Le *problème de Pappus,* dans le cas le plus général, celui où le point est inégalement éloigné des côtés de l'angle, ne peut point être résolu en n'employant que la règle et le compas. Il comporte quatre solutions différentes, et par suite on obtient une équation complète du quatrième degré dont on ne sait pas construire géométriquement les racines. On peut résoudre la question par l'intersection d'une hyperbole et d'un cercle convenablement choisis. Voir *Mathesis,* 1889, page 96, par RUSSO, professeur à Catanzaro; autre solution indiquée par M. NEUBERG, ainsi que le théorème suivant :

*Les points milieux des quatre segments égaux à* l *appartiennent à une même circonférence, et le centre reste fixe quel que soit* l, *lorsque le point donné ne varie pas.* Ce théorème est dû à STEINER (*Mathesis,* 1889, page 183).

Voir la note du n° 321 **a** des *Exercices de Géométrie.*

L'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1910, p. 182, n° 3667, indique diverses références; voir les notes de M. BARBARIN et surtout celle qui est signée du pseudonyme *Belga ;* cette dernière rappelle les solutions très élégantes données par MM. RUSSO et NEUBERG dans *Mathesis* (1889, pp. 96 et 183).

On peut voir aussi un article très intéressant paru récemment : *Le Problème de Pappus,* par BARBARIN (*L'Enseignement mathématique,* 1911, p. 17-23).

Il est facile de résoudre mécaniquement le *problème de Pappus*, ainsi que ceux de la trisection de l'angle (n° 911) et de la duplication du cube à l'aide d'un instrument qui décrirait une *conchoïde.*

La *conchoïde* est due à NICOMÈDE, géomètre d'Alexandrie, que l'on croit contemporain du célèbre géographe ERATOSTHÈNE (276-196 av. J.-C.). Ce dernier a indiqué un procédé connu sous le nom de *crible d'Eratosthène,* pour trouver les nombres premiers inférieurs à un nombre donné, 10000 par exemple. (D'après l'*Histoire des Mathématiques*, par FERDINAND HOEFER, page 242.) M. MAXIMILIEN MARIE indique, comme date problable de naissance pour NICOMÈDE, l'an 100 av. J.-C. (*Histoire des sciences mathématiques et physiques*, tome I, page 219.)

### Problème 511.

**1539**. *On donne une demi-circonférence* ADC *et une perpendiculaire au diamètre* AC; *mener une tangente* EDF, *limitée à ces deux droites, de manière que les segments* DE, DF *soient égaux entre eux.*

(Voir *Méthodes,* n° 311.)

### Problèmes 512.

**1540.** *On donne une demi-circonférence* ADC *et une perpendiculaire au diamètre* AC; *mener une tangente* EDF *limitée à ces deux droites, de manière à remplir les conditions suivantes :*

1° *Le segment* DE *doit être double de* DF (fig. 218).

(Voir *Méthodes*, n° 315.)

**1541.** 2° *On doit avoir* $\frac{DE}{DF} = \frac{m}{n}$ (fig. 214).

(Voir *Méthodes*, n° 310.)

### Section de raison 513.

**1542.** *Sur deux droites concourantes* OX, OY, *on donne deux points fixes* D, F. *Par un point* A, *mener une sécante* MAN, *de manière que les segments* DM, FN *soient dans un rapport donné.* (Apollonius.)

(Voir *Méthodes*, n° 332 **a.**)

### Section de l'espace 514.

**1543.** *Mêmes données* (n° 1542), *mais le produit des distances* DM, FN *doit égaler un carré donné* $k^2$. (Apollonius.)

(Voir *Méthodes*, n° 332 **b.**)

On pourrait aussi imposer les conditions ci-dessous :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **(c)** | (n° 333) | $DM + FN = l$, | somme donnée. |
| **(d)** | | $DM - FN = l$, | différence donnée. |
| **(e)** | | $\frac{OD \cdot OM}{OF \cdot ON} = \frac{m}{n}$, | rapport donné. |

### Section déterminée 515.

**1544.** *Étant donnés quatre points en ligne droite, on demande de déterminer un cinquième point tel que le produit de ses distances à deux des points donnés soit au produit des distances aux deux autres dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$. (Apollonius.)

(Voir *Méthodes*, n° 334 **a.**)

**1544 a. Note.** Les principes de la *Géométrie moderne* permettent de résoudre les problèmes de la *section de raison*, de la *section de l'espace* et tous les problèmes du second degré par une méthode uniforme, aussi élégante que simple, due à Chasles. (*Géométrie supérieure*, nos 290 à 296 et 298.)

Le problème de la *section déterminée* revient à déterminer les *points doubles d'une involution.* (G. S., n° 281. On peut voir aussi les *Eléments de Géométrie projective* de Cremona, n° 267.)

**Problème d'Alhazen 516.**

**1545.** *On donne un billard circulaire et une bille placée en un point donné* A; *dans quelle direction faut-il lancer la bille pour qu'elle repasse par le point* A, *après deux réflexions successives?* (Concours général des collèges de Paris, 1842.)

Supposons le problème résolu et ABCA le chemin parcouru.

Le rayon BO est la normale menée à la courbe par le point de contact. (G., nº 129.)

D'après la loi de la réflexion, les droites AB et BC font des angles égaux avec la normale BO, donc l'angle ABO = CBO. De même l'angle BCO = OCA, mais BOC est un triangle isocèle; donc il en est de même du triangle BAC. La droite BC est perpendiculaire à OA.

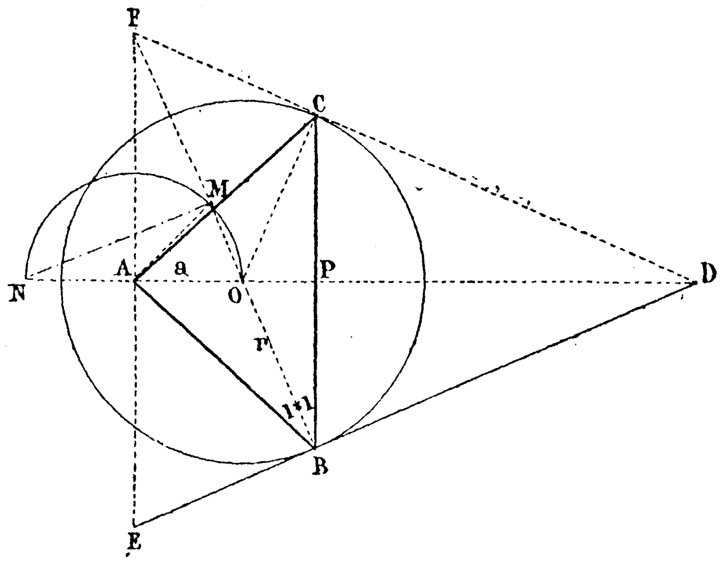



Fig. 985.

Si nous menons les tangentes aux points B, C, puis une perpendiculaire EF à la droite AO, nous formerons un triangle isocèle EDF circonscrit au triangle demandé, et chaque hauteur telle que FOB est bissectrice de l'angle ABC.

En d'autres termes, le triangle ABC peut être considéré comme obtenu en joignant deux à deux les pieds des hauteurs de DEF (nº 662.) et le triangle inscrit sera déterminé dès qu'on connaîtra le triangle circonscrit.

Or, pour ce dernier, il suffit de trouver la longueur de AF ou de OF.

Soit $$\mathrm{OA} = a, \quad \mathrm{OB} = r.$$

Les triangles rectangles FAO, FBE sont semblables, car ils ont un angle aigu commun; donc

$$\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{AF}} = \frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{FB}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{AF}} = \frac{2\mathrm{AF}}{\mathrm{OF}+r};$$

d'où

$$2\mathrm{AF}^2 = \mathrm{OF}(\mathrm{OF}+r).$$

Afin de n'avoir qu'une seule inconnue, remplaçons $2AF^2$ par sa valeur $2OF^2 - 2a^2$ ; nous obtiendrons :

$$2OF^2 - 2a^2 = OF^2 + OF \cdot r,$$

ou

$$OF^2 - r \cdot OF - 2a^2 = 0,$$

$$OF = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 8a^2}}{2}.$$

Quantité facile à construire.

**1545 a.** *Remarque.* La solution précédente est facile à imaginer et à retenir. Il en est de même de celle qu'on obtient en prenant OP pour inconnue.

La solution ci-après, donnée par LÉON ANNE (*N. A.*, 1842, p. 36), n'exige pas la considération des tangentes DB, DC (fig. 985).

*Seconde solution.* Prolongeons les bissectrices BOF jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire AF menée à la droite AO.

Comme précédemment, il suffit de déterminer le point F.

Or, si nous décrivons une demi-circonférence OMN avec $a$ pour rayon, et si nous joignons N, A au point M, où cette demi-circonférence coupe OF, nous obtiendrons deux triangles rectangles semblables AOF, OMN, car l'angle O est commun ; donc

$$\frac{OF}{AO} = \frac{ON}{OM} \quad \text{ou} \quad \frac{OF}{a} = \frac{2a}{OM};$$

d'où

$$OF \cdot OM = 2a^2.$$

Or le triangle MAO est isocèle ; il en est de même de BAF, car l'angle F égale CBF égale donc ABF.

Par suite,

$$FM = OB = r.$$

*Ainsi les inconnues* OF, OM *sont les côtés d'un rectangle dont on connait la surface* 2a² *et la différence* r *des deux côtés*, et l'on est ramené une question connue. (G., nº 341.)

**1546. Note.** La question de concours posée en 1841 est connue sous le nom de *billard circulaire;* elle avait été résolue par l'Arabe ABHASEN, ou mieux ALHAZEN (XIᵉ siécle). On peut demander que la bille parte d'un point donné A et passe, après une réflexion, par un autre point donné B.

Le problème peut être énoncé comme il suit :

*On donne un cercle et deux points* A *et* B ; *trouver le point brillant du cercle, dans le cas d'un point lumineux* A, *l'observateur étant placé en* B. Ou bien : *Inscrire dans le cercle un triangle isocèle dont les deux côtés égaux passent par les deux points donnés.* On peut dire aussi : *Déterminer un point* C *sur la circonférence, tel que la somme* AC + BC *soit maxima ou minima.*

Le problème général a été résolu successivement par SLUZE, HUYGENS, BARROW, le marquis DE L'HOPITAL, RICCATI, SIMSON, PUISSANT, QUÉTELET, etc. (*Aperçu historique,* page 498. *Nouvelles Annales,* 1842, page 36.)

Une étude élémentaire très complète a été faite par LÉON ANNE (*N. A.*, 1842, page 36). L'étude analytique est de M. GÉRONO (*N. A.*, 1844, page 242).

Les solutions sont obtenues par l'intersection d'une hyperbole et de la circonférence donnée. Il y a quatre solutions quand les deux points sont à l'intérieur de la circonférence, et deux seulement quand ils sont à l'extérieur.

On peut consulter aussi les articles suivants : *N. A.*, 1850, page 340, par A. TRANSON, année 1870, pp. 133 et 423, année 1894, p. 215, note par M. AURIC, ingénieur des ponts et chaussées. — *J. M. E.*, de M. DE LONGCHAMPS, 1895, p. 36, article de M. G. TARRY. On peut voir aussi *Mathesis*, 1890, pp. 217 et 219, et l'*Intermédiaire des Mathématiciens* 1900, p. 263, n° 1724, bibliographie par M. H. BROCARD ; 1902, p. 29, n° 2115, note par M. E. DUPORCQ (1873-1903), relative au cas plus général où le billard est elliptique.

* ALHAZEN est le même que HASSAN-BEN-HAÏTHEM, né à Bassora, vers 980, mort au Caire en 1038. Il a laissé un *Traité des Connues géométriques*, ayant de l'analogie avec les *Données* ou *Porismes d'Euclide*. Il est surtout connu par un *Traité d'Optique*, où se trouve le problème du *miroir circulaire*. (D'après l'*Histoire des Mathématiques*, par M. Hœfer.)

* BARROW (1630-1678), de Londres, eut pour élève NEWTON, à Cambridge.

* HUYGENS, né à la Haye en 1629, mort en 1695, fit connaître diverses propriétés de la *cycloïde* (G., n° 890) et la *théorie des développées*.

* L'HOPITAL, né à Paris en 1661, mort en 1704. On lui doit l'*Analyse des infiniment petits* et un *Traité analytique des sections coniques*.

* RICCATI (1676-1754), géomètre italien, célèbre par l'intégration de l'équation qui porte son nom.

* ROBERT SIMSON, géomètre écossais, déjà cité (n° 22).

* PUISSANT (1769-1843), membre de l'Académie des sciences, bien connu par son *Traité de Géodésie*.

* QUÉTELET (1796-1874), membre de l'Académie des sciences de Belgique, auquel on doit l'étude des *focales*. (Voir l'*Aperçu historique* de CHASLES, et l'*Histoire des sciences mathématiques et physiques*, de M. Maximilien Marie.)

* SLUZE (1622-1685), de Liége. Une conchoïde porte son nom. (*Mathesis*, 1897, p. 5.)

* A. TRANSON, auteur de nombreux et remarquables articles dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, vers 1850. Examinateur d'admission à l'École Polytechnique en 1872.

## Questions diverses.

### Théorème 516. — I.

**1346 a.** *Sans recourir à la mesure des aires, démontrer que les hauteurs abaissées des sommets* A *et* B *d'un triangle sur les côtés opposés, sont en rapport inverse avec ces mêmes côtés; en déduire qu'il en est de même des perpendiculaires abaissées d'un même point de la médiane* CM.

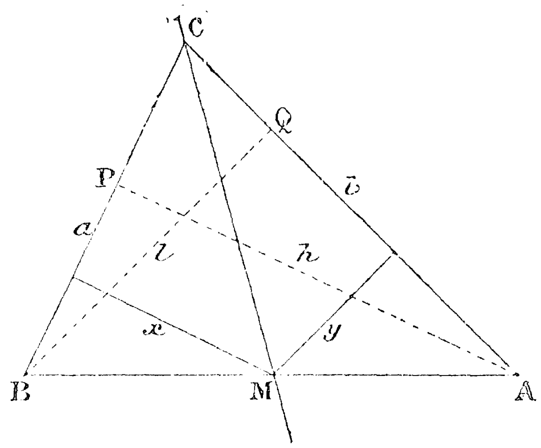



Fig. 986.

1° Les triangles rectangles ACP, BCQ sont semblables; donc

$$\frac{h}{l} = \frac{b}{a}.$$

2° Il suffit de considérer le pied M de la médiane ; or $x$ est la moitié de $h$, $y$ la moitié de $l$; donc

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}.$$

*Remarque.* On sait que la proposition est une conséquence immédiate du théorème de l'aire d'un triangle, car les triangles ACM, BCM sont équivalents ; donc $ax = by$ ou $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$.

### Théorème 516. — II.

**1546 b.** *A partir des sommets d'un triangle on prend des grandeurs égales sur les diamètres du cercle circonscrit; de chacun des trois points on abaisse des perpendiculaires sur les deux côtés correspondants; les droites qui joignent deux à deux les projections obtenues sont parallèles aux côtés opposés du triangle et dans un même rapport avec ces côtés; il en est de même des diagonales de l'hexagone formé par les six projections.*

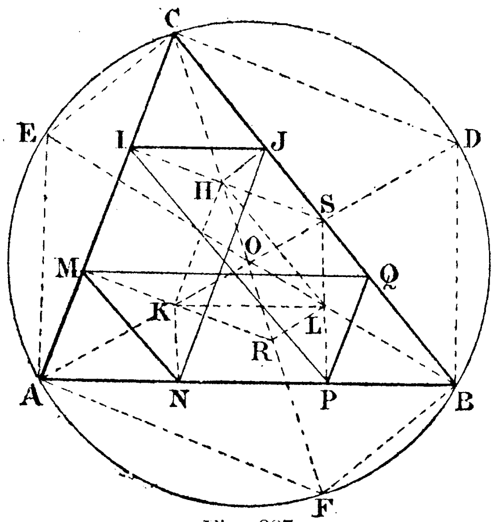


Fig. 987.

On a les quadrilatères semblables CIHJ, CAFB; donc IJ est parallèle à AB, de plus

$$\frac{IJ}{AB} = \frac{CH}{CF} = \frac{BL}{BE} = \frac{PQ}{AC}.$$

Pour les diagonales, on a :

$$\frac{BN}{BA} = \frac{BJ}{BC} = \text{donc } \frac{NJ}{AC}.$$

La droite NJ est parallèle à AC, et sa longueur dépend du rapport BN:BA égal à AP:AB, etc.; donc...

*Remarque.* Les triangles ABC, HKL ont le point O pour centre d'homothétie.

Les perpendiculaires MK, QL se coupent sur le diamètre correspondant et CR = AS.

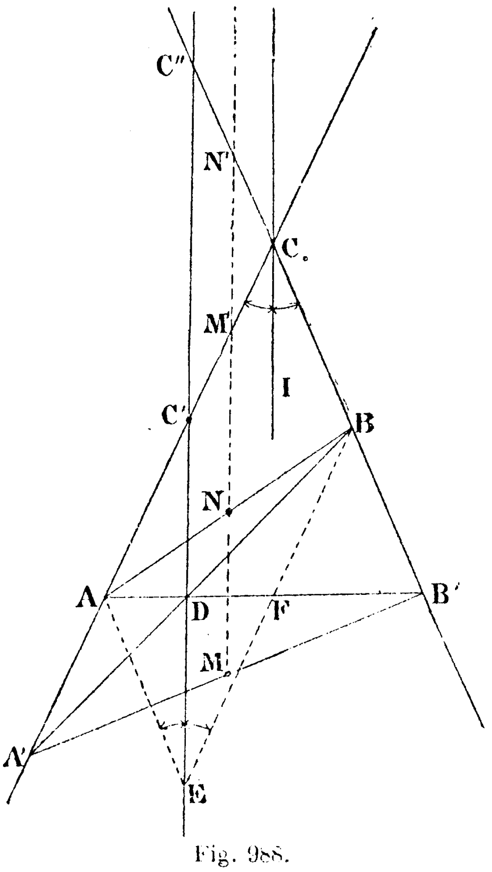


Fig. 988.

### Lieu 516. — III.

**1546 c.** *On donne un triangle* ABC; *sur les côtés* CA, CB, *on prend des grandeurs égales* AA′ = BB′ = l. *On demande le lieu du point de concours* D *des diagonales* AB′, BA′ *lorsque* l *varie.*

Si l'on prend AC′ = BC, BC″ = AC, les points C′, C″ appartiennent au lieu demandé; mais le triangle CC′C″ est isocèle, donc C′C″ est parallèle à la bissectrice CI de l'angle C; c'est la bissectrice de l'angle E du parallélogramme ACBE, car

$$AC' = BC = AE.$$

Il suffit de démontrer que le point **D** appartient à cette bissectrice ÉC′; or soit F le point d'intersection de EB et de AB′; on a :

$$\frac{EA}{EF} = \frac{BB'}{BF} = \frac{AA'}{BF} = \frac{AD}{FD};$$

donc ED est bissectrice de l'angle E.

*Remarque.* On sait que le lieu du point milieu M de A′B′ est une droite MNM′N′ parallèle à la bissectrice de l'angle C et qui passe par le point M′, milieu de CC′; Chasles l'a nommée *droite des milieux* (n° 1358); ainsi le lieu du point D est la droite des milieux de AB, A′B′, etc.

**Lieu 516. — IV.**

**1546 d.** *On donne en grandeur deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle donné; ces deux côtés sont mobiles et glissent sur la circonférence; on joint le point où se coupent les deux autres côtés au point de concours des diagonales : quel est le lieu des points où la droite ainsi menée est rencontrée par la perpendiculaire élevée au milieu d'une des cordes données?*

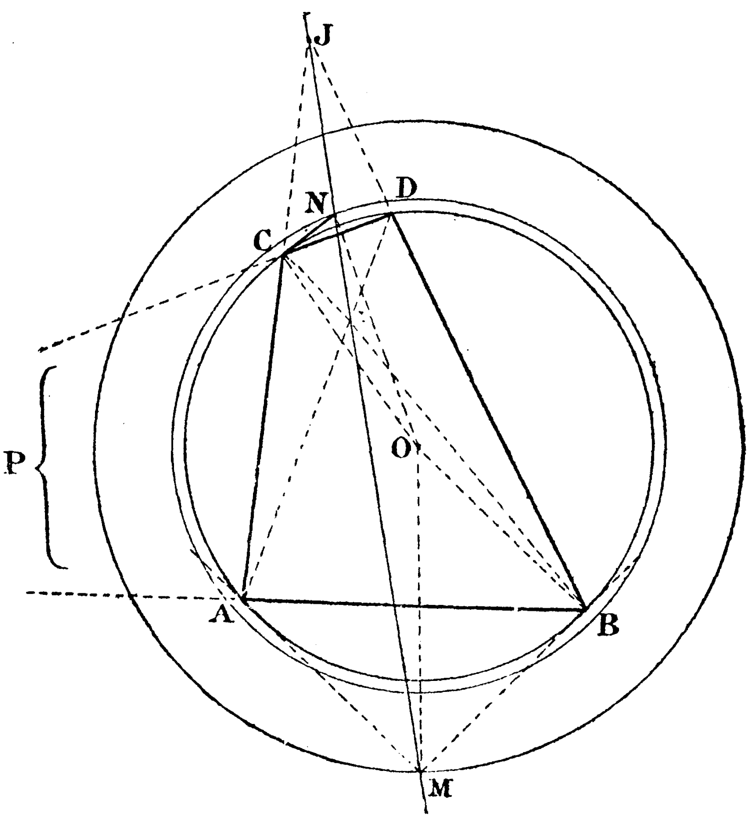



Fig. 989.

Soient AB, CD les côtés donnés en grandeur, M et N les points où IJ rencontre les perpendiculaires OM, ON, et P le point où CD rencontre AB.

Le point P est le pôle de IJ, et les pôles des cordes AB, CD se trouvent sur IJ, mais ils sont aussi sur les perpendiculaires OM, ON ; donc M et N, pôles respectifs des cordes, situés sur les tangentes AM, CN, sont les points de concours demandés ; or le triangle rectangle OBM est invariable de grandeur, car l'angle MOB ne varie point, donc il en est de même de

OM ; par suite, le lieu des points M et N se compose de deux circonférences concentriques au cercle donné. (*J. M. E.*, 1891, p. 140.)

**Note.** Une des solutions de cette question a été donnée par SOLLERTINSKI, alors professeur à Gatschina, puis à Saint-Pétersbourg, auteur de nombreux articles dans le *Journal* de LONGCHAMPS (1889-1893), dans *Mathesis* (1891-1897), ainsi que de diverses communications à l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* de 1884 à 1897.

**Théorème 516. — V.**

**1346 e.** *Les trois cercles d'Apollonius d'un triangle ont une corde commune.*

*On nomme* cercle d'Apollonius *d'un triangle par rapport au côté* AB, *le cercle qui a pour diamètre le segment déterminé sur le côté considéré par les bissectrices de l'angle du sommet opposé* C.

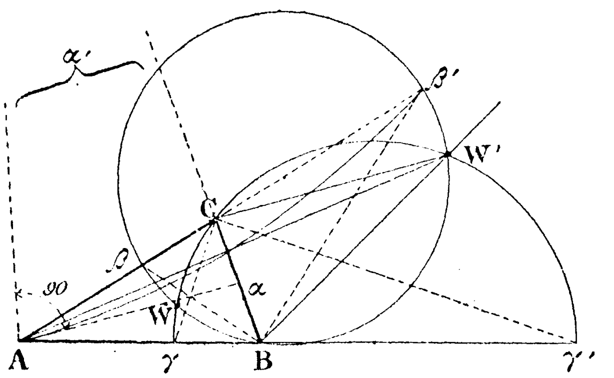


Fig. 990.

Soient $\alpha$, $\alpha'$ les pieds des bissectrices de l'angle A, sur le côté opposé $a$ ; $\beta$, $\beta'$, pour l'angle B ; $\gamma$, $\gamma'$ pour C.

Désignons par W, W' les points communs aux deux cercles décrits sur les diamètres $\gamma\gamma'$ et $\beta\beta'$; on aura :

$$\frac{AW}{BW} = \frac{b}{a}, \quad \frac{BW}{CW} = \frac{c}{b}; \quad \text{donc} \quad \frac{AW}{CW} = \frac{c}{a}.$$

Ainsi le point W appartient aussi au cercle décrit sur le diamètre $\alpha\alpha'$. De même le point W' est commun aux trois cercles.

*Remarques.* 1° Les points W, W' ont été nommés *centres isodynamiques* du triangle, à cause des égalités :

$$AW \cdot a = BW \cdot b = CW \cdot c \quad \text{et} \quad AW' \cdot a = BW' \cdot b = CW' \cdot c.$$

Les distances de chacun de ces points aux sommets sont entre elles comme les inverses des côtés opposés, car on a :

$$AW : BW : CW = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

2° La droite WW' passe par le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3° La polaire de chacun des points W et W' par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC, passe par l'autre point.

**Note.** L'énoncé principal (n° 1) se trouve déjà dans les *Annales de Gergonne,* tome XX (1829-1830), p. 306, 2°. VALLÈS, ingénieur des Ponts et Chaussées.

Pour 2° et 3° voir le *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. VUIBERT (15 mars 1899, page 94, n° 4520). L'appellation *Centres isodynamiques* est due à M. NEUBERG (*Mathesis,* 1885, p. 204, renvoi). Pour l'étude de ces points, voir le *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. DE LONGCHAMPS. Articles de M. A. BOUTIN, 1889, pp. 99, 123, 152, 180; note de M. NEUBERG, 1889, p. 212, nº 2; articles de M. BERNÈS, 1893, pp. 3, 25, 49, 76.

On a aussi le théorème suivant : *Les cercles d'Apollonius d'un triangle se coupent deux à deux sous des angles égaux à 120º*. (LEMOINE.) Le théorème avait été aussi proposé par M. GLASER, de Hambourg. M. DÉPREZ, professeur à l'Athénée de Bruxelles, en a donné une démonstration fort simple ; il en est de même de M. EMMERICH. (*Mathesis*, 1902, page 147, question 1329.)

2º Le théorème réciproque du *théorème de Brocard* (nº 1342 **n**. *Remarque*) présente quelque analogie avec celui des *Cercles d'Apollonius*. En voici l'énoncé général : *Lorsqu'une transversale* DEF *coupe les côtés d'un triangle* ABC, *les cercles décrits sur* AE, BD, CF *se coupent en deux points réels ou imaginaires*. En d'autres termes, on a le théorème connu : *Les cercles décrits sur les diagonales d'un quadrilatère complet, prises pour diamètre, ont même axe radical*. (N. A. 1862, p. 17.)

### Théorème 516. — VI.

**1546 f.** 1º *Tous les cercles d'Apollonius tels que* MM', NN', *décrits sur les droites* AA', BB', CC' *qui joignent les sommets homologues de deux figures directement semblables* ABC, A'B'C', *ainsi que les cercles d'Apollonius, tels que* PQ, P'Q', *relatifs à chaque côté des figures données, passent par un même point* S (fig. 980, page 712).

2º *Il en est de même* des cercles de Miquel *tels que* AA'D', BB'D' *lorsque le quadrilatère* ABB'A' *relatif à deux côtés homologues est convexe* (seul cas que nous ayons étudié).

C'est évident d'après une question précédente (nº 1527) : tous les cercles passent par le point double S des deux figures directement semblables.

Pour deux triangles donnés ABC, A'B'C', il y aurait à considérer neuf cercles d'Apollonius et neuf cercles de Miquel.

Les neuf cercles de Miquel et les deux bissectrices relatives à chaque cercle fournissent dix-huit constructions différentes ; d'autre part, pour les deux triangles ABC, A'B'C', en prenant les côtés deux à deux, par exemple BC, B'C' et les droites BB', CC', on obtient en tout douze lieux des points des *distances*, ou des *divisions proportionnelles* : soit en tout *dix-huit cercles* et douze droites (non compris les bissectrices) qui passent par le point S ; ces trente lignes donnent :

$$\frac{30 \cdot 29}{2} = 435 ;$$

donc en tout on a : $435 + 18 = 453$ constructions distinctes pour déterminer le point double S (fig. 980).

### Théorème de Sylvester 516. — VII.

**1546 g.** *La droite* OH *qui joint le centre du cercle circonscrit à l'orthocentre d'un triangle* ABC *est la résultante de trois forces égales* OA, OB, OC.

On sait que CH = 2.OP (nº723) ; d'ailleurs les triangles CHA et POR sont semblables, or AC est le double de PR ; donc

$$AH = 2 \cdot OR, \quad CH = 2 \cdot OP.$$

Déterminons le point symétrique D du point O par rapport au côté BC; la figure BOCD est un parallélogramme, donc OD est la résultante des forces égales OB, OC; mais ODHA est aussi un parallélogramme, car

$$AH = 2 . OR = OD;$$

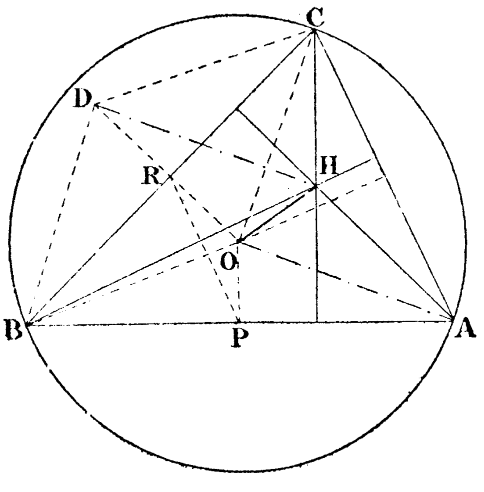


Fig. 991.

donc OH est la résultante de OD et de OA, et, par suite, la résultante de trois forces égales AO, BO, CO.

*Remarque.* On peut généraliser le théorème :

*Soit un point quelconque* O *que l'on joint aux trois points milieux* A′, B′, C′ *des côtés d'un triangle; par chaque sommet* A, B, C *on mène des parallèles à* OA′, OB′, OC′; *ces lignes se coupent en un même point* H, *et la droite* OH *est la résultante des forces* OA, OB, OC. La généralisation est de GÉRONO. (*N. A. M.*, 1883, p. 525.)

**Problème de Malfatti 516. — VIII.**

**1546 h.** *A un triangle donné* ABC *inscrire trois cercles* X, Y, Z *tels que chacun d'eux soit tangent aux deux autres et à deux côtés du triangle.*

En supposant le problème résolu, et comme conséquence d'une suite de déductions, on arrive à justifier la construction donnée par STEINER sans démonstration, et que nous énoncerons à la fin de cette étude.

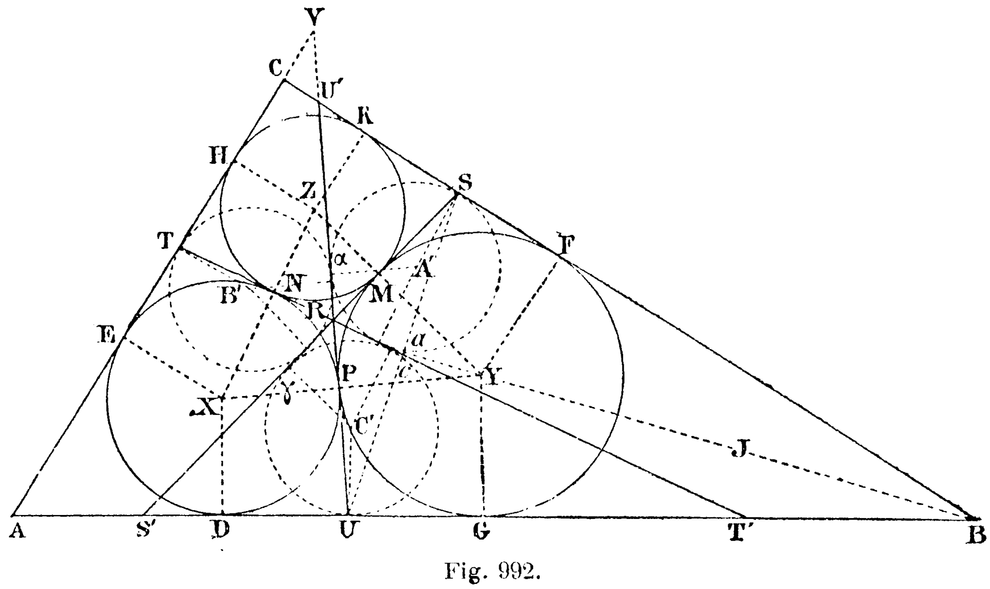


Fig. 992.

Les tangentes communes intérieures des trois cercles X, Y, Z se coupent au centre radical R de ces cercles (n° 1271 **a**).

Soient D, E, F, G, H, K les points de contact avec les côtés du triangle donné.

1° Le point U, intersection de UPU′ avec AB, est le point où la circonférence C′ inscrite au triangle S′RT′ est tangente au côté S′T′ de ce triangle.

En effet, $UG = UP = UD$, $DT' = NT'$, $GS' = MS'$, $RM = RN$;

donc $UT' - US' = DT' - GS' = NT' - MS' = RT' - RS'$.

Ainsi le point U est situé sur le côté S′T′, de manière que la différence de ses distances aux sommets voisins égale la différence des côtés RT′, RS′. Cette propriété caractérise le point de contact (n° 743, 4°).

2° De même, la circonférence A′, inscrite au triangle formé par RT′, RU′, BC, serait tangente à BC au point S; et la circonférence B′, inscrite au triangle formé par RS′, RU′, AC, serait tangente à AC au point T.

3° Si l'on considère le système des trois cercles A′, B′, Z, on reconnaît que SS′, TT′ sont deux tangentes extérieures, et que UU′ est une tangente commune intérieure. Ces trois droites se coupent en R; donc (n° 758) la seconde tangente commune intérieure aux cercles A′, B′, passe par le sommet C, où concourent les tangentes communes extérieures BC, AC.

4° Soient $\alpha$, $\gamma$ les points où UU′, SS′ touchent respectivement les cercles A′, C′; on a : $U\alpha = S\gamma$. En effet,

$$PU = GU = S'G - S'U = S'M - S'\gamma = M\gamma,$$

$$P\alpha = U'P - U'\alpha = U'F - U'S = SF = SM;$$

donc $$PU + P\alpha = SM + M\gamma.$$

5° La tangente $U\alpha$ à la circonférence A′ est moyenne proportionnelle entre US et $Ua$, en désignant par $a$ la seconde intersection de US avec A′. De même, $S\gamma$ est moyenne proportionnelle entre SU et $Sc$; à cause de $U\alpha = S\gamma$, on a donc : $Sa = Uc$ (n° 1259 **b**).

Ainsi la transversale US détermine des cordes égales dans les cercles A′ et C′; par suite, ces cercles sont vus du sommet B sous des angles égaux (n° 1259 **a**). On peut dire que la seconde tangente commune intérieure aux cercles A′ et C′ est la bissectrice YJ de l'angle B du triangle ABC.

De là résulte la construction suivante donnée par Steiner :

« R étant le centre du cercle inscrit au triangle ABC, inscrivez aux triangles BRC, CRA, ARB, les cercles A′, B′, C′; menez à ces cercles pris deux à deux les tangentes communes SS′, TT′, UU′ : on forme ainsi trois triangles ATT′, BUU′, CSS′, ayant chacun pour côtés une de ces tangentes et deux côtés du triangle ABC. Les cercles inscrits à ces nouveaux triangles sont les cercles demandés. »

**1546 i. Note.** Le *problème de Malfatti*, du nom du géomètre italien, né en 1731, mort en 1807, qui l'a fait connaître en 1803, a été proposé par les *Annales de Gergonne*, tome I, 1810-1811, page 196; résolu analytiquement dans le même volume, p. 343, par les rédacteurs J.-D. Gergonne et J.-E. Thomas Lavernède. La solution *très simple*, donnée par Malfatti, a été communiquée aux *Annales*, mais sans démonstration, par Bidone, professeur à l'Académie de Turin (tome I, p. 347). Gergonne indique qu'on peut avoir trente-deux solutions (p. 348).

La question revient dans le tome II, pp. 60 et 65; puis le tome X en donne une solution par Lechmuz. Cette dernière solution a été simplifiée par Catalan dans les *N. A.*, tome V, 1846, p. 60. Le tome VI, 1847, p. 346, se rapporte à la solution géométrique de Steiner; la démonstration est de Zornow, professeur à Kœnigsberg, en 1833. Le tome VIII, 1849, p. 62, annonce une solution algébrique par C. ADAMS. Le tome XII, 1853, p. 131, reproduit, d'après le *Journal de Crelle*, la solution trigonométrique donnée par SCHELLBACH, professeur à Berlin.

GEORGES RITT, dans ses *Problèmes de Géométrie élémentaire*, a résolu le *Problème de Malfatti* (p. 322, *problème* 214). Il en est de même de HOUSEL, dans son *Introduction à la Géométrie supérieure*, 1865, p. 144. D'après CATALAN, le docteur HART aurait publié plus tard la démonstration que lui-même a reproduite dans ses *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, 6e édition, p. 258.

DESBOVES, dans ses *Questions de Géométrie*, 2e édition, p. 360, no 18, puis M. ROUCHÉ, dans son *Traité de Géométrie*, 7e édition, 1900, 1re partie, p. 311, no 407, ont repris et développé la démonstration du Dr HART.

C'est le texte même de CATALAN que nous avons reproduit ci-dessus.

M. PELLETREAU a traité à son tour la même question d'une manière originale et remarquable. (A. F., 1888, Oran, pp. 99 à 103.)

*Le Bulletin de M. E.* de MM. GÉRARD et MICHEL, 1900, pp. 209 et 297, par un article remarquable de MM. G. FONTENÉ et L. GÉRARD, donne une étude complète de la question. Néanmoins on peut lire avec profit les *N. A.*, 1902, pp. 111 et 499, article par E.-N. BARISIEN. — Il reste encore à chercher la démonstration géométrique de la construction indiquée par MALFATTI lui-même (*A. de G.*, tome I, page 347). En représentant par $p$ le demi-périmètre du triangle, par $r$ le rayon du cercle inscrit, par $a'$, $b'$, $c'$ les distances RA, RB, RC de son centre aux sommets du triangle, cette construction revient à prendre

$$2AD = p - r + a' - b' - c',$$

d'où

$$DX = \frac{r(p - r + a' - b' - c')}{2(p - a)}.$$

* MALFATTI (1731-1807), né à Ala (Tyrol), professeur à l'Université de Ferrare.
* C. ADAMS, professeur à l'école industrielle de Wintherthür (Suisse) en 1845.
* PELLETREAU, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Constantine, en 1888.

## Problème 516. — IX.

**1546 j.** *Construire un triangle, connaissant le cercle inscrit et le point de Gergonne* N, *où se coupent les trois céviennes des points de contact.*

Le problème est indéterminé. Prenons un point quelconque D de contact (fig. 993). On a par suite la direction d'un côté BC et d'une cévienne DNA ; mais il faut déterminer les trois sommets du triangle.

En se donnant le point D, ou la direction de la cévienne DNMA, on peut déterminer le pôle P de DA et utiliser les propriétés connues des pôles et des polaires. (G., nos 786 à 804.)

Le problème à résoudre d'abord est donc le suivant :

## Problème 516. — X.

**1546 k.** *Construire un triangle, connaissant le cercle inscrit, l'un des contacts* D *et le point de Gergonne* N.

*Solution algébrique.* Supposons le problème résolu.

Les points D, N déterminent la corde DM, puis son pôle P. Tout revient à mener la sécante PFXE, de telle sorte que les diagonales BE, CF se coupent en N, c'est-à-dire que DX soit divisé harmoniquement par N et A, la corde DM l'étant d'ailleurs par X et A.

Posons : $DM = m,\ DN = n,\ DX = x,\ DA = y.$

Les équations $(DXNA) = -1$ et $(DMXA) = -1$ peuvent s'écrire respectivement : $\frac{2}{x} = \frac{1}{n} + \frac{1}{y}$ et $\frac{2}{m} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

On en tire : $x = \frac{3mn}{2n+m}$ et $y = \frac{3mn}{4n-m}$.

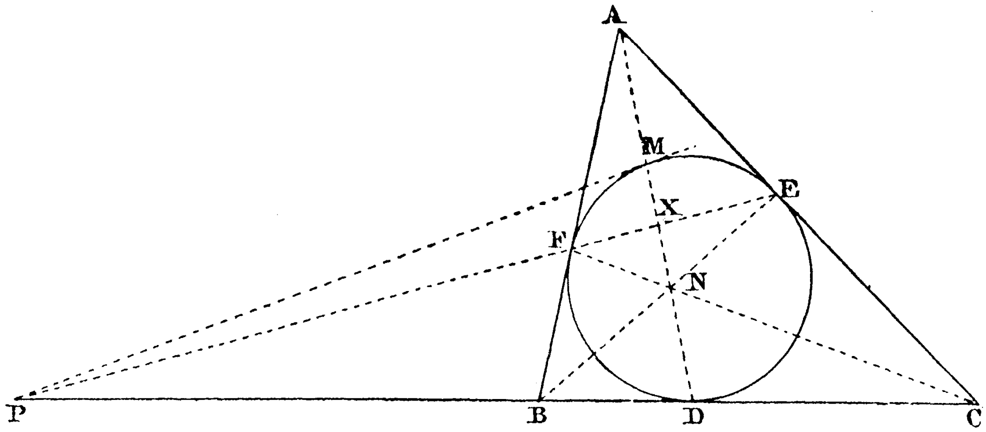



Fig. 993.

On peut donc déterminer le point X au moyen d'une troisième proportionnelle facile à construire $\frac{x}{m} = \frac{3n}{2n+m}$.

SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES

Dans tous les cas on se donne un des points de contact, D par exemple. Alors on mène la corde DNM et son pôle P ; puis on peut procéder comme ci-après :

**1546 l.** *Deuxième solution.* On connaît les points D, N, M, P. Traçons par le point P une sécante quelconque PFXE ; les tangentes en E, F coupent la tangente fixe PD en B, C. Joignons EN, FN qui rencontrent PD en B′, C′.

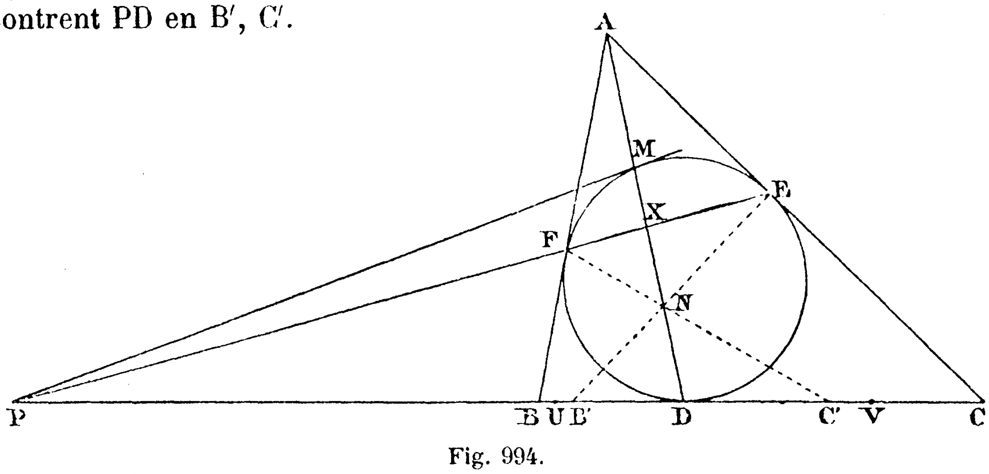



Fig. 994.

A cause du quadrilatère AENF, les points B, B′ et C, C′ se correspondent dans une involution dont les points fixes P, D sont aussi deux points correspondants.

Il s'agit de trouver la position de la sécante PX pour laquelle les points B, B′ se confondent, en même temps d'ailleurs que les points C, C′.

La question revient à trouver les *points doubles* U, V de l'involution déterminée par les trois couples de points correspondants B, B′; C, C′; P, D, c'est-à-dire les points qui divisent harmoniquement les deux segments BB′ et CC′, et par suite le segment PD.

Il ne restera plus qu'à mener des tangentes à la circonférence par les points U et V.

On aura un triangle auquel le cercle donné sera *inscrit* ou *exinscrit*, suivant le cas.

**1546 m.** *Troisième solution.* Sur le prolongement de PD, portons DD′ = D′D″ = PD (fig. 995).

Traçons les droites PN et MD″ qui se coupent en X′.

Par ce point X′ menons la parallèle à PD, jusqu'au point X où elle rencontre la corde DM.

La sécante PXEF résout la question.

Supposons le problème résolu.

Par les points M et X menons des parallèles à PD. La première coupe

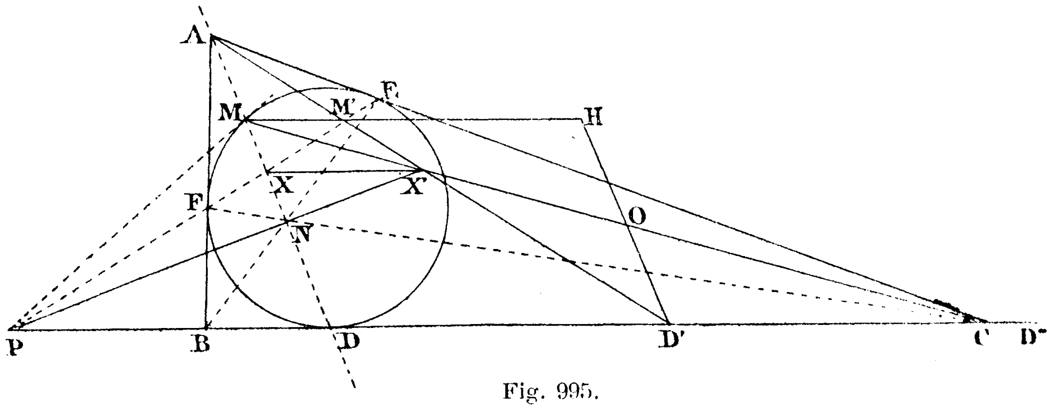



Fig. 995.

PX en M′; la seconde rencontre PN en X′. Ces deux points M′ et X′ appartiennent à la droite AD′, parce que le point D est le milieu de PD′ et que les points A, X divisent harmoniquement MD, tandis que les points A, N sont conjugués sur XD.

Achevons le parallélogramme MDD′H, et marquons le milieu O de D′H.

La division D′M′X′A est harmonique, comme DMXA, et il en est de même du faisceau M(D′M′X′A).

Donc le rayon MX′ passe par le milieu O, et par suite par le point D″.

Ainsi, la droite connue MD″ coupe PN en un point X′ d'où l'on déduit X, puis la corde PX et son pôle A. (*Généralement les points C et D″ ne coïncident pas, la démonstration est indépendante de leurs situations respectives.*)

**1546 n.** *Discussion.* Le cercle étant donné une fois pour toutes, ainsi que les points D, P, il est aisé de voir comment le triangle ABC change de position, lorsque le point de Gergonne N décrit la corde fixe DM.

Il y a deux positions remarquables de la sécante PN.

Le diamètre P$\alpha$, qui donne deux tangentes parallèles; alors le sommet A est rejeté à l'infini sur YZ, et le point de Gergonne est en I.

La sécante P$\beta$, qui fournit une tangente K$\beta$ parallèle à PD ; alors le sommet A est en K, est le point de Gergonne en J.

Quand le point de Gergonne N décrit le segment DI, le sommet A décrit la demi-droite DZ, et le cercle est *exinscrit* dans l'angle A.

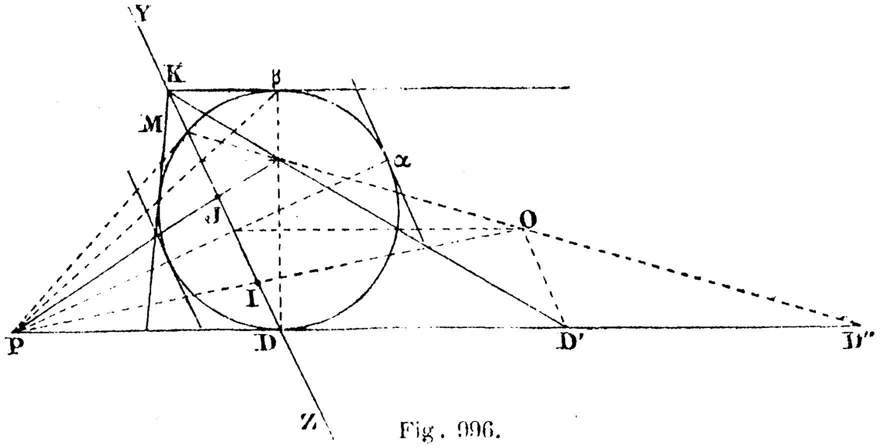



Fig. 996.

Quand le point N décrit IJ, le sommet A chemine sur la demi-droite YK, et le cercle est *inscrit*.

Quand le point N décrit JM, le sommet A parcourt le segment KM. Alors le cercle est *exinscrit* dans l'angle C.

**1546 o.** *Quatrième solution* du problème connu :

*A un cercle donné circonscrire le triangle* ABC, *connaissant le contact* D *et le point de Gergonne* N.

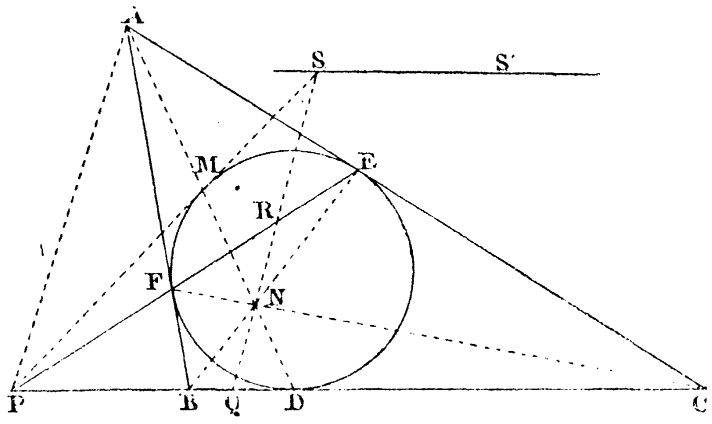



Fig. 997.

Supposons le problème résolu. La corde DNM fait connaître la tangente en M et le pôle P.

Menons à PA, par le point N, la parallèle QNRS.

Le faisceau P(DMRA) étant harmonique, R est le milieu de QS.

Le faisceau P(DRNA) étant harmonique, N est le milieu de QR.

Donc QS est égal à *quatre* QN, et le point S est l'intersection de la tangente PMS avec une *droite connue* SS', parallèle à PD.

Ainsi, on peut construire le point S, joindre NS, mener à NS la parallèle PA, qui détermine le point A et résout la question.

**1546 p.** *Cinquième solution.* Conservons les notations de la quatrième méthode.

Menons à AP, par le point N, la parallèle QNRS (on sait que N est le milieu de QR, et R le milieu de QS).

Construisons la *polaire* PH du point N, et menons-lui, par N, la parallèle INJ.

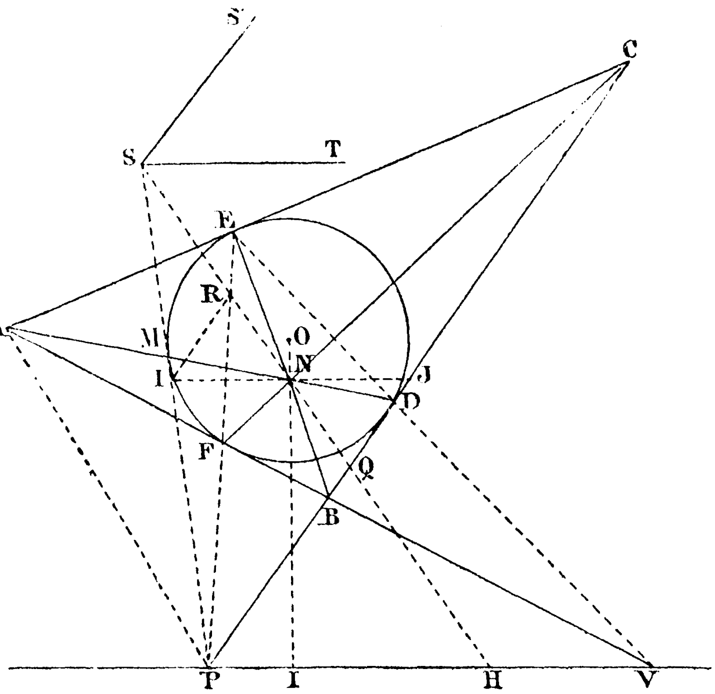



Fig. 998.

lèle INJ. Le faisceau P(IJNH) étant harmonique, le point N est le milieu de IJ. Donc le quadrilatère IRJQ est un parallélogramme, et le point I est le milieu de PS; donc N est le milieu de HS.

Le point S est la trace de la tangente PM sur la droite connue ST (symétrique de la polaire PH par rapport au point N).

On peut donc construire DNM, PM et PD, puis PH et ST qui donne S. Enfin joindre NS, et lui mener la parallèle PA.

### Théorème 516. — XI.

**1546 q.** *A un cercle donné, on peut circonscrire une infinité de triangles ayant le même point de Gergonne* N.

Pour obtenir un de ces triangles, appliquons la solution cinquième (n° 1546 **p**). On construit la polaire H'H du point N, puis la droite TT', symétrique de H'H par rapport à N.

D'un point P pris *arbitrairement* sur H'H, menons la tangente PD, puis la tangente PM qui coupe TT' en S. Joignons NS; par le point P menons à cette droite NS la parallèle PA, qui rencontre la droite DM en A.

Enfin, menons les tangentes AB et AC.

Quand la droite *mobile* PMS *roule* sur le cercle donné, les points P et S décrivent les droites fixes H'PH, T'ST, les droites NS, DNM pivotent autour du point N, la droite PA reste parallèle à NS, etc.

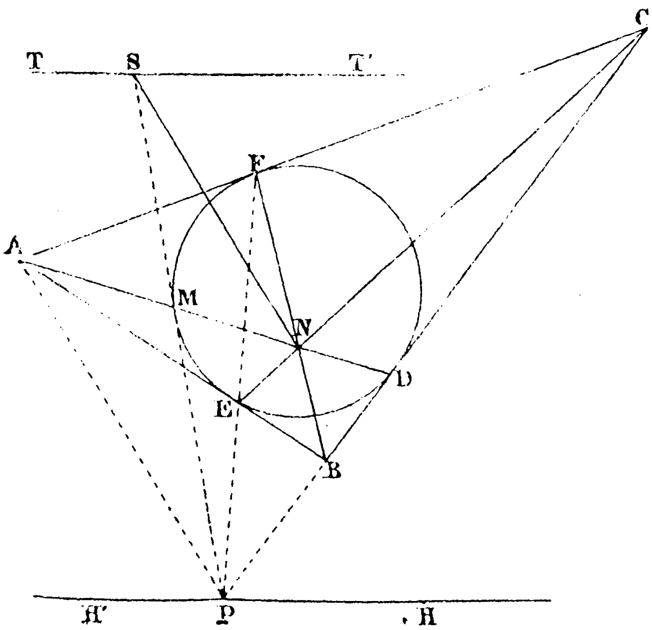



Fig. 999.

**1546 r.** *Remarque.* On peut compléter la question proposée :

1° *Tous les triangles circonscrits à un même cercle* O (fig. 1000), *et admettant un même point de Gergonne* N, *sont inscrits à une même conique, qui est homologique au cercle* O *par rapport au point* N *et à la polaire* PP′ *de ce point.*

A tout point P de cette polaire correspondent deux de ces triangles, ayant leurs bases sur les tangentes PD, PD′, et leurs sommets A, A′ sur la droite DD′P′, polaire de P.

D'après une construction connue (cinquième méthode, n° 1546 **p**), le point A est le conjugué harmonique de N sur DP′, et le point A′ est le conjugué de N sur D′P′.

On a donc :

$$(\mathrm{NADP'}) = (\mathrm{NA'D'P'}) = -1\,;$$

d'où l'on déduit, par un calcul très simple,

$$(\mathrm{NP'DA}) = (\mathrm{NP'D'A'}) = \frac{1}{2} = \text{constante}.$$

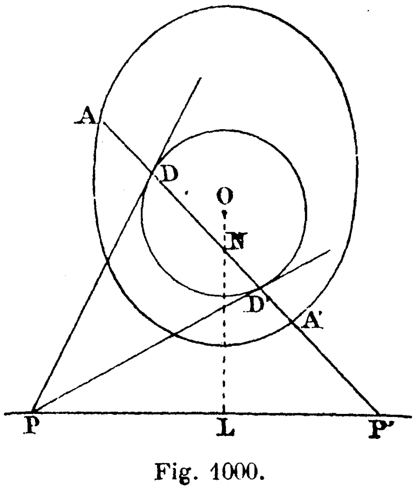



Fig. 1000.

Quand la droite NP′ pivote sur le point N, elle est constamment divisée par chacun des couples de points correspondants D et A, D′ et A′, dans un rapport anharmonique constant.

Donc les points A, A′ décrivent une conique.

Tous les triangles circonscrits à un même cercle O, et admettant un même point de Gergonne N, sont inscrits à une même conique.

2° *A chaque point* P *de la polaire du point* N (fig. 1000) *correspondent deux de ces triangles* ABC, A′B′C′, *qui admettent les mêmes céviennes de Gergonne* AA′NP′, BB′NQ, CC′NR′.

*Ces mêmes triangles forment un hexagone circonscrit, dont les droites* *de Brianchon passent par le point* N. *Ces droites de Brianchon* NP, NQ, NR *sont conjuguées par rapport aux céviennes* NP', NQ', NR', *c'est-à-dire qu'elle passent par leurs pôles* P, Q, R, *situés sur la polaire du point* N.

*Les triangles* ABC, A'B'C' *sont homologiques de quatre manières différentes : d'abord relativement au point* N *et à sa polaire* PP', *puis relativement à chacun des points* P, Q, R *et à leurs polaires respectives qui sont les droites de Brianchon* NP', NQ', NR'.

3° *Au point* P', *conjugué de* P *sur la polaire de* N, *répondent deux nouveaux triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *qui jouissent des mêmes propriétés, avec cette particularité remarquable, que les céviennes de Gergonne du premier groupe de triangles coïncident avec les droites de Brianchon relatives au deuxième groupe, et vice versa.*

Toutes les propriétés en question sont projectives, et on peut les rendre évidentes par une transformation qui réduit la figure au dernier degré de simplicité.

Si l'on projette la figure de manière que la projection de l'axe PP' soit rejetée à l'infini, et que la projection de son pôle N soit un foyer des courbes obtenues, ce foyer, dont la polaire disparaît à l'infini, sera un *centre* pour chacune des nouvelles courbes, et ces dernières ne seront autres que *deux cercles concentriques.*

De la sorte, la figure générale se simplifie à l'extrême, sans rien perdre de ses propriétés projectives qui deviennent alors manifestes.

**Note.** Cette intéressante étude (n$^{os}$ 1546 **j** à 1546 **r**), venue de premier jet, par suite un peu touffue, est due à M. H. Maltète, d'abord élève distingué du pensionnat Saint-Joseph de Dijon, puis professeur en ce même établissement.

# LIVRE IV

## THÉORÈMES

### Aire des figures.

**1547.** Dans les *Éléments de Géométrie* (IVe livre), les aires sont déduites de celle du rectangle par la comparaison directe de la surface à évaluer à une surface déjà connue. Ainsi, on prouve qu'un parallélogramme est équivalent à un rectangle de même base et de même hauteur; donc on peut prendre pour mesure du parallélogramme le produit des nombres qui mesurent la base et la hauteur de la figure donnée.

On procède d'une manière analogue pour le triangle et le trapèze; mais, pour le cercle, il a fallu recourir aux considérations infinitésimales et considérer cette figure comme la limite des polygones réguliers dont le nombre de côtés augmente indéfiniment.

ARCHIMÈDE est le principal auteur de la *Géométrie de la mesure*. On lui doit l'expression de l'aire du cercle et la quadrature du segment parabolique (G., no 947). Jusqu'à lui, les géomètres n'étaient parvenus qu'à évaluer les polygones. On pouvait citer, il est vrai, les *lunules d'Hippocrate* (nos 1577 et 1578); mais ce n'était que la constatation d'une *équivalence* heureuse entre une figure à périmètre curviligne et un triangle rectiligne, mais non une méthode qui pût conduire à l'évaluation des surfaces planes limitées par une courbe.

La *Méthode d'exhaustion*, due à ARCHIMÈDE, et appliquée à la parabole, ainsi qu'à la mesure des solides, est indiquée au livre VII (no 1902); il en est de même de la *Méthode des indivisibles*, de CAVALIERI, et de la *Méthode de sommation*, que l'on peut rattacher aux deux premières.

Les formules de quadrature approximative que nous avons employées sont dues à THOMAS SIMPSON (G., no 983) et à PONCELET (G., no 357).

Cette dernière formule a été modifiée avantageusement par le capitaine PARMENTIER (G., no 996).

**Note.** * ARCHIMÈDE de Syracuse (av. J.-C., 287 à 212). Ce grand géomètre a traité *de la sphère et du cylindre; des conoïdes et des sphéroïdes; des spirales; de la mesure du cercle*, etc.; il a créé la *Méthode d'exhaustion*, et a laissé un livre de *Lemmes*.

* THÉODORE PARMENTIER, général de division, ancien aide de camp du général Niel en Crimée; né à Barr (Alsace) en 1821, mort à Paris en 1910.

#### Théorème 517.

**1548.** *L'aire d'un polygone circonscrit à un cercle égale la moitié du produit du périmètre par le rayon du cercle.*

Car un tel polygone est décomposable en triangles ayant tous pour hauteur le rayon $r$ du cercle, et pour bases les divers côtés.

### Théorème 518.

**1549.** 1° *Les droites menées des sommets d'un triangle* ABC *au point de concours* G *des médianes, divisent ce triangle en trois triangles équivalents.*

2° *Les trois médianes divisent le triangle en six triangles équivalents.*

### Théorème de Vecten 519.

**1550.** *Lorsqu'on construit des carrés sur les trois côtés d'un triangle rectangle, et qu'on mène* HI, JK, LG :

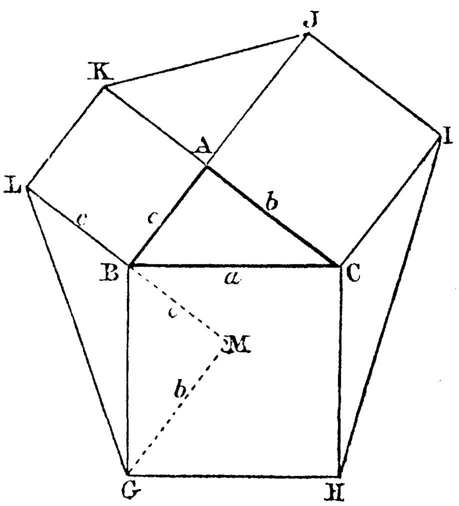



Fig. 1001.

1° *Chacun des trois triangles que l'on obtient en joignant les sommets extérieurs des carrés est équivalent au triangle rectangle primitif;*

2° *La somme des carrés des côtés de l'hexagone obtenu égale huit fois le carré de l'hypoténuse.*

Prolongeons LB, et menons sur cette droite la perpendiculaire GM.

1° Les triangles BMG, BAC sont égaux; les triangles BLG, BMG sont équivalents; donc BLG et BAC sont équivalents.

De même, les triangles CHI, CAB sont équivalents.

2° Le triangle BGL donne (G., n° 252) :

$$GL^2 = c^2 + a^2 + 2BL \,.\, BM = c^2 + a^2 + 2c^2 = a^2 + 3c^2.$$

On aurait de même : $HI^2 = a^2 + 3b^2$.

Les carrés des quatre autres côtés de l'hexagone donnent :

$$2a^2 + b^2 + c^2.$$

On a donc pour la somme des carrés des six côtés :

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 \quad \text{ou} \quad 4a^2 + 4a^2 \quad \text{ou enfin} \quad 8a^2.$$

**1550 a. Note.** Le théorème ci-dessus est dû à VECTEN, professeur à Nîmes; il a été publié dans les *Annales de Gergonne,* tome VII (1816-1817), p. 322, n$^{os}$ 5 et 6, à l'occasion de l'étude de la figure constituée par un triangle quelconque et les trois carrés construits extérieurement sur les côtés du triangle. (Voir ci-après, n$^{os}$ 1773 **k** ... **u**.) Le théorème est vrai pour un *triangle quelconque,* et la seconde partie est énoncée comme il suit : *La somme des carrés* $HI^2 + JK^2 + LG^2$ *égale trois fois la somme des carrés des trois côtés du triangle.*

### Théorème 520.

**1551.** *Un triangle rectangle est équivalent au rectangle des deux segments faits sur l'hypoténuse par le point de contact du cercle inscrit.* (BURLET, de Dublin, *N. A.*, 1856, p. 290.)

Soient $m$, $n$ les segments faits sur l'hypoténuse, $r$ le rayon du cercle inscrit.

On sait que :

$$AE = AF = r; \quad CE = m; \quad BF = n.$$

Le double de l'aire du triangle est donné par AC . AB,

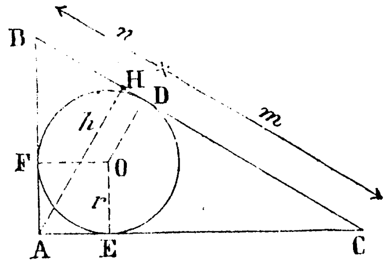


Fig. 1002.

ou $$(AE + EC)(AF + FB),$$

$$2 . S = (r + m)(r + n) = r^2 + r(m + n) + mn.$$

Or $r^2 + r(m + n)$ est l'aire du triangle, car $mr$ est le double du triangle DOC ou bien l'aire du quadrilatère DOEC; de même $rn$ exprime l'aire de DOFB, et $r^2$ complète le triangle rectangle.

Ainsi $$2S = S + mn; \quad \text{d'où} \quad S = mn.$$

### Théorème 521.

**1552.** *L'aire d'un triangle* ABC *peut s'obtenir en multipliant le rayon du cercle circonscrit par le demi-périmètre du triangle orthique.*

On sait qu'on nomme *triangle orthique* le triangle obtenu en joignant deux à deux les pieds des hauteurs du triangle donné.

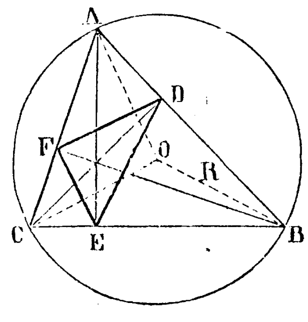


Fig. 1003.

Joignons le point O aux trois sommets A, B, C et aux points D, E, F.

Le rayon AO du cercle circonscrit est perpendiculaire à DF (nos 292 **h** et 663); donc l'aire du quadrilatère ADOF s'obtient en multipliant AO ou R par la moitié de DF.

On a donc : $$ADOF = R . \frac{DF}{2},$$

$$BDOE = R . \frac{DE}{2},$$

$$CEOF = R . \frac{FE}{2};$$

d'où $$ABC = R . \frac{DF + DE + EF}{2}.$$

**1552 a. Note.** 1° En désignant par $2p'$ le périmètre du triangle orthique DEF, on a : $$S. \text{ ou } ABC = Rp'.$$

2° La formule précédente n'est vraie que pour un triangle acutangle, car il en est tout autrement pour un triangle obtusangle. — Si A est obtus, on a :

$$S. \text{ ou } ABC = R(p' - e),$$

en désignant par $e$ le côté DF compris dans l'angle A.

(D'après M. A. CAUSSE, professeur au lycée de Brest, *Bulletin de mathématiques élémentaires de MM.* NIEWENGLOWSKI *et* GÉRARD, année 1895-96, pages 23 et 24.)

**Théorème 521. — I.**

**1552 b.** *La somme des droites qui joignent deux à deux les pieds des hauteurs s'obtient en divisant le produit des trois côtés du triangle par le double du carré du rayon du cercle circonscrit.*

En désignant les trois côtés du triangle donné par $a$, $b$, $c$, et ceux du triangle DEF par $d$, $e$, $f$, on a :

$$\text{surf. ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\text{R}};$$

d'où $\frac{abc}{4\text{R}} = \text{R} \cdot \frac{\text{DF} + \text{DE} + \text{EF}}{2}$ ou $\text{DF} + \text{DE} + \text{EF} = \frac{abc}{2\text{R}^2}$,

ou

$$d + e + f = \frac{abc}{2\text{R}^2}.$$

**Théorème 521. — II.**

**1552 c.** *Soient* P, Q, R *les projections du centre de gravité d'un triangle* ABC *sur les côtés* a, b, c *de ce triangle ; on a :*

$$\text{PQR} = \frac{4}{9}\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2b^2c^2}\right)\text{T}^3.$$

(*Nouvelle Correspondance mathématique* de CATALAN, 1874-1875, p. 107.)

**Théorème 521. — III.**

**1552 d.** *Le triangle* T′ *ayant pour sommets les pieds des hauteurs du triangle podaire du centre du cercle inscrit à un triangle donné* ABC *ou* T, *a pour mesure soit :*

$$\text{T}' = \frac{16\text{T}^5}{a^2b^2c^2(a + b + c)^2} \quad \text{ou} \quad \text{T}' = \text{T} \cdot \left(\frac{r}{2\text{R}}\right)^2,$$

en représentant par R et $r$ les rayons des cercles circonscrit et inscrit à ABC. (*N. C. M.*, 1874-75, pp. 75, 187-6° et 224.) La première formule est de HAIN, et la seconde de NEUBERG.

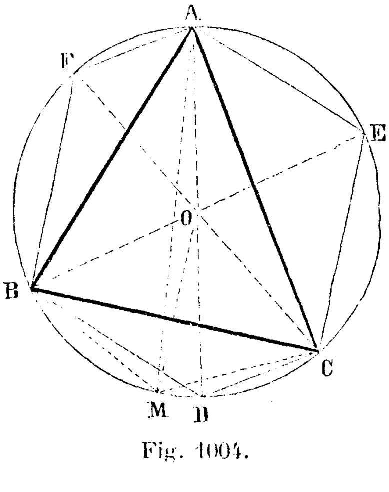


Fig. 1004.

**Théorème 522.**

**1553.** *On donne un triangle et le cercle circonscrit ; chaque rayon qui aboutit à un des sommets est prolongé jusqu'à la circonférence, et l'on joint deux à deux les extrémités des trois diamètres ainsi menés ; prouver que l'hexagone obtenu est double du triangle.* (*N. A.*, 1844, page 317.)

Les deux quadrilatères AFBD, DCEA sont égaux, car

$$\text{DC} = \text{AF}, \quad \text{CE} = \text{FB}, \quad \text{et} \quad \text{EA} = \text{BD}.$$

Il suffit donc de prouver que le triangle donné est équivalent à l'un de ces quadrilatères.

Or les triangles de même base et de même hauteur sont équivalents; donc

$$\mathrm{AOB} = \mathrm{AOE},$$
$$\mathrm{BOC} = \mathrm{COE},$$
$$\mathrm{AOC} = \mathrm{COD}.$$

En ajoutant, on trouve : $\mathrm{ABC} = \mathrm{ADCE}.$

**1554.** Remarque. *L'hexagone qui correspond aux trois hauteurs prolongées est équivalent à l'hexagone obtenu en prolongeant les trois rayons du cercle circonscrit.*

En effet, l'hexagone des trois hauteurs prolongées est aussi le double du triangle primitif.

### Théorème 522. — I.

**1555.** *L'hexagone de surface maxima est obtenu par le prolongement des bissectrices du triangle donné, ou par le prolongement des trois perpendiculaires élevées au milieu des côtés du triangle.*

La bissectrice de l'angle A (fig. 1004) passe au milieu de l'arc; il en est de même de la perpendiculaire OM élevée au milieu de BC; or le triangle BMC est $>$ BDC, etc.

### Théorème 523.

**1556.** *Les trois hauteurs d'un triangle acutangle se coupent au point* H; *sur* AB *on construit un triangle rectangle ayant le sommet de l'angle droit sur la perpendiculaire* CD; *prouver que la surface du triangle rectangle* ALB *est moyenne proportionnelle entre les surfaces* ABC *et* ABH.

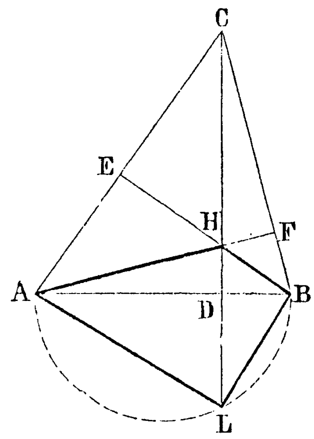


Fig. 1005.

1re *Démonstration.* Les triangles ABC, ABL, ABH ayant même base, il suffit de prouver qu'on a :

$$\mathrm{DL}^2 = \mathrm{DC} \,.\, \mathrm{DH}.$$

Or $$\mathrm{DL}^2 = \mathrm{DA} \,.\, \mathrm{DB}.$$

Il faut démontrer que

$$\mathrm{DA} \,.\, \mathrm{DB} = \mathrm{DC} \,.\, \mathrm{DH}.$$

Les triangles ADH, CDB sont semblables, car les angles en A et en C sont égaux; donc

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{BD}}; \quad \text{d'où} \quad \mathrm{DA} \,.\, \mathrm{DB}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{DL}^2 = \mathrm{DC} \,.\, \mathrm{DH}.$$

2e *Démonstration.* Si l'on considère la figure HABC comme la projection d'un tétraèdre, dont le trièdre H serait tri-rectangle, le triangle ALB peut être regardé comme le rabattement de la face projetée en AHB. Relevons ce triangle. Le triangle CDL de l'espace est rectangle en L; par suite, on a : $\mathrm{DL}^2 = \mathrm{DH} \,.\, \mathrm{DC}.$

### Théorème 523. — I.

**1557.** *Sur chaque côté d'un triangle acutangle* ABC *on construit un triangle rectangle ayant le sommet de l'angle droit sur la hauteur correspondante ou sur son prolongement; prouver que la somme des carrés des trois triangles rectangles égale le carré de la surface du triangle donné* ABC (fig. 1005).

Représentons les trois triangles rectangles par L, M, N, et ABC par T;

on a : $L^2 = T . ABH$; $M^2 = T . ACH$; $N^2 = T . BCH$;

donc $L^2 + M^2 + N^2 = T(ABH + ACH + BCH) = T^2$.

### Théorème 524.

**1558.** *Quand deux triangles ont même hauteur, les rectangles inscrits qui ont même hauteur sont dans le même rapport que les triangles donnés.*

(Voir *Méthodes*, n° 200.)

### Théorème de Clairaut 525.

**1559.** *Sur deux des côtés* AB, AC *d'un triangle quelconque on construit des parallélogrammes quelconques; on joint le sommet* A *au point de concours* H *des côtés* DE, FG; *on prolonge* HAM *d'une quantité* MN *égale à* AH, *et l'on construit un parallélogramme sur* BCN.

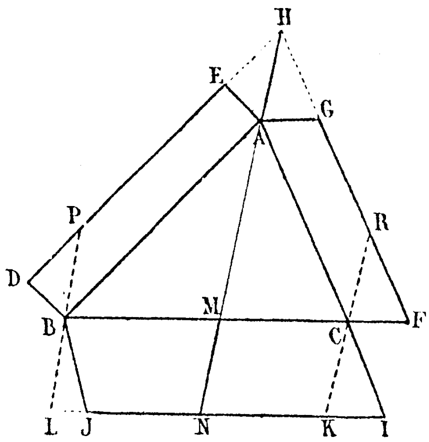


Fig. 1006.

*Prouver que ce parallélogramme* BCN *est équivalent à la somme des parallélogrammes construits sur les autres côtés du triangle.*

*Déduire de ce théorème que le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Par les sommets B et C menons des parallèles LBP et KCR à NH.

Les parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents; donc

$$BCIJ = BCKL;\quad ABDE = ABPH;\quad ACFG = ACRH.$$

Or, par suite de l'égalité des lignes AH et MN, on a :

$$BMNL = ABPH, \quad \text{et} \quad CMNK = ACRH;$$

donc $$ABDE + ACFG = BCIJ.$$

**1559 a. Note.** Le théorème est souvent attribué au frère de Clairaut (voir *Million de faits*, p. 131), et nous le laissons sous ce nom afin de rappeler un mathématicien distingué; mais il est dû à PAPPUS. (D'après les *Récréations mathématiques* d'OZANAM, rééditées et augmentées par MONTUCLA, en 1778.) Voir aussi *Mathesis*, 1908, p. 13.

* CLAIRAUT, né à Paris en 1713, mort en 1765, publia de nombreux mémoires relatifs à l'astronomie. Ses *Éléments de Géométrie* se distinguent par de grandes qualités. Son frère mourut fort jeune, après avoir fait paraître, à seize ans, en 1731, un petit ouvrage où se trouve un théorème ingénieux qu'on lui doit probablement (nº 1561, 2e et 3e éditions).

* OZANAM, né en 1640, dans les Dombes, mort à Paris en 1717, est surtout connu par son *Dictionnaire des Mathématiques* et par ses *Récréations mathématiques et physiques*. Un de ses arrière-petits-neveux, FRÉDÉRIC OZANAM (1813-1853), a occupé la chaire de littérature étrangère à la Sorbonne, et a été l'un des fondateurs de l'admirable *Société de Saint-Vincent-de-Paul*.

* MONTUCLA, né à Lyon en 1725, mort à Versailles en 1800, a publié divers ouvrages, et en outre une *Histoire des mathématiques*.

### Théorème de Pythagore 525. — I.

**1560**. *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.*

On peut ramener le *théorème de Pythagore* (fig. 1007) à celui de *Clairaut* (fig. 1006); il suffit de prouver que la droite AH est égale et perpendiculaire à l'hypoténuse BC.

Or les triangles rectangles ABC, EAH sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux ; car

$$AB = AE, \quad AC = AG = EH;$$

donc $$AH = BC.$$

En outre, l'angle $EAH = ABC$; d'ailleurs les angles EAH, CAM sont égaux comme opposés par le sommet; donc

$$\text{angle } CAM = ABC;$$

donc AM est perpendiculaire sur BC.

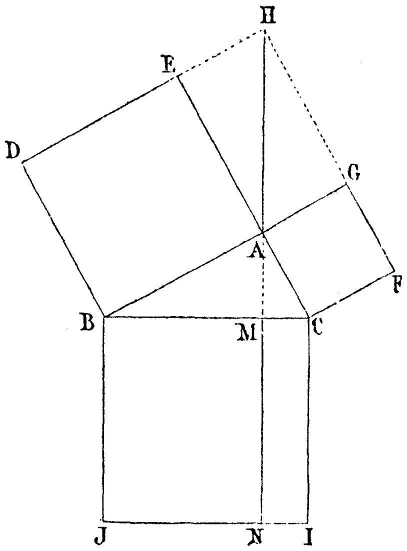



Fig. 1007.

*Remarque*. On peut démontrer le théorème de Pythagore de bien des manières; en voici encore quelques autres :

AUTRES DÉMONSTRATIONS

1º Sur IJ (fig. 1008) on construit un triangle rectangle ILJ égal au triangle donné; mais IL correspond à AB.

Les quatre quadrilatères DBCF, DEGF, ABJL, ACIL sont égaux, car ils sont superposables; donc l'hexagone DBCFGED est équivalent à l'hexagone ABJLICA.

Mais ces deux figures ont une partie commune ABC, et

$$AEG = ILJ;$$

donc les restes sont équivalents :

$$BCIJ = ABDE + ACFG.$$

2° Menons les perpendiculaires ADE, FL (fig. 1009); les triangles BAC, FHG sont égaux, or ABFH est équivalent au carré M et ACGH au carré N; donc...

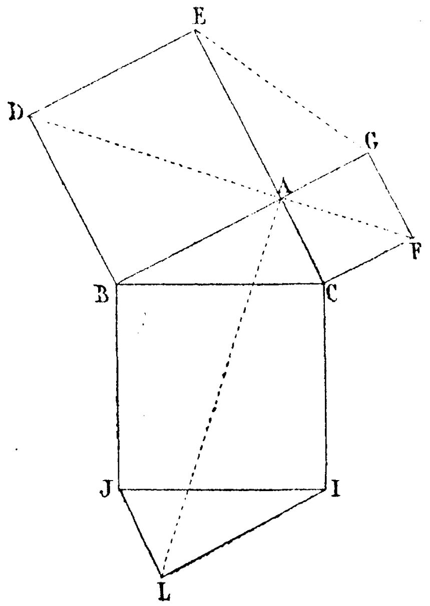



Fig. 1008.

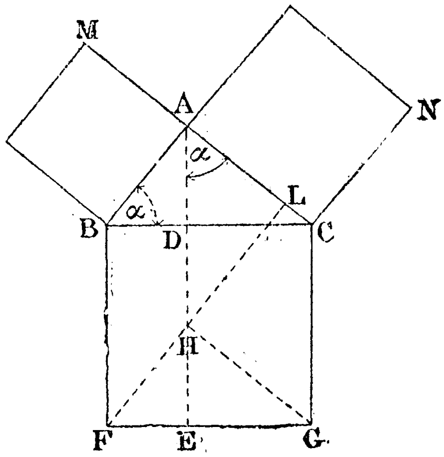



Fig. 1009.

3° Soit ABC le triangle rectangle donné (fig. 1010) et BCDE le carré construit sur l'hypoténuse.

En menant les perpendiculaires DF, EG sur AB, puis CM, EN sur DF, on obtient quatre triangles rectangles égaux.

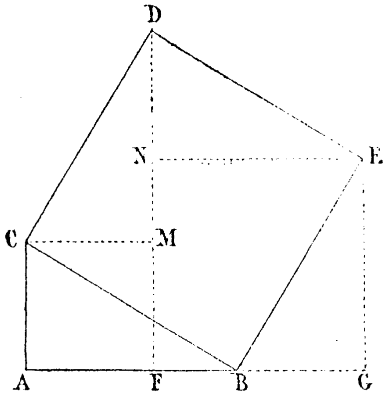



Fig. 1010.

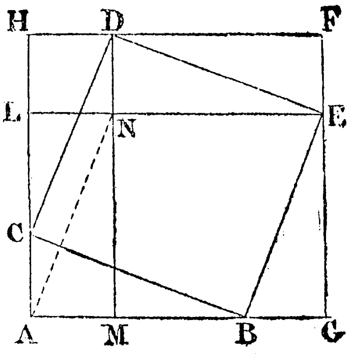



Fig. 1011.

Or, si du pentagone AGEDC on retranche deux de ces triangles, on obtient le carré de l'hypoténuse; tandis que si l'on retranche les triangles CMD et DNE, on obtient pour reste les carrés des côtés de l'angle droit; donc...

4° Soit BCDE le carré construit sur l'hypoténuse (fig. 1011), GN et NH les carrés construits sur les côtés de l'angle droit; or la somme de ces carrés, augmentée de quatre triangles rectangles égaux entre eux, donne le même carré AGFH, que le carré de l'hypoténuse augmenté de quatre triangles égaux aux premiers.

Voici encore trois démonstrations par décomposition.

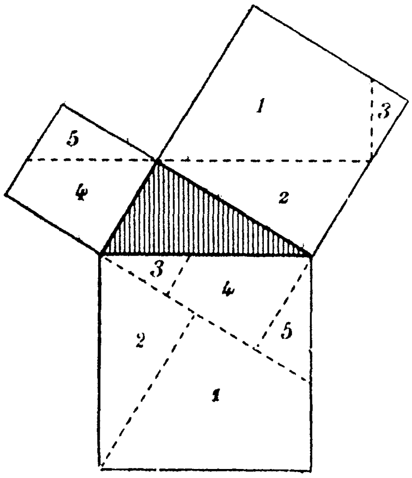



Fig. 1012.

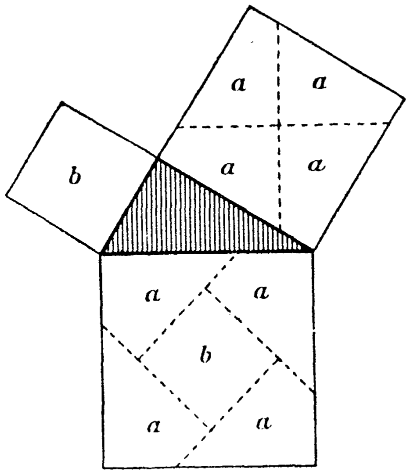



Fig. 1013.

5° (fig. 1013) est de M. G. Lehr, professeur au lycée Ingres. (*Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires,* de MM. Gérard et Michel.)

6° (fig. 1012) est de M. S. de la Campa (Las Palmas). (*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1902, page 68, n° 2303.)

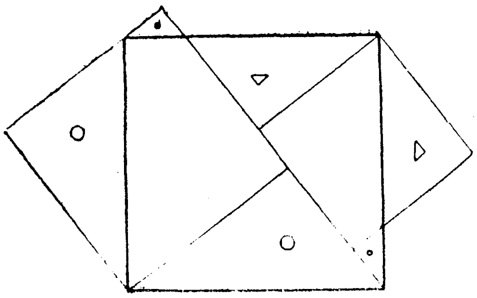


Fig. 1014.

7° (fig. 1014) est du Japonais Yoshinosi Isomura, en 1684. (*I. des M.,* 1903, p. 315.)

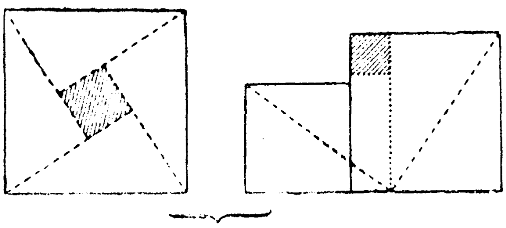


Fig. 1015.

8° La solution de Bhascara (fig. 1015) est accompagnée du simple mot : *regarde.* (Voir à ce sujet *I. des M.,* 1902, n° 2496, page 320, article par P.-F. Teilhet.)

9° Soit le triangle rectangle ABC (fig. 1016); d'une extrémité B de l'hypoténuse, avec le côté $c$ pour rayon, décrivons une circonférence; on a :

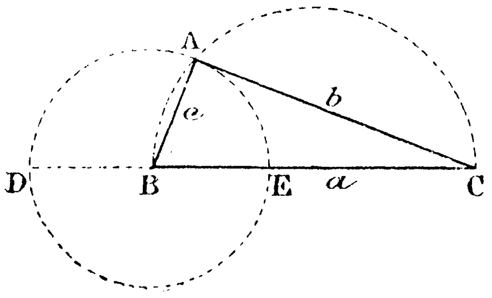



Fig. 1016.

$$\overline{AC}^2 = CD \cdot CE,$$
$$b^2 = (a+c)(a-c),$$
$$b^2 = a^2 - c^2.$$

10° Le double de l'aire est donné par $bc$ et par $pr$; mais $r = p - a$ (n° 743) ou $r = \dfrac{b+c-a}{2}$;

donc $$2bc = (a+b+c)(-a+b+c);$$
d'où $$a^2 = b^2 + c^2.$$

(MOLLMANS et THIRY, *Mathesis*, 1902, p. 17, n° 3, et p. 42, 1er renvoi.)

**1561. Note.** La démonstration 1° est de TERQUEM. Pour 3°, on peut voir le traité suivant, p. 80 : *Lehrbuch der Geometrie* von Dr RUDOLF SONNDORFER, director der akademischen Handelsmittelschule in Wien (1873-1877). Cet ouvrage, remarquable à divers titres, est fait pour les écoles qui correspondent à notre *Enseignement moderne*.

La démonstration donnée par M. VOLKOW, professeur à l'école reale de Saint-Pétersbourg, est aussi remarquable par sa simplicité : elle consiste à construire le carré de l'hypoténuse du même côté que les carrés des côtés de l'angle droit, qui se trouvent ainsi recouverts en grande partie, et la compensation se reconnaît facilement. (*Journal de M. de* LONGCHAMPS, 1897, p. 107.) — On peut lire aussi l'étude intitulée : *Le cas général du carré de l'hypoténuse*, par G. ARNOUX, ancien officier de marine. — Cette étude a été publiée à Digne, en 1889. — *L'Intermédiaire des Mathématiciens* donne d'ailleurs un assez grand nombre d'autres démonstrations, 1903, p. 172, n° 2496; 1908, pp. 124, 216, 284, n° 3403. et 1909, p. 79.

* BHASCARA, vers 1114, géomètre hindou (voir *Aperçu historique*, p. 447).

### Théorème 525. — II.

**1562.** *L'aire d'un quadrilatère quelconque* ABCD *égale :*

1° *Le produit d'une diagonale* AC, *par la demi-somme des perpendiculaires abaissées des sommets opposés* B *et* D.

2° *Le demi-produit des diagonales par le sinus de leur angle.*

3° *Le produit des bimédianes* EG, FH *par le sinus de leur angle* (fig. 1017).

### Théorème 526.

**1563.** *Lorsque deux droites de longueurs données se coupent sous un angle constant, le quadrilatère formé en joignant deux à deux les extrémités de ces droites a une surface constante.*

(Voir *Méthodes*, n° 155.)

**1563 a.** *Le quadrilatère formé en joignant deux à deux les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque pris dans un carré sur les quatre côtés a une surface constante.*

**Théorème 526. — I.**

**1563 b.** *La surface du quadrilatère* ABCD *ne varie pas, lorsque deux sommets* A *et* C *se déplacent en parcourant deux droites égales* AA′, CC′ *parallèles et de même sens.* (Prouhet.)

En effet, la diagonale A′C′ est égale et parallèle à AC.

*Remarques.* 1° Si l'on prend BB′ et DD′ égales, parallèles et de même sens entre elles, mais de direction quelconque par rapport à AA′, CC′, les quadrilatères ABCD, A′B′C′D′ sont équivalents.

2° Théorème analogue, pour les volumes de deux tétraèdres ABCD. A′B′C′D′.

**Théorème 526. — II.**

**1564.** *Le parallélogramme* EG, *qui a pour sommets les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque* ABCD, *est la moitié de ce quadrilatère,*

*Le parallélogramme circonscrit au quadrilatère, et dont les côtés sont parallèles aux diagonales, est double de ce même quadrilatère.*

Le parallélogramme EFGH est la moitié du quadrilatère ABCD, et celui-ci est la moitié du parallélogramme circonscrit. En représentant par $a$, $b$ et $\theta$ les diagonales et leur angle, les aires ont pour valeur :

$$IJKL = ab \sin \theta; \quad ABCD = \frac{ab \sin \theta}{2};$$

$$EFGH = \frac{ab \sin \theta}{4}.$$

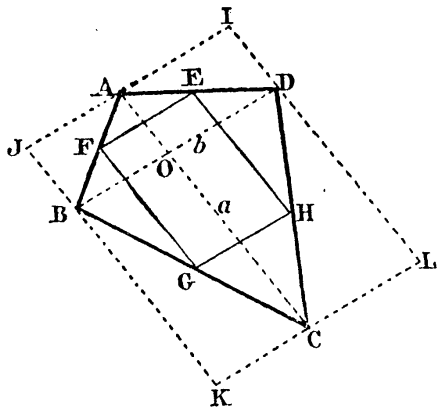


Fig. 1017.

*Remarque.* Cette question peut être considérée comme un cas particulier du *théorème de Prouhet* (n° 1575).

**Théorème 527.**

**1565.** *Toute droite menée d'une base à l'autre d'un trapèze, par le milieu de la base moyenne, divise la figure en deux trapèzes équivalents.*

On admet que le point M est sur la petite base et non sur le prolongement de cette ligne; dans le cas contraire, l'étude de la question est plus complexe (voir *Méthodes*, n° 254).

**Théorème 528.**

**1566.** *L'aire d'un trapèze égale le produit de l'un des côtés non parallèles par sa distance au milieu du côté opposé.*

Les triangles rectangles semblables HBC, PMN donnent :

$$\frac{h}{d} = \frac{c}{m};$$

d'où $\qquad dc = mh = S.$

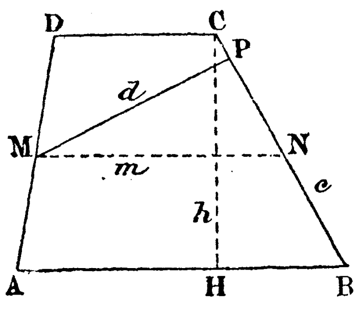


Fig. 1018.

Remarque. *Les distances de chaque point milieu des côtés non parallèles d'un trapèze, au côté opposé à celui dont on considère le milieu, sont inversement proportionnelles à ces mêmes côtés.*

En effet, soit $f$ la perpendiculaire abaissée du point milieu N sur le côté opposé AD (fig. 1018); on a : $f \,.\, \mathrm{AD} = d \,.\, \mathrm{BC}$;

d'où
$$\frac{d}{f} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BC}}.$$

**Théorème 528. — I.**

**1567**. *Les triangles qui ont pour bases les côtés non parallèles d'un trapèze et qui ont pour sommet commun le point de concours des diagonales, sont équivalents.*

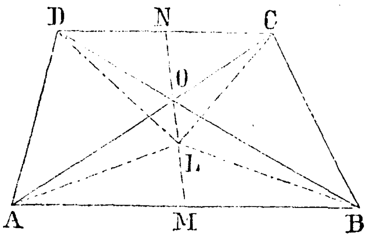


Fig. 1019.

Il faut prouver qu'on a :

$$\mathrm{AOD} = \mathrm{BOC}.$$

En effet, ADB et ACB sont équivalents; si l'on supprime la partie commune AOB, les restes sont équivalents; donc...

**Théorème 528. — II.**

**1568**. *Les triangles* ALD, BLC *qui ont pour bases les côtés non parallèles et dont le sommet commun est sur la droite qui joint les milieux des bases, sont équivalents.*

**Théorème 529.**

**1569**. *Par un point pris sur la diagonale d'un parallélogramme, on mène des parallèles aux côtés de cette figure; prouver que les deux parallélogrammes obtenus sont équivalents.*

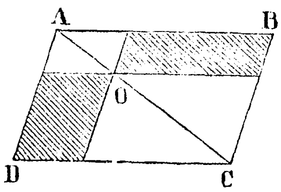


Fig. 1020.

La diagonale divise la figure donnée en deux triangles égaux; il en est de même des parallélogrammes qui ont pour diagonales AO, OC; donc le parallélogramme OB est équivalent à OD.

**Théorème 530.**

**1570**. *On joint chaque sommet d'un parallélogramme à un point pris à l'intérieur de cette figure; prouver que la somme des triangles ayant pour bases deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres triangles.*

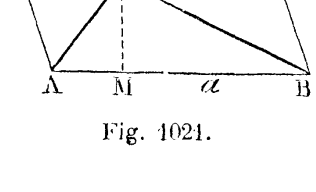


Fig. 1021.

Soient : $\mathrm{AB} = \mathrm{DC} = a$,

$$\mathrm{AOB} = \frac{a \,.\, \mathrm{OM}}{2}, \quad \mathrm{DOC} = \frac{a \,.\, \mathrm{ON}}{2};$$

donc
$$\mathrm{AOB} + \mathrm{DOC} = \frac{a}{2} \,.\, \mathrm{MN} = \frac{1}{2}\,\mathrm{ABCD} = \mathrm{AOD} + \mathrm{BOC}.$$

*Autre démonstration.*

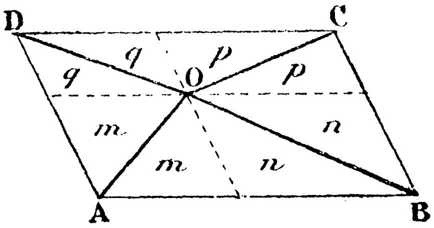



Fig. 1022.

$$OAB + OCD = m + n + p + q = OAD + OCB.$$

**Théorème 530. — I.**

**1571.** *Lorsqu'on joint un point pris sur une diagonale aux quatre sommets d'un parallélogramme, on décompose la figure en quatre triangles équivalents deux à deux.*

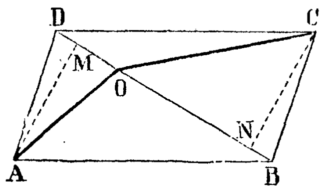



Fig. 1023.

En effet, les triangles ADO, CDO sont équivalents, car ils ont même base DO et des hauteurs égales AM, CN.

**Théorème 530. — II.**

**1572.** *La somme des deux triangles qui ont pour sommet commun un point du périmètre d'un parallélogramme, et pour base chaque diagonale, est constante.*

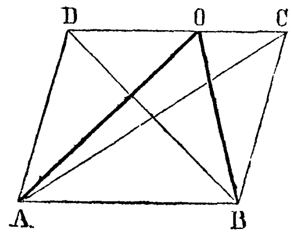



Fig. 1024.

La somme $AOC + BOD$ est constante.
En effet, AOC, BOC sont équivalents; donc

$$AOC + BOD = BOD + BOC = BCD.$$

**Théorème 530. — III.**

**1573.** *Lorsqu'on joint un point quelconque O aux quatre sommets d'un parallélogramme, le triangle qui a ce point pour sommet et une diagonale pour base, est la somme ou la différence des triangles qui ont même sommet, et pour bases respectives les deux côtés adjacents qui aboutissent à une des extrémités de la diagonale considérée.*

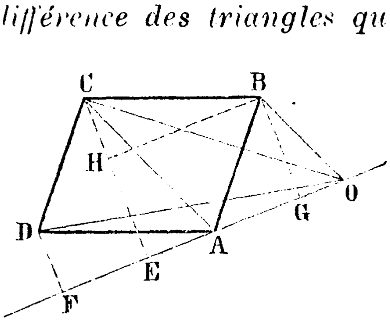



Fig. 1025.

1° Considérons la diagonale AC et les côtés AB, AD; on doit avoir :

$$OAC = OAB + OAD.$$

Pour comparer les triangles qui ont AO pour base commune, il suffit de mener les hauteurs CE, BG, DF et de prouver qu'on a : $CE = BG + DF$.

Or menons la parallèle BH. Les triangles rectangles AFD, BHC sont égaux, car les hypoténuses sont égales et parallèles; tous les angles sont égaux ; donc $$CH = DF.$$

Ainsi $$CE = BG + DF.$$

2° Lorsque le point est pris dans l'intérieur de l'angle BAD ou dans son opposé au sommet, le triangle OAC est la différence des deux autres.

3° Lorsque le point O est sur AC ou sur son prolongement, le triangle OAC est nul, les deux autres sont équivalents.

### Théorème de Brune 531.

**1374**. *Si, dans un quadrilatère quelconque* ABCD, *on mène, par les milieux* M, N *de chacune des diagonales, une parallèle à l'autre, et qu'on joigne leur point de concours* O *aux milieux* E, F, G, H *des côtés du quadrilatère, cette figure sera partagée en quatre quadrilatères équivalents.*

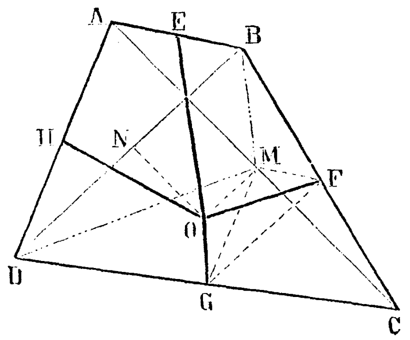


Fig. 1026.

Soient MO parallèle à BD, NO parallèle à AC.

Il suffit de prouver qu'une des divisions, OFCG, par exemple, est le quart du quadrilatère total.

Joignons le point M aux points B, D, G.

1° M étant le milieu de AC, la ligne brisée BMD divise le quadrilatère en deux parties équivalentes.

2° F et G étant les milieux de BC et de DC, la ligne brisée FMG divise le quadrilatère CBMD en deux parties équivalentes; donc CFMG est le quart de la figure totale.

Mais FG est parallèle à BD et, par suite, à MO; donc le quadrilatère CFOG est équivalent à CFMG.

Ainsi CFOG est le quart de ABCD.

**Note.** * Brune, ancien conseiller à la chambre des comptes de Berlin. Le théorème a été publié dans le *Journal de Crelle* en 1841 ; depuis cette époque, il a paru dans plusieurs publications périodiques et dans quelques recueils de problèmes.

### Théorèmes de Prouhet 532.

**1375**. 1° *Deux polygones quelconques de* 2n *côtés sont équivalents, quand leurs côtés ont les mêmes milieux.* (E. Prouhet, *N. A.*, 1851, p. 181.)

Soit un polygone ABCD de $2n$ côtés; E, F, G, H les points milieux.

Joignons le sommet A au sommet correspondant A'.

On a par construction :

$$AE = EB, \quad A'E = EB';$$

donc BB' est une droite égale et parallèle à AA'. (G., n° 80.)

Il en est de même de CC′, de DD′, etc.

Projetons les sommets et les points milieux sur une droite $xy$ perpendiculaire à AA′.

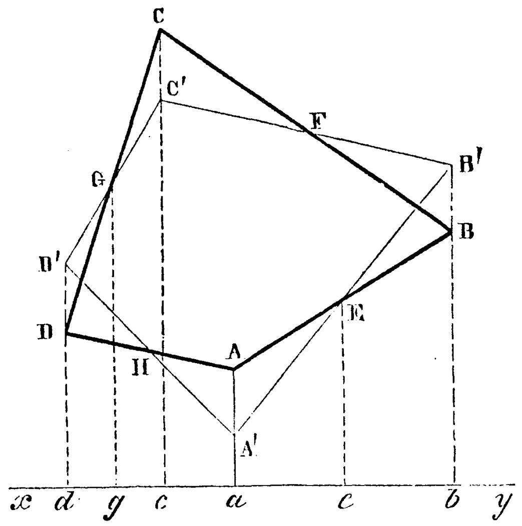



Fig. 1027.

Les trapèzes sont équivalents deux à deux; ainsi $ABba = A'B'ba$, car ils ont même base moyenne $Ee$ et même hauteur $ab$.

Or les deux polygones sont équivalents, parce qu'ils sont la somme algébrique de trapèzes équivalents; ainsi

$$ABCD = BCcb + CDdc - DAad - ABba,$$

$$A'B'C'D' = B'C'cb + C'D'dc - D'A'ad - A'B'ba;$$

donc $$ABCD = A'B'C'D'.$$

**Note.** Le théorème a été donné par E. PROUHET, *N. A.*, 1851, page 181.

* E. PROUHET, répétiteur à l'École Polytechnique, collaborateur de M. GERONO, de 1862 à 1867.*

### Théorème 533.

**1576.** 2° *La surface d'un polygone de* 2n *côtés ne change pas lorsque tous les sommets de rang pair décrivent dans la même direction des lignes droites, égales et parallèles.* (PROUHET.)

Soit $l$ la longueur des droites parcourues par les sommets B, D, etc.; les sommets de rang impair A, C, etc., ne changent pas. Les points milieux E, F, etc., avancent d'une même quantité $\frac{l}{2}$, et l'on obtient un polygone tel que $AB'_1CD'_1$... avec $E_1$, $F_1$... pour points milieux. Conservons au polygone la forme $AB_1CD_1$; mais, par un mouvement contraire au premier, ramenons les points milieux à leur première position; nous aurons un polygone A′B′C′D′ équivalent à ABCD, d'après le théorème ci-dessus; donc

$$AB_1CD_1 = ABCD.$$

### Théorème de Harcourt 533. — I.

**1576 a.** *Un triangle* ABC *étant circonscrit à un cercle, on mène une quatrième tangente* DE. *Du sommet* A, B, C, *on abaisse des perpendiculaires* a′, b′, c′ *sur la tangente; prouver que la somme algébrique des produits* aa′, bb′, cc′ *égale le double de l'aire du triangle.*

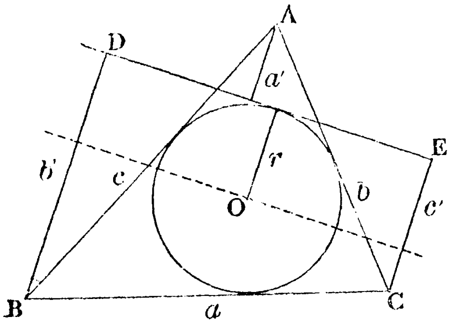



Fig. 1027 *bis.*

A chaque sommet appliquons une force proportionnelle au côté opposé du triangle; lorsque les trois forces sont parallèles, le centre du cercle inscrit au triangle est le centre des forces parallèles, et le périmètre du triangle représente la longueur de la résultante; en prenant les moments, par rapport à la tangente, on a la propriété énoncée.

**Note.** Le théorème est dû à J. HARCOURT, professeur en Irlande; la démonstration est de LE BESQUE alors professeur à la faculté de Bordeaux (*N. A.*, 1860, p. 437).

### Lunules d'Hippocrate 534.

**1577.** *Si, sur les trois côtés d'un triangle rectangle* ABC *pris comme diamètres, on décrit des demi-circonférences, la somme des surfaces des deux croissants* M *et* N, *compris entre les demi-circonférences, est égale à la surface du triangle rectangle* T.

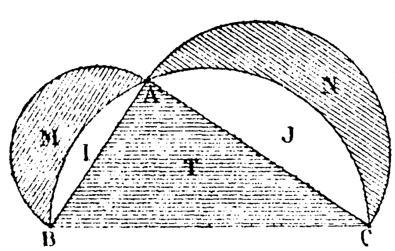



Fig. 1028.

En effet, les trois demi-cercles sont semblables : ils sont donc entre eux comme les carrés des diamètres, c'est-à-dire comme les carrés des côtés du triangle T. Ainsi le demi-cercle construit sur l'hypoténuse égale la somme des demi-cercles décrits sur les côtés de l'angle droit.

On a donc : $$M + I + N + J = T + I + J.$$

D'où $$M + N = T.$$

**1577 a. Note.** Le *théorème des Lunules* a été complété par G. DOSTOR, comme il suit :

*Étant donné un triangle rectangle* ABC, *sur l'hypoténuse* $BC = a$ *et sur les côtés* $CA = b$, $AB = c$ *pris pour diamètres, on décrit trois circonférences* $\pi a$, $\pi b$, $\pi c$. *Les trois demi-circonférences supérieures comprennent entre elles deux lunules que nous désignons par* l *et* l′; *les trois demi-circonférences inférieures forment entre elles un triangle curviligne* t *et un segment biconvexe* s.

*Prouver les propositions suivantes :*

1° *La somme* $l + l'$ *est équivalente à la surface* $\frac{bc}{2}$ *du triangle donné.*

2° *La différence* $t - s$ *est aussi équivalente à* $\frac{bc}{2}$.

3° *Les centres de gravité des deux surfaces* $l + l'$ *et* $t - s$ *sont situés sur la perpendiculaire élevée par le milieu de l'hypoténuse* $a$, *symétriquement placés par rapport à cette droite, et à une distance d'elle égale à* $\frac{\pi a}{8}$.

*Nouvelles Annales Mathématiques*, années 1896, p. 296, et 1899, p. 191, question 1732 (DOSTOR et AUDIBERT).

2° La *Théorie des lunules géométriquement carrables,* d'après TH. CLAUSEN, d'Altona, indique cinq lunules. (*N. A.*, 1849, p. 395). Voir aussi à ce sujet la *Géométrie grecque* de P. TANNERY, p. 118, n° 8. — Avant CLAUSEN, les cinq lunules carrables avaient été signalées en 1766, par WALLENIUS de Finlande. (D'après M. ENESTRÖM, de Stockholm. *I. M.* 1896, p. 201, n° 908.)

On peut voir aussi une note de M. BROCARD, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1898, p. 180, n° 908, sur la *Géométrie des Lunules;* ainsi que les notes ci-après, n° 1579 a et n° 1768 a.

* HIPPOCRATE de Chios, qu'il ne faut pas confondre avec le célèbre médecin de même nom, est né vers 450 avant l'ère chrétienne. Par l'étude de la *lunule* (n° 1578) il donna le premier exemple de quadrature d'une figure curviligne.

### Autre lunule d'Hippocrate 534. — I.

**1578.** *Dans une demi-circonférence* ACB, *on inscrit un triangle rectangle isocèle* MON, *dont la base* MN *est parallèle à* AB; *sur* MN *comme diamètre on décrit une circonférence; la lunule* MCND *est équivalente au triangle* MON. *La figure curviligne* AOEM + BOFN *égale le triangle* MON.

On pourrait opérer une vérification de formule; on peut aussi se borner à comparer entre elles les différentes parties de la figure.

MN étant le côté du carré inscrit dans le cercle dont AB serait le diamètre, on a :

$$MN^2 = 2r^2 = {}^1/_2\, AB^2,$$

et le triangle $MON = \frac{r^2}{2}$.

Ainsi le demi-cercle MDN est la moitié du demi-cercle ACB.

Le segment OEM est la moitié du segment MCN; donc

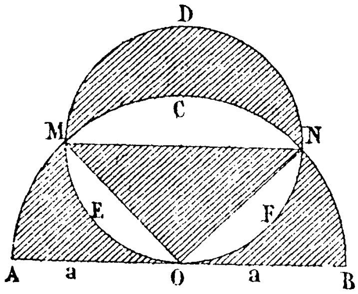


Fig. 1029.

1° *Lunule* MCND ou demi-cercle MND — segment MCN = demi-cercle MON — segments (OEM + OFN).

Ainsi *lunule* MCND = triangle MON.

2° AOEM + BOFN = secteurs (AOM + BON) — segments (OEM + OFN); par suite, AOEM + BOFN = secteur MONC — segment MCN;

donc AOEM + BOFN = triangle MON.

**Théorème 535.**

**1579.** *On donne un demi-cercle ayant* AB *pour diamètre; d'un point* C *pris sur ce diamètre, on élève une perpendiculaire* CM *jusqu'à la circonférence, et on décrit deux demi-circonférences ayant* AC *et* CB *pour diamètres.*

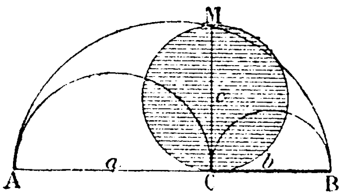


Fig. 1030.

*Démontrer que le demi-cercle* AB, *diminué des demi-cercles* AC *et* CB, *égale la surface du cercle qui a* CM *pour diamètre.* (ARCHIMÈDE, *Lemme* 4.)

C'est une simple vérification de formule.

On arrive à l'identité $2ab = 2c^2$.

**1579 a. Note.** L'espace curviligne compris entre les trois demi-circonférences a été nommé *arbelos* par Archimède, et celui du théorème suivant (n° 1580) a été nommé *salinon.* (BALTZER, *Planimétrie,* § XII, n° 3, page 84 de l'édition allemande et page 140 de l'édition italienne.)

*Salinon*, bouclier; *arbelos,* serpe. L'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1897, page 279, n° 982, donne aussi pour *arbelos* le sens de *tranchet de cordonnier.* — Voir aussi *La Géométrie grecque,* de Paul TANNERY, p. 162.

* ARCHIMÈDE (287-212 avant J.-C.) naquit en Sicile; il s'occupa surtout de la *géométrie des mesures;* il donna la *quadrature de la parabole,* étudia les *spirales,* détermina le rapport de la circonférence au diamètre. Les procédés qu'il employa constituent la *méthode d'exhaustion* ou *d'épuisement.* Il ordonna que l'on plaçât sur son tombeau une sphère inscrite dans un cylindre, comme pour rappeler un de ses plus beaux théorèmes. (G., n° 574.)

Archimède fut tué par un soldat romain lors de la prise de Syracuse. — Environ un siècle et demi plus tard, Cicéron retrouva le tombeau du grand géomètre. (Voir aussi n° 1547.)

**Théorème 535. — I.**

**1580.** *On décrit deux demi-circonférences concentriques* AB, CD, *et deux demi-circonférences égales* AC, BD; ***prouver que la superficie comprise entre les quatre demi-circonférences égale le cercle*** EF. (ARCHIMÈDE, *Lemme* 14.)

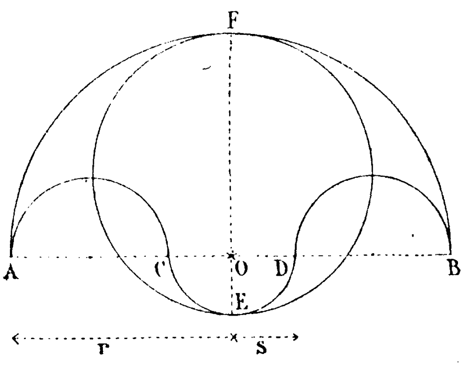


Fig. 1031.

$$AC = BD = r - s, \quad FE = r + s.$$

On doit avoir :

$$\frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi s^2}{2} - \frac{\pi(r-s)^2}{4} = \frac{\pi(r+s)^2}{4}$$

Or cette égalité hypothétique se ramène à l'identité

$$(r+s)^2 = (r+s)^2; \text{ donc...}$$

**Théorème 535. — II.**

**1581.** *On prend un point* C *au tiers du diamètre* AB *d'un cercle, et l'on décrit sur* AC *et sur* CB *comme diamètres les demi-circonférences situées de côtés différents du diamètre* AB.

*Démontrer que la courbe* ACB *divise le cercle primitif en deux parties qui sont dans le rapport de 1 à 2. — Démontrer que si le point* C *divisait le diamètre en moyenne et extrême raison, le cercle primitif serait lui-même divisé en moyenne et extrême raison.*

**Note.** Question proposée dans les *Annales de Gergonne*, résolue par LHUILIER, tome I, p. 240; complétée par GERGONNE, tome VI, 1815-1816, p. 57.

**Théorème 536.**

**1582.** *L'aire d'une couronne circulaire égale la circonférence intérieure multipliée par la largeur de la couronne, plus le cercle qui aurait pour rayon cette même largeur de la couronne.*

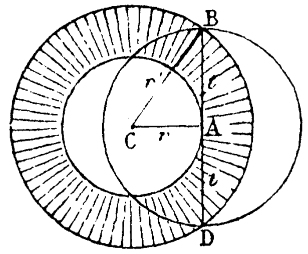


Fig. 1032.

En appelant $r$ le rayon du cercle intérieur, $l$ la largeur de la couronne, le rayon $r'$ du cercle extérieur égale $r+l$.

Or l'aire de la couronne égale

$$\pi r'^2 - \pi r^2; \qquad (\text{G., n}^o\ 355)$$

donc
$$A = \pi(r+l)^2 - \pi r^2 = \pi r^2 + 2\pi rl + \pi l^2 - \pi r^2,$$
$$A = 2\pi rl + \pi l^2.$$

*Remarque.* Le cercle qui a pour diamètre BD est équivalent à la couronne.

**Théorème 536. — I.**

**1583.** *L'aire d'une couronne circulaire égale la circonférence extérieure multipliée par la largeur de la couronne, moins le cercle qui aurait pour rayon cette même largeur.*

$$r = r' - l; \quad r^2 = r'^2 - 2r'l + l^2;$$

d'où
$$A = \pi r'^2 - \pi r'^2 + 2\pi r'l - \pi l^2,$$
$$A = 2\pi r'l - \pi l^2.$$

**Théorème 536. — II.**

**1584.** *Lorsque deux courbes* ABCDE, A'B'C'D'E' *sont formées par plusieurs arcs de cercle concentriques, l'aire du bandeau limité par ces deux courbes, entre des normales communes, s'obtient en multipliant l'arc moyen par la largeur du bandeau.*

Soient $m$, $n$, $t$, $s$, les angles formés par les rayons des arcs consécutifs.

Le bandeau considéré est la somme de plusieurs secteurs de couronnes circulaires ayant même largeur $l$, et les diverses courbes moyennes forment ensemble une courbe moyenne continue.

On a donc pour *l'aire du bandeau*, selon la formule que l'on prend pour le secteur de couronne circulaire :

1° *L'arc moyen multiplié par la largeur du bandeau.*

On peut rattacher cette formule au *théorème de Guldin*, et dire : *L'aire égale la ligne génératrice ou* l, *multipliée par l'arc que décrit son point milieu.*

2° *Le petit arc ou le grand arc multiplié par la largeur du bandeau, plus ou moins le secteur qui aurait pour rayon la largeur du bandeau, et pour angle au centre la valeur angulaire comprise entre les rayons extrêmes.*

Pour trouver *la valeur angulaire comprise entre les rayons extrêmes*, il faut considérer le mouvement angulaire que ferait le premier rayon, dans le sens des arcs, pour prendre une position parallèle au dernier rayon.

*Remarque.* 1° Cette propriété est vraie pour *le bandeau compris entre deux courbes parallèles quelconques.*

On peut tracer des normales assez rapprochées pour que les éléments courbes puissent être confondus avec des arcs de cercles, ce qui ramène au cas précédent.

2° Si le rayon mobile revient sur lui-même jusqu'à reprendre sa position primitive, son mouvement angulaire est nul, les deux courbes sont égales, et *les normales extrêmes sont parallèles et de même sens;* alors le bandeau équivaut au rectangle qui aurait pour dimensions l'une des courbes et la largeur du bandeau.

3° Si le rayon mobile qui suit les directions des normales successives décrit un demi-cercle, les normales extrêmes sont parallèles et de sens opposés. Le bandeau égale le produit de la largeur $l$ par la courbe intérieure ou par l'extérieure, plus ou moins le demi-cercle de rayon $l$.

4° Si le rayon mobile $Pa$ décrit un cercle entier, le bandeau égale le produit de la largeur $l$ par la courbe intérieure ou par l'extérieure, plus ou moins le cercle de rayon $l$. Si le rayon mobile fait plusieurs tours dans un même sens, il faut tenir compte d'autant de cercles de rayon $l$ qu'il y a de tours.

### Théorème 536. — III.

**1585.** *L'aire d'un bandeau égale le produit de sa largeur par la longueur de la courbe moyenne ; on peut dire : le produit de la droite génératrice par le chemin que décrit le milieu de cette même droite.*

Le *bandeau* est la surface produite sur un plan par une droite de longueur constante, qui se meut, en restant toujours normale à la ligne que décrit l'un de ses points. Cette ligne est appelée *courbe directrice*, et la droite mobile est le rayon décrivant.

Cette propriété est utilisée pour l'évaluation de la surface d'une route ou d'un chemin non rectiligne, que l'on considère alors comme une figure plane.

**1585 a. Note.** Pour plus de développements, on peut recourir à la deuxième édition des *Exercices de Géométrie,* pages 689 et suivantes. — Nous renverrons de même à cette édition pour plusieurs autres questions.

Les théorèmes relatifs à *l'aire du bandeau* se trouvent énoncés dans le *Traité de métrage et de mesurage* de M. Sergent, ingénieur civil.

Les *théorèmes de Guldin* (G., nos 903 et 904) se trouvent mentionnés dans Pappus, mais sans démonstration ; ils étaient complètement ignorés, lorsqu'au XVIe siècle le P. Guldin parvint aux mêmes théorèmes : dès lors la connaissance s'en répandit promptement, et ce n'est que de nos jours qu'on a pu leur attribuer une origine plus ancienne. (*Histoire des sciences mathématiques et physiques*, par M. Maximilien Marie, tome III, page 169.)

Guldin, né à Saint-Gall en 1577, mort à Graetz en 1643, entra dans l'ordre des jésuites, et publia à Vienne les théorèmes célèbres auxquels on a donné son nom.

**Théorème 536. — IV.**

**1586.** *L'aire de la surface comprise entre deux lignes qui interceptent une longueur constante* l *sur une série de parallèles s'obtient en multipliant la distance* d *des parallèles extrêmes par la longueur* l.

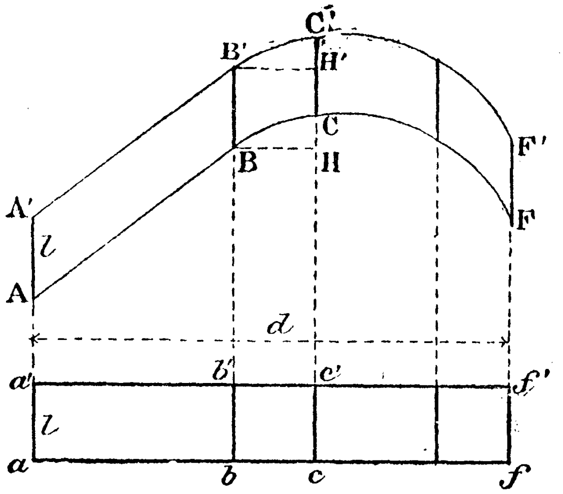


Fig. 1033.

Le parallélogramme ABB'A' est équivalent au rectangle *abb'a'*.

De même BCC'B' est équivalent à *bcc'b'*, car les triangles curvilignes BHC, B'H'C' sont égaux.

Donc surface

$$ACFF'C'A' = dl.$$

*Remarque*. Le *théorème de Clairaut* (nº 1559) peut être considéré comme un corollaire du précédent; il en est de même par suite du *théorème de Pythagore*, que l'on déduit de celui de *Clairaut*.

**Théorème 537.**

**1587.** *Toute figure non convexe* ABCDME *peut être transformée en une autre de même périmètre et de surface plus grande.*

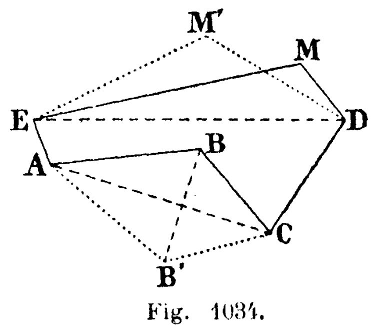


Fig. 1034.

Menons AC, et déterminons le point B' symétrique de B par rapport à AC. AC étant perpendiculaire au milieu de BB', on a :

$$AB = AB', \quad CB = CB'.$$

Ainsi la figure convexe AB'CDME a le même périmètre que la figure donnée, mais elle est plus grande. Donc...

*Remarque*. Tout polygone ACDME dont deux côtés, DM, ME, sont inégaux, peut être transformé en un autre, ACDM'E, isopérimétrique et de surface plus grande. (Voir ci-après, nº 1676.)

**Théorème 538.**

**1588.** *Dans un cercle donné et pour un nombre donné de côtés, le polygone régulier inscrit est celui dont la surface est maxima.*

(Voir *Méthodes*, nº 355.)

**Théorème 539.**

**1589.** *De deux polygones réguliers inscrits dans le même cercle, celui qui a le plus grand nombre de côtés est celui qui a la plus grande surface.*

(Voir *Méthodes*, n° 356.)

## Relations déduites de la Considération des aires.

**Théorème 540.**

**1590.** *Deux polygones quelconques* P *et* P', *circonscrits à un même cercle, sont entre eux comme leurs périmètres* p *et* p'.

En effet, si l'on appelle $r$ le rayon du cercle, les aires des deux polygones sont respectivement $^1/_2 pr$ et $^1/_2 p'r$. On a donc :

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'} = \frac{^1/_2 pr}{^1/_2 p'r} = \frac{p}{p'}.$$

**Théorème 541.**

**1591.** *Lorsque trois droites* AOD, BOE, COF, *issues des sommets d'un triangle* ABC, *se coupent au même point* O, *on a la relation :*

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}} + \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{BE}} + \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{CF}} = 1.$$

(Voir *Méthodes*, n° 165.)

**Note.** Ce théorème est dû à GERGONNE (*Annales de Mathématiques,* tome IX 1818 et 1819, p. 116; cit. de M. LONGCHAMPS (J. M. BOURGET, 1885, p. 37).

**Théorème de Viviani 542.**

**1592.** *Si, d'un point pris dans l'intérieur d'un polygone régulier de* n *côtés, on abaisse des perpendiculaires sur chaque côté, la somme de ces lignes égale* n *fois l'apothème du polygone.*

Soit le polygone de cinq côtés, $a$ l'apothème, $b$ le côté et $h, k, l, m, n$ les perpendiculaires.

Le double de l'aire du polygone est donné par :

$$5ab, \quad \text{et par} \quad bh + bk + bl + \ldots;$$

d'où

$$5a = h + k + l + m + n.$$

**Note.** * VIVIANI, né à Florence en 1622, mort en 1703, disciple de GALILÉE (1564-1642) et de TORRICELLI (1608-1647), est surtout cité pour le problème de la *voûte sphérique carrable.* (*Exercices de Géométrie descriptive*, n° 1153.)

**Théorème 543.**

**1593.** *Dans un triangle rectangle, la somme des inverses des carrés des côtés de l'angle droit égale l'inverse du carré de la hauteur* h, *abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.*

Il faut prouver qu'on a : $\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{h^2}$, (1)

ou $\dfrac{c^2}{b^2c^2}+\dfrac{b^2}{b^2c^2}=\dfrac{1}{h^2}$, ou $\dfrac{a^2}{b^2c^2}=\dfrac{1}{h^2}$, ou $\dfrac{a^2h^2}{b^2c^2}=1$.

Or $ah=bc$, car c'est le double de l'aire du triangle; donc...

### Théorème 543. — I.

**1594.** *Les distances d'un point quelconque d'une médiane aux côtés qui partent du même sommet sont inversement proportionnelles à ces côtés.*

La proposition a déjà été démontrée dans le livre III (nº 1546 a, 2º), mais c'est la considération des aires qui fournit la démonstration la plus naturelle.

D'ailleurs, il suffit de prouver la proposition pour le point M; or les triangles CMB, CMA sont équivalents; donc

$$ap=bq;\quad \text{d'où}\quad \frac{p}{q}=\frac{b}{a}.$$

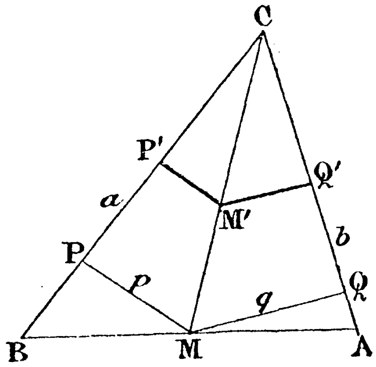


Fig. 1035.

### Théorème 544.

**1595.** *Par un point fixe* O *pris sur la bissectrice d'un angle* A, *on mène une sécante quelconque* MON; *prouver que la somme* $\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AN}$ *des inverses des côtés de l'angle est une quantité constante.*

1º *L'angle donné est droit.*

(Voir *Méthodes*, nº 279.)

2º *L'angle donné est quelconque.*

(Voir *Méthodes*, nº 280.)

### Théorème 545.

**1596.** *Par un point fixe* O *pris dans le plan d'un angle droit* A, *on mène une sécante quelconque* BOB'; *la somme* $\dfrac{1}{S}+\dfrac{1}{S'}$ *des inverses des aires des triangles* ABO, AB'O *est constante, quelle que soit la sécante menée.* (MANNHEIM, *N. A.*, 1856, p. 383.)

Soit $AB=b$, $AB'=b'$.

Abaissons les perpendiculaires $h$ et $h'$.

Le double de l'aire de chaque triangle est $bh$ et $b'h'$; il faut donc prouver qu'on a :

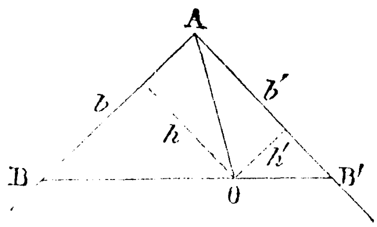


Fig. 1036.

$$\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}=\frac{2}{bh}+\frac{2}{b'h'}=\text{constante}.$$

Or $\frac{2}{bh} + \frac{2}{b'h'} = \frac{2(b'h' + bh)}{bh \, . \, b'h'}$; mais le double de l'aire de BAB' est donné par $bb'$;

donc : $\frac{2(b'h' + bh)}{bb'hh'} = \frac{2bb'}{bb' \times hh'} = \frac{2}{hh'}$ quantité constante.

**Théorème 545. — I.**

**1597.** *Même énoncé pour un angle quelconque.*

Le double de l'aire du triangle BAB' est donné par $bb'$ sinus A. On a

donc $\frac{1}{S} + \frac{1}{S'} = \frac{2(b'h' + bh)}{bb' \times hh'} = \frac{2bb' \sin A}{bb' \times hh'} = \frac{2 \text{ sinus A}}{hh'}$ quantité constante.

**Note.** On doit à M. MANNHEIM un grand nombre de relations numériques. (Voir *Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques*, par A. MANNHEIM.) Le théorème (nº 1593) est du même auteur, p. 19, nº 16, de l'ouvrage cité ci-dessus; il en est de même du théorème suivant (nº 1598) :

**Théorème 545. — II.**

**1598.** *Par un point O pris dans un triangle, on mène les transversales* AOL, BOM, CON; *on divise ainsi le triangle donné en six triangles. La somme des inverses de trois triangles non consécutifs égale la somme des inverses des trois autres triangles.* (MANNHEIM.)

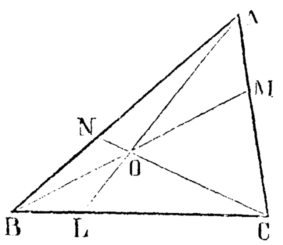


Fig. 1037.

Ce théorème n'est qu'un corollaire d'un autre théorème du même auteur (nº 1597). En effet, pour un point fixe O et un angle A, deux sécantes BOM, CON donnent :

$$\frac{1}{AOM} + \frac{1}{AOB} = \frac{1}{ANO} + \frac{1}{AOC}.$$

On a de même :

$$\frac{1}{BON} + \frac{1}{BOC} = \frac{1}{BOL} + \frac{1}{AOB},$$

$$\frac{1}{COL} + \frac{1}{AOC} = \frac{1}{COM} + \frac{1}{BOC}.$$

En additionnant membre à membre et en simplifiant, on a :

$$\frac{1}{AOM} + \frac{1}{BON} + \frac{1}{COL} = \frac{1}{COM} + \frac{1}{BOL} + \frac{1}{AON}.$$

**Théorème 545. — III.**

**1598 a.** *Trois droites respectivement parallèles aux trois côtés d'un triangle, menées par un point pris dans l'intérieur de ce triangle, le partagent en trois parallélogrammes et en trois triangles, tels que le produit des aires des trois parallélogrammes est égal à huit fois le produit des aires des trois triangles.*

(*A. de G.*, tome XVIII, 1827-1828, pages 111 et 112.) Solutions par Bobillier, professeur à l'École d'arts et métiers de Châlons; Roche, devenu professeur à l'Université de Montpellier; théorème étendu au tétraèdre par Vallès, ingénieur des ponts et chaussées (p. 113 à 123).

2° *L'aire du triangle donné est égale au carré de la somme des racines carrées des aires des trois triangles partiels.* (*A.* de *G.*, XIX, p. 374.)

**Théorème 546.**

**1599.** *Le carré du rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle égale la somme des carrés des rayons des cercles inscrits dans les triangles rectangles obtenus en abaissant la hauteur qui part du sommet de l'angle droit.*

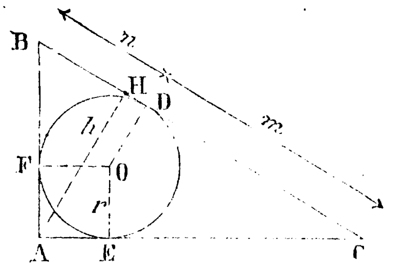


Fig. 1038.

1° Les trois triangles ABC, ACH, BAH sont semblables; donc les carrés des lignes homologues sont proportionnels; donc en représentant par $r$ le rayon du cercle inscrit dans ABC, par $s$ celui du triangle ACH, et par $t$ celui de ABH,

on aura : $$\frac{r^2}{a^2} = \frac{s^2}{b^2} = \frac{t^2}{c^2}; \quad \text{d'où} \quad \frac{r^2}{a^2} = \frac{s^2+t^2}{b^2+c^2}.$$

Mais $$a^2 = b^2 + c^2; \quad \text{donc} \quad r^2 = s^2 + t^2.$$

*Autre démonstration.* On peut dire plus simplement :

On a : $$\text{triangle ABC} = \text{ABH} + \text{ACH};$$

or cette relation est homogène; d'autre part, les trois triangles semblables sont proportionnels aux carrés des lignes homologues.

Donc $$r^2 = s^2 + t^2.$$

*On peut demander de vérifier ce résultat, et l'on obtient ainsi une troisième démonstration.* (Voir 2e et 3e éditions.)

*Remarque.* La moyenne proportionnelle de deux lignes inégales $m$ et $n$ est plus petite que la moyenne arithmétique de ces mêmes lignes. En effet, AH est la moyenne proportionnelle (fig. 1038); or cette ligne est plus petite que l'oblique menée du sommet A, au milieu de l'hypoténuse.

**Théorème de Du Faye 547.**

**1600.** *La différence des aires de deux polygones réguliers semblables circonscrit et inscrit au même cercle, égale l'aire du polygone régulier semblable inscrit dans le cercle qui aurait pour diamètre le côté du polygone circonscrit donné.*

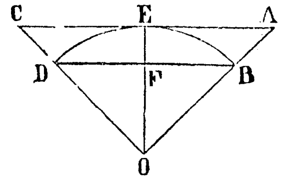


Fig. 1039.

Représentons par $a^2$ la surface du polygone dont AC est le côté, et par $b^2$ celle du polygone BD.

Les surfaces sont proportionnelles aux carrés des rayons. (G., n° 334.)

Donc $$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\text{AO}^2}{\text{OB}^2};$$

d'où $$\frac{a^2-b^2}{b^2} = \frac{\text{AO}^2-\text{BO}^2}{\text{BO}^2}. \qquad (1)$$

Soit $c^2$ la surface du polygone semblable inscrit dans le cercle qui aurait AE pour rayon ; on aurait :

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{AE^2}{BO^2}. \qquad (2)$$

Mais $\qquad AE^2 = AO^2 - OE^2 = \text{donc } AO^2 - BO^2$ ;

donc, en comparant (1) et (2), on trouve :

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2};$$

d'où $\qquad a^2 - b^2 = c^2.$

**Théorème 547. — I.**

**1601.** *La différence des aires ou* $a^2 - b^2$ *est égale à l'aire du polygone semblable qui serait circonscrit à une circonférence qui aurait pour diamètre le côté* BD *du polygone inscrit donné.*

**Note.** Les théorèmes nos 1600 et 1601 sont de Du Faye (1698-1739), membre de l'Académie des sciences. (Voir *N. A.*, 1845, p. 55.)

**Théorème 548.**

**1602.** *La différence des aires des polygones réguliers de* 2n *côtés inscrit et circonscrit à un cercle, est moindre que le quart de la différence des polygnes réguliers de* n *côtés inscrit et circonscrit à ce même cercle.* (*N. A.*, 1844, p. 13. Mourgues, professeur à Rodez.)

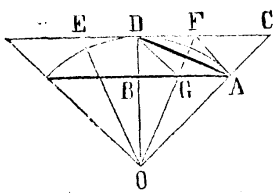


Fig. 1040.

Soient AB, DC les demi-côtés des polygones de $n$ côtés.

La différence des aires égale $2n$ fois le trapèze ABCD.

Soient AD, EF les côtés des polygones de $2n$ côtés.

La différence des aires égale $2n$ fois le triangle ADF.

Il faut prouver qu'on a : $\quad ADF < {}^1/_4\, ABCD.$

Le triangle et le trapèze ayant même hauteur BD, il suffit de prouver que la base DF du triangle est plus petite que le quart de la somme $AB + DC$ des bases du trapèze.

Or OF est bissectrice de l'angle AOD, la figure AFDG est un losange ;

donc $\qquad DF = AG, \quad \text{et} \quad DF < FC.$

Les parallèles AB, CD donnent la relation

$$\frac{AG}{BG} = \frac{CF}{DF}; \quad \text{d'où} \quad AG^2 = BG \,.\, CF.$$

Mais la moyenne proportionnelle AG est plus petite que la demi-somme des côtés BG et CF (no 1599, *Remarque*).

Donc $\qquad AG < {}^1/_2 (BG + FC)$ ;

d'ailleurs $\qquad AG = {}^1/_2 (AG + DF).$

En additionnant, on trouve : $\quad 2AG < {}^1/_2 (AB + DC),$

ou $\qquad AG, \quad \text{ou} \quad DF < {}^1/_4 (AB + DC).$

### Théorème 549.

**1603**. *Par chaque sommet d'un triangle, on mène une droite qui divise le côté opposé en segments proportionnels aux carrés des deux autres côtés; prouver que ces trois droites se coupent au même point.* (P. Hossard, commandant d'état-major, 1848, *N. A.*, pages 407 et 454.)

Soit AD telle que $\frac{m}{n} = \frac{b^2}{c^2}$.

1re *Démonstration*. Abaissons les perpendiculaires $f$ et $g$ sur les côtés correspondants $b$ et $c$.

Les triangles ADC, ADB ont même hauteur, lorsqu'on prend A pour sommet; ils sont entre eux comme les produits de la base par la hauteur.

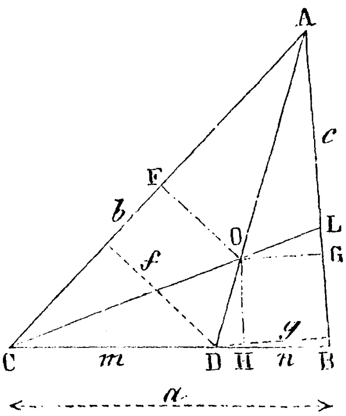


Fig. 1041.

Donc $\frac{\text{ADC}}{\text{ADB}} = \frac{m}{n} = \frac{bf}{cg}$;

mais $\frac{m}{n} = \frac{b^2}{c^2}$;

donc $\frac{b^2}{c^2} = \frac{bf}{cg}$; d'où $\frac{b}{c} = \frac{f}{g}$.

Ainsi le rapport des perpendiculaires $f$ et $g$ ou OF et OG égale le rapport des côtés $b$ et $c$.

Soit CL une seconde droite telle que $\frac{\text{LA}}{\text{LB}} = \frac{b^2}{a^2}$.

On aura : $\frac{\text{OF}}{\text{OG}} = \frac{b}{c}$, et $\frac{\text{OF}}{\text{OH}} = \frac{b}{a}$,

ou $\frac{\text{OF}}{b} = \frac{\text{OG}}{c}$, $\frac{\text{OF}}{b} = \frac{\text{OH}}{a}$;

d'où $\frac{\text{OG}}{c} = \frac{\text{OH}}{a}$, ou $\frac{\text{OG}}{\text{OH}} = \frac{c}{a}$.

Donc le point O appartient à la troisième droite.

2e *Démonstration*. On emploie avec avantage le *théorème de Céva* (no 1240). Soit K le point où AC est rencontré par la droite issue du sommet B; on a :

$$\frac{\text{AL}}{\text{BL}} = \frac{b^2}{a^2},\quad \frac{\text{BD}}{\text{CD}} = \frac{c^2}{b^2},\quad \frac{\text{CK}}{\text{AK}} = \frac{a^2}{c^2};$$

d'où
$$\frac{\text{AL}\,.\,\text{BD}\,.\,\text{CK}}{\text{BL}\,.\,\text{CD}\,.\,\text{AK}} = \frac{b^2c^2a^2}{a^2b^2c^2} = 1.$$

*Remarque*. Le point O est le point dont la somme des carrés des distances aux trois côtés du triangle est minima (*N. A.*, p. 407).

**1603 a. Note**. Les droites AD, CL... sont nommées actuellement *symédianes*, et l'on sait que les trois symédianes d'un triangle se coupent au même point.

Le point de concours des symédianes est nommé *point de Lemoine*, parce que M. Lemoine en a montré l'importance en 1873 (*N. A.*, page 364) et que cette première étude a été le point de départ de la *Géométrie récente du triangle;* mais ce même point avait été trouvé antérieurement par plusieurs auteurs, à l'occasion de recherches diverses que rien ne rattachait les unes aux autres. On peut citer le commandant MATHIEU en 1865 (*N. A.*, page 403); CATALAN, en 1852, *Théorèmes et problèmes de Géométrie,* 2e édition, page 161; HOSSARD, en 1848 (*N. A.*, page 454); en Allemagne, GREBE, en 1847, à l'occasion du problème des carrés construits sur chaque côté d'un triangle donné (no 2369). On a pu l'attribuer à GAUSS, comme cas particulier d'une question relative à la méthode des moindres carrés; on a même trouvé mention de ce point dès 1809 dans les *Eléments d'Analyse* de SIMON LHUILIER.

Les détails bibliographiques qui précèdent et beaucoup d'autres ont été donnés par M. LEMOINE lui-même en 1885. (*Mathesis*, 1886, 3e supplément, page 23.)

Voir aussi l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1894, p. 254, no 120; notes de MM. PAUL TANNERY et MACKAY, d'Édimbourg.

### Théorème 549. — I.

**1603 b.** Les droites AD, BK, CL (fig. 1041), se coupent au même point

lorsqu'on a : $\dfrac{\mathrm{AL}}{\mathrm{BL}}=\dfrac{b^m}{a^m},\quad \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}=\dfrac{c^m}{b^m},\quad \dfrac{\mathrm{CK}}{\mathrm{AK}}=\dfrac{a^m}{c^m};$

car
$$\frac{\mathrm{AL}\,.\,\mathrm{BD}\,.\,\mathrm{CK}}{\mathrm{BL}\,.\,\mathrm{CD}\,.\,\mathrm{AK}}=\frac{b^m\,.\,c^m\,.\,a^m}{a^m\,.\,b^m\,.\,c^m}=1.$$

*Remarque.* Quand la puissance $m=1$, on a les bissectrices intérieures; $m=2$ correspond aux symédianes; mais les médianes seraient données par $m=0$. Les inverses donnent les *droites réciproques* de LONGCHAMPS; ainsi $m=-1$ donne les réciproques des bissectrices, etc.

### Théorème 550.

**1604.** *Le produit des rayons du cercle inscrit à un triangle et des trois cercles exinscrits, égale le carré de la surface de ce triangle.*

En effet, on a (G., no 354) :

$$r=\frac{\mathrm{T}}{p},\quad r'=\frac{\mathrm{T}}{p-a},\quad \text{etc.};$$

donc
$$rr'r''r'''=\frac{\mathrm{T}^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{\mathrm{T}^4}{\mathrm{T}^2}=\mathrm{T}^2.$$

**Note.** La démonstration géométrique de la formule
$$\mathrm{T}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
est attribuée à FIBONACCI, dit *Léonard de Pise.* Ce mathématicien, né en 1180, est mort dans le milieu du XIIIe siècle.

### Théorème 551.

**1605.** *L'inverse du rayon du cercle inscrit égale la somme des inverses des rayons des cercles exinscrits.*

$$\frac{1}{r}=\frac{p}{\mathrm{T}},\quad \frac{1}{r'}=\frac{p-a}{\mathrm{T}},\quad \text{etc.};$$

donc
$$\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}=\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{\mathrm{T}}=\frac{3p-(a+b+c)}{\mathrm{T}}=\frac{p}{\mathrm{T}}=\frac{1}{r}$$

**Note.** Le théorème 1604 est de MAHIEU, en 1807. De son côté, LHUILIER, en 1809, trouva la même relation. (*A. de G.*, tome I, 1810-1811, p. 150, renvoi, et tome XIX, p. 87.)

Le théorème 1605 a été donné par STEINER. (*A. de G.*, tome XIX, 1828-1829, pages 86 et 90.)

Les théorèmes 1606 et 1607 et plusieurs autres relations sont aussi donnés par les *Annales de Gergonne*, tome XIX, 1828-1829, pages 211 et suivantes; on y trouve notamment le théorème du n° 1184.

* MAHIEU, professeur au collège d'Allais en 1807.

* LHUILIER (1750-1840), élève de BERTRAND de Genève et maître de STURM.

### Théorème 552.

**1606.** *L'inverse du rayon du cercle inscrit égale la somme des inverses des trois hauteurs du triangle.*

Soient $h$, $h'$, $h''$ les hauteurs qui correspondent aux côtés $a$, $b$, $c$.

Le double de l'aire du triangle est donné par $2pr$ ou $ah$, etc.

Donc $$2pr = ah = bh' = ch''.$$

Mais le produit $ah$ peut s'écrire :

$$a \cdot \frac{h}{1}, \quad a : \frac{1}{h}, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\frac{1}{h}}; \quad \text{donc} \quad \frac{2p}{\frac{1}{r}} = \frac{a}{\frac{1}{h}} = \frac{b}{\frac{1}{h'}} = \frac{c}{\frac{1}{h''}}.$$

Or $2p = a + b + c$, et, si l'on ajoute terme à terme les trois dernières fractions égales, on aura :

$$\frac{2p}{\frac{1}{r}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}}; \quad \text{donc} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}.$$

### Théorème 552. — I.

**1607.** *La somme des inverses des rayons des cercles exinscrits égale la somme des inverses des hauteurs.*

Car chacune de ces sommes égale $\frac{1}{r}$

donc $$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}.$$

**Note.** Pour 1606 et 1607, voir les *Annales de Gergonne*, tome XIX (1828-1829), p. 212, article remarquable par L. P. F. R, complétant une étude bien remarquable aussi de STEINER, *loc. cit.*, p. 85, avec rappel d'un mémoire de BOBILLIER. — On doit reconnaître que les *Annales de Gergonne* méritent bien d'être remises en lumière, car elles ont des études de grande valeur; elles répondent en outre à des questions proposées depuis comme nouvelles.

### Théorème 553.

**1608.** *Si, d'un point pris dans l'intérieur d'un triangle, on abaisse des perpendiculaires* l, l', l'' *sur les côtés* a, b, c, *on aura la relation :*

$$\frac{l}{h} + \frac{l'}{h'} + \frac{l''}{h''} = 1.$$

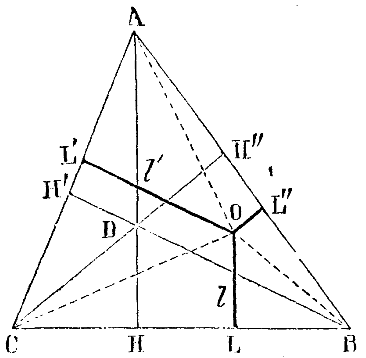


Fig. 1042.

Représentons par T le triangle total ABC; par L, le triangle BOC, etc.

Les triangles OBC, ABC ont même base; ils sont donc entre eux comme leurs hauteurs $l$ et $h$.

$$\frac{L}{T}=\frac{l}{h};$$

de même $\quad \frac{L'}{T}=\frac{l'}{h'}, \quad \frac{L''}{T}=\frac{l''}{h''};$

d'où

$$\frac{L+L'+L''}{T}=\frac{l}{h}+\frac{l'}{h'}+\frac{l''}{h''}=1.$$

Car le numérateur de la première fraction égale son dénominateur.

*Remarques.* 1° Le théorème (n° 1606) n'est qu'un cas particulier du précédent, car on aurait :

$$\frac{r}{h}+\frac{r}{h'}+\frac{r}{h''}=1; \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{h}+\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}=\frac{1}{r}.$$

2° Le théorème subsiste pour trois droites $l$, $l'$, $l''$ menées par un point O, parallèlement à trois droites qui, partant des sommets, passent par un même point D.

Ainsi le théorème (n° 1605) peut être rapporté au précédent.

**1609. Th.** $\qquad \frac{AD}{h}+\frac{BD}{h'}+\frac{CD}{h''}=2. \qquad$ (fig. 1042.)

Car $\qquad \frac{DH}{h}+\frac{DH'}{h'}+\frac{DH''}{h''}=1.$

Or $\quad \frac{AD}{h}+\frac{DH}{h}=1,$ etc. Par suite, la somme des six fractions égale 3; donc le premier groupe a 2 pour somme.

*Remarque.* Voir, pour les relations entre les *éléments d'un triangle*, l'ouvrage de M. Vuibert déjà indiqué (n° 1185, a).

### Théorème 553. — I.

**1610.** *La moyenne géométrique des deux triangles semblables* AGI *et* AMC *est le triangle* AGC.

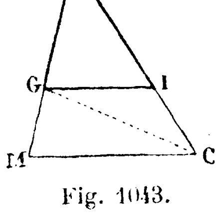


Fig. 1043.

En effet, AGI, AGC ont même hauteur; donc

$$\frac{AGI}{AGC}=\frac{AI}{AC}.$$

De même $\qquad \frac{AGC}{AMC}=\frac{AG}{AM}.$

Les derniers rapports étant égaux, les premiers le sont aussi, et l'on a :

$$\frac{AGI}{AGC}=\frac{AGC}{AMC}, \quad \text{ou} \quad \frac{T}{T''}=\frac{T''}{T'}.$$

On peut remarquer que $\quad T''^2=TT'; \quad$ d'où $\quad T''=\sqrt{TT'}$ .

Le triangle AGC a un angle commun aux deux triangles donnés, avec un côté du premier et un côté du second.

*Remarque.* Le théorème ci-dessus n'est qu'un cas particulier du suivant.

### Théorème 554.

**1611.** *Si deux triangles sont semblables, intérieurs l'un à l'autre, et ont les côtés homologues parallèles, tout triangle circonscrit au triangle intérieur et inscrit à l'autre triangle a une surface moyenne proportionnelle entre celles des triangles donnés.*

Joignons le sommet B aux trois sommets D, E, F du triangle semblable dont les côtés sont parallèles à ceux du premier. Pour comparer les triangles, menons EG parallèle à DF et joignons D au point G.

Les triangles de même base et de même hauteur sont équivalents; donc on a :

$$DGF = DEF,$$

$$DME = DBE, \quad DLF = DHF,$$

$$ENF = EBF.$$

En additionnant membre à membre les quatre égalités, on reconnaît qu'on a : $LMN = DBH$.

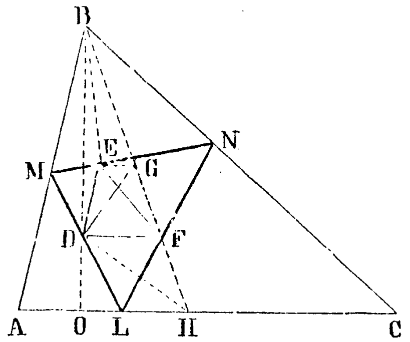



Fig. 1044.

Ainsi les trois triangles à comparer peuvent être remplacés par

$$ABC, \quad DBH, \quad DGF.$$

Les triangles GDF, BDH, ayant même hauteur, sont entre eux comme leurs bases FG et BH; mais, à cause des parallèles EG et DF, le rapport $\frac{FG}{BH}$ est égal au rapport donné par ces mêmes parallèles et la droite BDO; c'est-à-dire que les lignes FG et BH sont dans le même rapport que les hauteurs des triangles semblables DEF, ABC et, par suite, dans le rapport de deux côtés homologues.

Donc $$\frac{DGF}{BDH}, \quad \text{ou} \quad \frac{DEF}{LMN} = \frac{DF}{AC}; \qquad (1)$$

d'ailleurs $$\frac{BDH}{BOH} = \frac{BD}{BO}, \quad \text{ou} \quad \frac{BDH}{BOH} = \frac{DF}{OH}.$$

On a de même : $$\frac{BOH}{ABC} = \frac{OH}{AC}.$$

En multipliant membre à membre ces deux proportions et simplifiant, on trouve : $$\frac{BDH \text{ ou } LMN}{ABC} = \frac{DF}{AC}. \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2), on a :

$$\frac{DEF}{LMN} = \frac{LMN}{ABC}.$$

*Autre démonstration.* Posons $AC = b$, $BO = h$, $DF = b'$; $\sigma$ ou LMN équivaut à BFADB; car DEF est une partie commune, puis

$$BEF = NEF, \quad ADF = LDF;$$

et

$$BED = MED.$$

Ainsi

$$\sigma = \frac{b'h}{2};$$

donc

$$\frac{S}{\sigma} = \frac{b}{b'},$$

et

$$\frac{\sigma}{S'} = \frac{h}{h'} = \frac{b}{b'}.$$

Donc

$$\frac{S}{\sigma} = \frac{\sigma}{S'}.$$

**Note.** M. CATALAN, dans ses *Théorèmes et Problèmes*, 6e édit., p. 182, ne fait remonter ce théorème qu'à 1862, tandis qu'il a été proposé par GERGONNE, et démontré par LÉON ANNE, en 1844, p. 27 des *Nouvelles Annales de mathématiques.* Dans bien des cas, il est très difficile de trouver le premier auteur d'une question donnée, ainsi que le montre une note antérieure (no 1603 **b**).

### Théorème 554 — I.

**1612.** *La surface d'un triangle est moyenne proportionnelle entre celle du triangle ayant pour sommets les centres des cercles exinscrits, et celle du triangle ayant pour sommets les points de contact du cercle inscrit au premier avec ses côtés.* (*N. A.*, 1880, p. 59. WEILL.)

Le triangle des trois centres des cercles exinscrits et le triangle des trois points de contact du cercle inscrit sont homothétiques, et l'on retombe sur le théorème précédent (no 1611).

**Note.** * WEILL, ancien élève à l'E. P., professeur à Chaptal, auteur de nombreux articles dans les *N. A.*, de 1880 à 1888.

### Théorème de Cesaro 554. — II.

**1612 a.** *A un triangle* ABC, *on circonscrit deux triangles* MNP, M'N'P' *semblables à un triangle donné* $\alpha\beta\gamma$, *et ayant leurs côtés homologues* MN, M'N', *etc., perpendiculaires entre eux; démontrer que la somme des aires de ces triangles est constante.*

Les points M et M' se meuvent sur la circonférence du segment capable de $\alpha$, décrit sur BC; ces points sont aux extrémités d'un même diamètre, à cause des angles droits MBM', MCM'; la différence des perpendiculaires abaissées de M et M' sur BC est constamment égale à la distance de la corde BC au centre du segment, d'où il résulte que la différence des triangles BMC, BM'C est constante.

De même pour les différences $ANC - AN'C$, et $APB - AP'B$.

Or

$$\begin{cases} MNP = ABC + BMC + CNA + APB, \\ M'N'P' = ABC - BM'C - CN'A - AP'B; \end{cases}$$

donc

$$MNP + M'N'P' = \text{constante}.$$

*Remarque.* 1o La démonstration suppose que MNP est extérieur, et M'N'P' intérieur à ABC; mais on la modifie faiblement pour tous les autres cas.

2° La somme constante MNP + M'N'P' égale quatre fois l'aire du triangle ayant pour sommets les centres des trois cercles décrits; d'où une seconde démonstration (J. N.).

**Note.** Le théorème a été énoncé en 1883, par E. CESARO, alors élève ingénieur à l'Ecole des mines de Liége. (*Mathesis,* 1883, p. 23, q. 201 et 1884, p. 66). La solution ci-dessus est de M. FAUCHAMPS; à son tour, M. LIÉNARD aurait répondu à la question. Les noms ci-dessus se retrouvent assez fréquemment dans les premières années de l'intéressante et très utile publication de MM. P. MANSION et J. NEUBERG.

**Théorème 555.**

**1613.** *Dans tout quadrilatère, le lieu géométrique des points tels que la somme des triangles ayant ce point pour sommet et deux côtés opposés pour base est équivalente à celle des deux autres triangles, est la droite qui joint les milieux des diagonales.* (LÉON ANNE.)

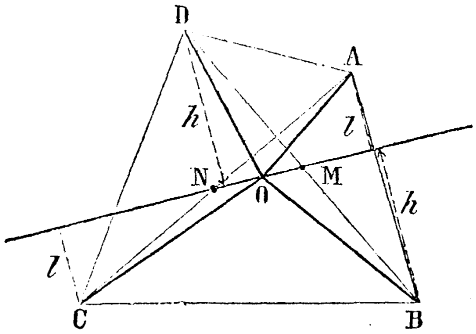


Fig. 1045.

Soit MN la droite qui joint les points milieux des diagonales; les perpendiculaires abaissées des sommets sur MN sont égales deux à deux; donc les triangles de même base, située sur MN, sont équivalents quand ils ont leur sommet en A et en C; il en est de même pour ceux qui ont le sommet en B et en D.

Or, on a : $\quad AOB = AMB + AOM + BOM,$

$$DOC = DMC - COM - DOM.$$

Mais $\quad AOM = COM, \quad BOM = DOM;$

donc $\quad AOB + DOC = AMB + DMC. \qquad (1)$

De même $\quad AOD = AMD + DOM - AOM,$

$$COB = CMB - BOM + COM.$$

Donc $\quad AOD + COB = AMD + CMB. \qquad (2)$

Or les triangles AMB et AMD des formules (1) et (2) ont même sommet A et des bases égales DM et BM; donc ils sont équivalents; il en est de même de DMC et de BMC.

Donc $\quad AOB + DOC = AOD + COB.$

*Remarque.* Le lieu qui répond directement à l'énoncé est compris dans le quadrilatère; au dehors, il y a changement de signe. (*J. M. E.*, BOURGET, 1879, p. 29.)

**Note.** La droite qui passe par les points milieux des diagonales ou *Droite de Newton* (n° 1233 **a**) se rencontre en diverses questions du quadrilatère; à ce sujet, on peut voir l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1907, p. 267, question 3313 de M. K. HAGGE de Kolsnap (Allemagne) et la réponse, année 1909, p. 252, par M. WELSCH.

On doit à M. le Colonel WELSCH un grand nombre de savants articles dans l' *I. M.* de 1908 à 1909.

* ANNE, Pierre-Léon, né à Rouen en 1806, mort à Paris en 1850. Ancien élève à l'École Polytechnique (*N. A.*, 1850, p. 224).

**Théorème de Newton 556.**

**1614.** *La droite qui joint les milieux des diagonales d'un quadrilatère circonscriptible passe par le centre du cercle inscrit.*

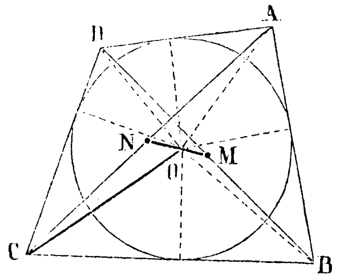


Fig. 1046.

Ce théorème peut être considéré comme un corollaire du *théorème de Léon Anne* (nº 1613).

En effet, la somme des côtés opposés AD et CB égale celle des deux autres; donc

$$\text{COB} + \text{AOD} = \text{AOB} + \text{COD}.$$

Car tous ces triangles ont pour hauteur le rayon du cercle inscrit, et la somme des bases CB + AD des premiers égale la somme AB + CD de celles des seconds; donc le point O se trouve sur MN.

**1614 a.** Corollaire. *Dans tout triangle exinscrit, la droite qui joint le milieu d'un côté au milieu de la distance du point de contact de ce côté au sommet opposé de ce triangle, passe par le centre du cercle.*

La démonstration de Newton a été reproduite par CATALAN, dans ses *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, 6e édit., p. 127; elle repose sur deux *Lemmes* à établir préalablement, p. 125, corollaire II du théorème LVI et théorème LVIII.

*Remarque*. Le théorème ci-dessus n'est qu'un cas particulier du théorème suivant :

*Le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère donné est la droite qui unit les milieux des diagonales de ce quadrilatère.*

Voir *Mathesis*, 1898, page 194, nº 19.

**Note.** Le corollaire attribué à GERGONNE est de J.-B. DURRANDE (1797-1825), alors professeur au lycée de Cahors, auteur de nombreux articles des *Annales de Gergonne*. (*A. de G.*, tome XIV, 1823-1824, pages 309 et 313.)

**Théorème 557.**

**1615.** *La droite la plus courte* BED *qu'on puisse mener par un point donné* E *dans un angle donné* A, *est définie par cette condition que la perpendiculaire* EC, *menée à cette droite par le point* E, *et les perpendiculaires* BC, DC *menées aux côtés de l'angle par les extrémités de la droite* BED, *concourent en un même point* C. (NEWTON.)

(Voir *Méthodes*, nº 168.)

**1615 a. Note.** 1º Comme étude élémentaire, voir *Mathesis*, 1907, p. 68 (*J. N.*) et p. 240, nº 21 (MALAISE, de Liége.)

2º La droite minima est parfois appelée par les auteurs anglais *Philo's Line*, parce qu'elle intervient dans la solution de PHILON du problème célèbre de la recherche de deux moyennes proportionnelles.

*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1902, page 299, nº 1782. Note de M. ARCHIBALD de Sackville (Canada).

3º On peut rattacher à cette question le *Théorème de Liouville*, démontré par PAUL SERRET. (*N. A.*, 1852, page 123.)

*Soit* AOB *un angle fixe circonscrit à une ellipse, et soit* MN *une tangente à cette courbe, telle que la portion interceptée* MN *entre les côtés de l'angle* *fixe* AOB *soit un minimum, les deux points* M, N *sont équidistants du centre de la courbe.*

Pour la parabole, la tangente au sommet est celle qui laisse dans l'angle fixe un segment minimum.

* ARCHIBALD (en 1910, à Providence, U.-S.), auteur de savants articles dans les *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society;* voir vol. XXVIII, pp. 152-178.

## Construction des figures.

### Problème 558.

**1616.** *Construire un triangle, connaissant ses angles et sa surface* $m^2$.

Avec les angles donnés, on construit un triangle quelconque ABC, semblable au triangle demandé.

Prolongeons la base AC d'une longueur CI égale à la moitié de la hauteur $h$; sur AI décrivons la demi-circonférence AFI : la perpendiculaire CF ou $u$ est le côté du carré équivalent au triangle ABC; car on a :

$$u^2 = \text{AC} \cdot \text{CI}.$$

Sur CF, portons la longueur CG égale à $m$; menons AFH, puis GH parallèle à AC, HC′ perpendiculaire à AC, et enfin C′B′ parallèle à BC.

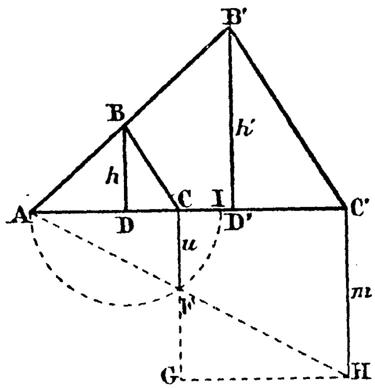


Fig. 1047.

AB′C′ est le triangle demandé. En effet, les deux triangles ABC, AB′C′ étant semblables, aussi bien que ACF et AC′H, on a :

$$\frac{\text{ABC}}{\text{AB'C'}} = \frac{\text{AC}^2}{\text{AC'}^2} = \frac{\text{CF}^2 \text{ ou } u^2}{\text{C'H}^2 \text{ ou } m^2}.$$

En considérant les rapports extrêmes, on voit que les numérateurs sont équivalents; donc les dénominateurs le sont aussi...

### Problème 559.

**1617.** *Construire un triangle* ABC, *connaissant les trois hauteurs* a′ b′, c′.

On fait un triangle avec les inverses des trois hauteurs données, et ce triangle est semblable à celui que l'on cherche, car on a :

$$aa' = bb' = cc',$$

ou

$$\frac{a}{\frac{1}{a'}} = \frac{b}{\frac{1}{b'}} = \frac{c}{\frac{1}{c'}};$$

donc le triangle demandé ABC est semblable à celui qui aurait pour côtés les inverses des trois hauteurs.

*Construction.* Prenons PL, PM, PN respectivement égales aux hauteurs $a', b', c'$; élevons une perpendiculaire quelconque PR, et décrivons les demi-circonférences LRL′, MRM′, NRN′. Nous aurons PL′ PM′, PN′ pour inverses des hauteurs. Avec ces trois longueurs, construisons le triangle AB′C′; il sera semblable au triangle cherché. Il suffit donc de prendre $AD = LP$ ou $a'$ et mener la parallèle BC; le triangle ABC répond à la question.

*Remarque.* Au lieu d'avoir à construire les trois inverses, on peut procéder comme il suit :

$$aa' = bb', \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{b} = \frac{b'}{a'} \quad \text{ou} \quad = \frac{b'c'}{a'c'};$$

$$bb' = cc', \quad \text{d'où} \quad \frac{b}{c} = \frac{c'}{b'} \quad \text{ou} \quad = \frac{a'c'}{a'b'};$$

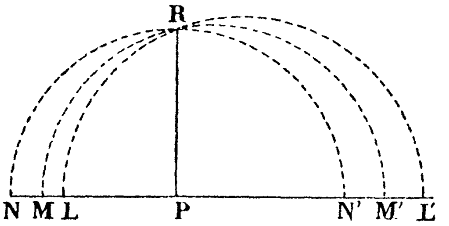


Fig. 1047 *bis.*

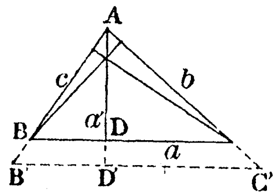


Fig. 1047 *ter.*

donc les trois côtés $a, \quad b, \quad c,$

sont entre eux comme les produits $b'c', \quad a'c', \quad a'b',$

ou sont entre eux comme $b', \quad a', \quad \dfrac{a'b'}{c'},$

et le triangle construit avec $b'$, $a'$ et une quatrième proportionnelle égale à $\dfrac{a'b'}{c'}$ sera semblable au triangle demandé; mais $b'$ est l'homologue de $a$, etc.

### Problème 560.

**1618.** *Par un point* A *pris dans un angle* XOY, *mener une sécante* MAN *telle que le triangle* MON *ait une aire donnée* $k^2$.

Pour fixer la position du point donné A par rapport aux côtés de l'angle XOY, formons le parallélogramme ABOC.

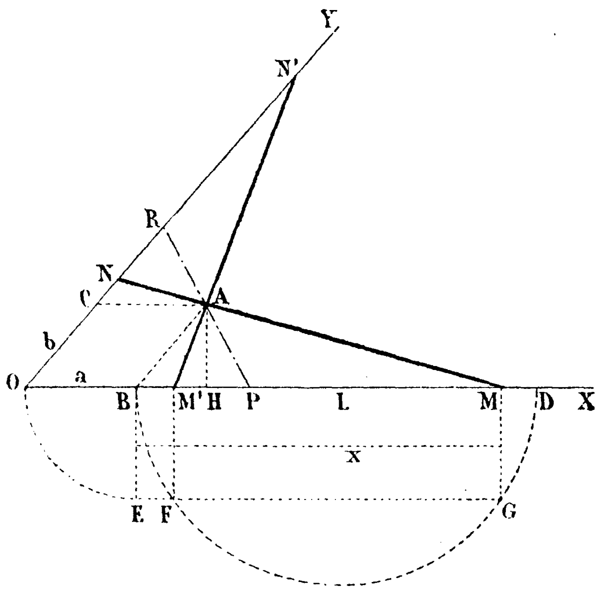


Fig. 1048

Abaissons la perpendiculaire AH.

Les longueurs $a$, $b$, $h$ sont connues.

Soit $BM = x$.

Il suffit d'établir une relation, à l'aide de la surface $k^2$, entre l'inconnue $x$ et les données.

Les triangles semblables MON, MBA sont entre eux comme les carrés des côtés homologues; d'ailleurs le double de l'aire de $MON = 2k^2$, le double de $MBA = xh$;

donc
$$\frac{2k^2}{hx} = \frac{OM^2}{x^2}; \quad \frac{2k^2}{h} = \frac{(a+x)^2}{x}; \tag{1}$$

$$\frac{2k^2x}{h} = a^2 + 2ax + x^2; \quad 2\left(\frac{k^2}{h} - a\right)x - x^2 = a^2;$$

ou
$$x\left[2\left(\frac{k^2}{h} - a\right) - x\right] = a^2. \tag{2}$$

Il faut *déterminer les côtés d'un rectangle, connaissant la somme* $2\left(\frac{k^2}{h} - a\right)$ *des deux côtés et leur produit* $a^2$.

*Construction.* Soit $l$ la quatrième proportionnelle $\frac{k^2}{h}$ ; portons cette grandeur du point O en L.

$$BL = \frac{k^2}{h} - a; \quad \text{prenons} \quad LD = LB, \quad \text{afin d'avoir} \quad BD = 2(l - a).$$

Décrivons la demi-circonférence BD, prenons $BE = a$, et menons la parallèle EFG.

On obtient généralement deux solutions.

*Minimum.* L'équation (2) montre que le problème n'est possible qu'autant qu'on a :
$$\frac{k^2}{h} \geqq a.$$

La limite inférieure est donnée par $\frac{k^2}{h} = a$;

d'où
$$k^2 = ah.$$

Or $ah$ exprime l'aire du parallélogramme ABOC.

Donc le triangle minimum POR est double du parallélogramme qui correspond au point A.

### Problème 560. — I.

**1619.** *Même question, lorsque le point donné A ne doit pas être dans le même angle que le triangle demandé.*

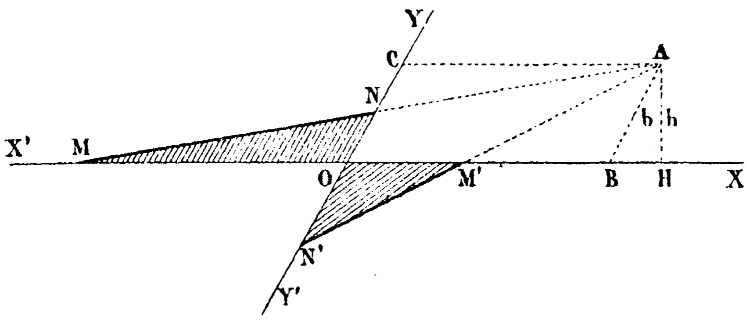



Fig. 1049.

Soit
$$MON = k^2; \quad BM = x;$$

$$\frac{2MON}{2MBA}, \quad \text{ou} \quad \frac{2k^2}{hx} = \frac{OM^2}{x^2} = \frac{(x-a)^2}{x^2};$$

d'où
$$\frac{2k^2x}{h} = x^2 - 2ax + a^2,$$

$$x\left[2\left(\frac{k^2}{h} + a\right) - x\right] = a^2. \qquad (3)$$

Deux solutions et $k^2$ peut varier de zéro à $+\infty$.

*Remarque.* Pour $k^2 > ah$, le problème complet admet quatre solutions.

### Problème 560. — II.

**1619 a.** *Par un point donné sur la bissectrice d'un angle, mener une droite terminée aux côtés de l'angle, de telle sorte que la somme des carrés des deux segments de la droite soit équivalente à un carré donné.* (Concours général des Collèges royaux de Paris en 1819.)

Question très intéressante, voir *Annales de Gergonne*, tome X (1819-1820), solution par FRANCŒUR, professeur à la Faculté des sciences de Paris, page 73; puis solution par GERGONNE, page 83.

### Problème 560. — III.

**1620.** *A un rectangle donné, circonscrire un losange de surface donnée.*

En divisant le rectangle en quatre parties égales par deux droites rectangulaires, menées par le centre du rectangle et respectivement perpendiculaires aux côtés du rectangle, on retombe sur le problème précédent.

### Problème 561.

**1621.** *Par le point milieu* O *de la base* BC *d'un triangle* ABC, *mener une sécante* MOD *limitée aux côtés* AB *et* AC, *de manière que la différence des aires des triangles* OBM, OCD *ait une valeur donnée* k².

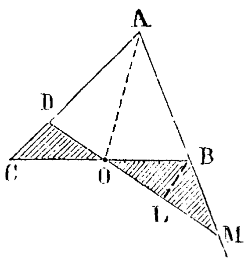



Fig. 1050.

Soit $\qquad \text{OBM} - \text{OCD} = k^2.$

En menant par le point B une parallèle BL à AC, on a :

$$\text{triangle OBL} = \text{OCD};$$

donc $\qquad \text{BLM} = k^2.$

Le problème est ramené à la question connue : *Étant donnés un angle* LBM *et un point* O, *mener par ce point une sécante telle que le triangle* LBM *égale* k² (nº 1618).

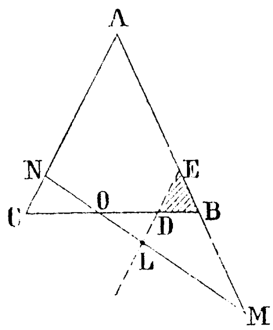



Fig. 1051.

*Remarque.* On peut résoudre le même problème, *quand le point* O *est un point quelconque de* BC.

En prenant $\text{OD} = \text{OC}$, et menant une parallèle DL, on a $\text{LDBM} = k^2$; mais l'aire du triangle BDE peut être calculée.

Soit $a^2$ sa valeur, le triangle total

$$\text{LEM} = k^2 + a^2,$$

et l'on retombe sur une question connue (nº 1618).

### Problème 561. — I.

**1622.** *Par le point milieu* O *de la base d'un triangle, mener la sécante* DOM *telle que les triangles* OBM, OCD *aient un rapport donné* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$.

Par le point O, il faut mener OLM telle que $\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OL}} = \frac{m}{n}$.

### Problème 561. — II.

**1623.** *Couper les côtés d'un angle droit par une droite d'une longueur donnée, de manière que le triangle rectangle ait une aire donnée.*

(Voir *Méthodes*, n° 117.)

*Remarque.* On peut employer la méthode du problème contraire, mais nous allons l'utiliser pour la question plus générale ci-après.

### Problème 562.

**1624.** *Dans un angle donné* XOY, *inscrire une droite* MN *de longueur donnée* l, *de manière que le triangle* MON *ait une aire donnée* $\mathrm{k}^2$.

L'emploi du *problème contraire* conduit à une solution peu élégante, mais très simple.

1° Sur $\mathrm{M'N'} = l$, décrivons un segment capable de l'angle donné XOY (fig. 1052).

$h$ est connu, car $lh = 2k^2$; d'où $h = \frac{2k^2}{l}$.

Portons la quatrième proportionnelle ainsi obtenue de M' en J'; la parallèle J'O' donne un triangle M'O'N' égal au triangle demandé.

2° Prenons : $\mathrm{OM} = \mathrm{O'M'}$, et $\mathrm{ON} = \mathrm{O'N'}$ (fig. 1053).

3° *Maximum de* $\mathrm{k}^2$ *pour une ligne donnée* l.

Pour une droite donnée, le plus grand triangle qu'on puisse obtenir M'L'N' est isocèle; donc, pour une base $l$, et un angle au sommet XOY, il faut qu'on ait au plus $k^2 = \frac{\mathrm{M'N'} \,.\, \mathrm{L'K'}}{2} = \frac{l \,.\, \mathrm{L'K'}}{2}$.

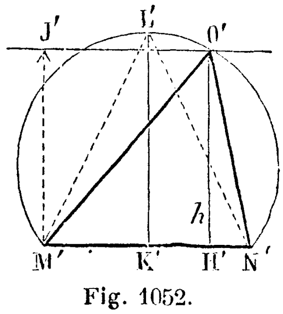


Fig. 1052.

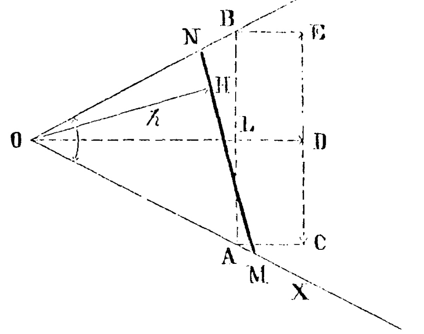


Fig. 1053.

Donc, pour une longueur $l$, le triangle isocèle AOB est maximum.

4° *Minimum de* l, *pour une valeur donnée* $k^2$.

C'est la base d'un triangle isocèle ayant l'aire $k^2$.

*Remarque.* Le problème peut être résolu par la méthode algébrique.

**1624 a. Note.** 1° Le problème de LEZ, et MORET-BLANC : *Trouver dans l'intérieur d'un triangle un point tel qu'en abaissant de ce point des perpendiculaires sur les côtés, on divise le triangle en trois parties proportionnelles à* m, n, p, se résout par l'intersection de deux hyperboles équilatères. (*Nouvelles Annales*, 1880, p. 462. Rappelé ci-après, n° 1674.)

2° Le problème de BOBILLIER (*Cours de Géométrie*) est un cas particulier du précédent : il s'agit de diviser le triangle en trois quadrilatères bi-rectangles équivalents, c'est-à-dire que $m = n = p$. D'une étude de LASER (*N. A.*, 1884, p. 332), il résulte qu'on ne peut le résoudre au moyen de la règle et du compas que lorsque le triangle donné est isocèle.

3° Le problème proposé par ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE (*Traité de Géométrie*, 7e édition, p. 416, n° 453) ou *Diviser un triangle donné en quatre parties équivalentes par deux droites perpendiculaires entre elles*, dépend d'une équation du huitième degré. Il a été étudié par LEIBNIZ, Jacques BERNOULLI, et après eux par un grand nombre de mathématiciens. Voir *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1894, pp. 39, 55, 135. — 1899, p. 33, LEMOINE, E. DE JONQUIÈRES, GINO-LORIA.

Voir, pour plus de détails, les nos 1674, b, c, d.

### Problème 563.

**1625.** *Déterminer un point* O *sur la base* BC *d'un triangle, de manière que le produit* OM . ON *des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés* AB, AC, *ait une valeur donnée* $k^2$.

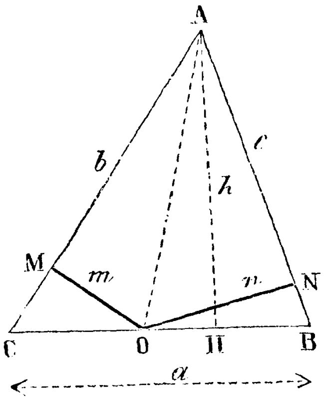


Fig. 1054.

Abaissons la perpendiculaire AH sur BC.

Menons AO.

Le double de l'aire du triangle ABC peut être exprimé de deux manières différentes.

On a donc l'égalité

$$bm + cn = ah\,; \qquad (1)$$

d'ailleurs

$$mn = k^2. \qquad (2)$$

Ces deux équations permettent de déterminer $m$ et $n$.

$$n = \frac{ah - bm}{c}\,; \quad mn = m\,\frac{ah - bm}{c} = k^2.$$

Ainsi

$$mah - bm^2 = ck^2,$$

$$m \,.\, \frac{ah}{b} - m^2 = \frac{ck^2}{b}\,.$$

Quantité facile à construire.

*Remarque.* le maximum du produit des perpendiculaires a lieu lorsque le point O est au milieu de BC (voir ci-après, n° 1680).

### Problème 563. — I.

**1626.** *Par un point donné* A, *dans l'intérieur d'un angle* XOY, *mener une sécante* MAN *telle que la projection* mAn *de cette droite sur une ligne perpendiculaire à la droite* AO *ait une longueur donnée* l.

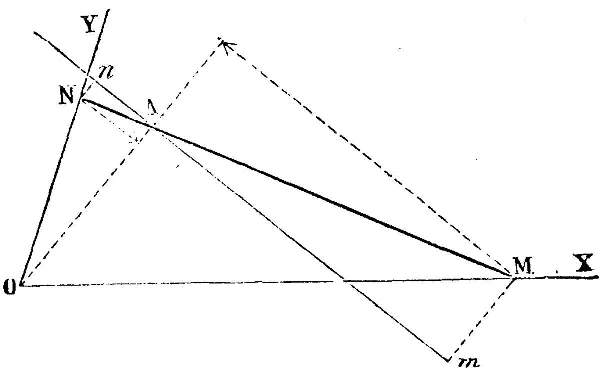



Fig. 1055.

Supposons le problème résolu, et $mAn = l$.

L'aire du triangle MON est connue.

En effet, le double de cette surface est donné par

$AO \,.\, Am + AO \,.\, An = AO \,.\, l$.

Donc $2k^2 = AO \,.\, l$, et la surface MON étant connue, on retombe sur une question précédente (n° 1618).

### Problème de Timmermans 563. — II.

**1626 a.** *Dans le plan d'un triangle* ABC, *tracer une droite* DE *telle que la somme des distances de chacun de ses points aux trois côtés du triangle soit constante.*

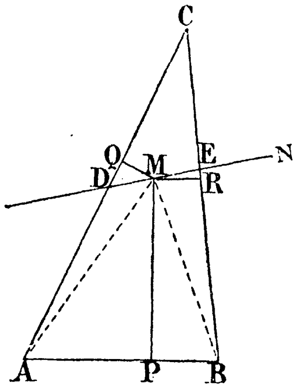



Fig. 1056.

Soit AB le plus petit des trois côtés.

Prenons $AD = BE = AB$; la droite DE répond à la question. En effet, le double de l'aire du quadrilatère DABE est donné par

$$AB \,.\, MP + AD \,.\, MQ + BE \,.\, MR,$$

ou
$$AB(MP + MQ + MR);$$

d'où
$$MP + MQ + MR = \frac{2DABE}{AB} = \text{constante}.$$

**Note.** 1° Extrait des *Annales de Gergonne,* tome XVIII, 1827-1828, p. 217. *Problèmes et Théorèmes sur les polygones et les polyèdres*, par A. Timmermans, professeur de physique à l'Athénée de Tournai.

2° La discussion du problème est intéressante et assez minutieuse. On obtient six droites analogues à DE, pour les trois droites illimitées qui passent par les points A, B, C; on doit avoir égard aux signes des distances MP, MQ, MR : ainsi on considère la hauteur MP comme positive, lorsque M est dans le demi-plan déterminé par la droite illimitée AB, et située du même côté que le triangle ACB; la distance MP est négative quand M est dans l'autre demi-plan : ainsi pour tout point du prolongement EN, deux distances sont positives et une négative. (Voir aussi n° 1898 **a.**)

### Problème 564.

**1627.** *Par le sommet d'un parallélogramme, mener une sécante limitée aux côtés opposés du parallélogramme, de manière que le triangle obtenu soit minimum.* — (Voir *Méthodes*, n° 351 **a.**)

**Problème 564. — I.**

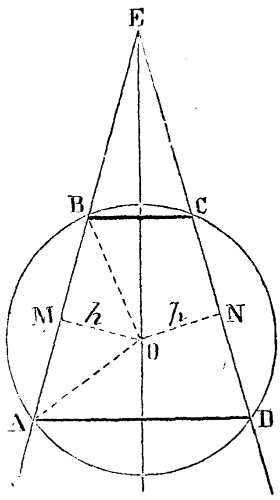


Fig. 1057.

**1628.** *D'un point* O *pris comme centre sur la bissectrice d'un angle, décrire une circonférence telle que la somme des triangles ayant pour sommet le point* O, *et pour bases les segments interceptés par le cercle sur les côtés de l'angle donné, ait une aire donnée* $k^2$.

Il suffit de considérer un des triangles.

Soit AOB ou $AB \cdot h = \frac{k^2}{2}$;

donc $AB = \frac{k^2}{2h}$.

Il faut porter la moitié de cette troisième proportionnelle de M en A et en B, et prendre $AO = BO$ pour rayon.

**Problème 565.**

**1629.** 1° *Construire un carré, connaissant la somme du côté et de la diagonale.*

(Construction directe, *Méthodes*, n° 41.)
(Emploi des figures semblables, *Méthodes*, n° 207.)

2° *Construire un carré, connaissant la différence de la diagonale et du côté.*

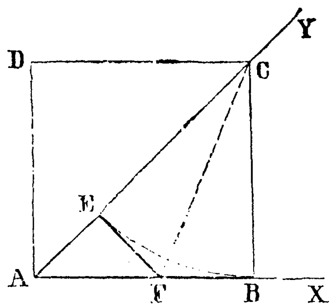


Fig. 1058.

On peut recourir aux figures semblables. (*Méthodes*, n° 207.)

Une analyse analogue à celle qu'on a faite pour le problème de la somme (n° 41) donnerait une construction directe.

On peut aussi indiquer la solution suivante, aussi simple qu'élégante.

Sur une droite AY, formant avec AX un angle de 45 degrés, on prend $AE = d$; du point E comme centre, avec la différence $d$ pour rayon, on coupe AX au point F, et l'on porte $d$ de F en B.

La longueur AB est le côté du carré; puis on élève la perpendiculaire BC, etc.

En effet, le triangle AEF est isocèle rectangle; donc EF est perpendiculaire sur AC. Le quadrilatère EFBC a deux angles droits en B et en E, de plus $FB = FE$; donc $BC = EC$.

Ainsi $AC - BC = AE = d$.

**Problème 565. — I.**

**1630.** *Calculer le côté* a *et la diagonale* b *d'un carré, en fonction de la somme* l, *ou de la différence* d *de la diagonale et du côté.*

1° On sait que $b = a\sqrt{2}$ ; donc $a + a\sqrt{2} = l$; d'où $a = \dfrac{l}{1+\sqrt{2}}$.

De même $a = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$; d'où $\dfrac{b}{\sqrt{2}} + b = l$; d'où $b = \dfrac{l\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

2° $a\sqrt{2} - a = d$; d'où $a = \dfrac{d}{\sqrt{2}-1}$.

$b - \dfrac{b}{\sqrt{2}} = d$; d'où $b = \dfrac{d\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

**Problème 566.**

**1631.** *Construire une figure qui donne les côtés des carrés équivalents à 2 fois, 3 fois, 4 fois, etc., un carré donné.*

1° Soit OA le côté du carré donné. La diagonale OB est le côté du carré double; on construit le triangle rectangle OBC, en prenant BC égal à OA; le carré construit sur OC serait égal à $OB^2 + BC^2$, et par conséquent triple du carré donné. La figure se continue indéfiniment.

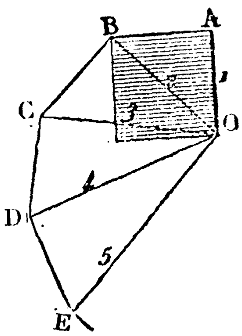


Fig. 1059.

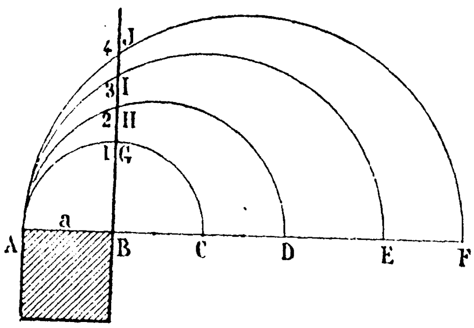


Fig. 1060.

2° Portons le côté AB du carré donné de B en C, de C en D, etc. Décrivons des demi-circonférences sur les diamètres AC, AD, AE, etc.

On aura : $BG^2 = a^2$,

$BH^2 = 2a^2$,

$BI^2 = 3a^2$, etc.

**Problème 566. — I.**

**1632.** *Dans un triangle, inscrire un rectangle qui soit équivalent au triangle partiel qui surmonte ce rectangle.*

Soit la surface $BMN = PMNQ$,

ou $\dfrac{MN \cdot BD}{2} = MN \cdot MP$;

d'où $\dfrac{BD}{2} = MP$.

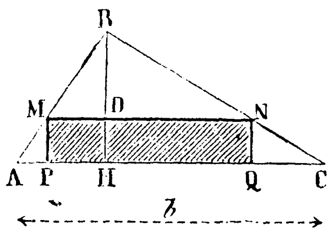


Fig. 1061.

Ainsi *la hauteur du triangle partiel doit être double de celle du rectangle.*

Donc BD est les $^2/_3$ de la hauteur, et MP en est le $^1/_3$.

**Problème 566. — II.**

**1633**. *Le triangle partiel doit être au rectangle dans le rapport* $\frac{m}{n}$

On trouve : $$BD = \frac{2mh}{2m+n}.$$

**Problème 567.**

**1634**. *Dans un triangle, inscrire un carré. Quel est le plus grand des trois carrés que l'on peut obtenir?*

La considération des figures semblables conduit immédiatement à la construction suivante :

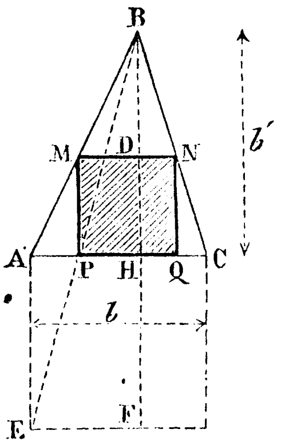


Fig. 1062.

On construit un carré avec AC pour côté, et l'on mène BPE, puis PM et MN.

**1635**. *Discussion*. Chaque côté du triangle donne lieu à un carré inscrit. Exprimons le côté du carré en fonction de la base et de la hauteur correspondantes; soient $a$, $b$, $c$ les côtés du triangle; $a'$, $b'$, $c'$ les hauteurs correspondantes; $x$, $y$, $z$ les côtés des carrés inscrits.

On a : $$\frac{MP}{AE} = \frac{BP}{BE} = \frac{BH}{BF},$$

ou $$\frac{y}{b} = \frac{b'}{b+b'}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{bb'}{b+b'}; \quad (1)$$

de même $$x = \frac{aa'}{a+a'}, \quad \text{et} \quad z = \frac{cc'}{c+c'}.$$

Or les numérateurs sont égaux, car ils expriment le double de l'aire du triangle; donc au plus petit dénominateur correspondra la plus grande fraction; c'est-à-dire le plus grand carré.

Soit $$a > b.$$

De $aa' = bb'$, on déduit $$\frac{a}{b'} = \frac{b}{a'};$$

d'où $$\frac{a-b'}{a} = \frac{b-a'}{b}.$$

Mais, puisque $a$ est plus grand que $b$, il faut qu'on ait :

$$a - b' > b - a';$$

d'où $$a + a' > b + b'.$$

Ainsi au plus petit côté $b$ correspond la plus petite somme $b + b'$ :

$$\frac{bb'}{b+b'} > \frac{aa'}{a+a'}; \quad \text{d'où} \quad y > x.$$

Donc *le plus grand carré est celui qui correspond au plus petit côté du triangle.*

**Théorème 567. — I.**

**1636.** *La somme des inverses des côtés des trois carrés égale la somme des côtés et des hauteurs, divisée par le double de l'aire du triangle.*

$$\frac{1}{x}=\frac{a+a'}{aa'},\quad \frac{1}{y}=\frac{b+b'}{bb'},\quad \frac{1}{z}=\frac{c+c'}{cc'}.\qquad (1635.)$$

Mais $$aa'=bb'=cc'=2S;$$

donc $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a+b+c+a'+b'+c'}{2S}.$$

*Remarque.* En représentant le demi-périmètre du triangle par $p$ et la demi-somme des hauteurs par $p'$, on aurait :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{p+p'}{S}.$$

**Problème 568.**

**1637.** *Construire un rectangle, ayant un périmètre donné et équivalent à un autre rectangle donné.*

Soient $2p$ le périmètre et $mn$ le rectangle donné ; le problème revient à trouver graphiquement les racines de l'équation

$$x(p-x)=mn.\qquad (\text{n}^\text{o}\ 297.)$$

**Problème 568. — I.**

**1638.** Même question. *On donne la différence* p *des côtés adjacents et la surface* **mn.**

On détermine les racines de l'équation

$$x(x-p)=mn.\qquad (\text{n}^\text{o}\ 299.)$$

**Problème 569.**

**1639.** *Dans un cercle, inscrire un rectangle de surface donnée.*

(Voir *Méthodes*, nº 100 **d.**)

*Autre solution.* Le rectangle se compose de deux triangles rectangles ayant un diamètre AB pour base commune ; soit $h$ la hauteur abaissée du point C ou du point D sur AB.

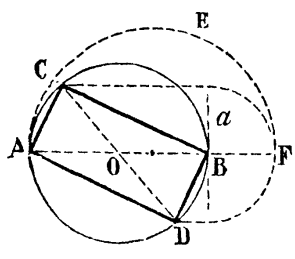


Fig. 1063.

En prenant $4a^2$ pour surface totale, on a :

$$2\text{ABC}\quad \text{ou}\quad \text{AB}\,.\,h=4a^2;$$

d'où $$h=\frac{4a^2}{\text{AB}}.$$

Prenons : $$\text{BE}=2a,$$

et décrivons sur ABF une demi-circonférence passant par A, E.

On aura : $$BF = \frac{BE^2}{AB} = \frac{4a^2}{AB}.$$

Puis, portant BF sur la perpendiculaire élevée en B, à la droite AF, on mène par l'extrémité de cette perpendiculaire une parallèle à AB, et l'on obtient le point C, puis le point D.

### Problème 569. — I.

**1640.** *Dans un demi-cercle, inscrire un rectangle d'une surface donnée* $2k^2$.

On a recours à la première solution (nº 100 **d**).

### Problème 570.

**1641.** *Dans un triangle quelconque, inscrire un rectangle dont la surface soit équivalente à un carré donné* $k^2$.

(*Méthode géométrique*, nº 202. — *Méthode algébrique*, nº 303 **a** (*d*).

### Problème 571.

**1642.** *Dans un triangle, inscrire le rectangle de surface maxima.*

1º Le cas du triangle rectangle isocèle peut être étudié directement, afin de conduire à la solution générale. (*Méthodes*, nº 349.)

2º Le triangle est quelconque. (*Méthodes*, nº 352.)

3º On peut regarder le maximum comme la solution limite d'une question déjà traitée (nº 202). Le maximum a lieu lorsque la parallèle LI est tangente à la demi-circonférence.

La parallèle que l'on mènerait par le point de contact passerait par les milieux des côtés AB et BC (fig. 1064).

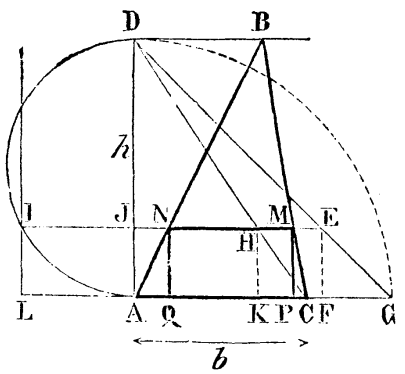



Fig. 1064.

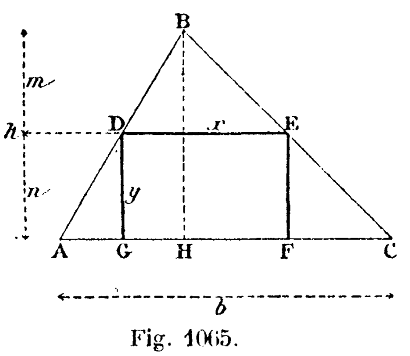



Fig. 1065.

4º Le rectangle maximum peut être obtenu d'une manière directe et très élégante, comme il suit (fig. 1065).

Soient $x$, $y$ la base et la hauteur du rectangle, et $m$, $n$ les deux segments que la parallèle DE détermine sur la hauteur $h$ du triangle.

Exprimons $x$ et $y$ en fonction des données et de $m$, $n$.

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AC}} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{b} = \frac{m}{m+n}, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{BH}} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{h} = \frac{n}{m+n}. \tag{2}$$

En multipliant (1) par (2), on trouve :

$$\frac{xy}{bh} = \frac{mn}{(m+n)^2}; \quad \text{d'où} \quad xy = bh \cdot \frac{mn}{h^2} = \frac{b}{h}\, mn.$$

Or le produit $mn$ est la seule quantité variable, car la somme des facteurs $m+n$ ou $h$ est constante; donc le maximum a lieu lorsque $m=n$.

Ainsi la parallèle DE doit diviser les côtés AB, BC en deux parties égales.

*Remarque.* En considérant chaque côté du triangle donné comme base de ce triangle, on obtient trois rectangles de surface maxima : ces rectangles sont équivalents entre eux, car chacun d'eux est équivalent à la moitié du triangle.

### Problème 571. — I.

**1643.** *Par le pied* D *de la hauteur* BD *d'un triangle isocèle* ABC, *mener deux droites* DM, DN *également inclinées sur la hauteur, de manière que le triangle* MDN *ait une surface donnée.*

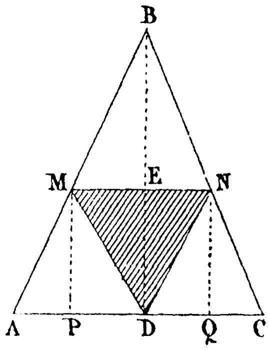


Fig. 1066.

Le triangle MDN est équivalent au rectangle DENQ; donc le problème proposé revient à une question connue (nº 1642).

Le *maximum* a lieu quand M et N sont les points milieux des côtés (nº 352).

### Problème 571. — II.

**1644.** *Mener une droite* MN *parallèle à la base* AC *d'un triangle quelconque* ABC, *de manière que le triangle* DMN, *obtenu en joignant les points* M *et* N *à un point quelconque* D *donné sur la base, ait une surface donnée.*

MDN est équivalent à la moitié du rectangle inscrit dans le triangle donné.

### Problème 571. — III.

**1645.** *Dans un losange, inscrire un rectangle ayant une surface donnée, les côtés étant parallèles aux diagonales du losange. Maximum de ce rectangle.*

En considérant le quart de la figure, on est ramené aux problèmes précédents (nºs 1641 et 1642).

Le rectangle maximum est formé par les droites qui joignent deux à deux les milieux des côtés du losange; la surface de ce rectangle est la moitié de celle du parallélogramme.

**Problème 571. — IV.**

**1646.** *Dans un carré, inscrire un carré ayant une surface donnée. Étudier les variations du carré inscrit.*

Soit $a$ le côté du carré donné, $b$ celui du carré demandé.

Du point de concours des diagonales, il suffit de décrire un cercle avec $\dfrac{b}{\sqrt{2}}$ pour rayon (nº 1015, 1º). On aura, en effet :

$$EF^2 = OE^2 + OF^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} = b^2.$$

Le minimum est donné par la circonférence tangente aux côtés du carré donné ABCD.

On obtient IJ pour côté

$$OI = OJ = \frac{a}{2};$$

donc $$IJ^2 = \frac{a^2}{2}.$$

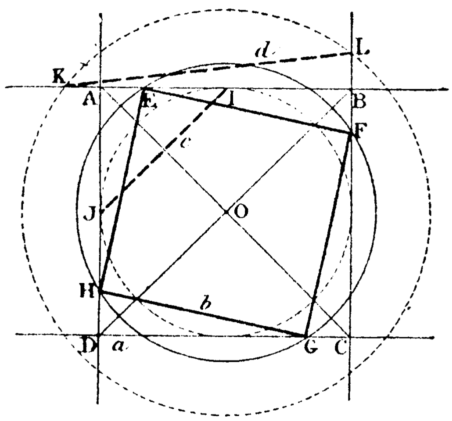


Fig. 1067.

Le carré minimum est obtenu en joignant deux à deux les milieux des côtés du carré donné.

On peut donner à $b$ toutes les valeurs plus grandes que IJ ou $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

En effet, la circonférence coupera les côtés ou leurs prolongements; et pour $b > a$, on obtient un carré ayant KL pour côté.

Toute valeur plus grande que $\dfrac{a^2}{2}$ donne deux solutions.

*Remarque.* La construction de *W. Collins* (nº 1015, 2º) conduit aux mêmes résultats.

**Théorème 571. — V.**

**1646 a.** *Le minimum du polygone inscrit dans un polygone régulier quelconque correspond au cas où l'on joint deux à deux les points milieux des côtés consécutifs du polygone donné.*

En effet, quel que soit l'angle A du polygone régulier donné de $n$ côtés, le polygone inscrit en prenant $AE = BF = CG$, etc. (fig. 1067), égale le polygone donné moins $n$ triangles égaux à HAE; mais les triangles tels que HAE, JAI ont un angle commun; donc les aires sont entre elles comme les produits des côtés qui comprennent cet angle; ainsi

$$\frac{HAE}{JAI} = \frac{AH \cdot AE}{AJ \cdot AI}.$$

Mais $$AH + AE = a = AJ + AI.$$

Donc le triangle AJI est maximum lorsque $AJ = AI$; par suite, le polygone régulier inscrit minimum correspond à IJ, etc.

### Problème 572.

**1647.** *Construire un rectangle dont la différence des carrés des côtés adjacents égale une quantité donnée.*

On peut recourir à la méthode algébrique (n° 304 **f**).

Il faut renoncer à l'emploi des lieux géométriques, car le lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux droites rectangulaires est constante, est une hyperbole équilatère ayant ses axes sur les droites données.

Ou bien on aurait à résoudre le problème connu : *trouver les points d'intersection d'une droite et d'une hyperbole sans construire cette courbe.*

### Problème 572. — I.

**1647 a.** *Établir la formule de l'aire du trapèze en le considérant comme la différence de deux triangles.*

Soient $b$, $b'$; $l$, $l'$ les bases respectives et les hauteurs des triangles obtenus en prolongeant les côtés non parallèles jusqu'à leur rencontre.

On a : $\text{trapèze} = \dfrac{bl - b'l'}{2}$; or $\dfrac{l}{l'} = \dfrac{b}{b'}$, et $l - l' = h$,

en éliminant $l$ et $l'$, on trouve :

$$\text{trapèze} = \frac{b + b'}{2} \cdot h.$$

### Problème 572. — II.

**1648.** *On donne deux parallèles* XX', YY' *et deux points* A *et* B. *Par ces points mener deux droites parallèles entre elles qui déterminent, en coupant les deux premières, un parallélogramme* GHIJ *d'une aire donnée* $k^2$.

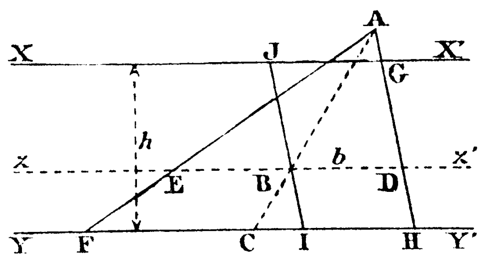


Fig. 1068.

Soit $b$ la base inconnue du parallélogramme demandé; on aura :

$$bh = k^2; \quad \text{d'où} \quad b = \frac{k^2}{h},$$

quantité facile à construire.

Par B, on mène une parallèle à XX'; l'on prend $BD = BE = b$, et l'on mène ADH, AEF.

Le parallélogramme GHIJ répond à la question. La droite AEF donnerait une seconde solution.

*Remarque.* L'aire $k^2$ peut varier de 0 à $\infty$.

### Problème 573.

**1649.** *Par deux points* A *et* B *pris sur un des côtés d'un angle* O, *mener deux droites parallèles telles que le trapèze résultant ait une surface donnée* $k^2$.

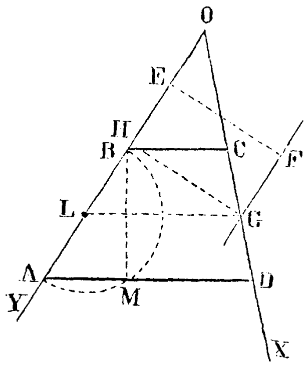



Fig. 1069.

Le théorème qui établit qu'on peut obtenir l'aire d'un trapèze ABCD en multipliant AB par la hauteur GH abaissée du point milieu de CD sur le côté opposé (nº 1566), conduit à la solution suivante :

Il faut élever une perpendiculaire EF telle que

$$EF = \frac{k^2}{AB}.$$

Mener la parallèle FG. On obtient ainsi le point milieu G du côté inconnu CD ; joindre G au point L, milieu de AB, et mener AD, BC parallèles à LG.

**1649 a.** *Remarque.* Le problème peut être proposé avec les données suivantes :

1º *On donne* A *et* B *sur les côtés de l'angle* O *et la longueur de la hauteur* BM *du trapèze.*

2º *On donne* A *et* B *sur les côtés de l'angle* O *et la longueur* l *du côté opposé* CD.

Il faut mener deux parallèles AD, BC qui interceptent sur OX un segment CD égal à la longueur donnée.

Or
$$\frac{OC}{l} = \frac{OB}{AB};$$

d'où
$$OC = l \cdot \frac{OB}{AB}.$$

### Problème 574.

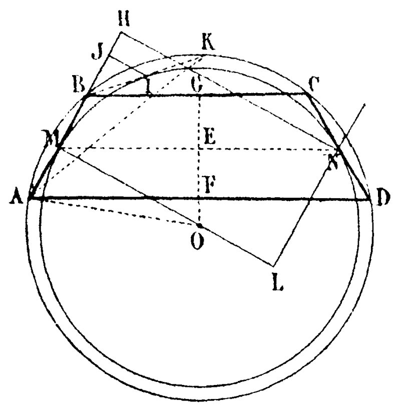



Fig. 1070.

**1650.** *Par deux points donnés* A *et* B *pris sur une circonférence, mener deux cordes parallèles, telles que le trapèze qui aurait ces cordes pour bases soit équivalent à un carré donné* $k^2$.

Soit ABCD le trapèze demandé.

L'aire s'obtient en multipliant un des côtés non parallèles AB par la hauteur NH abaissée du point milieu du côté opposé (nº 1566).

Donc $AB \cdot NH = k^2$;

d'où $NH = \dfrac{k^2}{AB}.$

Quatrième proportionnelle facile à construire.

Portons la longueur trouvée sur une perpendiculaire de M en L.

Menons une parallèle LN jusqu'à la rencontre de la circonférence décrite du centre O, avec OM pour rayon.

*Discussion.* 1° Il y a généralement deux solutions, parce que la droite LN coupe la circonférence OM en deux points.

2° Le maximum a lieu lorsque ML ou $\frac{k^2}{AB} = 2MO$;

d'où $$k^2 = 2 . MO . AB : \text{ tel est le maximum de } k^2.$$

3° Le trapèze se réduit à un triangle ABK, lorsque la quatrième proportionnelle devient égale à IJ.

Alors $$k^2 = AB . IJ.$$

4° Pour des valeurs $k^2 < AB . IJ$, la corde AB n'est plus un des côtés non parallèles, mais elle devient une des diagonales du trapèze, car le sommet C se trouve en A et B.

Avec AB pour diagonale, le trapèze peut décroître de plus en plus jusqu'à une aire nulle.

### Problème 575.

**1651.** *D'un point* O *comme centre, décrire une circonférence qui coupe deux parallèles données, de manière que le trapèze* ABCD *ait une aire donnée* k².

En supposant le problème résolu, on a (fig. 1070) :

$$MN . FG = k^2; \quad \text{d'où} \quad MN = \frac{k^2}{GF}.$$

Or GF est connu; il en est donc de même de $EM = \frac{k^2}{2GF}$.

On joindra le centre O au point M, puis au point M on élèvera la perpendiculaire AB à la droite OM, et $AO = BO$ sera le rayon demandé.

2° *Avec un rayon donné* r, *couper deux parallèles de manière que le trapèze* $ABCD = k^2$ (fig. 1070).

En un point quelconque, on mène la perpendiculaire GF, une parallèle équidistante des deux lignes données; on prend :

$$ME = EN = \frac{k^2}{2GF},$$

et tout trapèze dont les côtés non parallèles passeront par M, N aura l'aire $k^2$.

Le problème est ramené *à construire un triangle rectangle* AMO, connaissant la longueur $r$ de l'hypoténuse, le sommet de l'angle droit devant être en M et les autres sommets se trouver sur des droites données AF, GF (n° 975).

**Problème 576.**

**1652.** *D'un point* O *pris comme centre sur la bissectrice d'un angle, décrire une circonférence telle que le trapèze déterminé ait une aire donnée* $k^2$.

Du centre, abaissons les perpendiculaires OM, ON, puis NP; MN est la base moyenne.

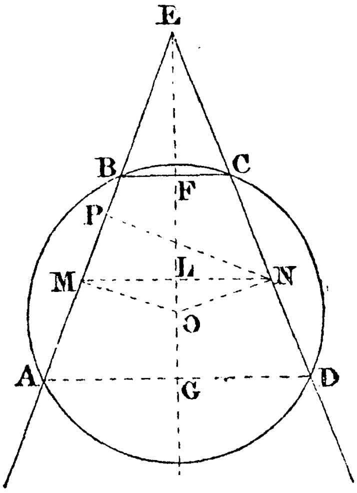


Fig. 1071.

1° Il suffit de déterminer la hauteur FG du trapèze, et de porter sa moitié de L en F et en G.

Or $$\mathrm{MN}\,.\,\mathrm{FG} = k^2;$$

d'où $$\mathrm{FG} = \frac{k^2}{\mathrm{MN}}\,.$$

2° On peut aussi déterminer AB et porter sa moitié de M en A et en B; cette construction est même préférable à la précédente.

Or $$\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{NP} = k^2 \qquad (\text{n}^\text{o}\ 1566);$$

d'où $$\mathrm{AB} = \frac{k^2}{\mathrm{NP}}\,.$$

**Problème 576. — I.**

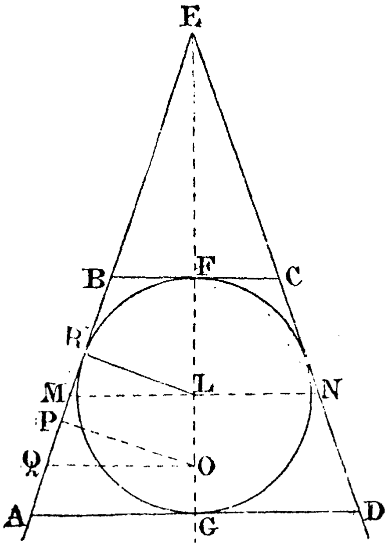


Fig. 1072.

**1653.** *Décrire une circonférence tangente aux côtés d'un angle donné, de manière que les tangentes perpendiculaires à la bissectrice de l'angle déterminent un trapèze d'une aire donnée.*

Soit le problème résolu. On doit avoir :

$$\mathrm{MN}\,.\,\mathrm{FG} \quad \text{ou} \quad 4\mathrm{LM}\,.\,\mathrm{LR} = k^2.$$

Or, si l'on mène par un point quelconque O de la bissectrice, des droites OP, OQ respectivement perpendiculaires aux premières, on aura :

$$\frac{\mathrm{LR}^2}{\mathrm{OP}^2} = \frac{\mathrm{LM}\,.\,\mathrm{LR}}{\mathrm{OP}\,.\,\mathrm{OQ}}\,;$$

donc $$\frac{\mathrm{LR}^2}{\mathrm{OP}^2} = \frac{k^2}{4\mathrm{OP}\,.\,\mathrm{OQ}}\,.$$

ce qui permet de déterminer le rayon LR du cercle.

**Problème 576. — II.**

**1653 a.** *Une circonférence est tangente aux côtés d'un angle donné; mener deux tangentes parallèles de manière que l'aire du trapèze obtenu ait une valeur donnée* $k^2$.

Soit le problème résolu, MN la base moyenne, $r$ le rayon du cercle.

On a : $2r \cdot MN = k^2$ ;

d'où $MN = \frac{k^2}{2r}$ .

On est donc ramené au *problème de Pappus :* Par un point O pris sur la bissectrice d'un angle, mener une droite MON d'une longueur donnée (n$^{os}$ 309 **a** et 321 **a**).

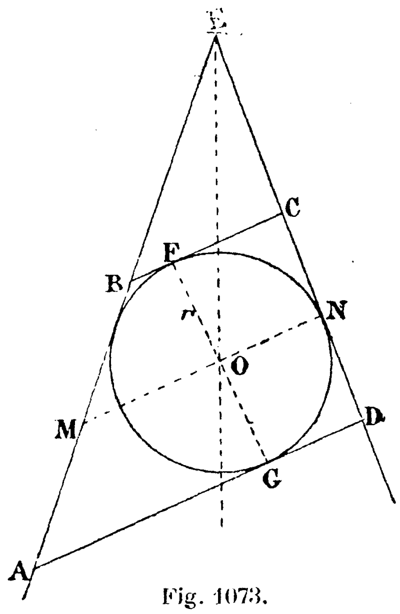


Fig. 1073.

### Problème 577.

**1654.** *Construire une figure* C *semblable à une figure* A *et équivalente à une autre figure donnée* B.

Soient $m$ et $x$ deux lignes homologues quelconques des figures A et C.

Les figures données A et B peuvent être transformées en des carrés équivalents $a^2$ et $b^2$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ainsi les deux figures | A | et | C |
| ont pour aires respectives | $a^2$ | et | $b^2$, |
| et pour lignes homologues | $m$ | et | $x$. |

On a donc : $\frac{a^2}{b^2} = \frac{A}{C} = \frac{m^2}{x^2}$ ; de là on conclut $\frac{a}{b} = \frac{m}{x}$.

On peut trouver la ligne $x$ homologue de $m$; ce qui permet de construire la figure C.

### Problème 577. — I.

**1654 a.** *On donne un quadrilatère quelconque* ABCD; *à partir de deux sommets opposés* A *et* C, *on divise les côtés dans le rapport de* m *à* n, *de manière à obtenir un parallélogramme inscrit* EFGH (n° 1111); *quel est le rapport de la surface* P *du parallélogramme obtenu, à la surface* Q *du quadrilatère donné?*

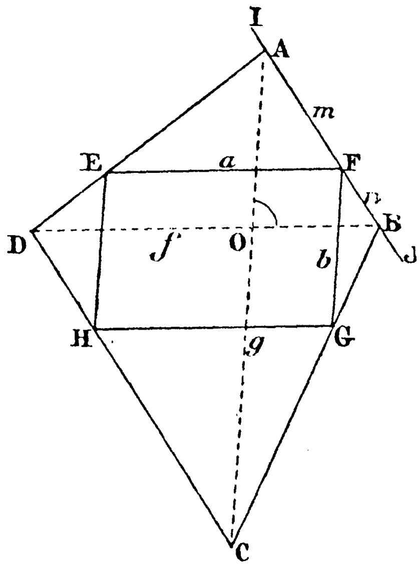


Fig. 1074.

Le rapport $\frac{P}{Q}$ des surfaces dépend du rapport des produits $ab$ et $\frac{fg}{2}$, car on sait que le parallélogramme a pour aire $ab \sin O$ et le quadrilatère $\frac{fg \sin O}{2}$.

Il faut donc calculer $a$, $b$ en fonction des diagonales $f$, $g$ et de $m$, $n$..

On a : $\frac{a}{f} = \frac{m}{m+n}$, d'où $a = f\frac{m}{m+n}$;

de même $\frac{b}{g} = \frac{n}{m+n}$, d'où $b = g\frac{n}{m+n}$;

donc $$ab = fg\,\frac{mn}{(m+n)^2}.$$

Ainsi $$\frac{P}{Q} = fg\,\frac{mn}{(m+n)^2} : \frac{fg}{2} = \frac{2mn}{(m+n)^2}.$$

*Remarques.* 1° Quand $m = n$, on a : $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2}$.

Le parallélogramme est équivalent à la moitié du quadrilatère, ainsi qu'on le sait d'ailleurs : c'est le parallélogramme inscrit de surface maxima.

2° A partir du maximum, correspondant au point milieu de AB, on a des valeurs équivalentes pour des points F équidistants du point milieu; lorsque F vient en A ou en B, le parallélogramme se réduit à une ligne, sa surface est nulle. Au-dessus de A, en I par exemple, et au-dessous de B, en J, on aurait encore, au *point de vue géométrique,* des parallélogrammes exinscrits dont l'aire s'accroîtrait de plus en plus.

### Problème 578.

**1655.** *Décrire deux cercles tangents entre eux et tangents à une droite* AB *en* A *et* B *de manière que les rayons aient une somme, ou une différence donnée, ou soient entre eux dans un rapport donné.*

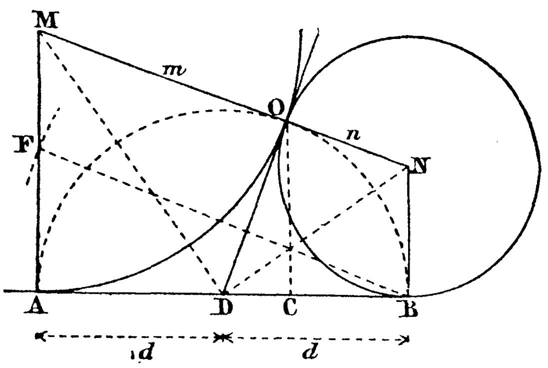



Fig. 1075.

En supposant le problème résolu et en joignant le point de contact au point milieu de AB, puis menant BF parallèle à NM, on reconnaît facilement ce qui suit :

Le demi-cercle AOB est le lieu des points de contact O et en même temps l'enveloppe de la ligne des centres MN.

Le triangle rectangle ABF a pour côtés $2d$ ligne donnée, la somme des rayons pour hypoténuse, et la différence $m - n$ pour troisième côté; de ces remarques on déduit les constructions suivantes :

1° *Somme.* Du point B comme centre, avec $m + n$ pour rayon, on coupe en F la perpendiculaire élevée en A sur AB.

2° *Différence.* On porte $m - n$ de A en F; dans ces deux cas, on mène une tangente MON parallèle à BF.

3° *Rapport.* On divise AB en C dans le rapport voulu, et l'on élève la perpendiculaire CO; on joint D au point où la perpendiculaire rencontre la demi-circonférence AOB, et l'on mène MON perpendiculaire à DO.

**Problème 578. — I.**

**1655 a.** *Décrire deux cercles tangents à une droite* AB *en* A *et* B, *et tangents entre eux, et tels que la somme des aires de ces cercles ait une valeur donnée* $k^2$.

En représentant par $2d$ la distance AB, on sait que les triangles rectangles semblables AMD, BDN donnent la relation

$$mn = d^2; \qquad \text{(n° 1305)}$$

la relation de condition est d'ailleurs :

$$m^2 + n^2 = k^2,$$

ce qui permet de calculer $m$ et $n$, puis de construire leur valeur.

Au point de vue graphique, il est préférable de se borner à calculer la somme des rayons. En multipliant par 2 les termes de la première équation, et ajoutant ce résultat à la seconde, on obtient :

$$m^2 + 2mn + n^2 = k^2 + 2d^2,$$
$$(m + n)^2 = k^2 + 2d^2.$$

*Remarque.* Pour la différence, on aurait :

$$(m - n)^2 = k^2 - 2d^2.$$

Il faut donc que $k$ soit au moins égal à $d\sqrt{2}$.

**Problème 578. — II.**

**1655 b.** *Construire deux circonférences tangentes entre elles, tangentes chacune à une droite donnée, en un point donné, et dont les rayons soient dans un rapport donné.*

**Note.** Ce problème complète le n° 960, 4e cas.

Voir *Manuel du conducteur des Ponts et Chaussées,* par ENDRÈS ; *N. A.,* 1858, p. 177, et *Mathesis,* 1884, page 42 ; solutions diverses, par Ph. BRETON, LAMARLE, ingénieurs en chef des Ponts et Chaussées, DE BOISCHEVALLIER, LIÉNARD, etc.

* M. ENDRÈS, ingénieur en chef, puis inspecteur général des Ponts et Chaussées, est bien connu des candidats par son *Manuel,* rappelé ci-dessus.

**Problème 578. — III.**

**1655 c.** *Tracer deux cercles tangents entre eux et tangents respectivement à un cercle donné, aux points donnés* A *et* B. *Les rayons* x, y *des cercles demandés doivent réaliser une des relations suivantes :*

1° $x + y = l;$ 2° $x - y = d;$

3° $\dfrac{x}{y} = \dfrac{m}{n};$ 4° $x^2 \pm y^2 = k^2.$

1° Pour la somme, on peut recourir à la construction graphique déjà donnée, n° 872.

2° Pour les autres cas, on a recours à la méthode algébrique, et l'on utilise une relation connue

$$(x + b)(y + b) = a^2. \qquad \text{(n° 329.)}$$

### Problème 578. — IV.

**1655 d.** *Dans un triangle scalène* CDE, *mener une droite* MN *qui coupe les côtés* CD, CE, *de manière que* MN *égale la somme des segments* MD, NE, *et que ces mêmes segments réalisent une autre condition donnée, par exemple, que leur somme ou leur différence, leur rapport ou leur produit, la somme ou la différence de leurs carrés égale une valeur donnée.*

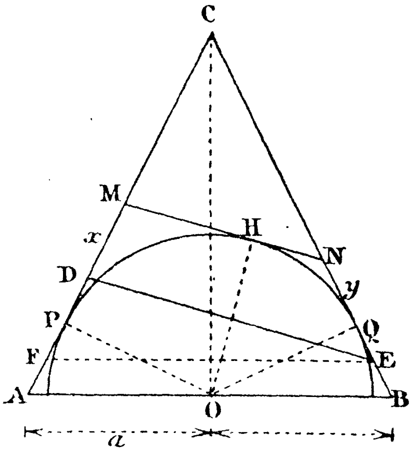


Fig. 1076.

En se reportant à des questions déjà traitées nos 872 et 963, on est conduit à prendre $CF = CE$; la perpendiculaire PO élevée au milieu de DF jusqu'à la bissectrice de l'angle C détermine le rayon du cercle exinscrit, et toute tangente MN menée à ce cercle donne :

$$MN = MP + NQ = \text{donc } MD + NE.$$

En recourant maintenant à une question des *Méthodes* (no 325), on a la relation

$$AM \,.\, BN = AO^2,$$

ou

$$(x + AD)(y + BE) = a^2.$$

Or AO, AD et BE sont des quantités invariables faciles à déterminer; donc on a une relation constante entre $x$ et $y$ et des quantités connues, ce qui permet de résoudre tous les cas particuliers par la méthode algébrique.

*Remarque.* Quand on donne la somme des segments ou la valeur de MN, on a une construction graphique très simple. — Voir aussi no 873.

### Problème 579.

**1656.** *Par un point* A *donné dans un cercle, mener une corde* MN *telle que le secteur correspondant à l'arc sous-tendu soit les* $^5/_{12}$ *du cercle entier.*

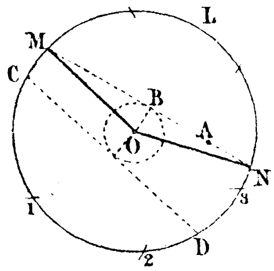


Fig. 1077.

Puisque le secteur MONL doit être les $^5/_{12}$ du cercle entier, l'arc MLN ou $2a$ doit être aussi les $^5/_{12}$ de la circonférence.

Divisons la circonférence en douze parties égales; menons la corde CD qui correspond aux cinq douzièmes.

Il suffira de mener par le point A une corde égale à CD (no 850).

Du centre O, décrivons une circonférence tangente à CD, et menons par le point A une tangente MAN.

Le secteur MONL est égal aux $^5/_{12}$ du cercle.

*Remarque.* Il peut y avoir deux solutions, une seule, ou aucune, suivant que le point A est hors du cercle décrit, ou sur la circonférence OB, ou dans l'intérieur de ce cercle.

### Problème 580.

**1657.** *Par un point fixe pris sur une circonférence, on mène deux cordes dont le produit est constant. Quelle est l'enveloppe du triangle formé en joignant les extrémités des deux cordes menées par le point fixe?*

(Voir *Méthodes*, n° 124.)

### Problème 580. — 1.

**1658.** *Construire un triangle, connaissant le produit* $k^2$ *de deux côtés, la hauteur correspondante* h *et la médiane* m *qui part du même sommet.*

Le diamètre $d$ du cercle circonscrit est donné par $d = \frac{k^2}{h}$. (G., n° 270.)

On pourrait construire le triangle rectangle AMH, car on connaît l'hypoténuse $AM = m$, le côté $AH = h$.

Le centre du cercle circonscrit doit se trouver sur la perpendiculaire MY élevée à la base par son point milieu M; donc, du sommet A avec $\frac{d}{2}$ pour rayon, il faut couper la perpendiculaire en O, décrire la circonférence qui fait connaître les sommets B et C.

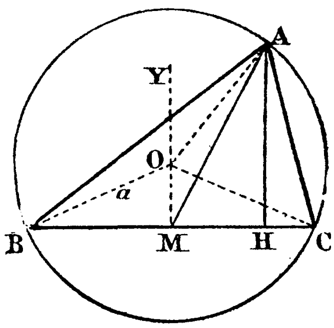


Fig. 1078.

### Problème 581.

**1659.** *A une circonférence donnée, circonscrire un triangle isocèle tel que la somme des deux côtés égaux soit minima.*

Le triangle isocèle demandé doit être tel que la distance CE égale la projection BD de la moitié de la base; en effet, admettons que les tangentes CEB, CE'B' réalisent la condition rappelée: toute droite FE'G menée par le point de contact E' sera plus grande que CE'B' (n° 168); donc

$$CE'B' < GE'F,$$

et par suite, à plus forte raison, on aura :

$$CE'B' < \text{tangente IJ}.$$

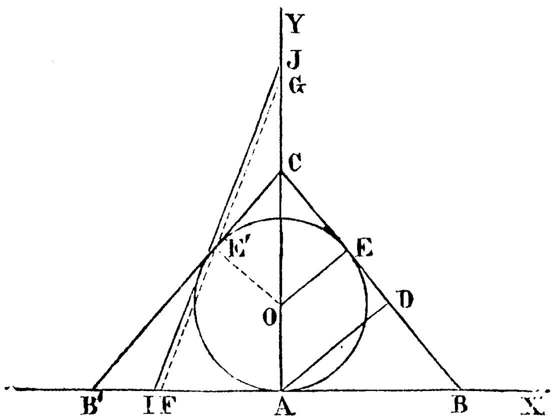


Fig. 1079.

Remarque. *Le point de contact E divise la tangente en moyenne et extrême raison.*

En effet, les triangles BAC, BDA sont semblables; donc

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}; \quad \text{d'où} \quad BC \cdot BD = AB^2.$$

Mais $BD = CE$ par construction; la tangente $BA = BE$; donc

$$BC \cdot CE = BE^2.$$

*Construction.* On ne sait pas mener géométriquement une tangente BEC qui soit divisée par le point de contact en moyenne et extrême raison, mais on peut construire une figure semblable à celle que l'on demande, et trouver celle-ci à l'aide de la méthode du problème contraire.

Ainsi, on prendrait une droite quelconque BC, par exemple, divisée au point E, on porterait CE de B en D. Au point D, on élèverait une perpendiculaire que l'on couperait en A par un arc de cercle décrit du centre B avec BE pour rayon. On obtiendrait ainsi un triangle rectangle BAC semblable à la moitié du triangle isocèle demandé. La perpendiculaire EO donnerait le rayon de la figure auxiliaire, employée dans la méthode du problème contraire.

### Problème 581. — I.

**1659 a.** *Deux droites égales* AB, CD *de longueur donnée* l *se coupent en un point* P *sous un angle constant de* 60°, *de manière que* $PA = PC$, *etc.; dans les triangles équilatéraux* APC, BPD *on inscrit des cercles. Etudier : 1° la somme des circonférences; 2° la somme des cercles; minimum de cette dernière somme.*

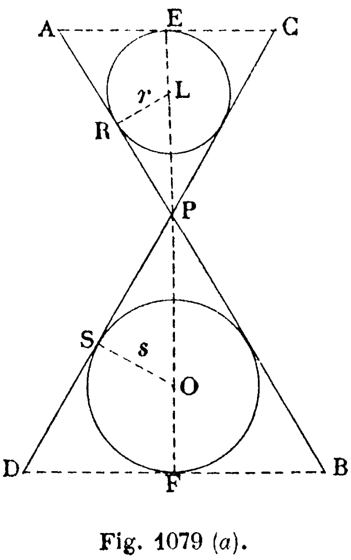



Fig. 1079 (*a*).

1° La somme des circonférences est constante, car $r + s$ est le tiers de EF.

$$EF = \frac{AB\sqrt{3}}{2}; \quad \text{donc} \quad r + s = \frac{l\sqrt{3}}{6}.$$

La somme des circonférences

$$= 2(r + s)\pi = \frac{\pi l\sqrt{3}}{3}.$$

2° La somme des cercles est donnée par

$$\pi(r^2 + s^2).$$

Or $r + s$ est une somme constante; donc le minimum de la somme des carrés a lieu lorsque $r = s$.

Ce minimum est la moitié de la surface du cercle inscrit dans le triangle équilatéral, lorsque A et C coïncident.

*Remarque.* Si le point d'intersection P était sur le prolongement de AB et de CD, il faudrait considérer la différence au lieu de la somme.

**Problème 581. — II.**

**1659 b.** *Question analogue à la précédente. Les droites égales sont orthogonales et l'on considère les quatre cercles inscrits.*

1° *Le groupe* L *et* O.

La somme des circonférences est constante.

Le minimum de la somme des cercles a lieu lorsqu'ils sont égaux entre eux.

Le maximum, lorsque les points A et C coïncident.

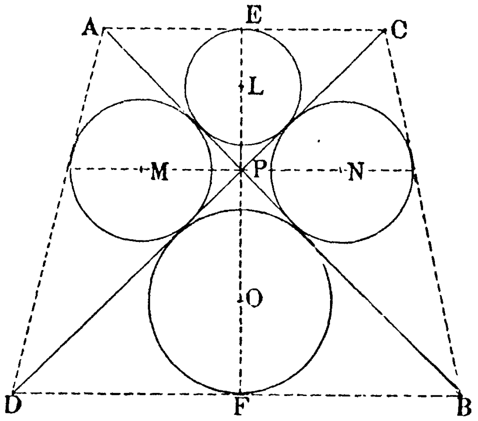



Fig. 1079 (*b*).

2° *Le groupe de* M *et* N.

Le rayon du cercle inscrit est la moitié de la différence entre la somme des segments PA, PD et l'hypoténuse AD (n° 741, *Remarque*), et comme la somme des côtés de l'angle droit est constante, le minimum de l'hypoténuse, et, par suite, le maximum du rayon, correspond au cas où le point P est au milieu de AB; le rayon est nul lorsque A et C coïncident.

Le maximum de la surface des cercles M et N a lieu en même temps que celui des circonférences.

3° *On considère simultanément* L, O *et* M, N.

Le maximum de la somme des circonférences a lieu lorsqu'elles sont égales entre elles; le minimum lorsque les points A et C coïncident. Le maximum est le double du minimum.

Dans les deux cas extrêmes, lorsque les quatre cercles sont égaux entre eux et lorsqu'ils se réduisent à un seul, la somme des quatre premiers est équivalente à la surface du cercle unique.

## Division des figures.

**Problème 582.**

**1660.** *Par un point donné sur le périmètre d'un triangle, mener une droite qui divise ce triangle en deux parties équivalentes.*

**Note.** Pour les exercices suivants : 582 à 592 compris, on peut voir la 2e édition des *Exercices de Géométrie,* où ces questions sont développées.

**Problème 582. — I.**

**1661.** *Diviser un triangle en trois parties équivalentes par des droites partant de deux points donnés sur le périmètre.*

**Problème 583.**

**1662.** *Par des parallèles à l'un des côtés d'un triangle, diviser ce triangle en trois parties qui soient entre elles comme des grandeurs données* m, n, p.

**Problème 584.**

**1663.** *Diviser un triangle en deux parties équivalentes, par une droite perpendiculaire à la base.*

**Problème 584. — I.**

**1663 a.** *Diviser un triangle* ABC *en deux parties équivalentes par une droite parallèle à une ligne donnée.*

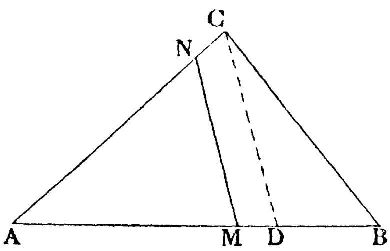


Fig. 1079 (c).

Soit CD la direction donnée et $2a^2$ l'aire de ABC.

On détermine l'aire de ACD, soit :

$$d^2 = \frac{2a^2 \, . \, AD}{AB}.$$

On a :

$$\frac{AM^2}{AD^2} = \frac{a^2}{d^2};$$

donc

$$AM^2 = \frac{a^2 \, . \, AD^2}{d^2}$$

**Problème 585.**

**1664.** *Par un point* O *pris sur la hauteur d'un triangle isocèle, mener une droite, autre que la hauteur, qui divise le triangle en deux parties équivalentes.*

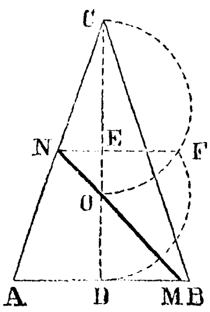


Fig. 1080.

Soit MON la sécante demandée.

On doit avoir triangle DOM équivalent à ONC, car les deux surfaces équivalentes CBD, CBMN, ont une partie commune COMB; d'où

$$OC \, . \, NE = OD \, . \, DM. \qquad (1)$$

Mais

$$\frac{DM}{NE} = \frac{OD}{OE};$$

$$DM \, . \, OE = NE \, . \, OD. \qquad (2)$$

En multipliant (1) par (2), on trouve :

$$OC \, . \, OE = OD^2;$$

donc OE est une troisième proportionnelle facile à construire.

**Problème 585. — I.**

**1665.** *Même question pour un point* O *pris sur la médiane d'un triangle quelconque.*

### Problème 586.

**1666.** *Diviser en parties équivalentes un trapèze par des droites joignant les deux bases.*

### Problème 587.

**1667.** *Diviser un trapèze donné en trois parties équivalentes, par des droites parallèles à l'un des côtés non parallèles.*

### Problème 588.

**1668.** *Aux bases d'un trapèze, mener une parallèle qui divise ce trapèze dans un rapport donné :* $\frac{2}{5}$, *par exemple.*

### Problème 589.

**1669.** *Diviser un trapèze en deux parties équivalentes, par une droite menée par un point donné.*

*Dans quelle région du plan doit se trouver le point donné, pour qu'il y ait trois solutions, deux, une seule; pour que la droite de division rencontre les deux bases, les deux côtés non parallèles, une base et un des côtés non parallèles?*

(Voir *Méthodes*, n° 254.)

### Problème 590.

**1670.** *Diviser un quadrilatère en deux parties équivalentes, par une droite partant d'un point donné sur le périmètre.*

### Problème 590. — I.

**1670 a.** *Diviser un quadrilatère* ABCD *en deux parties équivalentes, par la plus petite droite possible.*

Soit $2a^2$ l'aire du quadrilatère; il faut mener la ligne MN également

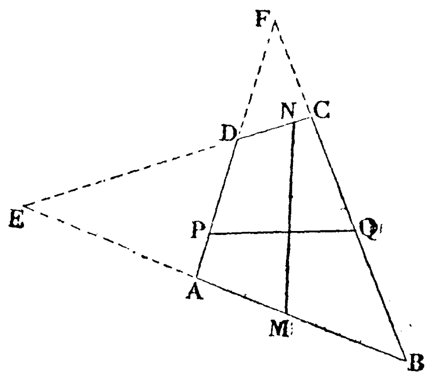



Fig. 1080 *bis*.

inclinée sur AB et DC, de manière que le triangle MNE ait pour aire

$$\text{ADE} + a^2.$$

De même pour PQ, puis comparer MN à PQ. (Voir n° 1682 **b.**)

### Problème 591.

**1671**. *Diviser un polygone quelconque en deux parties équivalentes, ou dans un rapport donné, par une droite partant d'un point pris sur le périmètre.*

### Problème 592.

**1672**. *D'un point donné dans une figure quelconque, mener des droites qui divisent cette figure en deux parties équivalentes, ou en deux parties qui soient dans un rapport donné.*

### Problème 593.

**1673**. *Partager un polygone donné en parties proportionnelles à des grandeurs données, en menant des droites par un point intérieur* O. (Solution d'Euzet, garde du génie, *N. A.*, 1854, p. 114.)

Soit un quadrilatère ABCD, à partager en trois parties proportionnelles à des longueurs $l$, $m$, $n$. On donne la droite OP.

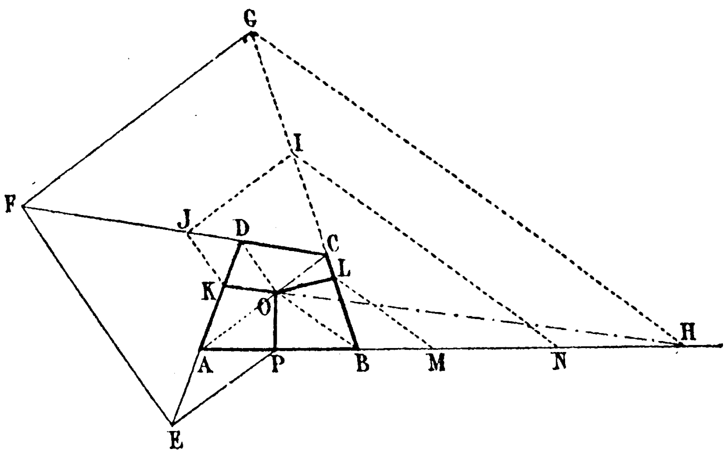


Fig. 1081.

1° Prolongeons chaque côté dans une même direction.

Par le point P, il faut mener une parallèle PE à la droite AO, puis EF parallèle à OD, FG parallèle à OC, et GH parallèle à OB.

Le triangle POH est équivalent au polygone donné.

En effet, le triangle OAE est équivalent à OAP; le triangle EOD peut être remplacé par son équivalent FOD; FOC est équivalent à GOC; GOB est équivalent à HOB; donc HOP est équivalent au polygone donné.

2° Divisons PH en trois parties PM, MN, NH respectivement proportionnelles aux grandeurs $l$, $m$, $n$.

Par N, menons NI parallèle à HG, puis menons IJ et enfin JK.

Dans l'exemple donné, la parallèle ML rencontre le côté BC.

Il faut prouver que les trois parties du quadrilatère sont équivalentes aux triangles OPM, OMN et ONH.

Or le triangle OBL est équivalent à OBM;

donc $$\text{OPBL} = \text{OPM}.$$

De même $\text{OBN} = \text{OBI}$; $\text{OCI} = \text{OCJ}$; $\text{ODJ} = \text{ODK}$;

donc $$\text{OPBCDKO} = \text{OPN},$$

et ainsi de suite, quel que soit le nombre de parties.

**1673 a. Note**. La belle solution d'EUZET a été publiée en 1854, dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, page 114. Depuis, elle a été retrouvée par M. D'OCAGNE, voir *Journal de Mathémathiques Bourget,* 1878, p. 332, et 1880, p. 487; puis *Mathesis,* 1881, p. 109.

M. D'OCAGNE, aujourd'hui *ingénieur des ponts et chaussées,* a pleinement justifié, par les ouvrages remarquables qui lui sont dus, les espérances que faisaient naître les articles qu'il publiait même avant son entrée à l'École Polytechnique, soit dans le *Journal de Mathématiques de M. Bourget,* soit dans les *Nouvelles Annales de mathématiques.*

### Problème 593. — I.

**1674.** *Trouver dans l'intérieur d'un triangle un point tel qu'en abaissant de ce point des perpendiculaires sur les côtés, on divise le triangle en trois quadrilatères proportionnels à* m, n, p. (LEZ, *N. A.*, 1879, p. 432.)

Le point s'obtient par l'intersection de deux hyperboles. (MORET-BLANC, *N. A.*, 1880, p. 462.)

Lorsque $m = n = p$, on a le *Problème de Bobillier.*

Voir d'ailleurs *E. de G.*, nº 1624 **a**.

### Problème de Gergonne 593. — II.

**1674 a.** *Diviser un cercle en parties ayant même périmètre, en n'employant que des demi-circonférences.*

1º *Les parties doivent être équivalentes.*

2º *Le cercle doit être divisé en moyenne et extrême raison.*
(Nº 1581.)

*Annales de Gergonne,* tome I, 1810-1811, pages 159 et 240, solution de LHUILIER, et tome VI, 1815-1816, solution générale de GERGONNE.

## Note sur la division des polygones.

**1674 b.** Diviser un polygone en deux parties qui soient dans un rapport donné, par une droite qui rencontre deux côtés du polygone, peut se ramener à couper les côtés d'un angle donné XOY par une droite MN qui détermine un triangle MON ayant une aire donnée $2k^2$.

D'après une propriété de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, on reconnaît que MN doit être tangente à l'hyperbole $xy = k^2$.

On peut considérer trois cas :

1º La droite MN doit être parallèle à une droite donnée.

2º La droite doit passer par un point donné.

3º La droite de division doit être de longueur minima; dans ce cas, c'est la tangente au sommet.

Dans ces trois circonstances on peut mener MN sans recourir à la construction de la courbe (nºs 1618, 1663 **a** et **b**); mais la considération de l'hyperbole n'en est pas moins utile pour entrevoir la solution, lorsqu'on impose d'autres conditions, ainsi que cela a lieu dans le *problème de Huygens.*

**1674 c.** *Problème de Huygens*, vers 1650.

*Une première droite* DE *divise le triangle* ABC; *mener* MNP *telle que chaque partie* DBE, ADEC *soit divisée en deux parties équivalentes.*

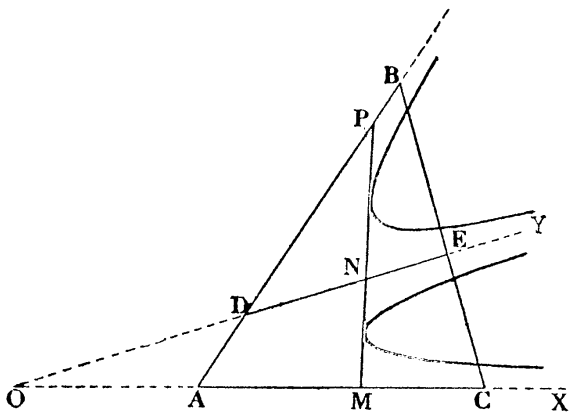



Fig. 1081 *bis*.

La tangente commune à deux hyperboles répond à la question. D'une manière générale, le problème de mener une tangente commune à deux hyperboles est du quatrième degré; mais dans le cas actuel, les deux courbes ont une asymptote commune OY et le problème descend au second degré; par suite, on peut déterminer la tangente avec la règle et le compas.

*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1907, p. 126, n° 3232, D.-J. KORTEWEG d'Amsterdam.

En posant :

$$AB = a,\quad BC = b,\quad AC = c,\quad BD = d,\quad BE = e,\quad AM = x,$$

$$4d - 2a - \frac{d^2}{a} - \frac{de}{b} = f \quad \text{et} \quad \frac{a}{2} - \frac{de}{2b} = g,$$

on arrive à l'équation $fx^2 + 2(a-d)cx - c^2g = 0.$

(*I. M.*, 1908, p. 186. H. BROCARD.)

*Remarque.* On peut déterminer DE en imposant une des conditions ci-dessus 1°, 2° ou 3°, et le *problème de Huygens* devient assez facile à résoudre, mais il n'en est plus de même de la question suivante, due à LEIBNIZ.

**1674 d.** *Partager un triangle quelconque en quatre parties équivalentes par deux droites perpendiculaires entre elles.* (Traité de Géométrie, ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, septième édition, p. 416, n° 453.)

Le problème de LEIBNIZ a provoqué un grand nombre de tentatives, mais on ne peut point le résoudre à l'aide de la règle et du compas; c'est donc en vain qu'on l'a proposé dans diverses publications élémentaires, sans avoir cherché à le résoudre soi-même. Désireux de mettre fin à de stériles recherches, l'*Intermédiaire des Mathématiciens* a publié d'importants articles sur la question (1894, p. 39, *historique* par M.-E. LEMOINE; p. 55 à 62, étude mathématique par l'amiral E. DE JONQUIÈRES; p. 135, recherche dans les œuvres de LEIBNIZ, par GINO-LORIA, de Gênes).

## MAXIMA ET MINIMA

### Polygones.

#### Problème 594.

**1675.** *Quel est le plus grand des triangles qui ont même base* b *et même angle* B *opposé à cette base?*

Le triangle est maximum lorsque le sommet est au point milieu de l'arc capable de l'angle au sommet.

**Problème 595.**

**1676.** *De tous les triangles qui ont même base et même périmètre, quel est celui dont la surface est maxima?*

Considérons deux triangles ABC et ABD, l'un quelconque et l'autre isocèle, et tels que

$$AD + DB = AC + CB.$$

Par les sommets C et D, menons des parallèles CE, DF à la base du triangle.

Par rapport à CE, déterminons le symétrique M du point B; et par rapport à DF, le symétrique N du même point B.

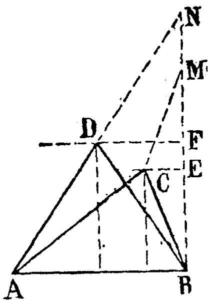


Fig. 1082.

On a : $AC + CM = AC + CB,$

la droite $ADN = AD + DB;$

d'où $AN = AC + CM;$

donc la ligne brisée $AC + CM$, qui égale la droite AN, doit aboutir à un point M situé entre B et N, sans quoi elle serait plus grande que AN; donc BN, double de la hauteur du triangle isocèle, est plus grand que BM, double de la hauteur de l'autre triangle; *ainsi le triangle isocèle a la surface maxima.*

*Autre démonstration.* La surface d'un triangle ayant $a$, $b$, $c$ pour côtés est donnée par $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. (1)

Deux des facteurs $p$ et $(p-a)$, par exemple, sont invariables, tandis que $b$ et $c$ varient, mais ont une somme constante; donc le produit (1) sera maximum lorsqu'on aura $b = c$. Ainsi le triangle doit être isocèle.

**Problème 596.**

**1677.** *De tous les triangles ayant même surface, quel est celui qui a le plus petit périmètre?*

Soit A un triangle quelconque. Soient B et C deux triangles équilatéraux : l'un isopérimètre avec A, et l'autre équivalent à A. Appelons $2p$ le périmètre commun aux deux triangles A et B, et $2p'$ le périmètre du triangle C.

Les deux triangles A et B étant isopérimètres, c'est le triangle équilatéral B qui est le plus grand. On a donc $A < B$, et comme $A = C$, on a aussi $C < B$; d'où $2p' < 2p$.

Ainsi le triangle équilatéral C a un périmètre moindre que tout triangle irrégulier équivalent. Donc, *de tous les triangles ayant même surface, c'est le triangle équilatéral qui a le plus petit périmètre.*

**Problème 597.**

**1678.** *De tous les triangles isopérimètres, quel est le plus grand en surface?*

1re *Démonstration.* Soient $x$, $y$, $z$ les trois côtés variables, $2p$ le périmètre constant, et S la surface variable. On a $x + y + z = 2p$, somme constante.

La surface $S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$.

Or $(p-x)+(p-y)+(p-z)=p$; donc le maximum du produit a lieu lorsque les facteurs sont égaux entre eux, donc

$$p-x=p-y=p-z.$$

Le triangle est équilatéral et $x=y=z=\frac{2p}{3}$.

2° *Démonstration.* Admettons momentanément qu'un des côtés, $x$, par exemple, soit invariable. La somme des deux autres côtés $y+z$ serait constante; elle égalerait $2p-x$; donc le triangle devait être isocèle (n° 1676); d'où $y=z$. Mais lorsque $x$ diffère de $y$, le triangle obtenu n'est pas le plus grand possible, puisque le triangle isocèle qui aurait $z$ pour côté invariable et deux autres côtés égaux entre eux et égaux à $\frac{2p-z}{2}$ serait plus grand; donc il faut que les trois côtés soient égaux entre eux.

### Problème 597. — I.

**1679.** *Couper les côtés d'un angle* XOY *par une droite* BC *parallèle à une ligne donnée* MN, *de manière que le triangle* ABC, *formé en joignant* B *et* C *à un point* A *fixe donné pour sommet, ait une aire maxima.*

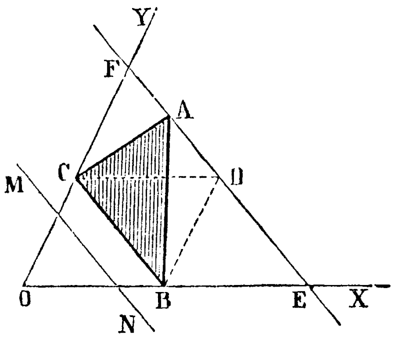


Fig. 1083.

Soit ABC le maximum demandé; en menant par le point A une parallèle EF à MN, les triangles qui auront BC pour base et le sommet sur EF seront équivalents. Or le parallélogramme maximum inscrit DBOC s'obtient en menant par le point D milieu de EF des parallèles à OX et à OY, et le triangle CDB ou son équivalent ABC est la moitié du parallélogramme OBDC; donc, par le point A, il faut mener une parallèle à MN et joindre le sommet donné aux points B et C milieux de OE et de OF.

### Problème 597. — II.

**1680.** *D'un point* O *pris sur la base d'un triangle quelconque* ABC, *on abaisse des perpendiculaires* OM, ON *sur les côtés du triangle; pour quelle position du point* O *le triangle* MON *est-il maximum?*

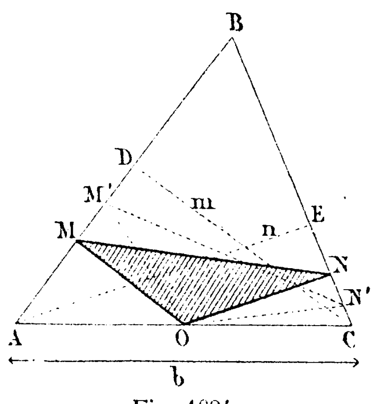


Fig. 1084.

1° Lorsque le point mobile est en A ou en C, le triangle est nul; il y a donc un maximum pour une des positions intermédiaires.

2° L'angle MON est constant, car il est le supplément de l'angle B; or les triangles qui ont un angle égal sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle (G., n° 329); il suffit donc d'étudier la variation du produit OM . ON.

3° Exprimons OM, ON en fonction de lignes connues, et des distances AO, CO. Pour cela, menons les perpendiculaires CD ou $m$ et AE ou $n$.

On a : $$\frac{OM}{m} = \frac{AO}{b}; \quad OM = \frac{m}{b} . AO;$$

$$\frac{ON}{n} = \frac{CO}{b}; \quad ON = \frac{n}{b} . CO;$$

$$OM . ON = \frac{mn}{b^2} . AO . CO.$$

La variation du produit OM . ON ne dépend que de AO . CO.
Le maximum a donc lieu lorsque AO = CO (n° 343).

*Remarques.* 1° Le problème ci-dessus (n° 1680) est le complément d'un problème déjà résolu (n° 1625).

2° On peut arriver rapidement au résultat précédent, en s'appuyant sur un principe connu. (*Méthodes*, n° 346, *cinquième principe*.)

**Problème 597. — III.**

**1681.** *Pour un point fixe* O *donné sur* AC, *quel est le triangle minimum, lorsque l'angle* MON *pivote autour de son sommet?*

C'est le triangle MON formé par les perpendiculaires OM, ON (fig. 1084); car, pour toute autre position M'ON', l'oblique OM' est > OM, et de même ON' > ON.

**Problème 597. — IV.**

**1682.** *D'un point* O *pris sur la base d'un triangle quelconque, on mène des lignes* OM, ON *parallèles à deux droites données; pour quelle position du point* O *le triangle* MON *est-il maximum?*

Pour le point O milieu de la base.

**Problème 597. — V.**

**1682 a.** *Couper un espace angulaire* XAY *par une droite* BC, *de manière que le triangle* ABC *ait une aire donnée* $k^2$ *et que la droite* BC *soit minima.*

Le triangle BAC doit être isocèle, alors la base BC est minima.
Soit un autre triangle MAN ayant même surface $k^2$, mais à côtés inégaux AM, AN.

On a : $$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \qquad (1)$$

$$MN^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos A; \qquad (2)$$

mais $bc = mn$, puisque les triangles sont équivalents, car ces triangles, ayant même angle au sommet A, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle; ainsi $BC^2$ et $MN^2$ ne peuvent différer que par la somme des carrés $b^2 + c^2$ et $m^2 + n^2$; or la première somme est moindre que la seconde (n° 346, *quatrième principe*); donc

$$BC < MN.$$

### Problème 597. — VI.

**1682 b.** *Diviser un triangle ABC en deux parties équivalentes par la ligne la plus courte possible.*

Soit $ABC = 2a^2$; il faut que l'aire de $AMN = ADE = a^2$, en admettant que chacun de ces triangles soit la moitié de ABC; la droite la plus courte MN est la base d'un triangle isocèle.

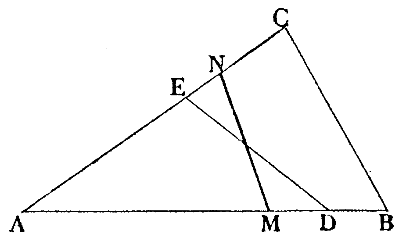


Fig. 1084 *bis*.

Soit donc $AM = m$,

$AN = n$, $AD = d$, $AE = e$.

Les triangles qui ont un angle commun sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle; donc $mn = de$.

Or
$$MN^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos A, \qquad (1)$$
$$DE^2 = d^2 + e^2 - 2de \cos A. \qquad (2)$$

Mais la somme des carrés est minima lorsque les deux parties sont égales entre elles (n° 346); ainsi
$$m^2 + n^2 < d^2 + e^2.$$

Mais $mn = de;$ donc $MN < DE$.

Pour déterminer les côtés du triangle isocèle AMN, on a :
$$AM \,.\, AN \,.\, \sin A = a^2, \quad \text{d'où} \quad AM^2 = \frac{a^2}{\sin A}; \qquad (3)$$
$$MN^2 = 2AM^2 - 2AM^2 \cos A = 2AM^2 (1 - \cos A). \qquad (4)$$

**1682 c.** *Remarque.* Chaque angle donne lieu à une droite minima; parmi ces trois lignes, la plus courte correspond au plus petit angle.

En effet, soit $\alpha$ l'angle au sommet d'un triangle isocèle, $h$ la hauteur qui part de ce sommet et $b$ la base, $a^2$ l'aire du triangle; on a :
$$bh = 2a^2 \quad \text{et} \quad \text{tang}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2h}.$$

L'angle $\dfrac{\alpha}{2}$ peut varier de 0° à 90°, elle croît constamment; donc $b$ augmente en même temps que l'angle au sommet; par suite, la base ou MN est minima dans l'angle le plus petit de ABC.

**1682 d. Note.** La question a été posée par M. H. LAURENT (*Algèbre*, tome I, page 191), et rappelée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1902, page 33, n° 2275, par M. C. WARGNY, de Valparaiso.

* C. WARGNY, professeur à l'École militaire du CHILI, auteur de divers ouvrages estimés, et notamment d'un *Traité de Trigonométrie* fort remarquable.

### Problème 598.

**1683.** *De tous les rectangles dont le périmètre est constant, quel est celui dont la surface est maxima?*

Ou bien : *Quel est le maximum du produit de deux facteurs dont la somme est constante?*

(Voir *Méthodes*, n° 343.)

**Problème 599.**

**1684.** *De tous les rectangles dont la surface est constante, quel est celui dont le périmètre est minimum?*

Ou bien : *Quel est le minimum de la somme de deux facteurs dont le produit est constant?*

(Voir *Méthodes*, nº 344.)

**Problème 600.**

**1685.** *De tous les rectangles dont la somme des carrés des deux côtés adjacents est constante, quel est celui dont la surface est maxima?*

Ou bien : *Quel est le maximum du produit de deux facteurs dont la somme des carrés est constante?*

(Voir *Méthodes*, nº 345.)

**Problème 601.**

**1686.** *De tous les rectangles dont la surface est constante, quel est celui dont la somme des carrés de deux côtés adjacents est minima?*

Ou bien : *Quel est le minimum de la somme des carrés de deux facteurs dont le produit est constant?*

(Voir *Méthodes*, nº 346.)

**Problème 601. — I.**

**1687.** *Une droite de longueur donnée a est divisée en deux parties sur chacune desquelles on construit un carré; quelles sont les variations de la somme de ces carrés?*

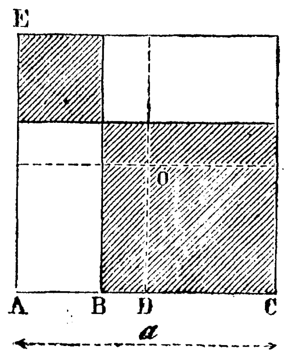


Fig. 1085.

Soient : $AB = x$, et $BC = y$;

on a : $$x + y = a.$$

Sur AC construisons un carré ; on a :

$$a^2 = x^2 + y^2 + 2xy;$$

d'où $$x^2 + y^2 = a^2 - 2xy.$$

Donc la somme des carrés ou $a^2 - 2xy$ atteint son maximum lorsque $2xy$ est minimum, et réciproquement. Or le minimum de $xy$ a lieu lorsqu'un des facteurs est nul dans ce cas $$x = a; \quad x^2 = a^2.$$

Le maximum de $xy$ a lieu lorsque

$$x = y = \frac{a}{2}; \quad \text{donc...}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Ainsi, quand on divise la droite en deux parties égales, la somme des carrés est minima; elle égale $\frac{a^2}{2}$, puis elle augmente, et, quand une des divisions est nulle, le carré restant égale $a^2$.

*Remarques.* 1° Conformément à l'énoncé, on divise la droite AC en deux parties dont la somme égale $a$. Dans le cas où le point B serait pris sur le prolongement de la droite limitée AC, on aurait :

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy;$$

d'où
$$x^2 + y^2 = a^2 + 2xy.$$

La somme $x^2 + y^2$ croît indéfiniment, car chaque quantité $x$ et $y$ croît indéfiniment.

2° On arrive plus rapidement à déterminer le *minimum* de la somme des carrés en s'appuyant sur un principe connu. *Le minimum de la somme de deux carrés dont la somme des côtés est constante, a lieu lorsque les carrés sont égaux entre eux.*

D'ailleurs prenons pour côtés des carrés $\frac{a}{2} + z$, et $\frac{a}{2} - z$.

La somme des carrés égale $2\left(\frac{a^2}{4} + z^2\right)$;

donc le minimum a lieu quand $z$ est nul, c'est-à-dire quand

$$x = y = \frac{a}{2}.$$

**Problème 602.**

**1688.** *En menant deux droites égales entre elles et parallèles à l'une des diagonales d'un rectangle, on forme des parallélogrammes inscrits; quel est le parallélogramme maximum?*

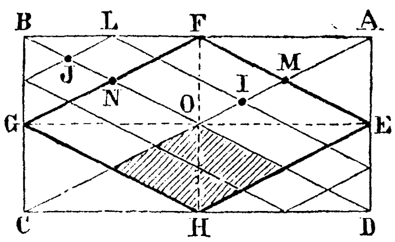


Fig. 1086.

Il suffit de considérer le quart ILJ du parallélogramme; le maximum a lieu pour le point F milieu de AB (nos 349 et 351). Le losange inscrit EFGH est donc maximum.

**Problème 603.**

**1689.** *Construire un rectangle maximum, connaissant la somme de trois côtés.*

Soit ABCD le rectangle demandé, tel que $AD + AB + BC = MN = l$, longueur donnée.

En doublant le rectangle, on aura :

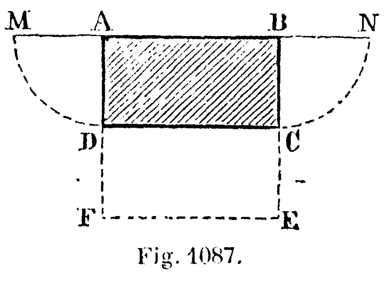


Fig. 1087.

$$2(AB + BE) = 2l,$$

ou
$$AB + BE = l.$$

On est ramené à construire le rectangle maximum ABEF, lorsqu'on connaît la somme de deux côtés adjacents; on sait que le *carré* répond à la question; donc

$$AB = BE = \frac{l}{2};$$

par suite
$$BC = AD = \frac{1}{2} BE = \frac{l}{4}.$$

Le maximum est la moitié d'un carré, et la somme $AD + BC$ des deux côtés opposés égale la base AB.

$$S = \frac{l}{2} \times \frac{l}{4} = \frac{l^2}{8}.$$

*Remarques.* 1° En représentant BC par $x$, on a :

$$AB = l - 2x,$$

la surface égale $(l - 2x)x$. (1)

Or le maximum a lieu lorsque $x = \frac{l}{4}$ ;

alors $S = \left(l - \frac{l}{2}\right) \frac{l}{4} = \frac{l^2}{8}$.

2° Nous n'indiquons pas l'emploi de la *méthode algébrique,* car elle n'offre aucune difficulté; mais d'une solution purement géométrique nous déduisons la valeur du maximum.

Le problème que l'on vient de résoudre (n° 1689) a été traité en vue de l'exercice suivant (n° 1690).

**Problème 604.**

**1690.** *On a un rectangle* ABCD; *on en parcourt le périmètre en prenant, à partir de chaque sommet et dans le même sens, une même longueur; ainsi on prend* $AE = BF = CG = DH$ ; *dans quel cas le parallélogramme obtenu* EFGH *est-il minimum?*

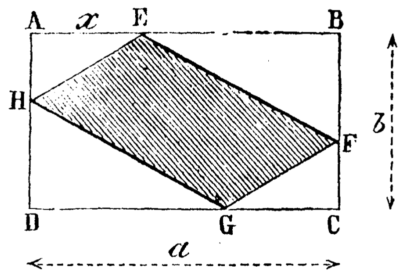


Fig. 1088.

Soient $AB = a$, $BC = b$
et $AE = BF \ldots = x$.

Le minimum du parallélogramme a lieu quand la somme des quatre triangles retranchés atteint son maximum.

Or les deux triangles égaux EBF, GDH ont pour somme $(a - x)x$; les deux autres ont pour somme $(b - x)x$.

Les deux groupes réunis ont pour somme $(a + b - 2x)x$ (2), et l'on obtient une équation analogue à l'équation connue (1) du n° 1689.

Le double de (2) serait $(a + b - 2x) \times 2x$.

Or $a + b$ est encore une quantité constante; donc les deux facteurs $(a + b - 2x)$ et $2x$ ont une somme constante, et le maximum du produit a lieu quand $a + b - 2x = 2x$; d'où $x = \frac{a + b}{4}$ ; ainsi le maximum de la somme des quatre triangles a lieu lorsque $x = \frac{a + b}{4}$.

$$(a + b - 2x)x = \left(a + b - \frac{a + b}{2}\right) \frac{a + b}{4} = \frac{(a + b)^2}{8}.$$

Le parallélogramme égale :

$$ab - \frac{(a + b)^2}{8} = \frac{8ab - a^2 - 2ab - b^2}{8},$$

$$P = \frac{6ab - a^2 - b^2}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{4ab - (a - b)^2}{8}.$$

**1690 a.** *Discussion.* Il y a trois cas à examiner :

1° Soit : $$\frac{a+b}{4} < b.$$

On peut prendre sur les petits côtés du rectangle la longueur $\frac{a+b}{4}$ qui correspond au minimum.

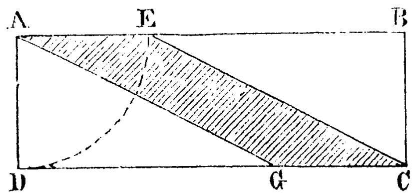


Fig. 1089.

2° Soit : $$\frac{a+b}{4} = b;$$

on en déduit : $a = 3b$.

On peut encore prendre sur BC la longueur $\frac{a+b}{4}$.

Le parallélogramme minimum a deux côtés sur AB et CD (fig. 1089).

3° Soit : $$\frac{a+b}{4} > b.$$

Au point de vue géométrique, le minimum s'obtient encore en prenant :

$$AE = CG = b;$$

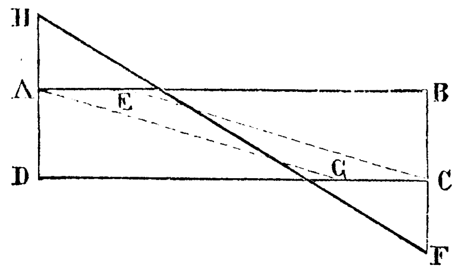


Fig. 1090.

mais la courbe qui représenterait la marche de la fonction n'aurait pas de minimum en ce point; elle descendrait encore pour des valeurs de $x > b$, jusqu'à

$$x = \frac{a+b}{4} = BF.$$

On n'a plus alors qu'une droite FGEH (fig. 1090), le parallélogramme intérieur est nul; en réalité, le triangle CFG est soustrait de BEF.

### Problème 604. — I.

**1691.** *On donne un point* B *et une droite* AC *déterminée de longueur et de position; par le point* B *on mène une sécante, et sur cette droite, des points* A *et* C, *on abaisse des perpendiculaires* AD, CE; *quel est le trapèze maximum qu'on peut former ainsi?*

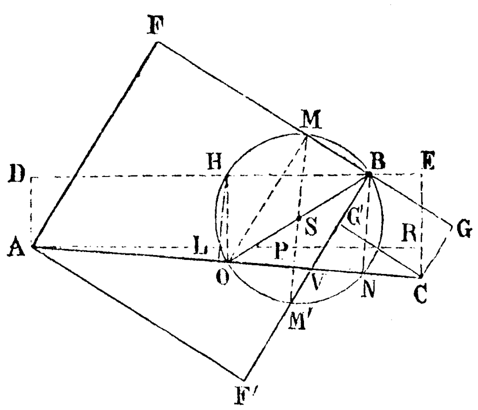


Fig. 1091.

Soit DE une sécante; du milieu de AC abaissons la perpendiculaire OH, ce sera la base moyenne; puis du point H abaissons HL perpendiculaire sur AC, et menons AR parallèle à DE.

L'aire est donnée par $OH \times DE$ ou par $AC \times LH$ (n° 1566); car les triangles semblables HOL, ACR donnent :

$$\frac{OH}{HL} = \frac{AC}{DE};$$

d'où $$AC \times HL = OH \times DE.$$

Or AC est constant; le maximum ne dépend donc que de la perpendiculaire HL abaissée sur AC du point milieu de la hauteur du trapèze.

Or le milieu H appartient à la circonférence décrite sur le diamètre OB.

La perpendiculaire PSM, menée par le centre S de cette circonférence, donne donc le maximum.

Le point B étant donné de position, les distances BN et ON sont connues; soient $BN = b$ et le diamètre $OB = a$; on trouve :

$$PM = \frac{a+b}{2}.$$

Soit $AC = 2d$; donc l'aire du trapèze maximum égale $d(a+b)$.

*Remarque.* A la perpendiculaire PM′, correspond un autre maximum; BM′ coupe le diamètre, et le trapèze est remplacé par la différence des deux triangles AVF′ et VCG′. La différence égale :

$$AC \times PM' = 2d\left(\frac{a-b}{2}\right) = d(a-b).$$

On peut énoncer le problème suivant :

*Par le point* B *on mène une corde qui coupe un diamètre fixe* AC; *des extrémités du diamètre on abaisse des perpendiculaires sur la corde. Pour quelle position de la corde la différence des triangles formés est-elle maxima ?*

**Problème 605.**

**1692.** *A un rectangle* ABCD, *circonscrire le rectangle maximum; exprimer ce maximum en fonction des côtés* a *et* b *du rectangle primitif.*

Le problème revient à la question précédente (nº 1691).

Sur OB décrivons une circonférence; par le centre L, menons la perpendiculaire MN sur AC; joignons le point B au point N; des points A et C, abaissons des perpendiculaires sur BN, et EBNF est le côté cherché, car le trapèze AEFC est maximum; or le rectangle circonscrit en est le double.

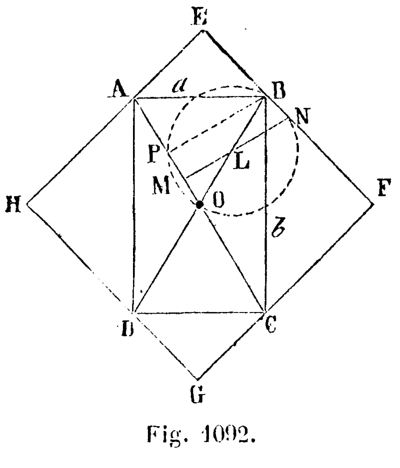


Fig. 1092.

En désignant par $a$ et $b$ les côtés du rectangle primitif, on a :

$$AC = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Soit $AC = d$, $BL = \frac{d}{4}$,

$$BP \,.\, d = ab, \quad \text{d'où} \quad BP = \frac{ab}{d};$$

d'ailleurs $$MN = ML + LN = \frac{BP}{2} + LB = \frac{ab}{2d} + \frac{d}{4}.$$

L'aire du trapèze AEFC étant donnée par $AC \times MN$, celle du rectangle circonscrit, étant le double, sera :

$$2d\left(\frac{ab}{2d}+\frac{d}{4}\right) \quad \text{ou} \quad d\left(\frac{2ab+d^2}{2d}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{2ab+d^2}{2}.$$

En remplaçant $d^2$ par sa valeur $a^2 + b^2$, on trouve :

$$S = \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Réciproquement. *Un angle droit* BAD *pivote autour d'un point donne* A (fig. 1092); *ses côtés coupent deux parallèles* EF, HG *et donnent lieu à un triangle rectangle inscrit* BAD. *Pour quelle position de l'angle le triangle obtenu est-il minimum?*

En abaissant la perpendiculaire AEH sur les parallèles, il faut prendre $EB = EA$; alors aussi $HD = HA$.

## Figures inscrites ou circonscrites au Cercle.

### Problème 606.

**1693**. *Inscrire dans un cercle le rectangle maximum.*

1° La question dépend du troisième principe (n° 345).

2° La tangente donne une solution très simple (n° 350).

3° L'étude directe n'offre aucune difficulté.

### Problème 607.

**1694**. *Aux extrémités* A *et* B *d'un diamètre, on élève deux perpendiculaires, et l'on mène une tangente* DC *limitée à ces deux lignes. Quel est le minimum du trapèze* ABCD *circonscrit au demi-cercle?*

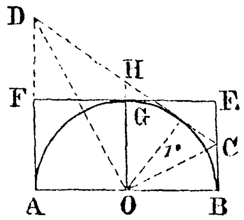


Fig. 1093.

Le rayon du point de contact et les droites OC, OD divisent le trapèze en quatre triangles égaux deux à deux; donc COD est la moitié du trapèze, et l'aire de la figure totale $= DC \cdot r$.

Donc le minimum de la surface a lieu pour le minimum de la tangente CD. Il suffit que cette dernière EF soit parallèle au diamètre. Le demi-carré circonscrit AFEB est le minimum.

*Remarques*. 1° En vertu d'une question connue (n° 1566), il faut et il suffit que OH soit minimum, c'est-à-dire égal au rayon.

2° *De l'étude de la surface minima du trapèze circonscrit on déduit très facilement le périmètre minimum du trapèze circonscrit.*

En effet, $$\text{surface ADCB} = \frac{r}{2}(AD + DC + CB),$$

$$\text{surface AFEB} = \frac{r}{2}(AF + FE + BE).$$

Or la surface AFEB est plus petite que ADCB; donc le périmètre $(AF + FE + BE)$ est plus petit que $(AD + DC + CB)$.

Ainsi le polygone circonscrit de surface minima est en même temps le polygone circonscrit de périmètre minimum.

Il en est de même dans les questions suivantes (n^os^ 1695, 1699, 1707).

**Problème 607. — I.**

**1695.** *Étudier les variations de la surface d'un trapèze isocèle circonscrit à un cercle donné.* (Bacc. Paris, 1878.)

Cette question revient à la précédente; on peut la traiter très simplement, comme il suit :

La parallèle LP menée par le centre est la base moyenne; donc

$$\text{surface} = MN \,.\, LP.$$

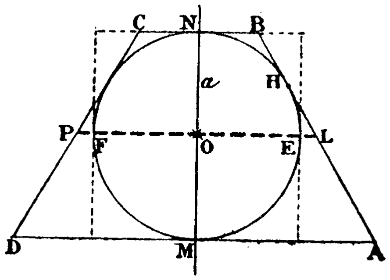


Fig. 1094.

PL ou $2 \,.\, OL$ est la seule variable; donc l'aire augmente avec l'inclinaison du côté AB.

Le minimum a lieu quand le trapèze devient un carré.

Alors $$\text{surface} = 4a^2.$$

**Problème 607. — II.**

**1695 a.** *Construire un trapèze isocèle circonscriptible, connaissant le rayon du cercle inscrit et le périmètre.*

Soit $8p$ le périmètre.

On a : $$AH = AM, \quad BH = BN.$$

Donc $$AM + BN = AB = \frac{8p}{4} = 2p.$$

Donc la base moyenne $OL = p$.

Ainsi, on prend OL égal au huitième du périmètre, et par le point L on mène une tangente.

**Problème 607. — III.**

**1696.** *Par un point extérieur donné* A, *mener une sécante* ABC *telle que le triangle* BOC, *formé par la corde et ayant son sommet au centre, soit maximum.*

L'aire s'obtient en multipliant le rayon BO par la perpendiculaire CD; donc le maximum a lieu quand l'angle BOC est droit, car alors

$$CD = CO.$$

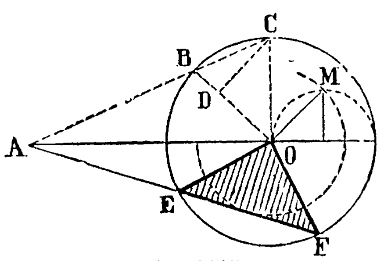


Fig. 1095.

Alors EF est le côté du carré inscrit; il faut mener une tangente AEF à la circonférence décrite du centre O avec $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ pour rayon.

**Problème 607. — IV.**

**1697.** *Par un point donné* A, *mener une sécante* ABC *telle que le quadrilatère formé en joignant les extrémités de la corde aux extrémités du rayon* OD *qui lui est perpendiculaire, ait une aire maxima.*

Soient BC la corde interceptée par la sécante ABC, et OD le rayon qui lui est perpendiculaire.

La surface $= \dfrac{OD \times BC}{2}$ ou $\dfrac{r \times BC}{2}$; donc elle sera maxima en même temps que la corde BC.

Il faut donc mener un diamètre, et le triangle obtenu $= r^2$.

### Problème 607. — V.

**1697 a.** *Étudier les variations de l'aire d'un quadrilatère inscrit dans un cercle donné, lorsque les diagonales sont orthogonales et que leur point de concours est fixe et se trouve dans le cercle.*

Soient $2a$, $2b$ les diagonales; $d$ la distance au centre du point de concours, $r$ le rayon du cercle.

La surface du quadrilatère est $2ab$; or, d'après un *théorème d'Archimède*, la somme des carrés de deux cordes rectangulaires est constante (nº 1325).

On a : $4a^2 + 4b^2 = 8r^2 - 4d^2$, ou $a^2 + b^2 = 2r^2 - d^2$.

Mais ce produit de deux facteurs dont la somme des carrés est constante est maximum quand ces facteurs sont égaux entre eux (nº 345, troisième principe).

Donc le maximum a lieu quand les diagonales sont égales, et le minimum quand elles diffèrent de longueur, autant qu'il est possible.

Dans le premier cas, les diagonales sont également inclinées sur le diamètre qui passe par le point fixe; chaque demi-diagonale

$$a = b = \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{2}}.$$

Le quart de la surface $ab = r^2 - \dfrac{d^2}{2}$ *maximum.*

Dans ce second cas, une des diagonales est le diamètre qui passe par le point donné; l'autre diagonale a pour moitié $\sqrt{r^2 - d^2}$.

Le quart de la surface $ab = r\sqrt{r^2 - d^2}$ *minimum* (Voir nº 1700).

### Problème 608.

**1698.** *Sur les deux parties* AB, BC *du diamètre d'une demi-circonférence* ADC, *on décrit des demi-circonférences. Quel est le maximum de l'espace* DEF *compris entre les trois arcs?*

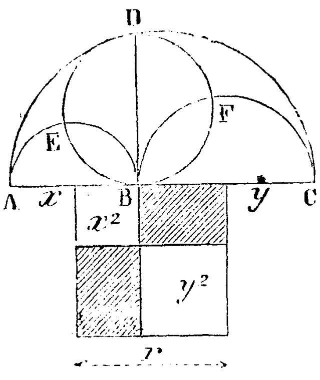


Fig. 1096.

1er *Moyen.* Les demi-cercles étant proportionnels aux carrés de leurs rayons, il suffit de comparer les carrés $x^2$, $y^2$ et $r^2$.

Le maximum de $r^2 - (x^2 + y^2)$ a lieu quand la somme $x^2 + y^2$ est minima; et comme $x + y = r$, il faut que $x = y$ (nº 1687).

Dans ce cas, $x^2 + y^2 = \dfrac{r^2}{2}$, et le reste égale $r^2 - \dfrac{r^2}{2} = \dfrac{r^2}{2}$. L'espace DEF est équivalent à la somme des deux demi-cercles égaux décrits sur chaque moitié de AC.

2e *Moyen*. On sait que l'espace curviligne considéré, ou *arbelo d'Archimède*, est équivalent au cercle qui aurait pour diamètre la perpendiculaire BD (no 1579); donc le maximum a lieu quand le point B coïncide avec le point O milieu de AC.

**Problème 608. — I.**

**1699.** *Circonscrire à une circonférence un losange dont l'aire soit minima.*

1o Il suffit de s'occuper du quart du losange.

Or le minimum a lieu pour la tangente ABC divisée en deux parties égales par le point de contact. (*Méthode*, no 367.)

*Le carré circonscrit est le losange minimum demandé.*

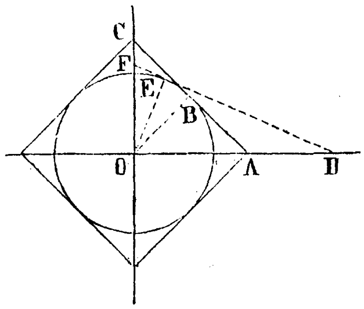


Fig. 1097.

2o On peut encore dire : L'aire du quart du losange égale $DF \times \frac{r}{2}$; elle varie donc avec DF. Or $DE \times EF = r^2$; donc le minimum de la somme DF des deux segments a lieu lorsqu'ils sont égaux entre eux.

**Problème 608. — II.**

**1699 a.** *A un cercle donné, circonscrire un losange de surface donnée.*

Représentons par $k^2$ la moitié de la surface donnée, et par $r$ le rayon; on aura :

$$OE \,.\, DF = k^2, \quad DF = \frac{k^2}{r}.$$

Ainsi la longueur de la tangente DF est connue, et le problème est ramené au suivant :

**Problème 608. — III.**

**1699 b.** *Construire un losange, connaissant le côté et le rayon du cercle inscrit;* ou bien : *Construire un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et la hauteur.*

Pour résoudre la question, on peut recourir au problème contraire ou à la méthode algébrique.

1o Le problème contraire consiste à construire un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse DF et la hauteur OE (no 214).

2o Par la méthode algébrique, on peut déterminer les segments DE, EF, et par suite OD et OF. En effet, on connaît la somme $\frac{k^2}{r}$ et le produit $k^2$ des deux segments.

3o Le *problème de Gerbert* (voir ci-après, no 1722) fait connaître directement OD et OF.

### Problème 609.

**1700.** *Une circonférence* O *et un point* A *étant donnés, mener par ce point deux droites rectangulaires telles que le quadrilatère inscrit qui aurait les deux cordes pour diagonales ait une aire maxima* (Voir n° 1697 **a**).

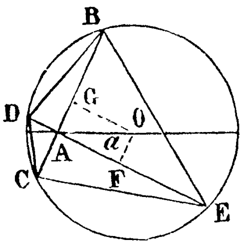



Fig. 1098.

Soit le problème résolu ; l'aire du quadrilatère est donné par $\dfrac{BC \times DE}{2}$ ou par $2BG \times FE$.

Le maximum de l'aire a lieu pour le maximum du produit des carrés des facteurs variables BG et EF.

Il suffit donc d'étudier $GB^2 \times FE^2$,

ou $(r^2 - OG^2)(r^2 - OF^2)$.

Mais les deux facteurs ont une somme constante $2r^2 - a^2$, car $OG^2 + OF^2 = a^2$ ; donc le maximum a lieu lorsque ces facteurs sont égaux entre eux (n° 1685).

Ainsi $OF^2$ doit égaler $OG^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

*Les cordes sont également inclinées sur le diamètre* AO.

Pour avoir l'aire, on a :

$$BG^2 = FE^2 = r^2 - \frac{a^2}{2};$$

or l'aire $2BG \times FE$ revient, dans ce cas, à $2BG^2 = 2r^2 - a^2$.

*Remarque.* Solution analogue si les diagonales se coupaient sous un angle quelconque invariable de grandeur.

### Problème 610.

**1701.** *Dans un demi-cercle inscrire le quadrilatère d'aire maxima ; le diamètre du demi-cercle doit être un des côtés du quadrilatère.*

On peut obtenir le maximum en regardant d'abord comme constant un des trois côtés inconnus. (*Méthodes,* n° 354.)

### Problème 610. — I.

**1702.** *On donne une droite* xy, *une circonférence et un diamètre fixe* AB. *On mène une corde* CD *parallèle à* xy, *et on élève des perpendiculaires* CE, DF *à la corde. Quel est le trapèze maximum déterminé par la corde et les deux perpendiculaires limitées au diamètre fixe?*

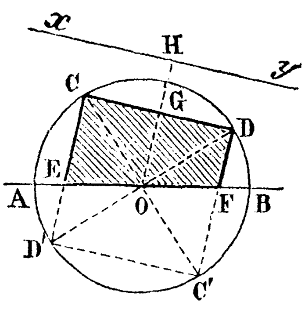



Fig. 1099.

Soit ECDF le trapèze maximum.

1^er^ *Moyen.* En prolongeant CE, DF, on obtient un rectangle double de la surface considérée.

Le rectangle est maximum lorsqu'il est carré.

Alors $OG = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$, $CD = r\sqrt{2}$.

2e *Moyen.* Le trapèze ECDF a pour aire :

$$2 \,.\, CG \times OG\,;$$

le maximum a donc lieu quand les facteurs variables CG et OG sont égaux, car la somme de leurs carrés égale $OC^2$ (nº 1685).

Donc
$$OG = CG = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

*Construction.* Sur la perpendiculaire OH, il faut prendre OG égal à $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

**Problème 611.**

**1703.** *On donne une circonférence, un diamètre fixe* AB *et une direction* xy, *on mène une corde* CD *parallèle à* xy, *on projette les extrémités* C *et* D *sur le diamètre fixe. Quel est le trapèze maximum obtenu?*

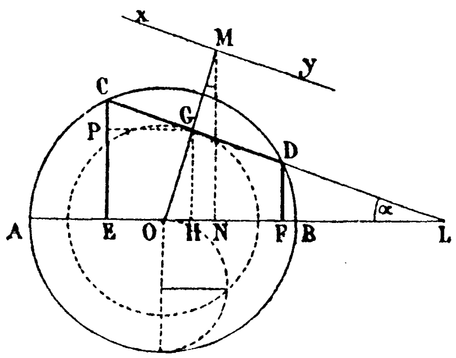


Fig. 1100.

Soit le problème résolu et CD la parallèle demandée. Du centre O, abaissons la perpendiculaire OM sur *xy;* elle passe au point G milieu de la corde CD; abaissons la perpendiculaire GH; on a :

$$GH = \frac{CE + DF}{2}.$$

Puis menons GP, parallèle à AB, cette ligne $= EH = \frac{EF}{2}$.

La moitié de l'aire du trapèze est donnée par $GP \times GH$; mais les triangles OGH, CGP sont semblables; donc

$$\frac{GH}{GP} = \frac{GO}{CG}.$$

Par suite, le maximum du produit $GP \times GH$ aura lieu en même temps que celui de $GC \times GO$.

Or le triangle OGC a le rayon pour hypoténuse constante; le produit des deux côtés est maximum lorsque ces côtés sont égaux entre eux;

donc
$$OG = CG = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Par suite, il suffit de prendre sur OM une grandeur OG égale à $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

**1703 a.** *Remarques.* 1º L'aire du trapèze $= 2PG \times GH$

$$= 2CG \times OG \times \frac{MN^2}{MO^2} = 2\frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{MN^2}{MO^2} = r^2 \times \frac{MN^2}{MO^2}.$$

2° Le rapport de réduction $\frac{MN}{MO}$ dépend de l'inclinaison $\alpha$ et n'est autre que $\cos\alpha$. On a donc pour surface $r^2\cos^2\alpha$.

En employant les formules trigonométriques, on arrive rapidement :

$$GH = OG\cos\alpha\,;\quad GP = CG\cos\alpha\,;$$

donc $$2GH\,.\,GP = 2\,.\,\frac{r}{\sqrt{2}}\,.\,\frac{r}{\sqrt{2}}\cos^2\alpha = r^2\cos^2\alpha.$$

3° Pour une direction donnée, la corde CD du maximum rencontre le diamètre en un point L qui ne dépend que de l'inclinaison de $xy$.

En effet, $$\frac{OL}{OG} = \frac{1}{\sin\alpha}\quad \text{ou}\quad \frac{OL}{\frac{r}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sin\alpha}\,;$$

d'où $$OL = \frac{r}{\sin\alpha\sqrt{2}}.$$

### Problème 611. — I.

**1704.** *On donne deux cercles concentriques; inscrire un rectangle dont l'un des côtés soit une corde d'un des cercles, et le côté opposé une corde de l'autre cercle; la surface du rectangle doit égaler un carré donné* k².

Supposons le problème résolu, $r$, $s$ les rayons des deux cercles.

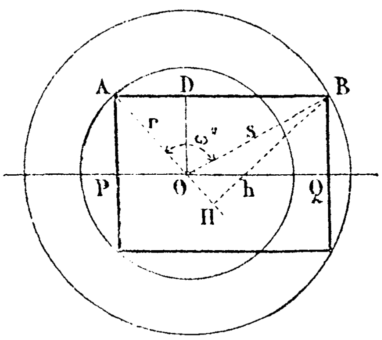



Fig. 1101.

Il suffit de considérer PABQ moitié du rectangle total, ou même le triangle AOB moitié de PABQ.

Ainsi $$AOB = \frac{k^2}{4}.$$

Abaissons la hauteur BH ou $h$; on aura :

$$rh = \frac{k^2}{2}\,;\quad \text{d'où}\quad h = \frac{k^2}{2r}.$$

Ainsi, on peut déterminer la longueur $h$ à l'aide d'une troisième proportionnelle, puis construire un triangle, connaissant la base $r$, la hauteur $h$ et l'un des côtés $s$.

La construction du triangle auxiliaire fera connaître la longueur de OD, et il suffira de mener AB à une distance du centre indiquée par OD.

*Discussion.* La variation du rectangle inscrit dépend de celle du triangle AOB. Or la surface AOB est nulle quand $r$ et $s$ coïncident.

La surface augmente avec l'angle $\omega$ jusqu'à ce que cet angle égale un droit, car alors $h = s$; puis l'angle continuant à croître, la surface diminue et devient nulle lorsque les rayons $r$ et $s$ sont dans le prolongement l'un de l'autre.

*Maximum.* $r$ et $s$ étant perpendiculaires, le double de l'aire

$$AOB = rs = \frac{k^2}{2}.$$

Donc pour le maximum $k^2 = 2rs$.

Alors $AB = \sqrt{r^2 + s^2}$, et $OD = \dfrac{k^2}{2\sqrt{r^2 + s^2}}$.

*Remarque.* Il est plus expéditif d'employer la notation trigonométrique.

Le double de l'aire du triangle est donné par $rs \sin \omega$ ; donc

$$rs \,.\, \sin \omega = \frac{k^2}{2}\,; \quad \text{d'où} \quad \sin \omega = \frac{k^2}{2rs}.$$

### Problème 612.

**1705.** *A un cercle inscrire un triangle dont l'aire soit maxima.*

1er *Moyen.* Il faut que le triangle soit équilatéral. En effet, soit un triangle quelconque ABC. Par le point A, menons une parallèle à BC; si le triangle n'est pas isocèle, la droite AD sera une corde et non une tangente; donc le triangle OBC est plus grand que ABC.

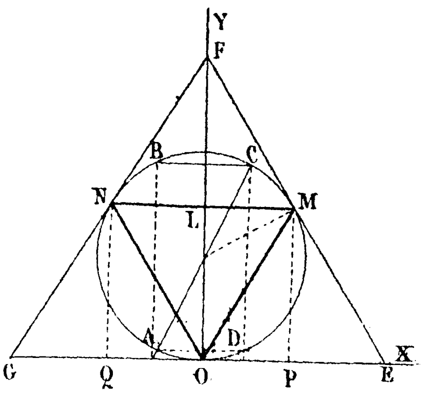


Fig. 1102.

Ainsi OB doit égaler OC.

Par un raisonnement analogue, on démontre que, par rapport à la base OB, il faut que $OC = BC$; ainsi le triangle maximum est équilatéral.

2e *Moyen.* Soit MON le triangle maximum, il est équivalent au rectangle OPML.

Or, pour avoir le rectangle maximum ayant un sommet sur l'arc ODMC, un côté sur OX et l'autre sur OY, il faut mener une tangente EMF telle que $EM = MF$. (*Méthodes*, no 360.)

Or $OE = EM$, donc le triangle EFG est équilatéral; il en est donc de même de OMN, qu'on obtient en joignant deux à deux les milieux des côtés du premier; donc le triangle équilatéral inscrit est maximum.

### Problème 612. — I.

**1706.** *Deux points* A *et* O *sont à une distance constante* a; *de l'un d'eux* O *comme centre, décrire une circonférence telle que le triangle* ABC, *formé par les tangentes et la corde des contacts, soit maximum. Quel est le maximum du quadrilatère* ABOC?

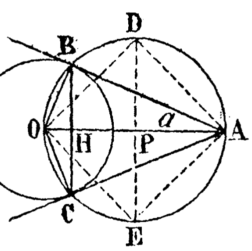


Fig. 1103.

1o Le triangle isocèle ABC est inscrit dans un cercle constant AO ; donc il est maximum quand il est équilatéral (no 1705).

Dans ce cas $OH = \dfrac{OP}{2} = \dfrac{a}{4}$.

2o Le quadrilatère ABOC est le double du triangle rectangle ABO inscrit dans une demi-circonférence. Le maximum a lieu quand il est rectangle isocèle, c'est-à-dire quand $OD = AD$. Le quadrilatère maximum est donc carré.

### Problème 613.

**1707.** *Circonscrire à un cercle le triangle d'aire minima.*

Le triangle équilatéral répond à la question.

1er *Moyen.* La surface d'un polygone circonscrit est le demi-produit du périmètre par le rayon; donc ses variations ne dépendent que du périmètre, lorsque le cercle inscrit est donné.

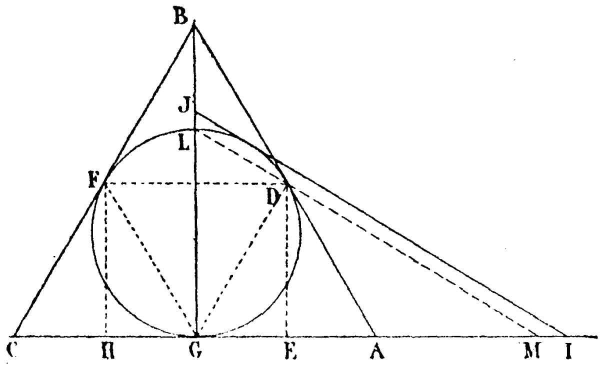



Fig. 1104.

Or, pour une même base, le triangle isocèle a le périmètre minimum (nº 1080); ainsi les côtés doivent être égaux deux à deux, et le triangle minimum est équilatéral.

2e *Moyen.* Considérons la moitié BAG du triangle isocèle minimum.

Il faut mener la tangente ADB telle que D soit le milieu.

En effet, toute autre sécante LDM, menée par le point D milieu de AB, donne le triangle $GML > GAB$ (nº 367); donc, à plus forte raison, le triangle GIJ, déterminé par une tangente, est $> GAB$.

$GA = AD = DB$; ainsi le triangle ABC minimum est équilatéral.

*Remarque.* Au triangle inscrit maximum DFG correspond le circonscrit minimum ABC (nº 1705).

Il en est de même dans plusieurs autres problèmes posés précédemment.

### Problème 614.

**1708.** *Dans un demi-cercle* ABC, *inscrire le trapèze de surface maxima.*

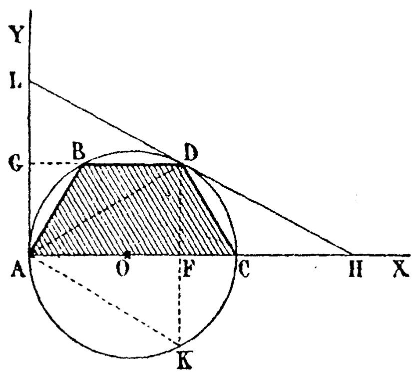



Fig. 1105.

La solution générale est donnée aux *Méthodes* (nº 365), néanmoins il peut être utile d'appliquer directement cette solution à la question proposée.

Supposons le problème résolu, ABDC le trapèze demandé; élevons la perpendiculaire AY, prolongeons DB.

Les triangles DCF, ABG sont égaux; donc le trapèze est équivalent au rectangle AFDG; or le maximum s'obtient en menant la tangente HDL de manière que $DH = DL$.

Le rectangle AFDG est d'ailleurs équivalent au triangle ADK; leur maximum a lieu en même temps; ainsi ADK est le triangle équilatéral inscrit; donc $DC = AB = r$, et, par suite, le trapèze ABDC est la moitié de l'hexagone régulier inscrit.

### Problème 614. — I.

**1709.** *On donne deux points* A, C *sur un même diamètre d'une demi-circonférence et à égale distance du centre; mener une corde parallèle* BD, *de manière que le trapèze* ACDB *soit maximum.*

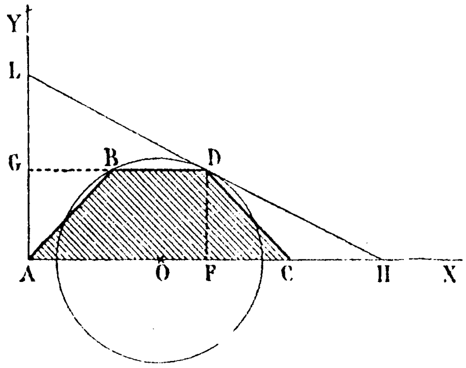



Fig. 1106.

On procède comme ci-dessus; on mène la tangente HDL telle que D en soit le milieu. (Voir 1712 **b**.)

### Problème 614. — II.

**1710.** *On mène une corde* DE *parallèle au diamètre* AC *d'une demi-circonférence* ABC, *on joint le point* B *milieu de l'arc aux extrémités de la corde; de ces points* D, E *on abaisse des perpendiculaires* DG, EF *sur le diamètre. Pour quelle position de la corde le pentagone* GDBEF *est-il maximum?*

Lorsque $BD = BE = R$.

En effet, dans ce cas, le pentagone est la moitié de l'hexagone régulier inscrit.

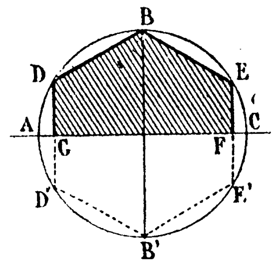



Fig. 1107.

*Remarque.* On peut employer une démonstration analogue pour le trapèze inscrit à une demi-circonférence, pourvu qu'on ait démontré préalablement que l'hexagone maximum est régulier. Réciproquement, du maximum du trapèze inscrit (no 1708), on peut déduire que l'hexagone inscrit maximum doit être régulier.

### Problème 614. — III.

**1711.** *Dans un demi-cercle, on prend deux cordes* $BD = BE = R$; *des extrémités* D *et* E, *on abaisse des perpendiculaires* DG, EF *sur un diamètre fixe. Pour quelle position du point* B *le pentagone* GDBEF *est-il maximum* (fig. 1107)?

Le maximum a lieu lorsque le point B est au milieu de la demi-circonférence (fig. 1107), car alors le pentagone GDBEF est la moitié de l'hexagone régulier inscrit.

Le minimum a lieu lorsque C (fig. 1108) appartient au diamètre; alors le pentagone égale la moitié de l'hexagone régulier, moins le triangle DAG.

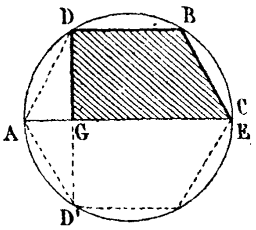



Fig. 1108.

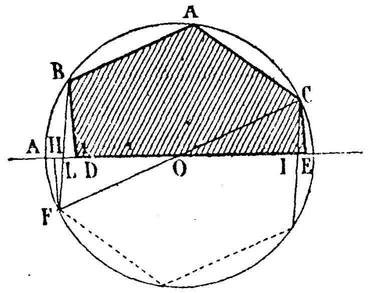



Fig. 1109.

La valeur est intermédiaire pour toute autre position (fig. 1109), puisque le pentagone égale le demi-hexagone diminué de la différence des triangles BDL et LFH.

**Problème 615.**

**1712**. *Quel est le trapèze isocèle maximum dont une base et les côtés égaux sont donnés?*

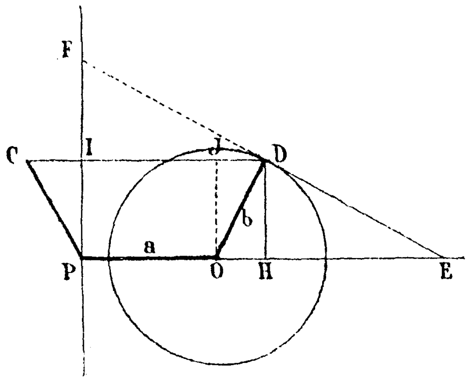



Fig. 1110.

Supposons le problème résolu, CPOD le trapèze demandé.

Le trapèze est équivalent au rectangle IDHP.

D'ailleurs, le sommet est sur la circonférence décrite du centre O avec $b$ pour rayon; donc il faut mener la tangente FDE telle que le point de contact en soit le milieu.

On sait (nº 311) que lorsque $a > r$, c'est la seconde racine qui donne PE. On aurait donc, en prenant $a$ et $b$ avec leurs valeurs absolues :

$$\text{OE ou } x = +\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2b^2}.$$

**1712 a.** *Surface.* Pour obtenir la surface, il faut calculer PH et DH.

$$\text{PH} = \frac{3a + \sqrt{a^2 + 8b^2}}{4} \quad \text{(nº 312, formule 3).}$$

$$\text{DH}^2 = \frac{-2a^2 + 8b^2 + 2a\sqrt{a^2 + 8b^2}}{16}$$

(nº 312, formule 4).

$$\text{PH . DH} = \frac{3a + \sqrt{a^2 + 8b^2}}{4} \; \frac{\sqrt{-2a^2 + 8b^2 + 2a\sqrt{a^2 + 8b^2}}}{4}$$

*Remarque.* Quand $b = a$, on obtient le demi-hexagone régulier

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{8a^2}{4}} = \frac{a + 3a}{2} = 2a.$$

Ainsi PEF est alors la moitié du triangle équilatéral circonscrit au cercle, car

$$OE = 2 \,.\, OP = 2a,$$

$$PH \,.\, DH = \frac{6a}{4} \cdot \frac{\sqrt{12a^2}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

**1712 b. Note.** 1° La question précédente a été proposée en 1856 aux examens d'admission à l'École navale. GÉRONO, dans les *N. A.*, de 1857, p. 5, en donne la solution par l'Algèbre, en recourant à l'emploi des coefficients indéterminés. (Voir *Exercices d'Algèbre,* F. G.-M, n° 975, et BURAT, *Traité d'Algèbre élémentaire*, n° 338, page 512.)

Une remarque analogue pourrait être faite pour le problème de géométrie du n° 1709 et pour quelques autres. Le problème n° 1713 exigerait l'emploi de la trigonométrie.

Ainsi que nous l'avons dit (n° 336), *la méthode la plus générale et la plus féconde pour déterminer le maximum ou le minimum d'une quantité consiste à traiter la question par l'algèbre, et à discuter le résultat d'après les règles connues.* Mais il faut avouer que la méthode géométrique offre de grands avantages dans un assez grand nombre de cas, et que rien n'approche de la merveilleuse simplicité et de l'élégance qui caractérisent plusieurs des solutions géométriques que nous avons données.

La méthode d'élimination, connue sous le nom de *méthode des coefficients indéterminés,* est due à BEZOUT.

2° Pour avoir le quadrilatère maximum ABCD (fig. 1110 bis), lorsque les côtés AB, CD sont inégaux, voir *Annales de Gergonne,* tome XXI, 1830-1831, p. 86, article par P. S. — En fait, *le quadrilatère doit être inscriptible dans un demi-cercle, dont le côté inconnu* AD *serait le diamètre*, car le maximum de la surface ABCD a lieu en même temps que le maximum de son double, c'est-à-dire de l'hexagone ABCDB'C' obtenu en prenant les points B', C', symétriques de B et C par rapport au centre O; or l'hexagone ayant un périmètre constant est maximum lorsqu'il est incriptible. Ainsi déterminer le quadrilatère maximum revient à résoudre le *Problème de Newton :* Étant données trois cordes consécutives d'un demi-cercle, dont la somme des arcs sous-tendus égale 180 degrés, déterminer le diamètre de ce cercle (*A. de G.,* tome XXI, p. 98).

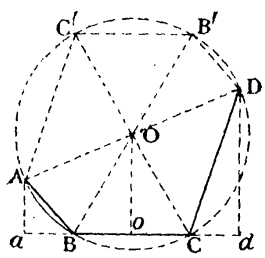


Fig. 1110 *bis.*

En projetant sur BC le centre du demi-cercle et les extrémités du diamètre, on reconnaît que les projections des deux cordes extrêmes sur la corde intermédiaire sont égales et de sens contraire.

* BEZOUT, né à Nemours en 1730, mort en 1783; connu par son *Cours complet de Mathématiques,* ouvrage remarquable par la clarté de l'exposition des principes. On doit au même auteur la *Théorie générale des équations.*

**Problème 616.**

**1713.** *On donne une circonférence, un point* A *et une droite* XY; *mener une corde* BC *parallèle à* XY *et telle que l'aire du triangle* ABC *soit maxima. Examiner les divers cas qui peuvent se présenter suivant la position du point* A.

Par le point A, menons une parallèle à XY.

Le triangle ABC est la moitié du rectangle BCDE.

Le problème est donc ramené à trouver le rectangle maximum qui a deux sommets sur un arc donné et la base sur la droite X'Y'.

Menons la tangente GBH telle que B en soit le milieu.

ABC est le maximum demandé.

*Discussion.* Il suffit de déplacer X′Y′ parallèlement à elle-même depuis le centre O jusqu'en XY au delà de la circonférence.

(a) Quand X′Y′ passe par le centre, on a deux demi-circonférences; à chacune d'elles correspond un maximum égal à la moitié du carré inscrit dans le cercle.

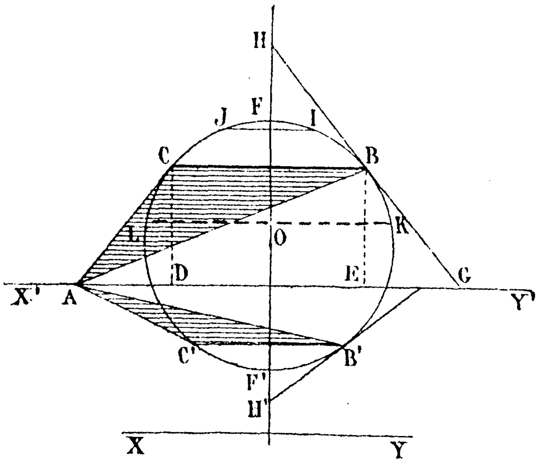



Fig. 1111.

(b) Lorsque X′Y′ coupe le rayon OF′, on a deux segments; à chacun d'eux correspond un maximum. Voici les variations que subit le triangle suivant la position de la corde BC.

1° Au point F la base est nulle, l'aire du triangle est nulle.

2° En venant en IJ, le triangle croît jusqu'au maximum donné par BC.

3° Au delà, en KL, il décroît.

4° Il est nul quand la corde est sur X′Y′.

5° Au delà il augmente jusqu'à un nouveau maximum AB′C′.

6° Puis il décroît.

7° Il s'annule en F′.

(c) Lorsque X′Y′ est tangente en F′, il n'y a qu'un maximum équivalent au triangle équilatéral inscrit F′BC (n° 1705).

(d) Au delà de F′ en XY, il n'y a plus qu'une seule solution.

En désignant OI par $a$ et le rayon par $r$, on a :

$$\mathrm{OH}' = \frac{a + \sqrt{a^2 + 8r^2}}{2} \qquad (\text{n}^\circ\ 311).$$

**Problème 617.**

**1714.** *Trouver le plus grand des triangles inscrits dans un cercle donné pour lequel la différence des deux angles est constante.* (Énoncé du *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, tome IV, p. 70.)

Supposons le problème résolu; ABC le triangle demandé et $A - C = d$, différence donnée.

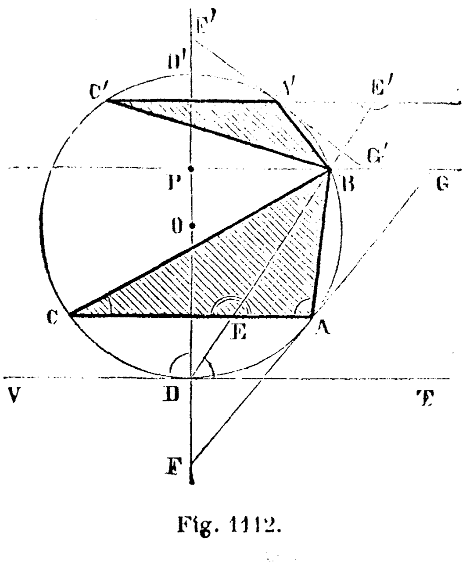



Fig. 1112.

On sait que la bissectrice BE fait avec la base des angles dont la différence égale $A - C = d$ (n° 465); donc menons une tangente quelconque DT et une droite DB formant des angles tels que

$$\mathrm{BDV} - \mathrm{BDT} = d.$$

La base du triangle doit être parallèle à DT et le sommet au point B.

La question est ainsi ramenée à un problème connu (n° 1713).

Menons BP perpendiculaire au diamètre DOD′, et une tangente FAG, telle que le point A soit le milieu de FG.

*Discussion.* La discussion est analogue à celle de la question rappelée (nº 1713); mais le sommet B, devant appartenir à la circonférence, la parallèle BP coupe le cercle, et il y a deux solutions.

Ainsi, pour une base très rapprochée du point D, le triangle est très petit; il augmente quand la base s'éloigne du point D. Il atteint le maximum par la position AC, puis il diminue; il est nul quand la base est sur BP, ensuite il augmente jusqu'en A'C', où il atteint un second maximum; il décroît ensuite et devient nul quand la base passe par D'.

**Problème 618.**

**1715.** *Dans un secteur circulaire donné, inscrire le rectangle maximum.*

(Voir *Méthodes*, nº 364.)

**Problème 618. — I.**

**1716.** *Étudier les variations du rectangle maximum inscrit dans un secteur* AOB, *lorsque l'angle au centre varie.*

*A un secteur donné* AOB, *correspond un autre secteur* AOBD *plus grand qu'un demi-cercle et tel que les deux secteurs ont pour somme le cercle entier. Quelle relation existe-t-il entre les rectangles maxima inscrits dans chacun de ces secteurs?*

1º Il suffit de considérer la moitié des secteurs et la moitié de chaque maximum.

Pour l'angle HOV, le point T est le milieu de l'arc et de la tangente VTS. Pour un arc AE plus grand que le premier, le point U, milieu de l'arc, donne une tangente telle que UH; or le triangle UOH est équivalent au rectangle MUXY. En effet, le rectangle est la moitié du triangle HOZ (nº 352), et il en est de même du triangle UOH.

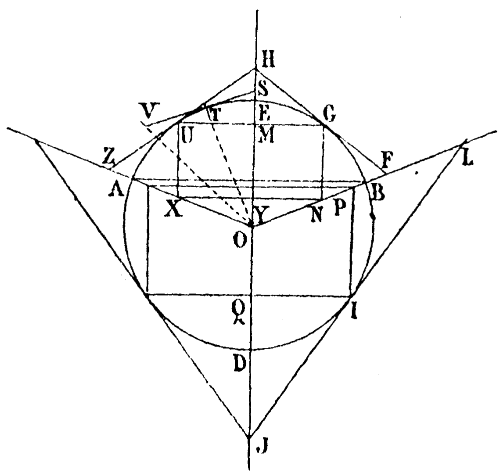


Fig. 1113.

Or UOH est $>$ TOS; donc le maximum augmente quand l'angle au centre augmente. Généralement on s'arrête au demi-cercle, et on le considère comme donnant lieu au plus grand maximum; mais, si l'on admet des secteurs plus grands qu'un demi-cercle, le secteur ADB, par exemple, donne aussi un maximum, et l'angle au centre AOB varie de zéro à quatre droits.

Pour cette valeur limite, le quadrilatère OFHZ devient infini; il en est de même du maximum.

2º Le rectangle NGUX est équivalent au triangle FOH. De même le rectangle I est équivalent au triangle OLJ; il suffit donc d'étudier ces triangles. Le produit des deux triangles FOH, OLJ, ou celui des maxima, est constant, il égale $R^4$; en effet, $OG \times FG$ pour le premier, étant multiplié par $OI \times IL$ du second, donne $R^2 \times FG \times IL$; or les triangles semblables OGF et OIL donnent $GF \times IL = R^2$; donc le produit des deux maxima est constant, il égale $R^4$ quel que soit l'angle au centre considéré.

### Problème 619.

**1717.** *Dans un segment circulaire, inscrire le rectangle maximum.*

(Voir *Méthodes*, n° 364, 2°.)

### Problème 620.

**1718.** *Dans un demi-cercle, mener une corde parallèle à une ligne donnée, de manière que le quadrilatère qui aurait pour côtés opposés le diamètre et la corde menée, ait une aire maxima.*

(Voir *Méthodes*, n° 366.)

### Problème 620. — I.

**1718 a.** *De tous les arcs de même longueur quel est celui qui donne lieu au segment circulaire, à une base, de surface maxima?*

C'est la demi-circonférence, car le maximum a lieu en même temps que le maximum de la surface que donnerait un arc double; or ce dernier serait une circonférence et la surface un cercle, maximum de la surface dont le périmètre est constant.

### Problème 621.

**1719.** *Du point de contact d'une tangente, pris pour centre, on décrit une demi-circonférence qui coupe un cercle donné. On joint un des points d'intersection aux extrémités du diamètre. Inscrire un trapèze maximum dans chacun des segments circulaires déterminés par les droites rectangulaires ainsi menées.*

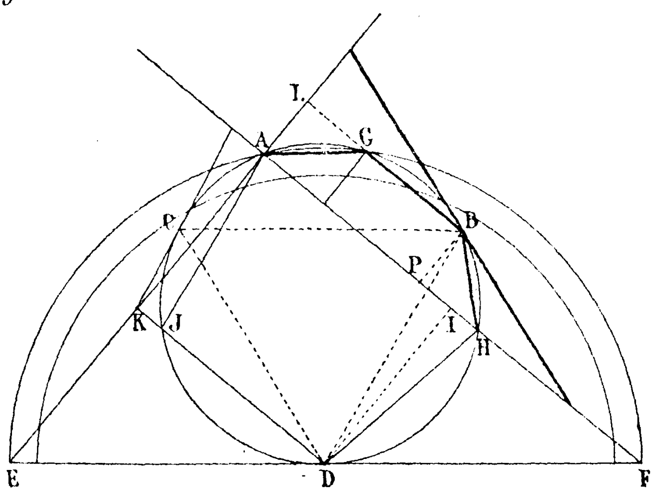



Fig. 1114.

Soient D le point de contact, A un des points d'intersection du cercle AD et de la demi-circonférence EAF.

EDF est une tangente divisée en deux parties égales; chacun des points inconnus B, C correspond à un rectangle maximum inscrit dans le segment correspondant; donc, d'après le *théorème de Pollock* (n° 668), les trois points B, C, D sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit; on détermine donc facilement B et C.

On sait d'ailleurs que le trapèze AGBH est équivalent au rectangle maximum BPAL (nos 365 et 1708).

*Remarques.* 1o Quelle que soit la position du point A sur le cercle donné, la demi-circonférence dont AD est le rayon, détermine un segment ABH tel que le point B est le sommet commun à chaque trapèze maximum inscrit dans les divers segments ABH; de même pour C; car B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dont le sommet D est fixe.

2o Le rectangle DIAK est maximum; il en est de même du trapèze équivalent AHDJ.

3o Le problème général, d'inscrire le trapèze maximum dans un segment circulaire quelconque ABH, ne peut se résoudre en n'employant que la règle et le compas, car il y a trois segments, et, par suite, trois réponses données par les sommets B, C, D. Aussi la détermination de la tangente conduit à une équation du troisième degré.

**Note.** * Sir Frederick Pollock F. R. S. Lord chief baron of the Court of Exchequer. (*N. A.*, 1857, p. 126.)

## Relations à déterminer.

### Problème 622.

**1720.** *Exprimer le côté* a *et la surface du triangle équilatéral en fonction de la hauteur* h. — *Exprimer la surface de l'hexagone régulier en fonction de l'apothème* h.

1o $$AB^2 - BD^2 = h^2,$$

$$a^2 - \frac{a^2}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{3a^2}{4} = h^2;$$

d'où $$a^2 = \frac{4h^2}{3}.$$

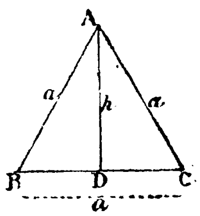


Fig. 1115.

Ainsi $$a = \frac{2h}{\sqrt{3}},$$

ou $$a = \frac{2}{3}h\sqrt{3}. \tag{1}$$

2o $$\text{Aire} = \frac{ah}{2} = \frac{2h\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{h}{2};$$

donc $$\text{l'aire} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}, \quad \text{ou} \quad \frac{h^2}{\sqrt{3}}. \tag{2}$$

3o $$\text{hexagone régulier} = 2h^2\sqrt{3}. \tag{3}$$

### Problème 622. — I.

**1721.** 1o *L'aire du triangle équilatéral en fonction de la somme* l *du côté et de la hauteur est donnée par* $S = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}$.

2o *L'aire du triangle équilatéral en fonction de la différence* d *du côté de la hauteur est donnée par* $S = \dfrac{d^2\sqrt{3}}{7 - 4\sqrt{3}}$.

3° *L'aire du triangle équilatéral en fonction de la somme* l' *ou de la différence* d' *du côté de l'apothème est donnée par*

$$S = \frac{9l'^2\sqrt{3}}{13+4\sqrt{3}}, \quad \text{ou} \quad S = \frac{9d'^2\sqrt{3}}{13-4\sqrt{3}}.$$

**Problème de Gerbert 623.**

**1722.** *Exprimer la longueur des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, en fonction de l'hypoténuse et de l'aire de ce triangle.*

En représentant l'hypoténuse par $a$, l'aire par $s^2$, le produit $bc$ donne le double de l'aire : on a donc les relations suivantes :

$$b^2+c^2=a^2, \qquad (1)$$
$$bc=2s^2; \quad \text{d'où} \quad 2bc=4s^2. \qquad (2)$$

La somme des égalités (1) et (2) et leur différence donnent :

$$b^2+2bc+c^2=a^2+4s^2, \quad (b+c)^2=a^2+4s^2,$$
$$b^2-2bc+c^2=a^2-4s^2, \quad (b-c)^2=a^2-4s^2;$$

d'où $$b+c=\sqrt{a^2+4s^2}, \quad \text{et} \quad b-c=\sqrt{a^2-4s^2};$$

donc $$\left\{\begin{aligned} b&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4s^2}+\sqrt{a^2-4s^2}\right),\\ c&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4s^2}-\sqrt{a^2-4s^2}\right).\end{aligned}\right.$$

**1722 a. Note.** La solution ci-dessus a été donnée par GERBERT ; *le problème est remarquable pour l'époque,* ainsi que CHASLES le fait remarquer dans son *Aperçu historique* (2e édition, p. 505), parce qu'il dépend d'une équation du second degré.

Pour les travaux de Gerbert, on peut voir l'*Histoire des Mathématiques*, par JACQUES BOYER, p. 78.

* GERBERT, né à Aurillac vers 940, mort en 1003, fut un des homme les plus savants de son temps. — Il fut pape de 999 à 1003, sous le nom de SYLVESTRE II.

**Problème 623. — I.**

**1723.** *Le côté d'un triangle équilatéral est* a. *Exprimer, en fonction de* a, *la surface du carré inscrit dans ce triangle.*

Dans une question précédente (n° 1490), on a indiqué le moyen d'inscrire le carré demandé, et trouvé que le demi-côté du carré égale le demi-côté du triangle multiplié par $(2\sqrt{3}-3)$; donc, si l'on double de part et d'autre, et si l'on désigne maintenant par $x$ et $a$ les côtés respectifs du carré et du triangle, on aura :

$$x=a(2\sqrt{3}-3);$$

d'où $$x^2=a^2(4.3+9-2.2.3\sqrt{3})=a^2(21-12\sqrt{3}).$$

**Problème 624.**

**1724.** *Exprimer l'aire d'un triangle en fonction des trois hauteurs.*

Soient $a$, $b$, $c$ les trois côtés, et $a'$, $b'$, $c'$ les trois hauteurs correspondantes; S, la surface du triangle qui a pour côtés $a$, $b$, $c$; S' la surface du triangle qui aurait pour côtés $a'$, $b'$, $c'$.

On a :
$$\frac{S}{S'} = \frac{a^2}{\frac{1}{a'^2}} = a^2a'^2 = 4S^2 ;$$

d'où
$$S = \frac{1}{4S'} ; \quad S = \frac{1}{4\sqrt{p'(p'-a')(p'-b')(p'-c')}} .$$

**1724 a. Note.** 1° On peut lire une autre démonstration dans la 2e et la 3e édition des *Exercices de Géométrie*. Voir aussi *N. A.*, 1843, p. 546, n° 33, TERQUEM, et 1846, p. 225, HUET.

2° L'expression de la surface du triangle en fonction des trois côtés a été donnée sans démonstration par HÉRON LE JEUNE, et on doit la lui attribuer, dit M. MAXIMILIEN MARIE (*Histoire des sciences mathématiques et physiques*, tome I, page 177), contrairement à l'opinion qui en faisait honneur à HÉRON L'ANCIEN (*Aperçu historique*, page 544. — *Nouvelles Annales*, 1861, page 432. Note de M. VINCENT, membre de l'Institut. — *Histoire de Mathématiques*, par F. HOEFFER, page 241).

La démonstration géométrique (G., n° 352) est due à LÉONARD DE PISE (voir n° 1604).

* HÉRON L'ANCIEN, ou HÉRON D'ALEXANDRIE, vivait dans le premier siècle avant l'ère chrétienne ; il est connu par l'appareil pneumatique nommé *fontaine de Héron* et par l'*éolipyle ;* on lui doit un *Traité de Géodésie* ou *Géométrie pratique.*

* HÉRON LE JEUNE (610-641) vécut à Constantinople. Il a publié un *Traité de Géodésie,* où il cite fréquemment son homonyme et Archimède. C'est par son ouvrage que la formule de la surface du triangle en fonction des trois côtés s'est répandue en Grèce et en Occident.

* HUET, professeur à Toulon en 1846, auteur de plusieurs articles des *N. A.*

**Problème 624. — I.**

**1724 b.** *Exprimer la surface d'un triangle en fonction des médianes* m, m', m''.

En prolongeant la médiane CGD d'une longueur DH = GD, on a le triangle BGH dont la surface est le tiers de celle du triangle ABC et les côtés
$$BG = {}^2/_3\,BF, \quad GH = {}^2/_3\,CD, \quad HB = {}^2/_3\,AE ;$$
sa surface en fonction des médianes $m$, $m'$, $m''$ est donc :
$$\sqrt{\left(\frac{m+m'+m''}{3}\right)\left(\frac{m'+m''-m}{3}\right)\left(\frac{m+m''-m'}{3}\right)\left(\frac{m+m'-m''}{3}\right)},$$
et la surface du triangle ABC :
$$\frac{1}{3}\sqrt{(m+m'+m'')(m'+m''-m)(m+m''-m')(m+m'-m'')} ;$$
ou en désignant par M la demi-somme
$$\frac{m+m'+m''}{2},$$
$$\text{Surface ABC} = \frac{4}{3}\sqrt{M(M-m)(M-m')(M-m'')} .$$

**Problème 625.**

**1725.** *On donne un triangle par ses trois côtés et l'on demande l'expression du rapport de sa surface à celle du triangle qui aurait pour sommets les pieds des bissectrices des angles du triangle.*

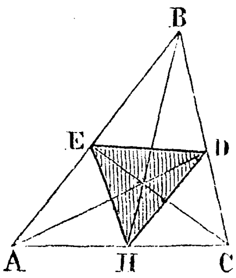


Fig. 1116.

Soient ABC le triangle proposé et les bissectrices AD, BH, CE.

Joignons HD, ED, HE.

Les triangles HCD et ABC, ayant un angle égal commun, donnent :

$$\frac{\mathrm{HCD}}{\mathrm{ACB}} = \frac{\mathrm{HC} \times \mathrm{CD}}{ab}. \qquad (1)$$

Mais
$$\frac{\mathrm{HC}}{a} = \frac{\mathrm{HA}}{c} = \frac{b}{a+c}.$$

Ainsi
$$\mathrm{HC} = \frac{ab}{a+c}.$$

On aurait de même :
$$\mathrm{CD} = \frac{ab}{b+c}.$$

Par suite, la relation (1) devient :

$$\frac{\mathrm{HCD}}{\mathrm{ACB}} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)}. \qquad (2)$$

De même
$$\frac{\mathrm{EBD}}{\mathrm{ABC}} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)}, \qquad (3)$$

$$\frac{\mathrm{HAE}}{\mathrm{BAC}} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}. \qquad (4)$$

Ajoutons membre à membre les relations (2), (3), (4); nous aurons :

$$\frac{\mathrm{ABC} - \mathrm{HED}}{\mathrm{ABC}} = \frac{ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Retranchons chaque dénominateur de son numérateur, et changeons les signes :

$$\frac{\mathrm{HED}}{\mathrm{ABC}} = \frac{(a+b)(a+c)(b+c) - ab(a+b) - ac(a+c) - bc(b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Simplifiant et renversant les rapports, il vient :

$$\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{HED}} = \frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{2abc}.$$

Telle est la relation cherchée.

**1725 a. Note.** 1° Voir *Revue de l'Enseignement secondaire spécial*, 1879, page 123, et *Exercices d'Algèbre*, n° 1261. — Cette revue a cessé de paraître, *mais elle a rendu de réels services à l'enseignement spécial.* Dans un de ses articles, elle a reproduit ou retrouvé les démonstrations élémentaires que nous avions données dès 1873, dans nos *Éléments de Géométrie*, pour obtenir le volume des hyperboloïdes.

2° En représentant par S l'aire du triangle donné, par P celle du triangle pédal des bissectrices intérieures, par Q celle du triangle pédal de la bissectrice intérieure de l'angle A, et des bissectrices extérieures de B et C, on a :

$$\mathrm{P} = \frac{2abc\mathrm{S}}{(b+c)(a+c)(a+b)}; \quad \mathrm{Q} = \frac{2abc\mathrm{S}}{(b+c)(a-c)(a-b)}.$$

(*N. A.*, 1879, p. 528, DOSTOR, et 1880, p. 473 ; démonstration par FAURÉ de Tarbes, etc.)

**1725 b. Problèmes.** Aire des triangles formés en joignant deux à deux :

1° Les milieux des hauteurs d'un triangle.

2° Les milieux des bissectrices.

3° Les milieux des segments des hauteurs entre l'orthocentre et la base.
4° Les milieux des segments entre l'orthocentre et les sommets.
5° Les milieux des hauteurs.

Voir l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1906, p. 174 et 1911, p. 79, réponses par MM. Brocard, Hendlé, Genty, Delahaye, Mathieu, Barbarin, Welsch ; avec mention de MM. Plakhowo, Rose et Hagge de Kolsnap (Allemagne), puis Lez, Dubouis et Greenstreet, dont les solutions n'ont pas été publiées.

### Problème 626.

**1726.** *Calculer l'aire d'un trapèze en fonction des quatre côtés* a, b, c, d.

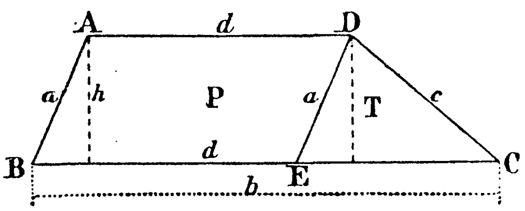



Fig. 1117.

Le trapèze est décomposable en un parallélogramme P, qui a $d$ pour base et $h$ pour hauteur, et un triangle T, qui a pour côtés $a$, c et CE, cette dernière ligne étant égale à $b - d$.

Soit S la surface ABCD.

$$S = \frac{b+d}{2} . h,$$

$$T = \frac{b-d}{2} . h;$$

donc
$$\frac{S}{T} = \frac{b+d}{b-d}; \quad S = \frac{b+d}{b-d} . T;$$

$$S = \frac{b+d}{b-d}\sqrt{(p-b)(p-d)(p-d-a)(p-d-c)} .$$

**1726 a.** *Remarques.* 1° L'aire du quadrilatère inscriptible est donnée par la formule de Brahma-Gupta :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} .$$

(Voir *Compléments de Trigonométrie*, 3e édit., n° 324, 2°.)

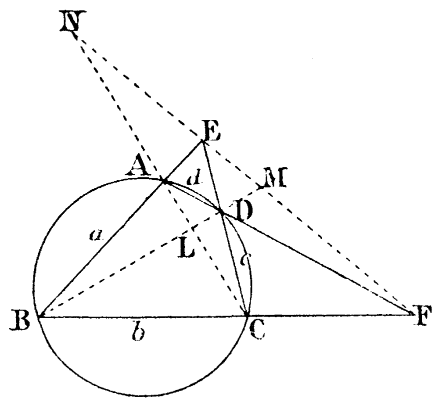



Fig. 1118.

2° L'aire du triangle LMN, qui a pour sommets les points de concours des trois diagonales d'un quadrilatère inscriptible, est donnée par la formule suivante :

$$LMN = \frac{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{\left(\frac{ad}{bc} - \frac{bc}{ad}\right)\left(\frac{ab}{cd} - \frac{cd}{ab}\right)} .$$

(*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1903, page 160, n° 2112, Mathieu.)

* Brahma-Gupta, géomètre hindou, né en 598 (*Histoire des Sciences mathématiques et physiques,* par Maximilien Marie). Dans son *Aperçu historique,* Chasles écrit Brahmegupta.

### Problème 627.

**1727.** *Trouver l'aire du trapèze formé par deux cordes parallèles situées d'un même côté du centre; l'une d'elles égale le rayon, et l'autre égale le côté du triangle équilatéral inscrit.*

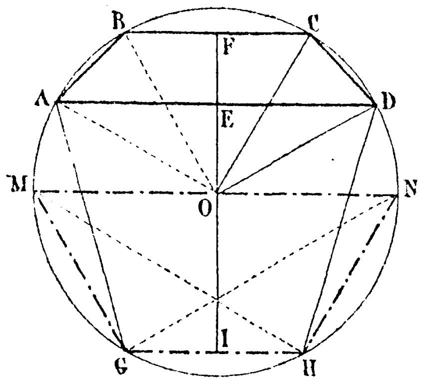



Fig. 1119.

Soient $AD = r\sqrt{3}$ (G., n° 277) et $BC = r$.

L'apothème OF est la hauteur d'un triangle équilatéral BOC, dont le côté égale le rayon; donc

$$OF = \frac{r}{2}\sqrt{3} \quad \text{(G., n° 277)};$$

d'ailleurs $\quad OE = \frac{r}{2};$

donc $\quad FE = \frac{r}{2}(\sqrt{3} - 1). \qquad (1)$

La demi-somme des bases ou

$$AE + BF = \frac{r}{2}(\sqrt{3} + 1). \qquad (2)$$

La surface $= (1) \times (2) = \frac{r^2}{4}(3 - 1) = \frac{r^2}{2}$.

La surface est la moitié du carré du rayon.

### Problème 627. — I.

**1728.** *Aire du trapèze* ADHG, *lorsque les cordes* AD, GH *sont de part et d'autre du centre.*

Soient AD et $GH = r$ (fig. 1119).

$$EI = \frac{r}{2}(\sqrt{3} + 1). \qquad (3)$$

La surface $= (3) \times (2) = \frac{r^2}{2}(2 + \sqrt{3})$.

### Problème 627. II.

**1729.** *Aire du trapèze lorsque* GH *ou* r *est la petite base, et que les diagonales égalent* AD (fig. 1119).

On obtient la moitié de l'hexagone régulier :

$$MO + GI = \frac{3}{2}r, \quad OI = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

$$\text{Aire} = \frac{3r^2}{4}\sqrt{3}.$$

### Problème 628.

**1730.** *Deux circonférences sont tangentes extérieurement; on mène les deux tangentes communes extérieures; exprimer la surface du trapèze formé par ces deux tangentes et les cordes des contacts, en fonction des rayons des cercles donnés.*

Menons la tangente intérieure GOL et la perpendiculaire GH.

$$GF = GO = GE.$$

Donc G est le point milieu de EF.

Or l'aire du trapèze peut s'obtenir en multipliant un des côtés CD par la perpendiculaire GH.

Il suffit d'exprimer GH et CD en fonction des rayons donnés $r$, $s$.

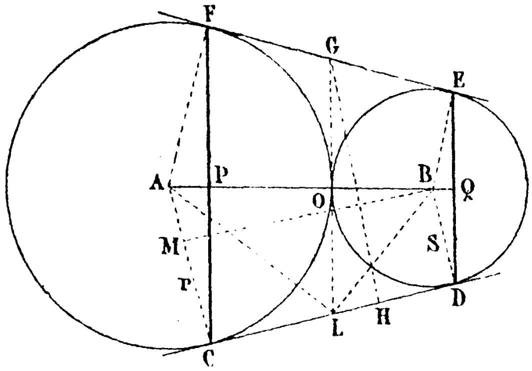



Fig. 1120.

La tangente extérieure égale la parallèle BM.

Or, dans le triangle rectangle BMA,

$$AB = r + s, \quad AM = r - s;$$

donc $\quad BM^2 \quad$ ou $\quad CD^2 = (r+s)^2 - (r-s)^2 = 4rs, \quad CD = 2\sqrt{rs}$.

Les triangles rectangles BMA, GHL sont semblables, car ils ont les côtés respectivement perpendiculaires; d'ailleurs

$$GL = CD = BM;$$

donc $$\frac{GH^2}{GL^2} = \frac{BM^2}{AB^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{GH^2}{4rs} = \frac{4rs}{(r+s)^2},$$

$$GH = \frac{4rs}{r+s},$$

$$CD \cdot GH = \frac{8rs\sqrt{rs}}{r+s}.$$

**Problème 628. — I.**

**1731**. *Calculer les bases et la hauteur du trapèze proposé dans la question précédente* (n° 1730).

Les triangles APC, AMB sont semblables (fig. 1120); donc

$$\frac{CP}{r} = \frac{BM}{AB}; \quad CP = \frac{r \cdot BM}{AB}.$$

$$CP = \frac{2r\sqrt{rs}}{r+s}; \tag{1}$$

de même $$DQ = \frac{2s\sqrt{rs}}{r+s}, \tag{2}$$

$$\frac{AP}{r} = \frac{AM}{AB}, \quad \frac{AP}{r} = \frac{r-s}{r+s}, \quad AP = \frac{r(r-s)}{r+s}, \tag{3}$$

et $$BQ = \frac{s(r-s)}{r+s}, \tag{4}$$

$$PQ = AB - AP + BQ;$$

or $$AB = \frac{(r+s)^2}{r+s};$$

donc $$PQ = \frac{r^2 + 2rs + s^2 - r^2 + rs + rs - s^2}{r+s} = \frac{4rs}{r+s}. \qquad (5)$$

La demi-somme des bases ou $CP + DQ$ donne :

$$\frac{2r\sqrt{rs} + 2s\sqrt{rs}}{r+s} = \frac{2(r+s)\sqrt{rs}}{r+s} = 2\sqrt{rs}. \qquad (6)$$

L'aire du trapèze ou $(CP+DQ)PQ$ égale donc $(5) \times (6)$ :

$$\text{trapèze} = 2\sqrt{rs} \cdot \frac{4rs}{r+s} = \frac{8rs\sqrt{rs}}{r+s}.$$

Et l'on obtient ainsi l'aire du trapèze par un second procédé.

### Problème 628. — II.

**1732.** *Trouver l'aire du trapèze* CLGF *et l'aire du trapèze* LDEG (fig. 1120).

$$\text{Trapèze } CLGF = \frac{2rs\sqrt{rs}\,(3r+s)}{(r+s)^2}; \quad LDEG = \frac{2rs\sqrt{rs}\,(r+3s)}{(r+s)^2}$$

*Vérification.* $CLGF + LDEG = \dfrac{8rs\sqrt{rs}}{r+s} = CDEF.$

### Problème 628. — III.

**1733.** *Deux circonférences se coupent orthogonalement; quelle est la surface du trapèze formé par les tangentes extérieures et les cordes des contacts? Exprimer l'aire en fonction des rayons* r, s *des cercles donnés.*

L'angle ANB est droit; donc la distance des centres AB est connue; représentons-la par $d$, on aura :

$$d = \sqrt{r^2 + s^2}.$$

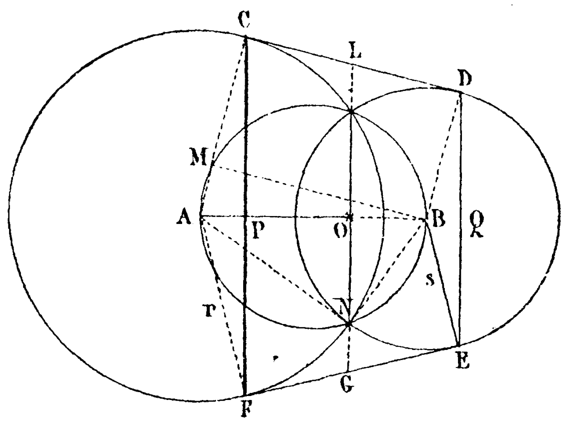



Fig. 1121.

En employant le second procédé (indiqué à la fin du nº 1731), et calculant CP, DQ et PQ,

on obtient : $$\frac{4rs\sqrt{rs}\,(r+s)}{r^2+s^2}$$ pour aire demandée.

**Problème 629.**

**1731.** *On donne les rayons* r, s *de deux circonférences extérieures, ainsi que la distance* d *de leurs centres; en fonction de ces données, exprimer l'aire du trapèze formé par les deux tangentes extérieures et les cordes des contacts.*

Menons BM parallèle à CD; $BM^2 = d^2 - (r-s)^2 = l^2$.

Ainsi les trois côtés du triangle rectangle ABM sont connus.

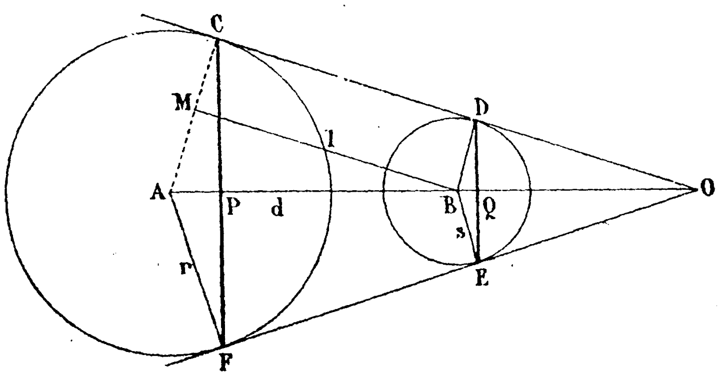



Fig. 1122.

On a encore :

$$\frac{CP}{r} = \frac{l}{d}, \quad CP = \frac{rl}{d}, \quad DQ = \frac{sl}{d};$$

on obtient :

$$S = \frac{r+s}{d^2}\left(\sqrt{d^2-(r-s)^2}\right)^3.$$

*Remarques.* 1° Les problèmes précédents ne sont que des cas particuliers de celui-ci.

Pour retrouver le n° 1730, il suffit de poser $d = r + s$ et de simplifier.

2° Voir 2e et 3e édition pour le détail des calculs des nos 1732, 1733, 1734 et 1736.

**Problème 630.**

**1735.** *Trouver les diagonales d'un quadrilatère inscriptible, connaissant les quatre côtés.*

Les *théorèmes de Ptolémée* (nos 1209 et 1211) donnent :

$$mn = ac + bd, \tag{1}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{ab+cd}{ad+bc}. \tag{2}$$

En multipliant (1) par (2), on trouve :

$$m^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

En divisant (1) par (2), on trouve :

$$n^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

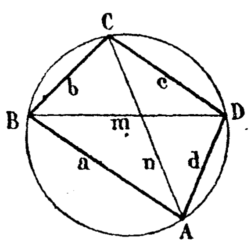



Fig. 1123.

**Problème 630. — I.**

**1736.** *Étant donné un carré ayant* a *pour côté, que faut-il enlever aux quatre côtés pour avoir un octogone régulier ?*

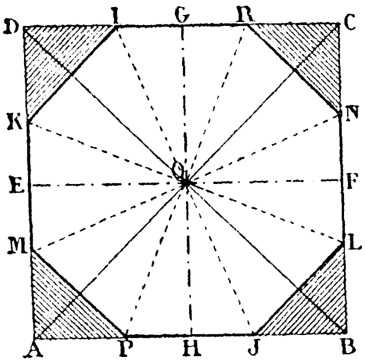



Fig. 1124.

On trace les diagonales AC et BD, puis les droites EF et GH, bissectrices des angles formés par les premières droites, enfin de nouvelles bissectrices IJ, KL, MN, PR.

Les points déterminés sur le périmètre par ces dernières droites sont les sommets de l'octogone demandé.

$$\mathrm{DI} = a\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right) = a\left(\frac{1}{3{,}41421}\right).$$

La longueur à porter sur chaque coin égale $a$ (0,292893).

**Problème 631.**

**1737.** *Exprimer, en fonction du côté, les aires des polygones réguliers de 6, 12, 8, 10, 5 et 15 côtés.*

Nous nous bornons à indiquer les résultats, car les solutions ont été données dans les deux premières éditions des *Exercices de Géométrie.*

**Hexagone régulier** $= \frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$, ou $a^2(2{,}59807)$.

**1738. Dodécagone régulier** $= 3a^2(2+\sqrt{3})$.

**1739. Octogone régulier** $= a^2(2+2\sqrt{2})$, ou $a^2(4{,}8284)$.

**1740. Décagone régulier** $= {}^5/_2\, a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$, ou $a^2(7{,}6942)$.

**1741. Pentagone régulier** $= a^2(1{,}7205)$.

**1742. Pentédécagone régulier** $= a^2(17{,}643)$.

**1743. Scolie.** Voici une formule applicable à un polygone régulier quelconque, et qui exprime la surface en fonction du côté :

$$S = {}^1/_4\, na^2 \,.\, \mathrm{cotg}\, \frac{\pi}{n}.$$

C'est-à-dire que *l'aire d'un polygone régulier quelconque égale le carré du côté, multiplié par le* $^1/_4$ *du nombre des côtés et par la cotangente du demi-angle au centre.* (*Compléments de trigonométrie*, n° 348.)

Appliquée aux polygones réguliers dont il a été question ci-dessus, cette formule conduira immédiatement aux résultats déjà trouvés. Nous allons l'employer pour quelques polygones réguliers que la Géométrie ne traite par aucune formule directe.

Heptagone régulier. . . . . . $S = {}^7/_4\, a^2 \cot \frac{\pi}{7}$, $S = 3{,}6340a^2$.

Ennéagone régulier . . . . . $S = {}^9/_4\, a^2 \cot \frac{\pi}{9}$, $S = 6{,}1817a^2$.

Polygone régulier de 11 côtés . . $S = {}^{11}/_4\, a^2 \cot \frac{\pi}{11}$, $S = 9{,}3670a^2$,

et ainsi de suite.

Voici un tableau qui donne la surface d'un assez grand nombre de polygones réguliers en fonction du côté $a$ :

| Nombre des côtés. | Aire. | Nombre des côtés. | Aire. |
|---|---|---|---|
| 3 | $0,4330a^2$ | 12 | $11,196a^2$ |
| 4 | $1,0000a^2$ | 13 | $13,188a^2$ |
| 5 | $1,7205a^2$ | 14 | $15,335a^2$ |
| 6 | $2,5981a^2$ | 15 | $17,643a^2$ |
| 7 | $3,6340a^2$ | 16 | $20,140a^2$ |
| 8 | $4,8284a^2$ | 17 | $23,18\ a^2$ |
| 9 | $6,1817a^2$ | 18 | $25,53\ a^2$ |
| 10 | $7,6942a^2$ | 19 | $28,54\ a^2$ |
| 11 | $9,3670a^2$ | 20 | $31,57\ a^2$ |

**Problème 632.**

**1744.** *Exprimer, en fonction du rayon, les aires des polygones réguliers de* 6, 12, 8, 10, 5 *et* 15 *côtés*.

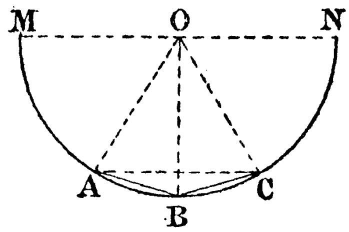


Fig. 1125.

Voir les deux premières éditions des *Exercices de Géométrie;* mais on peut simplifier, par exemple, pour le dodécagone; on a : $S = 6(ABCO) = 6\,\frac{OB\,.\,AC}{2} = 3r^2$.

**1744 a.** *Remarque.* Voici une formule applicable à un polygone régulier quelconque, et qui exprime *la surface en fonction du rayon* :

$$S = {}^1/_2\, nr^2\,.\,\sin\frac{2\pi}{n}\,.$$

C'est-à-dire que *l'aire d'un polygone régulier quelconque égale le produit du carré du rayon par la moitié du nombre des côtés, multiplié par le sinus de l'angle au centre.*

Appliquée aux polygones réguliers dont il a été question ci-dessus, cette formule conduit immédiatement aux résultats déjà trouvés.

On peut l'employer pour d'autres polygones et former le tableau suivant :

| Nombre des côtés. | Aire du polygone. | Nombre des côtés. | Aire du polygone. |
|---|---|---|---|
| 3 | $1,29904r^2$ | 12 | $3,0000r^2$ |
| 4 | $2,0000\ r^2$ | 13 | $3,0206r^2$ |
| 5 | $2,3776\ r^2$ | 14 | $3,0372r^2$ |
| 6 | $2,5981\ r^2$ | 15 | $3,0504r^2$ |
| 7 | $2,7364\ r^2$ | 16 | $3,0615r^2$ |
| 8 | $2,8284\ r^2$ | 17 | $3,0706r^2$ |
| 9 | $2,8925\ r^2$ | 18 | $3,0781r^2$ |
| 10 | $2,9349\ r^2$ | 19 | $3,0846r^2$ |
| 11 | $2,9735\ r^2$ | 20 | $3,0901r^2$ |

**Problème 632. — I.**

**1745.** *Calculer la surface de l'octogone étoilé.*

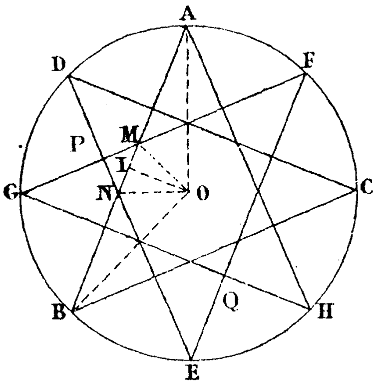



Fig. 1126.

Soit $r$ le rayon du cercle circonscrit; le côté de l'octogone étoilé ou AB est donné par $$AB = r\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$ (G., n° 733.)

La surface se compose de huit triangles égaux au triangle AOB; mais ces triangles ont des parties communes; par suite, l'octogone intérieur, dont MN est le côté, est pris trois fois; en effet, le huitième, MON, se trouve dans les trois triangles DOE, AOB et FOG.

Les triangles tels que MPN, au nombre de huit, sont pris deux fois.

Donc la surface de l'octogone étoilé s'obtient en multipliant le demi-périmètre ou 4AB par l'apothème OI, et en retranchant du résultat les carrés ayant pour un de leurs sommets P ou Q.

L'octogone étoilé égale $2r^2\sqrt{2} - 2r^2(2-\sqrt{2}) = 4r^2(\sqrt{2}-1)$.

**Note.** Les polygones étoilés ont été étudiés en premier lieu par Kepler, en 1619. Voir ci-après (n° 1901 g) l'étude générale de l'aire des polygones étoilés.

* Kepler (1571-1630) est surtout connu comme astronome et par les *trois lois célèbres* qui portent son nom ; néanmoins il a traité diverses questions géométriques.

**Problème 632. — II.**

**1746.** *Étant donné le rayon* OA *ou* r *d'un cercle, et le côté* AC *ou* a *d'un polygone régulier de* n *côtés, exprimer l'aire de ce polygone, puis l'aire du polygone régulier inscrit de* 2n *côtés.*

1° On calcule l'apothème OI ou $s$ par le triangle rectangle OAI :
$$s^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}a^2;$$
d'où $$s = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}.$$

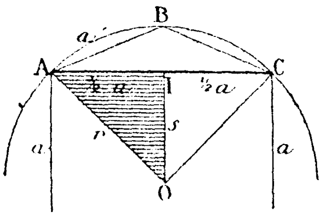



Fig. 1127.

L'aire du triangle AOC est $\tfrac{1}{2}as$, et l'aire du polygone est :
$$\tfrac{1}{2}na\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}.$$

2° Pour calculer le côté $a'$ du polygone régulier de $2n$ côtés, on posera la formule connue (G., n° 286) :
$$a' = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

L'apothème $h$ se trouve par la relation
$$h^2 = r^2 - (\tfrac{1}{2}a')^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}a'^2; \quad \text{d'où} \quad h = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a'^2}.$$

L'aire du polygone régulier de $2n$ côtés est donc :
$$\tfrac{1}{2}\cdot 2na'\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a'^2} \quad \text{ou} \quad na'\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a'^2}.$$

### Problème 632. — III.

**1747.** *Exprimer le côté, le périmètre et la surface de l'hexagone régulier inscrit à un cercle dont le rayon est* r; *puis le côté, le périmètre et la surface de l'hexagone régulier circonscrit au même cercle.*

*L'hexagone régulier inscrit* a pour côté $r$, pour périmètre $6r$, et pour apothème $\sqrt{r^2 - {}^1/_4 r^2}$ ou $\sqrt{{}^3/_4 r^2}$, soit ${}^1/_2 r\sqrt{3}$ ou $r(0,86602)$.

L'aire est $3r \cdot {}^1/_2 r\sqrt{3}$, soit ${}^3/_2 r^2\sqrt{3}$ ou $r^2(2,69808)$.

*L'hexagone régulier circonscrit* a pour apothème le rayon $r$ du cercle. Les deux hexagones étant semblables (G., nº 237), le rapport des dimensions homologues est égal à celui des apothèmes, et le rapport des aires est égal au carré du rapport des apothèmes. On a donc :

Le rapport des apothèmes . . . . $\dfrac{r}{{}^1/_2 r\sqrt{3}}$ ou $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Côté de l'hexagone circonscrit . . . $r \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ou $\dfrac{2r}{\sqrt{3}}$.

Périmètre . . . . . . . . . . . $6r \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ou $\dfrac{12r}{\sqrt{3}}$.

Aire . . . $\dfrac{3r^2\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$ ou $\dfrac{3r^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{4}{3}$ ou $2r^2\sqrt{3}$.

*Remarque.* L'hexagone régulier circonscrit égale les ${}^4/_3$ de l'hexagone régulier inscrit.

### Problème de Gregory 633.

**1748.** *Étant données les aires* a *et* A *de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, exprimer les aires* a' *et* A' *des deux polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre double de côtés.*

On trouve : $a' = \sqrt{aA}$, et $A' = \dfrac{2aA}{a + a'}$.

*Remarques.* 1º Pour l'application numérique des formules obtenues, on peut recourir à l'exercice 642. — VI (nº 1773 c).

2º Ces formules peuvent servir à la détermination de $\pi$.

**1749. Note.** Les méthodes élémentaires pour calculer le nombre $\pi$ sont au nombre de quatre : deux sont fondées sur la formule $C = 2\pi R$, qui donne la longueur de la circonférence ; et deux sur la formule $S = \pi R^2$, qui donne l'aire du cercle.

La première méthode, due à Archimède, consiste à chercher la longueur de la circonférence ayant 1 pour diamètre, en la regardant comme limite commune des périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits dont on double indéfiniment les côtés.

La seconde méthode, introduite par Jacques Gregory, consiste à chercher la surface du cercle ayant 1 pour rayon, en regardant ce cercle comme la limite commune des polygones réguliers inscrits et circonscrits dont on double indéfiniment le nombre des côtés.

La troisième méthode, dite des *isopérimètres*, attribuée à Schwab, mais due à DESCARTES, consiste à chercher le rayon d'une circonférence de longueur connue comme limite commune des rayons et des apothèmes d'un périmètre régulier de longueur constante, dont on double indéfiniment le nombre des côtés.

On peut utiliser deux propriétés énoncées par DÉSIRÉ ANDRÉ et préconisées par Eugène ROUCHÉ. (*N. A.*, 1882, p. 325.)

La quatrième méthode, due à LEGENDRE (livre IV, prop. XVI), consiste à chercher le rayon d'un cercle de surface connue comme limite commune des rayons et des apothèmes d'un polygone régulier de surface constante dont on double indéfiniment le nombre des côtés (*N. A.*, 1844, page 582; note de M. ARMAND FARCY, ancien élève de l'École Polytechnique).

* GREGORY (1638-1675), géomètre anglais, auquel on doit le télescope qui porte son nom.

### Problème 634.

**1750.** *Étant donnés l'apothème* a *et le rayon* r *d'un polygone régulier quelconque, exprimer l'apothème* a' *et le rayon* r' *du polygone régulier équivalent, qui a un nombre double de côtés.*

On trouve : $r' = \sqrt{ar}$, et $a' = r'\sqrt{\dfrac{r+a}{2r}}$.

*Remarques.* 1° L'application numérique des formules obtenues se trouve à l'exercice 642. — VII (n° 1773, **d**).

2° Pour le détail des calculs, voir 2e et 3e éditions des *E. de G.*

### Problème 634. — I.

**1751.** *On donne un point* A *pour centre d'inversion d'un cercle* B *de rayon* b, *dont le centre est distant de* A *d'une longueur* a, *puis* $k^2$ *pour puissance d'inversion; exprimer* a' *et* b' *du cercle inverse en fonction de* a, b *et* $k^2$.

C et C', D et D', T et T' sont des points inverses; mais le centre B' n'est point l'inverse de B.

Pour déterminer $a'$ et $b'$, on peut calculer AC' et AD'.

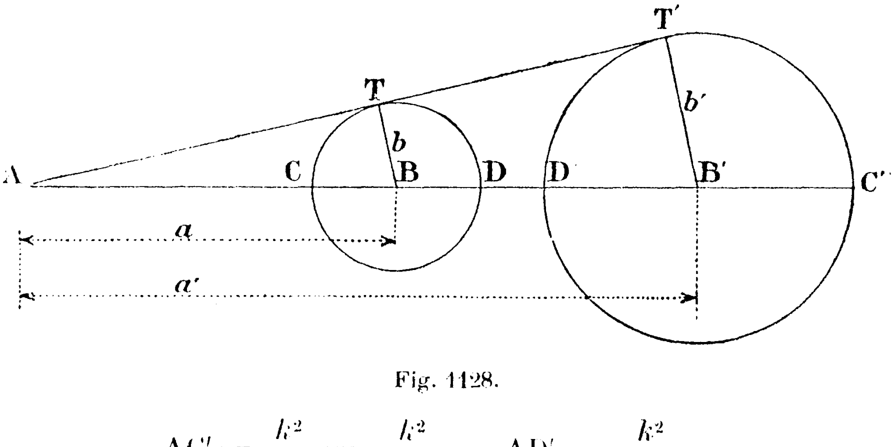



Fig. 1128.

$$AC' = \frac{k^2}{AC} = \frac{k^2}{a-b}, \quad AD' = \frac{k^2}{a+b},$$

$$a' = \frac{AC' + AD'}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{a-b} + \frac{k^2}{a+b}\right); \quad a' = \frac{ak^2}{a^2-b^2}, \quad (1)$$

$$b' = \frac{AC' - AD'}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{a-b} - \frac{k^2}{a+b}\right); \quad b' = \frac{bk^2}{a^2-b^2}. \quad (2)$$

*Remarque*. On pourrait employer aussi AT, AT′, au moins comme vérification; ainsi

$$AT' = \frac{k^2}{AT} = \frac{k^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} ; \quad AT'^2 = \frac{k^4}{a^2 - b^2} ;$$

or $$a'^2 - b'^2 = \frac{a^2k^4 - b^2k^4}{(a^2 - b^2)^2} = \frac{k^4}{a^2 - b^2} = AT'^2.$$

**Problème 634. — II.**

**1751 a**. *Lorsqu'un quadrilatère* HKLN *est à la fois inscrit à un cercle de centre* O, *de rayon* R, *et circonscrit à un cercle de centre* I, *de rayon* r, *établir la relation qui existe entre les rayons* R *et* r *et la distance* d *des centres* O *et* I.

En utilisant les questions déjà traitées (nos 749 et 1384 à 1392), inscrivons au cercle I un quadrilatère BCDE à diagonales rectangulaires, soit $AI = c$; par les sommets B, C, etc., menons des tangentes; le quadrilatère obtenu HKLN est circonscrit au cercle I, et il est inscriptible dans un cercle de centre O et de rayon R.

Le lieu du point M milieu de l'hypoténuse BC est un cercle ayant pour

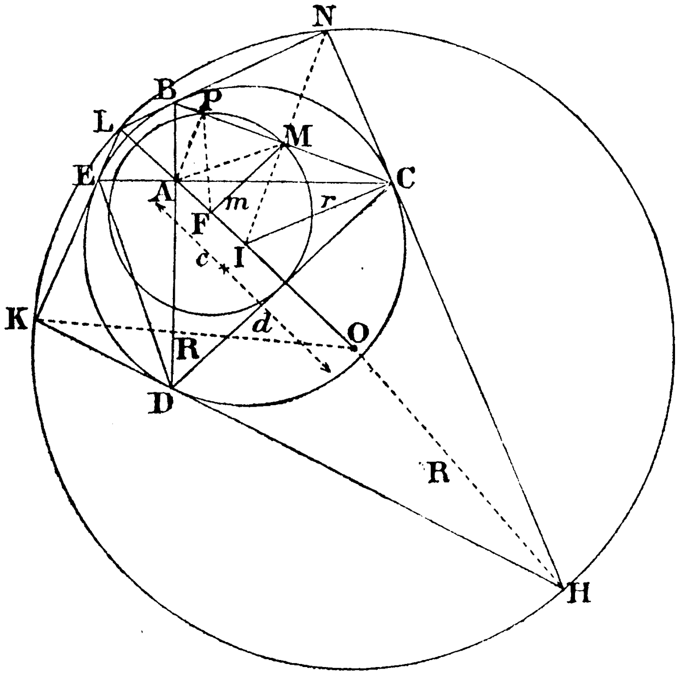



Fig. 1129.

centre le point F milieu de AI. Ce cercle passe aussi par le point P, projection du point A sur l'hypoténuse (nos 749 et 1386). AM médiane du triangle rectangle égale MC; la droite IMN est perpendiculaire au milieu de BC; on a donc : $$IM^2 + MC^2 = IC^2;$$

d'où $IM^2 = \frac{r^2}{2}$; ainsi $m^2$ ou $FM^2 = IM^2 - IF^2$;

$$m^2 \text{ ou } FM^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{c^2}{4}; \quad \text{d'où } FM = \frac{\sqrt{2r^2 - c^2}}{2}.$$

Le triangle rectangle ICN donne : $IN = \frac{r^2}{IM}$;

donc le point N est l'inverse du point M, par rapport à la puissance $r^2$ et au centre I d'inversion ; et par suite, ce point N décrit le cercle inverse du cercle que décrit le point M.

D'après la question précédente (n° 1751), il est facile de calculer la distance IO ou $d$ et le rayon R du cercle inverse : dans les formules (1) et (2) il faut remplacer $a'$ par $d$, $a$ par $\frac{c}{2}$, $b'$ par R, $b$ par $m$ et la puissance $k^2$ par $r^2$.

On trouve successivement :

$$d = \frac{\frac{c}{2}\cdot r^2}{\frac{c^2}{4} - \left(\frac{r^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right)}; \quad \text{d'où} \quad d = \frac{cr^2}{c^2 - r^2}, \tag{3}$$

$$\mathrm{R} = \frac{\frac{r^2\sqrt{2r^2 - c^2}}{2}}{\frac{c^2}{4} - \left(\frac{2r^2 - c^2}{4}\right)}; \quad \text{d'où} \quad \mathrm{R} = \frac{r^2\sqrt{2r^2 - c^2}}{c^2 - r^2}. \tag{4}$$

Éliminons $c$ entre (3) et (4), afin d'avoir une relation entre $r$, R et $d$.

En divisant (3) par (4) membre à membre, on a :

$$\frac{d}{\mathrm{R}} = \frac{cr^2}{r^2\sqrt{2r^2 - c^2}},$$

élevant au carré et transposant $2r^2d^2 = c^2(\mathrm{R}^2 + d^2)$ ;

d'où $$c^2 = \frac{2r^2d^2}{\mathrm{R}^2 + d^2}. \tag{5}$$

Mettons cette valeur dans (3) élevée au carré ; on obtient, toutes réductions faites, la relation demandée

$$(d^2 - \mathrm{R}^2)^2 - 2r^2(\mathrm{R}^2 + d^2) = 0. \tag{6}$$

**1751 b. Note.** 1° Les questions précédentes, nos 1751 et 1751 *a*, sont le résumé d'une intéressante *Note de géométrie*, par M. R. MALLOIZEL, alors professeur à Sainte-Barbe. (*J. M. E.*, de BOURGET et KOEHLER, 1879, p. 365) ; mais déjà J.-B. DURRANDE, dans les *Annales de Gergonne*, tome XV (1824, 1825), p. 133 à 145, avait étudié le quadrilatère à la fois inscriptible et circonscriptible ; l'auteur donne plusieurs théorèmes intéressants, ainsi que la formule

fondamentale $$d^2 = \mathrm{R}^2 + r^2 - r\sqrt{4\mathrm{R}^2 + r^2},$$

déduite de $$d^4 - 2(\mathrm{R}^2 + r^2)d^2 + \mathrm{R}^2(\mathrm{R}^2 - 2r^2) = 0,$$

qu'on peut écrire $$d^4 - 2\mathrm{R}^2d^2 + \mathrm{R}^4 = 2r^2d^2 - \mathrm{R}^2(\mathrm{R}^2 - 2r^2) + \mathrm{R}^4,$$

d'où $$(d^2 - \mathrm{R}^2)^2 = 2r^2d^2 + 2r^2\mathrm{R}^2,$$

formule donnée par M. MALLOIZEL et rappelée par M. MATHIEU.

2° *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, 1906, p. 146, vient de poser la question suivante (E.-N. BARISIEN, H.-B. MATHIEU) : De tous les quadrilatères inscrits et circonscrits dans deux cercles qui vérifient la relation (6), quel est celui de *périmètre maximum* ou de *surface maxima?*

Le quadrilatère de surface maxima, et par suite de périmètre maximum, est celui qui a pour axe de symétrie une de ses diagonales ; cette ligne est le diamètre qui passe par les deux centres I, O.

Le quadrilatère de *surface minima* est le trapèze isocèle ; sa hauteur est sur la ligne des centres.

En effet, *le produit des diagonales est constant* (LEUDESDORF, *N. A.*, 1879, p. 479, et 1880, p. 470).

En représentant les diagonales et leur angle par $m$, $n$, $\omega$, on a :

$$mn = \frac{8R^2r^2}{R^2 - d^2}. \qquad (8)$$

Or la surface du quadrilatère est donnée par $1/2\,mn \sin\omega$ ; donc le maximum à lieu quand les diagonales sont rectangulaires ; puis l'angle diminue, jusqu'à ce que le quadrilatère devienne un trapèze dont les bases sont perpendiculaires à la droite des centres O et I.

3° *La somme des distances du centre du cercle circonscrit aux quatre côtés* est égale à

$$\frac{mn}{2r} = r + \sqrt{r^2 + 4R^2}.$$

J. DÉPREZ.

(*Mathesis,* t. VIII, 1888, p. 237, q. 608.)

4° Voir aussi les *N. A.*, 1882, p. 330, la note de P.-V. SIHAEWEN, et surtout le *Journal de Mathématiques élémentaires de Longchamps,* t. XXI, 1897, pp. 9, 174, une série d'articles : *Relations métriques et trigonométriques entre les Eléments linéaires et angulaires du quadrilatère inscrit complet,* par LECOQ, ancien professeur à Avignon. Dans cette étude, on trouve le calcul des côtés du quadrilatère inscriptible et circonscriptible, la *formule de Durrande,* celle de LEUDESDORF, etc. (pp. 152, 154).

5° L'*Intermédiaire des Mathématiciens* a donné divers articles sur le théorème et sur les auteurs qui s'en sont occupés : 1907, p. 20, très belle étude par M. BOUTIN, p. 92, note de la *Rédaction* sur ce même sujet; p. 214, Bibliographie du *Quadrilatère de Poncelet,* par M. BROCARD ; 1908, p. 233, note par F. G.-M., et enfin 1909, p. 36, bel article par M. WELSCH.

6° Nicolas FUSS, en 1792, a étudié les quadrilatères inscriptibles et circonscriptibles ; il a donné en même temps la relation analytique qui lie les rayons R et $r$, ainsi que $d$, la distance des centres.

Plus tard, en 1827, Steiner est arrivé aux mêmes résultats que FUSS.

En posant : $\quad R + d = p \quad$ et $\quad R - d = q,$

on a : $\quad (p^2 - r^2)(q^2 - r^2) = r^4.$

*Journal de Crelle*, 1828, art. de JACOBI, alors professeur à Kœnigsberg (d'après les *N. A.*, 1845, p. 378, III à V).

## Surfaces à périmètre curviligne.

### Problème 635.

**1752.** *Exprimer, en fonction du rayon, la surface du segment qui a pour corde le côté des polygones réguliers inscrits suivants :*

1° *Hexagone ;* 2° *triangle ;* 3° *dodécagone.*

Soit : $\quad AB = BC = CD$ ;

puis $\quad CE = ED.$

AB est la corde de l'hexagone, AC celle du triangle, et DC celle du dodécagone.

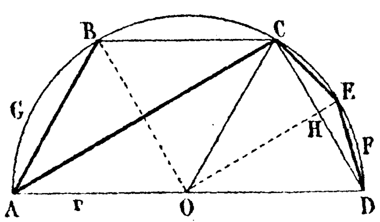


Fig. 1130.

1° $$\text{Secteur AOB} = \frac{\pi r^2}{6},$$

$$\text{triangle AOB} = \frac{r^2}{4}\sqrt{3}; \qquad \text{(G., n° 316, I)}$$

donc $$\text{segment AGB} = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2}{4}\sqrt{3} = r^2 \cdot \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}. \qquad (a)$$

2° $$\text{Secteur AOCB} = 2\text{AOBG} = \frac{\pi r^2}{3}.$$

Le triangle AOC est équivalent à $\text{AOB} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$;

donc $$\text{segment ABC} = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = r^2 \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}. \qquad (b)$$

3° $$\text{Secteur ODFE} = \frac{\pi r^2}{12}.$$

Le triangle DOE a pour mesure $\frac{1}{2}\text{OE} \cdot \text{DH}$,

ou $$\text{triangle DOE} = \frac{r^2}{4};$$

donc $$\text{segment DFE} = \frac{\pi r^2}{12} - \frac{3r^2}{12} = r^2 \cdot \frac{\pi - 3}{12}. \qquad (c)$$

**Problème 635. — I.**

**1753.** *Exprimer, en fonction du rayon, le segment dont la corde égale : 1° le côté du carré inscrit; 2° celui de l'octogone régulier.*

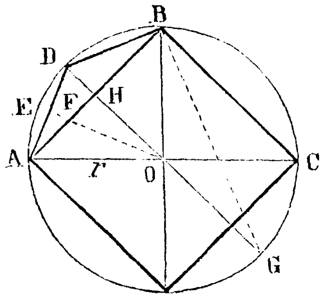


Fig. 1131.

1° $$\text{Secteur AOBD} = \frac{\pi r^2}{4},$$

$$\text{triangle AOB} = \frac{r^2}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{2r^2}{4};$$

donc

$$\text{segment ADB} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{2r^2}{4} = \frac{r^2}{4}(\pi - 2). \quad (d)$$

2° Soit : $\text{AD} = \text{DB}$.

Sans recourir à la formule générale qui donne le côté BD du polygone inscrit d'un nombre double de côtés, connaissant AB et DO, on peut calculer BD à l'aide du triangle rectangle DBG.

$$\text{OH} = \frac{r\sqrt{2}}{2}, \quad \text{donc} \quad \text{DH} = r - \frac{r}{2}\sqrt{2} = r\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$\text{BD}^2 = \text{DH} \cdot \text{DG} = 2r \cdot r\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right);$$

donc $$\text{BD} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

On pourrait ensuite calculer l'apothème OF; mais il est plus simple de prendre pour aire du triangle AOD le produit

$$\frac{\text{DO} \cdot \text{AH}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{r}{2} \times \frac{r}{2}\sqrt{2} = \frac{r^2}{4}\sqrt{2},$$

$$\text{secteur AODE} = \frac{\pi r^2}{8},$$

$$\text{segment AED} = \frac{\pi r^2}{8} - \frac{2r^2}{8}\sqrt{2} = r^2 \cdot \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{8}. \qquad (e)$$

**Problème 635. — II.**

**1754.** ***Exprimer, en fonction du rayon, le segment dont la corde est le côté : 1° du décagone régulier inscrit; 2° du pentagone régulier inscrit.***

1° *Décagone.* Le secteur $\text{ABCO} = \dfrac{\pi r^2}{10}$.

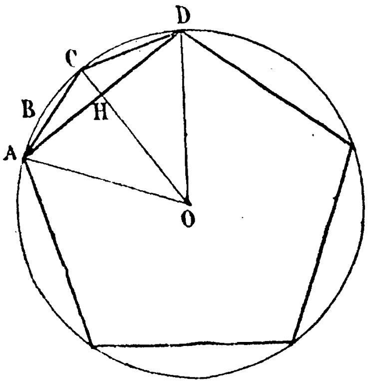



Fig. 1132.

Le triangle AOC à soustraire a pour base le rayon AO, et pour hauteur la moitié AH du côté du pentagone; or ce côté égale

$$\frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\,; \qquad \text{(G., n° 283)}$$

donc
$$\frac{\text{AO} \cdot \text{AH}}{2} = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{r^2}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$\text{segment ABC} = \frac{\pi r^2}{10} - \frac{r^2}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{r^2}{40}\left(4\pi - 5\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right). \qquad (f)$$

2° *Pentagone.* $\text{Secteur AODC} = \dfrac{\pi r^2}{5}$,

$$\text{triangle AOD} = \text{AH} \cdot \text{HO}.$$

Il faut donc calculer l'apothème

$$\text{HO}^2 = r^2 - \frac{\text{AD}^2}{4} = r^2 - \frac{r^2}{16}(10 - 2\sqrt{5}) = \frac{r^2}{16}(16 - 10 + 2\sqrt{5}),$$

$$\text{HO} = \frac{r}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}},$$

$$\text{AH} \cdot \text{HO} = \frac{r}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \times \frac{r}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{r^2}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$\text{segment ACD} = \frac{\pi r^2}{5} - \frac{r^2}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{r^2}{40}\left(8\pi - 5\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right). \qquad (g)$$

### Problème 635. — III.

**1755.** *Aire du segment circulaire à deux bases, limité par un côté de l'hexagone inscrit et par un côté du triangle équilatéral inscrit.*

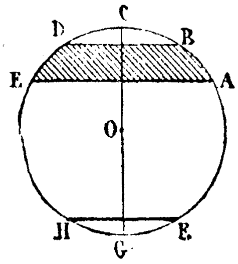


Fig. 1133.

Le segment à deux bases ABDE est la différence de deux segments à une base.

$$\text{ABCE} = r^2 \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12} \qquad (\text{n}^\circ\ 1752,\ b).$$

$$\text{BCD} = r^2 \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} \qquad (\text{n}^\circ\ 1752,\ a).$$

$$\text{ABDE} = r^2 \cdot \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi r^2}{6}.$$

Pour avoir AFHE, du cercle entier, il faut retrancher ACE et FGH

$$\text{AFHE} = \frac{12\pi r^2}{12} - r^2 \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12} - r^2 \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} = r^2 \cdot \frac{\pi + \sqrt{3}}{2},$$

$$\text{AFHE} = r^2 \cdot \frac{\pi + \sqrt{3}}{2}.$$

**Note.** Voir l'intéressante question (n° 1718 **a**). Segment circulaire à une base, de surface maxima, pour un arc de longueur donnée.

### Problème 636.

**1756.** *Quelle est la surface du cercle inscrit à un secteur circulaire dont l'angle au centre égale 60 degrés?*

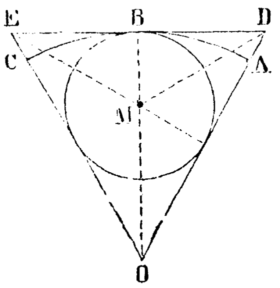


Fig. 1134.

Pour inscrire un cercle dans un secteur circulaire, on mène une tangente BDE par le point B, milieu de l'arc ABC, et l'on mène les bissectrices DM, EM, OM.

Pour un secteur de 60 degrés, le triangle est équilatéral, les bissectrices sont hauteurs et médianes.

Donc $\text{BM} = \frac{1}{3}\text{BO} = \frac{r}{3}$;

d'où cercle inscrit $= \frac{\pi r^2}{9}$.

### Problème 636. — I.

**1757.** *Quelle est la surface du cercle inscrit dans un secteur de 90 degrés?*

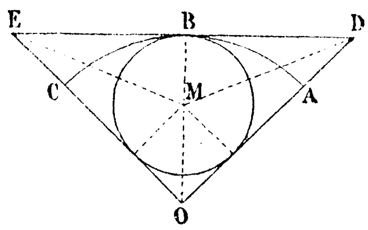


Fig. 1135.

$$\text{DE} = 2\text{OB} = 2r; \quad \text{OD} = \text{OE} = r\sqrt{2}.$$

Or le cercle inscrit a pour diamètre la somme des côtés de l'angle droit, diminuée de l'hypoténuse, ou

$$2r\sqrt{2} - 2r;$$

d'où $\text{BM} = r(\sqrt{2} - 1)$,

$$\text{cercle} = \pi r^2(\sqrt{2} - 1)^2 = \pi r^2(3 - 2\sqrt{2}).$$

**Problème 636. — II.**

**1758.** *Quelle est la surface du cercle inscrit dans un secteur de 120 degrés ?*

L'angle LMN des rayons de contact égale 60 degrés; donc MO est le côté d'un triangle équilatéral dont MN est la hauteur.

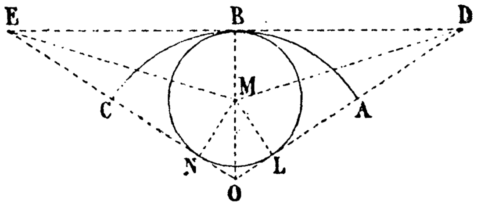



Fig. 1136.

Ainsi $$\mathrm{MO} = \frac{2\mathrm{MN}}{\sqrt{3}}, \qquad \text{(G., n}^{\text{o}}\text{ 316, 1}^{\text{o}}\text{)}$$

$$\mathrm{OB} \quad \text{ou} \quad r = \mathrm{MN} + \frac{2\mathrm{MN}}{\sqrt{3}} = \mathrm{MN} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}};$$

d'où $$\mathrm{MN} = \frac{r\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}},$$

$$\text{cercle M} = \pi r^2 \cdot \frac{3}{7+4\sqrt{3}} = \pi r^2 \frac{3(7-4\sqrt{3})}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})},$$

$$\text{cercle M} = 3\pi r^2 (7 - 4\sqrt{3}).$$

**Problème 637.**

**1759.** *Pour construire l'ovale au tiers point, on divise* AA' *ou* 2a *en trois parties égales,* C *est le centre de l'arc* EF; D' *est celui de* EE'. *Quelle est la surface de l'ovale en fonction de* a?

La surface se compose de deux secteurs de 60° ayant DF pour rayon, et de deux secteurs de 120° de rayon CF; le tout diminué de deux triangles équilatéraux ayant CD = CF pour côté

$$\mathrm{S} = \frac{1}{3}\pi \mathrm{DF}^2 + \frac{2}{3}\pi \mathrm{CF}^2 - \mathrm{CDC'D'}. \quad (1)$$

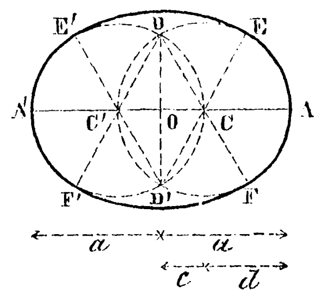



Fig. 1137.

Or $$\mathrm{DF} = 2d = \frac{4}{3}a; \quad \mathrm{CF} = d = \frac{2}{3}a,$$

$$\mathrm{CDC'D'} = \frac{2d^2}{4}\sqrt{3},$$

$$\mathrm{S} = \frac{1}{3}\pi \cdot 4d^2 + \frac{2}{3}\pi d^2 - \frac{1}{2}d^2\sqrt{3},$$

$$\mathrm{S} = 2\pi d^2 - \frac{1}{2}d^2\sqrt{3} = d^2\left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (2)$$

Mais $$d^2 = \frac{4}{9} a^2;$$

donc $$S = \frac{4}{9} a^2 \left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \qquad (3)$$

*Remarque.* Le périmètre de l'ovale est donné par

$$\frac{1}{3} \pi DF + \frac{2}{3} \pi CF = \frac{4}{3} \pi d = \frac{16}{9} \pi a.$$

### Problème 637. — I.

**1760.** *Question analogue; le triangle* CDC′ *est encore équilatéral, mais* c *n'est point la moitié de* d.

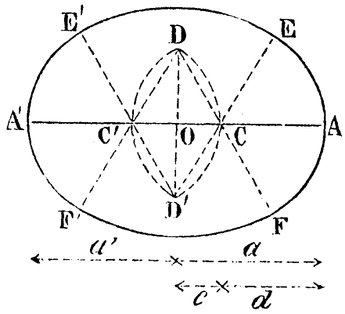



Fig. 1138.

La formule (1) est encore vraie, elle devient :

$$S = {}^1/_3\pi(2c + d)^2 + {}^2/_3\pi d^2 - 2c^2\sqrt{3},$$

rayon $DF = 2c + d$, car le côté du triangle équilatéral $= 2c$.

### Problème 638.

**1761.** *Quelle est la surface de l'ovale obtenu en divisant* AA′ *ou* 2a *en quatre parties égales?*

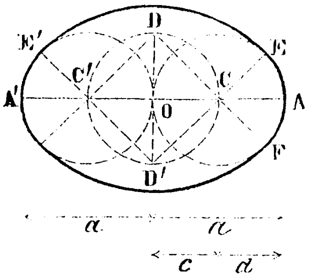



Fig. 1139.

La surface se compose de deux quarts de cercle ayant DF pour rayon, plus de deux quarts de cercle ayant AC pour rayon, moins le carré CDC′D′.

Soit : $$CO = CA = d = \frac{a}{2}.$$

On a : $$S = \frac{a^2}{4}\left[\pi(2 + \sqrt{2}) - 2\right].$$

*Remarque.* Le périmètre de l'ovale est donné par

$$\pi DF + \pi CF,$$

$$p = \pi d(1 + \sqrt{2}) + \pi d = \pi d(2 + \sqrt{2}).$$

**Problème 638. — I.**

**1762.** *Question analogue* (Voir n° 1761); *la figure* CDC′D′ *est encore un carré, mais* c *n'égale pas* d.

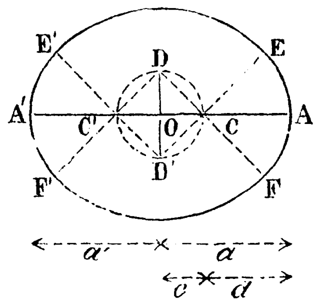



Fig. 1140.

On obtient : $S = {}^1/_2\pi(c\sqrt{2} + d)^2 + {}^1/_2\pi d^2 - 2c^2.$

**Problème 638. — II.**

**1763.** *Quelle est la surface de l'anse de panier formée par trois arcs de* 60° ?

On connaît la corde $AA' = 2a$ et la flèche $OB = b$.

Rappelons la construction de la courbe. (G., n° 1004.) On décrit une demi-circonférence ADA′; on inscrit un demi-hexagone régulier ANN′A′, et l'on joint D à N et N′.

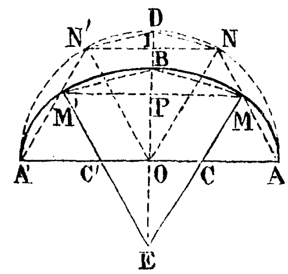



Fig. 1141.

Par le point B, on mène BM parallèle à DN et MCE parallèle à NO, etc. Les triangles AMC, MEM′, A′M′C′ sont équilatéraux. Les points C, E, C′ sont les centres respectifs des arcs AM, BM′ et M′A′.

La surface se compose de trois secteurs de 60° moins le triangle équilatéral CEC′. Tout revient donc à calculer les rayons AC et EM en fonction des données $a$ et $b$.

Voir 2e et 3e éditions des *E. de G.*

**Problème 639.**

**1764.** *On donne trois cercles égaux tangents deux à deux; exprimer l'aire de la surface curviligne comprise entre les trois cercles, en fonction du rayon* r *de ces cercles.*

La surface curviligne égale celle du triangle équilatéral ABC diminuée de trois secteurs, dont chacun d'eux est le sixième du cercle correspondant.

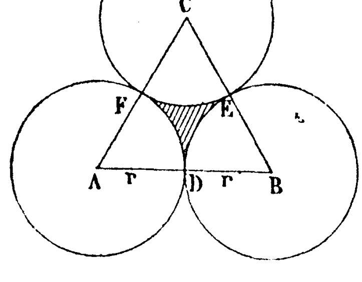



Fig. 1142.

1° Le triangle équilatéral, dont $a$ est la base, a pour surface :

$$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}. \quad \text{(G., n° 316, 1.)}$$

La base égale $2r$; donc

$$ABC = \frac{4r^2}{4}\sqrt{3} = r^2\sqrt{3}.$$

2° Les trois secteurs égaux correspondent à un demi-cercle ou $\frac{\pi r^2}{2}$;

donc $$DEF = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right).$$

**Problème 639. — I.**

**1765**. *Quelle est la surface curviligne comprise entre quatre cercles égaux tangents deux à deux et dont les centres sont les sommets d'un carré?*

Soit $r$ le rayon. Le carré $= 4r^2$.

Il faut en soustraire quatre secteurs de 90° ou $\pi r^2$; donc

$$\text{aire curviligne } r^2(4 - \pi).$$

**Problème 639. — II.**

**1766**. *Les centres de quatre cercles égaux, tangents deux à deux, sont les sommets d'un losange dont le côté égale une des diagonales; exprimer la surface curviligne comprise entre les quatre cercles, en fonction du rayon* r.

1° Le losange est formé par deux triangles équilatéraux dont le côté égale $2r$.

En fonction du côté $a$, le triangle équilatéral égale $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; donc

$$\text{losange égale } 2r^2\sqrt{3}.$$

2° Il faut en soustraire deux secteurs de 60° et deux de 120°, soit en tout un cercle complet ou $\pi r^2$; donc

$$\text{surface curviligne égale } r^2(2\sqrt{3} - \pi).$$

**Problème 640.**

**1767**. *Du point milieu de chaque côté d'un carré, avec la moitié de ce côté pour rayon, on décrit quatre demi-cercles. Quelle est la surface du quatre-feuilles ainsi obtenu?*

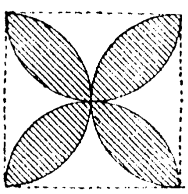


Fig. 1143.

Soit $r$ le rayon, le côté du carré sera $2r$.

La somme des quatre demi-circonférences égale le carré plus le *quatre-feuilles;* donc l'espace curviligne demandé égale

$$2\pi r^2 - 4r^2 = 2r^2(\pi - 2).$$

*Remarque*. L'espace curviligne, formant une *croix de Malte*, égale le carré diminué du quatre-feuilles, soit :

$$4r^2 - (2\pi r^2 - 4r^2) \quad \text{ou} \quad 2r^2(4 - \pi).$$

### Problème 640. — I.

**1768.** *Un triangle rectangle isocèle* MAN *et un triangle équilatéral* MBN *ont même base, et le sommet* A *de l'angle droit est sur la hauteur* OB *du triangle équilatéral. Du point* A, *comme centre, avec* AM *pour rayon, et du point* B *avec* BM, *on décrit des circonférences. Exprimer les trois parties curvilignes obtenues : 1° en fonction de* BM ; 2° *en fonction de* AM.

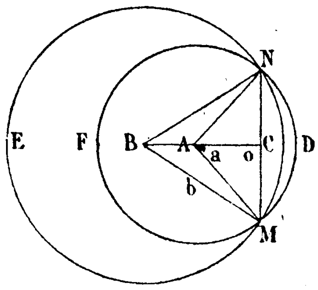


Fig. 1144.

Il suffit d'évaluer directement les segments MCN, MDN.

Or, en fonction du rayon $b$, le segment MCN qui correspond à 60° est donné par

$$\frac{b^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) \qquad (\text{n}^\circ\ 1752\ a). \qquad (1)$$

Le segment MDN qui correspond à un angle droit est donné par

$$\frac{a^2}{4}(\pi - 2) \quad \text{ou} \quad \frac{b^2}{8}(\pi - 2); \qquad (2)$$

donc la *lunule* MCND $= (2) - (1)$.

$$\text{MCND} = \frac{b^2}{24}\left[-\pi + 6(-1 + \sqrt{3})\right]. \qquad (3)$$

En fonction de $a$, le facteur $\frac{b^2}{24}$ devient $\frac{a^2}{12}$.

2° La partie MCNF, commune aux deux cercles, égale $\pi a^2 - (3)$.

3° La lunule MENF égale la différence des cercles plus (3).

### Théorème 640. — II.

**1768 a.** Complément du théorème des lunules d'Hippocrate (n° 1577).

1° *Le cercle maximum inscrit à chaque lunule a pour diamètre le rayon même du cercle inscrit au triangle* ABC.

2° *Il en est de même du cercle maximum inscrit dans le bissegment déterminé par les cercles qui ont* AB *et* AC *pour diamètre.*

3° *La somme des lunules est égale au carré de la tangente commune à ces lunules.*

1° et 3° Le rayon du cercle inscrit au triangle rectangle ABC est la moitié de $b + c - a$ (n° 741); or

$$\text{le diamètre du cercle M} = \frac{c}{2} - \left(\frac{a - b}{2}\right) = \frac{b + c - a}{2},$$

$$\text{le diamètre du cercle N} = \frac{b}{2} - \left(\frac{a - c}{2}\right) = \frac{b + c - a}{2},$$

$$\text{le diamètre du cercle L} = \text{aussi } \frac{b + c - a}{2}.$$

$$t^2 \quad \text{ou} \quad FG^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 = \frac{bc}{2}.$$

Ainsi le carré de la tangente égale l'aire du triangle ABC, et, par suite, égale la somme des lunules.

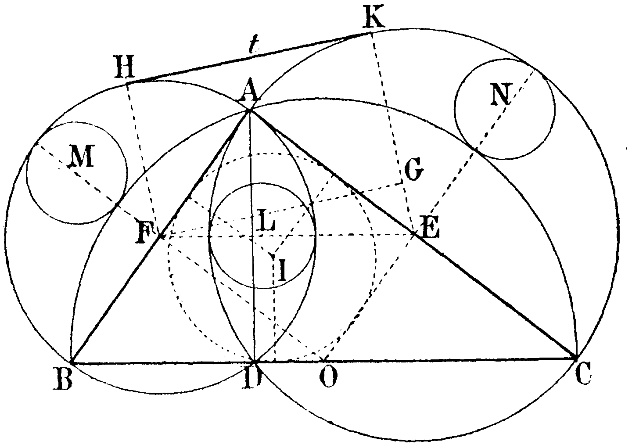



Fig. 1144 *bis*.

**Note.** Les théorèmes 1° et 3° sont de M. G. LEMAIRE. Le n° 2° est de M. H. BROCARD. (*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1909, p. 195, q. 3006; 1910, p. 252; 1911, p. 9 et 10.)

Cette même publication, en 1906, avait donné diverses indications bibliographiques pour répondre à la question 3009 de M. WIELEITNER (Spire). Voir surtout l'article de M. BROCARD, puis les notes de MM. BRAID et PLAKHOVO. (*I. M.*, 1906, p. 33, q. 3009; p. 133 et 223, réponses.)

La géométrie grecque de Paul TANNERY parle aussi des *Lunules* (p. 118, n° 18).

La note ci-dessus complète celle du n° 1577 **a**.

### Problème 641.

**1769.** *Chaque sommet d'un triangle équilatéral étant pris pour centre et le côté étant le rayon, si l'on décrit trois arcs, on obtient un triangle équilatéral curviligne dont on demande d'exprimer l'aire en fonction du côté* a *du triangle équilatéral.*

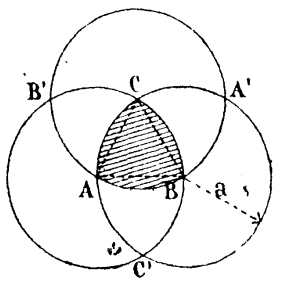



Fig. 1145.

1° La surface curviligne ABC est composée d'un triangle équilatéral $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, augmenté de trois segments de 60° (n° 1752).

$$\text{Donc} \quad ABC = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + a^2 \cdot \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{4}(2\pi - 3\sqrt{3} + \sqrt{3}),$$

$$ABC = \frac{a^2}{2}(\pi - \sqrt{3}).$$

2° On peut considérer la surface curviligne comme composée de trois secteurs de 60° moins deux fois le triangle équilatéral, ou d'un demi-cercle moins deux fois le triangle

$$ABC = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{2}(\pi - \sqrt{3}). \qquad (1)$$

**1769 a. Note.** On peut compléter le problème précédent.

*En circonscrivant un cercle aux trois cercles déjà décrits, on obtient trois groupes de trois triangles curvilignes, dont on demande la surface.*

1°, BA'C ; 2°, A'BC' ; 3° B''A'C'',

*en appelant* B'' *et* C'' *les points de contact du cercle circonscrit, et des cercles de centre* B *et* C.

(H. BROCARD.)

$$R = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

1° ou $$BA'C = \frac{a^2}{2}\left(\frac{3\pi}{4} - \sqrt{3}\right).$$

2° ou $$A'BC' = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}\right).$$

3° ou $$B''A'C'' = \frac{a^2}{2}\left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{9} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

(*Mathesis*, 1899, p. 100, question 1176.)

### Problème 641. — I.

**1770.** *Surface de l'étoile curviligne triangulaire :*

AC'BA'CB'A (fig. 1145).

Cette surface égale trois fois le bissegment ABA'C, moins deux fois le triangle curviligne ABC.

Mais le bissegment ABA'C égale deux fois le segment qui correspond au triangle équilatéral; donc les trois bissegments égalent six segments de 120°; ainsi la surface demandée égale (n° 1752 **b**)

$$\frac{a^2}{2}(4\pi - 3\sqrt{3}) - \frac{2a^2}{2}(\pi - \sqrt{3}) = \frac{a^2}{2}(2\pi - \sqrt{3}); \qquad (2)$$

c'est-à-dire le triangle curviligne ABC plus le demi-cercle de rayon $a$.

### Problème 642.

**1771.** *De chaque sommet d'un carré comme centre, avec le côté* r *pour rayon, on décrit un quart de cercle. Quelle est la surface de l'espace quadrangulaire curviligne* EFGH *compris entre les quatre arcs se coupant deux à deux?*

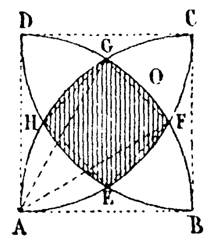


Fig. 1146.

On sait que, par la construction effectuée, l'arc DGFB est divisé en trois parties égales (n° 910).

Donc la figure curviligne se compose d'un carré dont le côté FG est celui du dodécagone inscrit, plus quatre segments circulaires tels que FOG ayant pour corde le côté du dodécagone.

Or le côté du dodécagone égale $r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (n° 1448).

$$\text{Carré} = r^2(2 - \sqrt{3}).$$

Un segment FOG $= r^2 \dfrac{\pi - 3}{12}$ ; quatre segments égalent $r^2 . \dfrac{\pi - 3}{3}$ ;

donc figure curviligne $EFGH = \dfrac{3r^2(2-\sqrt{3}) + r^2(\pi - 3)}{3}$,

ou $$\frac{r^2\left[\pi + 3(1-\sqrt{3})\right]}{3}. \qquad (1)$$

*Remarque.* Pour calculer CGOF, on emploierait AFCH

$$\text{bissegment} = r^2\,\frac{\pi - 2}{2}. \qquad (2)$$

(2) — (1) donnerait le double de l'aire de CGOF.

**Problème 642. — I.**

**1772.** *Un triangle équilatéral a pour côté 2 mètres. De chacun des sommets comme centre, et avec 1 mètre de rayon, on décrit un cercle. On a ainsi trois cercles égaux et tangents deux à deux. Il s'agit : 1° de construire le cercle qui les enveloppe et celui qu'ils enveloppent tangentiellement ; 2° d'évaluer les rayons de ces nouveaux cercles et de prendre leur moyenne géométrique ; 3° de comparer ce rayon moyen avec le rayon du cercle inscrit au triangle.* (Baccalauréat, 1857.)

Afin que la solution soit générale, représentons le côté du triangle équilatéral par $a$.

1° Il faut déterminer le centre O du triangle équilatéral.

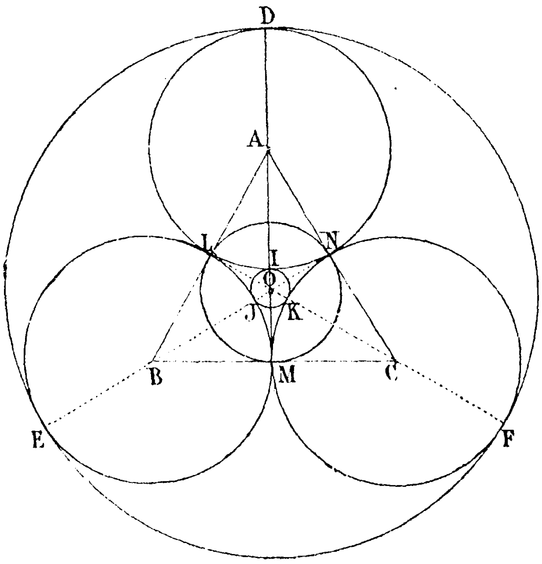



Fig. 1147.

OD et OI sont les rayons demandés ; OM est celui du cercle inscrit.

2° On sait que $$AM = \frac{a}{2}\sqrt{3}. \qquad \text{(G., n° 316, I.)}$$

Puis $$AO = \frac{2}{3}\,AM ; \quad \text{donc} \quad AO = \frac{a}{3}\sqrt{3}.$$

Or $$OD = AO + \frac{a}{2} = \frac{a}{3}\sqrt{3} + \frac{a}{2} = \frac{a}{6}(2\sqrt{3} + 3), \qquad (1)$$

$$OI = AO - \frac{a}{2} = \frac{a}{6}(2\sqrt{3} - 3). \qquad (2)$$

Moyenne géométrique

$$\sqrt{\left[\frac{a}{6}(2\sqrt{3}+3)\cdot\frac{a}{6}(2\sqrt{3}-3)\right]}=\frac{a}{6}\sqrt{3}.$$

3° $$\text{OM}=\frac{\text{AM}}{3}=\frac{a}{6}\sqrt{3}.$$

Ainsi $$\text{OM}=\sqrt{\text{OD}\cdot\text{OI}}.$$

*Remarque.* Lorsque $a=2$, on a :

$$\text{OD}=\frac{1}{3}(2\sqrt{3}+3),\quad \text{et}\quad \text{OI}=\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-3).$$

**1772 a. Note.** Pour trois cercles quelconques, ayant A, B, C pour centres et *a, b, c* pour rayons, calculer le rayon *d* du cercle qui passe par les trois points de contact des trois premiers considérés deux à deux, et le rayon *e* du cercle qui passe par les trois centres. *Annales de Gergonne,* t. V (1814-1815), p. 32. La solution par J.-B. DURRANDE est dans le même volume, p. 301.

$$d=\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}},\quad e=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4\sqrt{abc(a+b+c)}}.$$

Voir aussi les *Nouvelles Annales,* 1876, p. 318, par AUBERT, professeur Rennes, et *Mathesis,* 1896, pp. 33 et 60, très belle étude par E.-N. BARISIEN

**Théorème 642. — II.**

**1772 b.** *On considère trois cercles tangents extérieurement deux à deux. Si* $\rho_1$ *et* $\rho_2$ *désignent les rayons des cercles tangents aux trois premiers, et si* r *est le rayon du cercle inscrit dans le triangle ayant pour sommets les centres des trois premiers cercles, on a la relation :*

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{4}{r}$$ (E.-N. BARISIEN).

(*Mathesis,* 1905, p. 136, question 1501 ; note d'après M. PLAKHOVO. Voir aussi *J. M. S.,* 1890, p. 265, LAUVERNAY.)

**Lieu 642. — III.**

**1773.** *Par les deux extrémités d'une droite* AB *et d'un même côté de cette droite, on lui élève deux perpendiculaires* AC *et* BD *telles que l'aire du trapèze* ABCD *ait une valeur constante donnée. Du milieu* E *de la droite* AB, *on abaisse une perpendiculaire* EM *sur la droite* CD. *Trouver le lieu décrit par le point* M *de cette perpendiculaire, quand on fait varier les longueurs des perpendiculaires* AC *et* BD.

*Même problème quand les lignes* AC *et* BD, *au lieu d'être perpendiculaires à* AB, *sont parallèles à une droite fixe donnée.* (Concours général de 1880, classe de troisième.)

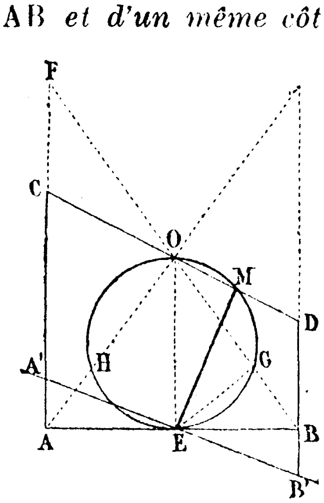


Fig. 1148.

Soit ABCD le trapèze ayant l'aire donnée $k^2$, et OE la base moyenne du trapèze.

L'aire égale AB . OE ; donc $\text{OE}=\dfrac{k^2}{\text{AB}}$.

Donc le côté CD passe par un point fixe O, facile à déterminer.

Soit EM la perpendiculaire abaissée du point milieu E de AB sur CD.

Le lieu du point M est la circonférence décrite sur OE comme diamètre.

*Remarques.* 1° BAF est le trapèze limite, une des bases est nulle; ainsi, aux termes de l'énoncé, l'arc GMOH répond seul à la question.

Si on prenait les bases au-dessous de AB, il y aurait un second arc symétrique du premier par rapport à AB.

2° Soit A'B' le côté donné et les bases A'C, B'D menées dans la direction voulue. Abaissons la perpendiculaire AEB sur les bases, on aura :

$$AB \cdot OE = k^2;$$

d'où

$$OE = \frac{k^2}{AB},$$

et le lieu est encore la circonférence décrite sur OE comme diamètre.

## Questions diverses.

### Problème 642. — IV.

**1773 a.** *En prenant le rayon pour unité de longueur, calculer d'abord l'apothème de l'hexagone régulier inscrit, puis le rayon et l'apothème des polygones réguliers isopérimétriques de 12, 24, 48, 96... côtés, et déduire de ces calculs une valeur approchée de* $\pi$.

Soient $a$ et $r$ l'apothème et le rayon de l'hexagone, $a'$ et $r'$ l'apothème et le rayon inconnus, les *formules de Schwab* (G., n° 289) serviront de base aux calculs

$$a' = \frac{a+r}{2}, \quad r' = \sqrt{a'r}.$$

Voici les valeurs que le calcul fournit, en employant les tables de logarithmes à cinq décimales :

| Côtés. | Apothème. | Rayon. |
|---|---|---|
| 6 | 0,866025 | 1,000000 |
| 12 | 0,933012 | 0,965930 |
| 24 | 0,949471 | 0,957660 |
| 48 | 0,953565 | 0,955600 |
| 96 | 0,954582 | 0,955090 |
| 192 | 0,954836 | 0,954962 |
| 384 | 0,954899 | 0,954925 |
| 768 | 0,954912 | 0,954925 |

Le rayon du cercle de même périmètre est compris entre l'apothème et le rayon du dernier polygone; on peut prendre la moyenne des deux dernières valeurs et dire que pour une circonférence de 6 mètres, le rayon est $0^{m},954918$.

La circonférence égale $2\pi r$, et la demi-circonférence $\pi r$.

On a donc $\pi(0,954918)=3$; d'où $\pi=\frac{3}{0,954918}=3,14157$.

On peut compter sur cinq chiffres, et poser :

$$\pi=3,1416.$$

**Problème 642. — V.**

**1773 b.** *Appliquer au calcul du nombre $\pi$ les formules de* SAURIN $P'=\frac{2pP}{p+P}$, *et* $p'=\sqrt{pP'}$, *en partant des carrés inscrit et circonscrit à un cercle de 1 mètre de rayon* (voir n° 1458).

La *méthode des périmètres*, due à ARCHIMÈDE, a conduit SAURIN aux formules que nous allons employer.

Le rayon étant 1, le côté du carré inscrit est exprimé par $\sqrt{2}$ (G., n° 274, 3°), et le périmètre est $4\sqrt{2}$. Le côté du carré circonscrit est 2, et le périmètre est 8. Ainsi, dans le premier calcul, on a :

$$p=4\sqrt{2}, \quad \text{et} \quad P=8.$$

En faisant les calculs par logarithmes à cinq décimales, on trouve les résultats suivants :

| Côtés. | P. | p. |
|---|---|---|
| 4 | 8,000000 | $4\sqrt{2}$ |
| 8 | 6,62742 | 6,12300 |
| 16 | 6,36514 | 6,24286 |
| 32 | 6,30336 | 6,27300 |
| 64 | 6,28857 | 6,28079 |
| 128 | 6,28454 | 6,28257 |
| 256 | 6,28343 | 6,28300 |
| 512 | 6,28329 | 6,28314 |
| 1024 | 6,28321 | 6,28314 |

La circonférence étant comprise entre les deux derniers périmètres calculés, on peut poser :

Circonférence de 1 mètre de rayon . . . . $6^{m},28318$
En divisant par le diamètre . . . . . . $2^{m},00000$
On obtient le nombre $\pi$ . . . . . . . . $3^{m},14159$

**Problème 642. — VI.**

**1773 c.** *Appliquer au calcul du nombre $\pi$ les formules de* GREGORY,

$$a'=\sqrt{aA}, \quad et \quad A'=\frac{2aA}{a+a'},$$

*en partant des carrés inscrit et circonscrit à un cercle de 1 mètre de rayon.*

Les *formules* que nous venons de rappeler, d'après l'exercice 633, n° 1748, permettent de calculer successivement les aires des polygones réguliers inscrits et circonscrits de 8, 16, 32... côtés. Or, à mesure que se multiplie le nombre des côtés, les polygones tendent vers le cercle; et par conséquent l'aire de ces polygones tend vers la valeur $\pi r^2$, qui exprime l'aire du cercle. Et comme ici on suppose $r = 1$, l'expression $\pi r^2$ se réduit à $\pi$.

Ainsi, en calculant les aires des polygones successifs, on pourra affirmer que $\pi$ est une valeur intermédiaire entre les nombres qui expriment les aires des polygones inscrit et circonscrit d'un même nombre de côtés; et si ces nombres ont, sur la gauche, des chiffres communs, ces chiffres appartiendront nécessairement au nombre $\pi$.

Les formules trouvées ci-dessus sont analogues à celles que SAURIN a données pour le calcul des périmètres (nº 1458). Le calcul logarithmique y est analogue aussi, et il présente dans les deux cas l'inconvénient de trop nombreux passages des nombres aux logarithmes et des logarithmes aux nombres.

On obvie à cet inconvénient en considérant, non les quantités elles-mêmes, mais leurs *inverses* ou *réciproques*.

On appelle *nombres inverses* deux nombres dont le produit est 1.

Deux nombres inverses ont 1 pour moyenne géométrique; connaissant l'un des deux nombres, on trouve facilement l'autre.

Soient A, B, C, D, quatre nombres tels que l'on ait les deux relations

$$C = \sqrt{AB}, \quad \text{et} \quad D = \frac{2AB}{A+C}.$$

Appelons $a$, $b$, $c$, $d$ les inverses des nombres considérés. On aura :

$$A = \frac{1}{a}, \quad B = \frac{1}{b}, \quad C = \frac{1}{c}, \quad D = \frac{1}{d}.$$

La première relation devient :

$$\frac{1}{c} = \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Les deux expressions extrêmes ayant les numérateurs égaux, les dénominateurs le sont aussi; et l'on a : $c = \sqrt{ab}$. Ainsi, *lorsque trois nombres sont tels que l'un d'eux est une moyenne géométrique entre les deux autres, la même relation existe entre les inverses de ces trois nombres.*

La seconde relation devient :

$$\frac{1}{d} = \frac{2 \cdot {}^1/a \cdot {}^1/b}{{}^1/a + {}^1/c}; \quad \text{d'où, en renversant} \quad d = \frac{{}^1/a + {}^1/c}{2 \cdot {}^1/ab}.$$

Multiplions numérateur et dénominateur par $ab$, il vient :

$$d = \frac{b + ab/c}{2} = {}^1/_2\left(b + \frac{ab}{c}\right).$$

Or, d'après la première relation, on a : $c^2 = ab$; donc $d = {}^1/_2(b + c)$. Ainsi $d$ est une moyenne arithmétique entre $b$ et $c$.

Les relations que nous venons de supposer entre les quatre nombres A, B, C, D, sont précisément celles qui existent entre les quatre symboles donnés $a$, A, $a'$, A'

$$a' = \sqrt{aA}, \quad \text{et} \quad A' = \frac{2aA}{a + a'}.$$

Donc, *si nous convenons de désigner par ces quatre mêmes symboles les inverses des nombres primitifs*, nous poserons :

$$a' = \sqrt{a\mathrm{A}}, \quad \text{et} \quad \mathrm{A}' = \frac{\mathrm{A} + a'}{2}$$

Le calcul est ainsi ramené à des moyennes géométriques et arithmétiques, alternativement.

Il est évident que les valeurs que l'on trouvera pour $p'$ et $\mathrm{P}'$ tendront vers le nombre inverse de $\pi$, ou 0,31831.

RÉSULTATS OBTENUS

*Nombres inverses des aires des polygones.*

| Côtés. | $a$. | A. |
|---|---|---|
| 4 | 0,500000 | 0,025000 |
| 8 | 0,353550 | 0,031775 |
| 16 | 0,326638 | 0,314206 |
| 32 | 0,320365 | 0,317285 |
| 64 | 0,318823 | 0,318054 |
| 128 | 0,318439 | 0,318246 |
| 256 | 0,318342 | 0,318294 |
| 512 | 0,318315 | 0,318304 |
| 1024 | 0,318308 | 0,318306 |

Nous devons arrêter là ces calculs, car nous ne pouvons com sur les cinq premiers chiffres; on peut donc poser :

$$\frac{1}{\pi} = 0,31831; \quad \text{d'où} \quad \pi = 3,14157.$$

La valeur de $\pi$, donnée avec cinq chiffres, sera donc 3,1416.

**Problème 642. — VII.**

**1773 d.** *Appliquer au calcul du nombre $\pi$ les formules de* Legendre :

$$\mathrm{r}' = \sqrt{\mathrm{ar}}, \quad et \quad \mathrm{a}' = \mathrm{r}'\sqrt{\frac{\mathrm{r}+\mathrm{a}}{2\mathrm{r}}},$$

(*exercice* 634, nº 1750), *en partant d'un carré qui a* 1 *pour côté.*

A mesure que grandit le nombre des côtés du polygone régulier de surface constante, la forme de ce polygone tend vers le cercle, ainsi le rayon et l'apothème tendent à se confondre en une valeur unique, qui est celle du rayon du cercle équivalent au polygone.

Le carré de 1 mètre de côté a un 1 mètre carré de surface; telle sera aussi la surface de tous les polygones successifs et du cercle lui-même.

Et comme l'aire du cercle a pour formule $\pi r^2$, on posera :

$$\pi r^2 = 1; \quad \text{d'où} \quad \pi = \frac{1}{r^2}.$$

Il faut donc calculer le rayon et l'apothème des polygones successifs jusqu'à ce que les décimales que l'on conservera soient communes. On aura alors, au même degré d'approximation, le rayon du cercle qui a 1 mètre carré de surface, et on déduira la valeur de $\pi$.

L'emploi des *formules de Legendre* donne les résultats suivants :

Le rayon du carré est la moitié de la diagonale, et l'apothème est la moitié du côté :

$$r = {}^1/_2\sqrt{2}, \quad \text{et} \quad a = {}^1/_2.$$

RÉSULTATS OBTENUS

| Côtés. | $r$. | $a$. |
|---|---|---|
| 4 | 0,707108 | 0,500000 |
| 8 | 0,594612 | 0,549344 |
| 16 | 0,571529 | 0,560543 |
| 32 | 0,566014 | 0,563294 |
| 64 | 0,564650 | 0,563962 |
| 128 | 0,564312 | 0,564150 |
| 256 | 0,564225 | 0,564186 |
| 512 | 0,564206 | 0,564193 |
| 1024 | 0,564200 | 0,564200 |

Dans le polygone régulier de 1024 côtés, le rayon et l'apothème ont la même expression numérique quant aux cinq premiers chiffres, les seuls sur lesquels nous puissions compter dans l'usage des tables logarithmiques à cinq décimales.

On peut donc poser aussi pour le cercle équivalent à ce polygone :

$$r = 0^{\text{m}},56420.$$

Or l'aire de ce cercle est de 1 mètre carré, comme pour chacun des polygones sur lesquels ont porté les calculs. On a donc :

$$\pi r^2 = 1\,; \quad \text{d'où} \quad \pi = \frac{1}{r^2} = 3,1415.$$

**Valeur de π 642. — VIII.**

**1773 e.** Archimède a donné $\frac{22}{7}$ pour valeur approchée de π ; Adrien Métius a fait connaître le rapport $\frac{113}{355}$ ; les calculateurs modernes, Sharps, Lagny, etc., ont obtenu la valeur de π à l'aide de séries et ont poussé l'approximation à un point tel que ce n'est plus, ce semble, qu'une spéculation stérile.

On peut consulter les *Nouvelles Annales de mathématiques* (1850, p. 12 ; 1851, p. 198 ; 1854, p. 418, et 1855, p. 209), ainsi que l'*Association française pour l'avancement des sciences*, 1879, Montpellier, article par F. Ritter, ingénieur des ponts et chaussées.

Comme curiosité, nous donnons π avec quarante chiffres :

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971

Voici le nombre de chiffres obtenu par divers calculateurs, en réduisant en décimales les rapports fractionnaires donnés par les premiers géomètres :

| | |
|---|---|
| Archimède (décimales exactes) . . . . . . . . | 2 |
| Les astronomes indiens . . . . . . . . . . | 3 |
| François Viète (en 1579) . . . . . . . . . . | 7 |
| Métius (en 1626). . . . . . . . . . . . . | 8 |
| Adrien Romanus . . . . . . . . . . . . | 16 |
| Ludolf van Ceulen (mort en 1610) . . . . . . | 35 |
| Sharps . . . . . . . . . . . . . . . | 73 |
| Lagny (en 1719) . . . . . . . . . . . . | 127 |
| Vega. . . . . . . . . . . . . . . . | 140 |
| Dahse, de Hambourg (en 1840, à Vienne) . . . | 200 |
| Richter (en 1853) . . . . . . . . . . . . | 333 |
| Rutherford (en 1855) . . . . . . . . . . | 440 |
| Shangks (en 1855) . . . . . . . . . . . | 530 |

Les 330 premières décimales sont vérifiées par la concordance des résultats obtenus par les trois derniers calculateurs.

**Théorème 642. — IX.**

**1773 f.** *Le point de concours des médianes est le point tel que le produit des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés du triangle est maximum.*

Admettons que l'une des perpendiculaires soit constante, le problème est ramené à la question connue : Trouver sur la base AB d'un triangle quelconque (fig. 1149) un point dont le produit des perpendiculaires abaissées sur les côtés $a$ et $b$ soit maximum (nº 1680).

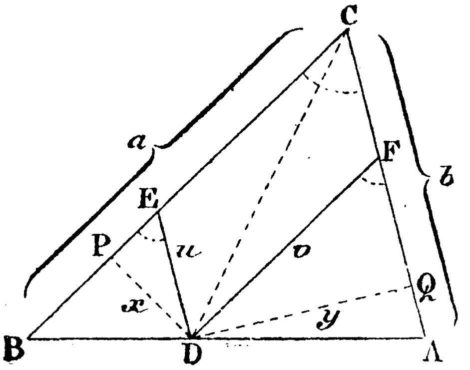


Fig. 1149.

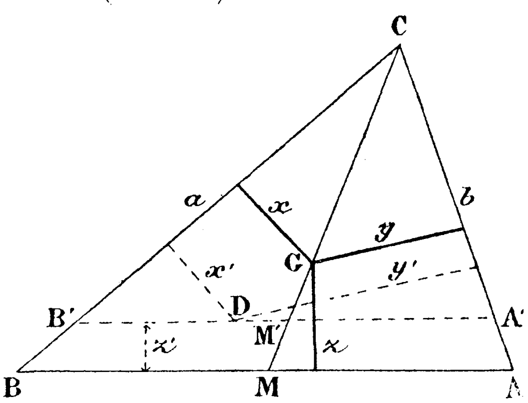


Fig. 1150.

D'ailleurs, soit D un point quelconque sur la parallèle menée à la distance donnée $z'$ (fig. 1150).

Les perpendiculaires $x'$ et $y'$ vérifient la relation

$$ax + by = 2S; \qquad (\text{nº } 1160, \mathbf{a})$$

donc le maximum du produit $x'y'$ a lieu lorsqu'elles sont inversement proportionnelles à leurs coefficients (nº 347); donc le point mobile D doit coïncider avec M', pied de la médiane du triangle A'B'C, puisque cette droite est le lieu des points dont les distances sont inversement proportionnelles aux côtés correspondants (nº 164). Ainsi D doit se trouver sur la médiane CM; pour une raison analogue, il doit se trouver sur les autres médianes; par suite, il coïncide avec G.

*Maximum.* Chaque triangle tel que CGB est le tiers de S, ainsi

$$x = \frac{2S}{3a}, \quad y = \frac{2S}{3b}, \quad z = \frac{2S}{3c},$$

$$xyz = \frac{8S^3}{27abc}.$$

**1773 g.** *Remarque.* Le VIII^e livre conduit rapidement et simplement au résultat ci-dessus.

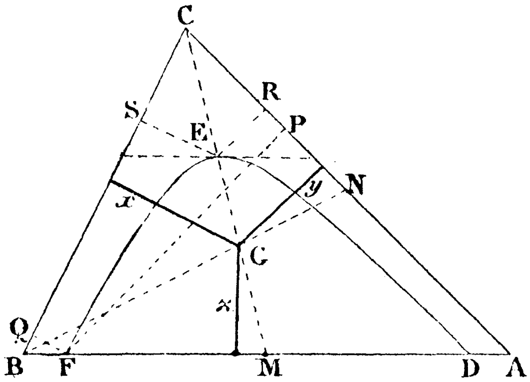



Fig. 1151.

On sait que le lieu des points tels que FP . FQ ait un produit constant est une hyperbole DEF ayant pour asymptotes CA, CB; par suite, en admettant que le produit $xy$ soit constant, le maximum ne dépendra plus que de $z$; il correspond au point de contact E de la tangente parallèle à AB; mais cette tangente est divisée en deux parties égales par le point de contact, donc E se trouve sur la médiane CM, et pour une raison analogue, sur chacune des autres, donc G est le point qui donne lieu au maximum.

**Théorème 642. — X.**

**1773 h.** *On divise respectivement les côtés d'un triangle* ABC *en parties proportionnelles à des rapports donnés* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d'}}$, $\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f'}}$, $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{g'}}$, *on obtient un triangle inscrit* DFG. *En changeant l'ordre des rapports, pour diviser les côtés* a, b, c, *on obtient six triangles inscrits distincts; prouver que ces six triangles sont équivalents entre eux.*

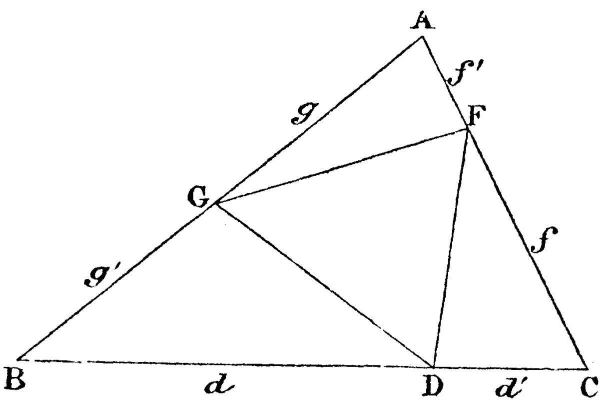



Fig. 1152.

1^re *Démonstration.* Le théorème est évident lorsque le triangle donné est équilatéral, or le rapport des surfaces projetées à leurs propres projections est une valeur constante; d'ailleurs, le rapport des segments des côtés n'est point altéré par la projection orthogonale, *donc les six triangles obtenus sont équivalents entre eux, comme projections de six triangles égaux.*

2$^e$ *Démonstration.* On peut recourir au calcul et exprimer DFG en fonction de ABC et des rapports donnés.

On a :
$$\frac{\mathrm{AGF}}{\mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{AG}\,.\,\mathrm{AF}}{\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{AC}}=\frac{gf'}{(g+g')(f+f')};$$

car
$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{g}{g+g'},\quad \text{et}\quad \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}}=\frac{f'}{f+f'}.$$

De même
$$\frac{\mathrm{BDG}}{\mathrm{BAC}}=\frac{dg'}{(d+d')(g+g')},\quad \text{et}\quad \frac{\mathrm{CDF}}{\mathrm{CAB}}=\frac{d'f}{(d+d')(f+f')};$$

donc
$$\frac{\mathrm{ABC}-\mathrm{DFG}}{\mathrm{ABC}}=\frac{dg'(f+f')+fd'(g+g')+gf'(d+d')}{(d+d')(f+f')(g+g')},$$

valeur constante quand les trois rapports sont donnés, donc les six triangles sont équivalents.

*Remarques.* 1° *Les centres de gravité* des six triangles équivalents à DGF appartiennent à une même ellipse, ayant pour centre le centre de gravité de ABC : il suffit de considérer le triangle équilatéral, dont ABC serait la projection.

2° En effectuant les calculs et quelques réductions, on trouve :
$$\frac{\mathrm{DFG}}{\mathrm{ABC}}=\frac{dfg+d'f'g'}{(d+d')+(f+f')+(g+g')}.$$

Pour cette formule, on peut voir la *Nouvelle correspondance mathématique,* 1880, page 472.

**1773 i. Note.** *Généralisation* par le colonel WELSCH.

Si l'on divise dans un même rapport $r$ les droites qui joignent les sommets homologues de deux polygones quelconques de $n$ côtés, on obtient un nouveau polygone de $n$ côtés dont l'aire est une fonction quadratique du rapport $r$; les coefficients de cette fonction seront déterminés par la valeur des aires des polygones donnés et de l'un, pris arbitrairement, des polygones obtenus.

En particulier, s'il s'agit de deux triangles DEF, ABC, inscrit l'un à l'autre, l'aire du triangle correspondant à $r=\frac{1}{2}$, étant le quart de celle de DEF, l'aire du triangle correspondant à une valeur quelconque de $r$ sera donnée par la formule
$$(2r-1)r\mathrm{T}+(1-r)^2t,$$
où T et $t$ sont respectivement les aires des triangles ABC, DEF.

Si DEF est le triangle orthocentrique de ABC et que $r$ soit égal à $\frac{1}{3}$, on a le triangle podaire du gravicentre de ABC par rapport à ses hauteurs, triangle qui est semblable à ABC et dont l'aire
$$\frac{4t-\mathrm{T}}{9},$$
est à l'aire de celui-ci dans le rapport
$$\frac{8\varepsilon\cos A\cos B\cos C-1}{9}.$$

Le numérateur de cette fraction est le carré de l'*excentricité* de l'orthocentre.

(*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1911, p. 80, WELSCH).

**Théorème de Lhuilier 642. — XI.**

**1773 j.** *Le polygone obtenu en joignant deux à deux les perpendiculaires abaissées d'un point* P *sur les côtés consécutifs d'un polygone régulier a une aire constante lorsque le point* P *se déplace sur une circonférence ayant même centre que le polygone régulier.* (*A. de G.*, tome XV, 1824-1825, pages 45 et 250.)

*Remarque.* Le carré fait exception : tous les points compris à l'intérieur du périmètre donnent un quadrilatère équivalent à la moitié du carré.

**Note.** 1° La solution de STURM, p. 250, indique plusieurs autres théorèmes intéressants, et notamment le suivant : *Le lieu des points, d'où la somme des mêmes puissances des perpendiculaires abaissées de chaque point sur les côtés d'un polygone régulier, est une circonférence ayant pour centre le centre même du polygone; toutes les fois du moins que l'exposant de la puissance est inférieur au nombre des côtés de ce polygone.* Ainsi pour le triangle équilatéral, le théorème est vrai pour la somme des perpendiculaires, ou première puissance; vrai encore pour la somme des carrés des perpendiculaires, ou seconde puissance; mais il ne l'est plus pour la somme des cubes, car le lieu est dans ce cas une courbe du troisième degré. (*Loc. cit.*, p. 252 à 256.)

Dans un bel article du *J. M. E.* (1889, pp. 49-52), M. VIGARIÉ rappelle et complète le *théorème de Sturm ;* il cite en outre LHUILIER et LENTHÉRIC; voir Th. de I à VIII.

2° Le même tome XV des *A. de G.*, p. 358, annonce la mort à Marseille, le 6 ou 7 févier 1825, de J.-B. DURRANDE, âgé de moins de vingt-huit ans. Il s'était formé absolument seul, avec quelques livres, à Marmande, et avait donné néanmoins de très beaux articles aux *Annales de Gergonne;* son premier travail, à dix-sept ans, est dans le tome V, page 295. Son nom a été dignement porté par Henri DURRANDE, mort tout récemment après avoir été recteur à Poitiers. La thèse de ce dernier sur la *surface des ondes* de FRESNEL, en 1864, avait été précédée par divers articles du même auteur. (*N. A.*, 1861, p. 456 ; 1863, p. 193 et 252 ; voir aussi 1865, p. 288.) Pour l'étude géométrique de la *surface des ondes,* on peut recourir à l'appendice du tome II du *Traité de Géométrie,* de MM. ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE (dernières éditions). Voir aussi les *Exercices de Géométrie descriptive,* 5e édition, 1909.

**Théorème de Vecten 642 — XII.**

**1773 k.** *Si sur les trois côtés d'un triangle quelconque* ABC *on construit trois carrés* AD, BF, CI, *il en résultera les propositions suivantes :*

1° En abaissant des sommets de ce triangle des perpendiculaires AK, BL, CM, sur les directions des côtés opposés, et menant les droites AG, BI, BH, CD, CE, AF, les deux premières se couperont sur CM en P, les deux suivantes sur AK en N et les deux dernières sur BL en O.

2° Ces six droites seront perpendiculaires deux à deux ; savoir : CD sur AG, AF sur BH, BI sur CE; les deux premières se coupant au point Q, les deux suivantes en R, et les deux dernières en S.

3° Si l'on mène les droites EF, IG, HD, elles passeront respectivement par les points Q, R, S et diviseront en deux parties égales les angles formés en ces points par les six premières droites.

4° Si l'on mène les droites AS, BQ, CR, elles se couperont en un même point T, et seront respectivement perpendiculaires à DH, EF, GI (elles passeront respectivement par les centres des carrés).

5° Si l'on mène les droites DG, FH, IE, on formera les trois triangles DBG, FCH, IAE qui seront équivalents entre eux et au triangle ABC.

6° Enfin, la somme des carrés de ces trois dernières lignes égale trois fois la somme des carrés des côtés du triangle ABC.

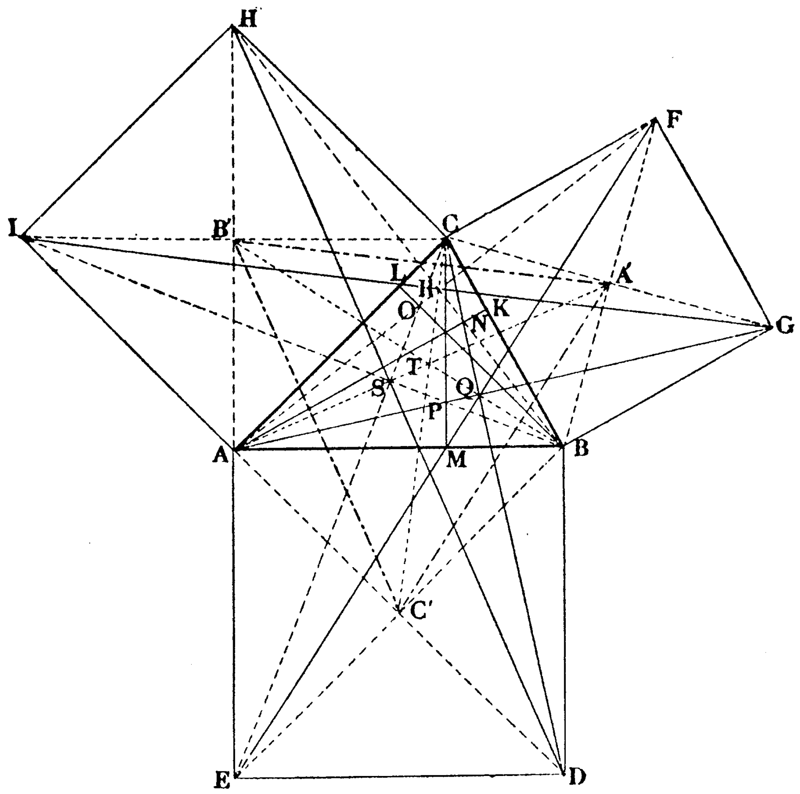



Fig. 1152 *bis*.

Ce qui revient à dire que, si l'on prolonge les trois côtés AB, BC, CA d'un triangle ABC dans le même sens, des quantités BA', CB', AC' respectivement égales aux côtés prolongés, et menant les droites A'C, B'A, C'B, on aura : $A'C^2 + B'A^2 + C'B^2 = 3(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

*Remarque.* Nous reproduisons la figure donnée par VECTEN, mais en la complétant par la détermination du centre des carrés. M. LAISANT est le premier, à notre connaissance, qui ait considéré les centres des carrés construits sur les divers côtés d'un polygone (*N. C.*, 1877, pp. 368 et 400), questions 290 et 302). La droite B'C' est parallèle à DH et égale à sa moitié. — La détermination du point S, pour avoir AST, ne demande que de mener les deux droites égales et orthogonales BI, CE, de même que celle de A', pour avoir ASTA', en demande deux; mais l'emploi des diagonales BF, CG est plus naturel, et pour obtenir le *point de Vecten* T, mieux vaut mener AA' que AS.

**1773 I. Note.** La question précédente se lit dans les *Annales de Gergonne*, t. VII (1816-1817), p. 321 ; elle est de VECTEN, ancien professeur de mathématiques spéciales à Nîmes.

Le point de concours T des droites CR, BQ, AS devrait être appelé *point de Vecten*.

Sur la figure donnée par VECTEN, menons les diagonales des carrés, car elles ne se trouvent pas dans la figure primitive; puis complétons l'énoncé précédant par le suivant dû à M. J. NEUBERG. (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. IV, 1878, pp. 142 à 145; nos 4 et 5.)

*Les droites* AA′, BB′, CC′ *sont respectivement égales et perpendiculaires aux droites* B′C′, C′A′, A′B′.

*Les droites* AA′, BI, CE, DH, *se coupent en un même point.*

On peut maintenant donner une nouvelle forme à l'énoncé 4° de VECTEN, et dire :

*Les droites* AA′, BB′, CC′ *se coupent au point* T, *ou point de Vecten;* car elles sont les hauteurs prolongées du triangle A′ B′ C′.

**1773 m.** On peut proposer le problème suivant : *Construire le triangle* ABC, *connaissant les centres* A′, B′, C′ *des trois carrés construits sur les côtés.*

A ce sujet, voir *Nouvelle Correspondance*, t. VI, 1880, p. 364, J. NEUBERG; p. 509, E. LEMOINE; *A. F.*, Marseille, 1891, pp. 38 à 43, ED. COLLIGNON.

Dans le cas cité, les triangles AC′B, BA′C, CB′A, sont isocèles rectangles; déjà LEMOINE, en 1868, avait proposé de déterminer le triangle ABC connaissant les sommets des triangles équilatéraux construits sur chaque côté, et M. KIEPERT de Berlin résolut le problème (*N. A.*, t. VIII, 1869, p. 40).

**1773 n.** VECTEN, en 1817, est le premier, croyons-nous, qui ait étudié la figure formée par un triangle et les carrés construits sur chacun de ses côtés; depuis lors, cet ensemble a attiré l'attention d'un assez grand nombre de mathématiciens.

Trente ans après VECTEN, en 1847, GREBE prolonge les côtés extérieurs des trois carrés, forme ainsi un triangle $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, homothétique du premier, et dont les droites $\alpha$A, $\beta$B, $\gamma$C, déterminent en se rencontrant le centre d'homothétie.

Ce point, désigné par K, est doué d'un grand nombre de propriétés mises surtout en relief par M. LEMOINE.

Ce point a procuré une gloire inattendue à celui qui l'avait rencontré, en 1847, après LHUILIER et GAUSS, et que d'autres auteurs, tels que HOSSARD, trouvèrent depuis sans y attacher grande importance.

En Allemagne, le point K est nommé *point de Grebe;* ailleurs il est surtout connu sous le nom de *point de Lemoine*, que lui a donné M. J. NEUBERG.

La figure, ou groupe de VECTEN, du triangle et des trois carrés, a provoqué un assez grand nombre d'études; nous avons eu l'occasion de citer les plus intéressantes, cependant on pourrait y ajouter celle de M. VAN AUBEL : N. C., t. IV, 1878, p. 40, et *Mathesis*, t. I, 1881, p. 168, question 72, et t. VI, 1886, p. 39, réponse par M. A. LAMBERT.

En outre, dans son magistral article déjà cité (*A. F.*, 1891, Marseille, pp. 38 à 66), M. E. COLLIGNON étudie toute une série de triangles analogues au triangle A′B′C′ ; puis il considère le quadrilatère, et les triangles isocèles rectangles construits sur chacun de ses côtés (loc. cit., p. 53); mais il convient de citer une nouvelle étude, et la réclamation de priorité faite par M. NEUBERG en faveur de M. VAN AUBEL et de lui-même (*A. F.*, 1893, Besançon, pp. 26-45).

L'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1894, p. 254, n° 120, indique un assez grand nombre de références dans un article dû à M. MACKAY d'Edimbourg.

**1773 o.** *Lieu des points de rencontre des droites* AA′, BB′, CC′, *qui joignent chaque sommet du triangle* ABC, *aux sommets* A′, B′, C′ *des triangles isocèles* BA′C, CB′A, AC′B, *construits sur chaque côté du triangle donné, soit tous à l'extérieur, soit tous à l'intérieur.*

Le point T qui correspond aux triangles isocèles rectangles doit être appelé *point de Vecten*, puisqu'il a été d'abord signalé par ce professeur en 1817; mais il le déterminait, il est vrai, sans mener les diagonales des carrés (n° 1773 l). Le point T correspond au cas où l'angle $\alpha$ à la base du triangle isocèle égale 45°; voici quelques valeurs particulières : Lorsque $\alpha = 60°$, on obtient le *centre isogone* M, d'où l'on voit chaque côté du triangle sous un angle de 60°. Pour $\alpha = 90°$, on obtient l'orthocentre H. Lorsque $\alpha$ est nul, on trouve le centre de gravité G.

Pour $\alpha$ négatif, les triangles sont rabattus sur ABC ; on trouve T' pour les carrés intérieurs ; puis le second *centre isogone* M', d'où l'on voit deux côtés sous un angle de 60°, et le troisième sous un angle de 120°.

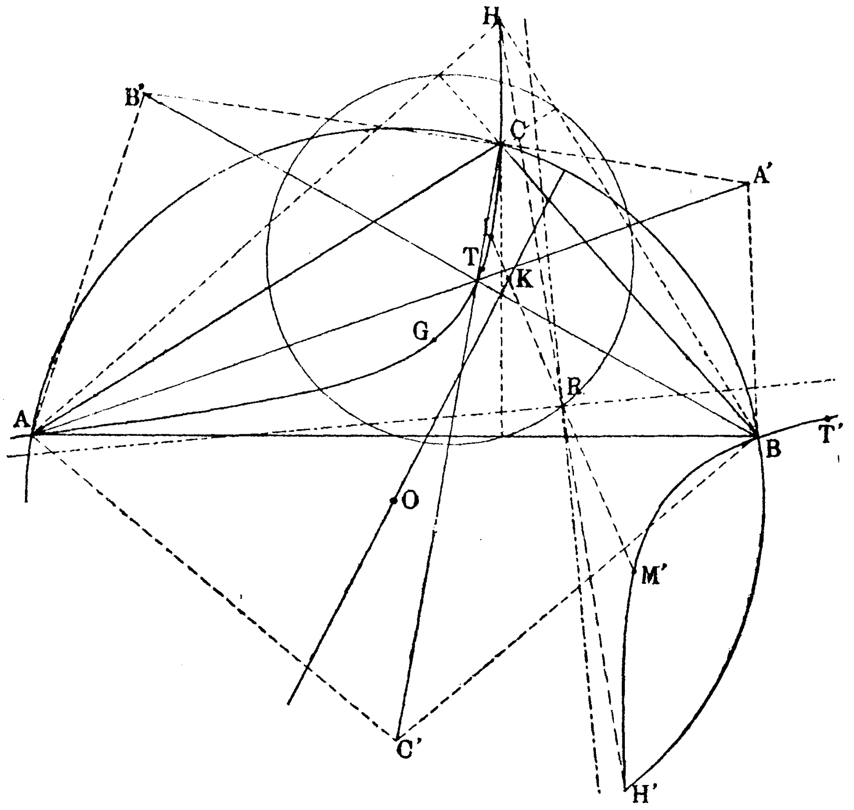



Fig. 1152 *ter*.

Le lieu est une *conique* désignée simplement sous ce nom générique par Kiepert en 1869 (*N. A.*, p. 42, 2°). C'est une hyperbole équilatère, nommée maintenant *hyperbole de Kiepert*. Elle a donné lieu à d'intéressantes études, notamment de la part de M. H. Brocard ; ce savant en a fait connaître les principaux points, le centre, les asymptotes. (*J. M. S.*, 1884, p. 197 ; 1885, pp. 12, 30 et 58.)

M. E. Lemoine en a parlé au congrès de Limoges (*A. F.*, 1885, p. 15, n° 2) ; E. Cesaro, dans les *N. A.*, 1886, p. 231, n° 15 ; plus tard, M. M'Cay, du Trinity College de Dublin, a publié une magistrale étude sur le même sujet (*Mathesis*, 1887, pp. 208 à 220). Voir aussi *A. F.*, 1887, Toulouse, p. 113, par M. Laisant ; *Mathesis*, 1887, p. 245, n° 11 ; 1888, p. 81, par MM. Jerabeck et Neuberg ; *A. F.*, Paris, 1889, p. 166, MM. Gob et Neuberg ; *Mathesis*, 1892, p. 241.

Enfin voir une question précédente des *E. de G.*, n° 1242 p.

**1773 p**. *Le lieu du centre radical des cercles décrits sur les trois côtés d'un triangle* ABC, *comme segments capables des angles* $A+\varphi$, $B+\varphi$, $C+\varphi$, *lorsque* $\varphi$ *varie, est la droite* OK. (Tesch, de la Haye. *Mathesis*, 1887, p. 219.)

Ainsi les lieux 1773 o et 1773 p sont la transformée isogonale l'un de l'autre.

Tout récemment M. Barisien a publié un bel article *Sur six hyperboles équilatères d'un triangle*. (*N. A.*, 1911, p. 87.)

# LIVRE V

---

## THÉORÈMES

### Théorème 643.

**1774.** *Si une droite* AB *et un plan* M *sont parallèles, tout plan* N *perpendiculaire à la droite est aussi perpendiculaire au plan donné.*

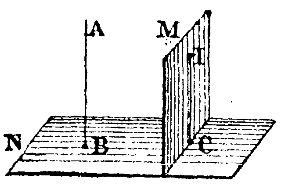



Fig. 1153.

Par un point quelconque I pris sur le plan M, menons une droite IC parallèle à AB, cette droite est contenue dans le plan M (G., nº 380), et, comme sa parallèle AB, elle est perpendiculaire au plan N (G., nº 392); donc le plan M, qui contient cette droite IC, est aussi perpendiculaire au plan N (G., nº 400).

### Th. R. 643. — I.

**1774 a.** *Une droite* AB *et un plan* M *perpendiculaires à un même plan* N *sont parallèles.*

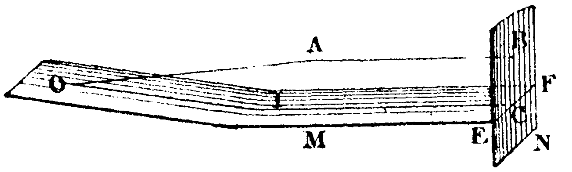



Fig. 1154.

En effet, si la droite AB et le plan M se rencontraient en un point quelconque, O, par exemple, on pourrait de ce point abaisser une droite OIC perpendiculaire à l'intersection EF; cette droite serait perpendiculaire au plan N (G., nº 402), et ainsi il y aurait deux perpendiculaires abaissées d'un même point sur un même plan, ce qui est impossible.

Donc la droite AB et le plan M sont parallèles.

### Théorème 644.

**1775.** *Une droite* AB *et un plan* M *perpendiculaires à une même droite* CD *sont parallèles.*

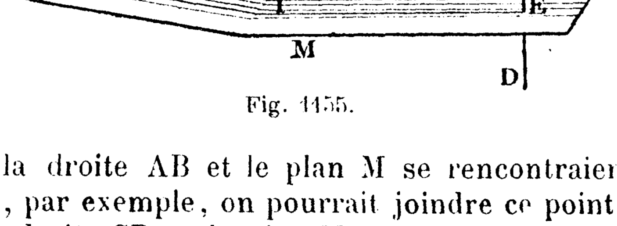



Fig. 1155.

En effet, si la droite AB et le plan M se rencontraient en un point quelconque, O, par exemple, on pourrait joindre ce point au point d'intersection de la droite CD et du plan M.

La ligne CD, étant donnée perpendiculaire au plan M, serait aussi perpendiculaire à OIE; et ainsi il y aurait d'un même point O deux perpendiculaires, OAB et OIE, abaissées sur une même droite, ce qui est impossible.

Donc la droite AB et le plan M sont parallèles.

### Théorème 645.

**1776.** *Si deux plans sont respectivement parallèles à deux autres plans qui se coupent, les intersections sont parallèles.*

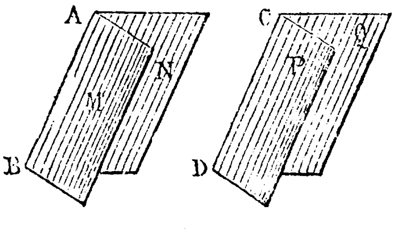


Fig. 1156.

Soient les plans M et N, respectivement parallèles aux plans P et Q, qui se coupent suivant CD. Il faut prouver que l'intersection AB est parallèle à CD.

Les deux plans M et P étant parallèles, la droite AB, qui appartient au premier de ces plans, est parallèle au second (G., n° 376); de même, les plans N et Q étant parallèles, la droite AB, qui appartient au premier, est parallèle au second.

Ainsi la droite AB, parallèle aux deux plans P et Q qui se coupent, est parallèle à leur intersection CD (G., n° 381). Donc...

**1776 a. Note.** On peut étudier les dièdres et les trièdres, ainsi qu'un assez grand nombre d'autres questions du livre V, en même temps que les angles et les triangles de la géométrie plane. Voir, par exemple, les *Nouveaux Éléments de Géométrie*, par Ch. Méray (3e édition, 1906).

* Méray, né à Chalon-sur-Saône en 1835, mort à Dijon en 1911. On lui doit les *Leçons nouvelles sur l'Analyse et ses applications géométriques*, publiées de 1894 à 1898.

### Théorème 646.

**1777.** *Étant donnés un dièdre* MIJN *et une droite intérieure* AB *perpendiculaire à l'arête et oblique aux deux plans; si un plan se meut, en tournant autour de cette droite, et coupant les deux faces du dièdre, l'angle plan déterminé sur le plan mobile est minimum lorsque ce plan est perpendiculaire à l'arête.*

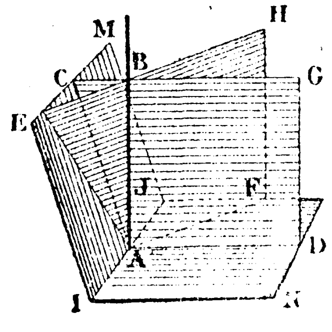


Fig. 1157.

Soit CD la position du plan mobile lorsqu'il est perpendiculaire à l'arête IJ, et soit EF une autre position quelconque de ce même plan mobile.

L'arête IJ est perpendiculaire au plan CD, et par suite aux droites AC et AD qui sont dans ce plan. Ces droites AC et AD sont les projections de la droite AB sur les deux faces du dièdre.

Or l'angle que fait une droite avec sa projection sur un plan est moindre que l'angle qu'elle fait avec toute autre droite menée par son pied dans ce plan (G., n° 409); on a donc :

$$\text{Angle BAC} < \text{BAE},$$
$$\text{BAD} < \text{BAF};$$

d'où
$$\text{CAD} < \text{EAF}.$$

### Théorème 647.

**1778.** *Deux trièdres* S *et* S′ *qui ont deux faces* b *et* c, b′ *et* c′, *respectivement égales, et le dièdre compris inégal, ont aussi la troisième face inégale, et réciproquement.*

Sur l'arête commune aux deux faces égales, portons des longueurs égales SA et S′A′; puis menons, perpendiculairement à ces mêmes arêtes, les plans ABC et A′B′C′. La droite SA sera perpendiculaire aux lignes AB et AC, et de même S′A′ aux lignes A′B′ et A′C′.

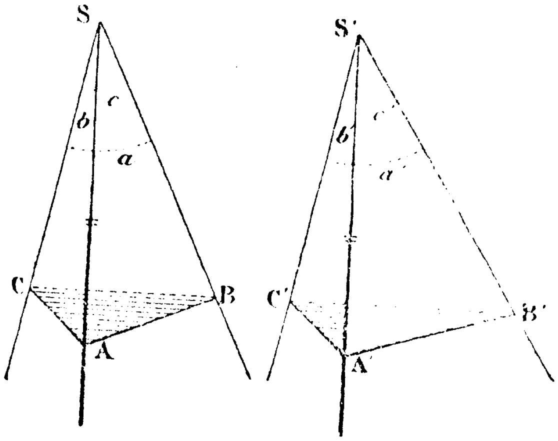


Fig. 1158.

Les triangles SAC et S′A′C′ sont égaux, comme ayant un côté égal (SA, S′A′) adjacent à des angles respectivement égaux; donc

$$AC = A'C', \quad \text{et} \quad SC = S'C'.$$

De même les triangles SAB et S′A′B′ sont égaux, et l'on a :

$$AB = A'B', \quad \text{et} \quad SB = S'B'.$$

1° Les dièdres SA et S′A′ sont mesurés par les angles plans CAB et C′A′B′; de sorte que si l'on a $SA < S'A'$, on a aussi :

$$CAB < C'A'B.$$

Ainsi les triangles ABC et A′B′C′ ont deux côtés respectivement égaux, et l'angle compris $A < A'$; donc $CB < C'B'$. (G., n° 56.)

Dès lors les triangles CBS et C′B′S′ ont deux côtés respectivement égaux, et le troisième côté $CB < C'B'$; donc l'angle $a$ est plus petit que $a'$.

2° *Réciproquement.* Supposons que l'on donne la face $a < a'$. Les triangles CBS et C′B′S′ ont deux côtés respectivement égaux, et l'angle $a < a'$; donc $CB < C'B'$.

Dès lors les triangles ABC et A′B′C′ ont deux côtés respectivement égaux, et le troisième côté $CB < C'B'$; donc l'angle CAB est plus petit que C′A′B′, et le dièdre SA est plus petit que S′A′.

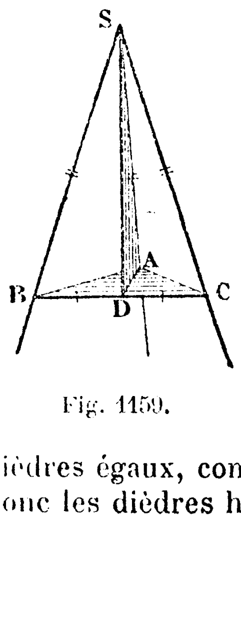


Fig. 1159.

### Théorème 648.

**1779.** *Si deux faces* ASB *et* ASC *d'un trièdre sont égales, les dièdres opposés* SC *et* SB *sont aussi égaux, et réciproquement.* (Ce trièdre est dit *isocèle* ou *isoèdre*.)

1° Portons sur les arêtes trois longueurs égales SA, SB, SC; menons le plan ABC et un autre plan ASD par l'arête SA et par le milieu de BC.

Le triangle BSC est isocèle, et ce triangle est divisé en deux parties égales par la médiane SD.

Le plan ASD divise le trièdre donné en deux dièdres égaux, comme ayant les faces respectivement égales (G., n° 423); donc les dièdres homologues SB et SC sont égaux.

2º *Réciproquement.* Si les dièdres SB et SC sont donnés égaux, il s'agit de prouver que les faces opposées ASC et ASB sont égales.

Si l'on supposait la face ASC plus petite que ASB, on porterait la valeur angulaire CSA en BSA', et l'on mènerait le plan CSA'. Les deux trièdres SABC et SA'BC auraient un dièdre égal compris entre des faces respectivement égales, et ces deux trièdres seraient égaux; ce qui est impossible, car le second n'est qu'une partie du premier.

Donc, on ne peut supposer inégales les faces ASB et ASC...

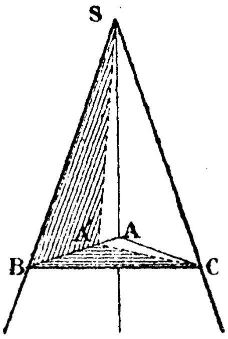


Fig. 1160.

**1780.** Remarques. 1º *Un trièdre équilatéral est équiangle, et réciproquement.* (G., nº 60.)

2º Dans le trièdre isocèle SABC (fig. 1159), le plan ASB est mené par l'arête *sommet* SA et par la bissectrice SD de la face opposée, laquelle face pourra être nommée *base.* Ce plan partage le trièdre total en deux trièdres partiels, égaux dans toutes leurs parties ; donc les dièdres partiels formés en SA sont égaux. Il en est de même des dièdres formés en SD, et ces derniers sont droits.

Ainsi le plan ASD remplit quatre conditions, dont deux suffisent pour le déterminer. De là découlent quatre propositions qui se trouvent toutes démontrées par l'une quelconque d'entre elles, et que l'on pourrait d'ailleurs établir séparément. (G., nº 61.)

*Dans tout trièdre isocèle :*

1º *Le plan mené par l'arête-sommet et par la bissectrice de la face opposée est perpendiculaire à cette face, et il est bissecteur du dièdre du sommet;*

2º *Le plan mené par l'arête-sommet perpendiculairement à la face opposée passe par la bissectrice de cette face, et il est bissecteur du dièdre du sommet;*

3º *Le plan bissecteur du dièdre-sommet est perpendiculaire à la face opposée, et passe par la bissectrice de cette face:*

4º *Le plan mené perpendiculairement à la face de base par la bissectrice de cette même face divise le dièdre opposé en deux dièdres égaux.*

**Théorème 649.**

**1781.** *Dans tout trièdre* S, *à un plus grand dièdre se trouve opposée une plus grande face, et réciproquement.* (G., nºˢ 62. 63.)

1º Soit donné le dièdre $SB < SC$. Menons un plan SCA' qui détermine en SC, avec la face SCB, un dièdre égal à SB. Le trièdre SA'BC sera isocèle, et la face A'SB sera égale à A'SC (nº 1779, 2º).

Entre les faces du trièdre SACA' on a la relation (G., nº 417)

$$ASC < ASA' + A'SC.$$

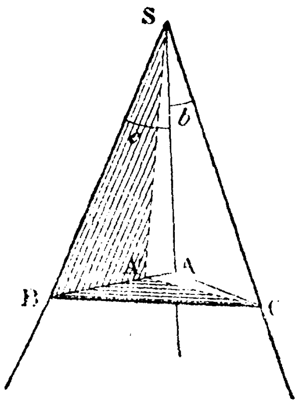


Fig. 1161.

Remplaçons la face A'SC par son égale A'SB; il vient, tout étant réduit,

$$ASC < ASB.$$

2° Réciproquement. *A une plus grande face est opposé un plus grand dièdre.*

Soit dans le trièdre SABC, la face $c$ plus grande que $b$. Il faut prouver que le dièdre SC est plus grand que SB.

Si l'on supposait égaux ces deux dièdres, les faces opposées seraient égales (n° 1779, 2°); ce qui est contre l'hypothèse.

Si l'on supposait le dièdre SC plus petit que SB, on aurait, en vertu du théorème direct, $c < b$; ce qui est encore contraire à l'hypothèse.

Ainsi le dièdre SC est plus grand que SB.

### Théorème 650.

**1782.** *Si un angle solide convexe a toutes ses arêtes coupées par un plan quelconque, variable de position, la somme des angles plans déterminés sur les faces de l'angle solide d'un même côté du plan sécant est constante.*

Soit $n$ le nombre des faces latérales de l'angle solide considéré. Tout plan M qui coupe toutes les arêtes d'un même côté du sommet détermine sur les faces latérales $n$ triangles, pour lesquels la somme totale des angles est un nombre d'angles droits exprimé par $2n$.

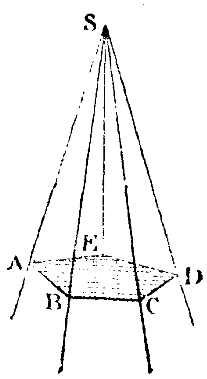


Fig. 1162.

Cette somme se compose de deux parties : 1° la somme des valeurs angulaires qui forment les faces de l'angle solide, en S; 2° la somme des angles déterminés sur ces mêmes faces au-dessus du plan sécant. Or, quelle que soit la position du plan sécant, la première partie est constante; donc la deuxième l'est aussi.

Considérons, en second lieu, les angles qui sont déterminés sur les faces au-dessous du plan sécant. Chacun de ces angles est le supplément de l'angle adjacent qui se trouve au-dessus de ce même plan; à chaque arête il y a ainsi une somme de quatre angles droits : et la valeur totale des angles, tant supérieurs qu'inférieurs, est un nombre de droits exprimé par $4n$. Mais la somme des angles supérieurs est constante; donc la somme des angles inférieurs l'est aussi.

### Théorème 651.

**1783.** *Pour qu'on puisse former un trièdre avec trois faces données* a, b, c, *il faut et il suffit que la somme des trois faces soit moindre que quatre droits, et que la plus grande face soit moindre que la somme des deux autres.*

1° La première condition résulte de ce qu'un trièdre est nécessairement convexe, et que, dans un tel angle, la somme des faces est inférieure à quatre droits. (G., n° 419.)

2° Soient $a$ la plus grande face et $c$ la plus petite. Assemblons les deux faces $b$ et $c$ par l'arête commune SA, et ouvrons-les de manière à les mettre dans un même plan MM.

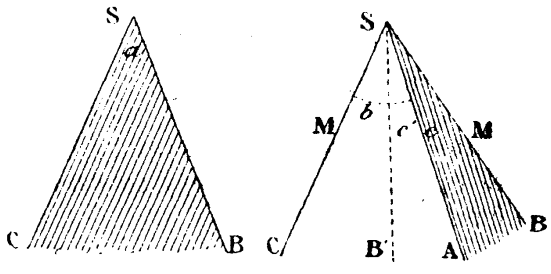



Fig. 1163.

Si l'on faisait tourner la face $c$ autour de l'arête SA d'un demi-tour, l'arête SB se trouverait transportée en SB' dans l'ouverture $b$.

L'angle total CSB est la somme des faces $b$ et $c$, et l'angle CSB' est la différence de ces mêmes faces.

La grande face $a$ est donnée plus petite que la somme des deux autres ; et comme elle est plus grande que chacune des deux autres, elle est, à plus forte raison, plus grande que leur différence.

Si donc on transportait la face $a$ sur le plan CSB, cette face serait trop petite pour atteindre les deux arêtes SC et SB, et trop grande pour être contenue entre SC et SB'.

Or, dans le mouvement de rotation de SAB autour de SA, l'angle des deux arêtes SC et SB passe par toutes les valeurs intermédiaires de CSB à CSB'.

Il y a donc une position SB pour laquelle l'angle CSB est égal à la face $a$; ce qui montre que le trièdre est possible.

#### Théorème 652.

**1784.** *Pour que l'on puisse former un trièdre avec trois angles dièdres donnés* A, B, C, *il faut et il suffit que leur somme soit comprise entre deux et six droits, et que le plus petit dièdre, augmenté de deux droits, surpasse la somme des deux autres.*

Soit A le plus petit dièdre. Appelons $a'$, $b'$, $c'$ les angles plans supplémentaires de A, B, C. L'angle $a'$ sera le plus grand de ces trois suppléments.

1° Les conditions énoncées sont nécessaires, car ce sont des propriétés de tout trièdre. (G., n° 427.)

2° Les conditions données peuvent se résumer ainsi :

$$6 \text{ droits} > A + B + C > 2 \text{ droits}, \quad A + 2 \text{ droits} > B + C.$$

De là résultent les relations ci-après entre les valeurs supplémentaires (on retranche de six droits les trois membres de la première relation, et de quatre droits les deux membres de la seconde) :

$$0 < a' + b' + c' < 4 \text{ droits}, \quad a' < b' + c'.$$

Ainsi la somme des trois angles plans $a'$, $b'$, $c'$ est inférieure à quatre angles droits, et le plus grand, $a'$, est moindre que la somme des deux autres.

Donc un trièdre peut être construit avec trois faces égales respectivement à $a'$, $b'$, $c'$. Le trièdre supplémentaire de ce premier trièdre aura pour dièdres les suppléments de $a'$, $b'$, $c'$, c'est-à-dire les dièdres donnés A, B, C. (G., nº 416.)

Donc, *pour que l'on puisse former...*

### Théorème 653.

**1785.** *Les trois plans perpendiculaires aux faces d'un trièdre S, menés par les arêtes opposées à ces faces, se rencontrent suivant une même droite* (plans hauteurs).

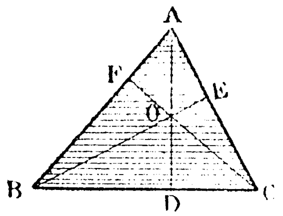


Fig. 1164.

Ces plans ne sont autre chose que les plans projetants des trois arêtes sur les faces opposées.

Considérons deux de ces plans, SBE et SCF (il faut supposer le sommet S en avant du plan ABC); soit SO l'intersection de ces deux plans. Coupons le trièdre S par un plan quelconque ABC perpendiculaire à SO; cette droite SO, perpendiculaire au plan ABC, sera aussi perpendiculaire aux intersections ou traces BE et CF situées dans ce plan.

Or le plan SBE, perpendiculaire aux deux plans ABC et SAC, est perpendiculaire à leur intersection AC; ainsi sa trace BE, perpendiculaire à AC, est l'une des hauteurs du triangle ABC.

Il en est de même de la trace CF, et aussi de la trace du troisième plan SAD. Or les trois hauteurs du triangle ABC se rencontrent en un même point O (nº 445); donc les trois *plans hauteurs* du trièdre S se rencontrent suivant une même droite SO.

### Théorème 654.

**1786.** *Dans un trièdre quelconque* S, *les trois* plans bissecteurs *des dièdres se rencontrent suivant une même droite dont chaque point est équidistant des faces.*

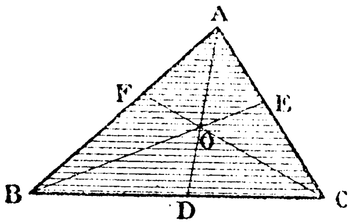


Fig. 1165.

(Supposez le sommet S en avant du plan ABC.)

Soit SO l'intersection de deux plans bissecteurs SBE et SCF.

La droite SO appartenant à chacun des plans bissecteurs SBE et SCF, chaque point de SO est équidistant des faces SBC, SCA et SBA. (G., nº 399, 4º.)

Donc chaque point de SO est équidistant des trois faces du trièdre, et en particulier des deux faces du dièdre SA; d'où il suit que cette ligne SO appartient au plan bissecteur de ce même dièdre SA. Donc, *dans un trièdre quelconque...*

### Théorème 655.

**1787.** *Dans tout trièdre* S, *les trois plans qui passent par les arêtes et par les bissectrices des faces opposées se rencontrent suivant une même droite* (plans médians).

(Supposez le sommet S en avant du plan ABC.)

Portons sur les arêtes des longueurs égales SA, SB, SC, et coupons le trièdre par le plan ABC.

Soient SBE et SCF deux des plans médians. Les distances SA et SC étant égales, le triangle ASC est isocèle ; donc la bissectrice SE tombe au milieu E de la base AC; alors la trace BE est une médiane du triangle ABC; il en sera de même de CF et de la troisième trace AD.

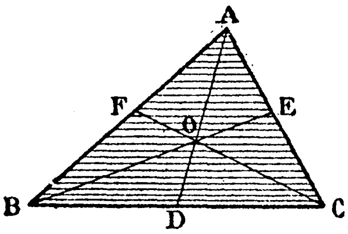


Fig. 1166.

Or les trois médianes du triangle ABC se rencontrent en un même point O; ce point est donc commun aux trois plans médians. Et comme ces plans passent aussi par le sommet S, ils se rencontrent suivant une même droite SO.

**Théorème 655. — I.**

**1788.** *Le plan indéfini* P, *mené perpendiculairement au plan d'un angle* ASC, *par la bissectrice* SE *de ce même angle, est le lieu des points équidistants des côtés de l'angle* S.

Nous avons admis, dans ce qui précède, que le plan indéfini P, mené perpendiculairement au plan d'un angle ASC par la bissectrice SE de ce même angle, est le lieu des points équidistants des côtés de l'angle S. Cette propriété est une conséquence du *théorème des trois perpendiculaires*. (G., n° 372.)

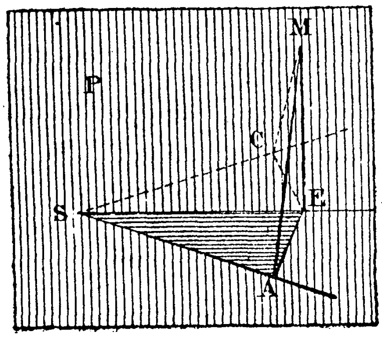


Fig. 1167.

En effet, soit M un point quelconque du plan P. Menons ME perpendiculaire à SE, puis les droites EA et EC perpendiculaires aux côtés de l'angle S, et enfin MA et MC. On a $EA = EC$; la droite ME est perpendiculaire au plan ASC; MA et MC sont deux obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire; ainsi ces lignes sont égales et le point M est équidistant des côtés SA et SC.

**Théorème 656.**

**1789.** *Les trois plans menés perpendiculairement aux faces d'un trièdre* S, *par les bissectrices de ces mêmes faces, se rencontrent suivant une même droite dont chaque point est équidistant des trois arêtes.*

(Supposez le sommet S en avant du plan ABC.)

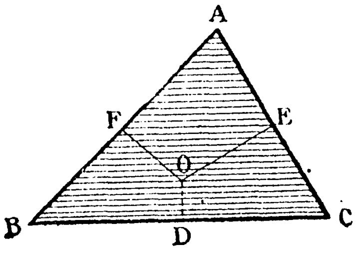


Fig. 1168.

Portons sur les arêtes des longueurs égales SA, SB, SC, et coupons le trièdre par le plan ABC.

Considérons deux des plans en question ; par exemple, SOE et SOF.

Les distances SA et SC étant égales, la droite AC est perpendiculaire la bissectrice SE, et a le point E pour milieu.

Le plan indéfini SOE est le lieu des points équidistants des deux côtés de l'angle ASC; ainsi le point O de ce plan est équidistant des arêtes SA et SC. De même, le plan indéfini AOF est le lieu des points équidistants des côtés de l'angle ASB, et le point O de ce plan est équidistant des arêtes SA et SB.

Donc chaque point de SO est équidistant des trois arêtes du trièdre, et en particulier des deux arêtes de la face BSC; d'où il suit que cette ligne SO appartient au plan mené perpendiculairement à la face BSC par la bissectrice de cette même face. Donc, *les trois plans...*

**Théorème 657.**

**1790.** *La projection d'une surface plane quelconque sur un plan égale le produit de cette surface par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec le plan.*

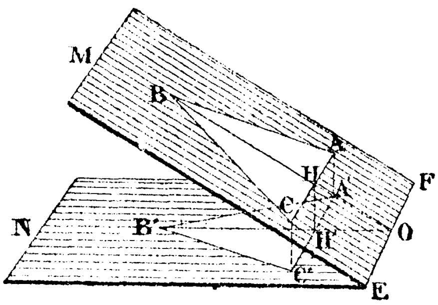


Fig. 1169.

1° Considérons d'abord un triangle ABC situé dans le plan M, et sa projection A'B'C' sur le plan N, et supposons que l'un des côtés, AC par exemple, soit parallèle à l'intersection EF des deux plans. La projection A'C' sera parallèle à EF et égale à AC.

Prenons ce côté AC pour base du triangle. La hauteur BH ou $h$, perpendiculaire sur AC, est aussi perpendiculaire sur EF, et sa projection B'H' ou $h'$ sur le plan N sera également perpendiculaire à l'intersection EF; de sorte que l'angle BOB' est l'angle des deux plans.

Or dans le plan BOB' on a :

$$h' = h \cdot \cos O,$$

car la projection d'une droite sur un plan quelconque égale la droite donnée multipliée par le cosinus de l'angle que cette ligne fait avec sa projection. (*Trig.*, n° 33.)

Multiplions le premier membre par $^1/_2$ A'C' et le second par $^1/_2$ AC, ce qui revient à multiplier les deux membres par $^1/_2\, b$; il vient :

$$^1/_2\, bh' = {^1/_2}\, bh \cdot \cos O.$$

Or $^1/_2\, bh'$ est l'aire de la projection A'B'C', et $^1/_2\, bh$ est l'aire du triangle considéré ABC. Donc le théorème est vrai dans ce cas.

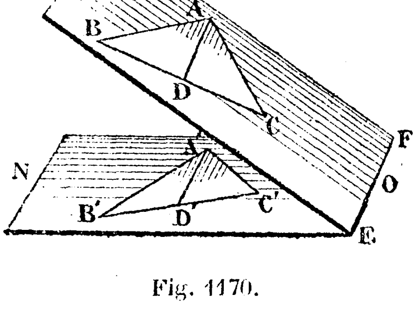


Fig. 1170.

2° Si le triangle considéré ABC n'a aucun côté parallèle à l'intersection EF des deux plans MN, on mène une droite AD parallèle à EF, et le triangle ABC se trouve ainsi décomposé en deux triangles ABD et ACD qui rentrent dans le premier cas considéré. On aura donc :

$$A'B'D' = ABD \cdot \cos O,$$
$$A'C'D' = ACD \cdot \cos O;$$

d'où, en additionnant, $A'B'C' = ABC \cdot \cos O.$

3º Un polygone quelconque étant décomposable en triangles, le théorème sera encore applicable. Il en sera de même pour les figures terminées en tout ou en partie par des lignes courbes; car ces figures sont des limites de polygones rectilignes, ou, suivant l'expression reçue, des polygones d'une infinité de côtés.

Remarques. 1º *Les projections, sur un même plan, de deux figures équivalentes situées dans un même plan donné sont équivalentes entre elles.*

2º *Les projections, sur un même plan, de deux figures quelconques situées dans un même plan donné sont dans le même rapport que les figures planes données.*

**Théorème 658.**

**1791.** *Par le sommet d'un trièdre, on mène dans le plan de chaque face une droite perpendiculaire à l'arête opposée; démontrer que ces trois perpendiculaires sont dans un même plan.*

Soient SAD, SBE, SCF les plans menés par chaque arête perpendiculairement à la face opposée; on sait que ces trois plans se coupent suivant une droite SH (nº 1785).

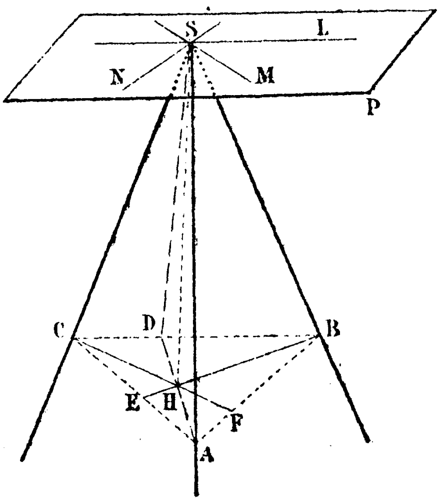


Fig. 1171.

Menons une section quelconque ABC perpendiculaire à la droite SH, et par S un plan P parallèle à ABC.

La droite BC, intersection des plans CAB, CSB perpendiculaires au troisième plan SAD, est elle-même perpendiculaire à ce plan SAD; donc, si SL est l'intersection de la face CSB et du plan P, la droite SL sera perpendiculaire au plan SAD et par suite à l'arête SA contenue dans ce plan.

De même SM, parallèle à AC, est une droite contenue dans la face SAC et perpendiculaire à l'arête opposée SB.

SN parallèle à AB est perpendiculaire à SC.

Or les trois perpendiculaires SL, SM, SN sont dans un même plan.

**Théorème 659.**

**1792.** *Les milieux des côtés d'un quadrilatère gauche sont les sommets d'un parallélogramme.*

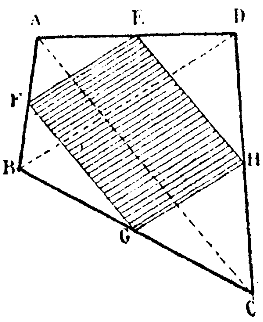


Fig. 1172.

On nomme *quadrilatère gauche* la figure ABCD formée par quatre droites non situées dans un même plan. Les diagonales AC et BD ne se rencontrent pas.

La démonstration est identique à celle que l'on donne en géométrie plane (nº 542).

EF est parallèle a BD et en égale la moitié.

GH est parallèle à BD et en égale la moitié.

Donc EF, GH sont des droites égales et parallèles; donc elles sont dans un même plan et forment les côtés opposés d'un parallélogramme.

**Théorème 659. — I.**

**1793.** *Les droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère gauche se coupent en leurs milieux.*

En effet EG, FH sont les diagonales d'un parallélogramme (fig. 1172).

**Théorème 659. — II.**

**1794.** *Le point de concours des droites qui joignent deux à deux les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère gauche, est le point milieu de la droite qui joint les points milieux des diagonales.*

Comme en géométrie plane (n° 548).

Mais les trois droites qui joignent deux à deux les milieux des côtés opposés et les milieux des diagonales ne sont pas dans un même plan, sans quoi les quatre côtés donnés et les deux diagonales seraient aussi dans un même plan.

**Théorème 660.**

**1795.** *Dans tout quadrilatère gauche, la somme des carrés des côtés égale la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux des diagonales.*

Cette extension du *théorème d'Euler* est due à Carnot. Elle se démontre comme le théorème connu (n° 1205).

**Théorème 660. — I.**

**1796.** *Dans tout quadrilatère gauche, la somme des carrés des diagonales est double de la somme des carrés des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés.*

Comme en géométrie plane (n° 1204).

**Théorème 661.**

**1797.** *A partir de deux sommets opposés A, C d'un quadrilatère gauche, on divise les quatre côtés dans un même rapport donné $\frac{m}{n}$; les quatre points obtenus sont les sommets d'un parallélogramme inscrit.*

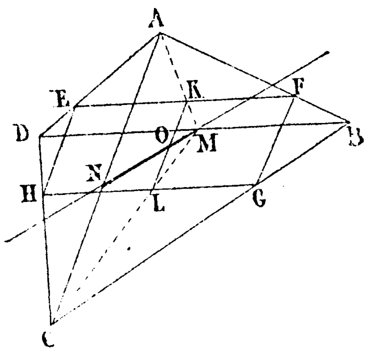


Fig. 1172.

Le théorème se démontre comme en géométrie plane.

Soit $$\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AB} = \frac{m}{n}.$$

La droite EF est parallèle à BD (G., n° 214); de plus, $\frac{EF}{BD}$ égale aussi $\frac{m}{n}$; donc $EF = BD \cdot \frac{m}{n}$.

De même GH est parallèle à BD et égale $BD \cdot \frac{m}{n}$.

Donc la figure EFGH est un parallélogramme, car elle a deux côtés opposés EF, GH égaux et parallèles.

*Remarques.* 1° On peut prendre les points E, F sur le prolongement des côtés AD, AB; on obtient encore des parallélogrammes.

2° Si l'on donnait : $$\frac{AE}{ED} = \frac{m}{n},$$

on poserait : $\frac{AE}{AD} = \frac{EF}{BD} = \frac{m}{m+n}$; d'où $EF = BD \cdot \frac{m}{m+n}$.

3° Quatre points non situés dans un même plan donnent lieu à trois groupes de quatre droites qu'on peut prendre comme côtés d'un quadrilatère gauche : ABCD, ABDC, ADBC.

**Théorème 662.**

**1798.** *Tout plan parallèle à deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche divise les deux autres côtés en parties directement proportionnelles.*

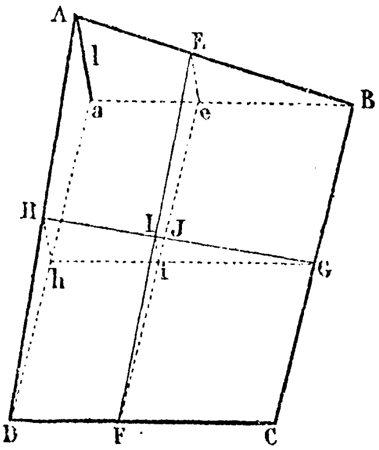


Fig. 1174.

Soit ABCD un quadrilatère gauche.

Dans le plan BCD de deux côtés adjacents, menons D$a$ parallèle à CB, et B$a$ parallèle à CD. Joignons A$a$; soit $l$ la longueur de A$a$.

*La figure* $a$BCD *est un parallélogramme,* car les côtés opposés sont parallèles.

Or tout plan parallèle aux côtés opposés AD, BC, sera parallèle au plan AD$a$; car il sera parallèle aux deux droites DA, D$a$ (fig. 1174).

Soit EF$e$ un plan parallèle aux côtés AD, BC; ce plan est parallèle à AD$a$; donc F$e$ est parallèle à D$a$, E$e$ est parallèle à A$a$; et l'on a :

$$\frac{BE}{AE} = \frac{Be}{ae} = \frac{CF}{DF}.$$

*Remarque.* Soit $$\frac{BE}{AE} = \frac{m}{n};$$

on aura : $\frac{BE}{AB} = \frac{m}{m+n} = \frac{Ee}{l}$; d'où $Ee = \frac{lm}{m+n}$.

**Théorème 663.**

**1799.** *On mène un plan parallèle à deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, ce plan coupe les deux autres côtés en deux points* E, F *puis on mène un plan parallèle au second groupe de côtés opposés,* i *coupe les premiers en deux points* G, H; *prouver que les droites* EF, GH *sont dans un même plan* (fig. 1174).

Soit le plan $EFe$ parallèle à $ADa$ et $HGh$ parallèle à $ABa$.

On sait que AB et DC sont divisés dans un même rapport.

De même CB et DA sont divisés dans un même rapport.

Les quatre plans parallèles deux à deux donnent quatre droites parallèles entre elles $Aa$, $Ee$, $Hh$, $Ii$.

Soit I le point où l'intersection des deux plans $EFe$ et $HGh$ rencontre EF, et J le point où la *même intersection* rencontre GH.

Il suffit de prouver que $Ii = Ji$; car si cette égalité a lieu, le point I se confondra avec J et appartiendra aux deux diagonales EF et GH.

$$\text{Soit}\quad \frac{BE}{AE}=\frac{m}{n};\quad \frac{BE}{AB}=\frac{m}{m+n}=\frac{Ee}{l};\quad \text{d'où}\quad Ee=\frac{lm}{m+n}. \qquad (1)$$

$$\text{Soit}\quad \frac{CG}{BG}=\frac{p}{q};\quad \frac{CG}{BC}=\frac{p}{p+q}=\frac{Hh}{l};\quad \text{d'où}\quad Hh=\frac{lp}{p+q}. \qquad (2)$$

Or

$$\frac{Fi}{Fe}=\frac{CG}{CB};\ \text{donc}\ \frac{Ii}{Ee}=\frac{p}{p+q};\ \text{d'où}\ Ii=Ee.\frac{p}{p+q}=\frac{lmp}{(m+n)(p+q)}.$$

$$\frac{Gi}{Gh}=\frac{CF}{CD};\ \text{donc}\ \frac{Ji}{Hh}=\frac{m}{m+n};\ \text{d'où}\ Ji=Hh.\frac{m}{m+n}=\frac{lmp}{(m+n)(p+q)}.$$

Donc les points I, J se confondent; les droites EF, GH se coupent, et par suite sont dans un même plan.

### Th. R. 663. — I.

**1800.** *Tout plan* EFGH *mené par deux points* E, F *qui divisent dans un même rapport deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, divise les deux autres côtés en* G, H *dans un même rapport.*

### Théorème 664.

**1801.** *Tout plan* EFGH *mené par les points milieux* E, F *de deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, divise les deux autres côtés aux points* G, H *en parties proportionnelles* (fig. 1175).

Ce n'est qu'un corollaire du théorème réciproque ci-dessus (nº 1800); mais, comme on le rappelle assez fréquemment, il convient d'en donner une démonstration directe.

Soit *abcd* le plan mené par les points E, F milieux de BC et AD, et *abcd* la figure obtenue en projetant sur ce plan le quadrilatère gauche.

Par construction, $BE = CE$,

donc $bE = cE$, et $Bb = Cc$,

de même $aF = dF$, et $Aa = Dd$.

Or les projectantes $Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$ sont parallèles; donc

$$\frac{AG}{BG} = \frac{aG}{bG} = \frac{Aa}{Bb},$$

et
$$\frac{DH}{CH} = \frac{dH}{cH} = \frac{Dd}{Cc}.$$

Mais
$$\frac{Aa}{Bb} = \frac{Dd}{Cc};$$

donc
$$\frac{AG}{BG} = \frac{DH}{CH}.$$

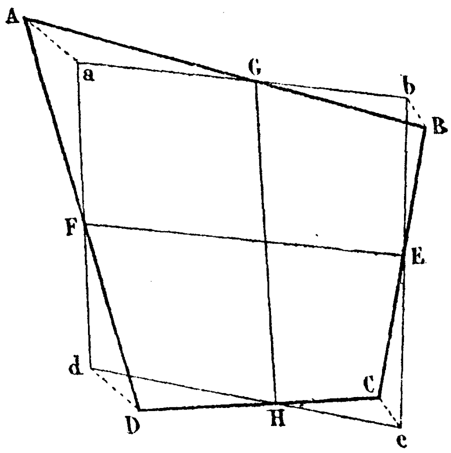


Fig. 1175.

*Remarques.* Toute droite telle que GH est divisée en parties égales par EF.

En procédant d'une manière analogue, on démontrerait directement le théorème réciproque, dont celui-ci n'est qu'un cas particulier.

**Note.** Le *quadrilatère gauche* se rencontre fréquemment dans les applications; on peut considérer ses côtés opposés comme étant deux à deux les génératrices de chaque système d'un paraboloïde hyperbolique.

Voir *Éléments de Géométrie* (nos 923 à 943); *Exercices de Géométrie descriptive* (nos 712 et suivants). On peut voir aussi dans les *N. A.*, 1892, p. 41, une belle étude par M. F. FARGEON.

### Théorème 665.

**1802.** *Lorsqu'un polygone gauche est coupé par un plan, chaque côté est divisé en deux segments; le produit des segments qui n'ont pas d'extrémité commune égale le produit des autres segments.* (CARNOT, *Géométrie de position.*)

En projetant la figure sur un plan perpendiculaire au plan sécant, on retombe sur le théorème connu de la Géométrie plane (no 181); car on trouve un polygone plan $abcd$... coupé par une droite en $l$, $m$, $n$...

Or on a la relation
$$\frac{al}{bl}\cdot\frac{bm}{cm}\cdot\frac{cn}{dn}\ldots = 1.$$

Mais
$$\frac{AL}{BL} = \frac{al}{bl}; \quad \frac{BM}{CM} = \frac{bm}{cm}, \quad \text{etc.};$$

donc
$$\frac{AL}{BL}\cdot\frac{BM}{CM}\cdot\frac{CN}{DN}\ldots = 1.$$

### Théorème 665. — I.

**1802 a.** *Tout quadrilatère gauche, dans lequel la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres côtés, est circonscriptible à un cercle.*

On peut dire aussi : *Lorsqu'un quadrilatère gauche est circonscrit à une sphère, les quatre points de contact sont dans un même plan.*

Solution par J.-B. DURRANDE. (*Annales de Gergonne*, 1811-1816, pages 49 et 52.)

# LIEUX GÉOMÉTRIQUES

### Lieu 666.

**1803.** *Un plan* M *tourne autour d'une droite fixe* XY (*une girouette autour de son axe*); *d'un point fixe* O, *on abaisse des perpendiculaires sur le plan mobile en ses diverses positions. Quel est le lieu de ces perpendiculaires?*

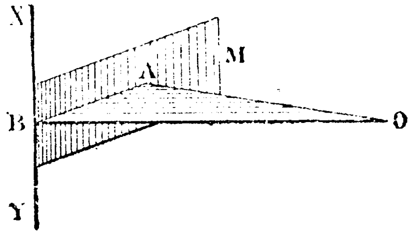



Fig. 1176.

Soit OA la perpendiculaire au plan M. Menons la droite AB perpendiculaire à l'axe XY, et traçons OB.

En vertu du théorème des trois perpendiculaires (G., n° 372), la droite OB est perpendiculaire à XY.

Ainsi l'axe XY est perpendiculaire aux deux droites OB et AB, et par suite à leur plan OAB.

Le lieu de la perpendiculaire OA est donc *le plan mené par le point donné* O, *perpendiculairement à l'axe donné* XY.

*Remarque.* Le triangle OAB est rectangle en A, et l'hypoténuse OB est immobile; donc le lieu du pied A de la perpendiculaire OA est la circonférence décrite sur OB comme diamètre, dans le plan mené par le point O perpendiculairement à l'axe XY.

### Lieu 667.

**1804.** *Étant données deux droites quelconques* AB *et* CD, *on fait mouvoir une troisième droite* MN *le long de* AB *et parallèlement à* CD. *Quel est le lieu décrit par la droite mobile?*

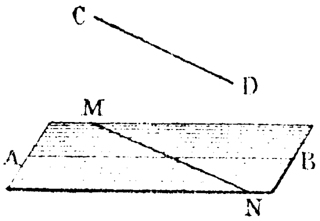



Fig. 1177.

Les deux droites MN et CD étant parallèles, tout plan mené par MN est parallèle à CD. (G., n° 376.) Or, en l'une quelconque de ses positions, la droite mobile MN détermine avec AB un plan parallèle à la droite CD. C'est donc ce plan qui est le lieu demandé.

### Lieu 668.

**1805.** *Lieu des points équidistants de deux plans parallèles.*

C'est un troisième plan mené parallèlement aux deux plans donnés par le milieu d'une perpendiculaire commune à ces deux plans.

Car toutes les perpendiculaires menées entre ces trois plans seront divisées en deux parties égales. (G., n° 385.)

**Lieu 669.**

**1806.** *Lieu des points équidistants de deux plans quelconques.*

C'est l'ensemble des deux plans bissecteurs des dièdres formés par ces deux plans. Car le plan bissecteur d'un dièdre est le lieu des points équidistants des deux faces de ce dièdre. (G., nº 339, 4º.)

**Lieu 670.**

**1807.** *Lieu des parallèles menées à un plan donné* A *par un point donné* O.

C'est le plan M mené par le point donné parallèlement au plan donné. Car toute droite OM menée dans ce plan est parallèle au plan donné A... (G., nº 376.)

**Lieu 671.**

**1808.** *Lieu des points équidistants de deux droites* AB *et* CD *qui se coupent.*

Les droites données déterminent un plan PQ. Le lieu cherché comprend d'abord les bissectrices indéfinies EF et GH des angles que forment les droites données; mais le lieu complet se compose des plans indéfinis M et N menés par les bissectrices EF et GH perpendiculairement au plan PQ.

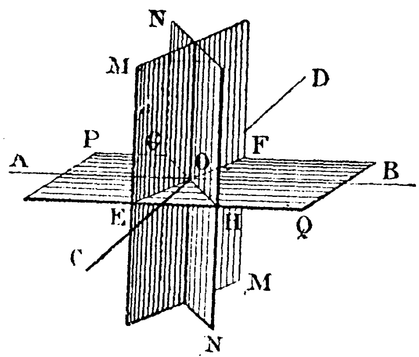


Fig. 1178.

**Lieu 672.**

**1809.** *Quel est le lieu des projections d'un point donné* A *de l'espace sur les droites menées dans un plan, par un même point* B *de ce plan?*

Abaissons la droite AC perpendiculaire sur le plan P.

Cette droite est perpendiculaire à BC; ainsi C est un point du lieu, il en est de même du point B; car, si nous menons dans le plan P la droite BE perpendiculaire à BC, la ligne AB est perpendiculaire à BE en vertu du théorème des trois perpendiculaires.

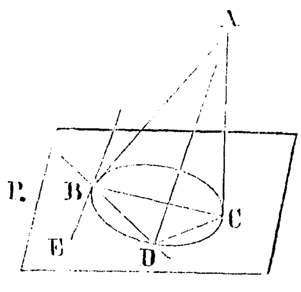


Fig. 1179.

Pour toute autre droite AD perpendiculaire à BD, nous aurons BD perpendiculaire à DC en vertu du théorème réciproque de celui des trois perpendiculaires; ainsi l'angle BDC est droit; donc le lieu demandé est la circonférence décrite sur BC comme diamètre.

### Lieu 673.

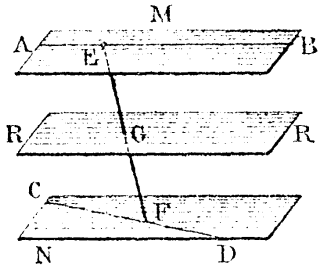


Fig. 1180.

**1810.** *Lieu du milieu des droites menées entre deux droites données dans l'espace.*

Par la droite AB on peut mener un plan M parallèle à la droite CD, et par cette dernière un plan N parallèle à AB. (G., nos 377 et 378.)

Le plan RR, mené à égale distance des plans M et N, est le lieu demandé. Car ce plan contient les milieux de toutes les droites menées de M à N.

### Lieu 674.

**1811.** *Lieu des points équidistants de trois points* A, B, C, *donnés en ligne brisée.*

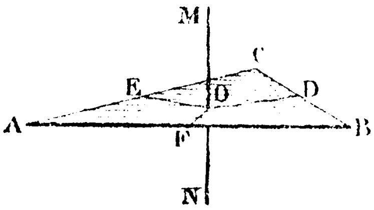


Fig. 1181.

C'est la perpendiculaire élevée au centre du cercle qui passe par les trois points A, B, C.

**1812.** *Autre méthode.* Par les points milieux des droites AB, BC, CA, on peut faire passer des plans respectivement perpendiculaires aux droites AB, etc.; ces trois plans se coupent suivant la droite obtenue par la première méthode.

### Lieu 675.

**1813.** *Quel est le lieu du point milieu d'une droite de longueur constante, dont les extrémités s'appuient sur deux droites rectangulaires non situées dans le même plan ?*

Par deux droites non situées dans un même plan, on peut faire passer deux plans parallèles entre eux; car il suffit de mener, par un point d'une des droites, une parallèle à la seconde; le plan ainsi déterminé est parallèle à cette seconde ligne; puis, par cette dernière droite, on mène un plan parallèle à celui qu'on a obtenu.

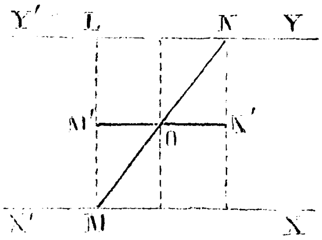


Fig. 1182.

Coupons les deux plans parallèles par un troisième plan qui leur soit perpendiculaire et qui passe par la droite MN, et soient sur ce troisième plan XX', YY' les traces des deux plans parallèles. On peut considérer ces mêmes lignes XX', YY' comme étant les projections des deux droites données sur le troisième plan.

Soit ML la plus courte distance des deux droites rectangulaires, MN la droite de longueur constante; son point milieu O sera évidemment dans un plan parallèle aux deux droites données et équidistant de ces deux lignes.

La projection M'N' de MN sur le plan équidistant est une longueur constante LN, car MN et ML ont des longueurs données. Ainsi le triangle rectangle MLN est déterminé, et LM a une longueur invariable; donc le lieu du point O milieu de MN est le même que le lieu du point O milieu de M'N', lorsque cette dernière longueur a ses extrémités sur deux droites rectangulaires obtenues en projetant les droites données sur le plan équidistant. *Le lieu est donc une circonférence ayant* OM' *pour rayon,* et pour centre, le point milieu de la perpendiculaire commune aux deux droites données.

### Lieu 676.

**1814.** *Quel est le lieu du point de concours des diagonales des parallélogrammes inscrits dans un quadrilatère gauche?*

C'est la droite MN qui joint les points milieux des deux diagonales.

La démonstration ne diffère point de celle qui a été donnée pour le théorème correspondant de Géométrie plane, car les droites AB, AM, AD, DB, EF sont dans un même plan. Ainsi la médiane AM passe au point K milieu de EF.

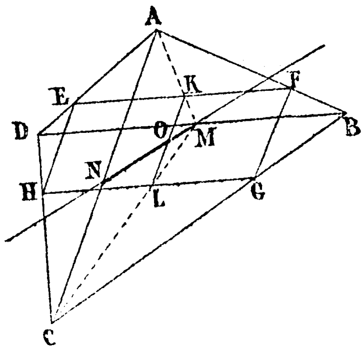


Fig. 1183.

De même CM passe au point L milieu de GH. Puis, dans le triangle AMC, la médiane MN passe au point O milieu de LK; or le point milieu O est le point de concours des diagonales du parallélogramme EFGH.

**1815.** *Autre démonstration.* Projetons la figure sur un plan perpendiculaire à MON.

Les trois points M, O, N auront même projection O.

Les projections des segments d'une même droite sont proportionnelles à ces segments; donc on obtient un parallélogramme *abcd,* car BM = DM;

donc $$bm = dn;$$

de même $$am = cn;$$

d'ailleurs, les droites EF, GH égales et parallèles ont des projections *ef, gh* égales et parallèles; mais les diagonales *eg, fh* se croisent au point commun *o;* donc EG, FH se coupent sur la droite MON.

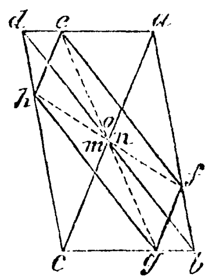


Fig. 1184.

**1816.** *Remarque.* La démonstration par les projections peut servir pour la question connue de Géométrie plane, où il s'agit de trouver le lieu des points de concours des diagonales des parallélogrammes inscrits dans un quadrilatère plan.

En effet, le lieu une fois connu pour le quadrilatère gauche, il suffit de projeter la figure sur un plan non perpendiculaire à MON.

# PROBLÈMES

### Problème 677.

**1817.** *Trouver la distance d'un point donné* M *à un plan donné* ABC.

Du point M, avec un cordon d'une longueur suffisante, on marque sur le plan trois points quelconques A, B, C, équidistants de M ; on construit le triangle ABC, et on élève sur les milieux des côtés des perpendiculaires qui déterminent le point O équidistant des sommets.

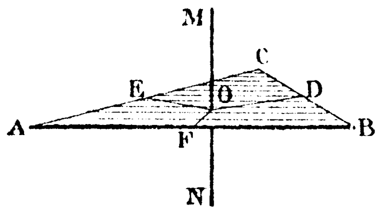


Fig. 1185.

La droite MO est la distance demandée. Car les obliques MA, MB et MC étant égales, leurs pieds s'écartent également du pied de la perpendiculaire. Or le point O est le seul point du plan pour lequel on ait $OA = OB = OC$. Ainsi MO est perpendiculaire au plan ABC, et représente la distance du point M à ce plan.

### Problème 678.

**1818.** *La flèche d'un clocher forme un angle solide régulier à 8 faces, dont la somme est de 90 degrés. On demande la valeur de chacun des angles des faces latérales vers la base de la flèche.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Angles de 8 triangles, ensemble. . . | 8 . 2 | ou | 16 droits. |
| Somme des 8 angles du sommet . . . | | | 1 droit. |
| Différence ; les 16 angles vers la base . | | | 15 droits. |
| Valeur de l'un de ces angles . . . . | | | $^{15}/_{16}$ de droit. |

Soit $84^{\circ}\,{}^{3}/_{8}$ ou $84^{\circ}22'\,{}^{1}/_{2}$.

### Problème 679.

**1819.** *La somme des 8 faces de l'angle solide de la flèche d'un clocher pouvant varier de 0 à 360 degrés. On demande entre quelles limites peut varier la somme des angles des faces latérales vers la base de la flèche.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Somme totale des angles des 8 faces. . | 8 . 2 | ou | 16 droits. |
| » des 8 angles du sommet . . . | de | 0 à | 4 droits. |
| » des 16 angles vers la base . . | de | 16 à | 12 droits. |

Ainsi la somme demandée est variable de 12 à 16 droits, soit de 1080 à 1440 degrés.

**Problème 679. — I.**

**1820.** *Que deviennent ces limites dans le cas général d'un angle solide de* n *faces?*

Somme totale des angles . . . . $2n$ droits.

Angles au sommet . . . . . . de 0 à 4 droits.

Angles vers la base . . . . . . de $2n$ à $(2n - 4)$ droits.

**Problème 680.**

**1821.** *Une salle a une hauteur représentée par* h; *on attache au plafond une corde de* l *mètres de longueur;* l *étant plus grand que* h, *on trace un cercle sur le plancher en tenant la corde tendue. On demande la surface de ce cercle.*

Le cordon tendu forme l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit $h$ et $r$; donc $r^2 = l^2 - h^2$.

La surface du cercle, ou $\pi r^2 = \pi(l^2 - h^2)$.

**Problème 680. — I.**

**1821 a.** *Une tige* AP *de hauteur* h *est perpendiculaire à un plan* M; *du pied de cette tige on décrit sur le plan une circonférence ayant* r *pour rayon. En un point* B *de cette circonférence on mène une tangente* BC *de longueur* t. *On demande la distance* AC *de l'extrémité de cette tangente à l'extrémité de la tige.*

On a : $$AC^2 = h^2 + d^2 = h^2 + r^2 + t^2.$$

**Problème 681.**

**1822.** *Mener un plan qui coupe un trièdre trirectangle* S *de manière que la section* ABC *soit égale à un triangle donné.*

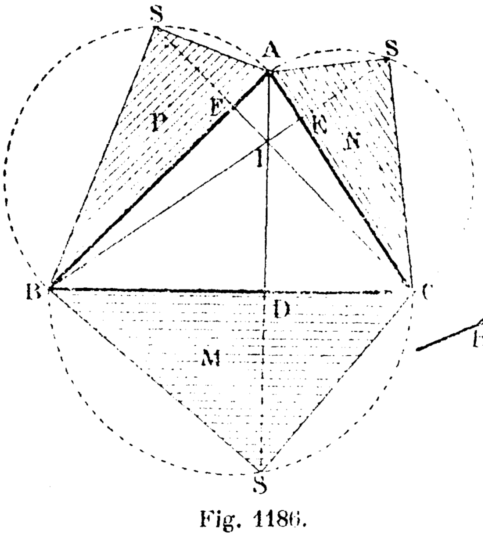


Fig. 1186.

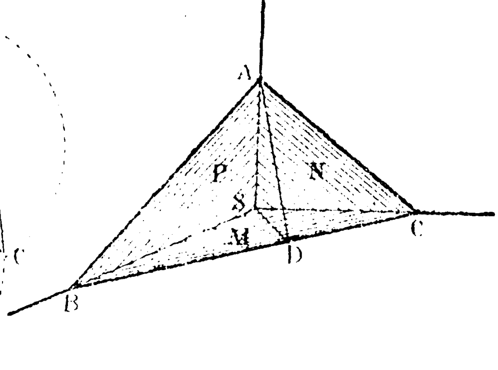


Fig. 1187.

Un trièdre trirectangle est un trièdre dont chaque angle face est droit.

Recourons au *problème contraire* (nº 213).

Sur la face M (fig. 1187); menons SD perpendiculaire à BC, et dans le triangle ABC menons AD. En vertu du théorème des trois perpendiculaires, AD est perpendiculaire à BC. Ainsi AD est une hauteur du triangle ABC, et SD la hauteur du triangle rectangle BSC.

Donc le triangle rectangle BSC est complètement déterminé, car on connaît son hypoténuse BC et le pied D de la hauteur correspondante (fig. 1186).

Ce triangle étant construit, on porte les distances SB et SC (fig. 1186) sur les arêtes correspondantes du trièdre; on détermine d'une manière analogue la longueur à porter sur l'arête SA, ce qui donne le troisième sommet du triangle demandé BAC (fig. 1187).

**1823**. Remarque. Le *problème contraire*, qu'on a dû résoudre préalablement, offre un grand intérêt, car il est fondamental dans la théorie de la *perspective axonométrique*. (Voir *Géométrie descriptive*, nºs 601 et suivants.) Il n'y a que deux solutions symétriques par rapport au plan du triangle donné ABC. En effet, le lieu du point S, tel que l'angle ASB soit droit, est la sphère décrite sur le diamètre AB. De même le point S doit appartenir à la sphère décrite sur le diamètre AC et à celle qui aurait BC pour diamètre; or les trois sphères se coupent deux à deux suivant des cercles dont les plans se rencontrent suivant une même droite, et cette droite détermine sur les surfaces des sphères les deux points communs aux trois surfaces.

Il n'y a donc que deux points qui puissent servir de sommet au trièdre trirectangle.

### Problème 682.

**1824**. *Étant données deux droites indéfinies quelconques* AB *et* CD, *mener un plan parallèle à chacune de ces droites, à égale distance de l'une et de l'autre.*

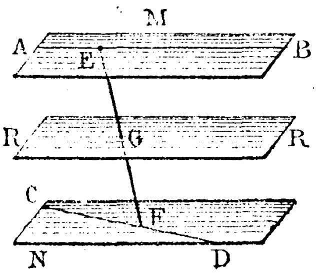


Fig. 1188.

Par la droite AB, on peut mener un plan M parallèle à la droite CD, et par CD on peut mener un plan N parallèle à AB. (G., nºs 377 et 378.)

Les deux plans M et N sont parallèles. (G., nº 391.)

Si donc on mène un plan RR équidistant des deux plans M et N, ce plan sera parallèle à chacune des deux droites AB et CD et se trouvera à égale distance de chacune d'elles.

### Problème 683.

**1825**. *Par une droite donnée* AB, *mener un plan qui passe à égale distance de deux points donnés* C *et* D.

Soit M ce plan; les perpendiculaires CE et DF doivent être égales; ces droites sont parallèles, comme étant perpendiculaires à un même plan;

donc les triangles CEG et DFG sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à des angles respectivement égaux. Ainsi $CG = GD$.

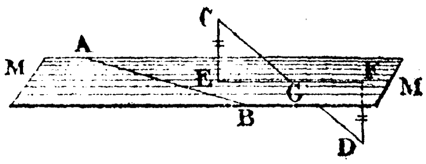


Fig. 1189.

Le plan M est donc déterminé par la droite donnée AB et le point G, milieu de la droite CD, qui joint les points donnés.

Il y a une seconde réponse : le plan conduit par AB parallèlement à CD.

### Problème 684.

**1826.** *Par un point* O, *mener un plan qui passe à égale distance des trois autres points donnés* A, B, C.

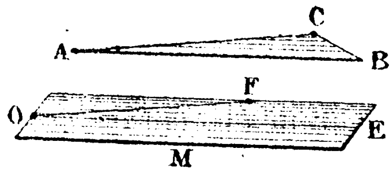


Fig. 1190.

Les trois points donnés A, B, C, déterminent un plan ABC.

Par le point O, on mènera un plan parallèle au plan ABC, et par suite équidistant des trois points donnés.

*Discussion.* 1° Si les quatre points donnés sont en ligne droite, tout plan passant par la droite répond à la question.

2° Si trois points donnés sont en ligne droite, tout plan mené parallèlement à cette droite par le quatrième point répond à la question.

Dans ces deux premiers cas, le problème est indéterminé.

3° Si les quatre points forment un quadrilatère plan, ce plan même donne la solution.

4° Si les quatre points sont les sommets d'un tétraèdre, il y a quatre solutions : d'abord celle qu'on a indiquée précédemment (fig. 1190), puis trois autres, en menant par le point assigné un plan passant par l'une des parallèles à l'un des côtés du triangle des trois points, lorsque cette parallèle passe par les points milieux des deux autres côtés de ce triangle.

### Problème 685.

**1827.** *On donne une droite* XY *et deux points quelconques* A *et* B *de l'espace; trouver sur la droite un point* C *tel que le chemin* $AC + BC$ *soit minimum, et un point* D *tel que la différence* $AD - BD$ *des chemins soit maxima.*

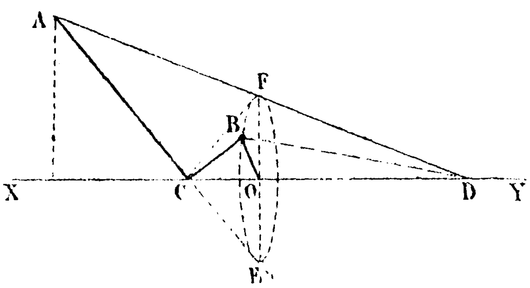


Fig. 1191.

Soient les points A, B et la droite XY non situés dans un même plan.

Par le point B, menons un plan perpendiculaire à XY et décrivons une circonférence avec le rayon OB.

Soit EF le diamètre situé dans le plan AXY.

En se reportant aux questions connues de Géométrie plane, on mènera ACE et AFD.

$AC + CE$ ou $AC + CB$ est le chemin minimum. (G., n° 176.)

$AD - FD$ ou $AD - BD$ donne la différence AF maxima, car cette différence $= AF$; pour tout autre point T, on aurait un triangle ATF; donc $AT - TF < AF$. (G., n° 42, 2°.)

*Remarque.* On procéderait d'une manière analogue pour déterminer sur XY un point dont la somme ou la différence des carrés des distances égale $k^2$.

En général, il vaut mieux se borner à indiquer la solution des problèmes de l'espace et recourir à la Géométrie descriptive, pour effectuer réellement les constructions.

### Problème 685. — I.

**1828.** *Deux droites* AB, A'B' *sont perpendiculaires à un même plan* M *aux points donnés* A *et* A'. *On sait que la longueur de* AB *est double de celle de* A'B'. *Par le pied* A *de* AB, *on tire dans le plan* M *une droite* AC, *faisant avec* AA' *un angle donné. On demande de trouver sur la droite* AC *un point d'où l'on verrait les longueurs* AB, A'B' *sous des angles égaux. Discussion sommaire de la solution.* (Concours d'admission à l'École spéciale militaire, 1876.)

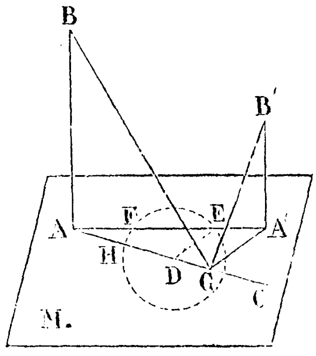



Fig. 1192.

D'un point quelconque D de AC avec un rayon égal à la moitié de AD, décrivons un arc dans le plan M. Il coupe AA' aux points E, F. Par A', menons A'G parallèle à ED, et G est le point demandé. En effet, puisque DE est la moitié de AD, de même A'G est la moitié de AG. Donc les deux triangles rectangles GA'B', GAB sont semblables, puisque l'angle droit est compris entre deux côtés homologues proportionnels, car $A'B' = \frac{1}{2} AB$; donc les angles A'GB', AGB sont égaux entre eux.

*Discussion.* La circonférence est tangente à AA' lorsque l'angle GAA' égale 30°; donc il y a deux solutions lorsque $A < 30°$; une seule pour $A = 30°$, et aucune pour $A > 30°$.

*Remarque.* — Si les hauteurs A'B' et AB étaient dans le rapport $\frac{m}{n}$, il faudrait prendre pour rayon $AD \times \frac{m}{n}$. Les deux triangles seraient encore semblables.

### Problème 685. — II.

**1829.** *Projeter deux figures planes semblables, placées d'une manière quelconque dans l'espace, suivant deux figures semblables.*

La question est traitée avec les développements convenables au *livre* VI, sous la forme de *Théorème.* (*Exercices* 699, II et III, n^os^ 1846, **a**; 1846, **d.**)

On peut voir aussi le n° 2515, 2°, et diverses notes que nous avons publiées en 1895 dans le *Journal des Mathématiques élémentaires et spéciales*, de M. G. de Longchamps.

# LIVRE VI

## THÉORÈMES

### Géométrie de position.

**Théorème 686.**

**1830.** *Dans un tétraèdre* SABC, *les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées se rencontrent en un même point, qui est le milieu de chacune d'elles.*

Considérons d'abord deux de ces droites; par exemple, DF et EG. Menons les droites DE et FG.

Dans le triangle ASC, la droite DE est parallèle à AC, et en est la moitié; de même, dans le triangle ABC, la droite FG est parallèle à AC, et en est la moitié.

Ainsi la figure DEFG est un parallélogramme qui a pour diagonales les droites DF et EG; donc ces droites se coupent en leurs milieux.

La troisième droite, qui joindrait les milieux de SB et de AC, couperait aussi DF en son milieu; donc *les trois droites,* etc.

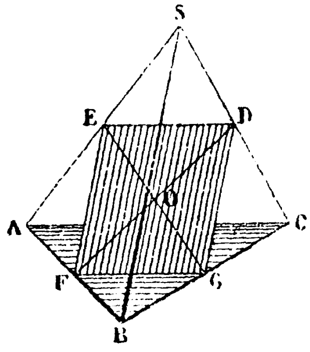


Fig. 1193.

*Remarques.* Les quatre droites AB, BC, CS et AS, qui ne sont pas dans un même plan, forment ensemble le périmètre d'un *quadrilatère gauche.* Nous avons déjà vu (n° 1792) *que les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme.*

**Théorème 687.**

**1831.** *Les milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier* ABCD *sont les sommets d'un octaèdre régulier.*

En effet, toutes les lignes qui joignent un point milieu quelconque, I par exemple, aux quatre points E, F, G, H, sont égales comme moitié d'une arête. Donc les huit triangles formés sont équilatéraux et égaux entre eux.

Donc la figure EFGHIJ est un octaèdre régulier.

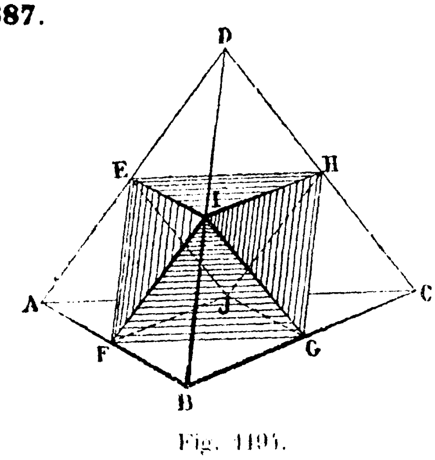


Fig. 1194.

**Théorème 687. — I.**

**1832.** 1° *Les milieux des arêtes d'un tétraèdre quelconque sont les sommets d'un octaèdre dont les arêtes opposées sont égales et parallèles.*

2° *Le volume de l'octaèdre est la moitié du volume du tétraèdre.*

En effet, la pyramide DEIH est le huitième de DABC, car ses arêtes sont respectivement la moitié des arêtes de DABC; or les volumes sont entre eux comme les cubes des dimensions homologues. (G., n° 487.) De même CGIH $= {}^1/_8$CBAD, etc.; donc l'octaèdre $= {}^4/_8$ ABCD.

**1832 a. Note.** Il n'y a que cinq polyèdres réguliers convexes (G., n° 429), mais il y a en outre *quatre polyèdres réguliers non convexes.* Ils ont été découverts par Poinsot, étudiés par Cauchy et J. Bertrand. (Voir *Traité de Géométrie élémentaire,* par MM. Rouché et de Comberousse, n° 913.)

* Poinsot, né à Paris en 1777, mort en 1859, membre du Bureau des Longitudes, auteur des *Éléments de statique,* où se trouve exposée pour la première fois la *théorie des couples.*

* Cauchy, né à Paris en 1789, mort en 1857, un des plus grands mathématiciens du XIX^e siècle. Il a publié un grand nombre de mémoires sur toutes les parties des mathématiques.

* J. Bertrand, membre de l'Institut et de l'Académie française, mort à Paris en 1900.

**Théorème 688.**

**1833.** *Dans un tétraèdre quelconque, les six plans bissecteurs des dièdres se rencontrent en un même point équidistant des quatre faces.*

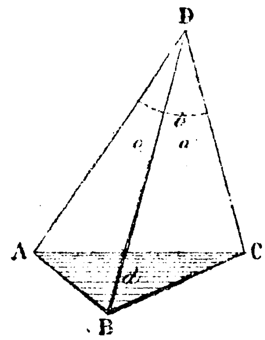


Fig. 1195.

En effet, dans le trièdre D, les trois plans bissecteurs se rencontrent suivant une droite DX dont chaque point est équidistant des faces *a, b, c.*

Dans le trièdre A, les trois plans bissecteurs se rencontrent suivant une droite AY dont chaque point est équidistant des faces *b, c, d.*

Ainsi les deux droites DX et AY se trouvent l'une et l'autre sur le plan bissecteur du dièdre AD, commun aux deux trièdres considérés, et le point de rencontre de ces deux droites est équidistant des quatre faces *a, b, c, d.*

**1833 a.** *Remarque.* Le point I commun aux six plans bissecteurs des six dièdres d'un tétraèdre quelconque, étant équidistant des quatre faces du tétraèdre, est le centre de la sphère inscrite au tétraèdre.

En considérant les plans bissecteurs des suppléments des dièdres du tétraèdre, on obtient des sphères exinscrites; quatre d'entre elles sont respectivement tangentes à une face BCD, par exemple, et aux prolongements des trois faces qui partent du sommet A.

On en obtient parfois trois autres, respectivement tangentes aux *combles,* ou ensembles de quatre plans dont chacun est formé par les prolongements de deux faces ABC, ABD qui ont une arête commune AB, et par les prolongements des deux autres faces ACD, BCD.

**Théorème 689.**

**1834.** *Les six plans perpendiculaires au milieu de chaque arête d'un tétraèdre, se coupent au même point.*

Tout point du plan perpendiculaire au milieu de AB est équidistant des points A et B; donc le plan commun aux plans perpendiculaires à AB, AC, BC est équidistant des quatre sommets du tétraèdre; donc il appartient aux plans respectivement perpendiculaires au milieu de AD, de BD et de CD.

*Remarque.* Le point de concours des six plans est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

**Théorème de Darboux 689. — I.**

**1834 a.** *Un tétraèdre* ABCD *est la somme arithmétique de six hexaèdres autosymétriques* (c'est-à-dire identiques chacun à leur symétrique).

Soient I le centre de la sphère inscrite au tétraèdre; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ les projections de I sur les faces BCD, CDA, DAB, ABC.

Le tétraèdre sera la somme des six hexaèdres : IAB$\gamma\delta$, IBC$\delta\alpha$, ICA$\beta\delta$, IAD$\beta\gamma$, IBD$\gamma\alpha$. ICD$\alpha\beta$. Chacun d'eux, par exemple IAB$\gamma\delta$, a pour plan de symétrie le plan bissecteur IAB, et par suite est superposable à son symétrique.

(*Mathesis,* 1902, page 17, nº 1.)

**Note.** * DARBOUX, né à Nîmes en 1842, membre de l'Institut, Académie des sciences.

**Théorème de Commandino 690.**

**1835.** *Les quatre droites qui joignent chaque sommet d'un tétraèdre au point de concours des médianes de la face opposée se coupent au même point, et ce point est aux $^3/_4$ de la droite à partir du sommet.*

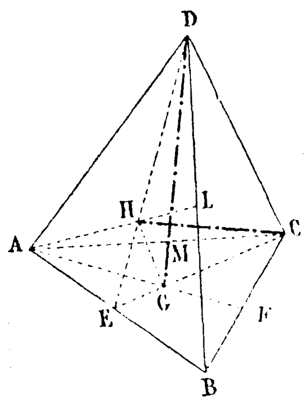


Fig. 1196.

1º Considérons d'abord deux de ces droites DG, CH.

Soit G le point de concours des médianes AF, CE du triangle ABC, et H celui des médianes DE, AL de la face ABD.

Les deux droites DG, CH se coupent en un point M, car elles sont dans un même plan DEC.

2º Les parallèles CD et GH donnent :

$$\frac{GM}{MD} = \frac{HM}{MC} = \frac{GH}{CD} = \frac{1}{3},$$

car

$$\frac{EG}{CE} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi GM est le tiers de MD, ou le quart de la ligne entière GD; donc DM est les $^3/_4$ de DG. De même $CM = {}^3/_4$ CH.

Les quatre droites se coupent au même point, puisque la droite issue du sommet A, par exemple, doit aussi couper DG aux points situés aux $^3/_4$ de sa longueur à partir de D.

Le point M est le centre de gravité du tétraèdre.

**Note.** COMMANDINO (1509-1575) traduisit les œuvres d'ARCHIMÈDE, d'APOLLONIUS, de PTOLÉMÉE et d'EUCLIDE, et publia, en 1565, son traité *De Centro gravitatis.*

### Théorème 691.

**1836.** *En prenant deux à deux les arêtes opposées d'un tétraèdre, on obtient trois groupes d'arêtes.*

1° *Un tétraèdre peut avoir un, deux ou trois groupes d'arêtes égales.*

2° *Un tétraèdre peut avoir un seul groupe d'arêtes orthogonales l'une à l'autre, ou trois groupes d'arêtes orthogonales.*

(Voir *Méthodes*, n° 159.)

**1836 a. Note.** *Tétraèdre équifacial.* Le tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales entre elles deux à deux a ses faces égales; on le nomme *tétraèdre équifacial*, et il jouit de nombreuses propriétés. Voir l'*Association française pour l'avancement des sciences*, 1875, Nantes, p. 173; les *Nouvelles Annales*, 1880, p. 133, articles par M. E. LEMOINE; voir aussi même année des *N. A.*, p. 403, l'art. par CHÉFIK-BEY du Caire et le *Journal de Vuibert*, 1897-1898, p. 29 et 49; puis juin 1911, p. 152, n° 7371, art. de M. A. VACQUANT, professeur au Lycée Charlemagne.

### Théorème 692.

**1837.** *Lorsque, dans un tétraèdre, deux hauteurs se rencontrent, il en est de même des deux autres.*

Soient les hauteurs AE, BF qui se coupent au point G.

Le plan AHB, qu'elles déterminent, est perpendiculaire à l'arête CD, puisque cette ligne est l'intersection des faces auxquelles les hauteurs sont respectivement perpendiculaires. (G., n° 405.)

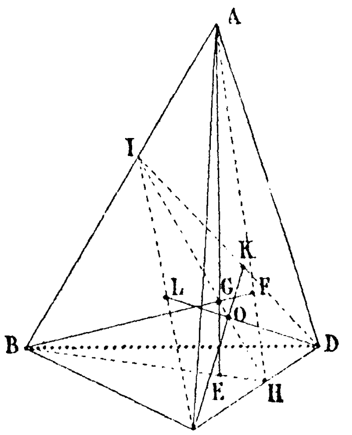


Fig. 1197.

Par CD, menons un plan CID perpendiculaire à AB. Ce plan sera perpendiculaire aux faces ABC, ABD; par conséquent il contiendra les hauteurs DL, CK ; donc ces deux lignes se coupent.

*Remarque.* La droite HI, intersection des plans menés par AB et CD, passe par les points G, O ; car elle est la troisième hauteur, soit du triangle AHB, soit du triangle CID.

### Théorème 693.

**1838.** *Démontrer que les quatre perpendiculaires élevées aux faces d'un tétraèdre à arêtes orthogonales, par le point de concours des hauteurs de chaque face, se coupent en un même point.*

Soient L le point de concours des hauteurs du triangle BCD ; M, celui de ACD, N, celui de ABC; O, celui de ABD.

En outre les arêtes opposées, telles que AB et CD, sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Les hauteurs BE, AE peuvent être déterminées par un plan mené par AB perpendiculairement à CD, puisque AB et CD sont perpendiculaires entre elles; ce dernier plan est perpendiculaire aux faces qui ont CD pour arête commune.

La perpendiculaire au triangle ACD par le point M, et la perpendiculaire menée au triangle BCD par le point L, se coupent; car elles sont dans un même plan AEB.

Ainsi les perpendiculaires élevées aux faces par L, M, N, O sont *deux à deux* dans un même plan; donc elles se coupent deux à deux. D'ailleurs ces quatre droites ne sont pas dans un seul et même plan, car AEB ne contient pas les points N, O; donc les quatre droites passent par un même point.

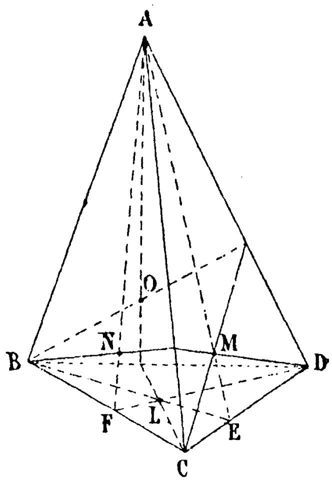


Fig. 1198.

*Remarque.* Le tétraèdre orthogonal jouit de nombreuses propriétés, et il a donné lieu à plusieurs études intéressantes; voir notamment : *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales*, 1881, p. 337.

**Théorème 694.**

**1839.** *Les diagonales d'un tronc de pyramide ayant pour base un parallélogramme se coupent au même point.*

Soit $\frac{m}{n}$ le rapport des côtés homologues et des diagonales homologues des deux bases du tronc.

1° Les arêtes latérales opposées sont dans un même plan, et ce plan coupe le tronc suivant un trapèze ACC'A', dont les diagonales AC', CA' se coupent sur la droite MS d'intersection des deux plans ASC, BSD.

D'ailleurs $\frac{AO}{OC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{m}{n}$.

(G., n° 213, 3°),

donc $$\frac{MO}{OM'} = \frac{m}{n}.$$

Les diagonales BD' DB' diviseraient MM' dans le même rapport; donc elles passent par le même point O.

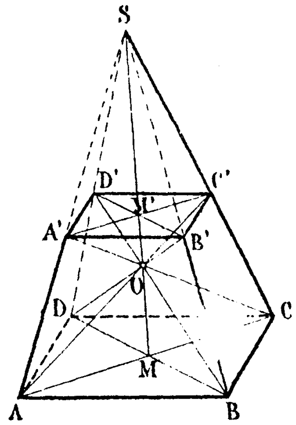


Fig. 1199.

*Remarque.* Le théorème est vrai pour tout tronc de pyramide ayant pour base un *polygone à centre, d'un nombre pair de côtés*, et composé par suite de droites égales et parallèles deux à deux. (G., n° 159.)

**Théorème 694. — I.**

**1840.** *Lorsque les quatre diagonales d'un hexaèdre se coupent au même point, les trois droites qui joignent deux à deux les points de concours des diagonales des faces opposées se coupent au même point.*

En effet, les plans ACC'A' et BDD'B' donnent les trois points M, O, M' en ligne droite. De même, les plans BCD'A', ADC'B' donneraient une autre droite passant par le point O, etc.

### Théorème 695.

**1841.** *Le plan qui passe par le point milieu de trois arêtes non parallèles et non concourantes d'un cube coupe le solide suivant un hexagone régulier.*

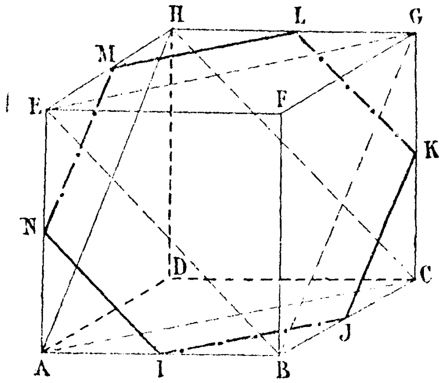


Fig. 1200.

Considérons le plan mené par les points milieux I, J, K des trois arêtes non parallèles deux à deux et qui n'appartiennent pas à un même angle solide.

Menons les diagonales BE, BG, GE des trois faces de l'angle solide F, et la diagonale AC.

La droite IJ, qui joint les points milieux de BA, CB, est parallèle à AC et en égale la moitié; donc elle est aussi parallèle à EG et en égale la moitié. De même JK est parallèle à BG et en égale la moitié.

Le plan IJK, mené par des droites parallèles à EG et à BG, est donc parallèle aux plans BEG et ACH.

Donc KL et CH sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles IJKL et ACH, par un troisième plan CGH.

Mais K est le point milieu de CG; donc L est le milieu de GH et KL $= \frac{1}{2}$ CH, etc. Ainsi le plan IJK passe par les points milieux L, M, N des côtés correspondants.

L'hexagone obtenu est régulier, car chaque côté est égal à la moitié du côté d'un triangle équilatéral, et les angles sont égaux comme étant les suppléments des angles d'un triangle équilatéral. En effet, IJ est parallèle à EG; JK est parallèle à BG; donc l'angle IJK est le supplément de BGE.

*Remarques.* 1° L'hexagone régulier IJKLMN est la section de surface maxima lorsqu'on coupe le cube par des plans perpendiculaires à la diagonale FD.

2° On peut voir aussi au sujet de cette question les *Exercices de Géométrie descriptive* (n° 527).

### Théorème 696.

**1842.** *On peut couper par un plan une pyramide quadrangulaire dont la base est un polygone convexe, de manière à obtenir pour section un parallélogramme.*

On sait que le plan sécant doit être parallèle aux lignes d'intersection des faces opposées de la pyramide, car il coupera deux faces opposées suivant des parallèles à l'intersection de ces faces (G., n° 383); par suite, les deux droites d'intersection seront parallèles entre elles.

Il faut donc prolonger les côtés opposés jusqu'en leur rencontre, mener JE, JF; tout plan parallèle à JEF donnera un parallélogramme *abcd*.

Ainsi $gba$ et EJ sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles par le plan JAB; de même $cd$ est parallèle à JE et par suite à $ab$; de même $ad$, $cb$ sont parallèles à JF. La figure $abcd$ est donc un parallélogramme.

*Remarques.* 1° Au point de vue des opérations graphiques à effectuer, la construction indiquée dans les *Exercices de Géométrie descriptive* est préférable à celle que l'on vient de donner.

2° Le théorème précédent (n° 1842) peut s'énoncer comme il suit : *Il est toujours possible de projeter coniquement un quadrilatère quelconque* ABCD *suivant un parallélogramme* abcd.

On peut d'ailleurs disposer du centre J de projection de manière à obtenir pour projection un losange ou un rectangle; pour cette dernière figure, il suffit que J appartienne à la sphère décrite sur EF comme diamètre.

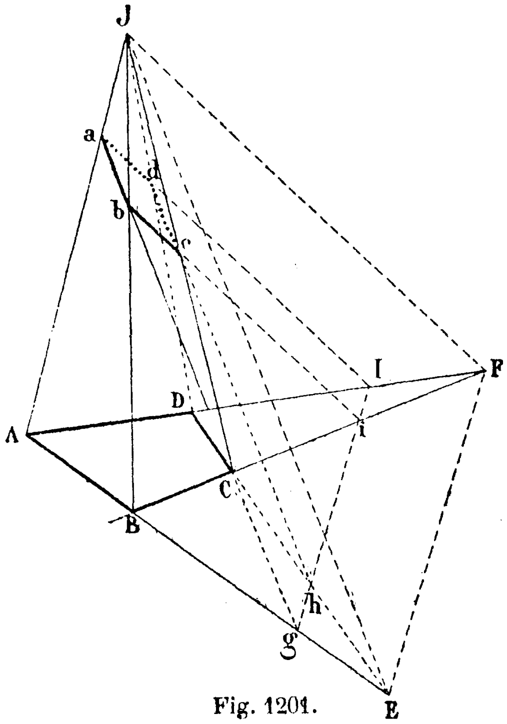


Fig. 1201.

**Note.** STEVIN est le premier qui ait résolu la question précédente : *Un parallélogramme et un quadrilatère quelconque étant donnés, placer ces deux figures dans l'espace de manière que l'une d'elles soit la perspective de l'autre* (*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1899, p. 104, et 1903, p. 73, n° 149, notes de MM. W. STOOT et H. BROCARD).

*STEVIN (1548-1620), né à Bruges, mort à la Haye probablement, ou peut-être à Leyde. On doit lui attribuer la numération décimale écrite; ses *Œuvres mathématiques* ont été d'abord publiées en flamand. (*N. A.*, 1853, p. 195, et *H. d. M.*, par MAXIMILIEN MARIE, tome III, p. 79.)

### Théorème 697.

**1843.** *On peut couper un prisme triangulaire donné de manière que la section soit semblable à un triangle donné.*

Soit ADS, A'D'S' un prisme triangulaire quelconque.

Les sections parallèles étant égales, on peut supposer que la section demandée SBC est menée par un des sommets du prisme. En admettant que SBC soit semblable à un triangle donné, les angles BCS, CBS ont des grandeurs connues. Le théorème sera démontré si l'on peut résoudre le problème suivant.

### Problème 697. — I.

**1844.** *Construire une pyramide quadrangulaire* SABCD *dont la base est un trapèze, connaissant la face* ADS, *l'inclinaison de cette face sur le plan de la base, la direction* DD', AA', *des côtés parallèles de cette base et les angles de la face* SBC.

Supposons la construction effectuée; du sommet S, abaissons la perpendiculaire SP sur le plan de la base, et la perpendiculaire PQ sur le côté BC; dans la direction de BC prenons $QR = QS$, et joignons R au point P. La droite RP est dans le plan de la base, et SQ est perpendiculaire à BC.

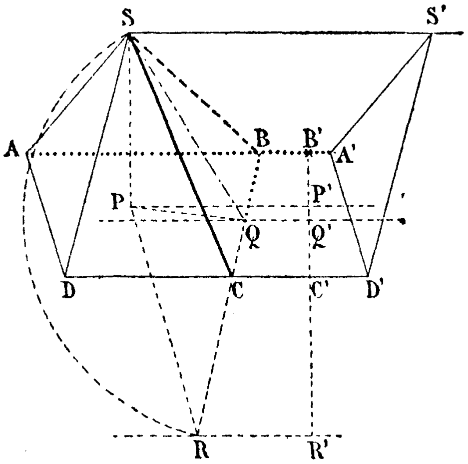


Fig. 1202.

A cause de l'angle droit SPQ, on a :

$$QS^2 - QP^2 = SP^2,$$

ou $$QR^2 - QP^2 = SP^2.$$

Or les rapports $\frac{BQ}{CQ}$ et $\frac{SQ}{CQ}$ ou $\frac{RQ}{CQ}$ sont connus, car le triangle BCS est semblable à un triangle donné; on peut déterminer, par rapport à $B'C'$ et à $P'$, les points $Q'$ et $R'$, et mener des parallèles à $AA'$, et le problème est ramené au problème connu :

*Construire un triangle rectangle* PQR, *tel que les sommets se trouvent sur des parallèles données; on sait, en outre, que la différence* $RQ^2 - PQ^2$ *des carrés des côtés de l'angle droit a une valeur connue* $SP^2$ (nº 1523 a).

**1844 a. Note.** La solution précédente a été donnée par LHUILIER, de Genève, en 1811. (*Annales de Gergonne,* tome II, 1811-1812, pages 293 et suivantes.) On y trouve aussi les solutions données par ENCONTRE, doyen de la faculté des sciences de Montpellier, et TÉDENAT, recteur à cette époque de l'Académie de Nîmes. Enfin, quatre autres solutions par PILATTE et PENJON, professeurs au lycée d'Angers, et ROCHAT ET LEGRAND, professeurs à Saint-Brieuc.

Voici les deux cas les plus intéressants du problème proposé (nº 1843).

1º *Couper le prisme triangulaire de manière que la section soit un triangle équilatéral.*

On peut l'énoncer comme il suit :

*Projeter un triangle donné, de manière que sa projection soit un triangle équilatéral.*

Cette transformation permet de résoudre un assez grand nombre de questions relatives au triangle quelconque; mais il ne s'agit que des questions de position, d'intersection, et non des relations numériques autres que les rapports. Nous l'appliquons à la seconde démonstration du théorème (nº 1201 c).

2º *Couper le prisme triangulaire, de manière que la section soit un triangle rectangle isocèle.*

Ou bien, *projeter un parallélogramme de manière à obtenir un carré.*

GEORGES RITT, dans son *Recueil de problèmes de Géométrie,* a résolu le cas du triangle équilatéral à l'aide du calcul (p. 88, problème 77).

3º M. NEUBERG, professeur à l'Université de Liège, a publié un mémoire très intéressant *Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe.* (Mémoires de l'Académie royale des sciences de Belgique, tome XLIV; Bruxelles, 1890.)

Le savant auteur ne considère que des *projections orthogonales,* et il nomme *contre-projections* d'un triangle toute section du prisme droit construit sur ce triangle.

Le mémoire, de quatre-vingt-six pages, riche en théorèmes importants et en élégantes démonstrations, abonde en renseignements bibliographiques.

La publication de ce savant mémoire avait été précédée par divers articles du même auteur dans la *Nouvelle correspondance mathématique,* de CATALAN, 1874-1875, page 128.

**Théorème 698.**

**1845.** *Deux droites* AB *et* A′B′, *symétriques par rapport à un plan* MN, *font avec ce plan des angles égaux.*

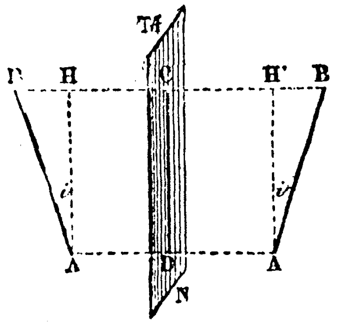


Fig. 1203.

La droite AA′ est perpendiculaire au plan MN, et a son milieu en D; de même, BB′ est perpendiculaire au plan MN, et a son milieu en C.

Donc CD est la projection commune des deux droites sur le plan MN; et si, dans le plan AB′, on mène les droites AH et A′H′ parallèles à CD, on a en $i$ et $i'$ les angles des deux droites avec le plan MN; et comme les deux trapèzes rectangles CDAB et CDA′B′ pourraient coïncider, il en résulte que l'angle $i = i'$.

**Théorème 699.**

**1846.** *Si deux plans* AB *et* A′B′ *sont symétriques par rapport à un troisième* MN, *ce dernier plan est bissecteur de l'angle des deux premiers.*

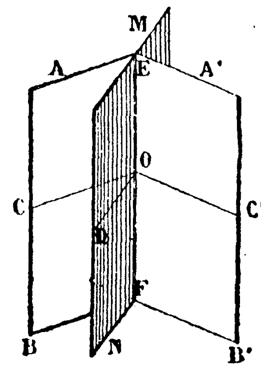


Fig. 1204.

Soit EF l'intersection des plans AB et MN. Tous les points de AB devant avoir leurs symétriques sur A′B′, la droite EF doit appartenir aux deux plans AB et A′B′.

Si l'on mène les trois droites OC, OC′ et OD perpendiculaires à l'intersection EF, ces droites sont dans un même plan perpendiculaire à EF. Ainsi OC et OC′ sont symétriques par rapport au plan MN; ces lignes font des angles égaux avec ce plan (nº 1845). Et comme les angles DOC et DOC′ mesurent les dièdres formés de part et d'autre, le plan MN est bissecteur de l'angle des deux plans AB et A′B′.

**Théorème 699. — I.**

**1846 a.** *Deux triangles égaux, disposés d'une manière quelconque dans l'espace, peuvent être projetés orthogonalement sur un même plan, suivant deux triangles directement égaux.* (Voir nº 1146, *figures directement et figures symétriquement semblables.*)

Soient ABC et $\alpha\beta\gamma$ les triangles égaux donnés.

Transportons l'un d'eux parallèlement à lui-même de manière que deux sommets correspondants, A et $\alpha$, par exemple, coïncident; en d'autres termes, dans l'espace, menons $AB_1$ égal et parallèle au côté $\alpha\beta$, puis $AC_1$ égal et parallèle au côté $\alpha\gamma$ : il suffit de déterminer un plan sur lequel les projections orthogonales de ABC et de $AB_1C_1$ seront égales entre elles. Or tout plan parallèle aux droites de l'espace $BB_1$, $CC_1$, répond à la question, car les côtés AB, $AB_1$ également inclinés sur le plan considéré auront des projections égales $ab$ et $ab_1$; de même $ac = ac_1$ et $bc = b_1c_1$, car les points B et $B_1$ ont même cote par rapport au plan de projection, et cela a lieu également pour C et $C_1$.

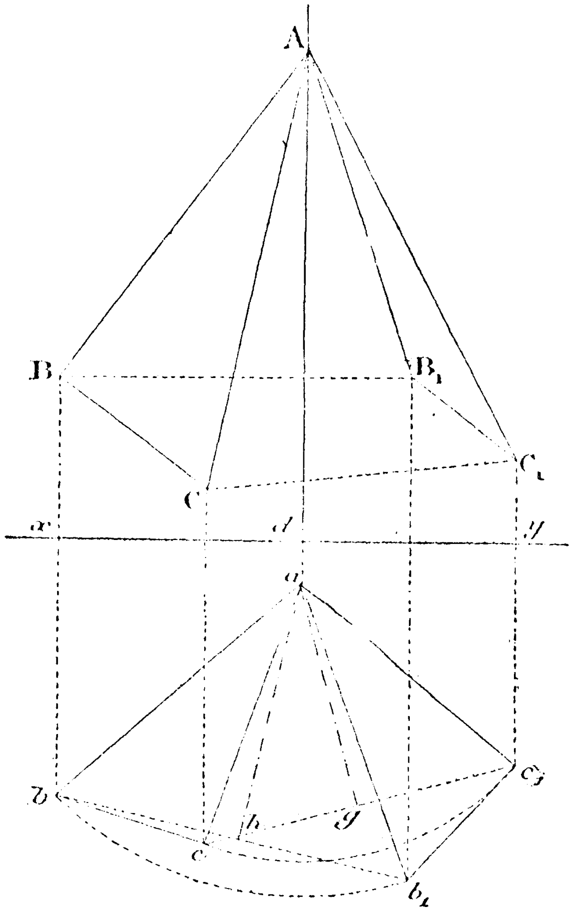


Fig. 1205.

*Ainsi les triangles égaux* ABC, $\alpha\beta\gamma$ *se projettent suivant des triangles égaux sur tout plan parallèle aux droites de l'espace* $BB_1$ *et* $CC_1$.

Les projections égales $abc$, $ab_1c_1$ peuvent présenter deux dispositions différentes (fig. 1205 et 1206).

**1846 b. 1er Cas.** Dans le premier cas (fig. 1205), les figures sont *directement égales;* le point $a$ est leur centre de similitude, et par la rotation de l'une d'elles, *dans son plan*, autour du centre $a$, on les amène à coïncider.

En fait, les perpendiculaires $ga$, $ha$, élevées au milieu des bases $bb_1$, $cc_1$ de triangles isocèles, représentent sur le plan de projection la trace des plans élevés perpendiculairement au milieu de $BB_1$ et de $CC_1$; ces plans se coupent suivant une droite A$d$ qui passe par le sommet commun des triangles isocèles $ABB_1$, $ACC_1$; l'intersection est perpendiculaire aux plans parallèles à $BB_1$ et $CC_1$, lorsque ces deux droites ne sont pas elles-mêmes dans un même plan.

**1846 c. 2e Cas.** Lorsque les projections sont inversement ou symétriquement égales, les droites $bb_1$, $cc_1$ sont parallèles, et il en était de même dans l'espace de $BB_1$ et de $CC_1$; il y a une infinité de directions de plans parallèles à ces deux lignes, et sur chacun de ces plans les triangles donnés se projettent suivant des triangles inversement égaux entre eux. Mais *les triangles donnés se projettent suivant deux triangles égaux superposés sur le plan de symétrie perpendiculaire au milieu des droites parallèles* $BB_1$, $CC_1$; $af$ est la trace de ce plan; donc *les triangles donnés* ABC, $\alpha\beta\gamma$ *se projettent suivant des triangles directement égaux sur tout plan parallèle au plan de symétrie.*

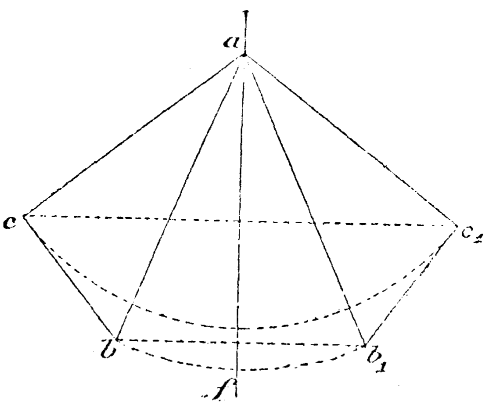


Fig. 1206.

### Théorème 699. — II.

**1846 d.** *Deux triangles semblables, disposés d'une manière quelconque dans l'espace, peuvent être projetés orthogonalement, sur un même plan, suivant deux triangles directement semblables.*

C'est évident d'après la question précédente.

Pour déterminer la direction du plan de projection, on construit un triangle $AB_1C_1$ égal à ABC et homothétique du triangle $\alpha\beta\gamma$ semblable à ABC.

**1846 e. Note.** Pour les triangles égaux (nº 1846), voir aussi les nºs 1829 et 1901 d.

Rappelons le théorème de Chasles. *Tout mouvement d'une figure dans l'espace, pour passer d'une position donnée à une autre position aussi donnée, peut être considéré comme un mouvement hélicoïdal.*

Les figures égales, à trois dimensions, doivent être superposables, et non pas simplement égales par symétrie ; dès lors la superposition de deux triangles scalènes égaux ABC, A'B'C' entraîne la coïncidence de tous les autres sommets homologues.

Quant aux *Polyèdres semblables*, voir *Journal de Mathématiques élémentaires* de Longchamps, 1894, page 231, note de M. Dorlet ; 1895, page 14, note de M. Dellac.

### Théorème 699. — III.

**1846 f.** *Étant donné un tétraèdre* ABCD, *si on mène en* D *des plans* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *perpendiculaires aux arêtes* DA, DB, DC, *les points de rencontre de* $\alpha$ *avec* BC, *de* $\beta$ *avec* CA, *de* $\gamma$ *avec* AB *sont en ligne droite.* (M. Schenker.)

Ce théorème est une conséquence immédiate d'une propriété de deux trièdres supplémentaires, ou de deux triangles sphériques polaires. (Kierboe, de Copenhague, *Mathesis*, 1910, p. 265, nº 27; 1909, p. 126, nº 14, J. Neuberg et p. 154, C. Servais.) Puis *I. M.*, 1910, p. 147, nº 3711. Voir aussi la question proposée par M. Brocard, *E. de G.*, nº 1342 n. Ce cas particulier avait été déjà rencontré par Bobillier, *A. de G.*, t. XVIII, 1827-1828, p. 185, théorème I.

## Volumes.

### Théorème 700.

**1847.** *Le volume d'un prisme triangulaire* ABCDEF *égale le produit d'une face latérale quelconque* ABCD *par la moitié de la distance* IJ *de cette face à l'arête opposée.*

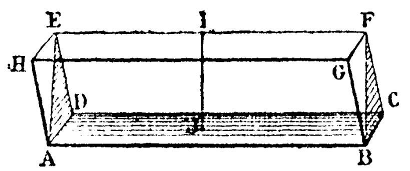


Fig. 1207.

En effet, si l'on mène les plans AG et EG respectivement parallèles aux faces EC et AC, et si l'on prolonge les faces triangulaires du prisme, on détermine un parallélépipède AF qui est double du prisme considéré.

Or, dans le parallélépipède total, on peut prendre pour base la face ABCD; la hauteur est la distance IJ des deux bases.

Le volume du parallélépipède égale le produit de la face ABCD par la distance IJ ; donc le volume du prisme triangulaire ABCDEF égale la moitié de ce même produit.

**Théorème 701.**

**1848.** *Le volume d'un prisme régulier égale le produit de la surface latérale par la moitié de l'apothème de la base.*

En effet, dans un prisme régulier de $n$ faces latérales, on peut, par des plans menés par l'axe et par les arêtes latérales, décomposer le solide en $n$ prismes triangulaires égaux.

Appelons F l'aire de chaque face latérale du solide et $a$ l'apothème de la base.

Le volume d'un prisme partiel est. . . . $F \cdot {}^1/_2\, a.$

Et le volume total est . . . . . . . . . $nF \cdot {}^1/_2\, a.$

**Théorème 702.**

**1849.** *Le volume d'une pyramide régulière égale la surface latérale multipliée par le ${}^1/_3$ de la distance du centre de la base à une face latérale.*

Soit $n$ le nombre des faces latérales, F l'une de ces faces, et $t$ la distance du centre de la base à chaque face latérale.

Par des plans menés par l'axe et par les arêtes latérales, on peut décomposer le solide en $n$ pyramides triangulaires égales. Comme on peut prendre pour base d'une pyramide triangulaire telle face que l'on veut, on aura :

Volume d'une pyramide partielle . . . . $F \cdot {}^1/_3\, t.$

Volume total . . . . . . . . . . . . $nF \cdot {}^1/_3\, t.$

**Théorème 703.**

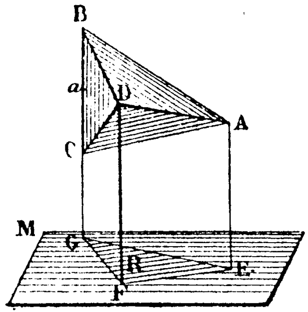


Fig. 1208.

**1850.** *Le volume d'un tétraèdre égale le ${}^1/_3$ d'une arête quelconque* a, *multipliée par la projection* R *du solide sur un plan* M *perpendiculaire à cette arête.*

En effet, le tétraèdre ABCD égale le tronc de prisme triangulaire droit EFG BAD, moins le tronc EFG CAD. Le volume est donc :

$${}^1/_3 R(GB + FD + EA),$$

moins $${}^1/_3 R(GC + FD + EA),$$

soit $${}^1/_3 R \cdot BC, \text{ ou } {}^1/_3 a \cdot R.$$

**Théorème 704.**

**1851.** *Si une pyramide a pour base un trapèze, le volume de cette pyramide égale le ${}^1/_3$ de la somme des bases* a *et* b *du trapèze multiplié par la projection* R *du solide sur un plan* M *perpendiculaire à ces mêmes bases.*

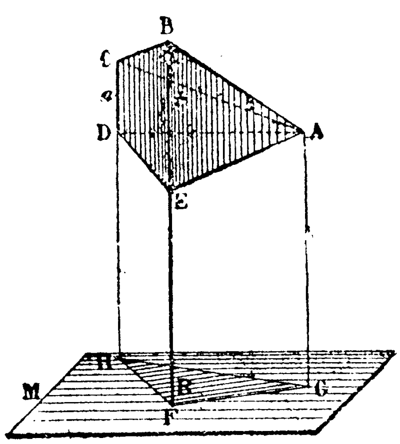


Fig. 1209.

En effet, la pyramide ABCDE égale le tronc de prisme triangulaire droit FGH ABC, moins le tronc FGH ADE. Le volume est donc :

$${}^1/_3 R(HC + FB + GA),$$

moins $${}^1/_3 R(HD + FE + GA),$$

ou $${}^1/_3 R(CD + BE),$$

ou $${}^1/_3 (a + b) R.$$

**Théorème de Fournier 704. — I.**

**1851 a.** *Le volume d'un parallélépipède tronqué est égal au produit de la demi-somme de deux faces parallèles multipliée par leur distance.*

Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'une question bien connue. (G., nº 942.)

**Note.** Le théorème est de FOURNIER, *Éléments de Géométrie et de Trigonométrie,* 1846.
* C. F. FOURNIER, examinateur de la marine en 1846.

**Théorème 705.**

**1852.** *Si la hauteur d'un prisme triangulaire égale deux fois le diamètre du cercle circonscrit à la base, le prisme équivaut au parallélépipède rectangle qui aurait pour dimensions les trois côtés de cette même base.*

Soient $a$, $b$, $c$ les trois côtés de la base; $d$ le diamètre du cercle circonscrit à cette base : la hauteur du prisme sera $2d$.

On sait que le produit des trois côtés d'un triangle égale sa surface multipliée par le double du diamètre du cercle circonscrit. (G., nº 316, III.) Ainsi, en appelant S la surface du triangle, on a :

$$abc = S \cdot 2d.$$

Or le second membre de cette égalité exprime le volume du prisme, et le premier membre exprime le volume du parallélépipède rectangle qui aurait pour dimensions les trois côtés $a$, $b$, $c$. Donc, *si la hauteur...*

**Théorème 706.**

**1853.** *Lorsque trois droites de longueurs données se coupent en un même point et sous des angles constants, l'octaèdre qui aurait pour sommets les extrémités des trois droites a un volume constant.*

(Voir *Méthodes,* nº 156.)

**Théorème 707.**

**1854.** *Tout plan mené par une arête d'un tétraèdre, et par le milieu de l'arête opposée, divise le tétraèdre en deux parties équivalentes.*

Soit $CE = DE$.

Abaissons les perpendiculaires CM, DN sur la face commune ABE.

Les deux parties sont équivalentes comme ayant une base commune ABE et des hauteurs égales CM, DN.

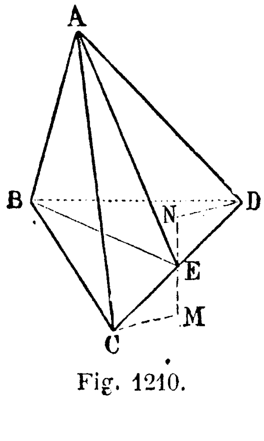


Fig. 1210.

**Théorème 707. — I.**

**1855.** *Tout plan mené par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre divise ce solide en deux parties équivalentes.*

Soient E, F les points milieux par lesquels on mène la section FGEH

Joignons le point A aux points F, H ; menons aussi DF, DG.

Les deux solides à comparer se composent des pyramides quadrangulaires équivalentes A, FGEH ; D, FGEH ; car elles ont même base, et les hauteurs abaissées des points A et D sur la section sont égales ; car AE = DE.

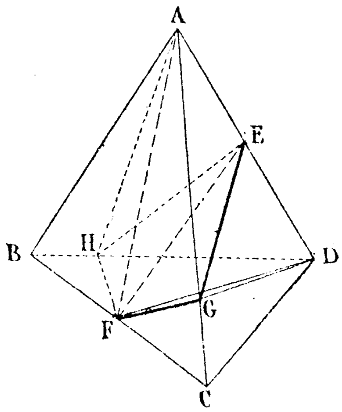


Fig. 1211.

Il ne reste plus qu'à comparer les pyramides triangulaires ABFH et DCFG. Pour cela, comparons chacune d'elles au tétraèdre donné. On sait que deux tétraèdres qui ont un même angle solide sont entre eux comme les produits des trois arêtes de cet angle solide (G., n° 477) ;

donc $\dfrac{\text{BAFH}}{\text{BACD}} = \dfrac{\text{BA . BF . BH}}{\text{BA . BC . BD}} = \dfrac{\text{BH}}{2\text{BD}}$,

$$\frac{\text{CDFG}}{\text{CDBA}} = \frac{\text{CD . CF . CG}}{\text{CD . CB . CA}} = \frac{\text{CG}}{2\text{CA}}.$$

Pour comparer les deux pyramides triangulaires partielles, il suffit donc de comparer les rapports $\dfrac{\text{BH}}{2\text{BD}}$ et $\dfrac{\text{CG}}{2\text{CA}}$, ou $\dfrac{\text{BH}}{\text{BD}}$ et $\dfrac{\text{CG}}{\text{CA}}$. Or tout plan FHEG mené par les points milieux E, F de deux arêtes opposées d'un quadrilatère gauche ADBC, divise les deux autres côtés BD et AC en parties proportionnelles (n° 1801) ; donc

$$\frac{\text{BH}}{\text{BD}} = \frac{\text{CG}}{\text{CA}}; \quad \text{donc} \quad \text{BAFH} = \text{CDFG};$$

donc le tétraèdre est divisé en deux parties équivalentes.

### Théorème 707. — II.

**1855 a.** *Le plan qui divise deux arêtes opposées d'un tétraèdre dans un rapport donné divise le solide dans le même rapport.*

En effet (fig. 1211), si l'on a :

$$\frac{\text{AE}}{\text{ED}} = \frac{\text{BF}}{\text{FC}} = \frac{m}{n},$$

on aura : 1° Les pyramides quadrangulaires

$$\frac{\text{A,FGEH}}{\text{D,FGEH}} = \frac{\text{AE}}{\text{ED}} = \frac{m}{n}.$$

2° Les pyramides triangulaires

$$\frac{\text{BAFH}}{\text{CDFG}} = \frac{\text{BH}}{\text{BD}} : \frac{\text{CG}}{\text{CA}}.$$

Or $\quad \dfrac{\text{BH}}{\text{BD}} = \dfrac{m}{m+n}$ (n° 1800), et $\dfrac{\text{CG}}{\text{CA}} = \dfrac{n}{m+n}$ ;

donc $$\frac{\text{BAFH}}{\text{CDFG}} = \frac{m}{n}.$$

Ainsi les deux solides déterminés par le plan EHFG sont dans le rapport $\dfrac{m}{n}$.

**Théorème de Steiner 708.**

**1856.** *Sur deux droites non situées dans un même plan, on prend deux longueurs données* AB, CD; *prouver que le tétraèdre qui aurait pour sommets les quatre points* A, B, C, D, *a un volume constant, quelle que soit la position des lignes* AB, CD *sur les droites données.*

(Voir *Méthodes*, n° 158.)

**Note**: 1° *Autre démonstration* fondée sur une question précédente (n° 1850).
2° *Si l'on désigne par* A, B *les longueurs de deux arêtes opposées du tétraèdre, par* Δ *leur plus courte distance, par* α *leur angle et par* V *le volume du tétraèdre, on a la relation*

$$V = \frac{AB\Delta}{6} \sin\alpha.$$

Le théorème est dû à P. LENTHÉRIC et TIMMERMANS (*Annales de Gergonne*, t. XVIII, 1827-1828, page 250); l'énoncé est à la page 156 du même volume. Le P. LE COINTE, *Leçons sur la théorie des fonctions circulaires*, indique cette même référence.

Les *N. A.*, 1853, p. 47, donnent la démonstration de l'énoncé suivant de STEINER. *Sur la droite* A *sont situés deux points fixes* a *et* b; *sur la droite* B, *on prend deux points* c, d; *la distance* cd *est constante; l'aire de la pyramide* abcd *est un minimum lorsque le milieu de* cd *est le point où la plus courte distance entre* A *et* B *rencontre* B.

Puis comme *corollaire :* Prenant sur deux droites deux longueurs constantes, et considérant ces longueurs comme les arêtes opposées d'un tétraèdre, le volume du tétraèdre est constant et son aire est un minimum, lorsque la plus courte distance des deux droites partage les deux longueurs en parties égales, et le *rayon de la sphère inscrite est un maximum.*

**Théorème 709.**

**1857.** *Lorsqu'une droite glisse sur deux arêtes opposées d'un tétraèdre, en restant dans un plan parallèle à deux autres arêtes opposées, cette droite engendre un quadrilatère gauche qui divise le tétraèdre en deux parties équivalentes.*

Soit MN s'appuyant sur AB, CD et restant dans un plan parallèle à BC et AD.

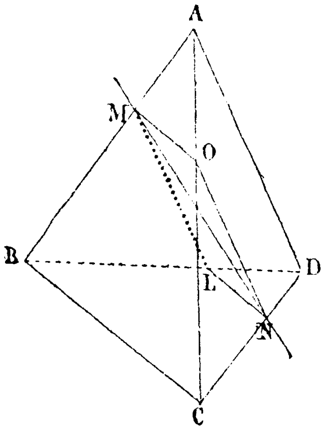


Fig. 1212.

On sait que la surface engendrée est le quadrilatère gauche (n° 1792), et que les côtés AB, DC sont constamment divisés en parties proportionnelles (n° 1798).

Or le plan sécant parallèle à la fois aux deux arêtes AD, BC, coupe les plans ABC, DBC suivant des droites MO, NL parallèles à BC, et les plans BAD, CAD suivant les droites LM, NO parallèles à AD (G., n° 379); donc la section est un parallélogramme LMON; la surface gauche, dont MN est la génératrice, divise donc ce parallélogramme en deux parties égales. Il en est de même pour toutes les sections analogues; donc le tétraèdre est divisé en deux parties équivalentes.

**Théorème 709. — I.**

**1858.** *Un tronc de parallélépipède a pour volume le produit de la section droite par la moyenne de deux arêtes opposées.*

On le démontre en menant une section droite par le centre du parallélogramme qui termine le tronc.

**Théorème 710.**

**1859.** *Le volume d'un tronc de parallélépipède droit, limité par un quadrilatère gauche, s'obtient en multipliant la section droite par la moyenne des quatre arêtes latérales.*

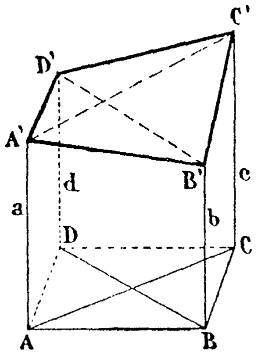


Fig. 1213.

Les droites A'C', B'D' ne sont pas dans un même plan; elles constituent les arêtes opposées d'un tétraèdre A'B'C'D', que la surface gauche qui termine le tronc divise en deux parties équivalentes (nº 1857); donc le solide est la demi-somme des quatre prismes triangulaires ABC, A'B'C'; ADC, A'D'C' et BAD, B'A'D'; BCD, B'C'D'.

Les sections droites de ces quatres prismes sont équivalentes entre elles; soit T la surface d'un triangle tel que ABC.

Le volume d'un tronc triangulaire égale la section droite multipliée par la moyenne des trois arêtes; donc

$$\text{tronc ABC, A'B'C'} = T \cdot \frac{a+b+c}{3},$$

$$\text{tronc ADC, A'D'C'} = T \cdot \frac{a+d+c}{3},$$

$$\text{tronc BAD, B'A'D'} = T \cdot \frac{b+a+d}{3},$$

$$\text{tronc BCD, B'C'D'} = T \cdot \frac{b+c+d}{3}.$$

$$\text{La demi-somme} = T \cdot \frac{a+b+c+d}{2} = \text{ABCD} \cdot \frac{a+b+c+d}{4}.$$

**Théorème 711.**

**1860.** *Par chaque sommet d'un tétraèdre quelconque, on mène un plan parallèle à la face opposée; prouver que le tétraèdre obtenu est 27 fois plus grand que le tétraèdre donné.*

Considérons un tétraèdre quelconque A'B'C'D'. Traçons sur les faces latérales les médianes qui partent du point D', et sur la base, les médianes qui partent des points B' et C'.

Le point de rencontre D de ces dernières médianes est aux $^2/_3$ de leurs longueurs respectives; et de même; si l'on marque les points A, B, C, aux $^2/_3$ des médianes qui partent du point D', on aura les points de rencontre des médianes des faces latérales.

Prenons les points A, B, C, D comme sommets d'un tétraèdre. Le plan ABC, coupant dans un même rapport les droites D'E, D'F, D'G, est parallèle à A'B'C' (G., n° 462); il en est de même des autres faces. Et ainsi les deux tétraèdres sont semblables, quoique les éléments soient disposés dans un *ordre inverse*.

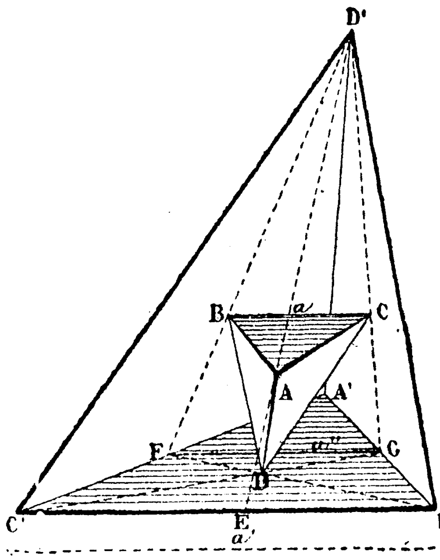


Fig. 1214.

Donc si l'on se donnait d'abord le tétraèdre ABCD, et si l'on menait, par les sommets, des plans parallèles aux faces opposées, c'est le tétraèdre A'B'C'D' que l'on obtiendrait. Il reste à trouver le rapport des volumes.

Or, d'après les constructions, chacune des dimensions de DABC est le $1/3$ des dimensions homologues de D'A'B'C'; donc les volumes sont entre eux dans le rapport $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ ou $\frac{1}{27}$. (G., n° 487.)

Donc le tétraèdre A'B'C'D' égale 27 fois le tétraèdre ABCD.

*Autre démonstration.* Chaque sommet du petit tétraèdre est le centre de gravité de l'une des faces du grand.

En effet, AB, parallèle à EF, l'est à A'B'.

Ainsi, E, F, G sont les milieux des côtés de A'B'C'.

Donc D est le centre de gravité de A'B'C'.

On a : $$A'B' = 2EF = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot AB = 3AB.$$

Le rapport de similitude des deux solides étant 3, le volume du grand égale 27 fois celui du petit.

### Théorème 712.

**1861.** *Sur les trois faces latérales d'une pyramide triangulaire, de sommet* S, *on construit des prismes triangulaires quelconques dont les bases supérieures, prolongées convenablement, se rencontrent en un point commun* O.

*Sur la base de la pyramide primitive, on construit un prisme dont les arêtes latérales ont pour longueur et pour direction* SO. *Démontrer que ce dernier prisme égale la somme des trois autres.*

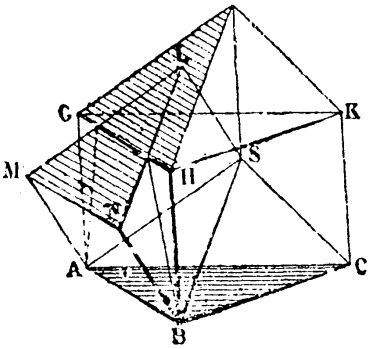


Fig. 1215.

Soit ABSLMN l'un des prismes latéraux. La base supérieure LMN peut être transportée parallèlement à elle-même, et dans son propre plan, en OGH; et le prisme obtenu est équivalent à ABSOGH.

De même, quelle que soit la position des deux autres prismes latéraux, ils sont équivalents : l'un à BCSOHK, et l'autre à ACSOGK.

Les deux tétraèdres SABC et OGHK sont équivalents; car tous leurs éléments, faces et dièdres, sont respectivement égaux.

Or, si du solide ABCKOGH on enlève la pyramide OGHK, il reste un prisme triangulaire ABCKGH construit sur la base ABC, avec des arêtes latérales égales et parallèles à SO.

Si du même solide ABCKOGH on enlève la pyramide SABC, il reste l'ensemble des trois prismes latéraux.

Donc le volume du prisme construit sur la base égale la somme des volumes des prismes latéraux.

*Remarque.* Le théorème est analogue à celui de *Clairaut* (nº 1559).

**Théorème 713.**

**1862.** *Le volume d'un tronc de pyramide triangulaire peut s'obtenir en multipliant le $^1/_6$ de la hauteur par la somme des bases, augmentée de quatre fois la section équidistante de ces bases,*

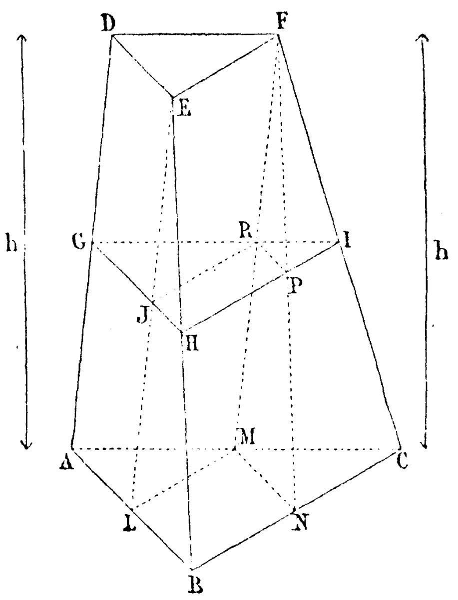



Fig. 1216.

$$V = {}^1/_6 h(B + 4S + B').$$

Par EF, menons un plan ELMF parallèle à AD. On obtient un prisme triangulaire. Par FM menons un plan FMN parallèle à ELB; on obtient ainsi un prisme triangulaire ayant pour bases ELB, FMN; il reste une pyramide FMNC.

En prenant pour bases respectives de ces solides les figures ALM, LBNM, MNC, la hauteur $h$ est commune; mais le volume du prisme ELB, FMN peut s'obtenir en multipliant LBNM par $\frac{h}{2}$; donc

$$V = ALM \,.\, h + LBNM \,.\, \frac{h}{2} + MNC \,.\, \frac{h}{3};$$

réduisons au même dénominateur et mettons $\frac{h}{6}$ en facteur commun :

$$V = \frac{h}{6}\,[6ALM + 3LBNM + 2MNC],$$

$$V = \frac{h}{6}\,[(ALM + LBNM + MNC) + (4ALM + 2LBNM + MNC) + ALM].$$

Mais la seconde parenthèse donne 4GHI, car $2LBNM = 4JHPR$ et $MNC = 4RPI$; donc

$$V = \frac{h}{6}\,[ABC + 4GHI + DEF].$$

*Remarque.* En représentant la base inférieure par B, la base supérieure par B' et la section équidistante par S, on écrit :

$$V = \frac{h}{6}\,(B + 4S + B'). \qquad \textbf{(a)}$$

**Théorème 713. — I.**

**1863.** *Le volume limité par deux bases parallèles, et dont toutes les faces latérales sont planes, a pour expression :*

$$V = \frac{h}{6}(B + 4S + B').$$

On peut décomposer ce corps en pyramides, prismes ou troncs de pyramide, etc.

**1864. Note.** 1° Le volume compris entre deux polygones parallèles quelconques et dont les faces latérales sont des triangles ou des trapèzes peut être nommé *prismatoïde* ou *prismoïde;* d'une manière plus générale, le solide compris entre deux polygones parallèles et dont les faces latérales sont engendrées par une droite qui s'appuie sur les périmètres des deux bases, en restant parallèle à un plan directeur, peut être nommé *parallèloïde.* (G., n° 934.)

2° Le théorème précédent est parfois attribué à Steiner (*Mathesis,* 1885, p. 9, renvoi **); d'ailleurs, le théorème (n° 1863) n'est qu'un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général. (G., n° 985.)

La formule $$V = \frac{h}{6}(B + 4S + B') \qquad \text{(a)}$$

a été appliquée à bien d'autres corps qu'à ceux que l'on considère ordinairement. (G., n° 990.) A l'exercice 104, n° 877, de l'*Appendice aux Exercices de Géométrie,* nous avons prouvé que cette même formule s'applique à tout corps dont la section $y^2$ est donnée par une fonction du troisième degré :

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Pour les mêmes corps, nous avons trouvé que le volume peut s'exprimer par

$$V = \frac{h}{8}[B + 3(C + D) + B'], \qquad \text{(a)} \qquad \text{(n° 879)}$$

C et D étant les sections faites au premier tiers et au second tiers de la hauteur.

3° Nous avons été agréablement surpris de trouver dans Maclaurin, *Traité des fluxions,* n° 848, une formule d'*interpolation* qui permet de vérifier les résultats que nous avons obtenus par une méthode directe. En représentant par A la somme des ordonnées extrêmes, par B la somme de toutes les ordonnées intermédiaires, par R la hauteur qu'on divise en $n$ parties égales, et en se bornant au premier terme, on trouve pour formules réduites :

Pour trois ordonnées $$S = (A + 4B)\frac{R}{6}; \qquad \text{(a')}$$

Pour quatre ordonnées $$S = (A + 3B)\frac{R}{8}. \qquad \text{(b')}$$

La première formule a été recommandée par Newton, et n'est autre chose que la formule (a), connue aussi sous le nom de *formule réduite de Simpson.*

La seconde (b') a été recommandée par Cotes, et c'est la formule (b). Mais ces illustres auteurs n'indiquent (a') et (b') que comme des formules approximatives; néanmoins elles s'appliquent exactement lorsque la section est donnée par une fonction qui ne dépasse pas le troisième degré.

4° Le théorème (n° 1863) et son extension, au cas où le solide est terminé par une surface du second degré, ont été donnés dans les *Nouvelles Annales* (1848, page 241); mais le *théorème de Sarrus* (page 244), où il est dit que la formule (a) s'applique à tout corps dont la section est une fonction du second degré, n'est pas assez général, puisqu'il est vrai même lorsqu'on a :

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

On trouve une seconde étude dans le même recueil (année 1857, page 312, n° 393), et une étude magistrale où la question est traitée dans toute sa généralité par M. MALEYX. (*N. A.*, 1880, page 529.)

Pour la formule $\frac{H}{6}(B + 4B' + B'')$, voir *Journal de* M. G. DE LONGCHAMPS, les articles de M. Casimir REY sur *l'omniformule de Cubature*, 1886, pp. 79..., 169; puis 1896, page 271, note de M. A AUBRY; 1887, p. 22, MALEYX et G. L. — T. M., 1896, p. 135; notes de MM. RAMSAY, GINO LORIA, GOULARD, CRUSSARD; voir aussi le *Bulletin de Mathématiques spéciales* de M. NIEWENGLOWSKI, décembre 1896, et *Mathesis*, 1897, page 105, art. de M. GOULARD, professeur au lycée de Marseille.

Dans l'*Appendice aux Exercices de Géométrie*, publié en 1877, on indique de nombreuses applications de la formule (a) ainsi que le moyen d'arriver directement à cette formule, ainsi qu'à la formule (b); voir page 152 et suivantes, nos 877, 878 et 879.

La même formule est préconisée sous le nom de *Monoformula*, dans un ouvrage publié récemment au Canada. (Voir *Text-Book of Geometry*, par J.-L. SEGUIN, de Montréal, 1903; n° 63, page 158, etc.)

M. NIEWENGLOWSKI, dans l'article cité ci-dessus, démontre que la règle s'applique lorsque $f(x) = A + Bx^2 + I(x)$,
A et B étant des constantes, et $I(x)$ une fonction impaire quelconque, mais continue; M. G. FONTENÉ a aussi traité des formules de Cubature, *N. A.*, 1908, p. 385, et 1909, p. 289.

Au point de vue historique, on peut citer la formule à deux termes de KINKELIN, *I. M.*, 1895, p. 388, n° 683, et 1896, p. 135 :

$$V = \frac{h}{4}(B + 3y);$$

B est l'une des bases, $y$ la section située aux deux tiers de $h$, à partir de l'autre base B'.

* COTES (1682-1716), professeur de physique expérimentale à Cambridge, ami et auxiliaire de NEWTON et de MACLAURIN.

* SARRUS (1798-1860), né à Saint-Affrique, doyen de la Faculté des sciences à Strasbourg, a donné divers articles aux *A. de G.* Une des rues de Rodez porte son nom.

* G. FONTENÉ. Inspecteur à Paris, en 1910.

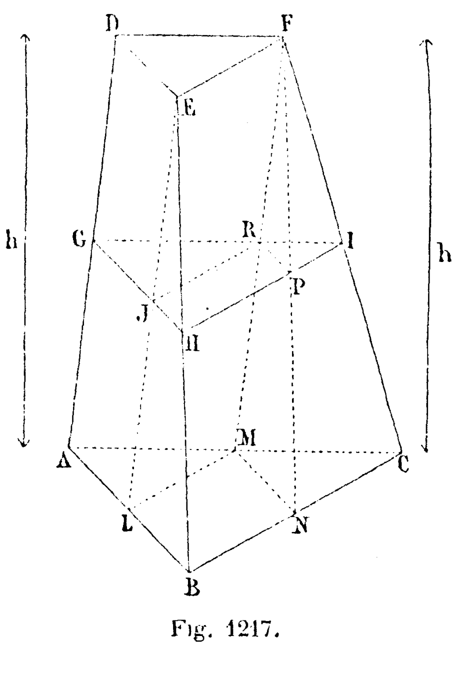


Fig. 1217.

**Théorème de Mascheroni 713. — II.**

**1865.** *Pour un solide limité par deux polygones équiangles et parallèles et dont les faces latérales sont des trapèzes, l'excès de son volume sur celui d'un prisme de même hauteur qui aurait pour base la section équidistante, est le $^1/_{12}$ du prisme de même hauteur qui aurait pour base un polygone équiangle aux* *bases données, et pour côtés les différences des côtés de ces deux bases.*

Il suffit de démontrer le théorème pour un tronc de pyramide triangulaire, car le solide donné peut se décomposer en troncs de pyramide et en prismes ayant la hauteur donnée.

Le volume V du tronc de pyramide est donné par la relation suivante :

$$V = ALM \,.\, h + LBMN \,.\, \frac{h}{2} + MNC \,.\, \frac{h}{3}.$$

Pour l'exprimer en fonction de la section GHI, on peut écrire, en ajoutant et retranchant RPI . $h$ :

$$V = GJR \,.\, h + JHPR \,.\, h + MNC \,.\, \frac{h}{3} + RPI \,.\, h - RPI \,.\, h,$$

ou $$V = GHI \,.\, h + MNC \,.\, \frac{h}{3} - RPI \,.\, h.$$

Or GHI . $h$ exprime le volume V′ du prisme qui aurait la section médiane pour base; donc l'excès

$$V - V' = MNC \,.\, \frac{h}{3} - RPI \,.\, h, \quad \text{ou} \quad MNC \,.\, \frac{h}{3} - MNC \,.\, \frac{h}{4},$$

$$V - V' = MCN \,.\, \frac{h}{12}.$$

**1866. Note.** Nous nommons le théorème précédent *théorème de Mascheroni* d'après M. HAILLECOURT, professeur à la faculté de Dijon.

Le recueil intitulé : *Problèmes de Géométrie pratique à l'usage des arpenteurs,* par Mascheroni, contient un grand nombre d'énoncés relatifs à la mesure des aires et des volumes ; mais il n'y a pas de démonstration.

Dans les *Nouvelles Annales* (année 1848, page 245), le théorème est attribué à CARL KOPPE, de Westphalie, qui ne l'a publié qu'en 1838, dans le *Journal de Crelle.* Une citation analogue se trouve dans un ouvrage déjà cité : *Lehrbruch der Geometrie,* von RUDOLF SONNDORFER, seconde partie, page 77. La démonstration donnée dans ce dernier traité, à la page 79, est suivie de plusieurs autres questions offrant un réel intérêt.

Nous devons citer deux études fort complètes relatives au volume des corps, limités latéralement par des surfaces gauches, et ayant pour bases deux figures planes parallèles.

*Revue des sociétés savantes* (années 1868 et 1876), Mémoires de H. HAILLECOURT. On y trouve tout ce qui se rapporte à la formule (a) (n° 1864), le *théorème de Mascheroni* et les théorèmes suivants :

**Th.** *Si on tord d'un angle* $\omega$ *un cylindre, le volume qui en résulte a pour mesure :*

$$V = \frac{1}{3}\, HS\left(1 + 2\sigma \cos \frac{1}{2}\,\omega\right) = \frac{1}{3}\, HS(2 + \cos \omega).$$

H est la hauteur, S la base du cylindre et $\sigma$ la section équidistante.

**Th.** *Si on tord un tronc de cône d'un angle* $\omega$, *le rapport de similitude des bases étant* q, *on a :*

$$V = \frac{1}{\sigma}\, H(1 + 2q \cos \omega + q^2)S \qquad \text{(année 1868, page 40).}$$

* MASCHERONI, mathématicien italien, né en 1750, vint à Paris comme membre italien de la commission du système métrique ; il y mourut en 1800. Cet auteur est surtout connu par sa *Géométrie du Compas.*

* Le docteur SONNDORFER, *director der academischen handelsmittelschule,* à Vienne (en 1896).

## Relations numériques.

### Théorème 714.

**1867.** *Lorsqu'un tétraèdre a trois faces égales, la somme des distances d'un point quelconque de la quatrième face à chacune des trois autres est constante.*

(Voir *Méthodes*, n° 170.)

### Théorème 714. — I.

**1868.** *Les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la base d'une pyramide régulière sur les faces latérales de cette pyramide ont une somme constante.*

### Théorème 714. — II.

**1869.** *La somme des perpendiculaires abaissées sur les faces d'un polyèdre régulier, d'un même point pris dans l'intérieur de ce polyèdre, est une quantité constante.*

(Voir *Méthodes*, n° 171.)

### Théorème 715.

**1870.** *Le plan bissecteur de l'angle dièdre d'un tétraèdre divise l'arête opposée en segments proportionnels aux faces de ce dièdre.*

Soit le plan ABE bissecteur du dièdre AB.

Il faut prouver qu'on a :

$$\frac{CE}{DE} = \frac{ABC}{ABD}.$$

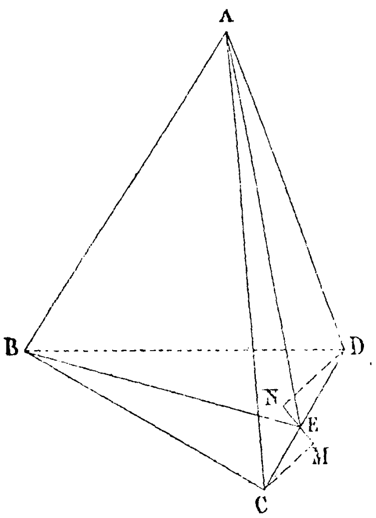



Fig. 1218.

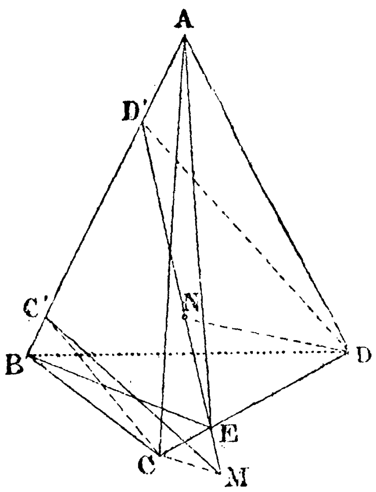



Fig. 1219.

Le point E, appartenant au plan bissecteur, est équidistant des deux faces du tétraèdre; soit $h$ cette distance.

Le triple du volume du solide

$$ABCE = ABC \cdot h.$$

Le triple du volume

$$ABDE = ABD \cdot h.$$

Les volumes sont donc entre eux comme les faces ABC, ABD.

Or, si des points C, D on abaisse des perpendiculaires sur la face commune ABE, les deux volumes seront entre eux comme les hauteurs CM, DN, ou comme les grandeurs proportionnelles CE, DE; donc

$$\frac{CE}{DE} = \frac{ABC}{ABD}.$$

*Autre démonstration.* Abaissons les hauteurs CC′ et DD′ (fig. 1219).

Les triangles rectangles DD′N, CC′M sont semblables et donnent :

$$\frac{DD'}{CC'} = \frac{DN}{CM} = \frac{ED}{EC};$$

ou en multipliant les deux premiers termes par $\frac{AB}{2}$,

$$\frac{DAB}{CAB} = \frac{ED}{EC}.$$

**Théorème 716.**

**1871.** *La somme des carrés des projections d'une droite sur trois axes rectangulaires deux à deux égale le carré de cette droite.*

Soit OM la droite donnée, et trois axes rectangulaires OX, OY, OZ.

On peut admettre que la droite passe par le point de concours des axes, car les projections des deux droites égales et parallèles, sur un même axe sont égales entre elles.

Pour avoir les projections de OM, il suffit de mener par le point M trois plans respectivement parallèles à XOY, XOZ, YOZ. Nous formons ainsi un parallélépipède rectangle, dont les arêtes OA, OB, OC sont les projections de la droite donnée.

Or la droite MD, perpendiculaire au plan AOBD, est par suite perpendiculaire à OD; donc

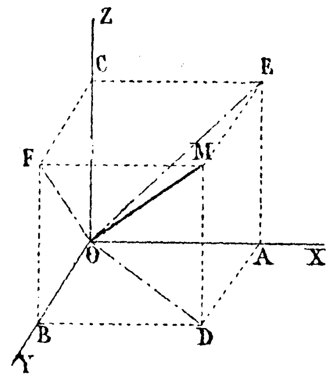



Fig. 1220.

$$OM^2 = OD^2 + MD^2; \quad \text{d'ailleurs} \quad OD^2 = OB^2 + OA^2,$$
$$OM^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2.$$

**Théorème 716. — I.**

**1872.** *La somme des carrés des projections d'une droite* OM *sur trois plans rectangulaires deux à deux égale le double du carré de cette droite.*

OD, OE, OF sont les projections de la droite sur les trois plans menés par le point O; car, par exemple, ME est perpendiculaire au plan XOZ, etc.

$$OD^2 = OA^2 + OB^2;\quad OE^2 = OA^2 + OC^2;\quad OF^2 = OB^2 + OC^2;$$

donc $$OD^2 + OE^2 + OF^2 = 2OA^2 + 2OB^2 + 2OC^2 = 2OM^2.$$

### Théorème 717.

**1873**. *En coupant par un plan quelconque*, en A, B, C, D, *les quatre arêtes d'un angle solide* S *d'un octaèdre régulier, on a :*

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SC} = \frac{1}{SB} + \frac{1}{SD}.$$

On sait que, pour un point fixe O pris sur la bissectrice d'un angle, toute sécante AOC donne une somme constante $\frac{1}{SA} + \frac{1}{SC}$ (nº 283).

Or les angles ASC, BSD sont égaux; et, pour un plan quelconque, le point O est le même pour les deux angles; donc

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SC} = \frac{1}{SB} + \frac{1}{SD}.$$

*Remarque*. La démonstration ci-dessus s'applique à une pyramide quadrangulaire ayant pour base un rectangle, pourvu que la hauteur de la pyramide tombe au point de concours des diagonales du rectangle.

**Note.** Le théorème est de LÉVY, *N. A.*, 1842, page 375, nº 35.

* LÉVY, célèbre cristallographe, bon géomètre, mort en 1841, professeur au collège Charlemagne.

La solution donnée dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, en 1850, page 60, est de M. DEWULF, alors élève au lycée de Saint-Omer; cette solution est simple, mais celle que nous donnons l'est encore davantage.

On doit à M. DEWULF, général de brigade en retraite, la traduction des *Eléments de Géométrie projective de M. Cremona*.

### Théorème 718.

**1874**. *Tout plan mené par le point de concours des diagonales d'un octaèdre régulier coupe les douze arêtes ou leurs prolongements, et donne lieu à vingt-quatre segments dont la somme des inverses est constante.*

(Voir *Méthodes*, nº 284.)

### Théorème 719.

**1875**. *Par un point fixe* O *pris sur la droite équidistante des arêtes d'un angle polyédrique régulier, on mène un plan quelconque; prouver que la somme des inverses des arêtes est constante.*

(Voir *Méthodes*, nº 286.)

### Théorème 720.

**1876**. *Lorsque, par les arêtes opposées d'un tétraèdre, on mène des plans parallèles, on forme un parallélépipède circonscrit dont le volume est triple de celui du tétraèdre.*

(Voir *Méthodes*, nº 157.)

**Théorème de Gua de Malves 720. — I.**

1877. *Lorsque l'angle au sommet d'une pyramide est un trièdre trirectangle, le carré de la base de cette pyramide égale la somme des carrés des trois autres faces.*

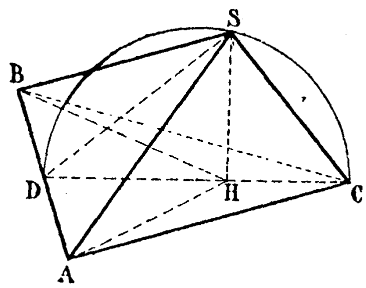


Fig. 1221.

Le théorème a déjà été démontré, mais avec un énoncé différent (nos 1556 et 1557), car les triangles rectangles construits sur les côtés du triangle acutangle donné ne sont que les rabattements des faces du trièdre trirectangle. Avec une figure dans l'espace, la démonstration est très simple.

Soit S le sommet du trièdre trirectangle, ABC la base de la pyramide.

L'arête CS est perpendiculaire à la face ASB; donc, si par CS on mène un plan perpendiculaire à AB, la droite CD sera perpendiculaire à AB; l'angle CSD sera droit, et la section, étant perpendiculaire au plan de base, contiendra la hauteur SH de la pyramide.

Or le triangle ASB et sa projection AHB, ayant même base, sont entre eux comme leurs hauteurs; il en est de même de ACB.

Mais $DS^2 = DH \cdot DC$ à cause de l'angle droit DSC; donc

$$ASB^2 = ACB \cdot AHB;$$

de même

$$ASC^2 = ACB \cdot AHC,$$

$$BSC^2 = ACB \cdot BHC;$$

donc

$$ASB^2 + ASC^2 + BSC^2 = ABC^2.$$

*Autre démonstration :*

$$\begin{aligned}
AB^2 \cdot DC^2 &= AB^2(SC^2 + SD^2),\\
&= AB^2 \cdot SD^2 + AB^2 \cdot SC^2,\\
&= AB^2 \cdot SD^2 + (SB^2 + SA^2)SC^2,\\
&= AB^2 \cdot SD^2 + SB^2 \cdot SC^2 + SA^2 \cdot SC^2,\\
(ABC)^2 &= (SAB)^2 + (SBC)^2 + (SAC)^2.
\end{aligned}$$

*Remarque.* On peut énoncer le théorème comme il suit : *Le carré du triangle* ABC *est la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires menés par ses côtés.*

On peut voir aussi : *Education chrétienne*, II, *supplément* 21, quest. 36, page 332.

* GUA DE MALVES, né à Carcassonne en 1712, mort en 1785, a publié l'*Usage de l'analyse de Descartes, pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés des lignes géométriques.*

**Théorème de Tinseau 721.**

1878. *Le carré d'une surface plane quelconque est égal à la somme des carrés des projections de cette surface sur trois plans rectangulaires deux à deux.*

Ce théorème est l'extension du théorème précédent.

1° Les projections d'une figure plane sur des plans parallèles sont égales entre elles.

2° Toute figure plane peut être considérée comme étant la somme algébrique de triangles, telle que le triangle acutangle ABS (n° 1877); donc, en général, *le carré d'une surface plane*, etc.

**1878 a. Note.** Le *théorème de Tinseau* a été présenté à l'Académie des sciences en 1774, et imprimé, en 1780, dans le tome IX du *Recueil des Savants étrangers.*

Le *théorème de Gua* (n° 1877) n'est qu'un corollaire du *théorème de Tinseau;* néanmoins il est étudié directement dans les mémoires de 1783, et peut servir à démontrer le théorème général : c'est ainsi, d'ailleurs, que nous avons procédé.

La publication faite en 1859 des *Œuvres inédites de Descartes* montre que ce grand géomètre connaissait les propriétés du tétraèdre trirectangle. (*N. A.*, 1859, *Bibliographie*, page 59.)

* TINSEAU, né à Besançon, sortit en 1771 de l'école de Mézières, et se retira de l'armée en 1791.

### Théorème 722.

**1879.** *Lorsqu'une pyramide triangulaire* SABC *est coupée par un plan qui rencontre le plan de la base, et qu'on fait tourner la section* A'B'C' *autour de la droite* MN *d'intersection des deux plans, les droites* AA', BB', CC' *concourent en un même point, et le lieu de ce point est une circonférence dont le plan est perpendiculaire à* MN.

(Voir *Méthodes,* n° 182.)

### Théorème 722. — I.

**1879 a.** *Le point* O *du plan* P, *dont la somme* $OA + OB + OC$ *des distances à trois points* A, B, C, *situés hors de ce plan est un minimum, est tel que si par l'une quelconque des trois droites*, OA, *par exemple, on conduit un plan* Q *perpendiculaire au plan* P, *ce plan* Q *divisera en deux parties égales l'angle* BOC. (*A. de G.*, tome XIII, 1822-1823, p. 248. Démonstrations, p. 328 à 332, par W. H. T., de Rome; QUERRET, de Saint-Malo, et tome XIV, p. 13, par STURM, de Genève.)

Soient A', B', C' les projections des points donnés sur le plan P. En admettant momentanément que OA ait une longueur constante, la variation de $OB + OC$ dépendra de la position de O sur le cercle décrit dans le plan P, avec A' pour centre et A'O pour rayon. D'après une question connue (n° 1079), on est conduit à considérer le plan BOC mené par B et C de manière à être tangent au cercle décrit et le point de contact O répondra au minimum de $OB + OC$; mais, dans ce cas, les droites OB, OC sont également inclinées sur la tangente; donc le plan AA'O, perpendiculaire à P, divise l'angle BOC en parties égales; donc, etc.

*Remarque.* Le point d'un plan dont la somme des distances à trois points donnés, hors de ce plan, est un *minimum*, lorsque l'angle trièdre dont les arêtes passent par les trois points donnés, est tel que la commune section des plans conduits par ses arêtes et par les droites qui divisent les angles opposés en deux parties égales se trouve perpendiculaire au plan dont il s'agit. (STURM, *loc. cit.*, p. 15.) L'auteur généralise la question proposée, mais ne résout pas le problème de déterminer le point du plan qui donne lieu au minimum. (*A. de G.*, tome XII, p. 380 et *E. de G.*, n° 1901 c.)

**Note.** En géométrie plane, le *centre isogone* (n° 755) est le point dont la somme des distances aux trois sommets a une valeur minima.

En représentant par $a$, $b$, $c$ les côtés du triangle, par T sa surface, par $x$, $y$, $z$ les distances du centre isogone aux trois sommets, on a :

$$x + y + z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4T\sqrt{3}}{2}}.$$

(*A. de G.*, tome XX, 1829-1830, p. 299 et 302.)

# PROBLÈMES

## Maxima et Minima.

### Problème 723.

**1880.** *Quel est le parallélépipède de volume maximum dont la somme des trois arêtes égale une longueur donnée?*

(Voir *Méthodes*, n° 372.)

### Problème 724.

**1881.** *De tous les parallélépipèdes droits qui ont pour base un carré et dont la somme du côté du carré et de la hauteur est constante, quel est celui dont le volume est maximum?*

(Voir *Méthodes*, n° 375.)

### Problème 725.

**1882.** *Pour une même surface totale, quel est le parallélépipède de volume maximum?*

(Voir *Méthodes*, n° 378.)

### Problème 726.

**1883.** *Quel est le volume maximum d'une boîte creuse dont la somme des cinq faces a une valeur donnée?*

(Voir *Méthodes*, n° 379.)

### Problème 727.

**1884.** *Quel est le parallélépipède rectangle, à base carrée, dont le volume est maximum, lorsque la somme d'une face latérale et du carré de base est constante?*

(Voir *Méthodes*, n° 380.)

### Problème 728.

**1885.** *A un carré de côté* a, *on enlève quatre carrés et l'on forme un parallélépipède rectangle; quel en est le volume maximum ?*

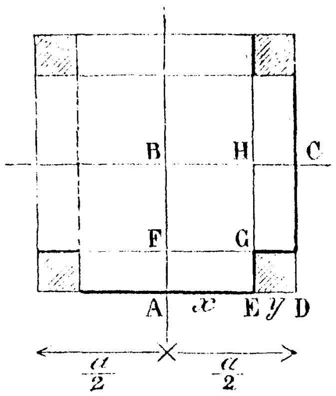


Fig. 1222.

Soit AE la demi-base $= x$, et ED la hauteur $= y$.

Le volume $= 4x^2y$, et $x + y = \frac{a}{2}$.

On peut poser immédiatement (n° 376) :

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3},$$

et

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{6}.$$

D'ailleurs, en considérant le quart ABCD de la surface donnée, le problème revient à construire le parallélépipède droit à base carrée BFGH, lorsqu'on connaît la somme $\frac{a}{2}$ du côté $x$ et de la hauteur $y$.

La hauteur ED doit être le tiers de la somme constante $\frac{a}{2}$.

$$\text{V ou } 4x^2y = 4 \cdot \frac{a^2}{9} \cdot \frac{a}{6} = \frac{2}{27}a^3.$$

*Remarque.* Ce problème ne diffère que par l'énoncé d'un problème précédent (n° 1881). Cet exemple, ainsi que plusieurs autres que nous avons donnés, montre bien le parti avantageux que l'on peut tirer des *Manières diverses d'envisager un problème.*

### Problème 728. — I.

**1885 a.** *On a une feuille de carton dont les côtés ont pour longueur* a *et* b; *aux quatre coins, on enlève des carrés égaux, ayant* x *pour côté.*

*Déterminer le côté de ces carrés par la condition que la boîte ouverte qui aurait pour fond* a — 2x *et* b — 2x, *et pour côtés les rectangles* (a — 2x)x *et* (b — 2x)x *ait un volume maximum :*

$$V = x(a - 2x)(b - 2x).$$

On a recours à la méthode des coefficients indéterminés. (*Cours d'algèbre élémentaire,* F. G.-M., p. 365.)

**Note.** La question est classique depuis que Briot l'a introduite dans son Traité d'Algèbre.

La *Méthode des coefficients indéterminés* est due à H. Grillet, professeur à Brest en 1850. (*N. A.*, 1850, p. 70.) Voir aussi l'art. de Gérono. (*N. A.*, 1857, p. 6.)

### Problème 728. — II.

**1885 b.** *Découper une feuille de carton ayant pour côtés* a *et* b, *de manière à obtenir, formant un tout continu, les six faces d'une boîte fermée.*

*Étudier la surface totale et le volume de cette boîte, indiquer le volume maximum lorsqu'on fait varier le plus petit côté* b *du carton donné depuis* O *jusqu'à la longueur* a *du long côté.*

La question est très intéressante; plusieurs cas se trouvent facilement; d'autres réclament l'emploi des coefficients indéterminés. Il en est de même des problèmes suivants, résolus pour la plupart dans le *Cours d'Algèbre* cité précédemment, et dans les *Exercices d'Algèbre* qui complètent le Cours.

### Problème 728. — III.

**1886.** Résoudre par les procédés élémentaires, c'est-à-dire sans faire intervenir les dérivées, la question suivante : *Parmi les parallélépipèdes rectangles qui ont la même diagonale, quel est celui de surface maxima?* (*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1908, p. 186, question 3408.)

Soient $x, y, z, d,$ les côtés et la diagonale du parallélépipède.

On a l'équation de condition
$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2,$$
et la demi-surface
$$xy + yz + zx$$
qu'il faut rendre maxima. Regardons momentanément $z$ comme constante; on aura :
$$x^2 + y^2 = d^2 - z^2 = \text{constante},$$
et
$$xy + (x + y)z,$$
à rendre maxima; il suffit pour cela que le produit $xy$ et que la somme $(x + y)$ acquièrent l'un et l'autre leur valeur maxima; or elle a lieu pour $x = y$, puisque la somme des carrés est constante (n^os^ 345 et 346 **a**).

De même, $z$ doit égaler $x$ et égaler $y$.

Ainsi le cube répond à la question.

*Remarque.* Il en serait de même si la somme des arêtes devait être maxima.

On peut résoudre la question très simplement comme il suit :

Considérons une face $xy$ prise pour base; son plan détermine un cercle de diamètre $l$, or
$$x^2 + y^2 = l^2.$$

Le périmètre de ce rectangle, pour calculer la surface latérale, est maximum lorsque $x = y$; d'ailleurs dans ce cas la base $xy$ est maxima; donc chaque face doit être carrée et le cube inscrit répond à la question.

**Note.** L'*Intermédiaire* donne diverses solutions : 1908, p. 264; 1909, p. 40; il en est même qui ne répondent pas à la question.

### Problème 728. — IV.

**1886 a.** *Dans un octaèdre à huit faces égales, inscrire le parallélépipède maximum.*

Les plans diagonaux divisent l'octaèdre en huit tétraèdres équivalents, il suffit d'en considérer un quelconque; le parallélépipède inscrit maximum doit avoir le sommet au centre de gravité de la face considérée, etc.; donc les arêtes du parallélépipède maximum inscrit dans l'octaèdre donné doivent joindre deux à deux les centres de gravité des faces adjacentes de l'octaèdre.

*Remarques.* 1° L'octaèdre circonscrit est minimum par rapport au parallélépipède dont les sommets sont aux centres de gravité des faces de cet octaèdre.

2° L'octaèdre formé par les plans menés par les centres de gravité des trois faces de chaque angle solide d'un parallélépipède, est l'octaèdre minimum de tous ceux que l'on peut inscrire dans le même parallélépipède.

**Problème 728. — V.**

**1886 b.** *Quel est le cylindre de volume maximum pour une surface totale donnée?*

1° *Cylindre fermé,* ayant ses deux bases.

2° *Cylindre ouvert,* n'ayant qu'une base.

*Premier cas.* Représentons par $2\pi S^2$ la surface totale, par $\pi V$ le volume à rendre maximum; soit $x$ le rayon et $y$ la hauteur; on a :

$$x^2 + xy = S^2; \quad \text{d'où} \quad y = \frac{S^2 - x^2}{x}, \tag{1}$$

$$V = x^2 y, \quad V = x(S^2 - x^2), \quad \text{ou} \quad V^2 = x^2(S^2 - x^2)^2.$$

Les deux facteurs ont une somme constante, le maximum aura lieu pour

$$\frac{x^2}{S^2 - x^2} = \frac{1}{2}; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{S}{\sqrt{3}}.$$

(1) donne :

$$y = \frac{2S}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi le maximum du cylindre fermé a lieu lorsque la hauteur est le double du rayon de la base.

*Deuxième cas.* On pourrait l'étudier directement comme le précédent; mais il suffit de procéder comme pour le parallélépipède creux, dont la surface des cinq faces a une valeur donnée (n° 379). On double le volume et la surface donnée, afin de retomber dans le cas précédent et l'on conclut que la hauteur du cylindre creux égale le rayon de la base.

**Problème 728. — VI.**

**1886 c.** *Dans une sphère donnée, inscrire : 1° le cylindre; 2° le cône; 3° la pyramide régulière à base carrée de surface totale maxima.*

Pour 1° et 2°, voir *Cours d'algèbre*, F. G.-M., p. 366; p. 428, n° 524. *Exercices d'algèbre*, p. 499, nos 1383 et 1384; voir aussi nos 1385 et 1386.

Pour 3°, voir *Étude élémentaire sur la théorie des maxima et des minima,* p. 54, par M. A. Aubry. (Extrait 'd'*El Progreso Matemtáico*, de Zaragoza, 1900.)

**Problème 729.**

**1887.** *Par un point quelconque de la base d'un tétraèdre dont l'angle au sommet est un trièdre trirectangle à trois arêtes égales, on mène des plans parallèles aux faces du tétraèdre, et l'on forme un parallélépipède rectangle : pour quelle position du point pris sur la base ce parallélépipède est-il maximum?*

(Voir *Méthodes*, nº 381.)

**Problème 730.**

**1888.** *Même question pour le parallélépipède obtenu, lorsque le trièdre opposé à la base est quelconque et que les arêtes de ce trièdre ont des longueurs inégales.*

(Voir *Méthodes*, nº 382.)

**Problème 731.**

**1889.** *Par le sommet d'un parallélépipède, mener un plan qui coupe les trois faces opposées, de manière que le tétraèdre obtenu soit minimum.*

(Voir *Méthodes*, nº 383.)

**Problème 732.**

**1890.** *Couper une pyramide par un plan parallèle à la base, de manière que le prisme ayant la hauteur du tronc et la section pour base ait un volume maximum.*

(Voir *Méthodes*, nº 384.)

**Problème 733.**

**1891.** *On coupe un tétraèdre régulier par un plan parallèle à deux arêtes opposées* AB, CD; *étudier les variations de la section obtenue, lorsque le plan sécant se déplace, en restant parallèle aux mêmes arêtes.*

Soit EFGH une section parallèle à AB et à CD.

Les droites EF, GH sont parallèles à AB; car FE, par exemple, est l'intersection du plan sécant par le plan ABC, conduit par une parallèle AB au plan sécant.

Pour une raison analogue, EH, FG sont parallèles à CD. Ainsi, pour un tétraèdre quelconque, la section est un parallélogramme.

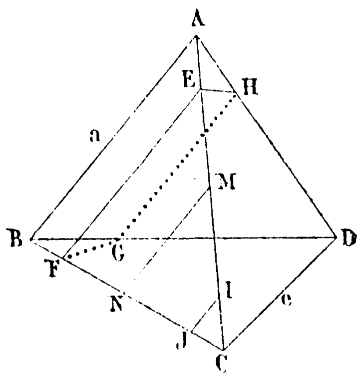


Fig. 1223.

Lorsque le tétraèdre est régulier, on obtient un rectangle, car les arêtes opposées AB et CD sont orthogonales (nº 159).

Le triangle ACD étant équilatéral,

$$AE = EH = AH = BF.$$

Prenons $CI = CJ = AE$;

nous aurons : $IJ = EH$.

Le rectangle dont il faut étudier les variations a donc pour côté une parallèle EF à la base d'un triangle équilatéral ACB, et pour hauteur la parallèle IJ, située à la même distance du sommet C que EF l'est de la base.

Donc la *somme des côtés du rectangle est constante*: elle égale deux fois la ligne MN qui joint les milieux des côtés; elle égale, en un mot, l'arête AB.

Le rectangle sera maximum lorsque les deux facteurs seront égaux entre eux. Ainsi le maximum est donné par la section équidistante des arêtes opposées. Cette section est un carré.

**Problème 733. — I.**

**1892.** *Même question pour un tétraèdre quelconque.*

La section est un parallélogramme dont les côtés se coupent sous un angle constant, quel que soit le plan sécant; car EF, GH sont parallèles à AB, et EH, FG sont parallèles à CD. La variation de la surface du parallélogramme ne dépend donc que du produit des côtés adjacents.

Pour un point E, soit : $\frac{AE}{CE} = \frac{m}{n}$.

Calculons les droites EF, EH :

$$\frac{EF}{a} = \frac{n}{m+n}, \quad \text{d'où} \quad EF = \frac{an}{m+n};$$

$$\frac{EH}{c} = \frac{m}{m+n}, \quad \text{d'où} \quad EH = \frac{cm}{m+n};$$

$$EF \,.\, EH = \frac{acmn}{(m+n)^2}\,.$$

Or $m+n$ a une somme constante AC; donc le maximum de $mn$, et par suite de $EF \,.\, EH$, aura lieu quand $m = n$. Ainsi la section équidistante des deux arêtes donne le maximum.

Le produit $EF \,.\, EH$ égale alors $\frac{acm^2}{(2m)^2} = \frac{ac}{4}$.

**Problème 733. — II.**

**1892 a.** *Trouver un plan sur lequel un quadrilatère gauche se projette orthogonalement suivant un parallélogramme* (Mathesis, 1905, p. 231).

Il suffit de se rappeler un théorème déjà démontré (nº 1842).

Les plans qui projettent les côtés opposés AB, CD doivent être parallèles entre eux; il en est de même des plans qui projettent BC et DA; le plan cherché est donc perpendiculaire à l'intersection de deux plans dont l'un est parallèle à AB, CD et l'autre à BC, DA.

Pratiquement il suffit de faire un parallélogramme ABCD' sur les côtés AB, BC et de mener un plan perpendiculaire à DD' (nº 1798).

On peut dire aussi que la figure projetée sera un parallélogramme si ses deux diagonales se coupent en parties égales; il suffit donc de mener un plan perpendiculaire à la droite MN qui joint les milieux M et N des diagonales AC, BD du quadrilatère gauche.

### Problème 733. — III.

1892 b. *Une pyramide quadrangulaire régulière* SABCD *a pour arêtes latérales une longueur* l, *l'angle au sommet de chaque face égale* 30°; *on demande la longueur de la ligne brisée la plus courte que l'on puisse tracer sur les faces latérales en partant du point* A *pour revenir au même sommet* A.

Développons les faces latérales sur un même plan comme si la pyramide était creuse; on obtient un secteur ayant pour centre S' et pour sommets du périmètre A'B'C'D'A''. L'angle au centre égale quatre fois 30°, soit 120°. La ligne la plus courte est A'A''; or cette droite est le côté d'un triangle équilatéral qui serait inscrit dans un cercle de rayon $l$.

On a donc : $A'A'' = l\sqrt{3}$. (G., n° 275.)

*Remarque.* 1° La ligne brisée se compose de quatre parties égales deux à deux; chacune des extrêmes égale $\dfrac{l}{\sqrt{3}}$; chacune des moyennes égale $\dfrac{l}{2\sqrt{3}}$; soit en tout, $\dfrac{3l}{\sqrt{3}} = l\sqrt{3}$.

2° Il est facile de multiplier les questions analogues.

(Voir *Exercices de Géométrie descriptive*, n° 530.)

## Recherche des formules.

### Problème 734.

1893. *Les trois dimensions d'un parallélépipède rectangle étant* a, b, c, *exprimer le volume de ce parallélépipède, sa surface totale, la diagonale, la somme des arêtes, et enfin l'arête du cube équivalent.*

| | |
|---|---|
| Volume. . . . . . . . . . . | $abc$. |
| Surface totale. . . . . . . . . | $2(ab + ac + bc)$. |
| Diagonale . . . . . . . . . . | $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. |
| Somme des arêtes . . . . . . . | $4(a + b + c)$. |
| Arête du cube équivalent. . . . | $\sqrt[3]{abc}$. |

### Problème 735.

1894. *L'arête d'un cube étant* a, *trouver l'expression de la diagonale de ce cube et de la surface d'une section faite par deux arêtes opposées.*

La diagonale du cube est :

$$\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}\,, \quad \text{ou} \quad \sqrt{3a^2}\,, \quad \text{ou enfin} \quad a\sqrt{3}\,.$$

La diagonale de l'une des faces est :

$$\sqrt{a^2 + a^2}\,, \quad \text{ou} \quad \sqrt{2a^2}\,, \quad \text{ou enfin} \quad a\sqrt{2}\,.$$

Le plan diagonal est un rectangle qui a pour dimensions $a\sqrt{2}$ et $a$; sa surface est donc $a^2\sqrt{2}$.

**Problème 736.**

**1895.** *Quel est le volume d'une pyramide triangulaire ayant* a *pour arête de base et* b *pour arête latérale ?*

La base est un triangle équilatéral ayant $a$ pour côté, et dont la hauteur est donnée par $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. (G., nº 316.)

Or la hauteur du tétraèdre tombe au point de concours des trois hauteurs du triangle équilatéral de base, c'est-à-dire aux $^2/_3$ de leur longueur à partir du sommet.

Ainsi le rayon du cercle circonscrit à ce triangle égale :

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{a}{3}\sqrt{3}.$$

Mais la hauteur de la pyramide est le côté de l'angle droit du triangle rectangle dont $b$ est l'hypoténuse et $\frac{a}{3}\sqrt{3}$ l'autre côté; donc

$$h=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}\,;\quad\text{car}\quad\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2=\frac{a^2}{3}.$$

Le volume de la pyramide est le $^1/_3$ du produit de la base par la hauteur; mais la base est un triangle équilatéral ayant $a$ pour côté, et par suite $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ pour surface; donc

$$V=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\times\frac{1}{3}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}.$$

**Problème 737.**

**1896.** *A quelle distance du sommet faut-il couper une pyramide parallèlement à la base, pour que les deux parties soient équivalentes ?*

Soient P et P' les pyramides totale et partielle; $h$ et $h'$ les hauteurs respectives. On a la relation

$$\frac{h'^3}{h^3}=\frac{P'}{P}=\frac{1}{2},\quad\frac{h'}{h}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Ainsi $$h'=h(0{,}7937).$$

**Problème 738.**

**1897.** *Dans quel rapport faut-il couper la hauteur d'une pyramide parallèlement à la base, pour diviser cette pyramide en* 3, 4 ... **n** *parties équivalentes ?*

S'il s'agit de diviser en trois parties équivalentes, on détermine, à partir du sommet, une première section qui donne une pyramide partielle égale au $^1/_3$ de la pyramide totale; puis, sans tenir compte de cette première opération, on détermine une nouvelle section qui donne une pyramide partielle égale aux $^2/_3$ de la pyramide totale.

De même, pour diviser en 4 parties équivalentes, on déterminera séparément, à partir du sommet, des pyramides égales respectivement à $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$ de la pyramide totale. Et ainsi des autres cas.

S'il s'agit de 3 parties équivalentes, on considère 3 pyramides P', P'', et P, et l'on pose les nombres . . . . . $^1/_3$ $^2/_3$ 1
exprimant le rapport des pyramides. . . . P' P'' P
ou des cubes des hauteurs. . . . . . . $h'^3$ $h''^3$ $h^3$

Ainsi les hauteurs. . . . . . . . . $h'$ $h''$ $h$
sont comme les nombres. . . . . . . $\sqrt[3]{^1/_3}$ $\sqrt[3]{^2/_3}$ $\sqrt[3]{1}$
dont les valeurs sont. . . . . . . . . 0,693 0,894 1

S'il s'agit de 4 parties équivalentes, on trouvera pareillement pour les hauteurs . . . . . . . . . . . . $h'$ $h''$ $h'''$ $h$
les nombres. . . . . . . . . . . $\sqrt[3]{^1/_4}$ $\sqrt[3]{^2/_4}$ $\sqrt[3]{^3/_4}$ $\sqrt[3]{1}$
ou . . . . . . . . . . . . . . 0,630 0,794 0,909 1

S'il s'agissait de $n$ parties équivalentes, on trouverait de même pour les hauteurs . . . . . . . $h'$ $h''$ $h'''$ . . . . $h$
les nombres. . . . . . $\sqrt[3]{^1/n}$ $\sqrt[3]{^2/n}$ $\sqrt[3]{^3/n}$ . . . . 1

**Problème 739.**

**1898.** *A quelle distance du sommet faut-il couper une pyramide parallèlement à la base, pour que la pyramide partielle soit au tronc pyramidal comme* 5 *est* à 3?

La pyramide partielle P' sera les $^5/_8$ de la pyramide totale P; on aura donc aussi :

$$h'^3 = {}^5/_8 h^3, \quad \text{d'où} \quad h' = h\sqrt[3]{^5/_8} = 0{,}855\, h.$$

**Problème de Timmermans 739. — I.**

**1898 a.** *Déterminer un plan tel que la somme des distances de chacun de ses points aux quatre faces d'un tétraèdre soit constante.*

Soit ABCD le tétraèdre donné. Si sur les arêtes DA, DB, DC on détermine des points E, F, G, tels que les quadrilatères AEFB, BFGC, CGEA soient tous trois équivalents au triangle ABC, le plan indéfini déterminé par les points E, F, G, résoudra le problème. (*A. de G.*, tome XVIII, 1827-1828, p. 218, n° 5.)

*Remarque.* Pour déterminer les points E, F, G, représentons respectivement par $a$, $b$, $c$, $d$, les aires des faces du tétraèdre opposées aux sommets A, B, C, D, et posons, pour abréger,

$$l = \sqrt{\frac{(a-d)(b-d)(c-d)}{abc}}.$$

On trouve :

$$DE = DA\,\frac{al}{a-d}, \quad DF = DB\,\frac{bl}{b-d}, \quad DG = DC\,\frac{cl}{c-d}.$$

**Note.** L'étude de A. TIMMERMANS, alors professeur de physique à l'athénée de Tournai, généralise la question et ne contient pas moins de 13 pages, de 217 à 229.

### Problème 740.

**1899**. *Un solide, dont la forme rappelle celle de certains tas de pierres concassées, repose sur le sol par sa base* ABCD, *qui est un rectangle, et les plans des quatre autres faces forment avec celui de la base des angles de 45°. On propose d'évaluer la surface latérale et le volume de ce solide, connaissant les dimensions de la base.* (Brevet supérieur, à Lyon.)

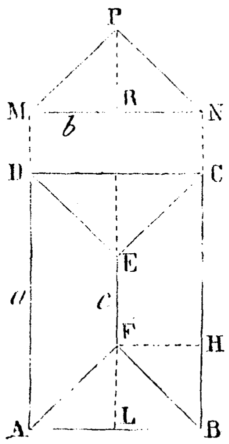


Fig. 1224.

Le solide n'est autre chose qu'un tronc de prisme triangulaire. Pour obtenir son volume, il suffira donc de multiplier la section droite par la moyenne des arêtes.

Soient PMN la section droite, et ABCD la projection horizontale du solide.

Le triangle FHB est rectangle et isocèle; donc

$$\mathrm{HB} = \mathrm{FH} = \frac{b}{2};$$

alors

$$c = a - \frac{2b}{2} = a - b.$$

De même, le triangle MPN est rectangle isocèle; par suite,

$$\mathrm{PR} = \mathrm{RN} = \frac{b}{2},$$

d'où

$$\text{surf. MNP} = \frac{b}{2} \times \frac{b}{2} = \frac{b^2}{4}.$$

Le volume cherché est donc :

$$\mathrm{V} = \frac{2a + a - b}{3} \times \frac{b^2}{4} = \frac{(3a - b)b^2}{12}.$$

La surface latérale se compose de deux trapèzes égaux et de deux triangles égaux.

La hauteur des triangles égale celle des trapèzes : c'est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés $\frac{b}{2}$; donc

$$h^2 = \frac{2b^2}{4}; \quad \text{d'où} \quad h = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

Surf. des deux triangles : $\quad \frac{b^2}{2}\sqrt{2}$.

Surf. des deux trapèzes : $2\left(\frac{2a - b}{2}\right)\left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right) = (2a - b)\frac{b\sqrt{2}}{2}$.

L'aire latérale du solide est donc :

$$\frac{b^2}{2}\sqrt{2} + (2a - b)\frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{b^2}{2}\sqrt{2} + ab\sqrt{2} - \frac{b^2\sqrt{2}}{2} = ab\sqrt{2}.$$

### Problème 741.

**1900**. *Un tétraèdre a pour base un triangle à trois côtés inégaux* a, b, c; *les trois autres arêtes sont égales entre elles, leur longueur* d *est connue; exprimer le volume du tétraèdre en fonction des arêtes.*

D'après une formule connue, l'aire de la base est donnée par

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad \text{(G., n° 332.)}$$

Le rayon du cercle circonscrit ou R est donné par

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \quad \text{ou} \quad \frac{abc}{4S}. \qquad \text{(G., n° 354.)}$$

La hauteur est un des côtés d'un triangle rectangle dont $d$ est l'hypoténuse et R l'autre côté de l'angle droit ; donc

$$h = \sqrt{d^2 - R^2} = \sqrt{d^2 - \frac{a^2b^2c^2}{16S^2}};$$

$$V = \frac{S \cdot h}{3} = \frac{1}{3} S \sqrt{\frac{16S^2d^2 - a^2b^2c^2}{16S^2}} = \frac{1}{12}\sqrt{16S^2d^2 - a^2b^2c^2},$$

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)d^2 - a^2b^2c^2}.$$

**Problème 741. — I.**

**1900 a.** *On a un prisme hexagonal régulier ayant* AA′, BB′ ... FF′ *pour arêtes latérales. On mène les plans* AB′C, CD′E, EF′A *et les plans* B′CD′, D′EF′, F′AB′ *qui détachent du prisme six pyramides triangulaires ; exprimer le volume du prisme ainsi tronqué : 1° en fonction du côté* AB *de l'hexagone; 2° en fonction du côté* AE *du triangle équilatéral. On sait que* h *est la hauteur du prisme.*

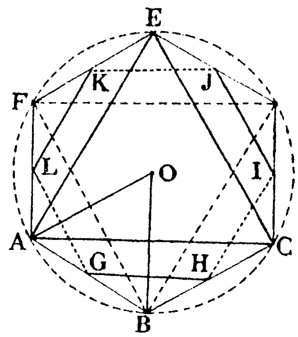


Fig. 1225.

Du prisme ABCDEF $\times h$, il faut retrancher six pyramides triangulaires ayant $h$ pour hauteur et dont la base égale le triangle ABC.

Or six fois ABC = l'hexagone; donc

$$V = AB \ldots F\left(h - \frac{h}{3}\right) = AB \ldots F \times \frac{2}{3}h.$$

1° Soit $AB = a$; on sait que pour le triangle équilatéral on a :

$$AOB = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}; \qquad \text{(G., n° 316.)}$$

donc

$$\text{hexagone} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2},$$

$$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}h = a^2h\sqrt{3}.$$

2° Soit $AE = b$,

on a : $AE = a\sqrt{3}$, (G., n° 277.)

ou $b = a\sqrt{3}$ ; d'où $a = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$.

Ainsi $V$ ou $a^2h\sqrt{3} = \dfrac{b^2}{3}h\sqrt{3}$.

**1900 b.** *Remarques.* 1° La face supérieure du solide est le triangle équilatéral B'D'F'; la face inférieure est le triangle ACE. Toute section parallèle aux bases est un hexagone ayant trois côtés égaux entre eux et respectivement parallèles aux côtés de ACE; les trois autres côtés sont aussi égaux entre eux et parallèles à ceux de B'D'F'. La section de surface maxima est équidistante des bases, et c'est un hexagone régulier GHIJKL dont chaque côté égale la moitié de AC. La surface de cet hexagone est donc :

$$6\left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{8}\, b^2\sqrt{3}\ ;$$

celle du triangle : $\quad ACE = \frac{b^2}{4}\sqrt{3} \quad$ ou $\quad \frac{2b^2}{8}\sqrt{3}$ .

Ainsi la section peut varier depuis $\frac{2b^2}{8}\sqrt{3}$ jusqu'à $\frac{3b^2}{8}\sqrt{3}$ .

2° On peut poser diverses questions analogues au problème précédent; nous allons nous borner à parler du prisme carré et du prisme octogonal régulier.

**1900 c.** *Prisme carré.* Pour un prisme carré ayant pour bases ABCD et A'B'C'D', on enlève les pyramides AB'C, CD'A, D'AB' et B'CD'.

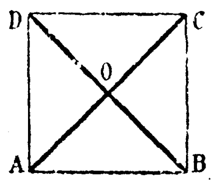


Fig. 1226.

Il ne reste qu'un tétraèdre ayant pour sommets A, C, B', D'.

Soit $a$ le côté du carré; le prisme $= a^2h$.

Deux pyramides $= ABCD \cdot \frac{h}{3}$; donc les quatre pyramides à soustraire $= a^2 \cdot \frac{2}{3}\, h$.

Donc $\qquad$ tétraèdre $= \frac{a^2h}{3}$ .

*Le tétraèdre est le tiers du prisme;* or ce résultat est conforme à celui qu'on a déjà obtenu (n° 157).

**1900 d.** Pour un prisme octogonal régulier, le solide a pour bases le carré ABCD et le carré E'F'G'H'. Du volume du prisme octogonal il faut retrancher huit pyramides ayant ABE pour base.

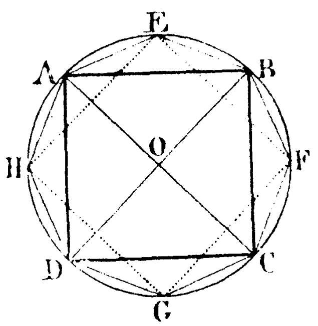


Fig. 1227.

Évaluons le solide en fonction du côté $a$ du carré.

$$AO \quad \text{ou} \quad r = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{2}\ .$$

et la hauteur abaissée du sommet E sur AB égale :

$$r - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1). \qquad (1)$$

L'octogone régulier $= 4AOBE = 4 \cdot OE \cdot \frac{AB}{2} = 4 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} = a^2\sqrt{2}$ .

$$\text{Prisme octogonal} = a^2h\sqrt{2}\ . \qquad (2)$$

$$\text{Triangle ABE} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} (\sqrt{2} - 1) = \frac{a^2}{4} (\sqrt{2} - 1). \qquad (3)$$

$$\text{Les huit pyramides} = 8 \cdot \frac{a^2}{4} (\sqrt{2} - 1) \frac{h}{3} = \frac{2}{3} a^2h(\sqrt{2} - 1);$$

donc
$$\text{Volume demandé} = a^2h\sqrt{2} - \frac{2}{3} a^2h(\sqrt{2} - 1),$$

$$V = \frac{1}{3} a^2h(2 + \sqrt{2}). \qquad (4)$$

### Problème 741. — II.

**1900 e.** *Deux carrés égaux sont situés dans deux plans parallèles, leurs centres sont sur une même perpendiculaire à leur plan, et les diagonales de l'un sont perpendiculaires aux côtés de l'autre. Par le côté d'un carré et le sommet correspondant du carré opposé, on mène un plan, de manière à limiter latéralement le solide par huit triangles égaux. On demande d'évaluer le volume compris entre les deux carrés et les huit faces latérales : on sait que le côté des carrés et la hauteur du solide sont respectivement représentés par* a *et par* h. (Diplôme de fin d'études, Besançon.)

Cette question ne diffère pas de celle que l'on vient de traiter (nº 1900 **d**). On a donc :

$$V = \frac{1}{3} a^2h(2 + \sqrt{2}).$$

On peut arriver à ce résultat en procédant comme il suit :

Le prisme octogonal égale le prisme carré plus quatre prismes triangulaires ayant ABE pour base, et de cette somme il faut retrancher huit pyramides ayant pour base ABE ; donc le volume demandé est exprimé par

$$V = a^2h + 4\text{ABE} \cdot h - 8\text{ABE} \cdot \frac{h}{3};$$

$$V = a^2h + \frac{4}{3} \text{ABE} \cdot h = \frac{h}{3} (3a^2 + 4\text{ABE}).$$

Or
$$4\,\text{ABE} = a^2(\sqrt{2} - 1) ; \quad \text{(Voir } \textit{formule } 3.)$$

donc
$$V = \frac{1}{3} a^2h(3 + \sqrt{2} - 1), \quad \text{ou} \quad V = \frac{1}{3} a^2h(2 + \sqrt{2}). \qquad (5)$$

### Problème 741. — III.

**1900 f.** *Un parallélépipède a pour faces six losanges, dont une des diagonales égale le côté* a *des losanges. Quel est le volume du solide?*

Soit A le sommet d'un des trièdres formés par trois angles aigus BAC, CAD, DAB. Il en résulte $BC = CD = DB = AB = a$. Le tétraèdre ABCD est régulier.

Pour avoir le volume du parallélépipède, il faut multiplier le losange dont le triangle équilatéral BAC est la moitié, par la hauteur $h$ abaissée du sommet D sur BAC.

Or le losange a pour superficie $\frac{a^2}{2}\sqrt{3}$. (G., nº 316, I.)

$$h = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \qquad \text{(G., nº 478.)}$$

Donc
$$V = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} \cdot a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{2}\sqrt{2}.$$

**Problème 741. — IV.**

**1900 g.** *Les faces d'un parallélépipède sont des losanges égaux dont le côté est* a *et une des diagonales* b. *On demande l'expression du volume en fonction de* a *et de* b.

*Discuter cette expression.* (Diplôme de fin d'études, Besançon.)

Soit A le sommet d'un des trièdres formés par trois angles opposés à la diagonale $b$. Avec les mêmes indications que ci-dessus, on a un triangle équilatéral BCD ayant $b$ pour côté, et trois triangles isocèles tels que BAC dont $AB = AC = a$, tandis que $BC = b$.

Le volume demandé s'obtient en multipliant 2BAC par la hauteur $h$ abaissée du sommet D sur BAC.

Pour obtenir $h$, remarquons que le volume de la pyramide ABCD peut s'obtenir soit en multipliant BAC par $\frac{h}{3}$, soit en multipliant le triangle équilatéral BCD par le tiers de la perpendiculaire $k$, abaissée du sommet A sur BCD; donc

$$\text{BAC} \cdot h = \text{BCD} \cdot k; \quad \text{d'où} \quad h = \frac{\text{BCD} \cdot k}{\text{BAC}}. \tag{1}$$

Or il est facile d'exprimer BCD et $k$ en fonction des données.

Le triangle équilatéral BCD, ayant $b$ pour côté, $= \frac{b^2}{4}\sqrt{3}$. (2)

La hauteur $k$ est un côté d'un triangle rectangle ayant $a$ pour hypoténuse et les $^2/_3$ de la hauteur de BCD pour côté de l'angle droit.

Or les $^2/_3$ de la hauteur de BCD $= \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{2}\sqrt{3}$. (G., nº 316, *formule* 1.)

Donc
$$k^2 = a^2 - \frac{b^2}{3}, \quad k = \sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{3}}. \tag{3}$$

$$\text{(1) devient :} \quad h = \frac{\frac{b^2}{4}\sqrt{3}\;\frac{\sqrt{3a^2 - b^2}}{\sqrt{3}}}{\text{BAC}} = \frac{b^2\sqrt{3a^2 - b^2}}{4\text{BAC}}. \tag{4}$$

Or le volume du parallélépipède $= 2\text{BAC} \cdot h$; donc

$$V = \frac{b^2\sqrt{3a^2 - b^2}}{2}. \tag{5}$$

*Discussion.* $b$ ne peut varier que de 0 à $2a$.

Pour $b = a$, la formule (5) donne $\frac{a^3}{2}\sqrt{2}$, comme on l'a trouvé à la question précédente.

Lorsque le losange est un carré, $b = a\sqrt{2}$, et la formule (5) donne :

$$V = \frac{2a^2}{2}\sqrt{3a^2 - 2a^2} = a^3,$$

ainsi qu'il le fallait, car le parallélépipède est un cube ayant $a$ pour côté.

**Problème 742.**

**1901**. *Tracer le développement de chacun des polyèdres réguliers convexes.*

Cette question est plutôt du ressort du dessin que de la géométrie proprement dite : on trouve ces développements dans les *Exercices de Géométrie descriptive*, 3e édition (nos 483 et suivants).

**Théorème 742. — I.**

**1901 a**. *Tout plan perpendiculaire à l'une quelconque des arêtes d'un trièdre rectangle coupe ce trièdre suivant un triangle rectangle.*

Le théorème est évident lorsque le plan sécant est perpendiculaire à l'arête SC du dièdre droit; il en est de même lorsque le plan est perpendiculaire à une des autres arêtes, par exemple à SB; soit donc un plan ABC perpendiculaire à SB. Ce même plan est perpendiculaire à la face BSC, or la face ASC est donnée perpendiculaire à la même face BSC; donc l'intersection AC de ces deux plans perpendiculaires est perpendiculaire à la face BSC, et par suite à la droite BC. (*J. M. E. S.* de BOURGET et KŒHLER, 1881, p. 447.)

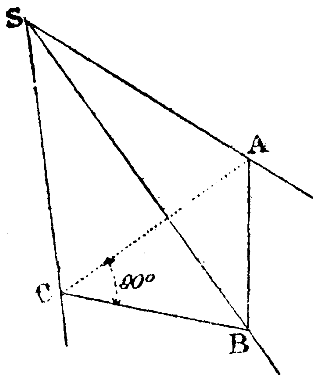


Fig. 1228.

**Lieu 742. — II.**

**1901 b**. *Sur les arêtes* SA, SB, SC *d'un trièdre, on prend des longueurs égales* $AA' = BB' = CC' = l$; *on fait varier* $l$; *trouver le lieu décrit par le point* O *commun aux trois plan* BCA′, CAB′, ABC′.

Le point d'intersection D de BC′ et de CB′ décrit une droite D dans le plan SBC; le point O reste dans le plan déterminé par le point A et par la droite D. Il appartient de même au plan passant par B et par le lieu D′, intersection de AC′ et de CA′; le lieu du point O est donc une droite.

*Remarque*. Il en est de même lorsqu'on prend sur SA une longueur $al$, sur SB une longueur $bl$, sur SC une longueur $cl$ et que $a$, $b$, $c$ sont des coefficients numériques invariables et $l$ une longueur variable. (*Mathesis*, 1893, p. 206.)

**Problème 742. — III.**

**1901 c**. *Couper un trièdre trirectangle par un plan, de manière que la section* ABC *soit égale à un triangle donné.*

En recourant au problème contraire, la question revient à déterminer le point commun à trois sphères.

*Remarque*. On peut couper un trièdre donné quelconque, de manière que la section ABC soit égale à un triangle donné; mais le problème est beaucoup plus difficile que le précédent. On arrive au moins à une équation du quatrième degré.

(Voir *Mathesis*, 1896, p. 18, no 7.)

**Note.** 1° Le problème paraît remonter à 1754. ESTÈVE, de la société royale de Montpellier, chercha à le résoudre, mais sans y réussir. En 1773, LAGRANGE prit pour inconnues les trois arêtes du tétraèdre, et obtint une équation du huitième degré; en 1795, le même savant ramena la solution à une équation du quatrième degré.

De son côté, MONGE a traité la question par la Géométrie descriptive, comme intersection de trois tores.

Dans le cas particulier où le trièdre a ses trois angles égaux, le problème de le couper par un plan suivant un triangle donné se ramène facilement à la construction d'un quadrilatère dont on connaît les deux diagonales, un côté et les angles égaux entre eux, adjacents au côté opposé à celui qui est connu; il suffit, en effet, de replier les faces du trièdre l'une sur l'autre.

2° Le problème précédent est un cas particulier du *Problème de Bruno* de Naples: *Etant donnés un point* A *et deux droites* b *et* c *dans l'espace, trouver sur* b *un point* B *et sur* c *un point* C, *tel que le triangle* ABC *soit semblable à un triangle donné* $\alpha\beta\gamma$

BRUNO, l'auteur de la question, puis QUÉTELET et HACHETTE ont indiqué la solution de ce problème. (*Mathesis,* 1896, p. 18 et 19, n$^{os}$ 7 et 8.)

3° Problème de Gergonne. *Trois points* A, B, C *étant donnés hors d'un plan* P, *trouver sur ce plan un point* O *dont la somme des distances* OA + OB + OC *aux trois points donnés soit la moindre possible* En d'autres termes, *la base* ABC *d'un tétraèdre étant donnée, en quel point* O *d'un plan* P *faut-il placer le sommet de ce tétraèdre pour que la somme de ses trois arêtes latérales soit un minimum?* (*A. de G.*, tome XII, 1821-1822, p. 380.)

Cas particulier. *Le plan* P *est parallèle au plan* ABC.

On détermine le centre isogone du triangle ABC. — Théorème proposé par FERMAT à TORRICELLI (n° 755).

Soit M ce point. On élève une perpendiculaire en ce point au plan ABC, jusqu'à la rencontre du plan P, en S par exemple. Ce point répond à la question.

Le tétraèdre SABC a ses trois arêtes du sommet S également inclinées sur les plans P et ABC; les angles plans de sommet S sont égaux entre eux; les arêtes directement proportionnelles aux distances MA, MB, MC donnent la somme minima, de même que le point M est le point dont la somme des distances aux trois sommets de ABC est minima.

*Remarque.* Le tétraèdre réalise les conditions indiquées précédemment n° 1879 **a**).

Le problème général proposé dans les *A. de G.* est resté, croyons-nous, sans solution.

* HACHETTE, né à Mézières en 1769, mort à Paris en 1834, connu surtout par son *Traité de Géométrie descriptive.* Une importante maison de librairie perpétue son nom.

### Théorème 742. — IV.

**1901 d.** *Deux triangles* ABC, A'B'C' *sont placés d'une manière quelconque dans l'espace. S'il existe un point* O *tel que les deux tétraèdres* OABC *et* OA'B'C' *soient égaux, les plans élevés perpendiculairement aux milieux des droites qui joignent les sommets correspondants des deux triangles égaux passent par une même droite, qui rencontre la droite d'intersection des plans des deux triangles.* (G. TARRY, *Journal de Mathématiques élémentaires de* LONGCHAMPS, 1894, p. 196.)

# Polygones et polyèdres étoilés.

## Aire des polygones étoilés.

**1901 e.** Dans cette note, nous adoptons les symboles suivants :

$P_m^1$ désigne le polygone convexe de $m$ côtés.

$P_m^2$ — — étoilé formé en joignant les points de 2 en 2.

$P_m^3$ — — — — — de 3 en 3.

$P_m^n$ lorsqu'on joint les points de $n$ en $n$; $n < \frac{m}{2}$.

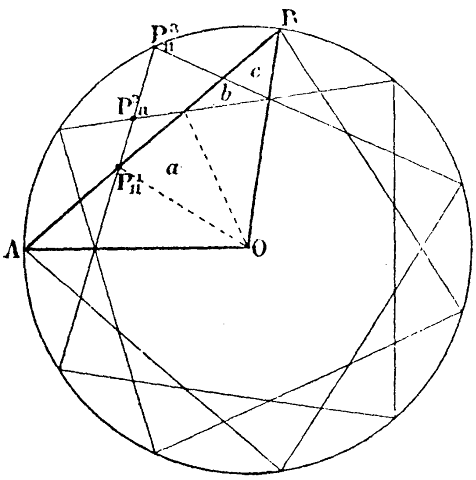



Fig. 1.

1° Lorsqu'on construit un polygone étoilé du genre $P_m^n$, l'entrecroisement des lignes détermine tous les polygones étoilés $P_m^{n-1}$, $P_m^{n-2}$,... $P_m^1$.

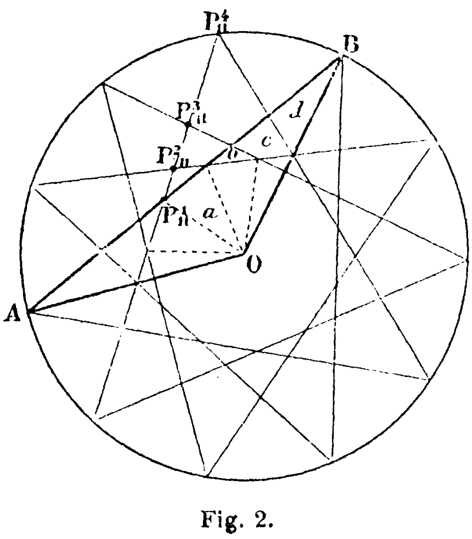



Fig. 2.

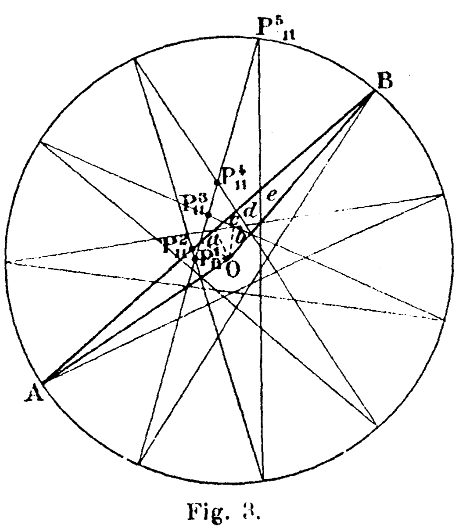



Fig. 3.

2° Réciproquement, étant donné un polygone régulier convexe $P_m^1$, en prolongeant ses côtés, on obtient successivement tous les polygones étoilés $P_m^2$, $P_m^3$,... $P_m^n$.

3° Dans un polygone étoilé $P_m^n$, la somme des $m$ triangles ayant pour base le côté du polygone et l'apothème pour hauteur, égale la somme des polygones de la figure,

ou $$\Sigma(\text{AOB}) = P_m^n + P_m^{n-1} + P_m^{n-2} + P_m^{n-3} + \ldots P_m^1.$$

En effet, en désignant par $a$ les triangles du polygone intérieur $P_m^1$ et par $b$, $c$, $d$, $e$, les différentes figures contenues dans le triangle AOB, on a pour le polygone $P_{11}^3$ (fig. 1) :

$$\text{AOB} = 3a + 2b + 2c,$$
$$\Sigma(\text{AOB}) = 33a + 22b + 22c,$$
$$P_{11}^1 = 11a,$$
$$P_{11}^2 = 11a + 11b,$$
$$P_{11}^3 = 11a + 11b + 22c,$$

d'où $$\Sigma(\text{AOB}) = P_{11}^1 + P_{11}^2 + P_{11}^3.$$

4° un raisonnement analogue donnerait pour les figures 2 et 3 :

$$\Sigma(\text{AOB}) = P_{11}^1 + P_{11}^2 + P_{11}^3 + P_{11}^4,$$
$$\Sigma(\text{AOB}) = P_{11}^1 + P_{11}^2 + P_{11}^3 + P_{11}^4 + P_{11}^5.$$

5° Généralement, pour un polygone régulier de $m$ côtés, on a :

$$\Sigma(\text{AOB}) = P_m^1 + P_m^2 + \ldots + P_m^n.$$

## Polyèdres réguliers étoilés.

**1901 f.** Les polyèdres réguliers étoilés, au nombre de quatre, ont été découverts par Poinsot (n° 1832 **a**).

Le dodécaèdre régulier convexe donne le dodécaèdre étoilé à 12 faces pentagonales étoilées et à 20 sommets.

L'icosaèdre régulier convexe fournit trois polyèdres réguliers étoilés :

Un icosaèdre à 20 faces triangulaires et à 12 sommets,
Un dodécaèdre à 12 faces pentagonales convexes et à 12 sommets,
Un dodécaèdre à 12 faces pentagonales étoilées et à 12 sommets.

Chacun des polyèdres réguliers étoilés a 30 arêtes.

On peut voir à ce sujet le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, 7e édition, tome II, pages 247 à 259.

# LIVRE VII

---

**Méthodes pour évaluer les volumes.**

**1902.** La *Géométrie de la mesure* est due à Archimède, de même que la *Géométrie de position* a été surtout cultivée par Euclide, Apollonius.

Pour étudier l'aire des surfaces à périmètre curviligne et déterminer le volume des corps limités par des surfaces courbes, le grand géomètre de Syracuse inventa la méthode d'*exhaustion*, c'est-à-dire d'*épuisement*. Nous appliquerons cette méthode à l'évaluation de l'*aire parabolique* (voir ci-après, nº 2145).

Cavalieri généralisa la méthode d'exhaustion tout en la simplifiant, et créa, sous le nom de *méthode des indivisibles,* une méthode féconde, mais non à l'abri de sérieuses objections. Pour cet auteur, un triangle, par exemple, est la somme des lignes droites juxtaposées et croissant en progression arithmétique ayant zéro pour premier terme et la base du triangle pour dernier. De même, deux tétraèdres de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalents parce qu'ils sont composés d'une infinité de sections planes équivalentes deux à deux.

Au lieu des *lignes de Cavalieri* ayant une épaisseur infiniment petite, mais réelle, puisqu'une infinité de lignes juxtaposées devait donner une surface, on considère actuellement des rectangles construits sur des lignes parallèles équidistantes. A la limite, quand la hauteur de chaque rectangle devient infiniment petite, la surface est la limite vers laquelle tend la somme de ces rectangles élémentaires.

De même, un cône peut être considéré comme étant la limite des cylindres construits sur les sections équidistantes qu'on mènerait parallèlement à la base et dont le nombre augmenterait indéfiniment.

Pour comparer deux volumes, il suffit de comparer les sections correspondantes; c'est ainsi que du volume de la sphère on peut déduire celui de l'ellipsoïde (G., nº 912); mais, pour évaluer directement le volume d'un corps, il faut déterminer la limite vers laquelle tend la somme des cylindres élémentaires construits sur les diverses sections; tel est l'objet de la *méthode de sommation.* (G., nº 943.)

L'algèbre élémentaire a suffi pour nous donner la sommation nécessaire pour évaluer le volume d'un assez grand nombre de corps et pour nous faire obtenir l'aire de plusieurs figures planes. Le problème général des sommations est l'objet principal de la partie du *calcul infinitésimal* connue sous le nom de *calcul intégral.* Mais, malgré les immenses ressources que fournissent les méthodes dues à Leibnitz et à Newton, on est obligé bien souvent de se borner à l'emploi d'intégrations approximatives.

**1902 a. Note.** On lira avec profit un article de M. PAUL TANNERY, *Sur les Origines du calcul infinitésimal*, dans les *Notions de Mathématiques*, par JULES TANNERY, suivies de *Notions historiques*, par PAUL TANNERY, ouvrage publié en 1904, voir p. 339.

* CAVALIERI, né à Milan en 1598, mort à Bologne en 1647, doit sa célébrité à sa *méthode des indivisibles*, qu'il découvrit en 1629, mais qu'il ne publia qu'en 1635, ce qui permit à ROBERVAL de contester la priorité de la découverte ; d'ailleurs, l'exposition de sa méthode est obscure, difficile à lire. (*Histoire des sciences mathématiques et physiques*, par M. MAXIMILIEN MARIE, t. IV, p. 69.)

* ROBERVAL, né près de Senlis en 1602, mort en 1675, appliqua la *composition des mouvements* au tracé des *tangentes* aux courbes. On connaît la balance qui porte son nom.

Pour l'exposition de la méthode de Roberval, voir Paul SERRET : *Des Méthodes en Géométrie*, page 53.

* JULES TANNERY, né à Nantes en 1848, mort à Paris en 1910, sous-directeur des Études scientifiques à l'École normale supérieure.

* PAUL TANNERY (1843-1904), frère aîné du précédent; son nom figure fréquemment dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*. Ingénieur des manufactures de l'État, historien mathématique très érudit. Voir *Notice* par H. BOSMANS. (*Mathesis*, 1905, Supplément.)

# THÉORÈMES

## Volumes et Relations.

### Théorème 743.

**1903.** *Le volume d'un cylindre circulaire droit égale le produit de sa surface latérale par la moitié du rayon.*

Ce théorème n'est qu'une extension de la propriété analogue déjà établie pour un prisme régulier (nº 1848).

Le cylindre peut lui-même être considéré comme un prisme régulier d'une infinité de faces latérales.

*Remarque.* La surface latérale est exprimée par $2\pi rh$; le produit par la moitié du rayon sera $2\pi rh.\ {}^1/_2 r$ ou $\pi r^2 h$, expression conforme à celle que l'on connaît.

### Théorème 744.

**1904.** *Le volume d'un cylindre circulaire droit égale la surface du rectangle générateur multipliée par la circonférence que décrit le point de concours des diagonales de ce même rectangle.*

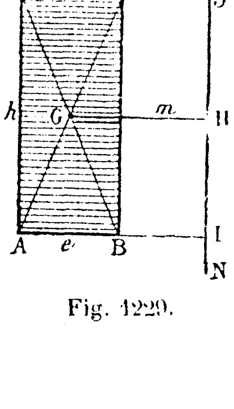


Fig. 1229.

Le rectangle générateur a pour dimensions $r$ et $h$, et pour surface $rh$ ; la circonférence dont il est question a pour rayon ${}^1/_2 r$, et pour longueur $2\pi\,.\,{}^1/_2 r$ ou $\pi r$.

Le produit du rectangle par la circonférence est encore $\pi r^2 h$.

**1904 a.** *Remarque. Le volume du cylindre creux* (*couronne ou anneau cylindrique*) *égale la surface du rectangle générateur multipliée par la circonférence que décrit le centre de ce même rectangle* (fig. 1229).

En effet, ce solide est la différence de deux cylindres qui ont même hauteur $h$, de sorte qu'on a :

$$V = \pi AI^2 . h - \pi BI^2 . h = \pi h(AI^2 - BI^2) = \pi h(AI - BI)(AI + BI),$$

$$V = \pi h . AB . 2GH; \text{ pour } m = GH, \text{ on a : } V = he . 2\pi m.$$

### Théorème 745.

**1905.** *Dans un cylindre circulaire droit, la surface latérale est à la somme des bases comme la hauteur est au rayon.*

On a, en effet, dans le cylindre :

$$\text{Volume} = \text{Base} \times \text{hauteur} \qquad = Bh,$$

$$\text{Volume} = \text{Surface latérale} \times {}^1/_2 \text{rayon} = {}^1/_2 Sr.$$

Donc $\quad {}^1/_2 Sr = Bh \quad \text{et} \quad Sr = 2Bh,$

d'où
$$\frac{S}{2B} = \frac{h}{r}.$$

### Théorème 746.

**1906.** *Dans un cylindre circulaire droit, la section* S *faite suivant l'axe est à la base* B *comme la hauteur* h *est au* $^1/_4$ *de la circonférence* C *du cylindre.*

La section faite suivant l'axe est double du rectangle générateur du cylindre.

On a :
$$\frac{S}{B} = \frac{2rh}{\pi r^2} = \frac{4h}{2\pi r} = \frac{4h}{C},$$

d'où
$$\frac{B}{S} = \frac{h}{{}^1/_4 C}.$$

*Remarque.* Dans le cône de révolution,

$$\frac{S}{B} = \frac{h}{{}^1/_2 C}.$$

### Théorème 747.

**1907.** *Si la hauteur d'un cylindre égale le diamètre, le volume égale la surface totale multipliée par le* $^1/_3$ *du rayon.*

Considérons une sphère inscrite à ce cylindre.

Ce cylindre peut se décomposer en deux parties :

1° Deux cônes ayant pour sommet commun le centre de la sphère, et pour bases, les bases du cylindre; la hauteur est le rayon de la sphère inscrite, lequel est aussi le rayon du cylindre;

2° Le volume engendré par un triangle ayant pour base la génératrice du cylindre, pour sommet le centre de la sphère, et tournant autour de l'axe du cylindre; ce volume s'obtient en multipliant la surface latérale du cylindre par le tiers du rayon.

Donc le volume du cylindre égale la surface totale multipliée par le $^1/_3$ du rayon.

**Théorème 748.**

**1908.** *Le volume d'un cône circulaire droit égale la surface latérale multipliée par le $^1/_3$ de la distance du centre de la base à la génératrice du cône.*

C'est un cas particulier du volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe mené par un de ses sommets et situé dans son plan.

Ce théorème n'est qu'une extension de la propriété analogue déjà établie pour une pyramide régulière (nº 1849).

**Théorème 749.**

**1909.** *Le volume d'un cône circonscrit à une sphère égale le produit de sa surface totale par le $^1/_3$ du rayon de la sphère.*

Comme précédemment (nº 1907), on peut considérer ce cône comme formé :

1º D'un cône ayant son sommet au centre de la sphère inscrite et pour base la base du cône donné;

2º Du volume engendré par un triangle qui aurait pour sommet le centre de la sphère, et pour côté opposé la génératrice même du cône.

Donc le volume proposé égale la surface totale, multipliée par le $^1/_3$ du rayon de la sphère inscrite.

**Théorème 750.**

**1910.** *Le volume d'un cône circulaire droit égale le $^1/_3$ de la surface du triangle générateur multiplié par la circonférence de la base du cône.*

Le triangle générateur a pour aire $^1/_2 rh$; la circonférence est $2\pi r$; le $^1/_3$ du produit de ces deux quantités est $^1/_3 \cdot {}^1/_2 rh \cdot 2\pi r$ ou $^1/_3 \pi r^2 h$; donc...

**Théorème 751.**

**1911.** *Le volume d'un tronc conique circonscrit à une sphère égale le produit de sa surface totale par le $^1/_3$ du rayon de la sphère.*

Solution identique à celle du nº 1907; donc le volume du tronc égale la surface totale multipliée par le $^1/_3$ du rayon de la sphère inscrite.

**Théorème 752.**

**1912.** *Deux solides quelconques, A et A', circonscrits à des sphères égales, sont entre eux comme leurs surfaces totales* S *et* S'.

En effet, $r$ étant le rayon des sphères inscrites, on a identiquement :

$$\frac{A}{A'} = \frac{^1/_3 Sr}{^1/_3 S'r} \cdots = \frac{S}{S'}.$$

**Théorème 753.**

**1913.** *Si le côté* l *d'un tronc de cône égale la somme des rayons* r *et* r′ *des bases, la hauteur* h *égale deux fois la moyenne géométrique de ces mêmes rayons, et le volume* V *égale la surface totale* S *multipliée par le* $^1/_6$ *de la hauteur.*

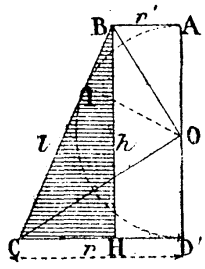



Fig. 1230.

1° le côté $l$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit la hauteur $h$ et la différence $r - r'$ des rayons.

On a donc :

$$h^2 = l^2 - (r - r')^2 = (r + r')^2 - (r - r')^2 =$$
$$= (r^2 + r'^2 + 2rr') - (r^2 + r'^2 - 2rr') = 4rr'.$$

Donc $h = 2\sqrt{rr'}$, c'est-à-dire deux fois la moyenne géométrique des rayons.

2° On a : $V = {}^1/_3h(B + B' + \sqrt{BB'}) = {}^1/_3\pi h(r^2 + r'^2 + rr')$.

D'autre part, les bases sont $\pi r^2$ et $\pi r'^2$; la surface latérale est ${}^1/_2l(2\pi r + 2\pi r')$, ou $\pi l(r + r')$, ou $\pi(r + r')(r + r')$, ou enfin $\pi(r^2 + r'^2 + 2rr')$.

La surface totale sera donc $\pi(2r^2 + 2r'^2 + 2rr')$ ou $2\pi(r^2 + r'^2 + rr')$.

Le produit de cette expression par ${}^1/_6h$ est ${}^1/_3\pi h(r^2 + r'^2 + rr')$, ce qui est le volume V du tronc.

**1914.** *Remarque.* Dans tout tronc de cône circonscrit à une sphère, le côté, ou génératrice, est égal à la somme des rayons des bases. Réciproquement, à tout tronc de cône dans lequel le côté est égal à la somme des rayons, on peut inscrire une sphère; et le volume égale le produit de la surface totale par le $^1/_3$ du rayon, ou le $^1/_6$ de la hauteur (n° 1913).

**Théorème 754.**

**1915.** *Si la hauteur d'un tronc de cône égale 4 fois la différence des rayons des bases, le volume de ce tronc égale la différence des deux sphères qui auraient ces mêmes rayons.*

Pour démontrer ce théorème et ceux du même genre, on constate généralement l'identité des formules algébriques qui expriment les grandeurs que l'on compare.

On suppose ici : $h = 4(r - r')$.

$$\text{On a : } V = {}^1/_3h(B + B' + \sqrt{BB'}) = {}^4/_3(r - r')(\pi r^2 + \pi r'^2 + \pi rr') =$$
$$= {}^4/_3\pi^3r - {}^4/_3\pi r'^3.$$

**Théorème 755.**

**1916.** *Dans un tétraèdre circonscriptible par les arêtes, la somme de deux arêtes opposées égale la somme de chaque autre groupe formé par deux arêtes opposées.*

En effet, les tangentes issues d'un même point sont égales, en désignant par $a$ les tangentes issues du sommet A, par $b$, celles qui sont issues de B, etc.

On reconnaît que la somme des deux arêtes opposées se compose de $a+b+c+d$; donc...

**Théorème 755. — I.**

**1917.** *Lorsqu'un hexaèdre est circonscrit à une sphère par les arêtes, les douze arêtes se divisent en trois groupes de quatre droites, joignant deux à deux les sommets de deux faces opposées. La somme des arêtes d'un de ces groupes égale la somme des arêtes de chaque autre groupe.*

La somme des quatre arêtes d'un même groupe est composée de huit segments $a, b, c, d, e, f, g, h$.

**Théorème 756.**

**1918.** *On donne une sphère et un point fixe; par ce point on mène trois plans rectangulaires deux à deux et qui déterminent trois cercles; prouver que la somme de ces trois cercles est constante.*

(Voir *Méthodes*, nº 30.)

**Théorème 757.**

**1919.** *Le volume compris entre deux sphères concentriques de rayon* a *et* b, *est équivalent à celui d'un tronc de cône qui a pour bases les grands cercles de ces sphères et pour hauteur le quadruple de la distance des deux surfaces sphériques.*

$$V = {}^4/_3\pi\,(a^3 - b^3).$$

On peut diviser $a^3 - b^3$ par $a - b$; on trouve pour quotient $a^2 + ab + b^2$; donc

$$V = {}^4/_3\pi(a^2 + ab + b^2)(a - b) = \pi(a^2 + ab + b^2) \times {}^4/_3(a - b).$$

Or la première partie est la somme des bases $\pi a^2$, $\pi b^2$ et de la base moyenne géométrique $\pi ab$. La seconde partie est le tiers de la hauteur; donc la hauteur du tronc de cône doit être $4(a - b)$.

**Théorème 758.**

**1920.** *Les volumes engendrés par un rectangle qui tourne successivement autour de deux côtés adjacents sont en rapport inverse avec ces côtés.*

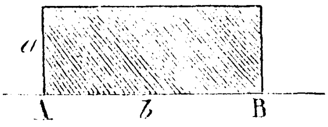


Fig. 1231.

Soient $a$ et $b$ les côtés adjacents.

Les volumes sont :

$$V = \pi a^2 b \quad \text{et} \quad V' = \pi b^2 a,$$

donc

$$\frac{V}{V'} = \frac{a}{b}.$$

### Théorème 758. — I.

1921. *Les volumes engendrés par un parallélogramme qui tourne successivement autour de deux côtés adjacents, sont en rapport inverse de ces côtés.*

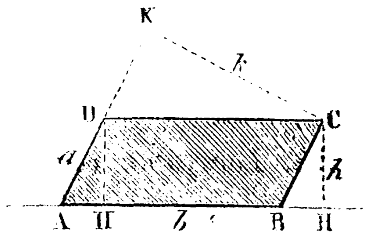



Fig. 1232.

Le volume engendré par le parallélogramme tournant autour de AB est équivalent au volume engendré par le rectangle HDCH, tournant autour de HH; d'ailleurs HH $= b$; donc

$$V = \pi h^2 b \text{ et } V' = \pi k^2 a, \frac{h}{k} = \frac{a}{b};$$

donc

$$\frac{V}{V'} = \frac{h^2 b}{k^2 a} = \frac{a^2 b}{b^2 a} = \frac{a}{b}.$$

### Théorème 759.

1922. *En représentant par* v, x, y *les volumes engendrés par la rotation d'un triangle rectangle tournant successivement autour de l'hypoténuse et autour de chaque côté de l'angle droit, on a :*

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}.$$

Soient $a$, $b$, $c$, $h$, l'hypotenuse, les côtés de l'angle droit et la hauteur.

On a, pour les volumes :

$$v = \frac{\pi h^2 a}{3}; \quad x = \frac{\pi c^2 b}{3} \quad \text{et} \quad y = \frac{\pi b^2 c}{3}.$$

L'égalité hypothétique

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2 y^2}{v^2 x^2 y^2} = \frac{v^2 y^2 + v^2 x^2}{v^2 x^2 y^2},$$

revient à prouver qu'on a :

$$x^2 y^2 = v^2(x^2 + y^2),$$

ou

$$b^4 c^2 . c^4 b^2 = h^4 a^2 (b^4 c^2 + c^4 b^2).$$

Or, en remarquant que $ah = bc$ et que $b^2 + c^2 = a^2$, on obtient successivement :

$$a^6 h^6 = h^4 a^2 (b^2 h^2 a^2 + c^2 h^2 a^2) = h^4 a^2 . h^2 a^4.$$

*Autre démonstration d'après le théorème de Guldin :*

$$v = 2\pi S \frac{h}{3}, \quad x = 2\pi S \frac{b}{3}, \quad y = 2\pi S \frac{c}{3}.$$

L'égalité
$$\frac{1}{v^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$$
se réduit à
$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$
ou
$$b^2c^2=h^2(b^2+c^2)=a^2h^2 \quad \text{ou} \quad bc=ah,$$
égalité de deux expressions de S.

**Théorème 760.**

**1923.** *Lorsqu'un cône est circonscrit à une sphère du rayon* a, *le rayon* r *et la hauteur* h *du cône sont liés au rayon de la sphère par la relation*
$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}=\frac{2}{ah}.$$

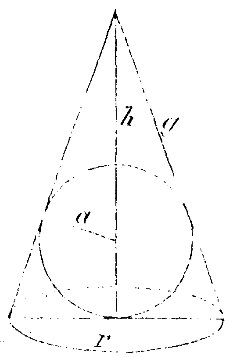


Fig. 1233.

(Dostor, *Archives de mathématiques et de physique*, 1877, p. 313.)

Les triangles semblables donnent :
$$\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{h(h-2a)}}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2}{r^2}=1-\frac{2a}{h},$$
d'où
$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{2}{ah} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}=\frac{2}{ah}.$$

**Théorème 761.**

**1924.** *Dans le cylindre de révolution, en représentant le volume par* v, *la surface totale par* s, *et la surface latérale par* l, *on a la relation*
$$8\pi v^2=l^2(s-l).$$
$$v=\pi r^2h, \quad \text{d'où} \quad 8\pi v^2=8\pi^3r^4h^2;$$
$$l=2\pi rh, \quad \text{d'où} \quad l^2=4\pi^2r^2h^2;$$
$$s=2\pi rh+2\pi r^2, \quad \text{d'où} \quad (s-l)=2\pi r^2;$$
donc
$$l^2(s-l)=8\pi^3r^4h^2=8\pi v^2.$$

**Théorème 762.**

**1925.** *Les mêmes hypothèses étant faites pour un cône de révolution, on a la relation*
$$9\pi v^2=s(s-l)(2l-s). \qquad \text{(Dostor.)}$$
$$v=\frac{\pi r^2h}{3}, \quad l=\pi r\sqrt{r^2+h^2}, \quad s=\pi r\sqrt{r^2+h^2}+\pi r^2;$$
$$9\pi v^2=\pi^3r^4h^2, \quad (s-l)=\pi r^2;$$
$$2l-s=\pi r\sqrt{r^2+h^2}-\pi r^2,$$
$$s(s-l)(2l-s)=\left[\pi r\sqrt{r^2+h^2}+\pi r^2\right]\pi r^2\left[\pi r\sqrt{r^2+h^2}-\pi r^2\right]=$$
$$=\left[\pi^2r^2(r^2+h^2)-\pi^2r^4\right]\pi r^2=\pi^3r^4h^2 \quad \text{ou} \quad 9\pi v^2.$$

**Théorème 762. — I.**

**1926**. *Par un point donné sur l'axe d'un cône de révolution, on mène un plan quelconque; la somme des inverses des deux génératrices opposées est une quantité constante, quel que soit le couple de génératrices.*

(Voir *Méthodes*, n° 280.)

**Théorème 762. — II.**

**1927**. *Pour un couple donné de génératrices opposées d'un cône droit ayant une courbe à centre pour périmètre de base, la somme des inverses de ces génératrices est constante pour tout plan mené par un point fixe pris sur la hauteur; mais la constante varie suivant le couple considéré.*

Dans tout cône droit ayant une courbe à centre pour périmètre de la base, la hauteur est bissectrice d'un couple quelconque de génératrices opposées. Donc pour un même point O, on aura, quel que soit le plan sécant :

$$\frac{1}{\text{SA}} + \frac{1}{\text{SC}} = \text{constante};$$

mais la constante dépend de l'angle $\alpha$ que forment entre elles les deux génératrices considérées.

**Théorème 763.**

**1928**. *La surface de la sphère est à la surface totale du cône équilatéral circonscrit dans le rapport de 4 à 9; les volumes sont dans le même rapport.* (ARCHIMÈDE.)

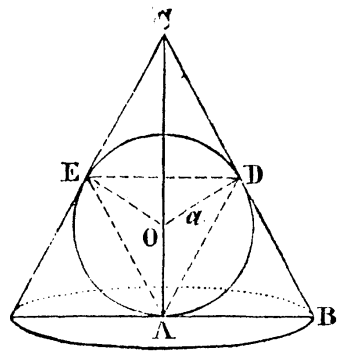


Fig. 1234.

Le cône équilatéral est le cône dont la section, par l'axe, est un triangle équilatéral.

Soit $a$ le rayon de la sphère.

Le rayon AB est la moitié du côté; il égale DE et correspond au côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle dont $a$ est le rayon; donc

$$\text{AB} = \text{DE} = a\sqrt{3}; \quad (\text{G., n° 277.})$$

or $\qquad \text{CD}^2 \text{ ou } \text{DE}^2 = 3a^2;$

d'où $\text{CO}^2 = 4a^2$, $\text{CO} = 2a$, et $\text{CA} = 3a$.

On a tous les éléments pour calculer la surface du cône :

$$\text{AB} = a\sqrt{3}; \quad \text{AC} = 3a; \quad \text{BC} = 2a\sqrt{3}.$$

Le cercle de base ou $\pi r^2 = \pi \times 3a^2 = 3\pi a^2$.

La surface convexe ou

$$\pi\text{AB} . \text{BC} = \pi a\sqrt{3} . 2a\sqrt{3} = 6\pi a^2.$$

Surface totale égale $9\pi a^2$.

La surface de la sphère est $4\pi a^2$; donc le rapport des surfaces de la sphère et du cône égale $\frac{4}{9}$.

Volume du cône égale :

$$\pi AB^2 \times \frac{1}{3} AC = \pi(a\sqrt{3})^2 \times a = 3\pi a^3 = \frac{9}{3} \pi a^3.$$

La sphère est : $\frac{4}{3}\pi a^3$ ; donc le rapport des volumes est : $\frac{4}{9}$.

**Théorème 763. — I.**

**1928 a.** *La surface du cylindre circonscrit à une sphère est moyenne proportionnelle entre la surface de la sphère et la surface du cône équilatéral circonscrit à cette même sphère. Il en est de même des volumes.*

En effet, lorsqu'un polyèdre, un cône ou un cylindre, sont circonscrits à une sphère, les volumes sont entre eux dans le même rapport que les surfaces correspondantes.

En représentant par 4 la surface de la sphère, celle du cylindre est représentée par 6 et celle du cône par 9.

Or $$\frac{4}{6} = \frac{6}{9}, \text{ donc...}$$

**Théorème 763. — II.**

**1928 b.** *La surface du cylindre circonscrit à une sphère est moyenne arithmétique entre la surface de la sphère inscrite et la surface de la sphère circonscrite à ce même cylindre.*

**Théorème d'Archimède 763. — III.**

**1928 c.** *Toute surface sphérique se projette en vraie grandeur sur un cylindre circonscrit, lorsque les projetantes rencontrent l'axe du cylindre et sont perpendiculaires à cet axe.*

Les zones sphériques et cylindriques correspondantes sont équivalentes : tel est le théorème d'Archimède proprement dit ; de là, on passe facilement à l'énoncé principal ci-dessus.

**1928 d.** *Toute surface sphérique* ABC... *se projette en vraie grandeur* A'B'C' *sur un plan tangent à la sphère, lorsque chaque point* A, B, C... *du périmètre de la surface sphérique est projeté sur le plan tangent par un arc de cercle* AA', BB', *etc., ayant pour centre le point de contact* P.

Considérons une calotte ayant P pour sommet et PA pour corde de l'arc générateur ; elle a pour surface $\pi AP^2$, et le cercle décrit sur le plan tangent a même surface $\pi A'P^2$.

**1298 e.** *Toute surface sphérique* ABC... *se projette en vraie grandeur* A'B'C'... *sur un cône circonscrit à la sphère, lorsque chaque point* A, B... *est projeté sur la surface conique en* A', B'... *par un arc de cercle* AA', BB'... *ayant pour centre le sommet* S *du cône circonscrit.*

(Voir *Mathesis*, 1905, page 203, art. de M. C.-E. WASTEELS, alors répétiteur à l'Université de Gand.)

*Remarque.* Les théorèmes 1928 **b** et **c** sont des cas particuliers anciennement connus du théorème 1928 **d**, dont voici d'ailleurs la généralisation :

**1928 f.** *Toute surface sphérique* ABC... *est dans un rapport constant avec sa projection* A'B'C'... *sur un cône de révolution dont l'axe passe par le centre de la sphère, lorsque les points* A, B,... *sont projetés en* A', B',... *par les arcs de cercle ayant pour centre le sommet* S *du cône de révolution.* (*Mathesis*, loc. cit.)

**Théorème 764.**

**1929.** *Dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux six arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite.* (DOSTOR, *N. A.*, 1874, p. 568.)

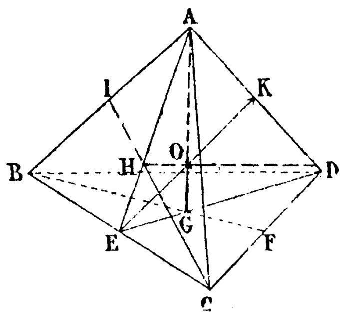


Fig. 1235.

Dans le tétraèdre régulier, chaque face est un triangle équilatéral; les hauteurs DE, BF sont en même temps médianes. Ainsi OG est le rayon de la sphère inscrite, AO celui de la sphère circonscrite, et OE celui de la sphère tangente aux arêtes, car OE est perpendiculaire au milieu de BC et de AD.

Or les triangles rectangles semblables OAK, OEG donnent :

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OK}{OG} \quad \text{ou} \quad OA \, . \, OG = OE^2.$$

**Théorème de Durrande 764. — I.**

**1929 a.** *La distance* d *des centres des sphères inscrite et circonscrite à un tétraèdre est donnée par la formule*

$$d^2 = (R - r)^2 - 4r^2. \qquad (a)$$

Pour la sphère exinscrite opposée à l'angle A, on a :

$$d_a^2 = (R + r_a)^2 - 4r_a^2. \qquad (b)$$

(*Annales de Gergonne*, t. XIV, 1823-1824, p. 56.)

**Théorème 765.**

**1930.** *Soient une première sphère donnée ayant* O *pour centre, et une seconde sphère passant par le centre* O *de la première; quel que soit le rayon* r *de cette seconde sphère, la zone de cette seconde sphère, interceptée par la première, a une aire constante.* (*N. A.*, 1851.)

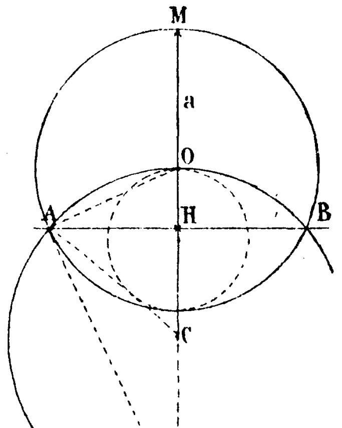


Fig. 1236.

Soient $a$ le rayon de la sphère donnée. C le centre de la seconde, et

$$OD = 2OC = 2r.$$

Pour avoir la surface de la zone sphérique qui correspond à l'arc AOB, il faut calculer la hauteur OH de cette zone, car la surface cherchée est donnée par

$$\text{surf.} = 2\pi r \, . \, OH. \quad (G., n^o\ 558.)$$

Or le triangle rectangle OAD donne :

$$OD \, . \, OH = AO^2 \quad \text{ou} \quad 2r \, . \, OH = a^2;$$

donc $\quad \text{surf.} = \pi a^2.$

*La zone interceptée est équivalente à un grand cercle de la première sphère. Elle est équivalente à la surface de la sphère qui aurait a pour diamètre.*

*Remarque.* On peut se borner à dire :

$$\text{zone} = \pi \cdot OA^2 = \text{constante}. \qquad \text{(G., n° 558.)}$$

**Théorème 765. — I.**

**1931.** *On a deux sphères de même centre et de rayons donnés. Une troisième sphère qui passe par le centre des deux premières donne lieu à une zone à deux bases dont la surface est constante, quel que soit le rayon de cette troisième sphère.*

Soient $a$ et $b$ les rayons des sphères concentriques et $a > b$.
La zone $= \pi(a^2 - b^2)$.

**Théorème de Maclaurin 766.**

**1932.** *Le volume d'un segment sphérique égale le cylindre de même hauteur qui aurait pour base la section équidistante des bases, moins la moitié de la sphère qui aurait la hauteur pour diamètre.*

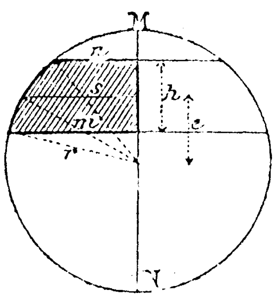


Fig. 1237.

Soient $m$ et $n$ les rayons des bases du segment considéré, $s$ le rayon de la section équidistante des bases, et $h$ la hauteur, $r$ étant d'ailleurs le rayon de la sphère.

Entre les longueurs $m$, $n$, $s$ et $h$, on a la relation (n° 1449)

$$m^2 + n^2 = 2s^2 - 2(^1/_2 h)^2.$$

La formule ordinaire du volume du segment (G., n° 580) donne :

$$\begin{aligned} V &= {}^1/_6\pi h^3 + {}^1/_2\pi h(m^2 + n^2), \\ &= {}^1/_6\pi h^3 + {}^1/_2\pi h(2s^2 - 2 \cdot {}^1/_4 h^2), \\ &= {}^1/_6\pi h^3 + \pi h(s^2 - {}^1/_4 h^2), \\ &= {}^1/_6\pi h^3 + \pi s^2 h - {}^1/_4\pi h^3, \\ &= \pi s^2 h - {}^1/_{12}\pi h^3. \end{aligned}$$

*Remarques.* Lorsque les bases d'un segment sont équidistantes du centre de la sphère, $a = r$, et alors

$$V = \pi r^2 h - {}^1/_{12}\pi h^3.$$

Et si, en même temps, la hauteur devient égale au diamètre $2r$ de la sphère, on aura :

$$V = \pi r^2 \cdot 2r - {}^1/_{12}\pi(2r)^3 = 2\pi r^3 - {}^2/_3\pi r^3 = {}^4/_3\pi r^3\,;$$

formule ordinaire de la sphère.

**Théorème 766. — I.**

**1932 a.** *Dans des sphères quelconques, les segments de même hauteur et de même section médiane sont équivalents;* car la formule donnée est indépendante du rayon de la sphère.

**1933. Note.** Nous appelons la question ci-dessus *théorème de Maclaurin,* parce qu'elle n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général dû à ce célèbre géomètre. (Voir *Traité des fluxions,* par Maclaurin ; traduit par le R. P. PÉZENAS, 2 vol. in-4°, en 1749. Introduction, page xxv.)

La priorité en faveur du géomètre anglais a été signalée par M. DESBOVES (*N. A.*, 1877, p. 278) ; mais avant cette indication, en 1875 (Géométrie F. I. C., 2e édition), nous avons énoncé non seulement le théorème relatif aux segments engendrés par une conique tournant autour de l'axe focal, mais un théorème analogue pour les segments engendrés par une conique dans sa rotation autour de l'axe non focal (page 384, exercices 81, 82).

La démonstration directe de ces théorèmes et de plusieurs autres se trouve dans l'*Appendice aux Exercices de Géométrie.*

* PÉZENAS, savant jésuite, né à Avignon (1692-1776), opéra le nivellement du canal de Craponne, en Provence, et traduisit plusieurs ouvrages anglais.

**1933 a.** *Autre démonstration du théorème de Maclaurin,* n° 1932.

Lorsqu'on a recours au calcul intégral pour arriver à l'expression du volume d'un corps donné, il est assez ordinaire de placer l'origine, si c'est possible, soit au centre, soit au sommet du méridien. Ainsi, pour la sphère, par exemple, on part de l'équation $x^2 + y^2 = r^2$, et l'on obtient le volume du segment à deux bases, mais dont l'une passe par le centre ; puis, à l'aide de transformations algébriques plus ou moins laborieuses, on traite le segment à deux bases quelconques comme somme ou différence de deux segments ayant un grand cercle pour base commune. Ou bien, partant de l'équation $x^2 + y^2 - 2rx = 0$, on trouve la formule du segment à une base ; le segment à deux bases quelconques est considéré comme étant la différence de deux segments à une base ; mais, ainsi que pour la méthode de sommation, le moyen le plus rapide d'arriver à l'expression du volume d'un segment quelconque est de l'exprimer directement en fonction de la hauteur et de la section équidistante ; puis, à l'aide de transformations toujours très simples, on peut trouver la formule en fonction des bases, etc.

En procédant ainsi, *l'étude du segment quelconque,* par le calcul intégral, *ne nécessite que quelques lignes ;* mais, dans ce traité élémentaire, nous ne pouvons employer les notations consacrées, et il convient d'ailleurs de recourir à certaines longueurs.

**1er Exemple.** Soit à étudier le segment sphérique à deux bases quelconques.

Le méridien a pour équation : $y^2 = r^2 - x^2$.

Soit $h$ la hauteur du segment, $l$ la distance du centre du cercle au point milieu de la hauteur. En prenant le milieu pour l'origine, l'équation devient :

$$y^2 = r^2 - l^2 + 2lx - x^2. \tag{1}$$

Dans cette formule, $r^2 - l^2$ est le carré du rayon de la section équidistante, car en posant $x = 0$, l'équation (1) se réduit à

$$y^2 \text{ ou } s^2 = r^2 - l^2.$$

Pour avoir la section circulaire, on multiplie chaque membre par $\pi$ ; on a donc :

$$\pi y^2 = \pi(s^2 + 2lx - x^2). \tag{2}$$

Dans l'exemple donné, le volume dépend d'une intégrale définie dont les limites pour $x$ sont : $-\frac{h}{2}$ et $+\frac{h}{2}$ ; d'ailleurs, la fonction primitive dont le second membre de l'équation (2) est la dérivée, égale :

$$\pi\left(s^2x + lx^2 - \frac{x^3}{3}\right). \tag{3}$$

En remplaçant $x$ par les valeurs extrêmes qu'elle doit recevoir, et en retranchant, ainsi qu'il le faut, le résultat qui correspond à la limite inférieure de celui qui correspond à $+\frac{h}{2}$, on a :

$$\mathrm{V} = \pi \left\{ \begin{array}{l} \left(s^2\frac{h}{2} + \frac{lh^2}{4} - \frac{h^3}{24}\right) \\ -\left(-s^2\frac{h}{2} + \frac{lh^2}{4} + \frac{h^3}{24}\right) \end{array} \right\},$$

$$\mathrm{V} = \pi\left(s^2h - \frac{h^3}{12}\right); \tag{4}$$

formule connue, d'où l'on déduit très facilement la formule qui donne le volume en fonction des bases.

2° **Exemple.** *Étude du segment à deux bases de l'hyperboloïde à deux nappes engendré par l'hyperbole* $x^2 - y^2 = a^2$, *tournant autour de l'axe transverse.*

On a :
$$y^2 = x^2 - a^2.$$

En portant l'origine à la distance $l$, au point milieu de la hauteur, on trouve :
$$y^2 = x^2 + 2lx + l^2 - a^2;$$

$l$ est nécessairement $> a$; soit donc $l^2 - a^2 = s^2$.

On aura :
$$\pi y^2 = \pi(s^2 + 2lx + x^2).$$

En remontant à la fonction primitive et prenant l'intégrale dans les limites de $\pm\frac{h}{2}$, on trouve :

$$\mathrm{V} = \pi \left\{ \begin{array}{l} \left(s^2\frac{h}{2} + \frac{lh^2}{4} + \frac{h^3}{24}\right) \\ -\left(-s^2\frac{h}{2} + \frac{lh^2}{4} - \frac{h^3}{24}\right) \end{array} \right\};$$

$$\mathrm{V} = \pi\left(s^2h + \frac{h^3}{12}\right). \tag{5}$$

*Remarque.* Le volume du segment à deux bases de l'hyperboloïde équilatère de révolution à une nappe, est donné par la même formule (5) ; il en est de même pour le tronc de cône dont les génératrices sont à 45° ; d'où l'on conclut que ces divers segments sont équivalents lorsqu'ils ont même hauteur et que les sections équidistantes des bases, dans chaque segment considéré, sont égales entre elles. (*Appendice aux Exercices de Géométrie,* n° 848.)

### Théorème 767.

**1934.** *Lorsqu'un triangle rectangle isocèle tourne autour d'une droite menée par le sommet de l'angle droit parallèlement à l'hypoténuse, il engendre un volume équivalent à la sphère qui aurait cette hypoténuse pour diamètre.*

1° C'est une simple conséquence du *théorème des trois corps ronds.* (G., n° 583.)

2° On peut le démontrer à l'aide du *théorème de Guldin.* (Voir *Géométrie,* n° 904.)

3° Le volume engendré par le triangle n'est qu'un cas particulier du volume engendré par un segment d'hyperbole. (G., n° 978.)

**1935. Note.** La *méthode des sections comparées,* inaugurée en 1873 dans la première édition des *Eléments de Géométrie,* nos 595, 596, 597, appliquée actuellement aux nos 582 et 583, *théorèmes des trois corps ronds,* et exposée au § V, no 971, nous semble avoir une origine toute récente comme procédé d'investigation et comme mode d'exposition; néanmoins, ainsi qu'il arrive souvent dans l'histoire de la plupart des méthodes, un des principaux théorèmes, celui qui est relatif à la sphère, se trouve avoir une origine assez ancienne.

Le docteur SONNDORFER, qui le donne dans son *Lehrbuch der Geometrie* (Wien, 1877, page 124), a bien voulu nous écrire qu'il a emprunté ce théorème au *Traité de Géométrie* du docteur WITTSTEIN, 2e partie, page 121.

Ce dernier ouvrage a été publié à Hanovre, en 1862.

Plus tard, M. VAUTRÉ, de Saint-Dié, l'a signalé dans le *Cours complet de Mathématiques pures* de FRANCŒUR, tome I, no 313

Enfin, en 1880, nous l'avons trouvé dans les *Éléments d'Euclide, du R. P. Deschalles et de M. Ozanam,* par M. Audierne, 2e édition; Paris, 1753.

D'après la préface, on reconnaît que DESCHALLES et OZANAM ne sont cités que comme prête-nom. La division de l'ouvrage est conforme à celle d'Euclide; mais on lit (pages 514 et 515, livre XII) : « Comme Euclide ne parle ni de la solidité de la sphère ni de la surface, nous substituons à ces deux propositions notre démonstration de cette solidité... »

**Proposition XVI** (page 541) : *La demi-sphère est les deux tiers du cylindre dans lequel elle est inscrite.*

AUDIERNE démontre la proposition en prouvant que la sphère augmentée du cône est équivalente au cylindre.

Avant lui, MACLAURIN, dans son *Traité des fluxions,* dont la traduction est de 1749, considère dans l'*Introduction,* page XXVII, une portion de sphéroïde (c'est-à-dire d'ellipsoïde) et le solide engendré par un trapèze rectangle; mais il n'en déduit pas une expression simple qui puisse servir d'énoncé de théorème et conduire à une véritable méthode.

Enfin, d'après l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1904, pages 139 et 254, question 2794, un élève de GERBERT, vers 999, ADALBOLD d'UTRECHT, aurait indiqué, mais non démontré, que le volume de la sphère s'obtenait en diminuant d'un tiers le volume du cylindre de même diamètre, et était donné par la formule $\frac{11}{21}d^3$, ce qui correspond à $\frac{\pi}{6}d^3$, en prenant $\frac{22}{7}$ pour rapport de la circonférence au diamètre. (D'après A.-P. ERICSSON et Paul TANNERY.)

* OZANAM (1640-1717), très connu par ses *Récréations mathématiques et physiques.*

* AUDIERNE publia plusieurs ouvrages de mathématiques de 1746 à 1782, et commenta divers traités d'OZANAM.

* Le R. P. DESCHALLES, né à Chambéry (1621-1678), auteur d'un *Cours complet de mathématiques.* Voir aussi *I. M.,* 1909, p. 263, q. 3563.

**1935 a.** *Complément du théorème d'Archimède.* Les démonstrations élémentaires que nous avons données ont vulgarisé plusieurs théorèmes, et complété d'une manière heureuse le *théorème d'Archimède* relatif à la sphère et au cylindre circonscrit (G., nos 558 et 585). Ainsi, pour un segment sphérique quelconque, 1o la zone est équivalente à la surface latérale correspondante du cylindre circonscrit à la sphère; 2o chaque base du segment est équivalente à la base du cylindre diminuée de la section correspondante du cône à deux nappes inscrit dans le cylindre; 3o le segment est équivalent au cylindre de même hauteur diminué du tronc de cône correspondant.

Malgré l'extrême simplicité des démonstrations données, il est utile de reconnaître que les théorèmes, une fois connus, *se déduisent comme simple remarque* des formules qu'on obtient lorsqu'on intègre par parties.

*Exemple.* Pour le segment sphérique ayant un grand cercle pour une de ses bases, on a pour section :

$$\pi y^2 = \pi(r^2 - x^2).$$

L'intégrale définie doit se prendre de 0 à $+h$.

On a donc : $$V = \pi\left(r^2h - \frac{h^3}{3}\right);$$

$$V = \pi r^2 h - \frac{\pi h^3}{3}.$$

$\pi r^2 h$ correspond au cylindre circonscrit de même hauteur que le segment; $\frac{\pi h^3}{3}$ ou $\pi h^2 . \frac{h}{3}$ est un cône de même hauteur que le segment, et dont le rayon égale $h$; c'est donc une partie du cône à deux nappes inscrit dans le cylindre circonscrit à la sphère.

Pour l'ellipsoïde quelconque, on aurait :

$$V = \pi \frac{bc}{a^2}\left(a^2h - \frac{h^3}{3}\right).$$

$\pi \frac{bc}{a^2} . a^2 h$ ou $\pi bch$ est le cylindre, et $\frac{\pi bch^3}{3a^2}$ est le cône.

Les hyperboloïdes donnent lieu à des résultats analogues.

Il est d'ailleurs possible de partir directement d'une formule donnée par les sommations ou par le calcul intégral et d'énoncer un théorème nouveau; il serait facile de procéder ainsi pour les questions traitées aux nos 791..., 795 (*Appendice aux Exercices de Géométrie*). D'ailleurs, dans bien des cas, comme on le voit aux nos 864, 865, 872 de ce même ouvrage, on peut trouver des démonstrations ne réclamant que la connaissance des éléments de géométrie.

### Théorème 767. — I.

**1935 b.** *Le volume compris dans la surface qu'engendre un segment rectiligne* CD *en glissant par ses extrémités sur deux lignes orthogonales* AX, BY *non situées dans un même plan, et lorsque* CD *égale deux fois la plus courte distance* AB *des deux droites, est équivalent à celui de la sphère qui aurait* AB *pour diamètre.*

Il suffit de comparer les sections correspondantes de la surface ellipsidale engendrée par CD et de la sphère.

Toute section de la première surface est une ellipse dont la somme des axes égale $\frac{CD}{2}$ (no 1945 **b**). Soit $r$ le rayon de la sphère; les demi-axes de la section elliptique faite à une distance $h$ du centre de la sphère seront : $$r + h \quad \text{et} \quad r - h;$$

donc $$\text{ellipse} = \pi(r + h)(r - h) = \pi(r^2 - h^2). \qquad (1)$$

Or la section correspondante de la sphère est aussi :

$$\pi(r^2 - h^2);$$

donc les sections sont équivalentes et il en est de même des volumes étudiés.

*Remarque.* Les prolongements du segment CD engendrent une surface à deux nappes dont les sections sont équivalentes aux sections correspondantes de l'hyperboloïde de révolution à deux nappes, qui est la figure complémentaire de la sphère (dans le sens de PONCELET).

## Inscription et position.

### Théorème 768.

**1936.** *A tout prisme triangulaire droit, on peut inscrire et circonscrire un cylindre de révolution.*

En effet, aux deux bases peuvent être inscrits et circonscrits des cercles respectivement égaux et parallèles, et une droite peut se mouvoir perpendiculairement aux bases en s'appuyant sur les cercles inscrits ou les cercles circonscrits; cette droite décrira les cylindres dont il est question. Donc, *à tout prisme triangulaire droit...*

### Théorème 768. — I.

**1937.** *A trois plans indéfinis, parallèles à une même droite, et qui se coupent deux à deux, on peut mener quatre cylindres circulaires tangents.*

En effet, les trois plans dont il est question ne sont autres que les faces latérales d'un prisme triangulaire prolongées indéfiniment.

Si l'on coupe le système de ces trois plans par un quatrième plan perpendiculaire aux intersections des premiers, on obtient un triangle dont les côtés sont prolongés indéfiniment.

Or à trois droites indéfinies qui se rencontrent deux à deux on peut mener quatre cercles tangents. (G., nº 189.) Si une droite indéfinie se meut en s'appuyant sur les circonférences de ces cercles et en restant parallèle aux intersections des plans donnés, cette droite mobile décrira quatre surfaces cylindriques tangentes aux trois plans donnés.

### Théorème 769.

**1938.** *A tout trièdre on peut inscrire et circonscrire un cône de révolution.*

Dans le premier cas, il faut inscrire un cercle dans le triangle obtenu, en coupant le trièdre par un plan perpendiculaire à la droite d'intersection des trois plans bissecteurs des dièdres du trièdre; dans le second cas, il suffit de prendre trois longueurs égales SA, SB, SC sur les arêtes, et de circonscrire une circonférence au triangle ABC.

### Théorème 770.

**1939.** *Par trois droites non situées dans un même plan, et qui se coupent au même point, on peut faire passer quatre cônes de révolution à deux nappes.*

Les plans menés par trois droites considérées deux à deux, donnent lieu à huit trièdres opposés deux à deux par le sommet; chaque groupe

**donne lieu à un cône à deux nappes circonscrit aux deux trièdres opposés.**

**1940.** *Remarque.* La plupart des théorèmes relatifs aux triangles peuvent en fournir d'analogues pour le trièdre. Ainsi le *cercle des neuf points* (nos 719 et 720) a pour similaire un cône qui passerait par neuf droites déterminées du trièdre considéré.

### Théorème 771.

**1941.** *Par quatre points* A, B, C, D, *non situés dans un même plan, on peut faire passer une sphère, et une seule.*

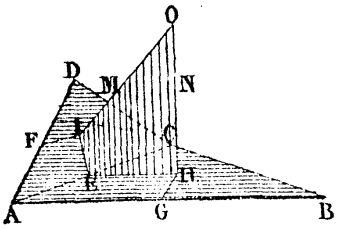


Fig. 1238.

1° Les points donnés déterminent deux triangles : ABC et ACD. Par les points E, F, G, milieux des côtés qui partent du point A, dans les plans des deux triangles, menons les perpendiculaires EI, EH, FI et GH ; menons ensuite les droites IM et HN perpendiculaires aux plans ACD et ACB ; les pieds I et H des ces perpendiculaires sont les centres de cercles circonscrits aux deux triangles ; donc ces perpendiculaires sont les lieux des centres de toutes les sphères que l'on peut faire passer par ADC et ACB.

Ces deux lieux se rencontrent au point O ; en effet, si, par les perpendiculaires EI et EH à AC, on mène le plan IEH, ce plan sera perpendiculaire à l'intersection AC des deux plans DAC et BAC, il l'est donc aussi à chacun d'eux (G., n° 406) ; donc ce plan IEH contient les deux perpendiculaires IM et HN (G., n° 403), et ces droites IM et HN se coupent (G., n° 77) ; donc leur intersection O est le centre de la sphère demandée.

2° La droite IM étant le lieu des points équidistants des points A, C, D, et la droite HN le lieu des points équidistants des points A, B, C, l'unique rencontre O de ces deux droites est le seul point de l'espace qui soit équidistant des quatre points donnés. Donc...

**1942.** *Remarque.* 1° Les quatre points donnés peuvent servir de sommets à un tétraèdre ABCD; donc *à un tétraèdre quelconque on peut circonscrire une sphère, et une seule.*

2° Les lignes analogues à IO et HO, que l'on pourrait élever sur les deux autres faces du tétraèdre, passeraient au point O ; or les points I et H sont les centres des cercles circonscrits aux faces ACD et ABC.

Donc, *dans un tétraèdre quelconque, il y a un point de rencontre unique pour les perpendiculaires élevées sur les quatre faces par les centres des cercles circonscrits à ces mêmes faces.*

### Théorème 772.

**1943.** *On peut inscrire une sphère à un tétraèdre quelconque.*

Car les six plans bissecteurs des dièdres se rencontrent en un même point, qui est équidistant des quatres faces (n° 1833). Ce point peut servir de centre à une sphère qui sera tangente à toutes les faces.

**Théorème 772. — I.**

**1943 a.** *Lorsqu'un tétraèdre est tel que la somme de deux arêtes opposées est égale à la somme des deux arêtes de chacun des deux autres groupes, les cercles inscrits dans les quatre faces appartiennent à une même sphère; cette sphère est tangente aux six arêtes.* (*A. de G.*, tome V, 1814-1815, p. 304, problème II, J.-B. DURRANDE.)

**Théorème 773.**

**1944.** *Deux sphères quelconques peuvent avoir, l'une par rapport à l'autre, cinq positions différentes; et les conditions relatives aux rayons et à la distance des centres sont les mêmes que pour les circonférences.* (G., nº 138.)

En effet, étant données deux circonférences dans l'une quelconque des cinq positions connues, si l'on fait tourner la figure totale autour de la ligne des centres, on produit deux sphères qui sont absolument dans les mêmes conditions que les deux circonférences...

**Théorème 774.**

**1945.** *Si trois sphères se coupent deux à deux, les plans d'intersection se coupent suivant une même droite perpendiculaire au plan des trois centres.*

En effet, le plan qui passe par les trois centres de ces sphères détermine trois cercles qui se coupent, et les trois cordes d'intersection se rencontrent en un même point (nº 1271).

Si, par ces cordes, on mène des plans perpendiculaires au plan des centres, on obtient les trois plans d'intersection des sphères; et leur intersection commune est la perpendiculaire menée au plan des centres par le point de concours des trois cordes.

*Remarque.* Le point de concours des trois cordes est le centre radical des trois cercles. Le théorème démontré (nº 1945) n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général. (G., nº 839, 4º.)

**Théorème 774. — I.**

**1945 a.** *La sphère qui passe par les points* A *et* B, *de la plus courte distance de deux droites* AX, BY, *non situées dans un même plan, et par les extrémités* C *et* D *d'un segment rectiligne dont les extrémités se meuvent respectivement sur les droites données a un rayon constant.*

Par une des droites BY, par exemple, menons un plan parallèle à AB, soit D' la projection de D sur ce plan, l'angle XAD' est invariable; il en est donc de même du cercle circonscrit CAD' (nº 702 **a**); si $l$ est le diamètre de ce cercle et $h$ la plus courte distance AB des droites données, le diamètre $d$ de la sphère ABCD sera donné par

$$d^2 = h^2 + l^2\,;$$

donc le rayon de la sphère est constant.

*Remarque.* L'enveloppe des sphères égales qui passent par A et B est un tore, qui a $d$ pour diamètre du cercle générateur.

**1945 b. Note.** 1° Considérons le cas le plus intéressant, celui où les droites AX, BY sont orthogonales, et où AB est la moitié de CD.

Chaque point du segment mobile CD décrit une ellipse dont la somme des axes est constante, elle égale CD, et dont le plan est parallèle aux droites AX, BY.

La surface ellipsidale engendrée est très intéressante. (*Exercices de Géométrie descriptive*, 4e édition, pp. 883 à 888, nos 1232, *x*, *y*, *z*.)

Le contour apparent sur tout plan parallèle aux droites données AX, BY est l'*astroïde* (n° 793, **a**); sur tout plan parallèle à l'une des droites et perpendiculaire à l'autre, on obtient deux droites à 45°. Sur tout plan parallèle à la plus courte distance AB et parallèle au plan bissecteur de l'angle des deux droites, on a une hyperbole équilatère.

Le volume compris par la surface qu'engendre le segment CD est équivalent à celui de la sphère qui aurait AB ou $\frac{CD}{2}$ pour diamètre (n° 1935 **b**).

2° L'énoncé du théorème précédent (n° 1945 **a**) est de OTTO BÖKLEN, en 1861 (*Mathesis*, 1901, p. 272, n° 23). L'auteur donne aussi l'énoncé suivant : *Si en deux points fixes* A *et* B *d'une sphère donnée, on mène deux cordes* AC, BD *perpendiculaires à* AB *et faisant un angle constant, la distance des deux autres extrémités* C *et* D *est constante.* Dans ce cas, C et D tracent sur la sphère deux cercles égaux et parallèles; les points mobiles parcourent ces cercles avec des vitesses égales; par suite, la droite CD engendre un hyperboloïde de révolution.

On peut avoir un troisième énoncé : *Si deux droites* CX, DY *tournent autour de deux points fixes* C *et* D, *de manière à ce que l'angle qu'elles forment entre elles soit constant, et que leur plus courte distance* AB *soit aussi constante, la sphère* ABCD *a un rayon constant.* Par C menons un plan parallèle à DY; soit D' a projection de D sur ce plan et D'Y' la projection de DY; cette projection passe par le point A, et B se projette aussi sur ce point. L'angle CAD' est constant, donc le lieu du point A est l'arc du segment capable de l'angle donné.

La droite perpendiculaire AB au plan CAD' décrit une surface cylindrique.

3° Suivant l'énoncé proposé, on reconnaît que le segment mobile décrit trois surfaces bien différentes l'une de l'autre; mais la démonstration du théorème est facile dans tous les cas.

### Théorème 775.

**1946.** *Une sphère et un plan étant donnés, démontrer que toutes les sphères décrites des différents points du plan comme centre, avec des rayons égaux aux tangentes menées de ces points à la sphère donnée, passent par un point fixe.* (*N. A.*, 1868, p. 42, Vittorio SANNDI.)

Il suffit d'étudier la section méridienne obtenue en coupant la sphère par un plan perpendiculaire au plan donné; car, si le théorème est vrai, le point commun ne peut se trouver, par raison de symétrie, que sur la perpendiculaire CP abaissée du centre C sur le plan PQ.

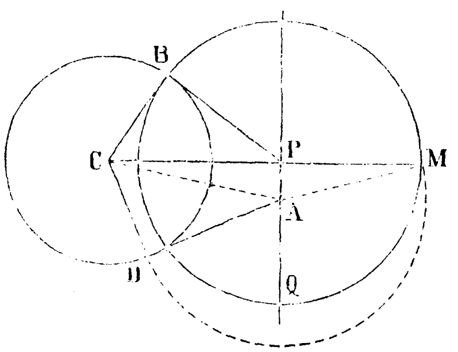


Fig. 1239.

Prenons donc PM = PB, et prouvons que, pour une tangente quelconque AD, on a :

$$AM = AD.$$

Soient : $CP = a$, $CB = r$.

On aura : $$PM^2 = PB^2 = a^2 - r^2.$$

Ajoutons $AP^2$ à chaque membre; on obtiendra :

$$PM^2 + PA^2 = a^2 + AP^2 - r^2,$$

ou $$AM^2 = AC^2 - r^2 = AD^2.$$

Ainsi la distance AM égale la tangente AD; donc la sphère décrite du point A comme centre avec AD pour rayon passe par le point fixe M.

*Remarques.* 1° La droite AP est l'axe radical du point M et de la circonférence CDB. Le plan dont PQ est la section par un plan mené par CP, est le plan radical de la sphère C et du point M.

2° Les sphères passent toutes par un second point fixe, le point N, symétrique de M par rapport au plan donné.

### Théorème 776.

**1947.** *Un hexaèdre est inscriptible dans une sphère lorsque ses faces sont des quadrilatères inscriptibles.*

Circonscrivons une circonférence au quadrilatère ABCD et une autre à BEFC.

Soient M, N leurs centres respectifs.

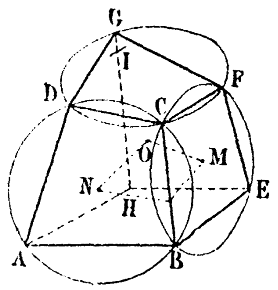


Fig. 1240.

Dans un plan mené par MN perpendiculairement à la corde commune BC, on peut mener des perpendiculaires par les points M, N aux quadrilatères ABCD, BEFC. Soit O le point de rencontre des perpendiculaires. Ce point est le centre de la sphère qui passe par les deux cercles déjà tracés (n° 1941).

Or la section de cette sphère par le plan déterminé par les trois points D, C, F, doit contenir le quatrième sommet G de tout quadrilatère inscriptible ayant déjà D, C, F pour sommets; donc la sphère passe par le sommet G, et, pour une raison analogue, elle passe aussi par le sommet H. Donc...

### Théorème 776. — I.

**1947 a.** *Lorsque quatre sphères sont telles que chacune d'elles est tangente aux trois autres, les six points de contact appartiennent à une même sphère.*

(*A. de Gergonne*, 1814-1815, p. 32 et 301. J.-B. Durrande.)

Cette question ne diffère pas d'un théorème déjà proposé (n° 1943 a).

### Théorème 777.

**1948.** *Lorsqu'un polygone plan est inscrit à une sphère, les plans tangents menés à la sphère par les sommets du polygone inscrit se coupent au même point.*

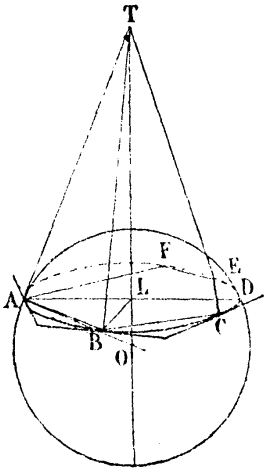


Fig. 1241.

Soit le polygone ABCF inscrit dans un cercle ABCD ayant L pour centre.

Menons par le centre de la sphère la droite OL jusqu'à la rencontre du plan tangent mené par le point A.

La tangente AT est la section du plan tangent par le plan méridien AOL.

Le triangle rectangle OAT donne :

$$OT \cdot OL = AO^2; \quad OT = \frac{AO^2}{OL}.$$

Donc la distance OT est constante, quel que soit le plan tangent. Ainsi, tous les plans tangents passent par le même point T.

**Théorème 777. — I.**

1949. *Lorsqu'un polygone est circonscrit à une sphère, les plans tangents menés par les côtés de ce polygone passent par un même point.*

Les plans tangents menés par les côtés sont les mêmes que ceux qui seraient menés par les sommets A, B, C d'un polygone inscrit.

**Théorème 778.**

1950. *Lorsque les arêtes opposées d'un octaèdre inscrit à une sphère sont dans un même plan, les trois diagonales de l'octaèdre se coupent au même point.*

*En menant un plan tangent à la sphère par chaque sommet de l'octaèdre, on forme un hexaèdre circonscrit dont les faces prises quatre à quatre concourent en un même point.*

(Voir *Méthodes*, n° 32.)

**Théorèmes 778. — I.**

1951. *Lorsque par un même point* T *on mène des plans tangents à une sphère, les points de contact sont les sommets d'un polygone plan inscrit.*

**Théorème 778. — II.**

1952. *La courbe de contact d'une sphère et d'un cône circonscrit est une circonférence.*

**Théorème 778. — III.**

1952 a. 1° *Lorsque les trois diagonales d'un octaèdre sont rectangulaires deux à deux et passent par un même point, les orthocentres des huit faces sont situés sur une même sphère.* (S. Steiner.)

(On peut voir la 7e édition des théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire par Catalan, *Théorème* XLIV, p. 406; ou *Mathesis*, 1904, p. 258, solution par Abramescu.)

2° *Lorsque l'octaèdre est inscrit à une sphère de centre ω, la sphère* S *passe également par les centres de gravité des faces, et son centre divise la distance* Oω *dans le rapport* 1 : 2. (J. Neuberg. *Mathesis,* 1904, p. 258, question 1479.)

### Théorème 779.

**1953.** *Un cylindre qui entre dans une sphère par un cercle en sort par un cercle égal au premier.*

Représentons la sphère et le cylindre sur un plan parallèle aux génératrices du cylindre, et mené par le centre de la sphère et le centre du cercle d'entrée.

Il est évident que la courbe d'entrée et celle de sortie sont symétriques par rapport au plan du grand cercle perpendiculaire au cylindre ; donc les deux courbes sont égales.

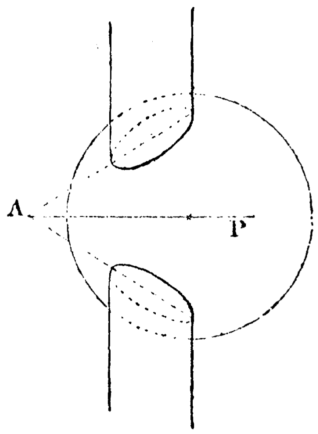


Fig. 1242.

*Remarque.* La démonstration si simple qui précède est plus générale que le théorème énoncé ; on peut dire : *Lorsqu'un cylindre quelconque coupe une sphère, l'intersection est divisée en deux parties symétriques par le grand cercle qui est perpendiculaire aux génératrices du cylindre.*

### Théorème 780.

**1954.** *La section antiparallèle d'un cône oblique à base circulaire est un cercle.*

Soit SABC un cône à base circulaire ABC.

Soit DEF la section antiparallèle; l'angle ADF = ACF, SFD = A. En un mot, le quadrilatère ACFD est inscriptible, et l'on a :

$$\frac{SA}{SC} = \frac{SF}{SD}.$$

Sur la seconde nappe, prenons SF′ = SF, SD′ = SD.

On aura : $$\frac{SA}{SC} = \frac{SF'}{SD'}.$$

Donc la section D′E′F′ est parallèle à ABC ; par suite, elle est circulaire ainsi que ABC.

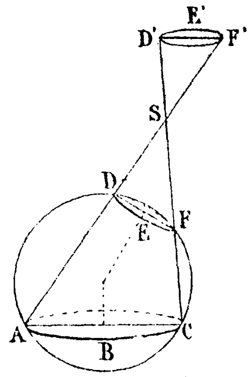


Fig. 1243.

Or, les sections DEF, D′E′F′ sont symétriques par rapport au plan mené par S, perpendiculairement à la bissectrice ASC.

Donc la section antiparallèle DEF est circulaire.

*Remarques.* 1° La base ABC et toute section antiparallèle DEF appartiennent à une même sphère.

2° Le théorème ci-dessus se démontre de plusieurs manières différentes; on peut aussi le déduire du théorème suivant (n° 1955, *Remarque*) ; mais aucune démonstration n'est aussi simple que celle qu'on vient d'indiquer.

**Note.** On peut voir *Cosmographie,* par F. J., n° 70.

**Théorème 781.**

**1955.** *Lorsqu'un cône entre dans une sphère par un cercle, il en sort par un autre cercle.*

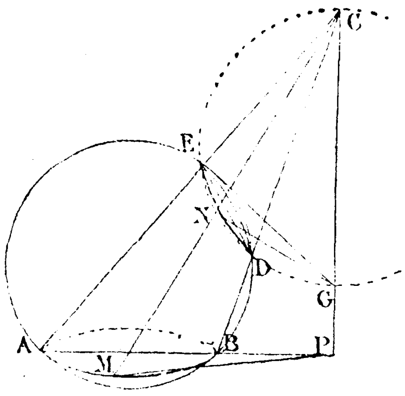



Fig. 1244.

Soit le cône ABC ayant pour base le cercle AMB de la sphère donnée. Il faut prouver que la courbe de sortie DNE est un cercle.

Du sommet B, abaissons une perpendiculaire CP sur le plan de la base, menons le diamètre AB, qui passe par le pied P.

Dans le plan ACP, menons EG perpendiculaire à CE. Enfin, soit CM une génératrice quelconque et N le point où elle coupe la sphère.

1° Le théorème des sécantes issues d'un même point étant appliqué à la sphère donne :

$$CM \cdot CN = CA \cdot CE.$$

Mais les triangles rectangles semblables CAP, CGE donnent :

$$CA \cdot CE = CP \cdot CG;$$

donc $$CM \cdot CN = CP \cdot CG.$$

Donc les triangles CMP, CGN sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; mais l'angle CPM est droit, car CP est perpendiculaire au plan de la base ; donc l'angle CNG est aussi droit.

2° Les points E, N, D appartiennent donc à la sphère décrite sur CG comme diamètre. Ainsi la courbe de sortie est la courbe d'intersection de deux sphères ; *or cette courbe est un cercle* (G., n° 548) ; donc...

*Remarque.* On a aussi $CE \cdot CA = CB \cdot CD$ ; ainsi le cercle END est la section antiparallèle du cône CAMB ; *donc la section antiparallèle du cône oblique à base circulaire est un cercle.*

**Théorème 782.**

**1956.** *Par deux cercles d'une même sphère, on peut faire passer deux cônes ayant ces cercles pour sections parallèles ou antiparallèles.*

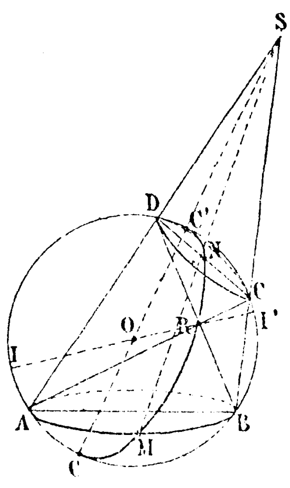



Fig. 1245.

Par les centres des deux cercles et par celui de la sphère on peut faire passer un plan ABCD, et ce plan est perpendiculaire à chaque cercle ; car, en vertu des constructions faites pour la démonstration d'un théorème connu (G., n° 543), la ligne qui joint le centre de la sphère au centre d'un petit cercle est perpendiculaire à ce petit cercle. Pour représenter plus facilement cette figure, prenons ABCD pour plan principal ; AB et CD sont les diamètres des cercles donnés.

Menons ADS, BCS et ARC, BRD.

S et R sont les sommets des deux cônes.

En effet, pour S par exemple, le cône SAB doit sortir de la sphère par un cercle (1955) ayant pour diamètre DC, et dont le plan est perpendiculaire au plan SAB ; donc la courbe de sortie ne diffère point du cercle donné CD.

**1957.** *Remarque.* Toute génératrice SNM donne des points correspondants, car les cordes AM, DN sont antiparallèles. On peut le démontrer directement, car on a : $SM \cdot SN = SA \cdot SD$ à cause de la sphère.

On peut encore dire : le plan ASM coupe la sphère suivant un cercle dans lequel le quadrilatère AMND est inscrit ; donc AM et DN sont antiparallèles.

Ainsi, pour avoir des points antihomologues M, N, il suffit de mener une génératrice quelconque SNM. Pour l'étude des cercles tracés sur la sphère, on a recours aux *centres de similitude* C, C', et I, I'. (Voir ci-après, n° 1962.)

### Théorème 783.

**1958.** *Lorsque la base d'une pyramide est inscriptible, toute sphère circonscrite à cette base coupe les arêtes de la pyramide en des points qui sont les sommets d'un polygone plan inscriptible.*

En effet, soient A, B, C, D... les sommets du polygone de base ; A', B', C', D'... les points où les arêtes SA, SB... sont coupés par la sphère ; ces points appartiennent à la circonférence de la courbe de sortie du cône qui aurait S pour sommet et le cercle circonscrit à ABCD... pour base ; donc les points A', B', C'... sont les sommets d'un polygone plan inscriptible.

### Théorème 784.

**1959.** *Lorsque, par deux points* A *et* B *donnés sur une sphère, on fait passer une série de cercles qui coupent un cercle donné, tous les grands cercles qui passent par les deux points d'intersection de chaque cercle variable avec le cercle fixe se coupent suivant un même diamètre.*

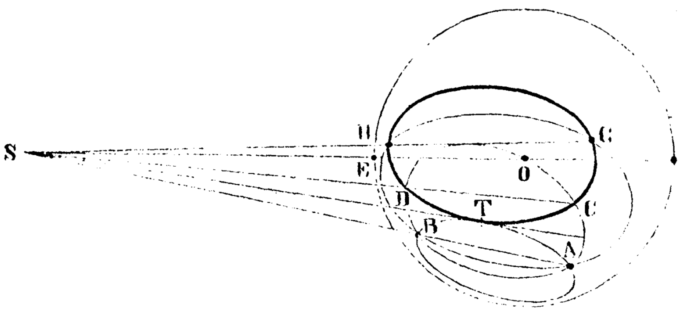



Fig. 1246.

Soit CDGH le cercle donné et CD la corde d'intersection d'un des cercles décrits.

Les deux droites AB, CD situées dans le plan du cercle ABCD se coupent en un certain point S.

1° Prouvons que toute autre corde commune GH passe par ce même point.

A cause de la sphère ou du cercle ABCD, on a :

$$SA \,.\, SB = SC \,.\, SD.$$

Joignons le point S au point G ; soit H le point où SG rencontre le cercle BAG et H′ celui où elle rencontre le cercle DCG ; on aura :

$$SG \,.\, SH = SA \,.\, SB = \text{donc } SC \,.\, SD = SG \,.\, SH' ;$$

donc H et H′ se confondent.

2° Joignons S au centre O de la sphère ; les plans menés par SEE′ et par chaque corde commune donnent des grands cercles EBAE′, EDCE′, EHGE′ qui passent par les points d'intersection et ont EE′ pour diamètre commun.

**1960.** Corollaire. *Lorsqu'un cercle* ATB *est tangent au cercle* HTG, *la tangente commune passe par le point* S *d'intersection des cordes communes, et le grand cercle* ETE′ *est tangent aux cercles* ATB *et* CTB.

### Théorème 784. — I.

**1961.** *Même théorème* (n° 1959), *quand les deux points* A *et* B *n'appartiennent pas à la surface sphérique.*

Soit S le point où la droite AB coupe le plan du cercle donné ; tout plan mené par ABS coupe la sphère suivant un cercle, et l'intersection de ce plan par le plan du cercle donné passe par le point S, commun aux deux plans, et n'est autre chose que la corde commune aux deux cercles. Donc...

### Théorème 785.

**1962.** *Deux cercles quelconques d'une même sphère admettent des centres de similitude, et tous les grands cercles menés par un des centres de similitude déterminent sur les cercles donnés des couples de points correspondants, tels que les droites qui les joignent deux à deux passent par un même point.*

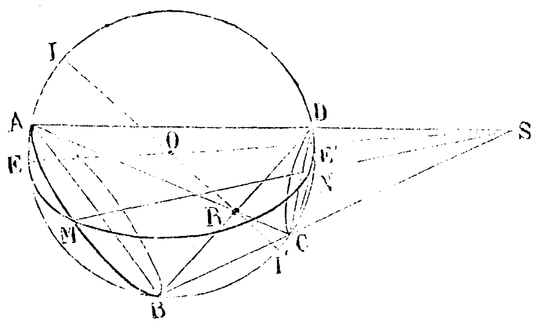



Fig. 1247.

Soit S le sommet extérieur du cône qui passe par les deux cercles. Joignons ce sommet S au centre O de la sphère. Par définition, les points E, E′ sont les *points externes* de similitude.

Tout grand cercle mené par EE′ détermine des points correspondants.

En effet, si une génératrice quelconque SNM coupe les circonférences données en M et en N, on a, à cause de la sphère :

$$SM \,.\, SN = SE \,.\, SE' ;$$

donc les quatre points E, M, N, E′ appartiennent à un même grand cercle.

*Réciproquement.* 1° Tout grand cercle EME′ détermine deux points M, N tels que la droite MN passe par un point fixe S.

2° Les cordes AM, DN sont antiparallèles (n° 1957).

Si les génératrices SA, SM se rapprochent indéfiniment, les sécantes AM, DN antiparallèles auront pour limites les tangentes aux cercles donnés en M et N ; donc ces tangentes aux deux cercles en M et N sont antiparallèles par rapport à SNM. On prouverait de même que les tangentes en M et N au grand cercle EMNE' sont antiparallèles ; on sait d'ailleurs que cela a toujours lieu pour un même cercle par rapport à la corde MN des contacts.

3° L'angle des tangentes en M égale l'angle des tangentes en N (n° 241) ; *donc le grand cercle coupe les cercles donnés sous un même angle.*

*Remarque.* Le diamètre IORI' détermine les *centres internes* I et I' de similitude.

**1962 a. Note.** En 1853, dans les *N. A.*, P. 113, A. Mannheim, alors lieutenant d'artillerie, depuis professeur à l'École Polytechnique et colonel (mort en 1906, âgé de soixante-quinze ans), a publié un bel article sur le *Lieu des centres des circonférences coupant sous des angles égaux trois circonférences données.*

Il considère d'abord deux petits cercles de la sphère et énonce les théorèmes précédents : n^os 1956, 1959, 1962, et passe des cercles de la sphère aux cercles d'un même plan à l'aide de la projection stéréographique (n° 244).

**Théorème 785 .— I.**

**1962 b.** *L'intersection de deux surfaces de révolution, d'un cône et d'un cylindre, lorsque l'axe du cône est une génératrice du cylindre, appartient à une sphère.* (Bulletin de Sciences Mathématiques et Physiques élémentaires de M. L. Gérard, 1898-1899, n° 4, p. 60, n° 464.)

**Théorème 785. — II.**

**1962 c.** *Lorsqu'un point* M, *placé sur une sphère de centre* O, *en un point* A *de l'équateur, se meut sur le méridien* AP *avec une vitesse uniforme, et qu'en même temps le méridien* AP *tourne autour de l'axe* PO *avec la même vitesse, la projection de la trajectoire, sur le plan de l'équateur, est un cercle ayant* AO *pour diamètre.*

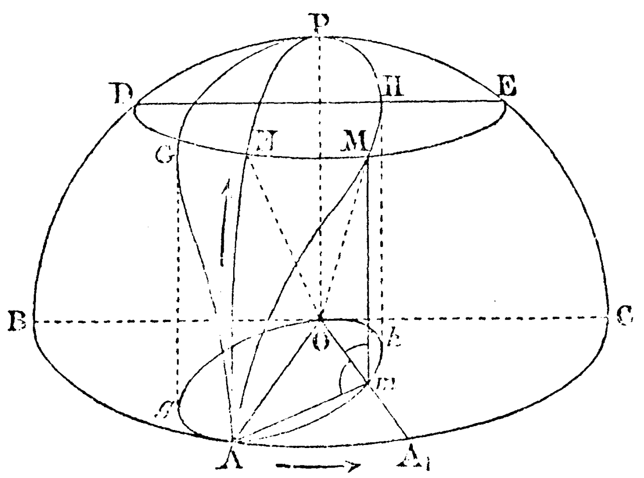



Fig. 1248.

En effet, soit $m$ la projection horizontale du point mobile M, soit $POA_1$ la nouvelle position du méridien initial PNA ; l'arc équatorial $AA_1$ égale l'arc AN décrit sur le méridien mobile par le point M, puisque les deux vitesses sont égales ; donc les triangles $MmO$, $AmO$ sont égaux, car le côté $mO$ est commun, le côté $MO = AO$, et l'angle $AOA_1 = AON = MOA_1$ ; ainsi le triangle $AmO$ est rectangle en $m$

de même que M$m$O ; donc le lieu de la projection $m$ de la trajectoire sur le plan de l'équateur est le cercle décrit sur AO comme diamètre.

**1962 d. Note.** 1° On retrouve la question bien connue de l'épure du *problème de Viviani* (*Exercices de Géométrie descriptive*, n° 1153). Mais la projection de la courbe dont AGPHA est la moitié, sur le méridien du profil ANP, est un arc de parabole, et la projection de la même courbe sur le plan du méridien principal est la courbe connue actuellement sous le nom de *Lemniscate de Gérono*.

2° La question ci-dessus, complétée d'ailleurs, a été proposée pour le concours d'admission à l'École Polytechnique en 1904, et résolue d'une manière remarquable par M. PHILBERT DU PLESSIS (*N. A.*, 1904, p. 257).

## Triangles sphériques.

### Théorème 786.

**1963.** *Dans tout triangle sphérique, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle, et réciproquement.*

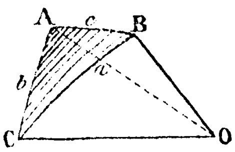


Fig. 1249.

Considérons le trièdre central OABC. Si l'on a $a > c$, on a aussi la face BOC > BOA, et par suite (n° 1781), le dièdre OA > OC ou l'angle A > C.

Pareillement, donner l'angle A > C, c'est donner le dièdre OA > OC. On en conclut la face BOC > BOA, d'où l'arc BC > BA...

Donc, *dans tout triangle sphérique...*

**1963 a. Note.** Le théorème relatif à l'aire du triangle sphérique (G., n° 607) a été énoncé par ALBERT GIRARD, d'Amsterdam, en 1629; mais la démonstration n'est pas rigoureuse; le théorème devrait être attribué, d'après LAGRANGE, à CAVALIERI, qui l'a donné et démontré en 1632.

La considération du *triangle polaire* ou *triangle supplémentaire* d'un triangle sphérique donné est due à SNELLIUS en 1627.

Avant lui, en 1626, GIRARD, et même VIÈTE, mort en 1603, avaient déjà considéré un triangle ayant certaines relations avec le triangle donné; mais le *triangle réciproque* de Viète n'offre pas tous les avantages qu'on retire du *triangle polaire*. (*Aperçu historique*, pages 54 et 546, et *N. A.*, 1855, page 152, *note biographique*, par PROUHET.)

### Théorème 786. — I.

**1964.** *Dans tout quadrilatère sphérique circonscrit à un cercle, la somme de deux côtés opposés égale la somme des deux autres côtés.*

Le quadrilatère est formé par quatre arcs de grand cercle, il est circonscrit à un petit cercle.

La démonstration est analogue à celle du théorème connu du quadrilatère rectiligne (n° 744) ; car les arcs de grand cercle, issus d'un même point et tangents au même petit cercle, sont égaux.

### Théorème de Gergonne 787.

**1965.** *Un quadrilatère sphérique est circonscriptible lorsque la somme de deux côtés opposés égale celle des deux autres côtés.*

(*Annales de Mathématiques*, t. V, année 1814-1815, p. 384, et t. VI, p. 49, solution par J.-B. DURRANDE.)

Le théorème se démontre par la réduction à l'absurde, en procédant comme en géométrie plane (nº 745).

*Remarque*. Le *théorème de Gergonne* est le corrélatif du *théorème de Guéneau d'Aumont* (nº 1967). De l'un on passe à l'autre à l'aide du triangle polaire supplémentaire.

Ainsi, admettons qu'on ait un quadrilatère ayant pour côtés les arcs $a$, $b$, $c$, $d$ tels que $a+c=b+d$. On en déduira pour le quadrilatère polaire supplémentaire $A'+C'=B'+D'$.

En effet,

$A'=180^\circ-a;\quad C'=180^\circ-c;\quad B'=180^\circ-b\quad$ et $\quad D'=180^\circ-d.$

Or $\qquad 180^\circ-a+180^\circ-c=180^\circ-b+180^\circ-d,$

car $\qquad a+c=b+d;$

donc $\qquad A'+C'=B'+D'.$

### Théorème de Fuss 788.

**1966**. *Quelle que soit la base* AB *d'un triangle sphérique* ABC, *le lieu du troisième sommet* C *est un grand cercle lorsque la somme des arcs latéraux est une demi-circonférence.*

On peut recourir à l'emploi des figures symétriques.

(Voir *Méthodes*, nº 149.)

**1966 a. Note**. Le lieu du sommet C d'un triangle sphérique ABC dont la base AB est fixe, et dont la somme des arcs AC, BC est constante, mais diffère d'une demi-circonférence, a été examiné par Fuss et nommé *Ellipse sphérique.* (Pour cette courbe, voir ci-après nº 2243. D'après Magnus, *Annales de Gergonne*, t. XVI, 1825-1826, p. 38.)

### Théorème de Guéneau d'Aumont 789.

**1967**. *Dans tout quadrilatère sphérique inscrit au cercle, la somme de deux angles opposés est égale à la somme des deux autre angles.*

(Voir *Méthodes*, nº 160.)

**Note**. Guéneau d'Aumont, professeur, secrétaire et conservateur de l'observatoire de Dijon, a publié dans les *Annales de Gergonne,* tome XII, 1821-1822, p. 269, un article sur les quadrilatères rectilignes ou sphériques inscrits au cercle.

### Théorème 790.

**1968**. *Lorsqu'un triangle sphérique* ABC *est inscrit à un cercle, et que sa base* AB *est fixe, tandis que le troisième sommet* C *parcourt le petit cercle, la somme des angles à la base diminuée de l'angle du sommet est une quantité constante.*

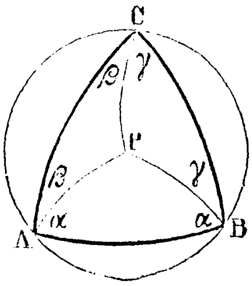


Fig. 1250.

Par le centre P du cercle circonscrit et par chaque sommet, faisons passer des arcs de grand cercle.

Le triangle donné se trouve divisé en trois triangles isocèles, car

$$AP=BP=CP.$$

Or $\quad A+B-C=\alpha+\beta+\alpha+\gamma-\beta-\gamma=2\alpha$ quantité constante.

### Théorème R. 790. — I.

**1968 a.** *Lorsque* $A + B - C$ *est une quantité constante, et que la base* AB *est fixe, le lieu du sommet* C *est la circonférence circonscrite* ABC.

### Théorème de Lexell 791.

**1969.** *Dans un triangle sphérique* ABC, *dont la base* AB *est fixe et l'aire constante, tandis que le sommet* C *est mobile, le lieu du troisième sommet* C *est un petit cercle qui passe par les points* A′ *et* B′ *diamétralement opposés aux sommets fixes* A *et* B.

*Démonstration de Steiner.* Soit $A + B + C - 2d = T$ quantité constante. (G., nº 606.)

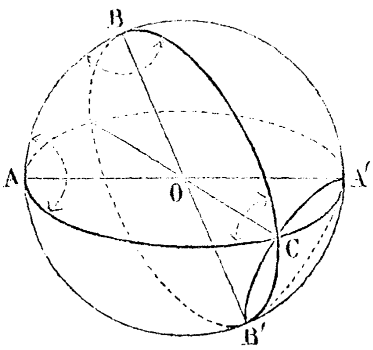


Fig. 1251.

Il suffit de démontrer que $A' + B' - C$ est une quantité constante, car on sait que dans ce cas le lieu du sommet est le petit cercle A′B′C (nº 1968).

Or les angles A et A′ sont supplémentaires, de même $B + B' = 2d$; donc la formule donnée devient :

$$2d - A' + 2d - B' + C - 2d = T;$$

d'où $A' + B' - C = 2d - T$ quantité constante.

Donc le lieu du sommet est le petit cercle A′B′C.

Remarque. *Lorsqu'on a deux petits cercles égaux et parallèles, et que deux points* A *et* B *sont donnés sur l'un d'eux, tandis que le troisième point* C *est mobile sur l'autre petit cercle, les arcs de grand cercle* AC, BC *déterminent un triangle* ACB *dont l'aire est constante.*

En effet, si l'on prend sur le second petit cercle un arc CD égal à AB, le parallélogramme ABCD est évidemment constant, quelle que soit la position du point mobile C; or le triangle est la moitié du parallélogramme.

De cette remarque on peut déduire une seconde démonstration du *théorème de Lexell.*

**Note.** Lexell, savant astronome russe (1740-1784). Ses recherches sur les cercles de la sphère sont consignées dans le tome V (année 1787) des *Actes de Saint-Pétersbourg.* (*Aperçu historique,* page 236.)

### Théorème 792.

**1970.** *Des sommets* A, B, C, D *d'un quadrilatère sphérique comme pôles, on décrit des arcs de grand cercle terminés aux côtés du quadrilatère, prolongés dans le même sens; l'aire de la figure ainsi obtenue correspond à la moitié de la surface de la sphère.* (*N. A*, 1864, p. 454.)

Soient A′, B′, C′, D′ les angles extérieurs et supplémentaires des angles donnés A, B, C, D; représentons par S l'aire du quadrilatère et par S′ celle des quatre triangles déterminés par la construction indiquée ci-dessus.

En prenant pour unité de surface le triangle sphérique trirectangle, et l'angle droit pour unité d'angle, la mesure de la surface d'un quadrilatère sphérique égale la somme des angles moins quatre droits; donc

$$S = A + B + C + D - 4d. \quad \text{(G., n° 607, 3°.)} \quad (1)$$

Mais le triangle formé par l'arc décrit du sommet A pris pour pôle, par un côté du quadrilatère et par le prolongement d'un autre côté adjacent au premier, est birectangle, puisque A est le pôle du côté opposé. L'angle au sommet est représenté par $A'$, et il est le supplément de A.

L'aire du triangle est simplement représentée par $A'$.

Donc $$S' = A' + B' + C' + D'. \quad (2)$$

En additionnant (1) et (2), on trouve :

$$S + S' = A + A' + B + B' + C + C' + D + D' - 4 \text{ droits}.$$

Mais $$A' = 2d - A, \quad B' = 2d - B, \text{ etc.};$$

donc $$S + S' = 4d.$$

Ainsi l'aire totale de la figure est égale à quatre triangles trirectangles, c'est-à-dire à la moitié de la sphère.

**Problème 792. — I.**

1971. *Même question pour un polygone sphérique d'un nombre quelconque de côtés.*

L'aire est encore exprimée par 4; elle égale donc $2\pi R^2$; car cette aire est indépendante du nombre de côtés du polygone considéré. (GERONO, *N. A.*, 1864, p. 455.)

## Inversion dans l'espace.

**Théorème 793.**

1972. *La figure inverse d'une sphère par rapport à un point de cette surface pris pour origine, est un plan perpendiculaire au diamètre mené par l'origine.*

(Voir *Méthodes*, n° 240; il en est de même pour plusieurs des exercices suivants.)

**Théorème 794.**

1973. *La figure inverse d'un plan, par rapport à un point extérieur à ce plan, est une sphère qui passe par l'origine, et dont le diamètre correspondant est perpendiculaire au plan donné.*

**Théorème 795.**

1974. *La figure inverse d'une sphère, par rapport à un point non situé sur la surface, est une autre sphère, et l'origine est un centre de similitude pour les deux sphères.*

### Théorème 796.

**1975.** *Dans les deux figures inverses, les angles correspondants sont égaux.*

(Voir *Méthodes*, n° 241.)

### Théorème 797.

**1976.** *L'inverse d'un cercle, par rapport à un point non situé dans son plan, est un cercle.*

(Voir *Méthodes*, n° 242.)

### Théorème de Chasles 798.

**1977**. *Le centre de la circonférence obtenue par la projection stéréographique d'un cercle d'une sphère est la projection stéréographique du sommet du cône circonscrit à la sphère, suivant le cercle donné.*

(Voir *Méthodes*, n° 245.)

### Théorème 799.

**1978.** *Tout cercle de la sphère qui passe par l'origine a une droite pour inverse; tout autre cercle a un cercle pour projection stéréographique.*

### Théorèmes de Dupuis 800.

**1979.** *Lorsqu'une sphère de rayon variable est tangente à trois sphères fixes, le lieu des points de contact sur chaque sphère fixe est un cercle.* (*Correspondance de l'École Polytechnique,* t. I, p. 19.)

Soient trois sphères et A, B, C les centres des grands cercles que déterminerait le plan mené par les centres de ces trois sphères.

Afin de rendre intuitive la détermination du lieu, transformons, par inversion, les trois sphères données en trois sphères ayant leurs centres respectifs en ligne droite. Pour cela, déterminons le centre radical O des trois grands cercles A, B, C (G., n° 837; E. de G., n° 1481), et décrivons le cercle O qui coupe orthogonalement les trois cercles donnés.

En prenant un point quelconque D sur le cercle auxiliaire et une puissance d'inversion quelconque $k^2$, la figure inverse du cercle O sera une droite $xy$ perpendiculaire au rayon OD et telle que

$$Db \,.\, 2DO = k^2.$$

Les cercles A, B, C ont pour inverses des cercles $a$, $b$, $c$ dont les centres sont sur $xy$, car la transformée du cercle orthogonal OD doit couper orthogonalement les trois cercles $a, b, c$; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la droite $xy$ passe par les centres respectifs de ces cercles.

En résumé, les sphères ayant pour centres respectifs A, B, C ont pour inverses trois sphères $a$, $b$, $c$ ayant les centres en ligne droite.

Toute sphère tangente aux trois premières a pour inverse une sphère tangente aux trois dernières, et réciproquement; or toutes les sphères tangentes extérieurement aux sphères $a$, $b$, $c$ sont évidemment égales entre elles.

Pour chacune d'elles, les trois points de contact et la ligne des centres $xy$ sont dans un même plan. — Dans le plan des centres, S est le centre du grand cercle $egi$ d'une de ces sphères; l'enveloppe des sphères égales tangentes aux sphères $a$, $b$, $c$ est un tore ayant $xy$ pour axe.

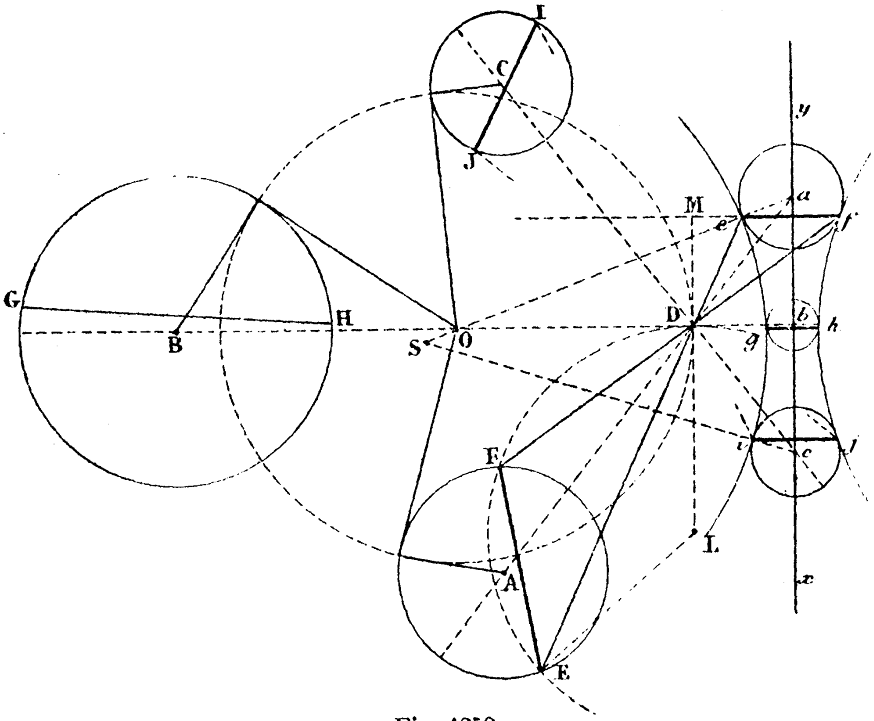



Fig. 1252.

La courbe de contact de ce tore et de la sphère $a$, ou bien le lieu géométrique sur la sphère $a$ des points de contact des sphères tangentes aux sphères $a$, $b$, $c$, est un cercle dont $ef$ est le diamètre et dont le plan est perpendiculaire à la ligne $xy$ des centres.

Il en est de même pour $b$ et $c$.

La figure inverse du cercle $ef$ est un cercle EF de la sphère A. En effet, la figure inverse du plan mené par $ef$ perpendiculairement au plan des centres A, B, C est une sphère passant par l'origine D et dont le rayon DL est donné par la relation $2DL \cdot DM = k^2$, et l'intersection des sphères A, L est un cercle EF dont le plan est perpendiculaire au plan des centres A, B, C, L. La courbe inverse du cercle, dont $ef$ est le diamètre, doit se trouver à la fois sur la sphère A, inverse de $a$, et sur la sphère L, inverse du plan mené par $fe$M; donc le cercle projeté suivant le diamètre EF est l'inverse du cercle projeté suivant $ef$.

Il en est de même pour les sphères B et C.

**1979 a.** Remarque. *Le lieu, sur chaque sphère, dans le cas le plus général, se compose de quatre cercles.* En effet, aux trois cercles $a$, $b$, $c$ extérieurs l'un à l'autre, on peut mener quatre groupes de deux cercles égaux tangents aux cercles donnés, ce qui donne lieu à quatre tores comme surface enveloppe des sphères tangentes à $a$, $b$, $c$. Ainsi $egi$ et $fhj$ constituent le groupe de deux cercles égaux tangents extérieurement; deux autres cercles égaux peuvent être tangents extérieurement à $a$, $c$ et intérieurement à $b$, etc.

Chaque groupe donne lieu à un cercle tel que $ef$, et par suite, au cercle EF.

Ainsi quand les trois sphères A, B, C sont extérieures deux à deux, *le lieu des points de contact sur chaque sphère se compose de quatre cercles dont les plans sont perpendiculaires au plan* ABC. Ces quatre plans se coupent suivant une même droite, car les quatre cercles tels que $ef$, dont les quatre cercles de la sphère A sont les inverses, sont perpendiculaires à $xy$.

**1979 b. Note.** La démonstration du *théorème de Dupuis* par l'inversion est due à M. A. MANNHEIM. (*N. A.*, 1860, page 67.)

Pour se rendre compte de la puissance de la méthode d'inversion comme moyen d'investigation, il suffit de lire quelques articles des *Nouvelles Annales de mathématiques*, et, entre autres, celui que nous venons de citer. L'auteur de la *Géométrie cinématique* y traite de la *cyclide* ou surface enveloppe des sphères tangentes à trois sphères données. Chaque propriété du tore dont la première surface est la transformée par inversion fait connaître une propriété correspondante de la cyclide. Cette remarquable étude se lit avec facilité et se retient de même, non seulement à cause du mode heureux de l'exposition, mais aussi par suite des avantages inhérents à la méthode d'inversion.

La cyclide a d'abord été nommée et étudiée par DUPIN. Les sections du tore ont été étudiées par M. VILLARCEAU et par M. DARBOUX.

* DUPUIS, ancien élève de l'École Polytechnique, mort au commencement du XIX$^e$ siècle. (D'après M. CATALAN et les *N. A.*, 1890, p. 98.)

* CH. DUPIN (1784-1873), membre de l'Académie des sciences, auteur des *Développements de Géométrie*, ouvrage où se trouvent d'intéressants théorèmes relatifs au rayon de courbure de l'ellipse et l'étude de la cyclide.

* YVON VILLARCEAU, astronome; on lui doit le théorème suivant: *Le plan bitangent au tore coupe cette surface suivant deux cercles.* (Voir *Exercices de Géométrie descriptive*, 4$^e$ édition, n$^o$ 942.)

**Théorèmes d'Archimède 800. — I.**

**1979 c.** 1$^o$ *Un cylindre droit à base circulaire est inscrit dans un prisme droit de base carrée et de même hauteur qu'il touche suivant quatre droites parallèles à ses arêtes.*

*Par l'un des côtés du carré, base supérieure du prisme, et par le diamètre parallèle de la base inférieure du cylindre, on mène un plan sécant. Le volume de l'onglet cylindrique compris entre le plan sécant, la base inférieure du cylindre et la surface cylindrique est le sixième du volume du prisme.*

2$^o$ *Le volume compris entre deux cylindres droits à base circulaire, inscrits dans un cube qu'ils touchent chacun suivant quatre droites parallèles aux arêtes, les axes des deux cylindres étant perpendiculaires, est égal aux deux tiers du volume du cube.*

Résoudre ces questions sans recourir au calcul intégral. (*Mathesis*, 1907, p. 232, questions 1636 et 1637.)

Diverses solutions ont été données par MM. VERHENGEN, H. LEZ, BAIDAF de Jassy et F. G.-M. (*Mathesis*, 1908, pp. 25 à 31.)

Voici celles du dernier auteur indiqué :

*Premier théorème.* 1° Soient $h$ la hauteur, R le rayon du cylindre, G le centre de gravité du demi-cercle de l'onglet.

Le volume d'un tronc cylindrique s'obtient en multipliant la section droite par la parallèle menée par G aux génératrices du cylindre; or la distance de G au centre O du demi-cercle est donnée par

$$OG = \frac{4R}{3\pi}; \qquad \text{(G., n}^{os}\text{ 898 et 901)}$$

d'où la parallèle menée par G, ou $GG' = \frac{4h}{3\pi}$.

$$V = \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{4h}{3\pi}, \quad \text{ou} \quad V = \frac{4R^2h}{6}.$$

Ainsi *l'onglet est le sixième du prisme circonscrit* $4R^2h$.

2° On pourrait traiter la question par la *méthode des sections comparées* (G., n° 971) que nous emploierons en second lieu pour le deuxième théorème.

3° La *méthode de sommation* (G., n° 943) est d'un emploi facile pour démontrer le théorème proposé.

**1979 d.** *Second théorème.* 1° Le plan mené par les axes des deux cylindres coupe le solide commun aux cylindres suivant un carré; les deux plans menés par chaque diagonale de ce carré et par deux arêtes du cube, divise le solide en quatre onglets cylindriques; chacun d'eux est équivalent à l'onglet de la question précédente, donc

$$V = \frac{4d^3}{6} \quad \text{ou} \quad V = \frac{2d^3}{3},$$

$d$ étant le diamètre du cercle inscrit dans le carré.

2° Lorsque tout plan parallèle à un plan donné coupe deux solides donnés suivant des sections qui sont entre elles dans un rapport constant, les volumes de ces solides sont entre eux dans ce même rapport. (G., n° 914.)

Or la sphère inscrite dans le solide commun aux deux cylindres et ce même solide sont coupés par tout plan parallèle au carré du plan des deux axes, suivant un cercle inscrit au carré correspondant; par suite, les volumes de la sphère et du solide étudié sont dans le rapport du cercle $\pi r^2$ au carré $4r^2$;

donc $$V = \frac{16r^3}{3}, \quad \text{ou} \quad \frac{2d^3}{3}.$$

3° On peut recourir utilement à la *méthode de sommation.* (G., n$^{os}$ 943 et suivants.)

**1979 e.** *Remarques.* 1° La moitié de la surface du solide commun au-dessus du carré est une *voûte en arc de cloître* à base carrée; le volume compris entre cette voûte et le carré de base s'obtient en multipliant cette base $d^2$, par les $\frac{2}{3}$ de la hauteur demi-$d$. Il en est de même pour toutes les voûtes en arc de cloître quels que soient le polygone de base et la hauteur, lorsque la courbe directrice est une ellipse (G., n° 964).

2° Le *second théorème* peut recevoir une autre généralisation. Dans chaque face d'un parallélépipède quelconque, on inscrit une ellipse tangente aux côtés du parallélogramme, au milieu même de ces côtés; ces ellipses, égales deux à deux, servent de directrices aux génératrices d'un cylindre, les trois solides différents qu'on obtient en considérant ces cylindres deux à deux, sont équivalents entre eux; chacun d'eux est les deux tiers du parallélépipède.

3° En considérant le tétraèdre régulier et les quatre cônes de révolution inscrits ayant pour sommets respectifs un des sommets du tétraèdre, on arrive au théorème suivant : *Si on inscrit une ellipse dans chaque face d'un tétraèdre quelconque, de manière qu'elle soit tangente à chaque côté du triangle, au point milieu de chaque côté, les quatre cônes qui auraient pour bases ces ellipses et pour sommets le sommet opposé du tétraèdre sont équivalents entre eux.*

**1979 f. Note.** Les théorèmes précédents proposés par *Mathesis* en 1907, p. 232, questions 1636 et 1637, et bien d'autres analogues, se trouvent dans l'*Appendice aux Exercices de Géométrie* (nos 757, 767, 870). Ce petit ouvrage a été publié en 1877. Le savant M. MANSION, dans *Mathesis* (1908, p. 31), a bien voulu le mentionner en ces termes : « ... excellent *Appendice*, malheureusement épuisé. » Nous n'avons jamais songé à le réimprimer, bien qu'il s'y trouve des questions intéressantes, traitées d'une manière originale, par des procédés élémentaires; mais on ne s'occupe guère de la *Géométrie de la mesure;* d'ailleurs le calcul intégral donne des procédés généraux, d'une incomparable puissance, pour traiter des *quadratures* et des *cubatures*. Enfin les circonstances qui nous avaient conduit à traiter les questions qui ont provoqué l'*Appendice* aux *Éléments* et aux *Exercices de Géométrie*, édités par MM. MAME et POUSSIELGUE, ont beaucoup perdu de leur actualité. Ainsi les programmes de l'*Enseignement secondaire spécial* demandaient de trouver le volume, par des méthodes élémentaires, des segments d'*ellipsoïde*, d'*hyperboloïde*, de *paraboloïde;* or nous n'en connaissions pas, il fallut en chercher. D'autre part, les grands projets de M. FREYCINET pour la construction de plus de quatre mille kilomètres de voies ferrées, avaient fait ouvrir de nombreux bureaux pour le tracé des chemins de fer; or la jeunesse intelligente qui s'y pressait ne trouvait pas, dans les Traités classiques d'Algèbre et de Géométrie, la solution des multiples problèmes que soulève la pratique des travaux, notamment pour les *cubatures* si variées des travaux d'art : Les *appendices* eurent leur raison d'être, en fournissant des *méthodes* faciles à comprendre, simples à appliquer, et des *réponses* à un grand nombre de questions, qui embarrassaient les débutants. L'excellent M. GÉRONO avait critiqué les premiers essais, et avec raison selon nous, parce qu'il se plaçait uniquement au point de vue de la science, et *qu'il ignorait le but pratique à atteindre* (*N. A.*, 1874, p. 335); mais il se montra ensuite d'une grande bienveillance, et lui-même fit faire par M. DOSTOR le compte rendu très élogieux des *Éléments de Géométrie* (*N. A.*, 1876, p. 212-217).

### Problèmes divers 800. — II.

**1979 g.** *Déterminer le volume d'un onglet cylindrique quelconque.*

1° *Le cylindre est de révolution, mais le plan sécant coupe la section droite de base suivant une corde, autre que le diamètre.*

On procède comme précédemment (no 1979 c), mais on considère le centre de gravité du segment circulaire de base

$$OG = \frac{c^3}{6(rs - cp)}. \qquad \text{(G., n° 898.)}$$

2° *Le cylindre est à section droite elliptique.*

Ce cas se ramène au précédent, en considérant le segment circulaire correspondant du cercle principal.

3° *Le cylindre est oblique par rapport à sa base, et l'on ne connaît pas la section droite.*

La droite GG' parallèle aux génératrices du cylindre n'est plus la hauteur du tronc cylindrique, mais il suffit de la multiplier par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec la base.

4° *Voûte en arc de cloître quelconque.* On la considère comme composée de plusieurs onglets cylindriques étudiés précédemment.

5° *Voûte d'arête.* La voûte d'arête est le complément de la voûte en arc de cloître ; à l'aide des questions précédentes, on trouve facilement le volume d'une partie déterminée, comprise entre l'*intrados* et l'*extrados* de la voûte.

## Cônes. — Conoïdes. — Domoïdes

**1979 h. Cônes.** On peut appeler *cône* tout solide ayant une base plane, dont tous les points du périmètre sont joints par une droite à un même point nommé sommet.

*Le volume de tout cône s'obtient en multipliant la base par le tiers de la hauteur.*

On sait déterminer, par des moyens élémentaires, la surface latérale du cône droit à base circulaire et de la pyramide, *mais c'est tout,* car pour le cône oblique à base circulaire, ou le cône droit à base elliptique, on recourt à des moyens approximatifs.

**Conoïdes.** Nous ne considérerons que ceux dont la directrice rectiligne est parallèle au plan de la base. Le *conoïde* est un solide ayant une base plane et dont tous les points du périmètre sont joints à la directrice par une droite parallèle à un plan directeur. (Voir au besoin les *Exercices de Géométrie descriptive.*)

*Le volume de tout conoïde s'obtient en multipliant la base par la moitié de la hauteur.* Aucun procédé élémentaire ne permet d'évaluer la surface latérale, sauf pour le prisme triangulaire, couché sur une de ses faces latérales, prise pour base du conoïde.

**Domoïdes.** Le *domoïde* est le solide engendré par une surface plane, limitée par une courbe ou par une ligne polygonale, et qui se meut en restant parallèle et semblable à elle-même, pendant qu'un de ses points décrit une droite, tandis que chaque point du périmètre décrit une courbe située dans le même plan que la droite considérée. *Exemple,* la sphère est le *domoïde* engendré par l'équateur dont le centre décrit le diamètre des pôles, tandis que chaque point du périmètre de cet équateur décrit un demi-méridien.

Si l'on remplace le cercle de l'équateur par le carré circonscrit, chaque point de contact décrira un demi-méridien, et les autres points du périmètre décriront une demi-ellipse ayant la ligne des pôles pour petit axe. On obtient ainsi le domoïde à base carrée, ayant pour directrice la moitié de la circonférence méridienne de la sphère considérée en premier lieu.

La base du *domoïde* peut être un polygone quelconque, ou une surface plane limitée par une courbe quelconque.

*Le volume de tout domoïde ayant pour directrice une demi-circonférence ou une demi-ellipse, s'obtient en multipliant la base par les deux tiers de la hauteur.*

Lorsque la base du domoïde est un polygone régulier, on nomme le solide *équidomoïde.*

Le volume compris entre une voûte en arc de cloître et le plan des naissances est la moitié d'un domoïde.

*Remarque.* On évalue facilement les cônes, conoïdes et domoïdes, soit par la *méthode de sommation*, soit par celle des *sections comparées*.

*Domoïde circonscrit à une sphère.* — On peut se borner à considérer un hémidomoïde circonscrit à un hémisphère, puisque la voûte en arc de cloître, que l'on rencontre fréquemment dans la pratique des travaux d'architecture, se rapporte à l'hémidomoïde; on a le théorème suivant :

*Quel que soit le polygone circonscrit à l'équateur de l'hémisphère, la surface domoïdale est à la surface sphérique dans le rapport du périmètre du polygone circonscrit à l'équateur de l'hémisphère.*

Exemple, pour le domoïde à base carrée, le rapport est de $8r$ à $2r\pi$, ou simplement de 4 à $\pi$. Les volumes sont dans le même rapport.

Le théorème précédent, *relatif à la surface*, ne s'applique qu'aux domoïdes circonscrits; quant aux inscrits, même *équidomoïdes*, il faut comparer le périmètre du polygone régulier considéré à la circonférence inscrite à ce polygone; ainsi, pour l'équidomoïde à base carrée inscrit à la sphère, la circonférence tangente inscrite au carré a pour rayon $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$; mais les procédés élémentaires ne permettent pas d'avoir la surface de l'ellipsoïde qui aurait cette valeur pour demi-petit axe tournant et $r$ pour demi-grand axe.

De même, pour la voûte en arc de cloître à base rectangulaire de côté $2a$ et $2b$, il faudrait avoir la surface de l'ellipsoïde à trois axes inégaux, $2r$, $2a$, $2c$.

**1979 i.** *Remarque.* 1° Pour directrice du domoïde on pourrait prendre l'hyperbole ou la parabole, comme on vient de considérer le cercle et l'ellipse. On n'a rien d'élémentaire pour la surface; quant au volume, il suffit de savoir évaluer les segments d'hyperboloïdes à une ou à deux nappes et les segments de paraboloïde elliptique. 2° L'axe de la sphère et la droite qui en tient lieu pour les équidomoïdes est du côté de la concavité de la circonférence (ou de l'ellipse) directrice; on nomme *équitrémoïdes* les corps engendrés d'une manière analogue aux domoïdes, lorsque l'axe est du côté de la convexité de la circonférence; par exemple, pour le cas le plus simple et le plus intéressant, l'équitrémoïde qui correspond à la sphère a pour surface latérale la surface engendrée par une demi-circonférence qui tourne autour de la tangente parallèle au diamètre qui joint ses extrémités.

Pour avoir la surface et le volume, il faut considérer le demi-tore qu'engendrerait le demi-cercle.

**1979 j. Note.** Les termes *domoïde*, *équidomoïde*, *équitrémoïde*, sont dus au comte Léopold HUGO, auteur de diverses études sur les formes géométriques cristallographiques. *N. A.* 1867, pp. 144 et 526. — 1873, p. 35, Compte rendu bienveillant, par HOUSEL. — 1875, p. 233, note de la Rédaction formulant des réserves. — Depuis, l'*I. du M.*, 1901, p. 276, n° 2223, a posé une question de Paul TANNERY sur la *Géométrie pan-imaginaire,* du même auteur. — Enfin M. E. FOURREY, dans ses très intéressantes *Curiosités géométriques*, ouvrage publié en 1907, a donné un beau paragraphe sur la *Géométrie hugodomoïdale* (pp. 319 à 326).

# LIEUX GÉOMÉTRIQUES

### Lieu 801.

**1980.** *Quel est le lieu des points également éclairés par deux lumières* A *et* B, *dont les intensités sont* i *et* i'? *On sait que la quantité de lumière reçue par un point donné est en raison inverse du carré de la distance du point considéré au foyer lumineux.*

Soient A et B les points lumineux donnés.

Les intensités lumineuses $i$, $i'$ sont représêntées par des nombres, et on peut prendre des droites AB et BC directement proportionnelles à ces grandeurs ; soit donc $\frac{AB}{BC} = \frac{i}{i'}$.

Pour un point quelconque L du lieu, on doit avoir :

$$\frac{i}{AL^2} = \frac{i'}{BL^2} \quad \text{ou} \quad \frac{AL^2}{BL^2} = \frac{i}{i'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{AL}{BL} = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{i'}};$$

donc, dans le plan, le lieu des points également éclairés est la circonférence MLN, lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes A et B égale le rapport connu $\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{i'}}$.

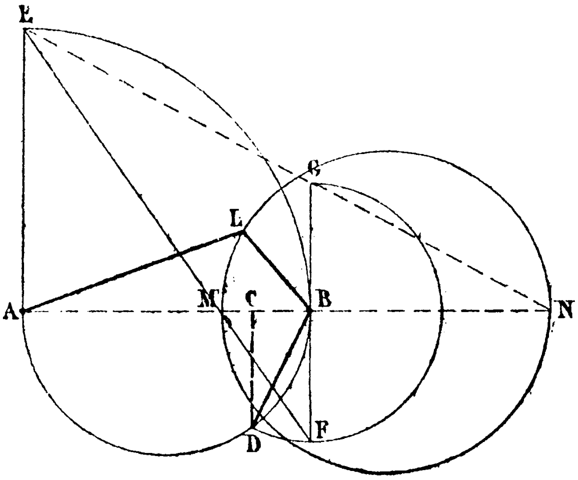



Fig. 1253.

Dans l'espace, le lieu demandé est la sphère engendrée par la rotation de la demi-circonférence MLN tournant autour de AB.

*Construction.* Il faut déterminer les points conjugués M, N, tels que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{i'}} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{BC}}.$$

Il faut chercher deux carrés qui soient entre eux dans le rapport $\frac{AB}{BC}$.

Décrivons la demi-circonférence ADB, élevons la perpendiculaire CD ; on aura :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB^2}{BD^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{BC}} = \frac{AB}{BD};$$

puis portons AB de A en E, BD de B en F et en G, et menons EMF, EGN ; on a (G., n° 304) les points demandés M et N.

### Lieu 802.

**1981.** *Une pyramide a pour base un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent au point* O. *On joint le sommet* S *au point* O. *Quel est le lieu des sommets* S, *tel que toute section perpendiculaire à* SO *donne un parallélogramme?*

Si le problème est résolu, les diagonales de la section perpendiculaire à SO * se coupent respectivement en parties égales ; c'est-à-dire que les

* Nous désignons par S un point quelconque du lieu dans l'espace, et la même lettre est affectée au point du lieu qui se trouve dans le plan même de la base ABCD.

segments AO, CO d'une diagonale doivent être vus sous des angles égaux. Il faut donc déterminer le lieu des points dont le rapport des distances aux points A et C est constant. Ce lieu est la circonférence OM, M étant le point conjugué de O par rapport aux points A et C. (G., n° 304.)

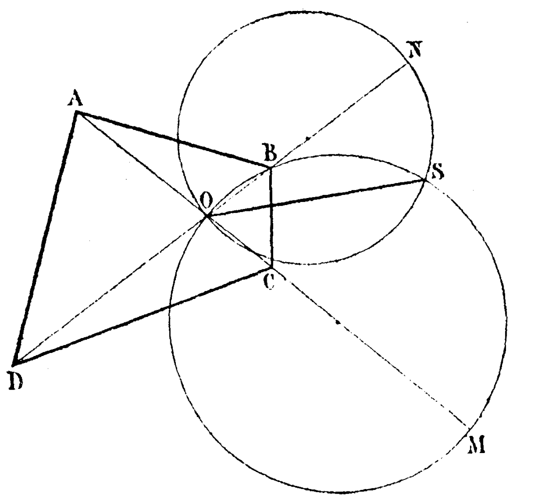


Fig. 1254.

Dans l'espace, le lieu est la sphère dont OM est le diamètre.

De même, N étant le conjugué harmonique de O par rapport aux points B et D, le lieu est la sphère de diamètre ON.

Les deux sphères se coupent suivant un cercle ayant OS pour diamètre ; donc *le lieu des sommets* S *est la circonférence décrite sur* OS *comme diamètre et située dans un plan perpendiculaire à celui du quadrilatère donné.*

*Remarque.* Toute pyramide quadrangulaire dont la base est un polygone convexe a une direction pour laquelle les sections sont des parallélogrammes (n° 1842) ; mais, dans le cas actuel, on demande que le parallélogramme ait son plan perpendiculaire à SO.

**1982.** *Autre solution.* On sait que tout plan parallèle au plan SEF, déterminé par les droites qui joignent le sommet aux points de concours E, F des côtés opposés, donne pour section un parallélogramme (n° 1842) ; donc, pour qu'un plan perpendiculaire à SO donne un parallélogramme, il suffit que SO soit perpendiculaire au plan ESF.

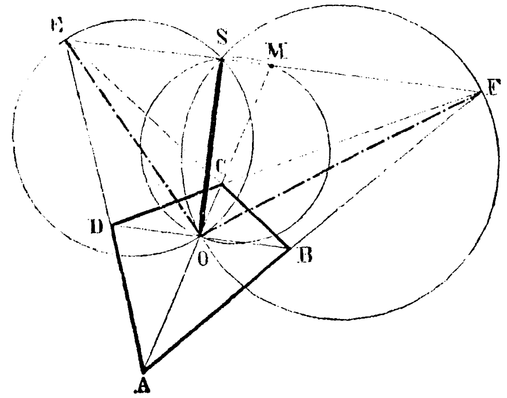


Fig. 1255.

Lorsque cette condition est remplie, la droite OS est perpendiculaire à SE et à SF ; donc le point S se trouve à la fois sur la sphère qui a OE pour diamètre et sur la sphère qui a OF pour diamètre.

Le lieu est donc la circonférence qui a OS pour diamètre et dont le plan est perpendiculaire au plan de la base de la pyramide.

**1983.** *Remarques.* 1° Les cercles décrits sur les diamètres OE, OF, se coupent au pied de la hauteur abaissée du point O sur la troisième diagonale EF du quadrilatère ; donc, *pour avoir le diamètre* OS *du lieu demandé, il suffit d'abaisser une perpendiculaire du point* O *sur* EF.

2° Le lieu pouvant être obtenu de deux manières différentes, il en résulte le théorème suivant : *Dans tout quadrilatère* ABCD, *les circon-*

*férences décrites sur les diamètres* OE, OF *et les circonférences décrites sur* OM, ON, *lieux des points des distances à rapport constant, se coupent en un même point de la troisième diagonale du quadrilatère complet.*

### Lieu 803.

**1984.** *Quel est le lieu des sommets des pyramides quadrangulaires qu'on peut couper suivant un rectangle?* (Voir n° 1981.)

C'est la sphère décrite sur la troisième diagonale EF prise pour diamètre, car alors les droites SE, SF, auxquelles les côtés de la section seront parallèles, sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Remarque. *Le point commun aux trois sphères décrites sur les côtés du triangle diagonal* OEF (fig. 1255 et 1256), *pris pour diamètres, est le sommet d'une pyramide qui peut donner des sections carrées.*

### Lieu 803. — I.

**1985.** *Pour que la section soit un losange, un carré?* (Voir n° 1981.)

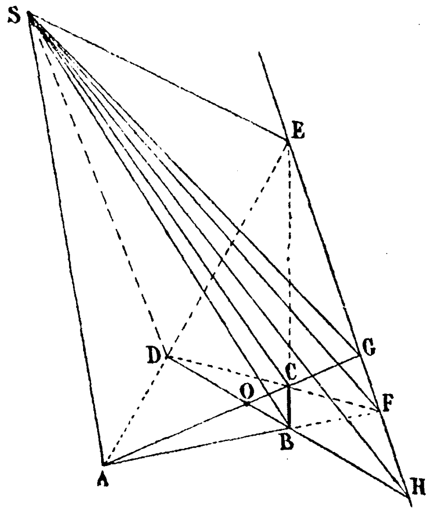


Fig. 1256.

1° Prolongeons les diagonales AC, BD jusqu'à la troisième diagonale EF (fig. 1256). Pour que la section soit un losange, il faut que les diagonales du parallélogramme se coupent à angle droit; donc les droites SH, SG doivent être rectangulaires entre elles. Tout point de la sphère décrite sur le diamètre GH pourra servir de sommet, et tout plan parallèle à SEF donnera un losange; car les diagonales seront rectangulaires, et la figure est d'ailleurs un parallélogramme, puisque les côtés seront deux à deux parallèles à SE, SF.

2° Pour avoir un carré, il faut que le sommet appartienne à la circonférence commune aux sphères décrites sur les diamètres EF et GH.

### Lieu 804.

**1986.** *Étant donnée une sphère de rayon* r, *trouver le lieu du sommet d'un trièdre dont les trois arêtes sont tangentes à cette sphère et dont les trois faces sont égales chacune à* 60°. (Concours général de 1878, 1re partie de la question proposée en philosophie, *N. A.*, 1868, page 215.)

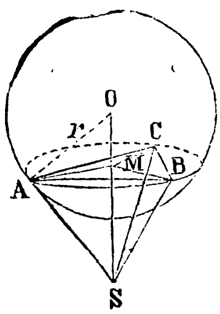


Fig. 1257.

Soient SA, SB, SC les trois arêtes tangentes; le tétraèdre SABC est régulier; donc

$$AB = AS, \text{ etc.}$$

La droite SO est perpendiculaire au plan de la section et passe par le centre M du triangle équilatéral ABC.

Le rayon $AM = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{AS}{\sqrt{3}}$.

Le triangle rectangle OAS donne :

$$AO \,.\, AS = AM \,.\, OS,$$

$$r \,.\, AS = \frac{AS}{\sqrt{3}} \,.\, OS, \quad \text{d'où} \quad OS = r\sqrt{3}\,.$$

Le lieu du point S est une sphère concentrique à la première, et ayant $r\sqrt{3}$ pour rayon.

### Lieu 804. — I.

**1987.** *Lieu du sommet du même trièdre, lorsque les trois faces sont tangentes à la sphère* (n° 1986).

Le triangle formé par les trois points de contact est équilatéral.

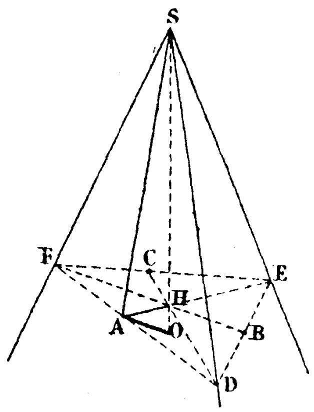


Fig. 1258.

Soit S le trièdre. Prenons à volonté

$$SD = SE = SF,$$

et les points milieux A, B, C des côtés du triangle équilatéral DEF peuvent représenter les points de contact. Soit SH la hauteur du tétraèdre régulier SDEF, tombant au centre des triangles équilatéraux ABC et DEF.

Dans le plan SAH, élevons à SA la perpendiculaire AO. Cette droite représente le rayon de la sphère inscrite.

Il suffit d'exprimer SO, distance du centre O au sommet S du trièdre, en fonction du rayon AO de la sphère.

Les triangles rectangles SAO, SHA sont semblables ; donc

$$\frac{SO}{AO} = \frac{SA}{HA} = \frac{AE}{AH} = \frac{3}{1},$$

car le triangle DEF est équilatéral ; donc la distance SO est le triple du rayon, et le lieu du point S est une sphère concentrique à la sphère donnée et ayant un rayon trois fois plus grand.

**1988. Lieu.** *On peut poser des questions analogues aux précédentes* (n°s 1986 et 1987), *en prenant un trièdre trirectangle.*

### Lieu 805.

**1989.** *Quel est le lieu géométrique des centres des sphères qui coupent orthogonalement trois sphères données ?*

C'est une perpendiculaire au plan des trois centres des sphères données, et menée par le centre radical des trois grands cercles que ce plan détermine.

## Lieu 806.

**1990.** *Quel est le lieu des centres des sphères qui coupent trois sphères suivant des grands cercles?*

C'est encore une perpendiculaire menée au plan des trois centres par le point de ce plan d'où l'on peut décrire un cercle qui coupe les trois grands cercles suivant un diamètre (nº 1482).

## Lieu 807.

**1991.** *On a deux cercles fixes de position, un point* M *de l'espace est pris pour sommet de deux cônes qui ont respectivement pour base chacun des cercles donnés; quel est le lieu des points* M, *lorsque la somme des volumes des cônes égale une quantité donnée* $\frac{\pi k^3}{3}$ ?

Soient $a$, $b$ les rayons des cônes, et $c$, $d$ les hauteurs ; on doit avoir

$$\frac{\pi a^2 c}{3} + \frac{\pi b^2 d}{3} = \frac{\pi k^3}{3},$$

ou simplement $$a^2 c + b^2 d = k^3.$$

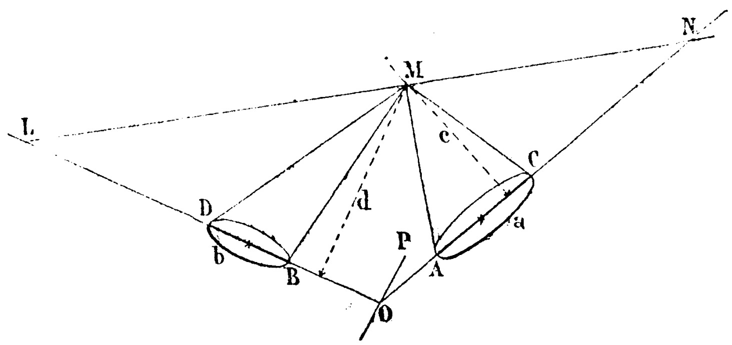



Fig. 1259.

Le problème revient à la question connue : *Trouver le lieu des points* M, *tel que les perpendiculaires* c *et* d, *abaissées de ces points sur les côtés d'un angle, étant respectivement multipliées par des quantités connues* $a^2$ *et* $b^2$, *aient une somme constante* $k^3$.

On sait que ce lieu est une droite LN facile à déterminer (nº 271). Le lieu dans l'espace est donc le plan mené par LMN, parallèlement à l'intersection OP des bases données.

*Remarques.* 1º Le lieu comprend un second plan symétrique du premier, par rapport au point O.

2º Les points du lieu situés dans les dièdres adjacents au dièdre LON correspondent à des cônes dont la différence égale $k^3$.

# PROBLÈMES

## Constructions graphiques.

### Problème 808.

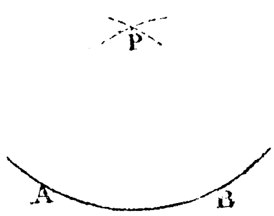



Fig. 1260.

**1992.** *Tracer sur une sphère un arc de grand cercle passant par deux points donnés* A *et* B.

A l'aide d'un compas sphérique, et avec une ouverture égale à la corde d'un quadrant, ou à $r\sqrt{2}$, ou $1,414r$, on décrit, des points A et B, des arcs qui déterminent en P le pôle de l'arc demandé AB.

### Problème 809.

**1993.** *Par un point donné* A *sur la sphère, mener un arc de grand cercle perpendiculaire à un autre arc donné* BC.

Du point A, avec une ouverture égale à $r\sqrt{2}$, on coupe l'arc donné BC; et du point obtenu C, avec la même ouverture, on décrit l'arc demandé BAP.

### Problème 810.

**1994.** *Par une droite* AB, *mener un plan tangent à une sphère de centre* C.

Par le centre C, il faut mener un plan perpendiculaire à AB. Ce plan coupe la droite en un certain point D, et la sphère suivant un grand cercle EFG.

Dans le plan auxiliaire et par le point D, il faut mener une tangente DE au grand cercle; le plan conduit par ADB et DE répond à la question.

En effet, il est perpendiculaire au rayon OE du point de contact, car OE est perpendiculaire à la tangente ED et à la droite que l'on mènerait par le point E parallèlement à AB.

*Remarque.* Quand la droite AB ne rencontre pas la sphère, il y a deux solutions; il n'y en a qu'une seule lorsque la droite est tangente, et aucune quand la droite coupe la sphère.

### Problème 811.

**1995.** *Par un point* A, *mener un plan qui soit tangent à deux sphères données* B *et* C.

La ligne des contacts est une tangente commune aux deux sphères; par suite, elle passe par un des centres de similitude; il en est donc de même du plan tangent.

Déterminons donc les centres de similitude; soit E un de ces centres. Le problème est ramené au précédent :

*Par la droite* AE, *mener un plan tangent à une sphère* B.

Il y a généralement quatre solutions, parce que chaque centre de similitude donne lieu à deux plans tangents.

**Problème 812.**

**1996.** *Mener un plan tangent à trois sphères* A, B, C.

En diminuant le rayon de chacune d'elles d'une longueur égale au rayon de la plus petite, on retomberait sur le problème précédent; mais il est plus simple de procéder comme il suit :

D'après le *théorème de d'Alembert* (nº 176), les six centres de similitude sont trois à trois en ligne droite et donnent lieu à quatre droites. Par chacune de ces droites il faudra mener un plan tangent à une sphère, et ce plan sera tangent aux trois sphères données.

Généralement on a huit solutions.

**Problème 813.**

**1997.** *Par un point donné* A *sur une sphère, faire passer un arc de grand cercle qui soit tangent à un petit cercle* B *donné sur cette même sphère.*

La solution est analogue à celle que nous avons donnée en géométrie plane (nº 623, *Remarque*).

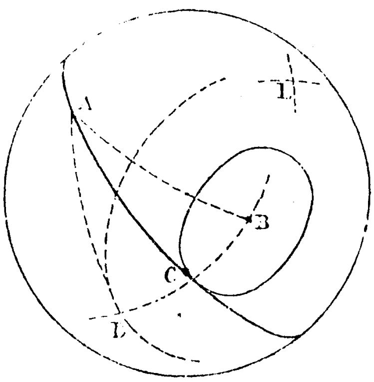


Fig. 1261.

Soient B le centre du cercle donné, $r$ la corde du grand cercle qui sert de rayon rectiligne au petit cercle; on détermine la corde $s$ qui, dans un grand cercle, soustend un arc double de l'arc sous-tendu par $r$; puis, du centre B avec le rayon $s$, on décrit un cercle et on le coupe par le cercle décrit du centre A avec AB pour rayon; soit D le point d'intersection. Enfin on mène un grand cercle perpendiculaire au milieu de BD.

Ce grand cercle partage en deux parties égales l'arc de grand cercle qu'on aurait mené par B et D ; par suite des rapports de $r$ à $s$, il est tangent au cercle donné.

*Remarque.* Le point de contact C serait déterminé par l'intersection du cercle donné et du grand cercle qui passerait par B et D.

**Problème 814.**

**1998.** *Décrire un arc de grand cercle qui soit tangent à deux petits cercles donnés.*

Il faut déterminer le centre de similitude des deux cercles (nº 1962). Par ce point, mener un grand cercle tangent à l'un des cercles donnés.

*Remarque.* Puisqu'il y a deux groupes de centres de similitude et que chacun d'eux détermine deux cercles tangents, on a quatre solutions lorsque les deux cercles donnés sont extérieurs l'un à l'autre.

### Problème 815.

**1999.** *Par deux points donnés* A *et* B *sur une sphère, faire passer une circonférence qui soit tangente à un cercle* C *de cette sphère.*

On procède d'une manière analogue à celle qu'on emploie en géométrie plane.

Par A et B on fait passer un cercle D qui coupe le cercle C; soient E, F les points d'intersection des cercles C et D.

On détermine le point G où se coupent les deux grands cercles AB et EF. Par le point G on mène un grand cercle tangent au cercle C; soit H le point de contact. Enfin on fait passer un cercle par les trois points A, B, H.

### Problème 816.

**2000.** *Par un point donné* A, *faire passer un cercle qui soit tangent à deux cercles donnés* B *et* C.

On procède comme en géométrie plane.

On détermine le centre de similitude S des cercles B et C.

Par S, on mène un grand cercle qui coupe les cercles B et C; soient E, F deux points antihomologues. Par E, F et le point A, on fait passer un petit cercle; soit D le point où il coupe le grand cercle SA. Puis, par A et D, on fait passer un cercle qui soit tangent à un des cercles donnés.

### Problème 817.

**2001.** *Décrire un cercle qui soit tangent à trois cercles donnés.*

Comme en géométrie plane, on ramène ce problème au précédent.

### Problème 817. — I.

**2001 a.** *Un cône de révolution a* r *pour rayon de base et* g *pour génératrice; à partir d'un point* A *pris sur la circonférence de base, on demande d'indiquer la longueur de la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur la surface du cône en partant du point* A *pour revenir au même point après avoir rencontré toutes les génératrices.* Suivant le cas, $r$ est le sixième, le quart, ou le tiers de $g$.

Soient SA et SB les génératrices diamétralement opposées.

Il faut développer le cône sur un plan; on obtient un secteur circulaire SA'B'A'' ayant $g$ pour rayon et $2r\pi$ pour arc A'B'A''.

La ligne la plus courte est la droite A'A'' pour $r =$ sixième de $g$, la droite A'A'' est le côté d'un triangle équilatéral S'A'A'', donc elle égale $g$. Pour le quart, elle égale $g\sqrt{2}$; pour le tiers, elle égale $g\sqrt{3}$.

*Remarques.* 1° Pour $r$ égale le sixième de $g$, on pourrait demander la ligne la plus courte qui part du point A pour y revenir, après avoir rencontré deux fois chaque génératrice.

On développe le cône deux fois, en S'A'B'A''B''A'''. La droite AA''' répond à la question ; elle égale $g\sqrt{3}$.

2° Il est facile de varier les exercices analogues au précédent, ou de proposer de trouver soit le rayon de base, soit la génératrice du cône, lorsqu'on connaît une des deux données $r$ ou $g$ et la longueur A'A''. (Voir *Exercices de Géométrie descriptive*, n° 1013.)

## Problèmes littéraux. — Relations.

### Problème 818.

2002. *A quelle distance du sommet faut-il faire une section* S *parallèle à la base* B *d'un cône, pour que cette section soit la moitié de la base?*

Soit $h$ la hauteur, et $x$ la distance demandée. Il faut qu'on ait :

$$\frac{x^2}{h^2}=\frac{S}{B}=\frac{1}{2},$$

d'où $$\frac{x}{h}=\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad x=h\sqrt{{}^1/_2}=0{,}707\,h.$$

### Problème 819.

2003. *Dans un cône on fait deux sections* S *et* T *parallèles à la base* B, *de telle sorte que ces deux sections et la base soient dans le rapport des nombres* 1, 2, 3. *Comment la hauteur a-t-elle été divisée?*

Appelons $x$, $y$ et $h$ les distances des trois plans au sommet du cône. On a :

$$\frac{x^2}{h^2}=\frac{S}{B}=\frac{1}{3}, \quad \text{d'où} \quad \frac{x}{h}=\sqrt{{}^1/_3} \quad \text{et} \quad x=h\sqrt{{}^1/_3}=0{,}577\,h;$$

$$\frac{y^2}{h^2}=\frac{T}{B}=\frac{2}{3}, \quad \text{d'où} \quad \frac{y}{h}=\sqrt{{}^2/_3} \quad \text{et} \quad y=h\sqrt{{}^2/_3}=0{,}816\,h.$$

Ainsi les sections S et T sont faites respectivement aux 577 millièmes et aux 816 millièmes de la hauteur.

### Problème 820.

2004. *A quelle distance du sommet faut-il faire une section* S *parallèle à la base* B *d'un cône, pour que le rapport de cette section à la base soit égal à un nombre donné* k?

Il faut qu'on ait : $$\frac{x^2}{h^2}=\frac{S}{B}=k,$$

d'où $$\frac{x}{h}=\sqrt{k} \quad \text{et} \quad x=h\sqrt{k}.$$

**Problème 821.**

2005. *Couper un cône par un plan, de manière que le cercle de section soit équivalent à la surface latérale du tronc de cône.*

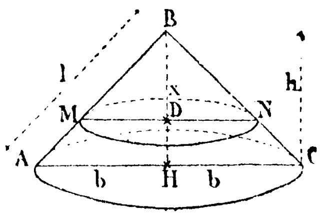


Fig. 1262.

Soient $AB = l$, $BH = h$, $AH = b$ et $BD = x$.

On doit avoir :

$$\pi MD^2 = \pi(AH + MD)AM. \qquad (1)$$

Or $$MD = \frac{bx}{h}, \quad MB = \frac{lx}{h};$$

d'où $$AM = \frac{lh}{h} - \frac{lx}{h} = \frac{l}{h}(h - x),$$

$$AH + MD = \frac{bh}{h} + \frac{bx}{h} = \frac{b}{h}(h + x).$$

(1) devient : $$\frac{b^2x^2}{h^2} = \frac{b}{h}(h + x) \cdot \frac{l}{h}(h - x),$$

d'où $$\frac{x^2}{h^2} = \frac{l}{b + l}$$ question connue (G., n° 345).

**Problème 821. — I.**

2006. *Dans un cône, on inscrit un cylindre de manière que la hauteur de ce cylindre égale la génératrice du cône partiel qui surmonte ce cylindre. Quelle est la surface totale et le volume de ce cylindre en fonction du rayon* r *et de la hauteur* h *du cône donné?*

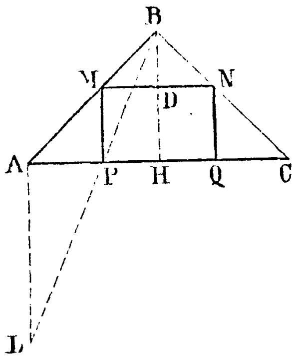


Fig. 1263.

Soient ABC et PMNQ les sections du cône et du cylindre par un plan mené par l'axe commun aux deux corps.

On doit avoir $MP = BM$.

Pour déterminer le point P, on peut recourir aux figures semblables; il suffit de prendre une perpendiculaire AL égale à AB et de mener BL; on aura : $MP = BM$.

Il faut évaluer le rayon PH et la hauteur MP; soit $l$ la longueur connue de AB.

On trouve : $$V = \pi \frac{lr^2h^3}{(l + h)^3}.$$

**Problème 822.**

2007. *Quelle est la surface et quel est le volume d'une sphère circonscrite à un tétraèdre régulier dont l'arête égale* a ?

Soit ABC la face que nous prenons comme base. Traçons sur cette base la droite AD, qui est à la fois, pour le triangle équilatéral ABC, bissectrice, médiane et hauteur.

Le plan mené par cette droite AD et par le quatrième sommet S du tétraèdre est aussi, dans ce solide, plan bissecteur, plan médian et plan hauteur. Ainsi les six plans analogues qui pourraient être menés dans ce tétraèdre se rencontrent en un même point (nº 1833).

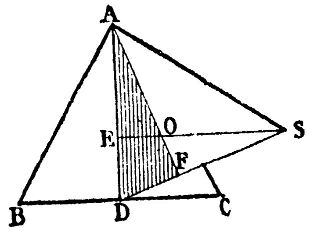


Fig. 1264.

Or, parmi ces six plans, les trois qui tombent sur la face ABC sont perpendiculaires à cette face; donc leur intersection commune est la hauteur SE du tétraèdre. (Supposons la section ASD rabattue sur le plan de la base.)

Cette hauteur SE tombe aux $^2/_3$ de la médiane AD; et de même, la hauteur qui partirait du sommet A tomberait aux $^2/_3$ de la médiane opposée SD. (Cette droite SD est la médiane de la face BSC.)

Il s'agit de calculer la position du point O sur la hauteur SE ou sur AF; car OS ou OA est le rayon de la sphère circonscrite.

L'arête $AB = a$, $BD = {}^1/_2 a$.

$$AD = \frac{a}{2}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad AE = \frac{a}{3}\sqrt{3},$$

d'où
$$SE = AF = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Les triangles semblables AEO et AFD donnent :

$$\frac{AO}{AE} = \frac{AD}{AF}, \quad \text{d'où} \quad AO = \frac{AE \cdot AD}{AF},$$

d'où
$$AO \quad \text{ou} \quad R = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{a}{4}\sqrt{6}.$$

Tel est le rayon R de la sphère circonscrite.

La surface et le volume de cette sphère seront :

$$S = \frac{3}{2}\pi a^2 \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{4}\pi a^3\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

### Problème 823.

**2008.** *Exprimer, en fonction du côté* a *d'un tétraèdre régulier, la surface et le volume de la sphère inscrite et de la sphère tangente aux arêtes du tétraèdre.*

Soit ABC l'une des faces que nous prenons comme base. Par la droite AD, médiane de cette base, et par le quatrième sommet S, menons le plan ASD, rabattu ici sur le plan de la base.

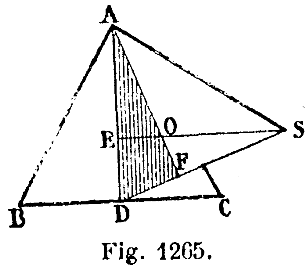


Fig. 1265.

La hauteur SE du tétraèdre tombe sur la médiane AD; et comme elle doit aussi bien tomber sur une autre médiane quelconque, le point E ne peut être que le point de concours des médianes. Ainsi AE est les $^2/_3$ de AD.

La droite SD est une médiane de la face de devant BSC; la hauteur qui part du point A doit de même arriver en F, aux $^2/_3$ de SD.

Le point de rencontre O de ces hauteurs est équidistant des faces et équidistant des sommets. La distance aux faces est OE, OF ou $r$; c'est le *rayon de la sphère inscrite*. La distance aux sommets est OA, OS ou R ; c'est le *rayon de la sphère circonscrite*.

Désignons par $\rho$ le rayon de la sphère tangente aux arêtes du tétraèdre.

On trouve : Surfaces $4\pi r^2 = \dfrac{\pi a^2}{6}$ et $4\pi\rho^2 = \dfrac{\pi a^2}{2}$.

Volumes $\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{216}$, et $\dfrac{4}{3}\pi\rho^3 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{24}$.

**2008 a.** Remarques. 1° *La surface de la sphère tangente aux arêtes du tétraèdre est moyenne proportionnelle entre les surfaces des sphères inscrite et circonscrite. Il en est de même des volumes.*

2° Pour les détails du calcul de cette question et des suivantes, voir la 3e édition des *E. de G.*

### Problème 824.

**2009.** *Un triangle équilatéral* ABC, *dont le côté est* a, *tourne autour de l'un de ses côtés* AC. *Quel est le volume engendré?*

Soit $a$ le côté du triangle équilatéral;

$$V = \frac{\pi a^3}{4}.$$

Pour un triangle quelconque dont $b$ serait la base placée sur l'axe et $h$ la hauteur, on a :

$$\frac{\pi h^2 b}{3}.$$

**2010.** *Application des théorèmes de Guldin.* Dans cette question et dans les problèmes analogues, on peut appliquer les théorèmes de Guldin (G., nos 903 et 904), afin d'indiquer une seconde manière d'arriver au résultat et d'obtenir une vérification.

On désigne par $g$ le centre de gravité du périmètre, par G celui de la surface considérée et par $d$ la distance du centre de gravité à l'axe.

### Problème 825.

**2011.** *Exprimer le volume engendré par un triangle équilatéral qui tourne autour d'un axe mené par l'un des sommets parallèlement au côté opposé.*

$$V = \frac{\pi a^3}{2}.$$

Remarque. *Le triangle équilatéral* ABC *tournant autour d'un axe* MN, *mené dans son plan par le sommet* A, *engendre un volume qui peut varier de* $\dfrac{\pi a^3}{4}$ *à* $\dfrac{\pi a^3}{2}$.

Le minimum a lieu lorsqu'un côté AC est sur l'axe, et le maximum quand un côté BC est parallèle à l'axe.

### Problème 826.

**2012.** *Exprimer, en fonction du côté* a, *le volume engendré par un hexagone régulier tournant autour de l'un de ses côtés.*

$$V = \frac{9}{2}\pi a^3.$$

*Remarques.* 1° Lorsque l'hexagone n'a qu'un sommet A sur l'axe, et que le diamètre est perpendiculaire à cet axe,

on a : $$V = 3\pi a^3\sqrt{3}.$$

2° Quand l'hexagone pivote autour de son sommet A, mais en restant complètement d'un même côté de l'axe, le volume varie du minimum $\frac{9\pi a^3}{2}$ au maximum $3\pi a^3\sqrt{3}$.

### Problème 827.

**2013.** *Un triangle tourne autour de la droite qui joint les milieux de deux de ses côtés; quel est le rapport des volumes engendrés par chaque partie du triangle?*

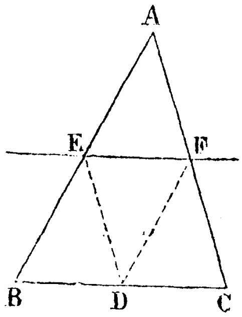


Fig. 1266.

En joignant deux à deux les trois milieux, on décompose le triangle donné en quatre triangles égaux.

Le volume engendré par un triangle tel que BED est double du volume engendré par EDF (G., n° 566, 3°); donc, en désignant par $v$ le volume engendré par AEF, on aura :

$$\text{vol. EDF} = v, \quad \text{vol. EBD} = 2v, \quad \text{vol. DFC} = 2v;$$

donc $$\text{vol. EBCF} = 5v.$$

### Problème 827. — I.

**2013 a.** *Exprimer en fonction du côté* a *d'un cube, la surface et le volume de la sphère inscrite, de la sphère tangente aux arêtes et de la sphère circonscrite.*

1° Pour la sphère inscrite, le diamètre est $a$,
La surface est $\pi a^2$,
Et le volume $^1/_6\pi a^3$.

2° Pour la sphère tangente aux arêtes, le diamètre est la diagonale d'une face, on a donc $d = a\sqrt{2}$.
La surface est $\pi d^2$ ou $2\pi a^2$,
Le volume est $\frac{1}{6}\pi d^3$ ou $\frac{1}{3}\pi a^3\sqrt{2}$.

3° Pour la sphère circonscrite, le diamètre est la diagonale $d$ du cube on a : $d^2 = 3a^2$ et $d = a\sqrt{3}$.
La surface est $\pi d^2$ ou $3\pi a^2$,
Le volume est $^1/_6\pi d^3$, ou $^1/_6\pi \cdot 3a^2 \cdot a\sqrt{3}$, ou $^1/_2\pi a^3\sqrt{3}$,

**Problème 828.**

**2014.** *On donne deux points* A *et* O ; *du point* O, *comme centre, décrire une circonférence* OB *telle qu'en menant la tangente* AB *et faisant tourner la figure autour de* AO, *la surface engendrée par* AB *soit égale à la surface de la sphère de centre* O.

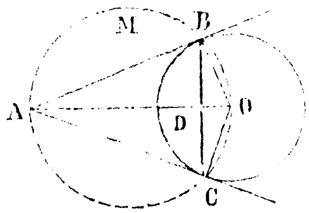



Fig. 1267.

Soit $\quad AO = a, \quad OB = r,$

et $\quad AB = y.$

La surface du cône est donnée par $\pi BD \cdot AB$.

Or $\quad DO = \dfrac{BO^2}{AO} = \dfrac{r^2}{a}; \quad AD = a - \dfrac{r^2}{a} = \dfrac{a^2 - r^2}{a};$

$$BD^2 = AD \cdot DO = \frac{a^2 - r^2}{a} \cdot \frac{r^2}{a} = \frac{r^2(a^2 - r^2)}{a^2};$$

$$AB^2 = AO^2 - OB^2 = a^2 - r^2;$$

donc $\quad \pi BD \cdot AB = \pi \dfrac{r\sqrt{a^2 - r^2}}{a} \cdot \sqrt{a^2 - r^2} = \pi \dfrac{r(a^2 - r^2)}{a}. \qquad (1)$

La surface de la sphère égale $4\pi r^2$,

donc $\quad \dfrac{\pi r(a^2 - r^2)}{a} = 4\pi r^2.$

En simplifiant, on trouve :

$$a^2 - r^2 - 4ar = 0 \quad \text{ou} \quad r^2 + 4ar - a^2 = 0,$$

d'où $\quad r = -2a \pm \sqrt{4a^2 + a^2},$

$$r = a(-2 \pm \sqrt{5}).$$

**Problème 829.**

**2015.** *Un triangle équilatéral* T *tourne autour d'un axe* MN *situé dans son plan perpendiculairement à la base* a ; *la distance de l'axe au triangle est égale au côté* a. *On demande le volume et la surface du solide engendré.*

$$V = {}^3/_4\pi a^3\sqrt{3}.$$

L'aire totale du solide est $9\pi a^2$, ou 9 fois l'aire du cercle qui aurait $a$ pour rayon.

**Problème 830.**

**2016.** *Un triangle a pour base une longueur* a *et pour hauteur* h ; *on fait tourner ce triangle autour d'un axe mené parallèlement à la base* *par le point de concours des médianes. Quel est le volume engendré par chaque partie du triangle?*

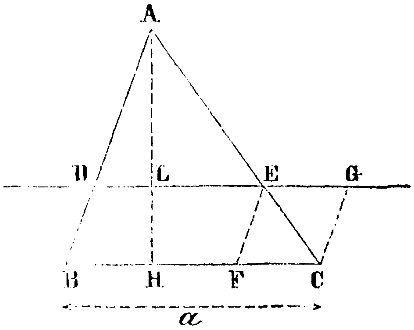


Fig. 1268.

Soit l'axe DE passant par les points D, E situés aux $^2/_3$ des côtés.

$$AL = \frac{2h}{3}; \quad LH = \frac{h}{3} \quad \text{et} \quad DE = \frac{2a}{3}$$

Menons les parallèles EF, CG.

Le triangle DAE engendre des cônes ayant AL pour rayon de la base commune et DE pour somme des hauteurs; donc

$$1^o \qquad V.ADE = \frac{\pi . AL^2 . DE}{3} = \frac{\pi}{3} . \frac{4h^2}{9} \frac{2a}{3} = \frac{8\pi ah^2}{81}. \qquad (1)$$

2° Le volume engendré par le parallélogramme DBFE est équivalent au volume engendré par le rectangle qui aurait DE pour base et LH pour hauteur.

$$V.DBEF = \pi LH^2 . DE = \pi . \frac{h^2}{9} . \frac{2a}{3} = \frac{2\pi ah^2}{27}. \qquad (2)$$

Le volume engendré par le triangle FEC, dont le côté $FC = EG = \frac{a}{3}$ est parallèle à l'axe, est double du volume engendré par ECG (G., n° 566, 3°); donc

$$V.EFC = \frac{2\pi}{3} LH^2 . FC = \frac{2\pi}{3} \frac{h^2}{9} . \frac{a}{3} = \frac{2\pi ah^2}{81}; \qquad (3)$$

$$V.DBCE = (2) + (3) = \frac{6\pi ah^2 + 2\pi ah^2}{81} = \frac{8\pi ah^2}{81}. \qquad (4)$$

*Ainsi les volumes* (1) *et* (4) *sont équivalents,* bien que les surfaces ADE ou $\frac{4}{18}ah$ et DBCE ou $\frac{5}{18}ah$ soient inégales.

*Remarque.* Lorsque l'axe mené par le point de concours des médianes coïncide avec une des médianes, le triangle est divisé en deux parties équivalentes; pour toute autre position de l'axe, les deux parties sont inégales, le maximum de la différence a lieu lorsque l'axe est parallèle à l'un des côtés; cette différence égale alors le neuvième de l'aire du triangle; mais, *quelle que soit la position de l'axe, les volumes engendrés par chaque partie du triangle sont équivalents.*

**Problème 831.**

**2017.** *Inscrire un cylindre à un cône, de manière que la surface latérale du cylindre soit égale à la surface latérale du cône partiel qui surmonte le cylindre.*

On doit avoir : $\qquad \pi MD . MB = 2\pi MD . MP,$

d'où $\qquad MB = 2MP.$

Il faut déterminer le point M tel que la distance MB soit double de l'ordonnée MP.

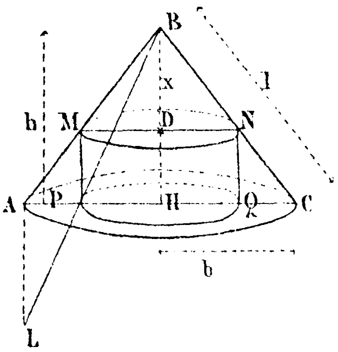



Fig. 1269.

Pour résoudre ce problème graphiquement, on peut recourir aux figures semblables.

Sur une perpendiculaire à AC, il faut prendre :

$$AL = \frac{1}{2} AB \quad \text{et mener} \quad LPB.$$

*Par le calcul :*

Soient $BH = h$, $AH = b$, $AB = l$ et $BD = x$.

$$\frac{MB}{x} = \frac{l}{h}, \quad MB = \frac{lx}{h};$$

d'ailleurs $MP = h - x;$

donc $\frac{lx}{h} = 2h - 2x,$

$$lx = 2h^2 - 2hx,$$

$$x = \frac{2h^2}{l + 2h}.$$

**Problème 831. — I.**

2018. *Inscrire un cylindre à un cône de manière que la surface latérale du cône partiel soit à celle du cylindre dans le rapport de* m *à* n (fig. 1269).

$$x = \frac{2mh^2}{ln + 2hm}.$$

**Problème 832.**

2019. *Problème analogue, mais le volume du cône partiel doit égaler celui du cylindre* (fig. 1269).

Or $$\frac{\pi MD^2 . BD}{3} = \pi MD^2 . MP,$$

d'où $$\frac{BD}{3} = MP \quad \text{ou} \quad \frac{lx}{3h} = h - x,$$

$$lx = 3h^2 - 3hx; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{3h^2}{l + 3h}.$$

*Remarque.* Il est facile d'imaginer des problèmes comme les précédents : en voici encore deux autres (nos 2020 et 2021); puis à un cylindre donné on pourrait circonscrire un cône réalisant certaines conditions.

**Problème 832. — I.**

2020. *Inscrire un cylindre à un cône donné, de manière que la surface latérale du cône partiel qui surmonte le cylindre égale la* *surface de la couronne comprise entre les circonférences de base du cylindre et du cône donné.*

$$\pi MD \cdot MB = \pi(b^2 - MD^2).$$

Or $\quad MD = \frac{bx}{h};$

$$MB = \frac{lx}{h}; \qquad (n^o\ 2017)$$

donc $\quad \frac{blx^2}{h^2} = b^2 - \frac{b^2x^2}{h^2},$

$$blx^2 + b^2x^2 = b^2h^2,$$

$$x^2 = \frac{bh^2}{l+b} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{h^2} = \frac{b}{b+l}.$$

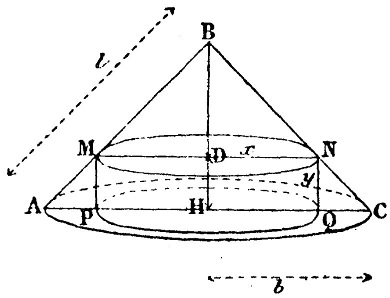



Fig. 1270.

Le problème revient à trouver le côté d'un carré $x^2$ qui soit à un carré donné $h^2$ dans le rapport de $b$ à $b+l$. (G., n° 345.)

**Problème 832. — II.**

**2021**. *Problème analogue, mais la surface totale du cône partiel doit être à celle du cylindre dans le rapport de* m *à* n.

$$\frac{\pi MD \cdot MB + \pi MD^2}{2\pi MD \cdot MP + 2\pi MD^2} = \frac{m}{n}.$$

On sait que $\quad MB = \frac{lx}{h}; \quad MD = \frac{bx}{h}; \quad MP = \frac{h^2 - hx}{h};$

mais on peut supprimer les facteurs communs, et l'on a :

$$\frac{bx \cdot lx + b^2x^2}{bx(h^2 - hx) + b^2x^2} = \frac{2m}{n};$$

$$\frac{lx + bx}{h^2 - hx + bx} = \frac{2m}{n};$$

$$nlx + nbx = 2mh^2 - 2mhx + 2mbx;$$

$$x(2mh - 2mb + nl + nb) = 2mh^2;$$

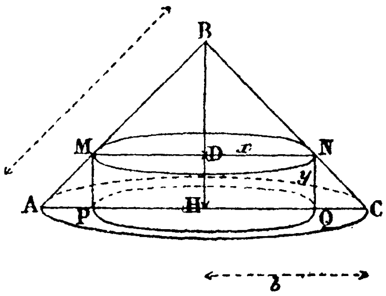



Fig. 1271.

$$x = \frac{2mh^2}{2mh + nl + (n - 2m)b}.$$

Quatrième proportionnelle à construire.

**Problème 833.**

**2022**. *Sur un côté d'un carré, on construit à l'extérieur un triangle équilatéral, et l'on fait tourner le pentagone ainsi obtenu autour de l'un des côtés extérieurs du triangle. On demande le volume engendré, en fonction du côté* a.

$$V = \frac{\pi a^3}{4}(3 + 2\sqrt{3}).$$

*Remarque.* Pour les calculs, voir les éditions antérieures.

### Problème 834.

**2023.** *Un carré de côté* a *tourne autour d'un axe* MN *mené dans son plan par l'un des sommets, perpendiculairement à la diagonale qui part de ce sommet. On demande le volume et la surface du solide engendré.*

$$V = \pi a^3\sqrt{2} \quad \text{et} \quad S = 4\pi a^2\sqrt{2}\,.$$

### Problème 835.

**2024.** *Un hexagone régulier a pour côté* a ; *on prolonge l'un des côtés* BA *d'une longueur* AG *égale à* a, *et par l'extrémité du prolongement on mène au côté une perpendiculaire* MN *qui sert d'axe de rotation à l'hexagone. On demande le volume et la surface du solide engendré.*

$$V = \frac{9\pi a^3\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad S = 18\pi a^2.$$

### Problème 836.

**2025.** *Un hexagone régulier de côté* a *tourne autour d'un axe* MN *mené dans son plan par l'un des sommets* F, *perpendiculairement au rayon* OF *qui aboutit à ce sommet. On demande le volume et la surface du solide engendré.*

$$V = 3\pi a^3\sqrt{3} \quad \text{et} \quad S = 12\pi a^2.$$

### Problème 837.

**2026.** *Trouver le volume engendré par un demi-décagone régulier dont le côté est* a, *tournant autour du diamètre.*

1er *Moyen.* Le volume engendré par un secteur polygonal régulier, en tournant autour d'un axe mené dans son plan par le centre du polygone, égale le tiers du produit de la surface que décrit la ligne polygonale, par l'apothème.

Ou bien, le volume équivaut aux deux tiers du cylindre qui aurait pour rayon l'apothème du secteur, et pour hauteur la projection, sur l'axe, de la ligne polygonale. (G., nos 567 et 568.)

2e *Moyen.* En projetant sur l'axe les sommets de la ligne polygonale, la surface génératrice est décomposée en deux triangles égaux aux extrémités du diamètre qui sert d'axe de rotation, en deux trapèzes égaux et en un rectangle ; le volume comprend donc deux cônes, deux troncs de cône et un cylindre faciles à calculer.

**Note.** Les trois premières éditions des *E. de G.* fournissent tous les éléments pour évaluer le volume total par le 2e *moyen;* mais le résultat final est fautif, parce que les deux cônes ont été oubliés.

### Problème 838.

**2027.** *Inscrire à une sphère de rayon donné un cylindre circulaire droit dont le volume soit égal à celui des deux segments sphé-*

*riques de mêmes bases que le cylindre, et indiquer les constructions géométriques qui donnent la solution du problème.*
(Ens. sp., Douai.)

Désignons par $x$ le rayon de la base du cylindre, par $y$ la hauteur de chaque segment, et $r$ le rayon de la sphère.

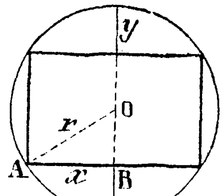


Fig. 1272.

Le volume des deux segments est :

$$V = 2({}^1/_6\pi y^3 + {}^1/_2\pi x^2 y),$$

et le volume du cylindre inscrit :

$$2\pi x^2(r - y);$$

d'où
$$ {}^1/_6 y^3 + {}^1/_2 x^2 y = x^2(r - y),$$

et
$$ {}^1/_6 y^3 = x^2\left(r - \frac{3y}{2}\right). \qquad (1)$$

Le triangle rectangle ABO donne :

$$x^2 = r^2 - (r - y)^2 = 2ry - y^2.$$

Portons cette valeur dans l'équation (1); il vient après simplification :

$$y^2 - 3ry + \frac{3}{2}r^2 = 0;$$

d'où
$$\left\{\begin{array}{l} y' = \frac{3}{2}r + \frac{r\sqrt{3}}{2}, \\ y'' = \frac{3}{2}r - \frac{r\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

*Remarque.* La valeur $y'$ est inadmissible, car on doit avoir $y < r$; mais $y''$ répond géométriquement à la question.

*Construction.* La valeur $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ est l'apothème de l'hexagone régulier, et $\frac{3r}{2}$ la hauteur du triangle équilatéral inscrit dans un grand cercle de la sphère. La construction est facile.

**Problème 839.**

**2028.** *De chaque sommet d'un cube pris pour centre, on décrit une sphère ayant pour rayon la moitié du côté du cube. Quelle est la valeur du solide compris entre les sphères, et quel serait le rayon de la sphère équivalente?*

$$\text{Cube} = a^3.$$

Les huit parties de la sphère correspondent à une sphère de rayon $\frac{a}{2}$;

donc
$$\text{sphère} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 \text{ ou } \frac{1}{6}\pi a^3.$$

$$\text{Différence} = a^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right).$$

Pour la sphère équivalente, on poserait :

$$\frac{4}{3}\pi x^3 = a^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$x^3 = a^3 \cdot \frac{6-\pi}{8\pi}, \quad x = \frac{a}{2}\sqrt[3]{\frac{6-\pi}{\pi}}.$$

**Problème 839. — I.**

**2029.** *Deux sphères égales extérieures ont une longueur* a *pour plus courte distance. Quel est le volume compris entre les deux sphères et la surface cylindrique circonscrite?*

Soit $r$ le rayon; la hauteur du cylindre $= a + 2r$.

Du cylindre il faudra soustraire deux hémisphères; donc

$$V = \pi r^2(2r + a) - \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2\left(\frac{2}{3}r + a\right).$$

**Problème 840.**

**2030.** *Une sphère est posée sur un plan horizontal; sur le même plan repose par sa base un cône droit, dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère; on demande de couper ces deux corps par un plan horizontal de telle sorte que les sections soient entre elles comme deux nombres donnés.* (Concours général, 1875. Rhétorique. *N. A.*, p. 88.)

Soient $a$ le rayon de la sphère, $b$ celui de la base du cône dont la hauteur égale $2a$; représentons par $x$ la distance du sommet du cône au plan sécant.

Le rayon $b'$ de la section du cône est donné par

$$\frac{b'}{b} = \frac{x}{2a}, \quad b' = \frac{bx}{2a};$$

d'où

$$\pi b'^2 = \frac{\pi b^2 x^2}{4a^2}. \qquad (1)$$

Le rayon $a'$ de la section de la sphère est moyen proportionnel entre les deux segments $x$ et $(2a - x)$ du diamètre; donc la section

$$\pi a'^2 = \pi x(2a - x). \qquad (2)$$

Si la section conique doit être à la section sphérique dans le rapport $\frac{m}{n}$, on aura : $\frac{\pi b^2 x^2}{4a^2} : \pi x(2a - x) = \frac{m}{n}$,

ou

$$\frac{b^2 x}{4a^2(2a - x)} = \frac{m}{n}; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{8a^3 m}{b^2 n + 4a^2 m}.$$

*Remarque.* Lorsque $m = n$, on a : $x = \frac{8a^3}{b^2 + 4a^2}$.

Dans le cas particulier où la base du cône égale un grand cercle, $b = a$, on trouve : $x = \frac{8a}{5}$.

**Problème 841.**

**2031.** *Un cône équilatéral est inscrit à une sphère; couper les deux solides par un plan parallèle à la base du cône, de manière que la différence des sections obtenues ait une valeur donnée* $\pi a^2$.

*Dans quel cas la différence est-elle maxima?*

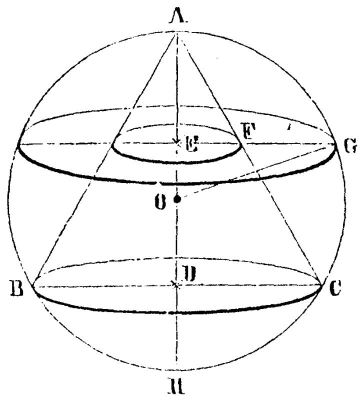


Fig. 1273.

BC est le côté du triangle équilatéral inscrit; donc sa moitié

$$DC = \frac{r}{2}\sqrt{3}, \quad \text{et} \quad DO = \frac{r}{2}.$$

Soit $AE = x$.

La surface annulaire étudiée égale :

$$\pi(EG^2 - EF^2).$$

Dans le triangle équilatéral, $EF = \frac{AF}{2}$;

donc $$EF^2 = \frac{x^2}{3},$$

$$EG^2 = AE \cdot EH = x(2r - x),$$

ou $$2rx - x^2;$$

donc $$2rx - x^2 - \frac{x^2}{3} = a^2;$$

$$2rx - \frac{4x^2}{3} = a^2.$$

Divisons tous les termes par $\frac{4}{3}$:

$$\frac{3}{2}rx - x^2 = \frac{3}{4}a^2; \quad \left(\frac{3}{2}r - x\right)x = \frac{3}{4}a^2,$$

et le problème revient à construire un rectangle, connaissant la surface $\frac{3}{4}a^2$ et la somme $\frac{3}{2}r$ des côtés, $x$ et $\left(\frac{3}{2}r - x\right)$.

*Maximum.* Le maximum de la surface a lieu quand les deux côtés du rectangle sont égaux à la moitié de la somme constante de ces côtés.

Dans ce cas, $$x = \frac{3}{4}r.$$

**Problème 841. — I.**

**2032.** *Un cône est inscrit à un hémisphère; couper les deux solides par un plan parallèle à la base du cône, de manière que la différence des sections ait une valeur donnée* $\pi a^2$.

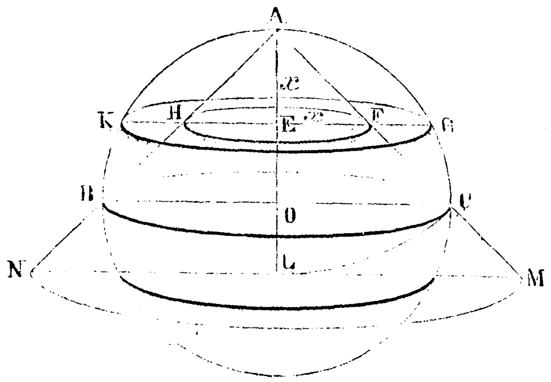



Fig. 1274.

$$EG^2 = 2rx - x^2 ;\quad EF^2 = x^2 ;$$
$$EG^2 - EF^2 = 2rx - 2x^2 = a^2 ;$$
$$(r - x)x = \frac{a^2}{2}.$$

*Maximum*. Le produit $(r - x)x$ est maximum pour
$$r - x = x ;$$
d'où $$x = \frac{r}{2}.$$

*Remarque*. Lorsqu'on demande que les sections soient dans un rapport donné $\frac{m}{n}$, on a :
$$\frac{EG^2}{EF^2} = \frac{m}{n} = \frac{2rx - x^2}{x^2},$$
équation du second degré facile à résoudre et à construire.

**Problème 841. — II.**

**2033.** *La zone sphérique* GAK *et la surface latérale du cône* FAH *doivent être dans le rapport* $\frac{m}{n}$ (fig. 1274).

$$\text{Zone} = 2r\pi \,.\, x. \qquad (\text{G., n}^\circ\ 558.)$$
$$\text{Surface latérale du cône} = \pi EF \,.\, AF = \pi x \,.\, x\sqrt{2} ;$$
d'où
$$\frac{2\pi rx}{\pi x^2\sqrt{2}} = \frac{m}{n} = \frac{2r}{x\sqrt{2}},$$
$$x = \frac{2r}{\sqrt{2}} \,.\, \frac{n}{m}.$$

*Remarque*. En prolongeant le cône, on peut demander que les surfaces soient égales.

Dans ce cas, $\frac{n}{m} = 1 ;\quad x = \frac{2r}{\sqrt{2}} = \frac{2r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}.$

Il faut porter AC de A en L et mener NLM.

**Problème 841. — III.**

**2034.** *Couper une sphère par un plan de manière que la différence des zones obtenues soit équivalente à la section déterminée par le plan.* (Diplôme de fin d'études, Clermont-Ferrand.)

Soit $x$ la distance du centre de la sphère au plan mené.

Le rayon de la section est donné par $\sqrt{r^2 - x^2}$.
Les zones ont respectivement pour hauteur $r + x$ et $r - x$.
Les zones ont pour différence
$$2\pi r(r + x) - 2\pi r(r - x) \quad \text{ou} \quad 2\pi r \,.\, 2x = 4\pi rx.$$

La section est donnée par $\quad \pi(r^2 - x^2)$.

Donc
$$4\pi r x = \pi(r^2 - x^2),$$
$$x^2 + 4rx = r^2,$$
$$x = -2r \pm \sqrt{4r^2 + r^2} = r(-2 \pm \sqrt{5}).$$

La solution positive, plus petite que 1, convient seule à la question, car $x$ doit être moindre que $r$.

### Problème 842.

**2035.** *Étant donné un demi-cercle* O, *on mène une parallèle* AB *au diamètre* CD. *Cette parallèle partage le demi-cercle en deux parties, un segment* AMB *et la figure* CABD. *On fait tourner le demi-cercle autour du diamètre* CD, *et on demande : 1° de trouver le volume du solide engendré par la figure* CABD ; *2° d'en déduire le volume du solide engendré par le segment, en retranchant le premier du volume de la sphère, et de faire la vérification en calculant directement ce dernier ; 3° quelle est la relation qui doit exister entre* AB *et le diamètre* CD, *pour que le volume engendré par le segment soit la moitié du volume de la sphère.*

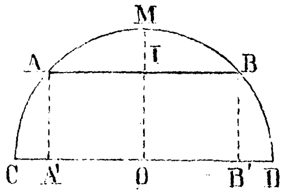


Fig. 1275.

(Brevet supérieur. Digne, 2e session 1876 ; Manuel général 1877, p. 294.)

$$OC = R, \quad AB = 2l, \quad AA' = m,$$
$$A'C = h = R - l.$$

Le volume engendré par CABD se compose d'un cylindre et de deux segments sphériques à une base.

$$\text{Volume du cylindre} = \pi m^2 \times 2l.$$

$$\text{V. des deux segments} = 2\left[\frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi m^2 h\right] = \pi\left[\frac{(R-l)^3}{3} + m^2(R-l)\right].$$

En additionnant, on obtient pour l'expression du volume engendré par CABD :

$$2\pi m^2 l + \pi\left[\frac{(R-l)^3}{3} + m^2(R-l)\right] = \pi\left[2m^2 l + \frac{(R-l)^3}{3} + Rm^2 - m^2 l\right]$$
$$= \pi\left[Rm^2 + lm^2 + \frac{(R-l)^3}{3}\right],$$

comme
$$(R-l)^3 = R^3 - 3R^2 l + 3Rl^2 - l^3,$$

et
$$\frac{(R-l)^3}{3} = \frac{R^3 - l^3}{3} - R^2 l + Rl^2.$$

On peut écrire en substituant :

$$\text{Vol. ABCD} = \pi\left[\frac{R^3 - l^3}{3} + R(m^2 + l^2) - l(R^2 - m^2)\right];$$

mais
$$m^2 + l^2 = R^2, \quad R^2 - m^2 = l^2;$$

donc 1° $\quad \text{Vol. ABCD} = \pi\left[\frac{R^3 - l^3}{3} + R^3 - l^3\right] = \frac{4}{3}\pi(R^3 - l^3).$

Le volume de la sphère égale $\frac{4}{3}\pi R^3$; par suite, le volume engendré par le segment AMB est égal à

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(R^3 - l^3) = \frac{4}{3}\pi(R^3 - R^3 + l^3) = \frac{4}{3}\pi l^3.$$

Pour le calcul direct du segment. (G., n° 578.)

2° $$\text{Vol. AMB} = \frac{1}{6}\pi(2l)^2 \times 2l = \frac{4}{3}\pi l^3.$$

Pour que le volume engendré par le segment soit la moitié du volume de la sphère, il faut que l'on ait :

$$\frac{4}{3}\pi l^3 = {}^4/_3\pi(R^3 - l^3),$$

ou

$$l^3 = R^3 - l^3,$$

$$2l^3 = R^3;$$

d'où on tire : 3° $$l = \sqrt[3]{\frac{R^3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{4R^3}{8}} = \frac{R}{2}\sqrt[3]{4},$$

ou bien encore

$$\text{AB ou } 2l = R\sqrt[3]{4} = R \,.\, 1{,}587.$$

**Problème 843.**

**2036.** *Trouver l'angle dièdre de chacun des cinq polyèdres réguliers convexes.*

*Tétraèdre régulier.* (**a**)

L'angle demandé a pour cosinus $^1/_3$

Cet angle a 70° 31′, 72.

*Remarques.* 1° L'angle est indiqué en degrés, minutes et centièmes de minute.

2° Pour les questions du n° 2036 au 2041, voir *deuxième* et *troisième* éditions des *E. de G.*

*Hexaèdre régulier.* (**b**)

Dans l'hexaèdre régulier ou cube, les faces sont perpendiculaires entre elles, et le dièdre est de 90°.

*Octaèdre régulier.* (**c**)

**2037.** L'angle moitié du dièdre de l'octaèdre régulier a pour cosinus $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ainsi l'angle dièdre de l'octaèdre = 109° 28′, 24.

*Dodécaèdre régulier.* (**d**)

**2038.** L'angle moitié du dièdre du dodécaèdre régulier a pour sinus

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

Donc l'angle dièdre du dodécaèdre régulier égale 116° 33′, 80.

*Icosaèdre régulier.* (e)

**2039**. L'angle moitié du dièdre de l'icosaèdre régulier a pour sinus

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}.$$

Donc l'angle dièdre de l'icosaèdre régulier égale 138° 11′, 60.

**Problème 844.**

**2040**. *Pour chacun des cinq polyèdres réguliers convexes, exprimer, en fonction de l'arête* a :

1° *Les rayons des sphères inscrite et circonscrite;*
2° *La surface et le volume de chacun de ces polyèdres.*

*Tétraèdre régulier.* (a)

Des rayons des sphères inscrite et circonscrite au tétraèdre régulier ont été calculés précédemment (n^os^ 2007 et 2008); on a trouvé :

$$r = {}^1/_{12}a\sqrt{6} \quad \text{et} \quad R = {}^1/_3 a\sqrt{6},$$

ou,

$$r = 0{,}20408a \quad \text{et} \quad R = 0{,}81631a.$$

La *surface* du tétraèdre régulier est $a^2\sqrt{3}$ ou 1, 73205$a^2$.

Le *volume* égale la surface totale multipliée par le $^1/_3$ du rayon de la sphère inscrite; on a donc :

$$V = {}^1/_{12}a^3\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad 0{,}11785a^3.$$

*Hexaèdre régulier.* (b)

| | | |
|---|---|---|
| Rayon de la sphère inscrite. . . . | $^1/_2 a$ | ou 0,50000$a$. |
| » » » circonscrite . | $^1/_2 a\sqrt{3}$ | ou 0,86602$a$. |
| Surface totale. . . . . . . . . . . . | $6a^2$. | |
| Volume . . . . . . . . . . . . . . . | $a^3$. | |

*Octaèdre régulier.* (c)

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{ou } 0{,}40824a,$$

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{2} \quad \text{ou } 0{,}70710a,$$

$$S = 2a^2\sqrt{3} \quad \text{ou } 3{,}46410a^2,$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \quad \text{ou } 0{,}47140a^3.$$

*Dodécaèdre régulier.* (d)

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} \quad \text{ou} \quad 1{,}1135a,$$

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}} \quad \text{ou} \quad 2{,}8025a.$$

$$S = 15a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \quad \text{ou} \quad 20{,}646a^2,$$

$$V = \frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}} \quad \text{ou} \quad 7{,}6630a^3.$$

*Icosaèdre régulier.* (e)

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} \quad \text{ou} \quad 0{,}75576a,$$

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \quad \text{ou} \quad 0{,}9510a,$$

$$S = 5a^2\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad 8{,}66025a^2,$$

$$V = \frac{5a^3}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{12}} \quad \text{ou} \quad 2{,}182a^3.$$

**2041. Note.** Aux recherches précédentes pourrait s'ajouter celle du rayon $\rho$ de la *sphère tangente à toutes les arêtes* du polyèdre. Dans les *Archives de Mathématiques et de Physique* (tome LIX, 1876), M. Georges DOSTOR, ingénieur, professeur à l'Institut catholique de Paris, a donné une étude très intéressante sur les trois sphères que l'on peut considérer dans chaque polyèdre régulier, et sur les relations qui existent entre leurs rayons respectifs R, $r$ et $\rho$. On trouve, pour les cinq polyèdres, les valeurs suivantes de $\rho$ :

$$\tfrac{1}{4}a\sqrt{2}, \quad \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}, \quad \tfrac{1}{2}a, \quad \tfrac{1}{8}a(\sqrt{5}+1)^2, \quad \tfrac{1}{4}a(\sqrt{5}+1).$$

Et l'on obtient, entre les trois rayons de chaque polyèdre les relations suivantes :

$$Rr = \rho^2; \quad Rr = \rho^2 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}; \quad Rr = \rho^2 \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{3};$$

$$Rr = \rho^2 \frac{6}{\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}; \qquad Rr = \rho^2 \frac{\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}{6}.$$

RÉSUMÉ DES ÉLÉMENTS DES 5 POLYÈDRES RÉGULIERS CONVEXES

| | Faces | Angle | Rayon R | Apoth. $r$ | Rayon $\rho$ | Surface | Volume |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (*a*) | 4 triang. | 70°32′ | 0,612$a$ | 0,204$a$ | 0,354$a$ | 1,732$a^2$ | 1,118$a^3$ |
| (*b*) | 6 carrés | 90°00′ | 0,866$a$ | 0,500$a$ | 0,707$a$ | 6,000$a^2$ | 1,000$a^3$ |
| (*c*) | 8 triang. | 109°28′ | 0,707$a$ | 0,408$a$ | 0,500$a$ | 3,464$a^2$ | 0,471$a^3$ |
| (*d*) | 12 pentag. | 116°34′ | 1,401$a$ | 1,114$a$ | 1,309$a$ | 20,646$a^2$ | 7,663$a^3$ |
| (*e*) | 20 triang. | 138°11′ | 0,951$a$ | 0,756$a$ | 0,809$a$ | 8,660$a^2$ | 2,182$a^3$ |

## Maxima et minima.

### Problème 845.

**2042.** *Inscrire à une sphère le parallélépipède de volume maximum.* (Voir *Méthodes*, n° 388.)

### Problème 846.

**2043.** *Dans un hémisphère, inscrire le parallélépipède rectangle maximum. Le solide doit avoir une de ses faces sur la base du segment.* (Voir *Méthodes*, nos 390, 391.)

Le double du solide demandé est inscrit dans la sphère entière. Dans ce cas, le cube est le solide maximum ; donc, pour l'hémisphère, c'est la moitié du cube : la hauteur est la moitié du côté du carré de base.

**Problème 847.**

**2044.** *Par un point donné A, mener un plan qui coupe une sphère suivant un cercle, de manière que le cône qui aurait ce cercle pour base et le sommet au centre O de la sphère soit maximum.*

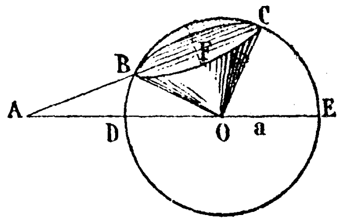


Fig. 1276.

Soit DBCE le grand cercle mené par le point A perpendiculairement à la section dont BC est le diamètre.

En représentant $FC = BF$ par $x$ et OF par $y$, le volume du cône sera exprimé par $\frac{\pi}{3} x^2 y$.

D'ailleurs, $x^2 + y^2 = a^2$ ;

donc le maximum du volume aura lieu (n° 392) pour les valeurs suivantes : $x^2 = \frac{2}{3} a^2$ et $y = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2}{3} a^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} a^3.$$

**Problème 848.**

**2045.** *Quel est le cône de volume maximum dont la génératrice a une longueur donnée* l ?

On a encore : $x^2 + y^2 = l^2$ et $V = \frac{\pi x^2 y}{3}$.

Ce problème ne diffère pas du n° 2049 ci-après.

**Problème 849.**

**2046.** *Couper un cône par un plan parallèle à la base, de manière que le cylindre qui aura cette section pour base et qui sera limité à la base du cône ait un volume maximum.*

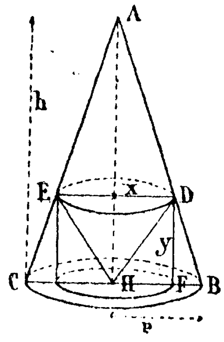


Fig. 1277

(Voir *Méthodes*, n° 386.)

D'après l'exercice rappelé, on peut poser les conclusions suivantes :

1° Le cylindre maximum est donné par la section DE faite au premier $^1/_3$ de la hauteur ou de la génératrice, à partir de la base.

En appelant $x$ le rayon de la section, $y$ la hauteur du cylindre, on a :

$$x = \frac{2}{3} r, \quad y = \frac{h}{3} ;$$

$$V = \pi x^2 y = \pi \frac{4}{9} r^2 \times \frac{h}{3} = \frac{4}{27} \pi r^2 h.$$

$$\text{Le cône} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{9}{27} \pi r^2 h ;$$

donc le cylindre est les $\frac{4}{9}$ du cône.

2° Le cône minimum circonscrit à un cylindre $\pi x^2 y$ est celui dont la hauteur $h = 3y$. Son volume est les $^9/_4$ de celui du cylindre.

3° La section ED, faite au premier $^1/_3$ de $h$ à partir de la base, donne le cône inscrit maximum HED.

**Problème 849. — I.**

**2047.** 1° *Deux points* A *et* O *sont à une distance constante* a ; *de l'un d'eux comme centre, décrire une circonférence telle que le cône qui aura pour sommet le point* A *et pour base le cercle dont* BC *est le diamètre soit maximum ;*

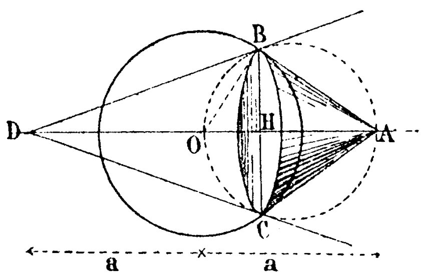


Fig. 1278.

2° *Quel est le maximum du double cône dont le cercle* BC *serait la base commune, et les points* O *et* A *seraient les sommets ?*

1° La distance AO étant constante, le cône ABC est inscrit dans une sphère qui a pour rayon $\dfrac{a}{2}$.

Pour mener la tangente DB qui donne le maximum, il suffit de prendre $DO = a = AO$; car alors $AH = {}^1/_3\,AD$ (n° 2046 ; voir aussi, ci-après, n° 2052, *Remarque*).

Puis, du centre O avec OB pour rayon, on décrit la circonférence demandée.

**2047 a.** *Remarque.* Soit $a = 2r$.

$$AH = \frac{4r}{3}\,; \quad OH = \frac{2r}{3}\,; \quad OH^2 = \frac{4r^2}{9}\,;$$

mais $$BH^2 = \frac{8r^2}{9}\,; \quad \text{donc} \quad OB^2 = \frac{12r^2}{9} = \frac{4r^2}{3},$$

$$OB = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$V = \frac{32\pi r^3}{81} \quad \text{ou} \quad \frac{4\pi a^3}{81}. \qquad (1)$$

2° Le double cône a pour volume $\pi BH^2 \times \dfrac{a}{3}$.

BH est la seule variable; son maximum a lieu lorsqu'elle égale $\dfrac{a}{2}$ ; donc le volume maximum du double cône égale :

$$\pi\frac{a^2}{4} \times \frac{a}{3} = \frac{\pi a^3}{12}. \qquad (2)$$

Le volume (1) est les $^{16}/_{27}$ du volume (2).

**Problème 850.**

**2048.** *A une sphère donnée, inscrire le cylindre de volume maximum.*

Soient $x$ le rayon de base, $y$ la moitié de la hauteur, $a$ le rayon de la sphère ;

$$V = \pi x^2 . 2y \quad \text{ou} \quad 2\pi x^2 y,$$

d'ailleurs $$x^2 + y^2 = a^2;$$

donc (nº 392) $$x^2 = \frac{2}{3} a^2 \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

d'où $$V = 2\pi . \frac{2}{3} a^2 . \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \pi a^3.$$

*Remarque.* On peut proposer ce problème sous un énoncé bien différent, et en faire, en quelque sorte, une nouvelle question (nº 2049).

### Problème 850. — I.

**2049.** *Une droite* AB, *de longueur constante, tourne autour d'un axe* MN *mené par le point* A ; *elle engendre la surface latérale d'un cône de révolution; pour quelle position de* AB ***le volume du cône engendré est-il maximum?***

1º $$V = \frac{\pi x^2 y}{3} \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = a^2;$$

donc la question est analogue à la précédente (nº 2048 ; voir aussi nº 2045).

Le maximum a lieu lorsque

$$x^2 = \frac{2}{3} a^2 \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

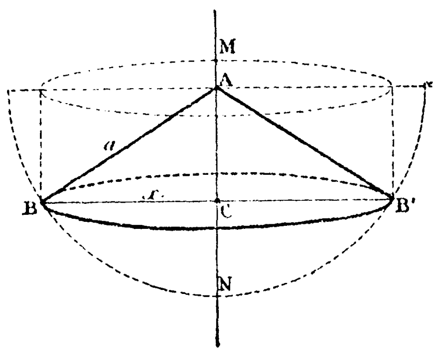


Fig. 1279.

Dans ce cas, $$V = \frac{\pi}{3} . \frac{2}{3} a^2 . \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{9\sqrt{3}} \pi a^3.$$

2º Le maximum peut se déduire de la question précédente (nº 2048).

Le cône maximum correspond au cylindre maximum inscrit dans un hémisphère dont $a$ serait le rayon, car le cône est le $1/3$ du cylindre correspondant. Or le cylindre maximum inscrit dans l'hémisphère a pour

volume : $$\frac{2}{3\sqrt{3}} \pi a^3;$$

donc le cône égale : $$\frac{2}{9\sqrt{3}} \pi a^3.$$

### Problème 850. — II.

**2050.** *Un triangle isocèle* MON, *dans lequel* OM = ON, *a ses côtés égaux de longueur constante ; étudier les variations du volume engendré par la révolution de ce triangle :*

1º *Le triangle tourne autour de la hauteur ;*

2º *Le triangle tourne autour d'une droite* OY, *menée par le sommet* O *parallèlement à la base* MN.

1° Pour obtenir un cône de révolution en faisant tourner MON autour de OX, il ne faut opérer qu'une rotation de 180°; ou bien il faut se borner à considérer le corps engendré par une révolution complète de OMP autour de OP.

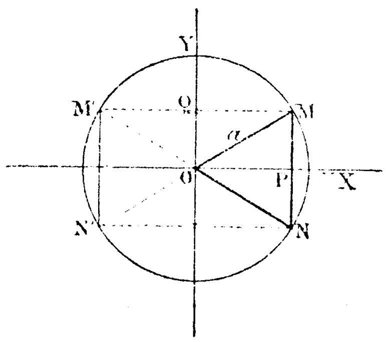


Fig. 1280.

Le cône est nul lorsque OM est sur OX.

Il augmente jusqu'à un maximum donné par la question précédente ; la hauteur OP doit égaler $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Puis le volume décroît et s'annule quand OM vient s'appliquer sur OY.

2° Le volume engendré par le triangle MON, tournant autour de OY, est les $^2/_3$ du cylindre inscrit qui a MN pour génératrice ; car la somme des volumes des cônes qui correspondent aux triangles MOM', NON' égale $\pi OP^2 \cdot \frac{MN}{3}$ ; donc le maximum du volume engendré par OMN a lieu lorsque le cylindre inscrit est maximum.

On sait que, dans ce cas, $OP^2 = {}^2/_3 a^2$ (n° 2048).

Ainsi le volume est nul lorsque $OP = a$ et que MP est nul, puis il augmente lorsque OM s'éloigne de OX. Il atteint son maximum lorsque

$$OP^2 = x^2 = \frac{2}{3}a^2 \quad \text{et} \quad MP = y = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$V = \frac{2}{3}\pi OP^2 \cdot 2MP,$$

$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{2}{3}a^2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{8}{9\sqrt{3}}\pi a^3.$$

Puis le volume décroît lorsque OM s'éloigne de plus en plus de OX. Il s'annule lorsque OM vient s'appliquer sur l'axe OY.

### Problème 851.

**2051**. *On donne une sphère et un plan tangent; mener un plan sécant parallèle au plan donné, et tel que le cylindre qui aurait pour base le cercle obtenu et pour hauteur la distance des deux plans, soit maximum.*

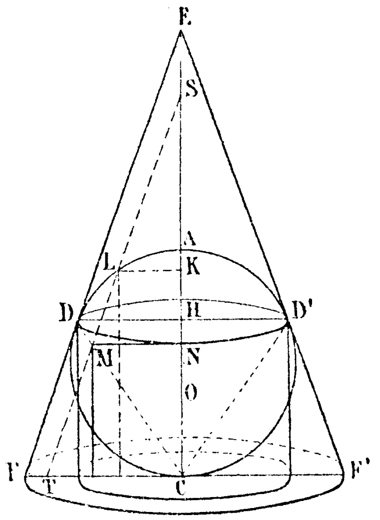


Fig. 1281.

On sait que le problème analogue, relatif à la pyramide (n$^{os}$ 384 et 386), est résolu par la section faite au $^1/_3$ de la hauteur, à partir de la base; donc, par extension, on en conclut que le cylindre maximum inscrit dans un cône donné a pour hauteur le $^1/_3$ de la hauteur du cône.

On a déjà vu ce résultat (n° 2046, 3°).

Ainsi on doit mener une tangente EDF, telle que DE soit double de FD (n° 315).

**2051 a.** *Remarque.* Le problème étant fondamental, il est utile de justifier directement la solution donnée.

Soit **FEF'** un cône circonscrit tel que $DF = \frac{FE}{3}$ ; il faut prouver que le cylindre qui aurait DH pour rayon et CH pour hauteur est le plus grand de tous ceux dont la base inférieure est sur le plan de la base du cône et dont la base supérieure serait une section de la sphère.

En effet, pour une autre section quelconque ayant, par exemple, LK pour rayon, considérons le cône qu'engendrerait la droite SLT parallèle à la tangente. Menons CMD, afin d'obtenir le point M situé au $^1/_3$ de TS ; le cylindre de rayon LK est plus petit que le cylindre de rayon MN (nos 384, 386) ; donc, à plus forte raison, il est plus petit que le cylindre de rayon DH ; donc le cylindre du rayon DH est maximum.

**2051 b.** *Volume maximum.*

$$CE = 4r, \quad FC = r\sqrt{2}\ ; \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 316,\ \mathbf{a})$$

donc
$$HC = \frac{4r}{3}, \quad DH = \frac{2}{3} r\sqrt{2}\ ,$$

$$V = \pi DH^2 \, . \, CH = \pi \, . \, \frac{8}{9} r^2 \, . \, \frac{4r}{3}\ ,$$

$$V = \frac{32}{27} \pi r^3.$$

**2051 c.** *Vérification.* On sait qu'en représentant la base du cône par B, la hauteur par $h$, le cylindre maximun a pour expression :

$$V = \frac{4}{27} Bh. \qquad (\text{n}^{\text{o}}\ 385)$$

Ce cylindre est les $^4/_9$ du cône circonscrit ; car le cône a pour volume :
$$V' = \frac{1}{3} \pi FC^2 \, . \, CE = \frac{1}{3} \pi \, . \, 2r^2 \, . \, 4r, \quad V' = \frac{8}{3} \pi r^3 ;$$

donc V égale bien les $^4/_9$ de V'.

### Problème 852.

**2052.** *Inscrire dans une sphère le cône de volume maximum.*

Le cône CDD' sera maximum en même temps que le cylindre qui en est le triple. Il faut donc prendre $CH = \frac{4}{3} r$.

D'après (1) (no 2051, **b**), $V = \frac{32}{81} \pi r^3$.

*Remarque.* $HC = \frac{4r}{3}$ ; donc $CE = 4r$ ; ainsi $AE = 2r$.

### Problème 853.

**2053.** *A une sphère donnée, circonscrire le cône de volume minimum.*

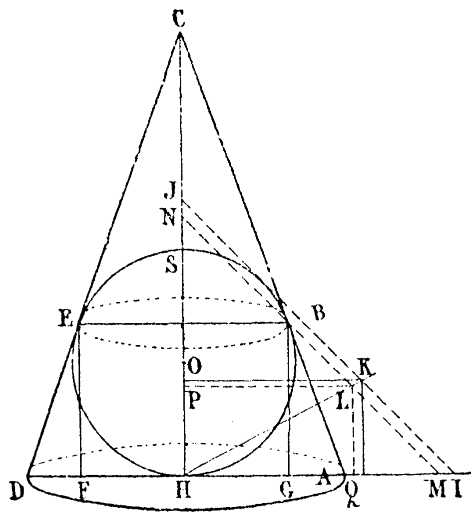



Fig. 1282.

D'après le n° 387, on est conduit à mener une tangente ABC telle que

$$AB = \frac{BC}{2}.$$

Le cône ACD est minimum (fig. 1282).

En effet, à une génératrice tangente IJ d'un autre cône circonscrit, menons une parallèle MBN.

Soit L le point au premier tiers. Il suffit de prendre SC = SH (n° 2052, *Remarque*). Le cylindre LPHQ est plus grand que le cylindre dont BG est la hauteur et GH le rayon; donc ce dernier, à plus forte raison, est plus petit que le cylindre K qui correspondrait au maximum du cône IJ; donc le cône ACD, qui est les $^9/_4$ du cylindre B (n° 2051, **c**. *Vérification*), est moindre que le cône IJ, qui est les $^9/_4$ du cylindre K.

*Remarques.* 1° $CS = SH = 2r$; $CH = 4r$; $AH^2 = 2r^2$ (n° 2051, **b**. *Volume maximum*);

donc
$$V = \frac{\pi AH^2 \times CH}{3} = \frac{\pi \times 2r^2 \times 4r}{3} = \frac{8}{3}\pi r^3.$$

Le volume du cône minimum est double de celui de la sphère inscrite, et la surface totale de ce cône $= 8\pi r^2$.

2° Le cône de volume minimum est aussi le cône dont la surface totale est minima; car, pour tout corps circonscrit à une sphère, le volume peut s'obtenir en multipliant la surface totale par le $^1/_3$ du rayon; par conséquent, le cône de volume minimum a une surface totale minima par rapport à celle des autres cônes circonscrits.

**Problème 853. — I.**

**2054**. *A une sphère donnée, circonscrire une pyramide triangulaire régulière dont le volume soit minimum. Quel est le volume de cette pyramide* (fig. 1282)?

Comme pour le cône circonscrit, il faut que la hauteur $= 4r$ (n° 2051 **b**).

Pour obtenir le volume de la pyramide, déterminons la surface de la section triangulaire qui correspond aux points de contact des faces latérales; or cette section est quatre fois plus grande que le triangle équilatéral qui a pour sommets les trois points de contact. Le rayon $r'$ du cercle circonscrit à ce triangle égale $\frac{AB}{2}$; il égale donc $\frac{2}{3}r\sqrt{2}$ (n° 2051, **b**).

Or le côté du triangle équilatéral inscrit $= r'\sqrt{3}$ (G., n° 277); donc ce côté $= \frac{2}{3} r\sqrt{2} \,.\, \sqrt{3} = 2r \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

La surface du triangle équilatéral en fonction du côté $a$ est donnée par $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ (G., n° 316.)

Donc triangle $= 4r^2 \,.\, \frac{2}{3} \,.\, \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3} r^2\sqrt{3}$.

La section étant 4 fois plus grande $= \frac{8}{3} r^2\sqrt{3}$.

La distance du sommet à la section est les $^2/_3$ de la hauteur; donc la base de la pyramide est à la section dans le rapport de 1 à $\frac{4}{9}$; ainsi cette base $= \frac{9}{4} \times \frac{8}{3} r^2\sqrt{3}$;

$$\text{base} = 6r^2\sqrt{3}.$$

La hauteur de la pyramide $= 4r$; le volume est donc :

$$6r^2\sqrt{3} \,.\, \frac{4r}{3} = 8r^3\sqrt{3}.$$

*Remarque.* Quel que soit le nombre de faces de la pyramide minima à circonscrire, la hauteur doit égaler $4r$.

### Problème 854.

**2055.** *Dans un secteur sphérique, inscrire le cylindre maximum.* (Voir *Méthodes*, n° 393.)

*Remarque.* Pour calculer le volume du cylindre, il faut recourir à la trigonométrie.

On donne l'angle AOB $= \alpha$; par suite, on connaît OB $= r \cos \alpha$ et AB $= r \sin \alpha$.

Il faut diviser l'angle $\alpha$ en deux parties AOD, DOE, telles que tang DOE $= 2$ tang AOD.

Soit AOD $= \beta$ et DOE $= \gamma$; on aura pour condition :

$$\text{tang}\, \gamma = 2 \,\text{tang}\, \beta;$$

puis $\alpha = \beta + \gamma$.

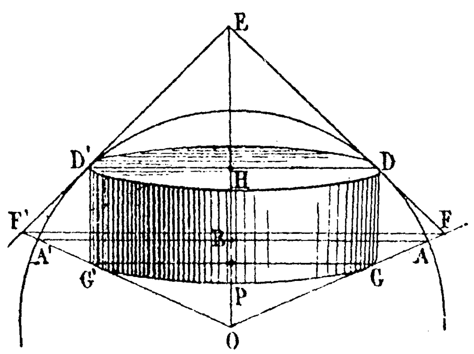


Fig. 1283.

On sait exprimer la tangente de la somme des deux arcs en fonction des tangentes de ces arcs (*Trigonométrie*, F. J.) :

$$\text{tang}\, \alpha = \frac{\text{tang}\, \beta + \text{tang}\, \gamma}{1 - \text{tang}\, \beta \,\text{tang}\, \gamma} = \frac{3 \,\text{tang}\, \beta}{1 - 2 \,\text{tang}^2 \beta}$$

Or tang $\alpha$ est connue, puisque l'angle $\alpha$ est donné; représentons cette tangente par $a$ et la tangente inconnue $\beta$ par $b$; on obtient une équation du second degré en $b$ :

$$a = \frac{3b}{1-2b^2}; \quad -a + 3b + 2ab^2 = 0;$$

$$b = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 8a^2}}{4a}.$$

On détermine ainsi l'angle $\beta$ par sa tangente ; par suite, $\gamma$ est aussi déterminé.

Puis $\quad \mathrm{DH} = r \sin \gamma; \quad \mathrm{DG} = \mathrm{HO} - \mathrm{OP} = r \cos \gamma - \mathrm{OP}.$

La distance OP de la corde GG' est facile à déterminer, car on connaît GP ou DH et l'angle $\alpha$. Ainsi $\mathrm{OP} = \mathrm{GP} \operatorname{cotang} \alpha$.

### Problème 855.

**2056.** *Dans un segment sphérique à une base, inscrire le cylindre maximum.*

(Voir *Méthodes*, n° 393.)

Soit PF la trace de la base du segment sphérique.

Il faut mener une tangente DEF, telle que DE = 2DF.

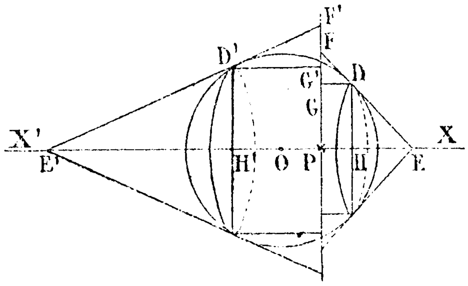



Fig. 1284.

Volume $\pi \mathrm{DH}^2 . \mathrm{PH}$ (n° 317, *h*, *i*) :

$$V = \pi \frac{-2a^2 + 6r^2 - 2a\sqrt{a^2 + 3r^2}}{9} \cdot \frac{-2a + \sqrt{a^2 + 3r^2}}{3}.$$

$$V = \frac{2}{27}\pi\left[a^3 - 9ar^2 + (a^2 + 3r^2)\sqrt{a^2 + 3r^2}\right].$$

Pour l'autre segment :

$$V' = \pi \frac{-2a^2 + 6r^2 + 2a\sqrt{a^2 + 3r^2}}{9} \cdot \frac{2a + \sqrt{a^2 + 3r^2}}{3},$$

$$V' = \frac{2}{27}\pi\left[-a^3 + 9ar^2 + (a^2 + 3r^2)\sqrt{a^2 + 3r^2}\right].$$

### Problème 855. — I.

**2057.** *A un segment sphérique donné circonscrire le cône minimum.*

(Voir *Méthodes*, n° 394.)

Comme cas particulier, on peut considérer l'hémisphère.

Alors $\quad \mathrm{PE} = \mathrm{OE} = r\sqrt{3}. \quad$ (n° 316, **a**)

Ainsi la hauteur du cône minimum circonscrit à un hémisphère égale le côté du triangle équilatéral inscrit dans un grand cercle de la sphère.

**Problème 856.**

**2058.** *Inscrire dans une sphère un prisme triangulaire régulier maximum.*

(Voir *Méthodes*, n° 397.)

**Problème 856. — I.**

**2059.** *Inscrire dans une sphère un prisme régulier maximum dont la base a un nombre quelconque de côtés.*

(Voir *Méthodes*, n° 399.)

**Problème 857.**

**2060.** *Inscrire dans une sphère un cylindre dont la surface latérale soit maxima.*

Soient $x$ le rayon du cylindre, $2y$ la hauteur.

La surface latérale $= 2\pi x \times 2y = 4\pi xy$.

Or on a : $$x^2 + y^2 = r^2.$$

Donc (n° 345) $$x = y = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

*Remarques.* 1° Le problème est analogue à l'inscription du rectangle maximum dans un cercle donné, car la variation de la surface latérale ne dépend que de $xy$.

2° On résout de la même manière toutes les questions relatives à l'inscription d'un prisme régulier dont la surface latérale doit être maxima.

Ainsi, pour le prisme triangulaire, désignons la hauteur par $2y$, et le rayon du cercle circonscrit à la base par $x$.

Exprimons le périmètre de la base en fonction de $x$ :

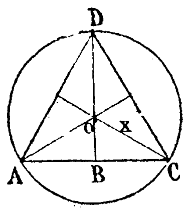


Fig. 1285.

$$OB = \frac{x}{2}; \quad AB^2 = \frac{3}{4}x^2;$$

$$AB = \frac{x}{2}\sqrt{3}; \quad 6 . AB = 3x\sqrt{3};$$

donc la surface latérale $= 3x\sqrt{3} \times 2y = 6xy\sqrt{3}$.

On peut encore poser $$x = y = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Dans ce cas, la surface latérale $= 6\sqrt{3} \times \frac{r^2}{2} = 3r^2\sqrt{3}$.

3° Lorsqu'on demande un cylindre à surface latérale *maxima* et dont une des bases repose sur un plan donné, tandis que l'autre est déterminée par une section sphérique parallèle au plan considéré, le problème revient à inscrire dans un segment circulaire donné le rectangle de surface maxima (nº 364, 2º). On mène une tangente qui soit divisée en deux parties égales par le point de contact.

### Problème 857. — I.

**2061**. *Dans un secteur sphérique, inscrire un cylindre dont la surface latérale soit maxima.*

1º Comme à l'exercice précédent (nº 2060, 3º), on mène une tangente MDN qui soit divisée en deux parties égales par le point de contact D.

2º Le produit des rectangles de surface maxima, inscrits dans deux secteurs dont la somme égale le cercle entier, est une quantité constante $R^4$. Or, comme on passe de chaque rectangle maximum à la surface latérale correspondante en multipliant la surface par la constante $2\pi$, on voit que le produit des deux surfaces égale $4\pi^2R^4$ ou $(2\pi R^2)^2$.

En d'autres termes : la surface de l'hémisphère est moyenne géométrique entre les surfaces latérales des deux cylindres.

*Remarque*. Pour inscrire dans un segment sphérique un cylindre dont la surface latérale soit maxima, on mène MDN, telle que

$$MD = DN,$$

$$ON = \frac{a - \sqrt{a^2 + 8r^2}}{2}.$$

### Problème de Fermat 857. — II.

**2061 a**. *Inscrire dans une sphère un cylindre dont la surface totale soit maxima.*

Soient $r$ le rayon de la sphère, $x$ le rayon du cylindre et $y$ la moitié de sa hauteur.

Le demi-cylindre a pour surface totale :

$$2\pi xy + \pi x^2, \quad \text{ou} \quad \pi x(2y + x). \qquad (1)$$

Telle est la valeur à rendre maxima; on a d'ailleurs la relation

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

En traitant la question par l'algèbre, on trouve pour maximum de la surface totale :

$$\pi r^2 (1 + \sqrt{5}),$$

alors

$$x = \frac{r}{10}\sqrt{10(5 + \sqrt{5})}.$$

(*Cours développé d'algèbre élémentaire*, par B. LEFEBVRE. S. J., professeur à Louvain, tome II, p. 269, problème XIV.)

(Voir aussi *Exercices d'algèbre* F. G.-M., 5e édition, nº 1383.)

**Note.** 1º Le problème a été résolu par FERMAT (d'après M. A. AUBRY, dans son Étude élémentaire sur la théorie des maxima et des minima, p. 49 d'*El Progreso Matemático*, 1900, à *Zaragoza*).

2º Le *Cours développé d'Algèbre élémentaire*, cité ci-dessus, est remarquable à bien des titres, et notamment à cause des notes bibliographiques et biographiques très intéressantes dont il est enrichi.

### Problème 858.

**2062**. *Quel est le maximum du cylindre engendré par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés? Le périmètre du rectangle est constant.*

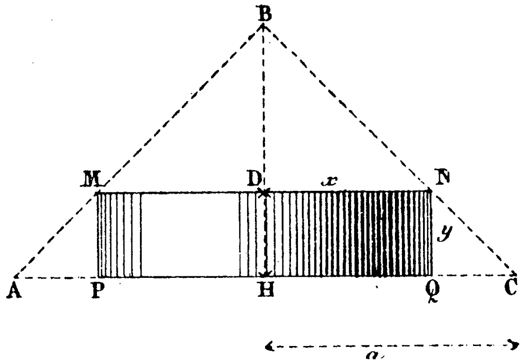



Fig. 1286.

Soient $x$ le rayon de la base, $y$ la hauteur, et $x+y=a$.

Le volume égale $\pi x^2 y$; donc (n° 376)

$$x=\frac{2a}{3} \quad \text{et} \quad y=\frac{a}{3}.$$

$$V=\pi\,\frac{4a^2}{9}\cdot\frac{a}{3}=\frac{4}{27}\,\pi a^3.$$

Il suffit de prendre

$$DH=\frac{a}{3} \text{ et } DN=\frac{2}{3}\,a.$$

*Remarque*. Le problème n'est qu'un cas particulier de l'inscription d'un cylindre dans un cône. En effet, admettons qu'on ait un cône de hauteur égale au rayon $a$. La demi-section BHC serait un triangle rectangle isocèle pour lequel on aurait $x+y=a$, quelle que fût la position du point N.

Or le cylindre maximum inscriptible dans le cône doit avoir pour hauteur le $^1/_3$ de celle du cône (n$^{os}$ 384 et 386); donc

$$y=\frac{BH}{3}=\frac{a}{3}.$$

### Problème 858. — I.

**2063**. *Quel est le cône maximum dont la somme de la hauteur et du rayon de base est constante?*

Le problème est identique à celui du cylindre engendré par un rectangle de périmètre constant; mais le volume est trois fois moindre que celui du cylindre qui aurait la même constante pour somme de la hauteur et du rayon.

### Problème 859.

**2064**. *Quel est le cylindre de volume maximum qui a pour surface totale* $2\pi a^2$?

Soient $x$ le rayon de la base et $y$ la hauteur.

La surface totale ou $\quad 2\pi a^2=2\pi x^2+2\pi xy,$

d'où

$$x^2+xy=a^2,$$

$$V=\pi x^2 y.$$

Donc, d'après un principe connu (n° 380),

$$x^2=\frac{a^2}{3} \quad \text{et} \quad y=\frac{2a}{\sqrt{3}},$$

$$V=\pi\,\frac{a^2}{3}\times\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}.$$

**Problème 859. — I.**

**2065.** *On donne un plan P, une sphère et un grand cercle fixe; mener une section parallèle au plan P et telle que le tronc cylindrique droit, qui aura cette section pour base et que le grand cercle limitera, ait un volume maximum.*

1° Soient $x$ le rayon de la section et $y$ la distance du centre de la sphère au centre de la section.

Le volume égale $\pi x^2 y$.

D'ailleurs $$x^2 + y^2 = r^2,$$

donc il faut prendre (nos 376 et 392) :

$$x^2 = \frac{2}{3} r^2; \quad y = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Avec cette valeur pour rayon, il faudra décrire une sphère concentrique à la première et mener un plan tangent parallèle au plan donné P.

2° En prolongeant le tronc cylindrique obtenu, on obtient le cylindre inscrit dans la sphère; donc il faut qu'il ait pour base une section égale à $^2/_3 \pi r^2$.

**Problème 860.**

**2066.** *Quel est le cylindre de volume maximum inscrit dans un cône dont les génératrices sont inclinées à 45° et dont la surface totale est donnée?*

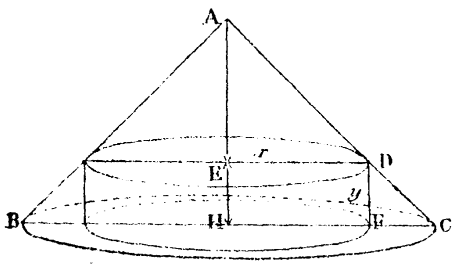



Fig. 1286.

Soient $x$ le rayon du cylindre, $y$ la hauteur de ce même cylindre et $\pi a^2$ la surface totale du cône.

La génératrice AC est l'hypoténuse d'un triangle isocèle rectangle; donc la somme $x + y$ est constante; elle égale AH = HC.

Il suffit d'exprimer AH en fonction de la surface totale donnée $\pi a^2$.

Or $$S = \pi \cdot HC^2 + \pi HC \times AH\sqrt{2} = \pi \cdot AH^2(1 + \sqrt{2}) = \pi a^2,$$

d'où $$AH = \frac{a}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}; \quad \text{donc} \quad x + y = \frac{a}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}.$$

D'ailleurs le volume $\frac{\pi x^2 y}{3}$ du cylindre est maximum lorsque

$$x = {}^2/_3 AH \quad \text{et} \quad y = {}^1/_3 AH. \qquad (\text{n}^o\ 376)$$

Donc $$x^2 = \frac{4a^2}{9(1+\sqrt{2})} \quad \text{et} \quad y = \frac{a}{3\sqrt{1+\sqrt{2}}}.$$

$$V = \frac{\pi}{6}\left(\frac{2a}{3\sqrt{1+\sqrt{2}}}\right)^3.$$

**Problème 860. — I.**

**2066 a.** *Dans une sphère donnée, inscrire un cône dont la surface totale soit maxima.*

Il faut recourir à la méthode des coefficients indéterminés, de même que pour traiter algébriquement la question 1712, problème 615.

Cette méthode et la question ci-dessus ont été indiquées par H. Grillet, alors professeur au lycée de Brest (*N. A.*, 1850, p. 70 et 1857, p. 1).

(Voir aussi *Cours d'algèbre* F. G.-M., 3e édition, p. 306.)

**Problème 860. — II.**

**2067.** *Dans une sphère, on inscrit un cône équilatéral; mener un plan parallèle à la base, de telle sorte que la différence des sections faites dans la sphère et le cône soit maxima ou minima.*

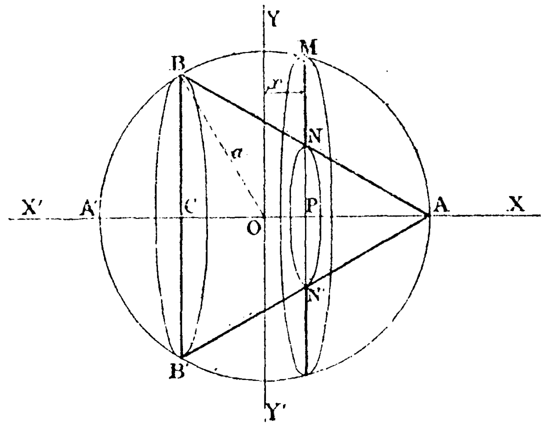


Fig. 1288.

Soient $a$ le rayon de la sphère, A le sommet du cône, BB' le diamètre de la base.

On sait que $BB' = AB$ et $OC = \frac{a}{2}$, car le triangle ABB' est équilatéral.

La section menée par le point A ou par la base BB' donne une différence nulle, tandis que toute section intermédiaire donne une certaine valeur pour la couronne

$$\pi(MP^2 - NP^2);$$

donc il y a un *maximum* entre A et C.

Au *point de vue géométrique*, dans le problème proposé, il n'y a pas lieu d'étudier les sections faites de A vers X ou de C vers X', puisque le cône inscrit ne dépasse pas les points A et C.

Pour avoir l'aire de la couronne qui correspond à MN, il suffit d'exprimer $MP^2$ et $NP^2$ en fonction de $a$ et de $x$, ou OP.

1° $$MP^2 = a^2 - x^2.$$

2° Le triangle ANN' est équilatéral; donc

$$AP = \frac{AN}{2}\sqrt{3} = PN\sqrt{3},$$

d'où
$$PN = \frac{AP}{\sqrt{3}} = \frac{a - x}{\sqrt{3}};$$

ainsi
$$PN^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2}{3}, \qquad (1)$$

$$MP^2 - PN^2 = \frac{2a^2 + 2ax - 4x^2}{3},$$

$$\pi(MP^2 - NP^2) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a^2}{2} + \frac{ax}{2} - x^2\right). \qquad (2)$$

La variation ne peut dépendre que des termes $\frac{a}{2}x - x^2$, c'est-à-dire de

$$x\left(\frac{a}{2} - x\right).$$

Mais la somme des facteurs $x$ et $\left(\frac{a}{2} - x\right)$ est constante, elle égale $\frac{a}{2}$; donc le produit est maximum lorsque les facteurs sont égaux (nº 343); donc

$$x = \frac{a}{2} - x; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{a}{4}.$$

Le maximum de $$\frac{2}{3}\pi(a^2 + ax - 2x^2)$$

est donc : $$\frac{2}{3}\pi\left(a^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8}\right).$$

$$\text{Maximum} = \frac{3}{4}\pi a^2.$$

**2067 a.** *Remarques.* 1º Pour avoir le maximum, on peut aussi procéder comme il suit, même sans résoudre l'équation

$$\frac{a^2}{2} + \frac{ax}{2} - x^2 = 0,$$

que l'on obtiendrait en égalant à 0 le trinôme du second degré (2).

En effet, on peut écrire :

$$x^2 - \frac{ax}{2} - \frac{a^2}{2} = 0. \tag{3}$$

Or les racines de cette équation sont réelles, puisque la couronne est nulle pour les sections menées par le point A ou par le point C. On sait, d'ailleurs, que la demi-somme des racines réelles d'un trinôme du second degré correspond à un maximum ou à un minimum; donc *le maximum est donné par la section équidistante de* A *et de* C.

Mais, en valeur absolue,

$$OC = \frac{a}{2}, \quad AC = \frac{3a}{2};$$

$$\frac{AC}{2} \quad \text{ou} \quad AP \text{ doit égaler } \frac{3a}{4}.$$

Ainsi le point P doit être aux $^3/_4$ du rayon à partir du sommet A, ou bien au $^1/_4$ à partir du centre.

2º Conséquence. *Quelle que soit la position du sommet* A *sur l'axe* XX' *et l'inclinaison de la génératrice, le maximum sera donné par la section équidistante des points-racines* A *et* C, *qui correspondent aux intersections de la circonférence et de la génératrice.*

3º On sait que la somme algébrique des racines de l'équation $x^2 + px + q$ égale le coefficient du second terme, mais changé de signe (Alg., nº 226); donc la demi-somme des racines de l'équation $x^2 - \frac{ax}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$ donne $\frac{a}{4}$ pour la valeur de OP. Ce résultat est conforme à celui qu'on a trouvé précédemment, mais il permet de généraliser la remarque 2°; car la somme des racines, *même imaginaires,* d'une équation à coefficients réels est une quantité réelle ; donc...

4° *Lorsque la génératrice du cône ne rencontre pas la circonférence, la couronne minima est donnée par la section menée par un point tel que* OP *est la moitié du coefficient changé de signe de l'équation qu'on obtient en retranchant la section sphérique de la section conique.*

**2068.** *Considérations géométriques.* Les considérations géométriques sont très utiles pour arriver à l'interprétation de certains résultats fournis par l'analyse algébrique.

Ainsi la couronne a pour expression

$$\frac{2}{3}\pi(a^2+ax-2x^2),$$

ou

$$-\frac{4}{3}\pi\left(x^2-\frac{a}{2}x-\frac{a^2}{2}\right).$$

Lorsque $x$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, ce trinôme est positif pour toute

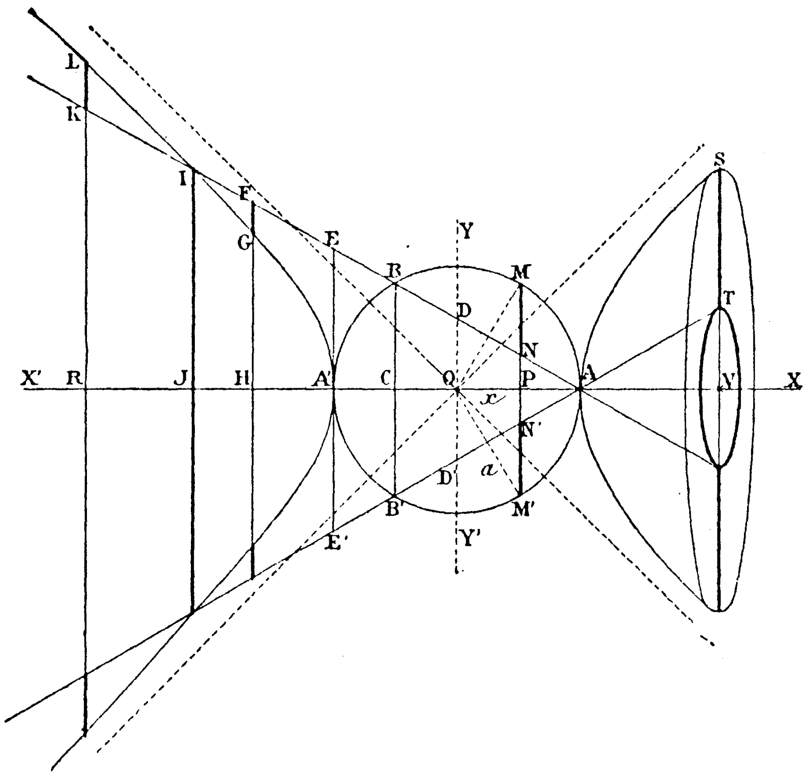



Fig. 1289.

valeur de $x$ comprise entre les racines ; il s'annule pour les valeurs des racines, et reste négatif, en tendant vers l'infini, pour toute valeur de $x$ non comprise entre les racines ; mais, dans tous les cas, le trinôme a une valeur réelle. Or au delà du sommet A, vers AX, par exemple, que deviennent les sections du cône et de la sphère ? — Voici la réponse :

Le cône doit être considéré comme formé par deux nappes illimitées dans les sens AX et AX'.

La sphère a pour figure complémentaire un hyperboloïde équilatère à deux nappes. En effet, la circonférence a pour équation :

$$x^2+y^2=a^2. \qquad \text{(G., n° 646.)}$$

L'hyperbole équilatère de mêmes sommets A et A' a pour équation :

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Ainsi l'ordonnée MP est donnée par

$$y^2 = a^2 - x^2,$$

tandis que l'ordonnée SV de l'hyperbole est donnée par

$$y^2 = x^2 - a^2.$$

C'est une simple permutation de signes.

Par suite, la sphère complétée par l'hyperboloïde équilatère et le cône à deux nappes donnent lieu à des sections circulaires correspondantes, quelle que soit la valeur attribuée à la variable $x$.

La somme ou la différence des sections correspondantes donne lieu à une question identique ou analogue au problème proposé.

Ainsi, en étudiant directement la couronne comprise entre l'hyperboloïde et le cône, on reconnaît que la surface annulaire change de signe, en passant par zéro, au point I, où la génératrice du cône coupe l'hyperbole.

L'étude complète conduirait à des questions déjà publiées (*Appendice aux Exercices de Géométrie*, nº 819, page 92); il suffit d'indiquer le résultat.

**2068 a. Résumé.** 1º En prenant en un point quelconque P de AC une ordonnée $y$ telle que

$$y^2 = \text{MP}^2 - \text{NP}^2,$$

on obtiendrait une ellipse, dont la rotation autour de AC engendrerait un ellipsoïde ayant A et C pour sommets, et dont le volume serait équivalent au volume engendré par le segment circulaire AMB tournant autour de XX'.

Le maximum de la couronne est donné par le plan mené à égale distance de A et C, parce que le plan passe par le centre de l'ellipsoïde.

Ce maximum égale $\frac{3}{4}\pi a^2$; donc $b^2$ de l'ellipsoïde est donné par

$$b^2 = \frac{3}{4} a^2.$$

L'ellipsoïde serait continué par un hyperboloïde de révolution à deux nappes ayant mêmes sommets A et C et mêmes axes de l'ellipsoïde.

2º Il en est de même pour tout cône dont la génératrice coupe la circonférence en deux points.

Les projections sur l'axe des deux points d'intersection sont les sommets communs à l'ellipsoïde et à l'hyperboloïde à deux nappes.

3º Lorsque la génératrice du cône est tangente à la circonférence, la projection du point de contact représente l'ellipsoïde; l'hyperboloïde à deux nappes devient un cône à deux nappes ayant pour sommet la projection du point de contact.

4º Lorsque la génératrice du cône ne rencontre pas la circonférence, on obtient un hyperboloïde à une seule nappe, ayant XX' pour axe non transverse de l'hyperbole génératrice.

Le plan mené par le centre de l'hyperboloïde correspond à la couronne minima.

Nous rappelons l'énoncé d'un théorème beaucoup plus général que celui qui donne lieu au résumé précédent.

**2068 b. Théorème général.** *On a des courbes du second degré ayant un de leurs axes sur une droite* OX *qui sert d'axe de rotation, les sommets des courbes sont d'ailleurs en des points quelconques de* OX; *on a pareillement des droites dans une situation quelconque par rapport à* OX; *toutes les lignes tournent autour de* OX *et engendrent des surfaces connues : cylindre, cône, hyperboloïde, paraboloïde; la somme algébrique des volumes compris par ces surfaces exprime le volume d'un corps de révolution dont la méridienne est une courbe du second degré ayant* OX *pour axe.* (*Appendice aux Exercices de Géométrie*, nº 819.)

Il en résulte que la variation de la somme algébrique des sections faites dans ces corps par un plan perpendiculaire à l'axe, dépend du *corps de révolution* qui est la somme algébrique de tous les volumes engendrés par la rotation des lignes données.

1º Si le *corps de révolution* se compose d'un ellipsoïde et de l'hyperboloïde à deux nappes complémentaires, il y aura une section maxima à égale distance des sommets de l'ellipsoïde.

2º Si le *corps de révolution* est un hyperboloïde à une nappe, il y aura une section minima.

3º La section minima égalera zéro si le *corps de révolution* est un cône à deux nappes, ou si ce corps est formé par deux paraboloïdes de même sommet et dirigés respectivement vers OX et vers OX'.

### Théorème 860. — III.

**2068 c.** *On donne une sphère, un point fixe* A, *on coupe la sphère par un plan* (P), *et l'on prend le cercle d'intersection ainsi obtenu pour directrice d'un cône ayant* A' *pour sommet; ce cône coupe de nouveau la sphère suivant un cercle dont le plan est* (Q). *Démontrer que si l'on fait varier le plan* (P) *de manière qu'il passe par un point fixe* B, *le plan* (Q) *passe aussi par un point fixe* B'. (Proposé par M. MANNHEIM, résolu par M. SOLLERTINSKY, à Gatchina. *J. M. E.*, 1890, page 207.)

On considère le plan déterminé par le centre de la sphère et les points fixes A et B, et l'on retombe sur une question connue (nºs 1236 et 1237).

### Lieu 860. — IV.

**2068 d.** *Quel est le lieu géométrique du centre des sections circulaires d'un cône oblique à base circulaire?*

Soit ABC la section du cône par le plan mené par le sommet C et le centre M du cercle de base, perpendiculairement au plan de cette base.

AB est le diamètre, le lieu du centre des sections parallèles à la base est la médiane CM.

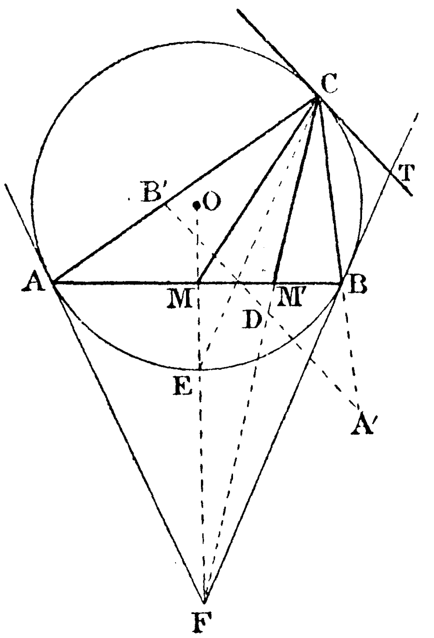



Fig. 1290.

Pour avoir la direction des sections circulaires antiparallèles, on peut mener la tangente CT au cercle circonscrit ABC, ou bien prendre

$$CA' = CA \quad \text{et} \quad CB' = CB;$$

et l'on obtient A'B' parallèle à CT. (Voir aussi n° 659.)

Le lieu du centre des sections perpendiculaires au plan principal A'CB' et parallèle à CT est la médiane CM' du triangle A'B'C, c'est-à-dire la *symédiane* du triangle ABC, ou ligne symétrique de CM par rapport à la bissectrice CDE.

On peut aussi mener les tangentes AF, BF et mener CF; cette dernière construction est due à CHASLES.

**Lieu 860. — V.**

**2068 e.** *Étant données deux droites* SA, SB *qui se coupent, par* SA, *on mène un plan et par* SB *un plan perpendiculaire au précédent : trouver le lieu des droites d'intersection.* (*J. M. E. S.*, 1881, p. 447.)

Si l'on mène un plan perpendiculaire à SA, ce plan coupera le trièdre formé par ASB et les deux plans mobiles suivant un triangle rectangle dont le sommet de l'angle droit sera sur l'arête SC; donc le point C d'intersection de cette arête mobile, avec le plan mené perpendiculairement à SA, sera sur un cercle ayant pour diamètre l'intersection de ce plan et du plan ASB. Il en résulte que la surface engendrée par l'intersection des plans mobiles est un cône oblique à base circulaire; les deux directions de sections circulaires sont les deux plans perpendiculaires aux arêtes SA et SB.

**Note.** Un théorème déjà donné (n° 1901 a) sert de *lemme* à la question précédente. Nous nous bornons à reproduire le texte du *Journal de Bourget et Kœhler,* bien qu'il y eût lieu de le contrôler en recourant à la Géométrie analytique.

**Problème 860. — VI.**

**2068 f.** *On imprime un mouvement de rotation autour de l'axe à une des bases* $\pi r^2$ *d'un cylindre de révolution, l'autre base restant fixe; en outre, les génératrices du cylindre restent rectilignes et conservent leur longueur* g. *Quel est le volume du nouveau corps de révolution ainsi obtenu dans les cas suivants :*

1° *Les génératrices arrivent à se couper sur l'axe;*

2° *Les génératrices sont éloignées de l'axe de la distance* d?

Dans le premier cas, la rotation a été d'une demi-circonférence, les génératrices s'entrecroisent en un même point, le corps de révolution se compose de deux cônes égaux opposés par le sommet.

Il faut **calculer la hauteur** totale; or elle est donné par $\sqrt{g^2 - 4r^2}$ ;

donc $$V = \frac{\pi r^2}{3} \sqrt{g^2 - 4r^2} .$$

Dans **le second cas**, le corps de révolution est un hyperboloïde à une nappe, le cercle de gorge est $\pi d^2$; la corde qui est la projection sur la base $\pi r^2$ de la génératrice égale :

$$\text{corde} = 2\sqrt{r^2 - d^2} \ ; \quad \text{hauteur} = \sqrt{g^2 - 4(r^2 - d^2)} \ .$$

Or le volume de l'hyperboloïde à une nappe est équivalent à un cylindre de même hauteur qui a pour base les $\frac{2}{3}$ du cercle de gorge plus $\frac{1}{3}$ du cercle qui limite le segment hyperbolique;

donc $$V = \pi\sqrt{g^2 - 4(r^2 - d^2)} \cdot \frac{2d^2 + r^2}{3} . \quad \text{(G., n° 951.)}$$

2868 g. **Note.** 1° On pourrait proposer des questions analogues pour le tronc du cône.

2° L'*Appendice aux Exercices de Géométrie* indique un assez grand nombre de questions intéressantes sur les volumes des trois corps ronds : des ellipsoïdes, hyperboloïdes, paraboloïdes; des corps limités par des plans gauches; les onglets cylindriques, les voûtes en arc de cloître et les voûtes d'arête.

### Problème 860. — VII.

**2068 h.** *De toutes les calottes sphériques de même surface, quelle est celle qui donne le segment sphérique de volume maximum?*

C'est l'hémisphère; car en considérant le double de la surface donnée, on sait que la sphère est le volume maximum, etc.

Les *Annales de Gergonne* (tome XV, 1824-1825, pages 132, 236 à 243, QUERRET et TÉDENAT) traitent cette question et plusieurs autres analogues, avec d'intéressants développements.

### Problème 860. — VIII.

**2068 i.** *De toutes les calottes sphériques de même surface, tangentes en leur sommet en un point* P *d'un plan donné, quel est le lieu géométrique des circonférences de base de ces calottes?* (*A. G.*, t. III, 1812-1813, p. 383.)

Soit $r$ le rayon de la calotte hémisphérique de surface donnée qui correspond au volume maximum; le lieu des circonférences de base est la surface sphérique qui a le joint P pour centre et $2r$ pour rayon.

2068 j. **Note.** 1° Le *lituus* (bâton recourbé, crosse), nom donné par COTES, est un lieu géométrique qui offre, pour les surfaces planes, quelque analogie avec le précédent; mais il n'est point du ressort des éléments de géométrie.

On considère des secteurs circulaires de même centre O, de même superficie $a^2$, ayant un côté OM dans une direction invariable OMX, tandis que l'autre côté ON varie de direction, puisque l'angle $\theta$ du secteur est variable : le *lituus* est le lieu du point N.

L'équation en coordonnées polaires est $\rho^2\theta = a^2$. (*N. A.*, 1880, p. 461.)

La courbe est une spirale ayant OX pour asymptote, lorsque $\theta$ tend vers zéro, et coupant d'ailleurs cette droite quand $\theta = n\pi$, $n$ étant un nombre entier quelconque. Le pôle est un point asymptotique, parce que $\theta$ peut croître indéfiniment.

2° On peut se poser aussi la question suivante : *Déterminer le lieu géométrique des extrémités de tous les arcs de cercle d'une même longueur donnée, mais de rayons différents, qui touchent par leurs milieux, une même droite donnée, en un même point.*

La solution à été donnée par Bérard, principal du Collège de Briançon; Van Utenhove; Tédenat, recteur de l'académie de Nîmes. (*Annales de Gergonne*, tome III, 1812-1813, p. 377.)

Dans cette belle étude de 1813, on donne comme équations de la courbe :

$$\rho = \frac{a \sin \omega}{\omega} \quad \text{et} \quad \frac{y}{x} = \text{tang}\, \frac{ay}{x^2 + y^2},$$

suivant qu'il s'agit des coordonnées polaires, ou des coordonnées rectangulaires; d'ailleurs le problème avait été déjà traité par Bossut dans son *Calcul intégral*.

De nos jours, la même question a fait l'objet de diverses études; la courbe a été nommée *Cochléoïde* : c'est l'inverse de la *quadratrice de Dinostrate*, ainsi que l'indique l'équation polaire ci-dessus. (*Mathesis*, 1885, p. 89, M. J. Neuberg; *Courbes remarquables*, t. II, p. 96, M. Gomès Teixeira.)

La *Cochléoïde* est la perspective d'une hélice cylindrique, sur un plan perpendiculaire à l'axe, lorsque le point de vue est sur l'hélice. (Voir le bel article de M. A. Aubry dans la 3me partie, p. 311, des *Récréations mathématiques et problèmes* de Rouse-Ball; ouvrage publié en 1909, par Fitz-Patrick.)

* Bossut, né à Tarare en 1730, mort en 1813; auteur d'une *Histoire des mathématiques*, etc.

* Dinostrate, né vers — 370, élève de Platon; on lui attribue la courbe qui porte son nom.

# LIVRE VIII

## THÉORÈMES

### Ellipse.

#### Théorème 861.

**2069.** *Les diamètres de l'ellipse sont des droites qui passent par le centre de la courbe.*

On appelle *diamètre rectiligne* une droite qui divise en deux parties égales une série de cordes parallèles. Deux diamètres sont dits *conjugués* lorsque chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

Dans le cercle, dont la projection donne l'ellipse, considérons une série de cordes parallèles : les milieux de ces cordes sont sur un même diamètre du cercle, et ce diamètre se projette suivant une droite qui passe par le centre de l'ellipse.

Toutes les cordes parallèles du cercle donnent, par leurs projections, des cordes parallèles de l'ellipse ; car tous les plans projetants sont parallèles.

Le milieu de chaque corde du cercle se projette au milieu de la corde correspondante de l'ellipse ; car chaque partie de cette dernière corde égale la moitié de la corde du cercle multipliée par le cosinus de l'angle formé par la corde et sa projection.

Ainsi la projection d'un diamètre quelconque du cercle donne un diamètre de l'ellipse, et toute droite menée par le centre d'une ellipse est un diamètre. Donc *les diamètres de l'ellipse...*

#### Théorème 862.

**2070.** *Deux diamètres rectangulaires du cercle principal ont pour projections deux diamètres conjugués de l'ellipse.*

Soient deux diamètres rectangulaires MM′ et NN′, et les cordes EE′ et FF′ parallèles à l'un d'eux. Les lignes *nn′*, *ee′*, *ff′* sont parallèles (nº 2069) ; les projections *g* et *l* des points G et L, où les cordes sont coupées par MM′, sont au point de rencontre des cordes de l'ellipse et de *mm′* : ces points d'ailleurs sont au milieu de leurs cordes respectives (nº 2069). Donc $mm'$ divise en deux parties égales les cordes $ee'$ et $ff'$ parallèles à

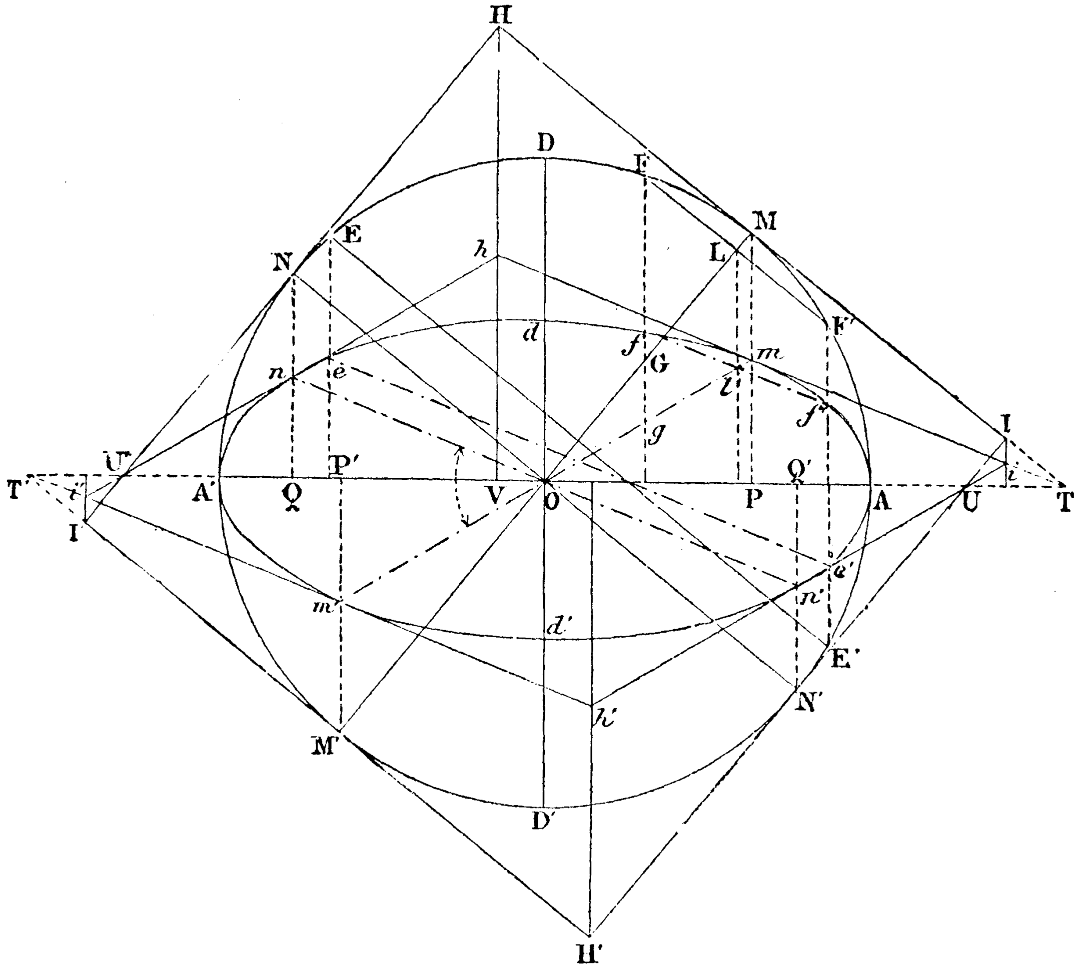


Fig. 1291.

$nn'$; donc $mm'$, qui passe au centre, est un *diamètre*. De même $nn'$ divise en deux parties les cordes parallèles à $mm'$; donc $mm'$ et $nn'$, projections de deux diamètres rectangulaires du cercle principal, sont deux *diamètres conjugués* de l'ellipse.

### Théorème 863.

**2071**. *Les parallèles* $hi'$ *et* $h'i$, *menées à un diamètre* $mm'$ *par les extrémités de son conjugué, sont tangentes à l'ellipse; et réciproquement, la corde des contacts de deux tangentes parallèles à un diamètre donné* $mm'$ *est le conjugué de ce diamètre.*

1º Les parallèles HI' et H'I, au diamètre MM', sont perpendiculaires à NN', et par suite sont tangentes au cercle ; les projections $h'i'$ et $hi$ n'ont qu'un point commun avec l'ellipse, et elles sont tangentes à cette courbe, puisqu'elle est convexe. (G., nº 622.)

2º Réciproquement, la ligne des contacts NN', dans le cercle, est perpendiculaire aux tangentes ; donc sa projection $nn'$ est le diamètre conjugué de $mm'$, projection de MM'.

### 1er Théorème d'Apollonius 864.

**2072.** ***Les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse, et dont les côtés sont parallèles à deux diamètres conjugués, sont équivalents au rectangle construit sur les axes.***

Le cosinus d'inclinaison égale $\frac{b}{a}$ (nos 1790 et 2069); donc le parallélogramme $hih'i' = \mathrm{HIH'I'} \cdot \frac{b}{a}$.

Or le carré circonscrit au cercle égale $2a \cdot 2a = 4a^2$; donc le parallélogramme égale $4a^2 \cdot \frac{b}{a} = 4ab$, et ainsi il est équivalent au rectangle des axes.

On peut encore dire : le rectangle construit sur les axes et le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués sont les projections sur un même plan de deux carrés égaux situés dans un même plan; donc ces projections sont équivalentes (no 1790, *scolie* I).

### Théorème 865.

**2073.** *En désignant par* a' *et* b' *deux demi-diamètres conjugués, et par* V *l'angle qu'ils forment, on a la relation*

$$4a'b' \cdot \sin V = 4ab.$$

L'aire du parallélogramme s'obtient en multipliant le produit des diagonales par le sinus de l'angle qu'elles forment; car l'aire du triangle qui a mêmes côtés $a'$, $b'$ et même angle V, égale $\frac{a'b' \sin V}{2}$. (*Trig.*, no 74.)

Donc $\quad 4a'b' \cdot \sin V = 4ab;\quad$ d'où $\quad a'b' \sin V = ab.$

### Théorème 866.

**2074.** *La somme des carrés des projections des deux diamètres conjugués sur un axe quelconque égale le carré de cet axe.*

$$\mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2 = a^2 \quad et \quad \mathrm{P}m^2 + \mathrm{Q}n^2 = b^2.$$

En effet, les triangles rectangles OMP et ONQ sont égaux; car l'angle MOP $=$ ONQ et ON $=$ OM $= a$.

Donc $\mathrm{MP} = \mathrm{OQ}$; et, puisqu'on a $\mathrm{OP}^2 + \mathrm{MP}^2 = \mathrm{NO}^2 = a^2$, on peut écrire :

$$\mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2 = a^2. \qquad (1)$$

Les projections de $a'$ et de $b'$ sur le petit axe égalent P$m$ et Q$n$.

Or $\quad \frac{\mathrm{P}m}{\mathrm{PM}} = \frac{b}{a}, \quad$ d'où $\quad \mathrm{P}m^2 = \mathrm{PM}^2 \cdot \frac{b^2}{a^2};$

de même $\quad \frac{\mathrm{Q}n}{\mathrm{QN}} = \frac{b}{a}, \quad$ d'où $\quad \mathrm{Q}n^2 = \mathrm{QN}^2 \cdot \frac{b^2}{a^2};$

ainsi $\quad \mathrm{P}m^2 + \mathrm{Q}n^2 = (\mathrm{PM}^2 + \mathrm{QN}^2)\,\frac{b^2}{a^2} = b^2. \qquad (2)$

### 2e Théorème d'Apollonius 867.

**2075.** *La somme des carrés de deux diamètres conjugués égale la somme des carrés des axes.*

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

En ajoutant les relations (1) et (2), on trouve :

$$OP^2 + OQ^2 + Pm^2 + Qn^2 = a^2 + b^2.$$

Or $\quad OP^2 + Pm^2 = a'^2 \quad$ et $\quad OQ^2 + Qn^2 = b'^2,$

donc $\quad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$

*Remarque.* Les deux relations d'Apollonius

$$a'b' . \sin V = ab,$$
$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$

permettent de calculer les axes $2a$, $2b$, lorsqu'on connaît deux diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, et l'angle V (no 2188).

### Théorème 868.

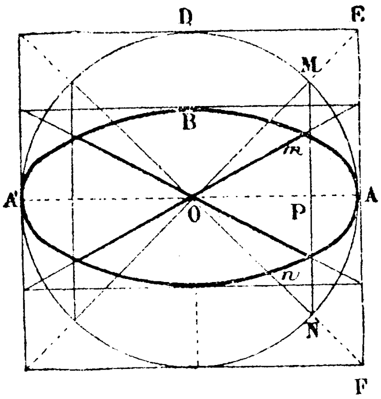


Fig. 1292.

**2076.** *L'ellipse a deux diamètres conjugués égaux; ils correspondent aux diagonales du rectangle construit sur les axes.*

En nous bornant aux demi-diamètres, on reconnaît que les diagonales OE et OF du carré, dont les côtés sont parallèles aux axes, sont également inclinées sur AA'; et, puisque

$$PM = PN,$$

on a :

$$Pm = Pn \quad \text{et} \quad Om = On.$$

### Théorème 868. — I.

**2076 a.** *De tous les systèmes de diamètres conjugués d'une ellipse, les axes donnent la somme minima et les deux diamètres conjugués égaux donnent la somme maxima.* (*Annales de Gergonne*, t. XII, 1821-1822, pp. 72 et 168.)

La solution est de J.-B. Durrande.

### Théorème 869.

**2077.** *Pour une tangente quelconque à l'ellipse, le produit de l'abscisse du point de contact par l'abscisse du point où cette tangente coupe le grand axe, égale le carré du demi-grand axe.*

(Il y a un théorème analogue pour le petit axe.)

Soit la **tangente** $m$T, et soit MT la tangente correspondante du cercle principal (G., nº 626); le triangle rectangle OTM donne :

$$\mathrm{OT} \,.\, \mathrm{OP} = \mathrm{OM}^2 = a^2.$$

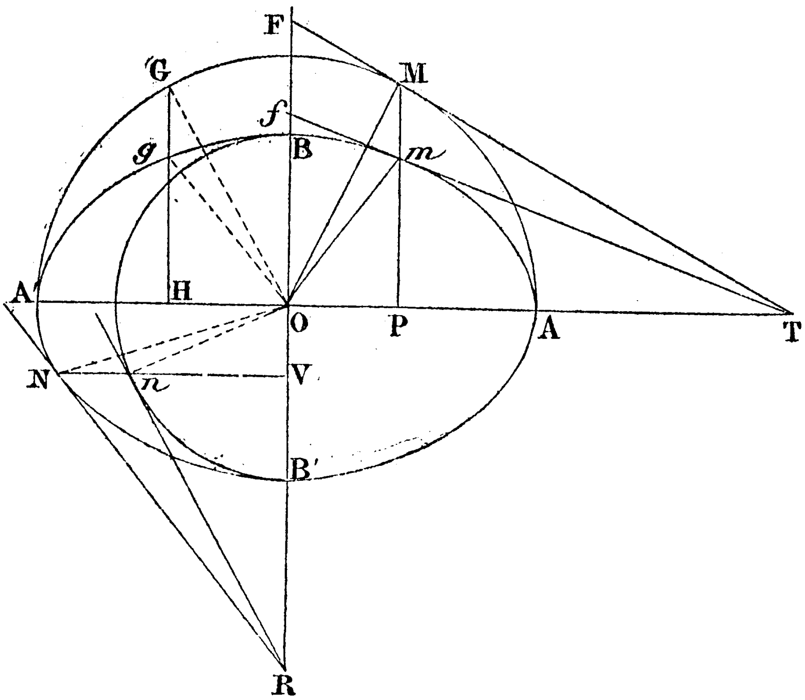



Fig. 1293.

De même $$\mathrm{OR} \,.\, \mathrm{OV} = \mathrm{O}n^2 = b^2.$$

**Théorème 870.**

**2078.** *Les axes d'une ellipse interceptent sur une tangente quelconque des segments dont le produit égale le carré du demi-diamètre conjugué au diamètre du point de contact.*

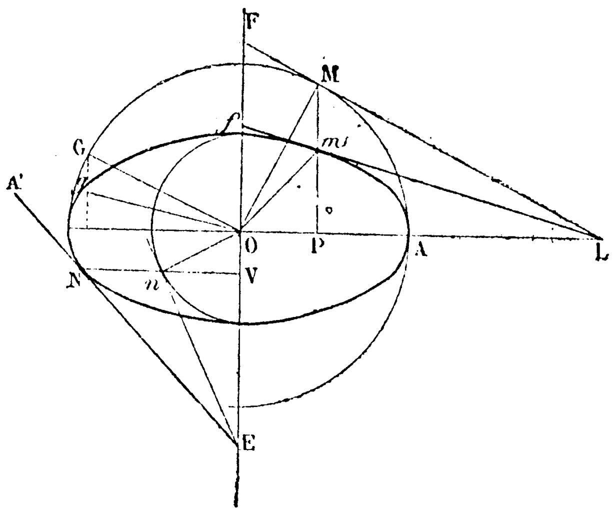



Fig. 1294.

Soient les tangentes L$mf$ et LMF à l'ellipse et au cercle principal. MO est perpendiculaire à la tangente au cercle et à sa parallèle GO ; MO et

GO donnent deux demi-diamètres conjugués $mO$ et $gO$; $gO$ est parallèle à $Lf$, puisque GO et LF sont parallèles (nº 2069).

On a donc : $$\frac{gO}{GO} = \frac{Lm}{LM} = \frac{mf}{MF}.$$

Mais le triangle FOL donne :

$$ML \,.\, MF = OM^2 \quad \text{ou} \quad ML \,.\, MF = OG^2.$$

En réduisant toutes ces lignes dans un même rapport, on a :

$$mL \,.\, mf = Og^2.$$

**Théorème 871.**

**2079.** *Pour déterminer les axes d'une ellipse, connaissant deux demi-diamètres conjugués* OM *et* ON, *et leur angle* MON *ou* V, *il faut mener par* M *une parallèle à* NO, *élever la perpendiculaire* MC *égale à* NO, *faire passer par* CO *une circonférence qui ait son centre sur* DE. *Les points* D *et* E *font connaître la direction des axes* (nº 2078); *puis on décrit une demi-circonférence sur le diamètre* OE. *La perpendiculaire* MPA″ *donne* OA″ = a (nº 2077).

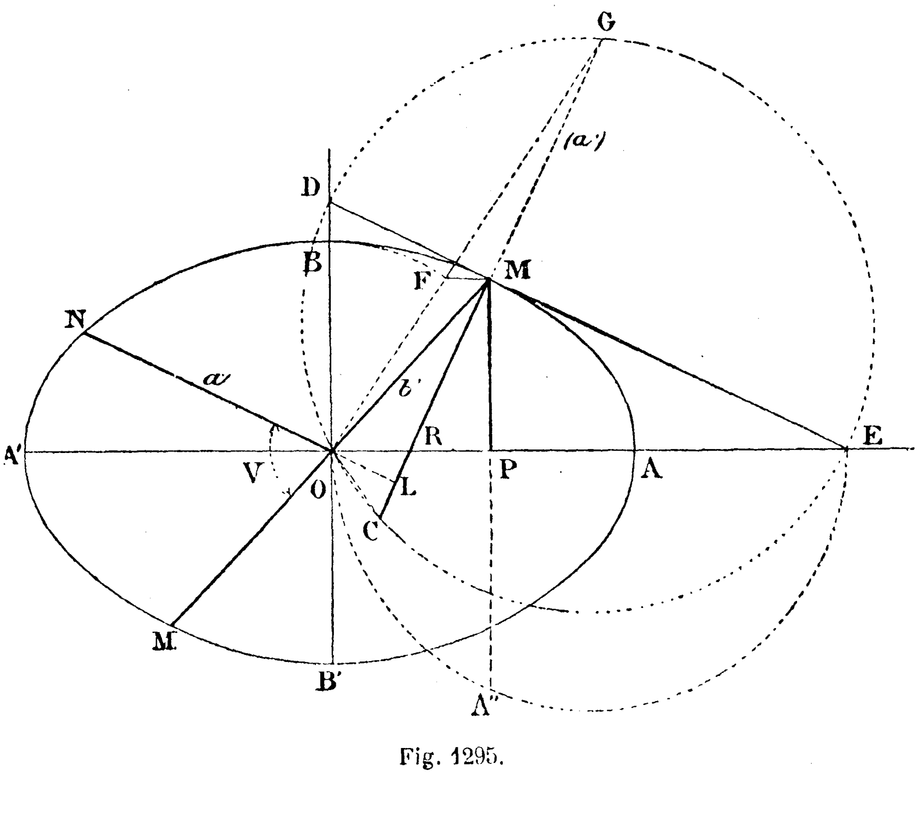



Fig. 1295.

La droite DME, parallèle à NO, est tangente à l'ellipse (nº 2071); la perpendiculaire élevée au milieu de OC détermine le centre de la circonférence auxiliaire. Si l'on joint le point O aux extrémités du diamètre,

on a : $$DM \,.\, ME = MC^2 = NO^2.$$

Donc (nº 2078) les droites OD et OE font connaître la direction des axes.

Sur le diamètre OE décrivons une circonférence, abaissons la perpendiculaire MPA″; nous aurons :

$$OA''^2 = OP \,.\, OE.$$

Donc (nº 2077) OA″ est la valeur du demi-grand axe.
On déterminerait d'une manière analogue le petit axe.

**2080.** *Construction de Chasles.* Comme construction, le procédé cidessus est médiocre; car O et C étant souvent très rapprochés, la circonférence est mal déterminée.

Le procédé suivant, dû à CHASLES, est bien préférable; mais la démonstration directe de la seconde partie est longue et assez difficile.

Du point M, abaissons une perpendiculaire sur NO ou $a'$, prenons $MG = MC = a'$, et menons OG et OC.

$OG = a + b$, $OC = a - b$, et le grand axe est la bissectrice de l'angle COG.

Le triangle OMG donne (G., nº 252) :

$$OG^2 = a'^2 + b'^2 + 2a' \,.\, ML.$$

Mais $ML = b' \,.\, \sin MOL = b' \,.\, \sin V$. (*Trig.*, nº 62.)

Donc $OG^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \,.\, \sin V = (a + b)^2$ (nº 2075).

De même, dans le triangle OMC, $OC^2 = MC^2 + b'^2 - 2MC \,.\, ML$; mais $MC = a'$. Donc $OC^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \,.\, \sin V$; donc $OC^2 = (a - b)^2$.

En utilisant notre première construction, la deuxième partie se démontre plus facilement. Il suffit de remarquer que la circonférence qui a la tangente pour diamètre passe au point G, puisque $MG = MC$. Donc OE est bissectrice, car les angles COE et GOE ont pour mesure les arcs égaux GE et CE.

Enfin la droite MF, parallèle à la bissectrice, donne $OF = b$, $FG = a$; car $RG = a' + MR$, $RC = a' - MR$, $OG = a + b$, $OC = a - b$. Et puisqu'on a, à cause de la bissectrice, $\dfrac{a' + MR}{a' - MR} = \dfrac{a + b}{a - b}$, et que, dans une proportion, la somme des deux premiers termes est à leur différence dans le rapport de la somme des deux derniers à leur différence, on a $\dfrac{2a'}{2MR} = \dfrac{2a}{2b}$ ou $\dfrac{a'}{MR} = \dfrac{a}{b}$. D'ailleurs, $\dfrac{a'}{MR} = \dfrac{GF}{FO}$; donc $GF = a$ et $FO = b$.

**2080 a.** *Cercles de Chasles.* Sur une normale quelconque menée à l'ellipse par un point M, si l'on prend, de part et d'autre de ce point, des longueurs MG, MC égales au demi-diamètre conjugué ON du demi-diamètre OM, le lieu des points G et C sont les cercles de centre O décrits avec $a + b$ et $a - b$ pour rayons respectifs.

Si, par un point quelconque du cercle de rayon $a + b$, on mène deux tangentes à l'ellipse, les normales aux points de contact se coupent sur le cercle $a - b$. (Joseph BRUNO. Voir *N. A.*, 1874, p. 249, et 1876, p. 288.) Les cercles de rayon $a + b$ et $a - b$ ont été nommés *cercles de Chasles*, par M. E.-N. BARISIEN.

**2080 b. Problème.** *Déterminer les axes d'une ellipse, connaissant deux diamètres conjugués et leur angle.* (Construction de M. A. MANNHEIM.) (*Nouvelles Annales de mathématiques*, 1904, p. 5.)

En supposant le problème résolu, soient OC, OE les rayons de deux cercles concentriques décrits avec les rayons $a$ et $b$. Les droites CD, ED, parallèles aux axes de la courbe, se coupent en un de ses points D.

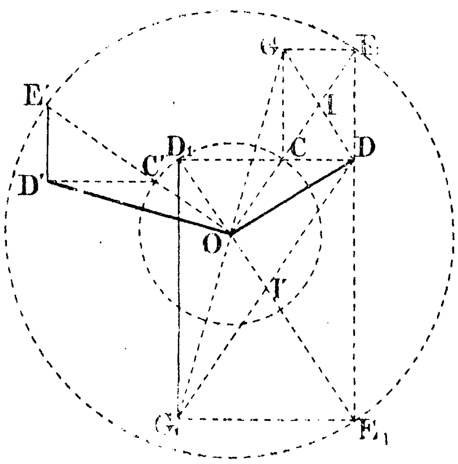


Fig. 1296.

Au moyen de E', extrémité du diamètre perpendiculaire à OE, on obtient de la même manière le point D', extrémité du diamètre conjugué de OD.

Les triangles CDE, C'D'E' sont égaux, d'où $E'D' = CD$.

Faisons tourner d'un angle droit le triangle E'D'O, autour de son sommet O ; le joint E' vient en E et le point D' en G. On a $GE = E'D'$, d'où $GE = CD$. La figure CDEG est donc un rectangle, et l'on a cette construction pour déterminer les demi-axes de l'ellipse, connaissant les demi-diamètres conjugués OD, OD'.

*Sur la perpendiculaire* OG *à* OD' *on porte le segment* OG *égal à* OD'. *On mène la droite* OI *qui passe par le milieu* I *de* DG, *et l'on prend sur cette droite les segments* IE, IC *égaux à* ID.

*La droite* CD, *qui passe par le point* C, *est parallèle au grand axe ; les demi-axes sont égaux à* OE, OC.

En prolongeant DE en $DE_1$, etc., les bissectrices des angles $GDG_1$ sont parallèles aux axes de l'ellipse. On a aussi DG égale la demi-différence des axes et $DG_1$ en est la demi-somme.

**2080 c. Notes.** 1° Le calcul des axes, indiqué ci-après (n° 2188), est parfois nécessaire. Par exemple, lorsque le mur de tête d'un pont biais est en talus, l'arc de tête est une demi-ellipse rapportée à deux diamètres conjugués; et il faut calculer les axes pour trouver, au moyen des tables connues, le développement de l'*arc de tête*. La détermination *géométrique* des axes est une question très intéressante, mais en réalité moins utile dans les applications : car, l'ellipse ne se déterminant que par points, il n'est guère plus difficile de déterminer les points lorsqu'on connaît en grandeur et en position deux diamètres conjugués, que lorsqu'on connaît les axes.

2° La détermination des axes, connaissant deux diamètres conjugués et leur angle, a exercé la sagacité d'un grand nombre de chercheurs : dans nos *Exercices de Géométrie descriptive* (3e édition, n° 553), nous avons reproduit la belle solution donnée par M. A. JULLIEN, professeur à Sainte-Barbe. (*N. A.*, 1875, pages 324 et 359.) Nous pouvons signaler aussi une autre construction bien remarquable (*N. A.*, 1889, page 329) due à MANNHEIM comme la précédente du n° 2080 **b.** — Voir aussi *N. A.*, 1860, p. 122, la solution de SOMOFF, professeur à l'Université de Saint-Pétersbourg.

* M. le colonel MANNHEIM, ancien professeur à l'École Polytechnique, auteur de la *Géométrie cinématique* et d'un grand nombre d'études sur les questions géométriques, et mort en décembre 1906, âgé de soixante-quinze ans.

De 1879 à 1886, Amédée MANNHEIM a résolu, dans les *Nouvelles Annales*, tous les problèmes d'admission à l'École Polytechnique, en signant : *par un ancien élève de Mathématiques spéciales*. En dernier lieu, il a posé de nombreuses questions sous le pseudonyme de CANON (d'après M. LAISANT, *l'Enseignement mathématique*, 1907, p. 169).

### Théorème 872.

**2081.** ***La droite qui joint le point de concours de deux tangentes au milieu de la corde des contacts passe par le centre de l'ellipse.***

Soient PM et PN deux tangentes à l'ellipse, et soient P'M' et P'N' les tangentes correspondantes au cercle principal. P'O passe au milieu de la corde M'N'; donc sa projection PO passe au milieu de MN, et la droite PD passe au centre.

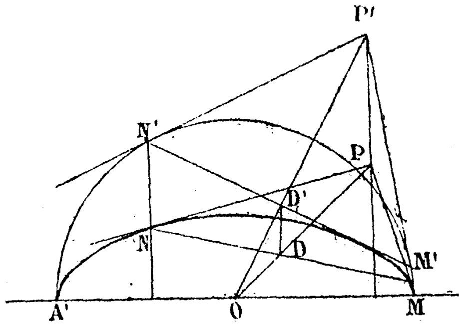



Fig. 1297.

*Remarque.* La droite qui joint le point de concours de deux tangentes au point milieu de la corde des contacts et cette corde elle-même donnent lieu à un système de diamètres conjugués.

### Théorème 873.

**2082.** *On peut construire une ellipse par points lorsqu'on connaît deux diamètres conjugués et leur angle.*

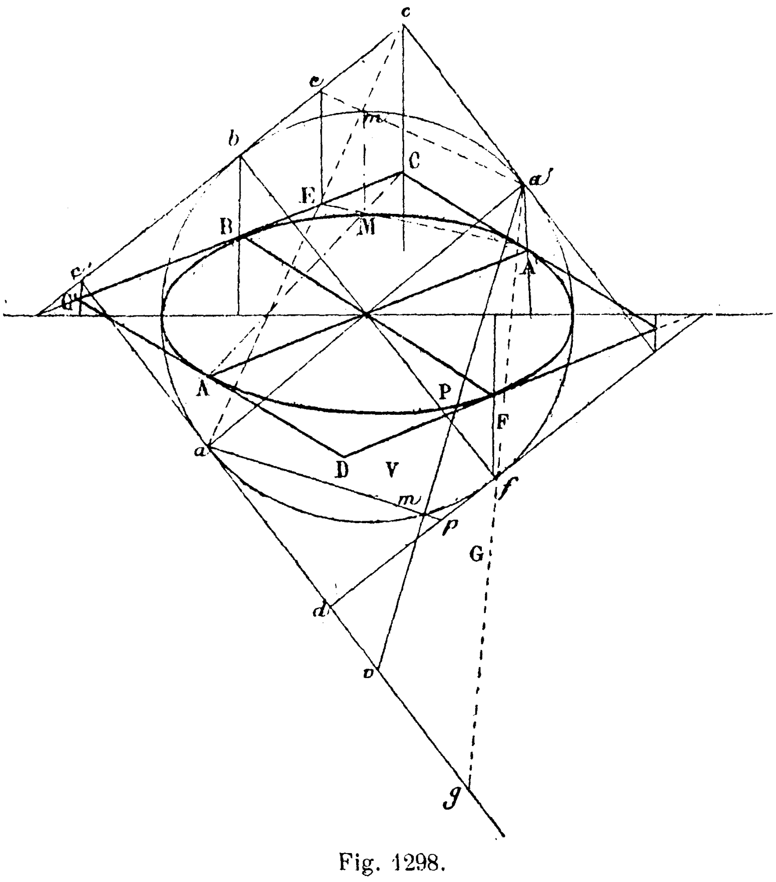



Fig. 1298.

Lorsqu'on connaît deux diamètres conjugués et leur angle, le parallélogramme circonscrit fait connaître quatre tangentes et leurs points de contact; on obtient quatre autres points en joignant A' au point E, milieu de CB, et C au point A, etc. En prenant $DG = AD$, il faut qu'on ait :

$$\frac{DP}{DF} = \frac{AV}{AG}.$$

Une droite divisée en parties égales a pour projection une droite divisée en un même nombre de parties égales ; et généralement, puisque les projections de deux parallèles sont proportionnelles à ces lignes, si une droite est divisée dans un rapport donné, il en sera de même de sa projection. Il suffit donc d'établir pour la circonférence les propriétés énoncées ci-dessus, pour qu'on puisse les appliquer à l'ellipse : deux diamètres conjugués de cette dernière courbe remplacent deux diamètres rectangulaires du cercle, et réciproquement.

1° Prenons $ce = {}^1/_2 bc$. Les triangles rectangles $a'ec$ et $aa'c$ sont semblables, car $ce = {}^1/_2 ca'$ et $a'c = {}^1/_2 aa'$. Donc l'angle $ca'e = aa'c$ ; ainsi l'angle $aa'c + aa'm = 1$ droit, et l'angle $m$ est droit. Par suite, les droites $a'e$ et $ac$ se coupent sur la circonférence ; leurs projections A'E et AC se coupent sur l'ellipse. D'ailleurs, le point E est le milieu de CB...

Pour la seconde partie, bornons-nous à considérer le cercle. Prenons $dg = ad$ ou $ag = 2ad = aa'$. Si l'on a $\frac{dp}{df} = \frac{av}{ag}$, les triangles rectangles $adp$ et $aa'v$ sont encore semblables ; l'angle $m$ est droit. Donc ce point appartient à la circonférence...

*Remarque.* Voir à ce sujet : *Exercices de Géométrie descriptive*, 4e édition, n° 92.

**Théorème 874.**

2083. *La projection d'une ellipse sur un plan quelconque est une ellipse.*

Toute propriété descriptive qui se conserve en projection conduit à ce résultat. Ainsi, dans la figure précédente (fig. 1298), les points tels que M appartiennent à la courbe ; mais en projetant cette ellipse et les lignes de construction, telles que AC et A'E, et le parallélogramme circonscrit, on obtient une figure analogue. Les projections des divers points de la courbe donnent donc une ellipse...

**Théorème 875.**

2084. *Le produit des distances des foyers à une tangente quelconque est constant.*

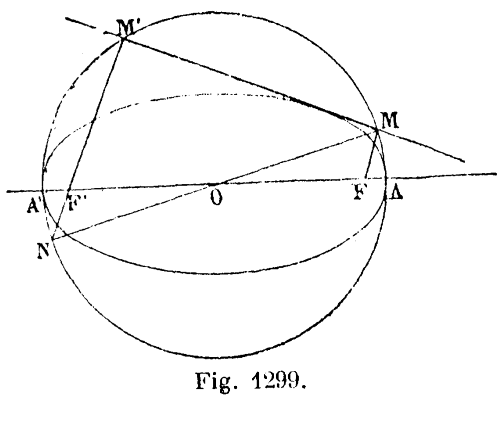


Fig. 1299.

Les points M et M', projections des foyers, sont sur le cercle principal (G., n° 626) ; prolongeons M'F'. Puisque $OF = OF'$, et que les lignes FM et F'M' sont parallèles, on a :

$$MF = NF'.$$

Or $NF' \cdot F'M' = A'F' \cdot F'A$.

Donc $\quad FM \cdot F'M' = A'F' \cdot F'A = (a - c)(a + c) = a^2 - c^2,$

ou
$$FM \cdot F'M' = b^2.$$

***Remarque.*** **La somme des distances de chaque foyer d'une ellipse à une tangente quelconque peut varier de $2a$ à $2b$. Elle égale $2b$ lorsque la tangente est parallèle au grand axe ; elle égale $2a$ lorsque la tangente est parallèle au petit axe.**

### Théorème 876.

**2085.** *Dans l'ellipse, le cercle décrit sur un rayon vecteur quelconque pris pour diamètre est tangent au cercle principal.* (*N. A.*, 1845, page 354.)

Ce théorème a déjà été démontré (nº 1469).

Soit MF un rayon vecteur quelconque; menons la tangente PMP′. Projetons les foyers et prolongeons les projetantes et les rayons vecteurs jusqu'au cercle directeur relatif au second foyer F′.

On sait que le point E est le symétrique de F, et que la projection P est sur le cercle principal. (G., nºs 624 et 626.) D'ailleurs OP est parallèle à F′E et en égale la moitié; donc C est le point milieu de FM; d'ailleurs CP = CF, car le triangle MPF est rectangle; donc le cercle décrit sur le diamètre MF est tangent au cercle principal, au point P.

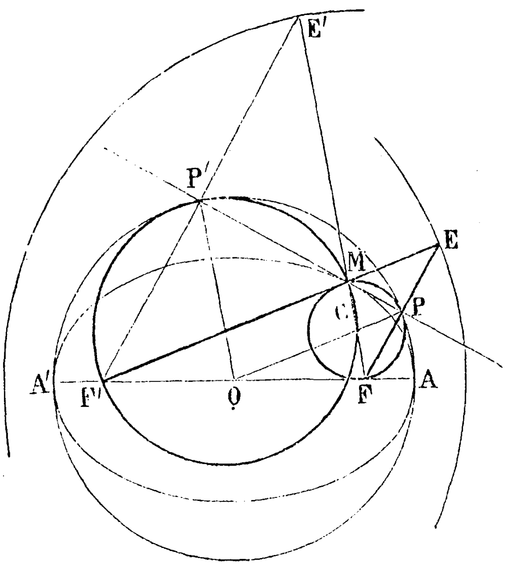


Fig. 1300.

### Théorème 876 — I.

**2086.** *Dans l'hyperbole, le cercle décrit sur un rayon vecteur quelconque pris pour diamètre est tangent au cercle principal.*

### Théorème 876. — II.

**2087.** *Dans la parabole, le cercle décrit sur un rayon vecteur quelconque est tangent à la tangente au sommet.*

### Théorème 876. — III.

**2088.** *Dans l'ellipse, la circonférence du cercle principal égale la somme des circonférences décrites sur les rayons vecteurs d'un même point* M, *et égale la différence de ces mêmes circonférences dans l'hyperbole.*

### Théorème 877.

**2089.** *Soient* MT, MT′ *deux tangentes menées à une ellipse par un point* M. *Si l'on prend sur ces tangentes des longueurs* MO, MO′ *respectivement égales aux distances* MF, MF′, *la droite* OO′ *sera égale au grand axe* 2a *de l'ellipse.*

Soient $MO = MF$, $MO' = MF'$; il faut prouver que $OO' = 2a$.

Joignons le foyer F au point de contact T'. Prolongeons ce rayon vecteur jusqu'au cercle directeur, c'est-à-dire prenons $FE' = 2a$.

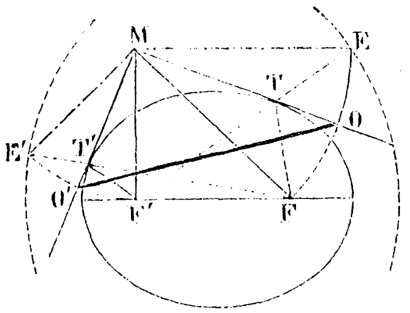


Fig. 1301.

Les triangles MT'E', MT'F' sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux; car $T'E' = T'F'$ (G., n° 625), l'angle $E'T'M = MT'F'$; donc l'angle $E'MO' = O'MF'$ et $ME' = MF'$.

De même l'angle $EMO = OMF$ et $ME = MF$.

Les deux triangles E'MF et F'ME sont égaux comme ayant les trois côtés égaux; d'où l'on conclut le *théorème de Poncelet.* (G., n° 633.)

La droite MF' est bissectrice de l'angle TF'T', et les quatre angles sont égaux entre eux; donc l'angle $O'MO = E'MF$.

Les triangles E'MF, O'MO sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux; donc $O'O = E'F = 2a$.

**Note.** Le théorème a été donné par W. ROBERTS*, *N. A.*, 1848, p. 68.

Le théorème subsiste pour l'hyperbole; mais lorsque les points de contact sont sur la même branche, une des longueurs MO ou MO' doit être portée en sens contraire. (GERONO, *loc. cit.*, p. 69.)

* WILLIAM ROBERTS, célèbre géomètre irlandais, auteur de nombreux articles des *Nouvelles Annales,* publiés parfois sous le pseudonyme de STREBOR.

### Théorème 878.

**2090.** *Par un foyer d'une ellipse on mène une corde* AFB; *par le point de rencontre* C *des deux normales en* A *et* B *on mène une parallèle au grand axe; cette parallèle passe par le point milieu de* AB.

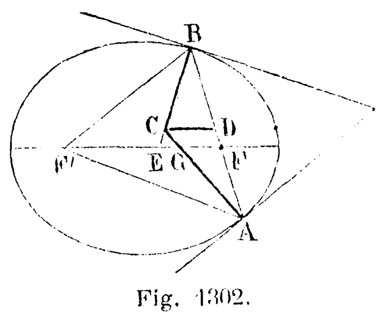


Fig. 1302.

Soient BC, AC les normales; il faut prouver que $DA = DB$.

Les triangles semblables ADC, AFG, puis BDC, BFE donnent les rapports suivants :

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FG}, \quad \text{d'où} \quad AD = DC \cdot \frac{AF}{FG};$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BF}{FE}, \quad \text{d'où} \quad BD = DC \cdot \frac{BF}{FE}.$$

Il suffit de prouver que les rapports $\frac{AF}{FG}$ et $\frac{BF}{FE}$ sont égaux.

Or les normales sont bissectrices des angles A et B des triangles AFF' et BFF'; on a donc :

$$\frac{AF'}{F'G} = \frac{AF}{FG} = \frac{AF + AF'}{FF'} = \frac{2a}{2c} = \frac{a}{c},$$

$$\frac{F'B}{F'E} = \frac{BF}{FE} = \frac{BF + BF'}{FF'} = \frac{a}{c}. \qquad \text{Donc...}$$

**Note.** Le théorème est énoncé dans les *N. A.*, 1860, p. 44, n° 502, et résolu p. 88. De ce théorème, on tire la conséquence suivante : *Si l'on place une ellipse de manière que son grand axe soit vertical, une droite* AB *pesante et* *homogène sera en équilibre si elle passe au foyer.* La condition de passer au foyer est nécessaire pour qu'il y ait équilibre, sauf le cas où la droite serait horizontale. (Voir aussi *N. A.*, 1858, p. 195.)

**Théorème 879.**

**2091.** *Dans l'ellipse, la normale en un point* M *de la courbe est divisée par les axes en deux segments* MN, ML, *dont le produit égale le carré du demi-diamètre conjugué à celui qui passe par le point donné* M. (*N. A.*, 1847, page 231.)

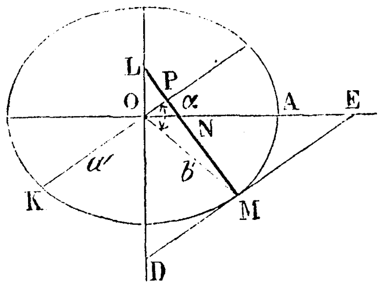


Fig. 1303.

Soit la normale MNL; menons la tangente DME; la parallèle OK à la tangente est le demi-diamètre conjugué à OM. Il faut prouver qu'on a :

$$\mathrm{MN} \cdot \mathrm{ML} = \mathrm{OK}^2.$$

Les triangles rectangles semblables DML, MNE donnent :

$$\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{ML}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{ME}}; \quad \text{d'où} \quad \mathrm{MN} \cdot \mathrm{ML} = \mathrm{MD} \cdot \mathrm{ME} = \mathrm{OK}^2. \quad (\text{n}^\circ\ 2078)$$

**Note.** Les premiers volumes des *Nouvelles Annales de Mathématiques* contiennent un grand nombre de questions élémentaires relatives aux coniques : ainsi le tome VI, année 1847, énonce divers théorèmes aux pages 230, 231, 232, etc.

**Théorème 879. — I.**

**2092.** *Le produit des segments déterminés sur la normale par un axe et par le diamètre conjugué égale le carré de l'autre demi-axe.*

Il faut prouver qu'on a :

$$\mathrm{MP} \cdot \mathrm{ML} = a^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{MP} \cdot \mathrm{MN} = b^2.$$

Or on vient de prouver que

$$\mathrm{MN} \cdot \mathrm{ML} = \mathrm{OK}^2.$$

On peut donc écrire :

$$\mathrm{MN} \cdot \mathrm{ML} \times \mathrm{MP}^2 = \mathrm{OK}^2 \times \mathrm{MP}^2.$$

Mais $\mathrm{OK} \times \mathrm{MP}$ représente le $^1/_4$ de la surface du parallélogramme circonscrit à l'ellipse ; ce produit égale $ab$ (n° 2072). D'ailleurs, on pourrait remplacer la perpendiculaire MP par $b'$ sin $\alpha$ ; ainsi

$$\mathrm{OK} \cdot \mathrm{MP} = a'b' \sin \alpha = ab,$$

donc $$\mathrm{MN} \cdot \mathrm{MP} \times \mathrm{ML} \cdot \mathrm{MP} = a^2 b^2. \qquad (1)$$

D'ailleurs

$$a'^2 + \mathrm{MP}^2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{MN} \cdot \mathrm{ML} + \mathrm{MP}^2 = (\mathrm{MP} - \mathrm{NP})\,\mathrm{ML} + (\mathrm{MN} + \mathrm{NP})\,\mathrm{MP} =$$
$$= \mathrm{MP} \cdot \mathrm{ML} - \mathrm{NP} \cdot \mathrm{ML} + \mathrm{MP} \cdot \mathrm{MN} + \mathrm{MP} \cdot \mathrm{NP},$$

d'où $a'^2 + \mathrm{MP}^2 = \mathrm{MP} \cdot \mathrm{ML} + \mathrm{MP} \cdot \mathrm{MN} - \mathrm{NP} \cdot \mathrm{MP} - \mathrm{NP} \cdot \mathrm{PL} + \mathrm{NP} \cdot \mathrm{MP}.$

En simplifiant, remplaçant NP . PL par $\mathrm{OP}^2$, on trouve :

$$\mathrm{MP} \cdot \mathrm{ML} + \mathrm{MP} \cdot \mathrm{MN} = a'^2 + \mathrm{MP}^2 + \mathrm{OP}^2 = a'^2 + b'^2 \quad \text{ou} \quad = a^2 + b^2. \quad (2)$$

De la comparaison de (1) et (2) il résulte que

$$MP \cdot ML = a^2 \quad \text{et} \quad MP \cdot MN = b^2. \tag{3}$$

*Remarque.* Le rapport $\frac{MN}{ML}$ est constant : en effet, en divisant l'une par l'autre les égalités (3), on obtient :

$$\frac{MN}{ML} = \frac{b^2}{a^2}.$$

**Théorème de Pagès 879. — II.**

**2092 a.** *Dans une conique quelconque, la projection de la portion de la normale comprise entre l'axe focal et le point d'incidence, sur le rayon vecteur de ce même point, est constante; elle est égale au paramètre* $\frac{b^2}{a}$ *de la conique.*

1° On peut utiliser le théorème connu : la projection d'une bissectrice intérieure sur un des deux côtés adjacents à cette ligne est une quantité constante (nº 1155 **a**).

2º Voir la démonstration de M. Lemoine (*J. M. E.*, 1884, p. 100); elle est fort simple et ne s'appuie que sur le troisième livre.

3º Voir la démonstration très élégante, très naturelle de M. Pomey. (*J. M. E.*, 1889, p. 257.)

**Note** et *historique* (1889, p. 257).

**Théorème 880.**

**2093.** *Le carré de la distance du centre d'une ellipse à une tangente quelconque, diminué du carré de la distance du centre à la droite menée par un foyer parallèlement à cette tangente, égale le carré du demi-petit axe.*

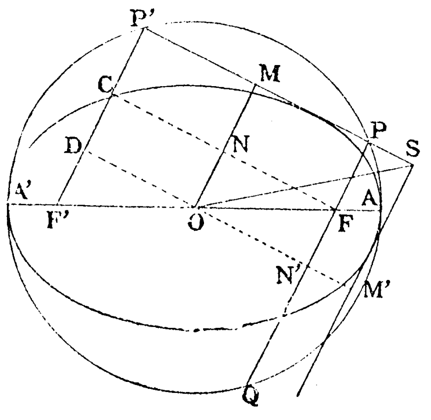


Fig. 1304.

Il faut prouver que

$$OM^2 - ON^2 = b^2.$$

Décrivons le cercle principal; projetons les foyers sur la tangente. Les points P et P' appartiennent au cercle principal.

On sait d'ailleurs que

$$F'P' = FQ,$$

et que $FP \cdot FQ$ ou $AF \cdot FA' = b^2$;

donc $\qquad FP \cdot F'P' = b^2 \qquad$ (nº 2084).

Ceci étant rappelé, il suffit de remplacer F'P' et FP par leurs valeurs en fonction de OM et de ON.

Or $\qquad F'P' = OM + ON \quad \text{et} \quad FP = OM - ON,$

donc $\qquad F'P' \cdot FP = (OM + ON)(OM - ON) = OM^2 - ON^2,$

ou $\qquad OM^2 - ON^2 = b^2.$

### Théorème 880. — I.

**2094.** *Le lieu des sommets des rectangles circonscrits à une ellipse donnée est un cercle concentrique à cette ellipse* (fig. 1304).

Soit M'S une tangente perpendiculaire a MS.

D'après le théorème précédent, on a :

$$OM^2 - ON^2 = b^2, \quad OM'^2 - ON'^2 = b^2;$$

d'où $$OM^2 + OM'^2 = 2b^2 + (ON^2 + ON'^2).$$

Mais $$OM^2 + OM'^2 = OS^2, \quad ON^2 + ON'^2 = OF^2 = c^2;$$

donc $$OS^2 = 2b^2 + c^2 \quad \text{ou} \quad = a^2 + b^2 \quad \text{quantité constante.}$$

Ainsi le lieu du sommet S est une circonférence décrite du centre O avec $\sqrt{a^2 + b^2}$ pour rayon.

**2094 a. Note.** Le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une conique a été nommé *cercle orthoptique* ou *cercle de Monge*. Pour l'ellipse, le rayon égale $\sqrt{a^2 + b^2}$, le centre est le centre même de la conique. Pour l'hyperbole, le rayon égale $\sqrt{a^2 - b^2}$ ; suivant le cas, le cercle est réel, se réduit à un point, ou est imaginaire. Pour la parabole, le lieu du sommet de l'angle droit circonscrit est la directrice (n° 2134)(*Interm.*, 1905, p. 198).

### Théorème 881.

**2095.** *Pour un point quelconque* M *d'une ellipse, en désignant par* x *la distance* OP *du centre de la courbe au pied* P *de la perpendiculaire* MP *abaissée sur le grand axe, les rayons vecteurs* MF' *et* MF *ont pour expression :*

$$a + \frac{cx}{a} \quad et \quad a - \frac{cx}{a}.$$

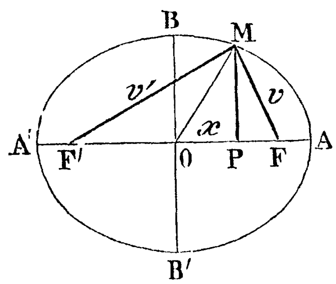


Fig. 1305.

Soient $v$ et $v'$ les rayons vecteurs; on sait que

$$OF = OF' = c,$$

$$v'^2 - v^2 = PF'^2 - PF^2,$$

$$v'^2 - v^2 = (PF' + PF)(PF' - PF) = 2c \times 2x.$$

Or $$v'^2 - v^2 = (v' + v)(v' - v) = 2a(v' - v),$$

d'où $$v' - v = \frac{2c \times 2x}{2a}, \quad \text{d'où} \quad \frac{v' - v}{2} = \frac{cx}{a}.$$

Mais la demi-somme de deux quantités, augmentée de la demi-différence, égale la plus grande de ces quantités; donc

$$\frac{v' + v}{2} + \frac{v' - v}{2} \quad \text{ou} \quad v' = a + \frac{cx}{a}, \tag{1}$$

$$\frac{v' + v}{2} - \frac{v' - v}{2} \quad \text{ou} \quad v = a - \frac{cx}{a}. \tag{2}$$

**Théorème 882.**

**2096.** *Les tangentes menées par les extrémités d'une corde focale d'une ellipse se coupent sur la directrice correspondante.*

Considérons le cercle principal.

A la corde focale MFN correspond, dans le cercle principal, la corde M'FN'.

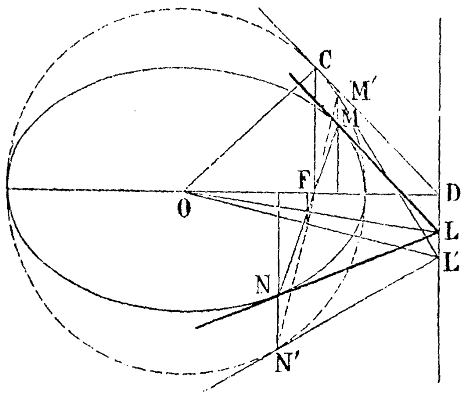


Fig. 1306.

Or le lieu des points L' de concours des tangentes est une droite L'D perpendiculaire à OF. (G., nº 802, 2º.) Cette droite est la polaire du point F.

Il en est donc de même pour l'ellipse.

On a : $\frac{\text{DL}}{\text{DL}'} = \frac{b}{a}$. (G., nº 640.)

La droite DL est la directrice relative au foyer F.

En effet, menons la perpendiculaire FC et la tangente CD; le triangle rectangle OCD donne :

$$\text{OD} = \frac{\text{OC}^2}{\text{OF}} = \frac{a^2}{c}. \qquad \text{(G., n° 846.)}$$

**Théorème 882 — I.**

**2096 a.** 1º *La somme des inverses des segments d'une corde focale est une quantité constante.*

(Voir *Méthodes*, nº 287, *Remarque.*)

2º *La somme des inverses de deux cordes focales rectangulaires est constante.*

3º *La somme de deux cordes focales parallèles à deux diamètres conjugués est constante.*

(J. VUIBERT, 1888, p. 149, nº 2113.)

**Théorème 882. — II.**

**2096 b.** *Soit* F *l'un des foyers d'une ellipse inscrite à un parallélogramme* ABCD.

*Les circonférences circonscrites aux triangles* FAB, FBC, FCD, FDA *sont égales.* (STEINER.)

*Conséquence.* Leurs centres se trouvent sur une circonférence égale aux premières et dont le centre est le foyer F. (*N. C. M.*, 1878, p. 123; q. 329. MEUTZNER. Démonstration par JAMET, alors professeur à Nice.)

**Théorème de Chasles 883.**

**2097.** *Le lieu des sommets d'un angle droit dont les côtés sont respectivement tangents à deux ellipses homofocales est une circonférence concentrique à ces ellipses.* (*N. A.*, 1849, p. 214.)

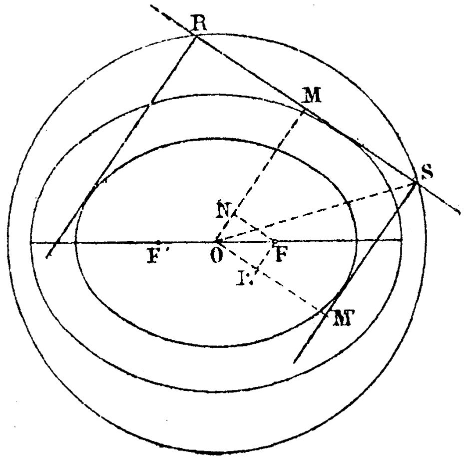


Fig. 1307.

Puisque les ellipses sont homofocales, $c^2$ ne varie pas. Soit $b^2$ le carré du demi-petit axe de l'une d'elles et $b'^2$ celui de l'autre courbe.

La tangente à la première donne

$$OM^2 - ON^2 = b^2 \quad (1) \quad (\text{n}^\circ\ 2093).$$

La tangente à la seconde donne

$$OM'^2 - ON'^2 = b'^2, \qquad (2)$$

d'où $\quad OM^2 + OM'^2,$

ou

$$OS^2 = b^2 + b'^2 + (ON^2 + ON'^2).$$

Mais $ON^2 + ON'^2$ égale la constante $c^2$, donc

$$OS^2 = b^2 + b'^2 + c^2 \quad \text{quantité constante.}$$

*Remarque.* On peut écrire $OS^2 = a^2 + b'^2$ ou $OS^2 = b^2 + a'^2$.

**Théorème de Maclaurin 883 — I.**

**2098.** *Étant données deux ellipses homothétiques concentriques, par un des sommets* A *de la plus petite on mène la tangente* MAN, *qui rencontre l'autre ellipse en deux points* M *et* N.

*Par l'un de ces points, on mène dans cette seconde ellipse deux cordes quelconques* MP, MQ, *mais également inclinées sur la tangente.*

*Par le point de contact de l'ellipse intérieure, on mène deux cordes* AB, AC *parallèles aux cordes de l'autre ellipse.*

*Prouver que la somme de ces deux cordes est égale à la somme des deux autres cordes.* (Maclaurin, *Traité des fluxions*, n° 648, p. 119.)

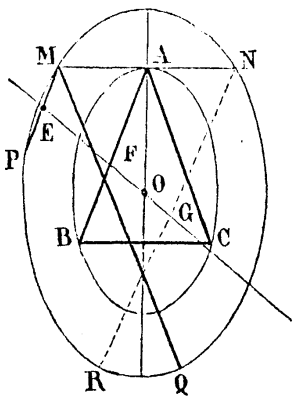


Fig. 1308.

Par le point N, menons NR parallèle de AB.

On aura : $\quad NR = MQ.$

Les ellipses étant concentriques et homothétiques, les points milieux des cordes parallèles MP, AB, NR appartiennent à un même diamètre (n° 2070).

Dans le trapèze EMNG, AF est la base moyenne ; car $AM = AN$ ;

donc $\quad ME + NG = 2AF,$

d'où $\quad MP + NR = 2AB,$

ou

$$MP + MQ = AB + AC.$$

Pour un autre système A'B', A'C', A'D' parallèle au premier, on aurait :

$$\frac{A'C' + A'D'}{EG + EH} = \frac{A'B'}{EF};$$

donc on a, d'une manière générale,

$$\frac{AC + AD}{A'C' + A'D'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

*Remarque.* L'énoncé et la démonstration de MACLAURIN, nº 625 du *Traité des fluxions* (tome II, page 103), correspondent à l'exercice suivant, que l'on peut proposer directement.

**Théorème 883. — II.**

**2099.** *Un triangle isocèle est inscrit dans un cercle; par un point de la circonférence on mène des parallèles aux côtés égaux du triangle isocèle et au diamètre bissecteur de l'angle du sommet; puis on projette les côtés des angles inscrits sur leurs bissectrices respectives. Prouver que la somme des projections des deux côtés égaux est au diamètre dans le même rapport que la somme des projections des côtés parallèles du second angle est à la corde qui sert de bissectrice à ce dernier.*

**2100. Note.** En considérant l'ellipse comme projection d'un cercle sur un plan parallèle au diamètre bissecteur du triangle isocèle, MACLAURIN prouve que le théorème est vrai pour l'ellipse; puis il établit le théorème fondamental du nº 2098, que nous avons pu démontrer directement d'une manière très simple.

Le théorème du nº 2098 a suffi à Maclaurin pour démontrer l'importante proposition suivante : *Une masse fluide homogène tournant autour d'elle-même doit prendre la figure d'un ellipsoïde de révolution dans l'hypothèse de l'attraction en raison inverse du carré des distances.* Deux théorèmes relatifs aux ellipses décrites des mêmes foyers lui suffirent pour établir le calcul de l'attraction sur les points extérieurs à l'ellipsoïde. (*Aperçu historique* de CHASLES, pages 163, 167 et 394.)

**Théorème de Carnot 884.**

**2101.** *On donne une ellipse et un triangle* ABC *dont chaque côté coupe la courbe en deux points :* AB *la coupe en* D, D' ; BC *en* E, E' *et* CA *en* F, F' ; *démontrer que l'on a la relation*

$$\frac{AD \cdot AD'}{BD \cdot BD'} \cdot \frac{BE \cdot BE'}{CE \cdot CE'} \cdot \frac{CF \cdot CF'}{AF \cdot AF'} = 1.$$

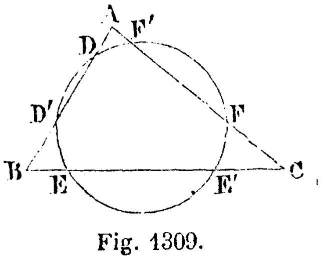


Fig. 1309.

La propriété est évidente dans le cercle, car chaque produit placé au numérateur est directement égal à un des produits du dénominateur ; ainsi

$$AD \cdot AD' = AF \cdot AF', \qquad \text{etc.}$$

Le théorème est vrai pour l'ellipse obtenue en projetant le cercle et le triangle, car la fraction $\frac{AD \cdot AD'}{BD \cdot BD'}$ ne varie point, chaque segment étant réduit dans un même rapport ; il en est de même des deux autres fractions; donc la relation subsiste.

**2102.** *Remarque.* Le *théorème de Carnot* est vrai pour les deux autres coniques, et se démontre très simplement par la Géométrie analytique.

Comme le *théorème de Newton* (n° 2103) et l'*hexagramme de Pascal* (n° 2120), le théorème de CARNOT permet de déterminer un sixième point d'une conique lorsqu'on en connaît cinq.

Soient D, D', E, E', F. On mène DD', EE' et une *ligne quelconque* par le point F. La relation fait connaître F'; puis on peut mener une seconde ligne par F et déterminer un nouveau point, etc.

Deux points peuvent être remplacés par une tangente et son point de contact.

### Théorème de Newton 885.

**2103.** *Par un point* M, *pris dans le plan d'une ellipse, on mène deux cordes quelconques; le rapport du produit des segments déterminés par la courbe sur une de ces cordes au produit des segments de l'autre corde est constant, quel que soit le point* M, *pourvu que la direction des cordes soit invariable.*

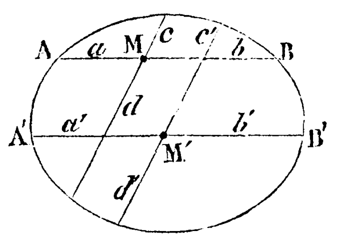


Fig. 1310.

Soient $a$, $b$ les segments d'une corde; $c$, $d$ ceux de la seconde.

Pour un autre point M', il faut qu'on ait :

$$\frac{ab}{cd} = \frac{a'b'}{c'd'} \quad \text{ou} \quad \frac{ab}{a'b'} = \frac{cd}{c'd'}.$$

Or le théorème est évident pour le cercle, car

$$\frac{ab}{cd} = 1 = \frac{a'b'}{c'd'}. \qquad \text{(G., n° 259.)}$$

Donc, pour le cercle, on a :

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{cd}{c'd'}. \tag{1}$$

Mais, en projetant le cercle sur un plan oblique, les droites AB, A'B' seront réduites dans un même rapport; les produits $cd$, $c'd'$ seront aussi réduits par un rapport constant; donc, pour l'ellipse, on a la proportion (1), d'où l'on déduit :

$$\frac{ab}{cd} = \frac{a'b'}{c'd'} = \text{constante}.$$

Pour avoir la constante, on peut mener deux diamètres dans les directions données. Soient $m$ et $n$ la longueur des demi-diamètres; on aura :

$$\frac{ab}{cd} = \frac{a'b'}{c'd'} = \frac{m^2}{n^2}.$$

*Remarque.* Le *théorème de Newton* est vrai pour une courbe algébrique quelconque. Le cas particulier relatif aux coniques est d'APOLLONIUS. (*N. A.*, 1844, page 510.)

### Théorème 886.

**2104.** *Lorsqu'un cercle coupe une ellipse en quatre points, les bissectrices des angles formés par les cordes communes sont parallèles aux axes de la courbe.*

Par le centre O, menons des parallèles aux cordes ABC, AB'C'.

A cause du *Théorème de Newton*, on a :

$$\frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'} = \frac{OD^2}{OE^2}.$$

Or
$$\frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'} = 1;$$

donc
$$\frac{OD^2}{OD^2} = 1, \quad \text{d'où} \quad OD = OE.$$

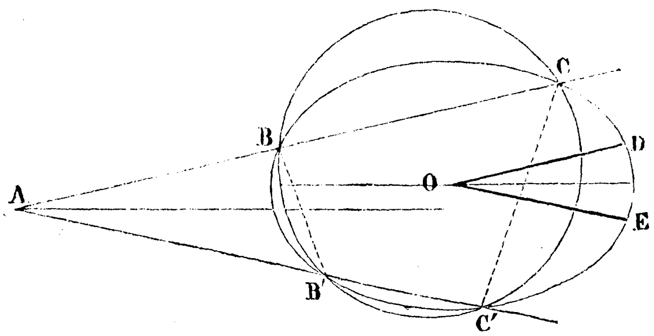



Fig. 1311.

Les deux demi-diamètres OD, OE étant égaux, sont également inclinés sur les axes de l'ellipse; donc la bissectrice de l'angle A est parallèle à l'un des axes.

La bissectrice de l'angle formé par BB' et CC' est parallèle à l'autre axe.

### Théorème 886. — I.

**2104 a.** *Pour que les quatre points d'intersection de deux coniques soient concycliques, il faut que les axes de ces coniques soient parallèles.*

C'est une conséquence du théorème précédent (nº 2104).

**2104 b.** *Remarque.* Le théorème 2104 **a** est la généralisation de la réciproque d'un théorème du second livre relatif au quadrilatère inscriptible (nº 674).

### Théorème 887.

**2105.** *Si d'un point quelconque d'une ellipse on abaisse des perpendiculaires sur les quatre côtés d'un quadrilatère inscrit, le produit des perpendiculaires abaissées sur deux côtés opposés est au produit des* *deux autres perpendiculaires dans un rapport constant, quel que soit le point considéré.*

(Problème *ad quatuor lineas* de PAPPUS.)

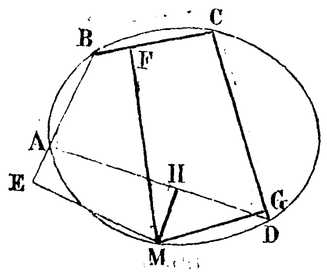


Fig. 1312.

Il faut prouver que le rapport $\frac{ME \cdot MG}{MF \cdot MH}$ est constant.

Considérons un cercle qui aurait l'ellipse donnée pour projection, et menons le plan de ce cercle par le point M donné. Soient ME′, MG′, etc., les perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés du quadrilatère A′B′C′D′ qui se projette suivant ABCD.

On a : $$ME' \cdot MG' = MF' \cdot MH' \quad (\text{n}^\text{o}\ 1214). \qquad (1)$$

Or la perpendiculaire ME n'est pas la projection de la perpendiculaire ME′; mais, en joignant le point E′ au point E, *on obtient un triangle* MEE′ *qui reste semblable à lui-même, quel que soit le point* M *de l'ellipse; donc le rapport* $\frac{ME'}{ME}$ *est constant.*

Représentons ce rapport par $e$, par exemple; nous aurons :

$$\frac{ME'}{ME} = e, \quad \text{d'où} \quad ME' = ME \cdot e.$$

De même, le triangle MMF′ reste semblable à lui-même; le rapport $\frac{MF'}{MF}$ est ordinairement différent du rapport $e$, mais il est constant, quel que soit le point M. Soit donc $f$ la valeur de ce rapport; on aura :

$$\frac{MF'}{MF} = f; \quad \text{d'où} \quad MF' = MF \cdot f.$$

On aurait de même :

$$MG' = MG \cdot g \quad \text{et} \quad MH' = MH \cdot h.$$

Dans l'égalité (1), remplaçons ME′... MH′ par leurs valeurs ci-dessus.

On a : $$ME \cdot e \times MG \cdot g = MF \cdot f \times MH \cdot h,$$

d'où $$\frac{ME \cdot MG}{MF \cdot MH} = \frac{f \cdot h}{e \cdot g}. \qquad (2)$$

Or le membre de droite est constant; donc il en est de même du rapport des produits ME . MG et MF . MH.

### Théorème 887. — I.

**2106.** *Par un point* M *d'une ellipse, on mène une droite* ME *qui rencontre le côté* AB *d'un quadrilatère inscrit sous un angle donné* $\alpha$; *une droite* MF *qui coupe* BC *sous un angle aussi donné* $\beta$; *une droite* MG *qui coupe* CD *sous l'angle* $\gamma$, *et une droite* MH *qui coupe* DA *sous l'angle* $\delta$.

*Le rapport des produits* ME . MG, MF . MH *est constant.*

La démonstration est identique à la précédente.

**2107. Note.** C'est sous la forme générale que nous venons d'indiquer (n° 2106) que le problème *ad quatuor lineas*, que PAPPUS nous a transmis, avait été étudié par EUCLIDE et APOLLONIUS. La question est connue sous le nom de *problème de Pappus,* depuis qu'elle a été ainsi désignée par DESCARTES.

Les anciens se proposaient le problème plus général de trouver le lieu des points M tels qu'en menant de ce point des droites rencontrant $n$ droites données sous des angles donnés, le rapport du produit de $\frac{n}{2}$ distances au produit des $\frac{n}{2}$ autres distances eût une valeur donnée; ils reconnurent que pour quatre droites le lieu est une conique; le triangle n'est qu'un cas particulier où l'on prend le rapport du carré d'une distance au produit des deux autres. DESCARTES résolut le problème par la méthode des coordonnées, qu'il venait d'établir. NEWTON donna une démonstration purement géométrique pour le cas du quadrilatère; CHASLES regarde ce théorème comme la plus universelle et la plus féconde des propriétés des coniques. (*Aperçu historique,* page 37, § 32.)

### Théorème de Desargues 888.

**2108.** *Lorsqu'une transversale coupe une ellipse et un quadrilatère inscrit, elle détermine deux points de la courbe, tels que le rapport des produits des distances de l'un d'eux aux couples des points d'intersection de la transversale et des côtés opposés du quadrilatère égale le rapport des produits des distances du second point aux mêmes couples de points d'intersection de la transversale et des côtés opposés.*

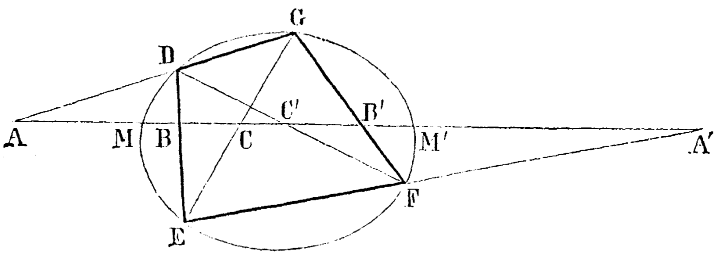



Fig. 1313.

En effet, d'après le théorème précédent (n° 2106), le rapport $\frac{MA \cdot MA'}{MB \cdot MB'}$ est constant, quelle que soit la position du point M sur la courbe; donc, pour un second point M' d'intersection, on aura :

$$\frac{MA \cdot MA'}{MB \cdot MB'} = \frac{M'A \cdot M'A'}{M'B \cdot M'B'}.$$

**2109.** *Remarque.* Le *théorème de Desargues* est fondamental dans la théorie de l'*involution*. L'énoncé sous lequel il est présenté est de PASCAL. Il peut servir à déterminer un sixième point d'une conique, connaissant cinq points de cette courbe. Avec quatre des points donnés, D, E, F, G par exemple, on forme un quadrilatère; par le cinquième point M, on mène une transversale quelconque, et sur cette ligne on détermine M' à l'aide de la relation ci-dessus.

**Note.** Voir *Introduction à l'étude de l'homographie,* publiée en 1875, p. 50, par J.-B.-V. REYNAUD, professeur de mathématiques au lycée de Toulouse.

### Ier Théorème de Poncelet 889.

**2110.** *L'angle sous lequel on voit de l'un des foyers d'une section conique la partie d'une tangente mobile, interceptée par deux tangentes fixes, est constant pour toutes les positions de cette première tangente.* (*Traité des propriétés projectives des figures*, tome I, nº 464.)

1re *Démonstration.* Soient LC, LD les tangentes fixes; MN la tangente mobile. Il faut prouver que l'angle MFN est constant.

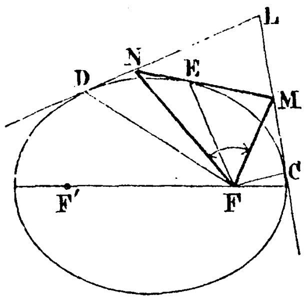


Fig. 1314.

Joignons le foyer F aux trois points de contact et aux extrémités de la tangente mobile MN. La droite qui joint le point de concours de deux tangentes à l'un des foyers est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux deux points de contact (G., nº 633); donc

$$\text{angle } MFC = MFE\,, \quad \text{angle } NFE = NFD;$$

d'où

$$\text{angle } MFN = {}^1/_2 \text{ angle } CFD.$$

Ainsi, quelle que soit la position de MN, l'angle MFN est constant, car il est la moitié de l'angle invariable CFD.

*Remarque.* Le théorème ci-dessus peut être démontré directement, et l'on peut en déduire, comme simple corollaire, que la droite FL est bissectrice de l'angle CFD.

**2111.** 2e *Démonstration.* Décrivons le cercle principal et projetons le foyer F sur chaque tangente. D'après le *théorème de La Hire* (G., nº 626), les sommets des angles droits FBC, FGN, FDE se trouvent sur le cercle.

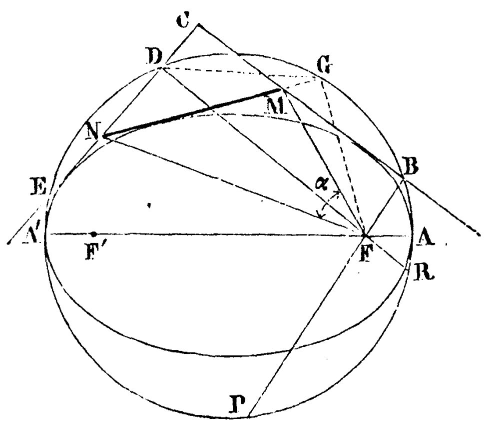


Fig. 1315.

Le quadrilatère FGDN est inscriptible dans le cercle qui aurait FN pour diamètre, car les angles FGN, FDN sont droits; donc

$$\text{angle } FNG = FDG = {}^1/_2 \text{arc } GBR.$$

Le quadrilatère FBGM est aussi inscriptible ; donc l'angle NMF égale FBG comme ayant le même supplément FMG ; donc

$$\text{angle } FMN = FBG = {}^1/_2 \text{ arc } GDP.$$

Le troisième angle MFN du triangle MFN a pour mesure la moitié de ce qui reste de la circonférence, c'est-à-dire ${}^1/_2$ arc PR ; donc l'angle MFN est constant.

### Théorème 889. — I.

**2112.** *Si, sur le plan d'un angle fixe donné* BCE, *on fait tourner autour d'un point fixe* F *choisi un angle* α *de grandeur constante, la corde* MN, *commune à l'angle fixe et à l'angle mobile, enveloppera* *une conique ayant le point F pour foyer.* (Poncelet, *Traité des Propriétés projectives des figures*, n° 472.)

Ce théorème est le réciproque du précédent.

**Théorème 889. — II.**

**2113.** *La droite qui joint un foyer au point de concours de deux tangentes est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs qui joignent ce foyer aux deux points de contact.* (Poncelet, n^os 461, 469.)

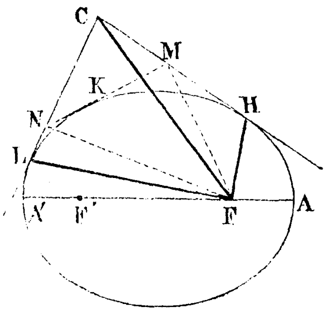


Fig. 1316.

La démonstration directe de ce théorème est connue (G., n° 633); mais on peut montrer qu'il n'est qu'un corollaire du *théorème de Poncelet* (n° 2110).

En effet, pour une tangente mobile MN, l'angle MFN est constant; or quand MN tend vers la position limite HG, le point M vient au point de contact H, et le point N vient en G; donc l'angle MFN = HFG.

De même MFN = GFL; donc FG est bissectrice de l'angle HFL.

**2114.** *Définition.* L'angle vecteur qui correspond à une tangente mobile, limitée à deux tangentes fixes, est l'angle formé par les droites qui joignent le foyer considéré aux extrémités de la tangente mobile.

A une tangente mobile MN correspondent deux angles vecteurs MFN, MF'N. Ces angles ne sont égaux entre eux que lorsque les tangentes fixes sont également inclinées sur les axes de la conique.

**2e Théorème de Poncelet 890.**

**2115.** *Dans l'ellipse, la somme des angles vecteurs relatifs à une tangente mobile est constante; cette somme a pour supplément l'angle formé par les deux tangentes fixes.* (*Traité des propriétés projectives des figures*, tome I, n° 447. — *Applications d'Algèbre et de Géométrie*, tome II, p. 460.)

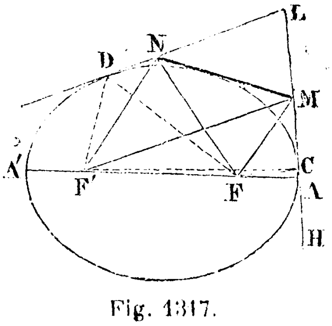


Fig. 1317.

Il faut prouver qu'on a :

$$\text{angle MFN} + \text{MF'N} + \text{L} = 2 \text{ droits}.$$

Or $\qquad$ angle $\text{MFN} = {}^1/_2\ \text{CFD}$,

angle $\text{MF'N} = {}^1/_2\ \text{CF'D}$.

Dans chaque quadrilatère FCLD, F'CLD, les angles valent quatre droits; la somme totale vaut donc huit droits.

Cette somme peut se décomposer en deux groupes :

$$\text{CFD} + \text{L} + \text{CF'D} + \text{L} \quad \text{ou} \quad 2(\text{MFN} + \text{MF'N} + \text{L}), \tag{1}$$

et

$$\text{FCL} + \text{FDL} + \text{F'CL} + \text{F'DL}. \tag{2}$$

Mais $\qquad \text{FCL} + \text{F'CL} = 2$ droits; $\quad$ car $\quad \text{F'CL} = \text{FCH}$.

De même $\qquad \text{FDL} + \text{F'DL} = 2$ droits.

Ainsi le groupe (2) égale 4 droits; il en est donc de même du groupe (1); donc $\qquad \text{MFN} + \text{MF'N} + \text{L} = 2$ droits.

**Théorème 890. — I.**

**2116.** *Dans l'hyperbole, la différence des angles vecteurs est constante.*

**Théorème 891.**

**2117.** *Lorsqu'un quadrilatère circonscrit à une conique a pour points de contact les sommets d'un quadrilatère inscrit, les diagonales des deux quadrilatères passent par le même point.* (Newton.)

On peut placer une conique quelconque sur un cône de révolution (nº 2212). Par le sommet du cône et par chaque côté des deux quadrilatères, ainsi que par les diagonales, on mène des plans. Le quadrilatère circonscrit donne une pyramide quadrangulaire circonscrite. En coupant le cône par un plan perpendiculaire à l'axe, on obtient un cercle inscrit et circonscrit à deux quadrilatères ; or les diagonales de ces deux quadrilatères passent par un même point ; il en est donc de même dans la section conique (nº 1274).

**Problème 891. — I.**

**2118.** *Connaissant cinq tangentes à une conique, déterminer les points de contact.*

C'est une application directe du *théorème de Newton* (nº 2117). Quatre tangentes donnent lieu à un quadrilatère ABCD circonscrit à la courbe ; les diagonales se coupent au point O, et les cordes de contact doivent aussi passer par ce point.

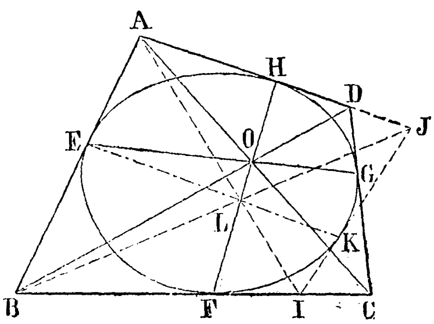


Fig. 1318.

Soit IJ la cinquième tangente ; cette ligne et trois des premières tangentes donnent lieu à un quadrilatère circonscrit ABIJ, dont les diagonales se coupent au point L.

Or les tangentes AD et BC appartiennent aux deux quadrilatères ; donc la ligne menée par les points L, O est la corde FH des contacts.

On détermine d'une manière analogue la corde EG ; il suffirait de considérer le quadrilatère formé par AB, BC, CD et IJ.

**2119. Polaires dans les coniques.** On peut placer une conique quelconque sur un cône de révolution (nº 2212) ; dès lors toutes les propriétés descriptives des polaires dans le cercle (G., nºs 799 à 809) donnent lieu à des propriétés correspondantes dans les coniques. Nous devons nous borner à en énoncer quelques-unes.

*Lorsqu'on mène des sécantes par un même point du plan d'une conique, et qu'on mène des tangentes à la courbe par les divers points d'intersection, les tangentes correspondantes se coupent sur une même droite, et cette droite est la polaire du point fixe.*

*Les droites qui joignent deux à deux les points d'intersection des sécantes menées par un point fixe se coupent sur la polaire de ce point.*

*Le point de concours de deux tangentes est le pôle de la corde des contacts.*

Pour se rendre compte de la fécondité de la théorie des polaires appliquée aux coniques, et de la *Méthode des polaires réciproques* de Poncelet, il suffit de lire le *Traité des propriétés projectives des figures* de cet illustre géomètre.

### Hexagramme de Pascal 891. — II.

**2120.** *Dans tout hexagone inscrit à une conique, les trois points de concours des côtés opposés se trouvent en ligne droite.*

1° La démonstration se déduit immédiatement du théorème connu pour le cercle. (G., n° 747.) Il suffit de projeter le cercle et l'hexagone inscrit pour obtenir l'ellipse ; donc...

On peut aussi placer la conique sur un cône de révolution ; la propriété établie pour l'hexagone inscrit dans le cercle s'étend à l'hexagone inscrit dans une conique quelconque.

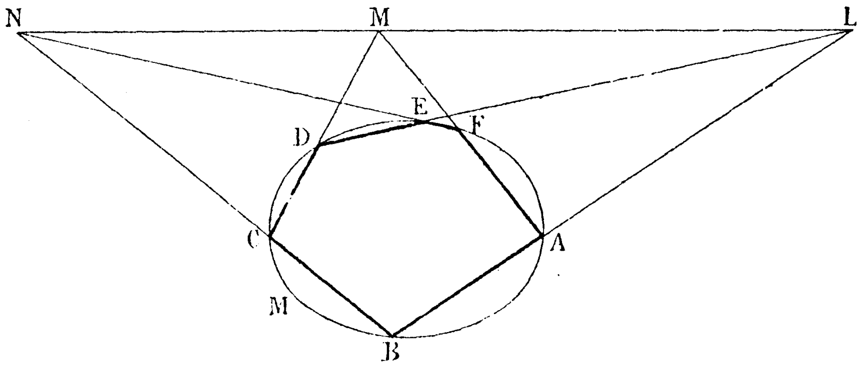



Fig. 1319.

2° En raisonnant sur la conique elle-même et l'hexagone inscrit, on peut appliquer la théorie des transversales en procédant comme il a été indiqué. (G., n° 747.)

3° On pourrait recourir aux faisceaux anharmoniques, en procédant pour une conique quelconque, comme on le fait pour le cercle. (Voir *Traité de Géométrie*, par MM. Rouché et de Comberousse, 7e édition, n° 328.)

### Théorème de Brianchon 891. — III.

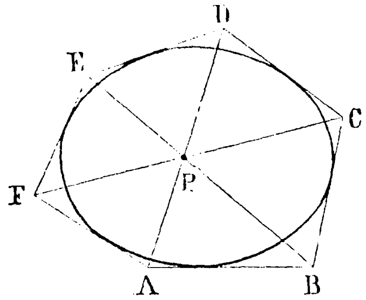



Fig. 1320.

**2121.** *Les trois diagonales qui joignent les sommets opposés d'un hexagone circonscrit à une conique quelconque se coupent au même point.*

Tout ce qu'on a dit pour la démonstration de l'hexagone inscrit, 1° et 3°, est applicable à la démonstration de l'*hexagone de Brianchon*. Les polaires réciproques permettent de le déduire du théorème précédent (n° 2120).

**Note.** On peut voir le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse (7e édition, n° 329).

**2122. Applications des théorèmes de Pascal et de Brianchon.** *L'hexagone inscrit* permet de déterminer une conique par points lorsqu'on connaît cinq de ces points; car, en joignant ces cinq points deux à deux de toutes les manières possibles et les considérant comme étant cinq sommets d'un hexagone, on détermine dans chaque cas le sixième sommet. Ces nouveaux points, combinés cinq à cinq, entre eux ou avec les premiers, donnent lieu à de nouveaux hexagones, et par suite à de nouveaux points.

*L'hexagone circonscrit* permet de déterminer une conique par les tangentes lorsqu'on en connaît cinq, d'une manière analogue à ce qui vient d'être dit pour les points.

Les *théorèmes de Pascal et de Brianchon* permettent de déterminer une conique dans tous les cas où l'on connaît cinq données; par exemple : cinq points, quatre points et une tangente, trois points et deux tangentes, etc., cinq tangentes. (Voir *Mémoire sur les lignes de second ordre,* par BRIANCHON, 1817.)

**Théorème 891. — IV.**

**2122 a.** *Lorsqu'on circonscrit une conique à un quadrilatère quelconque, les couples de tangentes menées à la conique par les sommets opposés du quadrilatère se coupent sur la troisième diagonale de cette figure.*

C'est une extension de la propriété correspondante du quadrilatère inscriptible (nº 1237 **b**).

**Théorème de Möbius 892.**

**2123.** *Une surface de révolution étant engendrée par la rotation d'une conique autour de l'axe focal, tout plan mené par un foyer* F *de la conique coupe la surface suivant une conique qui a le même point* F *pour foyer.*

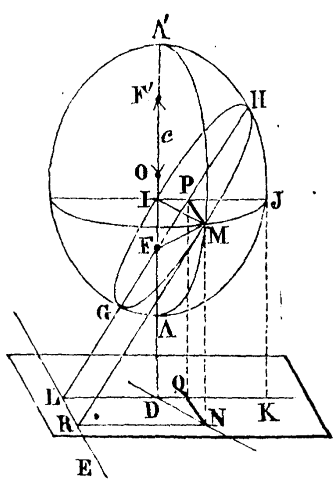



Fig. 1321.

Soit une ellipse AHA′ ayant F, F′ pour foyers, $a$, $b$ pour demi-axes, $c$ pour distance focale, et DL pour directrice. (G., nº 845.)

On sait que cette droite est perpendiculaire à l'axe, et que le rapport des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice est constant.

Ainsi $$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{HF}}{\mathrm{HL}} = \frac{c}{a}.$$

Dans la rotation autour de AA′, la courbe AHA′ engendre un ellipsoïde de révolution, et la directrice engendre un plan P perpendiculaire à l'axe AA′.

Coupons la surface de révolution par un plan perpendiculaire au méridien principal AHA′; soient GMH la courbe obtenue et LE l'intersection du plan directeur par le plan sécant.

Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que, pour un point quelconque M de la courbe, le rapport des distances MF et MR est constant; car si cela est prouvé, F sera le foyer et LE la directrice, et, par suite, la section sera une conique.

Par le point M menons un plan méridien et un plan perpendiculaire à l'axe.

Le dernier donne pour section un cercle $IM = IJ$.

PM, perpendiculaire au méridien principal AHA′, est parallèle à LE.

Le plan conduit par l'axe donne le méridien AMA′ et la directrice DN parallèle à IM comme intersections de deux plans parallèles par le plan méridien. En projetant le point M en N, on a :

$$MN = PQ = ID = JK\,; \quad MR = PL.$$

Le point M appartenant à l'ellipse AMA′, dont DN est la directrice et $\frac{c}{a}$ le rapport constant, donne :

$$\frac{MF}{ID} = \frac{c}{a}. \qquad (1)$$

Il suffit d'exprimer ID en fonction de PL, qu'il faut faire entrer dans le rapport, et en fonction de lignes connues.

Or les triangles LFD, IFP sont semblables ; donc

$$\frac{ID}{PL} = \frac{FD}{FL}. \qquad (2)$$

Multiplions (1) par (2) afin d'éliminer ID ; on obtient :

$$\frac{MF}{PL} \quad \text{ou} \quad \frac{MF}{MR} = \frac{c}{a} \cdot \frac{FD}{FL}.$$

Or le membre de droite est constant pour une section donnée ; donc la courbe GMH est une conique ayant F pour foyer et LE pour directrice.

**Note.** Voir *N. A.*, 1857, p. 176, et *H. des M.*, par Maximilien Marie, t. XII, p. 179.

Dans le théorème de Quetelet et Dandelin, établissant que toute section plane d'un cône de révolution est une conique, il est facile d'établir directement la propriété de la tangente de faire des angles égaux avec les rayons vecteurs du point de contact (*Nouvelles Annales,* 1879, p. 95, Maleix). — Voir plus loin la note, où nous rappelons le *théorème de Dandelin,* n° 2214 **a**.

La démonstration rappelée ci-dessus permet aussi d'établir facilement que l'ellipse et l'hyperbole admettent deux directrices (n° 2214 **b**).

* Möbius (1790-1868), géomètre allemand, mort à Leipzig ; dans son traité *Der barycentrische Calcul* (1827), il a proposé la notation symbolique (ABCD) pour désigner le rapport anharmonique des quatres points A, B, C, D. On lui doit aussi l'expression des *six rapports* en fonction de l'un d'eux. (G., n° 758.) (Cit. Cremona, *Éléments de Géométrie projective,* pages 46 et 53.)

## Hyperbole. — Théorèmes.

### Théorème 893.

**2124.** *Une droite ne peut rencontrer une hyperbole en plus de deux points.*

La démonstration la plus rigoureuse et la plus complète résulte de l'étude de la variation de la différence des distances de deux points fixes à un point quelconque d'une droite donnée (nos 258 à 261) ; mais cette démonstration ne saurait trouver place dans les *Éléments de Géométrie.*

**2124 a.** *Remarque.* Une difficulté analogue se présente quand XX′ passe entre F et F′ pour les points situés au delà du point d'intersection de XX′ et de $FF_1$ ; le point $F_1$ étant le symétrique de F′ par rapport à XX′.

La question omise (G., n° 651) est celle qui se rapporte à un point tel que N, situé au delà du point D, où la droite coupe FF'. — Lorsque le symétrique N' est tel que M se trouve dans l'angle FN'F', la démonstration donnée ne prouve pas que F'N' — FN' est essentiellement différent de F'M — FM, dès qu'on a déjà F'M' — M'F $= 2a$.

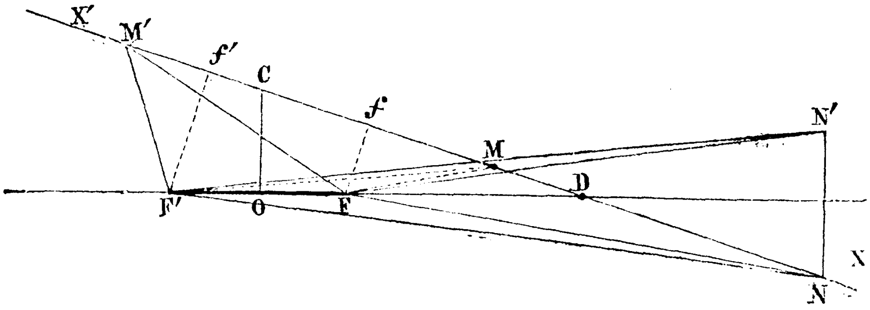



Fig. 1322.

Il faut donc recourir à l'étude de la variation de la différence des distances (n° 258); mais la connaissance de cette variation suffit. En effet, de C à X', la différence varie de zéro à $ff'$, projection de FF' sur XX'. Or toutes les valeurs données par les points de D à X sont plus grandes que $ff'$; donc le point N ne saurait donner une différence égale à celle des points donnés M et M'.

De même, si l'on prenait pour points donnés M et N, on en conclurait que la différence est plus grande que $ff'$, et, par suite, que CX' ne peut avoir aucun point donnant la différence voulue.

**Théorème 894.**

**2124 b.** *L'hyperbole a pour asymptotes les droites menées par son centre, parallèlement aux génératrices qui déterminent dans le cône un plan mené par le sommet, parallèlement à la section qui donne la courbe.*

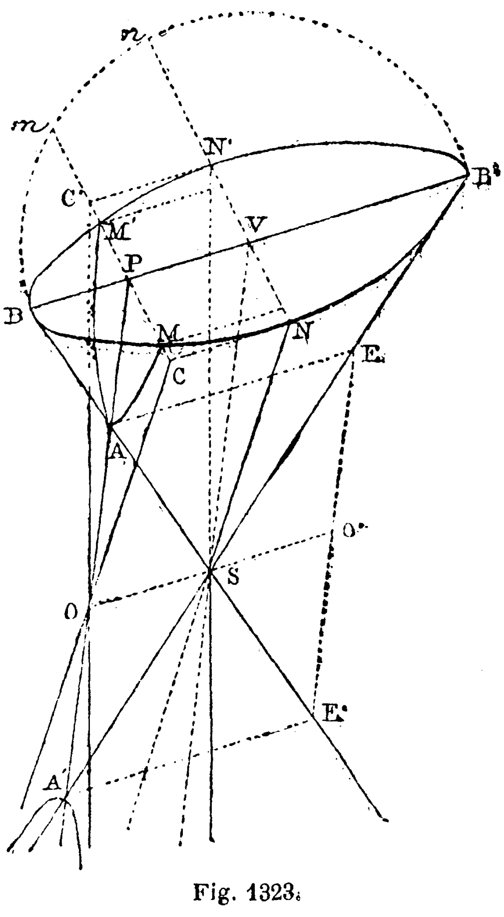



Fig. 1323.

Soient le plan sécant MAM' et son parallèle NSN' perpendiculaires au méridien principal; par le milieu O de AA' menons des parallèles aux génératrices SN et SN'. Il faut prouver que OC et OC' sont les asymptotes de l'hyperbole.

Coupons le cône par un plan BNB'N' parallèle à OS, et en même temps perpendiculaire au méridien principal, et mené par une droite PM perpendiculaire au plan BSB' et à OP. La droite MM' est perpendiculaire à BB', à PO et au plan BSB'. De même, NN' est perpendiculaire à BB', à SV et au plan BSB'.

Le point O étant le milieu de AA', la ligne SV, parallèle à AA', divise en parties égales les lignes AE et BB', parallèles à SO. Donc NN' est le petit axe de l'ellipse BNB', et MM' est une corde parallèle à cet axe; on a donc : $PM < VN$, ou $PM < PC$.

Si le plan BNB' s'éloigne du sommet, la différence MC diminue, car PV est une quantité constante, et en considérant le cercle décrit sur le grand axe, on a : $$\frac{Pm}{Vn} = \frac{PM}{VN}.$$

Or $$Pm = \sqrt{Vn^2 - VP^2} = Vn\sqrt{1 - \frac{VP^2}{Vn^2}}.$$

Ainsi, quand $Vn$ augmente, le radical tend vers l'unité; et par suite la différence de $Vn$ à $Pm$ diminue; il en est donc de même de
$$VN - PM.$$

Donc les droites OC et OC' parallèles aux génératrices SN et SN' sont les asymptotes de l'hyperbole. (G., n° 680.)

**2124 c.** *Remarque.* L'angle des asymptotes égale l'angle des génératrices SN, SN', déterminées par le plan mené par le sommet du cône parallèlement au plan de l'hyperbole.

*Pour un cône donné, l'angle des asymptotes est maximum lorsque le plan sécant est parallèle à l'axe,* car cet angle égale celui que forment entre elles deux génératrices diamétralement opposées.

**2124 d. Note.** GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT, deux siècles avant DANDELIN et QUETELET, avait donné un beau théorème sur la section hyperbolique du cône à base circulaire. En admettant que BNB'N' soit un cercle (fig. 1323), on aurait :
$$CM \cdot CM' = CP^2 - MP^2 = PV^2,$$
quantité constante pour un plan sécant donné, quelle que soit la section parallèle à la base du cône.

Ce théorème a été rappelé de nos jours dans *Mathesis*, 1904, p. 129, par M. A. AUBRY, bien connu par les nombreux et savants articles donnés jadis au J. M. S. DE LONGCHAMPS, et par son très intéressant *Essai sur l'histoire de la Géométrie des Courbes* (Coimbra 1909. — Imprensa da Universidade).

### Théorème 895.

**2125.** *Deux hyperboles sont dites conjuguées lorsqu'elles ont les mêmes asymptotes et les mêmes axes; mais l'axe transverse de l'une est l'axe non transverse de l'autre, et réciproquement.*

*Dans l'hyperbole équilatère, tous les diamètres conjugués sont égaux; les parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués ont leurs sommets sur les asymptotes.*

En admettant que le lieu géométrique du point milieu P des cordes parallèles MM' soit une droite OP qui passe au centre, on voit, à cause de la symétrie de la figure par rapport à chaque asymptote, qu'en prenant $OH = OL$, la droite HG est tangente; le point de contact B est au milieu de HG, puisque A est au milieu de LG. Donc ces diamètres AO et OB sont parallèles aux côtés du losange GLG'H, et par suite aux cordes MM' ou NN' qu'ils divisent. D'ailleurs ils sont égaux entre eux,

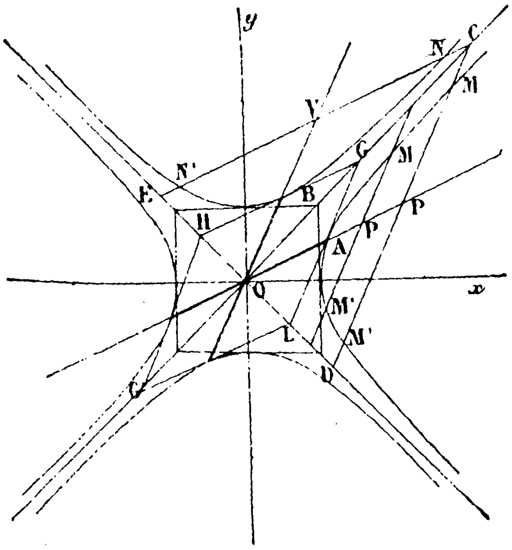


Fig. 1324.

et les sommets du losange GLG'H sont sur les asymptotes. Par rapport à une hyperbole donnée, un diamètre est transverse et son conjugué est non transverse.

**Théorème 896.**

**2126.** *Le produit des distances des foyers à une tangente quelconque à l'hyperbole est constant.*

Joignons M au centre; soit N le point où cette ligne coupe F'M' : les triangles FMO et F'NO sont égaux, car $F'O = FO$; les angles en O sont égaux, ainsi que les angles en F et F', puisque les lignes MF et F'M' sont perpendiculaires à la tangente. Donc $F'N = MF$ et $NO = OM$. Ainsi N est le point où le cercle principal coupe F'M'.

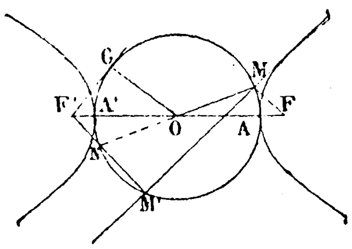


Fig. 1325.

Or $\qquad F'M' \cdot MF,$

ou $\quad F'M' \cdot F'N = F'G^2 = c^2 - a^2 = b^2;$

donc $\qquad FM \cdot F'M' = b^2.$

*Remarque.* La plupart des théorèmes relatifs à l'ellipse ont leurs analogues par rapport à l'hyperbole : c'est ce qui a lieu notamment pour les théorèmes 2093 et 2094; mais, pour ce dernier, le cercle n'est réel qu'autant qu'on a : $b < a$. Le cercle se réduit au point O lorsque l'hyperbole est équilatère, et lorsque $b$ est $> a$, on ne peut pas mener à l'hyperbole deux tangentes qui soient perpendiculaires l'une à l'autre.

**Théorème 897.**

**2127.** *Sur une sécante quelconque, l'hyperbole et ses asymptotes interceptent des segments égaux.*

(Voir *Méthodes*, nº 174.)

**Théorème 898.**

**2128.** *Toute tangente limitée aux asymptotes est divisée en deux parties égales par le point de contact.*

(Voir *Méthodes*, n° 175.)

**Note.** Dans *l'Enseignement mathématique,* 1911, p. 205, M. G. Majcen d'Agram indique une construction de l'hyperbole comme lieu de points et comme enveloppe. A ce double point de vue, la meilleure construction repose sur l'emploi du théorème précédent.

**Théorème 899.**

**2129.** *Lorsqu'on projette en* C, *sur l'axe non transverse, un point* M *de l'hyperbole équilatère, la distance* AC *du sommet au point obtenu* C *égale l'abscisse* MC *du point considéré* M.

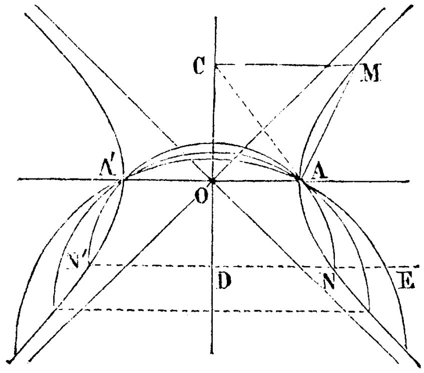


Fig. 1326.

En effet,

$$MC^2 \text{ ou } x^2 = y^2 + a^2,$$

$$AC^2 = OC^2 + OA^2 = y^2 + a^2;$$

donc $\qquad MC^2 = AC^2.$

*Remarque.* On peut construire facilement l'hyperbole équilatère par points, en utilisant la propriété précédente. Ainsi, on mène une parallèle quelconque DE à l'axe transverse. Du point D comme centre, avec le rayon DA, on décrit une demi-circonférence; elle fait connaître les points N et N'.

**Théorème 900.**

**2130.** *Dans l'hyperbole équilatère, la droite qui joint le centre à un point quelconque de la courbe est moyenne proportionnelle entre les deux rayons vecteurs de ce point.* (*N. A.*, 1842, p. 249.)

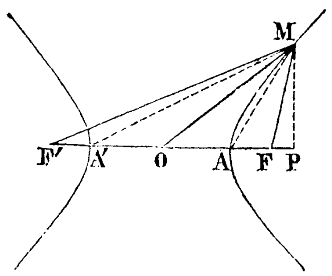


Fig. 1327.

Dans le triangle FMF', la droite MO est médiane; donc

$$2MO^2 + 2OF^2 = MF'^2 + MF^2,$$

ou $\qquad MF'^2 + MF^2 = 2MO^2 + 2c^2. \qquad (1)$

Mais on a : $\quad MF' - MF = 2a,$

ou $\qquad MF'^2 - 2MF \cdot MF' + MF^2 = 4a^2,$

$$MF^2 + MF'^2 = 4a^2 + 2MF \cdot MF'. \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2), on trouve :

$$2MO^2 + 2c^2 = 4a^2 + 2MF \cdot MF'.$$

Mais dans l'hyperbole équilatère $c^2 = 2a^2$; donc, en simplifiant et divisant par 2, on trouve :

$$MO^2 = MF \cdot MF'.$$

**Théorème 901.**

**2131.** *Dans l'hyperbole équilatère, les angles à la base du triangle* AMA' *obtenu en joignant un point quelconque* M *de la courbe aux deux sommets* A *et* A' *ont un angle droit pour différence* (fig. 1327).

L'équation de la courbe $x^2 - y^2 = a^2$ revient à

$$MP^2 = OP^2 - OA^2 = (OP - OA)(OP + OA');$$

donc $$MP^2 = AP \cdot A'P, \quad \text{d'où} \quad \frac{AP}{MP} = \frac{MP}{A'P}.$$

Ainsi les triangles APM, MPA' sont semblables; par suite,

$$\text{l'angle } MA'P = AMP;$$

donc $$MA'P + MAP = \text{un droit},$$

d'où $$MAA' - MA'A = \text{un droit}.$$

**Note.** Nous avons pu généraliser le théorème ci-dessus (nº 2131 **a**), et ce dernier nous a conduit à une démonstration élémentaire du *théorème de Brianchon et Poncelet* relatif au triangle inscrit à l'hyperbole équilatère. (Voir ci-après, nºs 2183 **a** et 2183 **b**.)

### Théorème 901. — I.

**2131 a.** *Dans l'hyperbole équilatère, un diamètre donné forme avec les cordes aboutissant à ses extrémités des angles dont la différence est constante. Cette différence égale le double de l'angle* α *du diamètre et de l'asymptote perpendiculaire à la bissectrice de l'angle* D.

Soient le diamètre CB et les cordes DC et DB.

Menons DE parallèle à OL et BL parallèle à OE.

Les points B, D appartenant à l'hyperbole, on a :

$$ED \times IL = BL \times IE \quad \text{ou} \quad \frac{ED}{IE} = \frac{LB}{IL},$$

enfin $$\frac{ED - IE}{IE} = \frac{LB - IL}{IL} = \frac{ID}{IE} = \frac{IB}{IL}.$$

Donc les deux triangles rectangles ILE et IBD sont semblables; les angles $e$ et $\beta$ sont égaux; on prouverait de même que $e = \gamma$. Donc DE parallèle à l'asymptote OL est bissectrice de l'angle BDC.

On a aussi $B - C = 2\alpha$, car l'angle EDH de la bissectrice ED et de la hauteur DH égale

$$\tfrac{1}{2}(B - C)$$

(nº 468); or les angles EDH et α sont égaux comme ayant les côtés perpendiculaires; donc

$$B - C = 2\alpha.$$

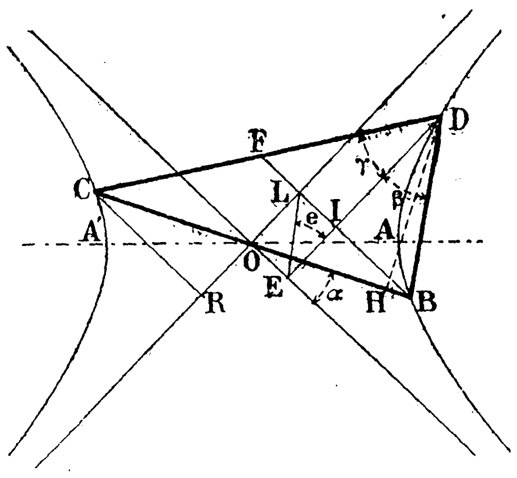



Fig. 1328.

*Remarque.* Si $\alpha = 45^\circ$, $B - C = 90^\circ$ (nº 2131).

**2131 b. Note.** Le théorème peut être énoncé comme il suit :

*Les droites qui joignent un point quelconque d'une hyperbole équilatère aux deux extrémités d'un même diamètre transverse, sont également inclinées sur l'une ou l'autre asymptote.*

*Annales de Gergonne*, t. II (1811-1812), p. 126. Parmi ceux qui ont démontré la proposition, il convient de citer d'abord LHUILIER, puis ENCONTRE, VECTEN, et ROCHAT, dont les noms se trouvent fréquemment dans les *Annales*.

**Théorème 901. — II.**

**2131 c.** *Si un cercle a pour centre un point d'une hyperbole équilatère, et passe par le symétrique de ce point par rapport au centre de l'hyperbole, il coupe cette courbe en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.* (*N. A.*, 1892, p. 31, nº 1642, LEMAIRE, et 1884, p. 448, nº 1507.)

D'après le théorème précédent (nº 2131 **b**), les cordes MQ, LQ sont également inclinées sur l'asymptote; donc les angles aigus C et D sont égaux entre eux; il en est de même des angles aigus E, F; par suite, les angles supplémentaires DLP et PMQ sont égaux entre eux; or le premier a pour mesure la moitié de l'arc PRQ, tandis que le second PMQ a pour mesure l'arc PLQ; ainsi l'arc PLQ est la moitié de PRQ, et par suite il est le tiers de la circonférence : ainsi l'angle inscrit R a 60°; on démontrerait qu'il en est de même des angles P et Q du triangle PQR, donc le triangle est équilatéral.

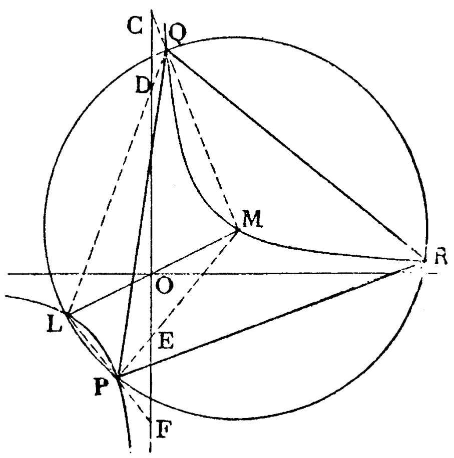


Fig. 1328 *bis*.

*Remarque.* On aurait pu se borner à dire : D'après le *théorème de Brianchon et Poncelet* (nº 2183 **b**), M est l'orthocentre du triangle PQR; donc ce triangle est équilatéral, puisque son orthocentre coïncide avec le centre du cercle circonscrit.

**2131 d. Note.** Le théorème nº 2131 **c** est de M. BROCARD. Il l'a fait connaître dès 1874, puis proposé dans les *N. A.* en 1884, p. 448, q. 1507, d'après l'*Educational Times;* il a été démontré en 1885, p. 382, par MM. MORET-BLANC, BARISIEN, etc.

Il a reparu en 1892, avec l'énoncé de M. LEMAIRE, p. 31*, q. 7641. — Dans le même vol., p. 46*, M. BROCARD a donné la démonstration ainsi qu'une note historique sur la question. Enfin en 1896, M. E. FOUCART l'a démontré analytiquement; puis, p. 290, MANNHEIM a fait connaître la démonstration que nous avons reproduite. Nous avons donné ensuite, sous le nom de *Remarque,* une démonstration fort concise, très facile à retenir.

**2132. Emploi de la directrice pour étudier les sections coniques.** Les auteurs anglais, dans l'étude élémentaire des *sections coniques,* définissent ces courbes par la propriété de la directrice et du foyer.

*Une conique est le lieu des points dont les distances à un point donné et à une droite fixe sont entre elles dans un rapport constant.*

La courbe est une *ellipse,* quand le rapport est moindre que l'unité; une *parabole,* quand il est l'unité; une *hyperbole,* quand il est plus grand.

La différence du point de départ conduit à une exposition bien différente de celle que nous suivons ; comme comparaison, il y aurait utilité réelle à étudier les auteurs anglais.

Dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* (1890), on a une suite d'articles de M. MOREL d'après le dernier mode indiqué; on peut voir d'ailleurs quelques ouvrages anglais, par exemple : *A treatise on Geometrical conics by* COCKSHOTT *and* WALTER, publié en 1891 ; et le travail si remarquable de MM. MILNE et DAVIS, *Geometrical conics*.

* M. MOREL, professeur à Sainte-Barbe, a publié de nombreux articles dans le *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*.

## Parabole. — Théorèmes.

### Théorème 902.

**2133.** *Les tangentes menées à la parabole par un point extérieur font des angles égaux avec la ligne qui joint ce point au foyer et avec la parallèle à l'axe menée par ce même point extérieur ;*

*Et la droite qui joint ce point au foyer est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs des points de contact.*

Soient les tangentes PM et PN, et soit PH la parallèle de l'axe.

1° Il faut prouver que l'angle FPN = HPM.

Cherchons les symétriques E et G du foyer, par rapport aux tangentes. Ces points appartiennent à la directrice (G., n° 695) ; les projections I et J du foyer sont sur la tangente au sommet. (G., n° 697.)

La circonférence décrite sur PF, comme diamètre, passe aux points I et J, puisque les angles FIP et FJP sont droits.

Les angles inscrits FIJ et FPJ sont égaux ; mais FIJ et HPI sont égaux comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires. Donc l'angle HPM = FPN.

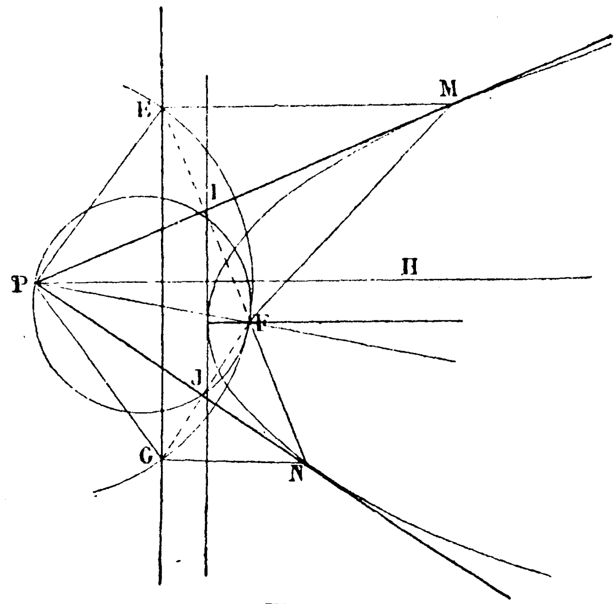


Fig. 1329.

2° Il faut prouver que la droite PF est bissectrice de l'angle MFN, ou que l'angle PFM = PFN.

Or PFM = PEM ; PFN = PGN et PEM = PGN, puisque ces derniers égalent 1 droit plus PGE ou son égal PEG. Donc l'angle PFM = PFN.

### Théorème 902. — I.

**2133 a.** *La distance du foyer d'une parabole au sommet d'un angle circonscrit est moyenne proportionnelle entre les rayons vecteurs des points de contact.*

D'après le théorème précédent (n° 2133), les angles FPN, FMP sont égaux entre eux, comme étant respectivement égaux aux angles égaux MPH et PME.

De même, angle FPM égale FNP; donc les triangles FPM, FNP sont semblables et donnent :

$$\frac{FM}{FP} = \frac{FP}{FN}, \quad \text{d'où} \quad FP^2 = FM \,.\, FN.$$

**2133 b.** Corollaire. *La distance du foyer d'une parabole à une tangente est moyenne proportionnelle entre le demi-paramètre et le rayon vecteur du point de contact.*

Il suffit qu'une des tangentes considérées ci-dessus soit tangente au sommet.

### Théorème 903.

**2134.** *Les tangentes à la parabole, menées d'un même point de la directrice, sont perpendiculaires l'une à l'autre; la corde des contacts passe au foyer, et la droite qui joint le point de concours des tangentes au foyer est perpendiculaire à la corde des contacts.*

Pour mener les tangentes à la parabole, du point P, comme centre avec le rayon PF, il faut décrire une circonférence. (G., nº 703.) Les perpendiculaires EM et GN déterminent les points de contact. Joignons le foyer aux points M et N.

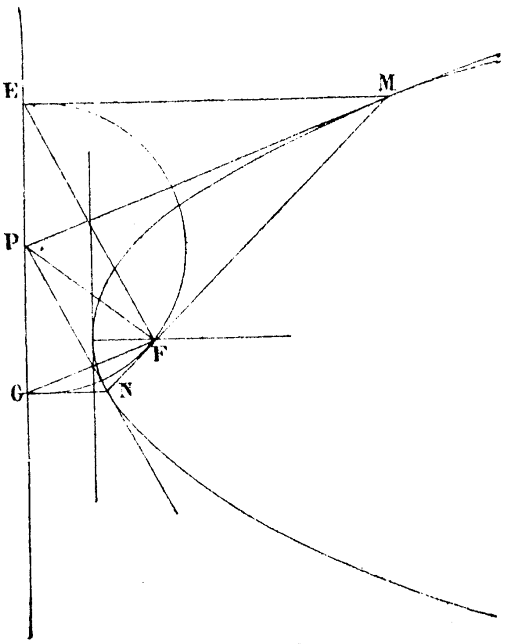


Fig. 1330.

L'angle PFM = PEM = 1 droit; de même, l'angle PFN est droit. Donc les droites FM et FN sont dans le prolongement l'une de l'autre. Ainsi la corde des contacts MN passe au foyer, et PF est perpendiculaire à cette ligne.

Cela résulte aussi de la deuxième partie du théorème de l'exercice précédent (nº 2133).

Les tangentes, étant perpendiculaires aux droites EF et GF, se coupent à angle droit, puisque l'angle EFG est inscrit dans une demi-circonférence.

*Remarque.* La directrice est le lieu des points de concours des tangentes qui se coupent à angle droit; autrement, la directrice est le lieu des points de concours des tangentes pour lesquelles la corde des contacts passe par le foyer.

### Théorème 904.

**2135.** *La somme des inverses des segments d'une corde menée par le foyer d'une parabole est une quantité constante.*

Soit une corde focale MFN; il faut prouver que $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN}$ est une quantité constante.

Or $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}=\frac{FN+FM}{FM.FN}=\frac{MN}{FM.FN}$.

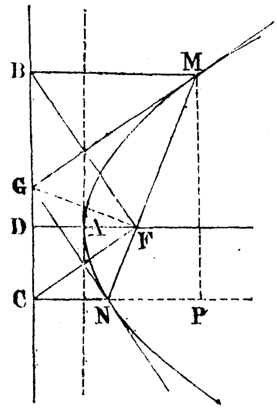


Fig. 1331.

Menons les tangentes MG, NG; ces droites se coupent à angle droit; le point G se trouve sur la directrice (2134, *R.*); GF est perpendiculaire à MN, car, les points F et C étant symétriques par rapport à GN et l'angle GCN étant droit, l'angle NFG l'est aussi.

Donc $FM.FN=GF^2$. (G., n° 247, 2°.)

Il suffit de prouver que $\frac{MN}{GF^2}$ est une quantité constante.

On sait que $BG=GF=GC$; donc $BC=2GF$.

Abaissons la perpendiculaire MP sur CN; $MP=BC$.

Les triangles rectangles DFG, MNP sont semblables comme ayant les côtés perpendiculaires; donc

$$\frac{MN}{GF}=\frac{MP}{FD},\quad \frac{MN}{GF}=\frac{2GF}{FD};$$

d'où $$\frac{MN}{GF^2}=\frac{2}{FD}\quad\text{quantité constante.}$$

**2136.** *Remarque.* $$\frac{2}{FD}=\frac{2}{p}.$$

Ainsi $$\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}=\frac{2}{p}.$$

La somme des inverses des segments de la corde focale est le double de l'inverse du paramètre de la parabole.

**Théorème 905.**

**2137.** *Si par le foyer d'une parabole on élève une perpendiculaire à l'axe, et que sur cette droite on prenne des grandeurs égales* FM, FN *de part et d'autre de cet axe, le trapèze obtenu en projetant les points* M *et* N *sur une tangente est constant, quelle que soit la tangente menée.* (*N. A.*, 1845, p. 363.)

Soit $FM=FN$.

Il faut prouver que le trapèze MCDN a une aire constante.

Or la surface peut s'obtenir en multipliant un des côtés non parallèles par la perpendiculaire abaissée du point milieu de l'autre côté; mais le projection B du foyer F sur une tangente quelconque DT se trouve sur la tangente au sommet.

Ainsi le point milieu de CD se trouve sur AY; BP est la hauteur, et l'on a :

$$MCDN=MN.BP\quad\text{quantité constante.}$$

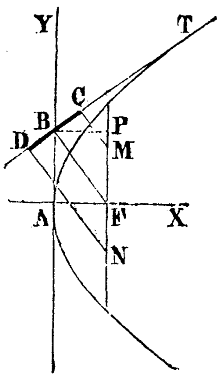


Fig. 1332.

### Problème 905. — I.

**2138.** *Par le foyer* F *d'une ellipse, on élève une perpendiculaire sur le grand axe, on prend de part et d'autre de l'axe des grandeurs égales* FM, FN; *mener une tangente à l'ellipse de manière que le trapèze obtenu en projetant* M *et* N *sur la tangente ait une aire donnée* $k^2$.

La projection du foyer sur la tangente, c'est-à-dire le milieu du côté opposé à MN, est sur le cercle principal (G., nº 626); le problème revient donc à déterminer sur le cercle principal un point B dont la distance BP au grand axe soit telle qu'on ait :

$$MN \cdot BP = k^2.$$

Il faut donc mener une parallèle au grand axe, à une distance donnée par

$$BP = \frac{k^2}{MN}.$$

**Note.** La démonstration si élémentaire que nous donnons pour les théorèmes précédents (nºˢ 2137 et 2138) a été indiquée par TERQUEM. (*N. A.*, 1845, p. 365.)

### Théorème 906.

**2139.** *Toute corde menée par le foyer d'une parabole est égale au quadruple du rayon vecteur du point de contact de la tangente parallèle à cette corde.* (*N. A.*, 1877, p. 335, et 1878, p. 91.)

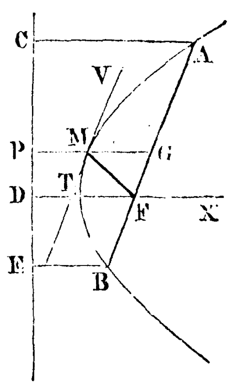



Fig. 1333.

Menons les perpendiculaires AC, MP, BE sur la directrice; PM prolongé passe par le point G milieu de la corde. (G., nº 706, 2º.)

Donc $$2 \cdot GP = AC + BE = AB.$$

Mais le triangle FMT est isocèle, car l'angle

$$FMT = GMV = FTM.$$

Donc $$FM = FT = GM = MP,$$

d'où $$PG = 2FM,$$

d'où $$2GP \quad \text{ou} \quad 4FM = AB.$$

**Note.** Le théorème est de SONDAT, alors professeur à Annecy; son nom se trouve assez fréquemment dans les *N. A.* de 1875 à 1880.

### Théorème 907.

**2140.** *Dans une parabole, une tangente mobile limitée à deux tangentes fixes est vue du foyer sous un angle constant.* (*Traité des Propriétés projectives des figures*, t. I, nºˢ 466, 467.) D'après PONCELET, le théorème est de LAMBERT; il en est de même de celui qu'on en a déduit facilement (nº 2141).

La démonstration est analogue à celle qu'on a donnée pour l'ellipse nº 2110.

Projetons le foyer sur les trois tangentes.

Les points M, G, N se trouvent sur la tangente au sommet. (G., nº 697.)

Le quadrilatère FGDN est inscriptible dans le cercle qui aurait FD pour diamètre; donc

$$\text{angle NGD} = \text{NFD} = \text{BGM}.$$

De même angle BGM = BFM; d'où angle BFD = MFN.

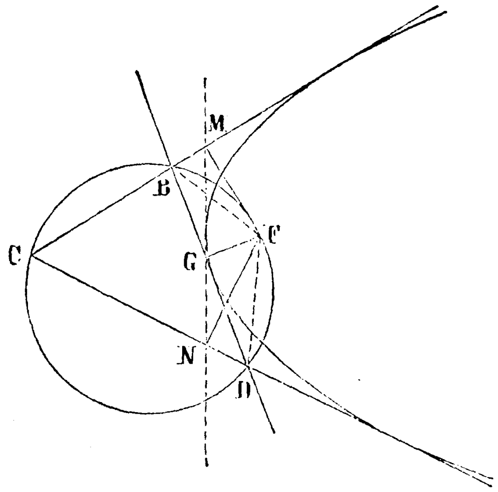



Fig. 1334.

*Ainsi l'angle* BFD *est constant, il est le supplément de l'angle* C, car l'angle MFN est le supplément de l'angle formé par les tangentes fixes.

**Théorème de Lambert 907. — I.**

**2141**. *Le cercle circonscrit au triangle* BCD *formé par trois tangentes à la parabole passe par le foyer.*

Les angles F et C sont supplémentaires. (Voir aussi n° 2166.)

*L'orthocentre du triangle circonscrit à une parabole est sur la directrice.* (STEINER.)

**2142. Note.** De ces théorèmes on peut déduire un grand nombre de corollaires. (Voir PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures*, t. I, nos 465 et suivants.)

*Application d'Analyse et de Géométrie*, t. II, p. 461 et suivantes.

* LAMBERT, né en 1728 à Mulhouse, mort en 1777 à Berlin; publia un *Traité de perspective* et un *Traité des comètes*, où l'auteur développe diverses propriétés des coniques.

**Théorème 908.**

**2143.** *Pour tracer le balancier des machines à vapeur, connaissant la demi-longueur* AP *et la demi-largeur* PM = PN, *on divise* MP *et* AP *en un même nombre de parties égales; par les points de division de* MP *on mène des parallèles à l'axe, et l'on joint* N *à chaque point de division de l'axe.*

*Prouver que l'on obtient un arc de parabole.*

Pour le point B, par exemple, on a : $BC = \frac{3}{5} MP$; et les triangles semblables BCD et DPN donnent :

$$\frac{CD}{DP} = \frac{BC}{MP} = \frac{3}{5},$$

$$CD = {}^3/_5 DP = {}^3/_5 \,.\, {}^2/_5 AP = {}^6/_{25} AP.$$

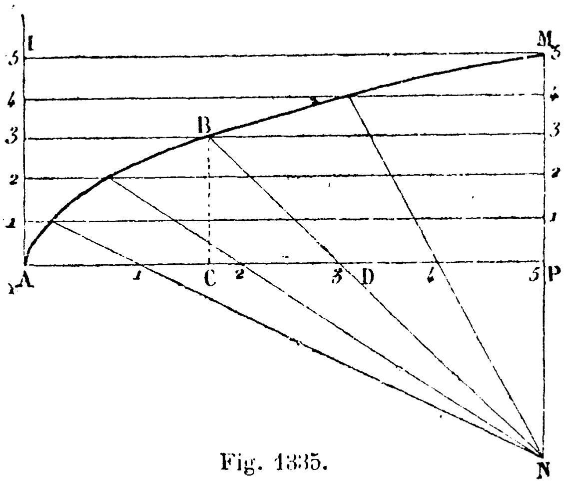


Fig. 1335.

Or $$AC = \frac{3}{5} AP - CD = \frac{15}{25} AP - \frac{6}{25} AP = \frac{9}{25} AP,$$

et puisque $$\frac{BC}{MP} = \frac{3}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{BC^2}{MP^2} = \frac{9}{25} = \frac{AC}{AP},$$

le point B appartient à une parabole qui a la ligne AP pour axe, A pour sommet, et MP pour ordonnée extrême considérée. (G., n° 700.)

**2144**. On emploie aussi le tracé suivant :

Le sommet A est joint aux points 1, 2, etc.; les points où ces lignes coupent les parallèles de même cote appartiennent à une parabole. (G. n° 700.)

La démonstration est analogue à la précédente :

$$\frac{BC}{MP} = \frac{3}{5}, \quad \frac{BC^2}{MP^2} = \frac{9}{25}.$$

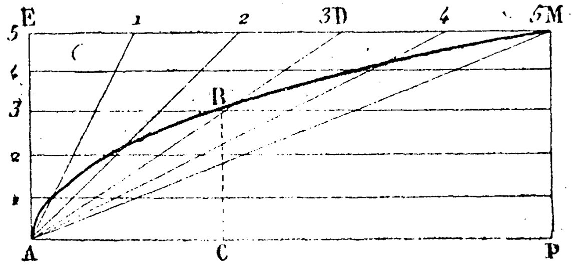


Fig. 1336.

Or les triangles semblables ABC et ADE donnent :

$$\frac{AC}{ED} = \frac{BC}{AE} = \frac{3}{5},$$

mais $$ED = \frac{3}{5} AP.$$

Donc $$\frac{AC}{{}^3/_5 AP} = \frac{3}{5},$$

ou $$\frac{AC}{AP} = \frac{9}{25} = \frac{BC^2}{MP^2}.$$

Les carrés des ordonnées sont dans le même rapport que les abscisses; on a donc une parabole.

**Théorème 909.**

**2145.** *Démontrer directement que le triangle curviligne formé par un arc de parabole et les deux tangentes menées aux extrémités de cet arc est le tiers du parallélogramme construit sur la corde des contacts et le diamètre conjugué à cette corde. En déduire que l'aire du segment parabolique est les deux tiers de ce même parallélogramme.*

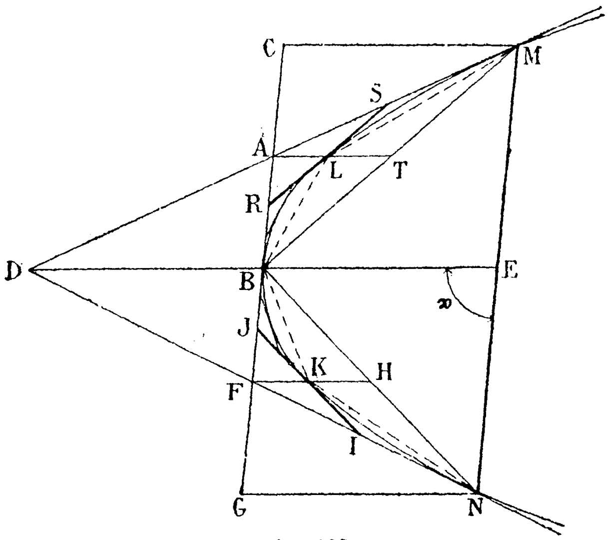



Fig. 1337.

Le triangle MDN est équivalent au parallélogramme CMNG.

Pour avoir la surface curviligne MBN, il suffit de retrancher du triangle total la surface comprise entre la courbe MBN et les tangentes DM, DN.

Menons la tangente AF parallèle à la corde MN; on aura $AF = \frac{MN}{2}$, car $DB = BE$.

Donc le triangle ADF est le quart du triangle MDN ou le quart du parallélogramme.

Menons les tangentes parallèles aux cordes BM, BN.

Le triangle IFJ est le quart de BFN.

Mais le triangle BFN est équivalent à DBF; donc IFJ est le quart de DBF.

Donc $$IFJ + ARS = \frac{ADF}{4}.$$

Des tangentes parallèles aux cordes BK, NK donnent lieu à deux triangles dont la somme est le quart de IFJ.

Les tangentes parallèles aux cordes BL, LM donneraient lieu à deux autres triangles analogues; la somme des quatre nouveaux triangles est donc le quart de la somme $IFJ + RAS$ ou le quart de $\frac{ADF}{4}$, etc.

Donc, en résumé, en représentant par P le parallélogramme, le triangle $ADF = \frac{P}{4}$.

La somme des deux suivants ou $IFJ + ARS = \frac{ADF}{4} = \frac{P}{16}$.

La somme des quatre suivants est le quart du résultat précédent, etc.

Donc la somme des triangles formés entre la courbe et les tangentes DM, DN est donnée par la somme des termes d'une progression décroissante, dont $\frac{1}{4}$ est la raison et $\frac{P}{4}$ le premier terme.

Or la limite de la somme des termes d'une progression, dont $a$ est le premier terme et $q$ la raison, est donnée par

$$S = \frac{a}{1-q}, \qquad (\textit{Alg.}, \text{ n}^\circ\ 335.)$$

$$S = \frac{P}{4} : \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{P}{3}.$$

Donc l'aire parabolique MBN $= \frac{2}{3}$ . P.

*Remarque.* Cette démonstration est l'application de la *Méthode d'exhaustion* (nº 1902). Pour évaluer l'aire de la parabole, ARCHIMÈDE a considéré les triangles *intérieurs*, au lieu de faire la somme des triangles *extérieurs*. Le nom de *Méthode d'épuisement* vient de ce qu'on épuise, en quelque sorte, l'espace compris entre la courbe et les droites DM, DN.

## LIEUX GÉOMÉTRIQUES ET ENVELOPPES

### Lieu 910.

**2146.** *De tous les points d'une circonférence on abaisse des perpendiculaires sur une droite quelconque située dans le plan du cercle. Quel est le lieu du milieu de ces perpendiculaires?*

Soient AA′ et $xy$ la droite et la circonférence données, et $2l$ la distance du centre à la droite.

Pour un point N quelconque on a : $m\text{C} = {}^1/_2\text{NC}$. Or $\text{NC} = 2l + \text{NP}$ ;

donc $\text{C}m = l + {}^1/_2\text{PN}...$

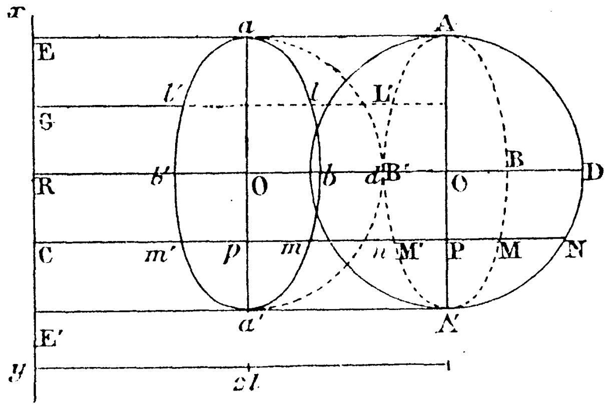



Fig. 1338.

Or si nous divisons les ordonnées, telles que PN, en deux parties égales, nous obtenons l'ellipse ABA′B′, dans laquelle BB′ $= {}^1/_2$AA′ ; et puisque la courbe $aba'b'$ est obtenue en prenant sur chaque parallèle une longueur constante M$m$ égale à $l$, nous obtenons une courbe égale à la première, car on a : $\dfrac{pm}{pn} = \dfrac{ob}{od}$, puisque $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{OB}{OD}$. Donc $aba'b'$ est une ellipse.

**Lieu 911.**

**2147.** *Lieu du centre des ellipses tangentes à deux droites en des points donnés, et lieu du centre et du foyer* F *des ellipses tangentes à deux droites et dont l'autre foyer* F' *est fixe.*

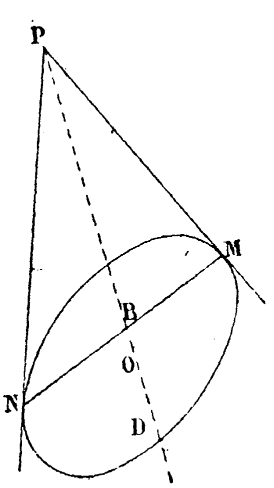


Fig. 1339.

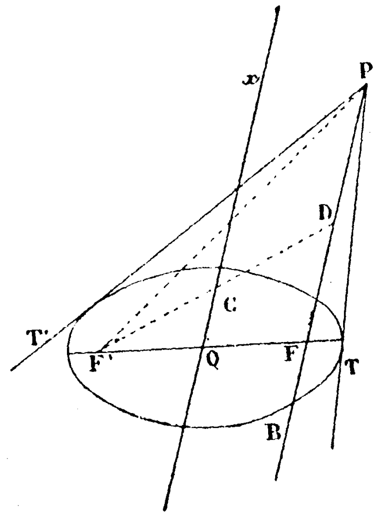


Fig. 1340.

1° D'après le théorème 872 (n° 2081), le lieu du centre O des ellipses est sur la droite BP, qui joint B milieu de la corde des contacts MN au point P ;

2° Le lieu du foyer F est une droite BP qui fait, avec la tangente TP, un angle égal à F'PT' (G., n° 633); le lieu du centre est une parallèle à BP passant par le milieu F'F, car on a constamment F'C = CD.

**2147 a.** *Remarque.* La droite F'P est la position extrême de l'axe focal des ellipses tangentes aux deux lignes données. Pour F'P, l'ellipse est réduite au grand axe F'P; jusqu'à cette limite extrême, les points de contact sur chaque droite se rapprochent de plus en plus du point P.

Au delà, pour F'B, on a donc une hyperbole dont les foyers sont F' et B ; de même, pour F'F'', la droite F'DC donne le centre D sur la tangente T'. Cette ligne est donc une asymptote; et le point où OO' rencontrerait la tangente T serait le centre de l'hyperbole qui aurait TP pour asymptote. La droite F'$y$, parallèle à FP et à OO', correspond à une parabole. (G., n° 690.)

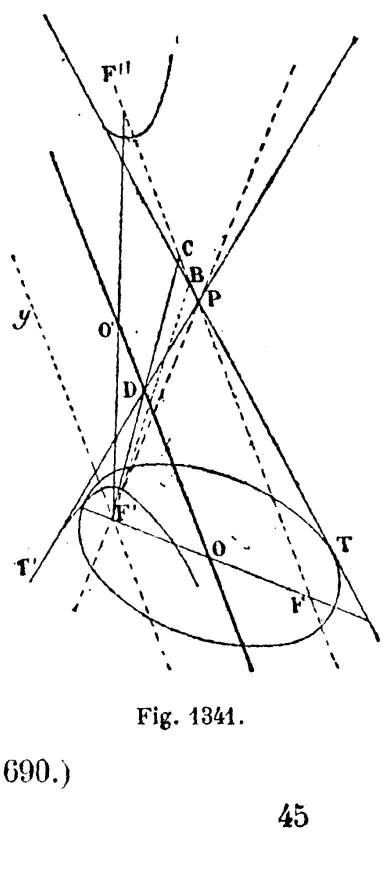


Fig. 1341.

**Lieu 912.**

**2148.** *Lieu des points également distants de deux circonférences, ou d'une circonférence et d'une droite.*

1° *Cas de deux circonférences.* Soit le point M′ tel que l'on ait : $M'B = M'B'$; d'où $M'F - M'F' = BF - B'F' = (R - r)$, quantité constante.

Le point M′ appartient à une hyperbole dans laquelle $2a = R - r$, et

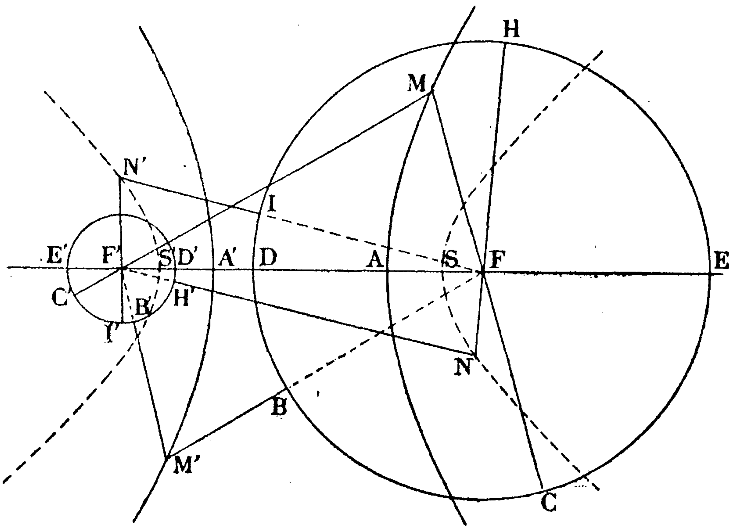



Fig. 1342.

dont F et F′ sont les foyers. Le point A′, milieu de DD′, est un des sommets, car $A'F - A'F' = R - r$; il en est de même du point A, milieu de EE′, car

$$AF' - AF = (AE' - r) - (AE - R) = R - r.$$

Lorsqu'on a $MC = MC'$, le point M appartient à cette même branche; en effet on a :

$$MF' - MF = (MC' - r) - (MC - R) = R - r.$$

L'hyperbole obtenue est le lieu des centres de circonférences tangentes aux circonférences P et F′ les laissant à l'extérieur (*branche* A′) ou les enveloppant toutes deux (*branche* A).

Le lieu complet comprend une seconde hyperbole, car pour les centres N et N′ des circonférences tangentes aux circonférences F, F′ enveloppant l'une et laissant l'autre à l'extérieur, on a :

$$NH = NH' \quad \text{et} \quad F'N - NF = (NH + r) - (NH' - R) = R + r,$$

$$\text{et} \quad N'I = N'I', \quad \text{d'où} \quad FN' - N'F' = (N'I + R) - (N'I' - r) = R + r.$$

Les points S milieu de ED′, et S′ milieu de E′D sont les sommets de cette hyperbole, car :

$$F'S - FS = (D'S + r) - (SE - R) = R + r,$$

$$\text{et} \qquad FS' - F'S' = (S'D + R) - (E'S - r) = R + r. \qquad (1)$$

Lorsque les circonférences sont intérieures, le lieu se compose de deux ellipses.

2° Pour une circonférence et une droite $xy$, le lieu se compose de deux paraboles : le milieu de OB est le sommet de l'une d'elles. On prend $AD = AF$ ; puisque $ML = MF$, on a $MI = MJ$, car A est le milieu de OB et celui de FD.

Donc $LJ = IF$...

A', milieu de OG, est le sommet de la seconde parabole.

$$NF = NP; \quad \text{donc} \quad NH = NG.$$

La discussion des divers cas que peuvent présenter deux circonférences, et une circonférence et une droite, est intéressante, mais n'offre aucune difficulté.

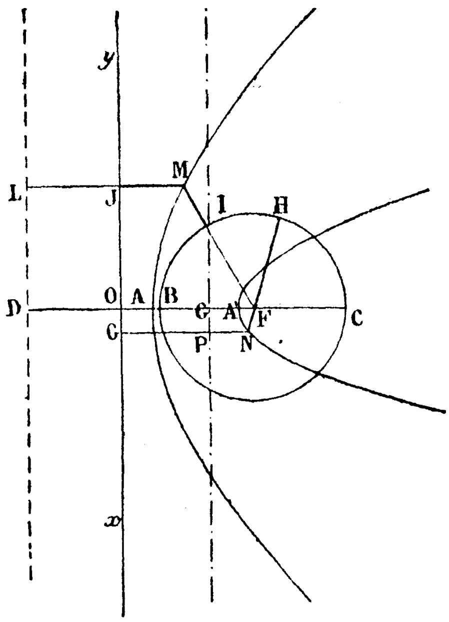



Fig. 1343.

**Lieu 913.**

**2149.** ***Lieu du centre des cercles qui passent par un point fixe, et qui sont tangents à une droite donnée ou à une circonférence donnée.***

Ce n'est qu'un cas particulier du lieu précédent : un cercle est réduit à son centre. D'ailleurs, suivant que le point donné est intérieur ou extérieur au cercle donné, on a une ellipse ou une hyperbole. (G., n$^{os}$ 615 et 649.)

**Lieu 914.**

**2150.** *Par les points où une tangente mobile coupe deux droites fixes tangentes à une parabole, on mène des parallèles aux tangentes fixes : lieu du point de concours de ces parallèles*

Pour une troisième tangente quelconque DE, on a (G., n° 710) : $\frac{EC}{EB} = \frac{DB}{AD}$. Or si nous menons la parallèle DH jusqu'à la corde des contacts, puis, par le point H, une parallèle à AB jusqu'à la rencontre de la tangente BC, nous aurons les égalités

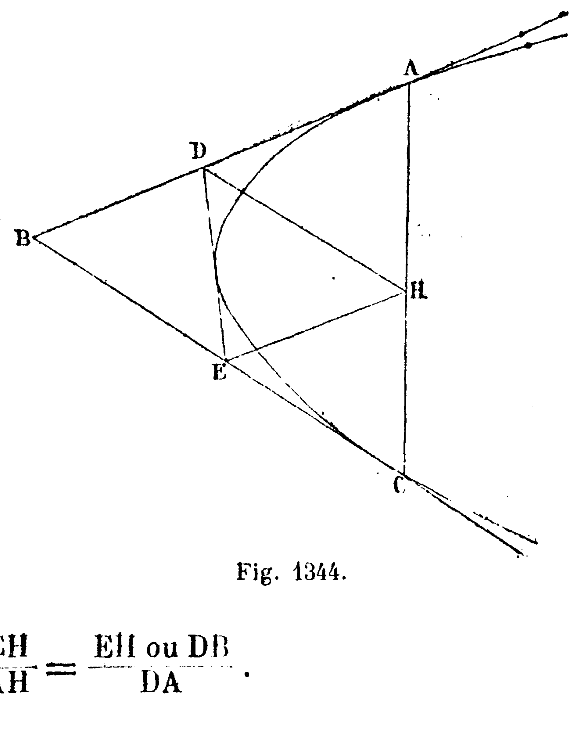



Fig. 1344.

$$\frac{EC}{EB} = \frac{CH}{AH} = \frac{EH \text{ ou } DB}{DA}.$$

Donc la ligne DE ainsi déterminée divise les tangentes fixes en segments inversement proportionnels ; et cette ligne DE n'est autre que la tangente mobile. (G., n° 712.) Donc, si l'on construit le parallélogramme DBEH, le sommet H sera sur la corde des contacts.

### Lieu 915.

**2151.** *Lieu du foyer des paraboles qui ont une directrice donnée et qui passent par un point donné, ou qui sont tangentes à une droite donnée;*

*Lieu des sommets des mêmes paraboles.*

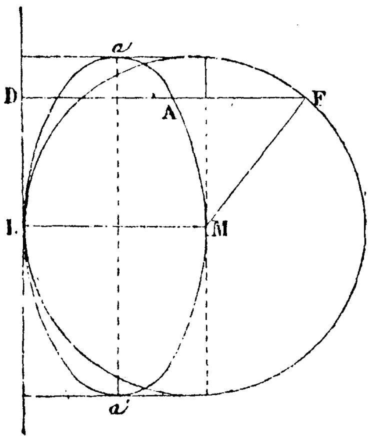



Fig. 1345.

1° Puisque le point M est à égale distance du foyer et de la directrice, le lieu du foyer est le cercle décrit de M comme centre tangentiellement à la directrice; car, pour un foyer quelconque F, on a : MF = ML.

Le sommet A est le milieu de la perpendiculaire FD; donc (n° 2146) le lieu du sommet est une ellipse : le grand axe $aa' = 2LM$, et LM est le petit axe.

2° Soient TP la tangente et LD la directrice données (fig. 1346). Pour une parabole quelconque, remplissant les conditions imposées, N est le symétrique du foyer, et la tangente est perpendiculaire au milieu de FN. (G., n° 693.) Donc l'angle FPM = NPM; et la ligne PR, qui fait, avec la tangente, un angle égal à celui que cette tangente fait avec la directrice, est le lieu des foyers.

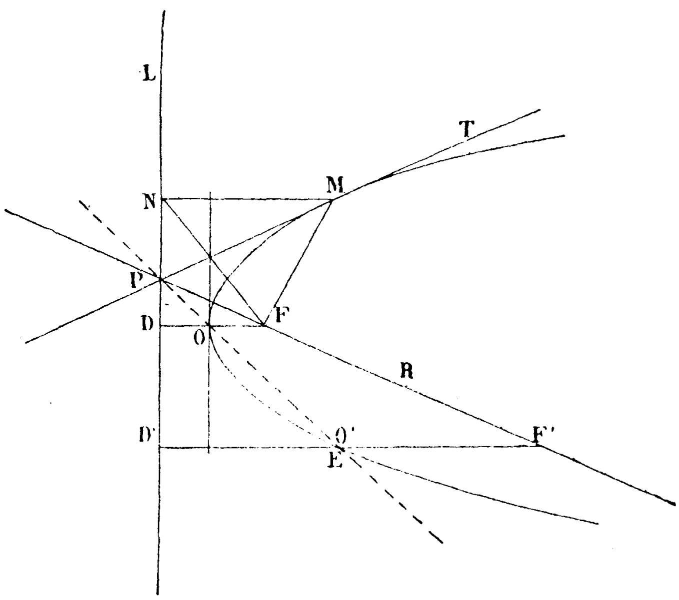



Fig. 1346.

3° Si d'un foyer quelconque F nous abaissons la perpendiculaire FD sur la directrice, le sommet correspondant est au milieu de DF; donc le lieu des sommets est la droite POE, car on aura constamment D'O' = O'F'.

**Lieu 916.**

**2152.** *Lieu des points dont la somme ou la différence des distances à un point et à une droite donnés égale une ligne donnée.*

(Voir *Méthodes*, n° 76.)

**Lieu 917.**

**2153.** *Lieu des points dont le produit des distances à deux droites rectangulaires égale un carré donné.*

(Voir *Méthodes*, n° 78.)

Lorsque les droites ne sont pas perpendiculaires l'une à l'autre, le lieu est une hyperbole ayant ces droites pour asymptotes; mais la détermination est analytique, car elle dépend de l'équation de l'hyperbole, et utilise diverses transformations de formules.

**Lieu 918.**

**2154.** *Dans un trapèze, la grande base est fixe, la petite base est donnée de longueur, et la somme des deux autres côtés est constante. Quel est le lieu du point de concours des diagonales?*

Soient $AD = a$, $BC = b$ et $AB + DC = l$.

Par le point O, menons des parallèles aux côtés.

On a : $AE = OG = OH = DF$,

puis $OE = AG$, $OF = DH$.

1° La droite $HG = \dfrac{2ab}{a+b}$ (n° 1199).

Donc $AE = DF = \dfrac{ab}{a+b}$.

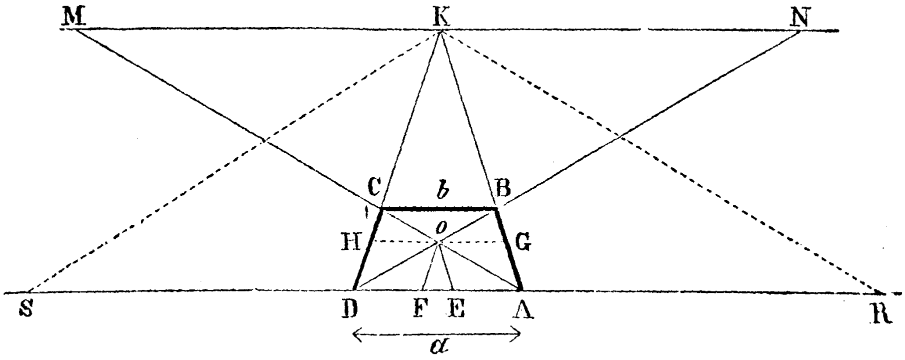



Fig. 1347.

Ainsi les points E, F sont fixes, quelle que soit la position du point O.

Mais on a : $\dfrac{AG}{BG} = \dfrac{a}{b}$ ou $\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{a}{a+b}$,

d'où $AG = AB \cdot \dfrac{a}{a+b}$.

De même $DH = DC \cdot \dfrac{a}{a+b}$;

donc $$\mathrm{OF}+\mathrm{OE}=(\mathrm{AB}+\mathrm{DC})\frac{a}{a+b}=\frac{al}{a+b}.$$

La somme des distances du point O aux points fixes E, F étant constante, le lieu du point O est une ellipse ayant E, F pour foyers et la longueur $\frac{al}{a+b}$ pour grand axe.

### Lieu 918. — I.

**2155.** *Lieu du point* K *où se coupent les côtés non parallèles lorsque la somme* l *des diagonales est constante* (fig. 1347).

$$\mathrm{AR}=\mathrm{KM}=\mathrm{KN}=\mathrm{DS}=\frac{ab}{a-b}\quad (\text{n}^{\text{o}}\ 1199,\ 2^{\text{o}});$$

donc les points R et S sont fixes.

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{KM}}{\mathrm{BC}}=\frac{a}{a-b},$$

d'où $$\mathrm{AM}=\mathrm{AC}\,.\,\frac{a}{a-b};$$

de même, $$\mathrm{DN}\ \text{ou}\ \mathrm{SK}=\mathrm{BD}\,.\,\frac{a}{a-b};$$

donc

$\mathrm{RK}+\mathrm{SK}=(\mathrm{AC}+\mathrm{BD})\,.\,\frac{a}{a-b}=\frac{al}{a-b}$, quantité constante; donc...

*Remarque.* On peut présenter les questions précédentes d'une manière très simple et très générale.

### Théorème 918. — II.

**2156.** *On donne deux droites parallèles* AD, BC *de longueurs connues* a *et* b, *l'une* AD *est fixe de position, et elles sont réunies par deux droites* AB, DC *dont la somme* l *est constante. Un point quelconque* M *du plan est relié au système donné par une droite* MEG *de longueur constante, et dont le rapport* $\frac{m}{n}$ *des distances aux bases est constant; or, quel que soit le déplacement de* BC, *le lieu du point* M *est une ellipse dont le centre* O *et les foyers* F, F' *se déterminent en menant par ce point* M *des parallèles à la médiane* NP *et aux côtés* NA, ND.

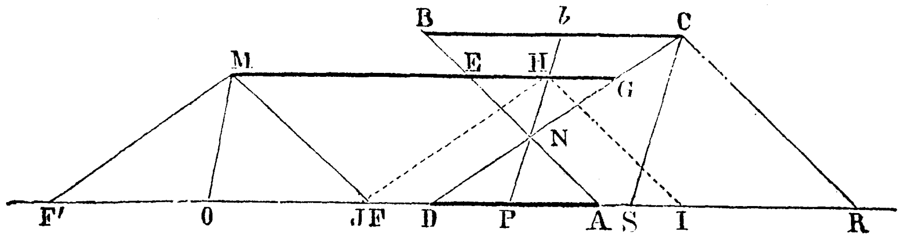



Fig. 1348.

En effet, chaque point du système mobile décrit une ellipse, et toutes les ellipses sont semblables.

Pour C, par exemple, on a :

$$DR = a + b \quad \text{et} \quad DC + CR = l;$$

donc D et R sont les foyers et le grand axe $= l$.

Pour N, on a : $\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{DN}{NC} = \dfrac{a}{b}$;

donc la somme $AN + DN$ est constante, elle égale d'ailleurs $\dfrac{al}{a+b}$.
A et D sont les foyers.

Par le point H, il faudrait mener des parallèles aux diagonales.

Il en est de même pour M, car $OA = MH$, ligne de longueur donnée;

$$OF = OF' = PI = PJ.$$

D'ailleurs, le calcul de ces longueurs OF, OF' et de la somme $MF + MF'$ est connu, car on a :

$$\frac{FF'}{DR} = \frac{OM}{SC} \quad \text{ou} \quad \frac{FF'}{a+b} = \frac{m}{m+n},$$

d'où $$FF' = \frac{m(a+b)}{m+n}.$$

De même $$\frac{MF + MF'}{CR + CD} = \frac{m}{m+n},$$

d'où $$MF + MF' = \frac{ml}{m+n}; \quad \text{donc...}$$

**Lieu 918. — III.**

**2156 a.** *Un trapèze circonscrit à une demi-circonférence a le diamètre pour hauteur; le côté opposé est mobile; quel est le lieu du point de concours des diagonales?*

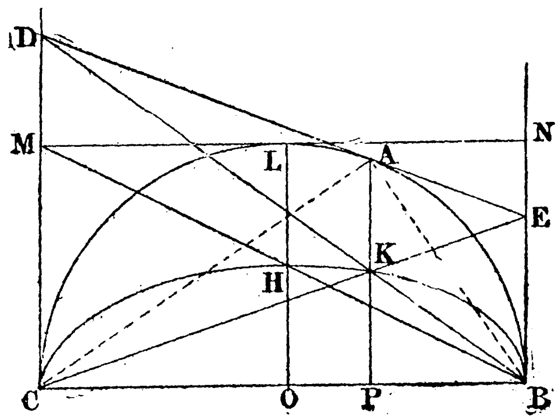



Fig. 1349.

1° Soit K le point d'intersection des deux diagonales; on a :

$$\frac{AK}{BE} = \frac{DK}{DB} = \frac{CP}{CB}, \quad \text{d'où} \quad AK = \frac{BE \cdot CP}{CB};$$

de même, $$\frac{PK}{BE} = \frac{CP}{CB}, \quad \text{d'où} \quad PK = \frac{BE \cdot CP}{CB};$$

donc $$AK = PK.$$

Le point de concours est le point milieu de AP, proposition connue (nº 1246 **a**).

Le lieu du point K est une ellipse ayant BC pour grand axe et OH = demi-OL pour demi-petit axe.

2º Les diagonales et la perpendiculaire AP sont les symédianes du triangle rectangle ABC, or ces lignes se coupent au point milieu de la hauteur AP; donc.., etc.

### Lieu 918. — IV.

**2156 b.** *Par un point* M *donné sur une ellipse du centre* O, *on abaisse des perpendiculaires sur les axes de la courbe; démontrer que la droite qui joint les points* P *et* Q *de ces perpendiculaires passe par un point fixe* N *et que le lieu du point* N *est une ellipse du centre* O, *lorsque* M *décrit la courbe donnée.*

Le théorème est encore vrai lorsque les perpendiculaires MP, MQ sont abaissées sur deux diamètres conjugués quelconques.

Steiner a proposé la question ci-dessus pour les deux diamètres conjugués égaux. (*Mathesis*, 1904, p. 51, question 1445.)

### Lieu 919.

**2157.** *Par un point* M *pris sur une ellipse, on mène une tangente* MT *qui coupe le petit axe au point* T. *Quel est le lieu de la projection du point* T *sur le rayon vecteur* FM *du point de contact?* (Mannheim, *N. A.*, 1862, p. 126, nº 614; solutions, p. 172 et 316.)

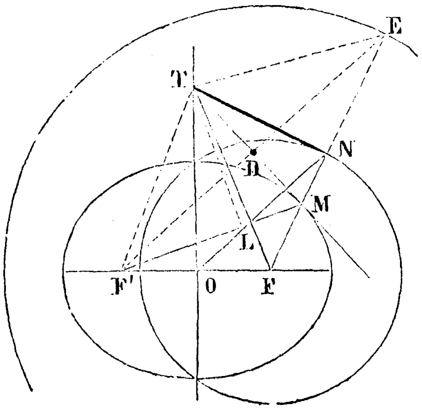


Fig. 1350.

Du foyer F′ abaissons une perpendiculaire F′D sur la tangente; prolongeons-la jusqu'au cercle directeur du foyer F; on sait que DE = F′D et que FE = $2a$ passe par le point de contact M.

Mais FT = TF′ = TE; donc le triangle FTE est isocèle, et la perpendiculaire TN tombe au milieu de la base; donc FN = $^1/_2$ FE = $a$. Ainsi le lieu est le cercle décrit du foyer F comme centre avec le demi-grand axe pour rayon.

Remarque. *Si l'on projette le même point* T *sur l'autre rayon* F′M, *la droite* NL *passera par le centre de la courbe.*

**Note.** Diverses solutions analytiques ou géométriques se trouvent dans le même volume, 1862, page 172, par Abraham Schnée (Ch. Brisse), alors élève au lycée Charlemagne; p. 174, par Lebasteur, élève du lycée Napoléon, classe de M. Vacquant; puis p. 316, par H. Delorme, avec Note.

### Théorème 919. — I.

**2158.** *On mène une tangente* MT *à une parabole; cette droite coupe la tangente au sommet* A *en un point* T; *le lieu de la projection du* *point* T *sur le rayon vecteur* FM *du point de contact est une circonférence décrite du foyer comme centre, avec un rayon* FA *égal à la distance du foyer* F *au sommet* A *de la courbe.*

### Lieu 920.

2159. *Les sommets* A *et* B *d'un triangle donné glissent respectivement sur deux droites fixes. Quel est le lieu décrit par le troisième sommet?*

(Voir *Méthodes*, nº 144.)

On peut énoncer le théorème comme il suit :

### Théorème de Schooten 920. — I.

2160. *Lorsqu'un segment rectiligne* AB, *de longueur et de position données sur un plan* M, *se déplace de manière que ses extrémités* A *et* B *glissent respectivement sur deux droites concourantes tracées dans un plan* P *qui coïncide avec le premier, tout point du plan* M *décrit une ellipse sur le plan* P.

*Corollaire.* Un point quelconque d'une droite, dont les extrémités glissent respectivement sur deux droites concourantes fixes, décrit une ellipse ayant pour centre le point de concours des deux droites fixes.

L'importance de ce corollaire, que l'on énonce fréquemment comme théorème, nous conduit à le démontrer directement.

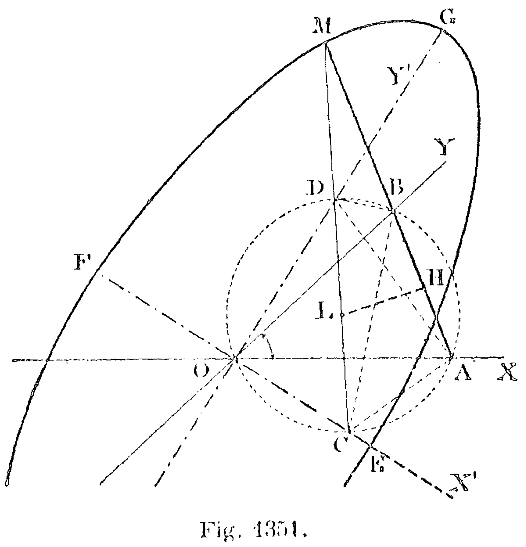


Fig. 1351.

Soient OX, OY les droites fixes, ABM la droite mobile; les longueurs AB, BM ne varient pas, le point A glisse sur OX, tandis que B glisse sur OY; il faut prouver que le point M décrit une ellipse, ayant le point O pour centre.

Circonscrivons une circonférence au triangle AOB.

Joignons le point M au centre L, afin d'obtenir un diamètre CD; joignons aussi les points C et D aux points O, A et B.

*La circonférence ne varie pas de grandeur;* en effet, ACOB est un arc de segment décrit sur une ligne donnée AB et capable d'un angle donné XOY.

*Les triangles* ACM *et* BDM *ne varient pas de grandeur*, car la droite MDC est déterminée par le centre L du cercle; or ce centre se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB et à une distance LH qui ne varie point, car le rayon AL ne varie point, quelle que soit la position de la corde AB du segment décrit ACODB.

*Dans le déplacement de* AB, *chaque point* C *et* D *décrit une droite qui passe par l'origine* O.

En effet, l'angle AOC égale l'angle ABC, qui ne varie point; donc le point C est constamment sur une droite OX′ qui forme avec OX un angle XOX′ égal à CBA.

De même, le point D se meut sur une droite OY′ qui forme avec OY un angle YOY′ égal à l'angle invariable BAD.

*Le point* M *décrit une ellipse ayant* O *pour centre, et dont les demi-axes égalent* MC *et* MD, car le mouvement de AB entraîne celui de la figure invariable ACDM ; or CD est une droite de longueur constante, dont les extrémités C et D glissent respectivement sur deux droites rectangulaires fixes OX′, OY′ ; donc le point M décrit une ellipse, etc. (G., nº 643.)

**2160 a. Notes.** 1º La détermination des axes est due à MANNHEIM. (N. *A.*, 1850, p. 419, nº 6.)

2º CH. DUPIN a étendu à l'espace à trois dimensions le *théorème de Schooten* :

**Th.** *Lorsqu'une droite se déplace de façon que trois de ses points restent sur trois plans donnés, un quatrième point de cette droite décrit un ellipsoïde qui a pour centre le point de rencontre des trois plans donnés.*

Comme corollaire, on peut énoncer la proposition suivante que M. MANNHEIM a démontrée directement.

**Th.** *Lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur quatre plans donnés, un point quelconque de cette droite décrit une ellipse.* (N. *A.*, 1889, pages 308 et 318.)

* SCHOOTEN, géomètre hollandais, né vers 1620, mort en 1661, fit de nombreuses applications de la méthode analytique de DESCARTES. On lui doit aussi le *théorème de la bissectrice*. (G., nº 268.)

### Théorème de Steiner 920. — II.

**2161.** *L'aire de l'ellipse engendrée par un point donné* M *d'une droite* AB *de longueur invariable, dont les extrémités glissent respectivement sur deux droites concourantes* OX, OY, *est indépendante de l'angle* XOY *formé par ces deux droites.*

Le *théorème de Steiner* est une simple scolie du *théorème de Schooten* (nº 2160); en effet,

L'aire de l'ellipse ayant $a$ et $b$ pour demi-axes est donnée par $\pi ab$. (G., nº 637.)

Ainsi l'aire de l'ellipse engendrée par le point M (fig. 1351) égale $\pi$MC . MD.

Or, quel que soit l'angle XOY, on a :

$$MC.MD = MA.MB, \quad \text{aire} = \pi MA.MB;$$

donc l'aire est indépendante de l'angle O.

### Lieu 920. — III.

**2161 a.** *Quel est le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* AOB *formé par deux droites fixes* OAX, OBY *et par un segment rectiligne* AB *invariable de longueur, dont les extrémités glissent sur les deux droites fixes* OX, OY ? (WEILL.)

C'est une ellipse ; la question se rattache à celle de SCHOOTEN, car le centre L du cercle des neuf points circonscrit au triangle complémentaire A′O′B′ peut être considéré comme le sommet d'un triangle invariable A′LB′ dont deux sommets A′ et B′ glissent sur OY et OX.

(Voir d'ailleurs *J. M. E.* de BOURGET et LONGCHAMPS, 1887, p. 163.)

### Théorème 920. — IV.

.**2161 b.** *Deux triangles sont inscrits dans une même circonférence, les droites de Simson de ces triangles* relatives à un même point quelconque P *de la circonférence se coupent sous un angle constant* (n° 765 **b**); *le lieu du point d'intersection de ces droites, lorsque* P *parcourt la circonférence, est une conique.* (DROZ-FARNY.)

Le point d'intersection est le milieu d'un segment rectiligne de longueur constante dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires fixes. (*Mathesis,* 1901, p. 104, question 1090.)

### Lieu 921.

**2162.** *Une circonférence roule intérieurement dans une circonférence de rayon double. Quel est le lieu décrit par un point quelconque du plan de la première circonférence sur le plan de la seconde?*

D'après le *théorème de Cardan ou de la Hire* (n° 1285), un point quelconque A de la circonférence M décrit un diamètre de la seconde P.

Soient donc deux points A et B situés aux extrémités d'un même diamètre de la petite circonférence; ils décriront deux diamètres rectangulaires de la grande circonférence; on est donc ramené à la question précédente, car les extrémités d'un segment rectiligne AB du plan M glissent respectivement sur deux droites concourantes du plan P; donc tout point du plan M décrit une ellipse sur le plan P.

*Remarque.* Les points A et B eux-mêmes et tous les autres points de la circonférence intérieure décrivent des segments rectilignes qu'on peut considérer comme des ellipses infiniment aplaties.

**Note.** D'après LA HIRE lui-même, c'est à DESARGUES que l'on doit la considération des *épicycloïdes.* (Pour ces courbes, voir G., n° 892.)

### Lieu 922.

**2163.** *Quel est le lieu du centre des ellipses inscrites dans un quadrilatère convexe?* (NEWTON.)

C'est la droite qui joint les points milieux des diagonales du quadrilatère.

En effet, pour une ellipse donnée, on peut projeter la figure de manière que cette courbe soit un cercle.

Le quadrilatère ABCD, dont MN est la droite qui joint les milieux des diagonales, se projette suivant un quadrilatère *abcd*, dont *mn*, ligne des milieux des diagonales, est la projection de MN. Or *mn* contient le centre *o* du cercle inscrit (n° 1614), et ce centre est la projection du centre O de l'ellipse; donc O est sur la droite MN.

**2164.** *Remarque.* Ce *théorème de Newton* permet de déterminer le centre d'une ellipse dont on connait cinq tangentes, car les lignes prises quatre à quatre donnent des quadrilatères circonscrits et des droites telles que MN, M'N', dont le point de concours est le centre cherché.

**Lieu 923.**

**2165.** *Lieu du foyer des paraboles circonscrites à trois droites données.*

Soit ABC le triangle formé par les trois tangentes.

La projection du foyer F d'une parabole circonscrite sur chaque tangente à la courbe se trouve sur la tangente au sommet (G., n° 697); donc les projections obtenues D, E, G sont en ligne droite. Or la réciproque du théorème de *R. Simson* (n° 22) prouve que le point F appartient à la circonférence circonscrite au triangle ABC; donc cette circonférence est le lieu des foyers F.

**2166.** *Remarques.* 1° Théorème de Lambert. *La circonférence circonscrite à trois tangentes à une parabole passe par le foyer de cette courbe.* C'est une manière différente d'énoncer la question ci-dessus. (Voir n° 2141.)

2° Le lieu que l'on vient d'étudier a de nombreuses conséquences : Pour déterminer le foyer d'une parabole dont on connaît quatre tangentes, on circonscrit des circonférences à deux des triangles formés par ces lignes.

Les circonférences circonscrites aux quatre triangles formés par des droites qui se coupent deux à deux passent par un même point F. (Théorème de Miquel, n° 21.)

**Lieu 923. — I.**

**2166 a.** *Le lieu des foyers des coniques tangentes aux côtés égaux* AB, AC *d'un triangle isocèle* ABC, *aux extrémités* B *et* C *de la base se compose de la bissectrice de l'angle* A *et du cercle circonscrit au triangle* ABC.

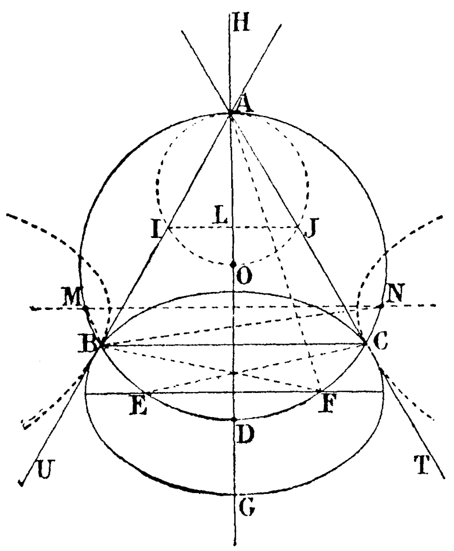


Fig. 1352.

1° Considérons les ellipses dont le grand axe est sur la bissectrice AG, leurs foyers sont sur cette même ligne; il en est de même pour les hyperboles dont l'axe transverse est sur AG.

Le cas limite entre les ellipses et les hyperboles est la parabole BLC tangente à la droite IJ qui passe par les milieux I et J des côtés égaux, son foyer O est au centre du cercle ABC; ainsi la partie OG indéfiniment prolongée au delà de G est le lieu des foyers des ellipses; OAH prolongé est celui des foyers des hyperboles; le point A correspond au cas où la courbe est réduite aux droites données AB, AC.

2° *Le cercle circonscrit* ABDC est le lieu des foyers des ellipses et des hyperboles dont le petit axe, ou l'axe non transverse, est sur la bissectrice de l'angle A.

Menons une droite quelconque parallèle à BC et qui coupe la circonférence, et prouvons que E, F sont les foyers d'une ellipse tangente aux côtés égaux du triangle isocèle en B et C. Il suffit de prouver que EC, FC font des angles égaux avec la tangente ACT ; or l'angle ECA a pour mesure demi-arc ABE ; l'angle FCT a pour mesure demi-arc ACF, donc les angles sont égaux ; ainsi E, F peuvent être considérés comme les foyers d'une ellipse tangente à BA, CA aux points B et C.

*Discussion.* Si la parallèle est tangente au cercle en D, l'ellipse devient un cercle, dont D est le centre et les foyers ; BC est une ellipse infiniment aplatie dont B et C sont les foyers ; quand la parallèle est entre BC et le sommet A, on obtient les foyers M, N d'une hyperbole, car l'angle ABM = ABN.

En résumé, l'arc BDC est le lieu des foyers des ellipses, et l'arc BAC est celui des hyperboles.

**2166 b.** *Remarques.* 1° L'angle AFB = AFC, autre propriété bien connue de l'ellipse.

2° Le lieu précédent est le même que celui des points de rencontre des tangentes menées de B et de C, aux cercles décrits du centre A (nº 85 a).

3° Lorsque le triangle ABC n'est point isocèle, le lieu complet est une *cubique* à nœud qui passe par les points A, B, C ; le sommet A est un point double. (*Nouvelles Annales* de TERQUEM et GÉRONO, 1850, p. 247 ; MARTOREY, alors élève de CATALAN, au lycée Charlemagne.)

**2166 c. Note.** *Lieux composés.* Les lieux composés, dont nous avons donné divers exemples (nºs 85 a et b, 86, 1407 c, 2166 a), exigent quelque attention, dès que le problème conduit à une équation générale de degré supérieur au quatrième. Ainsi le problème de CHASLES (1884) : *Lieu du point de concours des tangentes communes à une ellipse fixe et à un cercle de rayon variable, qui passe par deux points donnés sur la première courbe,* se compose d'une conique et d'une quartique. Ce problème a donné lieu à de nombreuses études, et n'a été traité complètement dans les *Nouvelles Annales* qu'en 1880, p. 122, par le R. P. LE COINTE. — Dans le même volume, p. 184, M. DARBOUX indique quelques autres études qui n'avaient pas été publiées par leurs auteurs.

*Mathesis,* 1881, p. 53, traite la même question ; puis M. NEUBERG, dans une note très importante, *résume toutes les solutions données jusqu'à ce moment* (pp. 54 à 57). Les *N. A.*, 1905, p. 471, reviennent sur le cas le plus intéressant du problème de CHASLES.

### Problème 924.

**2167.** *Quelle est l'enveloppe d'un côté d'un angle droit dont l'autre côté passe par un point fixe, lorsque le sommet glisse :*

1° *Sur une droite fixe;*

2° *Sur une circonférence?*

(Voir *Méthodes*, nºs 126 et 127.)

### Problème 925.

**2168.** *On coupe les côtés de l'angle droit par une droite qui détermine un triangle d'une aire donnée. Quelle est l'enveloppe de l'hypoténuse de ce triangle?*

(Voir *Méthodes*, nº 129.)

**Problème 926.**

**2169.** *Quelle est l'enveloppe d'une droite* AC *qui divise deux droites concourantes* DM, DN *données de longueur et de position en parties inversement proportionnelles?* (Voir *Méthodes*, n° 128.)

**Problème 926. — I.**

**2170.** *Une droite* AB *est partagée par un point variable* M, *en segments additifs ou soustractifs; sur chacun des segments on construit un carré, du même côté de* AB *si les segments sont additifs, de part et d'autre s'ils sont soustractifs. Démontrer que la droite qui joint les centres des carrés enveloppe une parabole.* (A. Boutin.)

La parabole a pour foyer le point milieu de AB; la directrice est la parallèle à AB, menée par le sommet D de l'angle droit du triangle isocèle rectangle ADB construit sur la ligne donnée.

**Note.** *J. M. É.*, 1887, p. 215.
M. A. Boutin a inséré de nombreux et intéressants articles dans le *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales;* il a traité des *centres isodynamiques* en 1889; il vient de compléter l'étude du quadrilatère à la fois inscrit et circonscrit. (*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1907, p. 20, n° 3072.)

**Problème 927.**

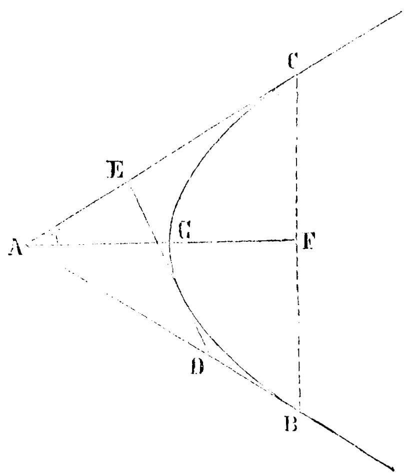


Fig. 1353.

**2171.** *Quelle est l'enveloppe de la base d'un triangle dont l'angle au sommet est donné de grandeur et de position, et dont la somme des côtés qui le comprennent est constante?*

Pour revenir à la question précédente, il suffit de prendre $AB = AC$, égal à la somme constante.

Puisque $AE + AD$ doit égaler AB, on a :

$$EC = AD.$$

Donc les droites AB, AC sont divisées en segments inversement proportionnels, et l'enveloppe est une parabole tangente aux côtés de l'angle aux points B et C.

Le sommet G est au point milieu de AF.

**2171 a.** *Remarques.* 1° L'enveloppe de la base DE du triangle à périmètre constant est un arc du cercle tangent aux droites AB, AC, aux points B et C.

2° L'enveloppe de la base, lorsque la somme des côtés AD, AE est constante, est une parabole tangente en B et C.

3° L'enveloppe de DE, quand l'aire DAE est constante, est une hyperbole ayant AB, AC pour asymptotes.

Lorsque le triangle a l'aire constante, le produit AD . AE est constant.

On sait d'ailleurs que l'aire est donnée par $\dfrac{AD \cdot AE \cdot \sin A}{2}$.

**Problème 928.**

**2172.** *Quelle est l'enveloppe des cercles dont le centre est sur une parabole, et qui sont tangents à une corde perpendiculaire à l'axe de cette courbe?*

(Voir *Méthodes*, nº 132.)

**Problème 928. — I.**

**2173.** *Enveloppe des cercles dont le centre est sur une ellipse et qui sont tangents à une circonférence décrite d'un foyer comme centre.*

(Voir *Méthodes*, nº 133.)

**Problème 929.**

**2174.** *Les hauteurs d'un triangle* ABC *inscrit à un cercle donné se coupent en un point* H. *Ce point peut servir de point de concours des hauteurs des triangles inscrits dans le même cercle. Quelle est l'enveloppe des côtés de tous ces triangles?* (E. LEMOINE et PAUL SERRET.)

(Voir *Méthodes*, nº 130.)

**Note.** Le théorème est attribué fréquemment à Paul SERRET (*N. A.*, 1865, p. 428); mais il a été donné par Emile LEMOINE, alors élève au Prytanée de La Flèche (*N. A.*, 1858, p. 240).

On peut regarder ces questions comme se rapportant aux *figures inverses* que M. MATHIEU, alors capitaine d'artillerie, sous-directeur de la fonderie de Toulouse, publiait dans le même numéro de *N. A.*, page 393. — La solution fut donnée en 1866, pages 170 et 172; on y rencontre des noms bien connus depuis : DELAUNAY, TANNERY, LAISANT, NIEVENGLOWSKI, etc.

**Lieu 930.**

**2175.** *Quel est le lieu du sommet* M *d'un angle constant* $\alpha$, *dont un côté passe par le foyer* F *d'une ellipse, tandis que l'autre côté est tangent à la courbe?*

Soient M et M′ deux des positions du sommet de l'angle constant $\alpha$.

La projection P du foyer F sur une tangente quelconque se trouve sur le cercle principal dont AA′ est le diamètre. (G., nº 626.) D'ailleurs les triangles rectangles FPM, FP′M′ sont semblables; donc, d'après une question connue (nº 1355), le lieu du point M est une circonférence dont le rayon est au rayon OA dans le rapport de FM à FP.

Pour déterminer la position du lieu, procédons comme à l'exercice rappelé nº 1355.

Au point F, menons FC formant l'angle OFC = PFM.

Les triangles OFC, PFM sont semblables; les distances FO, FC sont dans le rapport de FP à FM; donc C est le centre du lieu.

Soit $r$ le rayon inconnu CM; on doit avoir :

$$\frac{r}{OA}=\frac{FM}{FP} \quad \text{ou} \quad \frac{r}{a}=\frac{FC}{FO}.$$

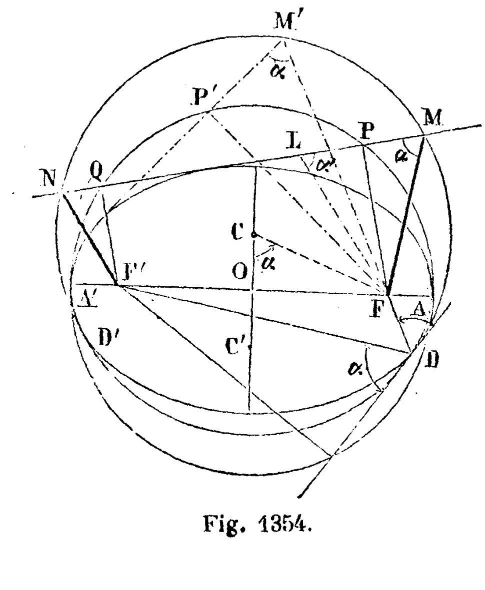



Fig. 1354.

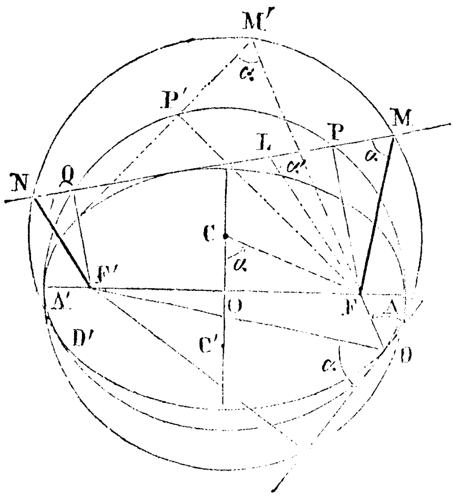
**2176.** *Remarques.* 1° L'ellipse est bitangente au lieu demandé. Les deux points de contact D, D′ correspondent aux positions pour lesquelles la tangente fait l'angle $\alpha$ avec le rayon vecteur du point de contact (voir ci-après, n° 2186).

2° Le point N du foyer F′ donne le même lieu; FL donne une circonférence égale au lieu des points M, mais le centre est en C′.

3° Le cercle MM′N est nommé *cercle de Poncelet.*

**Problème 930. — I.**

**2177.** *Un angle $\alpha$, de grandeur donnée, a un de ses côtés qui passe par un point* F, *tandis que le sommet* M *glisse sur une circonférence donnée. Quelle est l'enveloppe de l'autre côté?* (*N. A.*, 1865, p. 546. Question traitée par PONCELET, dès 1817. *Appl. d'A. et de G.*, t. II, p. 462.)




N′ est le point d'intersection de CF prolongée et de la circonférence NM′MD.

Fig. 1355.

En se reportant au problème précédent (n° 2175), on peut dire que l'enveloppe est une ellipse lorsque le point F est dans le cercle; mais il est préférable de l'établir directement.

Du point F, abaissons une perpendiculaire FP. Le triangle FMP reste semblable à lui-même; donc le point P décrit une circonférence (n° 1355), et l'enveloppe du second côté PM de l'angle droit FPM est une ellipse (n° 127), dont AFF′A′ est le grand axe.

On peut déterminer facilement le lieu des points P.

La plus courte distance FN′ est sur la ligne CFN′, qui passe par le centre C; en faisant l'angle N′FA = MFP et abaissant la perpendiculaire N′A, on obtient la plus courte distance FA du sommet de l'angle droit au point fixe F.

Prolongeons AF jusqu'à la rencontre d'une droite CO parallèle à N′A. O est le centre, AO le rayon du cercle principal de l'ellipse.

*Remarques.* 1° L'ellipse est bitangente au cercle donné MNM′ (n° 2176).

2° *Quand le point est extérieur au cercle, on obtient une hyperbole.*

**Théorème 930. — II.**

**2178.** *Pour un même cercle* MNM′ *et un même point* F, *on obtient des ellipses semblables lorsqu'on fait varier l'angle $\alpha$.*

En effet, quel que soit l'angle donné, FO $= c$, AO $= a$; or

$$\frac{c}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CN}} \quad \text{quantité constante;}$$

donc le rapport $\frac{b}{a}$ ou $\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$ est aussi constant.

**Théorème 930. — III.**

**2179.** *Le lieu du second foyer* F′ *des enveloppes, lorsque* $\alpha$ *varie, est un cercle concentrique au premier.*

$CF' = CF$ quantité invariable.

**Théorème 930. — IV.**

**2180.** 1° *L'enveloppe de toutes les ellipses semblables obtenues est le cercle donné.*

En effet, ce cercle est doublement tangent à chaque ellipse.

2° *Lorsque le cercle donné* NMM′ *est remplacé par une droite, on obtient pour enveloppe une parabole, quel que soit l'angle* $\alpha$, *dont un côté passe par le point fixe* F, *tandis que le sommet* M *glisse sur la droite donnée.*

**Théorème 930. — V.**

**2181.** *Lorsqu'un triangle isocèle* OFMNF′O (fig. 1355) *reste semblable à lui-même, que la base* MN, *de longueur variable, est une corde d'un cercle donné et qu'un des côtés égaux* MFO *passe par un point fixe* F :

1° *Le troisième côté* NO *du triangle passe aussi par un point fixe* F′ ;

2° *L'enveloppe de la base est une ellipse doublement tangente au cercle donné.*

*Porisme* 176 *d'Euclide,* d'où l'on peut déduire les *points de Brocard* (*J. M. É.*, 1890, pages 35, 83 et 151, Georges TARRY, E. VIGARIÉ, LAUVERNAY. Voir aussi *Mathesis*, 1890, p. 115).

**Lieu 930. — VI.**

**2181 a.** *Deux sommets d'un triangle* ABC *sont fixes, et le pied* D *de la bissectrice de l'angle* A *parcourt une droite donnée* MN; *déterminer le lieu du sommet* C.

Menons les droites BE, CH perpendiculaires sur MN. On a :

$$\frac{CH}{BE} = \frac{DC}{DB}, \quad \frac{CA}{BA} = \frac{DC}{DB};$$

d'où

$$\frac{CA}{CH} = \frac{BA}{BE}.$$

Par conséquent, *le lieu du point* C *est une conique ayant pour foyer le point* A, *pour directrice la droite* MN, *et passant par* B.

**Note.** La question a été proposée par la *Nouvelle Correspondance* de CATALAN, tome 1, 1874-75, page 185, solution par M. J. NEUBERG.

L'énoncé est de HARKEMA, de Saint-Pétersbourg. (*N. A.*, 1875, p. 141.)

Les *N. A.* annoncent des solutions par un assez grand nombre de correspondants, dont plusieurs figurent fréquemment dans ce recueil, tels que B. LAUNOY, MORET-BLANC, CHADU, H. LEZ, M. H. BROCARD.

**Problème 931.**

**2182.** *Si une figure reste constamment semblable à elle-même et se meut dans son plan, de manière qu'une de ses droites* MF *tourne autour d'un point fixe* F, *tandis que le point* M *se meut sur une circonférence, tout autre point de la figure décrira une circonférence, et toute droite qui ne passe pas par* F *de cette figure enveloppera une conique.*

1° Soit un point quelconque N. Le triangle FMN reste semblable à lui-même; donc N se meut sur une circonférence (n° 1355).

2° La droite MN faisant un angle constant avec MF, et le point M restant sur une circonférence, l'enveloppe de MN est une conique à centre (n° 2177).

3° Une droite quelconque AB coupe MF en un certain point B, par exemple; B décrit une circonférence, mais l'angle ABF est constant; donc l'enveloppe de AB est une conique à centre.

**Problème 932.**

**2183.** *On donne deux droites rectangulaires* OX, OY. O *est le centre commun à des ellipses d'aire constante ayant les axes sur les droites données. Quelle est l'enveloppe de ces ellipses?*

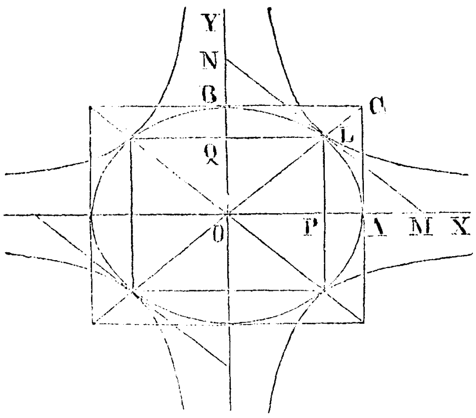



Fig. 1356.

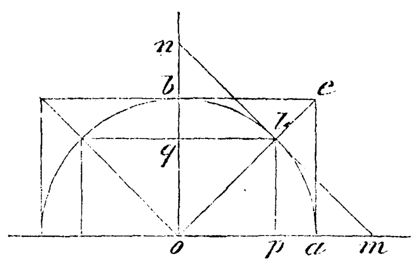



Fig. 1357.

L'aire de l'ellipse est donnée par $\pi ab$.

Ainsi, on a : $OA \cdot OB =$ constante $=$ par exemple $2k^2$.

En se reportant à la figure 1357, on reconnaît immédiatement qu'en réduisant les ordonnées du cercle dans un rapport donné, on obtient la figure 1356 et les résultats suivants :

Le rectangle OPLQ est la moitié de OACB; il égale donc $k^2$. La tangente MLN est divisée en deux parties égales par le point de contact, et le triangle MON a une aire constante, car il est double du rectangle OPLQ. Nous retombons donc sur une question connue (n^os^ 78 et 118).

L'hyperbole équilatère, ayant $k^2$ pour puissance, est tangente en L à la droite MLN, et par suite est tangente à l'ellipse considérée; donc *l'enveloppe des ellipses d'aire constante se compose de deux hyperboles équilatères ayant* OX, OY *pour asymptotes et* $k^2$ *pour puissance.*

**Note.** Le problème a été proposé par C. HARKEMA, de Saint-Pétersbourg. (*N. A.*, 1869, p. 95.) G. FOURET, alors lieutenant du génie, plus tard répétiteur à l'École Polytechnique, indique qu'on peut le résoudre tout aussi simplement quand les ellipses à aire constante ont deux diamètres conjugués communs en direction. (*Loc. cit.*, p. 323.)

**Théorème 932. — I.**

**2183 a.** *Dans l'hyperbole équilatère, des extrémités d'un même diamètre, on voit une corde sous des angles égaux ou supplémentaires.*

Ces angles sont égaux lorsque la corde coupe le diamètre, et supplémentaires dans le cas contraire.

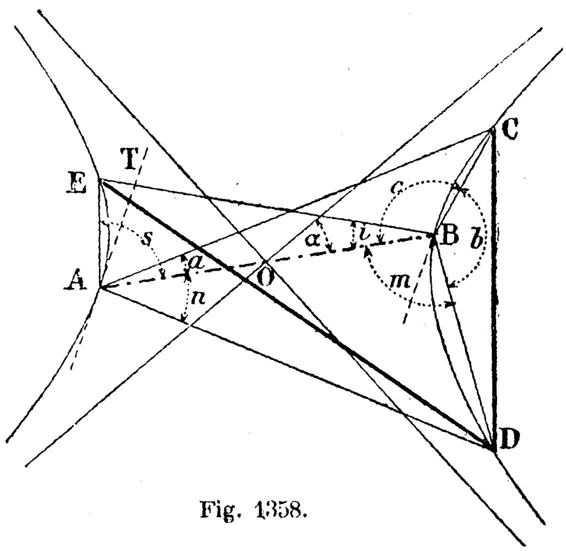



Fig. 1358.

1° Soit le diamètre AB et la corde CD.

On doit avoir :

$$CAD + CBD = 180°;$$

en effet (n° 2131 **a**),

$$m - n = 2\alpha,$$

$$c - a = 2(90° - \alpha) = 180° - 2\alpha.$$

En additionnant il vient :

$$c + m - (a + n) = 180°,$$

or $c + m = 360° - b$;

donc $(a + n) + b = 180°$,

ou $$CAD + CBD = 180°.$$

2° Pour la corde ED, on a : $m - n = 2\alpha$, (1)

$s - i = 2\alpha$; (2)

en retranchant (2) de (1), $m + i = s + n$,

ou $$EAD = EBD.$$

**Théorème de Brianchon et Poncelet 932. — II.**

**2183 b.** *Dans tout triangle inscrit à l'hyperbole équilatère, l'orthocentre est sur la courbe.*

La circonférence circonscrite au triangle ABC coupe l'hyperbole en un quatrième point D; par ce point menons le diamètre DOH.

On a (n° 2183 **a**) :

$$BDC + BHC = 180°,$$

or $BDC = BAC$;

donc

$$BAC + BHC = 180°;$$

de même,

l'angle $ADC = AHC$ (n° 2183 **a**); donc $m = n$ comme compléments d'angles égaux ; on a aussi $CHB = CEB$.

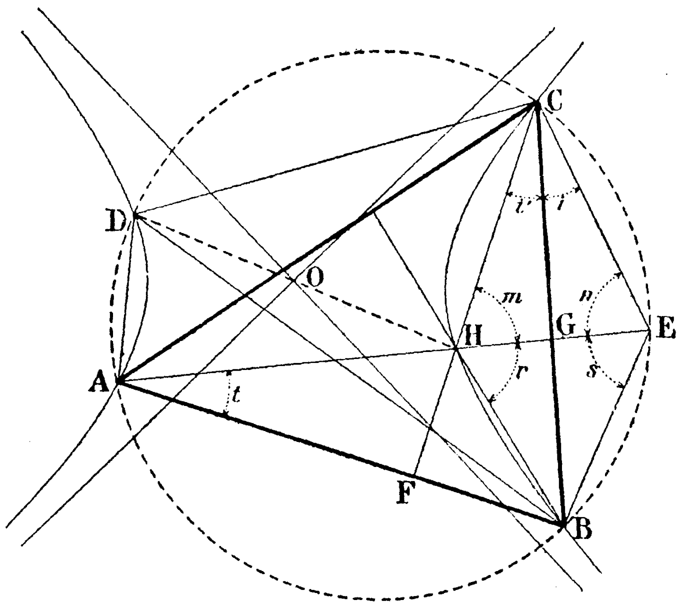



Fig. 1359.

Ainsi $r = s$; par suite les deux triangles HEC et HEB sont isocèles, CB est perpendiculaire à EH et $i = i' = t$; donc CF et AB sont perpendiculaires et H est l'orthocentre.

*Remarque.* L'extrémité H' du diamètre AO de l'hyperbole est l'orthocentre du triangle DBC et le quatrième point de rencontre du segment capable de l'angle H avec l'hyperbole.

**2183 c.** *Le cercle des neuf points d'un triangle inscrit à l'hyperbole équilatère passe par le centre de la courbe.*

Soient M, N, R les points milieux des côtés DC, CB, BD du triangle DCB et O le centre de l'hyperbole (fig. 1359).

Il faut démontrer que le quadrilatère MNRO est inscriptible; or les angles CHB et CDB sont supplémentaires, MOR = CHB et MNR = CDB comme ayant les côtés parallèles (G., 214); donc MOR + MNR = 180° et MNRO est inscriptible.

*Remarque.* Le cercle de centre M et de rayon OM passe par les points d'intersection des asymptotes avec DC. (*Méthodes*, n° 174.)

**2183 d. Note.** 1° Le *théorème de Brianchon et Poncelet* se trouve dans les *Applications d'analyse et de Géométrie* de Poncelet, tome II, p. 504; il a été donné dans les *A. de G.*, tome XI (1820-1821).

La démonstration est reproduite dans le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, 7e édition, t. II, n° 1193, p. 465. Voir aussi *N. A.*, 1864, p. 541, et 1865, pp. 32 à 39, où J. Mention donne divers théorèmes intéressants sur l'hyperbole équilatère.

Actuellement même il y aurait grand profit à lire, étudier et résumer le *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet et ses *Applications d'analyse et de Géométrie.*

Pour apprécier les travaux des géomètres du XIXe siècle, il convient de lire l'*Étude sur le développement des méthodes géométriques,* par Gaston Darboux (1904, Gauthier-Villars). Cette belle étude est reproduite à la fin de l'*Histoire des Mathématiques,* par Rouse-Ball; traduction par Freund, lieutenant de vaisseau.

2° Le groupe des quatre points A, B, C, H a été nommé *Groupe orthocentrique,* par de Longchamps (*J. M. S.,* 1891, t. 15, p. 151).

Chacun de ces points est l'*orthocentre* du triangle formé par les trois autres.

La figure est aussi nommée *quadrangle orthocentroïdal.*

### Lieu 932. — III.

**2183 e.** *Quand l'un des sommets d'un parallélogramme circonscrit à une ellipse se meut sur l'une des deux directrices, le sommet opposé décrit l'autre directrice, et les deux autres sommets décrivent le cercle principal de l'ellipse.* (*N. A.*, 1860, pages 228 et 229, par Lescaze, ou Lascases, élève de Gérono.)

Car les deux tangentes à l'ellipse menées d'un même point d'une directrice rencontrent le cercle principal aux extrémités d'un même diamètre de ce cercle.

### Théorème de Frégier 932. — IV.

**2183 f.** *Lorsqu'un angle droit* BAC, *dont le sommet est en un point fixe* A *d'une conique, pivote autour de ce point, la corde* BC *passe par un point fixe.*

La circonférence circonscrite au triangle BAC a un quatrième point S commun avec la conique (fig. 1359 *bis*), et le diamètre ST détermine l'angle droit inscrit SAT; enfin la tangente à la conique en A et sa normale AD rencontrent la circonférence BACT en deux points F, D diamétralement opposés.

Si de A on projette sur la conique les trois triangles rectangles BAC, SAT, FAD, les angles droits BAC, SAT, etc., ne changent pas, les dia-

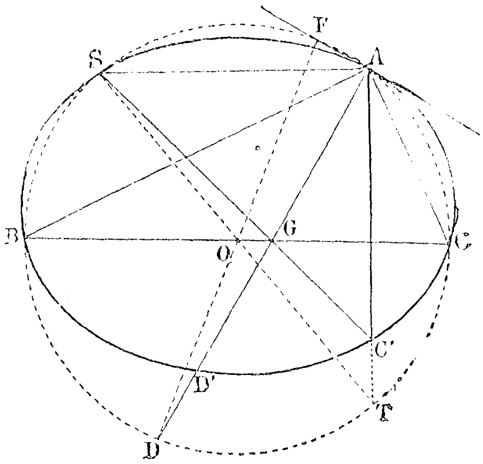



Fig. 1359 *bis*.

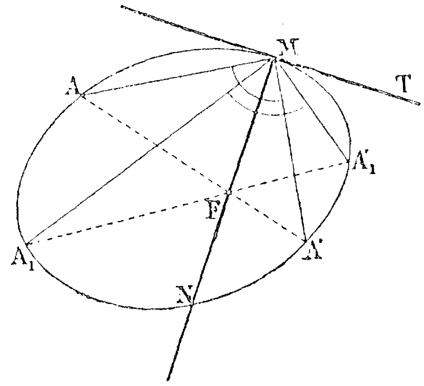



Fig. 1359 *ter*.

mètres BC et ST deviennent les cordes BC et SC', et le diamètre FD vient se confondre avec la normale AD'; or ces droites BC, SC' et FD sont concourantes comme les diamètres dont elles sont les projections; donc...

*Remarques.* 1° La démonstration s'applique à une conique quelconque.

2° La démonstration au moyen de l'involution est très simple (fig. 1359 *ter*) :

L'angle AMA', tournant autour du point M, engendre un faisceau involutif dans lequel la tangente MT en M et la normale MN sont deux rayons homologues; donc les cordes telles que AA' se coupent en un point fixe F, situé sur la normale MN, qui est une de ces cordes.

3° Le *théorème de Frégier* n'est que la transformée par polaires réciproques de cette propriété élémentaire de la parabole : *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe est une droite: la directrice* (*N. A.*, 1894, p. 322, CAZAMIAN).

Le *point de Frégier* jouit de nombreuses propriétés; on peut voir, à ce sujet, un bel article de Gustave GÉRARD (*Mathesis*, 1899, p. 136.)

**Note.** On peut voir, à ce sujet, les beaux articles de FRÉGIER, ancien élève de l'École Polytechnique : *Théorèmes nouveaux sur les lignes et surfaces du second ordre.* (*A. G.*, tome VI$^e$, 1815-1816, pp. 229 et 242.)

**Enveloppe 932. — V.**

**2183 g.** 1° *Enveloppe de la corde qui joint les extrémités des diamètres conjugués d'une ellipse.*

2° *Enveloppe du plan qui passe par les extrémités des diamètres conjugués de l'ellipsoïde.*

1° En considérant les diamètres rectangulaires du cercle principal, le cercle tangent aux cordes qui joignent deux à deux les extrémités des diamètres conjugués, cercle concentrique au premier, on conclut que l'enveloppe des cordes qui joignent deux à deux les extrémités de chaque couple des diamètres conjugués est une ellipse semblable et concentrique à l'ellipse donnée. Par rapport au rayon $a$ du cercle principal, le rayon du cercle enveloppe est $\frac{a}{\sqrt{2}}$; de même l'ellipse enveloppe a pour axes : $\frac{a}{\sqrt{2}}$ et $\frac{b}{\sqrt{2}}$

2° L'enveloppe des plans qui passent par les extrémités de chaque groupe de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde, est un ellipsoïde semblable et concentrique au premier. Il a pour axes : $\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\frac{b}{\sqrt{2}}$, $\frac{c}{\sqrt{2}}$.

### Enveloppe 932. — VI.

**2183 h.** *Enveloppe de l'hypoténuse des triangles rectangles dont le sommet de l'angle droit est au centre d'une conique, et les extrémités de l'hypoténuse sur la courbe donnée.*

C'est un cercle de même centre que l'ellipse et dont le rayon égale :

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Pour l'hyperbole, le rayon égale $\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$ en désignant par $a$ l'axe transverse; ainsi pour que le cercle soit réel, il faut que l'axe transverse soit plus petit que l'axe non transverse.

Pour l'ellipsoïde, l'enveloppe du plan conduit par les extrémités des arêtes d'un trièdre trirectangle dont le sommet est au centre, est une sphère concentrique à l'ellipsoïde et dont le rayon est donné par

$$\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

**Note.** La question relative à une conique à centre a été proposée dans les *Annales de Gergonne* (tome XV, 1824-1825, p. 76); elle a été résolue dans le même volume, p. 197, par QUERRET, d'une manière très simple et fort ingénieuse, suivant sa méthode ordinaire de traiter les questions. Il passe de l'ellipse à l'hyperbole en changeant $b$ en $b\sqrt{-1}$. Puis un ABONNÉ a démontré le théorème par l'analyse et l'a étendu à une quadrique à centre (p. 199 à 204).

# PROBLÈMES

## Ellipse et hyperbole.

### Problème 933.

**2184.** *Dans une ellipse, quelle est la distance du centre à une corde parallèle au grand axe, et dont la longueur est la moitié de ce grand axe?*

Cette distance $= \frac{b}{2}\sqrt{3}$ (n° 50).

### Problème 934.

2185. *Une ellipse est donnée par ses foyers et la longueur 2a du grand axe; sans construire la courbe, déterminer les points où cette ellipse est coupée par une circonférence dont le centre est sur le petit axe.*

(Voir *Méthodes*, n° 116.)

### Problème 935.

2186. *Mener à une ellipse une tangente qui fasse un angle donné $\alpha$ avec le rayon vecteur du point de contact.*

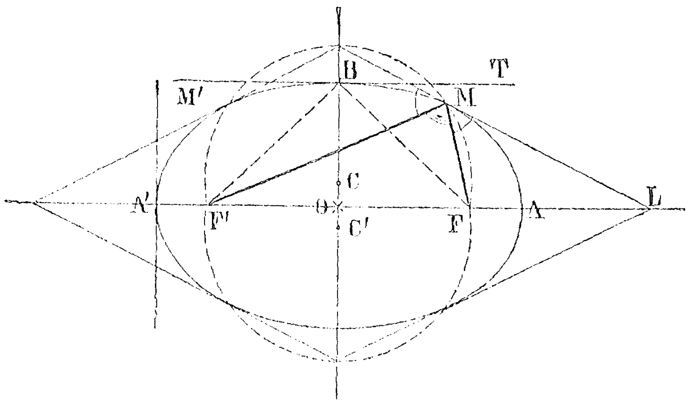



Fig. 1360.

Soit l'angle FML $= \alpha$.

La tangente est également inclinée sur les deux rayons vecteurs; donc l'angle FMF' égale deux droits moins $2\alpha$. Ainsi, sur FF', il faut décrire un segment FMM'F' capable de l'angle $180° - 2\alpha$.

Il y a quatre tangentes formant un losange circonscrit.

*Grandeurs limites.* Le segment décrit sur FF' est capable d'un angle d'autant plus grand que le rayon de ce segment est plus petit. Ainsi, au point B, l'angle est le plus grand possible; par suite, FBT est la plus petite valeur qu'on puisse attribuer à l'angle $\alpha$.

La plus grande est $90°$; elle correspond aux sommets A et A'.

Dans ce cas, en effet, l'angle FAF' est nul.

### Problème 936.

2187. *Trouver l'aire de l'ellipse en considérant cette courbe comme la projection d'un cercle sur un plan.* (G., n° 634.)

Soit $a$ le rayon du cercle.

Le diamètre mené parallèlement à l'intersection du plan donné avec le plan du cercle se projette en vraie grandeur parallèlement à l'intersection, et donne le grand axe $2a$ de l'ellipse.

Le diamètre $2a$, mené dans le cercle perpendiculairement à l'intersection des deux plans, se projette en une ligne $2b$, qui est le petit axe de l'ellipse (G., n° 634). Ces deux lignes donnent l'angle I des deux plans, et cet angle a pour cosinus $\frac{b}{a}$.

Or la projection d'une surface plane quelconque sur un plan égale le produit de cette surface par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec le plan; on a donc :

$$\text{Ellipse} = \text{cercle} \,.\, \cos \mathrm{I} = \pi a^2 \,.\, \frac{b}{a} = \pi ab.$$

**Problème 937.**

**2188.** *Calculer les longueurs* a *et* b *des demi-axes, connaissant deux diamètres conjugués et leur angle.*

On a les deux relations : $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$ et $a'b' \,.\, \sin \mathrm{V} = ab$ (nos 2073 et 2075).

Écrivons : $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$ et $2ab = 2a'b' \sin \mathrm{V}$.

Successivement, ajoutons et retranchons membre à membre ces deux égalités ; on trouve :

$$a^2 + 2ab + b^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \,.\, \sin \mathrm{V},$$

ou

$$(a + b)^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \,.\, \sin \mathrm{V},$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \,.\, \sin \mathrm{V},$$

ou

$$(a - b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \,.\, \sin \mathrm{V}.$$

Donc

$$a + b = \pm \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b' \,.\, \sin \mathrm{V}},$$

et

$$a - b = \pm \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \,.\, \sin \mathrm{V}}.$$

Connaissant la somme et la différence des demi-axes, on obtient facilement $a$ et $b$ :

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b' \,.\, \sin \mathrm{V}} + \frac{1}{2}\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \,.\, \sin \,.\, \mathrm{V}};$$

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b' \,.\, \sin \mathrm{V}} - \frac{1}{2}\sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \,.\, \sin \,.\, \mathrm{V}}.$$

**Problème 938.**

**2189.** *Sans recourir au procédé général, déterminer les axes lorsqu'on connaît les deux diamètres conjugués égaux et leur angle* $\alpha$.

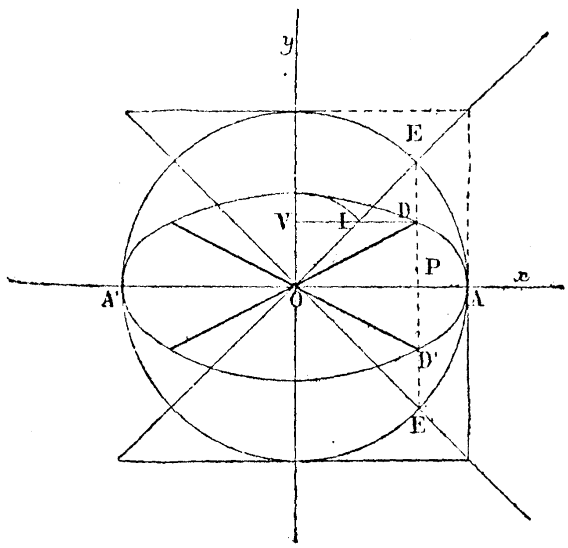



Fig. 1361.

Soit $\mathrm{OD} = \mathrm{OD}'$. Le grand axe est sur la bissectrice de l'angle DOD' ; $Oy$ est perpendiculaire à $Ox$. Menons la bissectrice de l'angle $xOy$ : l'ordonnée DP fait connaître OE, rayon du cercle principal. D'ailleurs l'abscisse DV donne $\mathrm{OI} = b$. (G., no 635.)

*Remarque.* Le cas où l'on connaît les deux diamètres conjugués égaux et leur angle se présente souvent ; par exemple, dans les *voûtes en décharge*, dans les avant-becs des ponts biais à plusieurs arches, etc. Dans ce cas, l'aire de l'ellipse égale $\pi DO^2 . \sin DOD'$ ou $\pi a'^2 . \sin \alpha$ ; $OP = OD . \cos DOP = a' . \cos {}^1/_2\alpha$. Or OE ou $a = OP\sqrt{2}$ ; donc $a = a'\sqrt{2} . \cos {}^1/_2\alpha$.

De même, $OV = a' \sin {}^1/_2\alpha$ ; d'où $b = a'\sqrt{2} . \sin {}^1/_2\alpha$.

**2189 a. Note.** Dans la pratique des travaux, notamment pour les voûtes de pont, l'ellipse est remplacée par l'*ovale,* ou plus exactement par la moitié de cette courbe, et par l'*anse de panier* à trois ou à cinq centres (nos 1759 à 1763).

### Problème 939.

**2190.** *En considérant l'ellipse comme la projection du cercle principal, et sans construire la courbe,*

*Mener une tangente :* 1o *par un point donné sur la courbe ;* 2o *par un point donné hors de la courbe ;* 3o *parallèlement à une ligne donnée.*

1o Soit N le point donné ; l'ordonnée PN fait connaître le point M du cercle. On mène MT tangente au cercle, et puis TN. (G., no 640.)

Si le point T est trop éloigné, on mène DE et BF (G., no 642), et puis FN. Une remarque analogue s'applique aux autres cas.

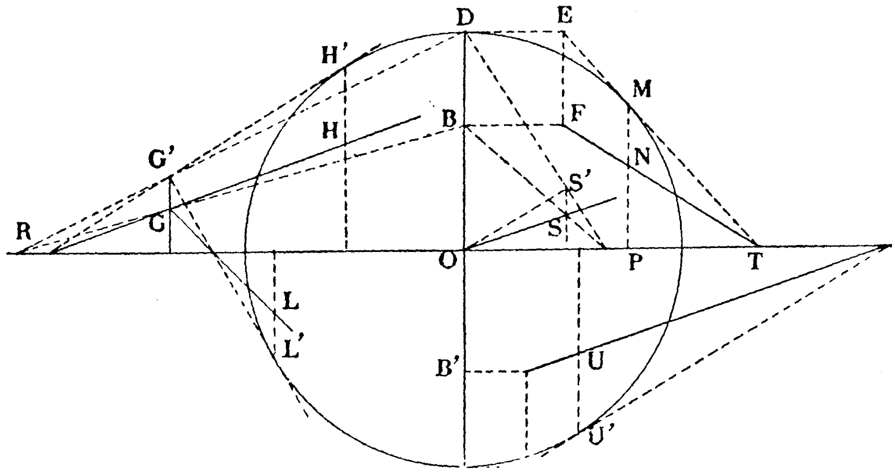



Fig. 1362.

2o Soit G le point donné. On mène BGR ; G' est le point correspondant par rapport au cercle principal. On mène les tangentes G'H' et G'L', puis GL et GH, tangentes demandées.

3o Soit OS la direction donnée. On cherche la ligne correspondante OS', et l'on mène la tangente U' parallèle à OS', puis U parallèle à OS.

### Problème 939. — I.

**2191.** *Mener une normale à une ellipse :* 1o *par un point pris sur la courbe ;* 2o *parallèlement à une droite donnée.*

1o Soit M le point donné. On mène la tangente MI et la perpendiculaire MN, qui est la normale demandée.

*Remarque.* La normale MN n'est pas la projection de la normale OM' du point correspondant; aussi faut-il préalablement déterminer la tangente MI.

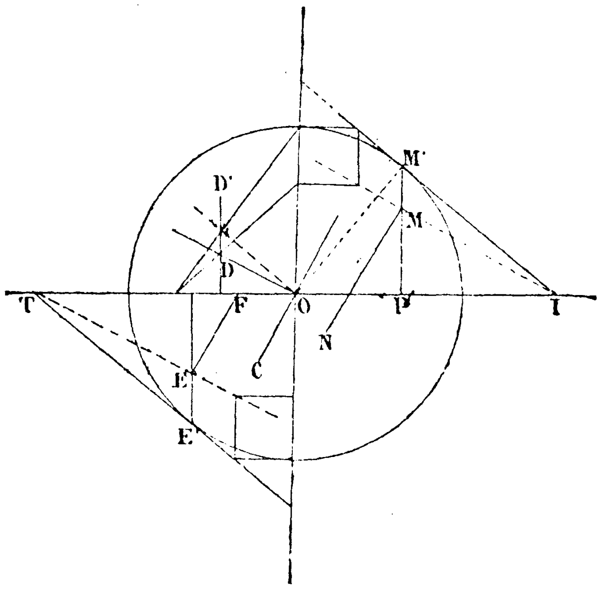



Fig. 1363.

2° Soient OC la direction donnée et OD une perpendiculaire à OC.

On détermine OD' et la tangente TE' qui lui est parallèle : la tangente ET sera parallèle à DO, et par suite la normale EF le sera à CO.

**2191 a. Note.** Des constructions analogues permettent de résoudre les mêmes questions lorsqu'on connaît deux diamètres conjugués quelconques et leur angle; mais il faut s'appuyer sur quelques théorèmes non démontrés dans le VIII<sup></sup>e livre, et que nous devons nous borner à citer : *Si l'on incline d'une quantité constante les ordonnées d'une ellipse, on obtient une ellipse rapportée à deux diamètres conjugués. On peut toujours partir du cercle en inclinant les ordonnées et les réduisant toutes dans un même rapport. Les tangentes aux points correspondants* M *et* M' *rencontrent* AA' *au même point.*

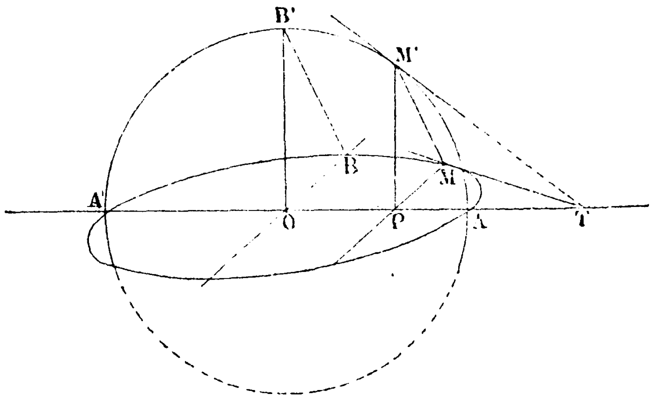



Fig. 1364.

Pour ces théorèmes et les constructions qu'on peut en déduire, il faut recourir à l'*Appendice aux Exercices de Géométrie*, ouvrage où toutes ces questions se trouvent traitées.

Les constructions sont aussi indiquées dans la 3e édition des *Exercices de Géométrie descriptive* (nos 91 et suivants).

**Théorème 939. — II.**

**2192.** *Dans l'ellipse, le rapport de l'abscisse à la sous-normale est égal à* $\frac{a^2}{b^2}$.

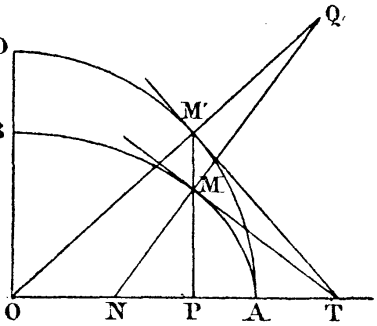


Fig. 1365.

En effet, les triangles rectangles OM'T et NMT (fig. 1365) donnent :

$$PM'^2 = PO \cdot PT,$$

$$PM^2 = PN \cdot PT;$$

d'où

$$\frac{OP}{NP} = \frac{PM'^2}{PM^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

**Théorème 939. — III.**

**2192 a.** *Si les tangentes aux sommets* A *et* B *se coupent au point* C, *le point de rencontre* H *de la perpendiculaire abaissée du pied* N *de la normale sur* AB *et de l'ordonnée* PM *se trouve sur la droite* OC.

Les triangles HPN et OAB sont semblables, comme ayant leurs côtés deux à deux perpendiculaires (fig. 1366). Par suite,

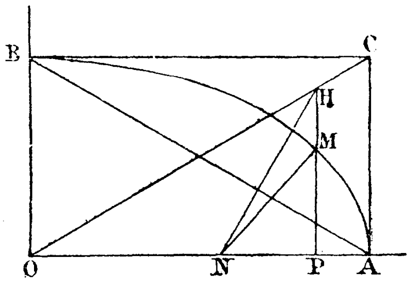


Fig. 1366.

$$\frac{PH}{NP} = \frac{a}{b}.$$

Divisant cette égalité par la précédente (n° 2192), on a $\frac{PH}{OP} = \frac{b}{a} = \frac{AC}{OA}$,

ce qui prouve bien que le point H se trouve sur OC.

1re *Application. — Construire la normale au point* M.

Du point de rencontre H de l'ordonnée PM de la droite OC on abaisse sur AB la perpendiculaire HN, qui donne le pied N de la normale.

2e *Application. — Mener les normales à l'ellipse issues d'un point* N *de son grand axe.*

On abaisse de N sur AB une perpendiculaire qui coupe OC en H. Les pieds des normales demandées sont sur la perpendiculaire abaissée de H sur OA.

**Théorème 939. — IV.**

**2192 b.** *Si la perpendiculaire abaissée de* C *sur* AB *coupe* OA *au point* I, *et si le diamètre* OM *coupe* AC *au point* L, *la normale* MN *est parallèle à* LI.

Si, en effet, nous considérons le triangle MNH du théorème précédent, nous avons (fig. 1367) :

$$\frac{OI}{ON} = \frac{OC}{OH} = \frac{OL}{OM},$$

ce qui prouve bien que LI est parallèle à MN.

3e *Application.* — *Trouver le point* M *où la normale a une direction donnée.*

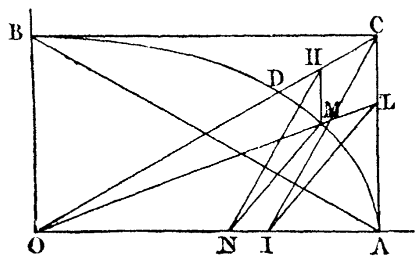


Fig. 1367.

Après avoir déterminé le point I en abaissant une perpendiculaire sur AB, on mène par ce point I la parallèle IL à la direction donnée. Le point M cherché se trouve sur la droite OL.

4e *Application.* — *Trouver le point* M *où la normale fait un angle donné avec le diamètre* OM. *Maximum de cet angle.*

On décrit sur OI le segment de cercle capable de l'angle donné. Il coupe AC en des points L qui se trouvent sur les diamètres des points cherchés M.

On aura le maximum de l'angle de la normale et du diamètre lorsque le segment capable de cet angle sera tangent à AC. Le point de contact sera alors C, car la similitude des triangles ICA et ABC, qui ont leurs côtés deux à deux perpendiculaires, donne :

$$\frac{AI}{AC} = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{OA},$$

ou

$$\overline{AC}^2 = AI \,.\, AO.$$

Par suite, le maximum de l'angle de la normale et du diamètre, qui correspond au point D de l'ellipse, situé sur OC, est égal à l'angle OCI.

**2192 c. Note.** Les *théorèmes* 2192 et leurs *applications* nous ont été communiqués par l'auteur lui-même, M. Maurice d'Ocagne, ingénieur, professeur à l'École des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique.

Ces mêmes questions ont paru en même temps dans le *Journal de Mathématiques élémentaires de* M. Vuibert (1er décembre 1898).

La construction de la normale en un point M (première application, a été donnée par le savant auteur, en vue du tracé des joints dans les voûtes elliptiques); elle a déjà paru dans les *Annales des ponts et chaussées,* 1886, 2e semestre, p. 403.

### Problème 940.

**2193.** *Déterminer les points où une droite donnée coupe une hyperbole dont on connait les foyers et la différence constante.*

[Voir *Méthodes,* no 113 *b.*]

*Remarque.* On peut déterminer les points où une droite rencontre une hyperbole dont on connaît un point et les asymptotes, sans construire la courbe et même sans déterminer les foyers. (Voir *Exercices de Géométrie descriptive,* 4e édition, *Note;* nos 1311 et suivants.)

### Problème 941.

**2194.** *Une hyperbole équilatère étant donnée par ses asymptotes et sa puissance* $k^2$, *mener une tangente sans construire la courbe de manière que la partie interceptée entre les asymptotes ait une longueur donnée.*

(Voir *Méthodes,* no 118.)

**Problème 942.**

2195. *Construire une ellipse ou une hyperbole avec les données suivantes :*

*Le centre, la longueur du grand axe et deux tangentes.*

Du centre donné O, avec $a$ pour rayon, on décrit le cercle principal ; aux points C et C′, D et D′, où les tangentes sont coupées par le cercle,

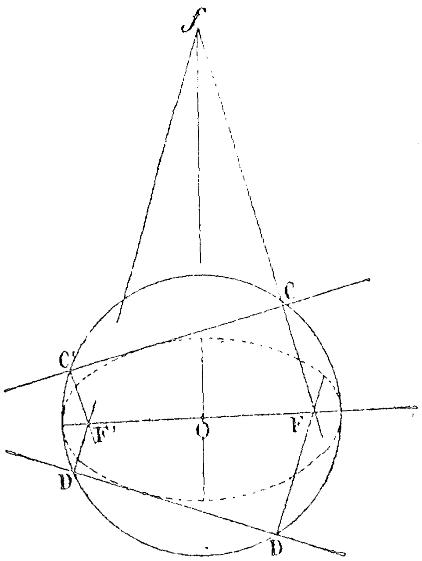



Fig. 1368.

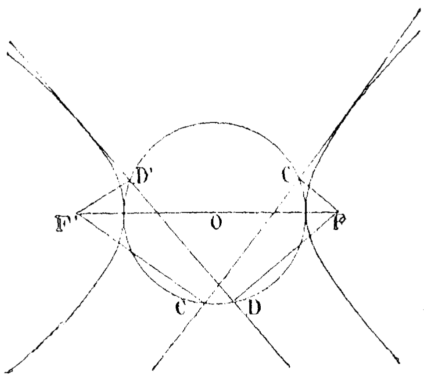



Fig. 1369.

on élève aux tangentes des perpendiculaires qui se coupent deux à deux aux foyers. (G., nos 626 et 667.) Si les foyers sont dans le cercle (fig. 1368), on a une ellipse, et, dans le cas contraire (fig. 1369), une hyperbole.

Généralement il y a deux solutions ; car on peut chercher le point $f$ où se coupent les perpendiculaires C et D′... : $ff'$ est la distance focale d'une hyperbole...

**Problème 942. — I.**

2196. *Le grand axe (position et longueur) et une tangente.*

On décrit le cercle principal sur le grand axe donné AA′ ; les perpendiculaires élevées à la tangente en C et C′ donnent les foyers. On obtient,

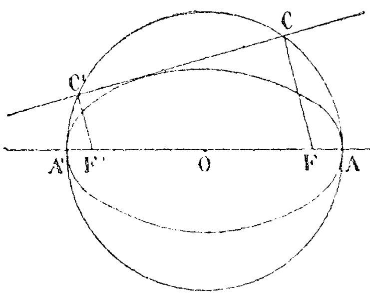



Fig. 1370.

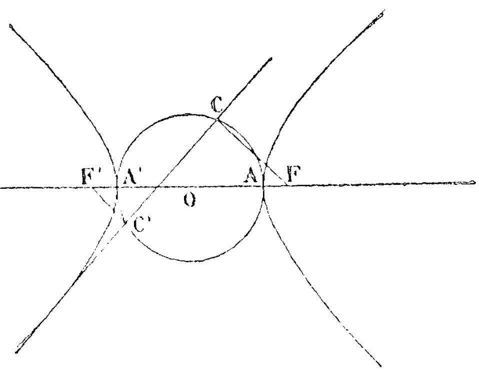



Fig. 1371.

suivant le cas, une ellipse ou une hyperbole : une ellipse, lorsque la tangente ne rencontre pas le grand axe entre les sommets A et A′ (fig. 1370); une hyperbole, dans le cas contraire (fig. 1371).

### Problème 942. — II.

**2197.** *Un des foyers, une tangente, la direction du grand axe et sa longueur* 2a.

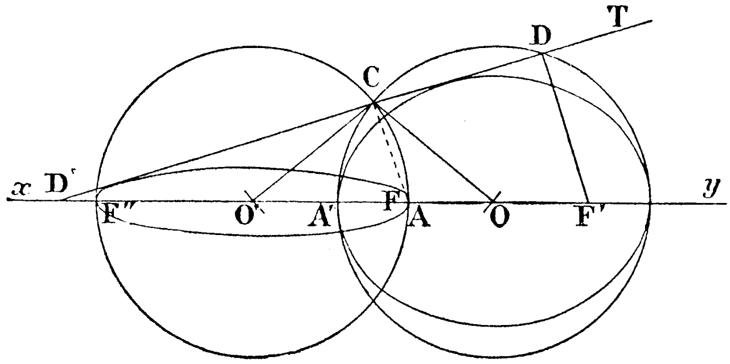



Fig. 1372.

Du foyer F on abaisse, sur la tangente T, la perpendiculaire FC; du point C, avec $a$ pour rayon, on coupe $xy$ en O et O′; du point O comme centre, avec $a$ pour rayon, on décrit le cercle principal; au point D, on élève une seconde perpendiculaire à la tangente, et le second foyer est en F′.

Le cercle décrit de O′ comme centre donne une seconde solution.

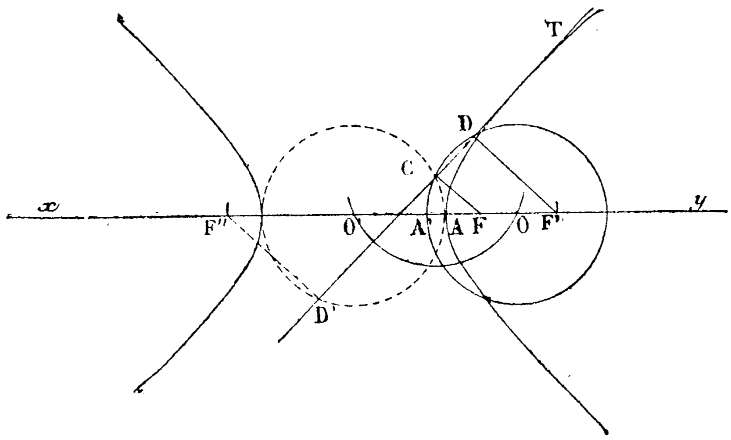



Fig. 1373.

Quand les foyers sont dans le cercle (fig. 1372), la courbe est une ellipse, c'est une hyperbole quand ces points F et F″ sont hors du cercle (fig. 1373).

La première figure donne deux ellipses; et la seconde, une hyperbole et une ellipse. On peut avoir deux hyperboles : il suffit que la tangente coupe $xy$ entre A et A′.

**Problème 942. — III.**

**2198.** 4° *Les deux foyers et le rapport des axes* $\frac{b}{a}$.

1° Pour l'ellipse, le rapport est toujours $< 1$.

On prend OM et ON tels que l'on ait $\frac{NM}{NO} = \frac{a}{b}$ (fig. 1374), et par le point F on mène une parallèle à NM.

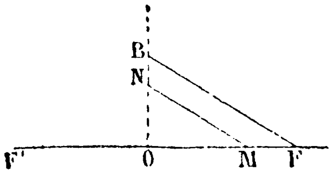



Fig. 1374.

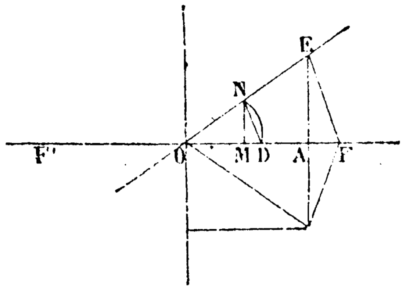



Fig. 1375.

On a (G., n° 620), $\frac{BF}{OB} = \frac{a}{b}$; donc $BF = a$, $BO = b$.

2° Pour l'hyperbole (fig. 1375), on élève une perpendiculaire MN telle que l'on ait $\frac{OM}{MN} = \frac{a}{b}$. Du centre O on décrit l'arc ND, et par le foyer F on mène FE parallèle à ND ; on a : $\frac{OA}{AE} = \frac{a}{b}$.

Donc $OA = a$, $AE = b$; car $AO^2 + AE^2 = OE^2 = c^2$. (G., n° 655.)
OE est une asymptote. (G., n° 663.)

**Problème 942. — IV.**

**2199.** *Un foyer, une tangente, le point de contact et la longueur* 2a *ou la longueur* 2c.

On détermine $F_1$ symétrique du foyer par rapport à la tangente donnée

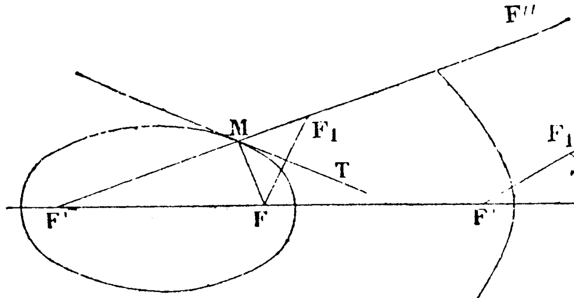



Fig. 1376.

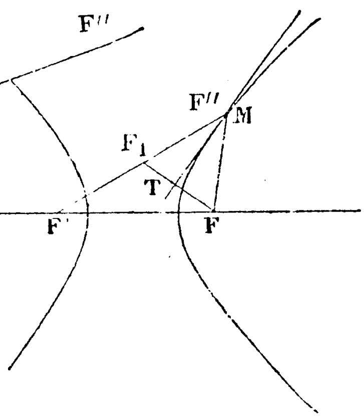



Fig. 1377.

T ; on joint $F_1$ au point de contact M, et de $F_1$ on porte $2a$ en F' et F''.
Trois cas peuvent se présenter.

1° $2a > MF$ (fig. 1376). On a alors une ellipse et une hyperbole.

2° $2a = MF$. L'ellipse se réduit à une droite.

3° $2a < MF$ (fig. 1377). On obtient deux hyperboles se réduisant à la droite MT pour $2a = 0$.

Lorsqu'on donne $2c$, de F comme centre et $2c$ pour rayon on détermine les autres foyers $F'$ et $F''$.

Pour $2c > FF_1 > MF$, ellipse et hyperbole.

$2c = FF_1 > MF$. L'hyperbole se réduit à la droite MT.

$2c = FF_1 = MF$. Les deux solutions sont les droites MT (hyperbole) et MF (ellipse).

$MF > 2c > FF_1$. On a deux hyperboles.

Le minimum de $2c$, qui est la hauteur abaissée de F sur $F_1M$, donne une seule hyperbole.

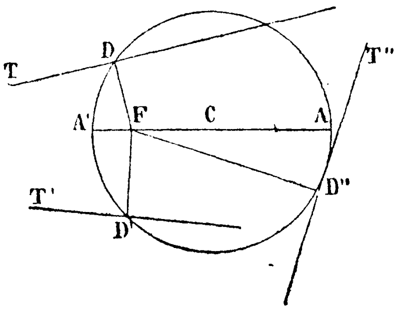


Fig. 1378.

**Problème 942. — V.**

2200. *Un foyer et trois tangentes.*

Il faut projeter le foyer sur chaque tangente. Le cercle qui passe par D, D', D'' est le cercle principal; FC fait connaître le grand axe...

On obtient une ellipse lorsque le point F est dans le cercle (fig. 1378), et une hyperbole dans le cas contraire.

**Problème 942. — VI.**

2201. *Un foyer, deux tangentes et l'un des points de contact.*

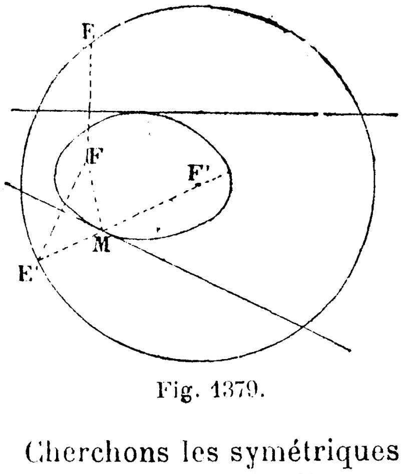


Fig. 1379.

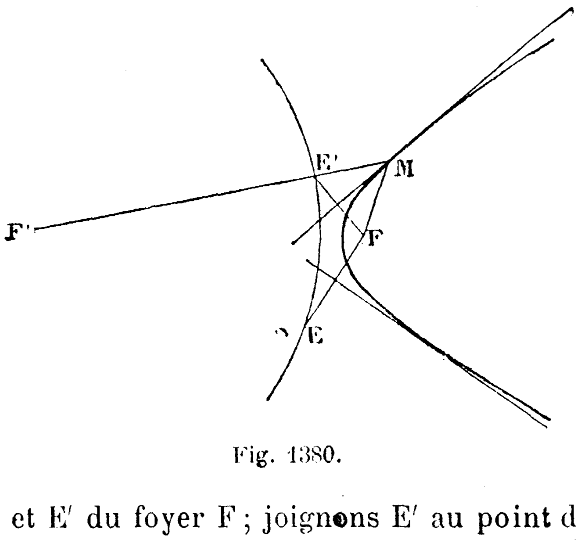


Fig. 1380.

Cherchons les symétriques E et E' du foyer F; joignons E' au point de contact M. Le cercle directeur doit passer par les points E et E', et avoir son centre sur E'M. Ainsi le point où la perpendiculaire élevée au milieu de EE' coupe E'M est le second foyer.

La courbe est une ellipse lorsque le cercle décrit comprend le foyer F (fig. 1379), et une hyperbole si le point F est hors du cercle directeur (fig. 1380).

**Problème 943.**

**2202.** *Construire une ellipse, connaissant deux tangentes, les points de contact et la droite sur laquelle doit se trouver le grand axe.*

Soient les tangentes RM et RM′, les points de contact M et M′, et $xy$ la direction du grand axe (fig. 1381).

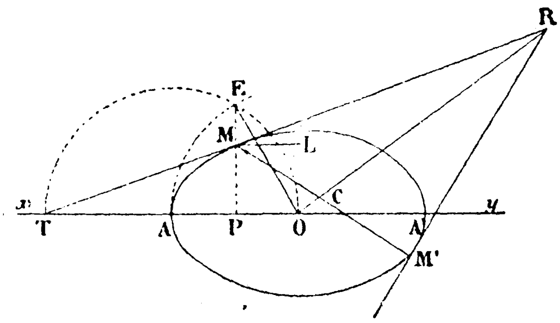



Fig. 1381.

La ligne RCO, qui joint R au milieu de la corde des contacts, passe au centre (n° 2081); puis $a^2 = OT . OP$ (n° 2077). Il faut donc décrire une circonférence sur le diamètre OT. L'ordonnée MP donne $OE^2 = OP . OT$; donc $OE = a$. On peut décrire le cercle principal et achever l'ellipse.

La ligne ML, parallèle à $xy$, donne OL pour le demi-petit axe. (G., n° 635.)

**Problème 943. — I.**

**2202 a.** *Déterminer les points où une droite coupe une hyperbole dont on connait un point et les asymptotes.*

Il convient d'étudier successivement les divers cas qui peuvent se présenter.

**1er Cas.** *La droite donnée est parallèle à une des asymptotes.*

Soient A le point donné, OF, OJ les asymptotes, et FH la droite donnée.

Toute droite parallèle à une des asymptotes ne coupe une hyperbole qu'en un seul point à distance finie. (Nos 258 et 2124.)

Admettons que M soit le point cherché; par A et M menons des parallèles aux asymptotes. On sait que l'équation de l'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes est :

$$xy = k^2. \quad \text{(G., n° 678.)}$$

Pour une hyperbole quelconque, l'équation est identique; mais les coordonnées AC, AB, ou OB, OC, ne sont pas rectangulaires.

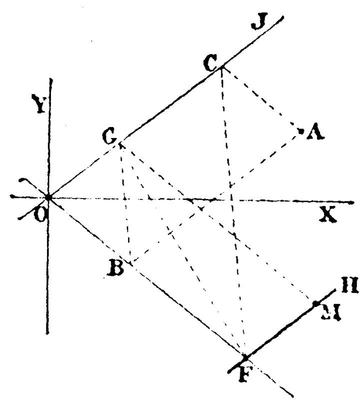



Fig. 1381 (*a*).

D'après l'équation de la courbe, on a donc :

$$OB . OC = k^2; \quad OF . OG = k^2;$$

d'où $\qquad OB \cdot OC = OF \cdot OG, \quad$ ou $\quad \frac{OG}{OB} = \frac{OC}{OF}.$

On peut donc déterminer OG ou FM par une quatrième proportionnelle.

Il suffit de joindre le point F au point C, et de mener la parallèle BG ; puis de prendre $FM = OG$.

**Note**. Cette solution a été rédigée d'après l'ouvrage de KLÉS, *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, 2e partie ; les autres cas (nos 1053 et 1054) sont notablement simplifiés par l'emploi des constructions indiquées aux nos 297 et 299.

**2202 b.** — **2e Cas**. *La droite donnée est parallèle à l'un des axes de la courbe.*

1o Admettons que la droite donnée FG soit parallèle à l'axe non transverse OY.

Projetons le point donné A sur les axes en B et C et prolongeons l'ordonnée AB jusqu'aux asymptotes OF, OG, en D, E.

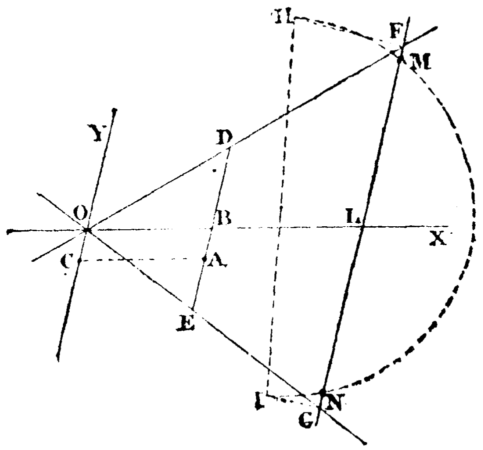


Fig. 1381 (b).

L'équation de la courbe est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \text{(G., n}^\text{o}\text{ 676.)}$$

Or $\qquad \frac{BD}{OB} = \frac{b}{a},$

d'où $\qquad BD = OB \cdot \frac{b}{a}.$

Ainsi $\quad AD = OB \cdot \frac{b}{a} + AB,$

$$AE = OB \cdot \frac{b}{a} - AB;$$

d'où

$$AD \cdot AE = OB^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} - AB^2,$$

et $\qquad \frac{AD \cdot AE}{b^2} = \frac{OB^2}{a^2} - \frac{AB^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2};$

donc le produit $AD \cdot AE = b^2$; car le second membre égale 1 d'après l'équation de l'hyperbole.

Ainsi, *quel que soit le point* A *de l'hyperbole, les distances* AD, AE *donnent un produit constant.* Par conséquent, si M est un point commun à la courbe et à la droite FG, on aura $MF \cdot MG = AD \cdot AE$ ; donc le problème revient à déterminer les côtés MF, MG d'un rectangle, connaissant la somme FG de ses côtés, et sachant que la surface est équivalente au produit AD . AE.

Cette question est connue, et la solution en est très simple (no 297). Sur FG, élevons des perpendiculaires FH, GI, respectivement égales aux segments AD et AE. Sur le diamètre HI décrivons une circonférence ; si la droite FG est rencontrée par la demi-circonférence, les points M et N seront les points demandés.

Il peut y avoir deux solutions, une seule ou aucune.

**2202 c.** 2° Admettons que la droite MN soit parallèle à l'axe transverse ; soient OF, OJ les asymptotes, et A le point donnés.

D'une manière analogue à celle qu'on vient d'employer, on démontre que l'on a :

$$AD \cdot AE = a^2 ;$$

d'où $\quad MF \cdot MG = a^2.$

Ainsi, déterminer les points d'intersection M et N revient à chercher les côtés MG, MF d'un rectangle dont la différence des côtés égale FG, et dont la surface égale AD . AE.

Pour cela, de part et d'autre de FG, il faut élever des perpendiculaires FH, GI, respectivement égales aux distances AD, AE, et décrire une circonférence sur le diamètre HI (n° 299).

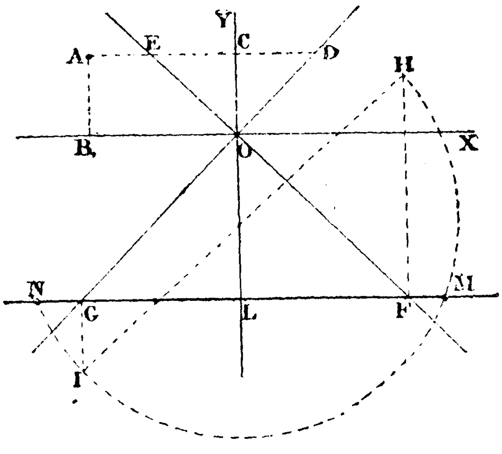


Fig. 1381 (*c*).

Il y a toujours deux points d'intersection M et N.

**2202 d.** — **3e Cas.** *La droite donnée est quelconque.*

Ce cas se ramène au second par les propriétés des diamètres conjugués (n° 2126).

En considérant le système des cordes parallèles à la droite donnée FG (fig. 1381 **d**), on obtiendra les diamètres conjugués correspondants, en joignant le point G au point milieu L de FG, et en menant OY parallèle à FG.

Donc, par le point donné A, il faut mener une parallèle DE à la droite donnée FG, et déterminer M et N de manière que MF . MG = AD . AE.

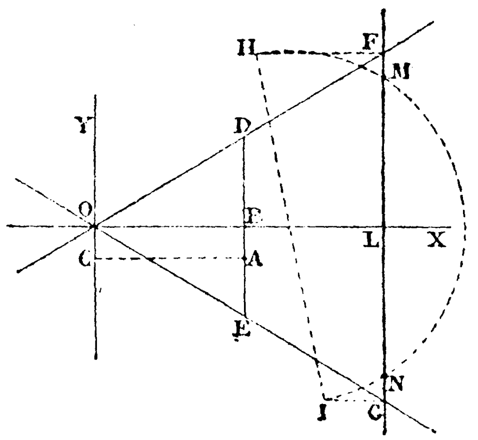


Fig. 1381 (*d*).

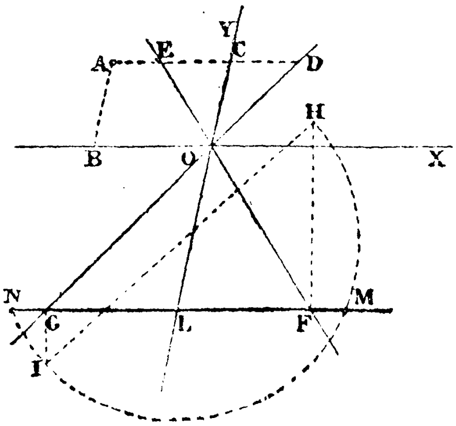


Fig. 1381 (*e*).

Il faut prendre comme précédemment des perpendiculaires FH, GI respectivement égales aux distances AD, AE, et décrire une circonférence avec HI pour diamètre (n° 297).

Lorsque la droite FG ne coupe pas les deux côtés de l'angle même qui contient le point A (fig. 1381 **e**), ou les deux côtés de son opposé par le sommet, la droite rencontre chaque branche de l'hyperbole.

Il faut mener AD parallèle à FG, élever des perpendiculaires FH et GI respectivement égales aux distances AD, AE, et décrire la circonférence III.

Les points M et N appartiennent à l'hyperbole et à la droite donnée.

*Remarque.* Il est utile de comparer la méthode géométrique ci-dessus à la méthode descriptive, où l'on considère un cône auxiliaire (*E. de G.D.*, nos 123 et 124).

## Problèmes relatifs à la Parabole.

### Problème 944.

**2203.** *Construire une parabole avec les données suivantes :*

*Le foyer et deux tangentes.*

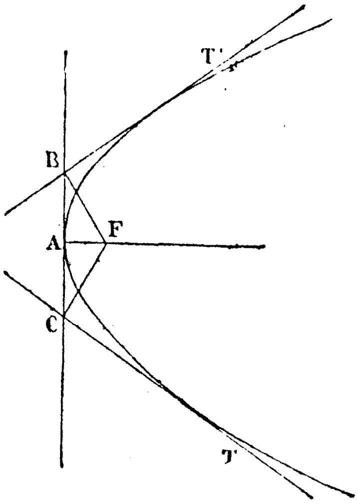



Fig. 1382.

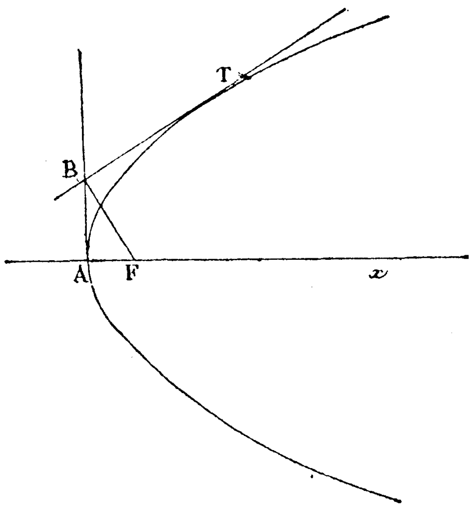



Fig. 1383.

On projette le foyer sur les deux tangentes (fig. 1382). La droite BC est la tangente au sommet (G., no 697), et la perpendiculaire FA est l'axe.

### Problème 944. — I.

**2204.** *Le foyer, l'axe et une tangente.*

On projette le foyer sur la tangente (fig. 1383), et du point B on abaisse la perpendiculaire BA sur l'axe $Fx$ : le sommet A est ainsi déterminé.

### Problème 944. — II.

**2205.** *La directrice, une tangente et le point de contact.*

Projetons le point de contact M sur la directrice (fig. 1384), et le point B sur la tangente. Puisque B est le symétrique du foyer, il suffit de prendre
$$CF = BC.$$

### Problème 944. — III.

**2206.** *La directrice et deux tangentes, ou la tangente au sommet et deux autres tangentes.*

Dans le premier cas (fig. 1385), soient E et E' les points où les tangentes données coupent la directrice. Faisons l'angle $TEF = TEL$, et $T'E'F = T'E'L'$. Le foyer est déterminé; car la tangente étant perpendiculaire au milieu de la droite qui joint le foyer à un point L de la directrice (G., n° 693), les angles TEF et TEL sont égaux.

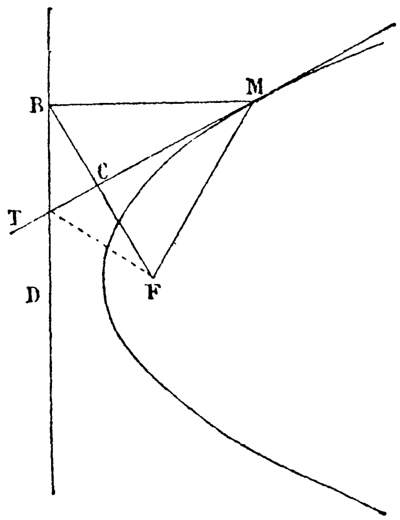


Fig. 1384.

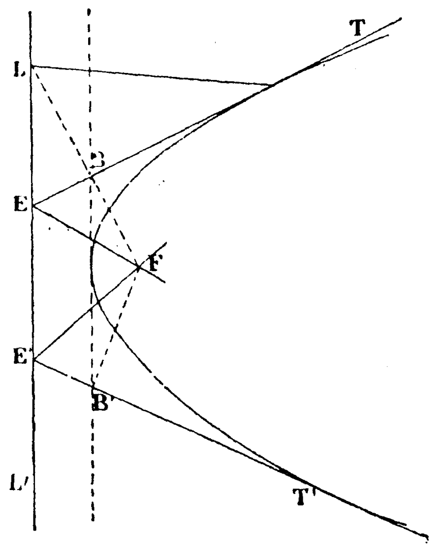


Fig. 1385.

Dans le deuxième cas, les perpendiculaires élevées aux tangentes aux points B et B', où elles coupent la tangente au sommet, donnent le foyer. (G., n° 697.)

### Problème 944. — IV.

**2207.** *Le foyer ou la directrice, et deux points.*

Si le foyer F est donné (fig. 1386), ainsi que les points M et M', il faut mener une tangente aux circonférences décrites des centres M et M' avec les rayons MF et M'F. D est la directrice. Il y a deux solutions.

Si la directrice est donnée, il faut décrire des circonférences tangentes à cette ligne. On a deux solutions, une seule, ou aucune, suivant que les circonférences se coupent en deux points, sont tangentes, ou ne se rencontrent pas.

*Remarque.* On peut prendre aussi les données suivantes :

*Le foyer, un point et une tangente;*

*La directrice, un point et une tangente;*

*Le foyer, un point et la normale en ce point.*

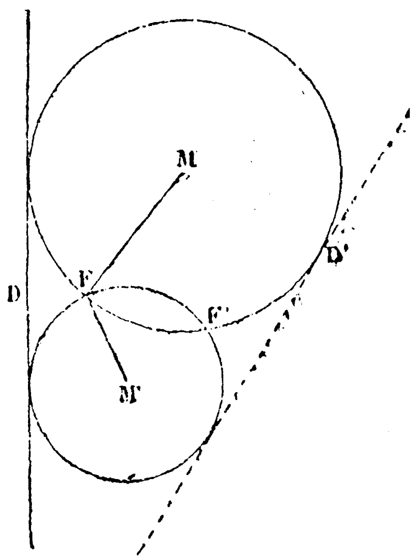


Fig. 1386.

**Problème 944. — V.**

**2208.** *L'axe, une tangente et le point de contact* (fig. 1387).

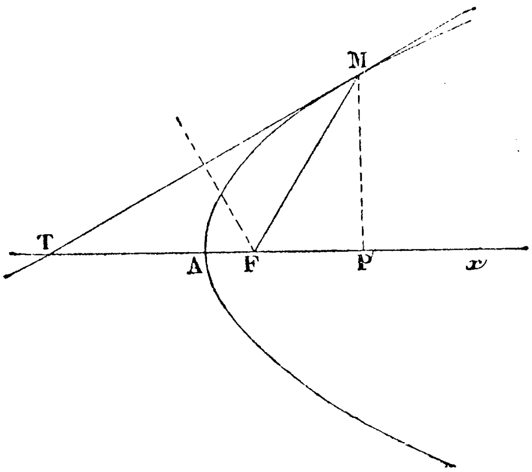


Fig. 1387.

On peut prendre aussi les données suivantes :

**a.** *L'axe, une normale et le paramètre;*

**b.** *L'axe, un point et la longueur de la sous-tangente en ce point;*

**c.** *Une tangente, le point de contact, la longueur de la sous-tangente correspondante et le paramètre.*

Pour la question proposée en premier lieu, il faut remarquer que la perpendiculaire élevée au milieu de MT passe au foyer, car on doit avoir $FT = FM$. (G., n° 694.)

Le point A, milieu de la sous-tangente TP, est le sommet de la parabole. (G., n° 699.)

**Problème 944. — VI.**

**2209.** *L'axe et deux points* (fig. 1388).

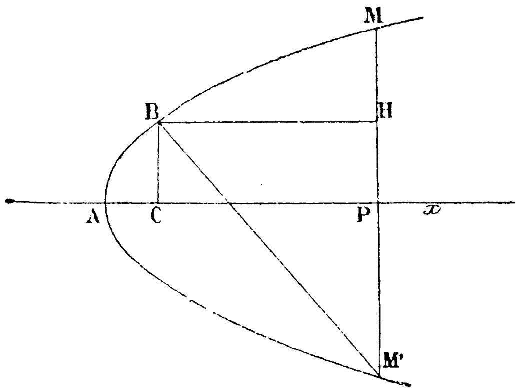


Fig. 1388.

Soient $Ax$, M et B, l'axe et les points donnés.

Si A est le sommet, on aura :

$$\frac{MP^2}{BC^2} = \frac{AP}{AC}; \qquad \text{(G., n° 701, II.)}$$

d'où

$$\frac{MP^2 - BC^2}{BC^2} = \frac{AP - AC \text{ ou } CP}{AC},$$

et

$$AC = \frac{CP \cdot BC^2}{MP^2 - BC^2} = \frac{CP \cdot BC^2}{(MP + BC)(MP - BC)},$$

ou

$$AC = \frac{CP \cdot BC^2}{HM' \cdot HM}, \text{ quantité facile à construire.}$$

Le point M' est le symétrique de M.

*Remarque.* On peut arriver à la solution plus rapidement en utilisant

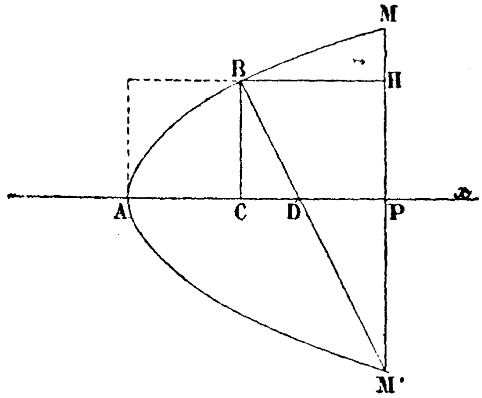


Fig. 1389.

une question connue n° 2143; car, en cherchant M′, point symétrique de M, on a : $\frac{AD}{DP} = \frac{PH}{HM}$; d'où $AD = \frac{DP \cdot HP}{HM}$, quatrième proportionnelle à construire.

**Problème 944. — VII.**

**2210.** *Deux tangentes et les points de contact* (fig. 1390).

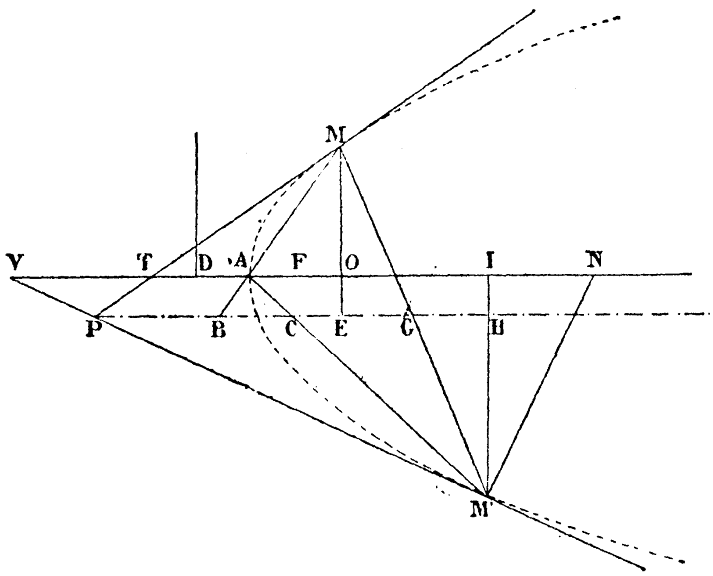


Fig. 1390.

Soient M et M′ les points de contact donnés sur les tangentes PM et PM′.

La droite PG, qui joint P au milieu de la corde des contacts, est parallèle à l'axe. (G., n° 705.) Projetons M et M′ sur PG ; joignons M au point B, milieu de PE, et le point M′ au point C, milieu de PH. L'intersection des deux droites MB et M′C est le sommet A de la parabole ; car on a : AT = AO, AV = AI, et les sous-tangentes sont divisées en deux parties égales par le sommet. (G., n° 699.)

Menons la normale M'N, et portons la moitié de la *sous-normale* IN de A en F et en D : on a ainsi le foyer et la directrice, ce qui permet de tracer la parabole.

### Problème 945.

**2211**. *Un segment parabolique est limité par une corde perpendiculaire à l'axe; par une des extrémités de cette corde on mène une parallèle à l'axe. Mener une tangente limitée aux côtés de l'angle droit et telle que le point de contact soit le milieu du segment intercepté.*

(Voir *Méthodes*, nº 318.)

### Problème 946.

**2212**. *Couper un cône de révolution de manière que la section soit une ellipse, une parabole ou une hyperbole données.*

D'après le *théorème de Dandelin* (G., nº 843) relatif aux sections d'un cône de révolution, on sait que toute section plane de ce cône est une *ellipse*, une *parabole* ou une *hyperbole;* il s'agit de déterminer la section qui donne une courbe donnée.

Suivant le cas, on donne les axes $2a$, $2b$, ou le paramètre $p$. Soit $2\alpha$ l'angle au sommet du cône considéré; $\alpha$ représente l'angle que forme l'axe du cône avec les génératrices. Nous considérons trois cas, selon la nature de la courbe que l'on veut obtenir.

1º *Ellipse* (fig. 1391). Le problème revient à construire le triangle AVA' dans lequel on connaît $AA' = 2a$, $AV = 2c$ (G., nº 846, nº 2), et l'angle V égal, en degrés, à $90 - \alpha$.

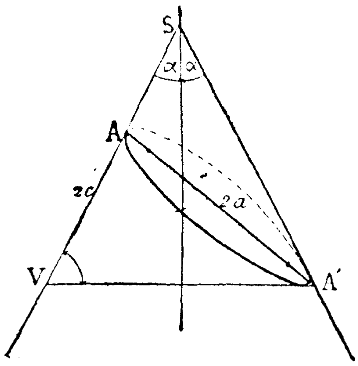



Fig. 1391.

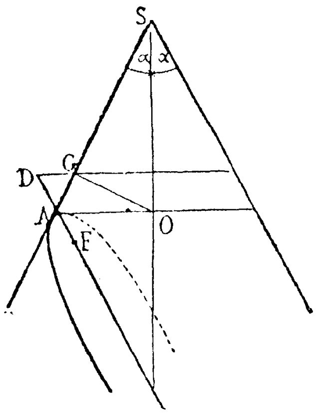



Fig. 1392.

Il y a toujours une solution, et une seule, car AO est $<$ AA' et l'angle V est aigu. (G., nº 185.)

Le triangle construit, on fait l'angle VA'S égal à V ; et sur deux génératrices opposées du cône donné, on porte des grandeurs égales à SA et SA'.

2º *Parabole* (fig. 1392). Il faut construire un triangle rectangle AGO, connaissant l'angle aigu $O = \alpha$, et le côté $AG = {}^1/_2 p$ (G., nº 848, 2º), problème toujours possible, et qui n'a qu'une solution.

**2213.** 3° *Hyperbole* (fig. 1393). Le problème revient à construire le triangle AVA′, dans lequel on connaît $AA' = 2a$, $AV = 2c$, $V = 90° - \alpha$ (G., n° 851, 2°) ; mais comme le côté opposé à l'angle V est plus petit que AV, il peut y avoir deux solutions, une seule ou aucune. (G. n° 186.) Il faut au moins que l'angle $2\alpha$ égale celui des asymptotes (n° 2124 c); car lorsqu'il y a égalité, AA′ est parallèle à l'axe, $VA' = 2b$. Il y a deux solutions, lorsque l'angle $2\alpha$ est plus grand que l'angle des asymptotes.

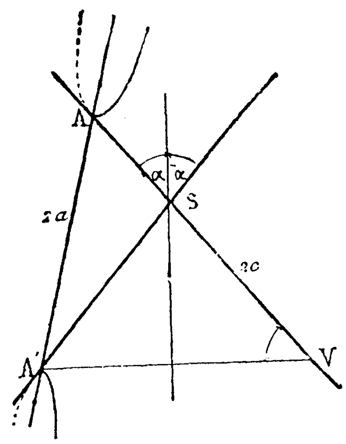


Fig. 1393.

**2214.** *Remarques.* 1° Sur un cylindre dont le diamètre est $2b$, on peut facilement déterminer une section elliptique dont les axes soient $2a$ et $2b$.

Sur un cône donné on peut toujours placer une ellipse donnée, ainsi qu'une parabole donnée. On peut y placer aussi toute hyperbole dans laquelle l'angle des asymptotes ne surpasse pas l'angle au sommet du cône; une hyperbole quelconque peut être placée sur tout cône dans lequel l'angle au sommet n'est pas inférieur à l'angle des asymptotes de la courbe.

*Un cône quelconque contient toutes les ellipses et toutes les paraboles possibles.*

2° Pour étudier les courbes du second degré, on peut toujours supposer que l'ellipse appartient à un cylindre ou à un cône de révolution, et que la parabole ou l'hyperbole appartiennent à un cône de révolution.

**2214 a. Note.** La *méthode* de DANDELIN (G., n°s 843 et 82), pour l'étude des sections coniques, conduit à la considération des *cercles focaux* par rapport au grand axe de l'ellipse (axe transverse pour l'hyperbole, axe pour la parabole). Il suffit que la sphère inscrite dans le cône coupe le plan de la section. Le cercle obtenu dans le plan de l'ellipse et la directrice correspondante (intersection du plan de contact de la sphère et du cône avec le plan de l'ellipse) conduisent à la relation suivante :

Pour tout point de l'ellipse, la longueur de la tangente menée par ce point au cercle est à la distance de ce même point à la directrice dans un rapport constant.

Remarque analogue pour les deux autres coniques.

Quand la sphère est tangente au plan sécant, le point de contact est le foyer proprement dit.

Les *cercles focaux* de l'ellipse, par rapport au grand axe, sont symétriques deux à deux par rapport à l'autre axe ; de même qu'il y a deux foyers et deux directrices correspondantes.

L'ellipse admet aussi des cercles focaux par rapport aux petit axe.

On peut voir à ce sujet les *Notions complémentaires sur les courbes usuelles*, par P. BARBARIN, page 44.

Deux siècles avant QUETELET et DANDELIN, un autre géomètre belge, GRÉGOIRE de SAINT-VINCENT, avait démontré que la section plane d'un cône à base circulaire, par un plan qui coupe les deux nappes, est une hyperbole (n° 2124 d). Le marquis DE L'HÔPITAL en simplifia la démonstration. (*Mathesis*, 1904, p. 129; article de M. A. AUBRY sur *deux Théorèmes de Grégoire de Saint-Vincent.*)

* GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT, né à Bruges en 1584, mort à Gand en 1667. On lui doit de nombreuses études sur les surfaces et les volumes.

* P. BARBARIN, professeur au lycée de Bordeaux (en 1899), auteur de nombreux articles publiés dans les journaux scientifiques, et notamment dans *Mathesis*.

* DANDELIN, né au Bourget en 1794, officier du génie, professeur à Liége en 1826, est mort à Bruxelles en 1847. Il a fait de nombreuses applications de la projection stéréographique (*A. de G.*, tome XV, p. 387, et tome XVI, p. 322). Le théorème qui porte son nom a été publié en 1831, dans un recueil périodique de QUÉTELET, il serait même dû à ce dernier; mais DANDELIN l'a étendu au cône oblique (*Histoire des sciences mathématiques et physiques,* par MAXIMILIEN MARIE, t. XII, p. 201).

* A. AUBRY. Auteur du remarquable *Essai sur l'histoire de la Géométrie des Courbes* (Coïmbre, 1909) et de nombreux articles du *Journal de Mathématiques spéciales de* LONGCHAMPS; notamment dans les années 1893 à 1896.

### Lieu 946. — I.

**2214 b.** *On donne un cône de révolution que l'on coupe par un plan; par chaque point de la section conique obtenue, on élève une normale au cône; quel est le lieu du second point d'intersection de ces normales et du cône donné?* (*N. A.*, 1860, pp. 328 et 436.)

Le lieu est une conique analogue à la première.

Il en serait de même, si on considérait des lignes isoclines au lieu des normales.

TERQUEM dit que l'ensemble des normales est une surface du sixième degré.

### Lieu 946. — II.

**2214 c.** *Le lieu des points dont les distances* MF, MD *à un point fixe* F *et à une droite donnée* CD *sont dans un rapport constant* $\frac{m}{n}$ *est une conique.*

*Le lieu est une ellipse, une parabole, une hyperbole suivant qu'on a :*

$$\frac{m}{n} \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1.$$

**Théorèmes :** *L'ellipse et l'hyperbole admettent deux directrices; elles sont perpendiculaires à l'axe focal et à égale distance du centre de la courbe.*

On peut voir les ouvrages suivants :

*Cours de Géométrie élémentaire*, par *F. G.-M.*, nos 988 à 991 et 1068 à 1071.

*Éléments de Géométrie par* A. AMIOT, *revus par* F. VINTÉJOUX (1897), pp. 447 à 450 et 467 à 469.

*Traité de Géométrie par* E. ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, septième édition, nos 1079 à 1088.

*Remarques.* 1° *Le théorème de Dandelin* conduit facilement à l'étude des *directrices* des coniques.

2° En considérant la projection orthogonale d'un cercle, la démonstration de *Courcelles* fait connaître les deux foyers de la projection obtenue; une démonstration analogue a été donnée par M. JUHEL-RÉNOY pour la recherche des *directrices* (*N. A.*, 1905, p. 543).

### Lieu 946. — III.

**2214 d.** *Le lieu des points dont les distances à un cercle et à une droite donnés sont dans un rapport constant* $\frac{m}{n}$ *se compose de deux droites équidistantes de la directrice de la conique qui a le centre du cercle donné pour un de ses foyers.*

La démonstration directe est très facile ; voir d'ailleurs *N. A.*, 1882, p. 108 ; art. de X. Antomari, alors professeur à Carcassonne. Son bel article a pour titre : *Sur deux propriétés relatives aux foyers et aux cercles focaux dans les coniques.*

## Hélice.

### Problème 947.

**2215.** *Exprimer la longueur d'un arc d'hélice en fonction de sa projection horizontale et de l'une des quantités suivantes :*

1° *La différence des ordonnées de ses extrémités ;*

2° *Le pas de l'hélice ;*

3° *L'angle constant que forment les tangentes avec les génératrices.*

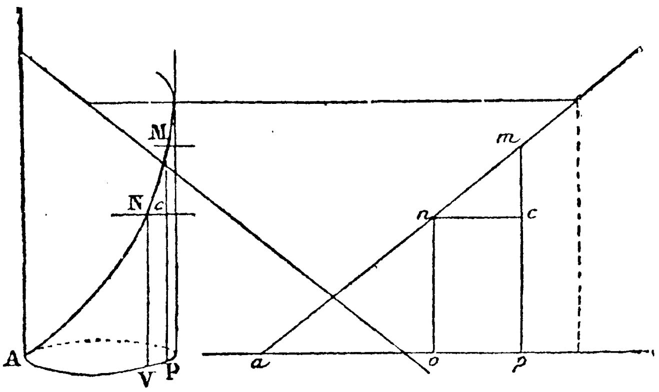



Fig. 1394.

On résout facilement le problème et le suivant en considérant l'angle plan dont l'enroulement sur le cylindre produit l'hélice.

1° D'après la définition de la courbe, l'arc $VP = vp$, $NM = nm$, etc.

Or $$nm = \sqrt{nc^2 + (mp - nv)^2}\,,$$

donc $$NM = \sqrt{(\text{arc } VP)^2 + (MP - NV)^2}\,.$$

2° Le pas, AB ou $a'b$, est ordinairement représenté par $h$ (fig. 1395).

On a : $$\frac{mc}{h} = \frac{vp}{aa'}\,.$$

Or $mc$ est la différence des ordonnées, $aa' = 2\pi R$.

$$\frac{mc}{h} = \frac{vp}{2\pi R}\,,$$

$$mc^2 = \frac{h^2 \,.\, vp^2}{(2\pi R)^2}\,.$$

Donc $$\mathrm{NM} = \sqrt{(\mathrm{arc\ VP})^2 + \frac{h^2 \cdot (\mathrm{arc\ VP})^2}{(2\pi \mathrm{R})^2}},$$

ou $$\mathrm{NM} = \mathrm{arc\ VP}\sqrt{1 + \frac{h^2}{4\pi^2 \mathrm{R}^2}}.$$

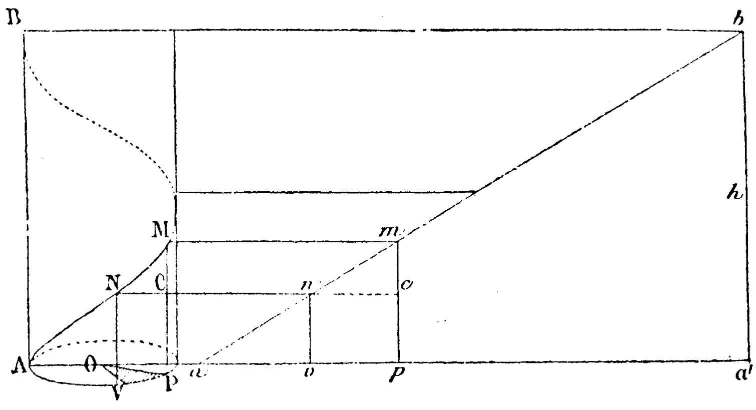



Fig. 1395.

3° Soit $\alpha$ l'angle constant $baa'$;

$$\frac{nc}{nm} = \cos mnc = \cos \alpha \quad \text{ou} \quad nm = \frac{nc}{\cos \alpha};$$

donc $$\mathrm{NM} = \frac{\mathrm{arc\ VP}}{\cos \alpha}.$$

**Problème 948.**

**2216.** *Évaluer l'aire de la surface cylindrique comprise :*

1° *Entre un arc d'hélice, les ordonnées extrêmes et la projection horizontale de l'hélice ;*

2° *Entre deux arcs d'hélice de même pas et les génératrices qui limitent ces arcs ;*

3° *Entre deux arcs d'hélice de même pas et les arcs de deux nouvelles hélices normales aux premières.*

1° $$\text{aire} \quad mpnv = \frac{(mp + nv)}{2} \cdot vp;$$

donc $$\mathrm{MPNV} = \frac{\mathrm{MP} + \mathrm{NV}}{2} \cdot \mathrm{arc\ VP}.$$

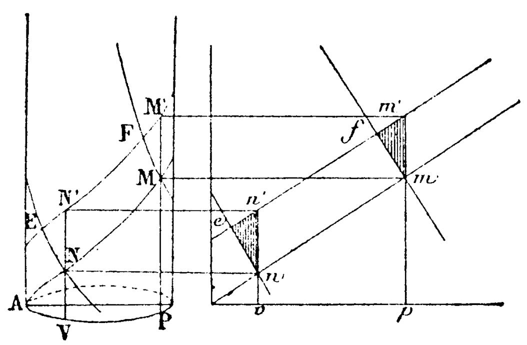



Fig. 1396.

2° Les hélices de même pas sont parallèles et proviennent de droites $nm$ et $n'm'$ parallèles.

Or le parallélogramme

$$nn'mm' = vp \cdot mm';$$

donc l'aire de

$$\mathrm{NN'MM'} = \mathrm{arc\ VP} \cdot \mathrm{MM'}.$$

3° Les hélices normales aux premières proviennent de droites $en$ et $fm$ perpendiculaires aux lignes $nm$ et $n'm'$. On peut d'ailleurs prouver directement que la surface $\mathrm{ENN'} = \mathrm{FMM'}$.

Mais le rectangle $enmf = nm \,.\, fm$ ou $vp \,.\, mm'$;
donc l'aire $\mathrm{ENFM} = \mathrm{NM} \,.\, \mathrm{FM}$ ou arc $\mathrm{VP} \,.\, \mathrm{MM'}$.

Ordinairement on multiplie l'arc projection, ou VP, par la distance MM′ mesurée par une génératrice.

**2216 a. Note.** L'*Appendice aux Exercices de Géométrie* (publié en 1877) contient divers exercices relatifs à l'hélice (nos 868 et 876).

Le volume compris entre une surface cylindrique de révolution, la section droite du cylindre et un hélicoïde normal à l'axe est la moitié du secteur cylindrique correspondant.

L'équation de la projection d'une hélice, dont $l$ est le pas, sur un plan parallèle à l'axe de la courbe est :

$$y = \sin\left(x \,.\, \frac{2\pi}{l}\right).$$

Lorsque le pas $l$ égale $2\pi$, on obtient l'équation $y = \sin x$ de la sinusoïde ordinaire.

## Maximum et Minimum.

### Problème 949.

**2217.** *Quel est le rectangle maximum qu'on puisse inscrire dans une ellipse donnée?*

La considération du cercle principal montre que le rectangle maximum a pour diagonales les deux diamètres conjugués égaux.

Rappelons qu'il suffit de mener une tangente FDL, telle que

$$\mathrm{DF} = \mathrm{DL}.$$

Pour la mener, on peut aussi utiliser le cercle principal (G., no 626); d'ailleurs

$$\mathrm{OL} = a\sqrt{2}\,,$$

car $\mathrm{CL} = \mathrm{CE} = \mathrm{OC} = a;$

donc aussi $\mathrm{OF} = b\sqrt{2}\,.$

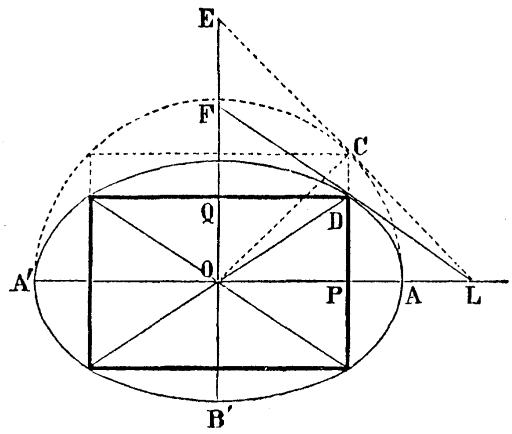


Fig. 1397.

### Problème 950.

**2218.** *Dans une ellipse, mener deux parallèles équidistantes d'un diamètre donné, de manière que le parallélogramme inscrit, qui aurait ces parallèles pour côtés, ait le périmètre maximum.*

(Voir *Méthodes*, no 339.)

### Problème 951.

**2219.** *Quel est le minimum et le maximum du rectangle circonscrit à une ellipse?*

Le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à l'ellipse est une circonférence ayant même centre que l'ellipse et décrite avec $\sqrt{a^2 + b^2}$ pour rayon (no 2094); c'est le *cercle de Monge*.

1° Or le rectangle maximum inscrit dans le cercle a les côtés égaux ; donc le carré circonscrit à l'ellipse répond au maximum.

Les sommets de ce carré sont sur les prolongements des axes.

2° Le rectangle inscrit dans le *cercle de Monge* est d'autant plus petit que ses côtés diffèrent davantage l'un de l'autre, car la somme des carrés des côtés est constante ; donc le rectangle minimum est celui qui est construit sur les axes de la courbe.

*Maximum*. La demi-diagonale du carré est égale au rayon $\sqrt{a^2+b^2}$ indiqué ci-dessus. La surface de ce carré $= 2(a^2+b^2)$.

*Minimum*. Le rectangle des axes $= 2a \cdot 2b = 4ab$.

### Problème 952.

**2220.** *Dans un parallélogramme donné, inscrire l'ellipse de surface maxima.*

Soit le parallélogramme ABCD ; menons les droites EF, GH qui joignent deux à deux les milieux des côtés opposés. Soit une ellipse inscrite IJKL ; les points de contact I, J, et le centre sont en ligne droite, car les tangentes AB et DC sont parallèles comme côtés opposés d'un parallélogramme. La ligne KOL est le diamètre conjugué de IJ, car les tangentes MN, PQ, menées parallèlement à IJ, doivent être divisées en deux parties égales par les points de contact (n° 2071) ; donc EF, qui passe par le milieu de toutes les sécantes limitées aux parallèles AB, CD, passe par les points de contact et donne le diamètre KL conjugué de IJ.

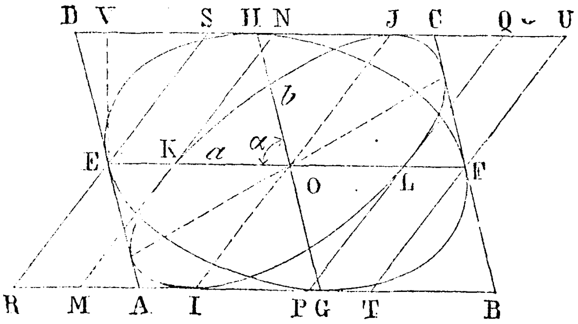



Fig. 1398.

Or l'ellipse rapportée aux diamètres conjugués a pour aire $OK \times OJ\pi \times \sin\alpha$, tandis que le parallélogramme circonscrit égale $4OK \times OJ \times \sin\alpha$. Le rapport de la surface elliptique au parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constant, il égale $\frac{\pi}{4}$ ; donc l'ellipse maxima est celle qui aura EF et GH pour diamètres conjugués. En effet, elle sera à la surface ABCD dans le rapport $\frac{\pi}{4}$, tandis que, pour toute autre courbe, on a $\frac{\pi}{4}$ du parallélogramme MNPQ, moindre que RSTU, c'est-à-dire moindre que ABCD.

*Remarque.* L'ellipse maxima est tangente au point milieu de chaque côté du parallélogramme donné. En représentant les côtés de ce parallélogramme par $2a$ et $2b$, l'aire de l'ellipse $= \pi ab \sin\alpha$ (n° 2073). Si l'on abaisse une perpendiculaire EV, on a $S = \pi a \times EV$.

**Problème 953.**

**2221.** *Par un point A, donné sur un des axes d'une ellipse ou sur son prolongement, mener une sécante ABC, telle que le triangle BOC formé en joignant les extrémités de la corde de l'ellipse au centre de la courbe soit maximum.*

Il suffit de se reporter à un *Exercice* déjà traité (nº 1696).

Décrire, du centre O, une circonférence avec $\frac{a}{\sqrt{2}}$ pour rayon ; mener une tangente AB'C' ; elle coupe le cercle principal en deux points B', C' ; le triangle B'OC' est maximum pour le cercle principal ; puis on détermine ABC, projection de AB'C'.

*Remarque.* Le triangle B'OC' étant rectangle en O, les côtés OB et OC du triangle correspondant BOC sont deux demi-diamètres conjugués, et tout triangle formé par deux demi-diamètres conjugués est équivalent à BOC, car on sait que $a'b' \sin V = ab$.

**Problème 954.**

**2222.** 1º *Inscrire dans une ellipse le triangle maximum ; le sommet A' est donné sur la courbe.* 2º *Quel est le lieu du milieu de la base des triangles inscrits équivalents au maximum demandé ?*

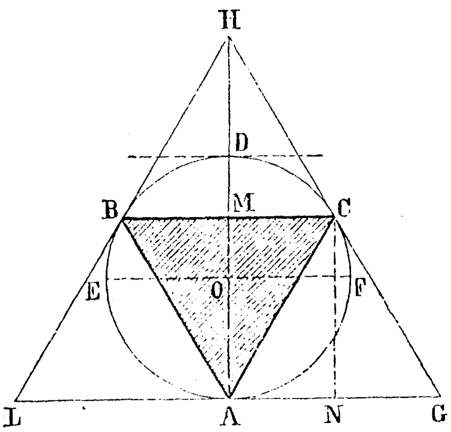


Fig. 1399.

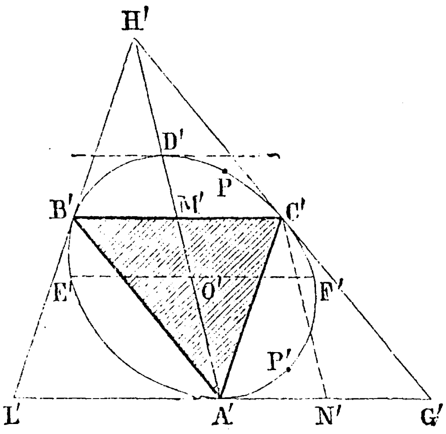


Fig. 1400.

1º Lorsqu'on projette un cercle et un triangle équilatéral inscrit au cercle (fig. 1399), les deux surfaces sont réduites dans le même rapport $\frac{b}{a}$ (fig. 1400).

Or le triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon $a$ a pour aire $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. La projection dans l'ellipse du triangle maximum aura pour aire $\frac{3ab\sqrt{3}}{4}$.

Le diamètre EF parallèle à BC et le diamètre perpendiculaire AD donneront deux diamètres conjugués A'D', E'F'. La corde B'C' et la tangente L'A'G' seront parallèles à E'F' (fig. 1400).

D'ailleurs, $O'M' = M'D'$; car $OM = MD$ (fig. 1399).

La tangente $G'C'H'$ est aussi divisée en deux parties égales par le point de contact; donc il faut mener la tangente au point $A'$ choisi pour sommet, mener le diamètre $A'O'D'$, et tracer une tangente $G'C'H'$ telle que le point de contact la divise en deux parties égales; on sait que le parallélogramme $A'M'C'N'$ est maximum, car il égale $\frac{A'H'G'}{2}$ (nos 367 et 369), et tout autre point $P'$ de la courbe donnerait un parallélogramme plus petit (nos 359 et 360); d'ailleurs $A'B'C'$ est équivalent à $A'M'C'N'$, etc.

*Remarque.* Dans le cas actuel, on peut se dispenser de mener la tangente $G'C'H'$. En effet, par le point $M'$, milieu de $O'D'$, il suffit de mener $B'C'$ parallèle à la tangente $L'G'$.

3° *Le lieu du point milieu de chaque côté des triangles maxima inscrits à l'ellipse est une ellipse de même centre et homothétique de l'ellipse proposée.*

En effet (fig. 1400), le point $M'$ milieu de $B'C'$ est sur le diamètre $A'D'$ et au milieu du rayon $O'D'$. Il en serait de même pour le point milieu de chacun des côtés de tous les triangles équivalents maxima, obtenus en projetant les triangles équilatéraux égaux inscrits au cercle (fig. 1399); donc le point milieu de chaque côté divisant le rayon correspondant, $O'D'$ par exemple, en deux parties égales, le lieu des points tels que $M'$ est une ellipse ayant $O'$ pour centre et homothétique à l'ellipse proposée.

**2223.** *Autres remarques.* 1° Le triangle équilatéral $G'H'L'$ est le triangle circonscrit minimum (no 369); or

$$AG = {}^1/_3 AH; \quad \text{donc} \quad DH = OD \quad \text{(fig. 1399)};$$

de même, $$D'H' = O'D' \quad \text{(fig. 1400)};$$

donc le lieu des sommets $H'$ des triangles minima circonscrits est une ellipse de même centre et homothétique à l'ellipse proposée.

2° En considérant l'ellipse comme la projection du cercle, on résout facilement les problèmes de maximum et de minimum relatifs aux surfaces des figures inscrites ou circonscrites. On remplace deux diamètres rectangulaires du cercle par deux diamètres conjugués de l'ellipse, un diamètre et une perpendiculaire à ce diamètre (no 2222) par un diamètre de l'ellipse, et une parallèle au diamètre conjugué de ce dernier.

Ainsi les divers triangles équilatéraux égaux entre eux, circonscrits à un cercle, deviennent, par projection, des triangles équivalents entre eux, circonscrits à une ellipse. Chaque côté est divisé en deux parties égales par le point de contact. La médiane qui aboutit à un côté donné est sur le diamètre conjugué au diamètre parallèle à la tangente considérée et à la corde des contacts des deux autres côtés.

3° Le secteur circulaire devient un secteur elliptique formé par deux demi-diamètres quelconques. Le rectangle inscrit dans le secteur circulaire se transforme en parallélogramme dont deux côtés sont parallèles à la corde du secteur elliptique, tandis que les autres sont parallèles au diamètre conjugué de cette corde, c'est-à-dire à la droite qui joint le centre au milieu de la corde.

**2223 a Note.** En considérant de nouveau les triangles d'aire maxima inscrits dans l'ellipse, on peut faire les remarques suivantes : Les triangles ci-dessus sont équivalents entre eux ; ils ont pour barycentre commun le centre même G de l'ellipse.

L'orthocentre H, pour chacun d'eux, est le point de concours des normales à l'ellipse aux trois sommets A, B, C de celui que l'on considère, car pour le sommet A, le côté opposé BC est parallèle au diamètre conjugué du diamètre ADA', par suite BC est parallèle à la tangente en A et la normale à l'ellipse en ce point est la hauteur abaissée de A sur BC. Dans tout triangle le barycentre G partage dans le rapport de 2 à 1 le segment compris entre l'orthocentre H et le centre O du cercle circonscrit au triangle ; enfin l'orthocentre est le centre du cercle admettant le triangle ABC comme autopolaire, le carré du rayon de ce cercle est la moitié de la puissance de l'orthocentre H, relativement au cercle circonscrit de centre O. (D'après E. MALO, *Intermédiaire des Mathématiciens,* 1911, p. 44.)

**Problème 955.**

2224. *Dans un triangle quelconque, inscrire l'ellipse de surface maxima.*

Le problème inverse, *circonscrire le triangle minimum à une ellipse donnée,* fera connaître les relations de l'ellipse et du triangle qui répondent à la question.

1° Au cercle $DE_1F_1$ (fig. 1401) correspond un triangle équilatéral $CA_1B_1$.

2° A l'ellipse DEF correspond un triangle isocèle ABC, lorsqu'on veut que l'un des côtés du triangle soit perpendiculaire à l'un des axes.

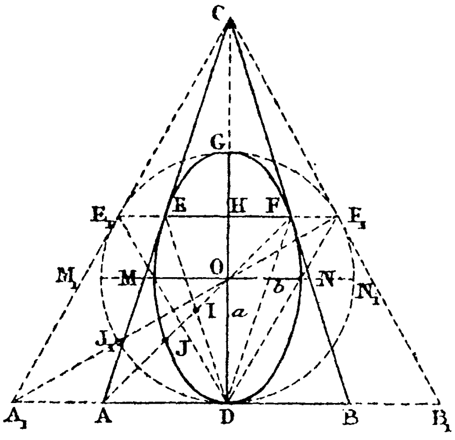


Fig. 1401.

Le rapport de l'ellipse au triangle ABC est le même que celui du cercle au triangle $A_1B_1C$ (n° 200). D'ailleurs, le triangle minimum circonscrit correspond au triangle maximum inscrit EDF. On sait que OH = HG (n° 2222), DH = HC ; par suite, en fonction de OD, on a $DH = \frac{3a}{2}$ ; et le double, $DC = 3a$ ; donc CG = GO. On sait, de plus, que les médianes AF, DC se coupent aux $^2/_3$ de leur longueur ; on pourrait donc en conclure immédiatement que $CO = 2a$ ; d'où $CG = a$.

3° Les mêmes relations existent quand on transforme la figure en inclinant CD sur la base AB. On peut donc en conclure les résultats suivants (fig. 1402) : Dans le triangle quelconque A'B'C', l'ellipse de surface maxima a pour un de ses diamètres D'G', les $^2/_3$ de la médiane C'D'. La droite E'F', qui joint les milieux des côtés A'C' et B'C', est une corde conjuguée au diamètre D'G'. Le centre O' est au $^1/_3$ de D'C'.

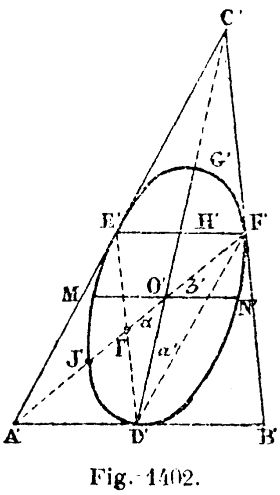


Fig. 1402.

De même F'J' est les $^2/_3$ de la médiane A'F', est un autre diamètre. Or, de même que dans le triangle équilatéral $E_1DF_1$ inscrit au cercle (fig. 1401), on a :

$$E_1F_1 = OM_1\sqrt{3} \qquad \text{(G., n° 277)};$$

de même $\quad EF = OM\sqrt{3} \quad$ ou $\quad EF = b\sqrt{3}$.

d'où
$$b = \frac{EF}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi on détermine facilement la longueur du diamètre MN conjugué de DG.

Il en est de même pour M'O' ou $b'$ (fig. 1402).

On a :
$$b' = \frac{E'F'}{\sqrt{3}}.$$

L'angle $\alpha$ des diamètres conjugués est l'angle que forme la médiane C'D' avec la base A'B'.

**2224 a.** *Remarque.* Comme vérification, on peut déterminer l'aire de l'ellipse et celle du triangle circonscrit; il faut que le rapport soit le même que celui du cercle au triangle équilatéral.

1° (Fig. 1401.) Le cercle égale $\pi a^2$; le triangle équilatéral a pour hauteur $3a$; or la surface du triangle équilatéral en fonction de la hauteur est donnée par $\dfrac{h^2}{\sqrt{3}}$ (n° 1720); donc

$$T = \frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{9a^2}{\sqrt{3}},$$

d'où
$$\frac{C}{T} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{9a^2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2° (Fig. 1402.) L'ellipse égale $\pi a'b' \sin \alpha$.

Or le triangle en fonction de la médiane D'C' et de la base A'B' égale $\dfrac{A'B'\,.\,D'C'\,.\,\sin\alpha}{2}$, car la hauteur du triangle égale D'C' sin $\alpha$.

Ainsi
$$T' = A'D'\,.\,D'C' \sin\alpha.$$

ou
$$E'F'\,.\,D'C' \sin\alpha = E'F'\,.\,3a' \sin\alpha.$$

mais
$$b' = \frac{E'F'}{\sqrt{3}},$$

donc
$$\frac{E}{T'} = \frac{\pi a'\,.\,E'F'\,.\,\sin\alpha}{3a'\,.\,E'F'\,.\,\sin\alpha\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Ainsi
$$\frac{C}{T} = \frac{E}{T'}.$$

**Problème 955. — I.**

**2224 b.** *Quelle est l'enveloppe des côtés des triangles inscrits à une ellipse de centre* O, *et qui ont même centre de gravité* G. (I. M., 1910, p. 220, n° 3760.)

En considérant le cercle principal de l'ellipse, le point G' qui correspond à G, on reconnaît qu'une infinité de triangles inscrits au cercle ont même centre de gravité G′ (nº 1185 **b.**) Tous ces triangles ont les côtés tangents à l'*ellipse de Steiner* qui passe par les pieds des médianes, et G′ est le centre de la courbe.

De même pour les triangles inscrits dans l'ellipse (nºs 2222 et 2224). Le point G est le centre de l'ellipse enveloppe.

Car ces triangles, leurs médianes, l'ellipse enveloppe peuvent être considérés comme étant les projections orthogonales des triangles inscrits au cercle principal.

### Théorème 955. — II.

**2224 c.** *Il existe une infinité de triangles inscrits à une ellipse donnée* E, *qui ont pour orthocentre un même foyer* F *de la conique. L'enveloppe des trois côtés de ces triangles est une ellipse* G, *ayant l'orthocentre pour un de ses foyers, et dont le grand axe a la même direction que celui de l'ellipse donnée.*

Considérons un cône D de révolution ayant pour section l'ellipse donnée, et dont le sommet S se projette orthogonalement au foyer F. Admettons en outre que ce cône soit capable d'un angle trièdre inscrit trirectangle.

Ces conditions sont réalisables, car il suffit de résoudre le problème inverse : *Couper un cône capable d'un trièdre trirectangle, suivant une ellipse égale à l'ellipse donnée* E (nº 2212). On sait que la projection du sommet S sur la section est un des foyers de la conique (G., nº 855).

Quant au cône D circonscrit à un trièdre trirectangle, et au cône de révolution I inscrit dans ce même trièdre, il suffit de considérer un sommet du cube, la diagonale qui part de ce sommet est l'axe commun aux deux cônes; il est donc facile de calculer l'angle au sommet de chacun d'eux.

La projection orthogonale AF, BF, CF, des trois arêtes du trièdre trirectangle inscrit dans le cône D indique les trois hauteurs du triangle ABC inscrit à l'ellipse (*Exercices de Géométrie descriptive,* nº 462) ; or le foyer F en est l'orthocentre.

En faisant tourner le trièdre autour de l'axe du cône, on obtient une infinité de triangles distincts ayant même orthocentre que le premier.

L'enveloppe des côtés de ces triangles est évidemment la conique G suivant laquelle le cône I est coupé par la section qui a donné l'ellipse D; les deux courbes ont le point F pour foyer commun.

### Problème 956.

**2225.** *Dans un segment parabolique, inscrire le rectangle maximum. Le rectangle doit avoir deux sommets sur la courbe et les deux autres sur la corde.*

Soit donné le segment ABC.

La tangente menée parallèlement à la corde fait connaître l'extrémité A du diamètre AD mené par le milieu de la corde; d'ailleurs, il suffit de mener une parallèle quelconque EF à BC, et de joindre les milieux D et G.

Pour avoir le parallélogramme maximum EFIJ, et par suite le rectangle maximum EFMN, il faut mener une tangente HEL, telle que EH = EL (nº 360).

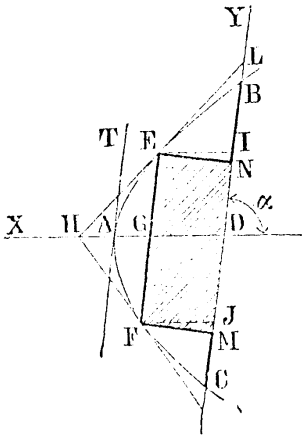


Fig. 1403.

Pour cela, on sait que AH = AG (nº 318); d'ailleurs GH = GD, car EH = EL; donc AG est le $^1/_3$ de AD; donc, pour avoir le rectangle maximum, il suffit de mener une corde EF parallèle à BC, en prenant le point G au premier $^1/_3$ de AD.

*Remarque.*

$$\text{BAC} = \frac{2}{3}\,\text{AD}\,.\,\text{BC}\sin\alpha\,;\quad \text{AG} = \frac{\text{AD}}{3},$$

donc

$$\text{EG}^2 \text{ ou } \text{ID}^2 = \frac{\text{DB}^2}{3};\quad \text{d'où}\quad \text{IJ} = \frac{\text{BC}}{\sqrt{3}}.$$

Le rectangle ou le parallélogramme maximum égale donc

$$\frac{2}{3}\,\text{AD} \times \frac{\text{BC}}{\sqrt{3}}\sin\alpha = \frac{2}{3\sqrt{3}}\,\text{AD}\,.\,\text{BC}\sin\alpha,$$

ainsi

$$\text{EFIJ} = \frac{\text{ABC}}{\sqrt{3}}.$$

**Problème 957.**

**2226.** *On donne une parabole et deux tangentes à cette courbe; mener une troisième tangente telle que le triangle formé par les trois droites soit maximum.*

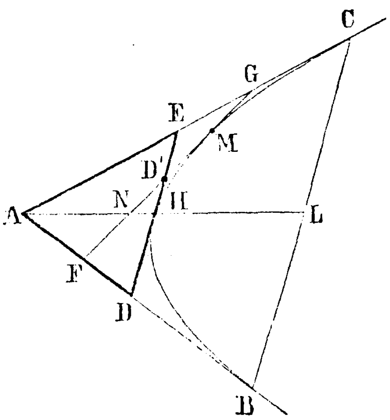


Fig. 1404.

1º Le triangle maximum est donné par la tangente DE, que le point de contact H divise en deux parties égales. Pour mener cette tangente, il suffit de joindre les points milieux D, E des côtés AB, AC.

Toute tangente FG est divisée en parties égales au point D' par la tangente DE parallèle à la corde des contacts; or le triangle ADE, dont la base DE est menée par le milieu de FG, est plus grand que AFG; donc ADE est le triangle maximum.

2º D'un exercice connu (nº 369), on peut conclure immédiatement que le triangle maximum est donné par la tangente DHE, que le point de contact divise en deux parties égales.

**Problème 958.**

**2227.** *Dans un segment parabolique* ABC, *limité par la corde* BC, *inscrire un trapèze* BCDE *qui ait* BC *pour grande base et dont la surface soit maxima.*

Le trapèze BEDC est équivalent au rectangle JEHC; dont il faut mener une tangente FEG, telle que E en soit le milieu (nº 318).

En désignant AM par $a$, MB par $b$, on trouve que

$$LE = \frac{b}{3}; \quad AL = \frac{a}{9};$$

d'où $\quad LM = \frac{8}{9}a; \quad JC = \frac{4}{3}b,$

donc surface BEDC,

ou $\quad JEHC = \frac{8a}{9} \cdot \frac{4b}{3} = \frac{32}{27}ab.$

Or le segment parabolique

$= {}^2/_3 BC \cdot AM = {}^4/_3 b \cdot a = {}^4/_3 ab.$

Ainsi, le trapèze maximum est les ${}^8/_9$ du segment parabolique.

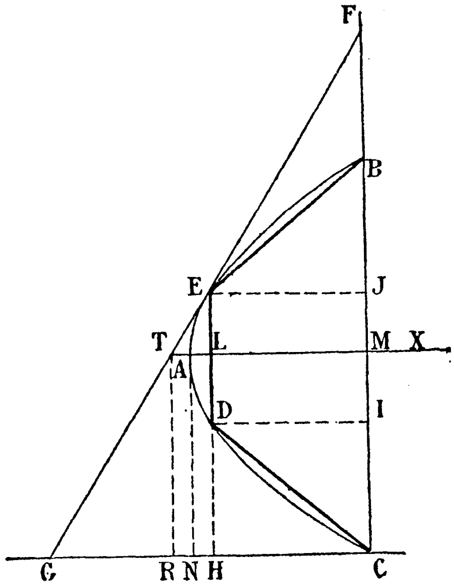


Fig. 1405.

*Remarque.* Quelle que soit la valeur de l'angle $\alpha$, que la corde BC peut former avec AM, la solution est la même; l'aire seule change : elle est exprimée par ${}^{32}/_{27}\, ab \sin \alpha$.

**Problème 959.**

**2228.** *Couper un cône droit par un plan, tel que le segment parabolique soit maximum.*

$$S = {}^4/_3 LP \cdot MP = {}^2/_3 LP \cdot MN.$$

Exprimons LP en fonction des lignes du cercle de base; on a :

$$\frac{LP}{AP} = \frac{g}{2r}; \quad \text{d'où} \quad LP = AP \cdot \frac{g}{2r} \qquad (1)$$

donc $\quad S = \frac{2}{3} AP \cdot \frac{g}{2r} \cdot MN.$

On peut écrire

$$S = \frac{2g}{3r} \cdot \frac{AP \cdot MN}{2}.$$

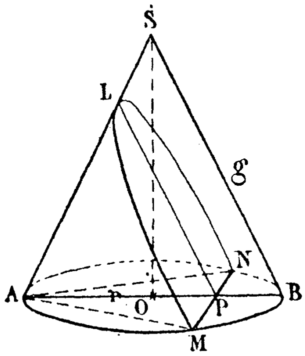


Fig. 1406.

Or $\frac{AP \cdot MN}{2}$ est l'aire du triangle inscrit AMN; les variations du segment parabolique ne dépendent que de cette variable; par suite, le maximum a lieu lorsque le triangle est maximum. On sait qu'il faut que le triangle AMN soit équilatéral; donc le maximum a lieu lorsque

$$AP = \frac{3r}{2}.$$

**2229.** *Valeur du maximum.* Le triangle équilatéral a pour aire, en fonction du rayon, $\quad A = \frac{3r^2}{4}\sqrt{3}, \qquad$ (G., nº 316, I)

donc $\quad S = \frac{2g}{3r} \cdot \frac{3r^2}{4}\sqrt{3} = \frac{gr\sqrt{3}}{2}.$

**Problème 960.**

**2230.** *Un solide est composé de deux cônes égaux ayant une base commune; couper ce solide par un plan parallèle aux génératrices* SB *et* AT, *de manière que la section soit maxima.*

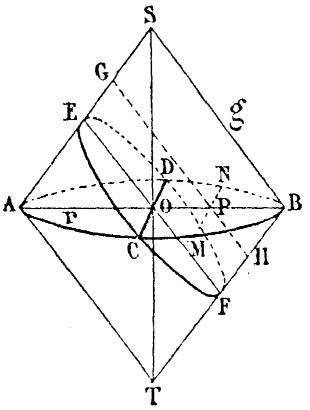


Fig. 1407.

La section se compose de deux segments paraboliques.

Si GH et MN sont les lignes principales de la section, on reconnaîtra comme précédemment que le segment parabolique MGN varie comme le triangle MAN, et que le segment MHN varie comme le triangle MBN; donc la section varie comme le quadrilatère AMBN; donc le maximum a lieu quand la section passe par le centre O, car le carré ABCD est le quadrilatère maximum.

**2231.** *Valeur du maximum.*

$$\mathrm{ECFD} = {}^2/_3\mathrm{CD} \,.\, \mathrm{EF} \qquad \mathrm{ECFD} = {}^2/_3 \,.\, 2r \,.\, g = {}^4/_3 gr.$$

**2232.** *Remarque.* 1° On peut arriver très rapidement à la détermination du maximum en procédant comme il suit :

La somme des aires paraboliques est donnée par ${}^2/_3$ GH . MN.

Or GH est une quantité constante, car $\mathrm{GH} = \mathrm{BS} = g$; donc la variation ne dépend que de MN. Ainsi le maximum a lieu lorsque la section est menée par le centre O, car alors la corde MN devient le diamètre COD.

2° On pourrait étudier la variation de diverses sections d'un octaèdre régulier, ou même de tout octaèdre, dont les trois diagonales AB, CD et ST se couperaient respectivement en parties égales.

**Problème 961.**

**2233.** *On donne une sphère, un grand cercle et un plan; mener un plan parallèle au plan donné, tel que le cylindre qu'on obtient en projetant la section sur le grand cercle fixe ait un volume maximum.*

(Voir *Méthodes*, n° 400 **a.**)

**Problème 962.**

**2234.** *Dans un segment à une base de paraboloïde de révolution, inscrire le cylindre de volume maximum.* (Voir *Méthodes*, n° 395.)

Le cylindre est la moitié du paraboloïde.

**Problème 963.**

**2235.** *Circonscrire au segment de paraboloïde le cône minimum.*

(Voir *Méthodes*, n° 396, 2°.)

Le cône est les ${}^9/_8$ du paraboloïde.

## Questions diverses.

### Théorème de Mannheim 964.

2236. *Soit* ABCD *un parallélogramme articulé : le sommet* A *est fixe, et les côtés* AB, AD *tournent autour de* A *d'angles égaux en sens contraire. Démontrer que le point* C *décrit une ellipse.* (*Mathesis*, 1892, p. 235.)

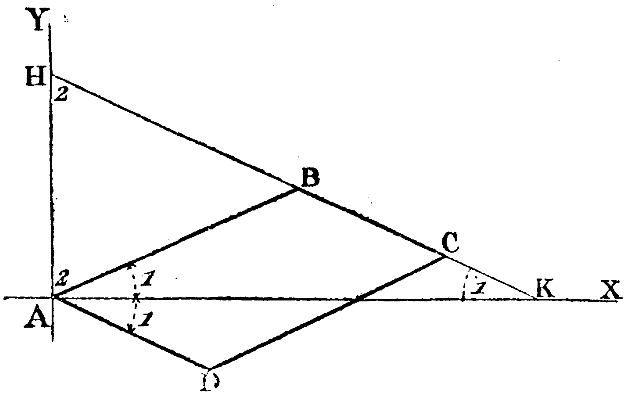


Fig. 1408.

Soient K et H les points où BC rencontre AX, bissectrice de BAD, et AY, bissectrice extérieure du même angle : les triangles ABK et ABH sont isocèles; donc AB = BK = BH.

Ainsi la droite HK a une longueur constante et se meut entre deux axes rectangulaires, donc le point fixe C de cette droite décrit une ellipse.

### Problème 965.

2237. *Construire un triangle* ABC, *connaissant la hauteur* AH, *la médiane* AM *et le rapport.*

$$\frac{AB - AC}{BC} = \frac{m}{n}.$$

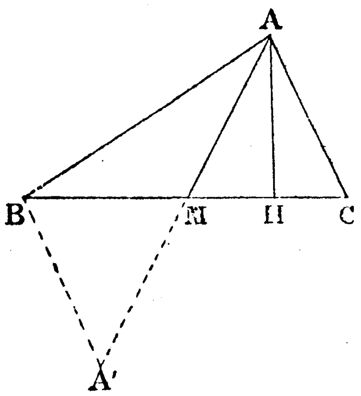


Fig. 1409.

Construisons le triangle AHM.

Des égalités

$$\frac{c-b}{a} = \frac{m}{n}, \quad c^2 - b^2 = a \cdot HM,$$

on conclut $c + b = \frac{n}{m}$ HM.

Si l'on prolonge AM de MA' = AM, la question est ramenée au problème connu : Trouver sur une droite donnée MH un point B dont la somme des distances aux points donnés A, A' soit égale à $\frac{n}{m}$ MH.

**Note**. La solution est de Van den Broeck (*Mathesis*, 1885, p. 19). Le recueil précité en indique plusieurs autres.

* Van den Broeck (1829-1887), professeur au pensionnat de Malonne, auteur de divers ouvrages estimés de mathématiques élémentaires. (*Mathesis*, p. 195, renvoi.)

### Théorème 966.

2238. *On mène deux tangentes à la parabole; les longueurs de ces lignes, depuis leur point commun jusqu'au point de contact, sont* *dans le même rapport que les segments que l'axe détermine sur ces tangentes.*

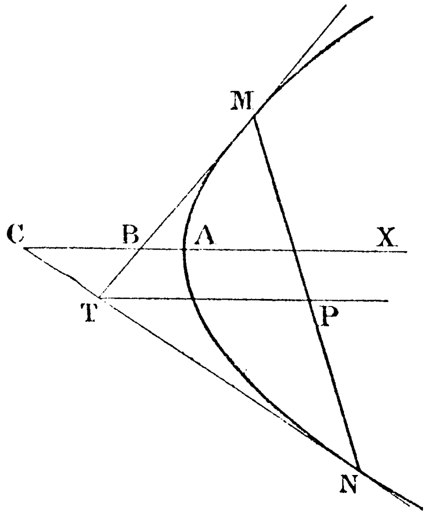



Fig. 1110.

On a $\frac{TB}{TC} = \frac{TM}{TN}$,

car l'axe AX est parallèle au diamètre TP; or toute parallèle ABC à la médiane TP d'un triangle MTN détermine sur les côtés correspondants des segments proportionnels à ces côtés (nº 1135 **b**). (G. DE LONGCHAMPS, *J. M. E.*, 1892, p. 22.)

* G. DE LONGCHAMPS, né à Alençon en 1842, mort à Paris en 1906. Directeur, de 1882 à 1898, du *J. M. E. et S.* de BOURGET. Il a signé plusieurs articles du nom d'Elgé. Auteur de l'*Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre,* ainsi que de nombreux ouvrages classiques.

**Théorème 967.**

**2239.** *Les parallèles menées par un point de l'ellipse de Steiner aux médianes d'un triangle, rencontrent les côtés opposés sur une droite.* (E. CESARO, *Mathesis*, 1893, p. 70.)

L'*ellipse de Steiner*, d'un triangle quelconque, correspond au cercle circonscrit d'un triangle équilatéral; en considérant cette dernière figure, le théorème est démontré, car les parallèles aux médianes du triangle équilatéral sont respectivement perpendiculaires aux côtés du triangle; donc les trois points sont sur la *droite de Simson* relative au point considéré.

La projection du triangle équilatéral et du cercle circonscrit de manière à reproduire le triangle donné et l'ellipse de Steiner, montre que les trois points de rencontre sont sur la projection de la droite de Simson du triangle équilatéral.

**Note.** Le théorème est de CESARO; comme seconde partie, il demandait l'enveloppe de la droite obtenue. La solution est de M. A. DROZ-FARNY. L'enveloppe de la *droite de Simson* d'un triangle est l'*hypocycloïde à trois rebroussements.* Cette courbe a été étudiée par divers auteurs, et notamment par L. PAINVIN (*N. A.*, 1870, p. 211 et 256), et par M. DE LONGCHAMPS (*J. M. S.*, 1884, p. 169). L'enveloppe de la droite du *théorème de Cesaro* est la projection orthogonale de l'hypocycloïde qui correspond au triangle équilatéral. (Pour CESARO, voir nº 2241 **a**.)

**Théorème 968.**

**2240.** *Lorsque deux triangles homothétiques ont même centre de gravité, les six points d'intersection des côtés de l'un d'eux avec les côtés de l'autre appartiennent à une ellipse semblable à l'ellipse de Steiner de chacun de ces triangles.*

La figure donnée peut être considérée comme étant la projection orthogonale de deux triangles équilatéraux homothétiques ayant même centre; les six points d'intersection du côté opposé appartiennent à une circonférence de même centre que les cercles circonscrits ; donc, en projection, on obtiendra une ellipse homothétique à celles de STEINER et de même centre G que ces dernières.

### Théorème 969.

**2241.** *L'aire de l'ellipse de Steiner est à celle du triangle inscrit qui lui correspond, dans le rapport de $4\pi$ à $3\sqrt{3}$.*

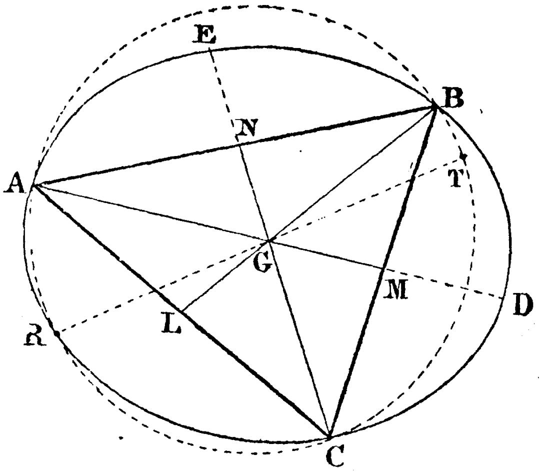


Fig. 1411.

L'ellipse et le triangle peuvent être considérés comme étant la projection orthogonale d'un cercle et d'un triangle équilatéral inscrit; or les figures obtenues par projection sont entre elles dans le même rapport que les figures situées dans un même plan, et que l'on a projetées : ainsi $GM = MD$, comme dans le triangle équilatéral et le cercle circonscrit; pour les aires, on a de même :

$$\frac{\text{ellipse}}{ABC} = \frac{\text{cercle circonscrit}}{\text{triangle équilatéral}}.$$

Or la surface du triangle équilatéral, en fonction de la hauteur, est

donnée par $$T = \frac{h^2\sqrt{3}}{3},$$

d'ailleurs $$h = \frac{3}{2}R, \quad \text{donc} \quad T = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.$$

par suite, $$\frac{\text{ellipse}}{ABC} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

**2241 a. Note.** L'ellipse circonscrite au triangle rencontre le cercle circonscrit en un quatrième point R. Ce point a été nommé *point de Steiner*, parce que ce savant en a fait connaître diverses propriétés; puis il a été étudié par M. TARRY, qui a fait aussi connaître les propriétés du point T, appelé maintenant *point de Tarry*, et qui se trouve diamétralement opposé à celui de STEINER.

Pour ce dernier point, on peut consulter la belle étude analytique que M. NEUBERG en a faite (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1886, page 6 et suivantes; puis la construction indiquée par M. DE LONGCHAMPS, 1886, page 129; enfin 1888, page 242, nº 69).

Les points de STEINER et de TARRY, ainsi que l'*hyperbole de Kiepert*, ont été l'objet de nombreuses études; on peut voir, à ce sujet, un article déjà cité de CESARO (*N. A.*, 1887, p. 215).

' CESARO Ernest, né à Naples en 1859, mort à Torre Annunziato en 1906, professeur à l'Université de Naples. (Voir notice par C. ALASIA, dans l'*Enseignement mathématique*, 1907, p. 5.)

**Théorème de Steiner 970.**

**2242.** *Le lieu des points de vue tels que la perspective d'une circonférence C, sur un plan perpendiculaire à celui de C, soit une autre circonférence, est l'hyperboloïde équilatère de révolution à une nappe, dont C est la circonférence de gorge.*

Soit V un des points de vue, situé dans un plan perpendiculaire au plan du cercle C et mené par son centre, AB étant le diamètre du cercle donné.

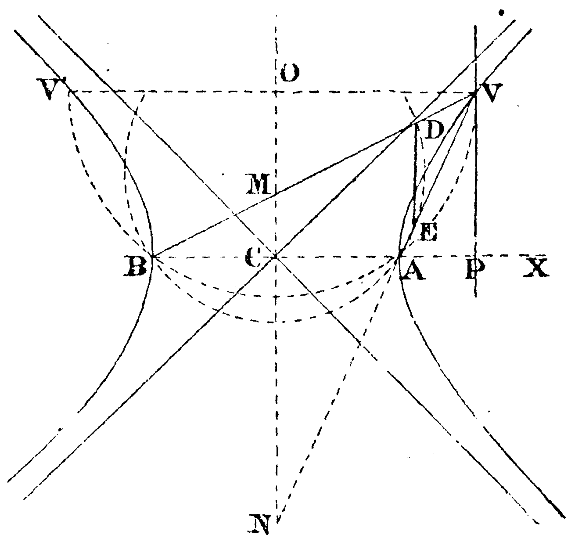


Fig. 1112.

Il suffit de démontrer que sur le plan principal le lieu des points V est l'hyperbole équilatère dont AB est l'axe transverse.

Or sur la corde VOV' décrivons une circonférence, elle passe par les sommets A et B, car l'équation de la courbe

$$x^2 - y^2 = a^2$$

donne $\quad x^2 = a^2 + y^2$

donc $\quad \mathrm{OA} = \mathrm{OV}.$

Pour avoir la direction des sections circulaires antiparallèles du cône, dont V est le sommet et AB le diamètre de la circonférence de base, il suffit de mener des plans perpendiculaires au plan principal ABV et parallèles à la tangente VP ; or cette ligne est perpendiculaire à OV, à CX ; donc toute section DE perpendiculaire à AB donne un cercle pour perspective du cercle C. — Sur le plan de profil mené par le centre du cercle donné, on aurait pour perspective un cercle ayant MN pour diamètre.

## Note sur la conique sphérique.

**2243.** *Historique.* En étudiant le lieu du sommet d'un triangle sphérique à base donnée, et dont la somme des deux autres côtés est constante, Fuss nomma *ellipse sphérique* la courbe à double courbure qu'on obtient, et dont le théorème qui porte son nom (nº 149) n'est qu'un cas particulier; plus tard, en 1825, Magnus, de Berlin, publia dans les *Annales de Gergonne* (tome XVI, 1825-1826, page 33) une étude remarquable sur la courbe d'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré dont le sommet est au centre de la sphère. Il indiqua les principales propriétés de l'*ellipse sphérique* qu'il identifia à l'*hyperbole sphérique*.

En 1829-1830, les *Annales de Gergonne* (tome XX, page 129), sous les initiales M. G. P., donnèrent un article très intéressant sur la même question.

Les *Nouvelles Annales Mathématiques* (1858-1859) ont donné une étude trigonométrique très complète de la *conique sphérique*. Dans cet important travail, dû à VANNSON, alors professeur au lycée de Versailles, on parle de la *parabole sphérique*, qui n'était pas mentionnée dans les précédents articles des *Annales de Gergonne*. Nous allons résumer les études précédentes, en les complétant par une remarque peut-être nouvelle.

*Cône du second degré.* Il n'y a qu'un seul cône du second degré, soit qu'on prenne pour directrice une ellipse, une parabole, une hyperbole; d'ailleurs, il suffit de se rappeler que ces trois coniques peuvent être obtenues par la section d'un même cône.

En prenant trois droites rectangulaires OX, OY, OZ pour axes coordonnées, plaçant le sommet du cône à l'origine, prenant les plans XOZ, YOZ pour plans principaux de la surface conique, le cône a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (1)$$

Admettons que $a$ soit $> b$; toute section parallèle à XOY donne une ellipse dont le grand axe est parallèle à OX et le petit axe à OY. Les

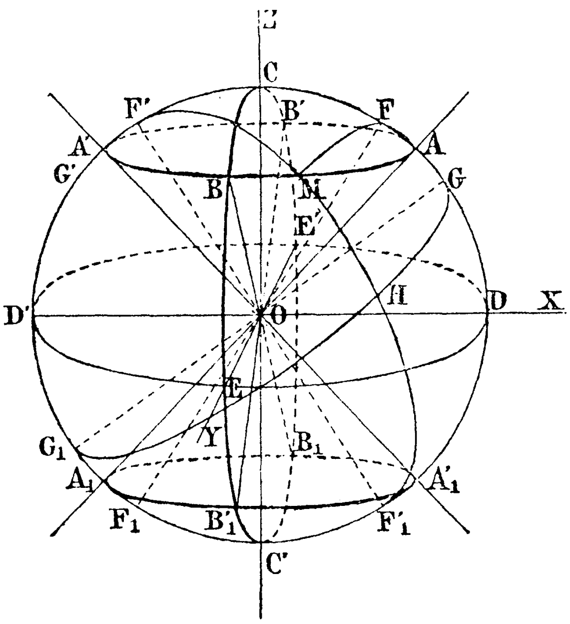



Fig. 1113.

génératrices extrêmes du cône, OA, OA', sont sur le plan XOZ, également inclinées sur OZ. Les génératrices OB, OB' les plus rapprochées d'une même section diamétrale du cône, sont dans le plan YOZ. Nous désignerons par $2\alpha$ l'angle AOA', et par $2\beta$ l'angle BOB'.

*Lignes focales.* Le cône de second degré O, ABA'B' a deux lignes focales OF, OF' dans le plan principal AOA'; ces lignes ont pour équation

$$x\sqrt{b^2 + c^2} \pm z\sqrt{a^2 - b^2} = 0, \qquad (2)$$

On peut énoncer le *Théorème de Magnus :* Dans un cône du second degré, pour une génératrice quelconque OM, la somme des angles MOF, MOF' est constante; elle égale l'angle AOA' des génératrices extrêmes.

L'auteur M. G. P. du second article des *Annales de Gergonne* (tome XX, page 129) cherche le lieu géométrique des droites OM, dont la somme des angles avec deux droites données OF, OF' est constante. Il trouve un cône du second degré O, ABA'B'. C'est la vérification du *Théorème de Magnus.*

*Conique sphérique.* La conique sphérique est la courbe d'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré ayant son sommet au centre de la sphère.

Cette intersection se compose de deux parties égales : ABA'B', $A_1B_1A'_1B'_1$; elles admettent trois plans de symétrie; six centres, ou mieux trois diamètres centraux, situés sur les axes des coordonnées; tout grand cercle mené par un de ces diamètres, CC' par exemple, ou DD', divise la courbe en deux parties égales.

La courbe complète a quatre foyers; la somme des arcs de grand cercle MF, MF' est constante, elle égale le grand axe ACA', ainsi AMBA'B' est une *ellipse sphérique,* ainsi que Fuss avait nommé le lieu du sommet M d'un triangle sphérique dont la base FCF' est donnée et dont la somme des deux autres côtés MF, MF' est constante. De même pour $A_1B_1A'_1B'_1$.

La conique peut être appelée aussi *hyperbole sphérique,* car en considérant les deux parties de la courbe et les foyers correspondants F, $F'_1$, elle est le lieu des points M dont la différence des distances sphériques $MF'_1$, MF est constante; cette différence égale $ADA'_1$,

*Parabole sphérique.* Dans le cas particulier, où le grand axe ACA' égale un quadrant, c'est-à-dire lorsque $2\alpha$ égale un angle droit, l'intersection est aussi une courbe dont les points M sont équidistants d'un point F et du grand cercle $GHG_1$, mené perpendiculairement à $F'F'_1$, car F'MH, un quadrant, égale ACA'; donc $MH = MF$.

La parabole a pour directrices : les deux circonférences des grands cercles obtenus en prenant $AG = AF$, $A'G' = A'F'$.

*Remarque.* Diverses considérations conduisent à dire que la *conique sphérique* est le lieu des points M dont le rapport $m$ des distances à un point fixe F et à un grand cercle $GHG_1$ est constant.

Pour $m < 1$ l'angle du cône $2\alpha$ est moindre qu'un droit; ACA' est moindre qu'un quadrant. La courbe a la propriété caractéristique de l'ellipse plane par rapport à sa directrice.

Pour $m = 1$, l'angle $2\alpha$ est droit, on a la *parabole sphérique.*

Pour $m > 1$, l'angle $2\alpha$ est $>$ qu'un droit; la courbe a la propriété de l'hyperbole plane par rapport à ses directrices.

*Les propriétés focales sont identiques pour les trois cas :* Ainsi le *grand cercle* tangent à la courbe fait des angles égaux avec les arcs vecteurs du point de contact; la normale à la conique est la bissectrice de l'angle de ces mêmes arcs. Le lieu des projections des foyers sur les grands cercles tangents est le cercle principal décrit sur le diamètre AA', etc.; le lieu des points symétriques des foyers par rapport aux mêmes grands cercles tangents est un cercle qu'on peut appeler *Cercle directeur* de l'ellipse et de l'hyperbole; pour la parabole, le cercle directeur se confond avec la circonférence directrice.

Il est toujours question de distances sphériques mesurées par des arcs de grand cercle, mais le *cercle principal* décrit sur le diamètre AA' est un parallèle de la sphère; les *Cercles directeurs*, lorsque $2\alpha$ diffère de 90°, sont aussi des petits cercles de la sphère.

*Discussion.* Lorsque $\beta$ est nul, la conique est réduite à son grand axe ACA′; les foyers sont aux extrémités A et A′.

Pour $\beta < \alpha$, la courbe est disposée comme il a été dit dans cette étude : le grand axe ACA′ est dans le plan XOZ; le petit axe BCB′, dans le plan YOZ.

Pour $\beta = \alpha$, le cône est de révolution, l'intersection se compose de deux cercles égaux et parallèles; leur ensemble a les propriétés focales de l'ellipse et de l'hyperbole; pour chaque partie, les deux foyers intérieurs coïncident avec les centres C et C′. Dans ce cas particulier, on constate facilement que l'intersection est le lieu des points dont le rapport des distances à un point C et à un grand cercle DD′ est constant.

*Projections de la conique sphérique.* Le cône du second degré et la sphère ayant mêmes plans principaux, leur intersection se projette sur XOY suivant une ellipse, sur XOZ suivant deux arcs d'une même ellipse ayant O pour centre, les projections de B et $B'_1$ sont les extrémités du petit axe, tandis que A, A′, $A_1$, $A'_1$ sont les points d'arrêts géométriques de la partie réelle de l'ellipse obtenue; enfin sur YOZ l'*ellipse conique* se projette suivant deux arcs d'hyperbole; les projections de A et A′ sont superposées et constituent un des sommets de la courbe; les projections de B et de B′ sont sur le contour apparent de la sphère, de même pour $B_1$ et $B'_1$.

*Cylindre elliptique.* La projection elliptique sur XOY de la conique sphérique conduit à dire qu'un cylindre droit ayant cette projection pour directrice couperait la sphère suivant la même courbe ABA′B′, $A_1B_1A'_1B'_1$; mais les foyers de la courbe sphérique ne correspondent point à ceux de la section droite du cylindre.

On peut faire des remarques analogues pour les deux autres projections.

Par la même conique sphérique, on pourrait faire passer un ellipsoïde ou un hyperboloïde.

L'intersection de la sphère par l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (3)$$

a été étudiée par MAGNUS, et il a obtenu le cône comme cas particulier, ayant les mêmes lignes focales que l'hyperboloïde.

# PROBLÈMES NUMÉRIQUES

## Indications générales.

2244. Les *problèmes numériques*, en Géométrie, ne sont le plus souvent que de simples applications du calcul à des formules connues.

Dans un problème numérique, on distingue : 1° la *solution* ou l'ensemble des considérations par lesquelles on trouve les opérations à effectuer ; 2° le *calcul* des opérations.

**Degré d'exactitude.** 1° *Si les données sont des nombres exacts*, le résultat peut être obtenu avec tel degré d'approximation que l'on voudra.

2° *Si les données contiennent un nombre approximatif* qui n'ait que 3, 4... chiffres exacts, le résultat ne peut être donné qu'avec ce même nombre de chiffres.

D'après ces considérations, on fait choix du mode de calcul : calcul complet, calcul approché, calcul par logarithmes, soit avec les *petites tables*, soit avec les *grandes tables*, selon les cas.

**Observations principales.** Il convient de tenir compte des observations suivantes :

1° Disposer les calculs avec beaucoup d'ordre*.

2° Employer les logarithmes dès que les multiplications et les divisions deviennent nombreuses, et surtout lorsqu'il y a des racines à extraire.

3° Transformer les formules, afin d'obtenir l'expression de la valeur de l'inconnue en fonction des données, au lieu de faire dépendre une suite d'opérations d'un calcul approximatif qu'on aurait fait au début.

Voici quelques exemples :

### Problème.

2245. *Pour un diamètre de 1 mètre, quelles seraient les valeurs de la circonférence, de l'aire du cercle, de l'aire et du volume de la sphère?* On demande huit décimales.

| | | |
|---|---|---|
| 1° Circonférence | $\pi d =$ | $\pi = 3^{m}\ 14159265$, |
| 2° Cercle | $\frac{1}{4}\pi d^2 =$ | $\frac{1}{4}\pi = 0^{m^2}\ 78539816$, |
| 3° Surface de la sphère 4 . $\frac{1}{4}\pi d^2 =$ | | $\pi = 3^{m^2}\ 14159265$, |
| 4° Volume de la sphère | $\frac{1}{6}\pi d^3 =$ | $\frac{1}{6}\pi = 0^{m^3}\ 52359878$. |

* On peut tirer un bon parti de la *Table des nombres usuels*. (G., p. 354.)

**Problème.**

**2246.** *La rotonde du panorama des Champs-Élysées, à Paris, avait 55 mètres de diamètre. Quelle était la surface occupée par cet édifice?*

On a recours à la formule $\pi r^2$, ou mieux à la formule $^1/_4\pi d^2$.

| | | |
|---|---|---|
| Log. $^1/_4$ ou 0,25. . | $\bar{1}$,39794 | |
| Log. $\pi$. . . . . . | 0,49715 | |
| Log. 55 . . . . | 1,74036 | |
| » . . . . | 1,74036 | |
| | 3,37581 | correspond à $2375^{m^2}80$. |

Soit 23 ares 75 80.

**Problème.**

**2247.** *Calculer le diamètre d'un boulet de fonte de* 12 *hectogrammes, la densité de la fonte étant* 7,207.

Prenons pour unités correspondantes le décimètre et le kilogramme.

Soient $x$ le diamètre demandé, $d$ la densité, $p$ le poids. Le volume est donné par la formule $v = {}^1/_6\pi x^3$ (G., n° 573.)

On sait que le poids égale le volume multiplié par le densité ; donc

$$^1/_6\pi x^3 \,.\, d = p\,;$$

d'où

$$x^3 = \frac{p}{^1/_6\pi d}.$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log. $p$. . . . . . . . . . . | | 0,07918 | Numérateur. |
| Log. $^1/_6\pi$ . . . . . | $\bar{1}$,71900 | 0,57675 | Dénominateur. |
| Log. $d$. . . . . . | 0,85775 | | |
| Différence . . . . . . . . . | | $\bar{1}$,50242 | |
| $^1/_3$ de la différence . . . . . | | $\bar{1}$,83414 | correspond à 0,6825. |

Soit $0^{dm}6825$.

**Problème.**

**2248.** *Quelle est la surface d'une zone sphérique de* 3 *décimètres de hauteur, lorsque cette zone appartient à une sphère dont le volume égale* $500^{dm^3}$? *On demande la surface à* 1 *centimètre carré près.*

Soit $r$ le rayon et $v$ le volume de la sphère.

La zone est donnée par la formule

$$\text{zone} = 2\pi rh \qquad \text{(G., n° 557.)}$$

Le rayon dépend de la relation

$$\text{volume} = {}^4/_3\pi r^3\,;$$

d'où

$$r^3 = \frac{3v}{4\pi}\,; \quad r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}\,,$$

$$\text{zone} = 2\pi rh = 2\pi h\sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}\,. \qquad (1)$$

**Calcul.** 3 fois 500 = 1500; 4 fois 3,1416 = 12,5664.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log. 1500 . . . . . . . . | 3,17609 | | |
| Log. 12,5664 . . . . . . . | 1,09921 | | |
| Différence . . . . . . . . | 2,07688 | | |
| $^1/_3$ de la différence . . . . | 0,69229 | Ainsi log. $r = 0,69229$ | |
| Log. $h$ ou 3. . . . . . . . . . . . . . . . | | | 0,47712 |
| Log. $2\pi$ . . . . . . . . . . . . . . . . | | | 0,79823 |
| | | | 1,96764 |

Soit $92^{dm^2}82$.

*Remarques.* 1° La formule (1) donne un calcul facile; on pourrait néanmoins modifier cette formule avec quelque avantage.

En multipliant les deux termes de la fraction sous le radical par $2\pi^2$, le dénominateur devient un cube parfait, et l'on a successivement :

$$2\pi h \sqrt[3]{\frac{6v\pi^2}{8\pi^3}} = \frac{2\pi h}{2\pi} \sqrt[3]{6v\pi^2},$$

$$\text{zone} = h\sqrt[3]{6v\pi^2}.$$

| | | |
|---|---|---|
| Log. $6 \times 500$ ou 3000. . . . | 3,47712 | |
| Log. $\pi$ . . . . . . . . . | 0,49715 | |
| » . . . . . . . . . | 0,49715 | |
| | 4,47142 | |
| $^1/_3$ . . . . . . . . . . . | 1,49047. . . . | 1,49047 |
| Log. 3. . . . . . . . . . . . . | | 0,47712 |
| $92^{dm^2}81$. | | 1,96759 |

La première valeur obtenue est approchée par excès et la seconde par défaut.

2° Le calcul direct du rayon, si l'on se bornait au centimètre, conduirait à une réponse beaucoup trop faible. Ainsi on trouverait :

$$r = 4^{dm}9\,; \quad 2\pi rh = 92^{dm^2}36.$$

En prenant même quatre chiffres pour le rayon; ou $r = 4^{dm}923$, on ne trouve que $92^{dm^2}7965$.

### Subdivision d'un problème.

Dans les applications, les problèmes numériques se rapportent parfois à plusieurs figures géométriques; chaque problème donné se subdivise alors en plusieurs autres, auxquels on applique directement les formules connues.

### Problème.

**2249.** *La section droite d'une chaudière a* $3^{m}142$ *de circonférence extérieure; la partie cylindrique a* $3^{m}$ *de longueur; l'épaisseur de la tôle est de* $0^{m}0015$; *la chaudière se termine par deux hémisphères de même rayon que la partie cylindrique. On demande la capacité de la chaudière et son poids, la densité du fer étant* 7,79. (Aix, brevet 1re série, 1877.)

La circonférence extérieure étant exprimée par la valeur approximative de $\pi$ ou 3,142, le diamètre total est de 1 mètre; le diamètre intérieur égale 1 mètre moins deux fois $0^{m}0015$; soit $1^{m} - 0,003$ ou $0^{m}997$.

Le volume intérieur se compose d'un cylindre ayant $0^{m}997$ de diamètre et $3^{m}$ de longueur, et d'une sphère ayant $0^{m}997$ de diamètre. Le volume extérieur se compose aussi d'un *cylindre* et d'une *sphère*.

*Volume total.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Cylindre $^1/_4\pi 1^2 . 3$ | ou $^3/_4\pi$ | ou $^9/_{12}\pi$ |
| Sphère $^1/_6\pi 1^3$ | ou $^1/_6\pi$ | ou $^2/_{12}\pi$ |
| Volume total | | $^{11}/_{12}\pi$ |

*Calcul.*

| | | |
|---|---|---|
| $\pi$. . . . . . . | 3,1416 | |
| Le 12e . . . . | 0,2618 | |
| Différence. . . | 2,8798 | Volume total $2^{m^3}8798$ |

*Volume intérieur ou capacité.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cylindre $^1/_4\pi d^2h$ | ou | $^3/_{12}\pi d^2h$ | ou | $^1/_{12}\pi d^2 . 3h$ | ou | $^1/_{12}\pi d^2 . 9$ |
| Sphère $^1/_6\pi d^3$ | ou | $^2/_{12}\pi d^2d$ | ou | $^1/_{12}\pi d^2 . 2d$ | ou | $^1/_{12}\pi d^2 . 1,994$ |
| Capacité totale . . . . . . . . . . . . . | | | | | | $^1/_{12}\pi d^2 . 10,994$ |

*Calcul.*

| | | |
|---|---|---|
| Log. $^1/_{12}\pi$ ou 0,2618 . . | $\bar{1},41797$ | |
| Log. $d$ ou 0,997 . . . . | $\bar{1},99870$ | |
| » . . . . . . . . . . | $\bar{1},99870$ | |
| Log. 10,944 . . . . . . . . | 1,04116 | |
| Somme . . . . . . . . . | 0,45653 | Soit $2^{m^3}8611$ de capacité |

*Volume de la tôle.*

| | |
|---|---|
| Volume total . . . . . . . . . . . | 2,8798 |
| Volume intérieur . . . . . . . . . | 2,8611 |
| Volume de la tôle . . . . . . . . . . | 0,0187 |

Soit $18^{dm^3}700$.

**Problème.**

**2250.** *Un corps se compose d'un cylindre terminé à chaque extrémité par un cône dont la base a le même diamètre que le cylindre. Ces deux cônes sont égaux entre eux, et le côté de chacun d'eux est égal au diamètre de sa base ; enfin la hauteur du cylindre est double de son diamètre.*

*On suppose que la surface latérale de ce corps soit égale à 28 mètres carrés, et on demande de calculer le diamètre du cylindre.*

*Le résultat s'obtenant par l'extraction d'une racine carrée, on extraira cette racine à un centième près, et l'on justifiera la règle que l'on aura employée.*

*On calculera aussi le volume du corps donné.* (Brevet supérieur.)

Soit $d$ le diamètre inconnu. La moitié du corps se compose d'un cylindre ayant $d$ pour diamètre, AD ou $d$ pour hauteur, et d'un cône dont la génératrice $AE = AB = d$.

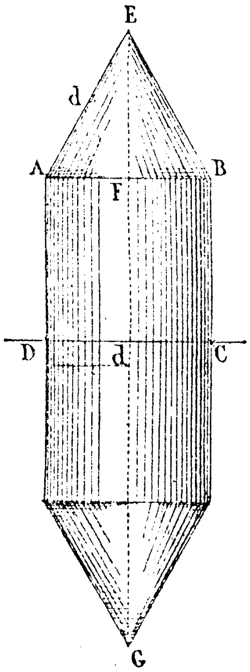


Fig. 1414.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Surf. du cylindre} = 2\pi AF \,.\, AD = \pi d^2 \\ \text{Surf. du cône} \quad = \pi AF \,.\, AE = \dfrac{\pi d^2}{2}\end{array}\right\} {}^3/_2 \pi d^2$$

$$\text{Double de la somme} \quad 3\pi d^2 = 28^{m^2} \qquad (1)$$

$$d^2 = \frac{28}{3\pi}; \quad d = 1{,}72.$$

En nous bornant à la question géométrique, il reste à calculer le volume du corps.

La hauteur EF du triangle équilatéral est donnée par

$$EF = \frac{AB}{2}\sqrt{3}; \quad \text{ou} \quad EF = \frac{d}{2}\sqrt{3} = 0{,}86\sqrt{3}.$$

$$\text{Volume du cylindre ABCD} = \pi AF^2 \,.\, d = {}^1/_4 \pi d^3.$$

$$\text{Volume du cône AEB} = \pi AF^2 \,.\, \frac{EF}{3} = \frac{1}{4}\pi d^2 \,.\, \frac{d}{6}\sqrt{3}.$$

Le double de la somme, c'est-à-dire le volume total

$$V = \frac{1}{2}\pi d^3\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

$$V = \pi d^3\left(\frac{6+\sqrt{3}}{12}\right).$$

Or $$\frac{6+\sqrt{3}}{12} \quad \text{ou} \quad \frac{7{,}732}{12} = 0{,}644$$

à un millième près par défaut.

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } \pi \ldots & = 0{,}49715 \\ 3 \text{ fois log. } 1{,}72 & = 0{,}70659 \\ \text{Log. } 0{,}644 \ldots & = \bar{1}{,}80889 \\ \hline & \phantom{=}\ 1{,}01263 \quad \text{correspond à } 10{,}29 \end{array}$$

$$V = 10^{m^3}29.$$

*Remarque.* D'après l'énoncé, il fallait d'abord calculer le diamètre à un centième près. On était donc conduit à se servir de la valeur obtenue $d$, pour calculer le volume du corps; mais, afin d'avoir le volume avec une certaine approximation, il eût fallu calculer $d$ avec un plus grand nombre de décimales, ou, ce qui eût encore été plus exact, exprimer le volume en fonction de la surface donnée.

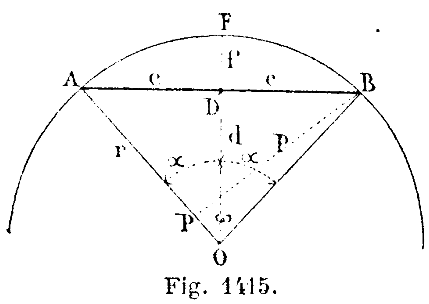


Fig. 1415.

**Segment circulaire.**

**2251. Aire du segment.** Pour obtenir l'aire d'un segment circulaire AFB, il faut calculer l'aire du secteur AOBF et en retrancher l'aire du triangle AOB.

*Remarques.* 1° Les éléments de géométrie permettent de calculer l'aire des segments circulaires ayant pour corde le côté d'un polygone régulier que l'on sait inscrire, en n'employant que la règle et le compas, car pour ces polygones on peut exprimer la corde AB, l'apothème OD en fonction du rayon, et l'on connaît l'angle au centre AOB (nos 1752 à 1755).

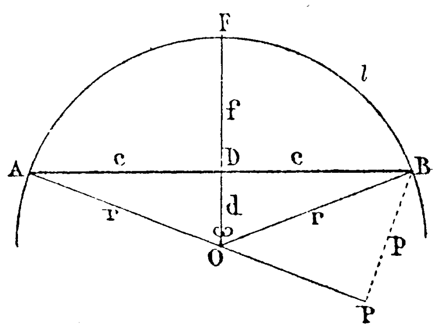


Fig. 1416.

Dans tous les autres cas, il faut recourir à la trigonométrie, afin de déterminer certains éléments.

2° Nous conviendrons de représenter la corde AB par $2c$, la distance OD par $d$, la flèche DF par $f$, le rayon par $r$, la perpendiculaire BP, abaissée sur AO, par $p$, et la longueur de l'arc AFB par $l$, puis le demi-angle au centre par $\alpha$, et l'angle entier par $\omega$.

**2232.** *Données.* Pour obtenir l'aire du segment, il faut connaître le rayon $r$ et l'angle au centre $\omega$, ou $2\alpha$ ; mais le segment est déterminé de grandeur, lorsqu'on donne deux quelconques des six quantités suivantes :

$$r,\ \omega,\ 2c,\ d,\ f,\ l.$$

*Formules principales.* On sait que dans le triangle rectangle AOD, dont l'angle $\text{AOD} = \alpha$, on a :

$$c = r \sin \alpha \qquad (1) \qquad\qquad d = r \cos \alpha \qquad (2)$$

$$r = \frac{c}{\sin \alpha} \qquad (3) \qquad\qquad r = \sqrt{c^2 + d^2} \qquad (4)$$

$$\sin \alpha = \frac{c}{r} \qquad (5) \qquad\qquad \text{tang}\,.\,\alpha = \frac{c}{d}. \qquad (6)$$

Quel que soit l'angle $\omega$, aigu ou obtus, le triangle rectangle BOP donne la relation $\qquad p = r \sin \omega.$

On sait aussi que la longueur $l$ d'un arc AFB, ayant $\omega$ pour angle au centre, est donnée par

$$l = \pi r \,.\, \frac{\omega}{180}\,; \qquad (8)$$

d'où

$$r = \frac{l}{\pi} \,.\, \frac{180}{\omega}\,; \qquad (9)$$

et

$$\omega = 180 \frac{l}{\pi r}. \qquad (10)$$

*Aire du secteur.* L'aire du secteur s'obtient en multipliant la surface du cercle par le rapport $\frac{\omega}{360}$, ou en multipliant la longueur de l'arc par la moitié du rayon.

$$\text{Secteur} = \pi r^2 \,.\, \frac{\omega}{360} \quad \text{ou} \quad \frac{lr}{2}.$$

*Aire du triangle.* On peut abaisser la perpendiculaire OD ou la perpendiculaire BP.

$$\text{Triangle AOB} = cd \quad \text{ou} \quad \frac{rp}{2}.$$

**2253. Formules du segment.** On peut écrire :

$$\text{segment} = \pi r^2 \cdot \frac{\omega}{360} - cd, \tag{11}$$

ou

$$\frac{lr}{2} - \frac{rp}{2} = \frac{(l-p)r}{2}. \tag{12}$$

En remplaçant $l$ et $p$ par leur valeur en fonction de $\omega$, la formule (12) devient :

$$\text{segment} = \frac{r}{2}\left(\pi r \cdot \frac{\omega}{180} - r \sin \omega\right) = \frac{r^2}{2}\left(\pi \cdot \frac{\omega}{180} - \sin \omega\right) \tag{13}$$

D'ailleurs

$$\frac{\pi}{180} = 0{,}01745,$$

donc

$$\text{segment} = \frac{r^2}{2}(0{,}01745 \cdot \omega - \sin \omega).$$

Cette formule permet de calculer rapidement l'aire du segment circulaire. On doit se rappeler que $\omega$ est exprimé en degrés, et qu'on doit prendre le *sinus naturel* de $\omega$, et non le logarithme de ce sinus. On peut recourir à la petite table placée à la fin des *Éléments de Géométrie*.

*Remarque*. On peut voir l'étude suivante : *Calcul d'un segment circulaire dont on connaît la corde et la flèche*, par M. A. Aubry. (*J. M. S.*, 1893, p. 184 et 198 : *Rectification de l'arc* et *Surface du segment*. L'auteur donne diverses formules dues à Huyghens, Snellius, Newton.)

### Problème.

**2253 a.** *Dans le cercle qui a* 12m50 *de rayon, quelle est la surface du segment qui correspond à un angle au centre de* 35° ?

$$0{,}01745 \times 35 = 0{,}61075$$
$$\sin 35^\circ = 0{,}574$$
$$\text{différence} = 0{,}03675$$
$$\frac{r^2}{2} = \frac{12{,}5 \times 12{,}5}{2} = 78{,}125$$
$$\text{segment} = 78{,}125 \times 0{,}03675 = 2^{m^2}871.$$

### Volume des tonneaux.

**2254.** Au paragraphe de même nom des *Éléments de Géométrie* (nos 1000, 1003) ajoutons les deux formules données par le *Cosmos* du 29 mars, 1902 p. 414.

D. Diamètre intérieur, au centre, le *bouge*.

**d**. Diamètre intérieur des fonds, le *jable*.

H. Longueur intérieure entre les fonds.

*Octroi de Paris*. $V = 0{,}78544 \times H\,(0{,}44\,\mathbf{d} + 0{,}56\,D)^2$.

*Formule moyenne*. $V = 0{,}031416 \times H(3D + 2\mathbf{d})^2$.

La première revient à $\pi H(0{,}22\mathbf{d} + 0{,}28D)^2$.

La seconde revient $\pi H(0{,}20\mathbf{d} + 0{,}30D)^2$.

**Métrés.**

**2255.** Les métrés des ouvrages d'art, tels que ponts, aqueducs, etc., exigent de nombreux calculs, et présentent des cas fort variés; d'après les données, on calcule les lignes nécessaires pour évaluer les surfaces et les volumes.

Voici un exemple pris dans les cas que l'on rencontre le plus fréquemment :

**Problème.** *Evaluer la surface de maçonnerie de la section droite d'un ponceau à plein cintre, d'après les cotes données au croquis ci-contre.*

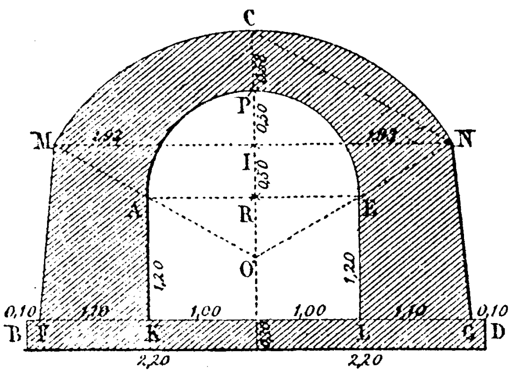



Fig. 1417.

L'*intrados* a pour section une demi-circonférence de 1 mètre de rayon, et la hauteur des pieds droits est de $1^m,20$; l'*extrados* n'est point parallèle à l'intrados (G., n° 1006); sa section est un arc dont on calculera le rayon et la longueur. En appelant $x$ la partie du diamètre qui est au-dessous de la corde MN, on a : $x \cdot IC = IN^2$;

d'où $$x = \frac{IN^2}{IC} = \frac{3,72}{1,08} = 3^m44$$

$$\text{diamètre} = 3,44 + 1,08 \quad \text{ou} \quad 4^m52 \quad \text{rayon } OC = 2^m26$$

$$OI = OC - IC = 2,26 - 1,08 = 1^m18$$

$$\text{tg N} = \frac{IC}{IN} = \frac{1,08}{1,93} \ldots = \text{tg } {}^1\!/_2 CM$$

Log. 1,08. . . . 0,03342

Log. 1,93. . . . 0,28556

Différence . . . $\bar{1}$,74786. . . . $29^o 13' 49''\,{}^1\!/_2$. . . . ${}^1\!/_2$CM.

Arc MCN = 4 fois autant = $116^o 55' 18''$ ou $116^o,922$

$$\text{Longueur absolue} = \frac{\pi \cdot 4,52 \cdot 116,922}{360} = 4^m61$$

Secteur MONC. . . . ${}^1\!/_2 \cdot 4,61 \cdot 2,27$ ou $5^{m2}209$

Triangle MON . . . . ${}^1\!/_2 \cdot 3,86 \cdot 1,18$ ou 2 277

Différence (segment MNC) . . . . . . . . 2 932

*Relevé de la surface totale.*

Rectangle BD . . . . . $4^m40 \cdot 0^m30$. . . . . ou $1^{m2}320$

Trapèze MNGF. . . . . ${}^1\!/_2 \cdot 1^m70\,(4,20 + 3,86)$ ou 6 851

Segment MNC . . . . . . . . . . . . . . . . 2 932

Total. . . . . $11^{m2}103$

*A déduire.*

Rectangle AELK. . . . $2^m00 \cdot 1^m20$ ou $2^{m2}400$ }

Demi-cercle AEP. . . . ${}^1\!/_2 \pi \cdot 1^2$ ou 1 571 } $3^{m2}971$

Surface demandée. . . . . . $7^{m2}132$

**Note.** La question importante au point de vue pratique de *métrés des travaux d'art* exige des développements que nous ne pouvons donner ici; à ce sujet, voir les *Éléments de Topographie,* par Edmond Gabriel, chap. VI, p. 439. (Mame et Poussielgue.)

**Notes.**

**2236. Aire du segment hyperbolique.** (G., n° 995.) La formule qui a permis de contrôler les résultats donnés par les diverses méthodes approximatives n'est pas du ressort de la géométrie élémentaire.

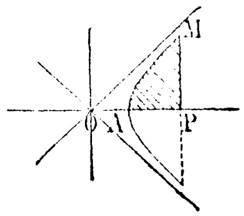


Fig. 1418.

Pour le demi-segment de l'hyperbole équilatère, lorsque $MP = y$, $OP = x$, $OA = a$, on a :

$$\text{Aire} = \frac{xy}{2} - \frac{a^2}{2}\, l_n \left(\frac{x+y}{a}\right),$$

$l_n$ indique le logarithme népérien; pour l'obtenir, on peut prendre le logarithme vulgaire de $\left(\frac{x+y}{a}\right)$, et multiplier le résultat par la constante $\frac{1}{\log . e} = 2{,}30259$.

On a donc :

$$\text{Aire AMP} = \frac{1}{2}\left[xy - a^2 \log\left(\frac{x+y}{a}\right) 2{,}30259\right],$$

$$y = \sqrt{x^2 - a^2}\,; \quad y = 17{,}320\,; \quad \frac{xy}{2} = 173{,}20$$

$$x + y = 37{,}32\,; \quad \frac{x+y}{a} = 3{,}732\,; \quad \log.\ 3{,}732 = 0{,}57194$$

$$0{,}57194 \times 2{,}30259 = 1{,}316943\,; \quad \text{et, puisque } \frac{a^2}{2} = 50, \quad \text{on a :}$$

$$\frac{a^2}{2} \times \log.\left(\frac{x+y}{a}\right) \times 2{,}30259 = 50 \times 1{,}316943 = 65{,}847150$$

$$\text{Aire} = 173{,}20 - 65{,}84715 = 107{,}35285.$$

**Note.** Quant à l'emploi des formules approximatives, voir une belle étude de M. P. MANSION. *Mathesis* 1881, pp. 17 et 33.

**2236 a. Rectification approximative d'un arc de cercle.** *Si, sur la corde* AB *d'un arc de cercle de centre* O, *on prend le point* M *tel que* $AM = \frac{2}{3}$ AB *et que l'on tire le rayon* OM *qui coupe l'arc* AB *en* L, *on a, avec une approximation pratiquement suffisante :*

$$\text{corde AL} = \frac{2}{3}\ \text{arc AB}.$$

Il suffit donc mener la parallèle BP à ML pour avoir AP = arc AB, et l'on voit tout de suite que cette construction, si simple, est réversible, c'est-à-dire qu'elle permet de porter sur un cercle donné un arc de longueur donnée.

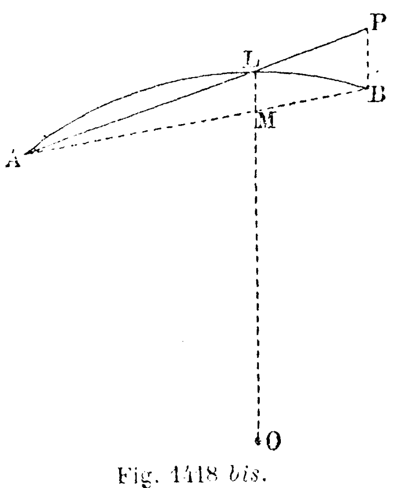


Fig. 1418 *bis*.

Quant à la précision que fournit cette construction, elle peut être définie par les chiffres que voici :

*L'erreur relative qui reste inférieure à* 0,0001 *jusqu'au delà de* 35° *et à* 0,001 *jusqu'au delà de* 65° *n'atteint pas encore la valeur de* 0,01 *pour* 90°.

On peut d'ailleurs toujours, par des bissections successives, réduire l'arc à rectifier à une amplitude angulaire inférieure à telle limite que l'on veut. Il convient, d'autre part, de remarquer qu'une erreur relative de 0,001 est, en pratique, généralement tenue pour négligeable et qu'il est rare qu'on ait à rectifier des arcs de plus de 65°, valeur inférieure à la limite angulaire correspondante. La construction indiquée suffira donc, dans la plupart des cas, sans aucune bissection préalable.

Il est digne de remarquer que cette construction approchée fournit *ipso facto* la trisection de l'arc, puisque, précisément, la corde AL est égale aux $\frac{2}{3}$ de l'arc AB.

**Note.** La construction très simple que nous donnons ci-dessus est due à M. d'Ocagne, ingénieur des ponts et chaussées, bien connu par sa *Monographie* et sa *Géométrie descriptive et infinitésimale.* (*N. A.,* 1907, p. 10.)

**2256 b. Problème.** *Donner une règle pratique pour diviser une circonférence en un nombre* n *de parties égales.*

1° *Procédé Bion.* On divise le diamètre AB en $n$ parties égales, neuf par exemple, si l'on veut le neuvième de la circonférence; on trace le triangle équilatéral ABC, l'on joint le point C à la deuxième division, et l'arc AD est approximativement le neuvième de la circonférence.

Housel a examiné les résultats ainsi obtenus :

Pour $n = 3$ ou 4 ou 6, *exact*.

Pour $n = 5$, on obtient 71° 57′ 12″ au lieu de 72°.

Pour $n = 8$, on a : 45°11′14″ au lieu de 45°.

Pour $n = 16$, on a : 23°5′54″ au lieu de 22°30′.

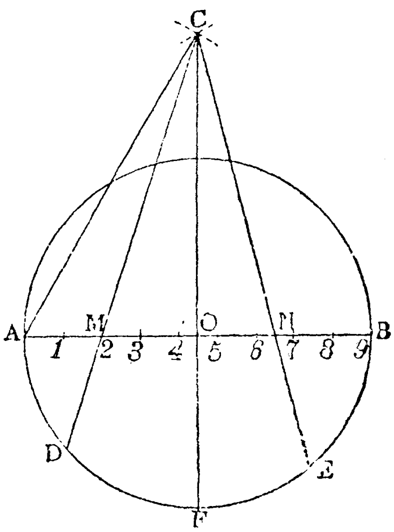



Fig. 1418 *ter*.

2° *Procédé Tempier.* Lorsque $n$ n'est pas inférieur à 8, on obtient une précision plus grande que précédemment par le procédé suivant :

A partir du centre, on prend ON égale à deux divisions, et l'on mène CNE, COF, l'arc EF est le neuvième de la circonférence.

Par ce procédé, pour $n = 16$, on trouve 22°30′20″ au lieu de 22°30′. Le résultat est bien plus rapproché de la vraie valeur que celui qu'on obtient par le *procédé Bion*.

La différence de la valeur trouvée par le *procédé Tempier*, à la vraie valeur, va constamment en diminuant, lorsque $n$ augmente.

**Note.** M. Burali-Forti de Turin a reproduit le *procédé Bion* (*I. M.*, 1900, p. 405, question 1988) et a demandé le degré d'approximation de cette méthode. Le très érudit M. Brocard a rappelé les études antérieures de Housel (*N. A.*, 1853, p. 77 à 80) et de Tempier (1853, p. 345 à 347 et 1854, p. 295. *I. M.*, 1901, p. 126).

* Bion, auteur d'un Traité de construction et des principaux usages des instruments de mathématiques. 1752.

* Tempier (1819-1905), frère des Écoles chrétiennes, excellent professeur, puis directeur à Montpellier.

**2237. Longueur de l'ellipse.** La longueur de l'ellipse n'est donnée que par une *série* (n° 2259); des tables ont été calculées pour abréger les opérations. Dans celle que nous donnons, le petit axe est toujours égal à 1, et le grand axe varie par dixième.

Pour connaître le nombre de la table qui correspond à un cas donné, on divise le grand axe par le petit axe. On prend alors dans la première colonne le nombre qui égale le quotient; on lit à droite la longueur correspondante, et on multiplie cette valeur par le petit axe.

| $\frac{a}{b}$ | Longueur | Différences | $\frac{a}{b}$ | Longueur | Différences | $\frac{a}{b}$ | Longueur | Différences |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,00 | 3,1416 | 159 | 1,3 | 3,6279 | 1677 | 2,5 | 5,7506 | 1842 |
| 1,01 | 3,1575 | 159 | 1,4 | 3,7956 | 1701 | 2,6 | 5,9348 | 1851 |
| 1,02 | 3,1734 | 158 | 1,5 | 3,9657 | 1721 | 2,7 | 6,1199 | 1855 |
| 1,03 | 3,1892 | 159 | 1,6 | 4,1378 | 1739 | 2,8 | 6,3054 | 1862 |
| 1,04 | 3,2051 | 159 | 1,7 | 4,3117 | 1756 | 2,9 | 6,4916 | 1868 |
| 1,05 | 3,2210 | 159 | 1,8 | 4,4873 | 1772 | 3,0 | 6,6784 | 1874 |
| 1,06 | 3,2369 | 159 | 1,9 | 4,6645 | 1782 | 3,1 | 6,8658 | 1880 |
| 1,07 | 3,2528 | 159 | 2,0 | 4,8427 | 1795 | 3,2 | 7,0538 | 1884 |
| 1,08 | 3,2687 | 159 | 2,1 | 5,0222 | 1807 | 3,3 | 7,2422 | 1888 |
| 1,09 | 2,2846 | 159 | 2,2 | 5,2029 | 1817 | 3,4 | 7,4310 | 1892 |
| 1,10 | 3,3005 | ...... 1622 | 2,3 | 5,3846 | 1826 | 3,5 | 7,6202 | 1896 |
| 1,20 | 3,4627 | 1652 | 2,4 | 5,5672 | 1834 | 3,6 | 7,8098 | |

**Problème.** *Quelle est la longueur de l'ellipse qui a pour axes 3 mètres et* $1^m20$ ?

$\frac{3}{1,20} = 2,50$; or à 2,50 correspond 5.7506, et cette valeur multipliée par 1,2 donne $6^m90072$.

**Problème.** *L'ellipse a pour axes* $4^m,62$ *et 3 mètres.*

$\frac{4.62}{3} = 1,54$; or 1,54 est compris entre 1,5 qui donne 3,9657, et 1,6 qui donne 4,1378. La différence de longueur égale 0,1721; il faut prendre les quatre dixièmes de cette longueur : $0,1721 \times 0,4 = 0,06884$ et $3,9657 + 0,06884 = 4,03454$. Il faut ensuite multiplier ce résultat par le petit axe 3; on trouve $12^m10362$.

**2238.** *Formules approchées donnant le périmètre de l'ellipse*

Nous donnons diverses formules, d'après *Mathesis*, 1883, p. 103 et l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1896, pp. 137 et 234; 1897, pp. 64 et 202; 1900, p. 409.

$$E = \pi(a+b) + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(a-b)^2}{a+b} \quad \text{(E. Cesaro, en 1883)},$$

$$E = 4\,\frac{(a-b)^2 + \pi ab}{a+b} \quad \text{(Camus, de Turin, en 1893)},$$

$$E = \pi\left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right] \quad \text{(Boussinesq, en 1889)}.$$

Tant que $\frac{b}{a} \leqq \frac{1}{4}$, l'erreur ne dépasse pas $\frac{1}{150}$ du résultat; pour le cercle, l'erreur est nulle.

$$E = \lambda\sqrt{a^2 + b^2} + \mu(a + b) \qquad \text{(HOFFBAUER, en 1900)},$$

où l'on calcule les coefficients de manière qu'elle soit exacte dans les deux cas $a = b$ et $b = 0$ (cercle et droite); on a :

$$\lambda = 2{,}9307, \quad \mu = 1{,}0693.$$

Si l'on prend simplement :

$$p = 3\sqrt{a^2 + b^2} + (a + b),$$

l'approximation est encore grande, et l'interprétation géométrique fournit une rectification simple de l'ellipse.

* BOUSSINESQ des Vans (Vivarais), membre de l'Institut.

**2259. Séries.** On nomme *série* une suite illimitée de termes, telle que chacun de ces termes se déduit de ceux qui le précèdent d'après une loi connue.

En représentant par $e$ l'excentricité de l'ellipse, c'est-à-dire le rapport de la demi-distance focale $c$ au demi-grand axe $a$, la longueur $l$ de la moitié de l'ellipse est donnée par la série

$$l = \pi a\left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}e^3\right)^2 \ldots\ldots\right],$$

ou $$l = \pi a\left[1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 \ldots\ldots\right],$$

ou bien $$l = \pi a(1 - 0{,}25e^2 - 0{,}046875e^4 - 0{,}019531e^6 \ldots\ldots)$$

Cette série converge très lentement lorsque l'*excentricité* est petite; il est donc utile de recourir aux *tables* fournies par divers ouvrages pratiques, tels que ceux des SERGENT, VASSELON, CLAUDEL, etc.

# GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

**2260.** « La *Géométrie du triangle* est le progrès le plus remarquable qu'aient fait les mathématiques élémentaires en ces derniers temps *. »

On a toujours considéré dans le plan du triangle des points et des droites remarquables; néanmoins c'est surtout depuis 1873 que l'étude du triangle a été l'objet de recherches nombreuses et fécondes ; l'ensemble des résultats obtenus et coordonnés a reçu le nom de *Géométrie du triangle* ou de *Géométrie récente.*

**2261.** L'*Association française pour l'avancement des sciences* a été l'occasion des premiers travaux de la période actuelle, et les *comptes rendus* de ses congrès annuels ont fait connaître périodiquement les découvertes accomplies par plusieurs de ses membres les plus éminents.

1° Les *Nouvelles Annales mathématiques* ont eu la primeur des premiers articles de MM. LEMOINE et BROCARD (1873, p. 364, et 1875, p. 192, question 1166), relatifs aux points et aux cercles qui portent aujourd'hui leurs noms, comme elles avaient eu antérieurement ceux du capitaine MATHIEU (1865, p. 393), trop peu remarqués, ce semble, à cette époque, malgré l'importance de l'*inversion isogonale;* comme elles eurent plus tard (1883, p. 450, etc.) d'intéressants articles de M. D'OCAGNE sur la symédiane **.

2° Le *Journal des Mathématiques élémentaires et spéciales* de MM. BOURGET et G. DE LONGCHAMPS a été le principal organe, en France, de la *Géométrie du triangle;* on peut dire que les investigateurs d'une part, et le public de l'autre, doivent beaucoup à cette importante publication scientifique.

3° En Belgique, *Mathesis*, de MM. MANSION et NEUBERG, a continué, dès 1881, la *Nouvelle correspondance* de M. M. CATALAN. Pour faire comprendre ce qu'est la revue belge pour la *Géométrie récente,* il suffit de dire que lorsqu'on veut citer les principaux auteurs de la *Géométrie du triangle,* on nomme universellement MM. LEMOINE, BROCARD et NEUBERG.

Diverses publications anglaises et allemandes, de leur côté, font connaître les études, les résultats relatifs à la nouvelle branche de Géométrie.

On lira avec plaisir l'*Etude historique de la marche du développement de la Géométrie du triangle,* par M. VIGARIÉ, 1889 (supplément à *Mathesis,* 1890), et les articles du même auteur, publiés sur le même sujet, chaque année, depuis cette époque, dans le *Journal des mathématiques* de M. DE LONGCHAMPS. — La *Bibliographie du triangle de* 1895 *à* 1905

* Citation empruntée à l'*Esquisse historique,* par M. VIGARIÉ, séance du 9 août 1889. La citation est de M. DAVIS (*Assoc. for the improvement of Geometrical Teaching,* 1888).

** Les premières études sur la symédiane par M. D'OCAGNE se trouvent dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de BOURGET, KOEHLER et DE LONGCHAMPS, 1880, p. 539.

par M. C. ALASIA, communiquée par M. H. BROCARD au Congrès de Lyon, *A. F.*, 1906, p. 53. — Voir aussi les nombreux articles historiques et analytiques sur le triangle par M. J. MACKAY, dans les *Proceedings of the Edimburg Mathematical Society*. (*Mathesis*, 1910, p. 257.)

4° Après les publications périodiques citées ci-dessus, nous pouvons indiquer divers ouvrages que l'on consulterait avec profit : *Géométrie récente du triangle*, par M. NEUBERG, note 3, de soixante-dix pages, de la première partie du *Traité de Géométrie*, par MM. ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, 6e édition, 1891, et 7e édition.

5° Mémoires sur le *tétraèdre*, 1884, sur les *Projections et contre-projections d'un triangle fixe, sur le système des trois figures directement semblables*, par M. NEUBERG (Bruxelles, 1890).

6° *Trigonométrie rectiligne et Géométrie du triangle*, par LALBALETTRIER (Paris, 1889).

7° *Troisième livre de Géométrie*, etc. *Théorème de Stewart*, par THIRY (Gand, 1887, 1891).

8° *Principes de la nouvelle Géométrie du triangle*, par A. POULAIN, S. J. (Paris, 1892).

9° *A sequel to the first six books of the Elements of Euclid*, par JOHN CASEY (6e édit., Dublin, 1892). La moitié du volume est consacrée à la Géométrie du triangle.

10° *Companion to the Weekly Problem Papers*, par J. MILNE, section V, par T. C. SIMMONS (Londres, 1888).

11° *A treatise on the Geometry of the Circle*, par J. M'CLELLAND (Londres, 1891).

12° *Supplement to Euclid revised*, par NIXON (Oxford, 1891).

13° *An Elementary Treatise on modern pure Geometry*, par LACHLAN (Londres, 1893).

14° *Die Brocard'schen Gebilde*, par Dr A. EMMERICH (Berlin, 1891).

15° *La Recente Geometria del Triangolo*, par CRISTOFORO ALASIA (Citta di Castello, 1900).

16° *The Modern Geometry of the Triangle*, par WILLIAM GALLATLY, *M. A.* (London, 1911).

## Coordonnées trilinéaires.

**2262. Définition.** On nomme coordonnées trilinéaires, des grandeurs propres à déterminer la position d'un point par rapport à trois droites concourantes situées dans un même plan.

*Triangle de référence.* Le triangle formé par les trois droites est nommé triangle de référence.

*Signes des coordonnées.* Chaque droite partage le plan en deux régions, laissant le triangle dans l'une d'elles ; pour chaque axe, la région où se trouve le triangle est regardée comme positive et l'autre comme négative. D'après cette idée générale, il est facile de déterminer le signe de chacune des coordonnées d'un point, d'après la nature du système de ces coordonnées.

*Système des coordonnées.* Les principaux systèmes sont les *coordonnées normales* et les *coordonnées barycentriques ;* on leur réserve généralement le nom collectif de *coordonnées trilinéaires.*

On peut y adjoindre actuellement, bien que moins employées, les *coordonnées angulaires* et les *coordonnées tripolaires.*

**2263. Coordonnées normales.** On nomme coordonnées normales d'un point M, les perpendiculaires $x$, $y$, $z$ abaissées de ce point sur les côtés $a$, $b$, $c$ du triangle de référence.

On a les *coordonnées normales absolues,* lorsqu'on donne les longueurs mêmes des perpendiculaires $x$, $y$, $z$, et les *coordonnées normales relatives,* des longueurs $x'$, $y'$, $z'$ proportionnelles aux premières ; dans la pratique on supprime les accents dès qu'il n'y a pas équivoque.

**2264. Signes.** Pour M, les trois coordonnées sont positives.

Pour N, on reconnaît, d'après la convention indiquée précédemment, que $x$ a une valeur négative.

Pour le point O, $x$ a une valeur positive ; mais $y$ et $z$ sont négatives.

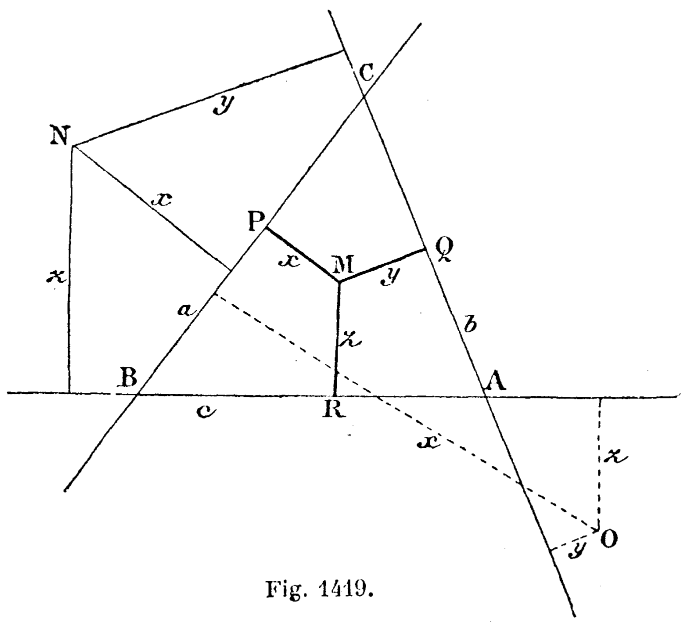



Fig. 1419.

*Résumé.* Pour les points situés dans le triangle, les trois coordonnées sont positives.

Lorsqu'un point est situé hors du triangle, N, par exemple, mais dans un angle même de ce triangle, une seule des coordonnées est négative.

Le point a deux coordonnées négatives et une positive, lorsqu'il est dans un angle opposé par le sommet, O, par exemple.

**Problème 971.**

**2265.** *Déterminer un point, connaissant trois grandeurs* x, y, z, *proportionnelles aux distances de ce point aux côtés* a, b, c *d'un triangle donné.*

1° Sur CB et sur CA on élève des perpendiculaires BQ, AP respectivement égales ou proportionnelles à $x$ et $y$ ; les parallèles QD, PD déterminent le lieu CO des points dont les distances aux côtés $a$ et $b$ sont dans le rapport de $x$ à $y$.

On détermine de la même manière le lieu des points dont la distance aux côtés $a$ et $c$ est dans le rapport de $x$ à $z$, le point commun M aux deux lieux est le point demandé.

2° Pour trouver un point de CO, on peut procéder comme il suit : Sur CA ou $b$ prendre $CG = x$, sur CB ou $a$ prendre $CH = y$. Le sommet L du parallélogramme appartient au lieu CO, car

$$\frac{LJ}{LI} = \frac{LH}{LG} = \frac{x}{y}.$$

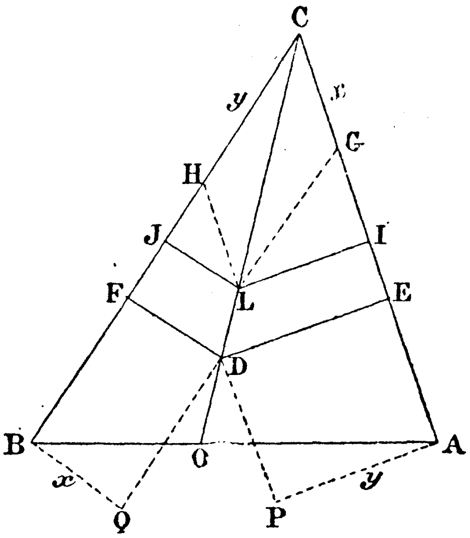


Fig. 1420.

**Problème 972.**

**2266.** *Établir une relation entre les trois distances d'un point aux côtés d'un triangle donné et les côtés de ce même triangle, de manière à pouvoir calculer une de ces distances, connaissant les deux autres et les longueurs des côtés.*

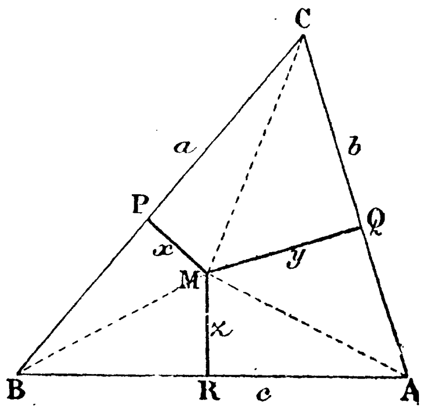


Fig. 1421.

Soient $x$, $y$, $z$ les distances d'un point M aux côtés $a$, $b$, $c$ ; soit S la surface du triangle donné ; on a :

$$ax + by + cz = 2S. \qquad (1)$$

Ainsi on ne peut se donner arbitrairement que deux distances, par exemple, $x$ et $y$ ; alors on a :

$$z = \frac{2S - ax - by}{c}.$$

**2267.** *Remarques.* 1° Certaines coordonnées peuvent être négatives, $y$, par exemple (fig. 1422). Dans ce cas, si l'on mettait le signe en évidence, on aurait :

$$ax - by + cz = 2S.$$

2° Lorsque les distances sont respectivement proportionnelles aux côtés correspondants, on a :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}; \qquad (2)$$

d'où $\dfrac{ax}{a^2} = \dfrac{by}{b^2} = \dfrac{cz}{c^2} = \dfrac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}$. (3)

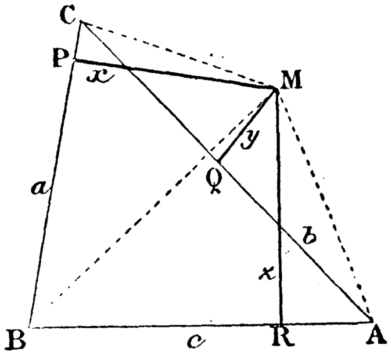


Fig. 1422.

Cette formule est souvent employée ; elle caractérise la distance du *point* K *de Lemoine* aux trois côtés.

**Problème 973.**

2268. *Déterminer un point, connaissant trois grandeurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ proportionnelles aux aires des trois triangles qui auraient ce point pour sommet et pour bases respectives les côtés du triangle donné.*

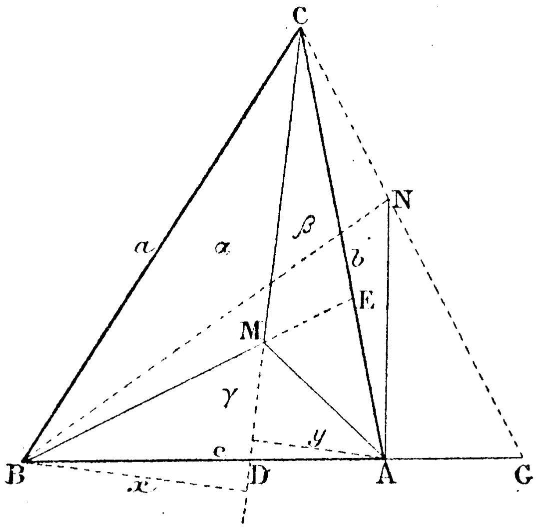



Fig. 1423.

Soit M le point demandé; on a :

$$\frac{BMC}{CMA} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Les triangles ci-dessus ayant un côté commun MC sont entre eux comme les perpendiculaires $x$ et $y$ abaissées sur cette ligne; ainsi

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

il suffit donc de diviser BA en segments proportionnels aux quantités $\alpha$ et $\beta$, et le point M se trouve sur CD.

En procédant d'une manière analogue sur le côté $b$ pour les grandeurs $\alpha$ et $\gamma$, on détermine une nouvelle ligne BE sur laquelle se trouve le point M.

*Remarque.* Si une des grandeurs, $\beta$ par exemple, était négative, on déterminerait un point G sur le prolongement de BA tel qu'on eût :

$$\frac{BG}{AG} = \frac{\alpha}{\beta};$$

en ne considérant que les valeurs absolues de $\alpha$ et $\beta$, le point cherché N serait sur CG, etc.

2269. **Coordonnées barycentriques.** Les grandeurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont nommées *coordonnées barycentriques* du point M; lorsque $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les aires mêmes des triangles BMC, CMA, AMB, on a les *coordonnées barycentriques absolues;* quand ce sont des grandeurs proportionnelles à ces aires, on a les *coordonnées barycentriques relatives.*

L'expression de *coordonnées barycentriques* vient de *barycentre,* nom du *centre de gravité.* Si l'on a trois masses $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, appliquées respectivement aux points A, B, C, le point M est le centre de gravité du système.

**Théorème 974.**

2270. *En représentant par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ l'aire des triangles qui ont même sommet* M *et dont les bases respectives sont les côtés d'un triangle donné* ABC *ayant* S *pour aire, on a, quelle que soit la position de* M, *la relation suivante :*

$$\alpha + \beta + \gamma = S.$$

*L'aire est regardée comme négative lorsque pour le triangle* AMB, *par exemple, les points* M *et* C *sont de part et d'autre du côté* AB.

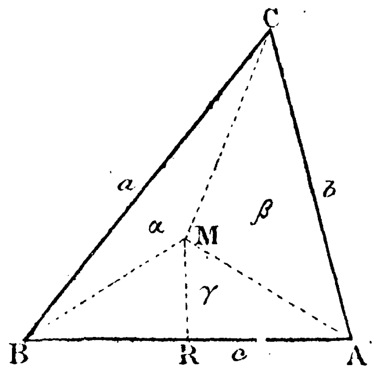



Fig. 1424.

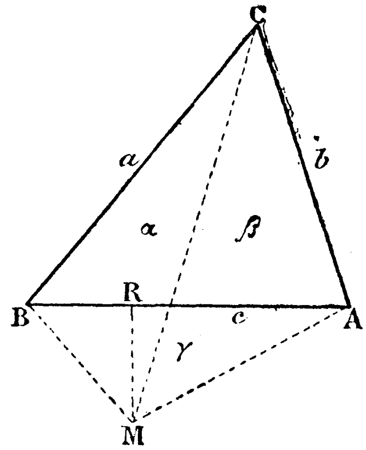



Fig. 1425.

Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ l'aire des triangles BMC, CMA, AMB (fig. 1424).
En désignant par S l'aire du triangle donné, on a :

$$\alpha + \beta + \gamma = S.$$

Cette formule est générale, pourvu qu'on tienne compte des signes; ainsi (fig. 1425) la hauteur MR du triangle AMB tombant dans une direction opposée à celle qui est regardée comme positive, le triangle AMB doit être regardé comme négatif; or on a :

$$BCM + CMA - AMB = ABC;$$

donc la relation (1) est encore vérifiée, car $\gamma$ a une valeur négative.

**2271.** *Remarques.* 1° En désignant, suivant l'usage (n° 2267), par $x$, $y$, $z$ les hauteurs respectives des trois triangles, on a :

$$\alpha = \frac{ax}{2}, \quad \beta = \frac{by}{2}, \quad \gamma = \frac{cz}{2}.$$

Ce qui permet facilement d'exprimer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ en fonction de $x$, $y$, $z$, et réciproquement.

2° Dans le cas particulier où les trois triangles sont équivalents, on a :

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{S}{3}.$$

Ces valeurs caractérisent le point de concours des médianes du triangle ABC. Ce point se désigne par G, il est le *centre de gravité* de la surface du triangle donné.

### Théorème 975.

**2272.** *La médiane est le lieu des points dont le rapport des distances aux deux côtés correspondants du triangle égale le rapport inverse de ces mêmes côtés. Il en est de même, au signe près, de la droite menée parallèlement au troisième côté, par le sommet opposé.*

Le rapport des distances d'un point quelconque de la médiane aux deux côtés qui partent du même sommet, est le même que celui du point M milieu de la base ; or les triangles ACM, BCM sont équivalents comme ayant des bases égales et même hauteur ; on a donc aussi :

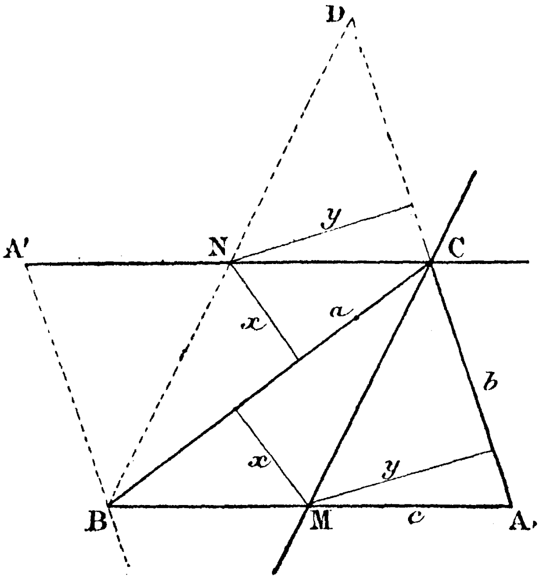


Fig. 1426.

$$ax = by, \text{ d'où } x : y = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}.$$

2° En prolongeant AC, menant BD parallèle à la médiane, la droite CN parallèle à AB est la médiane du triangle BCD et CD = CA = $b$; donc

$$ax = by; \text{ d'où } x : y = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}.$$

Par rapport au triangle donné, la distance $x$ est négative ; par suite, en tenant compte des signes, il faut écrire :

$$x : y = -\frac{1}{a} : \frac{1}{b}.$$

**2273.** *Remarques.* 1° Le point de concours des médianes donne :

$$x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

2° En menant par les sommets du triangle ABC des parallèles aux côtés, on obtient un triangle A'B'C' dont le premier ABC est le triangle médian ; les sommets A', B', C' sont les *points associés* du point de concours G des trois médianes du triangle donné ; au signe près, il jouissent de la même propriété que G ; pour le rapport des distances aux trois côtés de ABC, on a :

Pour A'. . . . . . $x : y : z = -\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$;

Pour B'. . . . . . $x : y : z = \frac{1}{a} : -\frac{1}{b} : \frac{1}{c}$;

Pour C'. . . . . . $x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : -\frac{1}{c}$.

**Problème 976.**

**2274.** *Déterminer les coordonnées normales et les coordonnées barycentriques absolues du centre de gravité* G *d'un triangle* ABC, *et celles du point* K *qu'on obtient en menant les droites symétriques à chaque médiane, par rapport à la bissectrice qui part du même sommet.* Le point K est le *point de Lemoine* (n° 2352).

1° Pour le centre de gravité G, les triangles BGC, CGA, AGB sont équivalents, puisque le point G est au tiers de la médiane AN, à partir du pied N de cette ligne ; donc

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{S}{3}; \qquad (1)$$

mais $$\frac{ax}{2} = \mathrm{CGB} = \alpha = \frac{\mathrm{S}}{3};$$

donc $$x = \frac{2\mathrm{S}}{3a}; \quad \text{de même} \quad y = \frac{2\mathrm{S}}{3b}, \quad z = \frac{2\mathrm{S}}{3c}. \tag{2}$$

Telles sont les valeurs des *coordonnées normales absolues* du centre de gravité ; quant aux coordonnées relatives, on écrit simplement :

$$x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \tag{3}$$

ou $$ax = by = cz. \tag{4}$$

2° *Centre* K *des symédianes*. La symédiane est le lieu des points dont les distances aux côtés correspondants $a$ et $b$, par exemple, sont dans le rapport de ces mêmes côtés; cette ligne CD est la symétrique de la médiane CM par rapport à la bissectrice CI. On a donc :

$$x : y : z = a : b : c \tag{5}$$

ou $$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \tag{6}$$

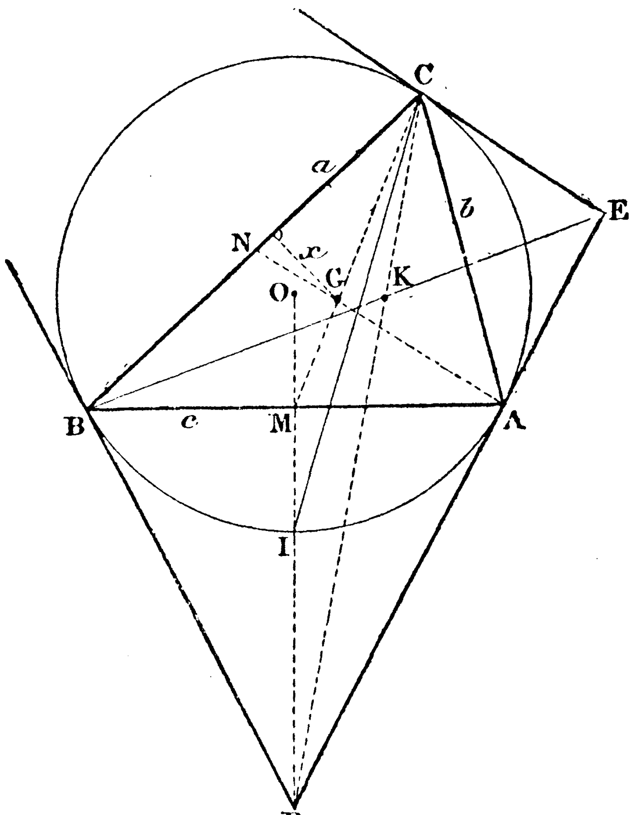


Fig. 1427.

pour coordonnées normales relatives; pour les coordonnées normales absolues du point K, il suffit de prendre les inverses de celles de G;

on a : $$x = \frac{3a}{2\mathrm{S}}, \quad y = \frac{3b}{2\mathrm{S}}, \quad z = \frac{3c}{2\mathrm{S}}. \tag{7}$$

Les *coordonnées barycentriques absolues* se déduisent des précédentes,

car $$\alpha = \frac{ax}{2}, \quad \text{etc.};$$

donc $$\alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2}{\mathrm{S}}, \quad \beta = \frac{3}{4} \cdot \frac{b^2}{\mathrm{S}}, \quad \gamma = \frac{3}{4} \cdot \frac{c^2}{\mathrm{S}}.$$

Pour les coordonnées relatives, on écrit :

$$\alpha : \beta : \gamma = a^2 : b^2 : c^2,$$

ou $$\frac{\alpha}{a^2} = \frac{\beta}{b^2} = \frac{\gamma}{c^2};$$

les coordonnées barycentriques sont donc $a^2$, $b^2$, $c^2$.

**2274 a.** *Remarque.* Le *point réciproque* d'un point donné (n° 2275 c) a pour coordonnées barycentriques les inverses des coordonnées du premier point; donc le point réciproque du *point* K *de Lemoine* a pour coordonnées : $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$.

Les coordonnées des *points de Brocard* (nº 1097) ont beaucoup d'analogie avec les précédentes, car elles sont :

$$\text{Pour } \Omega_1 \ldots\ldots \quad \frac{1}{b^2}, \quad \frac{1}{c^2}, \quad \frac{1}{a^2};$$

$$\text{Pour } \Omega_2 \ldots\ldots \quad \frac{1}{c^2}, \quad \frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{b^2}.$$

On les obtient par permutation circulaire.

## Résumé et complément.

**2275.** *Coordonnées trilinéaires.* — Les coordonnées normales et les coordonnées barycentriques sont comprises sous la dénomination commune de *coordonnées trilinéaires.*

Les coordonnées normales et les coordonnées barycentriques d'un même point quelconque sont liées entre elles par les égalités

$$\frac{ax}{\alpha} = \frac{by}{\beta} = \frac{cz}{\gamma}. \qquad (2274).$$

Ces formules permettent de passer immédiatement des coordonnées normales aux coordonnées barycentriques, et réciproquement.

**2275 a.** *Points dérivés d'un point donné.* — On appelle point dérivé d'un point donné M, tout point P dont les coordonnées se déduisent du point M suivant une loi déterminée.

Chaque système de coordonnées admet divers modes de dérivation, qui constituent autant de méthodes de transformations géométriques. Bornons-nous à quelques exemples.

**2275 b.** *Points inverses.* — On dit que deux points sont *inverses,* quand leurs coordonnées *normales* sont inversement proportionnelles.

Ainsi le point *inverse* d'un point M $(x, y, z)$ est le point qui a pour coordonnées $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$.

En d'autres termes, deux points M $(x, y, z)$, M′ $(x', y', z')$ sont inverses lorsqu'on a : $xx' = yy' = zz'$.

Pour que deux points soient inverses, il faut et il suffit que leurs céviennes soient isogonales.

On sait que deux céviennes issues du sommet d'un angle sont dites *isogonales* quand elles sont symétriques par rapport à la bissectrice de cet angle (nºˢ 1118, 2307).

**2275 c.** *Points réciproques.* — On dit que deux points sont réciproques lorsque leurs coordonnées *barycentriques* sont inversement proportionnelles.

Ainsi le point réciproque d'un point M $(\alpha, \beta, \gamma)$ est le point qui a pour coordonnées : $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$.

En d'autres termes, deux points M $(\alpha, \beta, \gamma)$, M'$(\alpha', \beta' \gamma')$ sont réciproques lorsqu'on a : $$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'.$$

Pour que deux points soient réciproques, il faut et il suffit que leurs céviennes soient isotomiques.

On dit que deux points situés sur un côté d'un triangle sont *isotomiques* lorsqu'ils sont symétriques par rapport au milieu de ce côté (nº 1231 **a**).

Deux céviennes issues d'un même sommet d'un triangle sont dites *isotomiques* quand leurs pieds sont isotomiques sur le côté opposé.

**2275 d.** *Points associés à un point donné.* — On appelle *points associés* d'un point donné M $(x, y, z)$, les trois points que l'on obtient en changeant successivement le signe d'une seule des coordonnées du point M ; c'est-à-dire les trois points : $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z.)$

Les points associés d'un point M sont les trois sommets du triangle harmoniquement associé au point M.

Le triangle harmoniquement associé au point M est celui que l'on obtient en remplaçant chacune des céviennes du point M par sa conjuguée harmonique.

Deux céviennes issues du sommet d'un angle sont dites *conjuguées harmoniques* par rapport à cet angle, quand elles divisent harmoniquement le côté opposé.

**2275 e.** *Points potentiels.* — On appelle *potentiel d'ordre* P le point qui a pour coordonnées barycentriques les puissances $p^{\text{ièmes}}$ des trois côtés du triangle de référence, c'est-à-dire :

$$\alpha : \beta : \gamma = a^p : b^p : c^p.$$

Ses coordonnées normales sont donc :

$$x : y : z = a^{p-1} : b^{p-1} : c^{p-1}.$$

*Le potentiel d'ordre* 0 a pour coordonnées :

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : 1 : 1,$$
$$x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c};$$

c'est le point de concours des médianes, ou *barycentre,* G (2274).

*Le potentiel d'ordre 1* a pour coordonnées :

$$\alpha : \beta : \gamma = a : b : c,$$
$$x : y : z = 1 : 1 : 1;$$

c'est le point de concours des bissectrices, ou centre du cercle inscrit, I.

*Le potentiel d'ordre 2* a pour coordonnées :

$$\alpha : \beta : \gamma = a^2 : b^2 : c^2,$$
$$x : y : z = a : b : c;$$

c'est le point de concours des symédianes, ou *point de Lemoine,* K (2274).

**2275 f.** *Triangles médians et antimédians.* — Le *triangle médian* du triangle ABC est le triangle qui a pour sommets les pieds des trois médianes.

Le *triangle antimédian* de ABC est celui qui a pour côtés les trois *médianes extérieures* (c'est-à-dire les parallèles menées à chaque côté par le sommet opposé).

Les sommets du triangle antimédian sont les points associés du barycentre. Ils ont pour coordonnées :

$$\left(\frac{1}{-a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right),\quad \left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{-b},\ \frac{1}{c}\right),\quad \left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{-c}\right)\quad (2273).$$

**2275 g.** *Triangle tangentiel.* — On appelle triangle tangentiel d'un triangle ABC le triangle qui a pour côtés les trois *symédianes extérieures* (c'est-à-dire les tangentes menées au cercle circonscrit par chacun des sommets).

Les sommets du triangle tangentiel sont les points associés du *point de Lemoine.*

Les centres des cercles exinscrits sont les associés du centre du cercle inscrit.

**2275 h.** *Points permutants.* On nomme ainsi un groupe de trois points qui se déduisent l'un de l'autre, par une permutation tournante de leurs coordonnées barycentriques. Ainsi le *point réciproque de Lemoine* et les *points de Brocard* ayant respectivement pour coordonnées :

$$\frac{1}{a^2},\quad \frac{1}{b^2},\quad \frac{1}{c^2},$$

$$\frac{1}{b^2},\quad \frac{1}{c^2},\quad \frac{1}{a^2},\quad \text{et}\quad \frac{1}{c^2},\quad \frac{1}{a^2},\quad \frac{1}{b^2},$$

sont des *points permutants.*

Le triangle ayant pour sommets trois points permutants, a même centre de gravité que le triangle de référence.

**Note.** 1° L'étude et l'appellation de *points permutants* sont dues à M. AURIC, ingénieur des ponts et chaussées.

Le triangle des trois points permutants pourrait être appelé *Triangle d'Auric,* bien qu'il ait été déjà signalé dans un cas particulier. (*Mathesis,* 1887, p. 106.)

L'article de M. AURIC généralise plusieurs questions connues et permet d'en trouver de nouvelles.

Voir *Note sur la Géométrie du triangle* (*N. A.,* 1910, pp. 394 à 398).

2° M. LEMOINE, dans une étude magistrale *sur une généralisation des propriétés relatives au cercle de Brocard et au point de Lemoine*, avait donné un premier exemple de trois points déduits l'un de l'autre par une construction graphique déterminée; mais il n'était pas question de permuter les coordonnées du premier point.

(*N. A.,* 1885, p. 201 à 223.)

3° M. REY PASTOR de Madrid a fait une belle étude sur les *Points associés, les droites associées* et *le triangle cyclique.* En fait, il s'agit de points permutants, de droites permutantes et du triangle formé par trois de ces points ou trois de ces droites. (*L'Enseignement mathématique,* 1911, p. 292.)

**2275 i.** *Points d'un groupe de six.* Un point étant déterminé par trois données quelconques relatives au triangle de référence, on obtient six points, en formant tous les *arrangements* possibles avec les trois données. Par exemple, soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les coordonnées normales, barycentriques, angulaires, ou les trois rapports déterminés par des céviennes concourantes ; on aura deux groupes de trois points permutants :

$$\alpha\beta\gamma,\quad \beta\gamma\alpha,\quad \gamma\alpha\beta.$$

$$\alpha\gamma\beta,\quad \beta\alpha\gamma,\quad \gamma\beta\alpha.$$

En coordonnées barycentriques, si le point donné est le *réciproque de Lemoine*, les deux autres du premier groupe seront les *points de Brocard.*

Si un premier point est déterminé par les angles de son triangle podaire, on trouve cinq autres centres de similitude (n° 2494).

Si l'angle $\alpha = A$, $\beta = B$, $\gamma = C$, les six centres de similitude sont concycliques, et ils comprennent le centre du cercle circonscrit et les *points de Brocard.*

Avec trois rapports on obtient, suivant le cas, *six points de Céva,* ou six transversales (nos 1231 **b** et **c**).

L'étude précédente est de 1896. (E. de G., 3e édition.)

## Coordonnées angulaires.

### Problème 977.

**2276.** Coordonnées angulaires. *Déterminer un point* M, *connaissant les angles* X, Y, Z *des droites qui joignent ces points aux sommets du triangle de référence* (fig. 1428).

1° Deux des angles suffisent, car on doit avoir pour le point M :

$$X + Y + Z = 2\pi.$$

Il suffit de décrire sur $a$, vers l'intérieur du triangle, un segment capable de X ; sur $b$, un segment capable de Y. Le segment décrit sur $c$, et capable de Z, passe par le point d'intersection M des deux premiers.

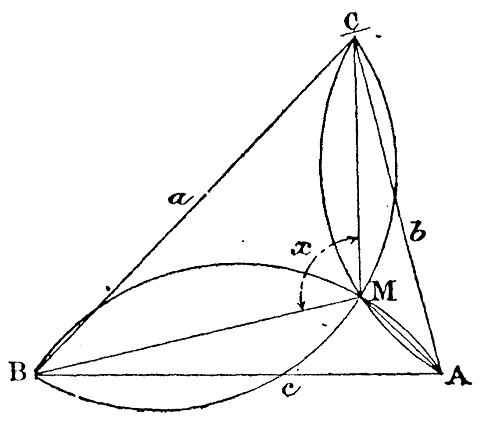



Fig. 1428.

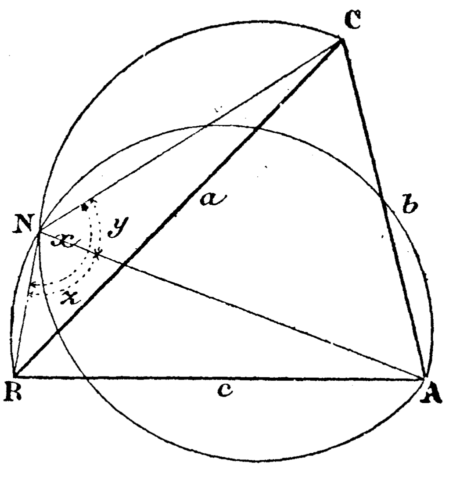



Fig. 1429.

2° Pour N (fig. 1429), un des angles, en valeur absolue, égale la somme des deux autres.

Les segments décrits sur $b$ et $c$ et capables de Y ou de Z sont décrits du côté même du triangle, tandis que le segment capable de X, décrit sur $a$, est à l'opposé du triangle par rapport au côté $a$; il doit donc être regardé comme négatif.

**2277.** *Remarque.* En tenant compte de la valeur relative pour un même point, on a une des deux relations suivantes :

$$X + Y + Z = 2\pi \quad (1) \quad \text{ou} \quad X + Y + Z = 0. \quad (2)$$

L'exemple bien connu des cercles circonscrits à chacun des triangles équilatéraux construits sur chaque côté d'un triangle donné (nº 754) revient à ce qui suit :

Lorsque les triangles équilatéraux sont extérieurs, le point O peut être obtenu par trois segments positifs capables de 120°.

Lorsque les triangles équilatéraux sont intérieurs, deux segments sont positifs et correspondent à 60°, un segment est négatif et correspond à 120°.

**2278.** Note. 1° Pour les numéros 2274, on peut voir *J. M. E.,* 1889, p. 18, et les *Principes de la Nouvelle Géométrie du triangle*, par l'abbé POULAIN, p. 18, nº 15.

2° Les *coordonnées angulaires* proposées par M. SCHOUTE, de Groningue, ont été utilisées par divers auteurs et notamment par MM. ARTZT, NEUBERG, GOB, POULAIN, LEMOINE, FUHRMAN (*J. M. E.,* 1891, p. 101). M. l'abbé POULAIN en a parlé tout spécialement dans sa *Géométrie du triangle* et dans le *J. M. E.,* 1891. On doit à cet auteur une théorie d'ensemble, où toutes les difficultés sont prévues.

* A. GOB, professeur à Hasselt (Belgique) en 1894; auteur de plusieurs articles très intéressants dans l'*Association française pour l'avancement des sciences,* 1889, p. 179; 1890, p. 1.

## Théorème 978.

**2279.** *En remplaçant les coordonnées angulaires d'un point* M *situé dans un triangle, par les suppléments de deux d'entre elles, et la troisième par sa valeur même, prise négativement, on obtient un nouveau point.*

En effet, soit pour nouvelles valeurs des coordonnées angulaires :

$$-X, \quad \pi - Y, \quad \pi - Z;$$

ces valeurs vérifient la relation (2), car

$$-X + \pi - Y + \pi - Z = 0.$$

**2280.** *Remarque.* Les points qui ont pour coordonnées angulaires :

1° $\quad -X, \quad \pi - Y, \quad \pi - Z;$

2° $\quad \pi - X, \quad -Y, \quad \pi - Z;$

3° $\quad \pi - X, \quad \pi - Y, \quad -Z;$

sont les points associés des points X, Y, Z.

## Théorème 979.

**2281.** *Si les coordonnées angulaires* X, Y, Z *vérifient la relation* $X + Y + Z = 2\pi$, *c'est-à-dire correspondent à un point* M *situé dans un triangle, les coordonnées* $-X, -Y, -Z$ *donnent un point* N *situé à l'extérieur du triangle.*

En d'autres termes : *Lorsque trois circonférences passent par deux sommets d'un triangle et se coupent au même point, les trois circonférences symétriques des premières par rapport aux côtés du triangle se coupent aussi en un même point.*

En effet, soit N le point où se coupent les circonférences ADB, BEC. Le segment ADB, en valeur absolue, égale AMB et correspond à l'angle Z; donc l'arc BD'NA est capable de $\pi - Z$; de même BE'NC $= \pi - X$; enfin le segment ANC égale AMC, correspond à Y, et passe par le point d'intersection N des deux premiers, car on a :

$$\pi - X - Y + \pi - Z = 0.$$

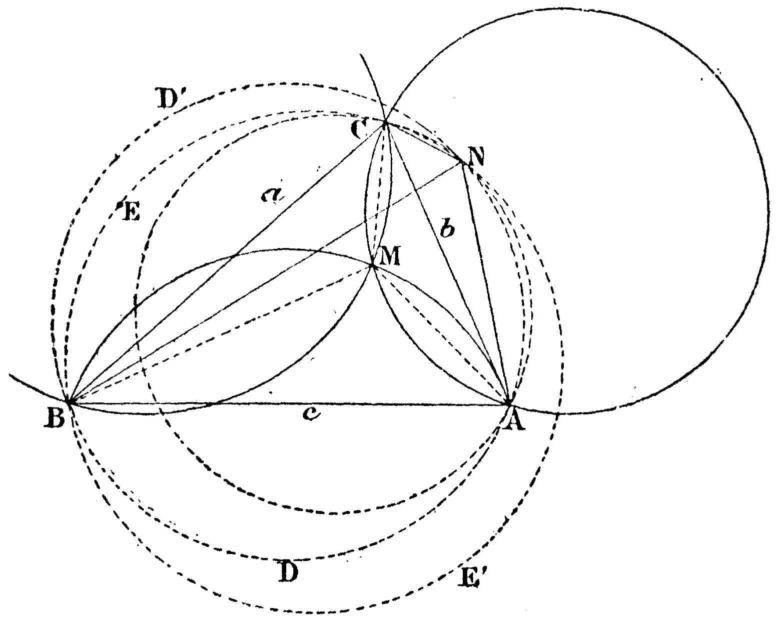



Fig. 1430.

*Réciproquement.* Les cercles symétriques des trois cercles qui passent par le point extérieur N donneraient le point intérieur M.

**2281 a.** *Points jumeaux.* — On appelle *points jumeaux* deux points dont les coordonnées angulaires sont égales et de signes contraires.

Si trois circonférences décrites sur les trois côtés d'un triangle se coupent en un point M (X, Y, Z), en renversant chacune d'elles autour du côté correspondant, on obtient trois circonférences qui se coupent en un point N (— X, — Y, — Z).

Ces points M, N sont deux points *jumeaux.*

**2282. Triangles podaire et antipodaire.** Le *triangle podaire* d'un point M par rapport au triangle de référence ABC est le triangle PQR qui joint deux à deux les pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés *a, b, c* du triangle donné (fig. 1431 et 1432, n° 2283).

Le *triangle antipodaire* d'un point M par rapport au triangle ABC est le triangle qu'on obtient en menant par les sommets A, B, C des perpendiculaires aux droites MA, MB, MC.

*Cas particulier.* Le triangle de référence se réduit à un point lorsque les trois droites données sont concourantes; mais le triangle podaire n'en subsiste pas moins, et il y a lieu de le considérer (fig. 1434 et 1437, n° 2287); mais il n'en est pas de même de l'antipodaire, puisqu'on n'obtient qu'une droite perpendiculaire à MA au point A.

**Théorème 980.**

**2283.** *Les coordonnées angulaires d'un point* M, *par rapport aux angles du triangle de référence* ABC *et à ceux du triangle podaire* PQR *du point donné, sont respectivement égales à la somme ou à la différence des angles* A *et* P, B *et* Q, C *et* R, *suivant que le point* M *est à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle.*

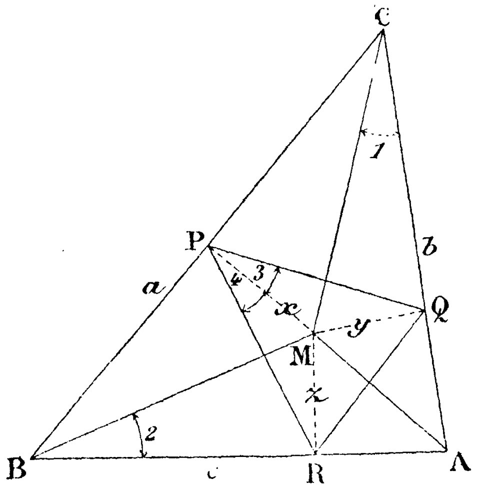


Fig. 1431.

1° *Point intérieur* (fig. 1431). L'angle BMC ou $X = A + 1 + 2$; mais le quadrilatère CPMQ est inscriptible, de même pour BPMR; donc l'angle $1 = 3$, l'angle $2 = 4$; ainsi

$$\text{angle CMA ou } Y = B + Q,$$
$$\text{et} \qquad \text{AMB ou } Z = C + R.$$

**2284.** 2° *Point extérieur* (fig. 1432). L'angle

$$\text{BMC ou } X = \pi - [(B - 2) + (C + 1)],$$
$$X = \pi - (B + C) - (1 - 2) = A - (1 - 2);$$

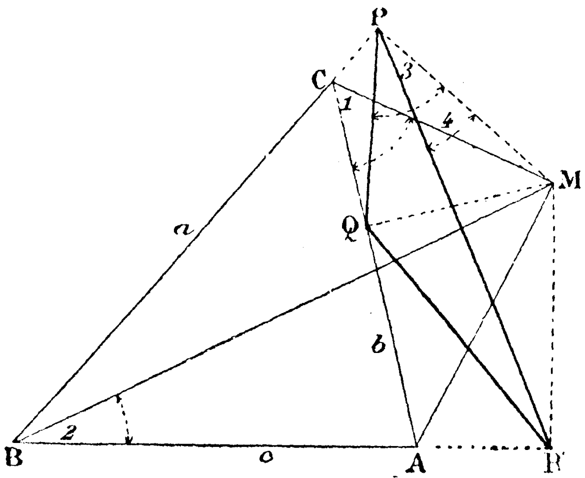


Fig. 1432.

mais à cause des quadrilatères inscriptibles MPCQ et MRBP, on a l'angle $1 = 3$ et l'angle $2 = 4$; d'ailleurs l'angle $3 - 4$ égale l'angle $QPR = P$;

donc $\qquad X = A - P$; de même $Z = C - R$.

Reste à étudier l'angle AMC ou Y,

$$Q - B = BPQ + BRQ;$$

or angle $BPQ = CMQ$; angle $BRQ = AMQ$ et $CMQ + AMQ = Y$;

donc $\qquad Y = Q - B.$

Avec la convention des signes, regardant comme positif le segment auxiliaire, BMC capable de l'angle X, lorsqu'il est décrit du côté même du triangle et comme négatif, le segment AMC, capable de l'angle Y, parce que ce segment décrit sur $b$ est à l'opposé du triangle, on écrira sans ambiguïté et d'une manière générale, pour les coordonnées d'un point extérieur :

$$X = A - P; \quad Y = B - Q; \quad Z = C - R.$$

**2285. Note.** Le problème précédent est traité avec de longs développements dans un ouvrage de mérite : *A treatise on the Geometry of the Circle,* par W. J. M'Clelland (principal de la Société des écoles, à Dublin). Section III : *The Point O Theorem.*

La convention des signes permet de simplifier et de généraliser toutes choses.

### Problème 981.

**2286.** 1° *Déterminer les angles du triangle podaire d'un point* M *en fonction des coordonnées angulaires de ce point.*

2° *Étudier le triangle podaire qu'on obtient lorsque le triangle de référence se réduit à un point.*

1° Triangle de référence ABC. *Point* M *intérieur* (fig. 1431, n° 2283). On présuppose toujours les équations de condition :

$$A + B + C = \pi \quad \text{et} \quad X + Y + Z = 2\pi.$$

D'après la question précédente 1°, on a :

$$P = X - A; \quad Q = Y - B; \quad R = Z - C.$$

*Point* M *extérieur* (fig. 1432). On a, en tenant compte des signes :

$$A + B + C = \pi \quad \text{et} \quad X + Y + Z = 0,$$

car l'une des coordonnées angulaires, Y, par exemple, est de signe contraire et égale, en valeur absolue, la somme des deux autres.

D'après la question précédente 2°, on a :

$$P = A - X; \quad Q = B - Y; \quad R = C - Z.$$

Dans l'exemple donné (fig. 1432), la normale MQ est négative ; il en est de même de l'angle AMC ou Y ; donc en réalité, en valeur absolue, $Q = B + Y$, ainsi qu'on le sait.

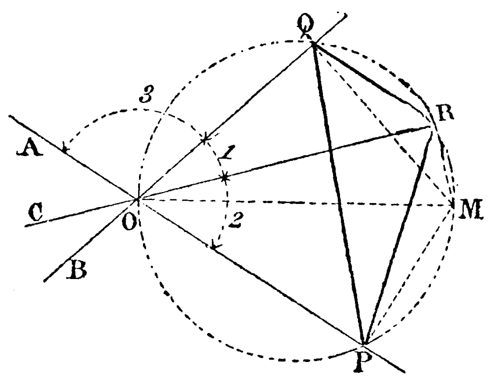



Fig. 1433.

**2287.** 2° *Trois droites concourantes.* Il faut considérer trois angles consécutifs, afin d'avoir une somme égale à deux droits, comme c'est nécessaire pour tout triangle (fig. 1433 et 1434).

Pour obtenir facilement les pro-

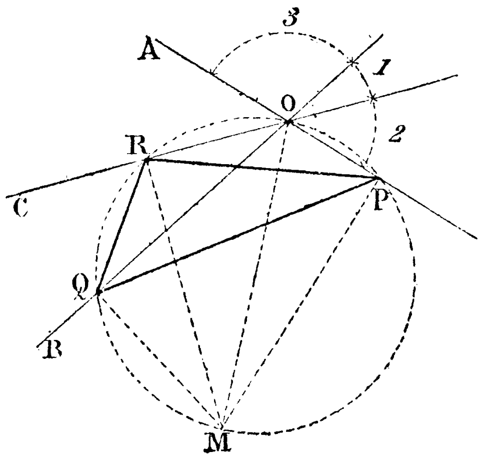


Fig. 1434.

jections de M sur les droites concourantes, on peut décrire une circonférence sur MO comme diamètre (fig. 1433 et 1434).

On trouverait immédiatement :

angle $P = 1$; $Q = 2$; $R = 3$;

d'où l'on peut conclure :

*Le triangle podaire* PQR *d'un point* M, *par rapport à trois droites concourantes est semblable au triangle, réduit à un point, que forment ces trois droites.*

**Problème 982.**

**2288.** Coordonnées tripolaires. *Déterminer un point, connaissant deux des trois distances* l, m, n, *de ce point aux trois sommets d'un triangle, ou connaissant des grandeurs proportionnelles à ces distances.*

Deux longueurs suffisent pour déterminer le point.

1° De A et B avec $l$ et $m$ pour rayons, on décrit des cercles qui se coupent généralement en deux points D, D'; le cercle décrit du sommet C, avec $n$ pour rayon, devrait passer par l'un des points trouvés, D, par exemple : ce point répond à la question.

2° Si l'on ne connait que des grandeurs proportionnelles $l$, $m$, $n$ aux vraies distances du point cherché aux trois sommets, on a recours au lieu des points dont les distances aux sommets A et B sont dans le rapport de $l$ à $m$; on sait que ce lieu est une circonférence facile à déterminer (G., n° 307) et dont le centre est sur le côté AB. De même, on décrit le lieu des points dont les distances à B et C sont dans le rapport de $m$ à $n$; les deux circonférences se coupent en deux points D et D'; chacun de ces points répond à la question, car on a :

$$\frac{DA}{DB} = \frac{l}{m}, \quad \text{et} \quad \frac{DB}{DC} = \frac{m}{n}; \quad \text{d'où} \quad \frac{DA}{DC} = \frac{l}{n}.$$

**2289.** *Remarques.* 1° Les trois circonférences, lieu des distances proportionnelles aux trois sommets, ont deux points communs D et D'.

2° Les distances $l$, $m$, $n$, ou des grandeurs proportionnelles à ces distances, constituent les éléments des coordonnées tripolaires. (*Principes de la nouvelle Géométrie du triangle*, par A. Poulain.)

## Antiparallèles.

**2290. Définition.** Deux droites AB, CD, sont antiparallèles par rapport aux côtés d'un angle XOY (fig. 1435), lorsque l'angle OAB que la première fait avec OX égale l'angle OCD que la seconde fait avec OY.

*Conséquences.* 1° Les droites AD, BC sont antiparallèles par rapport aux côtés de l'angle M.

2° *Le quadrilatère* ABCD *est inscriptible,* car les angles opposés A et C sont supplémentaires.

3° *Les diagonales* AC, BD *sont antiparallèles par rapport aux côtés de l'angle* O *et par rapport à ceux de l'angle* M ; car les angles ADB, ACB sont égaux, etc.

4° *Les côtés opposés du quadrilatère inscriptible sont antiparallèles par rapport aux diagonales de ce même quadrilatère.*

5° *Lorsque deux droites* AB, DC *sont antiparallèles par rapport aux côtés d'un angle, on a :*

$$\mathrm{OA}\,.\,\mathrm{OD} = \mathrm{OB}\,.\,\mathrm{OC}$$

ou $$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OD}}.$$

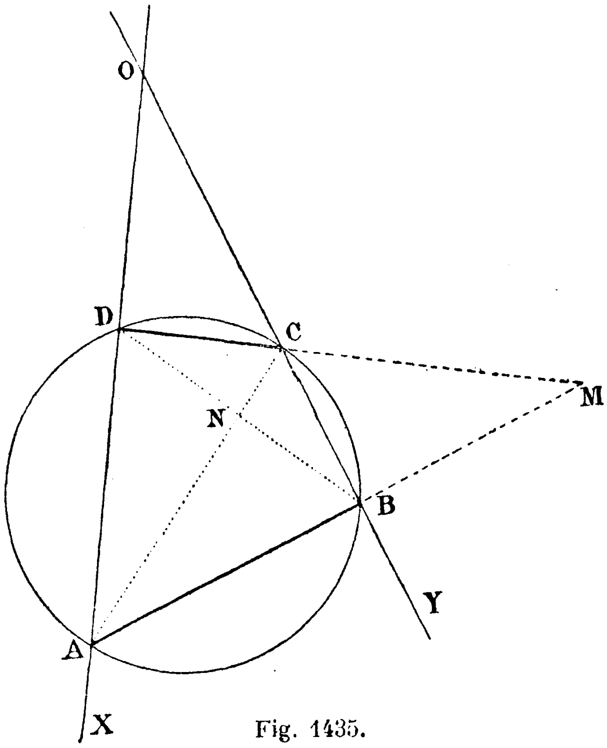


Fig. 1435.

**2291.** Réciproquement. 1° *Tout cercle qui coupe les côtés d'un angle* O *détermine des droites antiparallèles.* On a trois couples d'antiparallèles.

2° *Lorsqu'on a* $\mathrm{OA}\,.\,\mathrm{OD} = \mathrm{OB}\,.\,\mathrm{OC}$ ou $\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OD}}$, *les droites* AB, DC *sont antiparallèles.*

Plus généralement, *le quadrilatère* ABCD *est inscriptible, et l'on obtient trois groupes d'antiparallèles.*

**2291 a. Note.** La dénomination de *droites antiparallèles* se trouve, dès 1667, avec le sens actuel, dans les *Nouveaux Éléments de Géométrie* d'A. ARNAULD. (*N. A.*, 1850, p. 408.) C'est le cas de dire :

On ne s'attendait guère
A voir *Arnauld* en cette affaire.

Celui que ses contemporains avaient surnommé le *grand Arnauld*, né à Paris en 1612, mort à Bruxelles en 1694, est beaucoup plus connu par son séjour à Port-Royal et par ses œuvres de polémique que par ses œuvres mathématiques ; néanmoins dans ses *N. E. de Géométrie,* publiés sans nom d'auteur, il a devancé BERTRAND DE GENÈVE, dans l'emploi de *bandes infinies* pour démontrer certains théorèmes.

**Théorèmes 983.**

**2292.** 1° *Tout cercle qui passe par les extrémités d'un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés suivant une droite antiparallèle au premier côté considéré.*

C'est une simple conséquence du quadrilatère inscrit : ainsi DE, FG sont antiparallèles au côté AB.

2° *La droite* DE *qui joint les pieds des hauteurs issues des sommets* A *et* B *est antiparallèle à* AB.

Car le demi-cercle décrit sur ce diamètre AB passe par les pieds des hauteurs.

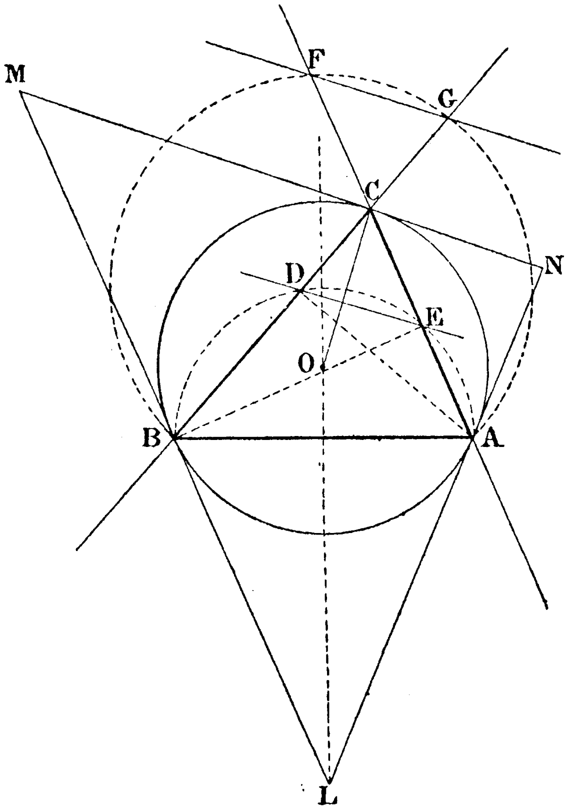



Fig. 1436.

3° *Les tangentes menées au cercle circonscrit par chaque sommet d'un triangle donné sont respectivement antiparallèles du côté opposé.*

En effet, l'angle ACN = B.

4° *Les antiparallèles à l'un des côtés d'un triangle sont perpendiculaires au rayon du cercle circonscrit relatif au sommet opposé.*

Car le rayon OC est perpendiculaire à la tangente CN, et par suite à ses parallèles DE, FG.

**2294.** *Triangle tangentiel.* Par rapport au triangle donné, ou *triangle de référence* ABC, le triangle LMN est nommé *triangle tangentiel.*

On sait d'ailleurs que les deux triangles sont réciproquement polaires par rapport au cercle circonscrit ABC.

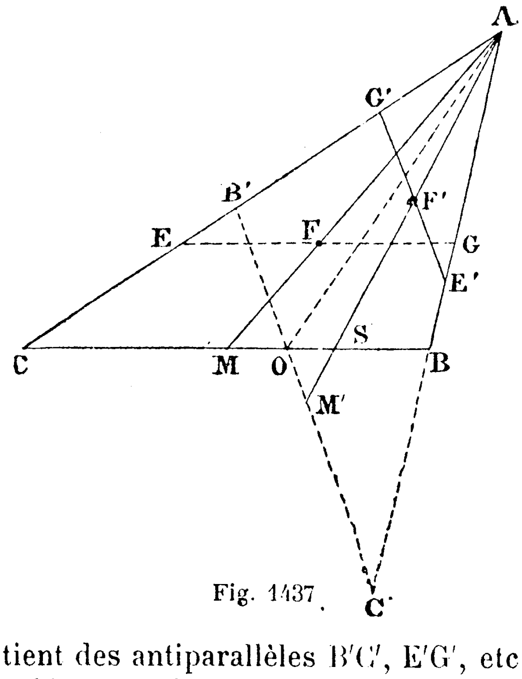



Fig. 1437.

**Théorèmes 984.**

**2293.** 1° *Le lieu du point milieu des parallèles à la base d'un triangle est la médiane correspondante.* 2° *Le lieu du point milieu des antiparallèles est la symédiane, c'est-à-dire la droite symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice qui part du même sommet.*

1° Le point F, milieu de EG, est sur la médiane AM.

2° Par retournement ou duplication, autour de la bissectrice AO, c'est-à-dire en prenant AC' = AC et AB' = AB, on obtient des antiparallèles B'C', E'G', etc. Le lieu du point milieu est sur la médiane AM' relative à B'C'; donc le lieu du point milieu des antiparallèles est la droite AS, symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice AO.

**Théorèmes 985.**

**2295.** 1° *Les antiparallèles égales relatives aux côtés des angles* A *et* C *d'un triangle* ABC *déterminent un trapèze isocèle.*

2° *Trois antiparallèles égales, inscrites dans les angles d'un triangle, déterminent sur les côtés du triangle six points concycliques;* c'est-à-dire *six points qui appartiennent à une même circonférence.*

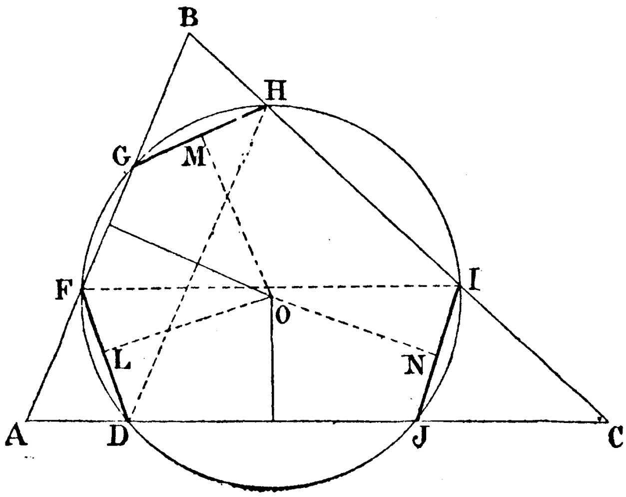


Fig. 1438.

1° Les angles aigus D et J sont égaux à l'angle B; donc le trapèze DFIJ est symétrique, car DF = IJ.

La base FI est parallèle à AC; de même DH est parallèle à AB.

2° Tout trapèze isocèle, DFGH par exemple, est inscriptible; il en est de même de DFIJ; pour démontrer que les six points déterminés par les trois antiparallèles égales sont concycliques, il suffit de prouver que le cercle circonscrit DFGH passe par le point I; or le quadrilatère FGHI est inscriptible, car les côtés opposés FI, GH sont antiparallèles. Donc...

*Remarque.* Le cercle circonscrit est un *cercle de Tucker*, que nous étudierons ultérieurement (n° 2383).

**Théorème 986.**

**2296.** *La symédiane qui part du sommet* A *d'un triangle* ABC *est le lieu des points d'où les antiparallèles aux côtés des angles* B *et* C *sont égales entre elles.*

Soit AS la symédiane : il suffit de prouver que SD, antiparallèle de AB, égale SE, antiparallèle de AC.

Par le point S, menons l'antiparallèle MN de la base BC. On sait que SM = SN (n° 2294). Les triangles DSM, ESN sont isocèles, car les angles D et M égalent B, etc.; donc

SD = SM et SE = SN.

Ainsi les antiparallèles SD, SE sont égales entre elles.

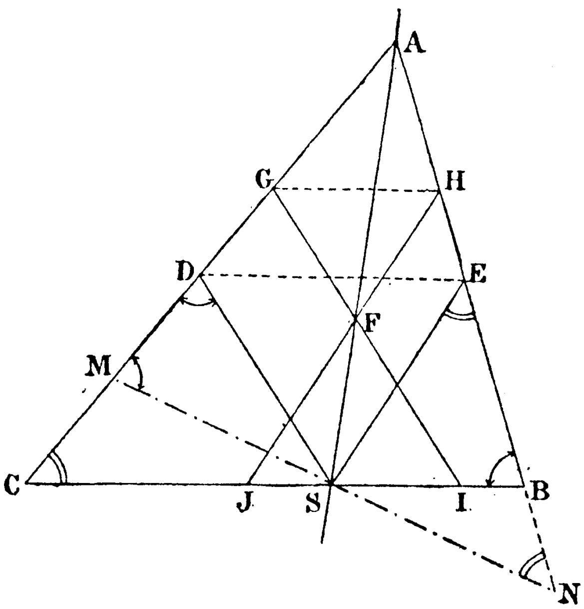


Fig. 1439.

Il en est de même pour tout point de la symédiane, car le triangle GFH semblable à DSE est isocèle comme ce dernier; or le triangle IFJ est aussi isocèle, car les angles I et J sont égaux à l'angle A; donc $IG = JH$.

**2297.** *Remarque.* La propriété de la symédiane d'être le lieu des points d'où l'on mène des antiparallèles égales dans les angles B et C, aussi bien que d'être le lieu du point milieu des antiparallèles relatives à l'angle A, simplifiera bien des démonstrations. Cette propriété doit être connue depuis longtemps; elle se déduit comme conséquence de ce que la *symédiane d'un sommet passe par le point de concours des tangentes menées par les autres sommets;* mais nous ignorons si elle a été signalée directement et employée à démontrer la proposition ci-dessus.

### Théorèmes 987.

**2298.** 1° *Par le point de concours de deux symédianes d'un triangle, on mène trois antiparallèles; prouver que ces lignes sont égales entre elles.* 2° *En conclure que les trois symédianes se coupent au même point.*

Soient BM, CN les symédianes, DE l'antiparallèle relative aux côtés de l'angle B et que BM divise en deux parties égales, FG l'antiparallèle relative à C et que CN divise en parties égales, enfin IJ l'antiparallèle relative aux côtés de l'angle A.

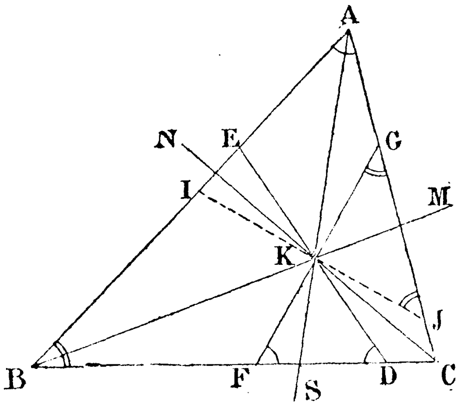


Fig. 1440.

1° Les angles D, F sont égaux entre eux, comme étant respectivement égaux à l'angle A; donc

$DK = FK$, et par suite $DE = FG$.

Les triangles EKI, GKJ sont isocèles, ainsi $IK = EK$ et $JK = GK$; donc le point K est aussi le milieu de IJ, et cette ligne égale les deux autres.

2° Le point K étant le milieu de l'antiparallèle IJ, relative à l'angle A, appartient à la symédiane de A; donc les *trois symédianes concourent au même point.*

**2299.** *Remarques.* 1° Sans considérer l'antiparallèle IJ, on peut conclure que les trois symédianes sont concourantes, car le point K, où se coupent les antiparallèles égales DE, FG relatives aux sommets B et C, appartient par cela même à la symédiane de A.

2° Le point de concours des symédianes se désigne par K et se nomme *point de Lemoine;* on dit aussi *point symédian.*

Les six points D, E, F, etc., appartiennent à un même cercle décrit du point K comme centre; ce cercle se nomme *second cercle de Lemoine:* il sera étudié ultérieurement (n° 2385).

**Théorèmes 988.**

**2300.** 1° *Lorsqu'on divise, dans un même rapport, les droites* AK, BK, CK *qui joignent les sommets d'un triangle au point de concours des symédianes, les antiparallèles qu'on mène par les points de division sont égales entre elles, et réciproquement.*

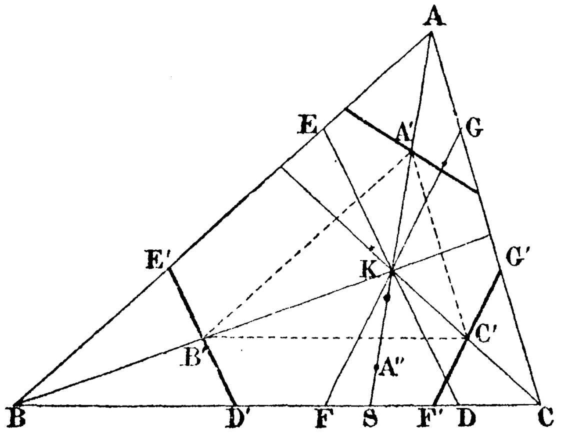



Fig. 1441.

Soit : $\frac{AA'}{AK} = \frac{BB'}{BK} = \frac{CC'}{CK}$.

On a : $\frac{D'E'}{DE} = \frac{BB'}{BK}$; d'où $D'E' = DE \cdot \frac{BB'}{BK}$;

de même, $F'G' = FG \cdot \frac{CC'}{CK}$;

mais $DE = FG$, donc $D'E' = F'G'$, etc.

2° *Les antiparallèles égales divisent les distances* AK, BK, CK *dans le même rapport.*

**2301.** *Remarques.* 1° Les triangles ABC, A'B'C' sont directement homothétiques, et K est le centre d'homothétie.

2° Le point K lui-même peut être considéré comme un triangle homothétique infiniment petit; les antiparallèles menées par les sommets réunis au point K sont les droites DE, FG et JI (non tracée; fig. 1441).

3° Quand les points de division sont pris au delà du point K par rapport aux sommets correspondants, les triangles sont inversement homothétiques; mais les trois antiparallèles sont égales entre elles aussi bien que dans le premier cas. (Voir aussi n° 2384, 2°.)

**Lieu 989.**

**2302.** *Dans un triangle, on mène des parallèles, puis des antiparallèles à la base : par les extrémités de chacune de ces lignes on élève des perpendiculaires aux deux côtés de l'angle du sommet; on demande le lieu du point de concours des deux perpendiculaires menées par les extrémités :* 1° *des parallèles;* 2° *des antiparallèles.*

Dans chaque cas, le lieu est une ligne droite qui passe par le sommet A.

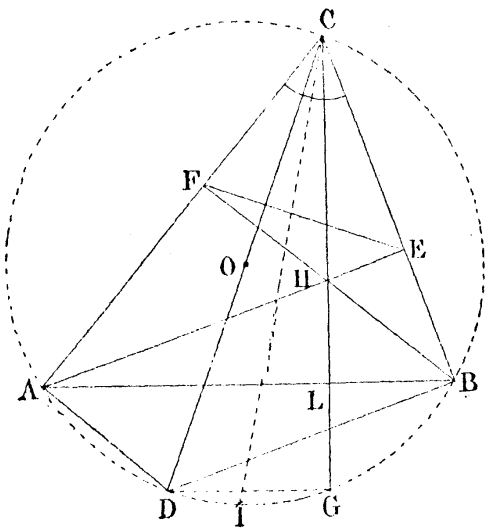



Fig. 1442.

Il suffit de déterminer un second point.

1° Pour les parallèles, on peut considérer les perpendiculaires AD, BD élevées aux extrémités de la base; donc le lieu est le diamètre CD du cercle circonscrit.

2° Pour les antiparallèles, on peut mener les hauteurs AE, BF : le point H appartient au lieu demandé, car EF est antiparallèle à AB; donc le lieu est la hauteur CHG.

*Remarque.* Les droites CD, CL sont isogonales, car elles sont également inclinées sur la bissectrice CI (n° 2292, 2°); d'ailleurs DG est parallèle à AB, donc les angles en C sont égaux entre eux.

### Théorème 990.

**2303.** *On divise les hauteurs d'un triangle en parties proportionnelles* (par exemple, à partir des sommets); *des points de division* D, D′, D″ *on abaisse des perpendiculaires sur les deux côtés qui correspondent à la hauteur considérée, prouver que les trois droites antiparallèles qu'on obtient en joignant les projections d'un même point sont égales entre elles.*

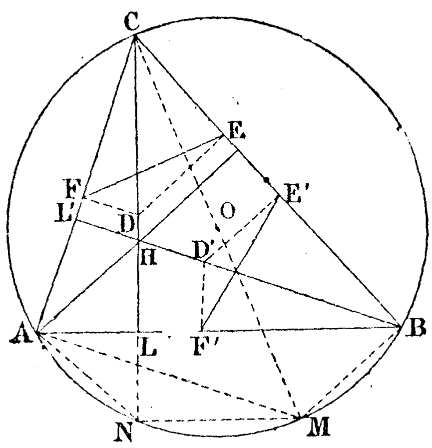



Fig. 1443.

Menons le diamètre COM, prolongeons la hauteur CD jusqu'au cercle circonscrit.

A cause de l'angle droit CNM, la base AB est parallèle à NM.

Les quadrilatères inscriptibles CDEF et CAMB sont semblables comme composés de deux triangles rectangles respectivement semblables CED, CAM et CFD, CBM, dans lesquels les angles aigus en C sont respectivement égaux; donc

$$\frac{FE}{CD} = \frac{AB}{CM}; \quad \text{d'où} \quad FE = \frac{CD \cdot AB}{2R};$$

de même,

$$F'E' = \frac{BD' \cdot CA}{2R}.$$

Or les numérateurs sont égaux, car D et D′ divisent les hauteurs en parties proportionnelles, et $CL \cdot AB = BL' \cdot CA$;

donc $$EF = E'F', \quad \text{etc.}$$

**Théorème 991.**

**2304.** 1° *La longueur de l'antiparallèle qui joint les projections sur les côtés adjacents, du pied de chaque hauteur d'un triangle, s'obtient en divisant l'aire de ce triangle par le rayon du cercle circonscrit.*

2° *Les projections des pieds des trois hauteurs d'un triangle sont six points concycliques.*

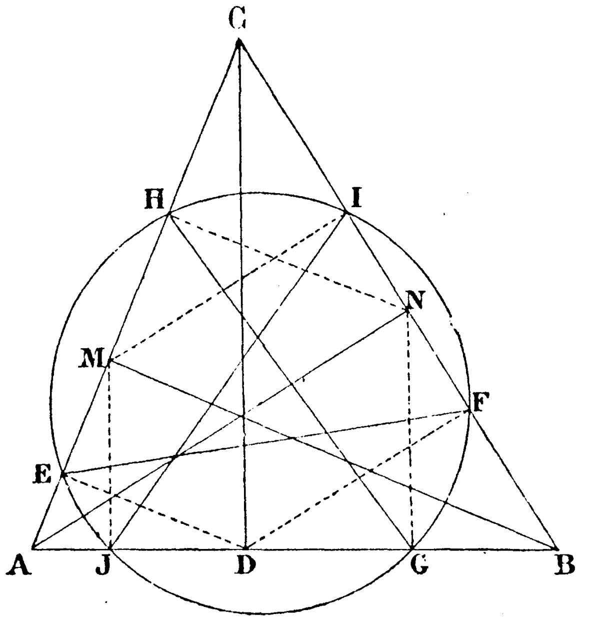


Fig. 1444.

D'après le théorème précédent, on a $EF = \frac{CD \cdot AB}{2R}$; dans le cas particulier où D est le pied même de la hauteur, on peut écrire :

$$EF = \frac{S}{R}, \qquad (1)$$

en représentant par S l'aire du triangle.

2° D'après la formule ci-dessus, les trois antiparallèles EF, IJ, GH sont égales entre elles; donc les six projections sont concycliques (n° 2295, 2°).

*Remarque.* Le cercle des six projections est nommé *cercle de Taylor;* nous y reviendrons ultérieurement (n$^{os}$ 2391 et 2393 **a**).

**Théorème 992.**

**2305.** *Par le pied* S *d'une symédiane* CS, *on mène les antiparallèles* SD, SE *relatives aux côtés des deux autres sommets* A *et* B; *la circonférence circonscrite au triangle* DSE 1° *est tangente à* AB *au pied* S *de la symédiane;* 2° *elle coupe les deux autres côtés en donnant une antiparallèle égale aux deux premières.*

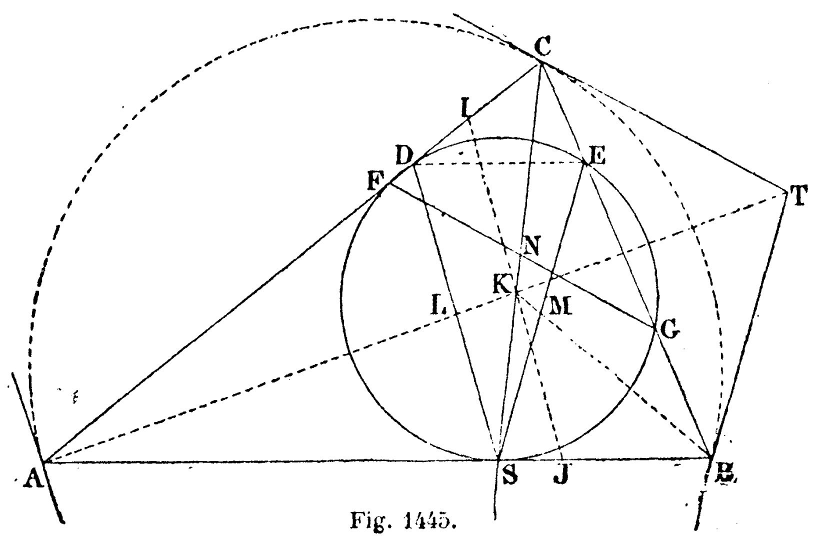


Fig. 1445.

1° Les antiparallèles SD, SE sont égales entre elles et également inclinées sur AB (n° 2296); donc le cercle circonscrit au triangle isocèle DSE est tangent à la base du triangle, au pied de la symédiane.

2° Les six points déterminés par trois antiparallèles égales sont concycliques; donc le cercle déterminé par trois d'entre eux donne une antiparallèle FG égale aux deux premières.

## Inversion isogonale.

**2306.** *Historique.* L'*inversion isogonale* est due au commandant J.-J.-A. MATHIEU. En 1865, l'auteur, alors capitaine d'artillerie, sous-directeur de la fonderie de Toulouse, publia dans les *Nouvelles Annales mathématiques* divers articles remarquables de *géométrie comparée* (*N. A.*, 1865, p. 393, 481, 592), en indiquant un nouveau mode de transformation des figures à l'aide de *points*, de *droites inverses*.

Or, depuis quelques années, le mode de transformation par *rayons vecteurs réciproques* est généralement connu sous le nom d'*inversion*, donné par BRAVAIS dans le cas particulier où la *puissance d'inversion* est représentée par l'unité; afin d'éviter toute équivoque, M. NEUBERG a proposé d'appeler *points isogonaux*, *droites isogonales*, les points et les droites inverses de M. MATHIEU; néanmoins les auteurs emploient encore assez souvent les termes mêmes du commandant d'artillerie, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible à redouter.

**2307.** *Définition.* On nomme *droites isogonales* deux droites qui, partant d'un même sommet d'un triangle, font des angles égaux avec la bissectrice de ce même angle.

Les *points isogonaux* sont donnés par deux groupes de trois droites isogonales deux à deux et partant des sommets du *triangle de référence*.

Les *points inverses* ont pour coordonnées normales des valeurs inverses, et c'est ce qui justifie le premier nom qui leur avait été donné : si l'un d'eux a pour coordonnées $a$, $b$, $c$, l'autre a pour coordonnées $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$.

Le second nom, *points isogonaux*, provient du mode graphique de détermination, qui permet de déduire l'un de l'autre à l'aide de *droites isogonales*.

**2308. Note.** Pour l'étude de l'*inversion* isogonale, on a d'abord les articles rappelés ci-dessus dans les *Nouvelles Annales* de 1865; ceux de M. VIGARIÉ dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1885; le chap. I du livre V par M. SIMMONS, dans le *Companion to the weekly Problem Papers* de M. J. MILNE, etc.

### Théorème 993.

**2309.** 1° *Les distances aux côtés de l'angle de deux points pris sur deux droites isogonales sont inversement proportionnelles entre elles.*

2° *Le produit des distances de ces deux mêmes points à l'un des côtés de l'angle égale le produit des distances à l'autre côté.* (MATHIEU, *N. A.*, 1865, p. 398.)

1° Par duplication ou retournement (n° 145), on a évidemment :

$$\frac{M'D'}{M'E'} = \frac{NH}{NG} \quad \text{ou} \quad \frac{MD}{ME} = \frac{NH}{NG}.$$

2° De $\dfrac{MD}{ME} = \dfrac{NH}{NG}$,

on déduit : $MD \cdot NG = ME \cdot NH$.

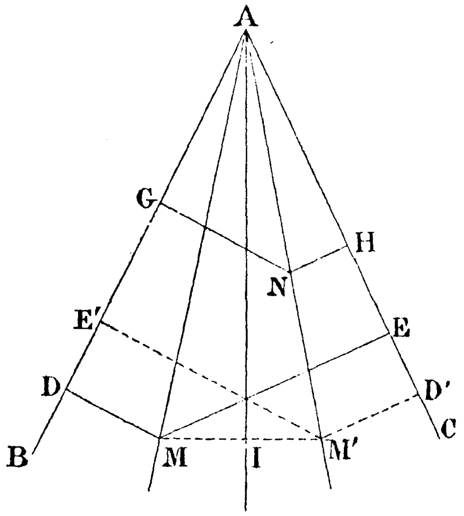



Fig. 1446.

**2310.** *Remarque.* Sans recourir à la duplication, on pourrait dire : Les quadrilatères ADME, AHNG sont semblables; donc

$$\frac{MD}{ME} = \frac{NH}{NG}, \quad MD \cdot NG = ME \cdot NH.$$

**Théorème 994.**

**2311.** 1° *Les pieds des quatre perpendiculaires abaissées des deux points isogonaux* M *et* N, *sur les côtés de l'angle, sont concycliques.*

2° *La droite qui joint les deux projections d'un des points donnés est perpendiculaire à l'isogonale qui passe par l'autre point.*

1° $\dfrac{AD'}{AH} = \dfrac{AE'}{AG}$ ou $\dfrac{AD}{AH} = \dfrac{AE}{AG}$.

Les droites DE, GH sont antiparallèles ; par suite, le quadrilatère DEHG est inscriptible.

Le centre O est au milieu de MN.

2° Le quadrilatère AGNH étant inscriptible, l'angle NGH = NAH = GAM; or AG est perpendiculaire à GN, donc AM est aussi perpendiculaire à GH.

De même, DE est perpendiculaire à AN.

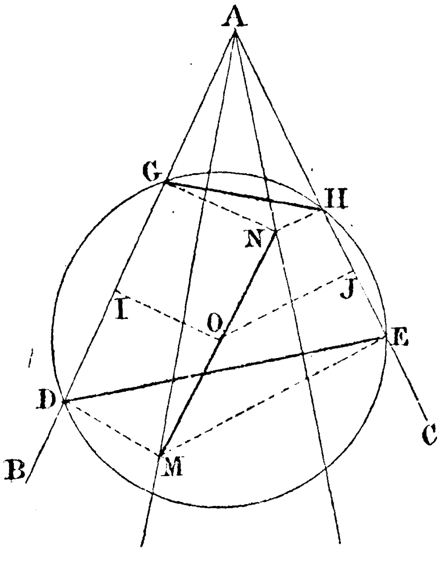



Fig. 1447.

**Note.** Question très élémentaire déjà indiquée au livre III, n° 1118, mais qu'il fallait rappeler dans le § de l'*Inversion isogonale*.

**Théorème 995.**

**2312.** *Lorsqu'une circonférence coupe les côtés d'un angle* A, *et que par les points d'intersection on élève des perpendiculaires aux côtés, ces perpendiculaires forment un parallélogramme dont les sommets opposés déterminent des lignes isogonales.*

Soit N′ le symétrique de N par rapport à la bissectrice; on a successivement :

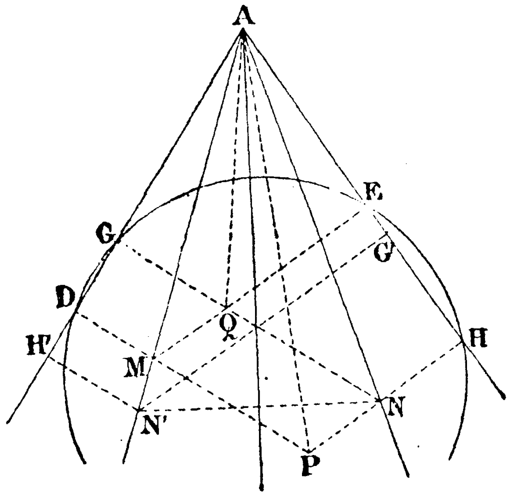



Fig. 1448.

$$AD \,.\, AG = AE \,.\, AH\,;$$

d'où

$$\frac{AD}{AH} = \frac{AE}{AG} \quad \text{ou} \quad \frac{AD}{AH'} = \frac{AE}{AG'}\,;$$

les trois points A, M, N′ sont donc en ligne droite (nº 1117 **a**) ; par conséquent, les angles MAD, NAH sont égaux.

**2313.** *Remarques.* 1º Les sommets P et Q donnent un autre couple de droites isogonales.

2º Lorsque la circonférence est tangente à l'un des côtés de l'angle, on n'obtient qu'un seul couple de droites isogonales.

**Théorème 996.**

**2314.** *Deux droites isogonales* AM, AN *déterminent sur le côté opposé des segments tels que les produits* CM . CN *et* BM . BN *sont dans le rapport des carrés* $b^2$ *et* $c^2$ *des côtés adjacents.*

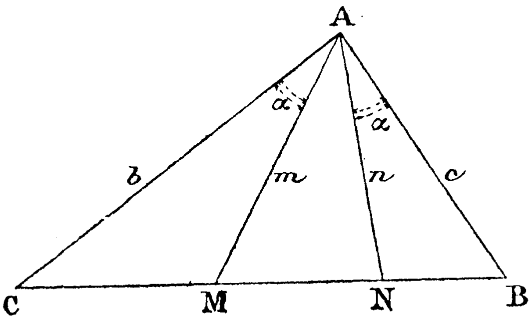



Fig. 1449.

Les triangles CAM, BAN d'une part et CAN, BAM de l'autre ont respectivement un angle égal en A ; d'ailleurs ils ont même hauteur, donc leurs bases respectives sont entre elles comme les produits des côtés qui comprennent les angles égaux ; on a donc :

$$\frac{CM}{BN} = \frac{bm}{cn}, \quad \text{et} \quad \frac{CN}{BM} = \frac{bn}{cm}\,;$$

d'où

$$\frac{CM \,.\, CN}{BM \,.\, BN} = \frac{b^2}{c^2}.$$

**2315.** *Corollaire.* Dans le cas où AM est la médiane et AN la symédiane, $CM = BM$; on a donc simplement :

$$\frac{CN}{BN} = \frac{b^2}{c^2}.$$

Ainsi *la symédiane divise le côté opposé en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents.* D'ailleurs nous démontrerons directement cette propriété (nº 2339, 2º).

**Théorème 997.**

**2316.** *Les isogonales des trois droites qui joignent au sommet opposé d'un triangle les points où une transversale coupe les côtés de ce triangle, rencontrent ces mêmes côtés en trois points situés sur une même droite.*

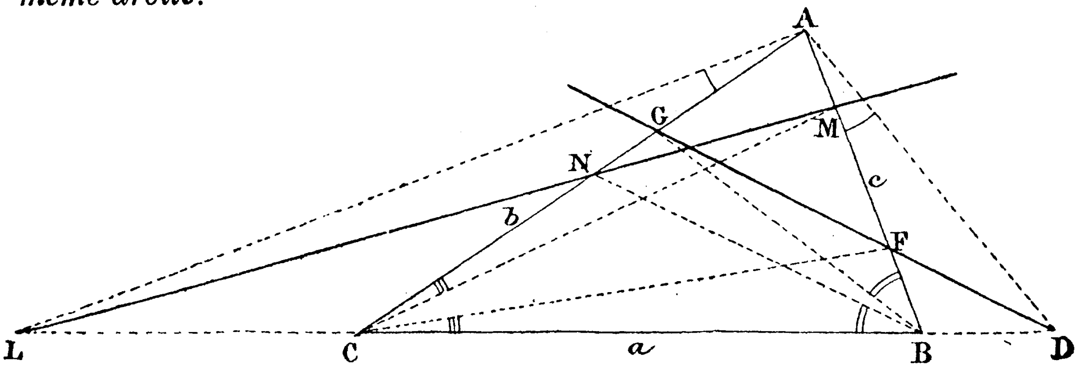



Fig. 1450.

Les isogonales AD, AL donnent :

$$\frac{CD \cdot CL}{BD \cdot BL} = \frac{b^2}{c^2}.$$

On a de même : $\dfrac{BF \cdot BM}{AF \cdot AM} = \dfrac{a^2}{b^2}$, et $\dfrac{AG \cdot AN}{CG \cdot CN} = \dfrac{c^2}{a^2}$.

En multipliant ces trois égalités membre à membre, et réduisant, puisque la transversale DFG donne :

$$\frac{CD}{BD} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AG}{CG} = 1,$$

on a aussi :
$$\frac{CL}{BL} \cdot \frac{BM}{AM} \cdot \frac{AN}{CN} = 1;$$

donc les trois points L, M, N sont en ligne droite.

**Théorème 998.**

**2317.** 1° *Lorsqu'on joint un point* M *aux trois sommets d'un triangle* ABC, *les droites isogonales de* MA, MB, MC *se coupent en un même point* M′. *Ce point est le point isogonal ou inverse du premier.*

2° *Les projections de deux points isogonaux* M *et* M′, *sur les côtés du triangle donné, sont six points concycliques.*

1° Soient AM′, BM′ les isogonales de AM, BM.

On a : $\dfrac{MD}{MG} = \dfrac{M'G'}{M'D'}$, et $\dfrac{MD}{ME} = \dfrac{M'E'}{M'D'}$; (nº 2309)

d'où $\dfrac{MD}{MG} : \dfrac{MD}{ME} = \dfrac{M'G'}{M'D'} : \dfrac{M'E'}{M'D'}$; $\dfrac{ME}{MG} = \dfrac{M'G'}{M'E'}$;

donc les droites CM, CM′ sont isogonales par rapport à la bissectrice de l'angle C.

2° En considérant M et M′ par rapport à l'angle A, on sait que les quatre points D, D′, G, G′ sont sur une circonférence dont le centre est au point milieu de MM′ (nº 2311).

Or, en considérant M et M′ par rapport à l'angle B, les quatre points D, D′, E, E′ sont sur une circonférence ayant O pour centre; donc les six projections sont concycliques.

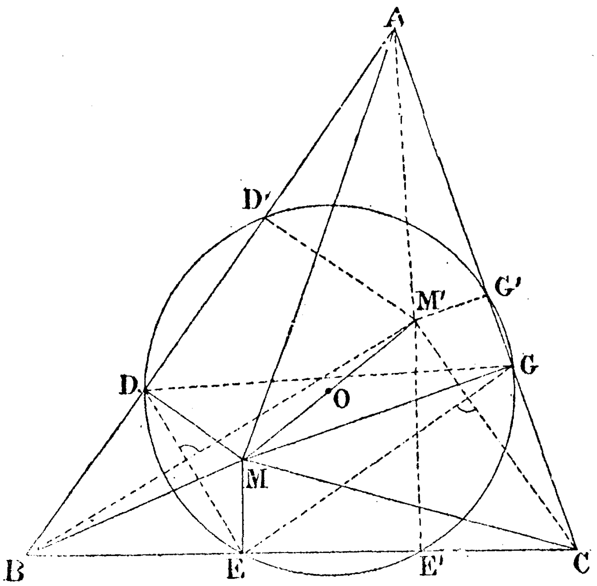


Fig. 1451.

**2318.** *Remarques.* 1° Le triangle DEG, formé en joignant deux à deux les projections d'un point M sur les côtés de ABC, est nommé *triangle podaire* de ce point (n° 2282).

2° La droite DE est perpendiculaire à BM′ (n° 1118, 3°); donc les côtés du triangle podaire d'un point sont respectivement perpendiculaires aux droites isogonales du *point inverse* du point considéré.

3° La hauteur et le diamètre du cercle circonscrit qui partent du même sommet d'un triangle sont des droites isogonales (n° 646).

4° Le triangle qui joint deux à deux les pieds des hauteurs d'un triangle est nommé *triangle orthique;* d'après la remarque précédente 2°, on reconnait que les côtés du *triangle orthique* sont respectivement perpendiculaires aux rayons du cercle circonscrit qui aboutissent aux sommets du triangle donné, et l'on retrouve ainsi le *théorème de Nagel* (n° 663).

5° Le point de concours des hauteurs d'un triangle (ou *orthocentre*) et le centre du cercle circonscrit sont des *points isogonaux.*

Le *point de Lemoine*, ou point de concours des symédianes, est l'isogonal du centre de gravité.

Le centre du cercle inscrit se correspond à lui-même dans l'inversion isogonale. Il en est de même de chacun des centres des cercles exinscrits.

**Note.** L'appellation *orthocentre* est due à M. BESANT, du collège Saint-Jean, à Cambridge, auteur de nombreuses questions dans les *N. A.*, en 1871 et 1872.

**Théorème 999.**

**2319.** *Trois droites parallèles, issues des trois sommets d'un triangle, ont pour isogonales trois droites qui se coupent sur le cercle circonscrit, et réciproquement.*

Soient les parallèles AD, BE, CF.

Pour obtenir l'isogonale de AD, on peut mener DM parallèle à BC, et l'on obtient l'isogonale AM. Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que l'isogonale d'une des deux autres parallèles, celle de BE par exemple, passe par le point M du cercle circonscrit. En d'autres termes, il faut prouver que la parallèle menée par E au côté AC, afin de déterminer l'isogonale de BE, passe par le point M ; or l'arc AE = BD, à cause

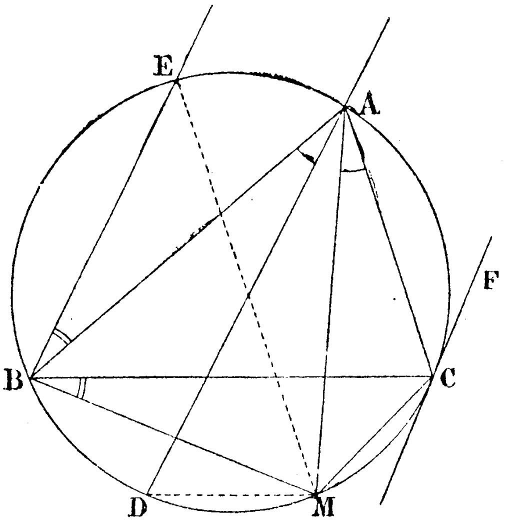



Fig. 1452.

des parallèles, égale aussi MC; donc la parallèle menée au côté AC par le point E passe par M.

De même CM est l'isogonale de CF.

**2320.** *Réciproquement.* Si l'on prend le point M sur le cercle circonscrit, ce qui donne MA, MB dont il faut mener les isogonales, on peut tracer pour cela les droites MD, ME respectivement parallèles à CB et à CA; or, à cause des arcs égaux BD, MC, AE, les droites AD et BE sont parallèles; il en est de même de CF.

Le point isogonal d'un point M du cercle circonscrit est à l'infini, dans la direction des parallèles AD, BE, CF.

**2321.** *Positions relatives de deux points isogonaux.* Il suffit de faire mouvoir le premier point dans un des angles donnés, A par exemple, et dans son opposé par le sommet; le point isogonal sera constamment dans l'un ou l'autre de ces angles, car si le premier point parcourt la droite MAR, son isogonal devra parcourir la droite AR', isogonale de AR (fig. 1453).

1° *Si le point donné* M *est à l'infini,* M' *est sur l'arc* BM'C *du cercle circonscrit,* ainsi qu'on l'a démontré (n° 2320).

2° *Lorsque le point donné* N *est dans l'opposé par le sommet de l'angle* A *du triangle,* N' *est dans le segment circulaire compris entre le côté et l'arc* BC; car l'isogonale CN' de CN est comprise dans l'angle M'CB égal à l'angle ACM.

3° Si le point donné coïncide avec le sommet A, la position du point isogonal est indéterminée sur le côté opposé BC.

4° *Lorsque le point donné* O *est dans le triangle, il en est de même de son isogonal* O'; car on l'obtient en faisant, vers l'intérieur du triangle, l'angle BCO', égal à l'angle ACO.

5° *Si le point donné est sur le côté* BC, *son isogonal est au sommet* A.

6° *Lorsque le point donné* P *est entre le côté et l'arc* BC, *l'isogonal* P' *est dans l'angle opposé par le sommet.*

C'est le cas réciproque de N, N'.

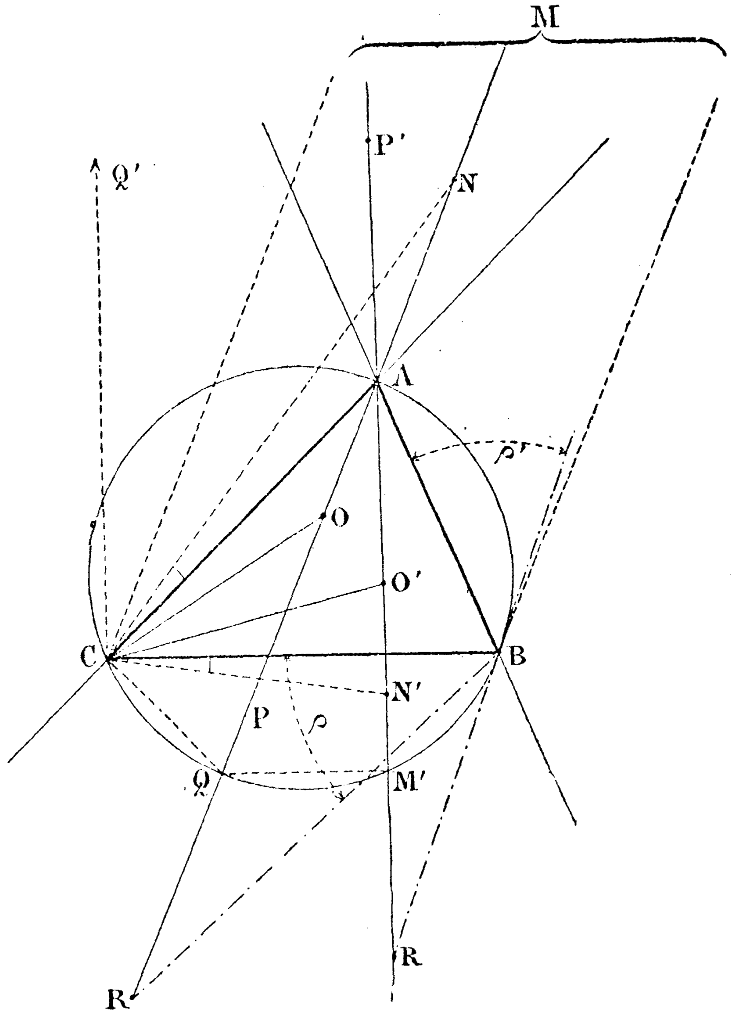



Fig. 1453.

7° *Si le point donné* Q *est sur le cercle circonscrit, l'isogonal est à l'infini dans la direction de la droite isogonale de* AQ.

C'est le cas réciproque de M, M'.

8° *Lorsque le point donné* R *est hors du cercle circonscrit, dans l'angle* A *proprement dit, l'isogonal* R' *est aussi hors de ce même cercle et du même côté que* R.

Pour déterminer R', on a fait l'angle $\rho' = \rho$.

**2322.** Résumé. *Les deux points isogonaux sont tous les deux à l'intérieur du triangle, ou tous les deux à l'extérieur; si l'un d'eux est sur le cercle circonscrit, l'autre est à l'infini.*

### Théorème 1000.

**2323.** *Deux points isogonaux sont les foyers d'une conique tangente aux trois côtés du triangle de référence; on obtient une ellipse ou une hyperbole suivant que les deux points sont à l'intérieur du triangle, ou tous les deux à l'extérieur.*

Soient F, F′ deux points isogonaux.

Les projections de ces points sur les trois côtés sont six points concycliques (n° 2317, 2°); le centre O est le point milieu de FF′. Le cercle ainsi décrit est le cercle principal d'une ellipse, dont F, F′ sont les foyers et dont les côtés du triangle de référence sont des tangentes, car on sait que les projections P, Q, R des foyers sur les tangentes sont sur le cercle principal.

On pourrait dire aussi : Les produits des distances des deux points isogonaux à chacun des côtés du triangle sont égaux entre eux, car on a :

$$FH \cdot F'P' = FQ \cdot F'Q' = FR \cdot F'R', \qquad (\text{n}^\circ\ 2309,\ 2^\circ)$$

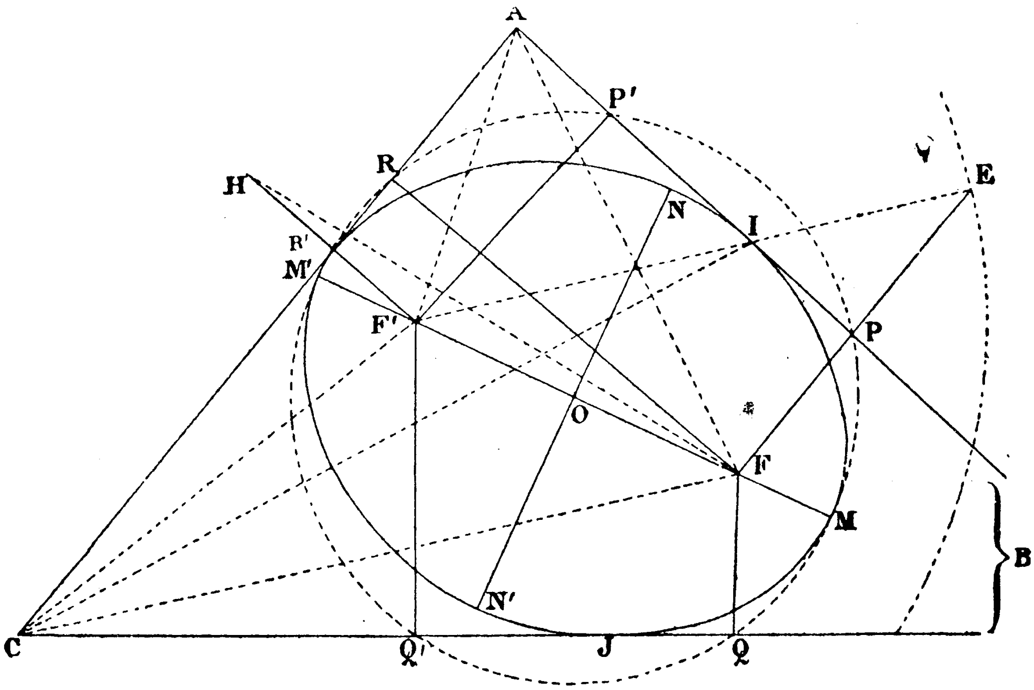



Fig. 1454.

propriété bien connue de l'ellipse (n° 2084); d'ailleurs ce produit constant égale le carré du demi-petit axe, l'ellipse est donc bien déterminée; enfin, pour avoir les points de contact, il suffit de prendre le symétrique E du foyer F par rapport à la tangente et de mener F′IE.

On sait aussi que les tangentes AP, AR, issues d'un même point A, font des angles égaux avec les droites AF, AF′, qui joignent ce point A aux foyers, propriété bien connue des coniques.

**3324.** *Remarques.* 1° Suivant la position des points isogonaux pris pour foyers, on obtient une ellipse jouissant de quelque propriété particulière : tangente, par exemple, aux côtés, aux pieds mêmes des symédianes, etc.

2° Lorsque les points isogonaux sont extérieurs au triangle, on obtient une hyperbole tangente aux trois côtés du triangle; le cercle principal se détermine comme pour l'ellipse.

**Théorème 1001.**

**2325.** *Deux points isogonaux, dont l'un* F *est sur le cercle circonscrit et l'autre* F′ *à l'infini, correspondent à une parabole tangente aux trois côtés du triangle* ABC; *le point donné* F *est le foyer, l'axe de la courbe est dans la direction des trois droites isogonales parallèles menées par les sommets* A, B, C.

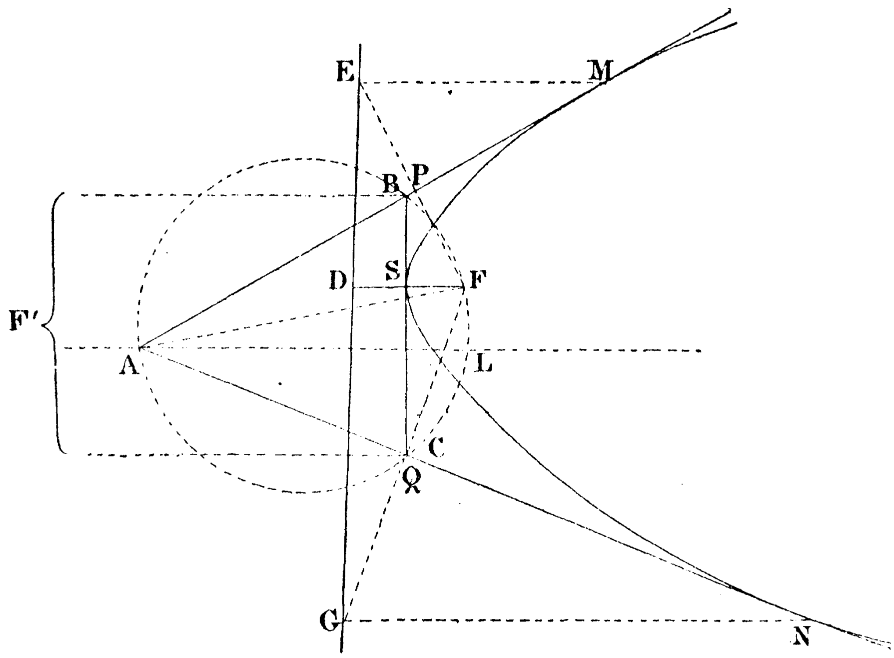



Fig. 1455.

Soit F′ à l'infini dans la direction LA, et F son isogonal.

Les projections du point F du cercle circonscrit déterminent une *droite de Simson* du triangle donné, c'est la tangente au sommet; les points symétriques E, D, G, par rapport aux côtés, du foyer F, donnent la directrice EDG; puis des parallèles EM, GN à la direction AL de l'axe de la parabole, font connaître les points de contact M, N.

**Théorème 1002.**

**2326.** *La transformée isogonale d'une circonférence qui passe par deux des sommets du triangle de référence est une autre circonférence passant par les deux mêmes sommets* (fig. 1456).

Soient M et N deux points isogonaux à l'intérieur du triangle; entre les angles M et N des triangles BMC, BNC, on a la relation constante

$$M + N = \pi + A.$$

En effet, $M = A + \beta + \gamma$ et $N = \pi - \beta - \gamma$;

donc $$M + N = \pi + A.$$

Par suite, lorsque le point M décrit la circonférence MBC, le point N décrit une circonférence BNC.

**2327.** *Remarques.* 1° Pour déterminer facilement la circonférence qui est la transformée de BMC, il suffit de mener la bissectrice AI, de faire un angle $BCE = ACD$, et de faire passer une circonférence par BEC.

2° On démontre facilement que la somme des angles M et N est supplémentaire, ou égale à l'angle A, suivant que les points M et N, placés en dehors du cercle circonscrit, sont situés dans l'angle A ou bien dans l'angle adjacent supplémentaire; tandis que la différence des angles M et N est supplémentaire de A, ou égale à l'angle A suivant que le segment du cercle circonscrit à l'intérieur duquel se trouve l'un des points M et N est opposé ou adjacent à l'angle A; le second des points se trouve alors dans l'angle opposé par le sommet à celui qui s'appuie sur le segment considéré. (*J. M. E.*, 1891, p. 114. Solutions et développe-

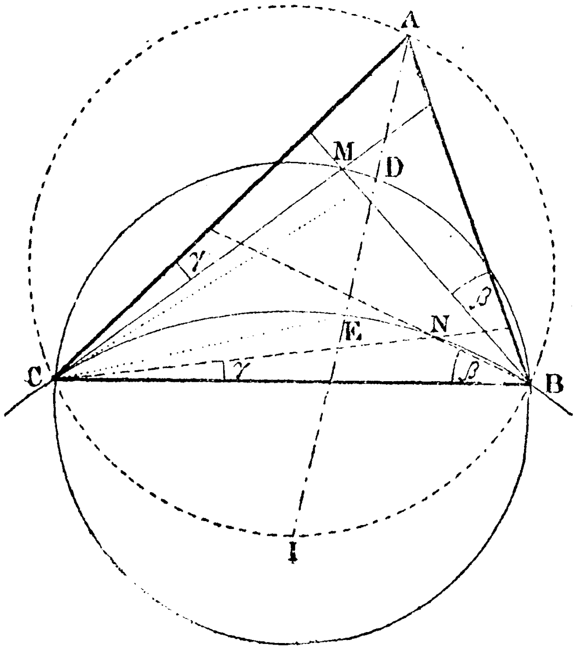



Fig. 1456.

ments par SOLLERTINSKY, professeur à Gatchina, de questions posées par M. BERNÈS, professeur honoraire à Paris. Cette question avait déjà été traitée par M. LEMOINE dans la *Nouvelle Correspondance*, tome IV, 1878, p. 60.)

La relation générale entre les angles M et N est la suivante :

$$\text{Tang.}\,(M \pm N) \pm \text{tang.}\,A = 0.$$

(Voir *N. A.*, 1865, p. 398 de l'article fondamental de M. J.-J.-A. MATHIEU, alors capitaine d'artillerie.)

Le cercle qui passe par B et C, puis par le centre du cercle inscrit et par celui de l'exinscrit tangent à BC, est à lui-même son propre inverse. Pour obtenir des points isogonaux, il suffit de mener par le sommet A des couples de lignes isogonales.

4° La transformée isogonale d'une droite est une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant que la droite coupe le cercle en deux points, lui est tangente ou ne le rencontre pas; celle du cercle, sauf les cas particuliers ci-dessus, est une *quartique* dont l'étude échappe aux *Éléments de Géométrie*. (On peut voir la question d'agrégation des sciences mathématiques, en 1890, dans la *Revue des Mathématiques spéciales*, par M. B. NIEWENGLOWSKI, alors professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, 1890, p. 8; article de M. A. MALUSKI.)

**Théorème 1003.**

**2328.** *Le triangle podaire d'un point* M *est semblable au triangle antipodaire du point isogonal* M'.

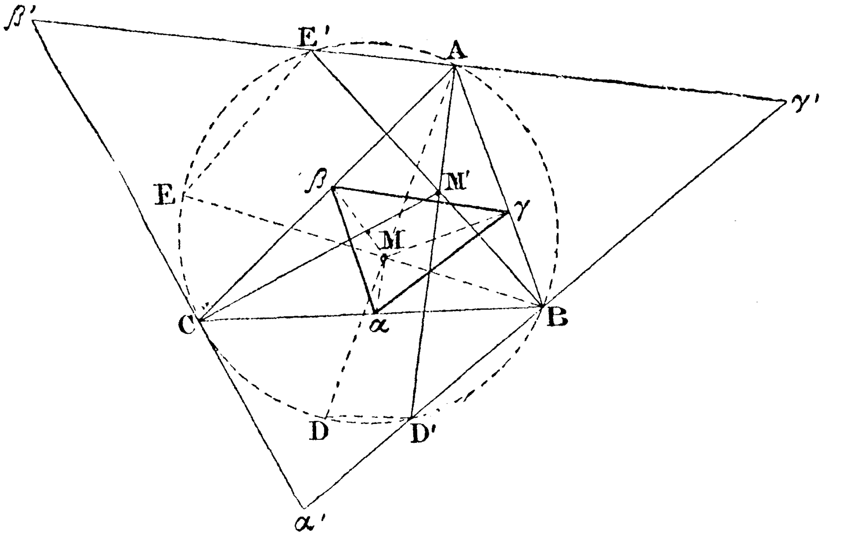



Fig. 1457.

Soit M un point quelconque; en menant des parallèles DD', EE', on détermine son isogonal M'. Il faut prouver que $\alpha\beta\gamma$, podaire de M, est semblable à l'antipodaire $\alpha'\beta'\gamma'$ de M'.

Or la droite $\beta\gamma$, qui joint les projections de M, est perpendiculaire à la droite AM' (nº 2311); donc $\beta\gamma$ est parallèle à $\beta'\gamma'$, etc.

*Remarque.* D'après un théorème connu des *Annales de Gergonne*, tome II (1811, 1812), p. 93, l'aire du triangle inscrit et circonscrit ABC est la moyenne géométrique des aires de $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$. (Voir *E. de G.*, nº 1611.)

**Théorème 1004.**

**2329.** *Les droites isotomiques de trois céviennes concourantes d'un triangle sont elles-mêmes concourantes.*

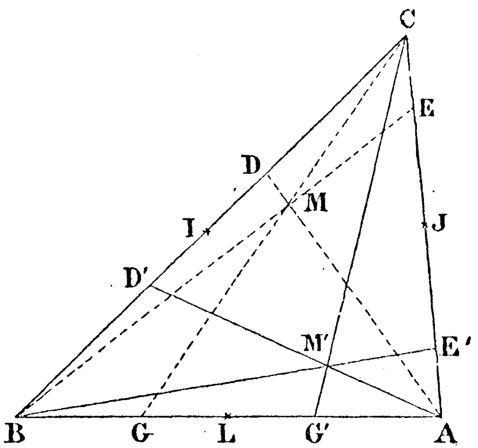



Fig. 1458.

Définition. *On nomme droites isotomiques deux droites qui, partant d'un même sommet d'un triangle, déterminent sur le côté opposé, à partir de son point milieu, des segments égaux entre eux. Les points équidistants du point milieu du côté considéré sont isotomiques entre eux.*

Soient

$$\text{ID} = \text{ID}', \ \text{JE} = \text{JE}', \ \text{LG} = \text{LG}';$$

les droites AD', BE', CG' sont concourantes.

En effet, la relation de Céva, applicable aux trois premières, est :

$$\frac{CD}{DB} \cdot \frac{GB}{GA} \cdot \frac{AE}{EC} = 1.$$

Or, si l'on remplace CD par son égale BD', BD par D'C, etc.,

on obtient : $$\frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} \cdot \frac{AG'}{G'B} = 1;$$

donc les trois céviennes AD', BE', CG' sont concourantes.

**2330**. *Remarques.* 1° *Points réciproques.* Les droites isotomiques CG, CG', sont aussi nommées droites réciproques, et les points M et M' sont appelés *points réciproques.*

2° On sait que les *coordonnées barycentriques* $\alpha$ et $\beta$ du point M sont proportionnelles aux aires des triangles CMB, CMA ; elles sont donc proportionnelles aux segments BG, GA, c'est-à-dire qu'on a :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{BG}{GA};$$

donc les coordonnées $\alpha'$, $\beta'$ de M' *sont inverses des premières,* car on a :

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{BG'}{G'A}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{GA}{BG};$$

ainsi $$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

3° Pour les points *inverses* ou *isogonaux* (n° 2316), ce sont les *coordonnées normales* qui sont inverses ; si $x$ et $y$ sont les coordonnées d'un premier point, $x'$ et $y'$ celles du point isogonal, on a :

$$\frac{x}{y} = \frac{y'}{x'}.$$

4° La considération des *points réciproques* est due à M. G. DE LONGCHAMPS (voir *Note,* n^os 1231 et 1242, **d**).

## Symédianes.

**2331**. *Définitions.* La symédiane est la symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice qui part du même sommet.

On a déjà vu que la symédiane du sommet A d'un triangle ABC est le lieu du point milieu des antiparallèles à BC, et qu'elle est aussi le lieu des points d'instersection des antiparallèles égales relativement aux côtés des angles B et C (n^os 2294, 2° et 2296).

La symédiane jouit de diverses propriétés, que l'on peut prendre successivement comme définition de cette ligne, afin d'en déduire, comme conséquences, les autres propriétés : nous en donnerons divers exemples.

### Théorème 1005.

**2332**. *La symédiane issue d'un sommet d'un triangle passe par le point de concours des tangentes menées au cercle circonscrit par les autres sommets.*

On sait que la symédiane est le lieu des points d'intersection des antiparallèles égales ID, JE et des droites égales LD, LE (fig. 1459); d'ailleurs les tangentes CP, BP sont égales et antiparallèles par rapport aux côtés des angles B et C, donc la symédiane AL passe par le point P.

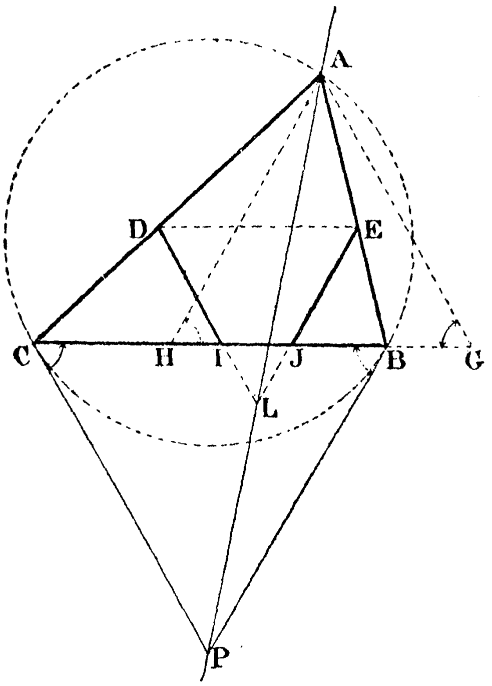



Fig. 1459.

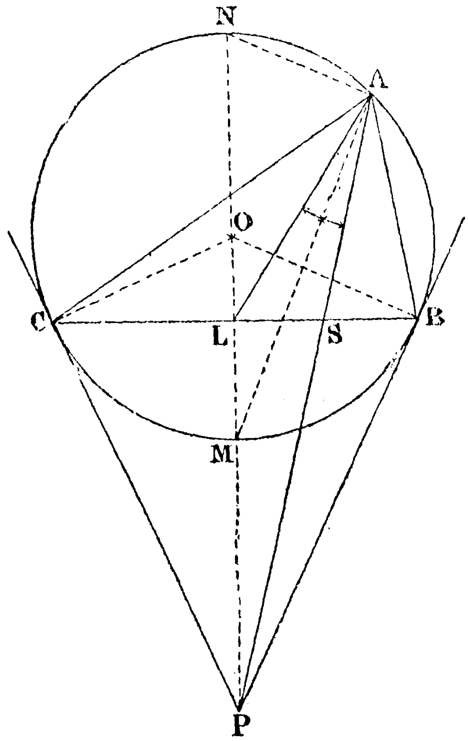



Fig. 1460.

*Autre démonstration.* Menons la médiane AL (fig. 1460), la bissectrice AM, et prouvons que AP est symétrique de AL par rapport à la bissectrice AM.

Le triangle rectangle OBP donne $OL \cdot OP = r^2$, d'où on déduit successivement :

$$\frac{r}{OL} = \frac{OP}{r}, \quad \frac{r - OL}{r + OL} = \frac{OP - r}{OP + r}, \quad \frac{LM}{LN} = \frac{PM}{PN};$$

donc AM est la bissectrice intérieure de l'angle LAP, et AN la bissectrice extérieure (G., n° 307).

Ainsi AP est la symédiane; en d'autres termes, la symédiane relative au sommet A passe par le pôle P de la base BC.

**Note.** Pour une *troisième démonstration*, voir les *Éléments de Géométrie* d'Amiot, revus par F. Vintéjoux. (Édition de 1897, page 589, *théorème* V.)

* F. Vintéjoux, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis; actuellement professeur honoraire.

### Théorème 1006.

**2334.** *Les distances d'un point de la symédiane aux côtés adjacents sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés.*

Soient CM la médiane, CS la symédiane (fig. 1461); ces deux droites étant symétriques par rapport à la bissectrice, les angles BCM, ACS sont égaux; il en est de même de BCS et ACM.

Les triangles rectangles CSX, CMQ sont semblables ; il en est de même de CSY et CMP.

Ces triangles donnent :

$$\frac{x}{q}=\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{CM}} \quad \text{et} \quad \frac{y}{p}=\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{CM}};$$

d'où

$$\frac{x}{y}=\frac{q}{p};$$

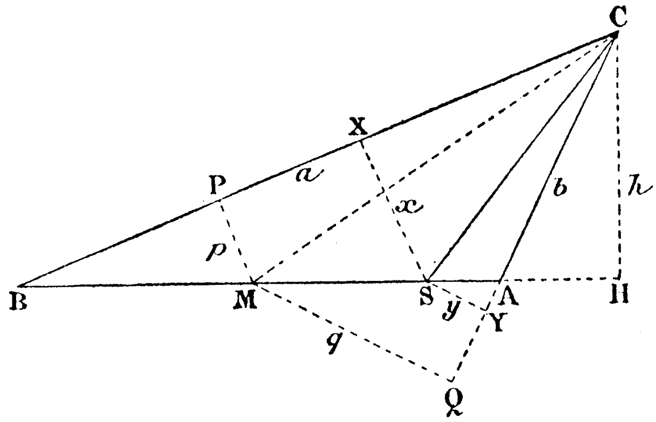



Fig. 1461.

or les triangle ACM, BCM ont des bases égales et même hauteur ; donc

$$ap=bq; \quad \text{d'où} \quad \frac{q}{p}=\frac{a}{b}.$$

Ainsi

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}.$$

**2334.** *Remarque.* En s'appuyant sur la théorie des droites isogonales, on peut se borner à dire :

$$\frac{x}{y}=\frac{q}{p},$$

et comme les distances d'un point quelconque de la médiane aux deux côtés sont inversement proportionnelles à ces côtés, on a :

$$\frac{q}{p}=\frac{a}{b}; \quad \text{d'où} \quad \frac{x}{y}=\frac{a}{b}.$$

**Théorème 1007.**

**2335.** *Les segments déterminés par chaque symédiane sur le côté opposé sont proportionnels aux carrés des côtés adjacents.*

1re *Démonstration.* (Voir no 2315.)

2e *Démonstration.* D'après le théorème précédent, on a :

$$\frac{\mathrm{BS}}{x}=\frac{a}{h}, \quad \frac{\mathrm{AS}}{y}=\frac{b}{h};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{AS}}=\frac{ax}{by}=\frac{a^2}{b^2}.$$

3e *Démonstration.* Afin d'avoir un point G de la symédiane, construisons des carrés sur $a$ et $b$; la droite GCSH est la symédiane, puisque les distances du point G aux côtés $a$ et $b$ sont dans le rapport de $a$ à $b$.

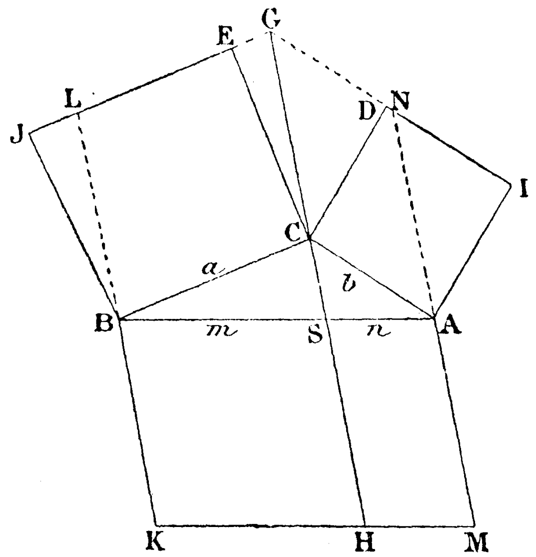



Fig. 1462.

En prenant $SH = CG$, etc., on obtient des parallélogrammes AH, BH respectivement équivalents aux carrés $a^2$, $b^2$.

Donc $$\frac{m}{n} = \frac{a^2}{b^2}.$$

4e *Démonstration*, par M. Thiry. (Voir ci-après, no 2339.)

### Théorème 1007. — I.

**2336.** *Si les segments sont proportionnels aux carrés des côtés adjacents, la droite* CS *est la symédiane.*

En effet, les triangles CSB, CSA ont des angles supplémentaires en S; ils sont donc entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle; d'ailleurs CS est un facteur commun; il suffit donc d'écrire :

$$\frac{BS}{AS} = \frac{ax}{by}.$$

Mais on a donné : $$\frac{BS}{AS} = \frac{a^2}{b^2};$$

donc $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, et la droite AS est la symédiane.

### Théorème 1008.

**2337.** *La tangente menée au cercle circonscrit par le sommet* C *d'un triangle donné est le lieu des points dont les distances sont proportionnelles aux côtés* a *et* b *de cet angle* (abstraction faite du signe négatif d'une de ces distances).

Soit CT la tangente; on doit avoir, au signe près, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, de même qu'on a ce rapport pour les points de la symédiane CS.

Par le sommet C menons CL parallèle à la base, les droites CT, CL sont symétriques par rapport aux bissectrices CI, CJ ; or les triangles

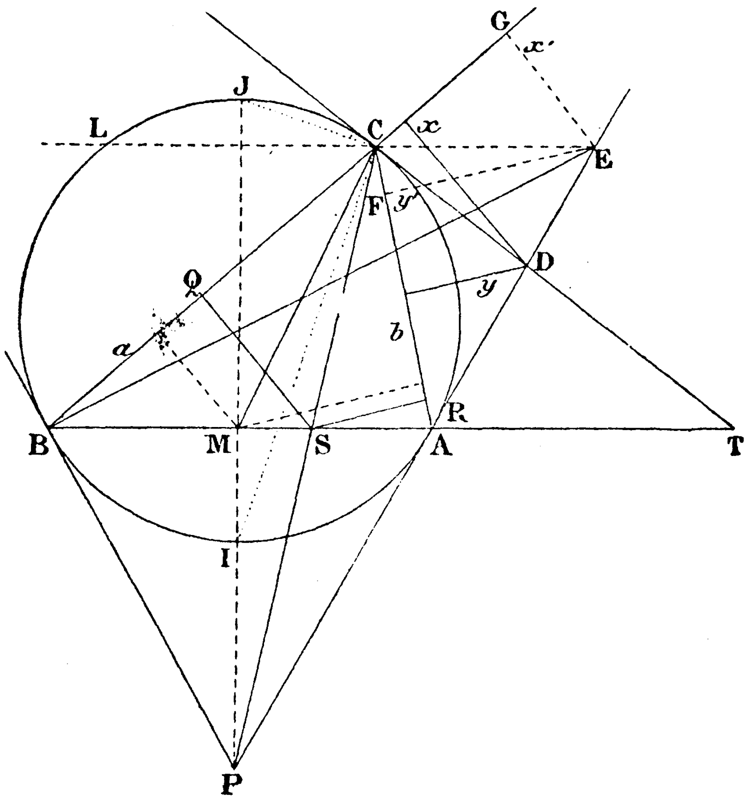



Fig. 1463.

EBC, EAC sont équivalents comme ayant même base CE et même hauteur ; on a donc :

$$a \,.\, \mathrm{EG} = b \,.\, \mathrm{EF} \quad \text{ou} \quad \frac{x'}{y'} = \frac{b}{a};$$

donc pour la ligne symétrique CT, on a le rapport inverse :

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$

**2338.** *Remarques.* 1° La tangente CT, c'est-à-dire l'antiparallèle de AB, a reçu le nom de *symédiane extérieure*, à cause de la propriété énoncée ci-dessus.

2° La distance $x$ est *positive*, parce qu'elle a même direction que SQ ; $y$ est *négative*, car elle est de sens contraire à SR. Pour mettre le signe en évidence, on écrirait pour la symédiane CT : $\dfrac{x}{y} = -\dfrac{a}{b}$.

### Théorème 1009.

**2339.** *Les carrés de deux côtés d'un triangle quelconque sont entre eux :* 1° *comme les segments soustractifs, déterminés sur la base, par la tangente menée par le sommet au cercle circonscrit ;* 2° *comme les* *segments additifs déterminés sur le troisième côté par la symédiane relative à ce côté.*

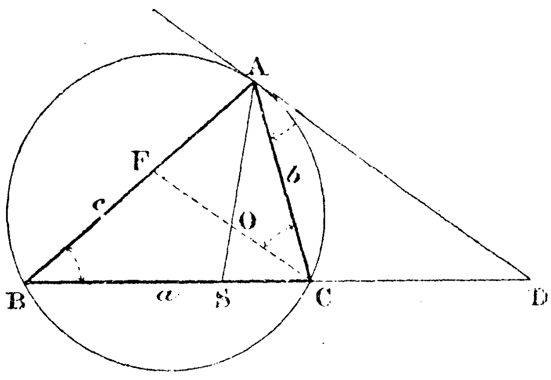


Fig. 1464.

1° Soient AD la tangente et AS la symédiane.

Les triangles ABD, CAD sont semblables; donc

$$\frac{c^2}{b^2}=\frac{\mathrm{BD}^2}{\mathrm{AD}^2}=\frac{\mathrm{BD}^2}{\mathrm{BD}\,.\,\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}.$$

2° Par C menons une parallèle à la tangente AD, c'est-à-dire une droite antiparallèle à CB, par rapport aux côtés de l'angle BAC; le point milieu de CF appartient à la symédiane AOS du triangle, car cette ligne est le lieu du point milieu des antiparallèles.

Puisque CF parallèle à la tangente est divisée en deux parties égales, le faisceau (A, BSCD) est harmonique (G., n° 793); donc

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{CS}}; \quad \text{d'où} \quad \frac{c^2}{b^2}=\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{CS}}.$$

**2340.** *Remarque.* La droite AD est la *symédiane extérieure;* on peut donc résumer le théorème précédent, en disant : *Les symédianes issues d'un même sommet partagent harmoniquement le côté opposé dans le rapport des carrés des deux autres côtés* (THIRY, *Troisième livre de Géométrie*, th. XLIV).

### Théorème 1010.

**2341.** *La symédiane et la médiane issues d'un même sommet sont entre elles dans le même rapport que le double produit des côtés correspondants à la somme des carrés de ces mêmes côtés.* (THIRY.)

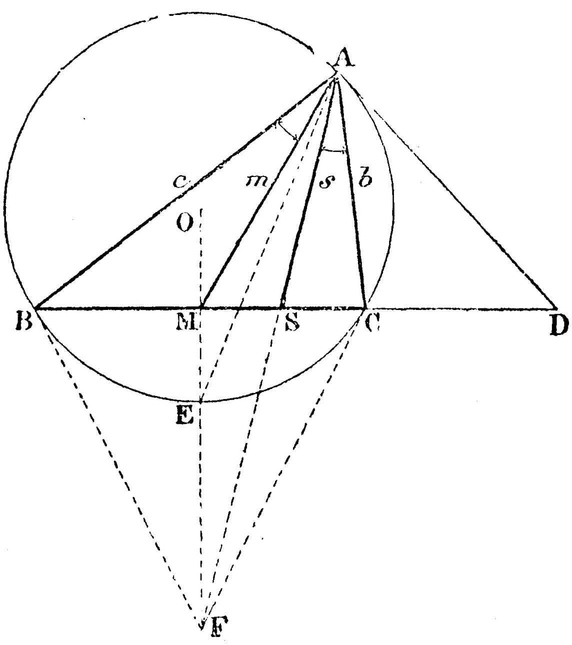


Fig. 1465.

Les triangles CAS et BAM ont un angle égal; ils sont donc entre eux comme le produit des côtés qui comprennent cet angle; d'ailleurs, ces triangles ayant même sommet A sont entre eux comme leurs bases;

$$\text{donc} \quad \frac{bs}{cm}=\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{BM}};$$

$$\text{d'où} \quad \frac{s}{m}=\frac{c}{b}\cdot\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{BM}}. \qquad (1)$$

Il faut remplacer CS et BM par leur valeur en fonction des côtés; or

$BM = \frac{a}{2}$ ; puis on a successivement, d'après la propriété connue de la symédiane (nº 2339) :

$$\frac{CS}{BS} = \frac{b^2}{c^2}; \quad \text{d'où} \quad \frac{CS}{a} = \frac{b^2}{b^2+c^2}, \quad CS = \frac{a \,.\, b^2}{b^2+c^2}.$$

Avec les valeurs trouvées pour CS et BM, (1) devient :

$$\frac{s}{m} = \frac{c}{b} \cdot \frac{ab^2}{b^2+c^2} : \frac{a}{2}; \quad \text{d'où} \quad \frac{s}{m} = \frac{2bc}{b^2+c^2}. \qquad (2)$$

**Théorème 1011.**

**2342.** *Par le sommet d'un triangle inscrit, on mène une tangente au cercle jusqu'à la base prolongée : exprimer en fonction des côtés du triangle les segments soustractifs déterminés sur la base, ainsi que la longueur de la tangente.*

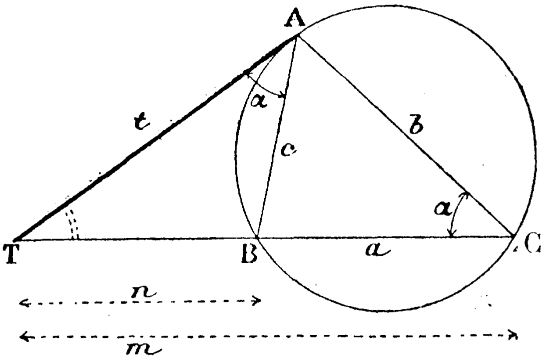



Fig. 1466.

Les triangles ACT, ABT sont semblables ; on a : $\frac{b}{c} = \frac{m}{t} = \frac{t}{n}$; d'ailleurs $m - n = a$, il faut exprimer $m$, $n$ et $t$ en fonction de $a$, $b$, $c$.

Des deux premiers rapports on déduit successivement :

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{m^2}{t^2} = \frac{m^2}{mn} = \frac{m}{n},$$

résultat connu (nº 2339) :

$$\frac{m}{n} = \frac{b^2}{c^2}; \quad \text{d'où} \quad \frac{m-n}{n} = \frac{b^2-c^2}{c^2}, \quad n = \frac{ac^2}{b^2-c^2}; \qquad (1)$$

$$\frac{m}{n} = \frac{b^2}{c^2}; \quad \text{d'où} \quad \frac{m}{m-n} = \frac{b^2}{b^2-c^2}, \quad m = \frac{ab^2}{b^2-c^2}; \qquad (2)$$

$$t^2 = mn; \quad \text{d'où} \quad t^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(b^2-c^2)^2}, \quad t = \frac{abc}{b^2-c^2}. \qquad (3)$$

**Théorème 1012.**

**2343.** *Par chaque sommet d'un triangle inscrit, on mène une tangente jusqu'au côté opposé prolongé ; prouver que la somme algébrique des inverses des trois tangentes est nulle.*

La tangente a pour valeur, en fonction des côtés :

$$t = \frac{abc}{b^2 - c^2}\,;\quad \text{l'inverse est donc}\quad \frac{1}{t} = \frac{b^2 - c^2}{abc}\,;$$

puis
$$\frac{1}{t'} = \frac{c^2 - a^2}{abc}\,,\quad \frac{1}{t''} = \frac{a^2 - b^2}{abc}\,;$$

d'où
$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} + \frac{1}{t''} = \frac{0}{abc} = 0.$$

**2344.** *Remarques.* 1° Ce résultat, qui surprend d'abord, s'explique facilement ; une des tangentes doit être considérée comme négative par rapport aux deux autres, et son inverse, en valeur absolue, égale la somme des autres inverses. Au point de vue du calcul et au point de vue graphique, on reconnaît la légitimité de cette interprétation.

Soient $a$, $b$, $c$ les côtés par ordre de grandeur décroissante : $a^2 - b^2$ et $b^2 - c^2$ auront le signe $+$, tandis que $c^2 - a^2$ sera affecté du signe $-$. Au point de vue graphique, en suivant le cercle dans le sens déterminé par deux des tangentes, on reconnaît que l'autre tangente est de sens contraire. Ainsi, dans le triangle isocèle, la tangente au sommet est infinie, son inverse est zéro ; les deux autres tangentes sont évidemment égales, mais de sens contraire, puisqu'elles sont symétriques par rapport à la hauteur, donc les inverses vérifient la relation.

2° Du théorème géométrique on peut déduire la belle petite question de statique suivante, que nous avons proposée dans *Mathesis* (1895, p. 31, *question* 1001).

### Théorème 1012. — I.

**2345.** *Un disque circulaire mobile autour d'un axe qui passe par son centre, reste en équilibre sous l'action de trois forces tangentielles proportionnelles aux inverses des longueurs des tangentes, chacune de ces lignes étant mesurée depuis son propre point de contact jusqu'à la corde du contact des deux autres forces.*

Il faut, bien entendu, que chaque inverse soit dans la direction même de la tangente, considérée de son point de contact à la corde des deux autres contacts.

Ainsi les forces tangentielles, agissant dans les directions AL, BM, CN (fig. 1472, n° 2354), et inversement proportionnelles à ces mêmes longueurs AL, BM, CN, ont une somme algébrique nulle.

### Théorème 1013.

**2346.** *Indiquer la longueur de la symédiane en fonction des côtés du triangle.*

Soient $m$ et $s$ la médiane et la symédiane, puis $f$ et $g$ les segments déterminés sur $a$ par la symédiane.

1° Le *théorème de Stewart* (n° 1173) donne :

$$s^2a = b^2f + c^2g - afg\,; \qquad (1)$$

il faut remplacer les segments $f$ et $g$ par leur valeur.

Or les segments déterminés par la symédiane sont proportionnels aux carrés des côtés adjacents :

$$\frac{f}{g}=\frac{c^2}{b^2};\quad \text{d'où}\quad f=\frac{ac^2}{b^2+c^2},\quad g=\frac{ab^2}{b^2+c^2}.$$

L'égalité (1) devient après réduction :

$$s=\frac{bc}{b^2+c^2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}\,.$$

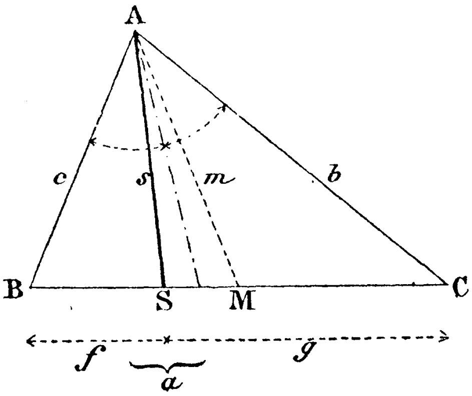



Fig. 1467.

2° On peut utiliser la propriété connue que la symédiane et la médiane sont entre elles dans le même rapport que le double produit des côtés correspondants, à la somme des carrés de ces mêmes côtés (n° 2341) ; ou

$$\frac{s}{m}=\frac{2bc}{b^2+c^2};$$

or la *médiane* $=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$. (G., n° 255.)

Donc $$s=\frac{bc}{b^2+c^2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}\,.$$

**Théorème 1014.**

**2347.** *Aux extrémités* B *et* C *des côtés d'un triangle et sur ces mêmes côtés, on élève des perpendiculaires* m, n, *jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire élevée au troisième côté par le pied de la symédiane* AS; *les perpendiculaires* m *et* n *sont proportionnelles aux cubes des côtés adjacents.*

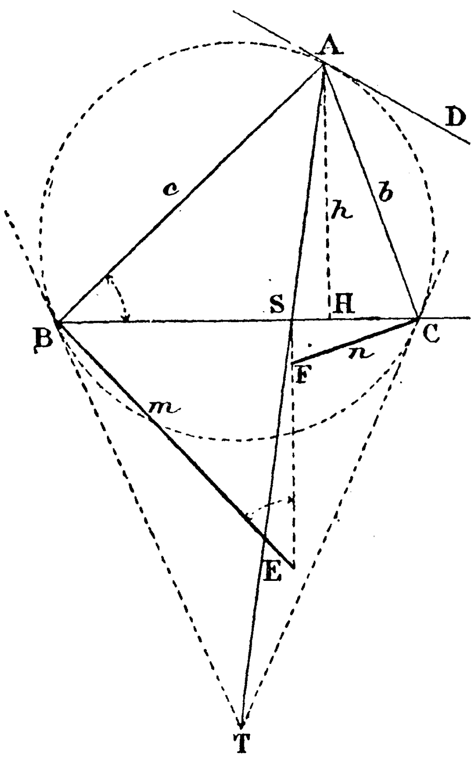



Fig. 1468.

Menons la hauteur AH; on a :

$$\frac{m}{c}=\frac{BS}{h},\quad \text{et}\quad \frac{n}{b}=\frac{CS}{h};$$

donc $$\frac{m}{n}\cdot\frac{b}{c}=\frac{BS}{CS};$$

d'où $$\frac{m}{n}=\frac{BS}{CS}\cdot\frac{c}{b}.$$

Mais les segments déterminés par la symédiane sont proportionnels aux carrés des côtés adjacents; donc

$$\frac{m}{n}=\frac{c^3}{b^3}.$$

*Remarque.* La même propriété a lieu pour la *symédiane extérieure* AD. (M. d'Ocagne, *N. A. M.*, 1883, p. 454, n° 10.)

**Théorème 1015.**

**2348.** *D'un point quelconque pris sur la base d'un triangle, on abaisse des perpendiculaires* x, y *sur les deux autres côtés; le minimum de la somme des carrés des perpendiculaires a lieu lorsque le point mobile sur la base coïncide avec le pied de la symédiane qui part du sommet opposé.*

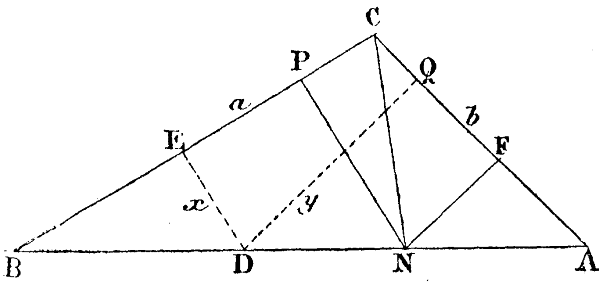



Fig. 1469.

Soient le triangle ABC, CN la symédiane, D un point quelconque, $x$ et $y$ des perpendiculaires aux côtés.

On sait que dans tout triangle

$$ax + by = \text{constante};$$

car on obtient ainsi le double de l'aire du triangle.

Donc le minimum de la somme des carrés des variables ou $x^2 + y^2$ a lieu lorsque ces variables sont proportionnelles à leurs coefficients respectifs (no 348), c'est-à-dire quand on a :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b};$$

donc le minimum a lieu lorsque D coïncide avec le pied N de la symédiane CN.

**Théorème 1016.**

**2349.** *La droite qui joint le point de concours de deux tangentes à une parabole au foyer de cette courbe, est symédiane du triangle formé par les deux tangentes et la corde des contacts.*

On sait que la droite qui joint au foyer le point de concours de deux tangentes et celle qui est menée parallèlement à l'axe par le même point de concours, font des angles égaux avec les tangentes (no 2133); donc la droite qui joint le point de concours au foyer est la symédiane, de même que la parallèle à l'axe en est la médiane.

**2350.** *Remarque.* Le théorème ci-dessus n'est en réalité qu'une manière nouvelle d'énoncer une question connue (no 2133); mais elle a une réelle importance, parce qu'elle conduit à appliquer à la parabole diverses propriétés étudiées pour la symédiane.

Le théorème ci-dessus et les conséquences indiquées no 2351 sont de M. d'Ocagne (*N. A. M.*, 1883, p. 456).

**Théorème 1017.**

**2351.** 1° *Les distances du foyer d'une parabole à deux tangentes sont proportionnelles aux longueurs de ces tangentes; 2° les distances du foyer aux points de contact sont proportionnelles aux carrés des longueurs des tangentes.*

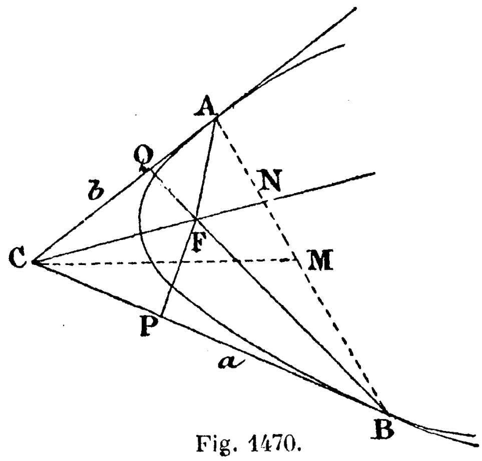


Fig. 1470.

1° CN étant symédiane (n° 2349),

on a : $\frac{FP}{a} = \frac{FQ}{b}$.

2° La droite qui joint le foyer au point de concours des tangentes est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs des points de contact (n° 2133, 2°).

Donc $\frac{FB}{FA} = \frac{NB}{NA} = \frac{a^2}{b^2}$;

car les segments déterminés par la symédiane sont proportionnels aux carrés des côtés adjacents (n° 2339).

**Note.** Le sujet est loin d'être épuisé, et rien ne sera plus facile que de compléter, si l'on veut, ce court paragraphe; voir notamment divers articles de M. D'OCAGNE que nous n'avons pas utilisés. (*N. A.*, 1884, p. 25; 1885, p. 360.)

## Point de Lemoine.

**2352.** *Définition.* On nomme *point de Lemoine*, ou *point symédian*, le point de concours des trois symédianes d'un triangle.

**Théorème de Lemoine 1018.**

**2353.** *Les trois symédianes d'un triangle se coupent au même point.*

1^er^ *Démonstration.* Les symédianes sont les isogonales des médianes; or ces dernières lignes se rencontrent en un même point, donc il en est de même des symédianes, et le *point de Lemoine* K est l'isogonal du centre de gravité G.

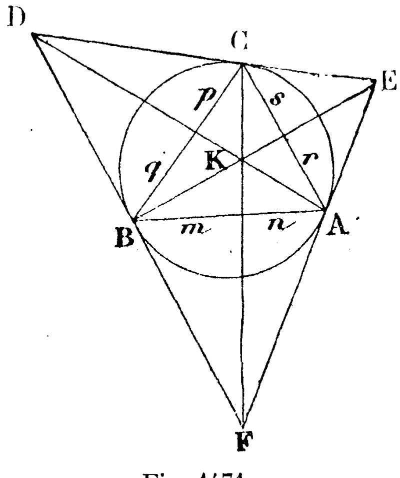


Fig. 1471.

2^e^ *Démonstration.* La symédiane est le lieu du point milieu des antiparallèles correspondantes et le lieu des antiparallèles égales par rapport aux deux autres sommets, d'où il est facile de conclure que les trois symédianes se rencontrent, car par le point de concours de deux d'entre elles on peut mener trois antiparallèles divisées par ce point en deux parties égales, et d'ailleurs égales entre elles; donc le point de concours appartient aussi à la troisième symédiane.

3^e^ *Démonstration.* Chaque symédiane passe par le point de concours des tangentes relatives aux deux autres sommets (fig. 1471); donc les trois symédianes sont les droites qui joignent les sommets d'un triangle DEF aux points de contact A, B, C du cercle inscrit, or ces trois droites se coupent au *point de Gergonne* du triangle DEF (nº 1242 **a**).

4e *Démonstration*. La symédiane est le lieu des points dont les distances aux côtés adjacents sont proportionnelles à ces mêmes côtés ; soit donc K le point de concours des symédianes qui partent des sommets A et B ; on aura :

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{c}, \quad \text{et} \quad \frac{z}{x} = \frac{c}{a};$$

d'où, en multipliant, on a : $\dfrac{y}{x} = \dfrac{b}{a}$ ;

par suite, le point K appartient aussi à la symédiane de l'angle C ; donc...

5e *Démonstration*. Chaque symédiane divise le côté opposé en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents ; soient $m$, $n$ les segments formés sur le côté $c$ et adjacents aux côtés $a$ et $b$ ; puis $p$, $q$ les segments formés sur $a$ et adjacents à $b$ et $c$, etc.

On a : $$\frac{m}{n} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{p}{q} = \frac{b^2}{c^2}, \quad \frac{r}{s} = \frac{c^2}{a^2};$$

d'où $$\frac{mpr}{nqs} = \frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2a^2} = 1;$$

donc, d'après le théorème réciproque de Ceva, les trois droites concourent en un même point.

**Note.** *Le théorème de Lemoine* est de 1873. Il en est de même des deux cercles qui portent le nom de M. Lemoine, et de plusieurs autres propriétés. Voir ci-après, nos 2379 et 2381. (*A. F.*, 1873, Congrès de Lyon, p. 90 et 91.)

**2354.** *Droite de Lemoine*. On nomme *droite de Lemoine* la polaire LMN, par rapport au cercle circonscrit, du point K où se coupent les trois symédianes.

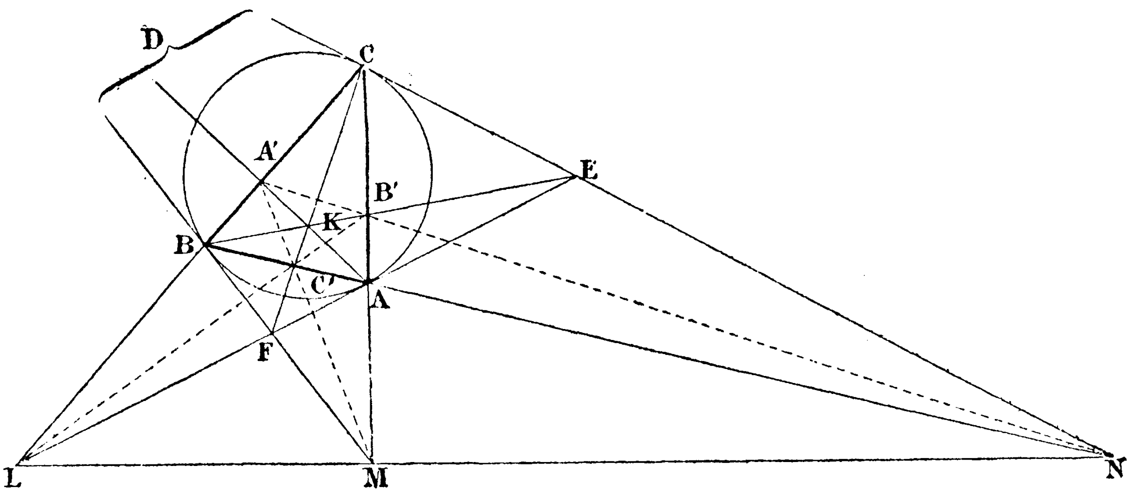



Fig. 1472.

On sait que les côtés du triangle pédal A'B'C' rencontrent les côtés opposés du triangle de référence ABC en trois points L, M, N en ligne droite (nº 1242, **e**).

On a aussi L, F, A, E en ligne droite, etc.

Les *symédianes extérieures* sont AL, BM, CN. On a vu que la somme algébrique de leurs inverses est nulle (nº 2343).

**2354 a. Note**. H. PICQUET, alors capitaine du génie et répétiteur à l'École Polytechnique, a généralisé les notions relatives au *Centre des médianes antiparallèles,* ou *point de Lemoine,* au moyen de l'*homologie;* mais il n'a pas été suivi dans la voie qu'il indiquait, car on perdait en simplicité et en élégance ce qu'on gagnait en généralité. Dans le même article, il a démontré que le tétraèdre n'avait pas de point analogue au point de concours des symédianes du triangle. (*A. F.,* 1874. Lille, pp. 1203-1285.)

**Théorème 1018. — I.**

**2354 b.** Le triangle podaire de tout point de la *droite de Lemoine* d'un triangle ABC est équibrocardien avec ABC. (Ce théorème est dû à M. LEMOINE.)

**Théorème 1019.**

**2355.** *Les symédianes d'un triangle rectangle se coupent au point milieu de la hauteur relative à l'hypoténuse.*

Soit : AK = KH.

Il suffit de prouver que

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}; \quad \text{or} \quad AK = x,$$

et les triangles rectangles semblables AKP, BAC donnent la proportion ci-dessus; ainsi BE est la symédiane relative à $b$, etc.

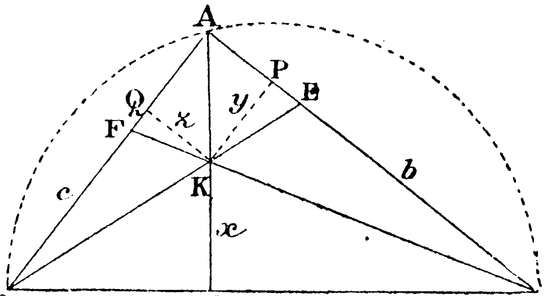


Fig. 1473.

**Scolie.** *La droite qui joint le sommet d'un angle aigu d'un triangle rectangle, au milieu de la hauteur relative à l'hypoténuse, divise le côté qui lui correspond en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents.*

On a :

$$\frac{AE}{CE} = \frac{c^2}{a^2}. \qquad (\text{nº } 2335)$$

**Théorème 1020.**

**2356.** *Le rapport d'un côté quelconque d'un triangle à la distance de ce côté au* point de Lemoine, *égale le rapport de la somme des carrés des trois côtés au double de l'aire de ce triangle.*

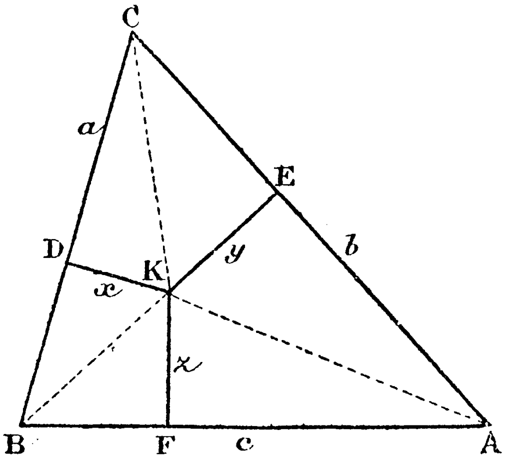


Fig. 1474

Il faut prouver qu'on a :

$$\frac{a}{x} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2S}$$

ou

$$\frac{x}{a} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Or les distances du *point de Lemoine* aux côtés sont dans le même rapport que ces côtés ; on a donc :

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\text{aussi}\ \frac{ax}{a^2}=\frac{by}{b^2}=\frac{cz}{c^2};$$

d'où
$$\frac{x}{a}=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}=\frac{2S}{a^2+b^2+c^2}, \qquad (1)$$

ou
$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2S}. \qquad (2)$$

**2357.** *Remarque.* Suivant le cas, on prend (1) ou (2); dans la formule, on désigne assez souvent la somme des carrés par $m^2$, et l'on écrit :

$$\frac{x}{a}=\frac{2S}{m^2}.$$

**Théorème 1021.**

**2358.** *Le point de concours des symédianes d'un triangle, ou* point de Lemoine, *est le centre de gravité du triangle podaire de ce même point.*

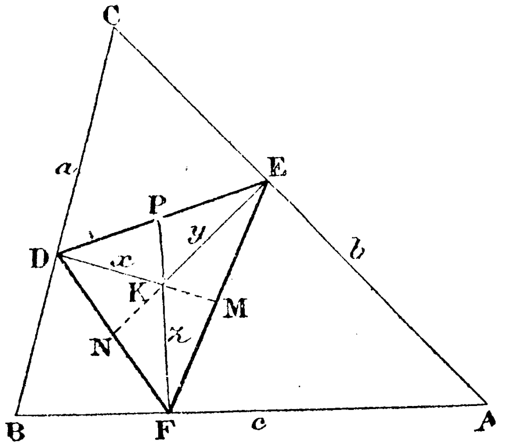


Fig. 1475.

Les triangles ABC, EKF ont des angles supplémentaires A et K; ils sont donc dans le même rapport que les produits des côtés qui comprennent ces angles. (G., n° 330.)

On a donc : $\dfrac{KEF}{ABC}=\dfrac{yz}{bc}$;

d'où $KEF=S\cdot\dfrac{y}{b}\cdot\dfrac{z}{c}$. (n° 2356)

Remplaçons $\dfrac{y}{b}$, et $\dfrac{z}{c}$ par leur valeur $\dfrac{2S}{a^2+b^2+c^2}$; on aura :

$$KEF=\frac{4S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Cette valeur, étant symétrique en fonction des trois côtés, prouve qu'elle représente aussi l'aire des deux autres triangles DKE, DKF; les trois triangles partiels sont donc équivalents, et le point K est le *centre de gravité* du triangle podaire DEF.

**2359.** *Remarques.* 1° Les droites telles que DM sont les médianes de DEF.

2° Par rapport à DEF, le triangle ABC s'obtient en menant par les sommets du premier des perpendiculaires aux médianes, et le triangle ainsi formé a pour *point de Lemoine* le centre de gravité du premier DEF.

3° *La proposition réciproque est vraie*, car

$$\mathrm{EKF} = \mathrm{S} \cdot \frac{yz}{bc}, \quad \mathrm{DKF} = \mathrm{S} \cdot \frac{xz}{ac}, \quad \mathrm{DKE} = \mathrm{S} \cdot \frac{xy}{ab};$$

mais les trois triangles sont équivalents, donc

$$\frac{yz}{bc} = \frac{xz}{ac} = \frac{xy}{ab}.$$

En divisant chaque rapport par $\frac{xyz}{abc}$, on trouve :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c};$$

donc K est le point de concours des symédianes.

**2360. Note.** Le théorème est de M. LEMOINE ; il a été proposé au *concours d'agrégation* en 1874. — M. CHADU, professeur au lycée de Mont-de-Marsan, résolut la question (*N. A.*, 1875, p. 175), de même qu'il résolut peu après (1875, p. 286), la question proposée par M. BROCARD. Les années 1875 et 1876 des *N. A.* ont de nombreux et intéressants articles de M. CHADU sur la *Géométrie du triangle,* alors à son origine.

Pour le théorème proposé n° 2358, on peut voir aussi THIRY, *Troisième livre de Géométrie,* 1887, p. 43 ; *N. A. M.,* 1883, p. 463, VI ; D'OCAGNE. Enfin voir *autre démonstration, J. M. E.,* 1885, p. 76, E. VIGARIÉ.

**Théorème 1022.**

**2361.** *Le* point de Lemoine *d'un triangle est le point dont la somme des carrés des distances aux trois côtés de ce triangle est minima.*

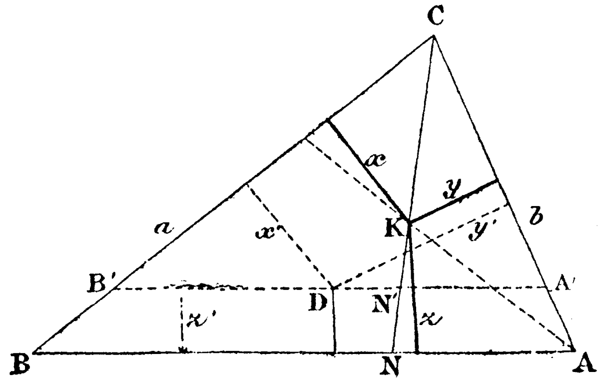


Fig. 1476.

Soient $x'$, $y'$, $z'$, les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque D sur $a$, $b$, $c$.

Admettons qu'une des variables, $z'$ par exemple, soit constante ; le point D sera sur une droite A'B' parallèle à $c$ et menée à la distance $z'$ ; or le minimum de $x'^2 + y'^2$ aura lieu lorsque les perpendiculaires $x'$ et $y'$ seront directement proportionnelles aux côtés CB' et CA' sur lesquelles elles tombent, ou bien aux côtés $a$ et $b$, c'est-à-dire lorsque D coïncidera avec le pied N' de la symédiane CN' (n° 2348) ; or cette ligne coïncide avec CN ; donc le point D est situé sur la symédiane CN qui part du point C.

Pour une raison analogue, ce point doit être situé sur chacune des autres symédianes ; donc D coïncide avec le point K.

**2362.** *Valeur du minimum.* On sait qu'on a :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{2S}{m^2} \qquad (\text{n}^\circ\ 2356)$$

et $$x = \frac{2aS}{m^2}, \quad y = \frac{2bS}{m^2}, \quad z = \frac{2cS}{m^2};$$

donc $$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)S^2}{m^4} = \frac{4S^2}{m^2}.$$

**2363. Note.** La démonstration précédente s'est présentée d'elle-même, elle nous paraît simple et naturelle et elle a dû être rencontrée par bien des auteurs ; quoi qu'il en soit, voici l'indication de diverses démonstrations :

Hossard, *N. A. M.*, 1848, p. 407, 454 ; 1850, p. 241.

Catalan, *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*, 6e édition, 1879, livre III, problème LI, p. 230.

M. d'Ocagne, *N. A. M.*, 1883, p. 455, no 13.

C. Thiry, *Troisième livre de Géométrie*, 1887, p. 43, no IX.

Vigarié, *J. M. E.*, 1885, p. 77, no 13.

### Problème 1023.

**2364.** *Calculer la surface du triangle podaire* du point de Lemoine.

Le *point de Lemoine* K est le centre de gravité de son triangle podaire (no 2358), donc DKL est une médiane ; en prenant LG = LK, on obtient un parallélogramme ; ainsi les triangles KFG, ABC sont semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires ; d'ailleurs GK = $x$, GF = $y$;

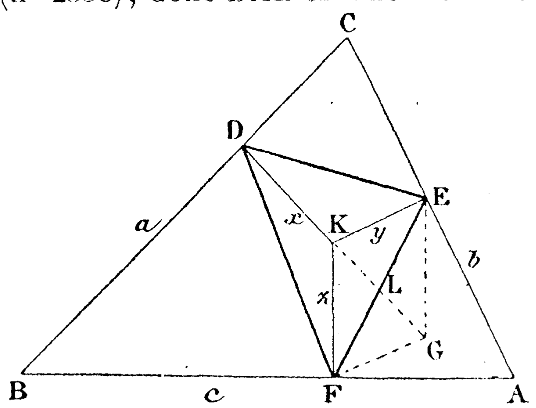


Fig. 1477.

donc $$\frac{\text{FGK}}{\text{S}} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Or FGK ou FEK n'est que le tiers de DEF ; ainsi

$$\text{DEF} = \frac{3\text{S}(x^2 + y^2 + z^2)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

En remplaçant $a^2 + b^2 + c^2$ par $m^2$ et se rappelant qu'on a :

$$x = \frac{2aS}{m^2}, \quad y = \frac{2bS}{m^2}, \quad z = \frac{2cS}{m^2}. \qquad (\text{n}^\text{o}\ 2357)$$

Donc $$\text{DEF} = \frac{12S^3}{m^4}.$$

(On peut voir aussi *J. M. E.*, 1885, p. 79, article de M. Vigarié, alors élève de M. Vintéjoux, au lycée Saint-Louis.)

### Lemme 1024.

**2365.** *Le minimum de la somme des carrés des distances d'un point d'une droite* XY *à deux points donnés* A *et* B, *correspond au pied* P *de la perpendiculaire abaissée sur* XY *du point milieu* M *du segment rectiligne* AB.

Le lieu des points dont la somme des carrés est constante est une circonférence décrite du point milieu M pris pour centre ; or la plus petite de ces circonférences est celle qui est tangente à la droite XY ; mais la perpendiculaire MP détermine le point de contact ; donc $\text{AP}^2 + \text{BP}^2$ est la somme minima.

**2366.** *Remarques.* 1° Lorsque la droite est remplacée par un cercle, on joint son centre C au point milieu M, et cette ligne détermine sur la circonférence le point P qui donne le minimum et celui Q qui donne le maximum.

2° On peut voir à ce sujet les n°s 1464 et 1465.

**Théorème 1025.**

**2367.** *Le triangle podaire du* point de Lemoine K *est le triangle inscrit dont la somme des carrés des côtés est minima* (fig. 1477).

En effet, si on se donne momentanément deux des sommets E, F du triangle qui donne le minimum, le troisième sommet D étant à déterminer sur BC ou $a$ du triangle primitif, on abaissera du point L milieu de EF une perpendiculaire LD sur BC (n° 2365); donc LD est médiane du triangle demandé DEF; remarque analogue pour les autres sommets; or c'est le triangle podaire de K qui admet ce point pour centre de gravité (n° 2358), donc ce triangle est celui dont la somme des carrés est minima.

**2368.** *Remarque.* Le théorème est de M. Lemoine.

La somme des carrés des trois côtés est donnée par

$$\frac{12S^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

(*J. M. E.*, 1884, p. 53, et 1885, p. 79.)

**Théorème de Grebe 1026.**

**2369.** *Sur chaque côté d'un triangle* ABC, *avec cette ligne pour dimension, on construit un carré, de manière que les trois carrés soient extérieurs au triangle, ou tous trois sur ce triangle même; les droites qui joignent chaque sommet du triangle au point de rencontre des côtés opposés des carrés correspondants, se coupent en un même point.*

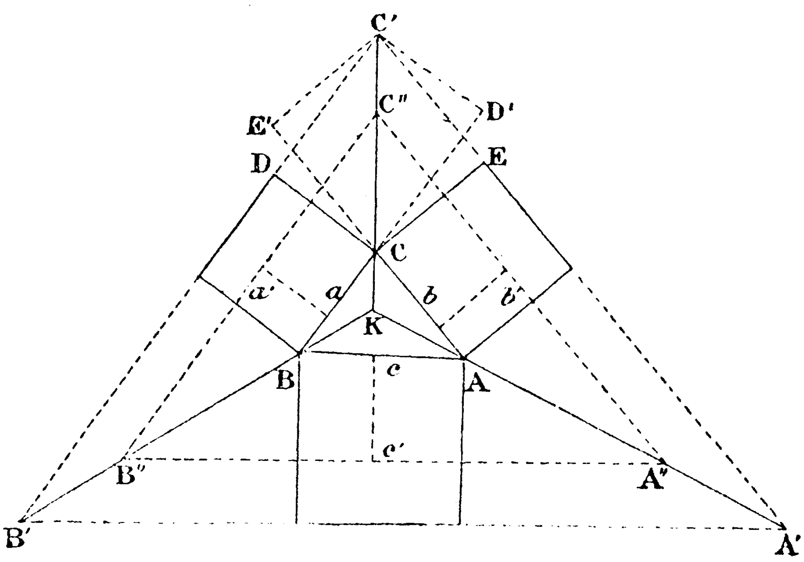



Fig. 1478.

Les triangles ABC, A'B'C' sont homothétiques; donc les trois droites A'A, B'B, C'C concourent au centre d'homothétie.

D'ailleurs, les distances de C' aux côtés $a$ et $b$ égalent respectivement C'D' ou CD et CE; elles égalent $a$ et $b$; donc C'C est la symédiane relative au sommet C; de même pour les autres droites : ainsi K est le *point symédian* ou le *point de Lemoine.*

**2370.** *Remarques.* 1° Le théorème est beaucoup plus général que l'énoncé ci-dessus : il suffit de mener des parallèles à des distances $a'$, $b'$, $c'$ proportionnelles aux côtés $a$, $b$, $c$.

2° Si D, E, F sont les points milieux des côtés $a$, $b$, $c$ du triangle ABC et que l'on prenne sur chaque médiatrice et d'un même côté, soit toutes les trois en dehors du triangle, ou réciproquement, des longueurs DA', DB', DC'; EA', EB', EC'; FA', etc., égales ou directement proportionnelles aux côtés, et que l'on mène par chaque groupe A', B', C' des parallèles aux côtés correspondants, on forme six triangles homothétiques au triangle donné, les six centres d'homothétie sont le *point de Lemoine* et cinq autres points offrant quelque analogie avec celui-ci.

3° En prenant un groupe de parallèles à l'intérieur et les deux autres à l'extérieur, ou *vice versa*, on obtient trois autres groupes de six points, comprenant les trois points associés au point de Lemoine, etc.

**2371. Notes.** 1° Le théorème précédent, n° 2369, est d'un auteur allemand, GREBE; il a été donné en 1847; le point K a donc ainsi été rencontré accidentellement, de même qu'il l'avait été antérieurement par divers auteurs, et notamment par Lhuilier, en 1806, mais sans donner lieu à aucune étude générale, tandis que M. LEMOINE en a fait connaître les principales propriétés; aussi M. NEUBERG a-t-il donné le nom de *point de Lemoine* au point symédian, et cette désignation est adoptée par les auteurs français, belges, anglais; néanmoins la plupart des Allemands le nomment *point de Grebe* (voir notamment *Die Brocardschen Gebilde*, von Dr A. EMMERICH); on pourrait dire aussi : *point de Lhuilier,* etc.; mais on finirait par avoir besoin d'un dictionnaire de synonymie.

M. W. GALLATLY, dans son remarquable travail, publié en 1911, *The modern Geometry of the Triangle,* mentionne GREBE, et c'est justice, mais néanmoins il nomme *point de Lemoine* le point K de la figure 1478.

La figure formée par un triangle et les carrés construits sur chaque côté tous à l'extérieur du triangle, ou tous à l'intérieur, est due à VECTEN (*A. de G.*, t. VII, 1816-1817, p. 321, planche III, fig. 7; puis *E. de G.*, n° 1773 I, fig. 1152 *bis*). Cette figure a été l'objet d'assez nombreuses études; on peut voir, à ce sujet, l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1894, p. 254, n° 120.

2° On peut construire le triangle ABC, connaissant les centres des carrés construits extérieurement sur ses trois côtés. (Ed. COLLIGNON, inspecteur général des Ponts et chaussées. *Association française pour l'avancement des sciences*, 1891, p. 38.)

3° Dans la *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. IV, 1878, p. 142, M. J. NEUBERG a indiqué plusieurs propriétés de la figure des carrés construits sur les trois côtés d'un triangle, et résolu le problème ci-dessus (t. VI, 1880, p. 364).

Voir aussi, comme renseignements bibliographiques, les *E. de G.*, n° 1773 m.

### Théorème 1027.

**2372.** *Sur chaque côté d'un triangle pris pour diamètre, on décrit un cercle; à chaque cercle on mène deux tangentes parallèles au diamètre :* ces tangentes se coupent en douze points, *on joint chacun d'eux au sommet déterminé par les côtés parallèles aux tangentes qui donnent le point d'intersection, on obtient six droites qui se coupent trois à trois en quatre points : au* point de Lemoine *et à ses trois points associés.*

Les douze points d'intersection des tangentes sont groupés quatre à quatre autour des sommets A, B, C; dans chaque groupe, ils ne donnent lieu qu'à deux droites, parce qu'ils sont les sommets d'un parallélogramme dont A est le centre, etc.

Les parallèles sont éloignées des côtés $a$, $b$, $c$ de grandeurs proportionnelles à ces côtés; donc...

Les trois tangentes extérieures au triangle et les trois intérieures donnent les *symédianes* proprement dites et déterminent le point K; deux tangentes extérieures et une intérieure, ou réciproquement, donnent une symédiane intérieure et deux symédianes extérieures; ces trois droites passent par un des sommets du triangle tangentiel, et comme il y a trois groupes différents, on obtient les trois points associés au *point de Lemoine*.

**Théorème 1028.**

**2373.** *Le lieu des* points de Lemoine *d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est donnée est une ellipse ayant pour grand axe cette hypoténuse, et dont le petit axe a pour longueur la moitié de cette hypoténuse.*

En effet, le point K est le point milieu de la hauteur abaissée du som-

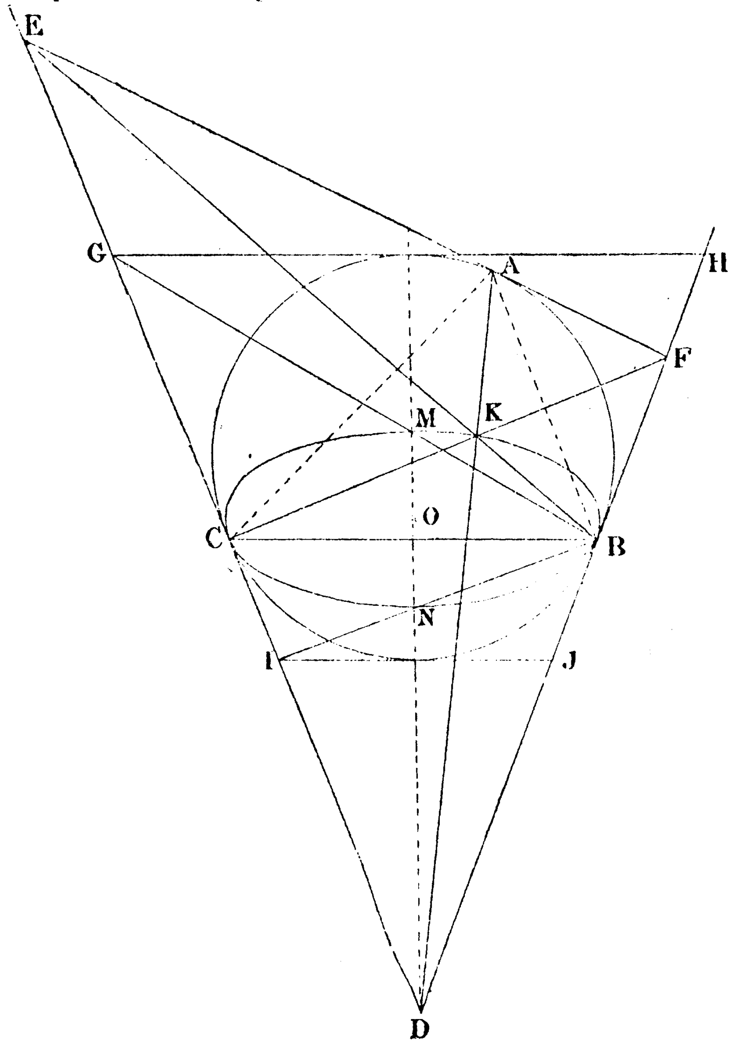



Fig. 1479

met de l'angle droit sur l'hypoténuse; donc le lieu est l'ellipse indiquée ci-dessus. (Voir d'ailleurs nº 2156 **b**, 2.)

*Remarque.* Le lieu du point K pour un triangle CBA (fig. 1479), dont la base CB est fixe et l'angle A constant, est aussi une ellipse bitangente en B et C au triangle tangentiel. Les extrémités du petit axe correspondent au cas où GH, IJ sont parallèles à la base; on obtient M et N.

**Théorème 1028. — I.**

**2374.** *On considère une série de cercles dont les distances pour chacun d'eux, aux trois côtés d'un triangle* ABC, *soient dans le rapport de ces mêmes côtés, et l'on demande le lieu des centres de ces cercles.*

Ce lieu se compose des quatre droites qui joignent le *point de Lemoine* au centre I du cercle inscrit, et aux centres $I_a$, $I_b$, $I_c$ des cercles exinscrits.

Considérons spécialement le lieu IK.

Le point I est le centre du cercle dont la distance aux côtés est nulle, et K le centre du cercle de rayon nul dont les distances sont dans le rapport des côtés. En menant des parallèles B'C', C'A', A'B' aux côtés, à des distances $a'$, $b'$, $c'$ proportionnelles à ces mêmes côtés, le cercle inscrit au triangle A'B'C' répondra à la question; or les sommets A', B', C' sont respectivement sur AK, BK, CK, et le centre I' est sur IK; donc...

*Remarque.* Les parallèles menées à l'extérieur de ABC donnent des centres situés sur le prolongement de KI, au delà de I; les parallèles menées à l'intérieur entre K et AB, par exemple, donnent des centres situés entre les points K et I; celles qui seraient à l'intérieur, mais au delà de K, par rapport à AB, donneraient des centres situés sur le prolongement de IK.

## Cercles de Lemoine.

**2375.** *Historique.* Les deux cercles connus maintenant sous le nom de *cercles de Lemoine,* le groupe appelé *cercles de Tucker,* et dont les deux premiers sont des cas particuliers, ont été découverts par M. LEMOINE et communiqués au congrès de Lyon, en 1873.

Les mêmes cercles ont donné lieu successivement à diverses études; ainsi M. NEUBERG, en Belgique, en a traité dans *Mathesis,* en 1881, puis en Angleterre, M' CAY en 1883, et M. TUCKER en 1885. (CASEY, 6e édition, page 191.) M. H. TAYLOR, en 1884, fit connaître diverses propriétés du cercle qui porte son nom, et qu'on rattache aux précédents.

Ayant déjà le *point, l'hexagone,* les *cercles de Lemoine,* M. NEUBERG proposa d'appeler *cercles de Tucker* le système de cercles dont ceux de LEMOINE et de TAYLOR ne sont que des cas particuliers; de là cette conséquence inattendue que plusieurs écrivains arrivent à perdre de vue l'auteur même de la découverte, ou du moins à passer son nom sous silence, ainsi qu'on peut s'en rendre compte en lisant l'ouvrage si remarquable d'ailleurs de W.-J. M' CLELLAND : *A treatise on the Geometry of the Circle;* aucun point, aucun cercle ne rappelle le nom de Lemoine; cependant l'initiateur de la *Géométrie du triangle* est cité honorablement dans la *Préface.* — M. CASEY, dans son intéressant volume : *A Sequel to the first six Books of the Elements of Euclid* (6e édition, 1892), rend pleinement justice au principal instigateur de la *Géométrie récente.* Il en est de même d'ailleurs de la plupart des auteurs anglais : MM. MILNE, SIMMONS, NIXON, GALLATLY.

**2376.** *Démonstration.* Nous allons traiter directement chaque question, afin de pouvoir les proposer isolément comme *Exercices;* mais on pourrait se borner à quelques lignes pour chaque *cercle de Lemoine,* pour les *cercles de Tucker*, pour le *cercle de Taylor;* car il suffit d'établir qu'on obtient dans chaque cas trois antiparallèles égales; dès lors les six points sont concycliques.

**Théorème 1029.**

**2377.** Premier cercle de Lemoine. *Par le point de concours* K *des symédianes d'un triangle, on mène des parallèles aux trois côtés; les six points d'intersection des côtés et des parallèles sont concycliques.*

Soient DE, FG, IJ les parallèles : il faut prouver que l'hexagone DFJEGI est inscriptible.

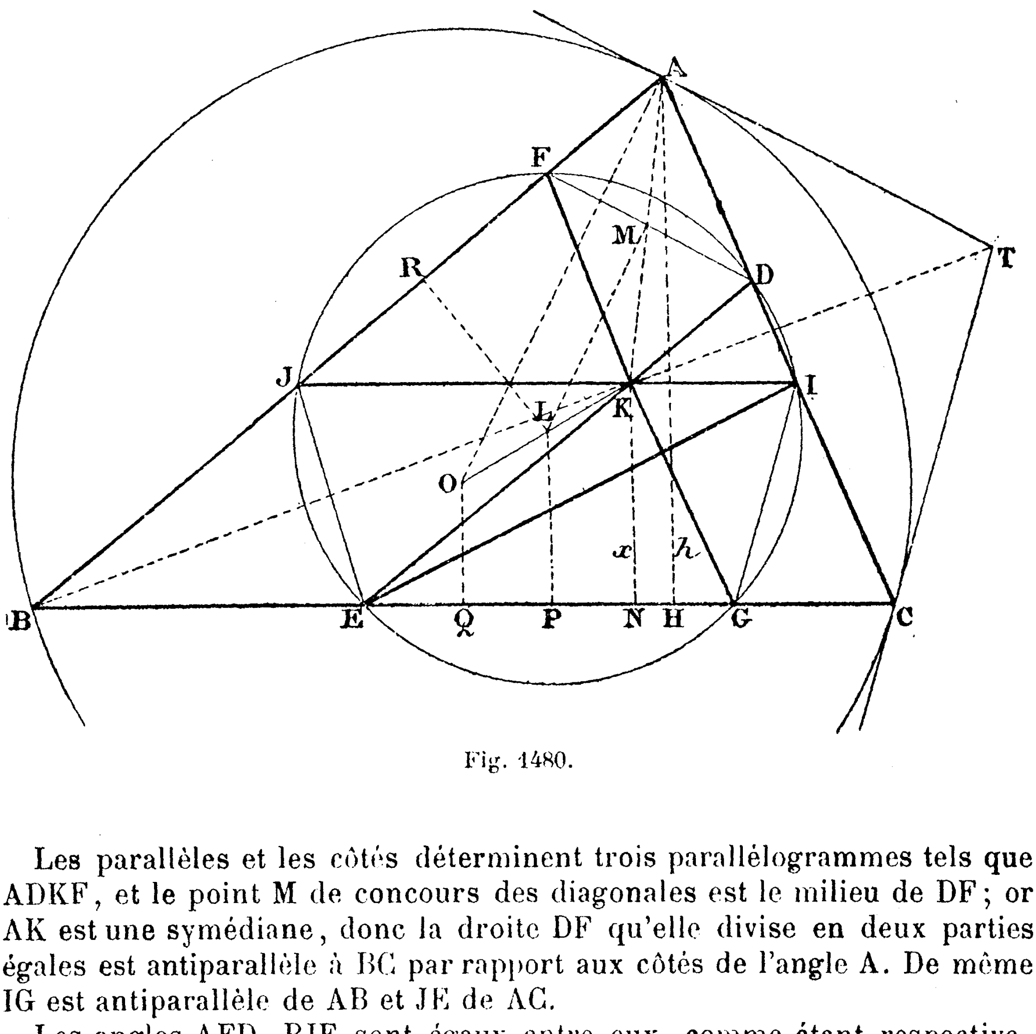



Fig. 1480.

Les parallèles et les côtés déterminent trois parallélogrammes tels que ADKF, et le point M de concours des diagonales est le milieu de DF; or AK est une symédiane, donc la droite DF qu'elle divise en deux parties égales est antiparallèle à BC par rapport aux côtés de l'angle A. De même IG est antiparallèle de AB et JE de AC.

Les angles AFD, BJE sont égaux entre eux, comme étant respectivement égaux à l'angle C, à cause des antiparallèles, et par suite DFJE est un trapèze isocèle; il en est de même de FDIG et JEGI. Chacun d'eux est inscriptible, or le cercle qui passe par les points E, J, F, D passe également par le point I, car le quadrilatère JFDI est inscriptible, puisque DF et IJ sont antiparallèles par rapport aux deux autres côtés; de même le cercle passe par G.

**2378.** *Remarque.* Le centre L est au point milieu de la droite OK, qui joint le centre du cercle circonscrit au point de concours des symédianes, ou *point de Lemoine;* car le rayon AO est perpendiculaire à l'antiparallèle DF, la perpendiculaire ML menée par le milieu de AK passe donc par le milieu L de OK.

**2379. Note.** 1° Le cercle DFEG est nommé *premier cercle de Lemoine;* le polygone DFJEGI est *l'hexagone de Lemoine.*

En Angleterre, ce cercle est nommé fréquemment *the triplicate ratio circle,* à cause de la propriété fort remarquable des trois segments déterminés par ce cercle (voir ci-après n° 2381). Cette propriété, mise en lumière par MM. Cay et Tucker, en 1883 et 1885, avait été d'ailleurs signalée par M. Lemoine (*A, F.*, Congrès de Lyon, 1873, p. 91; *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1873, 2e série, t. XII, p. 365, n° 4).

2° Lemoine a fait l'étude du système des trois droites parallèles aux côtés d'un triangle, menées par un même point donné D (*A. F.*, 1882, La Rochelle, p. 122-127).

### Théorème 1030.

**2380.** *Les côtés d'un triangle sont divisés par le premier cercle de Lemoine en segments proportionnels aux carrés des côtés. Chaque segment extrême correspond au carré du côté qui lui est adjacent; le segment intermédiaire compris dans le cercle correspond au carré du côté sur lequel il se trouve.*

Il faut prouver qu'on a pour les segments de BC (fig. 1480) :

$$\frac{BE}{c^2} = \frac{EG}{a^2} = \frac{CG}{b^2},$$

or les triangles BJE, EKG, CIG ont même hauteur KN; donc

$$\frac{BJE}{BE} = \frac{EKG}{EG} = \frac{CIG}{CG}.$$

Considérons le premier rapport; les triangles BJE et BAC sont semblables, puisque EJ et AC sont antiparallèles; ils sont entre eux comme les carrés des côtés homologues BE et AB; donc, en représentant ABC par S, on a :

$$\frac{BJE}{S} = \frac{BE^2}{c^2}; \quad \text{d'où} \quad BJE = \frac{S \cdot BE^2}{c^2}.$$

Ainsi

$$\frac{BJE}{BE} = \frac{S \cdot BE^2}{BE \cdot c^2} = \frac{S \cdot BE}{c^2}.$$

De même, pour les deux autres rapports, on trouve :

$$\frac{EKG}{EG} = \frac{S \cdot EG}{a^2}, \quad \text{et} \quad \frac{CIG}{CG} = \frac{S \cdot CG}{b^2};$$

d'où supprimant le facteur commun S, on a :

$$\frac{BE}{c^2} = \frac{EG}{a^2} = \frac{CG}{b^2}.$$

On aurait de même : $\frac{CI}{a^2} = \frac{ID}{b^2} = \frac{DA}{c^2}$,

$$\frac{AF}{b^2} = \frac{FJ}{c^2} = \frac{JB}{a^2}.$$

**Théorème 1031.**

**2381.** *Les segments interceptés sur les côtés d'un triangle par le* premier cercle de Lemoine *sont proportionnels aux cubes des côtés correspondants.*

Il faut prouver qu'on a (fig. 1480) :

$$\frac{EG}{a^3} = \frac{DI}{b^3} = \frac{FJ}{c^3}.$$

En désignant par S la surface du triangle BAC, on a :

$$\frac{EG}{x} = \frac{a}{h} = \frac{a^2}{2S}, \quad \text{d'où} \quad EG = \frac{a^2 \cdot x}{2S};$$

mais en désignant par $x$, $y$, $z$ la distance du point K aux côtés $a$, $b$ et $c$, on sait que ces trois distances sont directement proportionnelles à ces mêmes côtés, et on a : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$,

d'où
$$\frac{ax}{a^2} = \frac{by}{b^2} = \frac{cz}{c^2} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2};$$

ainsi
$$\frac{x}{a} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2S \cdot a}{a^2 + b^2 + c^2},$$

et
$$EG = \frac{a^3}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad \text{de même} \quad DI = \frac{b^3}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \text{etc.};$$

donc
$$\frac{EG}{a^3} = \frac{DI}{b^3} = \frac{FJ}{c^3}.$$

**2382.** *Remarque.* Rappelons que le théorème a été donné par M. LEMOINE, en 1873 (*A. F.*, 1873, p. 91, VI). Dans sa *Note sur un point remarquable du plan d'un triangle* (*N. A.*, 1873, page 364), M. LEMOINE indique plusieurs autres propriétés, et notamment les suivantes :

Le rayon $\rho$ du premier cercle qui porte aujourd'hui son nom est donné par la formule

$$\rho^2 = R^2 \cdot \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Les trois antiparallèles égales ont pour longueur commune $l$ :

$$l = \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

La distance $d$ du point K au centre O du cercle circonscrit est :

$$d^2 = R^2 - 3l^2.$$

**Théorème 1032.**

**2383.** Cercles de Tucker. *Lorsque deux triangles directement semblables ont le point* K *pour centre d'homothétie, les prolongements des côtés du triangle intérieur rencontrent les côtés de l'autre triangle en six points concycliques.*

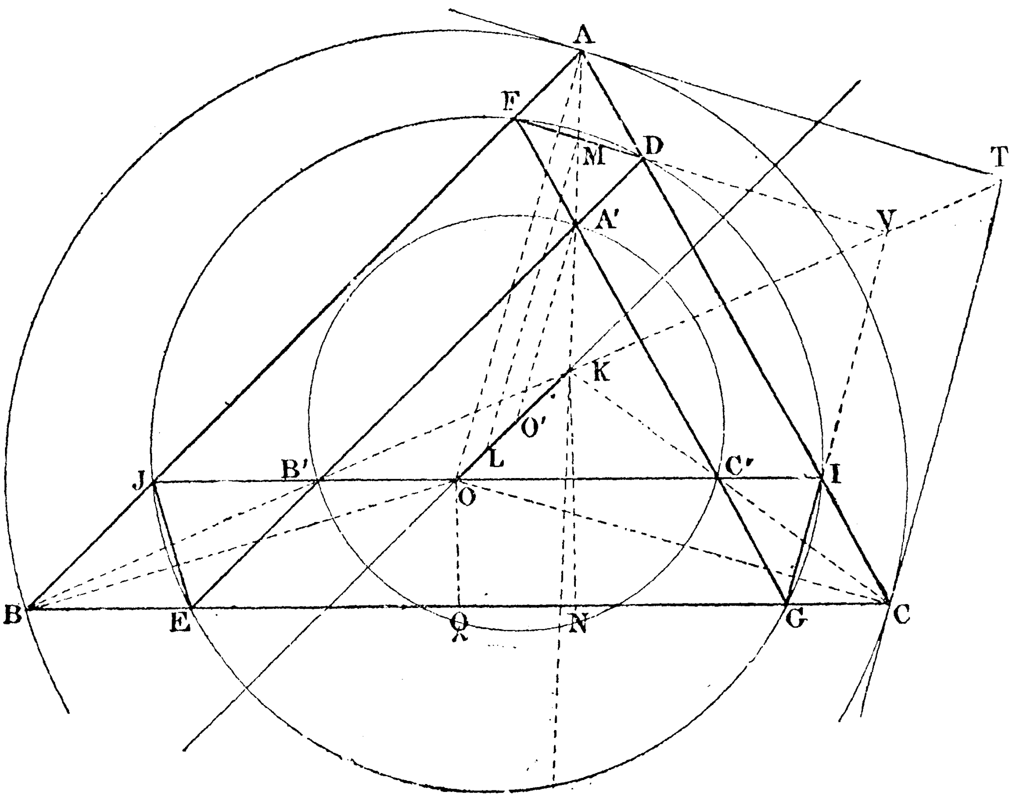



Fig. 1181.

En effet, ADA'F est un parallélogramme ; donc DF, divisée en deux parties égales par la symédiane AK, est antiparallèle à BC ; de même EJ est antiparallèle à CA, et GI l'est à AB ; ces trois antiparallèles sont égales, et les six points qu'elles déterminent sont concycliques. Le point L, milieu de OO', est le centre de ce cercle.

**2384.** *Remarques.* 1° Les antiparallèles se rencontrent deux à deux sur les symédianes, en V par exemple, car ces lignes divisent AK, CK en parties proportionnelles, et elles sont parallèles à AT, CT ; d'ailleurs la symédiane BKT est le lieu des points d'où l'on peut mener des antiparallèles égales DF, IG par rapport aux côtés des angles A et C.

2° Si l'on remarque que le triangle, dont V est l'un des sommets, formé par les trois antiparallèles égales, et le triangle tangentiel dont T est l'un des sommets, ont le *point de Lemoine* K pour centre d'homothétie directe, on peut énoncer le théorème comme il suit : *Tout triangle directement homothétique par rapport au triangle tangentiel, et dont* K *est le centre d'homothetie, coupe les côtés du triangle inscrit* ABC *en six points concycliques.*

3° La droite OK est le lieu des centres des *cercles de Tucker.*

**Théorème 1033.**

**2385.** Second cercle de Lemoine. *Si par le point* K *d'un triangle on mène les antiparallèles aux côtés, on obtient six points concycliques.*

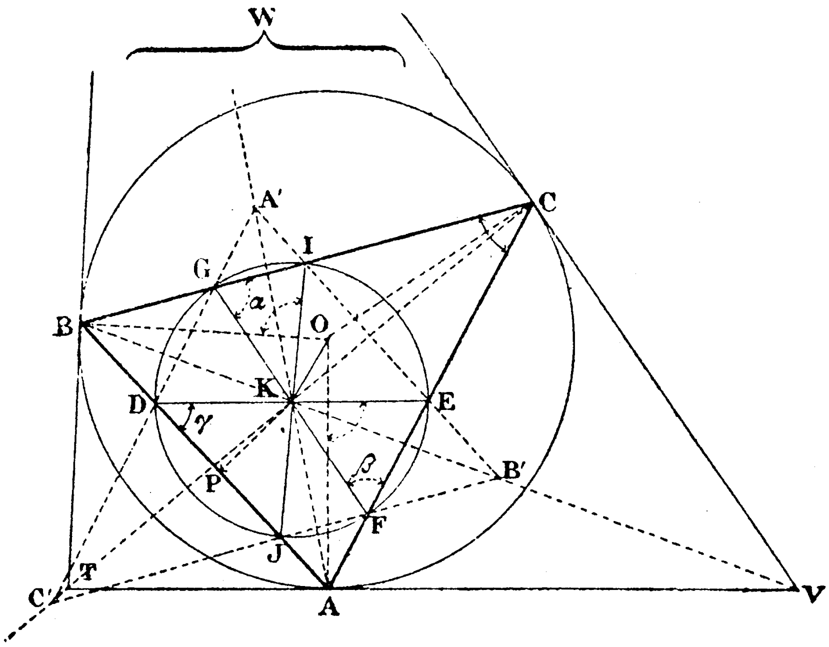



Fig. 1482.

Car les trois antiparallèles sont égales entre elles et sont divisées en parties égales par le point K ; donc...

**2386.** *Remarques.* 1° JF est parallèle à BC, etc. ; donc les triangles A'C'B' et ACB sont égaux.

2° *Les segments interceptés par le cercle sur les côtés du triangle donné sont respectivement proportionnels aux cosinus des angles opposés.*

En effet, le triangle isocèle DKJ a ses côtés égaux perpendiculaires aux côtés égaux du triangle AOB ; donc l'angle DKJ est le supplément de AOB, ou supplément de deux fois C, donc $\gamma = C$ ; de même $\alpha = A$, $\beta = B$.

Soit $r$ le rayon du *cercle de Lemoine ;* on a :

$$\frac{IG}{r} = 2\cos\alpha, \quad \text{ou} \quad \frac{IG}{r} = 2\cos A, \quad \text{etc.};$$

donc

$$\frac{IG}{\cos A} = \frac{EF}{\cos B} = \frac{DJ}{\cos C}.$$

A cause de cette propriété, le *second cercle de Lemoine* est appelé en Angleterre *cosine circle;* ses trois associés méritent le même nom (n° 2387).

3° Dans la *Note* déjà citée (*N. A.*, 1873, page 365), M. Lemoine indique que les trois antiparallèles menées par K sont égales entre elles, ce qui conduit au *second cercle* dont nous venons de parler.

**Théorème 1034.**

**2387.** Cercles associés au second cercle de Lemoine. *Par chacun des points associés au point K où se coupent les symédianes d'un triangle, on mène des antiparallèles aux côtés du triangle; dans chaque cas, les points d'intersection sont concycliques. Les segments interceptés sur les côtés par chacun de ces trois cercles sont proportionnels aux cosinus des angles du triangle donné.*

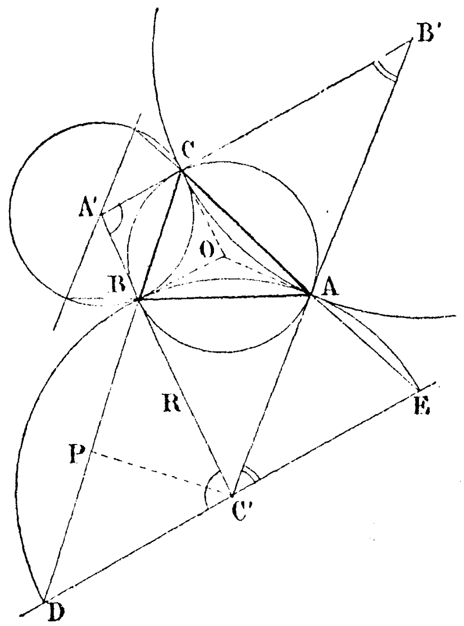


Fig. 1483.

On sait que les points associés au point K sont les sommets du *triangle tangentiel*.

1° Soit C' un des points associés; menons DC'E antiparallèle à AB; les tangentes C'A, C'B sont respectivement les antiparallèles de BC et de AC. Les trois antiparallèles ne donnent que quatre points : D, B, A, E; en réalité, A et B sont des points doubles. Le quadrilatère est inscriptible, car les triangles BC'D, AC'E sont respectivement semblables aux triangles isocèles BA'C, AB'C; donc $C'D = C'B = C'A = C'E$.

De même pour les autres points associés A' et B'.

2° Les segments interceptés DB, BA, AE sont dans le même rapport que les cosinus des angles A, C et B, car l'angle $BC'D = A'$ est le supplément de BOC; sa moitié est donc le complément de l'angle A, de même l'angle AC'B est le complément de C; donc

$$\frac{BD}{2R} = \cos A, \quad \text{etc.}$$

**2388.** *Remarques.* 1° Les cercles adjoints, aussi bien que le *second cercle de Lemoine,* méritent donc le nom de *cosine circle.*

2° La figure DBAE, avec les segments doubles AC' et BC', correspond, en réalité, à deux demi-circonférences superposées.

**Théorème 1035.**

**2389.** *Si l'on détermine trois points* A', B', C' *qui divisent en parties proportionnelles, dans le même sens, les distances du point* K *de Lemoine aux sommets* A, B, C *du triangle, on obtient trois groupes de six points concycliques : pour cela on mène par* A', B', C' *des antiparallèles jusqu'à la rencontre des côtés de* ABC, *puis des antiparallèles par* A, B, C, *jusqu'à la rencontre des côtés de* A'B'C', *enfin on considère les points d'intersection des côtés des triangles* ABC *et* A'B'C'.

Cette question doit être regardée comme le résumé de plusieurs questions précédentes.

Les antiparallèles DE, MN, FG sont égales parce que les antiparallèles menées par K sont égales entre elles, et que les points A′, B′, C′ divisent AK, BK, CK dans le même rapport ; on retombe donc sur une question connue ; l'on détermine le centre R du *cercle de Tucker*, en menant B′R parallèle au rayon BO du cercle circonscrit.

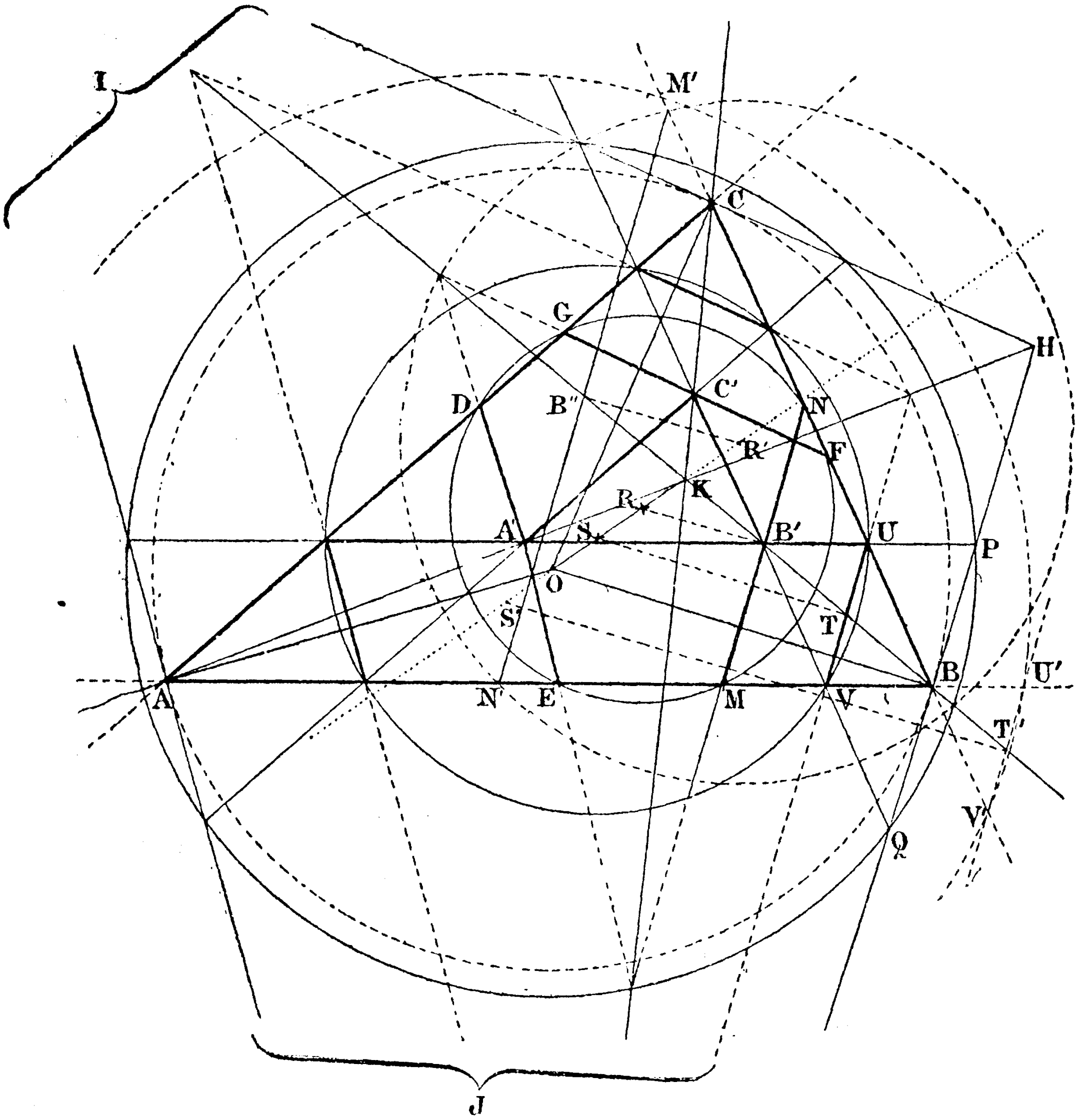



Fig. 1484.

2° Les segments tels que PQ interceptés sur les côtés du triangle circonscrit HIJ sont égaux entre eux, pour une raison analogue à celle ci-dessus ; donc les six points tels que P, Q sont concycliques, et le cercle a même centre O que le cercle circonscrit.

3° Enfin les intersections des côtés des triangles ABC, A′B′C′ donnent trois antiparallèles telles que UV égales entre elles, et par suite six points tels que U et V concycliques. Le centre s'obtient en menant TS parallèle à BO.

**2390.** *Remarques.* 1° Le cercle circonscrit correspond à des segments antiparallèles nuls en A, B, C ; c'est donc un des *cercles de Tucker.*

2° Pour des antiparallèles telles que U'V', on mènerait la parallèle T'S', afin d'avoir le centre du cercle correspondant.

3° Au delà de K, par rapport aux sommets, on peut prendre des grandeurs telles que KB'', KA'', etc., proportionnelles à BK, AK, etc.; les antiparallèles telles que M'N' sont égales entre elles, R' est le centre du cercle correspondant.

4° La droite illimitée OK est le lieu des centres des *cercles de Tucker*.

**Théorème 1036.**

**2391.** Cercle de Taylor. *Si des pieds des hauteurs d'un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés, les six pieds de ces perpendiculaires sont sur une même circonférence.*

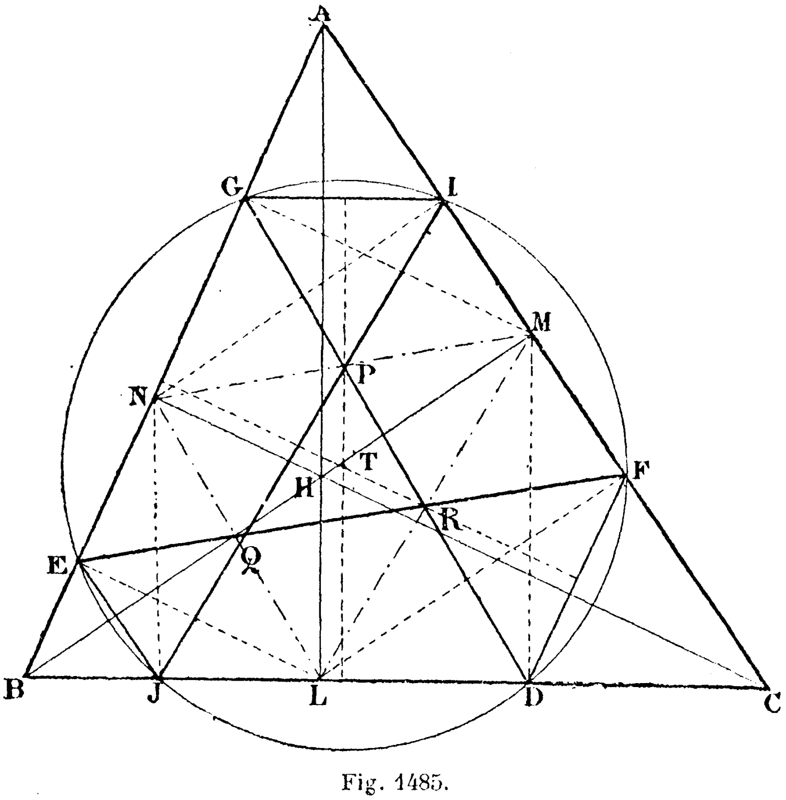



Fig. 1485.

1re *Démonstration.* Les trois antiparallèles DG, EF, IJ sont égales entre elles (n° 2304), donc les six points sont concycliques. — Voici d'ailleurs une démonstration fort simple qui ne présuppose pas la connaissance des théorèmes antérieurs.

2e *Démonstration.* En joignant deux à deux les pieds G, I des perpendiculaires issues de deux points différents M et N et les pieds E, F des perpendiculaires issues d'un même point, on obtient les côtés et les diagonales d'un hexagone EGIFDJ.

Démontrons d'abord que les côtés opposés GI, BC sont parallèles, tandis que la diagonale EF est antiparallèle à ces mêmes côtés.

La droite MN qui joint les pieds de deux hauteurs est antiparallèle au côté BC; or pour le triangle ANM, GI est antiparallèle au côté NM, donc GI et BC sont parallèles. La diagonale EF est parallèle à NM, à cause des triangles semblables ELF, NHM ; donc EF est antiparallèle à BC.

De même FD est parallèle à AB, et IJ est antiparallèle aux mêmes droites AB et FD; puis EJ est parallèle à AC, tandis que GD est antiparallèle à ces deux droites.

Ceci démontré, il est facile d'établir que l'hexagone est inscriptible : ainsi le quadrilatère EGIF est inscriptible, puisque les côtés opposés EF, GI du quadrilatère EGIF sont antiparalèlles, le quadrilatère JEGI est inscriptible, puisque AB, IJ sont antiparallèles par rapport aux côtés CA, CB, ou par rapport aux parallèles à ces mêmes côtés EJ, GI.

Les deux cercles ayant trois points communs E, G, I se confondent; de même le sixième point D appartient à ce cercle.

**2392**. *Remarques*. 1º Les trois diagonales sont égales entre elles, car le trapèze GIDJ est inscrit, et par suite symétrique; PQR est le *triangle médian* du *triangle orthique* LMN de ABC.

Le cercle inscrit au triangle PQR des trois diagonales est concentrique au cercle circonscrit EGIF; le centre se désigne par T.

2º Le *cercle de Taylor* appartient au groupe général des cercles de Lemoine ou de Tucker, car les six points concycliques sont déterminés, en réalité, par trois antiparallèles égales EF, DG, IJ.

3º Chaque triangle formé par un côté du triangle de référence et ayant l'*orthocentre* H pour sommet opposé, admet un cercle ayant avec le premier d'intéressantes relations géométriques ; on peut voir à ce sujet : Casey, p. 193.

**2392 a. Note.** Le *cercle de Taylor* a été étudié, en 1884, par l'auteur dont il porte le nom ; mais il avait été signalé en 1879 par M. Catalan, *Théorèmes et problèmes de Géométrie*, 6e édit., livre III, ch. LXV, p. 132, et antérieurement, dès 1877, il a été donné par le *Journal de Mathématiques* de M. Vuibert, 1877, pages 30 et 43, nº 60, sous le nom plus poétique qu'historique d'Eutaris, du Collège Chaptal.

A ce sujet on peut voir *Mathesis,* 1889, p. 250, les *Elements of Euclid* by John Casey, 1892, p. 193; l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1895, p. 166, nº 154. — N'oublions pas cependant une remarque déjà faite à l'occasion du *point de Lemoine :* Être devancé dans la découverte d'un théorème particulier, que les premiers auteurs ont rencontré et présenté comme question isolée, n'ôte point le mérite de ceux qui rencontrent ultérieurement la même question, qui la creusent, la développent, la complètent, et en font le simple point de départ d'une étude importante et bien originale : c'est ce qui a eu lieu pour le cercle qui nous occupe et qui porte avec justice le nom du savant anglais H. M. Taylor. Ce savant a étudié les cercles analogues des trois triangles AHB, BHC, CHA.

### Théorème 1036. — I.

**2393**. Cercle d'Adams. *Si par le point de Gergonne* N, *d'un triangle* ABC, *on mène des perpendiculaires sur les trois bissectrices intérieures du triangle, les six points obtenus sur le périmètre* ABC *sont concycliques, et le nouveau cercle a même centre* I *que le cercle inscrit.* (Énoncé de Lemoine.)

On peut dire : *Si par le point de Gergonne* N, *on mène des parallèles aux côtés du triangle podaire* DEF *du centre* I *du cercle inscrit, etc.* (Énoncé d'Adams, d'après Alasia, *La recente Geometria del triangolo*, p. 202.)

La droite JT, étant parallèle à la corde des contacts DF, intercepte sur les tangentes des segments égaux DT et FJ ; de même DK = EL et FG = EH.

Les points A, N, D sont en ligne droite; or, NL, FJ étant parallèles à DE, DF, il en résulte que LJ est parallèle à EF; donc $JF = EL$, les

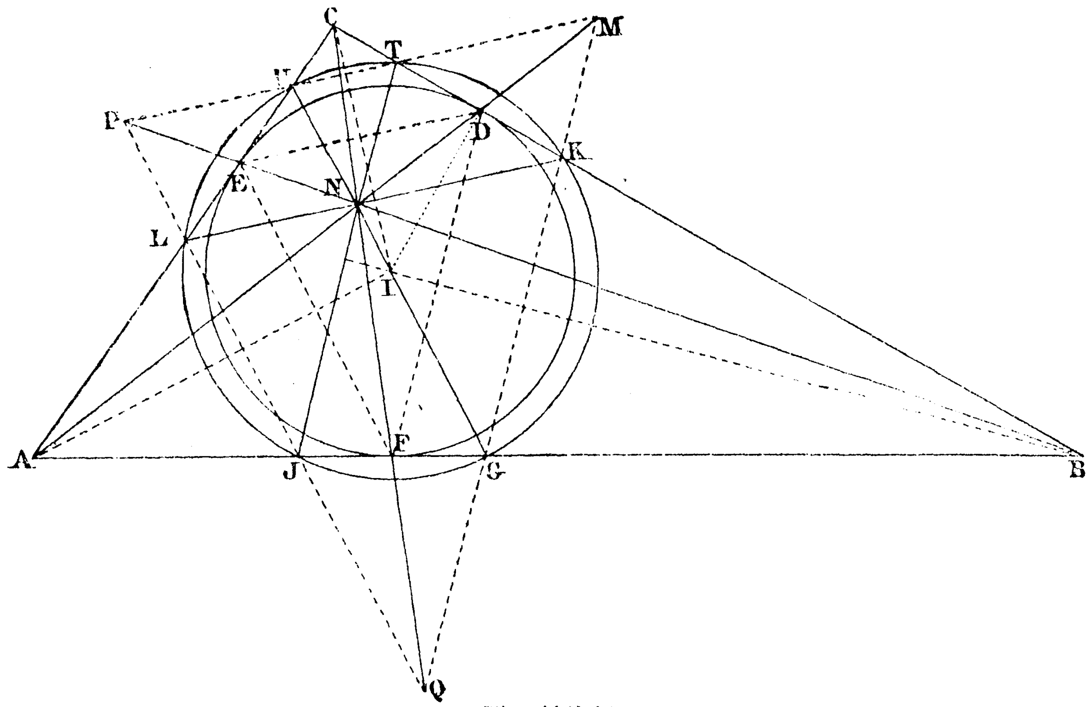



Fig. 1485 *bis*.

six segments sont égaux entre eux et les six points appartiennent à un cercle qui a le point I pour centre.

**2394.** *Remarques.* 1° Les triangles DEF, MPQ ont le *point* N *de Gergonne* pour centre d'homothétie.

2° Le cercle HLJGKT est le *premier cercle de Lemoine* du triangle MPQ, et il en a toutes les propriétés.

3° Chaque cercle exinscrit au triangle de référence ABC donne lieu à un théorème analogue au précédent.

4° Le triangle DEF est non seulement le triangle podaire du centre I, mais il est en même temps le *triangle pédal* des trois céviennes concourantes AND, BNE, CNF; et l'on arrive à la généralisation ci-dessous (5°).

5° Le théorème précédent n'est qu'un cas particulier du théorème général suivant :

*Les droites menées parallèlement aux côtés du triangle pédal de trois céviennes concourantes, par le point de Ceva de ces mêmes droites, déterminent six points qui appartiennent à une même ellipse; cette courbe est homothétique et concentrique à l'ellipse qui passe par les pieds des trois céviennes et est tangente aux trois côtés du triangle donné.*

6° Le théorème général peut s'obtenir en projetant la figure du *cercle d'Adams* sur un plan oblique à ABC.

7° Une remarque analogue pourrait être faite pour divers cercles remarquables déjà étudiés; ainsi le premier *cercle de Lemoine* conduit au théorème général suivant : *Si par le point de Ceva* K *de trois céviennes concourantes, on mène des parallèles aux côtés du triangle donné* ABC, *les six points obtenus appartiennent à une ellipse dont le centre est au* *point milieu de la droite* KO qui joint le *point de Ceva* donné au centre O de l'ellipse homothétique circonscrite au triangle ABC.

Les *cercles de Tucker* donnent des ellipses homothétiques dont les centres sont sur OK.

Le *second cercle de Lemoine* est un cas particulier du théorème suivant: *Si par un point* K *pris dans un triangle* ABC, *on mène trois droites comprises entre deux côtés du triangle, de manière que* K *soit le point milieu de chacune de ces droites, les six points obtenus sur le périmètre de* ABC *appartiennent à une ellipse dont* K *est le centre.*

**2394 a. Note.** 1° *Cercle d'Adams.* Le théorème est de 1847; les *N. A.* de 1489, p. 62, mentionnent l'auteur et certains de ses travaux. Le même recueil, en 1892, indique et démontre le *cercle d'Adams* comme cas particulier d'une belle étude sur *Quelques propriétés du triangle,* par P. MOLLENBROCH d'Amersfort (*N. A.,* 1892, p. 121 et 179).

Le *théorème d'Adams* se trouve aussi dans un ouvrage remarquable de M. ALASIA publié en 1900: *La recente Geometria del triangolo,* p. 202.

2° M. C. ALASIA, professeur à Brindisi, continue à s'occuper de la *Géométrie du triangle.*

On lui doit notamment: La *Bibliographie du triangle* de 1895 à 1905, communiquée par M. H. BROCARD au congrès de Lyon. (*A. F.*, 1906, p. 53 à 66) et diverses études publiées dans le *Pitagora* de Palerme, 1908, anno XIV, n° 8-9, et 1909, anno XVI, n° 8-9. Voici le thème de cette dernière.

3° Théorème. *Si l'on décrit un cercle quelconque qui coupe les trois côtés d'un triangle donné* ABC (n° 2383, fig. 1481), *qu'on joigne* DE, FG, IJ, *les trois droites* AA', BB', CC', *sont concourantes* (n° 2394 **b**).

4° Il en est de même pour tout hexagone ayant les côtés parallèles à ceux de la figure DEJIGFD, pourvu que les sommets soient sur les côtés du triangle ou sur leurs prolongements.

Lorsque trois côtés alternatifs de l'hexagone sont égaux entre eux, le cercle décrit est un des *cercles de Tucker,* car les trois côtés sont dans ce cas des antiparallèles égales.

### Théorème d'Alasia 1036. — II.

**2394 b.** *Lorsqu'un cercle* DEF *coupe les côtés d'un triangle* ABC, *les*

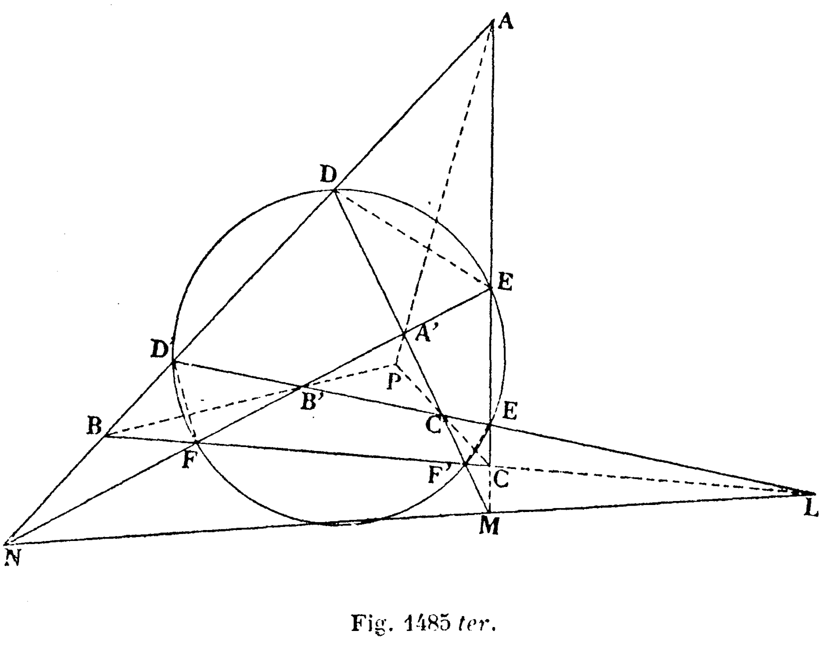



Fig. 1485 *ter.*

*droites* DF′, ED′, FE′ *forment un triangle* A′B′C′ *homologique du premier; par suite, les droites* AA′, BB′, CC′ *se coupent en un même point* P *et les côtés se coupent deux à deux en trois points* L, M, N *en ligne droite.*

*Remarque.* Lorsque les antiparallèles DE′, EF′, FD′ sont égales entre elles, le cercle DEF est un des cercles de LEMOINE, TUCKER ou TAYLOR. (C. ALASIA, professeur à Brindisi. Voir *Pitagora* de Palerme, XVI, n. 8-9.)

## Lieux géométriques.

### Théorème 1037.

**2395.** *Le lieu des points dont les distances à deux segments rectilignes donnés de grandeur et de position sont directement proportionnelles à ces mêmes segments, est une droite qui passe par le point de concours des droites de ces segments. Construire ce lieu.*

1° *Lieu* (fig. 1486). Le point O appartient évidemment au lieu; soit L un autre point tel que l'on ait : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

Tous les points de OL donnent le même rapport.

2° *Construction.* 1er *Moyen* (fig. 1486). Prenons des perpendiculaires $a'$, $b'$ proportionnelles aux segments $a$ et $b$; menons des parallèles EL, FL; le point L appartient au lieu.

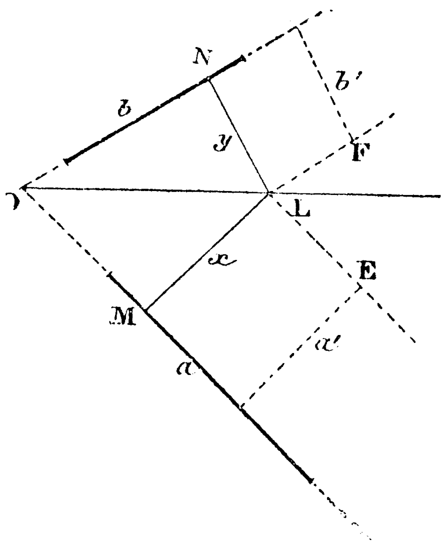



Fig. 1486.

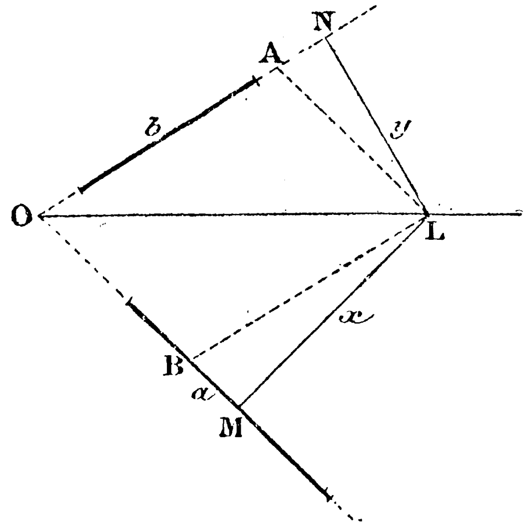



Fig. 1487.

2e *Moyen* (fig. 1487). Prenons $OA = b$, $OB = a$ et terminons le parallélogramme OALB; la diagonale OL est le lieu demandé, car

$$\frac{x}{LB} = \frac{y}{LA} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

**Théorème 1038.**

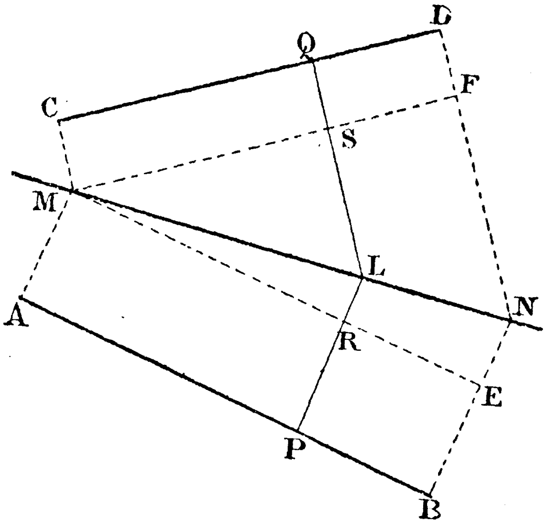



Fig. 1488.

**2396.** *Le lieu des points dont les projections* P *et* Q *sur deux segments rectilignes* AB, CD *donnés de grandeur et de position, divisent ces deux segments dans un même rapport est la droite* MN *qui joint le point* M *d'intersection des perpendiculaires* AM, CM, *au point* N *où se coupent les perpendiculaires élevées sur les segments, aux points correspondants* B *et* D.

On admet que les extrémités A et C se correspondent et qu'il en soit de même de B et D (fig. 1488 et 1489).

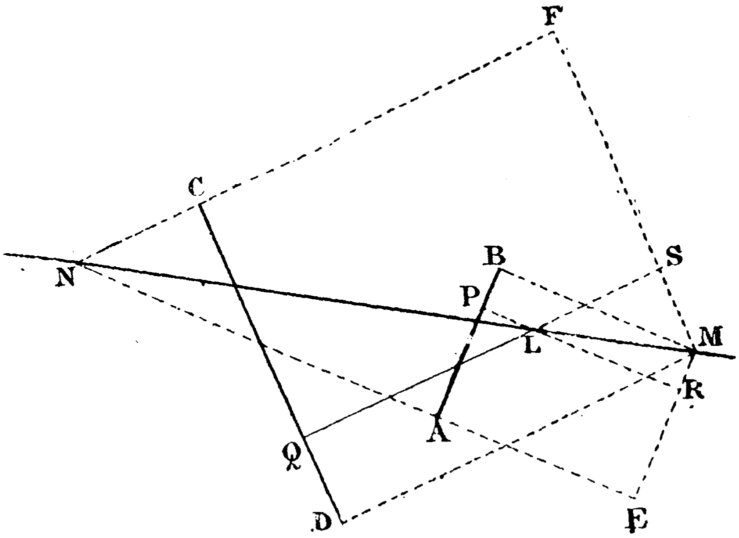



Fig. 1489.

En menant par M ou N des parallèles aux segments donnés, on reconnaît que pour un point L quelconque de ME on a :

$$\frac{MR}{RE} = \frac{MS}{SF} \quad \text{ou} \quad \frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD}.$$

**2397.** *Remarques.* Si l'on ne désigne point les extrémités qui se correspondent, par exemple, si le point A peut aussi correspondre à D, le lieu complet se compose en outre d'une seconde droite ; les deux droites ainsi obtenues se rencontrent au point de concours des perpendiculaires élevées au point milieu des segments.

2° Le théorème est vrai lorsqu'on projette obliquement, mais dans des directions données, chaque point du lieu demandé.

Par A et B on mène des parallèles à la direction donnée relativement à AB, et par C et D des parallèles à l'autre direction.

3° *Lorsqu'on donne trois segments rectilignes, et qu'on les considère deux à deux, les trois droites analogues à* MN *passent par un même point.*

Nous allons démontrer directement cette proposition, parce que nous l'utiliserons assez fréquemment.

### Théorème 1039.

**2398.** *On donne trois segments rectilignes* AB, A'B', A''B'' *de longueurs et de positions données; pour ces segments considérés deux à deux, on détermine le lieu des points dont les projections divisent en parties proportionnelles les segments considérés. Prouver que les trois droites* MN, M'N', M''N'' *concourent au même point.*

Soient MN le lieu pour les segments AB, A'B'; puis M'N' pour A'B' et A''B''. Les deux lieux se coupent en un point L qui donne :

$$\frac{AP}{PB} = \frac{A'P'}{P'B'},$$

et

$$\frac{A'P'}{P'B'} = \frac{A''P''}{P''B''};$$

d'où

$$\frac{AP}{PB} = \frac{A''P''}{P''B''};$$

donc le point L appartient au lieu M''N'' des segments AB et A''B''.

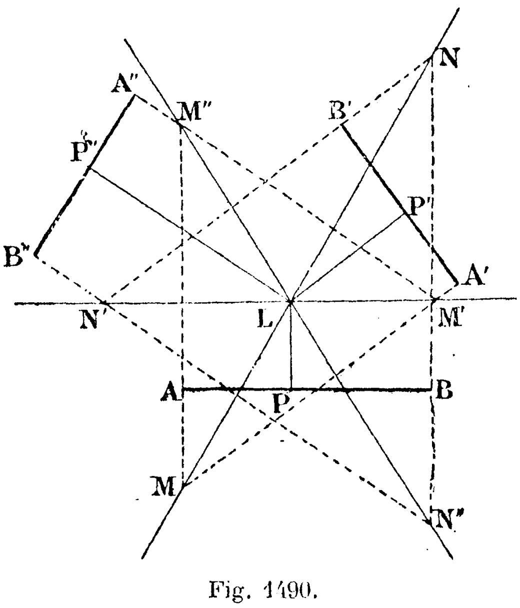


Fig. 1490.

**2399.** *Remarques.* 1° Le théorème est vrai pour les projections obliques et se démontre de même.

2° A défaut de nom expressif plus concis, nous nommerons le point L *point des divisions proportionnelles* pour trois segments rectilignes donnés.

3° Pour les trois côtés d'un triangle, pour les cordes d'un même cercle, le point des divisions proportionnelles coïncide avec le centre du cercle circonscrit; les côtés du triangle sont divisés en deux parties égales.

4° *Soient trois segments* AA', BB', CC'; si l'on peut mettre en correspondance directe une quelconque des extrémités de chaque segment, par exemple, A, B et C', on obtient *quatre points* tels que L; car en se bornant à une seule des extrémités des segments, on a les groupes suivants :

A, B, C; A, B, C'; A, B', C; A', B, C.

Chaque groupe fournit un point.

L'ensemble des droites qui constituent les lieux géométriques comprend six lignes différentes qui se rencontrent trois à trois en quatre points.

### Lieu 1040.

**2400.** *On donne un triangle quelconque* ABC. *Quel est le lieu des points des divisions proportionnelles des côtés, pour ces mêmes côtés considérés deux à deux? — L'ensemble comprend six droites qui passent par un même point.*

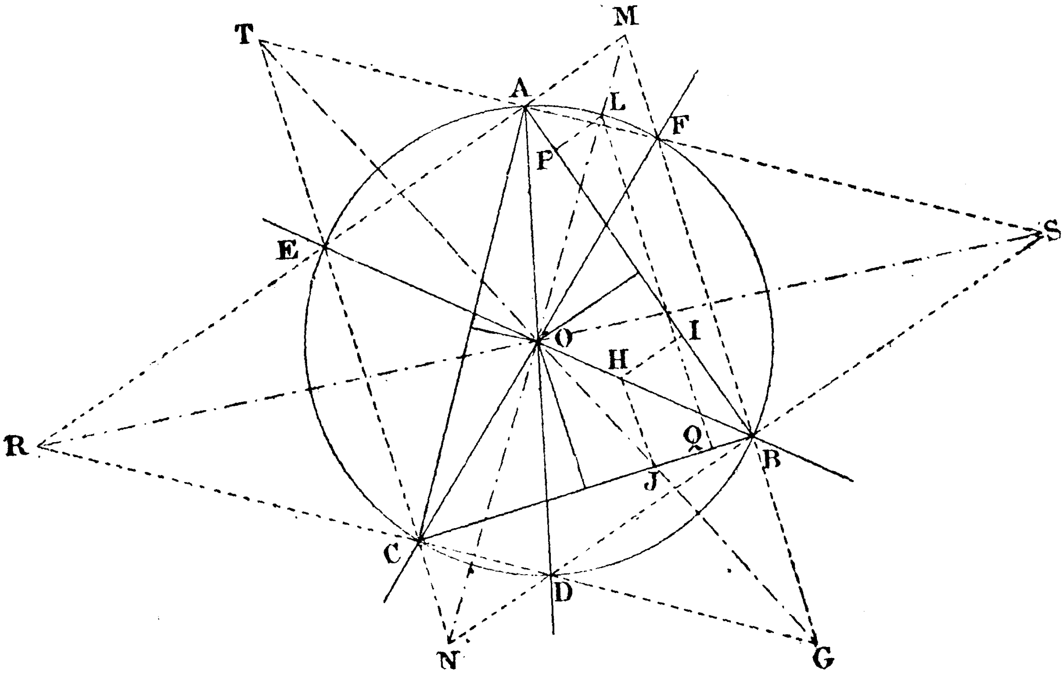



Fig. 1491.

C'est une simple conséquence du numéro précédent 2399, 3° et 4°.

*Constructions.* 1° Les diamètres du cercle circonscrit qui partent des sommets, les perpendiculaires BC, CD se coupent à l'extrémité du diamètre mené par A et O ; l'on a :

$$\frac{BI}{BA} = \frac{BJ}{BC}.$$

Les distances peuvent être comptées à partir des sommets successifs A, B, etc., de manière qu'on ait :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{BQ}{BC}.$$

2° On a recours à la construction générale (n° 2396) ; les perpendiculaires élevées aux extrémités de AB et de BC se coupent en M et N, donc MN appartient au lieu demandé ; on obtient deux autres droites analogues ; les six droites obtenues passent par le centre du cercle circonscrit, parce que ce point donne les milieux des côtés et que ces lignes se trouvent ainsi divisées en parties proportionnelles dans les deux systèmes.

### Problème 1041.

**2401.** *On donne deux segments rectilignes en longueur et en position. Trouver un point qui soit le sommet commun de deux triangles semblables ayant respectivement pour bases les segments donnés.*

1re *solution*. On trace le lieu des points dont les distances aux segments sont directement proportionnelles aux longueurs données, et le lieu des points des divisions proportionnelles (no 2396). Le point commun aux deux lieux est le sommet demandé.

Chaque lieu se composant de deux droites, on obtient *quatre points communs*.

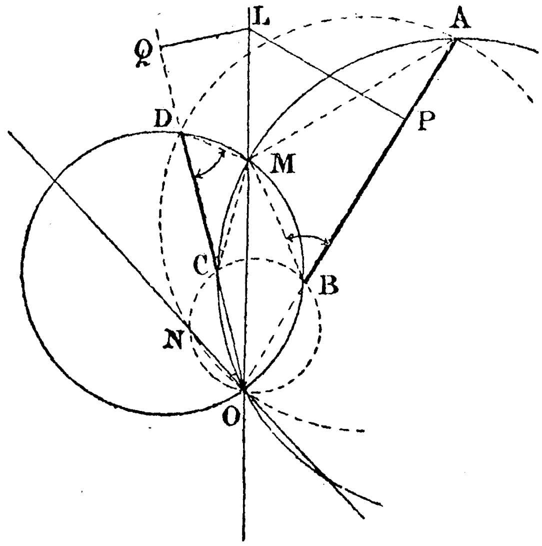


Fig. 1492.

**2402**. 2e *solution*. Soient AB, CD les segments donnés; O leur point de concours.

1o Admettons que A corresponde à C. Il faut décrire les circonférences ACO et BDO. Le second point commun M à ces deux cercles est le *point double* demandé (voir ci-après, no 2405). En effet, les triangles ABM, CDM sont semblables, car l'angle B = D, etc.

2o Si le point A correspond au point D, il faut décrire les circonférences ADO et BCO; le point N répond à la question.

**2403**. 3e *solution*. *Circonférences adjointes*. On nomme *circonférences adjointes* d'un triangle ABC, des circonférences telles que AMB, AMC

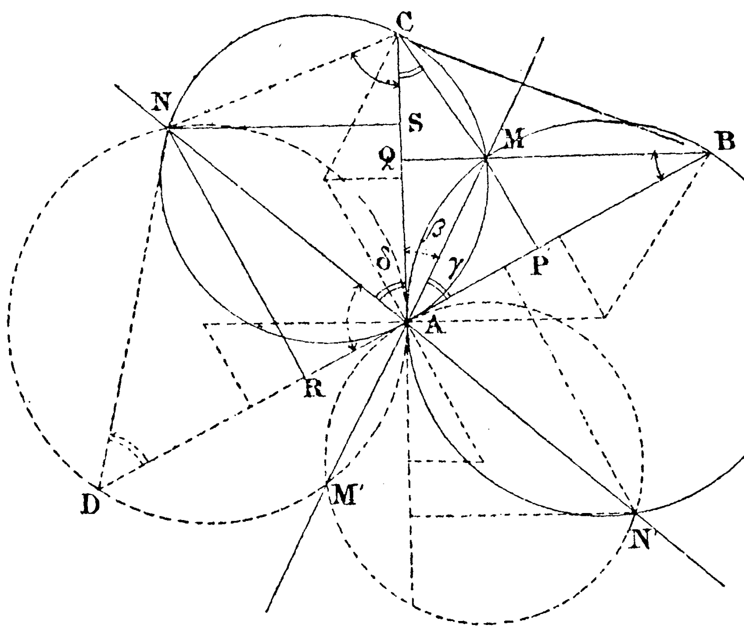


Fig. 1493.

qui passent par les extrémités des côtés AB, AC et qui sont respectivement tangentes à AC et à AB.

Les circonférences adjointes AMB, AMC donnent le point M qui répond à la question.

En effet, les triangles AMB, CMA sont semblables, car l'angle $B = \beta$ et $\gamma = C$.

Donc $$\frac{MP}{MQ} = \frac{AB}{AC}, \quad \text{et} \quad \frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QA}.$$

**2404.** *Remarques.* 1° La droite AM est le lieu des points dont les distances aux segments sont dans le même rapport que ces segments.

La droite AN, abstraction faite des signes, appartient aussi à ce lieu.

2° Le problème considéré dans toute sa généralité comporte quatre solutions : M, N, M′, N′, symétriques deux à deux par rapport au point commun A.

Ainsi on a : $$\frac{NR}{NS} = \frac{AB}{AC}; \quad \text{puis} \quad \frac{AR}{CS} = \frac{RD}{AS}.$$

3° Dans un triangle, pour les côtés considérés deux à deux, les trois droites telles que AM concourent en un même point; c'est le *point de Lemoine* K (n° 2353). Deux droites telles que NN′ par exemple, celle des sommets B et C, et la droite intérieure AM concourent en un même point : on obtient donc un point intérieur K et trois points extérieurs qu'on nomme *points associés* du *point de Lemoine.*

Le seul point, à distance finie, dont les projections divisent les trois côtés d'un triangle dans un même rapport est le centre du cercle circonscrit; ce point, sauf pour le triangle équilatéral, ne coïncide pas avec le point K.

**2405.** *Point double.* On nomme *point double* de deux figures directement semblables, un point de la première qui est son propre homologue pour la seconde.

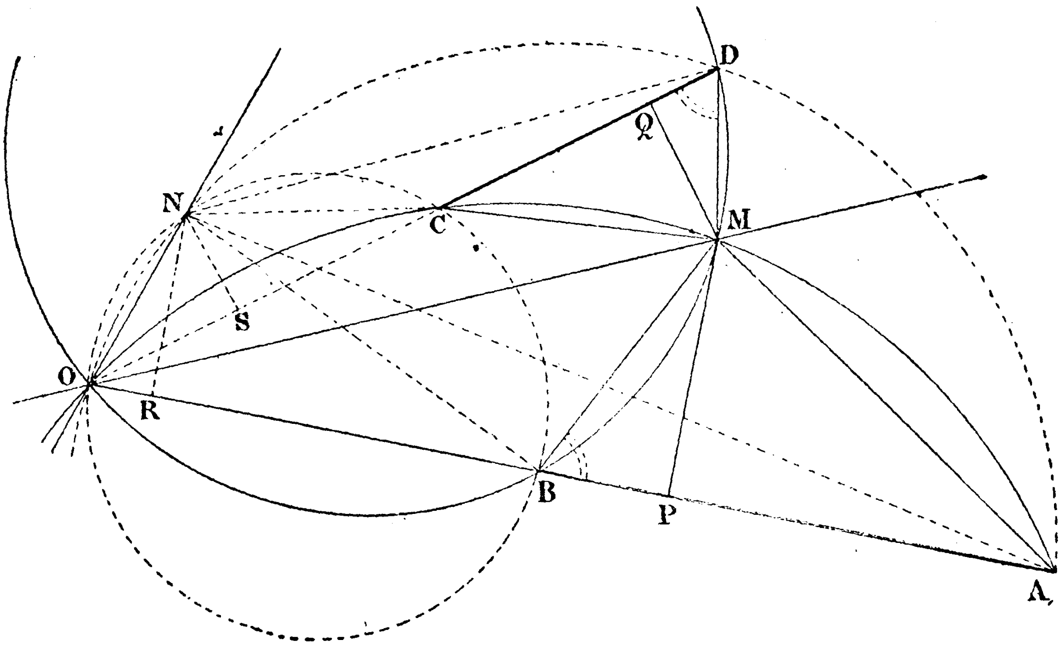



Fig. 1494.

La construction indiquée précédemment (n° 2402) donne le point double M, pour les segments AB, CD, lorsque A correspond à C et B à D. Les triangles AMB, CMD sont directement semblables; par la rotation de l'un d'eux autour de M, le côté MC viendrait sur MA, le côté MD sur MB, et CD serait parallèle à AB.

Si l'on fait correspondre D au point A et C au point B, on trouve N pour point double, et les triangles ANB, DNC sont aussi directement semblables.

### Lieu 1042.

**2406.** *Déterminer le lieu des points des moments égaux pour deux segments rectilignes, donnés de longueur et de position.*

*Le moment est le produit du segment par sa distance au point considéré.*

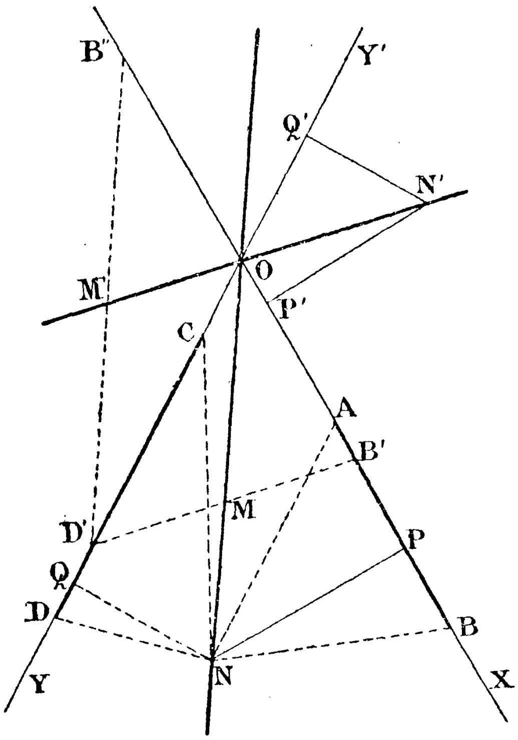


Fig. 1495.

Soit N un point du lieu demandé; puisqu'on a :

$$AB \,.\, NP = CD \,.\, NQ.$$

On trouve :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{NQ}{NP};$$

donc les distances du point sont inversement proportionnelles aux segments; or dans un triangle c'est la médiane dont les points jouissent de cette propriété (nº 1594); pour avoir le lieu, prenons $OB' = AB$, $OD' = CD$ et menons la médiane OM.

Le lieu comprend aussi l'antimédiane OM'; elle donne :

$$AB \,.\, N'P' = CD \,.\, N'Q'.$$

**2407.** *Remarques.* 1º Les droites OX, OY, OM, OM' forment un faisceau harmonique, car ON' est parallèle à la droite B'D' que les trois autres rayons divisent en deux parties égales.

2º L'ensemble des droites OM, OM' est le lieu des sommets des triangles équivalents NAB, NCD.

### Problème 1043.

**2408.** *Déterminer le lieu des moments égaux pour trois segments rectilignes considérés deux à deux. L'ensemble se compose de six droites qui se rencontrent trois à trois en quatre points.*

En procédant comme dans la question précédente (nº 2406), on détermine AM et $AM_c$ pour lieu relatif aux segments $\alpha\beta'$ et $\gamma\alpha'$, etc. Les trois droites intérieures se coupent en un même point, et il en est de même de chaque groupe d'une ligne intérieure et de deux extérieures ; en effet, soit MB le lieu des moments égaux pour $\alpha\beta'$ et $\beta\gamma'$. On a d'abord :

$$\alpha\beta' \,.\, MR = \gamma\alpha' \,.\, MQ\,; \quad \text{puis} \quad \alpha\beta' \,.\, MR = \beta\gamma' \,.\, MP\,;$$

donc $\gamma\alpha' \,.\, MQ = \beta\gamma' \,.\, MP$ et par suite le point M appartient au lieu relatif à $\beta\gamma'$ et $\gamma\alpha'$.

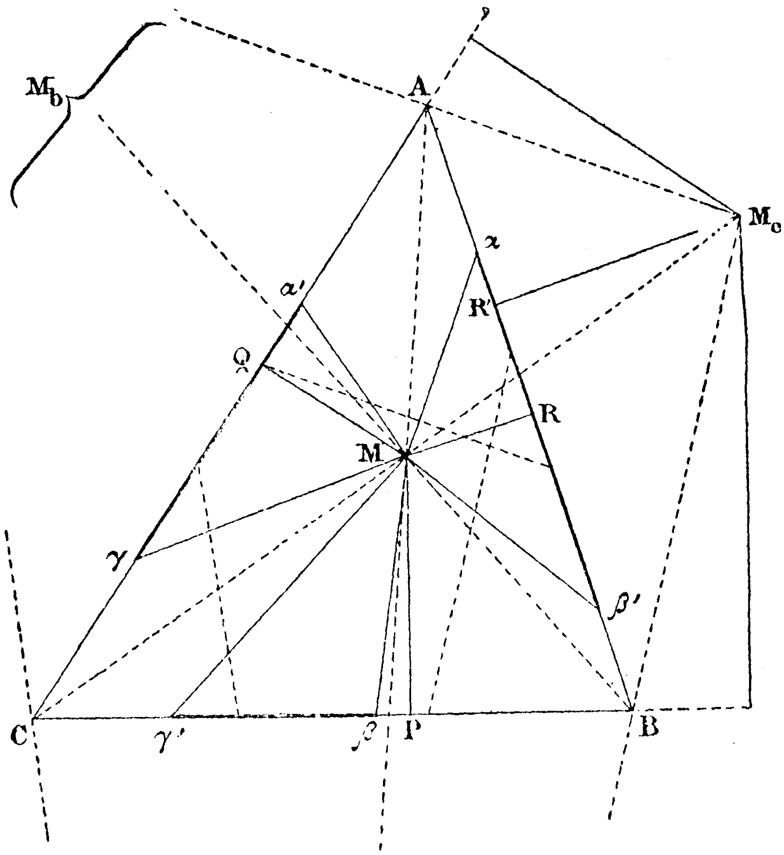



Fig. 1496.

De même $M_c$ appartient aux lieux des trois segments ; on trouverait deux autres points analogues.

**2409.** *Remarques.* 1° Les triangles $M\alpha\beta'$, $M\beta\gamma'$, $M\gamma\alpha'$ sont équivalents.

2 $M_a$, $M_b$, $M_c$ sont les *points associés* de M. D'après les conventions établies, la distance $M_cR'$ est négative, et il en est de même, par suite, du moment $\alpha\beta' \,.\, M_cR'$, et les triangles équivalents $M_c\alpha\beta'$ et $M_c\beta\gamma'$ sont de signes contraires.

3° Le centre de gravité G d'un triangle est le point intérieur des moments égaux pour les côtés de ce triangle ; on connaît aussi les trois points qui lui sont associés.

**2410.** *Généralisation.* Les propositions relatives au triangle sont des cas particuliers de celles qu'on peut établir pour trois segments rectilignes donnés de longueur et de position : c'est ce qu'on a déjà signalé pour le point des distances directement proportionnelles, ou *point de Lemoine* dans le triangle ; pour le point des divisions proportionnelles, ou centre du cercle circonscrit pour le triangle, etc.

**Théorème 1044.**

**2411.** Cercle des moments égaux. *Sur chaque côté d'un triangle, vers l'intérieur de ce triangle, on construit un triangle isocèle équivalent au tiers de la surface du triangle donné. Prouver que les sommets des triangles isocèles équivalents, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité du triangle donné appartiennent à une même circonférence. Trois autres points, faciles à déterminer d'avance, appartiennent à cette même circonférence.*

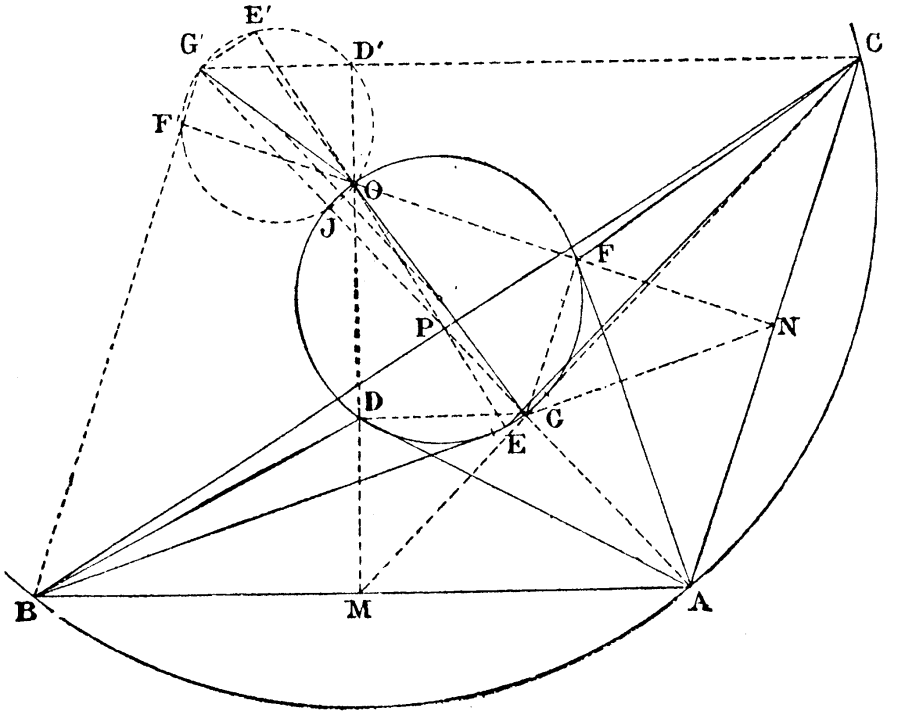



Fig. 1497.

Soient G le point de concours des médianes, MO la médiatrice de AB; la parallèle GD détermine le sommet d'un triangle isocèle équivalent au tiers du triangle total : or le sommet D de l'angle droit ODG appartient à la circonférence décrite sur OG comme diamètre; donc...

*Remarque.* On sait que les points associés à G au nombre de trois, tels que G', sont les sommets du triangle circonscrit à côtés parallèles à ceux du premier. La propriété précédente subsiste, sauf la modification de signe que comportent les points associés : ainsi D', E', F' sont les sommets de trois triangles isocèles équivalents entre eux, et tels qu'on ait :

$$AD'B + AF'C - BE'C = ABC.$$

**2412.** *Cercle des huit points.* Le cercle ayant OG pour diamètre et les trois cercles associés passent par le point O ; chacun de ces trois derniers a un autre point commun avec le cercle OG, ce point se trouve sur la médiane correspondante; ainsi J où la médiane AGG' coupe le cercle, OG' appartient aussi au cercle OG, car la ligne des centres est bimédiane du triangle GOG'.

On peut donc déterminer trois points analogues à J, sans tracer le cercle OG, et ce dernier passe ainsi par *huit points* déterminés d'avance.

**Théorème 1044. — I.**

**2413.** *Tous les triangles inscrits dans un même cercle de centre* O, *qui ont même centre de gravité* G, *admettent le même cercle des huit points.*

On sait qu'on peut construire une infinité de triangles inscrits dans un cercle donné, dont un point donné G est le centre commun de gravité (n° 1185 **b**, 3°); donc tous ces triangles ont pour *cercle des huit points* le cercle décrit sur OG pris pour diamètre.

**Théorème 1044. — II.**

**2413 a.** *Trois segments rectilignes quelconques admettent un cercle des huit points.*

Soient trois segments quelconques (fig. 1496 du n° 2408). Il faut déterminer le point L des divisions proportionnelles et le point M des moments égaux ; le cercle décrit sur LM pris pour diamètre est le *cercle des huit points.*

Les points tels que D, E, F (fig. 1497) sont les sommets de trois triangles directement semblables.

Le théorème est analogue à celui du n° 2449 relatif à l'extension du *cercle de Brocard.*

**Théorème 1044. — III.**

**2413 b.** *Le cercle qui a pour diamètre la droite* HO *qui joint l'orthocentre au centre du cercle circonscrit passe par neuf autres points faciles à déterminer.*

Il suffit de projeter l'orthocentre H sur les médiatrices du triangle, sur les céviennes qui passent par le point O, puis de projeter le centre O sur les hauteurs du triangle : les neuf points ainsi obtenus appartiennent au cercle décrit sur le diamètre HO.

*Remarque.* Les projections de H sur les médiatrices sont les sommets d'un triangle semblable au triangle donné. Il en est de même des projections du centre O sur les hauteurs. (Voir n° 2287.)

**Lieu 1045.**

**2414.** *On donne un triangle* ABC; *d'un même point* L *on abaisse des perpendiculaires* LM, LN *sur les côtés* a *et* b :

1° *Quel est le lieu des points qui donnent des produits égaux* a . CM *et* b . CN, *l'origine des segments étant le sommet commun* C?

2° *Lieu des points tels que* a . CP = b . AR; *le sommet* C *étant l'origine des segments déterminés sur le côté* a *et le sommet* A, *de ceux qui correspondent à* b.

1° Le demi-cercle décrit sur le diamètre AB donne :

$$a \,.\, CP = b \,.\, CQ.$$

Or les perpendiculaires AP, BQ, se coupent sur la hauteur abaissée du point C, et comme ce sommet C appartient au lieu, *la hauteur* CH *est le lieu demandé*, car pour tout autre point L de cette ligne on a :

$$a \,.\, CM = b \,.\, CN.$$

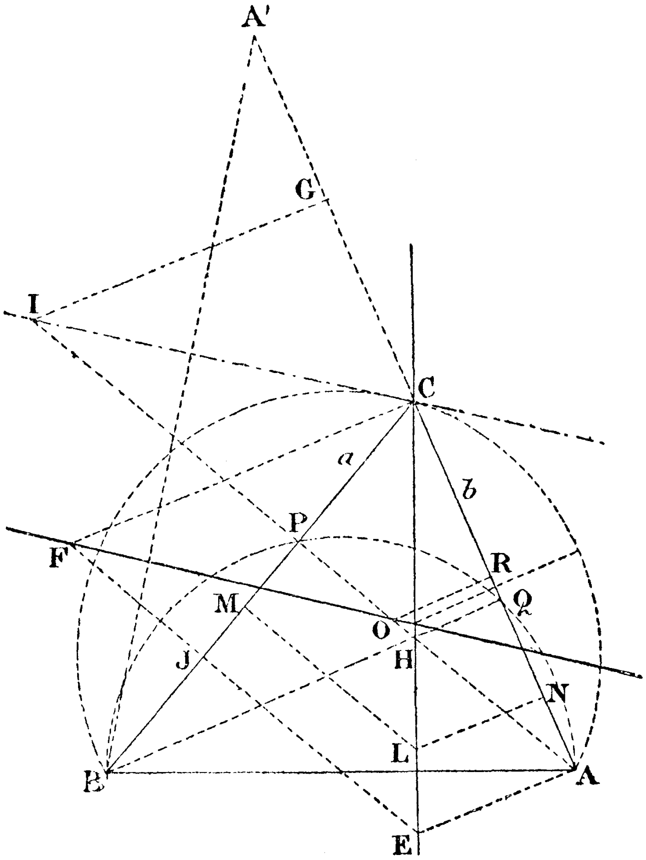



Fig. 1498.

2° Il suffit de déterminer deux points du lieu; prendre AR = CQ; le point O appartient au lieu, puisqu'on a :

$$a \,.\, CP = b \,.\, CQ = b \,.\, AR.$$

F est le point qui correspond au segment AG = $b$, ou aux valeurs $a \,.\, CJ = b \,.\, AG = b^2$; donc FO répond à la question.

**2415.** *Remarques.* 1° Si l'on porte CQ de C en G, la droite OF est parallèle à CI, c'est-à-dire est parallèle à la hauteur du triangle BCA', dans lequel CA' = CA.

2° Sans s'appuyer sur la propriété connue de la hauteur, on peut démontrer facilement que le lieu des points L est une droite, car de

$$a \,.\, CM = b \,.\, CN \quad \text{et} \quad a \,.\, CP = b \,.\, CQ,$$

on déduit : $\dfrac{CM}{CN} = \dfrac{b}{a}$ et $\dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{b}{a}$; d'où $\dfrac{CM}{CN} = \dfrac{CP}{CQ}$;

et le lieu du point L est la droite CL des points dont les projections sur deux droites déterminent des grandeurs directement proportionnelles.

**Lieu 1045. — I.**

**2416.** *On donne deux droites* AB, A'B', *un point* C *sur la première et* C' *sur la seconde, ainsi que deux longueurs* a *et* a'. *Trouver le lieu des points* L *tels qu'en les projetant en* P *et* P' *sur les droites, on ait les produits égaux* a . CP = a' . C'P'.

Il y a deux cas à considérer, suivant que les segments CP, C'P' sont tous deux déterminés dans la direction qui va de C et C' vers le point de concours S des deux droites données, ou sont tous deux comptés dans la direction contraire; dans le second cas, un des segments CP, par exemple, est dans la direction CS, tandis que C'P' est dans la direction opposée.

Le lieu peut être désigné brièvement par le nom de *lieu des points des segments inverses*, parce que les segments déterminés sont inversement proportionnels aux longueurs données $a$ et $b$ qui leur correspondent.

**Problème 1046.**

**2417.** *Déterminer un point tel que ses projections sur les côtés d'un triangle* ABC *donnent des segments qui, étant multipliés respectivement par le côté correspondant, donnent trois produits égaux. — Les segments considérés n'ont point d'extrémité commune.*

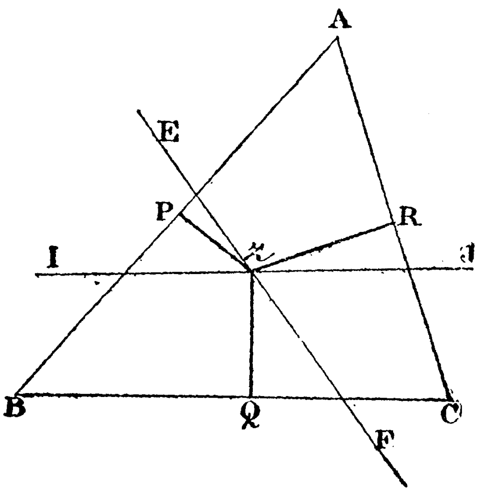


Fig. 1499.

Suivons le périmètre du triangle dans le sens ABC.

Menons le lieu IJ *des points des segments inverses* relatifs au sommet A, tel qu'on ait pour chacun d'eux :

$$AB \,.\, AP = CA \,.\, CR\,; \qquad (1)$$

puis le lieu analogue relatif au sommet B, de manière qu'on ait :

$$BC \,.\, BQ = AB \,.\, AP. \qquad (2)$$

Le point Z commun aux deux lieux répond à la question.

**2418.** *Remarques.* 1° Les trois lieux analogues se coupent en un même point, car des égalités (1) et (2) on conclut que le point Z appartient au lieu relatif du troisième sommet C.

2° En suivant le périmètre du triangle dans le sens ACB, contraire au premier, on détermine un second point Z' analogue au point Z. Ces points peuvent être nommés, par rapport aux côtés du triangle, *points des segments inverses*.

### Théorème 1047.

**2419.** *Par le point symétrique du pied de la hauteur d'un triangle, par rapport au milieu de la base, on mène une parallèle à cette hauteur :*

1° *Les trois droites analogues du triangle se coupent en un même point ;*

2° *Chaque droite ainsi menée est le lieu des points dont les projections sur les côtés adjacents à la base considérée déterminent des segments, à partir de cette base, inversement proportionnels aux longueurs des côtés sur lesquels ils sont situés.*

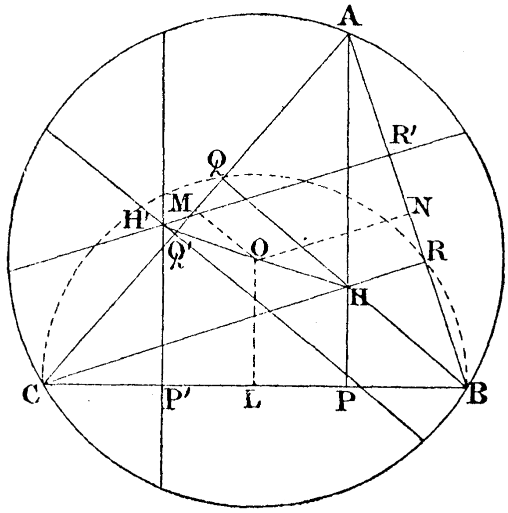



Fig. 1500.

1° Chaque droite telle que P'H' passe par le point H' symétrique de l'orthocentre H, par rapport au centre du cercle circonscrit.

2° La hauteur AP est le lieu du point H dont les projections Q, R sur les côtés donnent les produits égaux $AC . AQ = AB . AR$ ; donc P'H' est le lieu des points tels qu'on a : $CA . CQ' = BA . BR'$.

### Théorème 1048.

**2420.** *Pour un triangle donné, le lieu complet du point dont les projections sur les côtés considérés deux à deux déterminent des segments qui, multipliés respectivement par le côté correspondant, donnent des produits égaux, se compose de douze droites parallèles deux à deux, et qui, se coupant trois à trois en quatre points, donnent lieu à un parallélogramme dont le centre du cercle circonscrit au triangle est le point de concours des diagonales.*

Considérons AB et CD.

1° Lorsque l'origine des segments est en A et D, la hauteur AH est le lieu demandé, car $AB . AF = DC . DE$.

2° Quand on prend B et C pour origines des segments, le lieu est la droite PQ parallèle à AT et symétrique par rapport au point milieu G du côté. Il suffit en effet de prendre les points E', F' symétriques de E, F par rapport à M, N, car alors

$$BA \cdot BF' = CD \cdot CE'.$$

3° Quand on prend A et C pour origines, on a RS.

4° Avec D et B pour origines, on a R'S'.

A cause de la construction, on voit que les quatre droites forment un parallélogramme dont O est le centre.

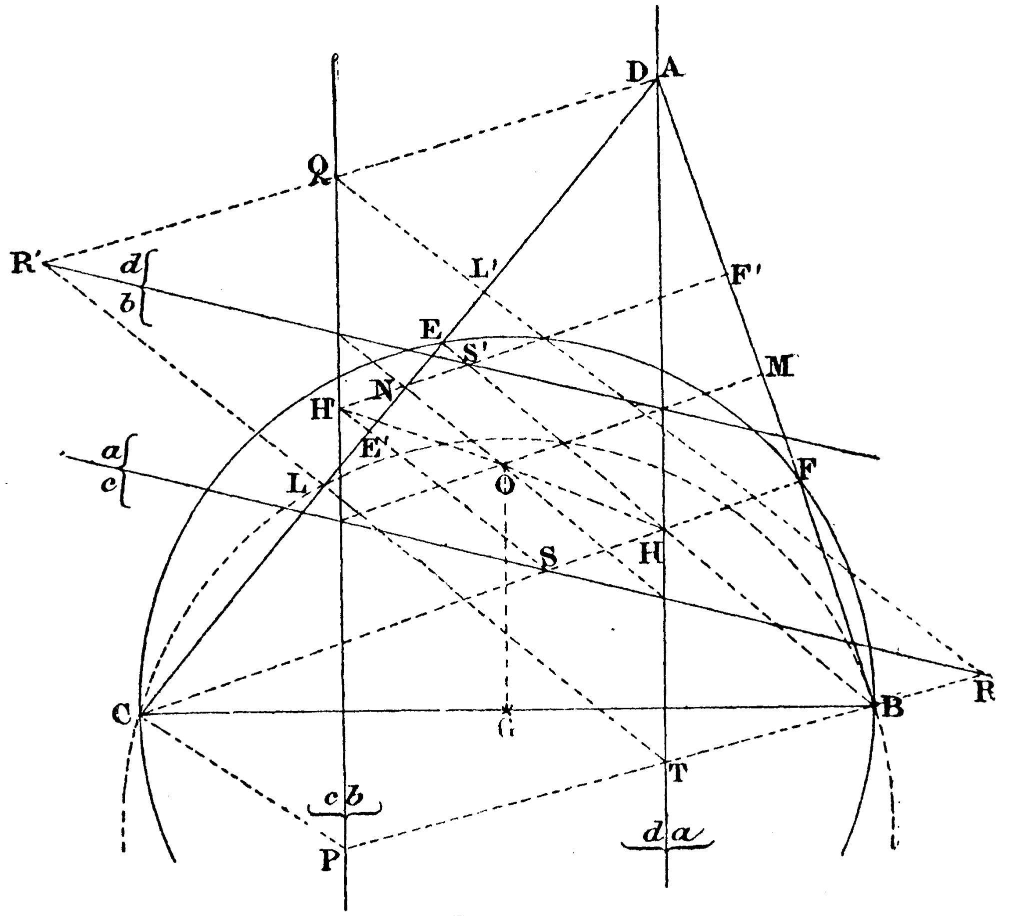



Fig. 1501.

Considérons les trois côtés pris deux à deux ; chaque groupe donne quatre droites ; donc, en tout, le lieu en a douze. Les trois hauteurs se coupent en H ; leurs symétriques en H', point symétrique de l'orthocentre par rapport au centre O.

De même les trois droites analogues à R'S' se coupent en un même point symétrique par rapport à O, du point où se coupent les droites telles que RS. Donc...

### Lieu 1049.

**2421**. *Lieu des points tels que les parallèles menées par chacun d'eux à deux côtés* a *et* b *d'un triangle soient égales entre elles. — La parallèle au côté* a *est limitée aux deux autres côtés, etc.*

Le lieu est une droite : il suffit d'en déterminer deux points ; or si l'on trace le triangle anticomplémentaire de ABC, le sommet C' appartient au lieu des droites égales parallèles aux côtés $a$ et $b$, car les segments interceptés entre les deux autres côtés en A et B sont nuls. Le point I sur la base est le pied de la bissectrice intérieure de l'angle C, car alors $ID = IE$; donc C'I est le lieu demandé.

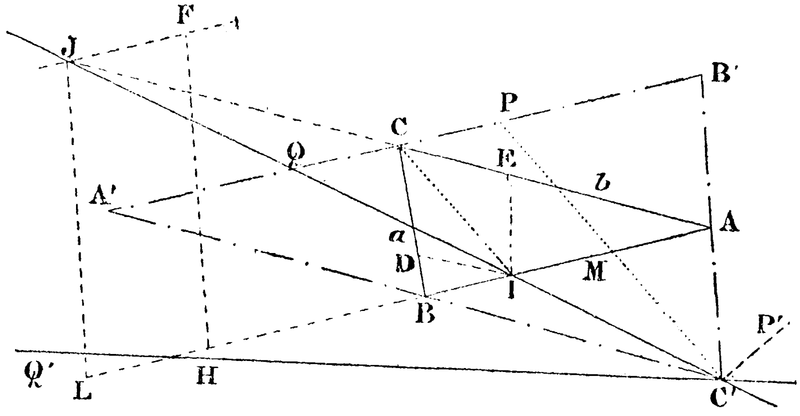



Fig. 1502.

**2422.** *Remarques.* 1° Il est facile de déterminer d'autres points du lieu, par exemple, celui qui est sur le côté AC : il faut prendre la parallèle HF égale à AC, etc. ; le point J donne $JL = CA$.

2° Le point I étant le pied de la bissectrice, on voit que *le lieu demandé* C'IJ *divise la base* AB *en segments* BI, IA *directement proportionnels aux côtés adjacents* a *et* b.

3° *Le lieu* C'IQ *est l'antibissectrice de l'angle* C' *du triangle anticomplémentaire* A'B'C', c'est-à-dire la droite isotomique de la bissectrice C'P (n° 1242 **d**), car $CP = CQ$ ; on a donc :

$$\frac{QA'}{QB'} = \frac{IB}{IA} = \frac{a}{b} = \frac{C'B'}{C'A'} = \frac{PB'}{PA'}.$$

4° Il y a lieu de considérer aussi, comme appartenant au lieu, l'antibissectrice C'Q de la bissectrice extérieure C'P'.

5° L'*antibissectrice* jouit d'intéressantes propriétés ; cette droite a été *nommée* et étudiée par M. d'Ocagne. (*J. M. E.*, 1880, p. 158.)

### Problème 1050.

**2423.** *Dans un triangle, déterminer un point* X *tel que les parallèles menées par ce point aux côtés du triangle et limitées à ces mêmes côtés soient égales entre elles.*

On mène les lieux C'Q, A'N relatifs à deux sommets du triangle anticomplémentaire (fig. 1503) : le point X répond à la question.

**2424.** *Remarques.* 1° *Les trois lieux se coupent au même point* X, car les parallèles FF', DD' sont égales entres elles parce que le point X appartient au lieu de A', et DD', EE' sont égales parce que X appartient à C'Q ; puisque $EE' = FF'$, le point X appartient au lieu de B'.

2° On démontre facilement que les trois lieux se coupent en un même point, en les considérant comme les antibissectrices du triangle A'B'C', car ces droites sont isotomiques des bissectrices de ce même triangle.

3° La considération des trois droites du lieu, qui sont les antibissectrices des bissectrices extérieures de A'B'C', donne les trois points associés de X,

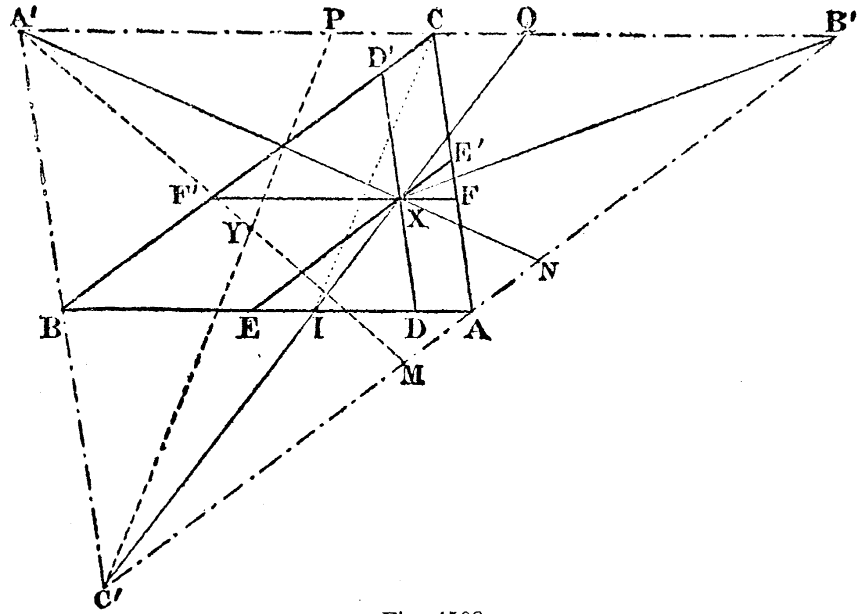



Fig. 1503.

car deux antibissectrices extérieures et une intérieure se coupent en un même point.

4° La question précédente a été résolue par M. Brocard, avec *note* par M. Neuberg, l'auteur même de la question. (*Mathesis,* 1881, p. 148.)

En désignant par $d$ la longueur commune des parallèles, on a :

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

5° On peut déterminer aussi le point demandé X' en recourant au *lieu des points tels que les deux droites menées par ces points, inscrites dans chaque angle du triangle donné et parallèles au troisième côté, soient égales entre elles* (n° 1346 **a**).

### Problème 1051.

**2425.** *Dans un triangle, déterminer un point* X, *tel que les parallèles menées à trois droites données soient égales entre elles.*

Par les sommets A, B, C on mène des droites parallèles aux lignes données : soit A'B'C' le triangle obtenu.

On inscrit trois segments parallèles $l$, $m$, $n$, égaux entre eux, et l'on détermine ainsi un triangle homothétique de A'B'C', et l'on mène A'A'', B'B'', C'C'' : le centre X d'homothétie répond à la question.

**2426.** *Remarques.* 1° Il y aurait lieu de considérer aussi les droites analogues aux lieux A'A'', B'B'' des parallèles égales, mais extérieures au triangle, ainsi, qu'il a été indiqué précédemment pour l'antibissectrice extérieure.

2° On pourrait demander que les parallèles DD′, EE′, FF′ fussent entre elles dans un rapport donné : il suffirait de prendre *l*, *m*, *n* dans ce même rapport.

3° Les trois antiparallèles égales du *point de Lemoine* (n° 2385), de même que les trois parallèles aux côtés du triangle (n° 2424), ne constituent qu'un cas particulier du problème général ci-dessus; on peut même y rattacher la question suivante.

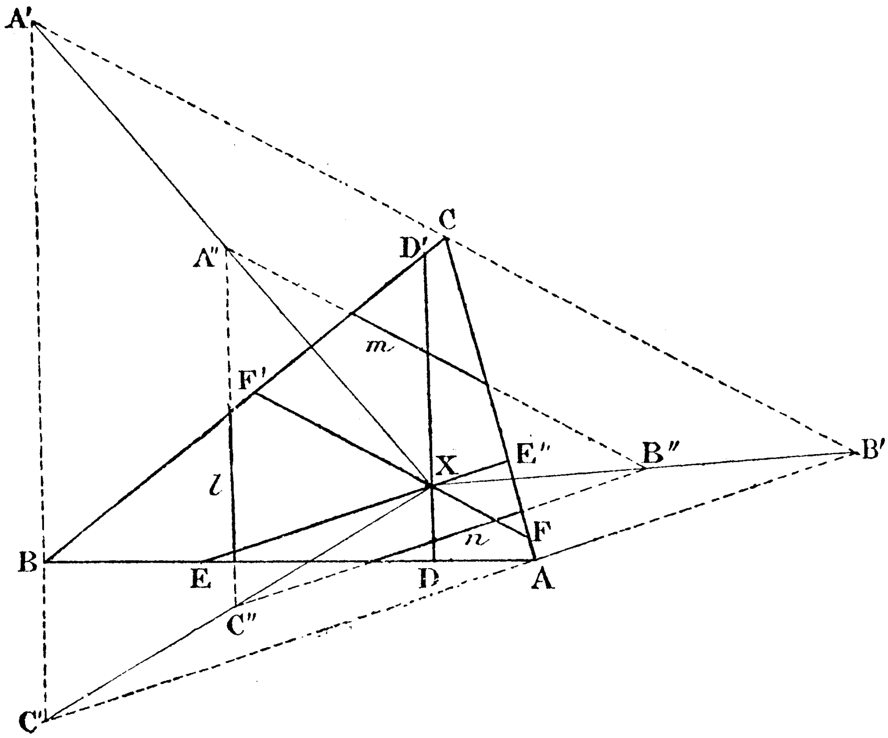



Fig. 1504.

4° On peut, comme à l'exercice précédent, recourir au *lieu des points tels que les deux droites menées par ces points, inscrites dans chaque angle du triangle donné, soient égales entre elles, et respectivement parallèles à des directions données* (n° 1346 **a**).

Les trois droites demandées pourraient être proportionnelles à des grandeurs données.

### Problème 1052.

**2427.** *Dans un triangle* ABC, *déterminer un point* X *tel qu'en menant par ce point des droites parallèles à trois lignes données, les segments* XD, XE, XF *limités respectivement aux côtés* a, b, c *soient égaux entre eux.*

Par les sommets A, B, C, on mène des droites respectivement parallèles aux lignes données, et l'on prend des grandeurs égales AM, BN, CL; puis on mène par L une parallèle au côté *a*, etc. AA′ est le lieu des points tels que A′G = A′H, etc.; donc le centre d'homothétie X des deux triangles ABC, A′B′C′ répond à la question.

**2428**. *Remarques*. 1° Il y aurait trois autres solutions, en considérant les points associés à X.

2° On procéderait d'une manière analogue si XD, XE, XF devaient être dans un rapport donné.

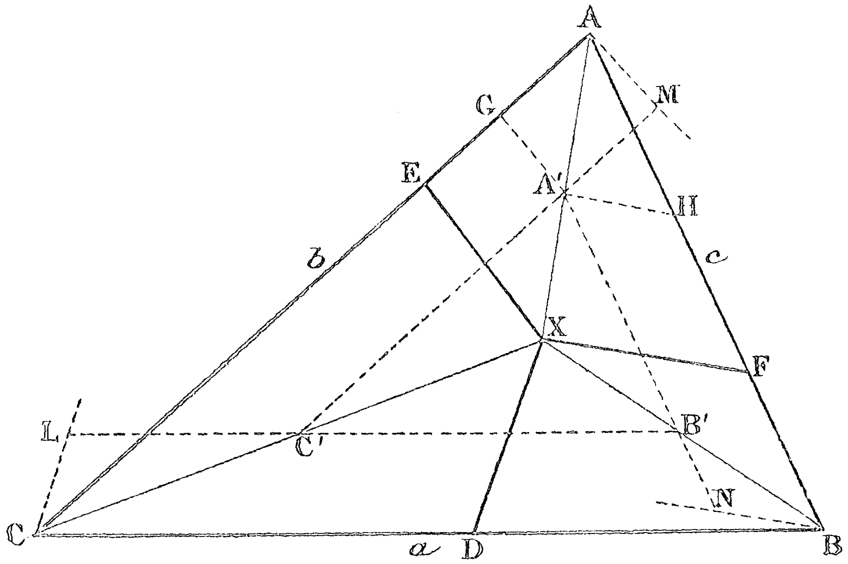



Fig. 1505.

3° Dans le cas particulier où XF, XD, XE doivent être respectivement parallèles aux côtés *a*, *b*, *c*; le point X est un *point de Jerabek;* en considérant le prolongement de EX, de X jusqu'au côté *a*, etc., on obtient le second *point de Jerabek*. (*Mathesis*, 1882, p. 191.)

**Note.** * M. JERABEK, professeur à *Telc* (Moravie); auteur de plusieurs articles intéressants dans diverses revues mathématiques.

**Théorème 1052. — I.**

**2428 a**. *On donne un triangle* ABC; *déterminer un point* L, *tel qu'en menant par ce point une droite parallèle à une direction donnée* IJ, *elle coupe les côtés* AB, BC, CA *en des points* R, S, T, *tels qu'on ait :*

$$\frac{LR}{LS}=\frac{m}{n};\quad \frac{LS}{LT}=\frac{n}{p};\quad \frac{LT}{LR}=\frac{p}{m}.$$

On a recours au *lieu des points tels que si par chacun d'eux, on mène une droite dans une direction donnée, les distances du point à chaque côté du triangle*, étant comptées sur la droite menée, soient entre elles dans les rapports de $m$ à $n$ et à $p$ (n° 1345 a).

*Remarques*. 1° On obtient un point L dans le triangle et trois points au dehors; ces derniers sont les points associés de L.

2° On peut faire une remarque analogue pour les exercices précédents (n<sup>os</sup> 2423, 2425, 2427).

## Points et Cercle de Brocard.

### Théorème 1053.

**2429.** *Sur chacun des côtés d'un triangle, comme corde, on décrit un segment capable du supplément d'un angle adjacent, en prenant ces angles dans le même sens, lorsqu'on parcourt le périmètre du triangle; ces trois segments se coupent en un point* M, *tel qu'on a :*

$$\text{angle} \quad MAB = MBC = MCA.$$

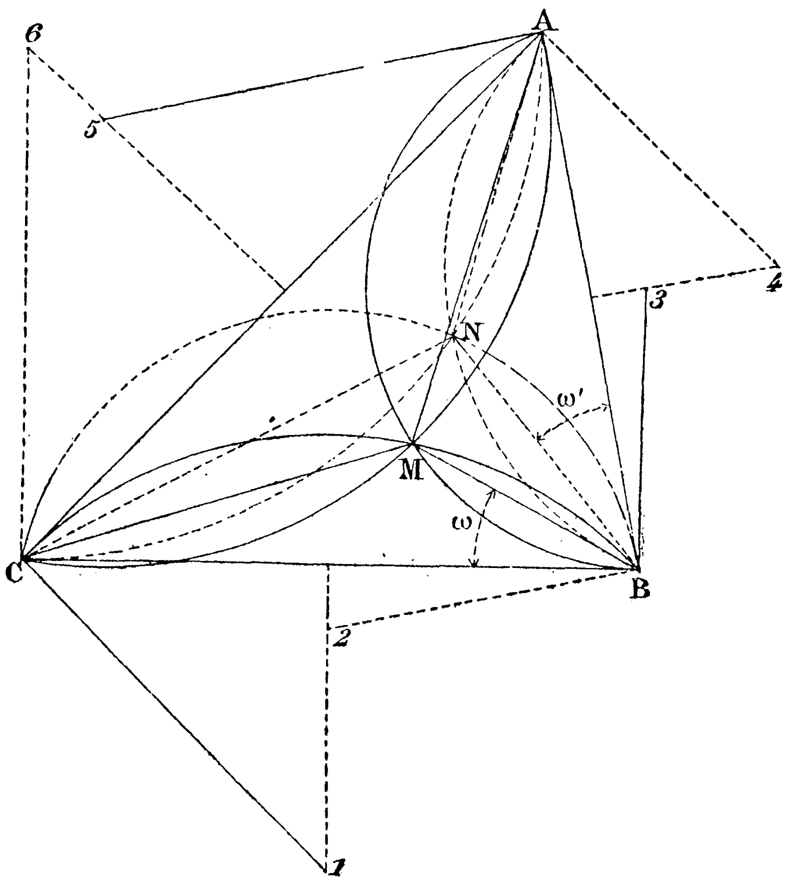



Fig. 1506.

1° Les segments se coupent au même point, car

$$\pi - A + \pi - B + \pi - C = 2\pi.$$

2° Chaque segment est tangent à un côté du triangle; ils ont été nommés *circonférences adjointes;* en employant les centres 1, 3, 5, on obtient le point M.

3° Les angles MAB, MCA sont égaux comme ayant pour mesure, demi-arc AM du segment AMC, etc.

4° En employant les centres 2, 4, 6, on obtient un second point N qui donne : angle $NBA = NAC = NCB$.

5° L'angle $\omega = \omega'$, car pour chacun de ces angles on trouve la relation (n° 2345) $\cot\text{g}\,\omega = \cot\text{g}\,A + \cot\text{g}\,B + \cot\text{g}\,C.$

**2430**. *Remarque*. Les points M et N ont été nommés *points de Brocard*, du nom du mathématicien qui les a fait connaître. (*N. A.*, 1875, p. 192, *question* 1166, *solution* p. 286.)

Le point M est fréquemment désigné par $\Omega'$ et N par $\Omega$. (Cependant SIMMONS, dans *Companion to the weekly Problems Papers, by* MILNE, fait le contraire.) Depuis on a proposé de désigner M par $\Omega_1$ *premier point de Brocard* et N par $\Omega_2$ *second point de Brocard*. Suivant l'ordre et le mode adoptés pour les obtenir, M avait reçu les noms de *point positif* ou *point rétrograde* et N ceux de *point négatif* et de *point direct*.

M ou $\Omega_1$ *premier point* a pour coordonnées : $\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}$;

N ou $\Omega_2$ *second point* a : $\frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$.

(Voir nos 1097 et 2480 ; *J. M. E.*, 1888, p. 54 et 258; puis 1889, p. 17 et 18.)

**Note**. M. LEMOINE a déduit les points $\omega$ et $\omega'$ du point K; puis a généralisé les résultats obtenus, lorsqu'on prend un point quelconque $K_1$ comme point de départ, pour en déduire $\omega_1$ et $\omega'_1$ (*N. A.*, 1885, p. 201, et *A. F.*, 1885. Grenoble, pp. 23 à 41). Ce magistral article se termine par de précieux renseignements historiques et bibliographiques, pp. 41 à 49.

### Théorème 1054.

**2431**. *Pour obtenir le point* M *qui donne :*

angle MAB = MBC = MCA ,

*il suffit de décrire un seul segment capable de* $\pi - A$; *puis, par le sommet* A, *on mène à* CB *une parallèle* AD *jusqu'à la rencontre du cercle décrit sur la corde* AC; *la diagonale* DB *rencontre le segment au point de Brocard* M.

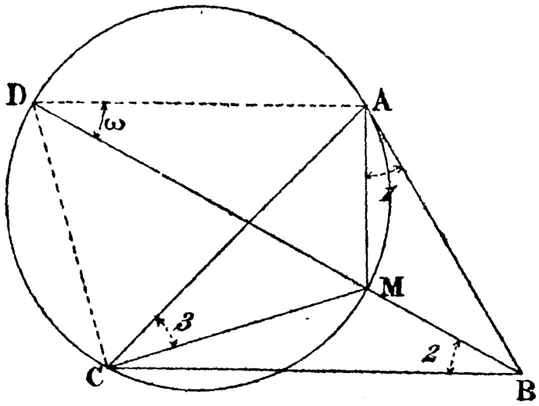



Fig. 1507.

Soit AMC le segment capable de $\pi - A$.

L'angle $2 = \omega$ à cause des parallèles AD, BC; or les angles 1, $\omega$ et 3 sont égaux comme ayant même mesure, demi-arc AM; donc...

**2432**. **Note**. Nous avons pris cette belle et simple construction dans le livre de M. EMMERICH : *Die Brocardschen Gebilde*, 1891, p. 25. Elle se trouve aussi dans NIXON : *Supplement to Euclid revised*, 1891, p. 394; ce dernier l'attribue à M. R. F. DAVIS.

* VON Dr EMMERICH, professeur au gymnase de Mülheim-sur-Rhur.

** R. C. J. NIXON et R. F. DAVIS, M. A., professeurs à l'université de Cambridge.

### Théorème 1055.

**2433**. 1o *A un point* M *donnant* angle MAB = MBC = MCA *correspond un point* N *jouissant d'une propriété analogue*.

2° *Les six points obtenus en projetant les points de Brocard sur les côtés du triangle donné sont concycliques.*

1re *Démonstration.* Faisons $\omega' = \omega$. On sait que le sommet G du triangle isocèle AGC, dont un côté passe par un point fixe M, décrit la circonférence OMG telle que O soit le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et que le segment MGO soit capable d'un angle égal à $(180^\circ - 2\omega)$; or, dans ce cas, le côté AG passe par un autre point fixe N (n° 1084).

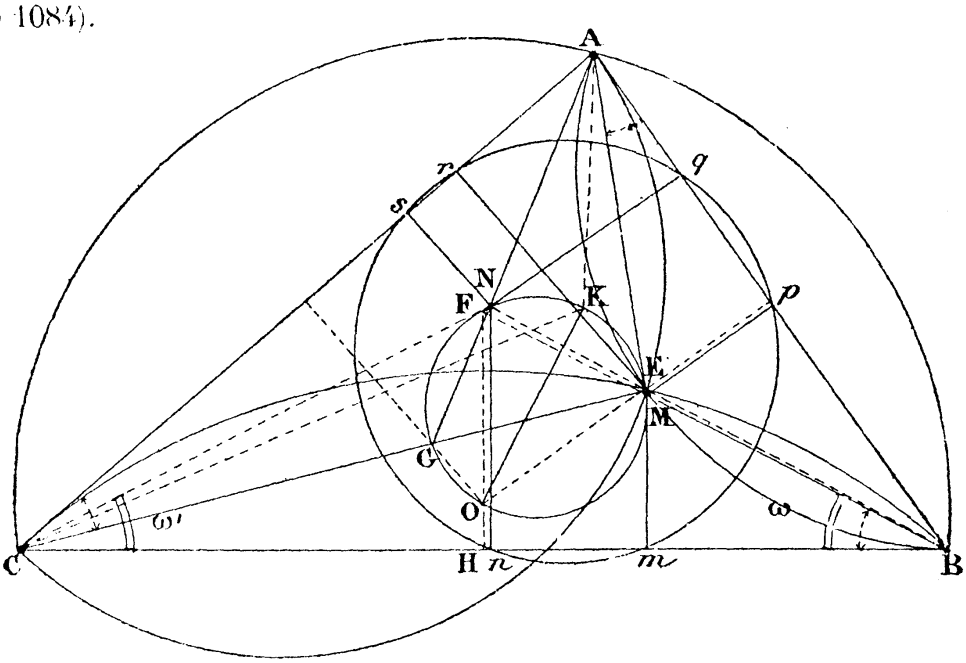



Fig. 1508.

Par rapport au cercle circonscrit, CB est une position nouvelle de la base AC, car l'angle MBC $= \omega$, et si l'on fait l'angle BCF de même valeur, le sommet F du triangle isocèle sera sur la circonférence déjà décrite, et le côté CF passera par le second point fixe N ; de même pour le triangle isocèle AEB ; on a donc :

$$\text{angle NBA} = \text{NAC} = \text{NCB} = \omega.$$

En second lieu, les projections de M et N sur la base mobile AC qui devient successivement BA, BC, appartiennent à une même circonférence ayant pour centre le point milieu de MN (n° 1085, 2°).

2e *Démonstration.* Tout point M a un point isogonal N tel que l'angle NAC = MAB, etc.; or les angles MAB, MBC, MCA sont égaux entre eux ; donc il en est de même des trois qui correspondent au point N ; d'ailleurs $\omega' = \omega$.

En second lieu, les projections de deux points isogonaux M et N sur les trois côtés d'un triangle sont concycliques ; donc, etc.

**2434.** *Remarques.* 1° L'identification du point N avec le second *point de Brocard* ressort suffisamment du lemme rappelé (n° 1084) ; cependant elle n'est établie rigoureusement que par le calcul.

2° Les *points de Brocard* M et N sont des *points isogonaux ;* ils sont les foyers d'une ellipse tangente aux trois côtés du triangle (n° 2323) ; la circonférence qui passe par les projections de M, N sur les côtés en est le cercle principal.

L'ellipse est nommée *ellipse de Brocard* et son cercle principal *lmn* est le plus petit des *cercles de Tucker* du triangle ABC.

**2435. Note.** *Calcul de l'angle de Brocard.*

Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées normales du *point de Lemoine* K, par rapport aux côtés correspondants $a$, $b$, $c$; soit S la surface du triangle donné.

Les trois triangles isocèles semblables qui correspondent à l'angle $\omega$ donnent :

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}, \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{tang}\omega}{2}=\frac{x}{a}, \quad \text{etc.}$$

or on a successivement :

$$\frac{ax}{a^2}=\frac{by}{b^2}=\frac{cz}{c^2}=\frac{2S}{a^2+b^2+c^2}; \tag{1}$$

donc $\operatorname{tang}\omega$, ou $\dfrac{2x}{a}=\dfrac{4S}{a^2+b^2+c^2}$; d'où $\operatorname{cotg}\omega=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

Mais pour un côté quelconque d'un triangle, on a :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, \quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, \text{ etc.};$$

d'où en remplaçant $a^2$, $b^2$, $c^2$ par leurs valeurs respectives et simplifiant, on trouve :

$$\operatorname{cotg}\omega=\frac{2bc\cos A+2ac\cos B+2ab\cos C}{4S};$$

d'autre part,

$$\frac{2bc\cos A}{4S}=\frac{2bc\cos A}{2bc\sin A}=\operatorname{cotg}A, \text{ etc.};$$

donc

$$\operatorname{cotg}\omega=\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C. \tag{2}$$

*Remarques.* 1° En posant $a^2+b^2+c^2=m^2$,

on déduit de (1) :

$$x=\frac{2aS}{m^2}, \quad y=\frac{2bS}{m^2}, \quad z=\frac{2cS}{m^2}. \tag{3}$$

2° On donne diverses démonstrations de l'équation (2). On peut voir *Journal de mathématiques élémentaires* de BOURGET et G. DE LONGCHAMPS, 1879, p. 57.

### Théorème 1056.

**2436.** *Le point commun aux deux circonférences adjointes des côtés d'un même angle d'un triangle donné appartient à la symédiane qui part du sommet de cet angle, et cette ligne, considérée depuis le sommet jusqu'au cercle circonscrit, est divisée en deux parties égales par le point de concours des circonférences adjointes.*

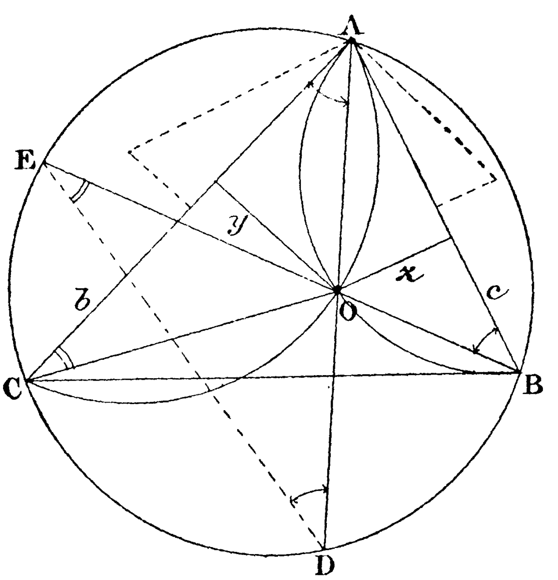


Fig. 1569.

1° Les circonférences adjointes pour les côtés du sommet A passent par A et B, par A et C, et sont respectivement tangentes aux côtés AC et AB; donc les segments AOC, AOB sont des figures semblables, et le point O est leur centre de similitude; donc les distances $y$ et $z$ sont directement proportionnelles à $b$ et $c$, donc le point O appartient à la symédiane de A.

2° Menons BOE et DE.

Les triangles AOC, BOA sont semblables; donc l'angle $OAC = ABO$ égale donc ODE. De même angle $ACO = DEO$.

Ainsi arc $CD = AE$; arc $DE = AC$; corde $DE = AC$;

donc $DO = AO$.

(Casey, 6e édit., p. 180; *Special Case* et *Cor.* 1.) Le théorème est de M. Lemoine.

### Théorème 1057.

**2437.** *Cercle de Brocard.* On nomme ainsi le cercle qui passe par le centre O du cercle circonscrit et par les deux *points de Brocard* d'un triangle donné.

1° *En joignant chaque sommet du triangle à chaque point de Brocard, on forme trois triangles isocèles semblables ayant pour base un des côtés*

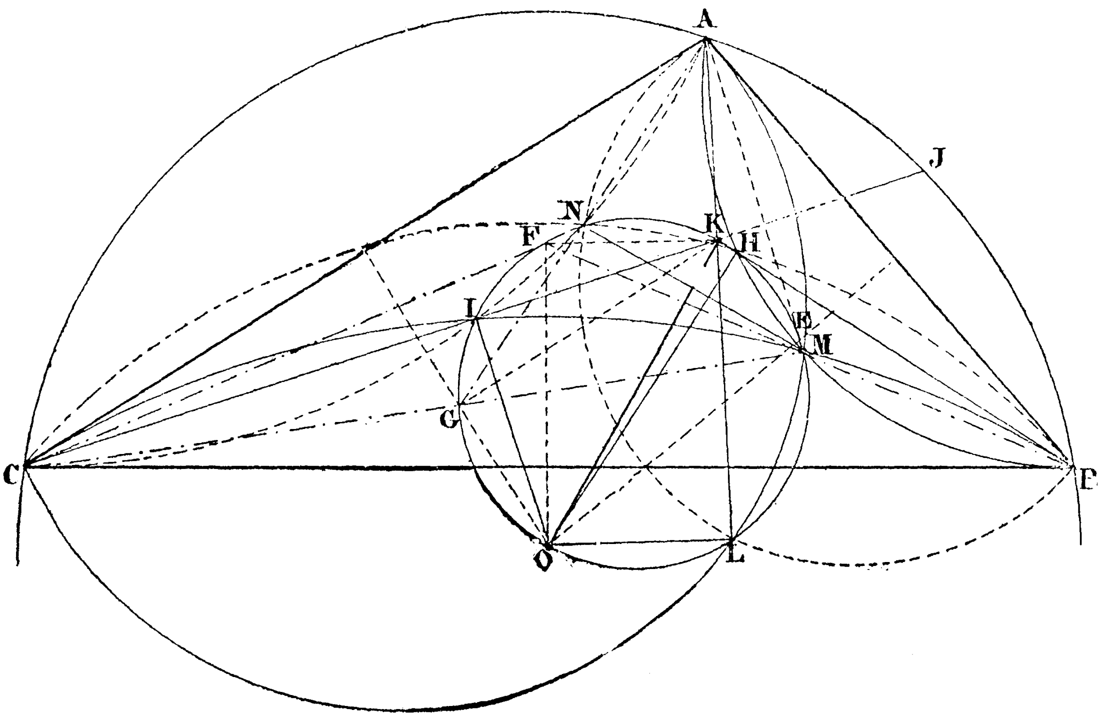



Fig. 1510.

*du triangle donné, et les sommets sont sur le cercle de Brocard.*

2° *Si par le sommet des trois triangles isocèles, on mène une parallèle à la base du triangle considéré, les trois droites ainsi menées se coupent en un même point* K *sur le cercle de Brocard, et ce point est diamétralement opposé au point* O.

3° *Le point* K *où les parallèles se rencontrent est le* point de Lemoine *du triangle donné; la droite* OK *qui joint le centre du cercle circonscrit au point de Lemoine est le diamètre du cercle de Brocard.*

1° Les sommets E, F, G des triangles isocèles tels que BFC se trouvent sur le cercle MNO (n° 2433. 1re *Démonstration*).

2° Le sommet F se trouve aussi sur la perpendiculaire OF élevée au milieu de BC; donc, si l'on mène une parallèle FK à la base BC, cette parallèle passera à l'extrémité du diamètre OK, car l'angle en F est droit, de même pour EK et GK; donc ces trois parallèles se coupent en un même point K du *cercle de Brocard*.

3° Le point K ainsi obtenu est le *point de Lemoine* du triangle donné; en effet, à cause des parallèles telles que FK, la distance du point K au côté BC égale la hauteur FH du triangle isocèle BFC.

De même la distance de K au côté CA égale la hauteur GI, etc.; mais les trois triangles isocèles sont semblables, les hauteurs sont proportionnelles aux bases, donc les distances de K aux côtés BC et CA sont directement proportionnelles à ces côtés, et par suite, le point K appartient à la symédiane issue de l'angle C, de même pour les autres côtés : ainsi K est le *point symédian* ou le *point de Lemoine*.

D'ailleurs, OK est le diamètre du *cercle de Brocard*.

**2438.** *Remarques.* On peut procéder autrement et définir, par exemple, le *cercle de Brocard* comme le cercle qui passe par les sommets des trois triangles isocèles, puis démontrer que les *points de Brocard* appartiennent au cercle, ensuite qu'il en est de même du centre O et du point K (*J. M. E.*, 1883, *Étude par M. Morel*, pp. 10, 33, 62, 97, 169).

**Note.** Le *Cercle de Brocard*, sous le nom de *Cercle des cinq points*, a été indiqué par M. Brocard, en 1880. (*N. C.*, t. VI, p. 22, XXVI.)

### Problème 1057. — I.

**2439.** *Construire l'angle ω de Brocard d'un triangle donné.*

Il suffit de mener la tangente CD, par le sommet A, une parallèle AD au côté opposé et mener BD.

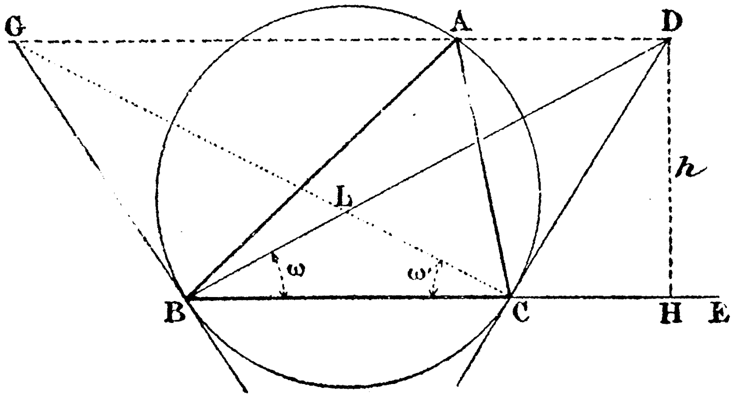



Fig. 1511.

En effet, l'angle ACD est égal à l'angle B du triangle, l'angle DCE égale l'angle A.

On a donc : $$BH = h \operatorname{cotg} \omega,$$

$$CH = h \operatorname{cotg} DCH = h \operatorname{cotg} A,$$

puis $$BC = h (\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C).$$

Comme on a : $$BH = BC + CH,$$

il vient : $\operatorname{cotg} \omega = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C$; donc ω est l'*angle de Brocard* (n° 2435, et *J. M. E.*, 1883, p. 169, M. Morel).

La construction ci-dessus a été donnée par M. Brocard; voir *A. F.*, 1881, Alger, p. 146, 147, n° 10.

*Remarques.* 1° CG passe par l'autre point de Brocard, et L est le sommet d'un des triangles isocèles semblables.

2° La parallèle AD est un côté du triangle anticomplémentaire de ABC, tandis que CD est un des côtés du triangle tangentiel; donc : *Si l'on trace le triangle tangentiel et le triangle anticomplémentaire, les points d'intersection d'un côté du premier et d'un du second donnent lieu à six droites qui donnent les deux points de Brocard et les trois sommets des triangles isocèles semblables;* d'ailleurs, en joignant chaque sommet du triangle tangentiel au sommet opposé de ABC, on obtient le *point de Lemoine;* par suite, les deux triangles auxiliaires déterminent très simplement six points du *cercle de Brocard.*

**Théorème 1058.**

**2440.** *Triangles semblables au triangle donné.* 1° *Le triangle qui a pour sommets les sommets des trois triangles isocèles semblables, dont*

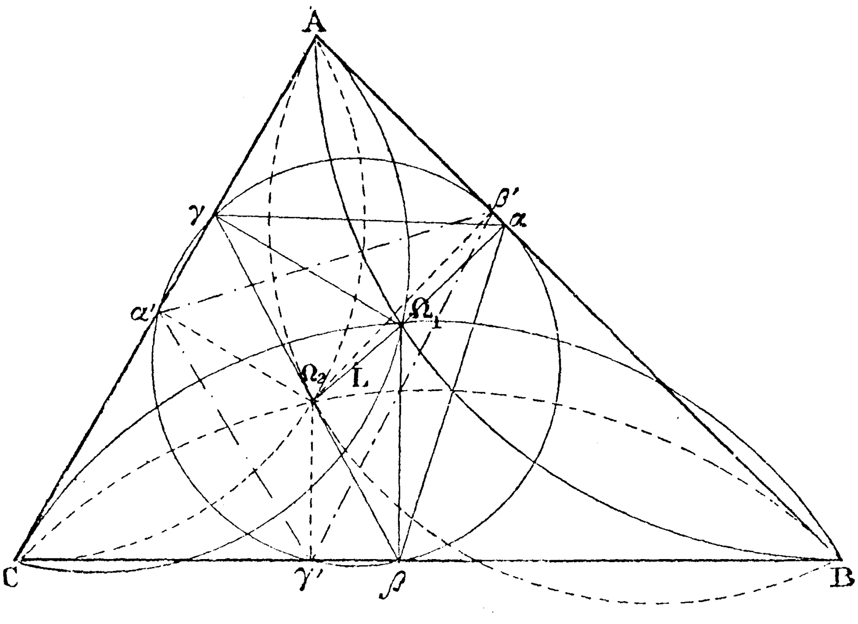



Fig. 1512.

*les angles à la base égalent l'angle ω de Brocard, est semblable au triangle de référence;* 2° *Les triangles podaires de chaque point de Brocard sont semblables à* ABC, *et ils sont égaux entre eux;* 3° *Les triangles antipodaires des mêmes points de Brocard sont aussi semblables au triangle donné.*

1° Les trois médiatrices qui déterminent le centre O du cercle circonscrit au triangle donné sont respectivement perpendiculaires aux côtés AB, BC, CA; elles se coupent donc sous des angles égaux à ceux de ABC; donc le triangle podaire du point K, par rapport aux médiatrices, est lui-même semblable à ABC (n° 2287).

Le triangle des sommets des trois triangles isocèles est nommé *premier triangle de Brocard.*

2° Soit $\alpha\beta\gamma$ le triangle podaire du premier point de Brocard; le segment $A\Omega_1B$, tangent à BC, correspond à l'angle $\pi - B$, or l'angle $\alpha$ du triangle podaire égale l'angle $A\Omega_1B - C$ (n° 2286); donc

$$\alpha = \pi - B - C, \quad \text{d'où} \quad \alpha = A;$$

de même $\beta = B$, $\gamma = C$; ainsi $\alpha\beta\gamma$ est semblable à ABC.

Il en est de même de $\alpha'\beta'\gamma'$; mais les deux triangles podaires sont inscriptibles dans un même cercle (n° 2433), et puisqu'ils sont semblables, ils sont égaux.

3° *Le triangle podaire d'un point et le triangle antipodaire du point isogonal sont semblables entre eux* (n° 2328); donc l'antipodaire de $\Omega_2$ semblable au podaire de $\Omega_1$, et *vice versa*, est semblable à ABC.

On prouve d'ailleurs avec facilité que le triangle antipodaire de chaque *point de Brocard* est semblable au triangle de référence.

**Théorème 1059.**

**2441.** *Le cercle de Brocard passe par les dix points ci-après : centre* O *du cercle circonscrit, les deux points de Brocard, les trois sommets*

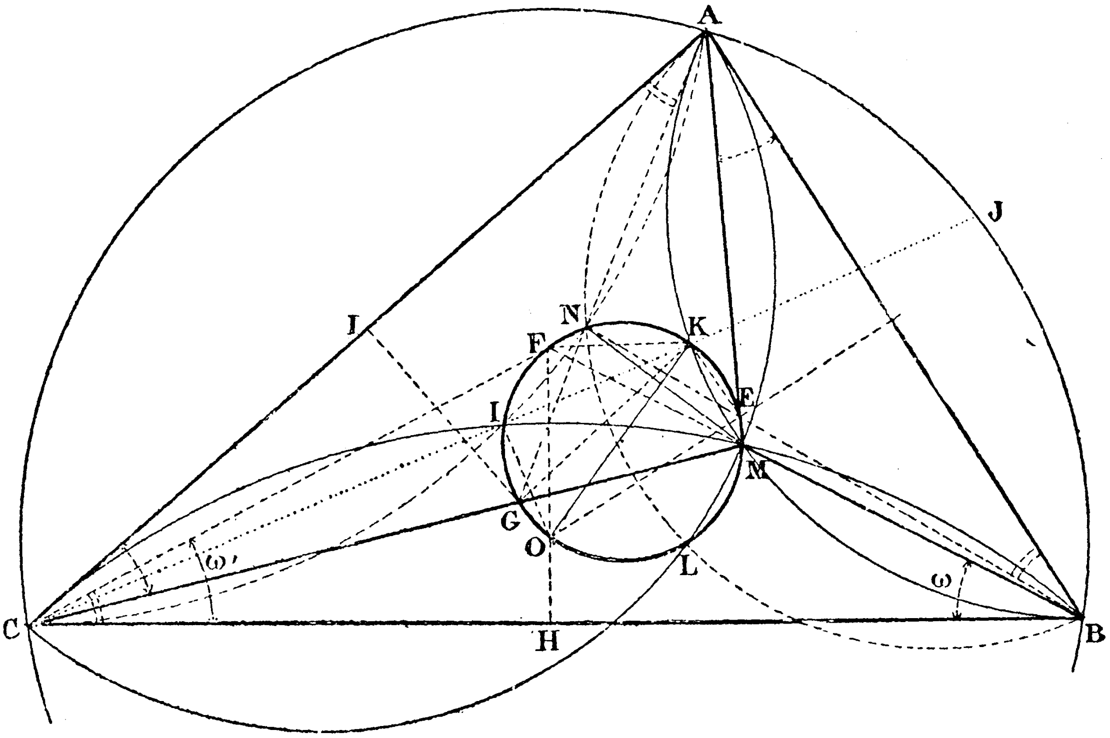



Fig. 1513.

*des triangles isocèles semblables, le point* K *de Lemoine et les trois points où les circonférenoes adjointes relatives à un même angle se coupent deux à deux.*

La proposition est démontrée pour les sept premiers points, il suffit de l'établir pour les trois derniers.

Soient CIMB et CINA les cercles adjoints relatifs aux côtés de l'angle C; ils ont respectivement pour centre les points 1 et 6. Soit I le point de rencontre des deux arcs de segments capables, l'un et l'autre, du supplément de l'angle C; on sait que le point I est le *point double* ou le *centre de similitude* des deux segments semblables et que par suite ses distances aux côtés BC, CA sont directement proportionnelles à ces côtés; d'où il résulte que ce point I appartient à la symédiane issue de C; donc CI passe par le point K, centre des symédianes; or la corde CIJ du cercle circonscrit est divisée en parties égales par le point I (nº 2436); donc OI est perpendiculaire à CJ, et le point I sommet de l'angle droit OIK appartient à la circonférence OK; de même pour L, etc.

*Remarque.* Ainsi qu'on l'a déjà indiqué, le triangle EFG, dont les sommets peuvent être considérés comme les projections du point de Lemoine sur les médiatrices de ABC, ou comme les sommets de trois triangles isocèles semblables, est nommé *premier triangle de Brocard.* Les trois points tels que I, K, L où se coupent les cercles adjoints aux côtés d'un même angle de ABC, peuvent aussi être considérés comme les projections du centre O sur les symédianes; ils donnent lieu à un triangle IKL, nommé *second triangle de Brocard.*

**Théorème 1059. — I.**

**2442.** *Dans un cercle de centre* O, *on peut inscrire une infinité de triangles ayant pour point de Lemoine un point* K, *donné dans ce cercle : tous ces triangles ont même cercle de Brocard.*

Soit ABC un triangle répondant aux données. Traçons le triangle tangentiel DEF; les symédianes AD, BE se coupent au point de Lemoine (nº 2332), et FE est antiparallèle de BC par rapport à l'angle D.

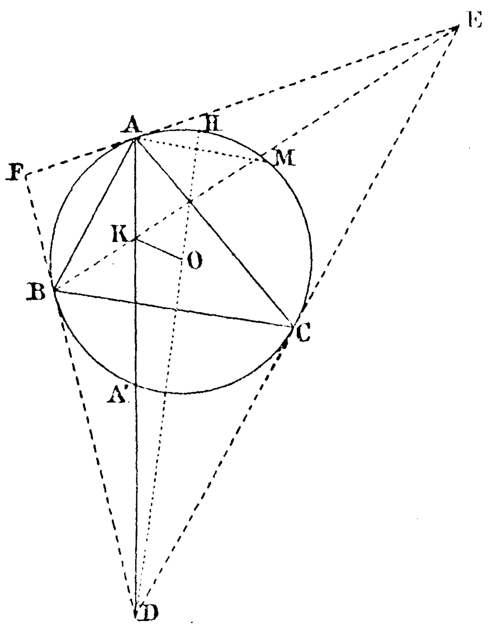


Fig. 1514.

Donc, si l'on prend AKA' pour symédiane quelconque et qu'on mène la tangente FAE, ainsi que AM, de manière que AKA' soit bissectrice de FAM, le côté cherché BC devra être parallèle à AM; donc, pour obtenir le point D, il faut mener OH perpendiculairement à AM. — Les tangentes DB, DC font connaître les deux autres sommets du triangle ABC.

*Remarques.* 1º Si l'on prenait A' pour sommet, on obtiendrait un second triangle.

2º *Tous les triangles inscrits dans le cercle* O, *qui ont même point* K, *ont même cercle de Brocard.*

En effet, la droite OK est le diamètre du cercle de Brocard.

2442 a. **Note.** *Il existe une infinité de triangles inscrits à un même cercle et ayant même* point de Lemoine. *Démontrer que ces triangles sont circonscrits à une même conique dont les foyers sont les* points de Brocard *de ces mêmes triangles.* (J. NEUBERG.) Solutions par MM. DÉPREZ et SCHOUTE (*Mathesis*, t. VIII, 1888, p. 203, q. 473.)

**Théorème 1060.**

**2443.** *On donne trois cordes consécutives* AB, BC, CD, *d'un même cercle* : 1º *Prouver que cette figure jouit de la plupart des propriétés* *établies pour le triangle, relativement au cercle de Brocard.* 2° *Quelle condition devraient réaliser une quatrième corde* DP, *une cinquième* PQ *pour avoir mêmes points et même cercle de Brocard que les précédentes?*

1° La figure suffit. Il peut être utile de faire les remarques suivantes : Les constructions analogues à celles qu'on a faites pour le triangle donnent directement *neuf points* (au lieu de dix) du *cercle de Brocard*.

Les distances des points K aux trois cordes sont directement proportionnelles aux longueurs de ces mêmes cordes ; on a :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

$x$ étant la distance de K ou de F au côté $a$, etc.

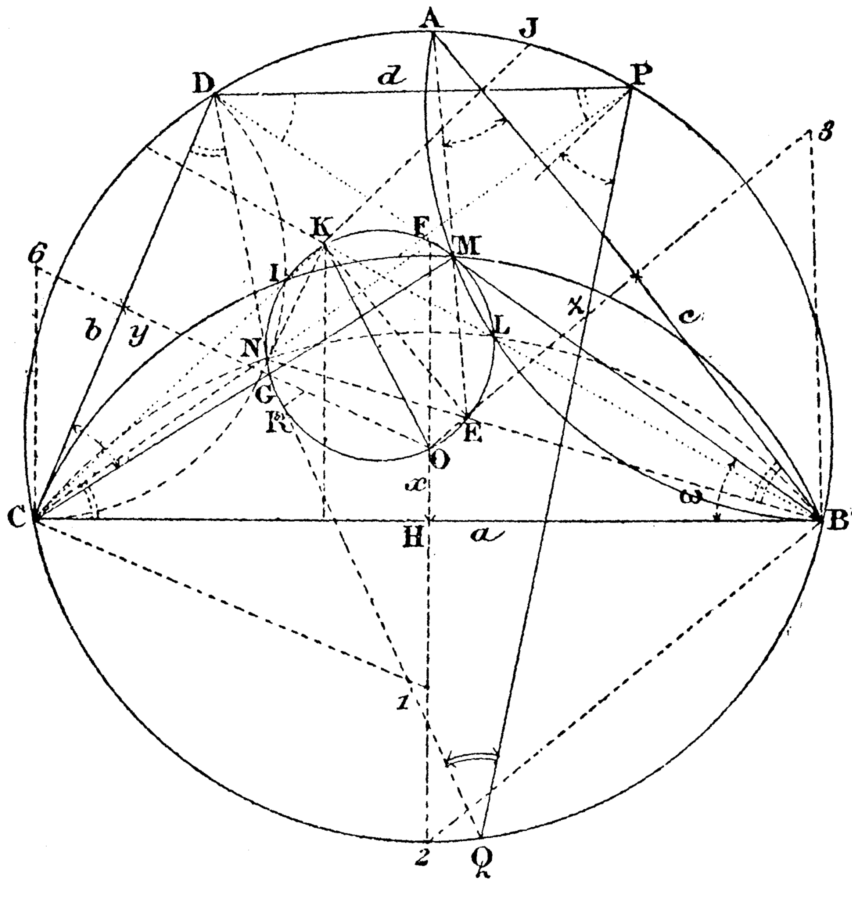



Fig. 1515.

Si l'on formait un triangle avec les mêmes longueurs $a$, $b$, $c$, les trois distances $x'$, $y'$, $z'$ seraient simplement proportionnelles aux précédentes, sans avoir leurs longueurs respectives.

La position de O, de K, etc., serait changée.

Enfin le théorème ci-dessus s'applique même au cas où les trois lignes $a$, $b$, $c$ ne permettraient pas de construire un triangle.

2° Il faut déterminer DP, puis PQ, etc., de manière que les distances $v$, $w$ de ces cordes au point K soient telles qu'on ait :

$$\frac{v}{DP} = \frac{w}{PQ} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

On peut aussi procéder comme il suit, et c'est plus facile comme construction : mener DM, faire l'angle MDP égal à ω.

Comme vérification, il faut que DM et PN se coupent sur le cercle de Brocard, et qu'on ait : $\frac{v}{d}=\frac{y}{b}$.

De même pour une cinquième corde PQ, le sommet du triangle isocèle est au point R.

**2444.** *Remarque.* On peut conclure comme il suit : *Tout polygone inscriptible,* ou toute série de cordes consécutives d'une même circonférence, *a les points et le cercle de Brocard, lorsque ce polygone,* ou la série des cordes, *admet un point* K *dont les distances à chaque côté sont respectivement proportionnelles à ces mêmes côtés.*

**Note.** Les polygones qui admettent le *point de Lemoine* K ont reçu le nom de *polygones harmoniques;* ils ont été étudiés par MM. TUCKER, CASEY, NEUBERG, TARRY. (Voir dans CASEY, sections VI et VII, p. 220.)

* GASTON TARRY, inspecteur des *Contributions diverses* (titre colonial) à Alger, auteur de recherches remarquables sur la *Géométrie du triangle.*

**Théorème 1061.**

**2445.** *Trois cordes d'un même cercle, dans une situation quelconque, admettent les points de Brocard et de Lemoine et le cercle de Brocard.*

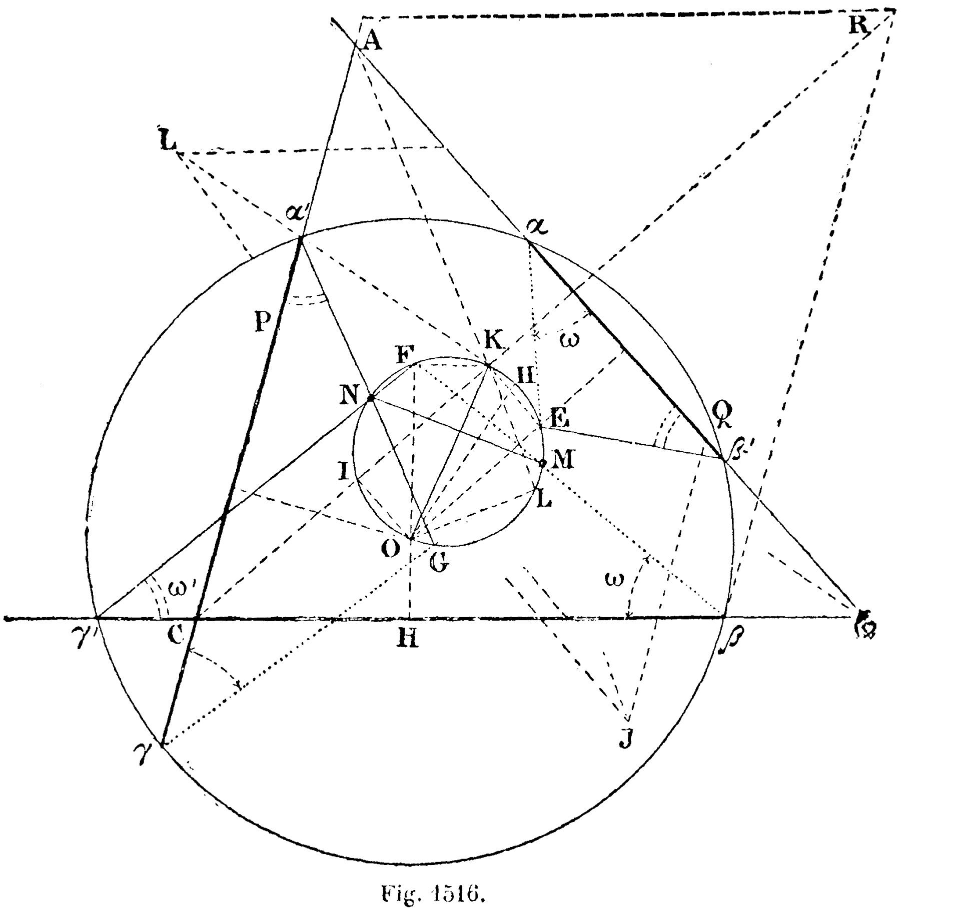



Fig. 1516.

La figure suffit.

Pour déterminer les symédianes, ou plus exactement les lieux AKL, CKR, etc., des points dont les distances sont proportionnelles aux cordes considérées deux à deux, on a recours à la méthode du parallélogramme, prenant : $AP = \alpha\beta'$, et $AQ = \gamma\alpha'$, etc.

### Problème 1062.

**2446.** *Dans un cercle, mener une corde telle que le rapport de la longueur de cette ligne à sa distance à un point donné égale un rapport donné. Tracer la plus grande et la plus petite de ces cordes.*

Soient K le point et $\frac{c}{d}$ le rapport donnés ; formons un triangle isocèle ayant K pour sommet, la hauteur sur le diamètre KO, et tel qu'on ait :

$$\frac{EF}{KO} = \frac{c}{d}.$$

On obtient ainsi la plus longue corde AB et la plus courte CD.

Si nous prenons C'D' égale et parallèle à CD, les cordes comme longueur devront être comprises entre les limites AB et C'D'.

Soit à mener une corde égale à M'N'.

Par M' menons M'H' parallèle à AK ; H'L' est la distance au point K de la corde demandée, donc cette corde est la tangente commune aux deux circonférences dont l'une a K pour centre, H'L' pour rayon, et l'autre a le point O pour centre et OL' pour rayon ; on trouve MN et une seconde solution symétrique de cette première, par rapport à KO.

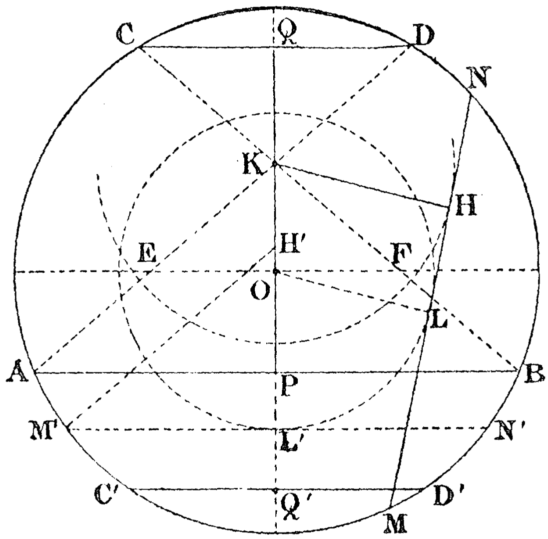


Fig. 1517.

**2447.** *Remarques.* 1° Lorsque le point donné K' est hors du cercle, les tangentes menées au cercle par ce point K' répondent à la question : la corde est nulle et la distance aussi ; le problème n'offre d'intérêt qu'autant que le rapport donné égale celui de la *corde des contacts* à sa distance à K' ; dans ce cas, K' est l'associé d'un *point de Lemoine*, placé à l'intérieur du cercle.

2° *L'enveloppe des cordes telles que le rapport de la longueur de chacune d'elles à sa distance à un point fixe, ait une valeur donnée, est une conique ;* car, en prenant pour axes deux diamètres rectangulaires, dont celui des $x$ passe par le point fixe, on trouve pour équation :

$$R^2x^2(1+m^2) + y^2\left[R^2 + m^2(R^2 - d^2)\right] - 2dm^2R^2x - R^2(R^2 - d^2m^2) = 0,$$

dans laquelle $m$ représente le rapport donné, et $d$ la distance du point fixe au centre du cercle de rayon R.

En transportant les axes des coordonnées au centre de la courbe

$$\left(x = d\,\frac{m^2}{1+m^2}, \quad y=0\right),$$

on obtient pour équation de l'enveloppe :

$$\frac{x^2}{\frac{R^2+m^2(R^2-d^2)}{(1+m^2)^2}} + \frac{y^2}{R^2} - 1 = 0.$$

**Théorème 1063.**

2448. Cas particulier. *On décrit un cercle tangent à l'un des côtés d'un triangle, à* c, *par exemple, et qui donne sur* a *et* b *des cordes*

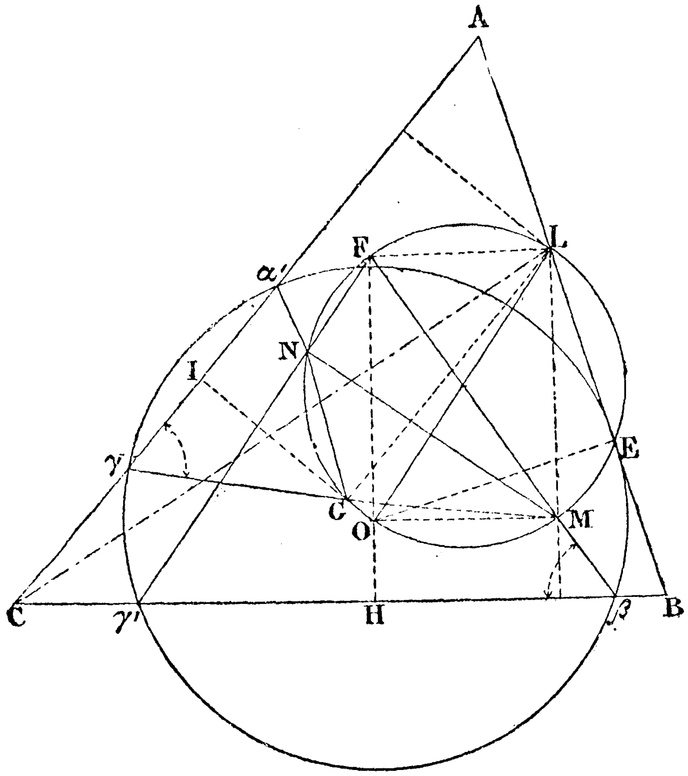



Fig. 1518.

*quelconques* $\beta\gamma'$ *et* $\gamma\alpha'$; *après avoir déterminé le lieu* GL *des distances proportionnelles aux cordes interceptées, on décrit une circonférence sur ce diamètre* OL, *le point* L *étant sur le côté* c; *cette circonférence passe par le point de contact, sur le côté* c, *et les projections de* L *sur les médiatrices sont les sommets de deux triangles isocèles semblables.*

Les triangles $\beta F \gamma'$ et $\gamma G \alpha'$ sont semblables ; M et N sont les points de Brocard du système ; la projection E du centre O sur $c$ appartient au cercle OML.

**Théorème 1064.**

**2449.** *On donne trois segments rectilignes de longueurs et de position quelconques; on détermine le point* K *des distances proportionnelles aux trois segments, et le point* L *des divisions proportionnelles pour les trois segments* (point tel que ses projections sur les segments divisent ces droites dans un même rapport), *et l'on décrit une circonférence sur le diamètre* KL.

1° *Les perpendiculaires qui projettent le point* L *sur les trois droites données rencontrent le cercle en trois points tels qu'en joignant chacun d'eux aux extrémités du segment rectiligne correspondant, on obtient trois triangles semblables.*

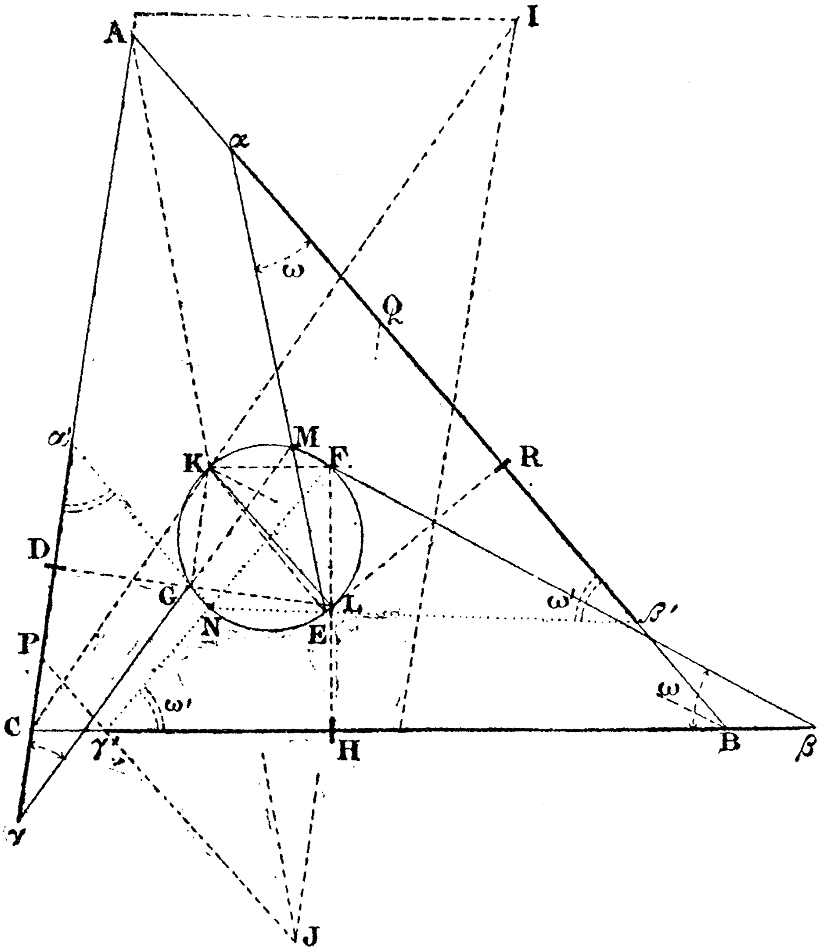



Fig. 1519.

2° *Les côtés homologues passent trois à trois par deux points déterminés du cercle* LK.

1° Soit L tel qu'on ait : $\frac{\alpha R}{R\beta'} = \frac{\beta H}{H\gamma'} = \frac{\gamma D}{D\alpha'}$.

L'angle LFK est droit, donc FK est parallèle à CB; de même GK est parallèle à CA, etc.

Les triangles $\alpha E\beta'$, $\beta F\gamma'$, $\gamma G\alpha'$ sont semblables parce que les hauteurs sont égales aux distances du point K aux trois côtés et, par suite, proportionnelles aux segments donnés; d'ailleurs, ces hauteurs divisent les bases des trois triangles en parties proportionnelles; donc

$$\text{angle } \alpha \quad \text{ou} \quad \omega = \beta = \gamma, \quad \text{et} \quad \text{angle } \omega' \quad \text{ou} \quad \alpha' = \beta' = \gamma'.$$

2° $\alpha$E détermine un point M tel que l'arc MFL est capable du complément de l'angle $\omega$; donc $\gamma$G qui fait avec GL un angle égal au même complément passe par le point M, de même pour BF.

Enfin $\alpha'$G, $\gamma'$F, $\beta'$E passent par un autre même point N.

**2450.** *Remarques.* 1° Les *points* et *les cercles de Brocard* d'un triangle, ainsi que le théorème relatif aux trois cordes d'un même cercle, ne sont que des cas particuliers, mais très intéressants, de la proposition ci-dessus.

2° L'angle $\omega$ des trois triangles semblables peut varier de 0° à 180°, tandis que dans le triangle il ne peut dépasser 30°.

3° Le théorème relatif à trois segments est applicable à tous les segments rectilignes qui admettent un même point de Lemoine K et un même point L des divisions proportionnelles.

4° En tenant compte des quatre points L des divisions proportionnelles, on obtient quatre groupes de trois triangles, semblables entre eux dans chaque série.

5° On peut se proposer un grand nombre de questions telles que la suivante : *Déterminer l'angle, le cercle et les points de Brocard, pour les trois cordes interceptées sur les côtés d'un triangle, par le premier cercle de Lemoine, ou par le cercle de Taylor,* etc.

### Théorème 1065.

**2451.** *Par un même point, on mène à un cercle une sécante et des tangentes, l'on joint les deux points d'intersection de la sécante aux points de contact des deux tangentes. Prouver que les cordes obtenues sont proportionnelles entre elles.*

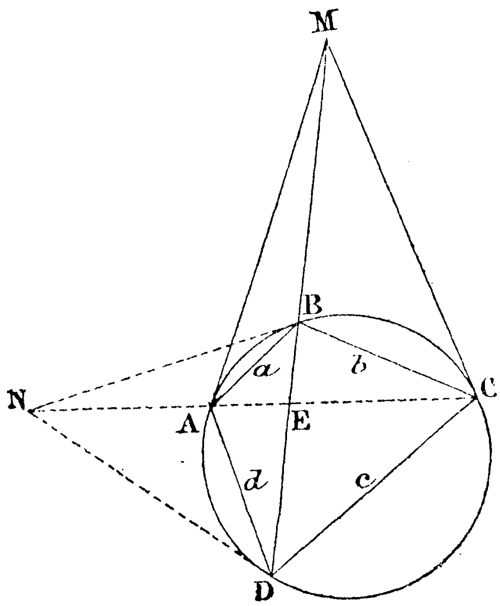


Fig. 1520.

La réciproque est vraie.

Les triangles semblables MAD, MBA, etc., donnent :

$$\frac{a}{d} = \frac{MB}{MA}, \quad \frac{b}{c} = \frac{MB}{MC};$$

donc
$$\frac{a}{d} = \frac{b}{c}.$$

**2452.** Réciproquement. *Si les cordes sont proportionnelles, la sécante* BD *passe par le point de concours des tangentes* ; car si l'on désigne par M le point de concours de la tangente A et de la sécante, puis par M′ celui de la sécante et de la tangente C, on aurait :

$$\frac{a}{d} = \frac{MB}{MA}, \quad \text{et} \quad \frac{b}{c} = \frac{M'B}{M'C}; \quad \text{puis} \quad \frac{MB}{MA} = \frac{M'B}{M'C};$$

donc M et M′ ne sont qu'un seul et même point.

**2453.** *Remarques.* 1° De $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$, on déduit : $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$; donc la sécante CA et les tangentes en B et en D se coupent au même point N.

2° De la proportion ci-dessus on déduit : $ac = bd$; donc, d'après le *théorème de Ptolémée* (n° 1209), chacun de ces produits est la moitié de celui des diagonales AC . BD.

**Théorème 1066.**

**2454.** Quadrilatère harmonique. *Lorsque, dans un quadrilatère, les produits des côtés opposés sont égaux entre eux et égaux à la moitié du produit des diagonales : 1° le quadrilatère est inscriptible ; 2° les tangentes menées par les extrémités d'une diagonale se coupent sur l'autre diagonale ; 3° le point de concours des diagonales est le* point de Lemoine *du quadrilatère, car ses distances aux côtés sont proportionnelles à ces mêmes côtés.*

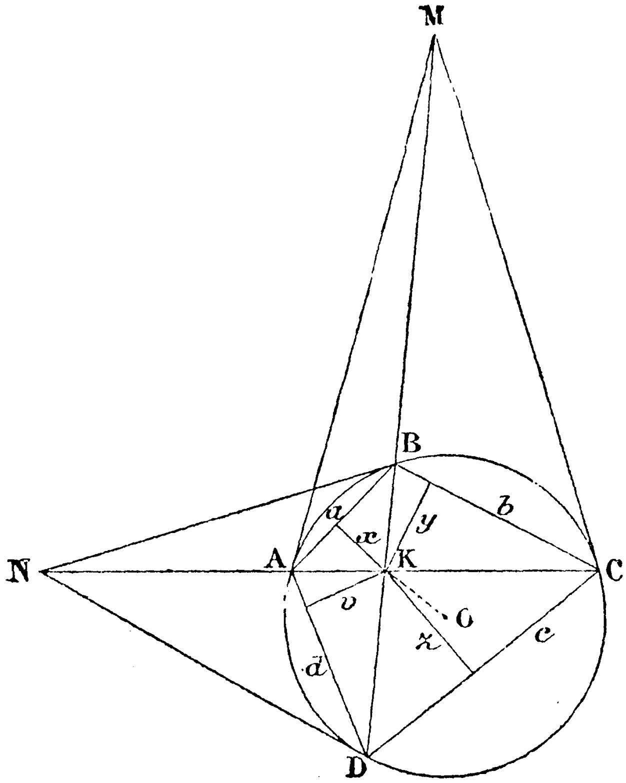



Fig. 1521.

1° Le quadrilatère est inscriptible, d'après le *théorème de Ptolémée* (nos 1209, 1210).

2° De $ac = bd$ on déduit :

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{c}, \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{d}{c};$$

donc les tangentes en A et C se coupent sur DB, de même pour les tangentes en B et D (n° 2452).

3° BD passant par le point de concours des tangentes est la symédiane des triangles ABC et ADC (n° 2332) ; donc

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad \text{et} \quad \frac{z}{c} = \frac{v}{d}.$$

D'ailleurs AC est de même symédiane des triangles BAD, BCD ; par suite, $\quad \dfrac{x}{a} = \dfrac{v}{d}, \quad$ donc $\quad \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = \dfrac{v}{d}.$

**2455.** *Remarque.* Le quadrilatère qui admet un point de Lemoine est nommé *quadrilatère harmonique ;* il a le *cercle de Brocard* décrit sur le diamètre OK, il admet aussi les *cercles de Lemoine et de Tucker.*

**2456. Note.** Voir la belle étude que M. NEUBERG a consacrée au quadrilatère harmonique dans *Mathesis,* 1885, p. 202, 217, 241, 265; le savant professeur de l'Université de Liége y donne ses propres découvertes, tout en résumant et indiquant celles de MM. TUCKER, M'CAY, CASEY.

On peut voir aussi M. CASEY, section VI, *Polygones harmoniques,* p. 220, et section VII, p. 239, pour la *Ligne de Tarry.*

Au Congrès de Nancy, en 1886, MM. Gaston TARRY et Joseph NEUBERG ont traité des *polygones* et des *polyèdres harmoniques.* (A. F., 1886, pp. 12, 26.)

Le quadrilatère inscriptible dont il vient d'être question a dû être nommé *quadrilatère harmonique* à cause de la propriété bien connue sans doute, que nous avons signalée accidentellement, dès 1882, à l'occasion de l'*inversion,* et que nous rappelons ci-dessous.

**Th.** *Lorsque les rectangles formés par les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit sont équivalents, toute droite qui coupe le faisceau formé en joignant les quatre sommets du quadrilatère à un point quelconque de la circonférence circonscrite, est divisée harmoniquement par ce faisceau.* (*E. de G.,* nº 227.)

## Droites isoclines.

**2457.** *Définitions.* On donne le nom de *normales* aux perpendiculaires abaissées d'un point donné S sur les côtés d'un polygone, et celui de polygone podaire au polygone obtenu en joignant deux à deux les pieds des normales.

**2458.** *Droites isoclines.* On peut nommer *isoclines* les obliques menées d'un point S aux divers côtés d'un polygone, et les rencontrant sous un angle donné et dans le même sens lorsqu'on suit le périmètre de ce polygone d'un mouvement continu.

Le mot *isoclines*, pour lignes de même inclinaison, déjà usité en physique, permettra en géométrie d'éviter une assez longue périphrase, ou l'emploi d'appellations moins claires, telles que les suivantes, que l'on trouve dans quelques auteurs : *podaires obliques*, ou même *normales obliques*.

Les obliques égales qui partent d'un même point ont des inclinaisons de même valeur absolue, mais de signes contraires : ces lignes ne sont pas *isoclines*, dans le sens adopté ci-dessus, mais bien *anticlines*.

**2459.** *Figures isoclines.* Les droites isoclines peuvent être menées par les divers sommets d'un polygone; dans ce cas, ces droites sont toutes menées à l'extérieur du polygone, ou toutes à l'intérieur; elles font des angles égaux avec les côtés successifs et dans le même sens : les deux polygones ainsi formés sont mutuellement des *figures isoclines*, l'un par rapport à l'autre.

**2460.** *Polygone copodaire.* On peut nommer *polygone copodaire* le polygone obtenu en joignant deux à deux les pieds des isoclines menées d'un point S, en donnant à l'expression *polygone copodaire* le sens de polygone analogue et corrélatif du polygone podaire du même point S.

**2461.** *Polygone anticopodaire.* De même qu'on nomme *antipodaire* le polygone obtenu en menant par les sommets A, B, C, des perpendiculaires aux droites SA, SB, SC... qui joignent un point S aux sommets d'un polygone donné ABC..., de même, nous nommons *anticopodaire* le polygone obtenu en menant, par les sommets A, B, C..., des droites isoclines aux lignes SA, SB, SC...

**Théorème 1067.**

**2462.** *Tout polygone copodaire d'un point* S, *par rapport à un polygone donné, est semblable au polygone podaire de ce même point.*

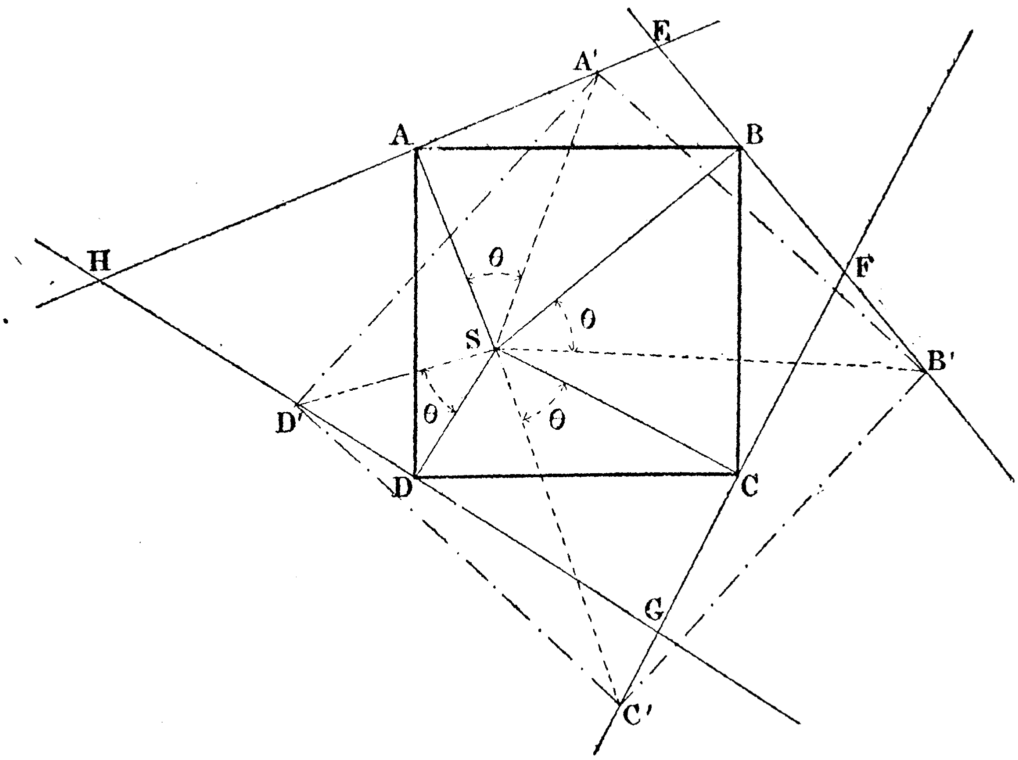



Fig. 1522.

Soient SA, SB, SC... des normales; SA', SB', SC'... des isoclines; il faut prouver que ABCD, A'B'C'D' sont des polygones semblables.

Or les triangles ASA', BSB' sont semblables comme étant équiangles. Les triangles ASB, A'SB' sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc les polygones podaire et copodaire sont semblables comme étant composés de triangles semblables deux à deux et disposés dans le même ordre.

**2463.** *Remarques.* 1° Si l'on joint un point S aux sommets A, B, C... d'un polygone donné et qu'on élève des perpendiculaires HAE, EBF, etc... tout polygone copodaire A'B'C'D' est semblable au polygone donné ABCD.

2° Le polygone podaire ABCD est le polygone inscrit minimum, par rapport au point S.

3° Il n'y a point de maximum, car les sommets tels que A', B'... peuvent s'éloigner indéfiniment sur les droites HE, EF...

4° Le point S est le centre permanent de similitude des polygones inscrits semblables entre eux.

### Théorème 1068.

**2464**. Cas particulier : 1° *D'un point quelconque du cercle circonscrit à un triangle donné* ABC, *on mène des isoclines sur chaque côté; les pieds* D, E, F *des trois obliques sont en ligne droite, et les segments* DE, EF *sont entre eux dans un rapport constant pour un point donné du cercle circonscrit, quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison des isoclines.*

2° *Par le* point de Miquel *d'un quadrilatère, on mène des isoclines sur chaque côté; les pieds des quatre obliques sont en ligne droite, et les rapports des trois segments rectilignes sont constants.*

Simple conséquence des théorèmes de *Simson* et de *Miquel* (nos 21, 22, 762, 767), complétés par le théorème précédent (n° 2462).

On peut comparer cette démonstration avec la démonstration classique (n° 1231), et même cette dernière ne fait pas connaître que le rapport des segments est constant.

### Théorème 1069.

**2465**. *Du centre du cercle inscrit à un triangle* LMN *on décrit un cercle qui coupe les trois côtés; en joignant les points obtenus on a deux triangles égaux entre eux et semblables au triangle podaire du centre du cercle inscrit.*

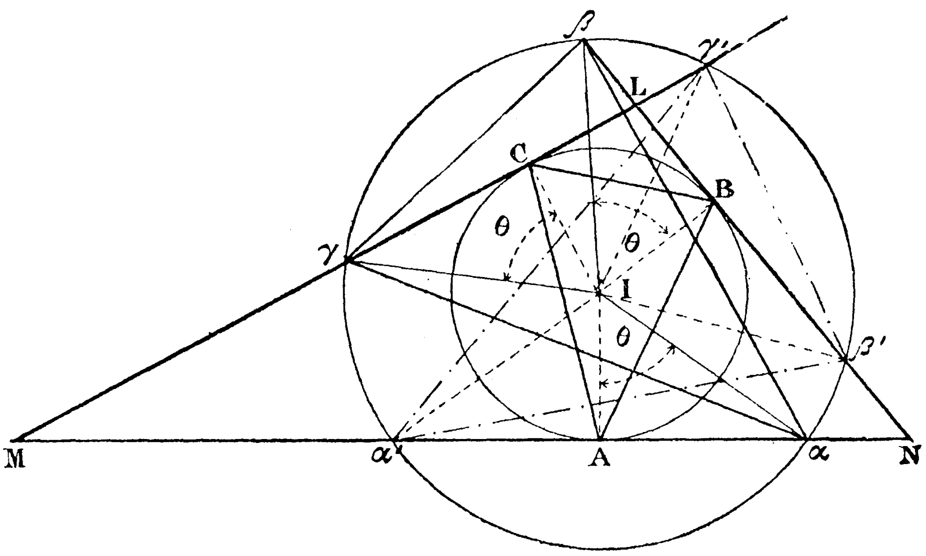



Fig. 1523.

On joint les points alternatifs en suivant le périmètre du triangle à partir d'un même sommet, et l'on obtient les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ égaux entre eux et semblables au triangle podaire ABC.

La démonstration directe n'offre aucune difficulté; mais il est encore plus simple de dire que les deux triangles obtenus sont copodaires par rapport au point I; par suite, ils sont semblables au triangle ABC, et égaux entre eux parce qu'ils sont inscrits dans le même cercle.

**Théorème 1070.**

**2466.** *Autour d'un point de Brocard* Ω, *on mène des droites isoclines* ΩD, ΩE, ΩF, *par rapport à* ΩA, ΩB, ΩC; *prouver que le triangle* DEF *est semblable au triangle donné* ABC.

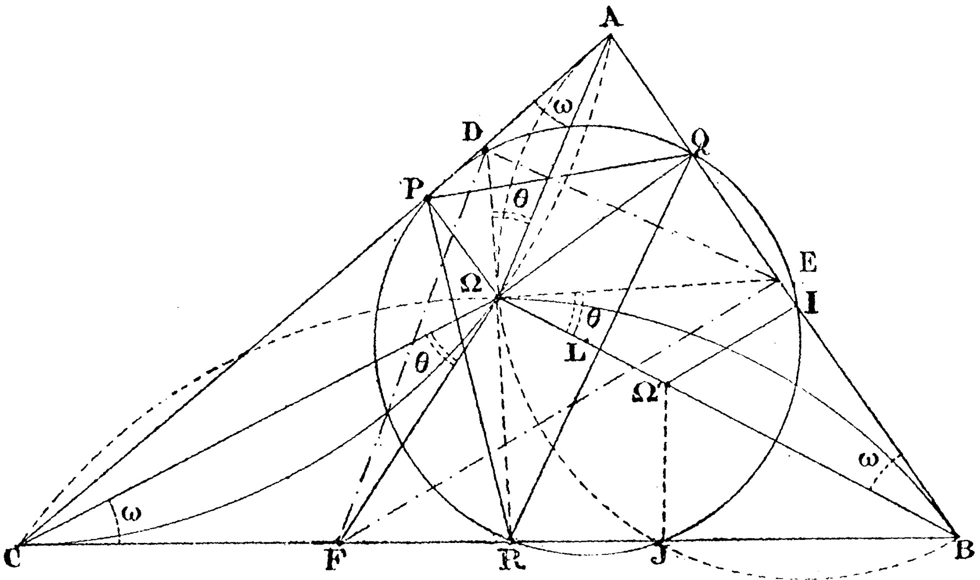



Fig. 1524.

C'est une conséquence des questions précédentes; d'ailleurs, voici :

Les triangles AΩD, BΩE, CΩF sont équiangles et, par suite, semblables; donc
$$\frac{A\Omega}{\Omega D}=\frac{B\Omega}{\Omega E}=\frac{C\Omega}{\Omega F};$$
d'où l'on conclut :
$$\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA}.$$

**2467.** *Remarques.* 1° Si on abaisse les perpendiculaires ΩP, etc., le triangle podaire PQR est le minimum, car il correspond à la valeur maxima de θ.

2° Les triangles podaires des points Ω et Ω' sont égaux, car ils sont semblables à ABC et inscrits dans le même cercle.

**Théorème 1071.**

**2468.** *Lorsque trois circonférences passent par un même point* S, *puis se coupent deux à deux en trois points* D, E, F, *si l'on mène les cordes communes* ADB, AEC *à deux d'entre elles, la droite* BC *passe par le troisième point* F *d'intersection.*

En effet, joignons B et C au point F; il suffit de prouver que les segments BF et CF sont en ligne droite; or les angles A, B, C, respectivement supplémentaires des angles en S, appartiennent à un même triangle, donc BFC est une ligne droite (fig. 1525).

**2469.** *Remarques.* 1° Les triangles ABC, A'B'C' sont semblables.

2° Lorsque trois circonférences passent par un même point, le rapport de AB à AC est constant et l'on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

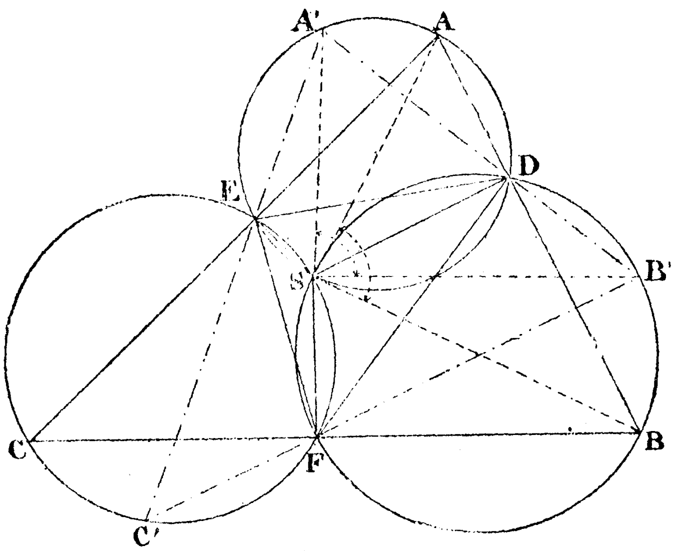



Fig. 1525.

3° Les triangles ASB, A'SB' sont semblables.

**Théorème 1072.**

**2470.** *On donne un point* S *et un polygone* ABCD ; *tout polygone circonscrit, formé par des isoclines à* SA, SB..., *est semblable au polygone antipodaire de ce même point.*

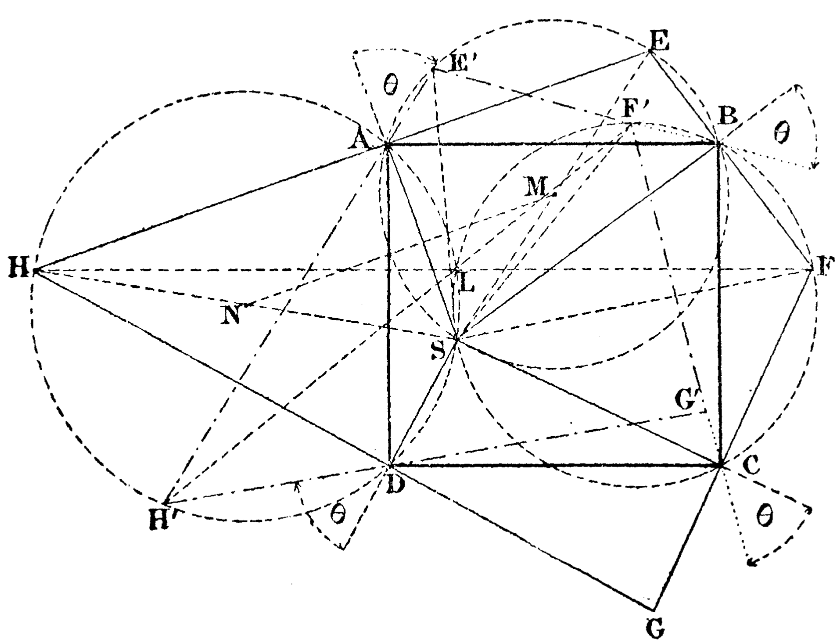



Fig. 1526.

Soient HAE, EBF, etc., respectivement perpendiculaires à SA, SB... ;

puis les isoclines H'AE', E'F'B; il faut prouver que HEFG et H'E'F'G' sont des polygones semblables.

Comme précédemment, on démontre que les polygones sont composés de triangles semblables, semblablement placés; car on a :

$$\frac{EF}{EH} = \frac{E'F'}{E'H'}. \qquad (n^o\ 2462)$$

**2471**. *Remarques*. 1° Le polygone antipodaire est le polygone circonscrit maximum, par rapport au point S, car on a : $HE > H'E'$; la droite HE est la plus grande corde commune, car elle est parallèle à la ligne des centres MN.

2° Le polygone anticopodaire circonscrit se réduit au point S, lorsque les droites telles que E'AH' sont dirigées suivant AS, BS, etc.

3° Le point S est le centre permanent de similitude du polygone circonscrit, qui reste constamment semblable à lui-même, tout en changeant de position et de grandeur.

### Théorème 1073.

**2472**. *Les droites isoclines menées par chaque sommet d'un triangle, relativement à l'un des côtés adjacents, déterminent un triangle semblable au triangle donné.*

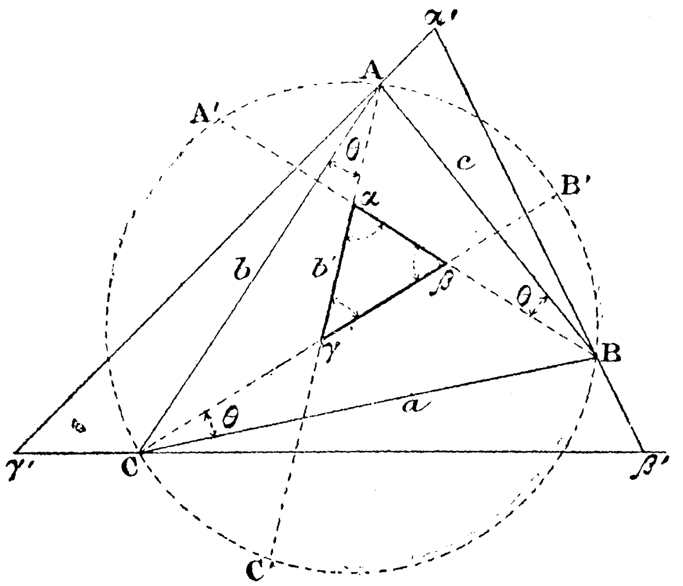



Fig. 1257.

Dans le triangle $\alpha\beta\gamma$, l'angle $\alpha = \alpha BA + \alpha AB = A$; de même $\beta = B$, $\gamma = C$; donc $\alpha\beta\gamma$ est semblable à ABC.

De même si l'on fait des angles égaux à l'extérieur, $\alpha'\beta'\gamma'$ est semblable à ABC.

Les triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ sont circonscrits à ABC.

**2473**. *Remarques*. 1° Le triangle intérieur peut se réduire à un point, et c'est un des *points de Brocard*.

Le triangle extérieur est maximum lorsque chaque côté, $\beta'\gamma'$ par exemple, est parallèle à la ligne des centres des segments extérieurs décrits respectivement sur BC et qui soit capable de l'angle B et sur CA, capable de l'angle C.

2° Le second point de Brocard s'obtiendrait en menant les isoclines, par rapport à AB, BC, CA, à partir de A, B, C.

**2474. Note.** *Calcul du côté* $\alpha\gamma$ *ou* b' *en fonction* de b et de $\theta$.

La figure donne : $$\alpha\gamma = A\gamma - A\alpha. \quad (1)$$

Dans le triangle $A\gamma C$, on a :

$$\frac{A\gamma}{b} = \frac{\sin(C-\theta)}{\sin C}; \quad \text{d'où} \quad A\gamma = \frac{b\sin(C-\theta)}{\sin C}. \quad (2)$$

Dans le triangle $A\alpha B$, on a :

$$\frac{A\alpha}{c} = \frac{\sin\theta}{\sin A}; \quad \text{d'où} \quad A\alpha = \frac{c\sin\theta}{\sin A} = \frac{b\sin C}{\sin B}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin A}. \quad (3)$$

En tenant compte de (2) et (3), la formule (1) devient :

$$\alpha\gamma = b\left\{\frac{\sin(C-\theta)}{\sin C} - \frac{\sin C\sin\theta}{\sin A\sin B}\right\}.$$

*Condition pour que le triangle* $\alpha\beta\gamma$ *se réduise à un point.*

Il faut que l'on ait : $$\alpha\gamma = 0,$$

c'est-à-dire : $$\frac{\sin(C-\theta)}{\sin C} = \frac{\sin C\sin\theta}{\sin A\sin B},$$

ou, en divisant tout par $\sin\theta$ et substituant $\sin C = \sin(A+B)$,

$$\frac{\sin(C-\theta)}{\sin C\sin\theta} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B},$$

ou, en développant les numérateurs et effectuant les divisions,

$$\operatorname{cotg}\theta - \operatorname{cotg} C = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B,$$

ou enfin $$\operatorname{cotg}\theta = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C,$$

expression connue de la cotangente de l'*angle de Brocard* (n° 2435).

M. Brocard a traité cette même question, dès 1877, dans la *Nouvelle correspondance*, pp. 65, 106, 187; puis 1879, p. 323, etc., en y ajoutant de nombreux et intéressants développements.

**Théorème 1074.**

**2475.** *Les droites isoclines menées par chaque sommet d'un triangle, relativement au côté opposé, déterminent un triangle semblable au triangle donné.*

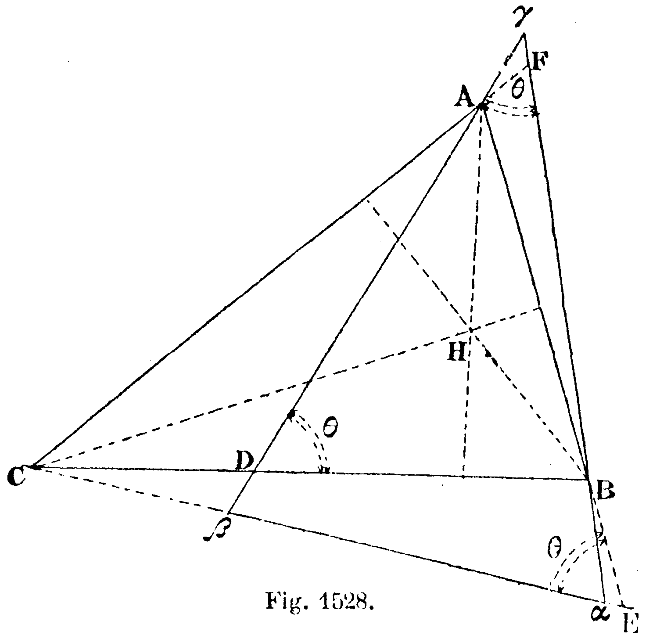



Fig. 1528.

L'angle obtus D est le supplément de E, donc le quadrilatère DβEB est inscriptible; par suite, $\beta = B$. De même $\alpha = A$ et $\gamma = C$; donc...

*Remarques.* 1° Les isoclines sur les côtés opposés font des angles égaux avec les hauteurs correspondantes; par suite, lorsque l'angle $\theta$ augmente, les isoclines se rappprochent des hauteurs et pour $\theta = 90°$ elles se confondent avec ces lignes, le triangle se réduit à l'orthocentre H.

2° On peut voir les développements de la question ci-dessus dans les *théorèmes et problèmes*, par M. CATALAN, 6e édit., 1878, p. 90; ou dans le *Journal de mathématiques* de M. VUIBERT, 1879, p. 147, n° 147.

**Note.** A titre documentaire, on peut voir l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* 1906, p. 26 et 202, q. 2922, de M. E. MALO; réponses par MM. H. BROCARD et E. WEBER (Liége). Voir aussi *Mathesis*, 1906, pp. 83, 86, solution de la question 1543 de ce recueil par MM. WEBER, STERCKENS, ABRAMESCU, puis BASTIN et H. LEZ.

## Centre permanent de similitude.

**2476.** Le centre *permanent de similitude* d'un polygone qui varie de position et de grandeur, mais en restant semblable à lui-même, est le point homologue commun que les polygones ainsi formés admettent dans certains cas.

Un point donné S est le centre permanent de similitude des polygones podaire et copodaire de ce point, par rapport à un autre polygone donné.

Le polygone podaire inscrit est le plus petit de tous les polygones inscrits semblables.

**2477.** Un point donné S est le centre permanent de similitude des polygones antipodaires et anticopodaires de ce point par rapport à un autre polygone donné.

Le polygone antipodaire est le plus grand des polygones circonscrits semblables; ces derniers diminuent de grandeur d'après l'inclinaison des isoclines; et le polygone circonscrit peut se réduire à un seul point, au centre même de similitude.

**Théorème 1075.**

**2478.** *Lorsqu'un triangle* DEF *inscrit à un triangle donné* ABC *reste semblable à lui-même, mais en variant de position et de grandeur, il admet un point fixe de son plan comme centre permanent de similitude.*

Le théorème est la conséquence de l'invariabilité de position du point commun aux trois cercles qui passent respectivement par un sommet du triangle donné et par un point marqué sur chacun des côtés adjacents (nos 706 et 2283).

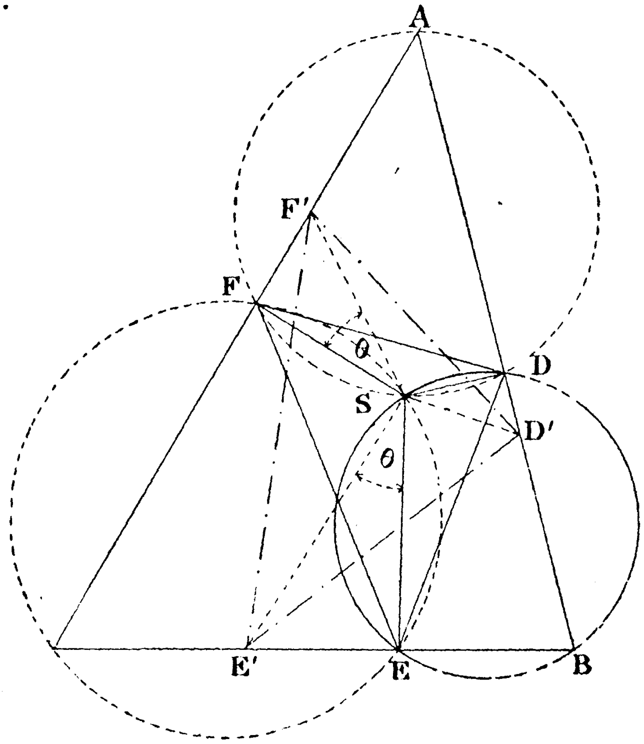


Fig. 1529.

La démonstration directe n'offre aucune difficulté.

**Théorème 1076.**

**2479.** *Dans un triangle* ABC, *on inscrit un triangle* $A_1B_1C_1$ *semblable au triangle donné; le cercle circonscrit au triangle* $A_1B_1C_1$ *donne lieu à un second triangle* $A_2B_2C_2$ *semblable aux deux premiers; les centres permanents de similitude des deux groupes sont les points de Brocard du triangle* ABC.

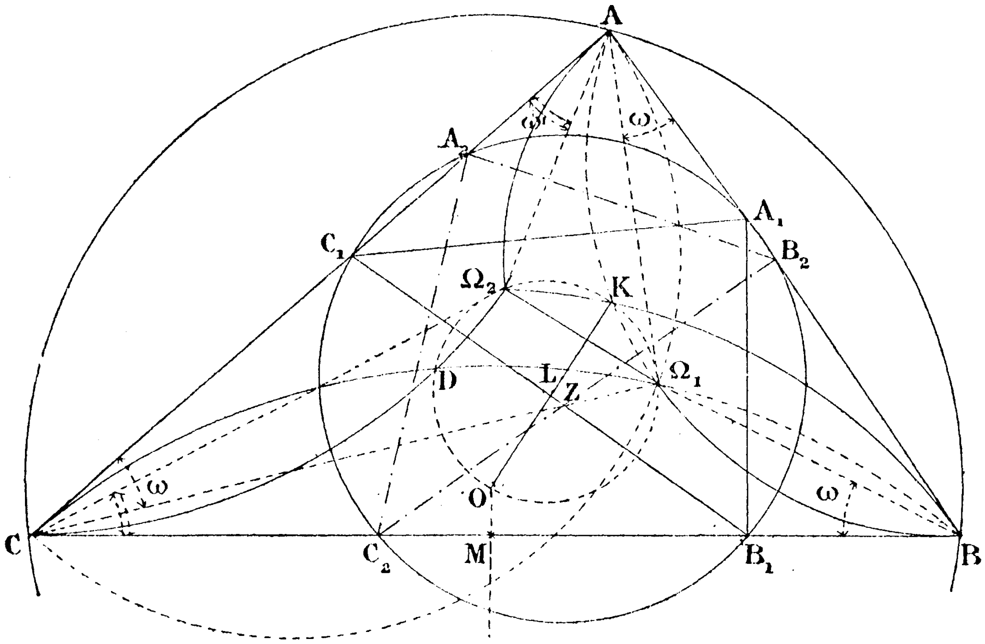



Fig. 1530.

1° Soient $A_1B_1C_1$ le triangle semblable à ABC et $\Omega_1$ le centre permanent de similitude pour le groupe de triangles analogues à $A_1B_1C_1$.

L'angle $A\Omega_1B = C + A_1$ (nos 706 et 2283) ou égale $A + C = \pi - B$; donc le point $\Omega_1$ est sur l'arc de segment $A\Omega_1B$, tangent en B au côté BC; de même l'angle $C\Omega_1A = B + C_1 = B + C = \pi - A$; donc il est sur l'arc de segment $C\Omega_1A$, tangent en A au côté AB, etc. Ainsi le centre permanent de similitude $\Omega_1$ est un des *points de Brocard*.

2° Le point $\Omega_2$ isogonal de $\Omega_1$ obtenu en faisant $\omega' = \omega$, etc., est le centre permanent de similitude des triangles tels que $A_2B_2C_2$; c'est le second *point de Brocard;* d'ailleurs l'angle $A\Omega_2C = B + A_2$, il égale aussi $B + A$ comme *point de Brocard*, donc $A_2 = A$; de même $B_2 = B$, $C_2 = C$, et le triangle $A_2B_2C_2$ est semblable aux deux premiers.

**2480. Note.** On sait que le point $\Omega_1$ qui donne pour les angles :

$$\Omega_1AB = \Omega_1BC = \Omega_1CA,$$

est nommé actuellement *premier point de Brocard* (n° 2430). Rappelons qu'au début il a été désigné, en France, par O', $\omega'$ ou $\Omega'$ et nommé *point rétrograde*, par opposition à l'autre point $\Omega_2$.

Simmons (*Compagnon to the Weekly Problem Papers*) le désigne par $\Omega$ et le nomme *point positif*.

Le point $\Omega_2$ qui donne : $\Omega_2AC = \Omega_2CB = \Omega_2BA$,
est nommé *second point de Brocard;* au début, on le désignait par O, $\omega$ ou $\Omega$, on l'appelait *point direct;* divers auteurs anglais le désignent par $\Omega'$ et le nomment *point négatif*.

Les coordonnées barycentriques du premier point $\Omega_1$ sont:

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2},$$

tandis que celles du second point $\Omega_2$ sont :

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2}.$$

(*J. M. E.*, 1888, p. 54 et 258; 1899, p, 17 et 18.)

Lorsqu'il n'y a pas lieu de distinguer, on se borne à mettre $\Omega$.

**Théorème 1077.**

**2481.** *Lorsqu'un triangle* DEF, *ayant* S *pour centre permanent de similitude, est inscrit dans un triangle donné* ABC, *les côtés de ce dernier sont coupés par le cercle circonscrit à* DEF *en trois nouveaux points donnant lieu à un second triangle inscrit* D'E'F'; *ce dernier triangle variant de grandeur et de position, en restant semblable à lui-même, admet un centre permanent* S' *de similitude. Les points* S, S' *sont des points isogonaux.*

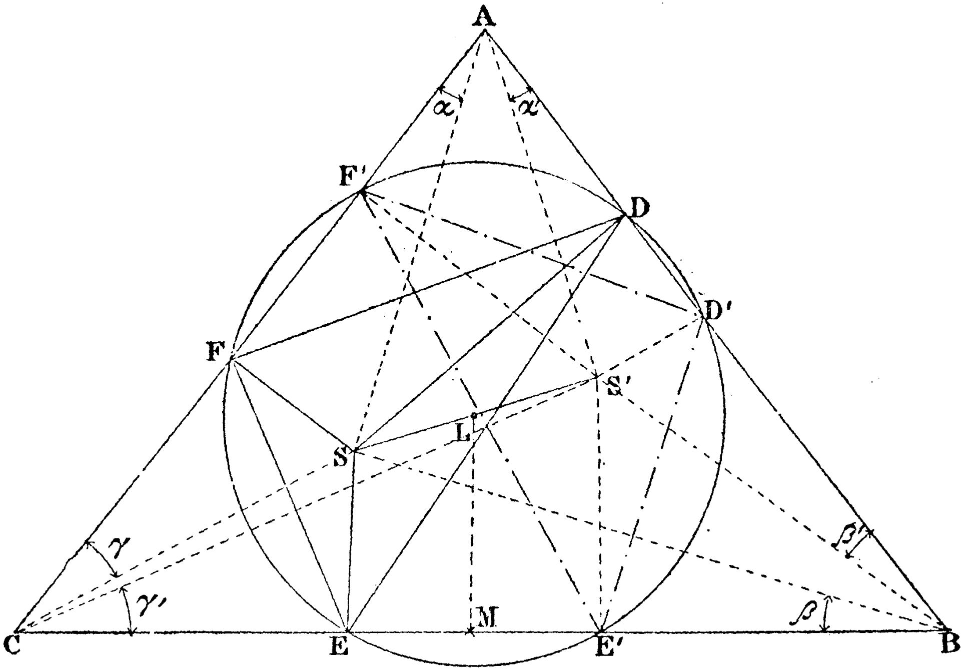



Fig. 1531.

Considérons le triangle DEF dans la position particulière où les droites SD, SE, SF sont perpendiculaires aux côtés de ABC; déterminons le symétrique S' de S par rapport au centre L; les points S et S' sont isogonaux (n° 2317), les projections de ces points donnent six points concycliques et D', E', F' sont les projections de S'. Ainsi S' est le centre permanent de similitude du groupe de triangles semblables à D'E'F'.

Il est d'ailleurs facile de le prouver directement, car

$$\text{l'angle AS'B} = \pi - (\alpha' + \beta') \quad \text{ou} \quad \pi - (\alpha + \beta),$$

quantité qui ne dépend que de S; donc S' est déterminé par trois arcs de segments connus. Le théorème est donc démontré quelle que soit la position du premier triangle inscrit.

**2482.** *Remarques.* 1° Les points S, S′ sont les foyers d'une ellipse tangente aux trois côtés du triangle ABC, le cercle DD′EE′FF′ en est le cercle principal.

2° *Si les triangles* DEF, D′E′F′ *tournent respectivement autour de* S *et* S′, *avec des vitesses angulaires égales, mais en sens contraire, leurs sommets sont toujours sur une circonférence.*

3° *Le lieu du centre* L *du cercle circonscrit à* DEF *est une droite,* car le triangle DLS reste semblable à lui-même pendant qu'il pivote autour du centre S et que le sommet D décrit une droite (n° 1125).

**Note.** Voir Taylor, Neuberg, *J. M. E.*, 1886, pp. 106, 151; et surtout une note placée à la fin de *Mathesis*, 1885 : *Sur les figures semblablement variables* par M. J. Neuberg, extraite des *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XVI; ces quelques pages constituent un vrai petit chef-d'œuvre de Géométrie élémentaire.

### Théorème 1078.

**2483.** *Trois droites illimitées forment un triangle* ABC; *on donne trois angles* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *dont la somme égale deux droits :*

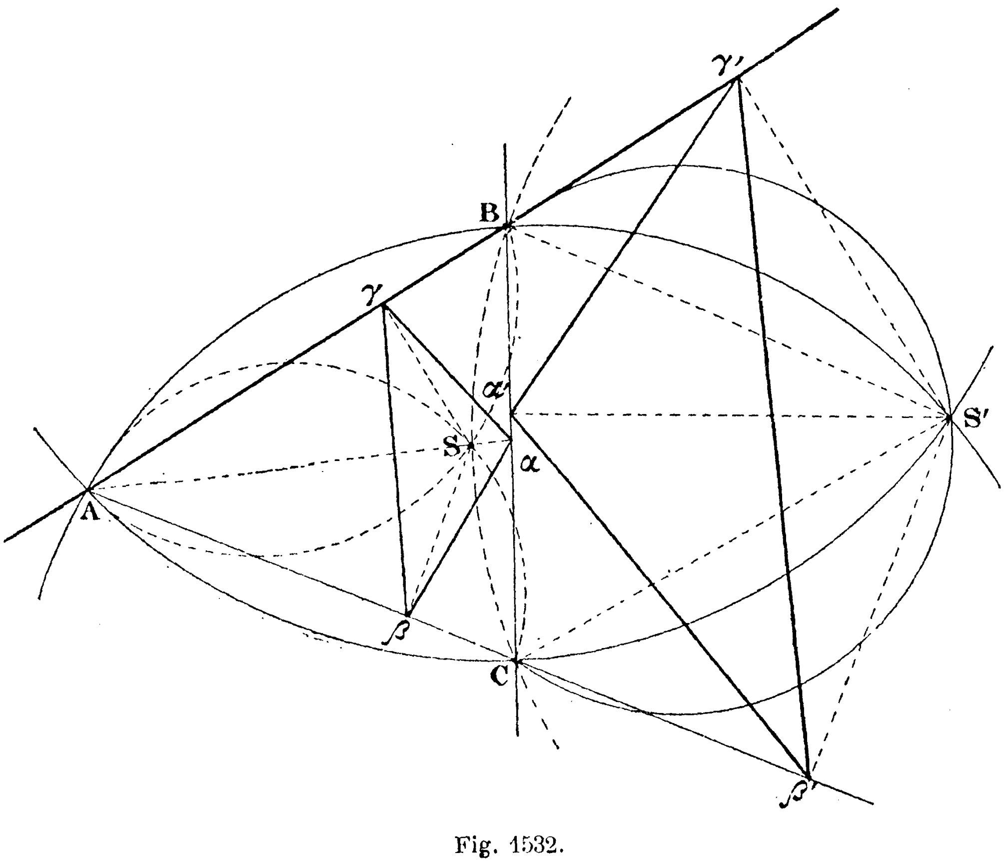



Fig. 1532.

1° *Sur le côté* a, *on décrit, vers l'intérieur du triangle, un segment capable de* $A+\alpha$; *sur* b, *de* $B+\beta$; *sur* c, *de* $C+\gamma$; *les trois segments déterminent un point* S *dont le triangle podaire est inscrit à* ABC *et a pour angles* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

2° *Sur* a, *on décrit un segment capable de* $A-\alpha$; *sur* b, *de* $B-\beta$; *sur* c, *de* $C-\gamma$; *les trois segments déterminent un point* S′ *dont le triangle podaire est exinscrit à* ABC *et qui a pour angles* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

On peut regarder le théorème comme démontré (n° 2283); néanmoins, à cause de l'intérêt de la question, elle va être traitée directement.

1° Les trois segments $A+\alpha$, $B+\beta$, $C+\gamma$ se coupent en un même point intérieur S, parce que la somme des angles égale quatre droits; on sait en outre que lorsque l'angle $BSC = A+\alpha$, etc., le triangle podaire inscrit a précisément $\alpha$ pour angle dont le sommet est sur le côté $a$ (n$^{os}$ 706 et 2283); de même pour les angles des deux autres sommets.

2° Les différences $A-\alpha$, $B-\beta$, $C-\gamma$ ne sont jamais de même signe : une ou deux sont positives et deux ou une sont négatives, tout segment positif doit être décrit vers l'intérieur du triangle ABC, tout segment négatif, vers l'extérieur.

Avec les données de la figure, $A-\alpha$ est négatif, le segment correspondant BS′C est à l'extérieur.

L'angle BS′C égale $AS'B + AS'C$. On a en effet :

$$\alpha - A = B - \beta + C - \gamma,$$

et les trois segments se coupent en un même point S′ (fig. 1532).

**2484.** *Remarques.* Les points S et S′ sont les centres permanents de similitude des triangles inscrits ou exinscrits semblables à un triangle donné, ayant pour angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

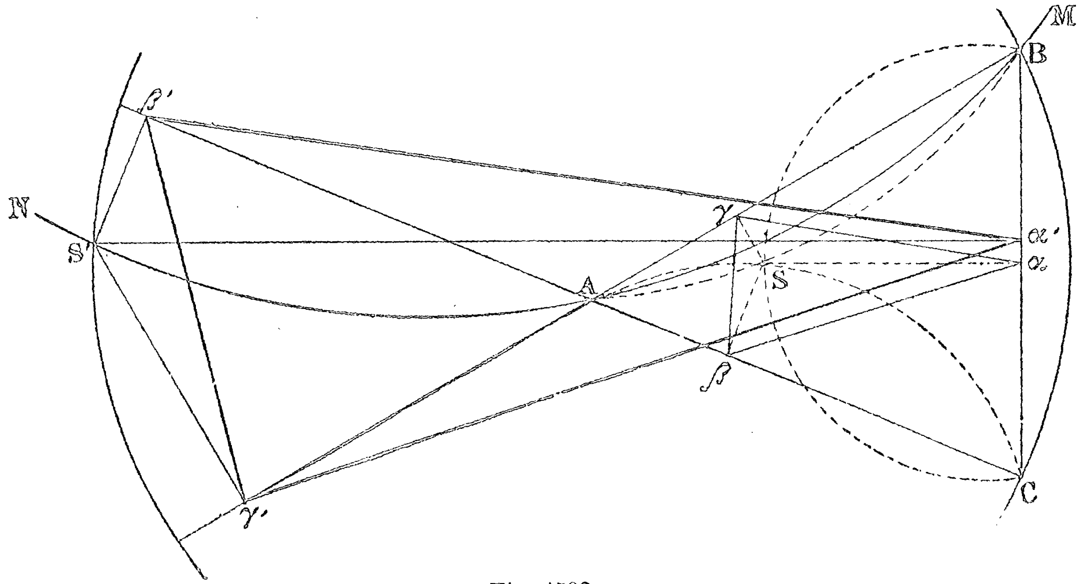



Fig. 1533.

2° Avec les nouvelles données (fig. 1533) la différence $A-\alpha$ est positive et les deux autres sont négatives; le triangle podaire exinscrit, par rapport au sommet $\alpha'$, est du côté même du triangle donné; en réalité, on a :

$$A - \alpha = \beta - B + \gamma - C.$$

3° Dans les deux figures 1532 et 1533, on a pris le même triangle de référence ABC afin de bien manifester que tout dépend des angles donnés $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

4° Dans le théorème précédent on admet implicitement que le sommet $\alpha$

doit être sur la droite opposée au sommet A ; que β doit être sur $b$ ou AC, et γ sur $c$ ou AB, et *l'on obtient deux triangles podaires semblables ; l'un est inscrit et l'autre exinscrit.*

Le problème général admet en tout douze solutions, ainsi qu'on va le reconnaître (voir ci-après, n° 2487).

### Problème 1079.

**2485.** Cas particulier. *Déterminer un point dont les projections sur trois droites données soient les sommets d'un triangle équilatéral.*

*Deux points répondent à la question.*

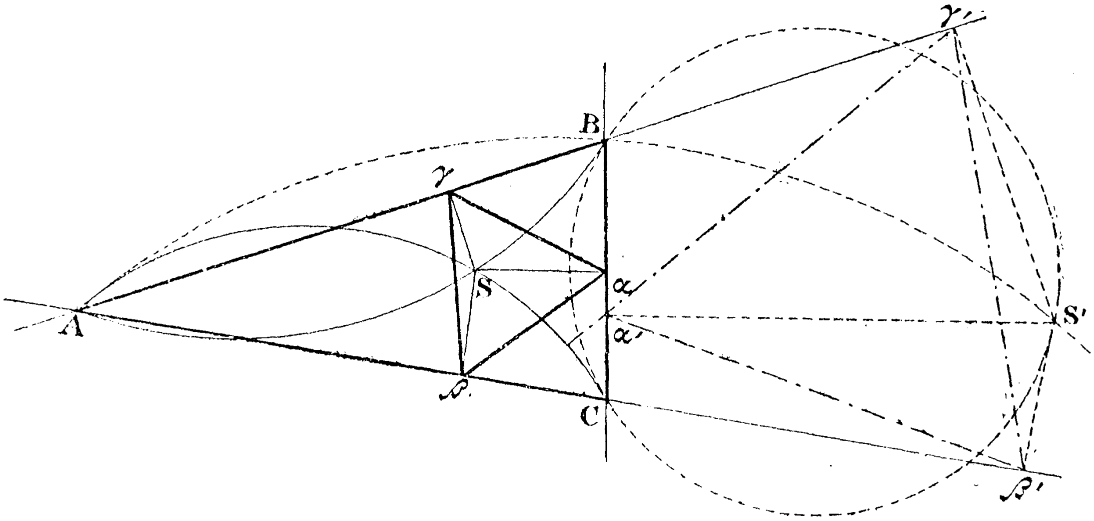



Fig. 1534.

Soient ABC (fig. 1534) le triangle formé par les trois droites et αβγ un triangle équilatéral. Sur le côté $a$ vers l'intérieur du triangle ABC, il faut

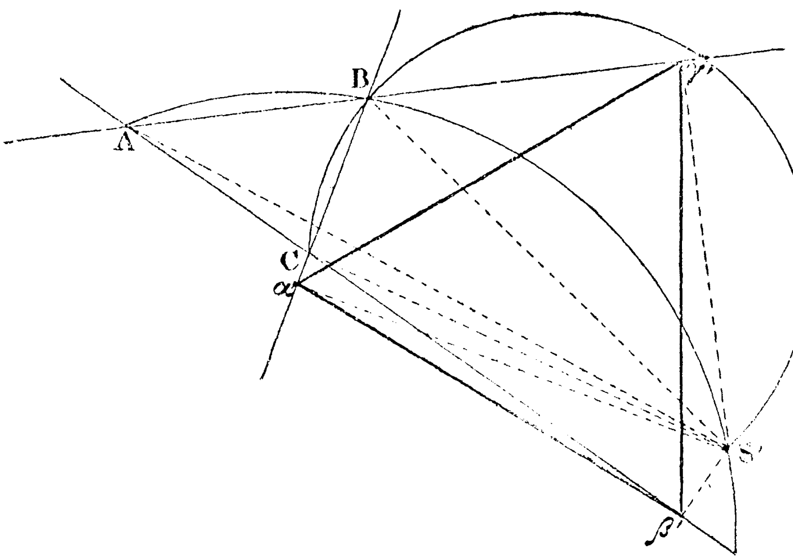



Fig. 1535.

décrire un segment capable de $A+\alpha$, c'est-à-dire de $A+60°$ ; sur $b$, de $B+60°$, sur $c$, de $C+60°$ ; les trois arcs se coupent au centre permanent de similitude S de tout triangle équilatéral inscrit (n° 2476).

En décrivant des segments de $A - 60^\circ$, $B - 60^\circ$, $C - 60^\circ$ (fig. 1534), on obtient S' pour les triangles équilatéraux exinscrits.

**2486**. *Remarque*. Suivant la valeur des angles de ABC, le triangle équilatéral exinscrit peut avoir une des dispositions ci-contre (fig. 1534 ou 1535).

**Théorème 1080.**

**2487**. *Dans un triangle donné* ABC, *on peut déterminer :* 1° *Six centres permanents de similitude, tels que le triangle podaire inscrit, relatif à chacun d'eux, soit semblable à un autre triangle donné* $\alpha\beta\gamma$ ; 2° *Six centres pour des triangles exinscrits.*

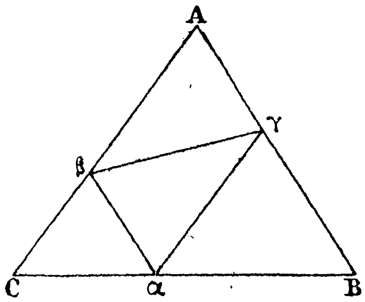


Fig. 1536.

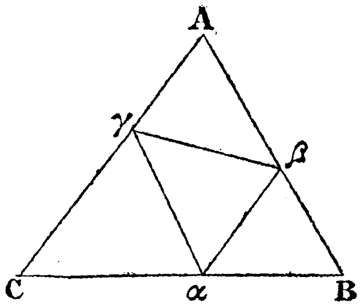


Fig. 1537.

1° Admettons que le sommet $\alpha$ se trouve d'abord sur le côté $a$; on peut avoir deux dispositions différentes (fig. 1536 et 1537); puis le sommet $\beta$ étant placé sur $a$ donne aussi lieu à deux positions; $\gamma$ placé sur $a$ en donne deux autres, soit en tout *six* positions différentes résumées dans le tableau ci-après :

| I. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $A+\alpha$ | $A+\alpha$ | $A+\beta$ | $A+\beta$ | $A+\gamma$ | $A+\gamma$ |
| $b$ | $B+\beta$ | $B+\gamma$ | $B+\gamma$ | $B+\alpha$ | $B+\alpha$ | $B+\beta$ |
| $c$ | $C+\gamma$ | $C+\beta$ | $C+\alpha$ | $C+\gamma$ | $C+\beta$ | $C+\alpha$ |

En décrivant sur chaque côté trois segments capables respectivement

Sur $a$, de $A+\alpha$, $A+\beta$, $A+\gamma$;
Sur $b$, de $B+\alpha$, $B+\beta$, $B+\gamma$;
Sur $c$, de $C+\alpha$, $C+\beta$, $C+\gamma$;

on obtient des arcs qui se coupent trois à trois en six points, et ces points correspondent aux six positions indiquées par le tableau I.

2° On obtient aussi six centres permanents de similitude pour des triangles exinscrits; en décrivant neuf segments d'après les données du tableau suivant :

| II. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $A-\alpha$ | $A-\alpha$ | $A-\beta$ | $A-\beta$ | $A-\gamma$ | $A-\gamma$ |
| $b$ | $B-\beta$ | $B-\gamma$ | $B-\gamma$ | $B-\alpha$ | $B-\alpha$ | $B-\beta$ |
| $c$ | $C-\gamma$ | $C-\beta$ | $C-\alpha$ | $C-\gamma$ | $C-\beta$ | $C-\alpha$ |

**2488.** *Remarques.* 1° En tout, on peut donc obtenir douze centres permanents de similitude, tels que les triangles correspondants soient semblables à un triangle donné $\alpha\beta\gamma$ et qu'ils aient respectivement leurs sommets sur trois droites données AB, BC, CA.

2° Dans le tableau I, pour chaque groupe, la somme des trois valeurs correspond à $2\pi$. Ainsi pour 2, par exemple,

$$A+\alpha+B+\gamma+C+\beta=4d.$$

Dans le tableau II, un des angles est la somme des deux autres.

### Théorème 1081.

**2489.** *Les six centres permanents de similitude des triangles inscrits sont concycliques lorsque le triangle inscrit $\alpha\beta\gamma$ est semblable au triangle de référence* ABC.

Lorsque $A=\alpha$, $B=\beta$, $C=\gamma$, on a :

$$A+\alpha=2A,\quad A+\beta=\pi-C,\quad A+\gamma=\pi-B,\quad \text{etc.}$$

Le tableau I devient :

| III. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 2A | 2A | $\pi-C$ | $\pi-C$ | $\pi-B$ | $\pi-B$ |
| *b* | 2B | $\pi-A$ | $\pi-A$ | $\pi-C$ | $\pi-C$ | 2B |
| *c* | 2C | $\pi-A$ | $\pi-B$ | 2C | $\pi-A$ | $\pi-B$ |

Or le point du premier groupe est le centre du cercle circonscrit au triangle donné ABC ; tout segment capable d'un angle 2A, 2B ou 2C passe par le point O.

Les segments $\pi-A$, $\pi-B$ et $\pi-C$ sont les *circonférences adjointes* (n° 2429, 2°). Ainsi le groupe 3 donne le *point de Brocard* $\Omega$ ; le groupe 5 donne l'autre point $\Omega'$.

Chacun des groupes 2, 4 et 6 est donné par les deux circonférences adjointes tangentes aux côtés d'un même angle (n° 2441).

Les six points obtenus appartiennent donc au *cercle de Brocard*.

### Théorème 1082.

**2490.** *Lorsque le triangle exinscrit $\alpha\beta\gamma$ doit être semblable au triangle donné* ABC, *on n'obtient que deux centres permanents de similitude, à distance finie.*

Il suffit d'examiner ce que devient le tableau II des six centres des triangles exinscrits (n° 2487) dans le cas où $A=\alpha$, $B=\beta$, $C=\gamma$ ; on obtient le résultat ci-après :

| IV. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 0 | 0 | $A-B$ | $A-B$ | $A-C$ | $A-C$ |
| *b* | 0 | $B-C$ | $B-C$ | $B-A$ | $B-A$ | 0 |
| *c* | 0 | $C-B$ | $C-A$ | 0 | $C-B$ | $C-A$ |

Seuls les groupes 3 et 5 donnent trois segments qui se coupent en des points déterminés S et S', à distance finie; ils correspondent, pour les

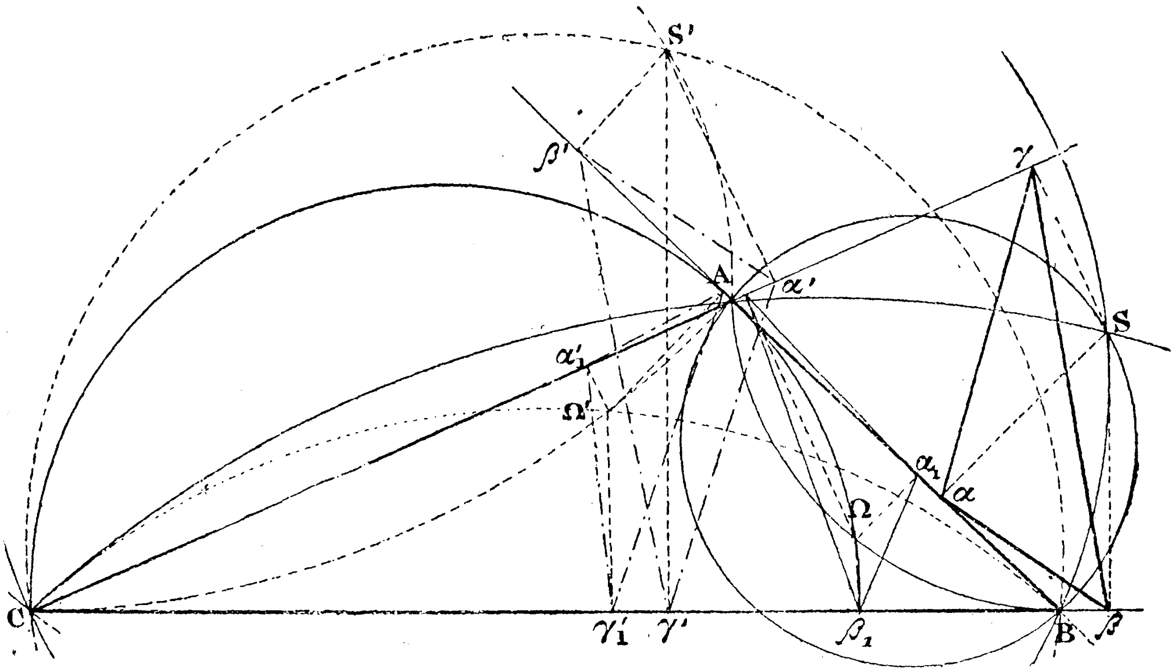



Fig. 1538.

triangles exinscrits; aux deux *points de Brocard* Ω et Ω', que donnent pour les triangles inscrits les groupes 3 et 5 du tableau III (n° 2489).

**Problème 1083.**

**2491**. *Déterminer le centre permanent de similitude des triangles*

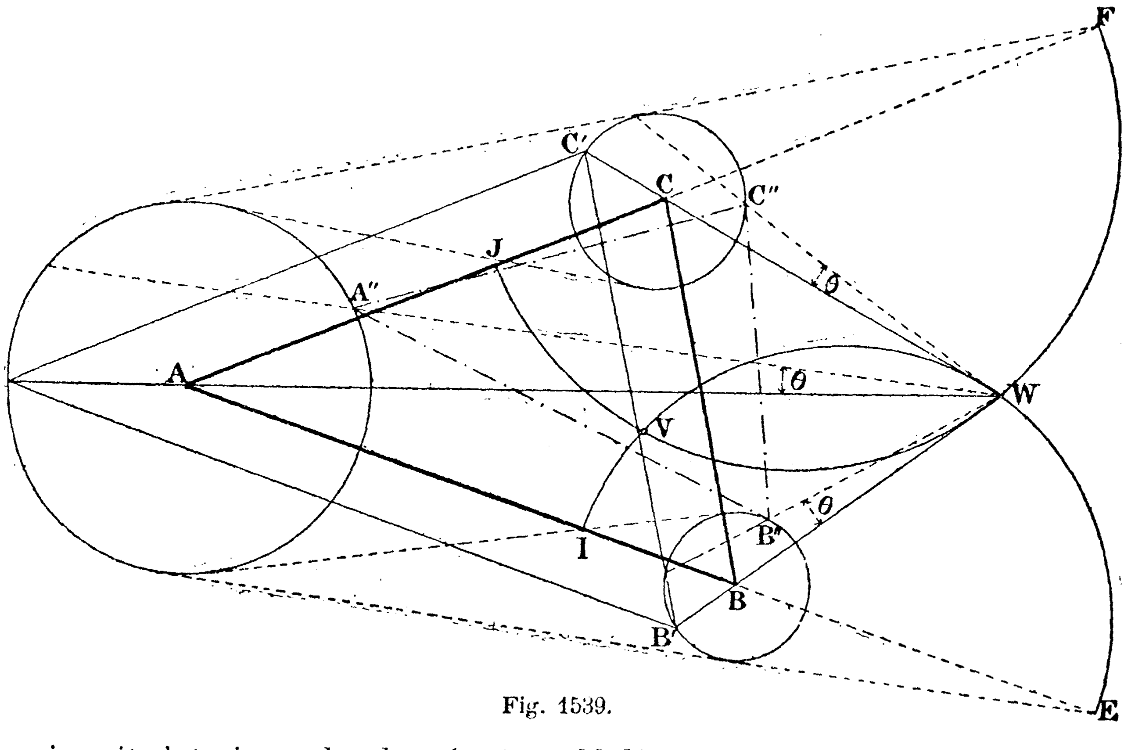



Fig. 1539.

*inscrits à trois cercles donnés et semblables au triangle ayant les trois centres pour sommets.*

Les triangles semblables à ABC sont les seuls qui admettent un centre permanent de similitude; car si deux sommets d'un triangle variable de grandeur et de position, mais qui reste semblable à lui-même, glissent sur deux circonférences données, le troisième sommet décrit une troisième circonférence, et le triangle des trois centres est semblable au triangle mobile.

Le problème revient donc à trouver un point V dont les distances aux trois centres soient proportionnelles aux rayons correspondants; il suffit donc de déterminer les *centres isodynamiques* V et W des trois circonférences (n° 1546 e).

On sait que ce sont les points d'intersection des circonférences décrites sur les diamètres tels que EI, dont les extrémités sont les centres de similitude des cercles considérés.

Le centre W donne A'B'C' semblable à ABC; pour une inclinaison $\theta$, on obtient A''B''C'', etc.

Le triangle A'B'C' est le plus grand du groupe de W; le plus petit serait donné par le premier point d'intersection de WA', WB', WC' avec les cercles.

### Théorème 1084.

**2492.** *On donne un triangle* ABC *et trois angles* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, *dont la somme égale deux droits :*

1° *Sur* a *on décrit, vers l'intérieur du triangle, un segment capable de* $\pi - \alpha$ ; *sur* b, *de* $\pi - \beta$ ; *sur* c, *de* $\pi - \gamma$ ; *les trois segments déterminent un point* S *dont le triangle antipodaire circonscrit à* ABC *a pour angles* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

2° *Lorsqu'on décrit les mêmes segments vers l'extérieur du triangle, on obtient un point* S' *dont le triangle antipodaire, semblable à* $\alpha\beta\gamma$, *est exinscrit par rapport à* ABC.

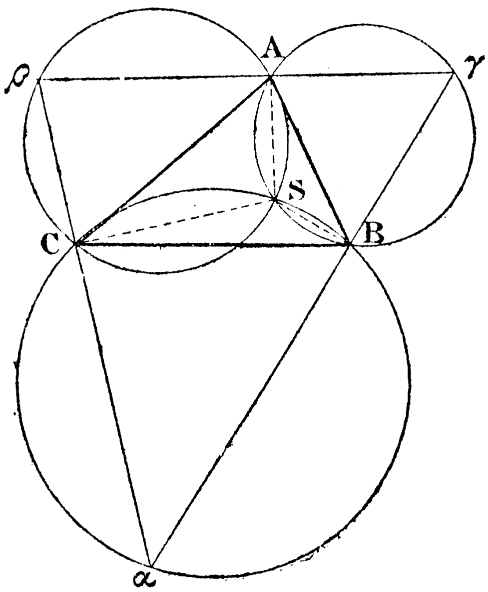


Fig. 1540.

1° Les trois segments correspondent à des angles dont la somme égale quatre droits, on obtient donc un point S; le triangle antipodaire $\alpha\beta\gamma$ a pour angles les suppléments de BSC, CSA, ASB; il a donc pour angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

2° Résultat analogue au précédent; mais en S' un des angles est la somme des deux autres (voir d'ailleurs la figure 1544 du n° 2498, qui donne la construction pour le cas où les triangles circonscrit et exinscrit sont équilatéraux).

**2493.** *Remarque.* Dans le premier cas, on peut dire que l'on décrit à l'extérieur du triangle des segments capables de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, et dans le second, que l'on trace les mêmes segments $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ du côté même du triangle de référence.

**Théorème 1085.**

**2494.** *On peut déterminer : 1° six centres permanents de similitude, tels que le triangle antipodaire de chacun d'eux soit semblable à un triangle donné* $\alpha\beta\gamma$ *et circonscrit à un autre triangle* ABC ; 2° *six autres centres pour un triangle antipodaire excirconscrit.*

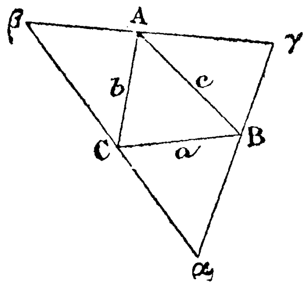



Fig. 1541.

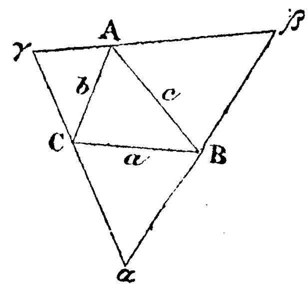



Fig. 1542.

En admettant que le sommet $\alpha$ corresponde au côté $a$, on a deux positions différentes (fig. 1541 et 1542) ; donc, en tout, six positions pour $\alpha\beta\gamma$ relativement à ABC.

Le tableau suivant indique les segments qu'il faut décrire sur chaque côté $a$, $b$, $c$, vers l'intérieur du triangle donné ABC.

| V. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $\pi-\alpha$ | $\pi-\alpha$ | $\pi-\gamma$ | $\pi-\gamma$ | $\pi-\beta$ | $\pi-\beta$ |
| $b$ | $\pi-\beta$ | $\pi-\gamma$ | $\pi-\alpha$ | $\pi-\beta$ | $\pi-\gamma$ | $\pi-\alpha$ |
| $c$ | $\pi-\gamma$ | $\pi-\beta$ | $\pi-\beta$ | $\pi-\alpha$ | $\pi-\alpha$ | $\pi-\gamma$ |

Le même tableau sert pour les triangles excirconscrits : il suffit de décrire ces mêmes segments vers l'extérieur.

**Note.** Avec trois coordonnées angulaires, on obtient deux groupes de six points (n° 2275 **i**). L'étude précédente est de 1896. De nos jours MM. Auric et Rey Pastor ont étudié le groupe des trois points obtenus en permutant les coordonnées barycentriques d'un point donné (n° 2275 **h**).

**Théorème 1086.**

**2495.** *L'orthocentre et les points de Brocard du triangle* ABC *sont des centres permanents de similitude pour les triangles antipodaires circonscrits, lorsque* $\alpha\beta\gamma$ *doit être semblable au triangle de référence* ABC ; *on a de plus trois autres centres.*

Le tableau V de la question précédente peut suffire ; on peut d'ailleurs y remplacer $\alpha$ par A, $\beta$ par B, $\gamma$ par C, puisque $\alpha\beta\gamma$ doit être semblable à ABC. On obtient ainsi :

| VI. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $\pi-A$ | $\pi-A$ | $\pi-C$ | $\pi-C$ | $\pi-B$ | $\pi-B$ |
| $b$ | $\pi-B$ | $\pi-C$ | $\pi-A$ | $\pi-B$ | $\pi-C$ | $\pi-A$ |
| $c$ | $\pi-C$ | $\pi-B$ | $\pi-B$ | $\pi-A$ | $\pi-A$ | $\pi-C$ |

Pour les triangles antipodaires circonscrits, les segments doivent être décrits vers l'intérieur du triangle ABC ; or le groupe 1 donne l'*orthocentre*, ou point de concours des hauteurs, et les groupes 3 et 5 donnent les *points de Brocard* $\Omega$ et $\Omega'$, puisque les valeurs qui déterminent ces points correspondent aux cercles adjoints déjà indiqués dans une question précédente (nº 2489).

L'*orthocentre* du groupe 1 ci-dessus est le point isogonal du centre O du cercle circonscrit (nº 2317).

Les trois points des groupes 2, 4, 6 sont les isogonaux des trois points trouvés pour les triangles inscrits.

**2496.** *Remarques.* 1º Chaque *point de Brocard* d'un triangle est à la fois centre permanent pour un triangle inscrit et pour un triangle circonscrit semblable au triangle donné ABC.

On peut conclure aussi cette propriété d'une autre question connue que le triangle podaire d'un point est semblable à l'antipodaire du point isogonal du premier (nº 2328) ; or les *points de Brocard* sont isogonaux l'un de l'autre.

2º Chaque *point de Brocard* est le centre de similitude pour le podaire, le triangle donné et l'antipodaire, ainsi que pour tous les triangles inscrits et circonscrits relatifs au même centre permanent de similitude.

**Problème 1087.**

**2497.** *Examiner ce que deviennent les centres des triangles antipodaires excirconscrits lorsque* $\alpha\beta\gamma$ *est semblable à* ABC.

Il faut recourir au tableau VI (nº 2495), en se rappelant que les segments doivent être décrits à l'extérieur du triangle de référence.

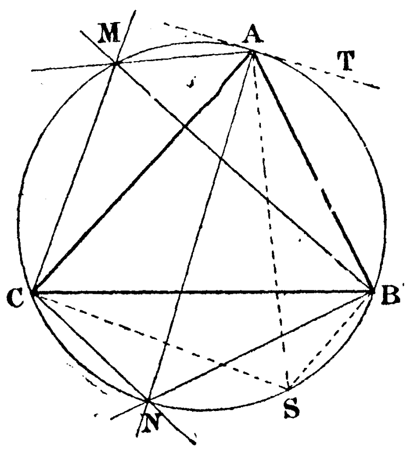


Fig. 1543.

1º Chacun des groupes 3 et 5 donne un point bien déterminé S et S' ; deux triangles antipodaires excirconscrits correspondent aux deux triangles podaires exinscrits déjà étudiés (nº 2484).

2º Le premier groupe donne trois fois le cercle circonscrit, car le segment $\pi - A$ décrit sur $a$ vers l'extérieur du triangle n'est autre chose que le cercle circonscrit ; de même pour $\pi - B$ décrit à l'extérieur sur le côté $b$ et pour $\pi - C$ décrit sur $c$; donc *chaque point du cercle circonscrit est un centre permanent de similitude d'un triangle antipodaire excirconscrit semblable à* ABC, *et ce triangle excirconscrit se réduit à un point.*

Il est facile de vérifier *a posteriori* cette conséquence, car les perpendiculaires menées par les sommets aux droites SA, SB, SC se coupent en un même point M du cercle circonscrit, sous des angles égaux à ceux de ABC.

Il en serait d'ailleurs de même pour les droites isoclines que l'on mènerait par les sommets aux droites SA, SB, SC.

3º Reste à étudier les groupes analogues 2, 4 et 6 ; pour 2, par exemple, où l'on doit décrire le segment $\pi - A$ sur $a$, $\pi - C$ sur $b$, $\pi - B$ sur $c$, à l'extérieur du triangle ; le premier de ces segments se confond avec le cercle circonscrit, les deux autres se coupent au sommet A, donc le point A commun aux trois segments est un centre permanent de similitude pour un triangle antipodaire excirconscrit, semblable à ABC.

Les perpendiculaires menées par B et C sur les côtés se coupent en N; de même les segments décrits sur $b$ et $c$ se coupent en un point infiniment rapproché de A; par suite, la tangente AT est la droite qui joint le point de concours des segments au sommet A, la perpendiculaire à la tangente est un diamètre et passe par N; donc ce point N est bien un triangle excirconscrit; de même pour les autres sommets.

*Remarques.* 1° Chaque point, tel que N, diamétralement opposé à un sommet, représente un triangle infiniment petit, excirconscrit semblable à ABC, et il correspond à deux groupes : d'abord au groupe 1, puis, dans le cas actuel, au 2e groupe.

2° Les divers cas particuliers ci-dessus correspondent aux cas particuliers des triangles exinscrits.

**Théorème 1088.**

**2498**. Triangle équilatéral. *Déterminer le centre permanent de similitude des triangles équilatéraux circonscrits à un triangle donné. Deux points répondent à la question.*

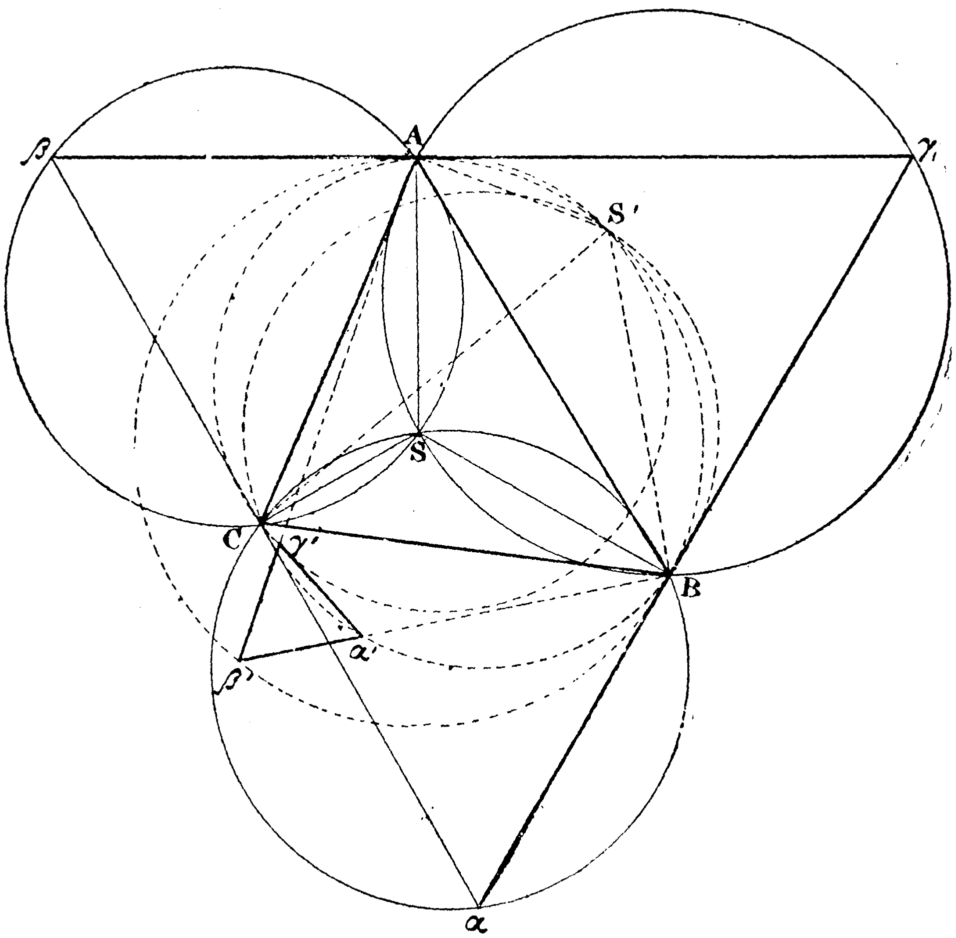



Fig. 1544.

Sur chaque côté $a$, $b$, $c$ on décrit un segment capable de $\pi - 60°$, car

$\alpha = \beta = \gamma = 60°$; on obtient le point S, et le triangle antipodaire équilatéral $\alpha\beta\gamma$ (n° 2485).

Les mêmes segments décrits vers l'extérieur donnent S′ pour centre de similitude des triangles équilatéraux excirconscrits.

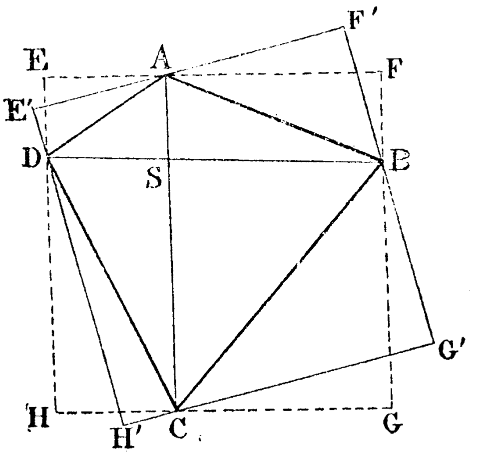


Fig. 1545.

**Théorème 1088. — I.**

**2499.** *Lorsque les diagonales d'un quadrilatère sont égales et orthogonales, leur point de concours est le centre permanent de similitude des carrés circonscrits.*

Les perpendiculaires menées à SA, SB, etc.; donnent un carré, les droites isoclines E′AF′, F′BG′, etc., donnent donc aussi un carré, et le système des carrés circonscrits a le point S pour centre de similitude.

**Note.** Lorsque les diagonales du quadrilatère sont orthogonales, mais inégales, le point S est le centre permanent de similitude des rectangles circonscrits dont les côtés sont proportionnels aux diagonales du quadrilatère. (MURENT; voir n° 1142.)

## Deux figures semblables.

**2500.** *Définition.* Deux figures semblables admettent un *centre de similitude* ou *point double*, obtenu par la superposition de deux points homologues.

On sait que deux figures sont *directement semblables*, lorsqu'on peut les rendre homothétiques, en faisant glisser l'une d'elles dans le plan même qui les contient; il suffit d'opérer une rotation autour du point double jusqu'à ce que les droites homologues des deux figures soient parallèles (nos 1146 et suivants).

Deux figures sont *symétriquement semblables*, lorsqu'on ne peut les rendre homothétiques que par le retournement de l'une d'elles hors du plan qui les contient.

**2501. Propriétés de deux figures semblables.** Les distances du point double à deux côtés homologues quelconques sont proportionnelles aux longueurs des côtés homologues (n° 2395).

Le point double est le centre des divisions proportionnelles pour deux droites homologues quelconques (n° 2399, 2°).

Lorsque deux figures sont directement semblables, les côtés homologues se rencontrent sous un angle constant; cet angle est supplémentaire de celui que forment les rayons qui joignent le point double à deux points homologues quelconques : *il en résulte que deux points homologues, le point de concours de deux droites homologues menées par ces points et le point double du système appartiennent à une même circonférence* (n° 1527, 1er *moyen*).

**2502.** Lorsque deux figures sont inversement ou symétriquement semblables, les angles formés par chaque couple de rayons qui joignent le point double à deux points homologues admettent une bissectrice commune, et deux côtés homologues quelconques rencontrent cette droite sous des angles égaux (nº 1527 c).

La bissectrice commune est l'*axe de symétrie* du système : en repliant la figure autour de cette ligne de manière à faire coïncider les deux parties du plan, les figures symétriquement semblables deviennent homothétiques.

### Problème 1089.

**2503.** *Déterminer le point double de deux figures semblables.*

1ᵉʳ *Moyen.* En considérant deux côtés homologues quelconques, on détermine le lieu des points des *distances proportionnelles* (nº 2395) et le lieu des *divisions proportionnelles;* le point commun aux deux droites répond à la question (nºˢ 2401 et 2405).

2ᵉ *Moyen.* On prolonge deux côtés homologues quelconques AB, A'B'; soit C le point de concours, et l'on décrit les circonférences ACA', BCB'; le second point commun C' aux deux circonférences est le *point double* (nºˢ 2402 et 2405).

**2504.** *Remarques.* 1º Le premier moyen s'applique indifféremment aux figures *directement* ou *symétriquement* semblables; le deuxième moyen ne s'applique qu'aux figures directement semblables.

2º Les constructions se simplifient lorsque les segments ont une extrémité commune : le lieu des points des distances proportionnelles est la symédiane; les circonférences du second moyen deviennent les *circonférences adjointes* des côtés de l'angle formé par les deux droites homologues.

3º La question a été traitée avec tous les développements qu'elle comporte (voir nºˢ 1527 et suivants).

### Théorème 1090.

**2505.** *Deux figures semblables, situées dans un même plan, peuvent être considérées comme étant deux positions d'une même figure invariable de forme, mais variable de grandeur et de position.*

Il y a lieu d'étudier séparément les figures directement semblables et les figures symétriquement semblables.

**2506. Figures directement semblables.** Le point double S est le centre permanent de similitude d'une figure donnée ABC dont les sommets décrivent des lignes semblables (nºˢ 1125, 1281 à 1284), afin de devenir A'B'C'.

Pour l'étude du mouvement, il suffit de considérer le déplacement d'un des sommets de A, par exemple, et l'inclinaison d'une droite AB, par rapport au rayon vecteur SA.

**2507. Trajectoire.** 1º *Ligne droite.* Le sommet A peut décrire la droite AA'; on retombe sur une question connue (nºˢ 2476 et suivants), car le triangle, relié au centre S par SA, SB, SC, tourne autour du point double pendant que chaque sommet glisse sur une droite.

L'inclinaison de AB sur le rayon SA varie d'une position à la suivante, car le rayon SA peut être perpendiculaire à AA', et tendre aussi à lui devenir parallèle si A'B'C' s'éloignait indéfiniment.

**2508.** 2° *Spirale d'Archimède.* En prenant pour trajectoire un arc de spirale d'Archimède ayant S pour pôle, et A, A' pour positions déterminées, les côtés de la figure ABC varient de grandeur proportionnellement à l'angle de rotation : ainsi pour $ASA' = \omega$ et une position particulière A''B''C'' correspondant à l'angle $\frac{m}{n} \cdot \omega$ décrit par le rayon vecteur SA devenu SA'', on aurait :

$$SA'' = SA + \frac{m}{n}(SA' - SA),$$

et de même, $$A''B'' = AB + \frac{m}{n}(A'B' - AB).$$

L'accroissement de la figure semblable serait donc en rapport avec la rotation effectuée; mais l'inclinaison de A''B'' sur SA'' n'est pas égale à celle de AB sur SA, car la spirale d'Archimède coupe ses rayons vecteurs successifs sous des angles variables.

**2509.** 3° *Spirale logarithmique.* La propriété caractéristique de cette courbe étant que la tangente forme un angle constant avec le rayon vecteur du point de contact (voir *Exercices de Géométrie descriptive,* n^os 1217-1219), il en résulte que la figure mobile est constamment dans une même

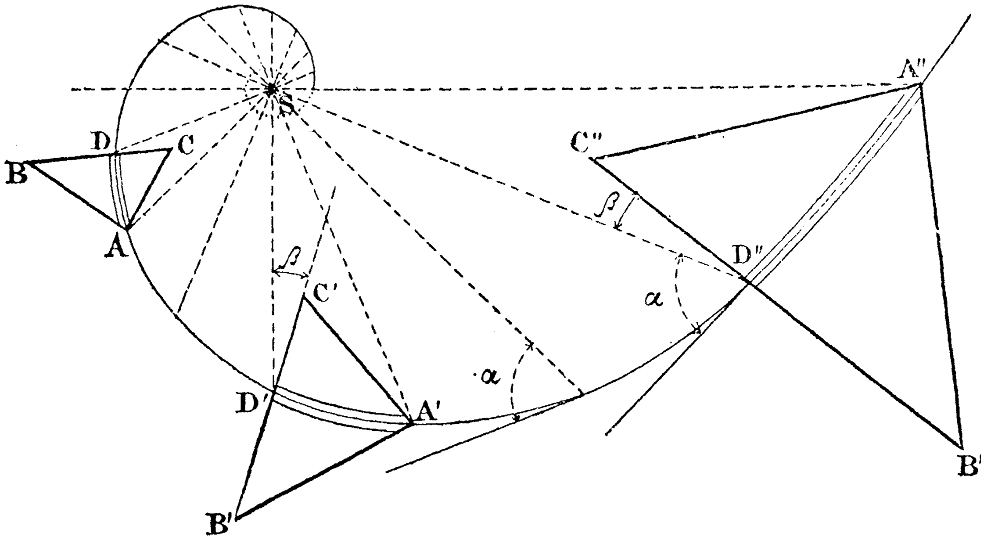



Fig. 1546.

situation donnée par rapport à sa trajectoire. En d'autres termes, en considérant la trajectoire comme faisant corps avec la figure donnée elle-même, on peut dire que l'ensemble de la figure plane se dilate dans sa rotation autour du centre S, mais en restant semblable à elle-même dans toutes ses positions.

**2510.** *Remarque.* De même que la droite et la circonférence sont les seules lignes planes qu'on puisse faire glisser sur elles-mêmes, la *spirale logarithmique* est la seule courbe plane qui reste semblable à elle-même en chacune de ses parties, et qui puisse glisser sur elle-même dans la dilatation indiquée ci-dessus. En un mot, cette courbe est pour les figures variables de position et de grandeur, mais invariables de forme, ce qu'est la circonférence pour les figures invariables de grandeur, mais variables de position.

**Note.** La *spirale logarithmique* est due à DESCARTES (*Intermédiaire des mathématiciens*, 1900, page 94, n° 1501; d'après Paul TANNERY).

**Théorème 1091.**

**2511.** *Lorsque deux figures d'un même plan sont symétriquement semblables, on peut les faire coïncider en faisant décrire à l'une d'elles une spirale logarithmique conique, et en dilatant les lignes de la figure mobile dans le même rapport que les rayons correspondants de la spirale.*

La *spirale logarithmique conique* est la ligne, autre que le cercle, qui rencontre les génératrices d'un cône de révolution sous un angle constant. La projection de la courbe conique sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône est une *spirale logarithmique* proprement dite; il en est de même de la transformée obtenue en développant le cône. (Voir *Exercices de Géométrie descriptive*, nos 1217 à 1219.)

On prend pour axe du cône l'axe de symétrie des figures semblables (n° 2502).

Le *point double* est le sommet du cône; chaque rayon tel que SA est la génératrice du cône sur lequel le point A décrira la courbe pour passer de A en A'; en même temps le point B décrit une courbe analogue sur le cône engendré par SB, etc., et la *figure mobile* reste constamment semblable à elle-même.

**2512.** *Remarques.* 1° On peut faire coïncider deux figures symétriquement égales, placées d'une manière quelconque dans le plan qui les contient, en imprimant à l'une d'elles un mouvement hélicoïdal (hélice cylindrique).

2° La projection sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône, du système des figures mobiles et de la spirale logarithmique conique, ramène à la question déjà étudiée (n° 2509) lorsque les deux figures sont directement semblables.

**2513. Note.** C'est le théorème précédent (n° 2511), lorsque les figures sont symétriquement semblables, qui s'est présenté le premier et qui nous a conduit à faire choix de la spirale logarithmique conique pour trajectoire de la figure mobile; enfin il a conduit aussi au théorème général ci-après.

Une première communication de ces questions a été faite au *Journal de mathématiques spéciales* de M. DE LONGCHAMPS, 1895, p. 12; avec rectification ultérieure pour le lemme énoncé dans ce même article, p. 159.

E. CESARO a posé ensuite une question pour une courbe analogue dans l'espace. Il a répondu lui-même sous l'anagramme de ROSACE. (*I. M.*, 1894, p. 92, q. 166; puis 1896, p. 14. — Voir aussi *E. de G. Descriptive*, édition de 1909, p. 822, n° 1219, 2°.)

**Théorème 1092.**

**2514.** *Deux figures semblables à trois dimensions, correspondant à des figures égales par superposition* (à l'exclusion des solides égaux par symétrie), *peuvent être considérées comme étant deux positions différentes d'une même figure, restant semblable à elle-même, pendant que chacun de ses points décrit une spirale logarithmique conique.*

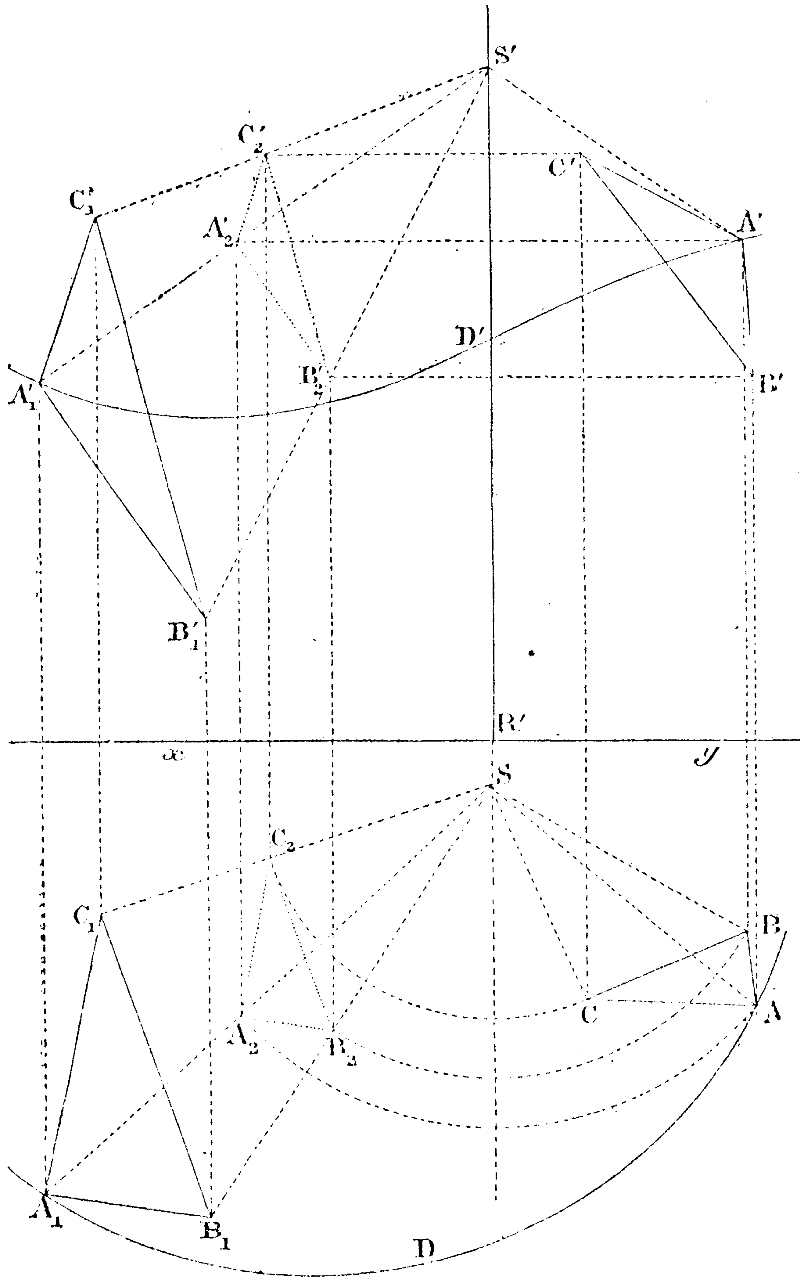



Fig. 1547.

Considérons deux faces planes homologues $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, placées d'une manière quelconque dans l'espace. On sait qu'on peut toujours déterminer un plan sur lequel les projections orthogonales des figures planes semblables $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ soient elles-mêmes des *figures directement semblables* (nos 1846 **a** à 1846 **d**) ; néanmoins, il est utile d'examiner successivement les deux cas principaux qui peuvent se présenter.

**1er cas** (fig. 1547). Les projections ABC, $A_1B_1C_1$ sont des figures directement semblables (1846 **a**).

Prenons ce plan de projection pour plan horizontal, déterminons le point double S (n° 1527); par une rotation convenable, amenons ABC en $A_2B_2C_2$; sur tout plan vertical, les projections verticales $A'_1B'_1C'_1$ et $A'_2B'_2C'_2$ seront homothétiques, et S, S' sont les projections du point double de l'espace.

La spirale logarithmique plane $ADA_1$ est la projection horizontale de la spirale logarithmique conique que le point (A, A') décrit pour arriver en ($A_1$, $A'_1$), et $A'D'A'_1$ est la projection verticale de la même courbe. La droite (SR, R'S') est l'axe du cône.

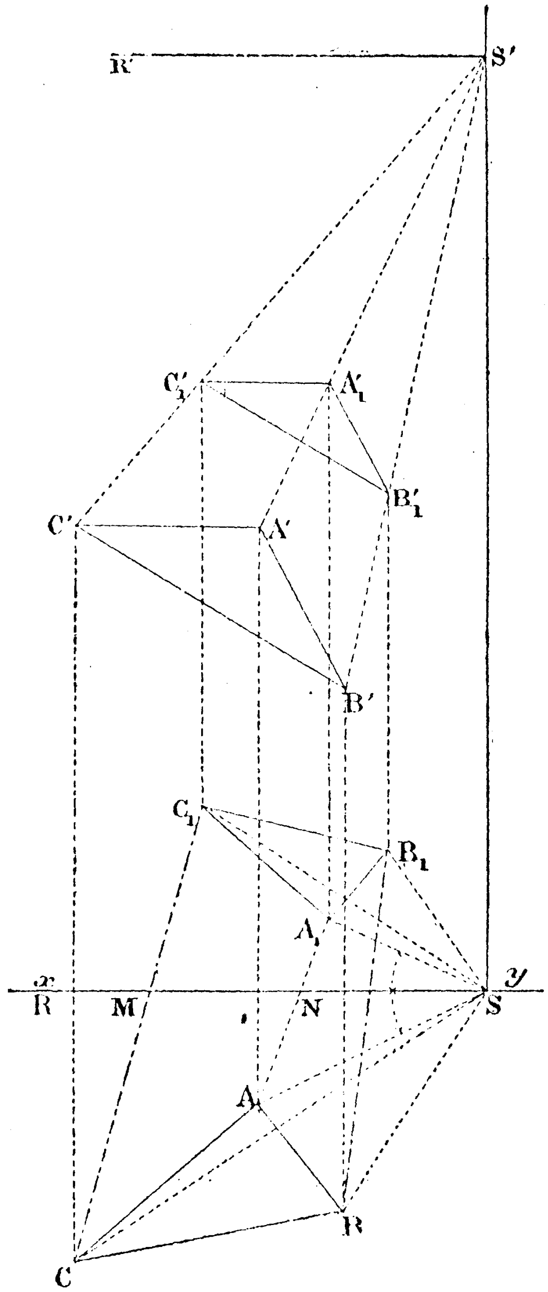


Fig. 1548.

**2515. 2e cas** (fig. 1548). Les premières projections obtenues ABC, $A_1B_1C_1$ sont inversement semblables; mais sur un plan convenable, perpendiculaire au premier considéré, on a deux figures directement semblables (n° 1846 **c**).

L'axe de symétrie des projections horizontales étant pris pour ligne de terre, les projections verticales donnent S' et, par suite, S; d'ailleurs pour obtenir $xy$, connaissant ABC, $A_1B_1C_1$, il suffit de diviser $AA_1$, $CC_1$ en parties proportionnelles aux côtés homologues AC, $A_1C_1$; enfin, le point S peut être déterminé directement (n° 1527 **c**).

L'axe du cône est la droite (SR, S'R') parallèle à la ligne de terre; chaque point tel que ($A_1$, $A'_1$) décrit une spirale logarithmique conique autour de l'axe (SR, S'R') pour venir en (A, A').

**2516.** *Remarques.* 1° Ainsi que l'indique l'énoncé, on ne doit considérer que des figures à trois dimensions, telles que ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ (fig. 1549), qui correspondent à des solides égaux par superposition; alors, dans le mouvement hélicoïdal de $A_1B_1C_1D_1$ autour de l'axe (SR, S'R', fig. 1548), le point $D_1$, qui est en saillie (fig. 1549), vient coïncider avec son homologue D, qui est en creux, lorsque $A_1B_1C_1$ dilaté coïncide avec ABC.

2° Les questions précédentes et notamment le *théorème de Chasles* relativement au mouvement hélicoïdal d'une figure qui se déplace dans l'espace, pour arriver à coïncider avec son égale, ne sont que des cas particuliers du théorème précédent (no 2514).

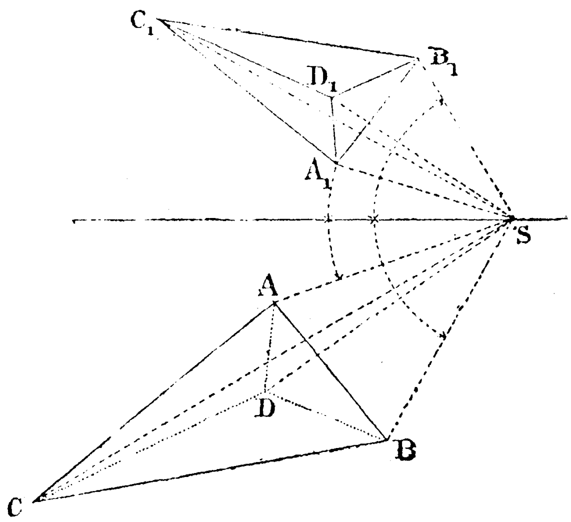



Fig. 1549.

3o Pour le centre et l'axe de similitude des deux polyèdres semblables, on peut voir aussi une note de M. A. Goulard, professeur au lycée de Marseille. (*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1898, p. 132, no 1178.)

4o *On peut présenter l'étude des deux cas étudiés ci-dessus* (nos 2514 et 2515) *comme il suit :*

Deux figures planes semblables, $ABC...$, $A_1B_1C_1...$, situées dans des plans concourants $P$ et $P_1$, participent à la fois aux propriétés des figures d'un même plan, *directement* et *inversement semblables ;* ainsi :

Les points $A_2$, $B_2$, $C_2...$, qui divisent $AA_1$, $BB_1$, $CC_1...$, en segments additifs dans le rapport de similitude, sont dans un même plan $Q$ ; en projetant $A_2$, $B_2...$ sur ces plans $P$ et $P_1$, par des droites parallèles à l'une des bissectrices de l'angle plan qui mesure le dièdre $PP_1$, on obtient des projections directement semblables aux figures données.

De même pour les points qui divisent $AA_1$, $BB_1$, $CC_1...$ en segments soustractifs.

Soit $R$ le plan qui contient les points de division ; les traces $q$, $r$, des plans $Q$ et $R$ sur $P$ sont orthogonales entre elles ; il en est de même des traces $q_1$ et $r_1$ sur $P_1$. Les plans $Q$ et $R$ se coupent suivant une droite parallèle aux projetantes qui donnent des figures directement semblables $abc$ et $A_1B_1C_1$.

Pour démontrer cet intéressant théorème, il suffit de projeter $ABC...$ sur le plan $P_1$, à l'aide de parallèles aux bissectrices de l'angle plan qui mesure le dièdre $PP_1$. L'une des projections, $abc$, par exemple, est directement semblable à $A_1B_1C_1...$, tandis que l'autre projection $a'b'c'...$ est inversement semblable à la même figure $A_1B_1C_1...$ De même pour les projections sur le plan $P$ (no 1846 a).

Après avoir étudié les figures semblables situées dans deux plans quelconques, on peut passer à l'étude de deux figures inversement semblables à trois dimensions, disposées d'une manière quelconque dans l'espace ; ainsi *lorsque deux figures à trois dimensions sont inversement*

*semblables, les points qui divisent* $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ ... $LL_1$ *en segments additifs, dans le rapport de similitude, sont dans un même plan.*
(Éléments de Géométrie, nº 1101.)

## Trois figures directement semblables.

**2517. Note.** L'étude du système formé par trois figures directement semblables est une des parties les plus intéressantes de la *Géométrie récente du triangle*. Nous avons rencontré, à notre insu, quelques-uns des cas les plus élémentaires en généralisant les questions relatives aux points et aux cercles de Brocard (nºˢ 2445, 2449), tandis que ces dernières propriétés peuvent être déduites, comme cas particuliers, de la théorie de trois figures directement semblables.

Conduit à ne pas développer davantage un recueil d'*Exercices géométriques*, déjà fort volumineux, nous nous bornerons à indiquer les principales sources auxquelles on pourrait recourir pour étudier le système de trois figures directement semblables.

*Mathesis*, 1881, p. 73. Très bel article de M. TARRY, suivi d'une importante *note*, par M. NEUBERG.

Cette étude semble avoir été le point de départ des travaux contemporains sur la question, bien qu'elle ait été précédée, comme il arrive souvent, par des recherches qui avaient passé inaperçues : tel est le cas du remarquable *Mémoire*, publié en 1872, par M. GROUARD, capitaine d'artillerie (*Nouvelle Correspondance mathématique*, 1880. p. 321 ; voir aussi, même volume, une lettre de M. NEUBERG, p. 219).

M. TARRY a généralisé les premiers résultats obtenus (*Mathesis*, 1886, pp. 97, 148, 196). L'auteur de ces articles indique qu'il a mis à profit les travaux de MM. TUCKER, CASEY, M'CAY, NEUBERG, sur les *polygones harmoniques*.

Les figures semblables ont donné lieu à un beau travail de M. CASEY dans son ouvrage : *A Sequel to the first six books of Euclid* (6ᵉ édit., 1892, p. 199 et suivantes). Le savant auteur y expose les travaux antérieurs et les complète par ses propres découvertes.

Un bon résumé se trouve dans le traité tout récent de M. LACHLAN, professeur au collège de la Trinité, à Cambridge : *An Elementary Treatise on modern pure Geometry*, 1893. (Voir chap. IX, p. 128.)

Un travail, plus complet que les précédents, sur le système de trois figures directement semblables est celui de M. NEUBERG : *Mémoire sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe, et sur le système de trois figures directement semblables* (1890, §§ VI et VII, p. 49).

Nous terminons avec le regret de n'avoir pas pu utiliser, autant que nous l'aurions voulu, les découvertes si nombreuses et si intéressantes qui constituent la *Géométrie récente du triangle*.

## Questions de l'Intermédiaire des mathématiciens.

**2518. Problème.** — *Quelles sont les expressions de la surface et du volume déterminés dans un cône droit à base circulaire par une section elliptique?*

3910 (**1911**, 193) (E.-N. BARISIEN).

Pour les déterminer, on s'appuie sur les deux théorèmes suivants : 1° La projection de la section sur la base du cône est une ellipse ayant pour foyer le pied de l'axe (*Éléments de Géométrie*, n° 855). La surface conique, du sommet jusqu'à la section, est à la surface latérale du cône dans le rapport de l'ellipse projection au cercle de base (*Exercices de Géométrie*, n° 173).

Soient donc : $r$, $h$, $g$, le rayon, la hauteur et la génératrice du cône;

$$\frac{\text{surface conique}}{\pi r g} = \frac{\text{ellipse projection}}{\pi r^2};$$

d'où
$$\text{surface conique} = \text{ellipse projection} \times \frac{g}{r}.$$

*Volume.* Soient $k$, $l$, $m$, $n$ la perpendiculaire abaissée du sommet sur la section, la partie de l'axe comprise entre le sommet et la section, les perpendiculaires abaissées sur une génératrice, du centre du cercle de base et du point où l'axe rencontre la section.

$$V = \text{section} \times \frac{k}{3} = \text{surface conique} \times \frac{n}{3} = \text{ellipse projection} \times \frac{l}{3}.$$

On sait que le volume du cône $= \pi r^2 \cdot \frac{h}{3} = \pi r g \times \frac{m}{3}$.

**2519. Problème.** — *On coupe un cylindre droit à base circulaire par un plan passant par l'axe du cylindre. Quelle est la position du centre de gravité : 1° du volume; 2° de la surface de ce demi-cylindre? — Même question pour un cône droit à base circulaire.*

3914 (**1911**, p. 194) (E.-N. BARISIEN).

1° *Demi-cylindre.* Soient $r$ le rayon de base, $h$ la hauteur, G le centre de gravité du demi-cercle, $g$ le centre de gravité de la demi-circonférence, O le centre du cercle équidistant des deux bases.

On sait que $\quad OG = \frac{4r}{3\pi} \quad (1); \qquad Og = \frac{2r}{\pi} \quad (2).$

La formule (1) donne directement la position du centre de gravité du volume du demi-cylindre, et la formule (2) celle du centre de gravité de la surface courbe du même corps. — Si la surface comprend en outre les deux bases du demi-cylindre, le centre de gravité de ces deux demi-cercles sera en G ; pour avoir le centre de gravité $\gamma$ de l'ensemble, il faudra diviser le segment $g$G en parties inversement proportionnelles à $\pi r h$ et à $\pi r^2$, c'est-à-dire à $h$ et à $r$. On peut aussi prendre les moments des surfaces appliquées en $g$ et G, par rapport au point O, ce qui donne directement O$\gamma$. — Si l'on considère la surface totale, il faut y comprendre le rectangle diamétral $2rh$, dont le centre de gravité est en O, et pour avoir le centre de gravité $\delta$ de la surface totale, il faudra diviser $\gamma$O en parties inversement proportionnelles à $\pi r(r+h)$ et à $2rh$, ou à $\pi(r+h)$ et à $2h$.

2° *Demi-cône.* Question assez analogue à la précédente ; en se rappelant que pour le volume le centre de gravité serait aux $\frac{3}{4}$ à partir du sommet sur la ligne SG qui joindrait le sommet S au point G du demi-cercle de la base, puisque pour la surface courbe du demi-cône, le centre de gravité serait aux $\frac{2}{3}$ à partir du sommet sur la droite S$g$ qui joindrait le sommet au point $g$ de demi-circonférence de base.

**2520. Problème.** — *Mener une droite qui divise un triangle en deux parties équivalentes et isopérimétriques.*

3794 (**1910**, 268) (G. Lemaire).

Toute droite menée par le centre I du cercle inscrit au triangle ABC, divise la surface en deux parties qui sont entre elles dans le même rapport que leurs périmètres (sauf la sécante commune). Dès lors, par le point I, situé dans l'angle A, menons une droite qui divise l'aire du triangle en deux parties équivalentes (*E. de G.*, n° 1618). Pour chaque angle, on peut avoir deux droites, en tout six, ainsi qu'on le constate pour le triangle équilatéral, qui a six solutions superposées deux à deux : les trois hauteurs.

La solution est analogue pour un polygone circonscriptible, en considérant l'angle formé par deux côtés quelconques, qu'on prolonge au besoin; mais on doit rejeter toutes les sécantes qui ne rencontreraient pas les côtés de l'angle choisi dans les limites du périmètre même du polygone; ainsi le quadrilatère circonscriptible, qui n'a pas de côtés parallèles, a douze solutions; mais quatre d'entre elles, au moins, sont à rejeter.

**Note.** *L'I. M.*, 1911, p. 139 à 143, donne diverses réponses à la question posée; voir les articles de MM. Welsch, Barbarin, E. Malo et la note de N. Plakhovo. — Dans le second article rappelé, il faut remplacer *parabole* par *hyperbole*.

# LEXIQUE GÉOMÉTRIQUE

## Droites. — Points. — Courbes. — Polygones.

### Ligne droite.

Numéros.

*Axe d'homologie* (PONCELET). Lieu des points d'intersection des droites correspondantes de deux figures homologiques. 1249.

*Axe d'homothétie.* Lignes homologues superposées de deux figures semblables. 212.

*Axe radical* (GAULTIER DE TOURS). Lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles. 1265 **a**.

*Cathètes.* Côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle. 1151.

*Cévienne* (A. POULAIN). Droite qui joint un sommet d'un triangle à un point du côté opposé : ce mot vient de *Céva* et d'un théorème bien connu ; on dit aussi *transversale angulaire* (J. NEUBERG). 167 **a** et 913

*Droite antibissectrice.* Droite isotomique de la bissectrice d'un angle ; elle divise la base en segments inversement proportionnels aux côtés adjacents. 2422, 3°.

*Droite de d'Alembert.* Droite de trois centres de similitude de trois circonférences. 293 **a**.

*Droite de l'infini.* Corde commune à deux cercles, mais rejetée à l'infini, tandis que l'autre corde commune, l'axe radical, est à distance finie. 1265 **a**.

*Droite de Lemoine.* Polaire du point de Lemoine par rapport au cercle circonscrit au triangle. 2354.

*Droite de Newton.* Droite qui passe par les points milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet ; — ou *Ligne de Gauss.* 1233 **a**.

*Droite de Pascal*, ou *Pascale.* Droite des trois points de concours des côtés opposés d'un hexagone inscrit à une conique. 293 **b**, 293 **h** et 1237 **a**.

*Droite de Simson.* Droite qui passe par les pieds des perpendiculaires abaissées sur les côtés d'un triangle, d'un point quelconque du cercle circonscrit. 22, 762 à 767, 1212 **a**, 1234, 1276 **b** et 1277 **b**.

*Droite des distances proportionnelles* (G.-M.). Lieu des points dont les distances à deux segments rectilignes sont proportionnelles à ces segments. 2395.

*Droite des divisions proportionnelles* (G.-M.). Lieu des points tels que les perpendiculaires abaissées de chacun d'eux sur deux segments rectilignes, divisent ces longueurs en parties proportionnelles. 2396.

*Droite des moments égaux* (G.-M.). Lieu des points tels que le produit d'un segment rectiligne par sa distance au point considéré, égale le produit de l'autre segment par sa distance au même point. 2406.

*Droite des points des segments inverses* (G.-M.). 2416.

*Droite des milieux* (CHASLES). Lieu du point milieu des droites qui joignent deux à deux les points équidistants, pris sur les côtés d'un angle, à partir des origines données sur ces mêmes côtés. 771 **i**, 1091 **a** et 1358.

*Droite d'Euler.* Ligne qui joint l'orthocentre, ou point de concours des hauteurs d'un triangle, au centre du cercle circonscrit. 28, 293 et 1120 **a**.

*La droite d'Euler* est aussi le lieu des *points de Franke.* 1242 **o**.

*Droite de Housel.* Ligne qui joint le centre du cercle inscrit d'un triangle donné au centre du cercle inscrit du triangle médian. 1123.

Numéros.

*Droite de Wallace.* Pour l'historique, voir deux notes de M. ARCHIBALD, dans *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. XXVIII (1909-1910) nommée le plus souvent *droite de Simson.* 23 **a**.

*Droites antiparallèles* (ARNAUD). Terme connu. Ce sont des *droites anticlines* par rapport à une même droite. 28-3°, 471 et 2291.

*Droites inverses* (capitaine MATHIEU). Voir droites isogonales. 2307.

*Droites isoclines* (G.-M.). Droites partant d'un même point et également inclinées sur les côtés d'un polygone, et dans le même sens. 2458.

*Droites isogonales* (NEUBERG). Céviennes partant d'un sommet d'un triangle et également inclinées sur la bissectrice issue du même sommet. 646, 1118 et 2307.

*Droites isotomiques* (DE LONGCHAMPS). Céviennes menées d'un même sommet d'un triangle à des points isotomiques situés sur le côté opposé; on les nomme aussi *droites réciproques.* 765 **a**, 1231 **a**, 1242 **d** et 2329.

*Ligne de Gauss* d'un quadrilatère. Droite qui passe par les points milieux des trois diagonales (*Mathesis*, 1906, p. 143). Voir *Droite de Newton.* 1233 **a**.

*Médianes antiparallèles* (LEMOINE). Voir *Symédianes.* 899 **a**.

*Médianes d'un quadrilatère.* Droites qui joignent deux à deux les points milieux des côtés opposés du quadrilatère, ou des deux diagonales. 548 **a**.

*Médiatrices* (NEUBERG). Perpendiculaires élevées au milieu des côtés d'un triangle. 443.

*Pascale.* Droite des points de concours des côtés opposés d'un hexagone inscrit. 1237 **a**.

*Philo's Line*, ou *droite de Philon.* Plus courte distance menée par un point entre les côtés d'un angle. 1615 **a**.

*Podaires obliques*, ou même *Normales obliques.* Voir *Droites isoclines.* 2458.

*Ponctuelle* (CREMONA). Suite de points en ligne droite. 1150 **e** et 1298 **a**.

*Symédiane* (D'OCAGNE). Droite symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice issue du même sommet. 66, 148, 899, 1102, 1603, 2068 **d**, 2294, 2298, 2305, 2331 à 2351.

*Symédiane extérieure* (THIRY). Droite extérieure au triangle, ayant plusieurs des propriétes de la symédiane de même sommet. 2338.

*Transversales angulaires* (J. NEUBERG). Voir *Cévienne.* 77.

*Transversales réciproques* (DE LONGCHAMPS). Droites qui joignent les points isotomiques du côté d'un triangle au sommet opposé 1231 **a**.

## Points.

*Barycentre.* Centre de gravité de la surface d'un triangle. 463.

*Centre des moyennes distances de plusieurs points.* 463, 463 **a**.

*Centre d'homologie* (PONCELET). Point de concours des droites qui passent par deux points correspondants de deux figures homologiques. 1249.

*Centre d'homothétie* de deux figures homothétiques. 212.

*Centre d'inversion* de deux figures, ou *Pôle d'inversion.* 217.

*Centre de similitude.* Terme connu. Sa détermination. 1146 et 1527.

*Centres isodynamiques* (NEUBERG). Points de concours des trois cercles d'Apollonius d'un triangle. 1546 **e**.

*Centres isogones.* Points de concours des cercles de Torricelli d'un triangle, c'est-à-dire des cercles circonscrits aux triangles équilatéraux construits sur chaque côté de ce triangle, tous à l'extérieur ou tous sur le triangle donné. 755.

*Centre permanent de similitude.* Centre commun de similitude de deux figures inscrite et circonscrite, lorsque la figure inscrite varie de position et de grandeur, mais en restant semblable à elle-même. 1098, 2476 et 2487.

*Groupe orthocentrique* (DE LONGCHAMPS). Nom donné aux quatre points suivants : sommets A, B, C et orthocentre H d'un triangle. La figure formée est aussi nommée : *Quadrangle orthocentroïdal.* 292 **m** et 2183 **d**.

*Orthocentre* (BESANT). Point de concours des hauteurs d'un triangle. 28, 29, 292 **m** et 664 **a**.

*Point de Brianchon.* Point de concours des diagonales d'un hexagone circonscrit à une conique. 293 **h** et 1237 **a**.

*Point de Brune* (G. LEMAIRE). Point d'un quadrilatère quelconque, tel que les les lignes qui le joignent aux points milieux des côtés divisent la surface en quatre parties équivalentes. 1574.

Numéros.

*Points de Terquem* (CANDIDO DE PISE). Points déterminés par deux couples de trois céviennes concourantes dont les six pieds sont concycliques. 1251 **a**.

*Points d'Euler*, ou *points eulériens* (G.-M.). Points situés sur les hauteurs d'un triangle à égale distance de l'orthocentre et de chaque sommet. 721 **a** et 725.

*Points d'un groupe de six*. Points déduits l'un de l'autre en considérant les six arrangements des trois coordonnées angulaires d'un point donné. On pourrait considérer aussi des coordonnées barycentriques. 2275 **i**.

*Points inverses* (capitaine MATHIEU.) Voir *Points isogonaux*. Points dont les coordonnées normales sont inverses; ils sont sur des droites isogonales. 2275 **b**, 2307.

*Points inverses* ou *points réciproques*. Points correspondants de deux figures inverses; dans l'*inversion* proprement dite. 217.

*Points isocycliques* (BERNÈS). Voir *Inversion symétrique*. 1342 **k**.

*Points isogonaux* (NEUBERG). Points déterminés par deux couples de céviennes isognales, chaque couple étant formé par trois droites concourantes. Les coordonnées normales de ces deux points sont inverses. 1344 **a** et 2307.

*Points isotomiques* (DE LONGCHAMPS). Points situés sur un des côtés d'un triangle à égale distance du point milieu de ce même côté. Voir *Points réciproques de Longchamps*. 1231 **a**, 1242 **d**.

*Points jumeaux* (SCHOUTE). Points déterminés par deux couples de trois cercles qui se coupent en un même point, passent par deux des sommets d'un triangle, et lorsque chaque cercle d'un groupe est symétrique d'un cercle de l'autre groupe. 1099.

*Points limites de Poncelet*. Points communs aux cercles qui coupent orthogonalement deux cercles donnés. 232 et 1268.

*Points permutants* (AURIC). Groupe de trois points qui se déduisent l'un de l'autre par une permutation tournante des coordonnées barycentriques de l'un d'eux. 2275 **h**.

Les *Points associés* de REY PASTOR de Madrid sont identiques aux précédents.

*Points réciproques* (DE LONGCHAMPS). Points déterminés par deux couples de céviennes isotomiques ou réciproques, chaque couple étant formé par trois droites concourantes; points dont les coordonnées barycentriques sont inverses. 1242 **d** et 2275 **c**.

*Points remarquables*. Points jouissant de diverses propriétés; tels sont : le centre du cercle circonscrit O, l'orthocentre H, le centre de gravité du triangle G, le point de LEMOINE K, le centre du cercle inscrit I, les points de BROCARD, de GERGONNE, de NAGEL, etc.

*Point symédian*. Nom donné par quelques auteurs anglais au point de Lemoine, ou point de concours des symédianes. 2299.

*Pôle d'inversion* ou *centre d'inversion*. Point commun des rayons vecteurs de deux figures inverses. 217 et 1203 **a**.

## Cercles.

*Cercle d'Adams*. Cercle qui passe par les six points que déterminent sur les côtés d'un triangle les droites menées par le point de Gergonne, perpendiculairement aux bissectrices intérieures, ou menées parallèlement aux côtés du triangle des contacts du cercle inscrit avec les côtés du triangle donné. 2394.

*Cercle de Brocard*. Cercle qui passe par les points de Brocard d'un triangle et par le centre du cercle circonscrit. 2429 et 2437.

*Cercle conjugué à un triangle*. (*J. M. S.*, 1892, p. 116, n° 222; *J. M. E.*, 1895, p. 218.) 1154.

*Cercle de Furhmann* (professeur à Kœnigsberg). Cercle décrit sur la droite qui joint l'orthocentre au point de Nagel, cette droite étant prise pour diamètre (*Mathesis*, 1890, p. 105, et J. M. E., 1891, p. 57). 1100 **a**.

*Cercle de Miquel d'un quadrilatère*. Cercle qui passe par les centres des quatre circonférences circonscrites aux quatre triangles d'un quadrilatère. 711, 711 **b**, 712 **b**.

*Cercle de Monge*. Voir *Cercle orthoptique d'une conique*. 2094.

*Cercle de Poncelet*. Lieu du sommet d'un angle constant $\alpha$ dont un côté passe par le foyer F d'une ellipse et dont l'autre côté est tangent à cette conique. 2176,3°.

*Cercle des distances proportionnelles*, ou *Cercle de similitude* (NEUBERG). Cercle décrit sur EI pris pour diamètre, en désignant par E, I les centres extérieur et intérieur de similitude. 1150 **n**.

## Coniques.



## Courbes diverses.



Ces diverses courbes sont citées assez fréquemment dans les *Exercices de Géométrie descriptive* (4e édition, en 1909).

## Triangles et autres polygones.

Numéros.

*Quadrilatère inscriptible et circonscriptible.* A donné lieu à de nombreuses études. Une des plus intéressantes et des plus complètes est sans contredit celle du colonel WELSCH. (*I. M.*, 1909, p. 36, n° 3072.) 1751 **a** et **b**.

*Quadrilatère orthodiagonal.* Quadrilatère dont les diagonales sont à angle droit : on le nomme *pseudo-carré* lorsque les diagonales sont égales. 1198 **a**.

*Quadrilatère quelconque.* Questions principales : 542 à 555, 800, 817 **a**, 1036 à 1050, 1090, 1203 à 1206, 1574, 1613.

*Rhomboïde.* Quadrilatère orthodiagonal admettant une de ses diagonales pour axe de symétrie. 1198 **a**.

*Trapèze.* 110, 365, 1041, 1202, 1273, 1365 à 1371, 1436 à 1441, 1528, 1650.

*Pentagramme de Miquel* et ses propriétés. 737 **b**.

*Hexagone.* 292, 293 **b**, 1017 **c**, 1088, 1553.

*Hexagone de Brianchon.* Hexagone circonscrit à une conique ; les trois diagonales sont concourantes. 248 et 2121.

*Hexagone de Catalan.* Hexagone inscriptible ayant pour sommets les projections des pieds des hauteurs d'un triangle sur les côtés de ce même triangle ; il est incontestable que CATALAN a précédé TAYLOR ; mais lui-même a été devancé par EUTARIS. 2391.

*Hexagone de Lemoine.* Nom donné par CASEY à l'hexagone inscriptible qui correspond au *premier cercle de Lemoine*. 2379.

*Hexagramme mystique,* ou *hexagramme de Pascal.* Hexagone inscrit dans une conique; les trois points d'intersection des côtés opposés sont en ligne droite. 248, 1117 **c**, 1251 **c** et 2120.

*Ligne de Tarry.* Ligne polygonale admettant le *point de Lemoine* et les *points de Brocard*. 2456.

*Figures complémentaires,* d'après PONCELET. 75, 85 **b**.

*Figures homologiques* de PONCELET. 177 **b**.

*Figures inverses.* Transformation par inversion, ou par rayons vecteurs réciproques. 217.

*Figure de Vecten.* Ensemble formé par un triangle et les trois carrés construits sur chaque côté, tous en dehors du triangle, ou tous à l'intérieur; mais bien que la détermination du point T soit de VECTEN, la considération des centres des carrés est due à M. NEUBERG. (*N. C.*, 1878, t. IV, p. 142.) 1773 **l**.

*Figures homothétiques.* Définition bien connue. 206 **a**, 1130.

*Figures isoclines.* Figures telles que les côtés de chacune d'elles sont des lignes isoclines par rapport aux côtés de l'autre. 2459.

*Tétraèdre équifacial.* Ayant les faces égales, en d'autres termes, ayant les arêtes opposées égales deux à deux.

*Tétraèdre orthogonal.* Tétraèdre dont les arêtes opposées sont à angle droit l'une de l'autre. 72 et 1838.

*Conoïdes, Domoïdes, Équidomoïdes.* 1979 **d**.

*Onglet cylindrique, Voûte en arc de cloître.* 1979 **c**.

## Coordonnées. — Formules. — Inverseurs.

*Coordonnées angulaires.* Les trois angles sous lesquels, d'un point donné, on voit les côtés du triangle de référence. 2276.

*Coordonnés barycentriques.* Grandeurs proportionnelles aux aires des trois triangles que l'on obtient en joignant un point donné aux sommets du triangle de référence. 2269.

*Coordonnées normales.* Grandeurs proportionnelles aux distances d'un point donné, aux trois côtés du triangle de référence. 2263.

*Coordonnées trilinéaires.* Nom générique donné aux coordonnées normales et aux coordonnées barycentriques. 2262.

*Coordonnées tripolaires.* Grandeurs proportionnelles aux distances d'un point donné aux trois sommets d'un triangle. 2288.

*Formule de Carnot.* La somme des distances de l'orthocentre aux trois côtés d'un triangle égale $R + r$ ou $d' + d'' + d''' = R + r$. 737 **a**.

*Formule de Lemoine.* Déduite de la précédente par transformation continue

$$2d' = 2R + r - r', \quad \text{d'où } \cos A = \frac{2R + r - r'}{2R}. \qquad 737\ \mathbf{a}.$$

## Questions diverses.

Numéros.

*Inversion.* Mode de transformation, nommé jadis *transformation par rayons vecteurs réciproques.* Voir, ci-dessus, *Figures inverses.* 217 et 218 **a.**

*Inversion isogonale.* Mode de transformation par l'emploi des *céviennnes isogonales* de NEUBERG, nommées aussi *droites inverses* du capitaine MATHIEU. Les coordonnées normales des deux points isogonaux sont inverses. 2306.

*Inversion symétrique* de BERNÈS. Mode de transformation jouissant de plusieurs des propriétés de l'*inversion* par rayons vecteurs réciproques à produit constant. 1175 **b** et 1342 **a.**

*Involution.* Voir *E.* de *G.* 1221.

*Lunules d'Hippocrate.* Surfaces planes, à périmètre curviligne, évaluées par HIPPOCRATE. 1577, 1578 et 1768 **a.**

*Méthodes des sections comparées.* Méthode pour évaluer les volumes, bien connue maintenant par suite des *Éléments de géométrie,* F. J. 400 **b** et 1935.

*Porismes d'Euclide.* Énoncés de théorèmes, sous forme plus ou moins incomplète. 1258.

*Projection conique,* ou *projection centrale.* 245 **a.**

*Projection stéréographique d'une figure sphérique.* 244.

*Puissance d'un point,* par rapport à un cercle. 1319.

*Prismoïde, Paralléloïde.* Volumes limités par des faces planes parallèles, et latéralement par la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur les périmètres des deux bases, en restant parallèle à un plan donné. 1864.

*Questions de Miquel.* 21, 711 à 713, 737 **b**, 819, 1342 **l.**

*Rapport anharmonique.* Rapport entre les distances de quatre points en ligne droite. — Voir pour la définition, G., nº 754, p. 362. 51 **a.**

*Surfaces inverses,* de BRAVAIS. Figures inverses quand la puissance d'inversion égale — 1. 248 **a.**

*Transformation par inversion,* ou par rayons vecteurs réciproques; figures inverses. 248 **a.**

*Transformation réciproque* de LONGCHAMPS. Transformation par *droites isotomiques.* Les coordonnées barycentriques de deux points correspondants sont inverses. 1231 **a.**

*Valeur de* $\pi$, d'après divers calculateurs. 1773 **e.**

*Terminologie de la Géométrie du Triangle.* Dès l'origine, il a fallu, pour la brièveté et la clarté du langage, créer un assez grand nombre de dénominations nouvelles, et cette efflorescence de termes inconnus a révolté, à trop bon marché peut-être, quelques Géomètres qui ne voyaient pas la nécessité absolue de ces néologismes. Elle s'impose cependant dans ce petit coin de la Géométrie.

A propos de noms propres de géomètres attribués à des éléments géométriques, on ne s'est pas préoccupé de l'envergure de la découverte pour donner un nom à un élément. A un besoin nouveau, on a répondu en adoptant quelques termes nouveaux et commodes. (*I. M.*, 1898, p. 211 et 212.)

# PROBLÈMES ET THÉORÈMES HISTORIQUES

## Problèmes.

Numéros.

(1909-1910), par M. ARCHIBALD. Ce problème est désigné ordinairement sous le nom de *P. de Pappus.* 321 **a** et 1538.

*Problème de Malfatti.* Inscrire dans un triangle trois circonférences tangentes entre elles deux à deux, et tangentes aux côtés du triangle. 1546 **h.**

*Problème de Newton.* Dans un segment, limité par une droite et par une courbe quelconque, inscrire le rectangle maximum. 362.

*Problème de Pappus.* Par un point pris sur la bissectrice d'un angle, mener une sécante de longueur donnée. 309 **a**, 321 **a** et 1537.

*Problème de Sluse* (1622-1685). Par un point donné dans l'intérieur d'un angle, mener une sécante qui détermine un triangle d'aire minima. (LEFEBVRE, *Cours développé d'Algèbre élémentaire*, t. II, p. 306.) 1618.

*Problème de Sturm.* Construire un quadrilatère inscriptible, dont on connaît les côtés. 151 et 1526.

*Problème de Timmermans.* Dans le plan d'un triangle, tracer une droite telle que la somme des distances de chacun de ses points aux trois côtés du triangle soit constante. 1626 **a.**

*Problème de Viète* ou *d'Apollonius.* Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés. 46 et 49 **a.**

*Problème d'Ocagne.* Rectifier approximativement un arc de cercle, par des procédés rapides. 2256 **a.**

*Problèmes d'Apollonius.* Voir *Section de raison*, de l'espace et déterminée. 332.

*Problèmes de Fermat.* 1° Trouver un point tel que la somme de ses distances à trois points donnés soit minima. 1079.

2° Inscrire à une sphère un cylindre dont la surface totale soit maxima. 2061 **a.**

*Problème du point mobile sur un cercle.* On donne un cercle, deux points fixes A et B sur ce cercle; une droite, le point O projection du centre sur cette ligne, déterminer un point C sur le cercle, tel que CA, CB déterminent sur la droite des segments MO, NO, dont la somme ou la différence, le rapport ou le produit, la somme ou la différence des carrés ait une valeur donnée. 101, 102, 108, 274, 275, 276, 326, 330, 331, 895, 896.

## Théorèmes.

*Hexagramme de Pascal.* Les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit à une conique se coupent en trois points situés sur une même droite. 2120.

*Hexagone de Brianchon.* Voir *Théorème de Brianchon.* 2121.

*Th. d'Alasia.* Si l'on décrit un cercle quelconque qui coupe les trois côtés d'un triangle donné ABC, qu'on joigne DF′, ED′, FE′, les trois droites ainsi menées forment un triangle A′B′C′ homologique du premier; par suite les droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes. 2394 **b.**

*Th. d'Apollonius,* sur les diamètres conjugués des coniques

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad a'b' \sin V = ab. \qquad 2072 \text{ et } 2075.$$

*Th. d'Archimède.* 1° Toute surface sphérique se projette en vraie grandeur sur un cylindre circonscrit lorsque les projetantes rencontrent orthogonalement l'axe du cylindre. 1228 **c.**

2° Relatif au volume de l'*onglet cylindrique* et du solide commun à deux cylindres égaux de révolution, dont les axes se coupent à angle droit. 1979 **c.**

*Th. d'Aubert.* Les quatre orthocentres des triangles formés par quatre droites qui se coupent deux à deux sont sur une même droite. 711 et 767.

*Th. d'Aubert* (P.). Réciproque du théorème de M<sup></sup>KENSIE. 1251 **h.**

*Th. de Boutin* (en 1890). Lorsqu'on prend sur les médiatrices OA′, OB′, OC′ des grandeurs $OA_1$, $OB_1$, $OC_1$, directement proportionnelles aux médiatrices, les droites $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, se coupent en un même point P, et ce point se trouve sur la *droite d'Euler.* — C'est la question attribuée à FRANKE, dans la 4e édition des *E. de G.;* le *Théorème de Franke* est de 1904. 1242 **o.**

*Th. de Brianchon.* Les diagonales qui joignent les sommets opposés d'un hexagone circonscrit à une conique se coupent au même point, 293 **h** et 2121.

*Th. de Brianchon et Poncelet.* L'orthocentre du triangle inscrit à l'hyperbole équilatère appartient à cette courbe. 2183 **b.**

Numéros.

*Th. de Brocard.* Ainsi que pour M. LEMOINE, nous nous bornons à un seul théorème parmi tous ceux qui lui sont dus. Les droites qui, partant des sommets d'un triangle et se coupent aux points segmentaires O, O' se rencontrent en trois autres points situés sur une circonférence passant par les deux premiers. (*Énoncé primitif du Cercle de Brocard*, *N. C.*, 1880, p. 22, XXVI.) 2437.

*Th. de Brune.* Si par les milieux des diagonales d'un quadrilatère on mène des parallèles à ces mêmes lignes, le quadrilatère est divisé en quatre parties équivalentes par les droites qui joignent le point de concours des parallèles aux points milieux des quatre côtés du quadrilatère. 1574.

*Th. de Carnot*, 1° Polygone plan coupé par une transversale; relation entre les segments. 181 et 1229.

2° Lorsque d'un point du cercle circonscrit à un triangle, on mène trois droites isoclines sur les côtés, les pieds de ces droites sont en ligne droite. 293c,1°.

3° Cercle coupé par un triangle : relation entre les segments déterminés sur les côtés du triangle. 1250 et 2101.

4° Conique quelconque, coupée par un triangle : extension du théorème précédent. 2102.

*Th. de Cesaro.* A un triangle ABC, on circonscrit deux triangles semblables à un triangle donné, et ayant leurs côtés homologues perpendiculaires entre eux; démontrer que la somme des deux triangles circonscrits est constante. 1612 **a.**

*Th. de Céva.* Relation entre les segments déterminés sur les côtés d'un triangle par trois céviennes concourantes. 167 et 1240.

*Th. de Chasles.* 1° Centre de la projection stéréographique d'un cercle. 245 et 245 **a.**

2° Déplacement d'une figure plane dans son plan, determination du centre de rotation. 245, 770.

3° Théorème corrélatif du *Th. de Pappus* (n° 1214). Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, le produit des distances d'une tangente mobile à deux sommets opposés est au produit de ses distances aux deux autres sommets dans un rapport constant. 1218.

4° Le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à deux ellipses confocales est un cercle de même centre. 2097.

*Th. de Clairaut.* Extension du théorème du carré de l'hypoténuse : parallélogrammes construits sur les côtés d'un triangle quelconque. 1559.

*Th. de Commandino.* Les quatre droites qui joignent chaque sommet d'un tétraèdre au point de concours des médianes de la face opposée, se coupent au même point. 1835.

*Th. de d'Alembert.* Les centres de similitude de trois circonférences sont trois à trois en ligne droite. 176, 212 et 1260.

*Th. de Darboux.* Un tétraèdre est la somme arithmétique de six hexaèdres autosymétriques (identiques chacun à leur symétrique). 1834 **a.**

*Th. de Desargues.* 1° Involution de six points déterminée par une sécante qui rencontre une circonférence et les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit. 1219.

2° Extension du même théorème, dans le cas d'une conique quelconque. 2108.

3° Triangles homologiques. 177 **a**, 177 **c** et 1247.

POUDRA a édité les œuvres de DESARGUES, en 1864, en 2 vol. in-8°, de 938 p.

*Th. de du Faye.* Sur la différence des aires de deux polygones semblables inscrit et circonscrit au même cercle. 1600.

*Th. de Dupuis.* Le lieu du point de contact d'une sphère mobile tangente à trois sphères fixes est une circonférence sur chaque sphère fixe. 1979.

*Th. de Durrande.* La distance $d$ des sphères inscrite et circonscrite à un tétraèdre est donnée par la formule $d^2 = (R - r)^2 - 4r^2$. 1929 **a.**

*Th. de Faure.* Lorsqu'on fait passer un cercle par les centres et par les points d'intersection de deux cercles orthogonaux, la somme des puissances d'un point de ce cercle par rapport aux cercles donnés est nulle. 1319.

*Th. de Fermat.* Propriété d'un rectangle ayant pour côtés : $a$ et $a\sqrt{2}$. 1329.

*Th. de Feuerbach.* Le cercle des neuf points est tangent aux cercles inscrit et exinscrits. (Donné en 1822.) 238, 292 **k** et 1341.

Ce théorème a été généralisé par WEILL, *N. A.*, 1880, p. 259, th. XVI; puis par G. Fontené, *N. A.*, 1905, p. 504; 1906, p. 55 à 63; 1907, p. 158; et. T. HAYASHI (*l'Enseignement mathématique*, 1906, p. 390).

Numéros.

*Th. de Franke* (énoncé en 1904). Trois droites qui joignent les sommets d'un triangle aux points D′, E′, F′, qui divisent dans le même rapport les médiatrices OD, OE, OF se coupent au même point. Cette désignation donnée dans la 4e édition des E. de G., est fautive, car le théorème est en réalité de M. BOUTIN. 1242 **o**.

*Th. de Frégier.* Lorsqu'un angle droit BAC dont le sommet A est en un point fixe d'une conique, pivote autour de ce point, la corde BC passe par un point fixe, situé sur la normale à la courbe, au point A. 2183 **f**.

*Th. de Fuss.* Pour une base donnée, le lieu du sommet opposé d'un triangle sphérique est un grand cercle, lorsque la somme des arcs latéraux est une demi-circonférence. 149 et 1966.

*Th. de Gergonne.* Un quadrilatère sphérique est circonscriptible lorsque la somme des deux côtés opposés égale celle des deux autres côtés. 1965.

*Th. de Grebe.* Si l'on construit des carrés sur chaque côté d'un triangle, tous à l'extérieur ou tous à l'intérieur, et qu'on prolonge les côtés opposés à ceux du triangle, les trois droites qui joignent chaque point de concours au sommet correspondant concourent en un même point. 2369.

*Th. de Gua de Malves.* Dans un tétraèdre à trièdre trirectangle, le carré de la face opposée à ce trièdre égale la somme des carrés des trois autres faces. 1877.

*Th. de Guéneau d'Aumont.* Dans un quadrilatère sphérique inscrit, la somme de deux angles opposés égale la somme des deux autres angles 160, 248 et 1967.

*Th. de Guldin.* Surface et volume des corps de révolution. 51 **a**, 400 **a** et 1585 **a**

*Th. de Hachette et Binet.* Cas particulier.— Le lieu de l'arête d'un dièdre droit dont les faces passent respectivement par les côtés d'un angle plan, est un cône elliptique. (*A. de G.,* t. XVIII, 1827-1828, p. 195.) 2068 **e**.

*Th. d'Hamilton.* Un triangle donné et les trois qu'on obtient en joignant l'orthocentre au trois sommets, ont le même cercle des neuf points. 292 **k** et **m** et 1341 **c**.

*Th. de Kariya* (énoncé en 1904). Point de concours des trois droites qui joignent les sommets A, B, C, d'un triangle aux points D′, E′, F′ pris sur les rayons de contact ID, IE, IF, du cercle inscrit et des côtés, à égale distance du centre I. Le théorème attribué à M. KARIYA, dans la 4e édition des E. de G., a été revendiqué par M. RETALI qui l'a publié en 1896; d'ailleurs M. BOUTIN a donné l'énoncé même de M. KARIYA dès 1890, comme première partie d'un théorème plus général; enfin cette dernière question avait été traitée en 1889, par M. LEMOINE. 1242 **n**.

*Th. de Lafitte.* Si un triangle circonscrit à un autre se meut en restant semblable à lui-même, tous les points homologues décrivent une même circonférence. 1282 **a**.

*Th. de La Hire.* Un point quelconque d'un cercle, qui roule sans glissement à l'intérieur d'une circonférence de rayon double, décrit un diamètre de cette circonférence. (Hypocycloïde rectiligne, mouche de La Hire.) 1285.

*Th. de Lambert.* Le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à la parabole, passe par le foyer. 2141 et 2166.

*Th. de Lemaire* (*G.*). Relatif aux *lunules d'Hippocrate :* 1° Le cercle maximum inscrit dans chaque lunule.

2° Le cercle maximum inscrit dans le bisegment formé par les circonférences décrites sur $b$ et $c$ comme diamètre, sont égaux entre eux; ils ont pour diamètre le rayon du cercle inscrit au triangle ABC.

3° La somme des lunules est égale au carré de la tangente à ces mêmes lunules. 1768 **a**.

(1° et 3° sont de M. LEMAIRE; 2° est de M. BROCARD. — *I. M.*, 1911, p. 9, n° 3606.)

*Th. de Lemoine.* Les trois symédianes d'un triangle se coupent au même point. (*Énoncé actuel.*) 2353.

Les théorèmes dus à M. LEMOINE sont si nombreux que nous nous bornons à citer celui de 1873, parce qu'il a appellé l'attention sur le point K, qui porte maintenant son nom.

*Th. de Lexell.* Le lieu du sommet d'un triangle sphérique à base fixe et à aire constante est une circonférence. 1969.

*Th. de Lhuilier.* Le polygone obtenu en joignant deux à deux les projections d'un point P sur les côtés consécutifs d'un polygone régulier a une aire constante lorsque le point P se déplace sur une circonférence ayant même centre que le polygone régulier. 1773 **j**.

*Th. de Maclaurin.* 1° Volume du segment sphérique en fonction de la hauteur et de la section équidistante des bases. 1932.

Numéros.

*Th. de Ptolémée.* Relations dans le quadrilatère inscrit. 226, 1209 et 1210.

*Th. de Pythagore.* Carré de l'hypoténuse. 681, 1560.

*Th. de Rochat.* Nom donné par GERGONNE à un beau théorème sur le quadrilatère. 1233 b.

*Th. de Salmon.* 1° Les circonférences décrites sur trois cordes issues d'un même point et considérées comme diamètres, se coupent en trois points situés en ligne droite. 766.

2° Lorsqu'on a deux triangles polaires inscrit et circonscrit à un même cercle, le rapport des distances du centre à deux sommets opposés de ces triangles égale le rapport des distances de ce même centre aux côtés opposés. 1177.

*Th. des A. de G.* L'enveloppe de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont le sommet de l'angle droit est au centre d'une conique, et dont les autres sommets sont sur la courbe est un cercle de même centre que la conique. — Soient A et B les demi-axes d'une ellipse, $a$ et $b$ les demi-diamètres rectangulaires, $m$ et $n$ les segments de l'hypoténuse que détermine la perpendiculaire $h$ ; on a :

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{mn} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \text{constante.}$$

(*A. de G.*, t. XV, p. 76 et 197 ; t. XVIII, p. 368 ; t. XIX, p. 249.) 2183 h.

*Th. de Schenker.* Si par le sommet D d'un tétraèdre ABCD, on mène des plans $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ perpendiculaires aux arêtes DA, DB, DC, les points de rencontre de $\alpha$ avec BC, de $\beta$ avec CA, de $\gamma$ avec AB sont en ligne droite. 1846 f.

*Th. de Schooten.* Lorsque les extrémités d'un segment rectiligne glissent sur deux axes concourants, tout point de ce segment décrit une ellipse. 2160.

*Th. de Serret (P.).* L'enveloppe des côtés des triangles inscrits dans un cercle donné, qui ont même orthocentre, est une ellipse qui a pour foyers cet orthocentre et le centre du cercle circonscrit. 130 a et 2174.

*Th. de Simson.* Les projections sur les côtés d'un triangle, de tout point du cercle circonscrit, sont en ligne droite. 22, 293, 762 et 1251 b.

*Th. de S'Roberts.* Relation dans le contre-parallélogramme pour l'inverseur de HART, à cinq tiges. 1202.

*Th. de Steiner.* 1° Tétraèdre à volume constant lorsque deux arêtes opposées sont données de longueur et glissent sur deux droites données de position. 158 et 1856.

2° L'aire de l'ellipse engendrée par un point donné d'une droite dont les extrémités glissent sur deux axes est indépendante de l'angle de ces axes. 2161.

3° Le lieu des points de vue d'où un cercle a pour perspective un cercle, sur un plan perpendiculaire au premier, est un hyperboloïde de révolution, ayant pour collier le cercle donné. 2242.

*Th. de Stewart.* Relation pour le calcul d'une cévienne quelconque. 1173.

*Th. des trois corps ronds*, G.-M. (G. n° 583 et E. de G.) 1934.

*Th. de Sylvester.* Dans le triangle, OH est la résultante de trois forces égales AO, BO, CO. 1546 g.

*Th. de Terquem.* Le cercle qui passe par les pieds de trois céviennes concourantes, détermine trois autres points qui correspondent à des céviennes aussi concourantes. De fait, il est de STEINER. (A. de G., 1828-1829, p. 1.) 1251.

*Th. de Thalès.* Similitude de deux triangles. 206.

*Th. de Tinseau.* Le carré d'une figure plane quelconque égale la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires deux à deux. 1878.

*Th. d'Euler.* 1° Somme des carrés des côtés d'un quadrilatère. 1205.

2° Dans tout triangle on a la relation : $d^2 = R\ (R - 2r)$. 293 g, 327, 327 a et 1182.

*Th. de Van Aubel.* Relation entre les segments de trois céviennes concourantes. 1242 j

*Th. de Vecten.* Lorsqu'on construit des carrés sur les trois côtés d'un triangle et qu'on joint deux à deux les sommets voisins des carrés, on obtient trois triangles équivalents entre eux, etc. 1550.

*Th. de Villarceau.* Le plan bitangent au tore coupe cette surface suivant deux cercles. 248, 4°.

*Th. de Visschers.* La somme des trois lignes qui joignent un point intérieur d'un triangle aux trois sommets, est moindre que la somme des deux plus longs côtés de ce triangle. 460 a.

*Th. de Viviani.* La distance d'un point intérieur aux $n$ côtés d'un polygone régulier égale $n$ fois l'apothème. 1592.

Numéros.

*Th. de Wallace* ou th. de Simson. (Voir *Th. de Simson.*) 23 et 764.

*Th. du point O*, de W.-J. M'CLELLAND, dans *A Treatise on the Geometry.* 2285.

*Th. Japonais.* Dans un quadrilatère inscriptible, la somme des rayons des cercles inscrits aux deux triangles que détermine une diagonale, égale la somme des rayons des cercles inscrits aux deux triangles que détermine l'autre diagonale. (Voir aussi *Mathesis*, 1911, p. 208.) 710 **b** et 750 **a**.

*Th. énoncé par M. Brocard.* On joint un point O aux sommets d'un triangle ABC; les perpendiculaires élevées en O, aux droites OA, OB, OC, rencontrent les côtés opposés, en trois points D, E, F, en ligne droite. 1342 **n**.

Le savant très érudit qui nous proposait cette question intéressante faisait les réserves les plus formelles sur sa nouveauté fort problématique; néanmoins nos recherches dans les revues et les recueils élémentaires furent vaines, et nous cherchâmes une démonstration (nº 1342 **n**). M. H. BROCARD avait cependant raison, car la question avait été rencontrée par BOBILLIER dans une étude sur les polaires. (*A. de G.*, t. XVIII, 1827-1828, p. 185, *Théorème I.*)

## Article de BOBILLIER dans les *Annales de Gergonne*.

Il est connu que le pôle d'une droite par rapport à un cercle est sur la direction du rayon perpendiculaire à cette droite; et, comme d'ailleurs, lorsqu'un quadrilatère a deux angles droits, ses deux autres angles sont égaux (ou supplémentaires), il s'ensuit que l'angle des rayons d'un cercle qui contiennent les polaires de deux droites, est égal à l'angle de ces deux droites (on ne considère que les angles aigus).

Cette observation fort simple conduit à des conséquences assez remarquables; on en déduit d'abord ces deux théorèmes :

I. *Si, d'un point pris arbitrairement sur le plan d'un triangle, on mène des droites à ses sommets, puis, par le même point, des perpendiculaires à ces droites, ces dernières détermineront, sur les côtés respectivement opposés, trois points qui appartiendront à une même droite.*

II. *Si, d'un point pris arbitrairement sur le plan d'un triangle, on mène des droites à ses sommets et qu'ensuite, par le même point, on mène six autres droites divisant en deux parties égales tant les angles que forment les trois premiers deux à deux que les suppléments de ces angles, ces dernières détermineront, sur la direction de chacun des côtés opposés, deux points tels que les six points ainsi déterminés se trouveront aux intersections de quatre droites.*

Si, en effet, dans chacun des deux cas, on construit la polaire réciproque de la figure dont il s'agit, relative à un cercle de rayon arbitraire, ayant son centre au point de départ des droites qui vont aux trois sommets du triangle, cette polaire réciproque sera, dans le premier cas, un autre triangle et les perpendiculaires abaissées de ses sommets sur les directions des côtés opposés, et dans le second un triangle avec les six droites qui divisent en deux parties égales tant les angles de ce triangle que leurs suppléments. Or, on sait que les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les directions des côtés opposés se coupent toutes trois au même point; d'où il suit que les points dont ces droites sont les polaires doivent appartenir tous trois à la même droite. On sait, en outre, que les six droites qui divisent tant les angles d'un triangle que leurs suppléments en deux parties égales joignent deux à deux quatre points, centres des cercles qui touchent à la fois ses trois côtés; donc les six points dont ces droites sont les polaires doivent être aux intersections de quatre droites.

**Note.** Le théorème proposé par M. BROCARD, démontré par BOBILLIER à l'aide des polaires, puis par les *E. de G.* à l'aide des transversales, conduit facilement à la démonstration de celui de SCHENKER (nº 1846 **f**). *Étant donné un tétraèdre* ABCD, *si on mène en* D, *des plans* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, *perpendiculaires aux arêtes* DA, DB, DC, *les points de rencontre de* $\alpha$ *avec* BC, *de* $\beta$ *avec* CA, *de* $\gamma$ *avec* AB, *sont en ligne droite.* En effet, soit O la projection de D sur ABC; les plans DOA, DOB, DOC, par leurs traces sur le triangle ABC, ramènent la question au théorème de géométrie plane. Du *théorème de Schenker*, on passe au suivant : *Les faces correspondantes de deux trièdres supplémentaires de même sommet se coupent suivant trois droites situées dans un même plan*; puis de ce dernier, au théorème ci-après : *Les côtés correspondants de deux triangles sphériques supplémentaires se coupent en six points qui appartiennent à un même grand cercle.*

# TABLE DES NOTES PRINCIPALES

# THÉORÈMES, LIEUX, PROBLÈMES ET NOTES

---

## Questions complétées ou nouvellement introduites.

Numéros.

T. La somme des distances d'un point intérieur aux trois sommets d'un triangle est moindre que la somme des deux plus longs côtés. (VISSCHERS.) 460 a.

N. Triangle pseudo-isocèle. 480 a.

N. Les trois médianes d'un quadrilatère se coupent au même point. 548 a.

N. Généralisation du théorème relatif au *point de Mathot.* 676 a.

T. La circonférence circonscrite au triangle AOB déterminé par un segment AB de longueur constante, dont les extrémités glissent sur deux droites fixes OX, OY, a un rayon constant. 702 a.

N. Énoncé de STEINER relatif au théorème du *Point de Miquel.* 712 a.

T. La circonférence qui passe par les centres de trois quelconques des quatre cercles inscrit ou exinscrits à un triangle ABC, a un rayon double du cercle circonscrit au triangle. 735 a.

T. *Pentagramme de Miquel.* 737 b.

T. Sur chaque côté d'un quadrilatère circonscriptible, tant à l'extérieur qu'à l'intérieur, on construit des triangles isocèles semblables; soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, les sommets des triangles extérieurs, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$, des intérieurs; les médianes des deux quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$ et $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ se coupent au même point, etc. (BROCARD.) 749 b.

T. *Japonais.* Dans un quadrilatère inscriptible, la somme des rayons des cercles inscrits aux deux triangles que détermine une diagonale, est égale à la somme des rayons relatifs à l'autre diagonale. (Aux auteurs cités comme ayant démontré ce théorème, il convient d'ajouter SAWAYAMA.) 750 a.

P. Déterminer un point d'où l'on puisse voir trois segments rectilignes AB, AC, BC d'une même droite sous des angles égaux ou supplémentaires. 754 a.

N. *Triangles parallélogiques.* 757 a.

N. *Droites de Simson* rectangulaires entre elles. 765 b.

T. De KANTOR sur la *droite de Simson.* 765 c.

T. Sur la même droite. (DAVIS.) 767 b.

P. Dans un carré, donné inscrire un carré dont un côté passe par un point donné. (*College des Preceptors,* à Londres.) 1023.

P. Construire un quadrilatère, connaissant deux côtés opposés, les diagonales et leur angle. (Extrait de *Matriculation Geometry,* WORKMAN BRACKNELL, de Londres.) 1043 a.

T. De DROZ-FARNY sur le triangle dont un côté égale la demi-somme des deux autres $2a = b + c$. 1123 a.

T. Les centres des triangles équilatéraux construits sur les côtés d'un triangle quelconque, mais tous à l'extérieur, ou tous à l'intérieur, sont les sommets d'un triangle équilatéral. 1140 b.

T. Triangles équilatéraux construits sur des segments AC, CB en ligne droite, et sur AB, mais du côté opposé à celui des deux premiers. 1140 b.

N. Série de triangles de COLLIGNON se rapprochant de plus en plus du triangle équilatéral, quel que soit le triangle de départ. 1140 b.

T. Lorsqu'un quadrilatère inscrit tourne autour du centre du cercle, les intersections des côtés égaux dans les deux positions sont les sommets d'un parallélogramme. 1142 a.

N. *Cercle des hauteurs* (J. MENTION), et *Théorème de Steiner,* démontré par MENTION et Paul SERRET. 1154.

T. Les bissectrices intérieures d'un triangle se divisent mutuellement en deux segments proportionnels à la somme des deux côtés adjacents et au troisième côté. 1155 a.

T. La projection d'une bissectrice intérieure sur un des côtés adjacents est

## Problèmes à constructions non géométriques.

Numéros.

Les problèmes suivants donnent lieu à des constructions qu'on ne sait pas effectuer en n'employant que la règle et le compas. On ne construit géométriquement que les inconnues dont la valeur peut être déterminée par une équation du second degré ou par une équation bicarrée. Néanmoins une question qui de prime abord ne semble pas rentrer dans le groupe ci-dessus, parce que l'équation finale est d'un degré très élevé, peut être construite géométriquement si cette équation se ramène à une suite d'équations du second degré; c'est ce qui a lieu pour le *problème d'Apollonius :* décrire un cercle tangent à trois cercles donnés, qui comprend huit solutions.

Le *Problème de Huygens* (nº 1674 c) : Étant donnée une première droite qui divise un triangle en deux parties équivalentes, en mener une seconde qui divise cette figure en quatre parties équivalentes, est du quatrième degré; néanmoins on peut le ramener au *second*, en considérant que la question revient à mener une tangente commune à deux hyperboles qui ont une asymptote commune.

L'exemple le plus remarquable a été donné par Gauss : il est parvenu, par l'abaissement successif du degré de l'équation, à inscrire géométriquement au cercle le polygone régulier de dix-sept côtés.

Voici maintenant quelques problèmes cités dans nos *Exercices*, qu'on ne sait pas construire en n'employant que la règle et le compas.

Par un point donné dans l'intérieur d'un angle A, mener la droite la plus courte possible, dont les extrémités soient limitées aux côtés de l'angle. 168.

Diviser un angle en trois parties égales (nº 910). 501.

Par un point donné, mener une sécante telle que la différence des cordes interceptées par deux circonférences données ait une longueur donnée. *Problème de Lez.* Quatrième degré. 880 a.

Décrire une circonférence qui détermine sur trois droites des cordes $l$, $m$, $n$, de longueurs données. 881 a.

Construire un triangl, connaissant le triangle pédal de ses bissectrices, ou de ses symédianes. 1242 i.

Déterminer un point D où trois céviennes concourantes donnent des distances égales depuis ce point D jusqu'aux côtés du triangle. 1242 l.

Lieu d'un point Q tel que ses projections $A'$, $B'$, $C'$ sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC soient les pieds de trois céviennes $AA'$, $BB'$, $CC'$ qui concourent en un même point P. 1246 a.

Problème réciproque du précédent : lieu d'un point P tel que trois céviennes qui passent par ce point aient pour pieds trois points $A'$, $B'$, $C'$ qui soient les projections d'un même point Q. 1246 a.

Lieu des points d'où deux segments AB, CD, non en ligne droite, sont vus sous le même angle. 1361 a.

Lorsque les segments inégaux AD, BC ont un point commun, le lieu est une strophoïde oblique; mais les prolongements de la droite AB jouissent de la même propriété. Une partie de la strophoïde correspond à des angles supplémentaires. 1407 d.

La détermination algébrique d'un cercle tangent à trois autres, *pendant longtemps, a résisté aux efforts de l'analyse algébrique* (Poncelet). La méthode géométrique permet de déterminer deux par deux les huit cercles qui répondent à la question. 1463.

*Construire un triangle, connaissant I. G. H.* (Euler.) 1520 c.

Construire un triangle, connaissant les symétriques $A'$, $B'$, $C'$ des sommets par rapport aux côtés opposés. (Septième degré.) 1523 c.

Construire un triangle, connaissant les pieds des bissectrices intérieures. (Quatrième degré.) »

Construire un triangle, connaissant les pieds des trois symédianes. (Douzième degré). »

Construire un triangle, connaissant trois bissectrices concourantes. (Quatorzième degré.) 1523 e.

Construire un triangle, connaissant les distances du centre O aux trois côtés. »

Construire un triangle, connaissant les distances du centre I aux trois sommets. »

Construire un triangle, connaissant les distances de l'orthocentre H aux trois sommets; on obtient une équation du troisième degré. (*J. M. S.*, 1894, p. 215.) »

# INDEX BIBLIOGRAPHIQUE



---

* Les *références* se rapportent à la *pagination* et non pas aux *numéros* mêmes de l'ouvrage; les caractères gras indiquent la page où se trouve une courte notice sur le livre cité.

# INDEX BIOGRAPHIQUE

## A



## B



* Les *références* se rapportent à la *pagination* de l'ouvrage, et non pas aux *numéros* des articles. Les caractères gras indiquent une courte notice sur l'auteur cité.

## C



## D

## E



## F

## K



## L



## M

## N



## O



## P

## T



## V



## W



## Y



## Z



34 808. — Tours, impr. Mame.

# EXERCICES DE GÉOMÉTRIE, F. G.-M.

## NOTE SUR L'INVERSION

*Remplacer les nos 235 et 236 par ce qui suit :*

### Théorème.

**2521.** *Deux cercles donnés peuvent être transformés en cercles égaux.*

Soient deux cercles ayant pour centres A et B, pour rayons $a$ et $b$, pour distance de leurs centres $d$.

Admettons que O soit un centre d'inversion convenablement choisi pour répondre à la proposition énoncée ci-dessus.

En conservant un centre d'inversion déterminé, mais en faisant varier la puissance d'inversion, on obtient une série de figures homothétiques; il suffit donc de déterminer le point O de manière qu'en

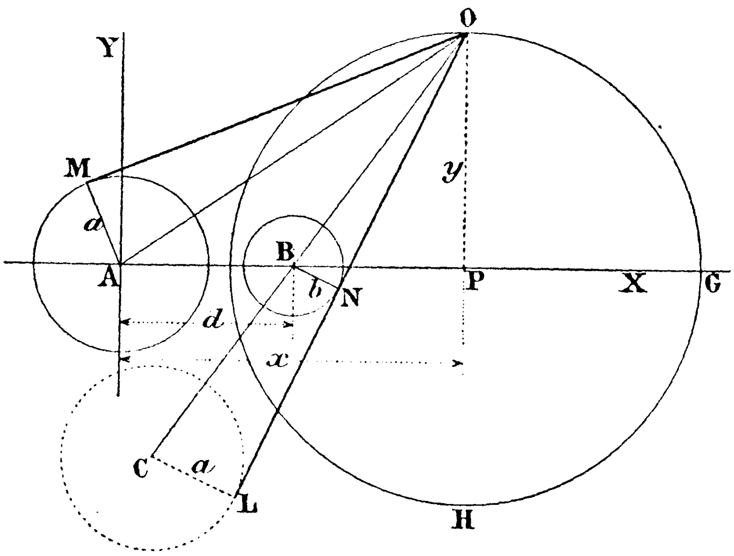



Fig. 1550.

prenant $OM^2$ pour puissance, le cercle B se transforme en un cercle C égal au cercle A. Donc on doit avoir :

$$OL \,.\, ON = OM^2 \qquad \text{ou} \qquad OL = \frac{OM^2}{ON}. \qquad (1)$$

Ainsi OL est une troisième proportionnelle à OM et ON.

Les triangles semblables OBN, OCL, donnent :

$$\frac{OL}{ON} = \frac{a}{b}; \qquad \text{d'où} \qquad OL = ON \cdot \frac{a}{b}. \qquad (2)$$

De (1) et (2) on tire : $$\frac{OM^2}{ON^2} = \frac{a}{b}. \qquad (3)$$

Ainsi le point O appartient au lieu des points, tels que les carrés des tangentes, menées de ce point, aux cercles donnés A et B, sont entre eux dans le même rapport que les rayons $a$ et $b$ de ces cercles.

En d'autres termes : Le point O appartient au lieu des points, dont les puissances respectives par rapport à deux cercles donnés sont entre elles dans le rapport des rayons de ces cercles.

*Le lieu du point* O *est un cercle ayant son centre sur la ligne des centres* A *et* B, ainsi qu'on va le démontrer (nº 2522).

*Remarque.* Le théorème énoncé ci-dessus est un cas particulier de la question suivante :

### Problème.

**2522.** *Déterminer le lieu des points tels que les tangentes menées de ces points à deux cercles donnés, soient entre elles dans un rapport donné* (fig. 1550).

Soient les cercles A et B tels qu'on ait :

$$\frac{OM}{ON} = \frac{m}{n}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{OM^2}{ON^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Prenons la ligne des centres pour axe des $x$, le point A pour origine des coordonnées rectangulaires AX, AY ; AP et OP sont les coordonnées $x$ et $y$ du point O.

On obtient immédiatement :

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{OM^2}{ON^2} = \frac{AO^2 - a^2}{BO^2 - b^2} = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{(x-d)^2 + y^2 - b^2}.$$

De $$\frac{m^2}{n^2} = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2 - 2dx + d^2 + y^2 - b^2},$$

on déduit successivement :

$$(m^2 - n^2)(x^2 + y^2) - 2m^2dx = m^2b^2 - m^2d^2 - n^2a^2, \qquad (4)$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2m^2dx}{m^2 - n^2} = \frac{m^2b^2 - m^2d^2 - n^2a^2}{m^2 - n^2}. \qquad (5)$$

1º Lorsque $m^2 - n^2$ n'est pas nul, (5) est l'équation d'un cercle dont le centre est sur ABX.

2º Quand $m = n$, les deux tangentes sont égales, (4) se réduit à

$$2m^2dx = m^2(d^2 - b^2) + n^2a^2. \qquad (6)$$

L'équation (6) représente une droite perpendiculaire à AB ; c'est l'axe radical des deux cercles donnés.

3º Si les cercles donnés se réduisent aux points A et B, on retrouve le problème d'Apollonius (*Manuel de Géométrie*, nº 270) ; l'équation (5) devient : $$x^2 + y^2 - \frac{2m^2dx}{m^2 - n^2} = \frac{-m^2d^2}{m^2 - n^2}. \qquad (7)$$

**2523.** *Remarque. Si l'on donne trois cercles dont les centres* A, B, C *ne soient pas en ligne droite* et que les tangentes soient proportionnelles à *m, n, p,* on obtiendra deux points qui répondront à la question en procédant comme pour les *Cercles d'Apollonius* du triangle ABC (E. de G., nº 1546 *e.*)

Ainsi *on peut déterminer deux centres d'inversion pour que les trois cercles* A, B, C, *dont les centres ne sont pas en ligne droite, soient transformés en trois cercles égaux.*

**Théorème.**

**2524.** *Deux cercles intérieurs qui ne se coupent pas se transforment en cercles concentriques, lorsqu'on prend pour origine un des points limites.* (*Complément des* nºs 233 et 234, des *Exercices de Géométrie.*)

Soient les cercles A et B, ayant pour rayons respectifs $a$ et $b$, et $d$ pour distance des centres.

On détermine l'axe radical HK. Par le point O, l'on mène les tan-

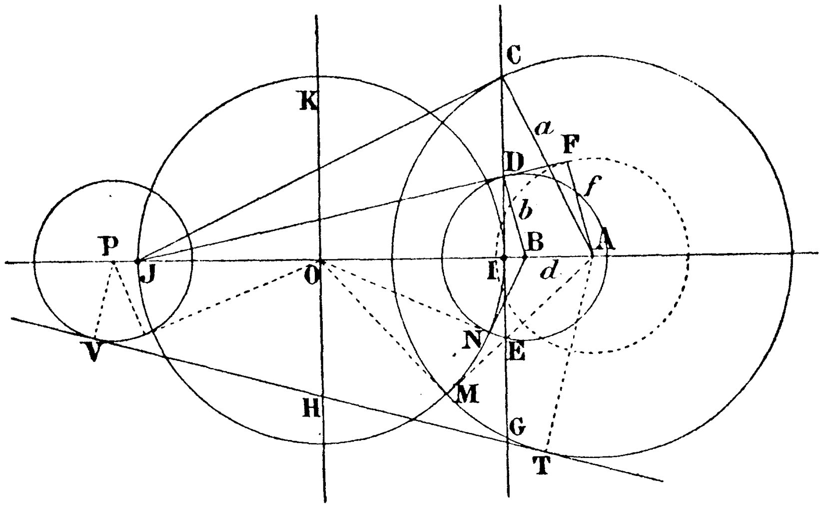



Fig. 1551.

gentes égales OM, ON. Le cercle décrit du centre O, avec OM pour rayon, détermine les points limites I et J (nº 231).

Le point J sera le centre d'inversion pour les cercles A et B.

Le point J a même polaire pour les deux cercles, car $BI . BJ = BD^2$ et de même $AI . AJ = AC^2$.

En menant la tangente JD, puis AF parallèle à BD, on détermine le rayon de la circonférence inverse du cercle B.

On doit avoir : $JD . JF = JC^2$.

*Remarque.* Le point I serait le centre d'inversion pour le réseau des cercles tels que P.

**Résumé.**

**2525.** Par inversion, on peut transformer deux cercles comme il suit :

*a*) Deux cercles dont l'un est intérieur à l'autre se transforment en cercles concentriques, lorsqu'on prend un des points limites de Poncelet pour centre d'inversion ; on prend le point qui a même polaire dans les deux cercles donnés.

*b*) On peut transformer en cercles concentriques tous les cercles intérieurs qui ont même axe radical.

*c*) Deux cercles tangents intérieurement se transforment en droites parallèles si l'on prend le point de tangence pour centre d'inversion. Les deux parallèles obtenues sont d'un même côté du centre d'inversion.

*d*) Lorsque les cercles sont tangents extérieurement, les parallèles sont de part et d'autre du centre d'inversion.

*e*) Les cercles qui se coupent se transforment en droites concourantes, lorsqu'on prend un des points d'intersection pour centre d'inversion.

*f*) Deux cercles extérieurs, qui n'ont pas de point commun, se transforment en cercles égaux, lorsqu'on prend pour centre d'inversion un point du lieu dont les carrés des tangentes menées à chaque cercle sont dans le même rapport que les rayons des cercles donnés.

*g*) Trois cercles dont les centres ne sont pas en ligne droite se transforment en cercles égaux, lorsqu'on prend pour centre d'inversion un des deux points communs aux lieux dont les carrés des tangentes aux cercles considérés deux à deux sont dans le rapport des rayons de ces mêmes cercles.

*h*) Trois cercles extérieurs les uns aux autres sont transformés en trois cercles ayant leurs centres en ligne droite, lorsqu'on prend pour centre d'inversion un point quelconque de leur cercle radical (nº 1979).

*i*) Comme cas particulier, un cercle peut être remplacé par un point, et parfois par une droite.

**2526.** *Remarque.* Il est surtout avantageux d'utiliser l'inversion pour étudier des théorèmes, ou des lieux géométriques, car on se dispense de faire les constructions : il suffit qu'on ait la possibilité d'opérer les transformations.