А4а
235

ÉCOLE ... QUE
1 DEC 1965
sous le N° 2012

Émile Chantre

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
MAGASIN
LIVRES
NIV. 0
BIBLIOTHÈQUE CENTRALE

84117

66190

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Les Auteurs et l'Éditeur de cet Ouvrage *se réservent le droit de le traduire* ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et *Traités internationaux*, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1865, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier-Villars

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHÈQUE
A 4 a 236
COTE :

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE,

PAR

EUGÈNE ROUCHÉ,

PROFESSEUR AU LYCÉE CHARLEMAGNE, RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

ET

CH. DE COMBEROUSSE,

PROFESSEUR AU COLLÉGE CHAPTAL, RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE CENTRALE, ETC.

... « Nous voyons par expérience qu'entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la Géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle. » PASCAL.

CONFORME AUX PROGRAMMES OFFICIELS,
RENFERMANT UN TRÈS-GRAND NOMBRE D'EXERCICES ET PLUSIEURS APPENDICES CONSACRÉS
A L'EXPOSITION DES PRINCIPALES MÉTHODES DE LA GÉOMÉTRIE MODERNE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1866

(Les Auteurs et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

PRÉFACE.

Les idées d'étendue, de situation et de forme, sont aussi anciennes que l'homme. On attribue aux Égyptiens et aux Chaldéens le premier essai de coordination de ces idées.

La Géométrie fut introduite chez les Grecs par le Phénicien Thalès (639-548 avant J.-C.), qui, instruit en Égypte, revint fonder à Milet l'école ionienne; c'est à lui qu'on fait remonter la théorie des triangles semblables. Pythagore, de Samos, son disciple (580 avant J.-C.), fonda en Italie l'école célèbre qui porte son nom. On lui attribue la découverte de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré, la proposition du carré de l'hypoténuse, la propriété du cercle ou de la sphère d'être maximum parmi les figures de même périmètre ou de même aire, et enfin la première théorie des corps réguliers qui jouèrent un si grand rôle dans les rêveries cosmogoniques de l'antiquité et du moyen âge. Mais l'essor de la Géométrie en Grèce date surtout de Platon (430-347 avant J.-C.). Introduire dans la science la méthode analytique, les sections coniques et la doctrine si féconde des lieux géométriques, c'était créer une Géométrie nouvelle! Telle fut l'œuvre magnifique de l'illustre philosophe qui inscrivit sur la porte du Lycée : « Que nul n'entre ici, s'il n'est géomètre. »

En rassemblant les découvertes de ses devanciers et les siennes propres, Euclide (285 avant J.-C.) prépara celles de ses successeurs. Ce géomètre, qui établit le lien entre l'école platonicienne et l'école d'Alexandrie, est surtout connu par ses *Éléments*, où l'on voit apparaître, pour la première fois, la méthode de réduction à l'absurde. Toutefois, il avait écrit d'autres ouvrages qui ne nous sont point parvenus et dont le plus profond était sans contredit ce fameux *Traité des Porismes*, dont la divination, après avoir exercé vainement la sagacité des meilleurs esprits des siècles derniers, vient d'être si heureusement accomplie par M. Chasles, d'après un passage obscur et quelques lemmes de Pappus.

Immédiatement après Euclide, Archimède et Apollonius marquèrent l'apogée de la Géométrie chez les anciens. Leurs sublimes inventions ont laissé une empreinte ineffaçable dans toutes les branches des Mathématiques.

Les travaux d'Archimède (287-212 avant J.-C.) se rapportent spécialement à la Géométrie de la mesure. La recherche du rapport de la circonférence au diamètre et la quadrature de la parabole sont les premiers exemples d'un problème résolu par approximation, et d'une évaluation rigoureuse d'une aire à contour curviligne. Les propriétés des spirales, la proportion de la sphère et du cylindre, la cubature des sphéroïdes et des conoïdes sont autant d'inventions capitales de ce génie créateur auquel la Statique doit autant que la Géométrie.

Les écrits d'Apollonius (247 avant J.-C.) sont relatifs à la Géométrie de la forme. Le principal était le grand *Traité des Coniques*, qui valut à son auteur le surnom de *géomètre par excellence*, et où l'on trouve les propriétés des asymptotes, des foyers, des diamètres conjugués, des normales, un théorème sur la polaire, la première notion des développées et de belles questions de maximum et de minimum. On attribue encore à Apollonius la célèbre théorie des épicycles qui servait à expliquer les mouvements apparents des planètes.

Les successeurs d'Archimède et d'Apollonius dirigèrent leurs études vers l'Astronomie et vers les parties de la Géométrie qui se rattachent à cette science. Ainsi, c'est à Hipparque, le plus grand astronome de l'antiquité (150 avant J.-C.), qu'on doit probablement faire remonter la découverte de la projection stéréographique, ainsi que celle des propriétés des transversales dans les triangles rectilignes ou sphériques qu'on attribue parfois à Ptolémée (125 après J.-C.), bien qu'on les trouve déjà dans les *Sphériques* de Ménélaüs (80 après J.-C.). Ptolémée nous a laissé, dans son *Almageste*, le seul Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique que nous possédions des Grecs, les écrits d'Hipparque sur ce sujet ayant été perdus; l'*Almageste* renferme entre autres la propriété du quadrilatère inscrit au cercle. Enfin, parmi les commentateurs des ouvrages de l'école d'Alexandrie, on rencontre un esprit original et profond, dont Descartes faisait le plus grand cas. Nous voulons parler de Pappus dont les précieuses *Collections* représentent à peu près l'état des Mathématiques anciennes. On trouve dans le livre de Pappus la fameuse règle connue sous le nom de *théorème de Guldin*, la propriété fondamentale du rapport anharmonique, ainsi que le germe de la théorie de l'involution et de la propriété de l'hexagone inscrit à une conique.

L'école d'Alexandrie avait déjà perdu tout son éclat, lors de la conquête arabe (638 après J.-C.) qui fut le signal de la barbarie. Il est vrai qu'au VIII^e siècle, et surtout au IX^e, l'école de Bagdad compta quelques commentateurs habiles des ouvrages grecs échappés aux désastres successifs de la bibliothèque d'Alexandrie; mais, en Europe, mille ans s'écoulèrent dans une profonde stagnation, et ce n'est que vers le milieu du XVI^e siècle que la Géométrie, suivant le mouvement général des Lettres, des Sciences et des Arts, se ranima.

Viète (1540-1603), le véritable créateur de l'Algèbre, appliqua cette science à quelques questions de Géométrie. Il construisit graphiquement les équations du second et du troisième degré, et résolut le premier le problème du cercle tangent à trois cercles donnés, problème difficile alors, mais dont les méthodes modernes ont offert des solutions plus élégantes et plus simples. On doit à Viète une idée neuve et féconde sur la transformation du triangle sphérique; ce triangle réciproque de Viète conduisit, sans nul doute, Snellius (1627) à la découverte du triangle supplémentaire.

C'est dans les écrits de Kepler (1571-1631) et de Fermat (1590-1633) qu'apparaissent les premiers germes de la méthode infinitésimale. On doit en outre au fondateur de l'Astronomie moderne la doctrine des polygones étoilés retrouvée de nos jours par Poinsot; et au célèbre arithmologue la restitution des *lieux plans* d'Apollonius et la première solution complète des problèmes relatifs au contact des sphères.

Pascal (1623-1662), si justement renommé pour ses travaux sur la cycloïde, sur les indivisibles et sur le calcul des probabilités, avait trouvé, dès l'âge de seize ans, la belle propriété de l'hexagramme mystique qu'il prit pour base d'un Traité complet des coniques. Cet ouvrage a été perdu et nous n'en possédons qu'une sorte de programme, l'*Essai sur les Coniques*, que Pascal avait publié dès 1640. Dans les écrits de Pascal, on reconnaît l'influence de son contemporain, le Lyonnais Desargues (1593-1663), qu'un savant géomètre de nos jours, M. Poncelet, a surnommé le *Monge de son siècle*. Les anciens, qui étudiaient les sections coniques dans le cône même, employaient des démonstrations souvent pénibles et surtout différentes pour les trois courbes. Desargues, en cherchant à appliquer directement aux coniques les propriétés du cercle qui était la base du cône, parvint à des démonstrations qui convenaient à la fois aux trois espèces de coniques, malgré la différence de forme de ces lignes. Il découvrit la propriété involutive du quadrilatère inscrit dans une conique, la propriété fondamentale des triangles homologiques, et écrivit avec le même talent et le même esprit de généralisation sur la coupe des pierres, la gnomonique et la perspective.

Placés au point de vue de la Géométrie pure, nous devons seulement mentionner la création de la Géométrie analytique par Descartes (1586-1650). L'avénement de cette nouvelle doctrine, si séduisante par son caractère d'universalité, et dont on ne trouve aucun germe dans les écrits précédents, fut une véritable révolution dans la science et porta un coup funeste à la Géométrie pure. Cependant, quelques esprits distingués s'opposèrent à cette décadence et soutinrent dignement l'honneur des méthodes anciennes. Nous ne citerons que Huygens (1629-1695) et de la Hire (1640-1718). Huygens, que Newton proclamait « le plus excellent imitateur des anciens, » et que Leibnitz plaçait au premier rang parmi les hommes de son siècle, créa la théorie des développées et découvrit les lois de la force centrifuge. On doit à de la Hire la théorie du pôle et de la polaire, dont Apollonius n'avait connu qu'un théorème, et la transformation homologique, qui, employée ensuite par Newton, a été retrouvée de nos jours d'une autre manière et développée avec un rare talent par M. Poncelet dans son beau *Traité des Propriétés projectives des figures* (*), où l'on trouve les applications les plus intéressantes et les plus variées de cette théorie.

A cette époque, trois sortes de Géométrie s'offraient donc aux méditations des savants : la Géométrie des anciens, la Géométrie analytique de Descartes, et une troisième espèce de Géométrie, celle de Desargues et de Pascal, qui devait prendre une si grande extension au XIXe siècle et dont on trouve déjà des germes dans les *Porismes* d'Euclide et les *Collections* de Pappus. « Cette troisième branche de la Géo» métrie, qui constitue aujourd'hui ce que nous appelons la » *Géométrie récente*, est exempte de calculs algébriques,

(*) Deuxième édition, 1865; 2 vol. in-4° avec planches, chez Gauthier-Villars, libraire.

» quoiqu'elle fasse un aussi heureux usage des relations
» métriques des figures que de leurs relations de situation;
» mais elle ne considère que des rapports de distances rec-
» tiligues d'un certain genre, qui n'exigent ni les symboles ni
» les opérations de l'Algèbre. Cette Géométrie est la conti-
» nuation de l'*Analyse géométrique* des anciens, sur laquelle
» elle offre d'immenses avantages par la généralité, l'unifor-
» mité et l'abstraction de ses méthodes, et par l'usage si utile
» de la contemplation des figures à trois dimensions dans les
» simples questions de Géométrie plane (*). »

La découverte du calcul infinitésimal arrêta un moment les progrès de la Géométrie. Cette sublime invention, qui suffirait seule pour immortaliser les noms de Newton et de Leibnitz, s'appliqua avec une si grande facilité à la Géométrie des mesures et à l'étude des phénomènes naturels, qu'elle devint presque exclusivement l'objet des travaux des plus illustres géomètres. Toutefois la chaîne ne fut pas entièrement rompue. Newton lui-même, donnant l'exemple, prouva, dans ses admirables *Principes de la Philosophie naturelle*, que la Géométrie pure se prête aux recherches de l'ordre le plus élevé. Cotes (1682-1716) et Maclaurin (1698-1746) étudièrent les propriétés générales des courbes géométriques. L'astronome Halley (1656-1742), par ses belles traductions d'Apollonius et de Ménélaüs; Simson (1687-1768), par ses écrits sur les coniques, sa restitution de la *section déterminée* d'Apollonius et sa remarquable tentative de divination des Porismes; Stewart (1717-1785), par ses *Théorèmes généraux*, tâchèrent de ranimer le goût des méthodes anciennes. Mais en dépit de ces louables efforts, et malgré quelques questions traitées par Euler (1707-1783), Lambert (1728-1777) et d'autres célèbres analystes, aucune doctrine nouvelle ne surgit jusqu'au XIX^e siècle, et

(*) CHASLES, *Aperçu historique*... Bruxelles, 1837.

cette période se distingue surtout par les belles applications que l'on fit de la Géométrie à l'étude des phénomènes naturels.

Au commencement du XIX^e siècle, la création de la Géométrie descriptive marqua une ère nouvelle dans l'histoire de la Géométrie. Considérée comme simple doctrine géométrique, indépendamment de son utilité pratique, la Géométrie de Monge fut d'un immense secours dans l'étude des propriétés de l'étendue. En familiarisant l'esprit avec la forme des corps, elle développa notre puissance de conception, éclaira la Géométrie analytique dont elle apprit à interpréter les résultats avec une grande facilité, et permit de raisonner, dans les cas les plus compliqués, sans le secours de ces figures qui, en absorbant trop l'attention, entravent la pensée. Elle montra l'alliance intime des figures planes et des figures de l'espace, et la science s'enrichit dès lors de ces méthodes élégantes et tant cultivées depuis qui permettent de déduire des propriétés des figures à trois dimensions les théorèmes de la Géométrie plane.

C'est encore à Monge et à son école qu'on doit l'introduction dans la science d'un mode de démonstration qui, quoique manquant au fond de cette rigueur si justement recherchée par les géomètres anciens, a cependant conduit à de magnifiques résultats. Nous voulons parler du *principe des relations contingentes* ou *de continuité* : « Certaines parties d'une » figure, considérées dans un état général de construction, » peuvent être indifféremment réelles ou imaginaires. Or, il » arrive souvent que ces parties servent utilement, dans le » cas de la réalité, à la démonstration d'un théorème, et que » cette démonstration n'a plus lieu quand ces mêmes parties » deviennent imaginaires. Alors on dit qu'en vertu du *prin-* » *cipe de continuité* le théorème démontré dans le premier » cas s'étend au second, et on l'énonce d'une manière géné- » rale. Quelquefois le contraire a lieu, et c'est quand cer-

» taines parties d'une figure sont imaginaires que l'on y » trouve les éléments d'une démonstration facile, dont on » applique ensuite les conséquences, en vertu du *principe* » *de continuité*, au cas où ces mêmes parties sont réelles et » où la démonstration n'existe plus (*). » Tel a été le point de départ de l'introduction des imaginaires en Géométrie; mais nous devons ajouter que cette introduction si importante n'a été accomplie, d'une manière véritablement irréprochable, qu'un peu plus tard par M. Chasles, dont les démonstrations se distinguent par ce caractère spécial que les objets susceptibles de devenir imaginaires n'y entrent pas sous forme explicite, mais s'y trouvent représentés par des éléments réels, de même que les racines d'une équation n'entrent pas elles-mêmes dans les calculs de la Géométrie analytique, mais y sont représentées collectivement par les coefficients de cette équation.

L'apparition de la *Géométrie* de Monge recula donc les bornes de la Géométrie pure, un peu délaissée depuis un siècle, et l'on chercha dès lors à obtenir par cette voie seule les nombreux résultats dont l'analyse de Descartes avait enrichi la science. Parmi les ouvrages entrepris dans ce but et qu'on peut regarder comme l'heureuse continuation de ceux de Desargues et de Pascal, il faut citer au premier rang la *Géométrie de position* et l'*Essai sur les transversales* de Carnot, les *Développements de Géométrie* de M. Charles Dupin, et le grand *Traité des Propriétés projectives des figures* dans lequel M. Poncelet, par l'habile emploi du principe de continuité et la belle création des théories des polaires réciproques et des figures homologiques, a démontré toutes les propriétés connues des lignes et des surfaces du second ordre, et a doté en outre la science d'une foule de résultats nouveaux.

(*) CHASLES, Préface de la *Géométrie supérieure*, 1852.

Il convient de signaler encore les savants écrits de Hachette, Brianchon, Gergonne, Dandelin, Quetelet, les recherches de Steiner et de Gudermann sur la Géométrie de la sphère qu'avaient déjà cultivée Lexell, Fuss et Lhuillier de Genève; la belle *Théorie de la rotation des corps* de Poinsot, ainsi que les études de ce géomètre et de Cauchy sur les polyèdres.

Les travaux de M. Chasles sont le dernier terme des progrès continus réalisés par la Géométrie depuis soixante ans. L'*Aperçu historique*, la *Géométrie supérieure*, le *Traité des Porismes*, les précieuses recherches sur l'*attraction des ellipsoïdes*, sur les *cônes du second ordre*, sur les *surfaces réglées*, le Mémoire sur la *dualité* et l'*homographie*, ces deux lois si générales de l'étendue figurée, et tant d'autres belles productions de l'illustre maître, feront l'honneur de notre époque!

La Géométrie marche donc à grands pas dans une voie féconde. Grâce aux belles conquêtes de notre siècle, elle a regagné sur l'Analyse le terrain perdu, et sa tendance actuelle, comme celle de toute science en voie d'accroissement, est de se grouper autour d'une loi primordiale d'où découleraient ensuite régulièrement toutes les vérités particulières.

Après cette rapide excursion dans le domaine de l'histoire, qu'on nous pardonnera à cause de la rareté de l'*Aperçu historique*, nous devons parler du Traité que nous présentons au lecteur.

Il y a aujourd'hui deux manières d'écrire un livre destiné aux études : on peut se restreindre aux *Programmes officiels* et n'en pas franchir le cadre; on peut aussi, en suivant strictement ces Programmes dans ce qu'ils ont d'obligatoire, aller au delà et essayer de les compléter. Pour appliquer une science, il ne suffit pas d'en connaître quelques parties; il faut être familiarisé avec toutes ses méthodes, être maître de l'ensemble. Les magnifiques découvertes de la Géométrie moderne n'ont pas pénétré dans l'enseignement; délaissées par les Programmes, elles n'occupent pas dans la série des études mathématiques la place qui leur est due; on en parle à peine et accessoirement en Géométrie analytique, où elles *semblent* bien à tort être une nouvelle conquête de l'admirable instrument créé par Descartes. Nous sommes loin de reprocher aux Programmes leur silence à cet égard: ils sont tellement chargés, qu'on serait mal venu à réclamer une addition. Mais ne peut-on *apprendre* un programme d'examen et essayer en même temps de *comprendre* la portée de la science que l'on étudie, en prenant une connaissance rapide, une vue générale de ses principales méthodes? Telle est la pensée qui nous a guidés dans la composition de cet ouvrage; c'est aussi celle qui apparaît dans la division des caractères employés.

Borné aux parties imprimées en caractères ordinaires, l'ouvrage est entièrement conforme aux Programmes officiels et à leur esprit. Les numéros imprimés en petits caractères contiennent d'utiles développements du texte destinés aux candidats aux Écoles spéciales. Enfin les Appendices sont consacrés à l'exposition des nouvelles méthodes. L'élève studieux les lira à son aise sans se préoccuper de la nécessité de retenir immédiatement tous les détails; il y puisera une profonde admiration pour la science dont les limites lui apparaîtront si lointaines, un goût des spéculations mathématiques qui donnera à son esprit plus de rectitude et de fermeté; et à mesure que son savoir gagnera en étendue, par une réaction inévitable, les matières exigées, éclairées par ses nouvelles connaissances, perdront pour lui leur difficulté première. Est-il donc utile qu'il y ait comme un monde entre la science des Colléges et celle des Instituts? Au commencement du siècle, les candidats reçus à l'École Polytechnique avaient tous entendu parler de Lagrange, de Laplace, de Monge, dont ils avaient essayé de lire les ouvrages, et la génération qu'ils ont donnée à la France n'a pas été indigne de ces grands modèles.

Nous avons cherché à élucider toutes les questions délicates ou fondamentales du texte. Suivant les conseils de Pascal (*), nous avons attaché un grand prix à la clarté et à l'exactitude des définitions. Qu'on nous permette d'indiquer rapidement quelques résultats de notre travail.

Nous mentionnerons la marche suivie dans l'exposition de la mesure des grandeurs et dans la recherche des véritables conditions de proportionnalité de deux grandeurs de même espèce, qui simplifie notablement tous les théorèmes relatifs à la mesure. L'Appendice du second Livre présente, sur la résolution des problèmes, des considérations qui doivent entrer dans les éléments. La théorie des lignes proportionnelles dans le cercle a été fondée sur l'emploi des lignes antiparallèles, ce qui rend presque intuitive la solution d'un grand nombre de questions, comme on peut le remarquer pour l'inscription simultanée du décagone régulier ordinaire et du décagone étoilé. Les propriétés du quadrilatère inscriptible ont été données d'une manière fort simple. La mesure de la circonférence a été traitée avec une rigueur toute nouvelle, en n'invoquant toutefois que des notions élémentaires; et, quant au calcul du rapport de la circonférence au diamètre, nous avons montré plus complétement qu'on ne l'avait fait jusqu'ici l'identité des méthodes des périmètres et des isopérimètres.

L'Appendice du troisième Livre mérite une mention spéciale. C'est, comme le montrera un coup d'œil jeté sur la Table des matières, un résumé de la plupart des nouvelles doctrines et une sorte de préparation à la lecture de la *Géométrie supérieure* de M. Chasles. L'homographie et l'involution ont été rejetées au huitième Livre, là où l'on doit être déjà familiarisé avec l'emploi des imaginaires en Algèbre, et où l'application

---

(*) *Discours sur l'esprit géométrique.*

de ces méthodes à la théorie des coniques peut mieux en dévoiler l'importance et la fécondité. L'Appendice du quatrième Livre est consacré à l'exposition de l'une des belles méthodes de Steiner sur les maximums et les minimums des figures planes.

La Géométrie dans l'espace a été aussi l'objet de quelques modifications. Grâce à une belle démonstration que nous devons à l'obligeance de M. Ossian Bonnet, nous avons pu simplifier beaucoup le cinquième Livre, qui coûtait aux élèves de si pénibles efforts. Nous eussions simplifié davantage, si, adoptant pleinement l'opinion du savant membre de l'Institut, nous avions placé tout ce qui concerne les droites et les plans parallèles avant la théorie de la perpendiculaire au plan. Mais, comme il est toujours fâcheux de rompre complétement avec la tradition, nous avons cru sage de respecter l'ordre habituel; et nous nous sommes bornés à un changement, partiel il est vrai, mais déjà très-notable et qui ne peut manquer d'être bien accueilli, puisqu'il n'exige en tout que le déplacement de deux théorèmes. Nous avons en outre réuni dans ce cinquième Livre toutes les propositions utiles en Géométrie descriptive, et qui ne font qu'embarrasser les préliminaires de cette dernière science. Enfin l'Appendice renferme les propriétés si utiles du quadrilatère gauche et le rapport anharmonique de quatre plans.

Dans le sixième Livre nous signalerons les démonstrations relatives à la mesure de la pyramide et du prisme tronqués; l'extension si utile donnée au mot *tronc de pyramide*, qui facilite singulièrement l'interprétation des résultats de l'Algèbre; un théorème très-général sur le volume de certains polyèdres; et enfin la théorie de la symétrie que, grâce à l'emploi de deux théorèmes fondamentaux dus à Bravais, nous avons pu réduire au dernier degré de simplicité. L'Appendice renferme les propriétés générales des polyèdres, l'analyse du beau travail de Cauchy sur les conditions d'égalité et de similitude de ces corps, la théorie des centres des distances proportionnelles et l'évaluation de l'aire latérale et du volume du tronc de prisme quelconque.

Les démonstrations de plusieurs propriétés des corps ronds ont subi des perfectionnements. Nous signalerons en particulier celles qui sont relatives aux aires et aux volumes, et celle du plus court chemin sur la sphère, qui nous a été communiquée par M. O. Bonnet. On trouvera encore dans ce Livre la section antiparallèle du cône oblique à base circulaire, les propriétés de la projection stéréographique, et une démonstration simple et rigoureuse du théorème fondamental sur le plan tangent aux surfaces quelconques dont l'existence n'avait encore été établie géométriquement que d'une manière assez peu satisfaisante. L'Appendice contient des développements nouveaux sur la Géométrie de la sphère, trop peu cultivée dans les cours, le théorème de Guldin, la propriété dont jouit la sphère d'être maximum parmi tous les corps de même aire, et enfin la théorie des polyèdres réguliers. C'est la première fois que la théorie des polyèdres réguliers étoilés et les figures qui s'y rattachent paraissent dans un Traité. Nous avons analysé avec soin les beaux travaux de Poinsot, de Cauchy et de M. Bertrand sur ce sujet. Enfin, l'extension exacte et complète de la formule d'Euler aux polyèdres d'espèce supérieure a permis de rectifier quelques désignations erronées relatives à l'espèce des nouveaux corps.

Le huitième Livre est consacré aux courbes usuelles, l'ellipse, l'hyperbole, la parabole et l'hélice. Les propriétés fondamentales des trois coniques ont été présentées sur un plan uniforme; nous avons particulièrement étudié ce qui a rapport aux tangentes. Un paragraphe traite de l'ellipse considérée comme projection du cercle et des tracés si commodes qui en découlent. Un autre est relatif aux sections planes du cône et de la surface gauche de révolution; nous y démontrons simplement que la projection d'une conique sur un plan est encore une conique. L'Appendice de ce dernier Livre a une importance capitale. Il renferme les propriétés fondamentales de l'homographie et de l'involution, suivies de leur application aux coniques, et un résumé substantiel de la doctrine des polaires réciproques, de la transformation homologique et de la méthode de projection. Certains détails délicats, tels que l'introduction des imaginaires et la notion si féconde des points circulaires à l'infini, ont été l'objet d'un soin minutieux. Ajoutons qu'on se tromperait en ne voyant dans notre théorie élémentaire des coniques qu'une analyse et des extraits du beau Traité dont M. Chasles vient de publier le premier volume. Notre travail était terminé plusieurs années avant l'apparition de ce savant ouvrage dont nous avons cependant profité depuis pour améliorer quelques passages. D'ailleurs, la différence du but entraînait nécessairement dans les procédés une différence qui ne saurait échapper au lecteur attentif. Nous signalerons la démonstration nouvelle du principe fondamental, l'introduction des foyers et la marche simple qui nous conduit aux équations des coniques.

Nous avons donné toute notre attention au style et au choix des nombreux Exercices qui terminent chaque Livre et qui sont classés par paragraphes. Enfin, deux Notes relatives, l'une à l'incommensurabilité du rapport de la circonférence au diamètre, l'autre à quelques formules fondamentales dues à Euler, Lagrange et Carnot, terminent cet ouvrage, que nous livrons avec confiance à l'appréciation de tous ceux qui aiment la Géométrie.

TABLE DES MATIÈRES.

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE PREMIER.

LA LIGNE DROITE.

LIVRE II.

LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

LIVRE III.

LES FIGURES SEMBLABLES.

LIVRE IV.

LES AIRES.

Pages

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE V.

LE PLAN.

LIVRE VI.

LES POLYÈDRES.

Pages.

LIVRE VII.

LES CORPS RONDS.

LIVRE VIII.

LES COURBES USUELLES.

ERRATA.

Page 1, ligne 1, *au lieu de* le lieu, *lisez* l'étendue du lieu.

Page 147, ligne 5 en montant, *au lieu de* au carré de la médiane, *lisez* à deux fois le carré de la médiane.

Page 276, ligne 7 en montant, *au lieu de* si deux rectangles, *lisez* si trois rectangles.

Page 562, ligne 4 en montant, *au lieu de* intérieur ou, *lisez* intérieur au.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

INTRODUCTION.

1. On appelle *volume* d'un corps le lieu que ce corps occupe dans *l'espace* indéfini. Ce lieu, essentiellement limité, est séparé de l'espace qui l'entoure par la *surface* du corps.

Les diverses faces d'un corps sont autant de surfaces dont les limites ou les intersections mutuelles s'appellent *lignes*.

Enfin on donne le nom de *points* aux limites ou aux extrémités d'une ligne, aux intersections mutuelles des lignes.

Ces idées de *surface*, de *ligne* et de *point*, étant une fois acquises par la considération des corps, la surface, la ligne et le point peuvent ensuite être conçus indépendamment du corps, des surfaces et des lignes, dont ils constituent les limites.

C'est ainsi qu'on arrive à regarder inversement une ligne comme le lieu des positions successives d'un point mobile, et une surface comme le lieu des positions successives d'une ligne qui se meut suivant une loi déterminée.

2. La plus simple de toutes les lignes est la *ligne droite*, dont la notion est familière à tout le monde, et dont un fil tendu offre l'image.

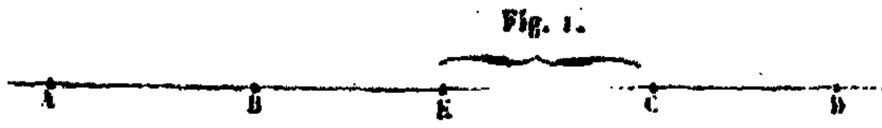
La ligne droite est le plus court chemin entre deux quelconques de ses points.

Deux points déterminent une droite. En d'autres termes, par deux points on peut toujours faire passer une droite, et on n'en peut faire passer qu'une. D'où il suit que *deux droites qui ont deux points communs coïncident, non-seulement entre* *ces deux points, mais encore dans toute leur étendue;* et, par conséquent, que *deux droites distinctes ne peuvent avoir qu'un point commun.*

Ces propriétés fondamentales de la ligne droite sont intuitives, et de longs commentaires ne pourraient qu'obscurcir le sentiment que chacun en possède.

3. En Géométrie, on indique un point par une lettre, une droite par deux lettres affectées à deux de ses points. Ainsi, l'on dit le point A, la droite AB (*fig.* 1).

Fig. 1.



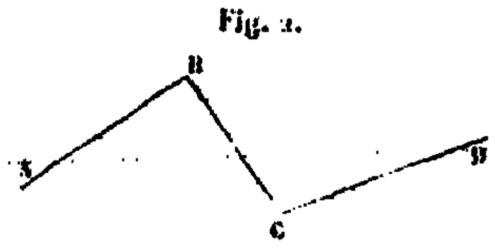
Deux portions AB et CD, prises respectivement sur deux droites *indéfinies*, ont la même *longueur* lorsqu'elles sont superposables. La droite CD étant transportée de manière que le point C tombe en A, si l'on peut amener le point D sur le point B en faisant tourner la droite CD autour du point A, la portion CD aura une longueur égale à celle de la portion AB.

Pour *ajouter* deux portions de droites AB et CD, on porte la portion CD à la suite de AB, sur la droite indéfinie dont AB fait partie : BE étant la nouvelle position de CD (*fig.* 1), on dit que AE a une longueur égale à la somme des longueurs de AB et de CD.

Si l'on avait une troisième droite à ajouter aux deux premières, on la porterait à la suite de BE, et ainsi de suite.

4. On nomme *ligne brisée* une ligne formée de plusieurs portions de droites distinctes; telle est la ligne ABCD (*fig.* 2).

Fig. 2.



On confond sous la dénomination commune de *lignes courbes* toutes les lignes autres que la ligne droite ou les lignes brisées.

5. La plus simple de toutes les surfaces est le *plan*, dont

une glace polie peut donner l'idée. La définition géométrique du plan consiste en ce que toute droite qui joint deux points de cette surface y est contenue tout entière. C'est ainsi, par exemple, que, pour vérifier si une table est plane, on s'assure qu'on peut y appliquer *dans tous les sens* une règle bien dressée, sans qu'il reste aucun vide entre la table et la règle.

Une surface formée de plusieurs portions de plans distinctes est dite *brisée;* et l'on confond sous la dénomination commune de *surfaces courbes* toutes les surfaces autres que le plan et les surfaces brisées.

6. On désigne sous le nom générique de *figures* les surfaces et les lignes ou l'ensemble de plusieurs de ces éléments. Une figure est *plane* lorsqu'elle est située tout entière dans un plan unique.

La Géométrie a pour objet l'étude des propriétés des figures et, en particulier, la mesure de leur étendue. Elle ramène la mesure d'un volume ou d'une surface quelconque à la mesure directe de certaines lignes droites convenablement choisies dans chaque cas.

On divise la Géométrie en deux parties : la *Géométrie plane,* relative aux figures situées dans un plan unique, et la *Géométrie dans l'espace,* relative aux figures dont les éléments peuvent être disposés d'une manière quelconque dans l'espace.

7. Nous terminerons cette introduction en définissant quelques mots qui sont d'un usage fréquent en Mathématiques.

Toute proposition consiste dans une *hypothèse* et une *conclusion* qui en découle en vertu d'un raisonnement qu'on appelle *démonstration.*

Un *théorème* est une proposition à démontrer. Un *lemme* est une proposition préliminaire destinée à faciliter la démonstration d'un théorème. Un *corollaire* est une conséquence d'un théorème. Un *scolie* est une remarque sur une ou plusieurs propositions. Un *problème* est une question à résoudre.

Une proposition étant donnée, on énonce sa proposition *réciproque,* en prenant la conclusion pour hypothèse et l'hypothèse pour conclusion; on énonce sa proposition *contraire,* en adoptant à la fois une hypothèse contraire et une conclusion contraire.

Par exemple, soit cette proposition directe : *si* A *égale* B, C *égale* D ; on aura pour proposition réciproque : *si* C *égale* D, A *égale* B ; et pour proposition contraire : *si* A *n'égale pas* B, C *n'égale pas* D.

On voit que la proposition directe et la proposition contraire étant vraies, leurs propositions réciproques le sont nécessairement. De même, la proposition directe et la proposition réciproque étant démontrées, leurs propositions contraires le sont par cela même.

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE PREMIER.

LA LIGNE DROITE.

§ I. — DES ANGLES.

DÉFINITIONS.

8. On exprime une idée claire pour tous les esprits, lorsqu'on dit que deux droites AB et AC qui se rencontrent forment un *angle;* c'est là une notion fondamentale qui, comme celle de la ligne droite, ne saurait être *définie*, c'est-à-dire ramenée à une autre plus simple.

Fig. 3.

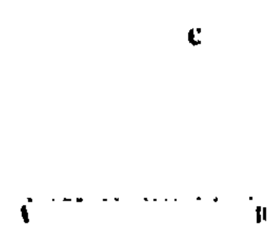
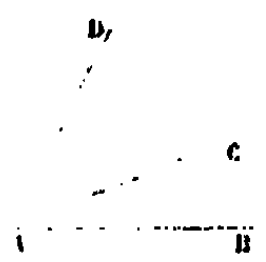


Fig. 4.

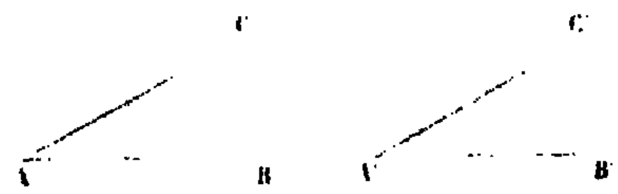


Les deux droites AB et AC sont les *côtés* de l'angle, et leur point d'intersection A est son *sommet*. On désigne un angle isolé par la lettre du sommet. Lorsque plusieurs angles ont même sommet, on indique celui des angles qu'on considère au moyen de trois lettres, savoir : deux lettres placées sur les côtés, et la lettre du sommet qu'on énonce au milieu. Ainsi, dans la figure 3, on dit simplement l'angle A ; dans la figure 4, on distingue les trois angles BAC, CAD, BAD.

Deux angles, tels que BAC et CAD, qui ont le même sommet A, un côté commun AC, et les deux autres côtés AB et AD situés de part et d'autre du côté commun, sont appelés *adjacents*.

9. On dit que deux angles sont *égaux*, lorsqu'on peut les porter l'un sur l'autre de manière qu'ils coïncident. Ainsi, lorsqu'on aura placé le côté A'B' sur AB de façon que le sommet A' soit en A et que le côté A'C' tombe comme AC au-

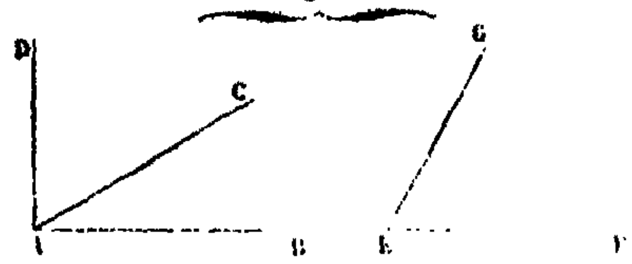
Fig. 5.



dessus de AB (*fig.* 5), il faudra, pour que les angles A et A' soient égaux, que le côté A'C' s'applique sur AC.

Pour ajouter deux angles BAC, FEG, on transporte le second à la suite du premier (*fig.* 6), de manière à former les deux

Fig. 6.

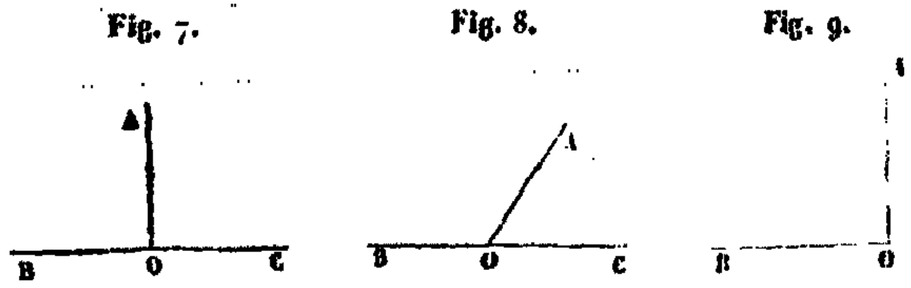


angles adjacents BAC, CAD; l'angle BAD des deux côtés non communs AB et AD est la *somme* des deux angles proposés.

10. On acquiert une idée très-nette de l'angle, en supposant que l'un des côtés AC, d'abord appliqué sur le premier AB, tourne autour du point A comme une branche de compas autour de sa charnière. Dans cette rotation, le côté mobile AC fait avec le côté fixe AB un angle qui croît par degrés insensibles, ou d'une *manière continue*. Il résulte de ce mode de génération, ainsi que des définitions du numéro précédent, que la grandeur d'un angle est indépendante de la longueur de ses côtés.

11. On dit qu'une droite AO est *perpendiculaire* sur une

Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.



droite BC (*fig.* 7), lorsque les deux angles adjacents AOB, AOC, qu'elle forme avec celle-ci sont *égaux*. Si la droite AO est telle (*fig.* 8), que les angles adjacents AOB, AOC, soient *inégaux*, on dit que cette droite est *oblique* sur BC. Le point O est le *pied* de la perpendiculaire ou de l'oblique AO sur la droite BC.

On appelle *angle droit* tout angle AOB (*fig.* 9) dont un côté est perpendiculaire sur l'autre.

12. Deux angles sont dits *opposés par le sommet* lorsque les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre. D'après cela, deux droites indéfinies BB' et CC' (*fig.* 10) forment, en se coupant au point A, quatre angles BAC et B'AC', CAB' et BAC', qui sont deux à deux opposés par le sommet.

Fig. 10.

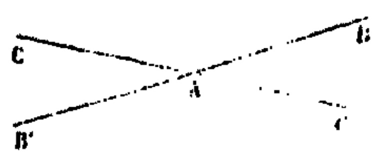
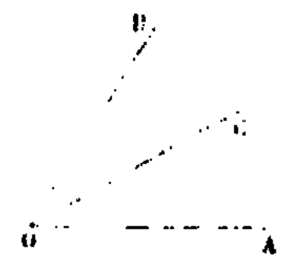


Fig. 11.

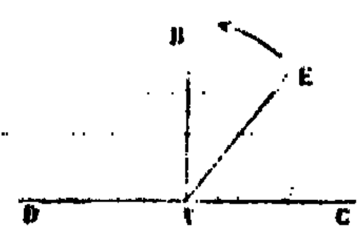


13. On nomme *bissectrice* d'un angle AOB (*fig.* 11) la droite OC qui, menée par le sommet, divise cet angle en deux autres, AOC et BOC, égaux entre eux.

THÉORÈME.

14. *Par un point A, pris sur une droite DC, on peut toujours élever une perpendiculaire AB sur cette droite, et on ne peut en élever qu'une* (*fig.* 12).

Fig. 12.



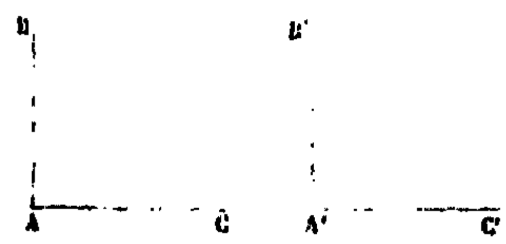
En effet, supposons qu'une droite AE, d'abord appliquée sur AC, tourne autour du point A dans le sens de la flèche. L'angle EAC, nul au début, croîtra constamment, tandis que l'angle adjacent EAD diminuera sans cesse et finira par s'annuler, lorsque la droite AE viendra s'appliquer sur AD. Donc, l'angle EAC, d'abord inférieur à l'angle EAD, différera de moins en moins de cet angle, lui deviendra égal, puis le surpassera de plus en plus. D'après cela, parmi les positions successives de la droite AE, il y en aura une, et une seule AB, pour laquelle les angles adjacents BAC et BAD seront égaux, c'est-à-dire pour laquelle cette droite sera perpendiculaire sur DC.

COROLLAIRE.

15. *Tous les angles droits sont égaux.*

Soient (*fig.* 13) les deux angles BAC, B'A'C', qui ont été formés, le premier en élevant la perpendiculaire AB sur AC, le

Fig. 13.



second en élevant la perpendiculaire A'B' sur A'C'; ces deux angles sont droits, et il faut démontrer qu'ils sont égaux. Transportons à cet effet la deuxième figure sur la première, de façon que le point A' tombe en A et que le côté A'C' s'applique sur AC; le côté A'B' deviendra alors perpendiculaire sur AC au point A : il s'appliquera donc sur AB, puisque par le point A on ne peut élever sur AC qu'une seule perpendiculaire. Donc les deux angles BAC, B'A'C', coïncideront, c'est-à-dire (9) seront égaux.

SCOLIE.

16. Cette propriété dont jouit l'angle droit, d'avoir une grandeur invariable, est très-importante. D'après cela, l'angle droit est en quelque sorte un type auquel on peut rapporter les autres angles.

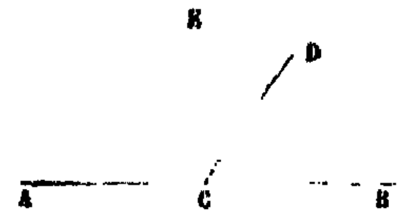
On dit qu'un angle est *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est *plus petit* ou *plus grand* que l'angle droit. Ainsi, dans la figure 12, l'angle EAC est aigu et l'angle EAD est obtus.

Deux angles sont dits *complémentaires* lorsque leur somme est égale à un angle droit. Ainsi, dans la figure 12, chacun des angles BAE, EAC, est le *complément* de l'autre. Deux angles qui ont des compléments égaux sont égaux.

THÉORÈME.

17. *Toute ligne droite* CD *qui en rencontre une autre* AB *fait avec celle-ci deux angles adjacents* ACD, BCD, *dont somme est égale à deux angles droits* (*fig.* 14).

Fig. 14.



En effet, si CD est perpendiculaire sur AB, le théorème est évident, puisque les angles adjacents ACD, BCD, sont droits tous les deux.

Si CD est oblique sur AB, les deux angles ACD, BCD, sont inégaux; soit ACD le plus grand. La perpendiculaire CE, élevée au point C sur AB, tombera dans l'intérieur de cet angle et le décomposera en deux autres ACE et ECD. On aura donc

$$ACD + BCD = ACE + ECD + BCD.$$

Or l'angle ACE est droit, et la somme ECD + BCD est égale à l'angle droit BCE. Donc enfin

$$ACD + BCD = 2 \text{ angles droits.}$$

18. On dit que deux angles sont *supplémentaires* lorsque leur somme est égale à deux angles droits. D'après cela, dans la figure 14, chacun des angles adjacents ACD, BCD, est le *supplément* de l'autre. Deux angles qui ont des suppléments égaux sont égaux. Pour avoir le supplément BCD d'un angle ACD, il suffit de prolonger l'un des côtés AC au delà du sommet.

19. Réciproquement, *si deux angles adjacents* ACD, BCD, *sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs* AC *et* BC *sont dans le prolongement l'un de l'autre* (*fig.* 14).

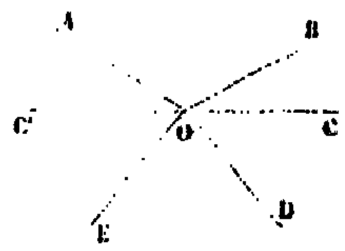
En effet, le prolongement de AC doit former avec CD (18) un angle égal au supplément de ACD, c'est-à-dire, à cause de l'hypothèse, un angle égal à BCD ; donc ce prolongement ne diffère pas de BC.

COROLLAIRES.

20. ***La somme de tous les angles consécutifs*** **ABD, DBE, EBF, FBC,** ***que l'on peut former autour du point*** **B** ***d'une droite*** **AC,** ***d'un même côté de cette droite, est égale à deux angles droits*** (*fig.* 15); car leur somme est évidemment la même que celle des deux angles adjacents ABF, FBC.

Fig. 15.

Fig. 16.



21. ***La somme de tous les angles consécutifs*** **AOB, BOC, COD, DOE, EOA,** ***que l'on peut former autour d'un même point*** **O,** ***est égale à quatre angles droits*** (*fig.* 16); car, en prolongeant OC, par exemple, suivant OC', on voit que cette somme équivaut à celle des angles C'OA, AOB, BOC, situés d'un côté de CC', plus celle des angles COD, DOE, EOC', situés de l'autre côté ; et l'on vient de prouver que chacune de ces deux sommes partielles est égale à deux angles droits.

THÉORÈME.

22. ***Lorsque deux lignes droites*** **AB, DE,** ***se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux*** (*fig.* 17).

Fig. 17.

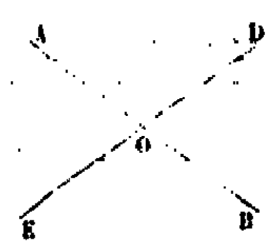
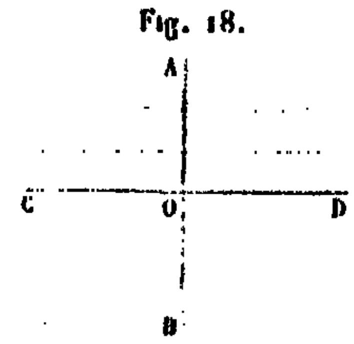


Fig. 18.



Soient, par exemple, les deux angles opposés AOE, DOB. Le premier AOE a pour supplément l'angle AOD formé par le côté AO et le prolongement OD du côté OE. Le second BOD a aussi pour supplément l'angle AOD, qui peut être considéré comme formé par le côté OD et le prolongement OA du côté BO. Les deux angles AOE, DOB, ayant même supplément AOD, sont égaux entre eux.

On démontrerait de la même manière l'égalité des angles AOD et BOE.

COROLLAIRES.

23. *Lorsque l'un des quatre angles formés par la rencontre de deux droites indéfinies* AB *et* CD *est droit, les trois autres sont aussi droits* (*fig.* 18); car, de ce que l'angle AOC, par exemple, est droit, il résulte que son opposé DOB doit l'être, ainsi que chacun de ses suppléments AOD et COB.

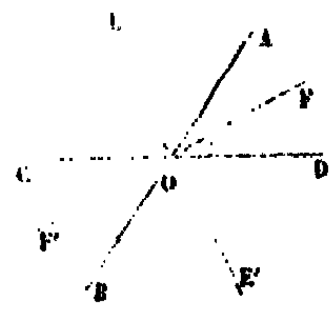
On voit par là que :

Lorsqu'une droite AO *est perpendiculaire sur une autre droite* CD, *son prolongement* OB *est aussi perpendiculaire sur la même droite;*

Si une droite AB *est perpendiculaire sur une autre* CD, *la seconde* CD *est à son tour perpendiculaire sur la première* AB.

24. *Les bissectrices* OE, OF, *de deux angles adjacents et supplémentaires* AOC, AOD, *sont perpendiculaires l'une sur l'autre* (*fig.* 19); car la somme des deux angles AOC, AOD,

Fig. 19.



étant égale à deux angles droits, celle des angles AOE, AOF, qui sont respectivement moitié des premiers, est égale à un angle droit.

Les bissectrices OF *et* OF' *de deux angles opposés par le sommet,* AOD *et* BOC, *sont dans le prolongement l'une de l'autre* (*fig.* 19); car chacune d'elles doit être perpendiculaire au point O sur la bissectrice OE de l'angle AOC qui est adjacent et supplémentaire par rapport à chacun des angles considérés AOD et BOC.

Il résulte de là que *les bissectrices des quatre angles déterminés par la rencontre de deux droites* AB *et* CD (*fig.* 19) *forment deux droites indéfinies* EE' *et* FF', *à angle droit l'une sur l'autre.*

§ II. — DES TRIANGLES.

DÉFINITIONS.

25. On appelle *triangle* la portion de plan renfermée entre trois droites qui se coupent deux à deux. La partie de chaque droite comprise entre les points où elle rencontre les deux autres est un *côté* du triangle. Ainsi la figure ABC (*fig.* 20) est un triangle dont les côtés sont AB, BC, CA. Chacun des angles formés par deux côtés consécutifs est un *angle* du triangle;

Fig. 20.

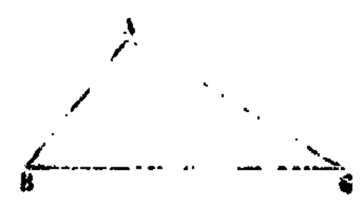


Fig. 21.

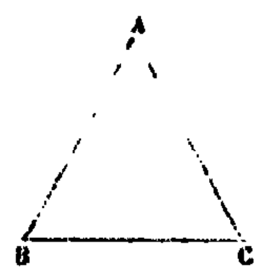
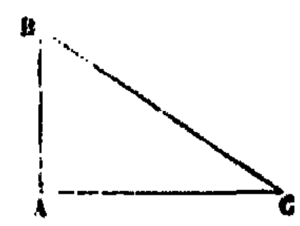


Fig. 22.



les sommets A, B, C, de ces trois angles sont appelés les *sommets* du triangle.

On dit que deux triangles sont égaux, lorsqu'on peut les appliquer l'un sur l'autre de manière qu'ils coïncident.

26. Un triangle est *isocèle*, quand il a deux côtés égaux : tel est le triangle ABC (*fig.* 21), dans lequel AB est égal à AC. Le troisième côté BC prend spécialement le nom de *base* du triangle isocèle, et le sommet opposé A le nom de *sommet* du triangle isocèle.

Un triangle est *équilatéral*, lorsqu'il a ses trois côtés égaux entre eux.

Enfin un triangle est dit *rectangle*, lorsqu'il a un angle droit. Le côté BC (*fig.* 22) opposé à l'angle droit A reçoit le nom d'*hypoténuse*.

THÉORÈME.

27. *Dans tout triangle* ABC, *un côté quelconque* BC *est moindre que la somme des deux autres* AB *et* AC (*fig.* 20).

Car la ligne droite BC, étant le plus court chemin entre les points B et C, est moindre que la ligne brisée BA + AC.

COROLLAIRE.

28. *Dans tout triangle* ABC, *un côté quelconque* BC *est plus grand que la différence des deux autres* AC *et* AB. En effet, soit AC le plus grand des deux côtés AC et AB, on aura, d'après le numéro précédent,

$$BC + AB > AC;$$

d'où, en retranchant AB de part et d'autre,

$$BC > AC - AB.$$

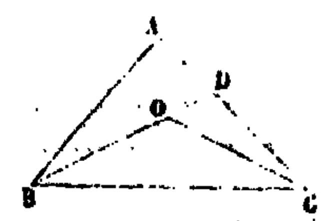
SCOLIE.

29. *Trois droites de longueurs arbitraires ne peuvent pas toujours former les trois côtés d'un triangle.* Il faut que chacune d'elles soit moindre que la somme des deux autres, ou, plus brièvement, que la plus grande d'entre elles soit inférieure à la somme des deux autres. Par exemple, il n'existe pas de triangle dont les côtés aient des longueurs respectivement égales à 7 mètres, 5 mètres, 1 mètre.

THÉORÈME.

30. *La somme des droites* OB *et* OC, *qui joignent un point* O *pris à volonté dans l'intérieur d'un triangle aux extrémités de l'un de ses côtés* BC, *est moindre que la somme des deux autres côtés* AB *et* AC (*fig.* 23).

Fig. 23.



En effet, prolongeons BO jusqu'au point D où cette droite rencontre le côté AC. En remplaçant la ligne droite OC par la ligne brisée OD + DC, on change la somme OB + OC en une autre plus grande

$$OB + OD + DC \quad \text{ou} \quad BD + DC.$$

De même, en remplaçant la ligne droite BD par la ligne brisée AB + AD, on change la somme BD + DC en une autre

$$AB + AD + DC \quad \text{ou} \quad AB + AC,$$

qui est plus grande encore. On a donc

$$OB + OC < AB + AC.$$

THÉORÈME.

31. *Dans un triangle :*

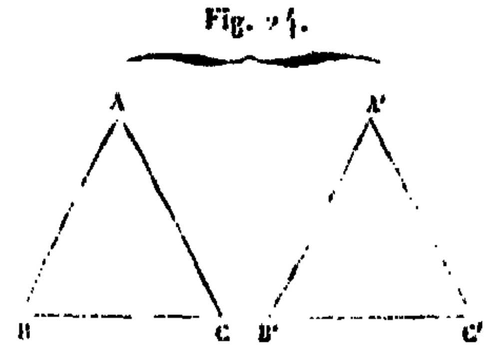
1° *Si deux angles sont égaux, les côtés opposés sont égaux, et le triangle est isocèle ;*

2° *Si deux angles sont inégaux, le côté opposé au plus grand de ces deux angles est plus grand que le côté opposé à l'autre angle.*

En effet :

1° Soit (*fig.* 24) ABC un triangle dont les angles B et C sont

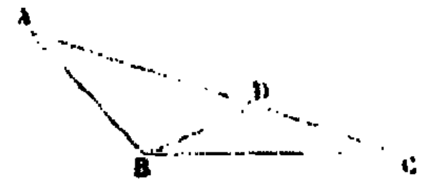
Fig. 24.



égaux entre eux. Considérons un second triangle A'B'C', reproduction exacte du premier, et transportons-le sur ABC, *en le renversant*, de manière que B' tombe en C et C' en B. Le côté C'B' coïncidera avec son égal BC. L'angle C' étant égal à l'angle C et par suite à l'angle B, si l'on fait tomber les deux triangles d'un même côté par rapport à BC, le côté C'A' prendra la direction BA, et le point A' tombera quelque part sur la droite indéfinie BA. De même, l'angle B' étant égal à l'angle B, et par suite à l'angle C, le côté B'A' prendra la direction CA, et le point A' tombera quelque part sur la droite indéfinie CA. Le point A', devant se trouver à la fois sur les deux droites BA et CA, tombera donc sur leur intersection A, et les deux triangles ABC, A'B'C', coïncideront. Puisque le côté A'B', qui est égal à AB, vient recouvrir exactement le côté AC, on en conclut que AB et AC sont égaux.

2° Soit (*fig.* 25) le triangle ABC dans lequel l'angle ABC est

Fig. 25.



plus grand que l'angle C. On pourra mener dans l'angle ABC une droite BD qui fasse avec BC un angle DBC égal à l'angle C. Le triangle BDC ayant deux angles égaux DBC, DCB, sera isocèle, et l'on aura $BD = DC$. Or, dans le triangle ABD, on a

$$AB < AD + BD,$$

ou, en remplaçant BD par son égal DC,

$$AB < AD + DC,$$

c'est-à-dire

$$AB < AC.$$

32. Réciproquement, *si un triangle a deux côtés égaux, c'est-à-dire est isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux; et si un triangle a deux côtés inégaux, au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

En effet, soient a et b deux côtés d'un triangle, et A et B les deux angles opposés. Le théorème précédent prouve qu'aux trois hypothèses

$$A < B, \quad A = B, \quad A > B,$$

qui sont les seules possibles, répondent respectivement les conclusions distinctes

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

Donc, si a est égal à b, A est forcément égal à B; de même, si a est plus grand que b, il faut que A soit plus grand que B, et si a est plus petit que b, il faut que A soit plus petit que B. En d'autres termes, si les côtés d'un triangle sont rangés par ordre de grandeur croissante ou décroissante, les angles opposés à ces côtés seront aussi rangés par ordre de grandeur croissante ou décroissante.

33. Le mode de démonstration qui précède est d'un usage

très-fréquent en Géométrie, et il convient de l'ériger dès à présent en règle générale :

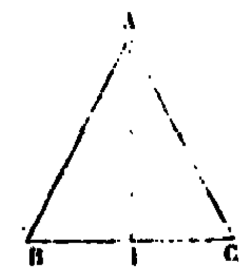
Lorsque, dans une proposition ou dans une série de propositions, on a fait toutes les hypothèses admissibles sur un sujet déterminé, et que ces hypothèses ont conduit à des conclusions respectives essentiellement distinctes et dont chacune exclut toutes les autres, on peut affirmer que les réciproques des propositions établies sont toutes vraies (*).

SCOLIE.

34. La démonstration du n° 31 (1°) met en évidence cette propriété dont jouit tout triangle isocèle, d'être superposable à lui-même *par retournement*. Cette propriété caractéristique est la clef des autres propriétés du triangle isocèle.

Ainsi (*fig.* 26), dans ce retournement du triangle iso-

Fig. 26.



cèle ABC, B venant en C et C en B, le milieu I de BC retombe sur lui-même aussi bien que le sommet A. Par suite, l'angle AIC vient recouvrir son adjacent et supplémentaire AIB, et l'angle CAI son adjacent BAI. Donc, *dans tout triangle isocèle* BAC, *la droite qui joint le sommet* A *au milieu* I *de la base* BC *est perpendiculaire sur cette base et divise l'angle au sommet en deux parties égales.*

La droite AI satisfait donc aux quatre conditions suivantes : elle passe par le sommet A, par le milieu I de la base BC, elle est perpendiculaire sur cette base, elle est bissectrice de l'angle au sommet.

Or, deux de ces quatre conditions suffisent pour déterminer la droite AI; car on sait que par deux points on ne peut mener

(*) Nous empruntons textuellement cet énoncé au *Cours de Géométrie* de M. Vincent.

qu'une droite, qu'un angle n'admet qu'une bissectrice, et que par un point pris sur une droite on ne peut lui mener qu'une perpendiculaire; de plus, on verra bientôt (42) que, par un point pris hors d'une droite, on ne peut aussi lui mener qu'une perpendiculaire. Donc, toute ligne droite assujettie à deux des quatre conditions indiquées, remplira nécessairement les deux autres. De là une série de propositions que le lecteur énoncera sans difficulté.

35. *Un triangle équilatéral a ses trois angles égaux, et, réciproquement, tout triangle dont les trois angles sont égaux est équilatéral.*

THÉORÈME.

36. *Si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun, et si l'angle compris entre les premiers est plus grand que l'angle compris entre les seconds, le troisième côté du premier triangle est plus grand que le troisième côté du second (fig. 27, 28, 29).*

Fig. 27.

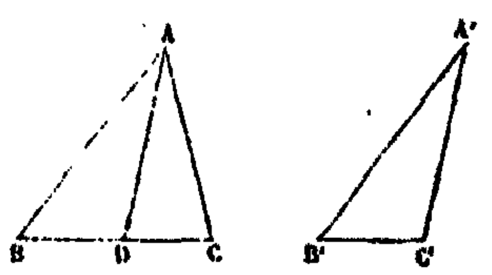
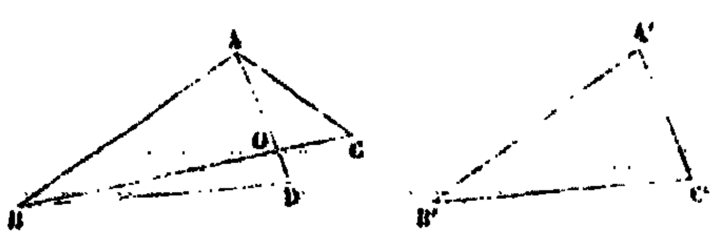


Fig. 28.

Fig. 29.



Soient les deux triangles ABC, A'B'C', dans lesquels on a $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, et l'angle BAC plus grand que l'angle A' : le côté BC sera plus grand que le côté B'C'.

En effet, plaçons le triangle A'B'C' en ABD, de manière que A'B' coïncide avec son égal AB, et que le côté A'C', qui fait avec A'B' un angle A' moindre que BAC, tombe suivant

AD dans l'intérieur de l'angle BAC. La droite BD n'étant autre chose que le côté B'C' transporté, il suffit de démontrer que BC est plus grand que BD.

Or, il peut se présenter trois cas, suivant que le point D tombe sur BC (*fig.* 27), ou à l'intérieur du triangle ABC (*fig.* 28), ou au dehors (*fig.* 29).

Dans le premier cas (*fig.* 27), le théorème est évident, puisque BD n'est qu'une partie de BC.

Dans le deuxième cas (*fig.* 28), on a (30)

$$AC + BC > AD + BD;$$

d'où, en supprimant d'un côté AC et de l'autre son égal AD,

$$BC > BD.$$

Dans le troisième cas (*fig.* 29), si l'on désigne par O le point d'intersection de AD et de BC, on a dans le triangle AOC

$$AO + OC > AC,$$

et dans le triangle BOD,

$$BO + OD > BD.$$

En ajoutant ces deux inégalités membre à membre, on obtient

$$AO + OC + BO + OD > AC + BD,$$

ou

$$AD + BC > AC + BD;$$

et, en supprimant d'un côté AD et de l'autre son égal AC,

$$BC > BD.$$

THÉORÈME.

37. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun* (*fig.* 30).

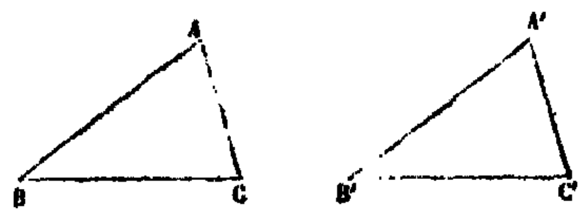
Soient les deux triangles ABC, A'B'C', tels qu'on ait

$$BC = B'C', \quad B = B', \quad C = C';$$

ces deux triangles sont égaux.

En effet, transportons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de manière que le côté B'C' coïncide avec son égal BC, B' étant en B et C′ en C. Puisque l'angle B′ est égal à l'angle B et que les deux triangles sont supposés tomber d'un même côté

Fig. 30.



de BC, le côté B′A′ prendra la direction BA, et le point A′ tombera quelque part sur la droite indéfinie BA. De même, puisque l'angle C′ est égal à l'angle C, le côté C′A′ prendra la direction CA, et le point A′ tombera quelque part sur la droite indéfinie CA. Donc le point A′, devant se trouver à la fois sur les deux droites BA et CA, tombera nécessairement sur leur point d'intersection A. Par suite, les deux triangles coïncideront et seront égaux.

THÉORÈME.

38. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun* (*fig.* 30).

Soient les deux triangles ABC, A′B′C′, tels qu'on ait

$$A = A', \quad AB = A'B', \quad AC = A'C';$$

ces deux triangles sont égaux.

En effet, transportons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que l'angle A coïncide avec son égal A′, le côté A′B′ tombant sur le côté AB et le côté A′C′ sur le côté AC. Ces côtés ayant alors même direction, même longueur et une extrémité commune, leurs autres extrémités se confondront, c'est-à-dire que le point B′ tombera sur le point B et le point C′ sur le point C. Par suite, les deux triangles coïncideront et seront égaux.

SCOLIE.

39. En rapprochant les théorèmes démontrés aux n^os 36 et 38, on voit que *si deux triangles* ABC, A′B′C′, *ont deux côtés respectivement égaux chacun à chacun, savoir* AB = A′B′ et AC = A′C′, *le troisième côté* BC *du premier triangle est in-*

férieur, égal ou supérieur au troisième côté B'C' du second, suivant que l'angle opposé A du premier triangle est inférieur, égal ou supérieur à l'angle opposé A' du second.

Donc, du principe général énoncé au n° 33, on doit conclure que, *réciproquement, si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, l'angle que ces côtés comprennent dans le premier triangle est inférieur, égal ou supérieur à l'angle compris entre les deux côtés correspondants du second triangle, suivant que le troisième côté du premier triangle est inférieur, égal ou supérieur au troisième côté du second.*

THÉORÈME.

40. *Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun* (*fig.* 30).

Soient les deux triangles ABC, A'B'C', tels qu'on ait

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad AC = A'C',$$

ces deux triangles sont égaux.

En effet, d'après le numéro précédent, l'angle A, par exemple, du premier triangle, compris entre les côtés AB et AC, doit être égal à l'angle A' du second triangle, compris entre les côtés A'B' et A'C', respectivement égaux aux côtés AB et AC, puisque le troisième côté BC de l'un est en outre égal au troisième côté B'C' de l'autre.

Dès lors les deux triangles proposés sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

Scolie.

41. Les trois derniers théorèmes (37, 38, 40) constituent ce qu'on appelle la théorie de l'égalité des triangles, et il est aisé de comprendre l'usage de cette théorie.

Deux triangles égaux, ABC, A'B'C', satisfont à six conditions, savoir :

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad BC = B'C',$$
$$C = C', \qquad B = B', \qquad A = A'.$$

Chaque cas d'égalité renferme trois de ces conditions groupées de telle sorte que, lorsqu'elles sont satisfaites, les six soient remplies. Par suite, quand on aura reconnu dans une certaine figure l'égalité de deux triangles par l'application de l'un des trois cas énoncés, on devra en conclure immédiatement l'égalité des trois éléments non employés, et l'on aura acquis ainsi de nouvelles données qui permettront d'aller plus avant dans la recherche que l'on poursuit.

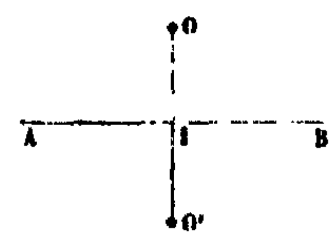
Il est essentiel de remarquer que, dans deux triangles égaux, les côtés égaux sont toujours opposés aux angles égaux.

§ III. — DES PERPENDICULAIRES ET DES OBLIQUES.

THÉORÈME.

42. *Par un point O pris hors d'une droite AB, on peut toujours abaisser une perpendiculaire sur cette droite, et on ne peut en abaisser qu'une* (*fig.* 31).

Fig. 31.



Désignons par O' le point sur lequel vient s'appliquer le point O, lorsqu'on plie la figure autour de la droite AB, de manière à en rabattre la partie supérieure sur la partie inférieure. Joignons aux points O et O' un point quelconque I de la droite AB. Les angles adjacents OIB, O'IB seront égaux; car si l'on pliait de nouveau la figure autour de AB, O venant sur O' et I restant fixe, le premier angle recouvrirait exactement le second. D'après cela, pour que la droite OI soit perpendiculaire sur AB, c'est-à-dire pour que l'angle OIB soit droit, il faut et il suffit que la somme des deux angles adjacents égaux OIB, O'IB, soit égale à deux angles droits; et, par suite, que leurs côtés extérieurs IO, IO', soient en ligne droite. Donc enfin, comme entre O et O' il existe toujours une droite, et une seule, on voit que du point O on peut toujours mener une perpendiculaire sur AB, mais une seule.

THÉORÈME.

43. *Si d'un point* O *pris hors d'une droite* AB, *on mène à cette droite la perpendiculaire* OI *et plusieurs obliques* OC, OD, OE,... :

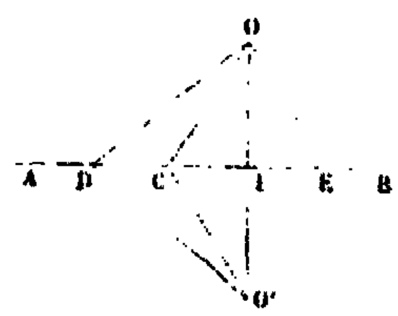
1° *La perpendiculaire* OI *est plus courte que toute oblique* OC;

2° *Deux obliques* OC *et* OE, *dont les pieds* C *et* E *sont également distants du pied* I *de la perpendiculaire, sont égales;*

3° *De deux obliques* OC *et* OD *ou* OE *et* OD, *celle dont le pied s'écarte le plus du pied* I *de la perpendiculaire est la plus longue.*

Prolongeons la perpendiculaire OI (*fig.* 32) d'une quantité IO' égale à OI, et menons les droites O'C, O'D.

Fig. 32.



1° Les deux triangles CIO, CIO', sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : l'angle droit CIO égal à l'angle droit CIO', le côté CI commun, et le côté IO égal au côté IO' par construction. Le troisième côté OC du premier triangle sera donc égal au troisième côté O'C du second. Or, dans le triangle OCO', on a

$$OO' < OC + CO' \quad \text{ou} \quad 2OI < 2OC,$$

d'où, en prenant la moitié de part et d'autre,

$$OI < OC.$$

2° Les deux triangles OIC, OIE, sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : l'angle droit OIC égal à l'angle droit OIE, le côté OI commun, et le côté IC égal à IE par hypothèse; donc

$$OC = OE.$$

3° Considérons deux obliques OC et OD situées du même côté de la perpendiculaire OI. On a vu (1°) que OC était égale à O'C, et l'on démontrerait de même l'égalité de OD et de O'D. Dans le triangle ODO', on a d'ailleurs (30)

$$OC + O'C < OD + O'D, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2OC < 2OD;$$

d'où, en prenant la moitié de part et d'autre,

$$OC < OD.$$

Si l'on considérait deux obliques OD et OE situées de côtés différents par rapport à la perpendiculaire OI, on commencerait par prendre sur IA une longueur IC égale à IE; les obliques OC et OE seraient alors égales comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire (2°). Or, si IE est moindre que ID, IC le sera aussi; et d'après l'alinéa précédent, l'oblique OC sera moindre que l'oblique OD. On aura donc encore

$$OE < OD.$$

COROLLAIRES.

44. *La perpendiculaire* OI *abaissée d'un point* O *sur une droite* AB *est la ligne la plus courte que l'on puisse mener de ce point à la droite :* sa longueur est ce qu'on appelle la *distance* du point O à la droite AB.

45. D'un même point on ne peut mener à une droite que *deux* obliques égales, et ces obliques sont situées de part et d'autre de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.

46. La perpendiculaire OI étant plus courte que toute oblique OC, il suit du n° 32 que l'angle OCI est moindre que l'angle droit OIC. Donc : *lorsque deux droites* AB et OC *se coupent, la perpendiculaire* OI, *abaissée d'un point de l'une sur l'autre, est située dans l'intérieur de l'angle aigu* OCB *formé par ces deux droites.*

On peut encore conclure de là que, dans tout triangle rectangle, les deux angles autres que l'angle droit sont aigus.

SCOLIE.

47. L'exactitude des réciproques des propositions qui précèdent résulte immédiatement du principe général énoncé au n° 33.

1° *Si une droite est la plus courte distance d'un point à* *une autre droite, ces deux droites sont perpendiculaires entre elles ;*

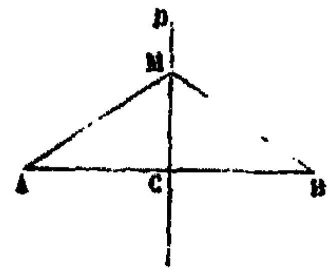
2° Si deux obliques à une même droite partent d'un même point et sont égales entre elles, elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite ;

3° Si deux obliques à une même droite partent d'un même point et sont inégales, la plus grande s'éloigne le plus du pied de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.

THÉORÈME.

48. *Tout point* M *de la perpendiculaire* CD *élevée sur le milieu d'une droite* AB, *est également distant des extrémités* A *et* B *de cette droite* (*fig.* 33).

Fig. 33.



En effet, C étant le milieu de AB, on a CA = CB ; donc MA et MB sont des obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire CD. On a donc (43) MA = MB.

49. Réciproquement, *tout point* M *équidistant des extrémités* A *et* B *d'une droite* AB, *appartient à la perpendiculaire* CD *menée à cette droite par son milieu* C.

En effet, le triangle MAB étant isocèle par hypothèse, la droite MC, qui joint le sommet M au milieu C de la base, est perpendiculaire sur cette base (34).

Corollaire.

50. Il résulte de ce qui précède que tous les points de la perpendiculaire menée à une droite par son milieu sont équidistants des extrémités de cette droite, et que les points de cette perpendiculaire sont les seuls points du plan qui jouissent de cette propriété. On exprime cette double proposition d'une manière plus rapide en disant :

La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est le lieu

GÉOMÉTRIQUE *des points du plan équidistants des extrémités de cette droite.*

SCOLIE.

51. En général, en Géométrie plane, on donne le nom de *lieu géométrique* à la figure formée par l'ensemble de tous les points du plan qui jouissent d'une propriété commune.

Pour établir un lieu géométrique, il faut toujours prouver une double proposition composée, soit d'une certaine proposition directe et de sa réciproque, soit de cette même proposition directe et de la proposition contraire.

Ainsi l'on démontrera : que tout point d'une certaine figure jouit d'une certaine propriété (proposition directe), et que tout point jouissant de cette propriété appartient à cette figure (proposition réciproque);

Ou bien : que tout point d'une certaine figure jouit d'une certaine propriété (proposition directe), et que tout point pris hors de cette figure ne jouit pas de cette propriété (proposition contraire).

L'équivalence de ces deux modes de démonstration résulte de ce que la proposition directe, sa réciproque et la proposition contraire sont tellement liées, que l'une quelconque des deux dernières est une conséquence des deux autres (7).

Il est ordinairement plus simple d'adopter le premier mode, c'est-à-dire de démontrer la proposition directe et sa réciproque ; cela tient à ce que la proposition contraire exige toujours une figure différente de celle qui est relative à la proposition directe, tandis que la réciproque n'exige pas en général une figure nouvelle.

52. Deux points suffisent pour déterminer une droite. Donc, dès qu'une droite a deux points équidistants des extrémités d'une seconde droite, on peut affirmer que la première droite est perpendiculaire sur le milieu de la seconde.

THÉORÈME.

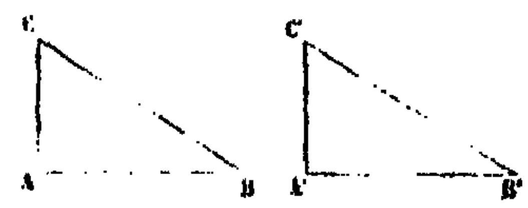
53. *Deux triangles rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal* (*fig.* 34).

Nous avons vu (46) que les deux angles d'un triangle rectangle, autres que l'angle droit, étaient aigus.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE Bibliothèque

Soient (*fig.* 34) les deux triangles ABC, A'B'C', rectangles

Fig. 34.



en A et en A'. On suppose

$$BC = B'C' \quad \text{et} \quad B = B'.$$

Ces triangles sont égaux.

En effet, portons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de manière que B'C' coïncide avec BC, B' étant en B et C' en C. Si l'on fait tomber les deux triangles du même côté de BC, l'angle B' étant égal à l'angle B, le côté B'A' prendra la direction BA ; dès lors, le côté C'A', qui est perpendiculaire sur B'A', devra prendre la direction de CA, qui est la seule perpendiculaire qu'on puisse abaisser du point C sur BA. Le point A' devant tomber à la fois sur BA et sur CA viendra donc en A, et les deux triangles coïncideront.

THÉORÈME.

54. *Deux triangles rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal* (*fig.* 34).

Soient les deux triangles ABC, A'B'C', rectangles en A et en A'. On suppose

$$BC = B'C' \quad \text{et} \quad AC = A'C';$$

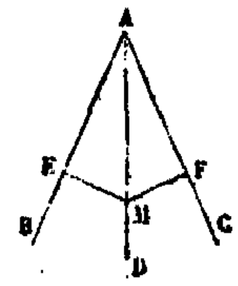
ces deux triangles sont égaux.

En effet, portons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de manière que A'C' coïncide avec AC, A' étant en A et C' en C. Si l'on fait tomber les deux triangles du même côté de AC, le côté A'B' prendra la direction de AB, à cause de l'égalité des angles droits A et A'. De plus, C'B' deviendra une oblique égale à CB, issue du même point C, et située du même côté de la perpendiculaire CA. Donc CB et C'B' s'écarteront également du pied de cette perpendiculaire (47); en d'autres termes, le point B' tombera en B, et les deux triangles coïncideront.

THÉORÈME.

55. *Tout point* M *pris sur la bissectrice* AD *d'un angle* BAC *est également distant des deux côtés de cet angle* (*fig.* 35).

Fig. 35.



La distance du point M au côté AB est la longueur de la perpendiculaire ME abaissée du point M sur AB (44); de même, la perpendiculaire MF, abaissée du point M sur AC, mesure la distance du point M au côté AC. Il s'agit de démontrer l'égalité de ME et de MF. Or, cette égalité résulte de celle des deux triangles MAE, MAF, qui, rectangles en E et en F, ont l'hypoténuse AM commune et un angle aigu égal, savoir MAE = MAF puisque la droite AD est la bissectrice de l'angle BAC.

56. Réciproquement, *tout point* M *pris à l'intérieur d'un angle* BAC, *à égale distance* ME = MF *de ses deux côtés* AB *et* AC, *appartient à la bissectrice de cet angle* (*fig.* 35).

En effet, en menant la droite MA, on obtient deux triangles rectangles, MAE, MAF, qui sont égaux comme ayant l'hypoténuse MA commune et un côté de l'angle droit égal : ME = MF. Donc, l'angle MAE opposé au côté ME est égal à l'angle MAF opposé au côté MF, et la droite AM est la bissectrice de l'angle BAC.

Corollaire.

57. *La bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points qui, situés dans l'intérieur de cet angle, sont équidistants de ses côtés.*

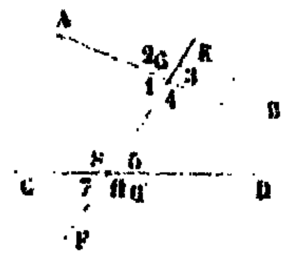
Par suite, *le lieu géométrique des points également distants de deux droites indéfinies* AB, CD, *qui se coupent* (*fig.* 19), *se compose des deux bissectrices* EE′, FF′, *perpendiculaires entre elles* (24), *relatives aux deux couples d'angles formés par ces droites.*

§ IV. — DES PARALLÈLES.

DÉFINITIONS.

58. Lorsqu'une sécante EF rencontre deux droites quelconques AB et CD, elle forme avec ces deux droites huit angles, dont quatre autour du point G et quatre autour du point H (*fig.* 36).

Fig. 36.



Les quatre angles 1, 4, 5, 8, compris entre les deux droites AB et CD, sont appelés angles *internes*. Les quatre autres 2, 3, 6, 7, sont appelés angles *externes*.

Deux angles qui sont internes, non adjacents et situés de part et d'autre de la sécante, sont dits *alternes-internes :* tels sont les angles 1 et 5, 4 et 8.

Deux angles qui sont externes, non adjacents et situés de part et d'autre de la sécante, sont dits *alternes-externes :* tels sont les angles 2 et 6, 3 et 7.

Deux angles situés d'un même côté de la sécante, l'un interne, l'autre externe, et non adjacents, sont dits *correspondants :* tels sont les angles 1 et 7, 4 et 6, 2 et 8, 3 et 5.

Enfin, les angles 1 et 8, 4 et 5, sont dits *intérieurs d'un même côté;* et les angles 2 et 7, 3 et 6, *extérieurs d'un même côté.*

59. Deux droites sont dites *parallèles* lorsque, étant situées dans un même plan, elles ne peuvent se rencontrer si loin qu'on les prolonge.

THÉORÈME.

60. *Deux droites* AC *et* BD *perpendiculaires sur une troisième droite* EF *sont parallèles* (*fig.* 37).

Car, si elles se rencontraient, on pourrait de leur point d'intersection abaisser deux perpendiculaires sur EF (42).

COROLLAIRE.

61. *Par un point A, situé hors d'une ligne droite* BC, *on peut mener une parallèle à cette droite* (*fig.* 38).

Fig. 37.

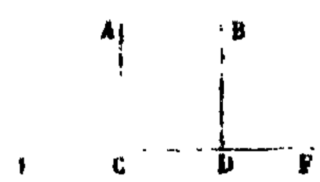
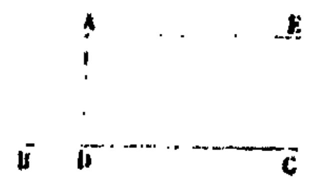


Fig. 38.



Abaissons du point A la perpendiculaire AD sur BC, et menons à AD la perpendiculaire AE. Les deux droites AE et BC, étant toutes deux perpendiculaires sur AD, sont parallèles.

62. ON ADMET que, *par un point pris hors d'une ligne droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite.* De là résultent immédiatement les deux propositions suivantes :

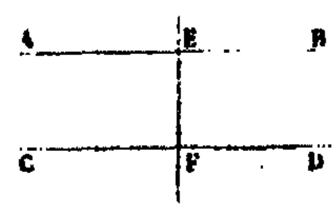
63. *Si une droite en rencontre une autre, elle rencontre toutes les parallèles à cette autre.*

64. *Deux droites* A *et* B, *parallèles à une troisième* C, *sont parallèles entre elles.*

THÉORÈME.

65. *Lorsque deux droites* AB *et* CD *sont parallèles, toute droite* EF, *perpendiculaire sur l'une* AB, *est perpendiculaire sur l'autre* CD (*fig.* 39).

Fig. 39.



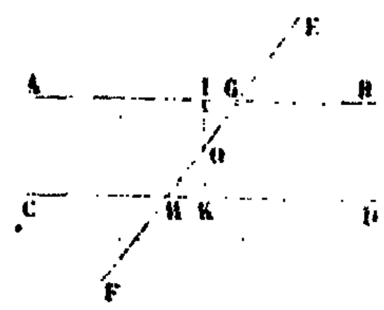
D'abord, la droite EF rencontre CD (63). Concevons par leur point d'intersection F la perpendiculaire à EF. Cette perpendiculaire, devant être parallèle à AB (60), coïncidera avec CD, puisque par le point F on ne peut mener qu'une parallèle à AB. Donc, CD est perpendiculaire sur EF et, inversement, EF est perpendiculaire sur CD.

On énonce souvent ce théorème d'une manière plus rapide, en disant : *Deux parallèles ont leurs perpendiculaires communes.*

THÉORÈME.

66. *Lorsque deux droites parallèles* AB, CD, *sont rencontrées par une sécante* EF, *les quatre angles aigus formés autour des points d'intersection* G *et* H *sont égaux entre eux, ainsi que les quatre angles obtus formés autour des mêmes points* (*fig.* 40).

Fig. 40.



En effet, par le point O, milieu de GH, menons sur les parallèles AB et CD la perpendiculaire commune IK; OI tombera dans l'angle aigu OGA et OK dans l'angle aigu OHD (46). Or, les triangles rectangles OGI, OHK, ont leurs hypoténuses OG et OH égales, puisque le point O est le milieu de GH, et les angles aigus IOG, HOK, égaux comme opposés par le sommet : ils sont donc égaux (53) et, par suite, l'angle OGI est égal à l'angle OHK. Chacun de ces deux angles étant d'ailleurs égal à son opposé par le sommet, on voit que les quatre angles aigus OGI, EGB, OHK, CHF, sont égaux entre eux.

De même, les quatre angles obtus AGE, OGB, DHF, OHC, sont aussi égaux entre eux, comme suppléments des angles aigus.

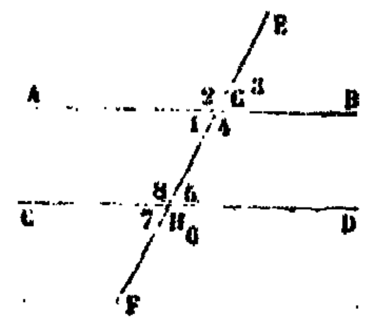
67. Réciproquement, *deux droites* AB *et* CD *étant coupées par une sécante* EF, *si les quatre angles aigus ou les quatre angles obtus formés autour des points d'intersection* G *et* H *sont égaux entre eux, les deux droites* AB *et* CD *sont parallèles.*

Supposons (*fig.* 40) que l'angle HGA soit égal à l'angle GHD, et concevons par le point H la parallèle à AB. Cette parallèle doit, d'après la proposition directe, faire avec GH un angle égal à l'angle HGA, et, par suite, à l'angle GHD; donc cette parallèle coïncide avec HD, et la droite CD est parallèle à AB.

COROLLAIRES.

68. *Deux parallèles* AB *et* CD (*fig.* 41) *étant coupées par*

Fig. 41.



une sécante EF, il résulte de ce qui précède :

1° Que *les angles alternes-internes* 1 et 5, ou 4 et 8, *sont égaux entre eux;*

2° Que *les angles alternes-externes* 3 et 7, ou 2 et 6, *sont égaux entre eux;*

3° Que *les angles correspondants* 1 et 7, ou 2 et 8, ou 3 et 5, ou 4 et 6, *sont égaux entre eux;*

4° Que *les angles intérieurs d'un même côté* 1 et 8, ou 4 et 5, *sont supplémentaires;*

5° Que *les angles extérieurs d'un même côté* 2 et 7, ou 3 et 6, *sont supplémentaires.*

Et, RÉCIPROQUEMENT, *deux droites coupées par une sécante sont parallèles :*

Si les angles alternes-internes sont égaux,

Ou *si les angles alternes-externes sont égaux,*

Ou *si les angles correspondants sont égaux,*

Ou *si les angles intérieurs d'un même côté sont supplémentaires,*

Ou *si les angles extérieurs d'un même côté sont supplémentaires.*

SCOLIE.

69. La proposition directe et la proposition réciproque étant démontrées, les propositions contraires sont vraies par cela même (7). Ainsi :

Deux droites étant coupées par une sécante, si les angles formés ne satisfont pas aux relations que nous venons d'énoncer, les deux droites ne sont pas parallèles. En particulier :

Lorsque deux droites font avec une transversale deux angles intérieurs d'un même côté dont la somme diffère de deux angles droits, ces droites se rencontrent du côté de la sécante où cette somme est inférieure à deux angles droits.

Telle est textuellement la proposition qu'Euclide rangeait parmi les axiomes (édition de Gregory, p. 3, axiome 11). D'après le programme officiel, nous avons pris pour *postulatum* ou *demande* une autre proposition (62) qui est une conséquence plus naturelle de l'idée de parallélisme.

70. Voici deux autres remarques souvent utiles :

1° *Deux droites* (*fig.* 42), *l'une* AB *perpendiculaire, et l'autre* CD *oblique sur une troisième droite* AC, *doivent se rencontrer;* car la somme des deux angles intérieurs BAC, DCA, est moindre que deux angles droits;

Fig. 42.

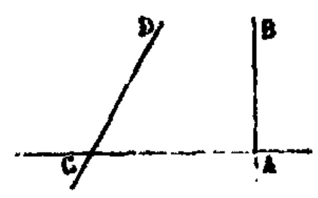
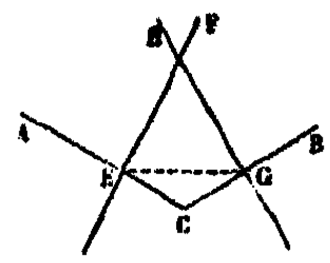


Fig. 43.



2° *Deux droites* EF, GH (*fig.* 43), *respectivement perpendiculaires à deux droites* CA *et* CB *qui se coupent, doivent se rencontrer;* car en menant la droite EG, on voit que chacun des angles intérieurs FEG, HGE, est moindre qu'un angle droit : la somme de ces angles est donc inférieure à deux angles droits.

THÉORÈME.

71. *Deux parallèles* AC, BD, *comprises entre deux autres parallèles* AB, CD, *sont égales* (*fig.* 44).

Fig. 44.

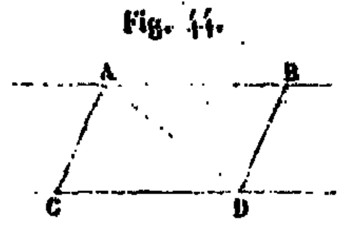
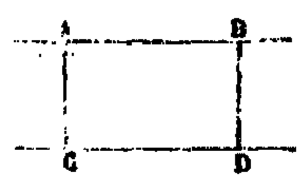


Fig. 45.



En effet, menons AD. Les deux triangles ABD, ACD, seront égaux comme ayant un côté commun AD adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, savoir : l'angle BAD égal à l'angle ADC comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB, CD, coupées par la sécante AD; et l'angle ADB égal à l'angle DAC comme alternes-internes par rapport aux parallèles AC, BD, coupées par la même sécante. Donc le côté BD opposé à l'angle BAD est égal au côté AC opposé à l'angle ADC.

COROLLAIRES.

72. Si les deux lignes AC et BD (*fig.* 45) étaient perpendiculaires sur AB et, par suite, sur CD (65), elles mesureraient les distances des points A et B de la droite AB à la droite CD. Ces deux distances étant égales comme parallèles comprises entre parallèles, et les deux points A et B étant pris d'une manière quelconque sur AB, on voit que *deux parallèles sont partout également distantes.*

73. *Le lieu des points situés à une distance donnée d'une droite donnée, est l'ensemble des deux parallèles à cette droite, menées de part et d'autre à la distance donnée.*

§ V. — ANGLES DONT LES COTÉS SONT PARALLÈLES OU PERPENDICULAIRES. — SOMME DES ANGLES D'UN POLYGONE.

DÉFINITIONS.

74. On donne le nom de *polygone* à une portion de plan ABCDEF terminée de toutes parts par des lignes droites (*fig.* 46). Les portions de droites AB, BC, CD, DE, EF, FA,

Fig. 46.

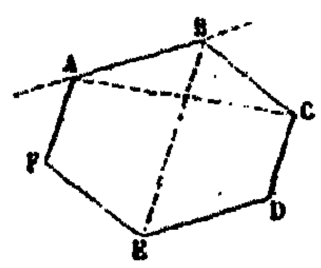
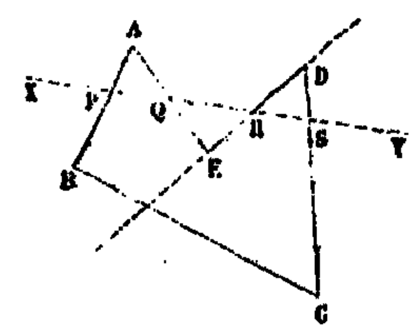


Fig. 47.



sont les *côtés* du polygone; la somme de ces côtés forme le contour ou le *périmètre* du polygone ; ce polygone a pour *sommets* les points A, B, C, D, E, F, et pour *angles* les angles ABC, BCD, CDE, DEF, etc., formés intérieurement par deux côtés consécutifs quelconques. Enfin, toute droite qui joint deux sommets non consécutifs du polygone est une *diagonale* : les droites AC, BE, sont des diagonales.

Le plus simple de tous les polygones est le *triangle*, qui n'a que trois côtés. Après lui viennent : le *quadrilatère*, qui a quatre côtés; le *pentagone*, qui a cinq côtés; l'*hexagone*, qui a six côtés...; l'*octogone*, qui a huit côtés...; le *décagone*, qui a dix côtés...; le *pentédécagone*, qui a quinze côtés. La *fig.* 46 représente un hexagone.

75. Un polygone est dit *convexe* lorsqu'il tombe tout entier d'un même côté de chacune des droites qui le terminent, prolongées indéfiniment. Tel est le polygone ABCDEF (*fig.* 46). Le polygone ABCDE, au contraire (*fig.* 47), n'est pas convexe; car le côté DE, prolongé indéfiniment, laisse le polygone en partie au-dessus et en partie au-dessous de lui.

Une droite quelconque, tracée dans le plan d'un polygone convexe, ne peut rencontrer le contour de ce polygone en plus de deux points; car si une droite XY (*fig.* 47) rencontre le contour d'un polygone ABCDE en quatre points P, Q, R, S, par exemple, les points Q et S se trouvant de part et d'autre du côté DE, le polygone proposé n'est pas tout entier d'un même côté par rapport à DE prolongé, c'est-à-dire qu'il n'est pas convexe.

76. Le théorème du n° 30 n'est qu'un cas particulier de la proposition suivante :

Toute ligne polygonale convexe ABCD *est moindre que toute ligne polygonale enveloppante* AMND, *terminée aux mêmes extrémités* (*fig.* 48).

Fig. 48.

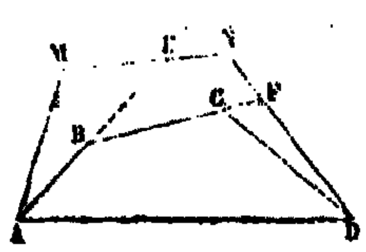
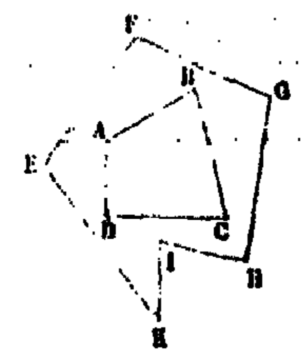


Fig. 49.



En laissant de côté la partie commune AD, prouvons que le contour ABCD est inférieur au contour polygonal AMND. Prolongeons les côtés AB et BC jusqu'à ce qu'ils coupent en E et en F le contour polygonal AMND. Nous pourrons écrire les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} AB + BE &< AM + ME, \\ BC + CF &< BE + EN + NF, \\ CD \quad &< CF + FD. \end{aligned}$$

Si nous ajoutons ces inégalités membre à membre, il viendra, en opérant les réductions et additions,

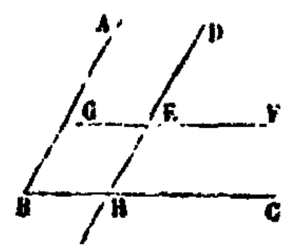
$$AB + BC + CD < AM + MN + ND.$$

On prouverait de la même manière que *toute ligne polygonale convexe* ABCD *est moindre que toute ligne polygonale* EFGHIK *qui l'enveloppe de toutes parts* (*fig.* 49).

THÉORÈME.

77. *Deux angles qui ont leurs côtés parallèles chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires* (*fig.* 50).

Fig. 50.



1° Supposons que les côtés parallèles soient deux à deux dirigés dans le même sens. Soient, par exemple, les angles ABC, DEF; BA et ED sont parallèles et dirigés l'un et l'autre de bas en haut; BC et EF sont parallèles et dirigés l'un et l'autre de gauche à droite : les deux angles considérés sont égaux.

En effet, prolongeons le côté DE jusqu'au point H où il coupe le côté BC. Les angles ABC, DHC, sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles BA, HD, coupées par BC; de même, les angles DEF, DHC, sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles EF, HC, coupées par DH. Donc, l'angle ABC est égal à l'angle DEF.

2° Supposons que les côtés parallèles soient dirigés deux à deux en sens contraires. Soient, par exemple, les angles ABC, GEH; BA et EH sont parallèles et dirigés, le premier de bas en haut, le deuxième de haut en bas; BC et EG sont parallèles et dirigés, l'un de gauche à droite, l'autre de droite à gauche : les deux angles considérés sont égaux.

En effet, en prolongeant les côtés de l'angle GEH au delà du sommet E, on forme un angle DEF égal d'une part à GEH comme opposé par le sommet, et d'autre part égal à ABC comme ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de ce dernier angle et dirigés dans le même sens.

3° Supposons enfin que deux côtés soient parallèles et de même sens, et les deux autres parallèles et de sens contraire. Soient, par exemple, les angles ABC, DEG; BA et ED sont parallèles et dirigés l'un et l'autre de bas en haut; BC et EG sont parallèles et dirigés, le premier de gauche à droite, le deuxième de droite à gauche : les deux angles considérés sont supplémentaires.

En effet, en prolongeant GE au delà du sommet E, on forme un angle DEF qui est d'une part le supplément de DEG, et qui est d'autre part égal à ABC comme ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de ce dernier angle et dirigés dans le même sens.

En résumé, *deux angles qui ont leurs côtés parallèles sont égaux si les côtés parallèles sont dirigés deux à deux dans le même sens, ou encore si les côtés parallèles sont dirigés deux à deux en sens contraires; ils sont supplémentaires, si deux côtés parallèles sont de même sens et les deux autres de sens contraire.*

THÉORÈME.

78. *Deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires* (*fig.* 51 *et* 52).

1° Considérons deux angles aigus ABC, DEF (*fig.* 51); le côté DE est perpendiculaire sur BA, et le côté EF est perpendiculaire sur BC : les deux angles considérés sont égaux.

En effet, si l'on fait tourner l'angle DEF tout d'une pièce d'un angle droit autour de son sommet E, le nouvel angle D'EF', reproduction de DEF, aura ses côtés respectivement parallèles à ceux de ABC : ED' et BA seront parallèles comme perpendiculaires à DE; EF' et BC seront parallèles comme perpendiculaires à EF. D'ailleurs, les angles ABC, D'EF', ayant

Fig. 51.

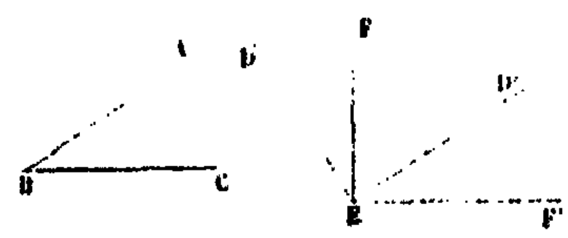
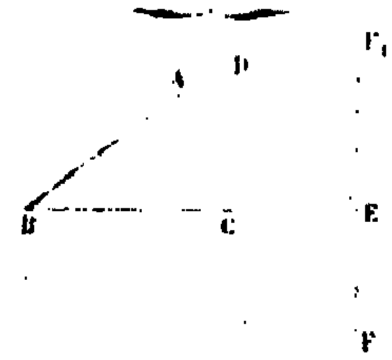


Fig. 52.



les côtés parallèles et étant tous les deux aigus, ne sauraient être supplémentaires : ils sont donc égaux; par suite, les angles ABC, DEF, le sont aussi.

2° Si les deux angles comparés étaient obtus, on démontrerait de la même manière leur égalité.

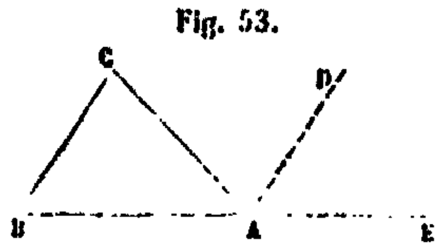
3° Considérons enfin deux angles d'espèce différente, c'est-à-dire l'un ABC aigu, l'autre DEF obtus (*fig.* 52). En prolongeant FE au delà du sommet E, on forme un angle DEF_1 qui est le supplément de DEF : cet angle DEF_1 est donc aigu comme l'angle ABC; d'ailleurs, il a ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux de ABC. Les angles ABC et DEF_1 sont donc égaux et, par suite, les angles proposés ABC et DEF sont supplémentaires.

En résumé, ***les angles dont les côtés sont perpendiculaires sont égaux lorsqu'ils sont de même espèce, et supplémentaires dans le cas contraire.***

THÉORÈME.

79. *La somme des angles d'un triangle quelconque* ABC *est égale à deux angles droits* (*fig.* 53).

Fig. 53.



En effet, prolongeons BA et menons AD parallèle à BC. Les angles BCA, CAD, sont égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles CB et AD coupées par CA. Les angles CBA, DAE, sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles BC et AD coupées par BE. D'après cela, la somme des trois angles du triangle ABC est la même que celle des trois angles BAC, CAD, DAE, formés autour du point A au-dessus de la droite indéfinie BE; cette somme est donc égale à deux angles droits (20).

Scolie.

80. On voit par cette démonstration que l'angle CAE est la somme (9) des deux angles B et C; ainsi, *tout angle extérieur d'un triangle*, c'est-à-dire tout angle formé par un côté et le prolongement d'un autre côté, *est égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.*

Corollaires.

81. *Un triangle ne saurait avoir qu'un seul angle droit et*, à fortiori, *qu'un seul angle obtus.*

82. *Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.*

83. *Un angle quelconque d'un triangle est le supplément de la somme des deux autres.* D'où il suit que si deux triangles ABC, A'B'C', ont deux angles égaux chacun à chacun, $A = A'$ et $B = B'$, le troisième angle C du premier triangle est égal au troisième angle C' de l'autre. Il en résulte que deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et deux angles égaux chacun à chacun, que ces angles soient ou non adjacents au côté égal.

THÉORÈME.

84. *Deux triangles* ABC, A'B'C', *qui ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun, ont leurs angles égaux chacun à chacun.*

En effet, deux angles qui ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires étant égaux ou supplémentaires, on a

$$A = A' \quad \text{ou} \quad A + A' = 2^d,$$
$$B = B' \quad \text{ou} \quad B + B' = 2^d,$$
$$C = C' \quad \text{ou} \quad C + C' = 2^d.$$

On ne peut donc faire que les trois hypothèses suivantes :

1° $A + A' = 2^d$, $B + B' = 2^d$, $C + C' = 2^d$,

2° $A = A'$, $B + B' = 2^d$, $C + C' = 2^d$,

3° $A = A'$, $B = B'$, et, par suite (83), $C = C'$.

Or, dans le premier cas, la somme des angles des deux triangles vaudrait 6 angles droits; dans le second cas, cette somme surpasserait 4 angles droits de la quantité $A + A' = 2A$. La troisième combinaison est donc seule possible.

THÉORÈME.

85. *La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe* ABCDEF *est égale à autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux* (*fig.* 54).

Fig. 54.

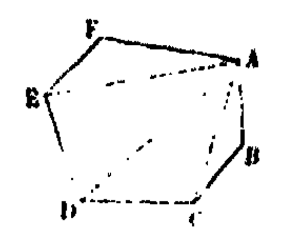
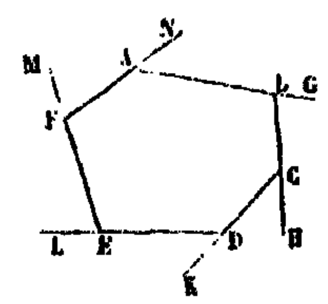


Fig. 55.



En joignant l'un des sommets A à tous les sommets non adjacents, on décompose le polygone en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux; car chaque triangle contient un seul côté du polygone, excepté les deux triangles extrêmes qui renferment chacun deux côtés de ce polygone. La somme des angles du polygone est égale à celle des angles de tous ces triangles; elle vaut donc autant de fois deux angles droits qu'il y a de triangles, c'est-à-dire autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés moins deux.

SCOLIE.

86. Si l'on désigne par n le nombre des côtés du polygone, la somme des angles aura pour expression, en prenant l'angle droit pour unité,

$$2(n-2) \quad \text{ou} \quad 2n-4.$$

On peut donc dire que *la somme des angles d'un polygone* *s'obtient en doublant le nombre des côtés et en retranchant 4 du résultat, l'angle droit étant toujours pris pour unité.*

Si l'on fait dans cette formule $n = 4$, on trouve 4 pour la somme cherchée. *La somme des angles d'un quadrilatère est donc égale à quatre angles droits;* d'où il suit que *si un quadrilatère a tous ses angles égaux, chacun de ces angles est droit.*

COROLLAIRE.

87. *La somme des angles qu'on forme à l'extérieur d'un polygone convexe, en prolongeant successivement ses côtés dans le même sens, est égale à quatre angles droits (fig. 55).*

En effet, la somme d'un angle extérieur quelconque NAG et de l'angle intérieur adjacent FAB est égale à deux angles droits; donc, la somme des angles, tant intérieurs qu'extérieurs, du polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il a de sommets ou de côtés. Cette somme surpasse donc de quatre angles droits (86) la somme des angles intérieurs : en d'autres termes, la somme des angles extérieurs est égale à quatre angles droits.

Il convient de remarquer qu'un polygone convexe ne saurait avoir d'après cela plus de trois angles intérieurs aigus; sans quoi, il aurait plus de trois angles extérieurs obtus, et la somme de ses angles extérieurs surpasserait quatre angles droits.

§ VI. — DU PARALLÉLOGRAMME.

DÉFINITIONS.

88. Parmi les quadrilatères, on distingue :

1° Le *parallélogramme* (*fig.* 56), qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux;

2° Le *rectangle* (*fig.* 57), qui a tous ses angles égaux entre eux : il résulte du n° 86 que les quatre angles d'un rectangle sont droits;

3° Le *losange* (*fig.* 58), qui a tous ses côtés égaux entre eux : nous démontrerons dans ce chapitre que le rectangle et le losange sont des parallélogrammes;

4° Le *carré* (*fig.* 59), qui a ses côtés égaux et ses angles égaux : le carré est à la fois un losange et un rectangle;

5° Le *trapèze* (*fig.* 60), dont deux côtés opposés seulement sont parallèles. Le trapèze est *rectangle* lorsqu'un de ses

Fig. 56.

Fig. 57.

Fig. 58.

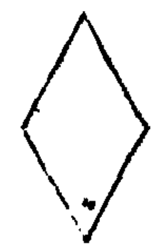


Fig. 59.

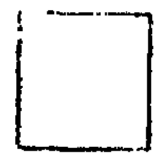
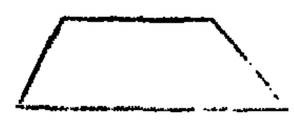


Fig. 60.



côtés non parallèles est perpendiculaire sur les deux côtés parallèles; il est *isocèle* lorsque ses deux côtés non parallèles sont égaux.

THÉORÈME.

89. ***Dans tout parallélogramme :***

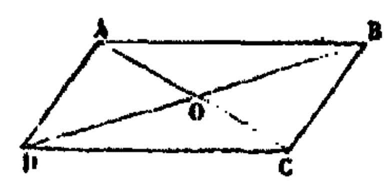
1° *Les côtés opposés sont égaux deux à deux ;*

2° *Les angles opposés sont égaux deux à deux ;*

3° *Les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Soit le parallélogramme ABCD (*fig.* 61).

Fig. 61.



1° Deux côtés opposés quelconques AB et CD, par exemple, sont égaux entre eux; car ce sont, par hypothèse, deux droites parallèles comprises entre deux autres droites parallèles AD et BC (71).

2° Deux angles opposés quelconques, DAB et BCD, par exemple, sont égaux entre eux; car ils sont formés par des côtés parallèles deux à deux et de sens contraires (77). AB et CD sont en effet parallèles et de sens contraire, et il en est de même de AD et de CB.

3° Chacune des diagonales AC et BD est coupée par l'autre, au point O, en deux parties égales. En effet, les deux triangles AOB, DOC, ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, savoir : le côté AB égal au côté DC, comme côtés opposés du parallélogramme; l'angle OAB égal à l'angle OCD, comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB et CD coupées par AC; et l'angle OBA égal à l'angle ODC, comme alternes-internes par rapport aux mêmes parallèles coupées par BD. Les triangles AOB, DOC, sont donc égaux. Par suite, le côté OB, opposé à l'angle OAB, est égal au côté OD opposé à l'angle OCD, et le côté OA opposé à l'angle OBA est égal au côté OC opposé à l'angle ODC.

THÉORÈME.

90. *Un quadrilatère est un parallélogramme :*

1° *Si ses côtés opposés sont égaux deux à deux;*

2° *Si ses angles opposés sont égaux deux à deux;*

3° *Si deux côtés opposés sont à la fois égaux et parallèles;*

4° *Si les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Soit le quadrilatère ABCD (*fig.* 62).

Fig. 62.

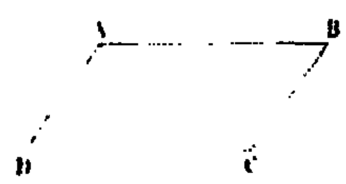
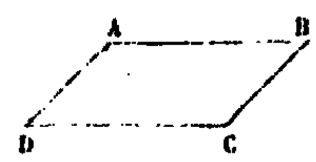


Fig. 63.



1° Menons la diagonale AC. Les deux triangles ABC, ADC, sont égaux comme ayant les trois côtés égaux, savoir : AC commun, AB et CD égaux entre eux par hypothèse, ainsi que AD et BC. Par suite, l'angle BAC opposé à BC est égal à l'angle ACD opposé à AD; et comme ces angles occupent, par rapport aux deux droites AB et CD et à la sécante AC, la position d'alternes-internes, les deux côtés AB et CD sont parallèles (68). De même, l'égalité des angles BCA et CAD entraîne le parallélisme des deux autres côtés AD et BC. Donc, le quadrilatère ABCD ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux est un parallélogramme.

2° Les angles opposés A et C étant égaux entre eux, ainsi que les angles B et D (*fig.* 63), on voit que deux angles consécutifs quelconques, B et C par exemple, ont une somme égale à la moitié de la somme des angles du quadrilatère, c'est-à-dire à deux droits. Ces deux angles B et C étant supplémentaires, et, de plus, intérieurs d'un même côté par rapport aux deux droites AB et CD coupées par BC, ces mêmes droites sont parallèles (68). On démontrerait de même que, les angles A et B étant supplémentaires, les deux autres côtés opposés, AD et BC, sont parallèles. Le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme.

3° Soient AB et CD les deux côtés opposés que l'on suppose égaux et parallèles (*fig.* 62). En menant la diagonale AC, on forme deux triangles ABC, ADC, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : l'angle BAC égal à l'angle ACD, comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB et CD coupées par AC; le côté AB égal au côté CD par hypothèse, et le côté AC commun. De l'égalité des triangles ABC, ADC, résulte celle des angles ACB et CAD; et comme ces angles sont alternes-internes par rapport aux deux droites AD et BC coupées par AC, ces mêmes droites sont parallèles. Le quadrilatère ABCD ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux est un parallélogramme.

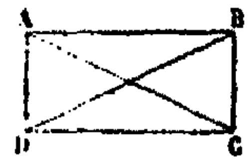
4° Puisqu'on suppose $OA = OC$ et $OB = OD$ (*fig.* 61), les angles AOB et COD étant d'ailleurs opposés par le sommet, les deux triangles AOB, COD, sont égaux (38). Donc, l'angle OAB est égal à l'angle OCD. D'ailleurs, ces angles étant alternes-internes par rapport aux droites AB et CD coupées par AC, les côtés opposés AB et CD sont parallèles. De l'égalité des triangles AOD, BOC, on déduirait pareillement l'égalité des angles OAD, OCB, et, par suite, le parallélisme des deux autres côtés opposés AD et BC. Le quadrilatère ABCD, ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, est donc un parallélogramme.

THÉORÈME.

91. ***Tout rectangle est un parallélogramme dont les diagonales sont égales*** (*fig.* 64).

D'abord, tout rectangle est un parallélogramme, puisque ses angles opposés sont égaux (90, 2°). En second lieu, les deux triangles DAB, CBA, par exemple, sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : l'angle

Fig. 64.



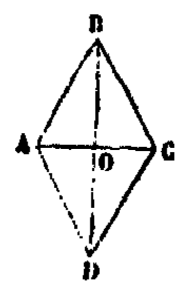
droit DAB égal à l'angle droit CBA, le côté AB commun, et le côté AD égal au côté BC, comme côtés opposés d'un parallélogramme ; donc, les diagonales AC et BD, hypoténuses des triangles rectangles égaux DAB, CBA, sont égales.

92. Réciproquement, *tout parallélogramme dont les diagonales sont égales est un rectangle* (*fig.* 64). Car les triangles DAB, CBA sont alors égaux comme ayant leurs trois côtés égaux : donc, l'angle DAB est égal à l'angle CBA, et comme chacun d'eux est égal à son opposé (90, 2°), on voit que le parallélogramme considéré a tous ses angles égaux et, par suite, est un rectangle.

THÉORÈME.

93. *Tout losange est un parallélogramme dont les diagonales sont : 1° perpendiculaires l'une sur l'autre ; 2° bissectrices des angles opposés* (*fig.* 65).

Fig. 65.



D'abord, tout losange est un parallélogramme, puisque ses côtés opposés sont égaux (90, 1°).

En second lieu, les triangles ABC et ADC étant isocèles, puisque les quatre côtés d'un losange sont égaux, la diagonale BD, qui passe par le milieu O de la diagonale AC, est à la fois perpendiculaire sur AC et bissectrice des angles B et D (34). Pour une raison analogue, la diagonale AC, perpendiculaire sur la diagonale BD, est bissectrice des angles A et C.

94. Réciproquement, *tout parallélogramme est un losange : 1° si ses diagonales sont perpendiculaires l'une sur l'autre ; 2° si l'une d'elles est bissectrice des angles dont elle unit les sommets.*

Scolie.

95. *Tout carré est un parallélogramme dont les diagonales sont égales, perpendiculaires entre elles et bissectrices des angles opposés ; réciproquement, tout parallélogramme est un carré lorsque ses diagonales sont : 1° égales et perpendiculaires entre elles ; 2° égales, l'une d'elles étant en outre la bissectrice des angles dont elle unit les sommets.*

La démonstration de ces deux propositions (94, 95) n'offre aucune difficulté.

QUESTIONS PROPOSÉES (*).

§ I. — *Des angles.*

1. La distance d'un point quelconque M d'une droite AB au milieu O de cette droite est égale à la demi-différence des distances de ce point M aux extrémités A et B de cette droite. Si le point M est pris sur le prolongement de la droite AB, la distance MO est la demi-somme de MA et de MB.

2. ACB étant un angle, CO sa bissectrice et CM une droite menée à volonté par le sommet C dans l'intérieur de cet angle, l'angle MCO est égal à la demi-différence des angles MCA, MCB. Si la droite CM est extérieure à l'angle ACB, l'angle MCO est la demi-somme des angles MCA, MCB.

3. Étant données quatre droites OA, OB, OC, OD, issues d'un même point O, si les angles DOA, BOC, sont égaux entre eux, ainsi que les angles AOB, COD, les côtés OA et OC sont en ligne droite, ainsi que les côtés OB et OD.

§ II. — *Des triangles.*

4. Le périmètre d'un triangle est plus grand que la somme des droites qui joignent un point intérieur quelconque aux trois sommets, et moindre

---

(*) Ces exercices ont été choisis de manière que ceux qui se rapportent à un paragraphe déterminé, puissent toujours être résolus à l'aide des seuls principes démontrés dans ce paragraphe ou dans les paragraphes précédents.

que le double de cette somme. Considérer le cas où le point qu'on joint aux trois sommets est extérieur au triangle.

5. Une médiane quelconque d'un triangle, c'est-à-dire la ligne qui joint un sommet au milieu du côté opposé, est moindre que la demi-somme des deux côtés issus du même sommet, et plus grande que la moitié de l'excès de cette somme sur le troisième côté.

6. Le périmètre d'un triangle est plus grand que la somme de ses trois médianes et moindre que le double de cette somme.

7. ABC étant un triangle quelconque, on prend sur AB, prolongé s'il le faut, une longueur AC′ égale à AC; on prend de même sur AC une longueur AB′ égale à AB; on tire B′C′ qui coupe BC en I : démontrer que la droite AI est la bissectrice de l'angle BAC.

8. I étant le milieu de la base BC d'un triangle isocèle ABC et M un point pris à volonté sur le côté AC, démontrer que la différence des longueurs IB et IM est moindre que celle des longueurs AB et AM.

§ III — *Des perpendiculaires et des obliques.*

9. Les distances des extrémités de la base d'un triangle isocèle aux côtés opposés sont égales entre elles.

10. On dit que deux points A et A′ sont *symétriques* par rapport à une droite indéfinie XY, lorsque cette droite XY est perpendiculaire sur le milieu de AA′. Démontrer, d'après cette définition : 1° que si A′ et B′ sont les symétriques par rapport à XY de deux points quelconques A et B, les deux droites symétriques AB et A′B′ sont égales entre elles; 2° que l'angle CAB de deux droites AB et AC est égal à l'angle C′A′B′ de leurs symétriques A′B′ et A′C′.

11. Par le sommet A d'un triangle ABC, on mène la droite indéfinie XY perpendiculaire sur la bissectrice de l'angle A. Démontrer que, si M est un point quelconque de XY, le périmètre du triangle BMC est plus grand que celui du triangle primitif ABC.

§ IV. — *Des parallèles.*

12. Un triangle quelconque est le quart de celui qu'on obtient en menant par chacun de ses sommets une parallèle au côté opposé. Chaque côté du nouveau triangle est le double du côté correspondant du triangle primitif.

13. Si deux droites égales AB et CD, comprises entre deux parallèles AC et BD, se coupent en un point O, on a AO = OC et OB = OD.

14. Si par le milieu D du côté AB d'un triangle ABC on mène une parallèle DE au côté BC, la droite DE passera par le milieu E de AC et sera

égale à la moitié de BC. Réciproquement, la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égale à sa moitié.

15. Trouver le lieu des milieux des portions de droites qui vont d'un point donné à une droite donnée.

16. Les bissectrices des trois angles d'un triangle concourent en un même point. La bissectrice de l'un des angles et celles des suppléments des deux autres angles concourent aussi en un même point.

17. Les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle concourent en un même point.

18. Les trois hauteurs d'un triangle (c'est-à-dire les perpendiculaires abaissées des sommets sur les côtés opposés) concourent en un même point.

19. Les trois médianes d'un triangle concourent en un même point, situé au tiers de chacune d'elles à partir du côté correspondant. A un plus grand côté correspond une plus petite médiane.

20. Dans un triangle, le point de concours des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés, le point de concours des trois médianes et celui des trois hauteurs, sont en ligne droite, et la distance du premier point au second est moitié de la distance du second point au troisième.

21. Si, par le point d'intersection I des bissectrices des angles B et C d'un triangle ABC, on mène entre les côtés de l'angle A la parallèle DIE à BC, la droite DE sera égale à la somme de BD et de CE. Si, par le point d'intersection I' de la bissectrice de l'angle B et de celle du supplément de l'angle C, on mène entre les côtés de l'angle A ou de son opposé par le sommet la parallèle D'I'E' à BC, la droite D'E' sera égale à la différence de BD' et de CE'.

22. Des extrémités A et B et du milieu C d'une droite AB, on mène des perpendiculaires AA', BB', CC', sur une droite indéfinie XY. Démontrer que le point C' est le milieu de A'B', et que la perpendiculaire CC' est égale à la demi-somme ou à la demi-différence des perpendiculaires AA' et BB', suivant que les points A et B sont situés d'un même côté ou de part et d'autre de XY.

23. La somme des distances d'un point quelconque de la base d'un triangle isocèle aux deux autres côtés est constante. Qu'arrive-t-il lorsque le point considéré est pris sur le prolongement de la base?

24. Trouver le lieu géométrique des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites fixes est constamment égale à une longueur donnée.

25. La somme des distances d'un point pris à l'intérieur d'un triangle

équilatéral à ses trois côtés est constante. Qu'arrive-t-il lorsque le point considéré est extérieur au triangle?

26. AX étant une droite quelconque menée par le sommet A d'un triangle ABC, et BE, CF, étant les perpendiculaires abaissées des points B et C sur cette droite AX, démontrer que le milieu D de BC est à égale distance des points E et F.

§ V. — *Angles dont les côtés sont parallèles ou perpendiculaires. — Somme des angles d'un polygone.*

27. Démontrer: 1° que si deux angles ont leurs côtés respectivement parallèles, leurs bissectrices sont parallèles ou perpendiculaires entre elles: 2° que si deux angles ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, leurs bissectrices sont perpendiculaires ou parallèles entre elles.

28. Étant donnés un triangle ABC et un point O pris dans son intérieur, démontrer que l'angle BOC est toujours plus grand que l'angle BAC du triangle.

29. Un angle d'un triangle est droit, aigu ou obtus, suivant que la médiane issue du sommet de cet angle est égale, supérieure ou inférieure à la moitié du côté opposé. Réciproques.

30. AD et BC étant deux parallèles coupées obliquement par AB et perpendiculairement par AC, on mène entre ces deux parallèles la droite BED qui coupe AC en E, de manière que $ED = 2AB$: démontrer que l'angle DBC est le tiers de l'angle ABC.

31. Si, d'un point A pris hors d'une droite XY, on mène sur cette droite la perpendiculaire AB et les obliques AC, AD, AE, de manière que ces obliques soient situées d'un même côté de AB et que les angles BAC, CAD, DAE, soient égaux, on a $BC < CD < DE$.

32. Soient un triangle ABC et AO, BO, CO, les bissectrices de ses angles; BO prolongée coupant le côté AC en D, et OI étant la perpendiculaire menée du point O sur AC, démontrer que l'angle COD est égal à l'angle AOI.

33. L'angle formé par la bissectrice de l'angle A d'un triangle ABC et par la perpendiculaire menée du sommet A sur le côté BC, est égal à la demi-différence des angles B et C.

34. Si l'on mène les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle ABC, les trois triangles partiels et le triangle total qu'elles déterminent autour du triangle donné sont équiangles. Chaque angle du triangle ABC a pour supplément le double de l'angle qui lui est opposé dans le triangle total.

35. Dans un triangle ABC, on prend sur le côté AB et sur son prolongement $AD = AE = AC$, puis on joint le sommet C aux points D et E. Démontrer que l'angle E est la moitié de l'angle A du triangle ABC, et que l'angle DCE est droit.

36. Dans un triangle ABC on mène, jusqu'au côté BC, une droite AD faisant avec le côté AB un angle égal à l'angle C et une droite AE faisant avec le côté AC un angle égal à l'angle B. Démontrer que le triangle DAE est isocèle.

37. Dans un triangle rectangle, si l'un des angles aigus est double de l'autre, l'hypoténuse est double du plus petit côté. Réciproque.

38. Dans un triangle quelconque ABC où l'angle B est double de l'angle C, on mène AD perpendiculaire sur le côté BC; sur AB, prolongé ou non suivant que l'angle B est aigu ou obtus, on prend BE égale à BD, puis on tire la droite EDF qui coupe AC au point F. Démontrer : 1° que les longueurs FD, FC, FA, sont égales et que les triangles ABC, AFE, sont équiangles : 2° que le côté AB est égal à la différence des segments DC et DB de la base BC si l'angle B est aigu, à leur somme si l'angle B est obtus.

39. L'angle des bissectrices de deux angles consécutifs d'un quadrilatère convexe est égal à la demi-somme des deux autres angles du quadrilatère. L'angle des bissectrices de deux angles opposés est égal à la demi-différence des deux autres angles.

§ VI. — *Du parallélogramme.*

40. Deux quadrilatères convexes sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal et leurs quatre côtés égaux chacun à chacun et disposés de la même manière. Énoncer le théorème correspondant pour le cas de deux parallélogrammes, de deux rectangles, de deux losanges, de deux carrés.

41. Deux trapèzes sont égaux lorsqu'ils ont leurs quatre côtés égaux chacun à chacun et disposés de la même manière.

42. Toute droite comprise entre deux côtés opposés d'un parallélogramme et passant par le point d'intersection de ses diagonales (ou par le *centre* de ce parallélogramme) : 1° est divisée par ce point en deux parties égales; 2° divise le parallélogramme en deux quadrilatères égaux.

43. Tout quadrilatère est la moitié du parallélogramme que l'on obtient en menant par les extrémités de chaque diagonale des parallèles à l'autre diagonale. Déduire de ce théorème que deux quadrilatères ont même surface lorsque leurs diagonales sont respectivement égales et se coupent sous le même angle.

44. Les droites qui joignent successivement les milieux des côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme.

45. En divisant arbitrairement, mais de la même manière, les côtés d'un carré, et en joignant successivement les points de division, on forme un nouveau carré inscrit dans le premier.

46. Étant donné un parallélogramme ABCD, on prend en sens inverse, sur les côtés opposés AB, CD, deux longueurs AE et CF, arbitraires, mais égales; de même, sur les côtés opposés AD, BC, on prend en sens inverse les longueurs arbitraires AH = CG. Démontrer : 1° que la figure EGFH est un parallélogramme inscrit dans le parallélogramme proposé; 2° que le *centre* du parallélogramme proposé est en même temps celui de tous les parallélogrammes qu'on peut y inscrire.

47. Le point de rencontre des droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère quelconque, est le milieu de la droite qui unit les milieux des diagonales de ce quadrilatère.

48. Les bissectrices des angles d'un quadrilatère convexe forment un second quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires. Lorsque le premier quadrilatère est un parallélogramme, le second est un rectangle dont les diagonales sont parallèles aux côtés du parallélogramme et égales à la différence de ses côtés adjacents. Lorsque le premier quadrilatère est un rectangle, le second est un carré.

49. Si, par un point quelconque de la base d'un triangle isocèle, on mène des parallèles aux deux autres côtés, on forme un parallélogramme dont le périmètre est constant.

50. ABC étant un triangle rectangle et ABDM, ACEN, étant les carrés construits sur les côtés AB et AC de l'angle droit, des sommets D et E, opposés au sommet A, on abaisse des perpendiculaires DF, EG, sur l'hypoténuse BC prolongée. Démontrer : 1° que l'hypoténuse BC est égale à la somme des perpendiculaires DF et EG; 2° que le triangle proposé ABC est la somme des triangles DFB, CEG.

51. Démontrer que dans tout trapèze isocèle les angles opposés sont supplémentaires.

52. Dans tout trapèze, les quatre points, milieux des deux côtés non parallèles et des deux diagonales, sont sur une même droite parallèle aux deux bases du trapèze; la distance des points extrêmes est égale à la demi-somme de ces bases; la distance des points intermédiaires est égale à leur demi-différence.

53. Sur un billard rectangulaire, dans quelle direction faut-il lancer la bille pour qu'elle revienne au point de départ après avoir frappé successivement les quatre côtés? Quelle est la longueur du chemin parcouru alors par la bille? (On admet que lorsque la bille frappe une bande, les deux droites qu'elle suit, avant et après le choc, sont également inclinées sur la bande.)

54. ABCD étant un parallélogramme, E et F étant les milieux des côtés opposés AB et CD, les droites BF et DE divisent la diagonale AC en trois parties égales.

55. Par le sommet A d'un parallélogramme ABCD, on mène une droite quelconque AX. Prouver que la distance du sommet C à la droite AX est égale à la somme ou à la différence des distances des sommets B et D à la même droite, suivant que AX est extérieure au parallélogramme ou le traverse.

56. D, E, F, étant respectivement les milieux des côtés AB, BC, CA, d'un triangle ABC, on mène DG parallèle à la médiane BF jusqu'à la rencontre de EF prolongée. Démontrer que les trois côtés du triangle DGC sont respectivement égaux aux trois médianes du triangle ABC.

57. Étant donnés deux parallèles XY, X'Y', et deux points A et B situés hors de ces parallèles et de côtés différents, on demande de trouver le plus court chemin de A en B, par une ligne brisée AMNB telle, que la portion MN comprise entre les deux parallèles ait une direction donnée.

LIVRE II.

LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

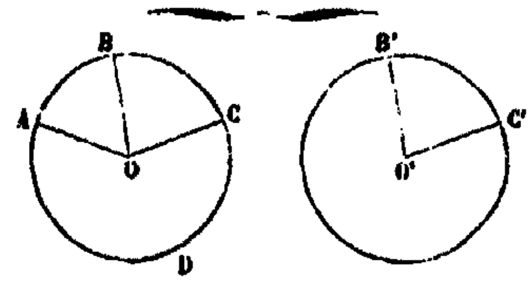
§ I. — DES ARCS ET DES CORDES.

DÉFINITIONS.

96. La *circonférence* est une ligne courbe ABCD (*fig.* 66), dont tous les points sont également distants d'un point intérieur O qu'on nomme *centre*.

Le *cercle* est l'espace limité par la circonférence.

Fig. 66.



On appelle *rayon* toute droite menée du centre à la circonférence. *Tous les rayons* OA, OB, OC,..., *d'un cercle sont égaux*, d'après la définition même de la circonférence.

Deux cercles de même rayon sont égaux; car si l'on place le centre O′ du second (*fig.* 66) sur le centre O du premier, l'égalité des rayons entraînera la coïncidence des deux circonférences.

97. On nomme *arc* une portion quelconque AB de circonférence.

Deux arcs de même rayon, BC *et* B′C′ (*fig.* 66), *sont dits égaux, lorsqu'on peut les placer l'un sur l'autre de manière qu'ils coïncident.*

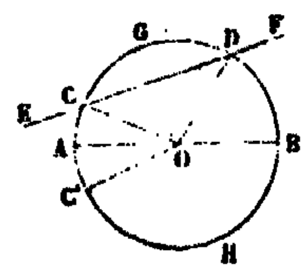
Pour ajouter deux arcs de même rayon, AB *et* B′C′, on porte le second en BC à la suite du premier, sur le cercle O auquel ce premier arc appartient, de manière qu'ils aient une extrémité B commune; l'arc ABC, compris entre les extrémités non communes A et C, est dit *la somme* des deux arcs proposés.

98. Un point est *intérieur* ou *extérieur* à un cercle suivant que sa distance au centre est *plus petite* ou *plus grande* que le rayon.

THÉORÈME.

99. *Une droite quelconque* EF *ne peut rencontrer une circonférence* O *en plus de deux points* C *et* D (*fig.* 67).

Fig. 67.



En effet, du centre O à la droite EF, on ne peut mener au plus (45) que deux droites OC et OD égales au rayon.

On dit d'après cela que *la circonférence est une ligne convexe* (75).

SCOLIE.

100. On donne le nom de *sécante* à toute droite EF qui coupe la circonférence en deux points C et D. On appelle *corde* la partie CD intérieure au cercle, et l'on réserve le nom de *diamètre* aux cordes qui passent par le centre.

Tous les diamètres d'un cercle sont égaux, car un diamètre quelconque AB est la somme de deux rayons OA et OB.

THÉORÈME.

101. 1° *Le diamètre est la plus grande corde du cercle;*

2° *Tout diamètre* AB *divise la circonférence et le cercle en deux parties égales* (*fig.* 67).

En effet :

1° Une corde quelconque CD est moindre que la somme OC + OD des deux rayons qui aboutissent à ses extrémités; elle est donc moindre qu'un diamètre.

2° Si l'on plie la figure autour d'un diamètre AB, un rayon quelconque OC de la partie supérieure prendra la direction du rayon OC' qui fait de l'autre côté de AB un angle C'OA égal à l'angle COA ; et à cause de l'égalité des rayons, le point C de l'arc supérieur AGB tombera en C' sur l'arc inférieur AHB. Ces deux arcs AGB, AHB, se recouvrant exactement, sont donc égaux ainsi que les espaces compris entre chacun d'eux et le diamètre AB.

SCOLIE.

102. Une corde quelconque CD, autre qu'un diamètre, divise d'après cela la circonférence en deux arcs *inégaux*, l'un CGD moindre que la demi-circonférence, l'autre CHD plus grand. On dit que la corde CD *sous-tend* ces deux arcs. Toutefois, quand nous parlerons de *l'arc sous-tendu par une corde* CD, il faudra toujours entendre, à moins d'avertissement contraire, qu'il s'agit du plus petit des deux arcs correspondant à cette corde.

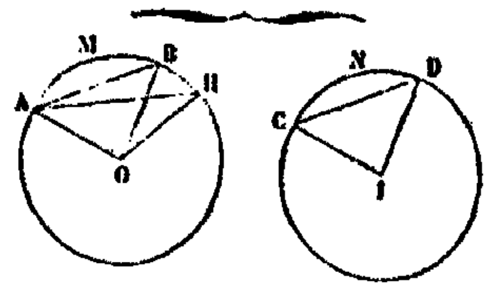
THÉORÈME.

103. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° *Deux arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales;*

2° *De deux arcs inégaux, le plus grand est sous-tendu par la plus grande corde* (*fig.* 68).

Fig. 68.



Soient O et I deux cercles égaux :

1° Si l'arc AMB est égal à l'arc CND, les cordes AB et CD seront égales. En effet, portons le cercle I sur le cercle O de manière que le rayon IC coïncide avec son égal OA, I étant en O et C en A. Les circonférences coïncideront, l'arc CND tombera sur son égal AMB, et le point D viendra en B. La corde CD s'appliquera donc sur la corde AB et, par suite, lui sera égale.

2° Si l'arc AMH est plus grand que l'arc CND, la corde AH sera plus grande que la corde CD. En effet, prenons à partir du point A, sur l'arc AMH, un arc AMB égal à l'arc CND; les cordes AB, CD seront égales (1°), et il restera à démontrer que la corde AB est moindre que la corde AH. Or, l'arc AMB étant moindre que l'arc AMH, le point B tombe entre les points A et H, et l'angle AOB est inférieur à l'angle AOH. Par suite, les deux triangles AOB, AOH, ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir OA commun et OB = OH comme rayons d'un même cercle. Donc (36), le côté AB opposé à l'angle AOB est moindre que le côté AH opposé à l'angle AOH.

104. Du théorème qu'on vient de démontrer et du principe général du n° 33 il suit que :

RÉCIPROQUEMENT, *dans un même cercle ou dans des cercles égaux, à des cordes égales répondent des arcs égaux, et à une plus grande corde répond un plus grand arc.*

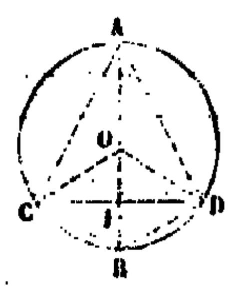
SCOLIE.

105. Nous n'avons considéré dans ce qui précède que des arcs moindres qu'une demi-circonférence (102). Si l'on considérait des arcs plus grands qu'une demi-circonférence, pour la seconde partie du théorème les conclusions seraient inverses : l'arc augmentant, la corde diminuerait au lieu de croître.

THÉORÈME.

106. *Le diamètre* AB, *perpendiculaire sur une corde* CD,

Fig. 69.



divise cette corde et les deux arcs CBD, CAD, *qu'elle sous-tend, chacun en deux parties égales* (*fig.* 69).

En effet, soient O le centre de la circonférence et I le point de rencontre du diamètre AB et de la corde CD. Les rayons OC, OD, étant, par rapport à la perpendiculaire OI, deux obliques égales, s'écartent également du pied de cette perpendiculaire. On a donc $CI = ID$. En d'autres termes, la corde CD est divisée au point I en deux parties égales. Dès lors, AB étant perpendiculaire sur le milieu de CD, tout point de AB, et en particulier le point B, est équidistant des points C et D. Les cordes BC et BD sont donc égales et, par suite, les arcs BC et BD sont aussi égaux. En d'autres termes, l'arc CBD est divisé au point B en deux parties égales. On démontrerait de même que l'arc CAD est aussi divisé en deux parties égales au point A.

COROLLAIRES.

107. La droite AB satisfait d'après cela aux *cinq* conditions suivantes :

Elle passe par le centre O, par le milieu I de la corde CD, et par les milieux A et B de chacun des arcs que cette corde sous-tend; elle est enfin perpendiculaire sur la corde CD.

Or, deux de ces cinq conditions suffisent pour déterminer la droite AB; car on sait que, par deux points, on ne peut mener qu'une droite, et que par un point on ne peut mener qu'une perpendiculaire sur une droite. Donc, toute ligne droite assujettie à deux des cinq conditions énoncées remplira nécessairement les trois autres. De là, une série de propositions que le lecteur énoncera sans difficulté, et parmi lesquelles nous ne citerons que la suivante : *La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde, passe par le centre et par le milieu de chacun des arcs que cette corde sous-tend.*

108. *Le lieu géométrique des milieux d'un système de cordes parallèles est le diamètre perpendiculaire à la direction commune de ces cordes.*

THÉORÈME.

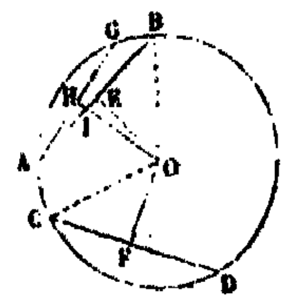
109. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° *Deux cordes égales sont également éloignées du centre;*

2° *De deux cordes inégales, la plus petite est la plus éloignée du centre (fig. 70).*

1° Soient les deux cordes égales AB, CD, et soient OE, OF, les perpendiculaires menées du centre O sur chacune d'elles. Les longueurs de ces perpendiculaires mesurent (44) les dis-

Fig. 70.



tances du centre à ces deux cordes, et il s'agit de démontrer que ces distances sont égales. Or, les triangles rectangles EOB, COF, sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un côté égal, savoir : OB = OC comme rayons d'un même cercle, et EB = CF comme moitiés de cordes égales, puisque les pieds E et F des perpendiculaires OE et OF sont (106) les milieux des cordes AB et CD. Donc, OE troisième côté du triangle OEB est égal à OF troisième côté du triangle OCF.

2° Soient les deux cordes inégales AG et CD. On suppose AG moindre que CD, et il faut démontrer que la perpendiculaire OH, menée du centre sur la première corde, est plus grande que la perpendiculaire OF. Par le point A, menons une corde AB égale à CD. La distance OE du centre à cette corde sera égale à OF, et il reste à démontrer que OE est moindre que OH. Or, la corde AG étant moindre que la corde AB, l'arc AG est inférieur à l'arc AB et, par suite, le centre O du cercle et le milieu H de la corde AG sont situés de part et d'autre de la droite AB. Donc AB rencontre OH en un point I situé entre O et H, et l'on a $OI < OH$. Mais, puisque OE est perpendiculaire sur AB, OI est oblique, et l'on a

$$OE < OI.$$

Donc, à fortiori,

$$OE < OH.$$

110. Du théorème qu'on vient de démontrer et du principe général du n° 33, il résulte que :

Réciproquement, *dans un même cercle ou dans des cercles* *égaux, deux cordes également éloignées du centre sont égales; et, de deux cordes inégalement éloignées du centre, la plus éloignée est la plus petite.*

§ II. — TANGENTE AU CERCLE. — POSITIONS MUTUELLES DE DEUX CIRCONFÉRENCES.

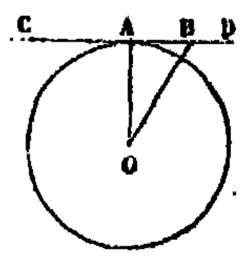
DÉFINITION.

111. On nomme *tangente* au cercle toute droite CD (*fig.* 71) qui n'a qu'un point commun avec la circonférence. Ce point commun A est appelé *point de contact*.

THÉORÈME.

112. *Toute perpendiculaire* CD, *à l'extrémité d'un rayon* OA, *est tangente à la circonférence* (*fig.* 71).

Fig. 71.



En effet, en joignant au centre O un point quelconque B de CD, autre que le point A, on obtient une droite OB oblique sur CD, puisque OA est la perpendiculaire à CD qui passe par le point O. Cette droite OB est donc plus grande que le rayon OA (43) et, par suite, le point B est extérieur au cercle (98). La droite CD ayant tous ses points hors du cercle, sauf le point A, qui est commun aux deux lignes, est donc une tangente à la circonférence.

113. Réciproquement, *toute tangente* CD *à la circonférence est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OA *qui aboutit au point de contact* A (*fig.* 71).

En effet, tout point B de la tangente CD, autre que le point A, étant extérieur au cercle, sa distance BO au centre est plus grande que le rayon (98). Donc, le rayon OA est la plus courte de toutes les droites qu'on peut mener du centre à la tangente CD; en d'autres termes, OA est perpendiculaire sur

CD (47), et inversement, la tangente CD est perpendiculaire au point A sur le rayon OA.

COROLLAIRES.

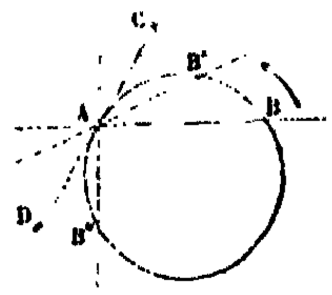
114. *Par un point A d'une circonférence O, on peut toujours mener une tangente à cette courbe, et on ne peut en mener qu'une.*

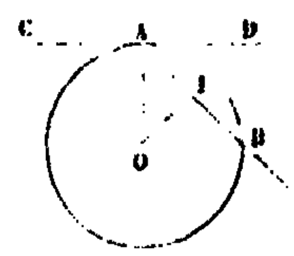
115. *Toute tangente est parallèle aux cordes que le diamètre mené au point de contact divise en deux parties égales* (106).

SCOLIE.

116. On peut considérer la tangente AC en un point A d'une circonférence (*fig.* 72), *comme la position limite d'une sé-*

Fig. 72. Fig. 73.





cante AB *issue du point* A, *lorsque cette sécante tourne autour de* A *de manière que le second point d'intersection* B *vienne se confondre avec le premier.* Car, au moment où les deux points d'intersection B et A sont ainsi réunis en un seul, la droite AC n'a plus qu'un point commun avec la circonférence.

Si l'on continuait ensuite la rotation dans le même sens, l'intersection mobile passerait en B'', au delà de l'intersection fixe A ; de sorte qu'en un point quelconque A de la circonférence, la tangente CAD sert de ligne de démarcation entre les directions qui coupent une seconde fois la courbe d'un côté de ce point et celles qui la coupent de l'autre côté.

Cette nouvelle définition de la tangente est applicable à toutes les courbes. D'ailleurs, nous verrons plus tard qu'outre sa généralité, cette définition a sur celle du n° 111 l'avantage de mettre en lumière l'intime corrélation de certains théorèmes qui sembleraient sans cela tout à fait distincts.

Montrons enfin que cette définition *conduit* à la propriété caractéristique (113) de la tangente au cercle.

Soient (*fig.* 73) AB une sécante et OI la perpendiculaire menée du centre sur cette droite. Lorsque la sécante tourne autour du point fixe A de manière à devenir à la limite la tangente CAD, le point I, milieu de la corde AB (106), vient se réunir au point A en même temps que le point B. Par suite, l'angle OAD, position limite de l'angle droit OIB, est un angle droit, et la tangente CAD est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA.

THÉORÈME.

117. ***Deux parallèles interceptent sur la circonférence des arcs égaux.***

Il faut distinguer trois cas :

1° Supposons (*fig.* 74) que les parallèles AB, CD, soient sé-

Fig. 74.

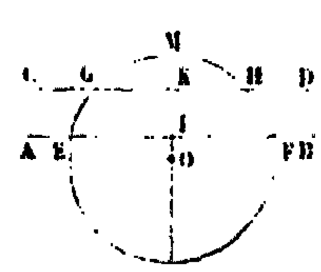


Fig. 75.

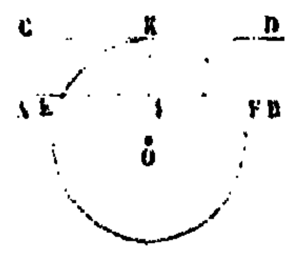
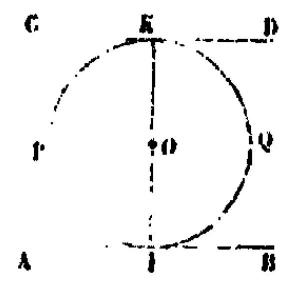


Fig. 76.



cantes, et abaissons du centre O sur ces droites la perpendiculaire commune OM qui coupe la circonférence en M. Le point M est (106) à la fois le milieu de l'arc EMF que soustend la corde EF, et le milieu de l'arc GMH que sous-tend la corde GH ; on a donc

$$\text{arc EM} = \text{arc FM}, \quad \text{arc GM} = \text{arc HM},$$

d'où, en soustrayant membre à membre,

$$\text{arc EM} - \text{arc GM} = \text{arc FM} - \text{arc HM},$$

c'est-à-dire

$$\text{arc EG} = \text{arc FH}.$$

2° Supposons (*fig.* 75) que les parallèles AB et CD soient l'une sécante et l'autre tangente. Alors le rayon OK qui aboutit au point de contact est (106, 113) une perpendiculaire commune à la tangente CD et à la corde EF qui lui est parallèle ; il divise donc l'arc EKF, sous-tendu par cette corde, en deux parties égales, et l'on a

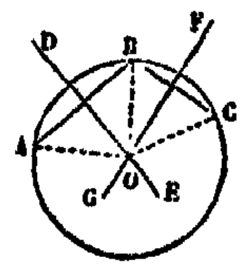
$$\text{arc EK} = \text{arc FK}.$$

3° Supposons enfin (*fig.* 76) que les deux parallèles AB et CD soient tangentes, l'une en I et l'autre en K. Les deux rayons OI et OK, respectivement perpendiculaires à AB et à CD, seront dans le prolongement l'un de l'autre, puisque des droites parallèles ont leurs perpendiculaires communes. Les deux arcs KPI, KQI, sont donc égaux l'un et l'autre à une demi-circonférence.

THÉORÈME.

118. ***Par trois points* A, B, C, *non situés en ligne droite, on peut toujours faire passer une circonférence, et on ne peut en faire passer qu'une* (*fig.* 77).**

Fig. 77.



Il s'agit de prouver qu'il existe un point, et un seul, situé à la même distance des trois points donnés A, B, C.

Or, tout point équidistant de A, B, C, doit se trouver sur la perpendiculaire DE élevée sur le milieu de AB, parce qu'elle est le lieu des points équidistants de A et de B; il doit aussi appartenir à la perpendiculaire FG élevée sur le milieu de BC, parce qu'elle est le lieu des points équidistants de B et de C. Comme deux droites DE, FG, ne peuvent avoir qu'un point commun, on voit d'abord qu'il ne saurait jamais exister qu'un seul point équidistant des points A, B, C. En second lieu, un tel point existe toujours si, conformément à notre hypothèse, les points A, B, C, ne sont pas en ligne droite; car, les deux droites AB et BC se coupant, les droites DE et FG qui leur sont respectivement perpendiculaires doivent se rencontrer en un certain point O (70, 2°).

Le cercle décrit de ce point O comme centre, avec l'une des trois droites égales OA, OB, OC, pour rayon, passe par les points A, B, C, et est le seul qui puisse y passer.

On énonce souvent ce théorème d'une manière plus rapide en disant : *Trois points, non en ligne droite, déterminent une circonférence.*

COROLLAIRE.

119. Deux circonférences ne peuvent avoir trois points communs sans coïncider ; d'où il suit que *deux circonférences distinctes ne peuvent avoir plus de deux points communs.*

Lorsque deux circonférences ont deux points communs, on dit qu'elles se coupent ou qu'elles sont *sécantes.*

Lorsque deux circonférences n'ont qu'un point commun, on dit qu'elles sont *tangentes;* le point commun est appelé *point de contact.*

THÉORÈME.

120. *Lorsque deux circonférences se coupent, la droite* OO′ *qui joint leurs centres est perpendiculaire sur la corde commune* AB *et divise cette corde en deux parties égales* (*fig.* 78).

Fig. 78.

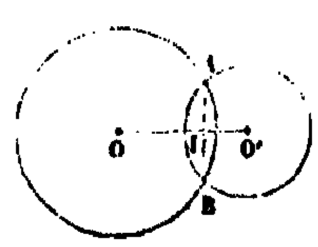
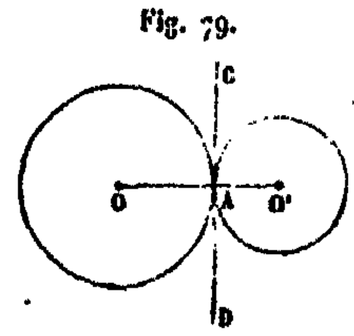


Fig. 79.



En effet, la perpendiculaire élevée sur la corde commune AB par son milieu I, doit passer par le centre de chacune des deux circonférences O et O′ (107).

COROLLAIRE.

121. Supposons que la circonférence O restant fixe, ainsi que le point A, la circonférence O′ tourne autour du point A, de manière que le second point d'intersection B se rapproche de plus en plus du premier et vienne à la limite se confondre avec lui comme dans la *fig.* 79. Les deux circonférences n'ayant plus alors qu'un point commun A seront tangentes en ce point. D'ailleurs, la droite OO′ passant toujours entre A et B, ces deux points ne peuvent se réunir que sur la ligne des centres OO'. Enfin, en vertu de ce mouvement (116), la corde commune devient à la limite tangente en A à chacune des deux circonférences. Donc,

Lorsque deux circonférences O et O' sont tangentes, leur point de contact A est situé sur la droite des centres, et la perpendiculaire CD élevée en ce point sur cette droite est une tangente commune aux deux circonférences.

SCOLIE.

122. Deux circonférences distinctes peuvent avoir deux points communs, c'est-à-dire se couper (*fig.* 82); ou avoir un seul point commun, c'est-à-dire être tangentes, soit extérieurement (*fig.* 81), soit intérieurement (*fig.* 83); ou enfin n'avoir aucun point commun, c'est-à-dire être extérieures (*fig.* 80) ou intérieures (*fig.* 84) l'une à l'autre. Leurs positions relatives sont donc au nombre de cinq.

THÉORÈME.

123. 1° *Si deux circonférences* O *et* O' *sont extérieures, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons;*

2° *Si elles sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons;*

3° *Si elles se coupent, la distance des centres est à la fois moindre que la somme et plus grande que la différence des rayons;*

4° *Si elles sont tangentes intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons;*

5° *Si elles sont intérieures, la distance des centres est moindre que la différence des rayons.*

En effet :

1° A et A' (*fig.* 80) étant les points où la ligne des centres coupe les deux circonférences, on a

$$OO' = OA + AA' + O'A' \quad \text{ou} \quad OO' > OA + O'A'.$$

2° Le point de contact A (*fig.* 81) est situé entre les deux centres et sur la droite OO' qui les joint. On a donc

$$OO' = OA + O'A.$$

3° Les deux points communs (*fig.* 82) étant situés hors de la ligne des centres (120), en joignant l'un d'eux B aux deux

Fig. 80.

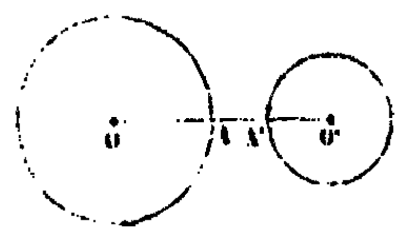


Fig. 81.

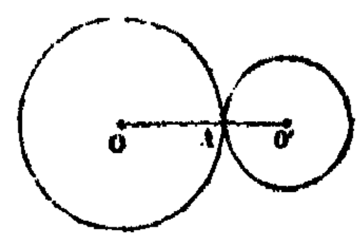


Fig. 82.

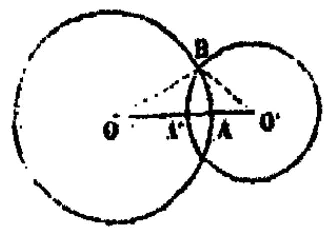
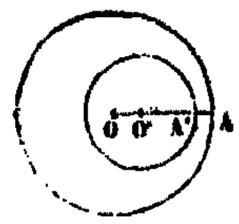


Fig. 83.

Fig. 84.



centres, on forme un triangle dans lequel on a (27, 28)

$$OO' < OB + O'B \quad \text{et} \quad OO' > OB - O'B.$$

4° Le point de contact A (*fig.* 83) est situé au delà des deux centres et sur la droite qui les joint. On a donc

$$OA = OO' + O'A, \quad \text{d'où} \quad OO' = OA - O'A.$$

5° A et A' (*fig.* 84) étant les points où la droite OO' coupe les deux circonférences, on a

$$OA = OO' + O'A' + A'A, \quad \text{d'où} \quad OA > OO' + O'A',$$

c'est-à-dire

$$OO' < OA - O'A'.$$

COROLLAIRE.

124. A chacune des cinq hypothèses faites répond une conclusion distincte. Donc, en vertu du principe général du n° 33, les réciproques des propositions précédentes sont toutes vraies. Voici leurs énoncés :

1° *Si la distance des centres est plus grande que la somme des rayons, les deux circonférences données sont extérieures l'une à l'autre ;*

2° *Si la distance des centres est égale à la somme des rayons, les deux circonférences sont tangentes extérieurement ;*

3° *Si la distance des centres est à la fois moindre que la somme et plus grande que la différence des rayons, les deux circonférences se coupent;*

4° *Si la distance des centres est égale à la différence des rayons, les deux circonférences sont tangentes intérieurement;*

5° *Si la distance des centres est moindre que la différence des rayons, les deux circonférences sont intérieures l'une à l'autre.*

Ainsi, connaissant les trois nombres D, R, r, qui mesurent respectivement la distance des centres et les rayons de deux circonférences, on peut, sans tracer ces circonférences et par une simple opération numérique, savoir quelle est leur position relative. Par exemple, si l'on a $D = 15^m$, $R = 21^m$, $r = 6^m$, on peut affirmer que les deux circonférences sont tangentes intérieurement; car on a $15 = 21 - 6$, ou $D = R - r$.

§ III. — MESURE DES ANGLES.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES (*).

125. On acquiert la notion du nombre entier en considérant des objets distincts et semblables. Nous allons expliquer comment le problème de la mesure des grandeurs conduit à étendre cette première idée.

On ne considère, en mathématiques, que les grandeurs dont on peut définir d'une manière précise *l'égalité et l'addition;* tels sont, par exemple, les angles. Nous avons dit en effet, au n° 9, ce qu'on entend par angles égaux et par somme de deux angles. Une grandeur est *plus grande* qu'une autre quand elle est la somme de cette autre et d'une troisième de même nature.

Lorsqu'une grandeur est la somme de 2, 3, 4,..., parties, égales à une autre grandeur de même espèce, on dit que la première est un *multiple* de la seconde, et que la seconde est une *partie aliquote* de la première.

(*) La mesure de l'étendue étant l'un des principaux objets de la Géométrie, il nous a paru indispensable de traiter ici d'une manière succincte, mais précise, la question générale de la mesure des grandeurs.

Dans ce paragraphe, comme dans la suite de ce Traité, les commençants pourront omettre les parties imprimées en petit caractère.

Deux grandeurs sont dites *commensurables* entre elles lorsqu'elles sont des multiples d'une troisième grandeur qu'on appelle alors leur *commune mesure;* dans le cas contraire, elles sont *incommensurables* entre elles.

126. Pour *mesurer* une grandeur, on cherche une commune mesure entre cette grandeur et une autre de même espèce, arbitraire, mais bien connue, et qui reçoit le nom *d'unité.*

Si cette commune mesure est l'unité elle-même, et que la grandeur proposée la contienne, par exemple, 5 fois sans reste, on dit que la grandeur est mesurée par le *nombre entier* 5.

Si cette commune mesure est une partie aliquote de l'unité; par exemple, si, l'unité étant partagée en sept parties égales, la grandeur proposée est la somme de cinq de ces parties, on dit que cette grandeur est les cinq septièmes de l'unité et qu'elle est mesurée par le nombre *cinq septièmes*, que l'on écrit $\frac{5}{7}$. On qualifie d'ailleurs un tel nombre de *fractionnaire* pour le distinguer des nombres entiers seuls considérés jusque-là.

En résumé, *mesurer une grandeur commensurable avec l'unité, c'est chercher combien cette grandeur renferme d'unités ou de parties aliquotes de l'unité.* Suivant que la grandeur est un multiple de l'unité ou un multiple d'une partie aliquote de l'unité, *le nombre qui exprime sa mesure est entier ou fractionnaire.* Réciproquement, toute grandeur mesurée par un nombre entier ou fractionnaire est commensurable avec l'unité, car elle est un multiple de l'unité ou d'une partie aliquote de l'unité.

127. Considérons maintenant une grandeur incommensurable avec l'unité choisie.

Concevons l'unité décomposée en un nombre quelconque n de parties égales entre elles et moindres que la grandeur à mesurer G. En prenant 1, 2, 3, 4, ..., de ces parties, on formera une série de grandeurs

$$(1) \qquad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4, \ldots, \quad A_k, \quad A_{k+1}, \ldots,$$

croissant au delà de toute limite et mesurées respectivement par les nombres

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \quad \frac{3}{n}, \quad \frac{4}{n}, \ldots, \quad \frac{k}{n}, \quad \frac{k+1}{n}, \ldots.$$

On trouvera donc, en allant assez loin dans la série (1), deux grandeurs consécutives A_k et A_{k+1} qui comprendront la proposée G. En substituant à G soit A_k, soit A_{k+1}, on commettra une erreur moindre que la différence $A_{k+1} - A_k$, c'est-à-dire aussi faible qu'on voudra, puisque cette différence, qui est la $n^{ième}$ partie de l'unité, peut être diminuée à volonté en prenant n assez grand.

La grandeur G étant la limite commune des grandeurs commensurables A_k et A_{k+1}, le nombre qui la mesure est, *par définition*, la limite commune des nombres $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ qui mesurent A_k et A_{k+1}; et en prenant soit $\frac{k}{n}$, soit $\frac{k+1}{n}$ pour le nombre qui mesure G, on aura de ce nombre une valeur, par défaut ou par excès, approchée à moins de $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire une valeur qu'on pourra, en faisant croître n, rendre aussi approchée qu'on voudra.

128. Un nombre est dit *commensurable* ou *incommensurable* suivant que la grandeur dont il exprime la mesure est commensurable ou incommensurable avec l'unité adoptée. Les nombres commensurables sont les nombres entiers et les fractions.

Le résultat d'opérations à effectuer sur des nombres incommensurables peut être obtenu avec telle approximation qu'on veut, en substituant à ces nombres des valeurs commensurables suffisamment approchées; en d'autres termes : *le résultat d'opérations à exécuter sur des nombres incommensurables est la limite des résultats obtenus en substituant à chacun d'eux des valeurs commensurables de plus en plus approchées.*

129. On nomme *rapport* d'une grandeur A à une grandeur B de même espèce le nombre par lequel il faut multiplier la seconde pour avoir la première. On désigne ce rapport par $\frac{A}{B}$.

130. *Le rapport de deux grandeurs* A *et* B *de même espèce est égal au nombre qui mesure la première lorsqu'on prend la seconde pour unité.*

Dans la démonstration de ce théorème, nous distinguerons trois cas.

1° Le rapport de A à B est un nombre entier, 5 par exemple. Il faut alors (129) multiplier B par 5 pour avoir A; en d'autres termes, la grandeur A contient 5 fois B sans reste, et par suite (126) la mesure de A lorsqu'on prend B pour unité s'exprime par le nombre 5.

2° Le rapport de A à B est une fraction, $\frac{5}{7}$ par exemple. Il faut alors (129) multiplier B par $\frac{5}{7}$ pour avoir A; en d'autres termes, la grandeur A est les $\frac{5}{7}$ de B; elle est donc (126) mesurée par le nombre $\frac{5}{7}$ lorsqu'on prend B pour unité.

3° Le rapport de A à B, c'est-à-dire (129) le nombre par lequel il faut multiplier B pour avoir A, est incommensurable. Désignons-le par r, et appelons m le nombre qui mesure A, B étant pris pour unité. Soient d'ailleurs $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ deux valeurs approchées à moins de $\frac{1}{n}$, l'une par défaut, l'autre par excès, du rapport r. On aura alors (129)

$$B \cdot \frac{k}{n} < A < B \cdot \frac{k+1}{n}.$$

Le nombre m qui mesure A sera donc compris (127) entre les nombres $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ qui mesurent les deux grandeurs $B \cdot \frac{k}{n}$, $B \cdot \frac{k+1}{n}$, B étant l'unité. Donc les nombres m et r, étant compris l'un et l'autre entre deux nombres $\frac{k}{n}$ et $\frac{k}{n}+\frac{1}{n}$, qui diffèrent aussi peu qu'on veut pour n assez grand, ne sauraient avoir une différence assignable.

131. Il résulte de là que *lorsque deux grandeurs* A *et* B *ont été mesurées avec une même unité* C, *on obtient leur rapport en divisant le nombre* α *qui mesure la première par le nombre* β *qui mesure la seconde.*

En effet, on a, d'après le théorème précédent, les deux relations

$$A = C \cdot \alpha, \quad B = C \cdot \beta, \quad \text{d'où} \quad A = B\,\frac{\alpha}{\beta}.$$

Le quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ exprime donc (129) le rapport de A à B.

On est ainsi conduit à appeler rapport de deux nombres quelconques α et β le quotient de leur division; et l'on démontre en Arithmétique que les règles de calcul des fractions à termes entiers sont applicables à ces rapports ou fractions générales $\frac{\alpha}{\beta}$. Par exemple, on n'altère pas ces rapports en multipliant leurs deux termes par un même nombre; on les multiplie en les multipliant terme à terme, etc.

132. Lorsque deux grandeurs A et B de nature différente ont une dépendance telle, que le rapport $\frac{a}{a'}$ de deux valeurs quelconques de la première soit égal au rapport $\frac{b}{b'}$ des valeurs correspondantes de la seconde, on dit que ces deux grandeurs sont *proportionnelles.*

133. *Deux grandeurs* A *et* B *de nature différente sont proportionnelles l'une à l'autre, si à deux valeurs quelconques mais égales entre elles de la première répondent deux valeurs égales de la seconde, et si, de plus, à la somme de deux valeurs quelconques de la première répond une valeur qui soit la somme des deux valeurs correspondantes de la seconde.*

Observons d'abord que si la dernière condition est remplie, à la somme d'un *nombre quelconque* de valeurs de la grandeur A répondra une valeur qui sera la somme des valeurs correspondantes de la grandeur B. Soient, par exemple, a, a', a'', trois valeurs quelconques de A, et b, b', b'' les trois valeurs correspondantes de B. On peut considérer $a+a'+a''$ comme la somme de $(a+a')$ et de a'', et $b+b'+b''$ comme la somme de $(b+b')$ et de b''. Or, en vertu de la condition même qu'on suppose remplie, $(a+a')$ et $(b+b')$ sont deux valeurs correspondantes; donc, par la même raison, il y a aussi correspondance entre $(a+a')+a''$ et $(b+b')+b''$, c'est-à-dire entre $a+a'+a''$ et $b+b'+b''$. Du cas de trois valeurs on passerait à celui de quatre, et ainsi de suite.

Cela posé, nous allons démontrer le théorème énoncé, c'est-à-dire prouver que le rapport $\frac{a}{a'}$ de deux valeurs quelconques de la grandeur A est égal au rapport $\frac{b}{b'}$ des valeurs correspondantes de la grandeur B. Nous distinguerons trois cas:

1° Le rapport $\frac{a}{a'}$ est un nombre entier, 5 par exemple. On a alors (129) $a=5a'$; mais la valeur a étant la somme de 5 parties égales à a', la valeur b qui lui correspond sera la somme de 5 parties égales à b', et l'on aura $b=5b'$, ou (129)

$$\frac{b}{b'}=5=\frac{a}{a'}.$$

2° Le rapport $\frac{a}{a'}$ est une fraction, $\frac{5}{7}$ par exemple. On a alors (129) $a = \frac{5}{7} a'$, d'où $a = 5\alpha$ et $a' = 7\alpha$, en appelant α le septième de a'. Mais si 6 est la valeur de la grandeur B qui correspond à la valeur α de la grandeur A, on aura $b = 5\beta$ et $b' = 7\beta$; d'où l'on conclut (131)

$$\frac{b}{b'} = \frac{5}{7} = \frac{a}{a'}.$$

3° Le rapport $\frac{a}{a'}$ est incommensurable. Soient $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ deux valeurs approchées de ce rapport à $\frac{1}{n}$ près, l'une par défaut, l'autre par excès. On aura (129, 130)

$$\frac{k}{n} a' < a < \frac{k+1}{n} a',$$

d'où, en désignant par α la $n^{ième}$ partie de a',

$$k\alpha < a < (k+1)\alpha \quad \text{et} \quad a' = n\alpha.$$

Mais si β est la valeur de B qui correspond à la valeur α de A, aux valeurs $k\alpha$, $(k+1)\alpha$, $n\alpha$ de A correspondront respectivement les valeurs $k\beta$, $(k+1)\beta$, $n\beta$ de B. On aura donc, puisque, d'après l'énoncé, à une plus grande valeur de A correspond nécessairement une plus grande valeur de B,

$$k\beta < b < (k+1)\beta \quad \text{et} \quad b' = n\beta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{k}{n} b' < b < \frac{k+1}{n} b' \quad \text{ou} \quad \frac{k}{n} < \frac{b}{b'} < \frac{k+1}{n}.$$

Par suite, les deux rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, étant compris entre deux nombres $\frac{k}{n}$ et $\frac{k}{n} + \frac{1}{n}$ qui, pour n assez grand, diffèrent aussi peu qu'on veut, ne sauraient avoir aucune différence assignable.

134. Réciproquement, *si deux grandeurs sont proportionnelles :* 1° la relation

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

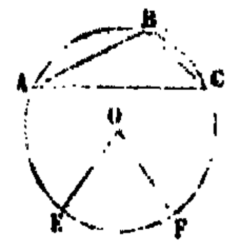
montre que pour $a = a'$ on a $b = b'$, c'est-à-dire qu'*à des valeurs égales de la première grandeur correspondent des valeurs égales de la seconde ;* 2° la même relation donne

$$\frac{a + a'}{a'} = \frac{b + b'}{b'},$$

c'est-à-dire qu'*à la somme de deux valeurs quelconques de la première grandeur correspond la somme des deux valeurs correspondantes de la seconde.*

135. Ainsi, *correspondance dans l'égalité et correspondance dans la somme*, telles sont les deux conditions nécessaires et suffisantes de la proportionnalité de deux grandeurs. Si l'une des deux conditions est seule remplie, *il n'y a pas proportionnalité ;* c'est ce qui arrive pour un arc et sa corde : à des arcs égaux d'un même cercle correspondent des cordes égales (103);

Fig. 85.



mais la corde AC de la somme de deux arcs (*fig.* 85) est moindre (27) que la somme AB + BC des cordes de ces arcs.

136. On nomme *angle au centre* tout angle EOF (*fig.* 85) qui a son sommet au centre d'un cercle, et *angle inscrit* tout angle BAC formé par deux cordes AB et AC qui se coupent sur la circonférence d'un cercle.

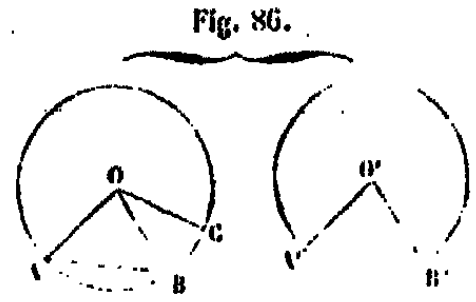
THÉORÈME.

137. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° *Deux angles au centre égaux interceptent des arcs égaux;*

2° *Si un angle au centre est la somme de deux autres angles au centre, l'arc intercepté par cet angle est la somme des arcs interceptés par les deux autres* (*fig.* 86).

Fig. 86.



1° Soient AOB, A'O'B', deux angles au centre, égaux entre eux ; les deux arcs correspondants AB et A'B' seront égaux.

En effet, en menant les cordes AB, A′B′, on forme deux triangles AOB, A′O′B′, qui sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : l'angle AOB égal à l'angle A′O′B′ par hypothèse, et les côtés $OA = O'A'$, $OB = O'B'$, comme rayons de cercles égaux. Donc la corde AB est égale à la corde A′B′, et par suite (104) les arcs AB et A′B′ que ces cordes sous-tendent sont égaux entre eux.

2° Soient A′O′B′ et BOC deux angles au centre ; transportons le premier en AOB à la suite du second, de manière à former (9) un angle AOC qui soit la somme des deux angles proposés. L'arc ABC sera évidemment (97) la somme des deux arcs AB et BC, et comme les arcs AB et A′B′ sont égaux, puisqu'ils correspondent à des angles au centre égaux, l'arc ABC sera la somme des arcs A′B′ et BC.

Corollaires.

138. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, le rapport de deux angles au centre est égal au rapport des arcs qu'ils interceptent;* en d'autres termes : *l'angle au centre d'un cercle est proportionnel à l'arc intercepté entre ses côtés.*

Le théorème précédent prouve en effet que l'angle au centre et l'arc correspondant satisfont aux conditions nécessaires et suffisantes (135) pour qu'il y ait proportionnalité entre ces grandeurs.

139. *Tout angle a la même mesure que l'arc qu'il intercepte sur une circonférence décrite de son sommet comme centre, avec un rayon quelconque, pourvu que l'on prenne pour unité d'angle l'angle au centre qui intercepte sur cette circonférence l'arc choisi pour unité d'arc.*

Fig. 87.

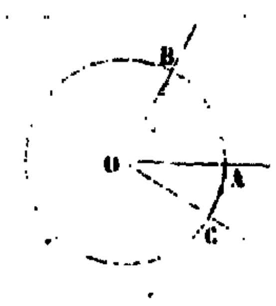
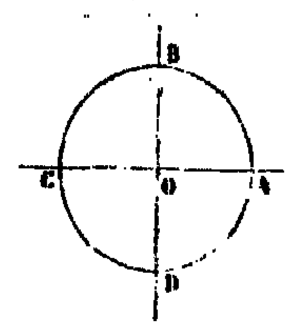


Fig. 88.



En effet, soient (*fig.* 87) AOB l'angle à mesurer et AB l'arc qu'il intercepte sur la circonférence de rayon arbitraire OA. AC étant l'unité d'arc, l'angle correspondant AOC sera, par hypothèse, l'unité d'angle. On a d'ailleurs, d'après le n° 138,

$$\frac{AOB}{AOC} = \frac{\text{arc AB}}{\text{arc AC}}.$$

Or le premier rapport est égal au nombre qui mesure l'angle AOB (130), et le second est égal au nombre qui mesure l'arc AB. Donc, dans le système d'unités adopté, le nombre qui mesure l'angle AOB est le même que celui qui mesure l'arc AB.

Comme ce théorème est d'un usage très-fréquent, on préfère l'énoncer d'une manière plus rapide, quoique incorrecte. D'abord on sous-entend la condition relative à la correspondance des unités; puis l'on dit *a pour mesure*, au lieu de *a la même mesure que;* et l'on arrive ainsi à cet énoncé usuel: *tout angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés.*

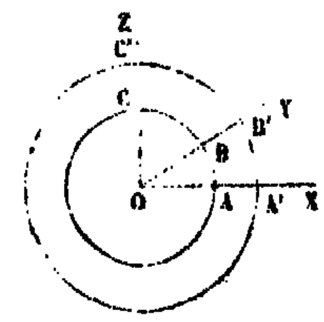
140. Lorsqu'on prend l'angle droit pour unité, l'arc unité est alors le quart de la circonférence ou *le quadrant;* car, si l'angle au centre AOB est droit (*fig.* 88), les quatre angles AOB, BOC, COD, DOA, formés par les deux diamètres BOD, AOC, sont droits, et par suite égaux; les quatre arcs AB, BC, CD, DA, sont donc égaux entre eux, et chacun d'eux est le quart de la circonférence.

141. Pour évaluer facilement les arcs, on divise la circonférence en 360 parties égales qu'on nomme *degrés*, le degré en 60 parties égales appelées *minutes*, et la minute en 60 parties égales appelées *secondes*. D'après cela, la circonférence contient $360.60 = 21600$ minutes, ou $21600.60 = 1296000$ secondes; la demi-circonférence contient 180 degrés, ou 10800 minutes, ou 648000 secondes; enfin le quadrant vaut 90 degrés, ou 5400 minutes, ou 324000 secondes.

On évalue un arc quelconque en degrés, minutes et secondes de la circonférence. Ainsi l'on dit: un arc de 36 degrés 15 minutes 21 secondes, que l'on écrit: arc de $36°15'21''$.

Deux arcs AB et A'B' (*fig.* 89) décrits entre les côtés d'un même angle XOY, de son sommet comme centre, contiennent le même nombre de degrés, minutes et secondes. En effet, le rapport de l'arc AB au quadrant AC est le même que le rapport

Fig. 89.



de l'arc A'B' au quadrant A'C', puisque chacun de ces rapports est égal à celui de l'angle XOY à l'angle droit XOZ (138). Or, comme le quadrant AC vaut 90 degrés de la circonférence OA, et que le quadrant A'C' vaut 90 degrés de la circonférence O'A', les arcs AB et A'B' vaudront le même nombre de degrés, minutes et secondes de leurs circonférences respectives.

D'après cela, on appelle angle de $36°15'21''$, l'angle qui intercepte entre ses côtés, sur toute circonférence décrite de son sommet comme centre, un arc de $36°15'21''$.

Connaissant le nombre de degrés, minutes et secondes d'un angle, on obtient son rapport à l'angle droit en prenant le rapport de ce nombre de degrés, minutes et secondes à 90 degrés; il faut avoir soin, bien entendu, d'évaluer les deux angles en unités de même espèce, soit en degrés, soit en minutes, soit en secondes. Ainsi, comme $36°15'21''$ valent $130521''$, et que 90 degrés renferment 324000 secondes, le rapport de l'angle de $36°15'21''$ à l'angle droit est exprimé par la fraction $\frac{130521}{324000}$ ou $\frac{43507}{108000}$.

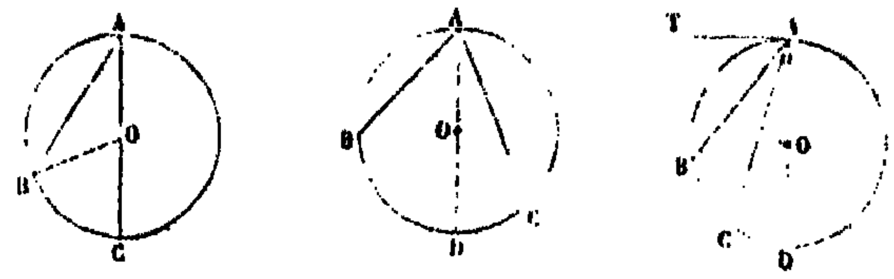
THÉORÈME.

142. *Tout angle inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Soit BAC un angle inscrit dans un cercle O. Pour démontrer que cet angle a pour mesure la moitié de l'arc BC compris entre ses côtés, il convient de distinguer trois cas:

1° Le centre O tombe sur l'un des côtés AC de l'angle BAC (*fig.* 90). Menons le rayon BO; le triangle BOA étant isocèle, les angles A et B sont égaux, et comme (80) leur somme équi-

Fig. 90. Fig. 91. Fig. 92.



vaut à l'angle extérieur BOC, l'angle A est égal à la moitié de BOC; mais ce dernier angle ayant son sommet au centre du cercle, a pour mesure l'arc BC. Donc l'angle proposé BAC a pour mesure la moitié de l'arc BC.

2° Le centre O tombe à l'intérieur de l'angle BAC (*fig.* 91). Menons le diamètre AOD; l'angle BAC est la somme des angles BAD, DAC, qui, d'après le premier cas, ont respectivement pour mesure $\frac{1}{2}$ BD et $\frac{1}{2}$ DC. La somme de ces deux arcs, c'est-à-dire la moitié de l'arc BDC, est donc la mesure de l'angle BAC.

3° Le centre O tombe en dehors de l'angle BAC (*fig.* 92). Menons le diamètre AOD; l'angle BAC est la différence des angles BAD, CAD, qui, d'après le premier cas, ont respectivement pour mesure $\frac{1}{2}$ BD et $\frac{1}{2}$ CD; la différence de ces arcs, c'est-à-dire la moitié de l'arc BC, est donc la mesure de l'angle proposé BAC.

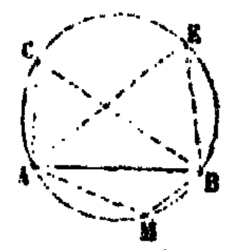
Corollaires.

143. Supposons (*fig.* 92) que le côté AC restant fixe, la corde AB tourne autour du sommet A de manière à devenir la tangente AT au point A; dans toutes les positions de la corde AB, l'angle inscrit BAC aura pour mesure la moitié de l'arc correspondant BC; donc, à la limite, *l'angle* TAC, *formé par une tangente* AT *et une corde* AC *issue du point de contact, a pour mesure la moitié de l'arc* AC *compris entre ses côtés.*

On peut d'ailleurs démontrer ce théorème, indépendamment de toute notion de limite. Il suffit, par exemple, d'observer que l'angle TAC est l'excès de l'angle droit TAD sur l'angle inscrit CAD; sa mesure est donc l'excès de la moitié de la demi-circonférence ABD sur la moitié de l'arc CD, ou enfin la moitié de l'arc AC.

144. On appelle *segment* la portion de cercle comprise entre un arc et sa corde. A chaque corde AB correspondent deux segments ACB, AMB (*fig.* 93). On dit qu'*un angle est inscrit*

Fig. 93.



dans un segment lorsque son sommet est situé sur l'arc du segment et que ses côtés passent par les extrémités de la corde sous-tendante. Ainsi les angles ACB, AEB, sont inscrits dans le segment ACB, et l'angle AMB est inscrit dans le segment AMB.

Tous les angles inscrits dans un même segment sont égaux; ainsi, les angles ACB, AEB, sont égaux, comme ayant l'un et l'autre la moitié de l'arc AMB pour mesure.

Tout angle inscrit dans l'un des deux segments déterminés par une même corde est le supplément d'un angle quelconque inscrit dans l'autre segment. Ainsi les angles ACB, AMB, sont supplémentaires, car leurs mesures $\frac{1}{2}$ arc AMB et $\frac{1}{2}$ arc ACB forment en somme la moitié de la circonférence.

Tout angle inscrit dans un segment est aigu, droit ou obtus, suivant que ce segment est supérieur, égal ou inférieur à un demi-cercle; car l'arc compris entre les côtés de l'angle est alors inférieur, égal ou supérieur à une demi-circonférence.

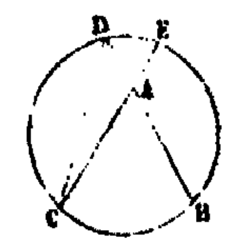
On dit qu'*un segment de cercle est capable d'un angle donné,* lorsque les angles inscrits dans ce segment sont égaux à l'angle considéré; ainsi *le segment capable d'un angle droit est un demi-cercle.*

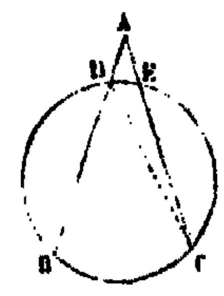
THÉORÈME.

145. *Tout angle* BAC *formé par deux sécantes qui se rencontrent à l'intérieur du cercle, a pour mesure la demi-somme des arcs* BC *et* DE *compris entre ses côtés et entre ses côtés prolongés* (*fig.* 94).

En effet, en menant DC, on voit que l'angle BAC, extérieur

Fig. 94. Fig. 95.





au triangle ACD, est égal (80) à la somme des angles inscrits ADC, ACD, qui ont respectivement pour mesure $\frac{1}{2}$ BC et $\frac{1}{2}$ DE.

THÉORÈME.

146. *Tout angle* BAC *formé par deux sécantes qui se rencontrent hors du cercle, a pour mesure la demi-différence de l'arc concave* BC *et de l'arc convexe* DE *compris entre ses côtés* (*fig.* 95).

En effet, en menant DC, on voit que l'angle BDC, extérieur au triangle DAC, est la somme des angles A et C; par suite l'angle A est l'excès de l'angle BDC sur l'angle C; sa mesure est donc l'excès de $\frac{1}{2}$ BC sur $\frac{1}{2}$ DE, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ (BC — DE).

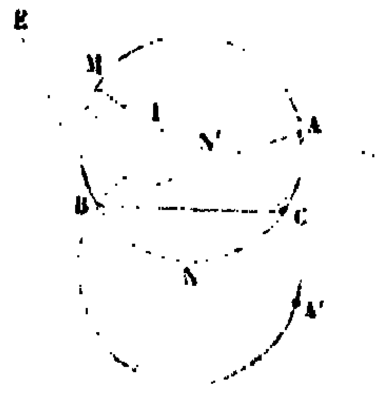
En faisant tourner autour du sommet A l'un des côtés, ou même les deux côtés de l'angle, jusqu'à ce qu'ils deviennent tangents à la circonférence, on voit que le théorème subsiste pour l'angle formé par une tangente et une sécante qui se coupent hors du cercle, et pour l'angle de deux tangentes.

SCOLIE.

147. *Dans la portion de plan située au-dessus d'une droite* BC, *le lieu des points d'où l'on voit cette droite sous un angle donné est un arc de cercle passant par les extrémités* B *et* C *de cette droite* (*fig.* 96).

En effet, soient A un point du lieu et BMACN la circonférence déterminée par les trois points A, B, C. 1° De tout point M de l'arc BMAC on voit la droite BC sous un angle égal à BAC (144); 2° de tout point I pris à l'intérieur du segment BMAC, on voit la droite BC sous un angle BIC plus grand que BAC, puisque (145) sa mesure excède la moitié de l'arc BNC; 3° de tout point E extérieur au segment BMAC et situé au-dessus de la droite BC, on voit cette droite sous un angle BEC moindre

Fig. 96.



que BAC, puisque sa mesure est plus petite que la moitié de l'arc BNC (146). L'arc BMAC est donc le lieu cherché.

Il résulte de là que l'arc BA'C sur lequel s'applique l'arc BMAC lorsqu'on replie la figure autour de BC est, au-dessous de BC, le lieu des points d'où l'on voit la droite BC sous l'angle donné.

Donc enfin, *le lieu des points d'où l'on voit une droite* BC *sous un angle donné se compose de deux arcs de cercle égaux entre eux et passant par les extrémités* B *et* C *de cette droite.*

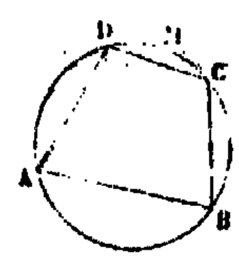
Remarquons, en outre, que l'ensemble des arcs BNC, BN'C, représente le lieu des points d'où l'on voit la droite BC sous un angle supplémentaire de l'angle considéré (144).

Si l'angle considéré est droit, les deux arcs BAC, BA'C, sont des demi-circonférences décrites sur BC comme diamètre. Donc, *le lieu des points d'où l'on voit une droite sous un angle droit est le cercle décrit sur cette droite comme diamètre.*

THÉORÈME.

148. *Dans tout quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, les angles opposés sont supplémentaires.*

Fig. 97.



En effet (*fig.* 97), considérons par exemple les angles opposés, B et D. La corde AC détermine deux segments ADC, ABC, et nous avons vu (144) que tout angle D inscrit dans le segment supérieur est le supplément de tout angle B inscrit dans le segment inférieur.

Réciproquement, *si dans un quadrilatère convexe* ABCD (*fig.* 97), *deux angles opposés* B *et* D *sont supplémentaires, le quadrilatère est inscriptible;* en d'autres termes, la circonférence déterminée par les trois points A, B, C, passera par le quatrième sommet D.

En effet, le sommet D est un point situé au-dessus de AC, et d'où l'on voit la corde AC sous un angle supplémentaire de l'angle B; or l'arc AMC est le lieu des points du plan qui jouissent de cette propriété (147).

§ IV. — PROBLÈMES.

COMMUNE MESURE DE DEUX DROITES. — CONSTRUCTION DES ANGLES ET DES TRIANGLES.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

149. Les deux principaux instruments employés dans la construction graphique des figures sont la *règle* et le *compas.* Chacun sait comment on trace des lignes droites avec la règle et des circonférences avec le compas.

Avant de se servir d'une règle, il importe de la vérifier. A

Fig. 98.

cet effet (*fig.* 98), on mène une ligne ACB d'une extrémité à l'autre de la règle, en faisant glisser la pointe du crayon le long de l'un des bords. Puis on retourne la règle, comme le montre la figure, et l'on fait glisser de nouveau le crayon le long du même bord, de manière à tracer la nouvelle ligne AC'B. Suivant que les deux lignes ACB, AC'B, coïncident exactement ou se séparent, le bord considéré est rectiligne ou curviligne: en d'autres termes, la règle est juste ou fausse. L'épaisseur de la règle ne doit pas dépasser 3 millimètres.

Un bon compas doit avoir ses pointes fines et parfaitement égales; il doit s'ouvrir et se fermer sans trop de facilité, comme sans secousses. Pour éviter de trop grands trous formés par les pointes, il convient de fixer le papier sur une planchette en collant simplement les quatre angles.

On fait d'abord tout le dessin au crayon; on exécute ensuite la *mise à l'encre* à l'aide d'un *tire-ligne* à branches égales et que l'on tient perpendiculairement au plan du papier. Les *données* et les *résultats* sont représentés par un trait *plein* ou continu; on représente par un trait *pointillé* ou interrompu les *lignes de construction*, c'est-à-dire les lignes qui servent à déduire les résultats des données.

Enfin le papier doit être assez épais, avoir le grain fin et être fabriqué *à la forme*, le papier *à la mécanique* ne résistant pas à l'action de la gomme élastique.

150. En pratique, lorsqu'on détermine une droite par deux points, il convient que ces deux points ne soient pas trop voisins l'un de l'autre; sans cela, la moindre erreur sur la position de l'un d'eux entraînerait une erreur notable sur la direction de la droite.

De même, quand un point est déterminé par la rencontre de deux droites, il faut que ces droites ne se coupent pas sous un angle trop petit; sans cela, l'épaisseur inévitable des deux traits laisserait dans l'incertitude sur la véritable position du point de rencontre.

PROBLÈME.

151. *Trouver la plus grande commune mesure de deux lignes droites.*

Soient A et B deux droites *commensurables entre elles* (125), B étant la plus petite. La recherche de leur plus grande commune mesure, analogue à celle du plus grand commun diviseur de deux nombres, repose sur les deux principes suivants:

1° *Si* B *est une partie aliquote de* A, B *est évidemment la plus grande commune mesure de* A *et de* B;

2° *Si* A *contient* m *fois* B, *plus un reste* R *moindre que* B, *la plus grande commune mesure de* A *et de* B *est la même que celle de* B *et de* R. On a, en effet,

$$A = mB + R;$$

or, toute commune mesure de A et de B étant une partie aliquote de B l'est aussi de mB, et, par suite, de $A - mB$ ou de R. Inversement, toute commune mesure de B et de R étant une partie aliquote de B l'est aussi de mB, et, par suite, de $mB + R$ ou de A. Donc les communes mesures de A et de B sont les mêmes que celles de B et de R, et, en particulier, la plus grande commune mesure est la même de part et d'autre.

D'après cela, on portera B sur A autant de fois que possible ; s'il n'y a pas de reste, B sera la plus grande commune mesure demandée; s'il y a un reste R, on sera ramené à chercher la plus grande commune mesure de B et de R. On portera donc R sur B autant de fois que possible ; s'il n'y a pas de reste, R sera la plus grande commune mesure demandée; s'il y a un reste R', on sera ramené à chercher la plus grande commune mesure de R et de R'.

Il est aisé de prouver qu'en continuant de la sorte on arrivera à un reste qui sera une partie aliquote du précédent. En effet, dans toute division, le dividende est au moins égal à la somme du diviseur et du reste ; le reste est d'ailleurs moindre que le diviseur; donc le reste est inférieur à la moitié du dividende. On voit par là que, dans la recherche de la plus grande commune mesure de A et de B, le premier reste sera inférieur à $\frac{A}{2}$: le troisième reste sera moindre que la moitié du premier et, par suite, inférieur à $\frac{A}{4}$; le cinquième reste sera moindre que la moitié du troisième et, par suite, inférieur à $\frac{A}{8}$; et ainsi de suite. L'opération ne pourra donc pas se prolonger indéfiniment, car on tomberait sur un reste moindre que la plus grande commune mesure supposée, ce qui est absurde, puisque, d'après la théorie précédente, la plus grande commune mesure doit diviser exactement les restes successifs.

On arrivera donc à un reste qui sera une partie aliquote du précédent, et ce reste sera la plus grande commune mesure demandée.

152. Réciproquement, si, en appliquant le procédé qu'on vient d'indiquer à deux droites données, on arrive à un reste qui soit contenu un nombre exact de fois dans celui qui le précède, les deux droites considérées seront commensurables entre elles, et ce reste sera alors leur plus grande commune mesure.

Ainsi, supposons qu'on ait trouvé successivement

$$A = B + R,\quad B = 5R + R',\quad R = 2R' + R'',\quad R' = 3R'';$$

on aura :

$$R = 7R'',\quad B = 38R'',\quad A = 45R'',$$

et le rapport des deux droites A et B sera représenté par le nombre fractionnaire $\frac{45}{38}$. D'ailleurs, R″ étant la plus grande commune mesure de R′ et de R″, sera, d'après ce qui précède, la plus grande commune mesure de A et de B.

Scolie.

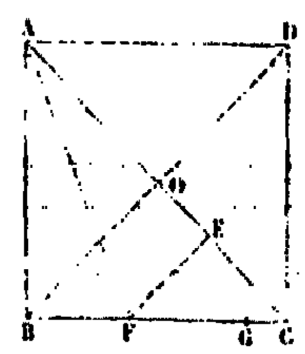
133. Il résulte de là que le procédé précédent, appliqué à deux droites incommensurables entre elles, conduira à une série d'opérations interminable.

Cette conclusion, absolument *rigoureuse en théorie*, ne se vérifie pas *en pratique*; car les restes cessent d'être appréciables au compas. Mais, s'il est impossible de constater de cette manière, ou plus généralement au moyen d'une opération mécanique quelconque, l'incommensurabilité de deux droites, on peut parfois, lorsque les droites résultent d'une construction bien définie, démontrer *géométriquement* leur incommensurabilité en s'appuyant sur la théorie qui précède et en cherchant la loi des restes successifs.

Nous allons, comme exemple, démontrer ainsi que *la diagonale* AC *et le côté* AB *d'un carré* ABCD *sont deux lignes incommensurables entre elles*.

Le côté AB (*fig.* 99) étant moindre que la diagonale AC et plus grand

Fig. 99.



que la moitié AO de cette diagonale, on voit d'abord que, si l'on prend sur la diagonale AC la longueur AE égale à AB, le reste EC sera moindre que AB.

Comparons maintenant ce reste EC au côté AB ou à son égal BC. Si l'on mène EF parallèle à BD, le triangle FEC, rectangle en E, sera isocèle, puisque l'angle EFC est égal à son correspondant OBC, et, par suite, à ECF. Donc, dans ce triangle comme dans le triangle analogue ABC, si l'on prend FG égale à EC, le reste GC sera moindre que EC. D'ailleurs, les triangles rectangles ABF, AEF, ayant l'hypoténuse commune et un côté égal, sont égaux, et, par suite, BF est égal à FE ou à EC ou à FG. Donc enfin *le côté* BC *contient deux fois* EC, *plus un reste* GC *moindre que* EC.

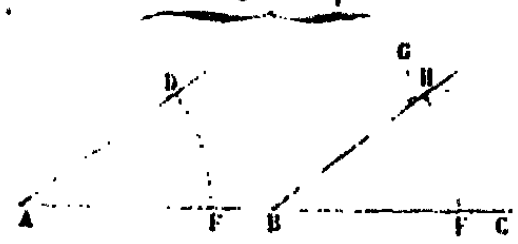
Ce dernier résultat, énoncé d'une manière générale, prouve que dans tout triangle rectangle et isocèle le côté contient deux fois la différence entre l'hypoténuse et le côté, plus un reste moindre que cette différence. Donc, à son tour *le côté* EC *contiendra deux fois* GC, *plus un nouveau reste moindre que* GC, et ainsi de suite.

On voit par là que si l'on applique aux droites AC et AB la règle prescrite au n° 151, chaque reste contiendra deux fois le précédent, plus un nouveau reste moindre que celui-ci, de sorte que l'opération n'aura pas de fin. Les deux droites considérées sont donc incommensurables entre elles.

PROBLÈME.

154. *Par un point* B *d'une droite* BC, *mener une seconde droite qui fasse avec la première un angle égal à un angle donné* DAE (*fig.* 100).

Fig. 100.



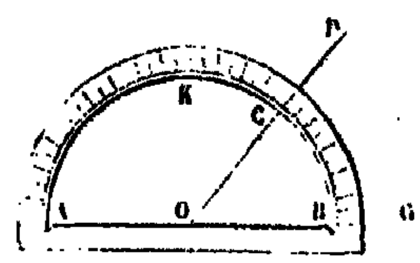
Du point A comme centre, avec une ouverture de compas arbitraire, mais assez grande, décrivez un arc de cercle qui coupe en D et E les côtés de l'angle donné ; avec la même ouverture, et du point B comme centre, décrivez un second arc de cercle GF, qui coupe en F la droite BC. Prenez avec le compas la longueur de la corde DE (il est inutile pour cela de tracer cette corde), et du point F comme centre, avec cette ouverture, décrivez un arc de cercle qui coupe en H l'arc GF ; la droite BH sera la droite demandée.

En effet, les arcs HF et DE ayant des rayons égaux et des cordes égales sont égaux (104); par suite, les angles au centre HBF, DAE, qui correspondent à ces arcs, sont aussi égaux (138).

155. Pour évaluer le nombre de degrés d'un angle, ou pour tracer un angle ayant un nombre de degrés donné, on emploie un instrument appelé *rapporteur*. C'est un demi-cercle en corne ou en cuivre dont le bord circulaire ou *limbe* est divisé en 180 parties égales ou degrés; les rapporteurs qui ont un décimètre de rayon sont même divisés en demi-degrés. Le centre est marqué par un petit trou ou par une petite échancrure.

Pour mesurer un angle DOG (*fig.* 101), on place l'instrument

Fig. 101.



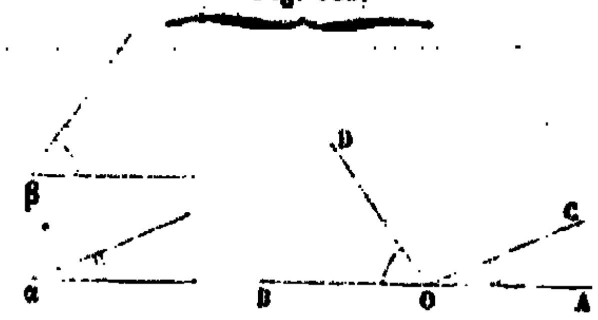
de manière que son centre coïncide avec le sommet de l'angle et que le diamètre AB, qui va de 0° à 180°, s'applique sur l'un des côtés OG. On lit alors le nombre de degrés de l'angle au point où le limbe est traversé par le second côté OD.

Pour mener au point O d'une droite OG une seconde droite OD, formant avec la première un angle donné, de 49 degrés par exemple, on place l'instrument de manière que son centre soit en O, et que son diamètre AB coïncide avec OG; puis on marque le point C du papier sur lequel tombe la division 49 du limbe; et, après avoir enlevé le rapporteur, on tire la droite OC.

PROBLÈME.

156. *Connaissant deux angles α et β d'un triangle, construire le troisième γ.*

Fig. 102.



Tracez une droite indéfinie AB (*fig.* 102); par l'un de ses points O, menez une droite OC qui forme avec OA un angle COA égal à α; menez par le même point O une autre droite OD qui fasse avec OB un angle DOB égal à 6. L'angle COD sera l'angle cherché; car la somme des trois angles formés autour du point O et au-dessus de AB équivaut à deux angles droits (20, 79).

SCOLIE.

157. Nous allons apprendre à construire un triangle, connaissant :

1° Un côté et deux angles,
2° Deux côtés et l'angle compris,
3° Deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux,
4° Les trois côtés.

Dans ces quatre problèmes, nous désignerons les trois côtés par *a*, *b*, *c*, et les angles respectivement opposés par A, B, C; ainsi l'angle A sera opposé au côté *a*, l'angle B au côté *b*, l'angle C au côté *c*.

PROBLÈME.

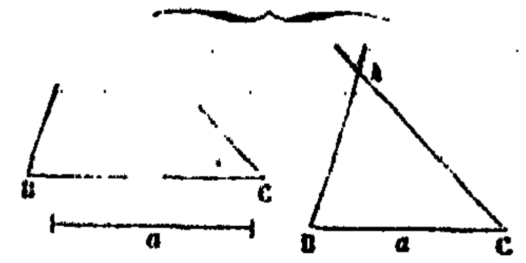
158. *Construire un triangle, connaissant un côté a et deux angles.*

On peut donner les deux angles B et C adjacents au côté *a*, ou bien l'angle opposé A et l'un des angles adjacents; on ramène ce dernier cas au premier en commençant par chercher le troisième angle (156).

Supposons donc connus le côté *a* et les deux angles adjacents B et C.

Après avoir tracé une droite BC (*fig.* 103) égale à *a*, menez

Fig. 103.



au point B une droite BA formant avec BC et au-dessus de cette ligne un angle ABC égal à l'angle donné B; menez de même au point C une droite CA formant avec CB, et au-dessus de cette ligne, un angle ACB égal à l'angle donné C. Le point de rencontre A de ces deux droites sera le troisième sommet du triangle cherché.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux droites BA, CA, se coupent, c'est-à-dire (69) que la somme des deux angles B et C soit moindre que deux angles droits.

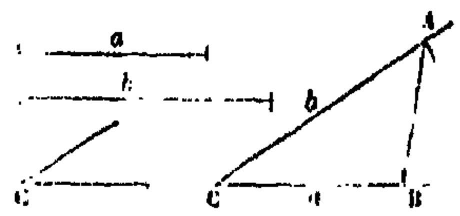
Il est d'ailleurs évident qu'on pourrait construire le même triangle au-dessous de BC au lieu de le faire au-dessus.

PROBLÈME.

159. ***Construire un triangle, connaissant deux côtés a et b et l'angle compris C.***

Tracez une droite CB (*fig.* 104) égale à a; au point C, menez

Fig. 104.



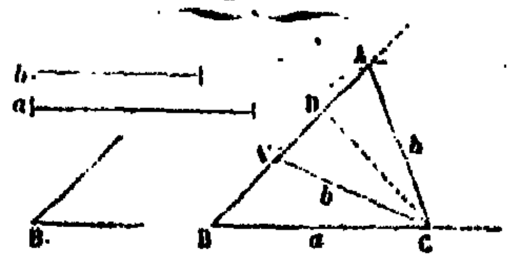
une droite CA formant avec la première un angle ACB égal à l'angle donné C; puis prenez sur cette droite, à partir du point C, une longueur CA égale à b; enfin, tirez AB, et vous aurez le triangle cherché.

PROBLÈME.

160. ***Construire un triangle, connaissant deux côtés a et b et l'angle B opposé à l'un d'eux.***

Tracez une droite BC (*fig.* 105) égale à a, et au point B me-

Fig. 105.



nez une droite BA formant avec la première un angle ABC égal à l'angle donné B; puis, du point C comme centre, avec une ouverture de compas égale à b, décrivez un arc de cercle. Si A est un point d'intersection du côté BA et de cet arc de cercle, il suffira de tirer AC pour avoir un triangle ABC satisfaisant aux conditions exigées.

101. *Discutons* maintenant ce problème, c'est-à-dire cherchons les conditions que doivent remplir les données pour que le problème soit possible, et, dans ce cas, les diverses solutions qui peuvent exister.

1° *L'angle* B *étant aigu* (*fig.* 105), pour que le problème soit possible, il faut que l'arc de cercle rencontre le côté BA, c'est-à-dire que le côté b soit au moins égal à la perpendiculaire CD abaissée du point C sur BA.

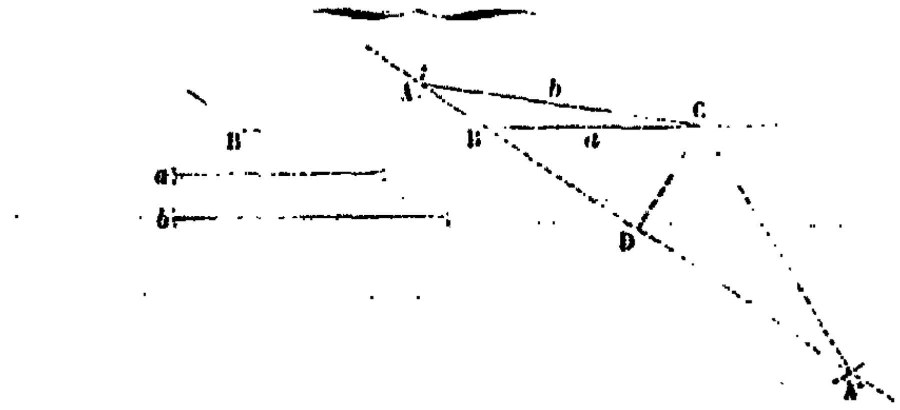
Si le côté b est égal à cette perpendiculaire CD, le cercle touche BA en D, et il n'y a qu'une solution : c'est le triangle rectangle BDC.

Si le côté b est compris entre la longueur de la perpendiculaire CD et celle du côté a, le cercle coupe la droite BA en deux points A et A′ situés au-dessus de B, et de part et d'autre de D ; il y a donc deux solutions distinctes : ce sont les triangles ABC, A′BC.

Enfin, si le côté b est plus grand que a, le point A′ passe au-dessous de B, et le triangle correspondant doit être rejeté puisque son angle en B n'est plus l'angle donné, mais son supplément ; il n'y a donc qu'une solution : c'est le triangle ABC.

2° *L'angle* B *étant obtus* (*fig.* 106), la perpendiculaire CD

Fig. 106.



ne tombe plus dans l'angle B, mais dans son supplément (46) ; et, pour que le problème soit possible, c'est-à-dire pour que l'arc de cercle coupe la droite BA au-dessus de B, il faut que le côté b soit plus grand que a : ce que l'on pouvait prévoir, car dans tout triangle au plus grand angle doit être opposé le plus grand côté. D'ailleurs, lorsque cette condition est remplie, les deux points d'intersection A et A′ sont de part et d'autre de B ; le triangle A′BC doit être rejeté, car son angle en B est le supplément de l'angle donné, et il n'y a qu'une solution : c'est le triangle ABC.

3° Le lecteur construira aisément la figure relative au cas où *l'angle* B *est droit*, et il verra sans peine que le problème, impossible si b est inférieur ou égal à a, admet une solution unique si b est supérieur à a.

La discussion précédente est résumée dans le tableau suivant :

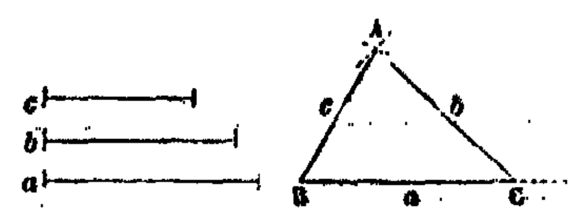
B aigu	$b < CD$..........	problème impossible.
	$b = CD$..........	une solution.
	$a > b > CD$......	deux solutions.
	$b = a$ ou $> a$....	une solution.
B droit ou obtus	$b < a$ ou $= a$....	problème impossible.
	$b > a$............	une solution.

PROBLÈME.

162. *Construire un triangle, connaissant les trois côtés* a, b, c.

Tracez (*fig.* 107) une droite BC égale à b, c'est-à-dire au plus grand des côtés donnés. Du point C comme centre, avec une ouverture de compas égale à b, décrivez, au-dessus de BC, un arc de cercle ; du point B comme centre, avec une ouverture

Fig. 107.



de compas égale à c, décrivez au-dessus de BC un autre arc de cercle. En joignant aux points B et C le point d'intersection A de ces deux arcs, vous aurez le triangle demandé ABC.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux arcs de cercle se coupent, c'est-à-dire (124) que le plus grand côté a, qui est la distance des centres, soit moindre que la somme et plus grand que la différence des deux autres côtés b et c qui sont les rayons. Ce résultat est conforme au scolie du nº 29.

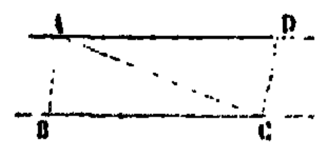
On aurait pu d'ailleurs construire le triangle au-dessous de BC au lieu de le faire au-dessus.

§ V. — TRACÉ DES PARALLÈLES ET DES PERPENDICULAIRES.

PROBLÈME.

163. *Par un point donné* A, *pris hors d'une droite* BC, *mener une parallèle à cette droite* (*fig.* 108).

Fig. 108.



La droite BC et la parallèle cherchée AD doivent faire (68), avec une sécante quelconque AC issue du point A, deux angles alternes-internes DAC, ACB, égaux entre eux. De cette considération et de la solution du problème (nº 154) résulte la construction suivante :

Du point A comme centre, avec une ouverture de compas arbitraire, mais assez grande, décrivez un arc de cercle DC; du point C, avec la même ouverture, décrivez un second arc de cercle AB, qui passera nécessairement par A. Prenez avec le compas la longueur de la corde AB, et du point C comme centre, avec cette ouverture, décrivez un arc de cercle qui coupe en D l'arc DC. En tirant AD, vous aurez la parallèle demandée.

Il est clair, en effet, qu'on a construit de cette façon un angle DAC égal à ACB. Notez d'ailleurs qu'il est inutile de tracer la droite AC, qui ne sert que dans la démonstration.

164. Dans la pratique, on résout presque toujours ce problème à l'aide d'un instrument spécial qui porte le nom d'*équerre*. C'est une planchette en bois ayant la forme d'un triangle rectangle ; elle est munie d'une petite ouverture circulaire ou *œil*, qui la rend plus facile à manier. Une bonne

équerre doit avoir ses arêtes parfaitement rectilignes et une épaisseur de 2 millimètres au plus.

Pour vérifier une équerre BAC (*fig.* 109) on applique l'un

Fig. 109.

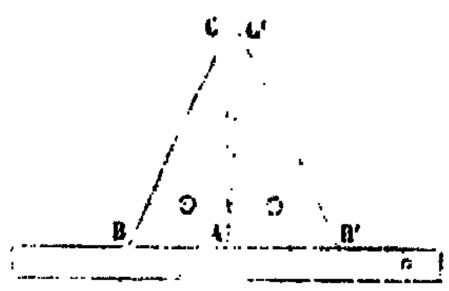
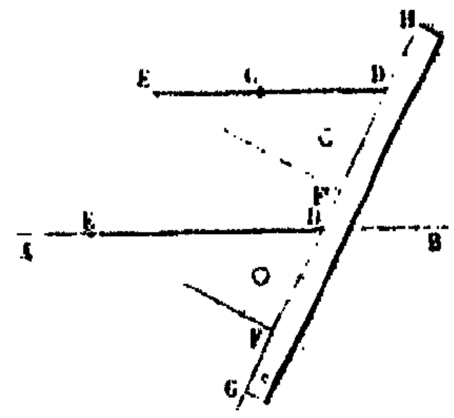


Fig. 110.



des côtés de l'angle droit AB contre une règle bien exacte, et l'on trace une droite au crayon le long du côté AC. Cela fait, on retourne l'équerre, comme l'indique la figure, et l'on trace une nouvelle droite le long de AC'; selon que le deux droites ainsi obtenues coïncident ou divergent, l'angle BAC de l'équerre est droit ou non, en d'autres termes l'équerre est juste ou fausse.

Pour mener (*fig.* 110) à l'aide de l'équerre, par un point C, une parallèle à une droite AB, on place sur la droite AB l'hypoténuse ou le plus grand côté de l'angle droit de l'équerre (dans la *fig.* 110, c'est l'hypoténuse DE qu'on a placée sur AB). Puis on appuie la règle GH contre le petit côté DF de l'angle droit, et, en maintenant la règle immobile, on fait glisser l'équerre jusqu'à ce que l'arête, qui coïncidait d'abord avec AB, vienne passer par le point C; on trace alors le long de cette arête une droite E'D' qui est la parallèle demandée. En effet, les angles correspondants E'D'F', EDF, étant égaux, les droites E'D', ED, sont parallèles.

On voit que cette méthode ne suppose pas que l'équerre ait l'un de ses angles droits. Il suffit que les arêtes soient bien dressées; cet avantage et la simplicité de l'opération expliquent la supériorité de ce procédé.

165. On conçoit aisément comment on pourrait résoudre le problème qui nous occupe à l'aide du rapporteur; après avoir mené une droite quelconque AC par le point A (*fig.* 108), on mesurerait l'angle ACB, et l'on ferait au point A sur AC un angle DAC égal à l'angle mesuré. Mais c'est là une méthode défectueuse et qu'il faut se garder d'employer, le rapporteur n'étant pas un instrument de précision.

PROBLÈME.

166. *Mener une perpendiculaire sur une droite en son milieu.*

Soient (*fig.* 111) A et B deux points donnés; il s'agit de

Fig. 111.

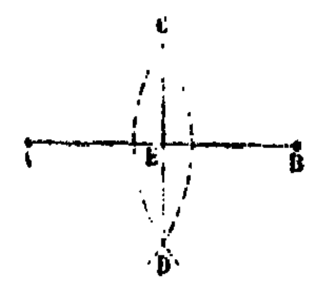
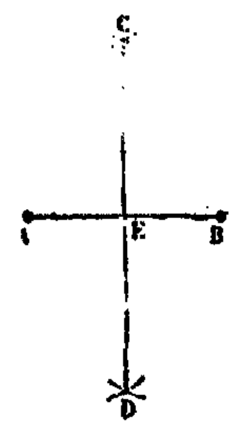


Fig. 112.



mener une perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint ces deux points.

La perpendiculaire sur le milieu d'une droite étant le lieu des points équidistants des extrémités de cette droite (50), il suffit d'obtenir deux points qui soient chacun également distants de A et de B, puis de joindre ces deux points. De là cette construction.

Du point A comme centre, avec un rayon sensiblement plus grand que la moitié de AB, décrivez une circonférence; du point B comme centre, avec la même ouverture, décrivez une seconde circonférence; ces deux circonférences se couperont, puisque, les deux rayons étant égaux et surpassant la moitié de AB, la distance AB des centres sera comprise entre la somme et la différence des rayons. Chacun des deux points d'intersection C et D sera équidistant de A et de B; et en tirant CD, vous aurez la perpendiculaire demandée.

Dans la pratique, on ne décrit pas les cercles complets; on se borne à tracer deux petits arcs de chacun d'eux, de part et d'autre de AB, dans la région où l'on prévoit que l'intersection doit avoir lieu (*fig.* 112).

Il convient enfin de remarquer que ce procédé ne suppose pas que la droite AB soit tracée.

167. Ce problème renferme les deux suivants :

1° *Diviser une droite en deux parties égales ;*

2° *Décrire un cercle sur une droite donnée pour diamètre.*

Cette dernière question se réduit en effet à la recherche du *milieu* de la droite, qui est le centre du cercle à décrire.

Nous allons voir en outre que le problème du n° **166** est la clef de tous ceux qui terminent ce chapitre.

PROBLÈME.

168. *Mener par un point donné* C *une perpendiculaire sur une droite donnée* AB.

Il y a deux cas à distinguer :

1° Le point donné C est sur la droite AB (*fig.* 113). En prenant de part et d'autre de C deux longueurs égales CA et CB, sur la droite donnée, le problème est ramené à celui du n° **166**. Seulement, ici, la droite AB est tracée, et l'on connaît son milieu, en sorte qu'il suffit de trouver un seul point D de la perpendiculaire. De là cette construction :

Avec une ouverture de compas arbitraire, mais assez grande, prenez sur la droite donnée, et à partir du point C, deux distances égales CA et CB. Ouvrez davantage le compas, et des

Fig. 113.

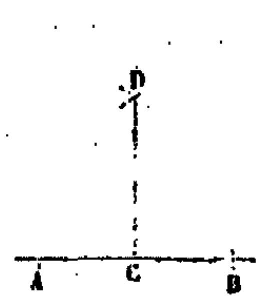


Fig. 114.

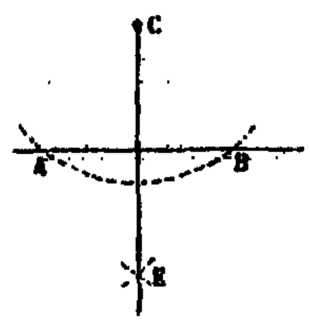
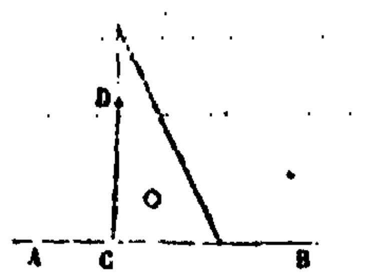


Fig. 115.



points A et B comme centres décrivez successivement, avec cette nouvelle ouverture, deux petits arcs de cercle au-dessus de AB. En joignant au point C le point D d'intersection de ces arcs, vous aurez la perpendiculaire cherchée.

2° Le point C est hors de la droite AB (*fig.* 114). En traçant, du point C comme centre, un arc de cercle qui coupe la droite AB en deux points A et B, on est ramené au problème du nº 166, avec cette différence qu'on connaît déjà un point C de la perpendiculaire et qu'il suffit d'en trouver un second. De là la construction suivante :

Du point C comme centre, avec un rayon assez grand, décrivez un arc de cercle qui coupe la droite donnée en deux points A et B. De ces points comme centres, avec une ouverture de compas sensiblement plus grande que la moitié de AB, décrivez successivement deux petits arcs de cercle au-dessous de AB. En joignant au point C le point E où ces arcs se coupent, vous aurez la perpendiculaire demandée.

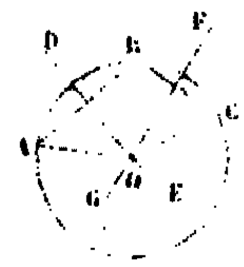
169. On voit aisément comment on pourrait résoudre le problème qui nous occupe à l'aide de l'équerre ou du rapporteur. Veut-on, par exemple, mener à l'aide de l'équerre une perpendiculaire sur une droite AB par un point C ou D, il suffira d'appliquer sur la droite AB (*fig.* 115) une règle, contre laquelle on fera glisser le petit côté de l'angle droit de l'équerre jusqu'à ce que le grand côté de l'angle droit passe par C ou D. En traçant une droite le long de ce dernier côté, on aura la perpendiculaire cherchée.

Mais ce procédé n'a rien de précis, et, en bonne construction, on ne doit jamais se servir *directement* de l'équerre pour le dessin des perpendiculaires. Toutefois, il est un cas très-fréquent dans la pratique où l'emploi, en quelque sorte *indirect*, de cet instrument fournit d'excellents résultats ; c'est celui où l'on doit *mener sur une droite des perpendiculaires par plusieurs points*. On commence par tracer avec soin l'une de ces perpendiculaires à l'aide du compas, puis on lui mène à l'équerre des parallèles par les autres points. On opère de même lorsqu'on veut *élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite qu'on ne peut pas prolonger;* on trace à l'équerre, par ce point extrême, une parallèle à une perpendiculaire que l'on a préalablement menée sur cette droite en un autre point à l'aide de la règle et du compas.

PROBLÈME.

170. *Décrire une circonférence qui passe par trois points donnés* A, B, C, *non situés en ligne droite* (*fig.* 116).

Fig. 116.



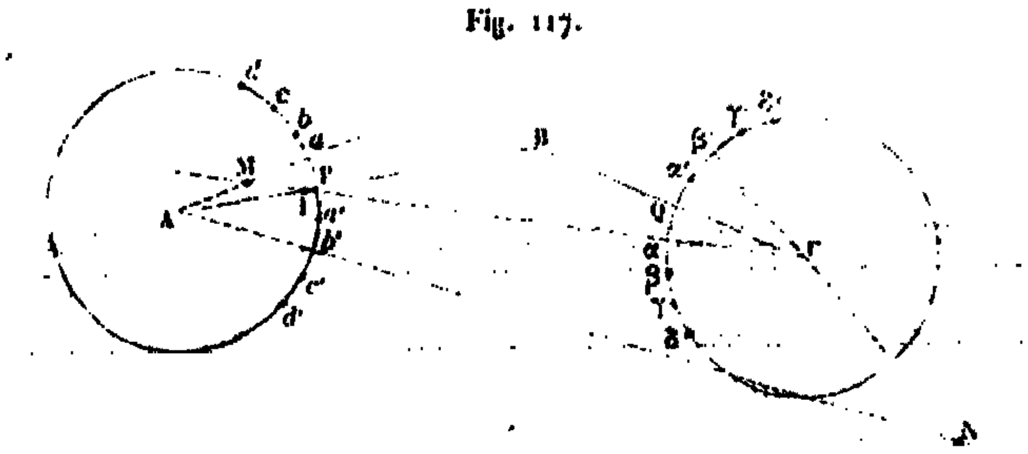
Le centre O devant se trouver (107) à l'intersection des perpendiculaires élevées, l'une sur le milieu de AB, l'autre sur le milieu de BC, il suffira, pour avoir ce centre, de répéter deux fois la construction du n° 166. Il est même inutile de tracer les droites AB et BC. Le centre O étant connu, on décrira la circonférence demandée à l'aide d'une ouverture de compas égale à l'une des trois droites égales OA, OB, OC.

171. *Pour trouver le centre d'une circonférence déjà tracée* on prend à volonté trois points A, B, C, sur cette circonférence, et l'on applique la solution qui précède.

172. Dans la pratique, la circonférence à décrire par trois points donnés A, B, C, a parfois un rayon trop grand pour qu'on puisse la tracer avec un compas ordinaire et même avec un compas à verge. On obtient alors la circonférence par points; voici le procédé le plus usité (*fig.* 117).

Des points A et C comme centres, avec le même rayon, on décrit deux

Fig. 117.



circonférences sur lesquelles on porte, à partir des points P et Q, des divisions égales Pa, ab, bc, ... Pa', $a'b'$, $b'c'$, ...; $Q\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ...

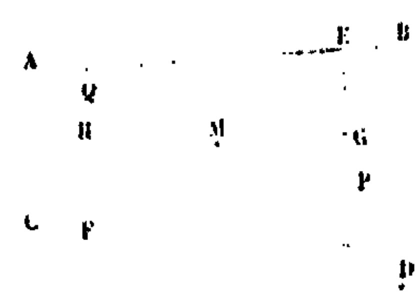
$Q\alpha'$, $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$,... On mène deux rayons correspondants Aa, $C\alpha$, l'un au-dessus de AB, l'autre au-dessous de CB, et leur intersection M est un point du cercle cherché. En effet, les deux triangles AMI, BIC, ont deux angles égaux, savoir : les angles en I comme opposés par le sommet, et l'angle MAP égal à BCI comme interceptant des arcs égaux sur des circonférences égales ; donc l'angle AMC est égal à l'angle ABC, et par suite (147) le point M est sur la circonférence déterminée par les trois points A, B, C. De même, en menant deux rayons tels que Ab' et $C\beta'$, le premier au-dessous de AB, et l'autre au-dessus de CB, on obtient encore un point N de la circonférence, car l'angle BAN étant égal au supplément $BC\beta'$ de l'angle BCN, le quadrilatère ABCN est inscriptible (148).

PROBLÈME.

173. *Diviser un arc de cercle ou un angle en deux parties égales* (*fig.* 118).

Fig. 118.

Fig. 119.



1° Soit AB l'arc proposé ; on sait que la perpendiculaire menée sur le milieu de la corde divise l'arc en deux parties égales (107); on appliquera donc la construction du n° 166. Si le centre O de l'arc est donné, il suffira de déterminer un seul point E équidistant de A et de B, et de mener OE.

2° Soit AOB l'angle proposé. Du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrira un arc AB entre les côtés de l'angle, et la droite OE qui divisera cet arc en deux parties égales sera évidemment la bissectrice de l'angle AOB.

En appliquant ce procédé aux deux moitiés, aux quatre quarts, etc., de l'arc, on divisera l'arc et l'angle en 4, 8, etc., parties égales.

174. Il peut arriver que le sommet de l'angle sorte de la feuille de dessin ; en d'autres termes, on a besoin parfois de ***trouver la bissectrice de l'angle formé par deux droites*** AB et CD ***qu'on ne peut pas prolonger jusqu'à leur point d'intersection.***

On mène (*fig.* 119) une perpendiculaire quelconque EP sur AB et une perpendiculaire quelconque FQ sur CD. Sur ces perpendiculaires, on prend deux longueurs égales HF et GE; puis, par H, on mène une parallèle à CD, et, par G, une parallèle à AB; le point de rencontre M de ces deux lignes est un point de la bissectrice cherchée. En effet, ce point M est (57) à des distances égales GE et HF des deux droites proposées. En prenant deux autres longueurs égales sur EP et FQ, on obtiendrait un second point M' de la bissectrice, et il ne resterait plus qu'à tirer MM'.

§ VI. — PROBLÈMES SUR LES TANGENTES.

PROBLÈME.

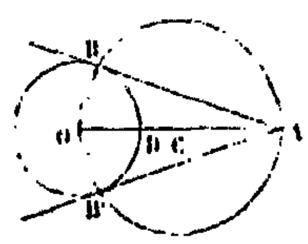
175. *Mener par un point donné* A *une tangente à un cercle donné* O.

Il faut distinguer deux cas :

1° Le point A (*fig.* 120) est sur la circonférence. Il suffit

Fig. 120.

Fig. 121.



alors (112) d'élever par le point A une perpendiculaire AT sur le rayon OA.

2° Le point A est hors du cercle (*fig.* 121). Supposons le problème résolu; soit AB une tangente menée par A au cercle O, et soit B son point de contact. La tangente étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon, du point de contact B on voit la droite AO sous un angle droit OBA. Donc (147), le point B est situé sur la circonférence décrite sur AO comme diamètre; ce point est d'ailleurs sur la circonférence donnée O; il est donc à l'intersection de ces deux circonférences, et l'on voit dès lors qu'il y a deux solutions.

Ainsi, on décrira sur AO comme diamètre une circonférence, et en joignant au point A les points B et B' où cette circonférence rencontre la proposée, on aura les deux tangentes BA et B'A.

COROLLAIRE.

176. *Les deux tangentes* AB *et* AB' *que l'on peut mener à un cercle* O *par un point extérieur* A *sont égales entre elles, et la droite qui joint ce point extérieur au centre du cercle divise en deux parties égales l'angle* BAB' *des deux tangentes, ainsi que l'angle* BOB' *des deux rayons* OB *et* OB' *qui aboutissent aux points de contact.*

En effet, les deux triangles rectangles OBA, OB'A, sont égaux comme ayant l'hypoténuse AO commune et les côtés de l'angle droit OB et OB' égaux entre eux comme rayons du cercle donné. On a donc

AB = AB', angle BAO = angle B'AO, angle BOA = angle B'OA.

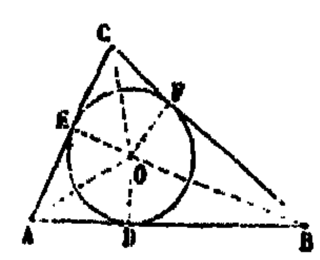
PROBLÈME.

177. *Inscrire un cercle dans un triangle donné* ABC.

On dit qu'un polygone est *circonscrit* à un cercle lorsque chacun de ses côtés est tangent à la circonférence ; le cercle est alors *inscrit* dans le polygone.

Cela posé, soit ABC (*fig.* 122) le triangle proposé dans le-

Fig. 122.

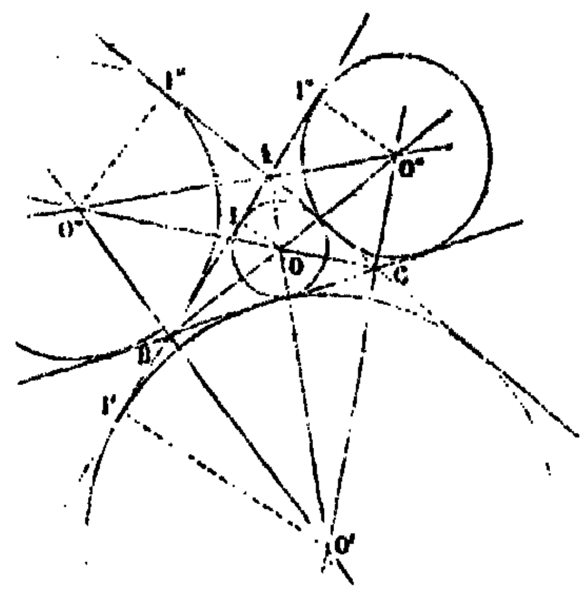


quel il faut inscrire un cercle. Supposons le problème résolu. La droite AO, qui joint le centre du cercle cherché au point de rencontre A des deux tangentes AD et AE, est, d'après le problème précédent, la bissectrice de l'angle A du triangle. On voit de même que le point O doit encore se trouver sur les bissectrices BO, CO, des angles B et C. D'après cela, on mènera deux de ces bissectrices, et de leur intersection O comme centre, avec une ouverture de compas égale à la longueur commune des perpendiculaires OD, OE, OF, abaissées de ce point sur les côtés, on décrira une circonférence qui touchera en D, E, F, les côtés du triangle donné.

SCOLIE.

178. Il résulte de cette démonstration que les bissectrices des trois angles d'un triangle concourent en un même point. On voit d'une manière analogue que les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle ABC (*fig.* 123) forment un second

Fig. 123.



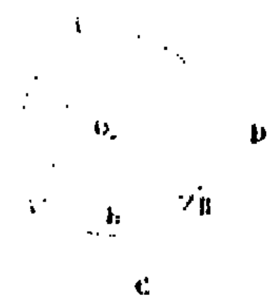
triangle O' O" O''' dont les sommets sont situés sur les bissectrices des angles intérieurs. Chacun de ces sommets est le centre d'un cercle ex-inscrit, c'est-à-dire d'un cercle tangent à l'un des côtés du triangle et aux prolongements des deux autres côtés. Il existe donc, en général, quatre circonférences tangentes à trois droites données.

PROBLÈME.

179. *Décrire sur une droite donnée* AB *un segment capable d'un angle donné.*

Supposons le problème résolu, et soit AFB (*fig.* 124) le segment cherché : la tangente BC au point B de ce segment fait avec la corde AB un angle ABC qui, comme tout angle AFB inscrit dans le segment, a (143) pour mesure la moitié de l'arc situé au-dessous de AB; cet angle est donc égal à l'angle donné. On peut par suite mener cette tangente BC indépendamment du cercle inconnu, en construisant au point B, au-dessous de AB, un angle ABC égal à l'angle donné. Dès lors,

Fig. 124.



le centre du cercle cherché sera à l'intersection de la perpendiculaire OE, élevée sur le milieu de la corde AB, et de la perpendiculaire BO élevée en B sur la tangente BC; et l'on décrira ce cercle en plaçant l'une des pointes du compas en O et en donnant aux branches une ouverture égale à OB.

PROBLÈME.

180. *Mener une tangente commune à deux cercles* O *et* O'.

Supposons le problème résolu.

1° Soit AA' une tangente commune *extérieure*, c'est-à-dire qui laisse les deux cercles d'un même côté (*fig.* 125). Si, par le centre O' de l'un

Fig. 125.

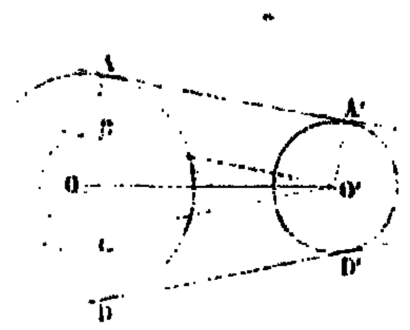


Fig. 126.

des cercles, on imagine une parallèle O'B à AA', cette parallèle sera, comme AA', perpendiculaire sur le rayon OA. Elle sera donc tangente en B au cercle décrit du point O comme centre avec OB pour rayon; or, la figure ABO'A' étant un rectangle, on a

$$AB = A'O', \quad \text{et, par suite,} \quad OB = OA - AB = OA - O'A'.$$

On est ainsi conduit à la construction suivante : décrivez une circonférence du point O comme centre, avec un rayon égal à la différence des rayons des cercles donnés, et par le point O' menez une tangente à cette circonférence auxiliaire; B étant le point de contact obtenu, tirez OBA, menez O'A' parallèle à OA; en joignant les points A et A', vous aurez la tangente cherchée.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le point O' ne soit pas à l'intérieur du cercle auxiliaire.

On doit donc avoir

$$OO' \geqq OB, \quad \text{c'est-à-dire} \quad OO' \geqq OA - O'A';$$

ce qui revient à dire (**124**) que les deux cercles proposés O et O' ne doivent pas être intérieurs l'un à l'autre.

Si les deux cercles O et O' sont extérieurs, tangents extérieurement ou sécants, on a $OO' > OA - O'A'$; le point O' est extérieur au cercle auxiliaire, et l'on peut par ce point mener deux tangentes à ce cercle; donc les deux cercles donnés ont, dans chacun de ces cas, deux tangentes communes extérieures.

Si les deux cercles sont tangents intérieurement, on a $OO' = OA - O'A'$; le point O' est sur la circonférence auxiliaire; on ne peut donc mener par ce point qu'une tangente à ce cercle, et par suite les deux cercles O et O' ont une seule tangente commune extérieure.

2° Soit EE' une tangente commune *intérieure*, c'est-à-dire qui laisse les deux cercles O et O' de côtés différents (*fig.* 126). En imaginant comme ci-dessus une parallèle O'F à EE', on verra que cette parallèle est tangente à un cercle concentrique au cercle O et décrit avec un rayon OF égal à la somme $OE + O'E'$ des rayons des cercles donnés; d'où l'on déduira la construction suivante : Décrivez du centre O de l'un des cercles une circonférence, avec un rayon égal à la somme des rayons des cercles proposés, et du point O' menez une tangente à ce cercle auxiliaire; F étant le point de contact, tirez OEF, menez O'E' parallèle à OF, et en joignant les points E et E' vous aurez la tangente demandée.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le point O' ne soit pas à l'intérieur du cercle auxiliaire; on doit donc avoir

$$OO' \geqq OF \quad \text{ou} \quad OO' \geqq OE + O'E',$$

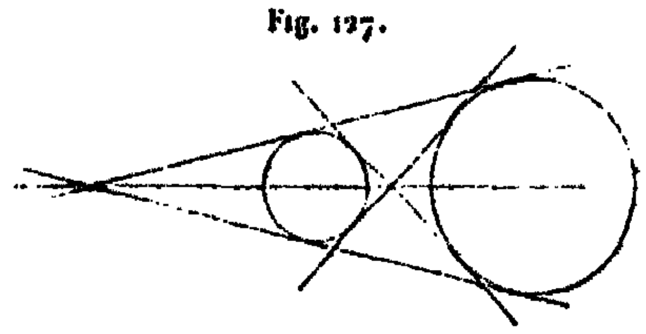
ce qui revient à dire (**124**) que les deux cercles proposés O et O' doivent être extérieurs l'un à l'autre ou tangents extérieurement.

Dans le premier cas, on a $OO' > OE + O'E'$; le point O' est extérieur au cercle auxiliaire; on peut donc mener par ce point deux tangentes à ce cercle, et les deux cercles O et O' ont deux tangentes communes intérieures. Dans le second cas, on a $OO' = OE + O'E'$; le point O' est sur la circonférence auxiliaire; on ne peut donc mener par ce point qu'une tangente à ce cercle, et par suite les cercles proposés O et O' ont une seule tangente commune intérieure.

181. *En résumé :*

Deux cercles extérieurs (*fig.* 127) ont *quatre* tangentes communes, deux extérieures, deux intérieures.

Fig. 127.



Deux cercles tangents extérieurement (*fig.* 128) ont trois tangentes communes, deux extérieures, une intérieure.

Fig. 128.

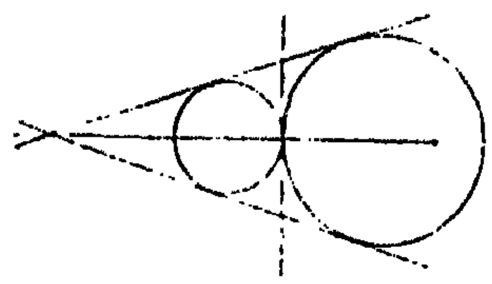
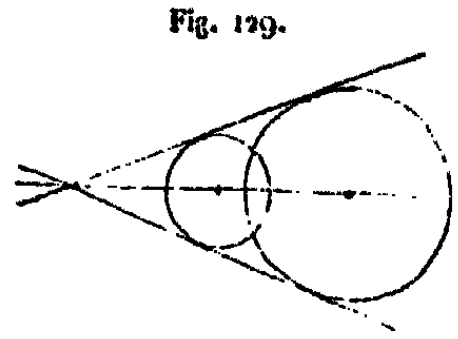


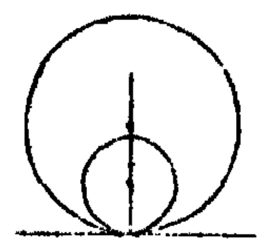
Fig. 129.



Deux cercles sécants (*fig.* 129) ont deux tangentes communes qui sont extérieures.

Deux cercles tangents intérieurement (*fig.* 130) ont une seule tangente commune, qui est extérieure.

Fig. 130.



Deux cercles intérieurs l'un à l'autre n'ont point de tangente commune.

On voit aisément que *les tangentes, soit intérieures, soit extérieures, se coupent sur la ligne des centres, qui est la bissectrice commune de leurs angles, et qu'elles sont dès lors égales entre elles* (176).

§ VII. — APPENDICE.

182. La rédaction des trois paragraphes précédents offre des différences essentielles.

Les problèmes résolus dans le § IV sont très-simples ; leur solution, en quelque sorte intuitive, n'est au fond que la mise en œuvre d'un théorème connu. Aussi nous sommes-nous bornés à énoncer d'abord la solution et à la démontrer ensuite brièvement, sans expliquer comment on y était conduit.

Dans le § VI, au contraire, les problèmes sont plus compliqués; pour apercevoir la solution, l'esprit doit faire quelques efforts auxquels nous avons voulu initier le lecteur. A cet effet, nous avons supposé le problème résolu, la figure construite, et nous avons montré comment, en examinant avec attention sur cette figure la manière dont les inconnues se rattachaient aux données, on parvenait à découvrir la construction demandée.

La première marche constitue la *synthèse*, qui *prouve les vérités connues*; la seconde est l'*analyse*, qui *trouve les vérités inconnues*. L'analyse est la méthode d'invention; c'est par elle seule que l'on *découvre*. La synthèse n'est en réalité qu'une méthode d'exposition: plus rapide qu'instructive, elle ne doit être exclusivement employée que dans les cas simples où la solution est évidente. En thèse générale, dans toute bonne exposition, il convient de commencer par une analyse succincte et de ne laisser à la synthèse que le soin d'éclaircir les détails; les deux méthodes se prêtent alors un mutuel secours, l'une guidant la marche, l'autre l'assurant. C'est ainsi que nous avons procédé au § V.

183. Il est impossible d'indiquer une méthode générale et certaine pour résoudre tous les problèmes de Géométrie. La nature des questions qu'on peut poser est trop variable pour que la solution puisse être obtenue à coup sûr en suivant une marche unique. Il existe toutefois quelques procédés particuliers qui s'appliquent plus directement à certaines classes de questions. Nous allons indiquer sommairement ici ceux qui se rapportent aux deux premiers livres.

184. Et d'abord, sauf pour un petit nombre de questions très-simples qui se résolvent immédiatement, on procède toujours par *substitutions successives*. On ramène le problème proposé à un autre, qui se ramène à son tour à un troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un problème connu ou dont la solution soit immédiate.

C'est ainsi, par exemple, que le problème de mener par un point une parallèle à une droite se ramène à la construction d'un angle égal à un angle donné; que toutes les questions relatives aux perpendiculaires se ramènent à la première d'entre elles, *mener une perpendiculaire sur le milieu d'une droite*; que le problème de la tangente commune à deux cercles se ramène à la construction d'une tangente par un point extérieur etc.

Voici un nouvel exemple un peu moins simple :

Construire, de tous les triangles équilatéraux dont les côtés passent par trois points donnés A, B, C, *celui qui a le plus grand périmètre.*

Le sommet M du triangle cherché MNP (*fig.* 131) doit se trouver sur le segment capable de 60 degrés décrit sur AB. De même, le segment capable de 60 degrés décrit sur AC doit renfermer le sommet N. On obtiendra donc un triangle équilatéral circonscrit au triangle ABC, en décrivant sur AB et sur AC deux segments de 60 degrés, menant à volonté par le point A une sécante MAN, et tirant MB, NC, qui, par leur rencontre, donneront le troisième sommet P; il restera dès lors à choisir parmi tous les triangles qu'on obtient ainsi celui dont le côté MAN est maximum. Le problème est donc ramené au suivant : *Mener, par un point* A *commun à deux circonférences* C *et* D, *la sécante maximum* (*fig.* 132). Or, MAN

Fig. 131.

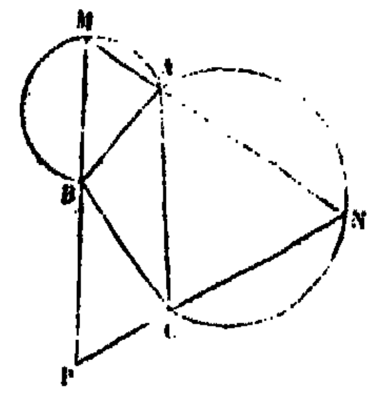
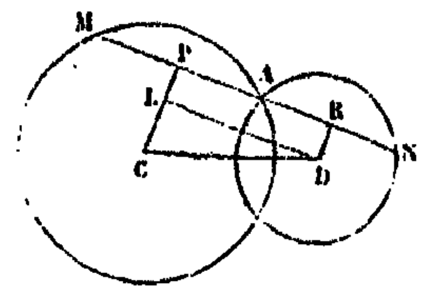


Fig. 132.



étant une sécante quelconque, si l'on abaisse des centres C et D des perpendiculaires CP, DR, sur cette sécante, la droite PR sera la moitié de la sécante, et il suffira de chercher le maximum de PR ou de la parallèle DL qui lui est égale. Or, le triangle rectangle DLC donne DL < CD. CD est donc le maximum de PR, et ce maximum a lieu lorsque la sécante MAN est parallèle à la ligne des centres C et D des deux circonférences.

185. Un procédé qui mérite une mention spéciale consiste à replier la figure ou certaines parties de la figure autour d'une droite convenablement choisie, qui prend le nom d'*axe*. Sur la figure ainsi doublée, on découvre souvent d'un coup d'œil, entre certaines lignes, des relations qui sans cela seraient restées inaperçues. La théorie des perpendiculaires et des obliques offre un exemple frappant de cette manière d'opérer.

Quand on replie une figure autour d'un certain axe XY, un point quelconque M de cette figure vient en un point M' que l'on peut obtenir en abaissant de M une perpendiculaire sur XY, et en la prolongeant d'une quantité égale à elle-même. Un pareil point M' est dit le symétrique de M par rapport à XY, et le procédé dont nous parlons prend souvent le nom de *méthode par symétrie*.

Voici deux nouveaux exemples de cette méthode.

1° *Étant donnés deux points* A *et* B *et une droite* XY, *trouver sur cette droite un point* M, *tel que la somme* AM + BM *soit un minimum.*

Si les deux points donnés sont, comme A et B′ (*fig.* 133), situés de part et d'autre de XY, la droite AB′ résout la question ; elle coupe XY au point cherché M.

Si les deux points A et B sont d'un même côté de XY (*fig.* 133), on

Fig. 133.

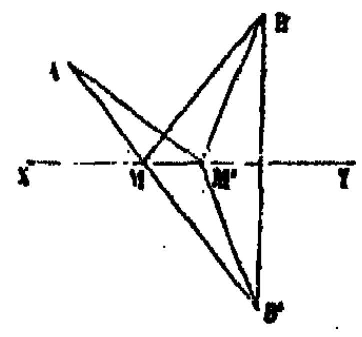
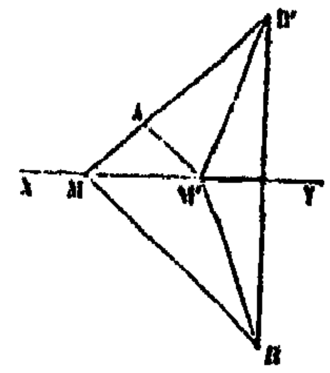


Fig. 134.



observe que tout point M′ de XY est également distant du point B et de son symétrique B′ par rapport à XY (50) ; le chemin AM′B′ est donc égal à AM′B, et il suffit de chercher le minimum de AM′B′. A et B′ étant de part et d'autre de XY, on n'a qu'à tirer la droite AB′ qui rencontre XY au point cherché M. Il est bon de remarquer que *les deux parties* AM *et* MB *du chemin minimum sont également inclinées sur* XY. En effet, dans le rabattement de la figure autour de XY, le point M ne bougeant pas, et B venant sur son symétrique B′, l'angle BMY recouvre l'angle B′MY ; et comme ce dernier est opposé par le sommet à AMX, on voit que les angles AMX, BMY, sont égaux.

2° *Étant donnés deux points* A et B *et une droite* XY, *trouver sur cette droite un point* M, *tel que* BM — AM *soit un maximum.*

Si les deux points donnés sont, comme A et B′ (*fig.* 134), situés d'un même côté de XY, la droite AB′ résout la question ; elle coupe XY au point cherché M. En effet, M′ étant un point quelconque de XY, on a dans le triangle B′M′A

$$AB' \quad \text{ou} \quad B'M - AM > B'M' - AM'.$$

Si les deux points A et B sont de part et d'autre de XY (*fig.* 134), on voit en substituant, comme précédemment, au point B son symétrique B′ par rapport à XY, qu'il suffit de tirer AB′, qui coupe XY au point cherché M.

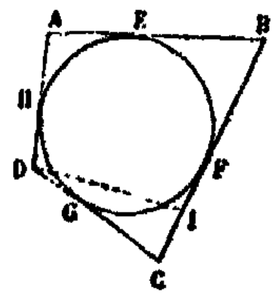
186. Parmi les divers procédés de démonstration, on ne peut passer sous silence la *méthode de réduction à l'absurde*, qui consiste à montrer que la non-existence de la proposition qu'on veut établir conduit à une absurdité manifeste ou à des conséquences que l'énoncé repousse. Nous l'avons déjà employée plusieurs fois, notamment au n° 60, pour prouver l'existence des parallèles.

Cette méthode s'applique surtout à la démonstration des réciproques.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de la réciproque de ce théorème :

Dans tout quadrilatère circonscrit ABCD, *la somme de deux côtés opposés* AB + CD *est égale à la somme des deux autres côtés opposés* AD + BC (*fig.* 135).

Fig. 135.



On commencera par établir, comme il suit, la proposition directe.

E, F, G, H, étant les quatre points de contact des côtés du quadrilatère avec la circonférence inscrite, on a (176)

$$AE = AH, \quad BE = BF, \quad CG = CF, \quad DG = DH,$$

d'où, en ajoutant ces quatre égalités membre à membre,

$$AB + CD = AD + BC.$$

Passant maintenant à la réciproque, on dira :

Si, dans un quadrilatère ABCD, *la relation*

$$AB + CD = AD + BC$$

est satisfaite (*fig.* 135), *ce quadrilatère est circonscriptible*, c'est-à-dire que si l'on trace un cercle tangent aux trois côtés AD, AB, BC, et dont le centre sera à la rencontre des bissectrices des angles A et B (176), ce cercle sera nécessairement tangent au quatrième côté CD du quadrilatère. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait mener par le point D une tangente DI à ce cercle qui couperait en I le côté BC. Le quadrilatère DABI étant circonscrit, on aurait à la fois

$$AB + DI = AD + BI, \quad \text{et} \quad CD < DI + IC.$$

Il faudrait donc en conclure, en ajoutant l'égalité et l'inégalité posées membre à membre,

$$AB + CD < AD + BC,$$

ce qui ne peut avoir lieu d'après l'hypothèse.

Lorsqu'après avoir démontré une proposition directe, on emploie ainsi pour la réciproque la méthode de réduction à l'absurde, cela revient en réalité à démontrer la proposition contraire (7).

La démonstration précédente prouve effectivement que *dans tout quadrilatère non circonscriptible, les sommes des côtés opposés ne sont pas égales;* et alors, d'après la règle générale du n° 33, les réciproques des deux propositions directe et contraire se trouvent vérifiées simultanément.

187. De tous les procédés particuliers, le plus général et le plus fécond est la *méthode par intersection de lieux géométriques.*

La plupart des problèmes de Géométrie se ramènent en dernière analyse à la détermination d'un point d'après certaines conditions. S'agit-il, par exemple, de faire passer un cercle par trois points donnés, tout revient à trouver le centre; veut-on mener une tangente à un cercle par un point extérieur, on cherche le point de contact, etc. D'après cela, si on laisse de côté une des conditions données, les autres conditions ne suffiront plus pour déterminer un point unique, et il existera une infinité de points qui satisferont à ces conditions et qui formeront par leur ensemble un certain lieu géométrique renfermant le point cherché. En reprenant la condition délaissée, et en faisant abstraction d'une autre, on aura un nouveau lieu géométrique qui rencontrera le premier au point demandé. On conçoit que l'élégance et la valeur pratique de la solution obtenue sont subordonnées au choix plus ou moins habile des deux conditions que l'on délaisse tour à tour; car de ce choix dépendent à la fois la nature, la facilité de recherche et la simplicité de construction des deux lieux géométriques obtenus; la ligne droite et le cercle sont les seuls lieux qui doivent figurer dans les problèmes relatifs aux éléments de Géométrie plane, où toutes les constructions s'effectuent avec la règle et le compas.

Les paragraphes précédents renferment de nombreux exemples de cette méthode :

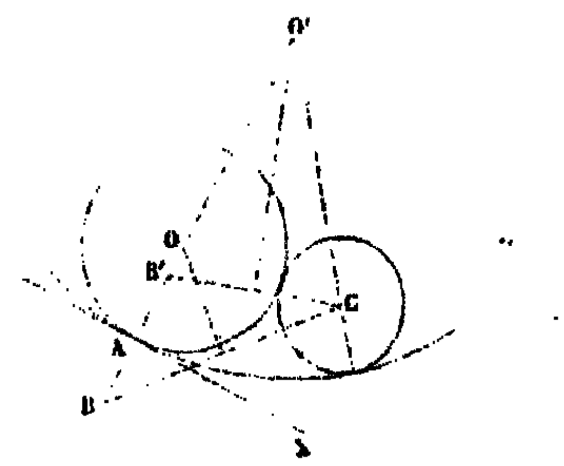
Pour trouver le centre d'un cercle passant par trois points donnés A, B, C, on fait d'abord abstraction de l'un des points, C par exemple, et l'on trouve pour le lieu géométrique des centres des circonférences passant par A et B la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB; puis, en faisant abstraction du point A, on a la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC pour le lieu des centres des circonférences passant par B et C. Ces deux perpendiculaires se coupent au centre demandé.

Dans le problème *mener une tangente à un cercle de centre* O *par un point extérieur* A, le point de contact inconnu doit, d'une part, se trouver sur la circonférence O, et de l'autre être le sommet d'un angle droit dont les côtés passent par les points fixes A et O; il est donc à l'intersection de deux lieux géométriques qui sont la circonférence O, et le cercle décrit sur AO comme diamètre.

Voici maintenant un exemple nouveau et un peu plus complexe :

Décrire un cercle qui touche à la fois une circonférence C. *et une droite* AX *en un point donné* A (*fig.* 136).

Fig. 136.



La perpendiculaire élevée par le point A sur la droite donnée est évidemment un premier lieu du centre du cercle inconnu.

Cela posé, remarquons que ce centre est à une distance du point A égale au rayon du cercle cherché, et à une distance de C égale à la somme ou à la différence des rayons du cercle inconnu et du cercle donné C, suivant que ces cercles se touchent extérieurement ou intérieurement.

Donc, si l'on prend à partir du point A, de part et d'autre de la droite donnée AX et sur la perpendiculaire qu'on lui a menée au point A, deux longueurs AB et AB' égales au rayon du cercle C, on voit que le centre inconnu est équidistant de B et de C, si le contact est extérieur, et de B' et de C si le contact est intérieur. Les perpendiculaires élevées sur les milieux de BC et de B'C forment donc un second lieu géométrique du centre cherché, et les points O et O' où elles coupent la perpendiculaire menée par A à la droite donnée sont les centres des deux cercles qui résolvent la question.

188. En terminant ces notions, que nous compléterons d'ailleurs à mesure que nous avancerons dans l'étude de la Géométrie, nous devons faire une remarque essentielle. Dans un grand nombre de cas, une heureuse inspiration, fruit de l'habitude et d'un certain sentiment des choses géométriques, conduit à des *constructions auxiliaires* qui facilitent singulièrement la solution du problème que l'on cherche. S'agit-il, par exemple, de *construire un trapèze, connaissant les longueurs des quatre côtés,* il suffit d'*avoir l'idée* de mener par l'un des sommets une parallèle à l'un des côtés non parallèles ; on obtient ainsi un parallélogramme et un triangle ; on sait construire le triangle, car on connaît ses trois côtés, et la figure s'achève aisément. Mais de tous les exemples qu'on pourrait citer, si nombreux qu'ils fussent, on ne ferait pas sortir la moindre règle générale relative à ces constructions, dont la diversité tient à la nature si variable du sujet lui-même et constitue au fond la richesse inépuisable de la Géométrie.

QUESTIONS PROPOSÉES.

§ 1. — *Des arcs et des cordes.*

58. La plus petite et la plus grande des droites qu'on peut mener d'un point à une circonférence, passent par le centre.

59. Quel est le lieu géométrique des points situés à une distance donnée d'une circonférence donnée?

60. Une droite de longueur constante reste parallèle à elle-même, tandis que l'une de ses extrémités décrit une circonférence; quel est le lieu de l'autre extrémité?

61. On donne un cercle O et un point A pris dans son plan; on demande le lieu des milieux des droites qui joignent le point A aux divers points de la circonférence O.

62. Quel est le lieu géométrique des sommets des triangles qui reposent sur une base fixe BC et dans lesquels la médiane issue du sommet B a une longueur donnée?

63. Étant données la base d'un triangle et la différence des deux autres côtés, trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées des extrémités de la base sur la bissectrice de l'angle au sommet. — Même question en remplaçant la différence des deux côtés par leur somme, et la bissectrice de l'angle au sommet par celle de son supplément.

64. Si l'on divise la corde d'un arc de cercle en trois parties égales, les rayons qui passent par les points de division partagent l'arc en trois parties, dont les deux extrêmes sont égales entre elles et moindres que la partie intermédiaire.

65. Par un point A extérieur à une circonférence O, on mène une sécante ACD dont la partie extérieure AC est égale au rayon; on mène en outre le diamètre AOB : démontrer que l'angle COA est le tiers de l'angle DOB.

66. Étant donnés une circonférence et un point dans son plan, quelle est la plus petite corde qu'on puisse mener par ce point dans la circonférence?

67. Si deux cordes égales se coupent à l'intérieur ou à l'extérieur d'une circonférence, les segments déterminés sur ces deux cordes par leur point de rencontre sont respectivement égaux.

§ II. — *Tangente au cercle. Positions mutuelles de deux circonférences.*

68. La plus petite et la plus grande des droites qu'on peut mener entre deux circonférences, passent par les centres de ces circonférences.

69. Si deux cordes AB et CD se coupent dans un cercle, la somme AC + BD des arcs qu'elles interceptent est égale à la somme des arcs interceptés par les deux diamètres parallèles à ces cordes.

70. Un cercle étant donné, combien faut-il de cercles de même rayon pour l'entourer?

71. Parmi les sécantes qui passent par l'un des points d'intersection de deux circonférences données, quelle est celle pour laquelle la longueur comprise entre les deux circonférences est maximum?

72. On donne un cercle de centre O et de rayon R, et un point extérieur A. Du point A comme centre, avec OA pour rayon, on décrit un arc BOC, et du point O comme centre avec 2R pour rayon, on décrit un nouvel arc qui coupe le précédent en B et en C. On mène OB et OC qui rencontrent respectivement en E et en D la circonférence primitive. Démontrer que AE et AD sont tangentes à cette circonférence.

73. Quel est le lieu des milieux des cordes d'une circonférence qui ont une longueur donnée?

74. AB étant un diamètre fixe d'un cercle, et CD une corde parallèle à ce diamètre, on mène CB et DA qui se coupent en M, puis CA et DB qui se coupent en N. Trouver le lieu des points M et N quand la corde CD se déplace parallèlement à elle-même.

75. Quel est le lieu des centres des circonférences de même rayon qui partagent une circonférence donnée en deux parties égales?

76. Quel est le lieu des centres des circonférences de même rayon qui coupent sous un angle donné une circonférence donnée? (On nomme angle de deux circonférences l'angle que forment leurs tangentes au point d'intersection.)

§ III. — *Mesure des angles.*

77. A, B, C, étant trois points quelconques d'une circonférence, D le milieu de l'arc AB, et E le milieu de l'arc AC, la droite DE coupe respectivement en F et en G les cordes AB et AC. Démontrer que AF = AG.

78. A étant un point quelconque d'un diamètre, B l'extrémité du rayon perpendiculaire à ce diamètre, on mène BA qui coupe le cercle en P, puis la tangente au point P qui coupe en C le diamètre prolongé. Démontrer que CA = CP.

79. A, B, C, A', B', C', étant six points pris sur une circonférence, de telle manière que AB soit parallèle à A'B' et AC à A'C', démontrer que BC' et CB' sont parallèles.

80. Les hauteurs AA', BB', CC', d'un triangle quelconque ABC, sont les bissectrices des angles du triangle A'B'C'.

81. ABC étant un triangle inscrit dans un cercle, on joint le centre O au milieu D de l'arc BC, et l'on mène AD. Démontrer que l'angle ADO est la moitié de la différence des angles B et C.

82. Si par le point A, commun à deux circonférences qui se coupent, on mène à volonté deux sécantes ABC, ADE, les cordes BD et CE qui joignent leurs extrémités se rencontrent sous un angle constant. — Dans le cas où les deux sécantes se confondent, comment faut-il énoncer le théorème?

83. On donne deux circonférences O et O' et un angle XAY situé dans leur plan. Le côté AX coupe la circonférence O aux points B et C et la circonférence O' aux points B' et C'; le côté AY coupe la circonférence O en D et E, la circonférence O' en D' et E'. Démontrer que les cordes BD, CE, B'D', C'E', indéfiniment prolongées, forment un quadrilatère inscriptible.

84. Si par le point d'intersection C des diagonales d'un quadrilatère inscrit ABCD, on mène la corde ECF qui a son milieu en C, la partie de cette corde interceptée entre les côtés opposés du quadrilatère sera aussi divisée par le point C en deux parties égales.

85. O étant le point de concours des hauteurs d'un triangle ABC, et G le point où la hauteur AD rencontre le cercle circonscrit au triangle, on a OD = DG.

86. Les pieds des hauteurs d'un triangle, les milieux des segments de ces hauteurs compris entre leur point de rencontre et les sommets du triangle, les milieux des trois côtés, sont neuf points situés sur une même circonférence dont le rayon est la moitié du rayon du cercle circonscrit, et dont le centre est au milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de concours des hauteurs.

87. Étant donnés un triangle ABC et le cercle circonscrit, si du milieu de l'un quelconque des deux arcs sous-tendus par le côté BC on abaisse des perpendiculaires sur AB et sur AC, la somme des distances des pieds de ces perpendiculaires aux sommets du triangle est égale à la demi-somme ou à la demi-différence des côtés AB et AC.

88. Si par le point A, milieu d'un arc BAC d'une circonférence, on mène deux cordes quelconques AD et AE qui coupent en F et en G la corde BC, le quadrilatère DFGE est inscriptible.

89. ABCD étant un quadrilatère inscriptible, on mène une circonférence

passant par A et B, une seconde par B et C, une troisième par C et D, et une quatrième par D et A. Ces quatre circonférences se coupent successivement en quatre points L, M, N, P, autres que les points A, B, C, D. Démontrer que le quadrilatère LMNP est inscriptible.

90. Si dans un quadrilatère ABCD on prolonge les côtés opposés AB et CD jusqu'à leur rencontre E, puis les côtés opposés AD et BC jusqu'à leur rencontre F, on forme une figure qu'on nomme *quadrilatère complet*, et qui renferme quatre triangles ABF, ADE, BCE, DCF. Démontrer : 1° que les cercles circonscrits à ces quatre triangles passent par un même point; 2° que ce point et les centres des quatre cercles sont sur une même circonférence.

91. Sur les trois côtés d'un triangle ABC on construit extérieurement à ce triangle les triangles équilatéraux ABC′, ACB′, BCA′. Démontrer : 1° que les trois droites AA′, BB′, CC′, sont égales; 2° qu'elles concourent en un même point O; 3° que du point O, on voit sous le même angle les trois côtés du triangle ABC.

92. Par un point fixe pris dans le plan d'un cercle, on mène diverses cordes : trouver le lieu des milieux de ces cordes.

93. Par l'une des extrémités d'un diamètre AB d'un cercle, on mène une corde quelconque AC que l'on prolonge d'une quantité CM égale à CB : quel est le lieu des points M ?

94. On donne un cercle et un point fixe A situé dans son plan. ABC étant une corde quelconque issue du point A, on élève sur le milieu de cette corde une perpendiculaire IM égale à IA. Quel est le lieu des points M?

95. ABC étant un triangle équilatéral, quel est le lieu des points M, tels que $MA = MB + MC$?

96. Trouver le lieu du point de concours des hauteurs des triangles qui ont même base et même angle au sommet.

97. Une circonférence roule dans l'intérieur d'un cercle de rayon double : quel est le lieu décrit par un point de cette circonférence?

98. Trouver le lieu des points tels, que si l'on abaisse de l'un d'eux des perpendiculaires sur les trois côtés d'un triangle fixe, les trois pieds de ces perpendiculaires soient en ligne droite.

99. Dans un triangle, on donne : la somme ou la différence de deux côtés et l'angle formé par ses côtés en grandeur et en position. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit.

100. Deux circonférences O et O′ étant tangentes intérieurement au point A, et BC étant une corde de la grande circonférence tangente en D à la petite circonférence, la droite AD est la bissectrice de l'angle BAC.

101. La circonférence O touchant les deux circonférences O′ et O″ aux points A et B, on prolonge la corde AB jusqu'à son second point de rencontre C avec la circonférence O". Démontrer que les deux rayons O'A et O"C sont parallèles. La droite O'O" rencontrant les circonférences O' et O" aux points D et E, démontrer en second lieu que le quadrilatère ABDE est inscriptible.

102. Le point C étant le milieu d'un arc AB, et le point D un point quelconque de cet arc, on a $AC + BC > AD + BD$.

§ IV. — *Construction des angles et des triangles.*

103. Décrire, avec un rayon donné, un cercle passant par deux points donnés.

104. Décrire, avec un rayon donné, un cercle passant par un point donné et ayant son centre sur une droite donnée ou sur une circonférence donnée.

105. Construire un parallélogramme, connaissant :

1° Deux côtés adjacents et une diagonale;

2° Un côté et les deux diagonales;

3° Les deux diagonales et leur angle;

4° Le périmètre, un côté et un angle.

106. Construire un triangle, connaissant :

1° Deux côtés et une médiane (deux cas);

2° Un côté et deux médianes (deux cas);

3° Les trois médianes;

4° La base, la différence des deux autres côtés et la différence des angles à la base;

5° La base, un angle à la base, et la somme ou la différence des deux autres côtés;

6° La base, l'angle au sommet, et la somme ou la différence des deux autres côtés.

107. Diviser un angle droit en trois parties égales.

108. Par un point donné O, mener trois droites OA, OB, OC, de longueurs données et telles, que leurs extrémités A, B, C, soient en ligne droite, et que les intervalles AB et BC soient égaux entre eux.

109. Soient ABC un triangle, et ABDE, ACFG, BCHK, les carrés construits sur les trois côtés; connaissant les longueurs des trois droites EG, FH, KD, construire le triangle ABC.

§ V. — *Tracé des parallèles et des perpendiculaires.*

110. Décrire un cercle :

1° Passant par deux points donnés et ayant son centre sur une droite donnée ou sur une circonférence donnée;

2° Ayant un rayon donné, passant par un point donné et tangent à une droite donnée ou à une circonférence donnée;

3° Ayant un rayon donné, et touchant soit deux droites données, soit une droite et une circonférence données, soit deux circonférences données;

4° Ayant un rayon donné, son centre sur une droite ou une circonférence donnée, et tangent à une droite ou à une circonférence donnée;

5° Passant par un point donné et tangent à une droite ou à une circonférence donnée en un point donné;

6° Touchant deux droites données, et l'une d'elles en un point donné;

7° Touchant une droite et une circonférence données, et cette circonférence en un point donné.

111. Construire un triangle rectangle, connaissant :

1° L'hypoténuse et un côté de l'angle droit;

2° L'hypoténuse et un angle aigu.

112. Construire un triangle isocèle, connaissant la base et l'angle au sommet.

113. Construire un triangle, connaissant :

1° Les pieds des trois hauteurs;

2° Un angle, une hauteur et le périmètre (deux cas);

3° Un côté, l'un des angles adjacents et la longueur de la bissectrice de cet angle;

4° La somme de deux côtés et les angles;

5° Le périmètre et les angles;

6° Un angle, la longueur de sa bissectrice et l'une des hauteurs (deux cas);

7° Les angles et une hauteur;

8° La base, la somme des deux autres côtés et la différence des angles à la base.

114. Construire un rectangle, connaissant :

1° La diagonale et un côté;

2° Un côté et l'angle des diagonales.

115. Construire un losange, connaissant :

1° Les deux diagonales;

2° Deux droites parallèles indéfinies sur lesquelles doivent être situés deux côtés opposés, et deux points par lesquels doivent passer les deux autres côtés.

116. Construire un carré, connaissant sa diagonale.

117. Construire un quadrilatère, connaissant les quatre côtés et la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés.

118. Construire un pentagone, connaissant les milieux des cinq côtés.

119. Par l'un des points d'intersection de deux cercles, mener une sécante commune qui ait son milieu en ce point.

120. Par un point donné, mener une droite qui fasse des angles égaux avec deux droites données.

121. Tracer une droite de longueur donnée, dont les extrémités s'appuient sur deux droites données, et qui soit parallèle à une droite donnée.
Même problème en remplaçant les deux droites par deux circonférences.

122. On donne trois droites issues d'un même point, et un point pris sur l'une d'elles; mener par ce point une sécante qui soit divisée par les trois droites en deux parties égales.

123. Par un point extérieur à un cercle, mener une sécante dont la longueur totale soit double de sa partie extérieure.

124. Inscrire dans un triangle un losange dont l'un des angles coïncide avec un angle du triangle.

125. Tracer une circonférence qui passe à égale distance de quatre points donnés non en ligne droite.

126. Par un point pris dans le plan d'un parallélogramme, mener une sécante telle, que la partie comprise entre deux côtés opposés (prolongés s'il le faut) soit égale à la partie comprise entre les deux autres côtés.

§ VI. — *Problèmes sur les tangentes.*

127. Mener à un cercle une tangente qui fasse un angle donné avec une droite donnée.

128. Par un point pris dans le plan d'un cercle, mener une sécante sur laquelle le cercle intercepte une corde de longueur donnée.

129. Deux cercles étant donnés, mener une sécante telle, que les cordes interceptées par les deux cercles aient des longueurs données.

130. Des sommets d'un triangle comme centres, décrire trois cercles qui se touchent deux à deux.

131. Décrire un cercle qui touche deux circonférences, et l'une d'elles en un point donné.

132. Construire un triangle rectangle, connaissant :

1° L'un des côtés de l'angle droit et l'excès de l'hypoténuse sur le troisième côté;

2° Les angles et l'excès de l'hypoténuse sur un des côtés de l'angle droit.

133. Étant donnés un cercle et un angle circonscrit, toute tangente à

l'arc qui tourne sa convexité vers le sommet, détermine avec les côtés de l'angle un triangle dont le périmètre est constant et dont le troisième côté est vu du centre du cercle sous un angle constant. — Qu'arrive-t-il lorsque la tangente est menée par un point de l'arc concave ?

134. Construire un triangle, connaissant son périmètre, un angle en grandeur et en position, et un point du troisième côté.

135. Construire un triangle, connaissant :

1° Un angle ainsi que la hauteur et la médiane issues de son sommet ;
2° Un côté, un angle et une hauteur (cinq cas).

136. Construire un triangle ayant des angles donnés et tel, que ses sommets appartiennent à deux circonférences concentriques données.

137. Construire un triangle, connaissant la base, la différence des angles à la base, et sachant que le sommet doit être situé sur une droite donnée.

138. Dans tout triangle rectangle, le diamètre du cercle inscrit est égal à l'excès de la somme des deux côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse.

139. Étant donnés un triangle, le cercle inscrit et les trois cercles ex-inscrits, démontrer : 1° que les quatre points de contact qui se trouvent sur un même côté (deux *intérieurs* et deux *extérieurs*) sont deux à deux équidistants du milieu de ce côté; 2° que la distance d'un point de contact extérieur, au plus éloigné des deux sommets situés sur le même côté, est égale au demi-périmètre du triangle; 3° que la distance du point de contact du cercle inscrit à l'un des sommets situés sur le même côté est égale au demi-périmètre diminué du côté opposé à ce sommet; 4° que la distance des deux points de contact intérieurs situés sur le côté considéré est égale à la différence des deux autres côtés du triangle; 5° que la distance des deux points de contact extérieurs est égale à la somme des deux autres côtés du triangle; 6° que la distance du point de contact du cercle inscrit à l'un des points de contact extérieurs est égale à celui des deux autres côtés du triangle qui aboutit au sommet situé entre ces deux points de contact.

140. Soient ABC un triangle, D le centre du cercle circonscrit, O celui du cercle inscrit, et O′, O″, O‴, les centres des cercles ex-inscrits respectivement situés dans les angles A, B, C; démontrer : 1° que le cercle circonscrit passe par les milieux des droites OO′, OO″, OO‴; 2° que les quatre points O, B, C, O′, sont sur un même cercle dont le centre est sur la circonférence D; 3° que les points O″, B, C, O‴, sont sur un même cercle dont le centre est sur la circonférence D.

141. Si l'on désigne par R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC; par r celui du cercle inscrit, par r', r'', r''', ceux des cercles ex-

inscrits; par δ, δ', δ'', les perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les côtés; par μ, μ', μ'', les portions de ces perpendiculaires comprises entre les côtés du triangle et la circonférence circonscrite, on a les relations

$$r'+r''+r'''=4R+r,$$
$$\mu+\mu'+\mu''=2R-r,$$
$$\delta+\delta'+\delta''=R+r.$$

La dernière relation suppose que le centre D du cercle circonscrit est situé à l'intérieur du triangle. Dans le cas où le point D est extérieur, comment faut-il modifier cette relation?

142. Construire un triangle, connaissant :

1° Le rayon du cercle inscrit, un angle et la hauteur issue de son sommet;

2° Un côté, la somme ou la différence des deux autres, et le rayon du cercle inscrit ou de l'un des cercles ex-inscrits;

3° Les centres des trois cercles ex-inscrits.

143. Construire trois cercles égaux qui se touchent deux à deux et qui touchent intérieurement un cercle donné.

144. Étant donnés la base et l'angle au sommet d'un triangle, trouver les lieux des centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits.

145. Le trapèze isocèle est le seul trapèze inscriptible.

§ VII. — *Appendice.*

146. ABC étant un triangle quelconque, on construit sur les côtés les carrés ABDE, ACFG, BCHK; on mène EG, DK, HF, DC, BF, et l'on abaisse la hauteur AI; démontrer : 1° que les trois droites DC, BF, AI, concourent en un même point; 2° que les perpendiculaires abaissées respectivement de A sur EG, de B sur DK, et de C sur FH, concourent en un même point.

147. Partager un arc de cercle en deux parties telles, que la somme ou la différence de leurs cordes soit égale à une droite donnée.

148. Deux cercles O et O' et une droite XY étant donnés, trouver sur XY un point tel, que les tangentes menées de ce point aux deux cercles soient également inclinées sur la droite XY.

149. Étant donnés une droite XY et deux points A et B situés d'un même côté de cette droite, trouver sur XY un point M tel, que l'angle AMX soit double de l'angle BMY.

150. On donne un cercle de centre O et un diamètre fixe AOB. Du point B, on mène une corde BC que l'on prolonge d'une quantité CD égale à BC. On tire les droites CA et DO, qui se coupent en M. Quel est le lieu des points M, lorsque la corde BC tourne autour du point B?

151. On donne un cercle O et deux diamètres rectangulaires AA', BB'. Du point A, on mène une sécante ACI qui coupe le cercle en C et le diamètre BB' prolongé en I. La tangente en C au cercle O et la perpendiculaire en I au diamètre BB' se rencontrent en un point M dont on demande le lieu.

152. Construire un triangle équilatéral, sachant qu'il doit s'appuyer par ses trois sommets sur trois circonférences concentriques données.

153. Construire un triangle dont on connaît les angles, et qui ait ses trois sommets sur trois droites parallèles données.

154. Trouver dans le plan d'un triangle le point dont la somme des distances aux trois côtés ou aux trois sommets est un minimum.

155. Construire un quadrilatère, connaissant deux angles opposés, les longueurs des deux diagonales et l'angle qu'elles forment.

156. Dans le plan d'un angle donné BAC, mener par un point donné D une droite DBC telle, que le périmètre du triangle ABC ainsi formé ait une longueur donnée.

157. D'un point donné comme centre, décrire une circonférence qui coupe une droite donnée de manière que l'un des segments déterminés par la droite soit capable d'un angle donné.

158. Couper un triangle donné par une droite telle, que les deux segments interceptés sur cette droite par les trois côtés du triangle (prolongés s'il est nécessaire) aient des longueurs données.

159. Décrire un cercle qui touche une droite donnée en un point donné, et qui coupe un cercle donné sous un angle donné.

160. On donne un triangle ABC rectangle en A; une perpendiculaire quelconque DE à l'hypoténuse coupe le côté BA en D, le côté CA en F; on mène les droites DC et BF qui se rencontrent en M : trouver le lieu des points M.

LIVRE III.

LES FIGURES SEMBLABLES.

§ I. — LIGNES PROPORTIONNELLES.

DÉFINITIONS.

189. On dit que deux grandeurs sont *proportionnelles* l'une à l'autre lorsque le rapport de deux valeurs quelconques A et B de la première est égal au rapport des valeurs correspondantes C et D de la seconde (132); et l'on donne le nom de *proportion* à l'égalité des deux rapports

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}. \tag{1}$$

Lorsque les deux grandeurs considérées sont de même espèce, comme deux longueurs, deux volumes, etc., on dit que la valeur D est une *quatrième proportionnelle* à A, B, C. Dans la même hypothèse, si les valeurs B et C sont égales entre elles, la relation (1) devient

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{D}, \tag{2}$$

et l'on dit que B est *moyenne proportionnelle* entre A et D, et que D est une *troisième proportionnelle* à A et B.

190. Rapportons chacune des grandeurs considérées à une unité de son espèce; a et b étant les nombres qui mesurent les valeurs A et B de la première, on aura, d'après un théorème connu (131),

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}.$$

De même, c et d étant les rapports des valeurs C et D à l'unité adoptée pour la mesure de la seconde grandeur, on aura

$$\frac{C}{D} = \frac{c}{d}.$$

Par suite, la relation (1) se traduit par l'égalité *numérique*

$$(3) \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

qui prend aussi le nom de *proportion*; les deux nombres a et d sont dits les termes *extrêmes*, et b et c les *moyens*.

On peut alors chasser les dénominateurs et écrire

$$ad = bc.$$

On énonce ce résultat de la manière suivante : *Dans toute proportion (numérique), le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

De même, la relation (2) se traduit par l'égalité numérique

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$$

ou

$$(4) \qquad b^2 = ad \quad \text{et} \quad b = \sqrt{ad}.$$

Ainsi, *quand une grandeur est moyenne proportionnelle entre deux autres, le nombre qui la mesure est égal à la racine carrée du produit des nombres qui mesurent les deux autres, l'unité étant la même.*

191. Il importe de bien saisir la distinction qui sépare les relations (1) et (3). Dans la première, on ne saurait, par exemple, chasser les dénominateurs ; le produit de deux grandeurs n'offre en effet aucun sens, car, dans toute multiplication, le multiplicateur au moins est un nombre abstrait.

Toutefois, nous parlerons souvent dans la suite du *produit de deux lignes*; mais il faudra toujours entendre par là le produit des nombres qui mesurent ces lignes rapportées à une unité commune. Quoique vicieuses au fond, cette locution et d'autres analogues sont d'un usage très-commode; leur emploi abrége le discours, et il ne peut d'ailleurs en résulter aucune confusion pour les esprits réfléchis.

192. Voici un LEMME qui nous sera souvent utile :

Supposons qu'un mobile parcoure de gauche à droite une ligne droite indéfinie XY sur laquelle sont marqués deux points fixes A et B, et étudions les variations du rapport des distances du mobile aux points A et B (*fig.* 137).

Fig. 137.

Pour toute position M' du mobile à gauche de A, on a

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{M'B - AB}{M'B} = 1 - \frac{AB}{M'B}.$$

On voit par là que si M' est très-loin, le dénominateur M'B est très-grand; par suite, la fraction $\frac{AB}{M'B}$ est très-petite, et le rapport $\frac{M'A}{M'B}$ est aussi voisin qu'on veut de l'unité. A mesure que le mobile se rapproche du point A, le dénominateur M'B diminue en tendant vers AB; la fraction $\frac{AB}{M'B}$ augmente en se rapprochant de l'unité, et le rapport $\frac{M'A}{M'B}$ diminue jusqu'à 0, valeur qu'il atteint lorsque le mobile arrive en A. Ainsi, *à gauche du point* A, *le rapport considéré décroît d'une manière continue de* 1 *à* 0.

Au delà du point A, le rapport $\frac{MA}{MB}$ augmente, puisque son numérateur croît et que son dénominateur diminue; et il devient égal à 1, lorsque le mobile est au point O milieu de AB. Ainsi, *de* A *en* O, *le rapport considéré croît d'une manière continue de* 0 *à* 1.

A partir du point O, le rapport $\frac{NA}{NB}$ continue à croître pour les mêmes motifs; à mesure que le mobile se rapproche de B, le numérateur NA tend vers AB, le dénominateur NB diminue en tendant vers 0; et, par suite, le rapport acquiert des valeurs de plus en plus grandes et peut même surpasser tel nombre qu'on voudra. On exprime ce fait en disant que la valeur du rapport devient *infinie*, et l'on représente par le symbole ∞ cet état limite. Ainsi, *de* O *en* B, *le rapport considéré croît d'une manière continue de* 1 *à* $l'\infty$.

Enfin, pour toute position N′ du mobile au delà de B, on a

$$\frac{N'A}{N'B} = \frac{N'B + AB}{N'B} = 1 + \frac{AB}{N'B};$$

lorsque le point N′ s'éloigne de B, le dénominateur N′B augmente de plus en plus jusqu'à l'infini; la fraction $\frac{AB}{N'B}$ diminue graduellement jusqu'à zéro, et le rapport $\frac{N'A}{N'B}$ décroît successivement jusqu'à 1. Ainsi, *à droite de* B, *le rapport considéré décroît d'une manière continue de* $l'\infty$ *à* 1.

En résumé, le rapport considéré prend deux fois à gauche du point O toutes les valeurs numériques moindres que 1, et deux fois à droite du point O toutes les valeurs numériques supérieures à 1.

On conclut de là qu'*il existe toujours sur une droite indéfinie* AB *deux points, et seulement deux, tels que les rapports des distances de chacun d'eux aux points* A *et* B *aient une même valeur donnée. Ces deux points sont situés d'un même côté du milieu* O *de* AB, *l'un entre* A *et* B, *l'autre en dehors; ils sont d'ailleurs à gauche de* O, *comme* M *et* M′, *ou à droite de* O, *comme* N *et* N′, *suivant que la valeur donnée du rapport est inférieure ou supérieure à l'unité.*

Le point N, situé entre A et B, divise réellement la droite AB dans le rapport donné; par extension, on dit que le point extérieur N′ divise aussi la droite AB dans ce même rapport. Pour éviter toute confusion, on qualifie alors d'*additifs* les segments NA et NB déterminés par le point N, et dont AB est la somme, et de *soustractifs* les segments N′A et N′B déterminés par le point N′, et dont AB est la différence.

Lorsqu'une droite AB est ainsi divisée par deux points N et N′, de façon que les segments additifs NA et NB soient proportionnels aux segments soustractifs N′A et N′B, on dit que ces deux points N et N′ sont *conjugués* par rapport à la droite AB. La relation

$$\frac{NA}{NB} = \frac{N'A}{N'B}$$

pouvant être écrite

$$\frac{AN}{AN'} = \frac{BN}{BN'},$$

on voit que, *réciproquement*, A et B sont conjugués par rapport à la droite NN'.

THÉORÈME.

193. *Lorsque deux droites quelconques* AG, A'G', *sont coupées par une série de parallèles* AA', BB',..., GG' (*fig.* 138, 139);

1° *Si deux segments* AB *et* EF *de la première droite sont égaux entre eux, les segments correspondants* A'B' *et* E'F' *de la seconde droite sont aussi égaux entre eux ;*

2° *Si sur la première droite un segment* EG *est égal à la somme de deux autres* AB *et* CD, *sur la seconde droite le segment* E'G' *correspondant à* EG *est aussi égal à la somme des segments* A'B' *et* C'D' *qui correspondent à* AB *et à* CD.

Fig. 138.

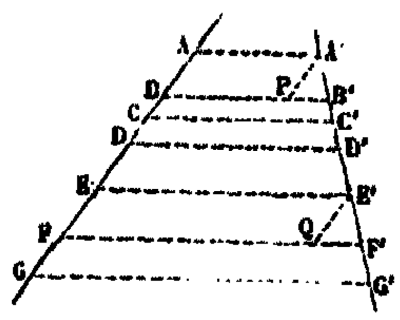
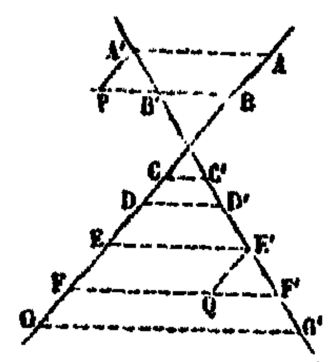


Fig. 139.



1° Menons A'P et E'Q parallèles à AG; A'P et AB seront égales comme parallèles comprises entre parallèles; E'Q sera égale à EF pour la même raison; par suite, on aura A'P = E'Q, puisqu'on a par hypothèse AB = EF. D'ailleurs, les angles PA'B', QE'F', sont égaux comme correspondants, et les angles A'PB', E'QF', comme ayant les côtés parallèles et de même sens; donc, les triangles PA'B', QE'F', ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, sont égaux, et l'on a A'B' = E'F'.

2° Puisque, par hypothèse, EF = AB, et GF = CD, on a, d'après l'alinéa qui précède, E'F' = A'B' et F'G' = C'D'; le segment E'G' est donc égal à la somme de A'B' et de C'D'.

La figure peut offrir deux dispositions différentes; mais la démonstration ne varie pas.

COROLLAIRE.

194. *Lorsque deux droites sont coupées par une série de parallèles, le rapport de deux segments quelconques de la première droite est égal au rapport des segments correspondants de la seconde*; en d'autres termes, *deux droites quelconques sont coupées par une série de parallèles en parties proportionnelles*.

Le théorème précédent prouve en effet que les segments correspondants satisfont aux deux conditions nécessaires et suffisantes pour assurer leur proportionnalité (133).

195. En particulier, *toute parallèle* DE *à l'un des côtés* BC *d'un triangle* ABC *divise les deux autres côtés en parties proportionnelles* (*fig.* 140, 141, 142).

Fig. 140.

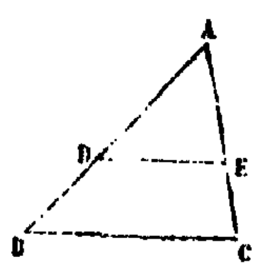


Fig. 141.

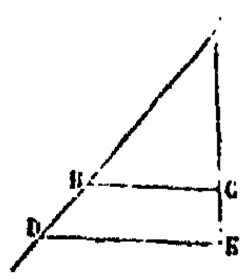


Fig. 142.

En effet, en concevant par le sommet A une parallèle à BC, on voit (194) qu'on a

(1) $$\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC},$$

ou encore

(2) $$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC},$$

(3) $$\frac{BA}{BD}=\frac{CA}{CE}.$$

Chacune de ces proportions se trouve ici démontrée directement; mais il convient de remarquer qu'en vertu des règles de l'Arithmétique, l'une quelconque d'entre elles entraîne les deux autres.

Nous avons indiqué les trois dispositions que peut présenter la figure.

196. Réciproquement, *si deux points* D *et* E, *situés respectivement sur deux côtés* AB *et* AC *d'un triangle* ABC, *divisent ces côtés en parties proportionnelles, la droite* DE *qui unit ces deux points est parallèle au troisième côté* BC.

Puisque chacune des proportions (1), (2), (3) entraîne les deux autres, on peut partir de l'une quelconque d'entre elles comme hypothèse; nous choisirons par exemple la première

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EB}. \qquad (1)$$

Cela posé, il faut distinguer plusieurs cas :

Supposons d'abord les points D *et* E *situés sur les côtés eux-mêmes,* c'est-à-dire l'un D entre A et B, et l'autre E entre A et C (*fig.* 140); et concevons par le point D une parallèle à BC. Cette parallèle déterminera (195) entre A et C un point dont les distances à A et C formeront un rapport égal à $\frac{DA}{DB}$. Or, entre A et C (192), il n'existe qu'un seul point dont le rapport des distances à A et C soit égal à $\frac{DA}{DB}$, et ce point est par hypothèse le point E. Donc la parallèle à BC menée par le point D, passe par E et coïncide avec DE. Donc enfin DE est parallèle à BC.

Supposons, en second lieu, les points D *et* E *situés sur les prolongements des côtés.* Si D est, par exemple, au-dessous de AB (*fig.* 141), le rapport $\frac{DA}{DB}$ sera supérieur à 1; il en sera donc de même de son égal $\frac{EA}{EC}$ et, par suite, le point E sera pareillement au-dessous de AC. Dès lors la démonstration s'achèvera comme ci-dessus.

On verrait de même que si D était au-dessus de BA (*fig.* 142), la proportion (1) exigerait que E fût au-dessus de CA; puis on achèverait la démonstration comme dans le premier cas.

On voit que cette réciproque demande une certaine attention; l'hypothèse renferme en réalité deux parties : la première consiste dans l'existence de la proportion (1), et l'autre est relative à la situation des points D et E qui doivent être placés de la même manière sur les côtés AB et AC. Bien que sous-entendue d'ordinaire pour plus de brièveté, cette seconde partie est indispensable; car si l'un des points D était, par exemple, sur le côté lui-même et l'autre E sur l'un des prolongements, la droite DE ne saurait être parallèle à BC bien que la proportion (1) fût satisfaite.

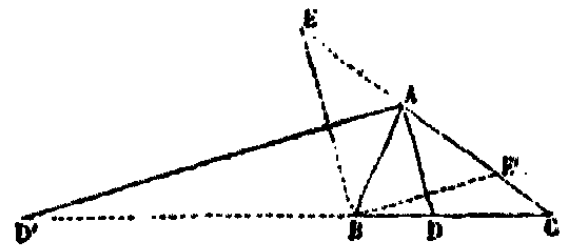
THÉORÈME.

197. *Dans tout triangle* ABC (*fig.* 143) :

1° *La bissectrice* AD *d'un angle quelconque* BAC *divise le côté opposé* BC *en deux segments additifs* DB *et* DC *proportionnels aux côtés adjacents;*

2° *La bissectrice* AD′ *d'un angle extérieur* BAE *divise le côté opposé* BC *en deux segments soustractifs* D′B, D′C, *proportionnels aux côtés adjacents.*

Fig. 143.



En effet :

1° En menant BE parallèle à la bissectrice AD, on a dans le triangle BEC (195)

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AE}{AC}.$$

D'autre part, l'angle BEA est le correspondant de l'angle DAC, et les angles EBA et DAB sont alternes-internes; or, AD étant bissectrice de l'angle BAC, les angles DAC, DAB, sont égaux; par suite, les angles BEA, EBA, sont aussi égaux, et le triangle BAE est isocèle. En remplaçant dès lors dans la proportion qui précède le côté AE par son égal AB, on a

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

2° En menant BE′ parallèle à la bissectrice AD′ de l'angle extérieur BAE, on a dans le triangle D′AC (195)

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AE'}{AC}.$$

D'autre part, l'angle BE'A est le correspondant de l'angle D'AE, et les angles E'BA et D'AB sont alternes-internes; or, AD' étant bissectrice de l'angle BAE, les angles D'AE, D'AB, sont égaux; par suite, les angles BE'A, E'BA, sont aussi égaux, et le triangle BAE' est isocèle. En remplaçant dès lors dans la proportion qui précède le côté AE' par son égal AB, on a

$$\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC}.$$

198. Réciproquement, *i une droite, issue du sommet d'un angle d'un triangle, divise le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents, cette droite est la bissectrice de l'angle considéré ou de l'angle supplémentaire, suivant qu'elle rencontre le côté opposé lui-même ou l'un de ses prolongements.*

En effet, entre B et C il n'existe qu'un point D qui divise BC dans le rapport de AB à AC (192); le théorème direct exige donc que ce point ap artienne à la bissectrice de l'angle BAC (*fig.* 143).

De même, en dehors de BC, il n'existe qu'un point D' qui divise BC en deux segments soustractifs proportionnels à AB et AC (192); dès lors, le théorème direct exige que ce point appartienne à la bissectrice de l'angle extérieur BAE (*fig.* 143).

Corollaire.

199. Les deux points D et D' satisfont à la proportion

$$\frac{DB}{DC}=\frac{D'B}{D'C};$$

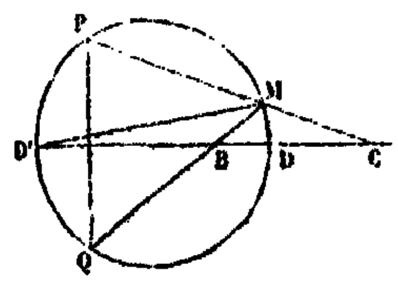
ils sont donc conjugués par rapport à la droite BC. Ainsi, *les deux côtés d'un angle, la bissectrice de cet angle et celle de son supplément déterminent sur une sécante quelconque quatre points, tels que les deux derniers sont conjugués par rapport aux deux autres.*

THÉORÈME.

200. *Le lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes sont dans un rapport donné, est une circonférence* (*fig.* 144).

Soient B et C les deux points fixes, $\frac{m}{n}$ le rapport donné et M

Fig. 144.



un point quelconque du lieu, c'est-à-dire un point tel qu'on ait

$$\frac{MB}{MC} = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Il existe d'abord, sur la droite indéfinie BC, deux points du lieu, c'est-à-dire (192) deux points D et D' qui satisfont aux relations

$$\frac{DB}{DC} = \frac{m}{n}, \quad \frac{D'B}{D'C} = \frac{m}{n};$$

on déduit de là

$$\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MC} \quad \text{et} \quad \frac{D'B}{D'C} = \frac{MB}{MC}.$$

Ces proportions prouvent (198), la première que MD est la bissectrice de l'angle BMC, et la seconde que MD' est la bissectrice de l'angle supplémentaire BMP. Or, les bissectrices de deux angles adjacents et supplémentaires sont rectangulaires (24). Donc, le point variable M est le sommet d'un angle droit DMD' dont les deux côtés passent constamment par deux points fixes D et D'; tout point M du lieu est donc situé sur la circonférence décrite sur DD' comme diamètre.

Il reste à démontrer que, réciproquement, tout point M de cette circonférence DD' appartient au lieu, c'est-à-dire satisfait à la relation (1).

A cet effet, prolongeons MC jusqu'à sa rencontre P avec la circonférence; prenons le point Q symétrique de P par rapport à DD', et désignons un moment par I le point où la droite MQ coupe le diamètre DD'. Les arcs D'P, D'Q, étant égaux, la droite MD' est bissectrice de l'angle PMQ et, par suite, sa perpendiculaire MD est bissectrice de l'angle adjacent et supplémentaire QMC; on a donc

$$\frac{DI}{DC} = \frac{D'I}{D'C};$$

en d'autres termes, le point I est (192) le conjugué du point C par rapport au diamètre DD'. Mais, par hypothèse, B est déjà le conjugué de C par rapport à DD'; donc le point I coïncide avec le point B, et par suite MD est bissectrice de BMC, de sorte qu'on a

$$\frac{MB}{MC} = \frac{DB}{DC} = \frac{m}{n}.$$

Ainsi, le lieu demandé est une circonférence dont le centre est sur la droite BC qui unit les deux points fixes, et cette circonférence coupe la droite BC en deux points D et D' conjugués à BC suivant le rapport donné $\frac{m}{n}$.

Si ce rapport était égal à l'unité, le lieu deviendrait la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC (50).

Scolie.

201. D'après ce qui précède, pour obtenir (*fig.* 144) sur une droite DD' le point C conjugué d'un point B de cette droite, on n'a qu'à décrire une circonférence sur DD' comme diamètre, à mener par le point B la corde quelconque BMQ, puis par le point Q la corde QP perpendiculaire à DD'; la corde PM prolongée coupe alors DD' au point C demandé.

§ II. — SIMILITUDE DES POLYGONES.

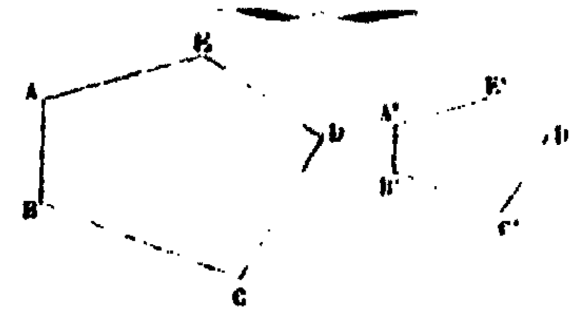
DÉFINITIONS.

202. Deux polygones d'un même nombre de côtés sont dits *semblables* lorsqu'ils ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels.

On entend par *côtés homologues* ceux qui sont adjacents à des angles respectivement égaux, et l'on donne à ces angles eux-mêmes le nom d'*angles homologues;* enfin, on appelle *rapport de similitude* des deux polygones le rapport de deux côtés homologues quelconques.

Ainsi, les deux pentagones ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 145),

Fig. 145.

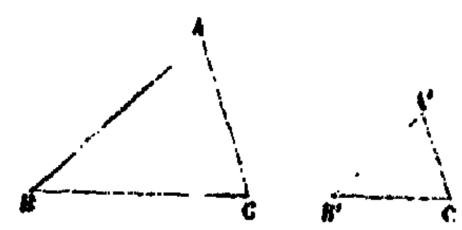


sont semblables, s'ils satisfont aux relations

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C', \quad D = D', \quad E = E',$$
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

Dans les triangles semblables, tels que ABC, A'B'C' (*fig.* 146),

Fig. 146.



les côtés homologues sont opposés aux angles égaux.

LEMME.

203. ***En coupant un triangle*** **ABC** ***par une parallèle*** **DE** ***à l'un des côtés*** **BC,** ***on détermine un nouveau triangle*** **ADE** ***semblable au premier*** (*fig.* 147, 148, 149).

Fig. 147.

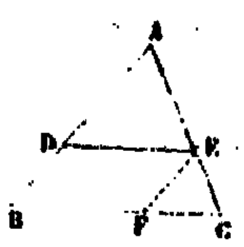


Fig. 148.

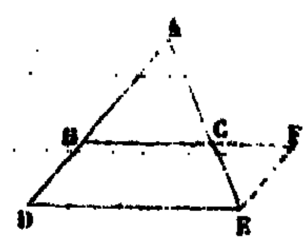
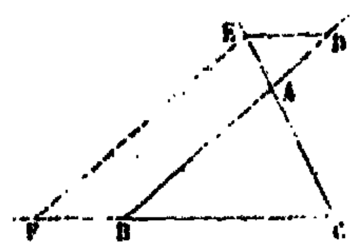


Fig. 149.



En effet :

D'abord, les deux triangles ADE, ABC (*fig.* 147), ont leurs angles respectivement égaux; car l'angle A est commun et les angles ADE, ABC, sont correspondants, ainsi que les angles AED, ACB.

En second lieu, les côtés homologues sont proportionnels; car, DE étant parallèle à BC, on a (195)

$$(1)\qquad \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC};$$

puis, en menant EF parallèle à AB, on a encore

$$\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC},$$

ou, comme les parallèles DE, BF, comprises entre parallèles, sont égales,

$$(2)\qquad \frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC};$$

la réunion des proportions (1) et (2), qui ont un rapport commun, donne la suite de rapports égaux

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}.$$

Scolie.

204. La proposition énoncée subsiste lorsque la parallèle DE est située au-dessous de BC (*fig.* 148), ou au-dessus de A (*fig.* 149). La démonstration est absolument la même dans le cas de la *fig.* 148, et, dans le cas de la *fig.* 149, toute la différence consiste en ce que les angles ADE, ABC, ainsi que les angles AED, ACB, sont alternes-internes au lieu d'être correspondants.

THÉORÈME.

205. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.*

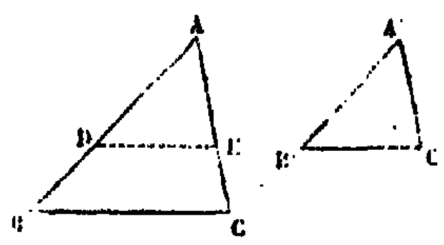
Soient ABC, A'B'C' (*fig.* 150), deux triangles tels qu'on ait

$$A=A',\quad B=B';$$

ces deux triangles sont semblables.

En effet, prenons sur le côté AB homologue de A'B' une longueur AD égale à A'B', et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE sera semblable à ABC (203), et il suffit de démontrer l'égalité des triangles ADE, A'B'C'.

Fig. 150.



Or, les angles A et A' sont égaux par hypothèse; l'angle ADE est correspondant de l'angle ABC qui, par hypothèse, est égal à B'; enfin, le côté AD est égal à A'B' par construction. Donc les deux triangles ADE, A'B'C', sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux.

Corollaires.

206. ***Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs côtés respectivement parallèles, ou respectivement perpendiculaires;*** car dans l'un et l'autre cas, ces triangles ont leurs angles égaux chacun à chacun (84).

207. ***Deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle aigu égal.***

THÉORÈME.

208. ***Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels.***

Soient ABC, A'B'C' (*fig.* 150), deux triangles tels qu'on ait

$$(1)\qquad A = A',\quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'};$$

ces deux triangles sont semblables.

En effet, prenons sur le côté AB homologue de A'B' une longueur AD égale à A'B', et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE sera semblable au triangle ABC (203), et il suffit de démontrer l'égalité des triangles ADE, A'B'C'.

Or, la similitude des triangles ABC, ADE, donne la proportion

$$(2)\qquad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

qui a les mêmes numérateurs que la proportion (1); les dénominateurs AD et A'B' des deux premiers rapports étant en outre égaux par construction, il faut que $AE = A'C'$; les deux triangles ADE, A'B'C', sont donc égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux.

THÉORÈME.

209. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les côtés proportionnels.*

Soient ABC, A'B'C' (*fig.* 150), deux triangles tels qu'on ait

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}; \tag{1}$$

ces deux triangles sont semblables.

En effet, prenons sur le côté AB une longueur AD égale à A'B', et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE sera semblable à ABC (203), et il suffit de démontrer l'égalité des triangles ADE, A'B'C'.

Or, la similitude des triangles ADE, ABC, donne la série de rapports égaux

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{EA}{CA}, \tag{2}$$

qui présente les mêmes dénominateurs que la série (1). Dès lors les numérateurs AD, A'B', des deux premiers rapports étant égaux par construction, il faut qu'on ait aussi

$$DE = B'C', \quad EA = C'A';$$

et, par suite, les deux triangles ADE, A'B'C', sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun.

Scolies.

210. Il résulte des nos 205 et 209 que, *dans les triangles, l'égalité des angles entraîne la proportionnalité des côtés et réciproquement.* Il n'en est pas de même pour les polygones en général. Il ne suffit pas, pour que deux polygones soient semblables, qu'ils aient seulement leurs angles respectivement égaux ou seulement leurs côtés homologues proportionnels. Par exemple, un carré et un rectangle ne sont pas semblables, bien que leurs angles soient égaux, car leurs côtés homologues ne sont pas proportionnels. De même, un carré et un losange ne sont pas semblables, bien que leurs côtés soient proportionnels, car leurs angles ne sont pas égaux.

211. Le tableau suivant, dans lequel nous avons réuni les cas d'égalité et les cas de similitude de deux triangles, en les faisant correspondre un à un, permet de comparer les deux théories.

Deux triangles sont :

égaux,	semblables.
lorsqu'ils ont :	
1° Deux angles égaux comprenant un côté égal;	1° Deux angles égaux;
2° Un angle égal compris entre deux côtés égaux;	2° Un angle égal compris entre deux côtés proportionnels;
3° Les trois côtés égaux.	3° Les trois côtés proportionnels.

On voit que chaque cas de similitude ne renferme que *deux* conditions, tandis que l'égalité en exige toujours *trois*.

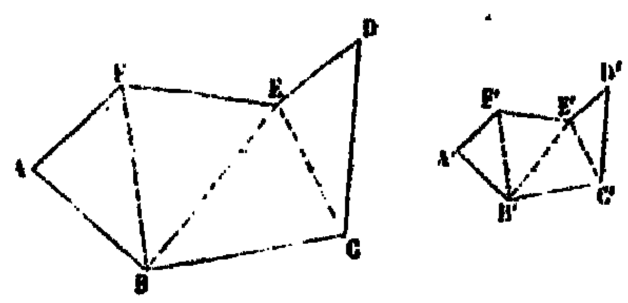
212. Il importe en outre de remarquer le mode uniforme de démonstration que nous avons adopté aux nos 205, 208 et 209. Le procédé consiste à prendre, sur un côté du premier triangle, à partir du sommet, une longueur égale au côté homologue du second; puis à mener, par le point ainsi déterminé, une parallèle à l'un des deux autres côtés du premier triangle. On construit ainsi un triangle auxiliaire qui, d'après le lemme du n° 203, est semblable au premier; et les conditions renfermées dans l'hypothèse permettent ensuite de démontrer aisément que ce triangle auxiliaire est égal au second triangle, en vertu du cas d'égalité qui correspond au cas de similitude que l'on étudie.

213. Enfin, il reste à montrer l'usage de cette théorie, c'est-à-dire à indiquer de quelle manière les cas de similitude interviennent dans la démonstration des théorèmes. Deux triangles semblables satisfont à cinq conditions, et chaque cas de similitude comprend deux de ces conditions groupées de telle sorte que, lorsqu'elles sont satisfaites, les cinq soient remplies. Dès lors, quand, dans une certaine figure, on aura reconnu la similitude de deux triangles par l'application de l'un des trois cas, on devra en conclure immédiatement que les trois autres conditions sont remplies, et l'on aura acquis de cette manière de nouvelles données qui permettront d'aller plus loin.

THÉORÈME.

214. ***Deux polygones, composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés, sont semblables*** (*fig.* 151).

Fig. 151.



Soient ABF, FBE, EBC, CED, et A'B'F', F'B'E', E'B'C', C'E'D', deux séries de triangles respectivement semblables et semblablement disposés; le polygone ABCDEF, formé par les premiers triangles, est semblable au polygone A'B'C'D'E'F' que forment les seconds.

En effet :

1° Les angles des deux polygones sont égaux, soit comme angles homologues de deux triangles semblables, soit comme sommes d'angles homologues de plusieurs triangles semblables. Ainsi, les angles A et A' sont égaux comme angles homologues des deux triangles semblables BAF, B'A'F', tandis que l'angle B est égal à l'angle B' comme étant la somme des trois angles ABF, FBE, EBC, respectivement égaux aux trois angles A'B'F', F'B'E', E'B'C', qui composent l'angle B'.

2° Les côtés homologues sont proportionnels, car on a successivement :

A cause des triangles semblables ABF, A'B'F',

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'F'}{AF}=\frac{B'F'}{BF};$$

A cause des triangles semblables BFE, B'F'E',

$$\frac{B'F'}{BF}=\frac{F'E'}{FE}=\frac{E'B'}{EB};$$

A cause des triangles semblables EBC, E'B'C',

$$\frac{E'B'}{EB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'E'}{CE};$$

A cause des triangles semblables CED, C'E'D',

$$\frac{C'E'}{CE}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'E'}{DE};$$

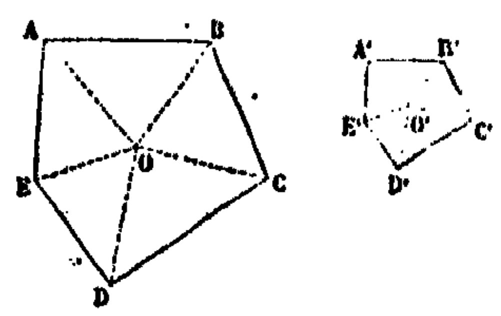
d'où, en supprimant les rapports communs,

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'F'}{AF}=\frac{F'E'}{FE}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'E'}{DE}.$$

215. Réciproquement, *deux polygones semblables peuvent être décomposés en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés* (*fig.* 152).

Soient ABCDE, A'B'C'D'E', deux polygones semblables.

Fig. 152.



Prenons à l'intérieur du premier un point quelconque O, et joignons ce point aux extrémités du côté AB; puis, sur le côté A'B' homologue de AB, et dans l'intérieur du polygone A'B'C'D'E', construisons les angles B'A'O', A'B'O', respectivement égaux aux angles BAO, ABO. Le point O' sera le sommet d'un triangle O'A'B' semblable au triangle OAB (205), et situé, par rapport au second polygone A'B'C'D'E', de la même manière que le triangle OAB par rapport au polygone ABCDE.

Cela posé, joignons le point O à tous les sommets du premier polygone, et le point O' à tous les sommets du second; les deux polygones seront ainsi décomposés en un même nombre de triangles dont il s'agit de démontrer la similitude respective.

Or, les deux premiers triangles OAB, O'A'B', semblables par construction, donnent

$$\frac{O'B'}{OB} = \frac{A'B'}{AB};$$

la similitude des polygones proposés donne à son tour

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC};$$

on a donc

$$\frac{O'B'}{OB} = \frac{B'C'}{BC}.$$

D'ailleurs, l'angle O'B'C', différence des angles A'B'C', A'B'O', qui sont respectivement égaux aux angles ABC, ABO, est égal à l'angle OBC, différence de ces deux derniers. Donc les triangles OBC, O'B'C', sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

De la similitude des triangles O'B'C', OBC, on déduirait de même celle des triangles suivants O'C'D', OCD; et ainsi de suite.

Scolies.

216. Deux points O et O', situés dans le plan de deux polygones semblables, sont dits *homologues* lorsqu'en joignant l'un d'eux O aux extrémités d'un côté AB et l'autre O' aux extrémités du côté homologue A'B', on obtient deux triangles OAB, O'A'B', semblables et semblablement disposés par rapport aux deux polygones.

Il résulte de la démonstration précédente que deux points homologues quelconques peuvent être pris pour centres de décomposition de deux polygones semblables en triangles semblables et semblablement disposés.

Si le point O était extérieur au polygone ABCDE, son homologue O' serait aussi extérieur au polygone A'B'C'D'E'; il faudrait alors considérer les deux polygones comme composés de triangles additifs et de triangles soustractifs.

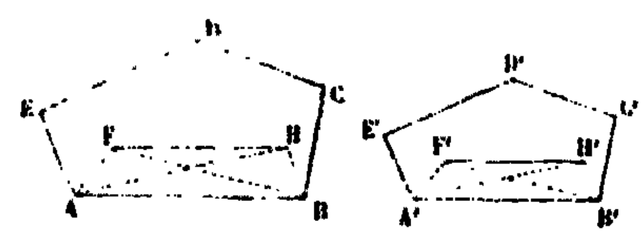
Si le point O coïncidait avec l'un des sommets A, son homologue O' coïnciderait avec le sommet A'. Dans ce cas, chacun des deux polygones serait décomposé en $n-2$ triangles,

n étant le nombre des côtés. La similitude de chaque couple de triangles exigeant deux conditions, on voit que la similitude des deux polygones exige $2n-4$ conditions; l'égalité en exige $2n-3$, c'est-à-dire *une* de moins. Et en effet, deux polygones égaux sont deux polygones semblables dont le rapport de similitude est égal à l'unité.

217. Deux droites situées dans le plan de deux polygones semblables, sont dites ***homologues*** lorsque leurs extrémités sont deux à deux des points homologues; telles sont, par exemple, les diagonales relatives à des sommets homologues.

Le rapport de deux droites homologues quelconques est égal au rapport de similitude des deux polygones.

Fig. 153.



Soient en effet ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 153), deux polygones semblables, et FH, F'H', deux droites homologues quelconques. La similitude (216) des triangles FAB, F'A'B', prouve l'égalité des angles ABF, A'B'F', et celle des rapports $\frac{F'B'}{FB}$, $\frac{A'B'}{AB}$. De même, la similitude des triangles HAB, H'A'B', entraîne l'égalité des angles HBA, H'B'A', et celle des rapports $\frac{H'B'}{HB}$, $\frac{A'B'}{AB}$. On a par suite

$$\frac{F'B'}{FB}=\frac{H'B'}{HB},$$

et

$$\text{angle FBH ou HBA}-\text{FBA}=\text{angle F'B'H' ou H'B'A'}-\text{F'B'A'}.$$

Donc les triangles FBH, F'B'H', sont semblables (208), et le rapport $\frac{FH}{F'H'}$ est égal à chacun des rapports égaux $\frac{F'B'}{FB}$, $\frac{A'B'}{AB}$, c'est-à-dire au rapport de similitude des deux polygones considérés.

THÉORÈME.

218. *Le rapport des périmètres de deux polygones semblables est égal à leur rapport de similitude.*

En effet, ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 153), étant deux polygones semblables, les rapports

$$\frac{AB}{A'B'},\quad \frac{BC}{B'C'},\quad \frac{CD}{C'D'},\quad \frac{DE}{D'E'},\quad \frac{EA}{E'A'}$$

sont tous égaux par définition (202) au rapport de similitude; donc, en vertu d'une propriété connue, la somme de leurs numérateurs et celle de leurs dénominateurs, c'est-à-dire les périmètres des polygones ABCDE, A'B'C'D'E', forment un rapport égal à chacun des précédents, c'est-à-dire au rapport de similitude.

SCOLIE.

219. La carte ou le *plan* d'un terrain est une figure semblable à celle du terrain; le rapport de similitude, c'est-à-dire le rapport constant d'une droite quelconque du plan à celle qui lui correspond sur le terrain, prend alors le nom d'*échelle* du plan. Si une longueur de 5 mètres est représentée sur le papier par une droite de 1 millimètre, on dit que le plan est construit au *cinq-millième*.

Pour connaître la vraie longueur d'une ligne AB d'un terrain dont on a le plan au cinq-millième, il suffit de mesurer sur le papier la droite correspondante A'B' à l'aide d'un double décimètre; puis la proportion

$$\frac{AB}{A'B'} = 5000$$

détermine AB.

De même, si le contour du terrain est un polygone, et que l'on ait trouvé pour la longueur du périmètre correspondant sur le papier $0^m,435$ par exemple, le contour du terrain sera égal (218) à

$$0^m,435 \times 5000 = 2175^m.$$

THÉORÈME.

220. ***Deux parallèles quelconques sont coupées en parties proportionnelles par une série de sécantes issues d'un même point.***

Soient AD, A'D', deux parallèles et une série de sécantes OAA', OBB', OCC', ODD', issues d'un point O placé, soit entre

Fig. 154.

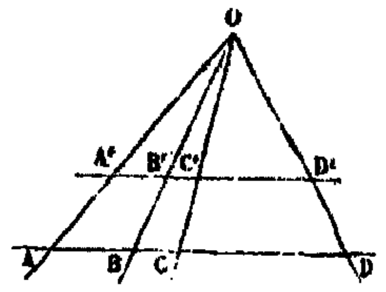
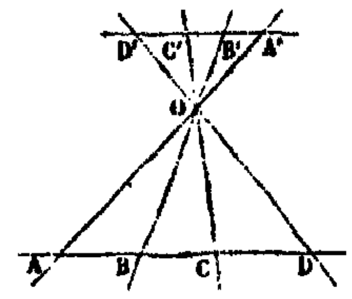


Fig. 155.



les deux parallèles (*fig.* 155), soit extérieurement (*fig.* 154); on a la suite de rapports égaux

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}. \tag{1}$$

En effet, les triangles semblables OAB, OA'B' (203), donnent

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB}.$$

De même, par les triangles semblables OBC, OB'C' (203), on a

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OC'}{OC}.$$

Enfin, les triangles semblables OCD, OC'D' (203), donnent à leur tour

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{C'D'}{CD}.$$

En supprimant les rapports communs, on a la série de rapports égaux (1) qu'il fallait démontrer.

SCOLIES.

221. On voit, par la démonstration même, que cette série de rapports est encore égale à la suite

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD}.$$

En d'autres termes, *le rapport de deux parties correspondantes quelconques des deux parallèles est le même que celui des distances du point* O *aux deux points où l'une quelconque des sécantes rencontre les deux parallèles.*

222. La réciproque du théorème précédent est vraie :

Lorsque plusieurs sécantes AA', BB', CC', DD', *coupent deux parallèles en parties proportionnelles, ces sécantes concourent en un même point* (*fig.* 154, 155).

Appelons $\frac{a}{b}$ le rapport de deux parties correspondantes quelconques des deux parallèles, de sorte qu'on ait

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \ldots = \frac{a}{b}.$$

1° Si les deux séries de points A, B, C, D, et A', B', C', D', présentent une disposition inverse l'une de l'autre (*fig.* 155), deux sécantes quelconques AA' et CC' se coupent en un point O intérieur aux deux parallèles; de plus, les triangles semblables OAC, OA'C', donnent

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{a}{b}.$$

Ainsi, l'une quelconque CC' des sécantes coupe la première d'entre elles AA', en un point O situé entre A et A' et tel que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{a}{b}.$$

Toutes les sécantes concourent donc en ce point O (192).

2° Si les deux séries de points A, B, C, D, et A', B', C', D', sont disposées de la même manière (*fig.* 154), on verra de même qu'une sécante quelconque CC' coupe la première AA' en un point O situé hors de AA' et tel que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{a}{b}.$$

Toutes les sécantes concourent donc aussi en ce point O (192).

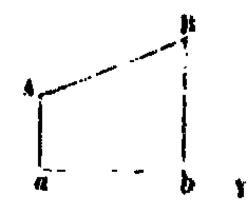
Dans le cas où le rapport $\frac{a}{b}$ est égal à l'unité, les parties correspondantes des deux parallèles sont égales entre elles, et les sécantes sont toutes parallèles. Le théorème énoncé subsiste donc dans tous les cas, à la condition de regarder deux *parallèles* comme *deux droites qui concourent à l'infini.*

§ III. — RELATIONS MÉTRIQUES ENTRE LES DIFFÉRENTES PARTIES D'UN TRIANGLE.

DÉFINITIONS.

223. On appelle *projection* d'un point A sur une droite indéfinie XY le pied *a* de la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette droite (*fig.* 156).

Fig. 156.

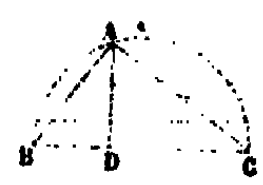


Si l'on considère une droite limitée AB, la projection de cette droite sur XY est l'intervalle *ab* qui sépare les projections de ses extrémités A et B.

THÉORÈME.

224. *Si du sommet* A *de l'angle droit d'un triangle rectangle* ABC, *on abaisse la perpendiculaire* AD *sur l'hypoténuse :* 1° *chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse et sa projection sur l'hypoténuse;* 2° *la perpendiculaire* AD *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* BD *et* CD *de l'hypoténuse* (*fig.* 157).

Fig. 157.



En effet :

1° Les triangles rectangles ABC et ABD, ayant l'angle aigu B commun, sont semblables (207); on a donc

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD} \quad \text{ou} \quad \overline{AB}^2=BC.BD.$$

Les triangles semblables ABC et ACD (207) donneraient d'une manière analogue

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{CD} \quad \text{ou} \quad \overline{AC}^2=BC.CD.$$

2° Les triangles ABD, ACD, sont semblables entre eux, puisque chacun d'eux est semblable au triangle proposé ABC; on a donc

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD} \quad \text{ou} \quad \overline{AD}^2=BD.CD.$$

COROLLAIRE.

225. En joignant un point quelconque A d'une circonférence aux extrémités B et C d'un diamètre (*fig.* 157), on forme un triangle rectangle (147). De là, une nouvelle manière d'énoncer la proposition précédente :

1° *Toute corde* AB *d'un cercle est moyenne proportionnelle entre le diamètre* BC *qui passe par l'une de ses extrémités et sa projection* BD *sur ce diamètre ;*

2° *La perpendiculaire* AD *abaissée d'un point quelconque* A *d'une circonférence sur un diamètre* BC *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* BD *et* CD *de ce diamètre.*

THÉORÈME.

226. *Les trois côtés d'un triangle rectangle étant évalués en nombres au moyen d'une unité commune, le carré du nombre qui mesure l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des nombres qui mesurent les deux côtés de l'angle droit ;* ou plus brièvement, *dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

En effet, en ajoutant les deux relations (224, 1°) :

$$\overline{AB}^2=BC.BD, \quad \overline{AC}^2=BC.CD,$$

on obtient

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=BC.(BD+CD) \quad \text{ou} \quad \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2.$$

COROLLAIRES.

227. Ce théorème permet de calculer l'un des côtés d'un triangle rectangle quand on connaît les deux autres.

Si l'on connaît les deux côtés b et c de l'angle droit, l'hypoténuse a résulte de la formule

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{d'où} \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Ainsi, soient $b = 3$, $c = 4$, on a $a = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

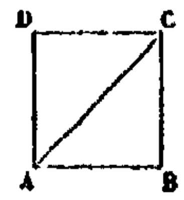
Si l'on connaît l'hypoténuse a et l'un des côtés b de l'angle droit, on trouve l'autre côté c par la formule

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \text{d'où} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ainsi, pour $a = 5$ et $b = 3$, on a $c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

Il résulte encore de la proposition précédente que *le rapport de la diagonale d'un carré au côté de ce carré est égal à* $\sqrt{2}$. La diagonale AC est en effet l'hypoténuse d'un triangle

Fig. 158.



rectangle et isocèle ABC (*fig.* 158), dans lequel on a

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2.\overline{AB}^2,$$

d'où

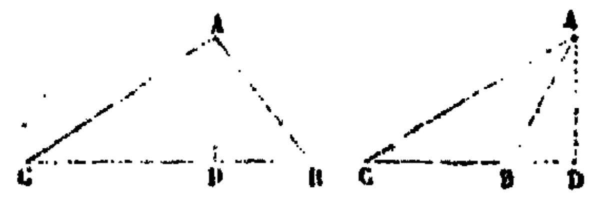
$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{AC}{AB} = \sqrt{2}.$$

Ainsi, la diagonale et le côté d'un carré sont deux droites *incommensurables* entre elles, puisque leur rapport est un nombre incommensurable. C'est ce que nous avons déjà démontré par la Géométrie pure (153).

THÉORÈME.

228. *Dans tout triangle, le carré d'un côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés,* *moins deux fois le produit de l'un de ces côtés par la projection du second sur le premier.*

Fig. 159. Fig. 160.



Soient ABC le triangle proposé, C un angle aigu et CD la projection du côté AC sur CB ; il s'agit de démontrer la relation

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC.CD.$$

Deux cas peuvent se présenter, suivant que la perpendiculaire AD tombe à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle ABC; le premier cas a lieu lorsque l'angle ABC est aigu, et le second lorsque l'angle ABC est obtus (46).

Dans le premier cas (*fig.* 159), le triangle rectangle ABD donne

$$(1) \qquad \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Or, puisque le point D est, par hypothèse, situé entre C et B, on a

$$BD = BC - CD,$$

et, par suite, d'après un théorème connu d'Arithmétique (*),

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC.CD.$$

En portant cette valeur de $\overline{BD}^2$ dans la relation (1), on trouve

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 - 2BC.CD;$$

et, comme le triangle rectangle ACD donne

$$\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2,$$

on a finalement

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC.CD.$$

(*) Le carré de la différence de deux nombres est égal au carré du premier nombre, plus le carré du second, moins le double produit de ces deux nombres.

Dans le second cas (*fig.* 160), la démonstration est la même. Il est vrai que, au lieu de

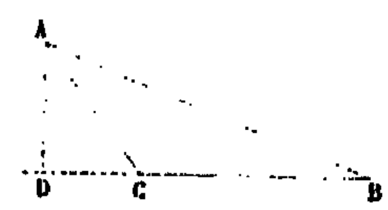
$$BD = BC - CD, \quad \text{on a} \quad BD = CD - BC;$$

mais comme, en vertu du théorème d'Arithmétique cité, le carré de BD n'est pas changé, et que c'est ce carré seul qui figure dans la démonstration, on voit que tout le raisonnement subsiste.

THÉORÈME.

229. *Si l'un des angles d'un triangle est obtus, le carré du côté opposé à cet angle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, plus deux fois le produit de l'un de ces côtés par la projection du second sur le premier* (*fig.* 161).

Fig. 161.



Soient ABC le triangle proposé, C l'angle obtus, et CD la projection de AC sur BC; il s'agit de démontrer la relation

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,BC.CD.$$

Le triangle rectangle ABD donne

$$(1) \qquad \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Or, puisque l'angle ACB est obtus, la perpendiculaire AD tombe hors du triangle (46), et le point D est extérieur à BC; on a donc

$$BD = BC + CD,$$

et, par suite, en vertu d'un théorème connu d'Arithmétique (*),

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\,BC.CD.$$

Et substituant cette valeur de $\overline{BD}^2$ dans la relation (1), on

(*) Le carré de la somme de deux nombres est égal au carré du premier, plus le carré du second, plus le double produit de ces deux nombres.

trouve

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + 2\,BC.CD;$$

et, comme le triangle rectangle ACD donne

$$\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2,$$

on a finalement

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,BC.CD.$$

COROLLAIRES.

230. Il résulte des trois théorèmes précédents que, ***dans un triangle, le carré d'un côté est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés des deux autres, suivant que l'angle opposé à ce côté est aigu, droit ou obtus;*** donc, réciproquement (**33**), ***un angle d'un triangle est aigu, droit ou obtus, suivant que le carré du côté opposé à cet angle est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés des deux autres côtés.***

Par exemple, si $a = 5$, $b = 5$, $c = 3$, l'angle A est droit et le triangle est rectangle, puisque $25 = 16 + 9$. De même, si $a = 11$, $b = 9$, $c = 8$, l'angle A est aigu, puisque 11^2 ou 121 est moindre que $9^2 + 8^2$, c'est-à-dire que $81 + 64 = 145$.

231. Comme application des théorèmes qui précèdent, nous allons calculer les hauteurs d'un triangle en fonction des côtés. Nous désignerons par ABC le triangle considéré, et par a, b, c, les longueurs des côtés respectivement opposés aux angles A, B, C.

Cherchons la hauteur $AD = h$ issue du sommet A. Des deux angles B et C, l'un au moins est aigu: supposons que ce soit l'angle C (*fig.* 160).

On a d'abord, dans le triangle rectangle ADC (**227**),

$$h^2 = b^2 - \overline{CD}^2;$$

puis, dans le triangle ABC (**228**),

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a.CD.$$

On déduit de là

$$CD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

et la première relation devient

$$h^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2};$$

ou, en vertu d'un théorème d'Arithmétique (*),

$$h^2 = \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2}$$

$$= \frac{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}.$$

Or, si l'on désigne par p le demi-périmètre du triangle ABC, c'est-à-dire si l'on pose

$$a + b + c = 2p,$$

on a

$$b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a),$$
$$a + c - b = 2p - 2b = 2(p - b),$$
$$a + b - c = 2p - 2c = 2(p - c).$$

En portant ces valeurs dans l'expression de h^2, simplifiant et extrayant la racine carrée, on obtient

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Exemple. Pour les hauteurs h, h', h'', du triangle dont les côtés sont 13, 9 et 6, on trouve

$$h = 3,641, \quad h' = 5,259, \quad h'' = 7,886.$$

THÉORÈME.

232. *La somme des carrés de deux côtés d'un triangle est égale au carré de la médiane relative au troisième côté, plus deux fois le carré de la moitié de ce troisième côté* (*fig.* 162).

Fig. 162.

Soient ABC le triangle proposé, AD la médiane relative au côté BC, c'est-à-dire la droite qui unit le sommet A au milieu de BC, et AE la perpendiculaire abaissée du point A sur BC.

(*) La différence des carrés de deux nombres est égale au produit de la somme de ces deux nombres par leur différence.

L'angle ADB étant aigu, on a dans le triangle ADB

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD.DE.$$

L'angle ADC étant obtus, on a dans le triangle ACD

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2CD.DE.$$

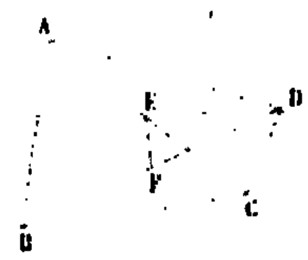
En ajoutant ces deux égalités et en observant que CD = BD, on trouve

$$(1) \qquad \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2.$$

COROLLAIRES.

233. Considérons un quadrilatère ABCD (*fig.* 163), et soient E et F les

Fig. 163.



milieux des deux diagonales AC et BD. En appliquant le théorème qui précède successivement aux triangles ABC et ADC, on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2,$$
$$\overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 2\overline{AE}^2 + \overline{DE}^2;$$

d'où, en ajoutant et en désignant par S la somme des carrés des quatre côtés du quadrilatère,

$$S = 4\overline{AE}^2 + 2(\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2).$$

Or, dans le triangle BED, on a

$$\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2 = 2\overline{BF}^2 + 2\overline{EF}^2.$$

Donc, enfin,

$$S = 4\overline{AE}^2 + 4\overline{BF}^2 + 4\overline{EF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{EF}^2.$$

Ainsi, *dans tout quadrilatère, la somme des carrés des quatre côtés est égale à la somme des carrés des deux diagonales, plus quatre fois le carré de la droite qui unit les milieux de ces diagonales.*

Pour que le quadrilatère soit un parallélogramme, il faut et il suffit que les points E et F coïncident (90, 4°). Donc, *dans tout parallélo-*

gramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, et réciproquement, *si la somme des carrés des côtés d'un quadrilatère est égale à la somme des carrés des deux diagonales, ce quadrilatère est un parallélogramme.*

234. Revenons au triangle ABC (*fig.* 162). Si, les points B et C restant fixes, le sommet A se déplace de manière que la somme des carrés des côtés AB et AC reste constante, la relation (1) du n° **232** montre que la valeur de la médiane AD restera constante. Donc, *le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est constante, est une circonférence ayant pour centre le milieu de la droite qui unit les deux points fixes.* D'ailleurs, pour trouver le rayon AD de ce cercle, il suffit de remplacer dans la relation (1) la somme $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ par la constante donnée K^2; on a ainsi successivement

$$K^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2, \quad \overline{AD}^2 = \frac{K^2}{2} - \overline{BD}^2, \quad AD = \sqrt{\frac{K^2}{2} - \overline{BD}^2}.$$

On voit que le lieu n'existe qu'autant que la condition

$$\frac{K^2}{2} > \overline{BD}^2 \quad \text{ou} \quad K > BD\sqrt{2}$$

est satisfaite.

235. Enfin, comme dernière application du théorème précédent, nous calculerons les médianes d'un triangle en fonction des côtés.

m étant la médiane relative au côté $BC = a$, on a, par la relation (1),

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}.$$

Exemple. Pour les médianes m, m', m'', du triangle dont les côtés sont 13, 9 et 6, on obtient

$$m = 4{,}031, \quad m' = 9{,}069, \quad m'' = 10{,}770.$$

THÉORÈME.

236. ***La différence des carrés de deux côtés d'un triangle est égale au double produit du troisième côté par la projection sur ce côté de la médiane correspondante.***

Soit ABC le triangle proposé (*fig.* 162); reprenons les deux égalités

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD.DE,$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2.CD.DE,$$

considérées au n° 232, et retranchons la première de la seconde, en observant que $BD = CD$; il viendra

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 4\,BD.DE \quad \text{ou} \quad \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 2\,BC.DE.$$

COROLLAIRE.

237. Si, les points B et C restant fixes, le sommet A se déplace de façon que la différence $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$ reste constante, la relation précédente prouve que la projection DE de la médiane ne change pas, c'est-à-dire que la projection E du sommet mobile A sur la droite BC reste fixe. Donc, *le lieu des points A, dont la différence* $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$ *des carrés des distances à deux points fixes C et B est constante, est une droite perpendiculaire à la droite BC qui unit les deux points fixes.* D'ailleurs, pour avoir la valeur de DE, il suffit de remplacer dans la relation qui précède la différence $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$ par la constante donnée K^2; on a ainsi successivement

$$K^2 = 2BC.DE, \quad DE = \frac{K^2}{2BC}.$$

THÉORÈME

238. *Dans tout quadrilatère inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés, et réciproquement.*

Fig. 164.

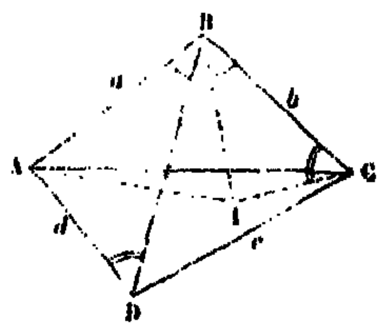
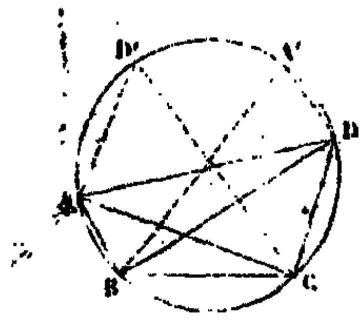


Fig. 165.



Soit ABCD un quadrilatère quelconque (*fig.* 164); faites l'angle CBI égal à l'angle ABD, l'angle BCI égal à l'angle ADB, et menez AI.

Les deux triangles BCI, ABD, ayant deux angles égaux chacun à chacun, sont semblables; on a donc

$$(1) \qquad \frac{AB}{BI} = \frac{BD}{BC}, \quad \text{et} \quad \frac{AD}{IC} = \frac{BD}{BC} \quad \text{ou} \quad AD.BC = BD.IC.$$

La première proportion et l'égalité évidente des angles ABI, DBC, prouvent que les triangles ABI, DBC, sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; on a donc

$$(2)\qquad \frac{AB}{BD} = \frac{AI}{DC} \quad \text{ou} \quad AB.DC = BD.AI;$$

et, en ajoutant les égalités (1) et (2),

$$AB.DC + AD.BC = BD(AI + IC).$$

Comme AC est moindre que AI + IC, on voit qu'en général dans un quadrilatère le produit des diagonales est *moindre* que la somme des produits des côtés opposés. Pour qu'il y ait *égalité* entre les deux produits, il faut que AC = AI + IC, c'est-à-dire que l'angle BCI, égal à l'angle BDA, soit égal à l'angle BCA, en d'autres termes, que la circonférence déterminée par les points A, B, C, passe par le point D.

Corollaire.

239. Soit ABCD (*fig.* 165) un quadrilatère inscrit; en prenant l'arc AD' égal à l'arc CD, et l'arc DA' égal à l'arc AB, on forme deux nouveaux quadrilatères inscrits CBAD', BCDA', qui donnent, en vertu du théorème précédent,

$$AC.BD' = AB.CD' + CB.AD', \quad BD.CA' = DC.BA' + BC.DA'.$$

En divisant membre à membre, et observant que

$$BD' = CA', \quad CD' = BA' = AD, \quad AD' = CD, \quad DA' = AB,$$

puisque à des arcs égaux correspondent des cordes égales, on trouve

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB.AD + CB.CD}{DC.DA + BC.BA}.$$

Donc, *dans tout quadrilatère inscriptible, le rapport des diagonales est égal au rapport de la somme des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la première diagonale à la somme des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la seconde.* La réciproque est vraie.

Scolie.

240. Ce théorème permet de calculer les diagonales $AC = x$, $BD = y$, d'un quadrilatère inscrit en fonction des côtés $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. En effet, on a, par les deux théorèmes précédents,

$$xy = ac + bd, \quad \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

d'où, en multipliant et divisant ces deux égalités membre à membre,

$$x^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

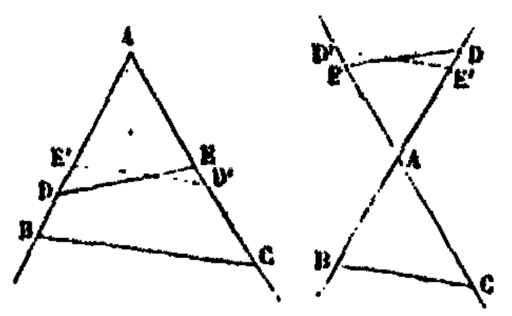
§ IV. — LIGNES PROPORTIONNELLES DANS LE CERCLE.

DÉFINITIONS.

241. On dit que deux droites, tracées entre les côtés d'un angle ou de son opposé par le sommet, sont *anti-parallèles*, lorsque la première fait avec l'un des côtés un angle égal à celui que la seconde fait avec l'autre côté.

Ainsi, les deux droites DE et BC (*fig.* 166) sont anti-paral-

Fig. 166.



lèles par rapport à l'angle BAC, si l'angle ADE est égal à l'angle ACB. Alors l'angle AED, que la première droite forme avec le second côté AC, est égal à l'angle ABC que la seconde droite fait avec le premier côté AB (79).

THÉORÈME.

242. *Lorsque les deux côtés d'un angle sont coupés par deux droites anti-parallèles, le produit des distances du sommet aux deux points où chacun des côtés est rencontré par les deux transversales est constant* (*fig.* 166).

Ainsi, BAC étant l'angle proposé et les deux droites BC et DE étant anti-parallèles, on a la relation

$$AB.AD = AC.AE.$$

En effet, prenons $AD' = AD$ et $AE' = AE$, et menons D'E'. L'égalité des triangles ADE, AD'E', qui ont un angle commun compris entre deux côtés égaux, entraîne celle des angles ADE, A'D'E'. D'ailleurs, les angles ADE, ACB, sont égaux par hypothèse (241); donc les angles correspondants AD'E', ACB, sont égaux, et les droites BC, D'E', sont parallèles (68); on a donc (195) la proportion

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AD'},$$

qui, lorsqu'on remplace les quantités AE′ et AD′ par les quantités égales AE et AD, devient

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} \quad \text{ou} \quad AB.AD = AC.AE.$$

243. Réciproquement, *si deux droites* DE *et* BC, *tracées entre les côtés d'un angle* BAC, *sont telles, que le produit des distances du sommet aux deux points où elles coupent chacun des côtés soit constant*, c'est-à-dire sont telles qu'on ait

$$(1) \qquad AB.AD = AC.AE \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD},$$

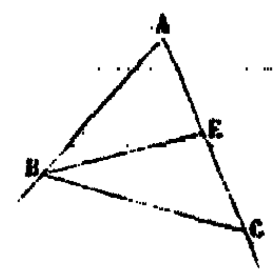
ces droites sont anti-parallèles par rapport à cet angle.

En effet, concevons la droite qui, menée par le point E, serait anti-parallèle à BC par rapport à l'angle BAC; cette droite couperait le côté AB en un point (242) dont la distance au sommet A serait une quatrième proportionnelle à AB, AE, AC. Or, la distance AD est précisément, en vertu de l'égalité (1), cette quatrième proportionnelle; donc la droite DE est anti-parallèle à BC.

Corollaire.

244. Si les deux points D et B se confondaient (*fig.* 167), on aurait $\overline{AB}^2 = AC.AE$.

Fig. 167.



Donc, *lorsque deux droites anti-parallèles par rapport à un angle se coupent sur l'un des côtés de cet angle, la distance du sommet à ce point est moyenne proportionnelle entre les dis-*

tances du sommet aux points où le second côté de l'angle coupe les deux anti-parallèles.

Réciproquement, *si par un point* B, *pris sur l'un des côtés d'un angle* BAC, *on mène dans l'intérieur de l'angle deux droites* BC, BE, *telles que* $\overline{AB}^2 = AC.AE$, *ces deux droites sont anti-parallèles par rapport à cet angle.*

THÉORÈME.

245. *Si, d'un point pris dans le plan d'un cercle, on mène des sécantes, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant, quelle que soit la direction de la sécante.*

Fig. 168.

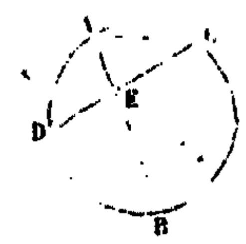
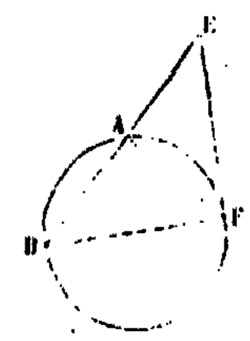


Fig. 169.

Fig. 170.



Ainsi, soient EA, ED, deux sécantes issues du point fixe E: il s'agit de démontrer qu'on a

$$EA.EB = EC.ED.$$

La figure peut se présenter de deux manières, suivant que le point E est intérieur (*fig.* 168) ou extérieur au cercle (*fig.* 169); mais la démonstration est la même dans les deux cas.

Menons les cordes AC et BD; les angles ACD, ABD, étant inscrits dans le même segment, sont égaux, et par suite les cordes AC, BD, sont anti-parallèles par rapport à l'angle AED. On a donc (242) la relation

$$EA.EB = EC.ED.$$

246. Réciproquement, *lorsque deux droites* AB *et* CD, *prolongées, s'il le faut, concourent en un point* E *tel qu'on ait la relation*

$$EA.EB = EC.ED,$$

les extrémités A, B, C, D, *sont situées sur une même circonférence.*

En effet, d'après le nº 243, la relation donnée prouve que les deux droites AC et BD sont anti-parallèles par rapport à l'angle AED; par suite, les angles ACD, DBA, sont égaux, et si sur la droite AD on décrit un segment capable de l'angle ACD, la circonférence qui passe par les trois points A, C, D, renfermera le point B.

COROLLAIRE.

247. Reprenons le cas où le point E est extérieur (*fig.* 169), et supposons que la sécante EDC tourne autour du point E jusqu'à ce qu'elle coïncide avec la tangente EF; la sécante entière EC et sa partie extérieure ED deviendront l'une et l'autre égales à la longueur EF de la tangente, et la relation

$$EA.EB = EC.ED$$

prise à la limite, sera la suivante

$$EA.EB = \overline{EF}^2.$$

Donc, *si, par un point extérieur à un cercle, on mène une sécante et une tangente, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

On peut d'ailleurs appliquer directement à ce cas particulier la démonstration du cas général : les angles EBF, AFE (*fig.* 170), l'un inscrit, l'autre formé par une tangente et une corde, ont l'un et l'autre pour mesure la moitié de l'arc AF; l'égalité de ces angles prouve l'anti-parallélisme des droites AF et BF par rapport à l'angle E, et par suite (244) entraîne la relation

$$\overline{EF}^2 = EA.EB.$$

248. RÉCIPROQUEMENT, *si trois points* A, B, F, *situés, les deux premiers* A *et* B *sur un côté de l'angle* E, *et le troisième* F *sur l'autre côté, sont tels qu'on ait la relation*

$$\overline{EF}^2 = EA.EB,$$

la circonférence qui passe par ces trois points est tangente en F *au côté* EF.

En effet, d'après le n° 244, la relation donnée prouve l'antiparallélisme des droites AF et BF par rapport à l'angle E; les angles AFE, EBF, sont donc égaux; par suite, si l'on décrit une circonférence passant par A et F et tangente en F à la droite EF, cette circonférence, d'après la construction connue du segment capable (179), passera par le point B.

THÉORÈME.

249. *Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au carré de la bissectrice de leur angle, augmenté du produit des deux segments que cette bissectrice détermine sur le troisième côté.*

En effet, soient (*fig.* 171) ABC le triangle proposé, ACEBE' le cercle

Fig. 171.

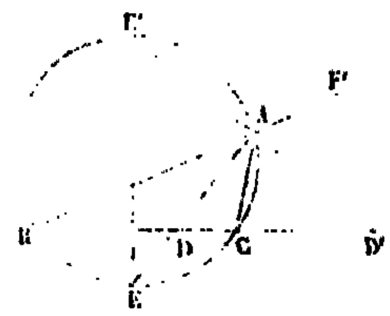
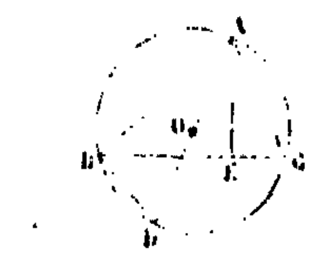


Fig. 172.



circonscrit, et AD la bissectrice de l'angle BAC qui passe évidemment par le milieu E de l'arc BC; les triangles ABE, ADC, ont deux angles égaux chacun à chacun, savoir : l'angle BAE égal à l'angle DAC, puisque la droite AE est, par hypothèse, bissectrice de l'angle BAC, et les angles BEA, DCA, égaux entre eux comme inscrits dans le même segment BECA. Ces triangles sont donc semblables, et l'on a

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$$

ou (245)

$$AB.AC = AE.AD = (AD + DE)\,AD = \overline{AD}^2 + DA.DE = \overline{AD}^2 + DB.DC.$$

250. En considérant la bissectrice AD' de l'angle extérieur CAF', qui passe évidemment par le milieu E' de l'arc BAC, on déduirait de la similitude des triangles ACD', ABE', la relation

$$AB.AC = AE'.AD',$$

qu'on transformerait ensuite dans la suivante :

$$AB.AC = D'B.D'C - \overline{AD'}^2.$$

Donc, *le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit des* *deux segments soustractifs que la bissectrice de l'angle extérieur détermine sur le troisième côté, diminué du carré de cette bissectrice.*

231. Ces théorèmes permettent de calculer les longueurs des bissectrices en fonction des côtés du triangle.

S'agit-il, par exemple, de la bissectrice $AD = z$, il suffit de remplacer dans la relation

$$bc = z^2 + DB.DC,$$

les segments DB et DC par leurs valeurs que l'on déduit (197) des équations

$$\frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{DB + DC}{b+c} = \frac{a}{b+c}.$$

On trouve ainsi, réductions faites, et en désignant par p le demi-périmètre du triangle,

$$z = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Un calcul analogue donnerait pour la bissectrice $AD' = z'$ de l'angle extérieur

$$z' = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}.$$

Scolie.

232. Voici une autre expression souvent utile du produit des deux côtés d'un triangle :

Le produit de deux côtés AB, AC, d'un triangle est égal au produit du diamètre AD du cercle circonscrit par la hauteur AE relative au troisième côté (*fig.* 172).

La relation à démontrer

$$AB.AC = AD.AE \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$$

résulte immédiatement de la similitude des deux triangles rectangles ABD, AEC dont les angles aigus D et C sont égaux comme inscrits dans le même segment.

Ce théorème permet de calculer, en fonction des côtés du triangle, le rayon R du cercle circonscrit; il suffit pour cela de remplacer dans l'égalité

$$bc = 2R.AE,$$

la hauteur AE par sa valeur donnée au n° 231 ; on trouve alors

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Pour $a = 13$, $b = 9$, $c = 6$, on a $R = 7,416$.

§ V. — PROBLÈMES RELATIFS AUX LIGNES PROPORTIONNELLES.

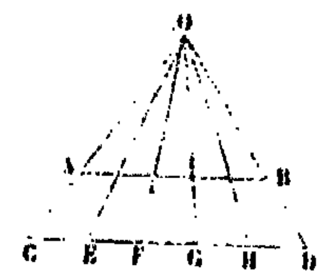
PROBLÈME.

253. *Diviser une droite A en parties proportionnelles à des droites données M, N, P, ou en un certain nombre de parties égales.*

Après avoir tracé un angle CBD de grandeur convenable (*fig.* 173), prenez sur le côté BC une longueur BE égale à A,

Fig. 173.

Fig. 174.



et sur le côté BD des longueurs BF, FG, GH, respectivement égales à M, N, P. Tirez HE, et menez FL, GK, parallèles à HE. La droite BE ou A sera ainsi divisée aux points L et K en parties proportionnelles à M, N, P. On a en effet (194)

$$\frac{BL}{BF}=\frac{LK}{FG}=\frac{KE}{GH} \quad \text{ou} \quad \frac{BL}{M}=\frac{LK}{N}=\frac{KE}{P}.$$

254. Si l'on devait partager A proportionnellement à des nombres donnés m, n, p, on représenterait ces nombres par des droites M, N, P, en adoptant une certaine longueur comme unité, et l'on retomberait sur la question précédente.

255. Enfin, le procédé graphique que nous venons d'indiquer permet aussi de diviser une droite A en parties égales; il suffit évidemment de supposer M, N, P, quelconques, mais égales entre elles; ce qui revient à porter sur BD des longueurs BF, FG, GH, égales entre elles, et à mener par F et G des parallèles à HE.

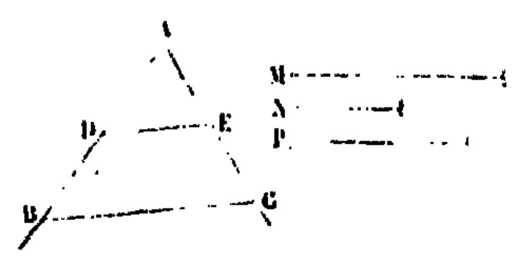
256. Lorsqu'on a plusieurs droites à diviser en un même nombre de parties égales, on préfère employer le tracé suivant :

5 étant, par exemple, le nombre des parties égales, tirez une droite indéfinie CD (*fig.* 174) sur laquelle vous porterez cinq fois une même ouverture de compas CE = EF = FG = GH = HD. Des extrémités C et D comme centres, avec CD pour rayon, décrivez successivement deux arcs de cercle qui se couperont en un point O, et menez OC, OE, OF, OG, OH, OD. Cela étant, prenez OA et OB égales à l'une des droites que vous voulez diviser et tirez AB; cette droite AB sera égale à la droite proposée, puisque le triangle OCD étant équilatéral, le triangle OAB qui lui est semblable doit l'être aussi, et de plus AB sera divisée (220), par les sécantes issues du point O, en cinq parties proportionnelles aux parties de CD, c'est-à-dire égales entre elles.

PROBLÈME.

257. *Trouver la quatrième proportionnelle à trois droites données* M, N, P.

Fig. 175.



Après avoir tracé un angle BAC de grandeur convenable, prenez sur le côté AB des longueurs AB et AD respectivement égales à M et à N, et sur le côté AC une longueur AC égale à P; tirez BC et menez DE parallèle à BC; AE sera la quatrième proportionnelle cherchée. On a, en effet (195),

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{ou} \quad \frac{M}{N} = \frac{P}{AE}.$$

SCOLIES.

258. Si les droites N et P étaient égales, AE serait la troisième proportionnelle à M et à N.

259. Si l'on avait à construire une droite x liée à plusieurs longueurs données a, b, c, d, a', b', c', par une expression de la forme

$$x = \frac{abcd}{a'b'c'},$$

dans laquelle le numérateur contient un facteur de plus que le dénominateur; on poserait successivement

$$\frac{ab}{a'} = \alpha, \quad \frac{\alpha c}{b'} = \beta,$$

d'où l'on déduirait

$$x = \frac{\beta d}{c'}.$$

Alors, on construirait d'abord la droite auxiliaire α qui est la quatrième proportionnelle à a', a, b; puis la droite β, qui est la quatrième proportionnelle à b', α, c; et enfin x, qui est la quatrième proportionnelle à c', β, d.

PROBLÈME.

260. *Construire la moyenne proportionnelle entre deux droites données* A *et* B.

1° Prenez, à la suite l'une de l'autre (*fig.* 176), sur une

Fig. 176.

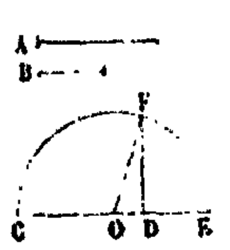
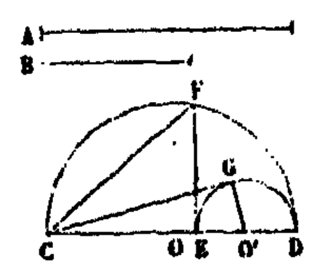


Fig. 177.



droite indéfinie, deux longueurs CD et DE respectivement égales à A et à B. Sur CE comme diamètre, décrivez une circonférence, et par le point D élevez DF perpendiculaire à CE. La droite DF sera (**225**) la moyenne proportionnelle entre CD et DE, c'est-à-dire entre A et B.

2° Lorsque les droites données A et B sont un peu grandes, on préfère le procédé suivant : prenez sur une droite indéfinie (*fig.* 177), et à partir du même point C, deux longueurs CD et CE respectivement égales à A et à B; sur CD, comme diamètre, décrivez une circonférence, et élevez EF perpendiculaire à CD; enfin tirez FC. La corde FC sera (**225**) la moyenne proportionnelle entre CD et CE, c'est-à-dire entre A et B.

3° On pourrait aussi, après avoir pris CD et CE égales à A et à B (*fig.* 177), décrire une circonférence quelconque passant par E et D, par exemple la circonférence dont ED est le diamètre, puis mener la tangente CG à cette circonférence. Cette tangente (247) serait la moyenne proportionnelle entre CD et CE, c'est-à-dire entre A et B. Toutefois, au point de vue graphique, ce procédé est inférieur au précédent, et il convient de ne l'employer que lorsqu'on veut relier la construction à une autre figure qui contient déjà plusieurs des lignes dont ce procédé exige le tracé.

Scolies.

261. La moyenne proportionnelle entre deux longueurs prend souvent le nom de *moyenne géométrique*, tandis qu'on appelle *moyenne arithmétique* de ces deux longueurs leur demi-somme.

Les trois côtés du triangle rectangle CGO′ (*fig.* 177) représentent respectivement: CG la moyenne géométrique des deux droites A et B, CO′ leur moyenne arithmétique et GO′ leur demi-différence. Comme le côté CG est moindre que l'hypoténuse CO′, on voit que *la moyenne géométrique est moindre que la moyenne arithmétique*. Appelons δ leur différence; le triangle O′CG donne

$$\overline{O'G}^2 = \overline{CO'}^2 - \overline{CG}^2 = (CO' + CG)(CO' - CG);$$

or, les moyennes CO′ et CG sont toutes deux supérieures à la plus petite B des deux lignes proposées; on a donc

$$\left(\frac{A-B}{2}\right)^2 > 2B.\delta, \quad \text{d'où} \quad \delta < \frac{(A-B)^2}{8B}.$$

Ainsi, *la différence entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de deux longueurs* A *et* B *est moindre que le carré de la différence de ces longueurs, divisé par huit fois la plus petite.*

262. Voici une propriété des moyennes arithmétiques qui nous sera utile plus tard.

Après avoir porté sur une droite (*fig.* 178), à partir d'un

Fig. 178.

point O, deux longueurs OA = a et OB = b, prenez le milieu C de AB, puis le milieu D de BC, puis le milieu E de CD, puis le milieu F de DE, et ainsi de suite indéfiniment. Les points C, D, E, F, ..., s'approcheront de plus en plus du point I, qui est au tiers de AB, à partir de B; en d'autres termes, *si l'on considère une suite de longueurs* OA, OB, OC, OD, OE, OF, ..., *telles, que chacune soit la moyenne arithmétique des deux qui précèdent, ces longueurs tendent vers la limite*

$$OI = OA + \frac{2AB}{3} = a + 2 . \frac{b-a}{3}.$$

En effet, le point I étant au tiers de AB à partir du point B, on a

$$OA = OI - 2BI, \quad OB = OI + BI;$$

puis successivement, en prenant chaque fois la demi-somme des deux droites qui précèdent,

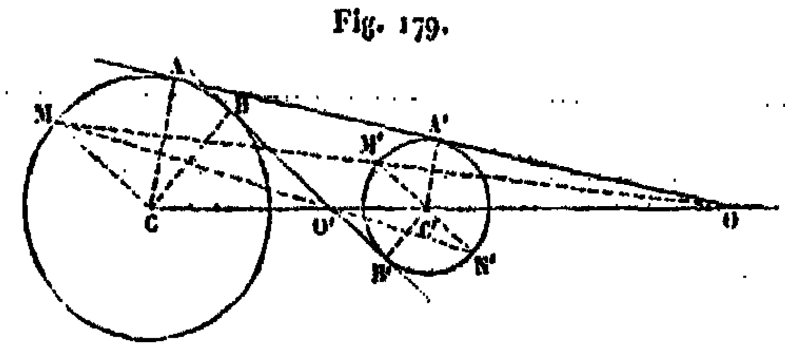
$$OC = OI - \frac{BI}{2}, \quad OD = OI + \frac{BI}{4}, \quad OE = OI - \frac{BI}{8},$$
$$OF = OI + \frac{BI}{16}, \ldots$$

La différence entre les moyennes arithmétiques obtenues et OI est donc une fraction dont le numérateur BI est fixe et dont le dénominateur, égal aux puissances successives de 2, croît indéfiniment. Cette différence tend donc vers zéro, et par suite les moyennes ont OI pour limite.

PROBLÈME.

263. *Mener une tangente commune à deux cercles* (*fig.* 179).

Fig. 179.



Soient les deux cercles C et C' de rayons R et R'. AA' étant une tangente commune extérieure, qui coupe la ligne des centres en O, au delà de CC', les rayons CA, C'A', sont parallèles et de même sens, et l'on a

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{R}{R'}.$$

Or, toute droite MM' qui unit les extrémités de deux rayons parallèles et de même sens CM et C'M', coupe également la ligne des centres en un point O_1 situé au delà de CC', et tel que

$$\frac{O_1C}{O_1C'} = \frac{CM}{C'M'} = \frac{R}{R'}.$$

Les deux points O et O_1 se confondent donc (192).

De même, BB' étant une tangente commune intérieure qui coupe la ligne des centres en O' entre C et C', les rayons CB, C'B', sont parallèles et de sens contraires, et l'on a

$$\frac{O'C}{O'C'} = \frac{CB}{C'B'} = \frac{R}{R'}.$$

Or toute droite MN' qui unit les extrémités de deux rayons parallèles et de sens contraires CM, C'N', coupe également la ligne des centres en un point O'_1 situé entre C et C', et tel que

$$\frac{O'_1C}{O'_1C'} = \frac{CM}{C'N'} = \frac{R}{R'}.$$

Les deux points O' et O'_1 se confondent donc (192).

De là résulte la construction suivante : Menez dans le premier cercle un rayon quelconque CM, et dans le second le diamètre M'N' parallèle à CM ; tirez MM' et MN', et des points O et O', où ces droites coupent la ligne des centres, menez des tangentes à l'un des cercles ; elles toucheront également l'autre cercle.

Scolie.

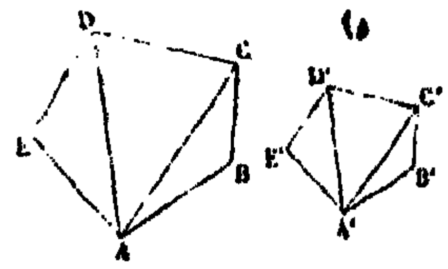
264. La construction qui précède donne un nouveau moyen de trouver les deux points *conjugués* O et O' qui divisent une droite donnée CC' dans un rapport donné $\frac{R}{R'}$ (192).

PROBLÈME.

265. *Construire sur une droite donnée : 1° un triangle sem-*

blable à un triangle donné; 2° un polygone semblable à un polygone donné (fig. 180).

Fig. 180.



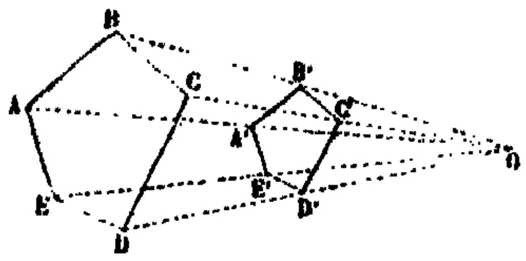
1° Pour construire, sur la droite A'B' considérée comme l'homologue de AB, un triangle semblable au triangle ABC, faites un angle B'A'C' égal à l'angle BAC et un angle A'B'C' égal à l'angle ABC. Le triangle A'B'C' ainsi obtenu et le triangle donné ABC seront semblables comme ayant deux angles égaux chacun à chacun (205).

2° Pour construire, sur la droite A'B' considérée comme l'homologue de AB, un polygone semblable au polygone ABCDE, décomposez ce dernier polygone en triangles en menant par l'un des sommets A les diagonales AC, AD. Construisez alors sur A'B' un triangle A'B'C' semblable au triangle ABC, puis sur A'C' un triangle A'C'D' semblable au triangle ACD, enfin sur A'D' un triangle A'D'E' semblable au triangle ADE. Le polygone A'B'C'D'E' ainsi obtenu et le polygone donné ABCDE seront semblables comme composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés.

266. Si, au lieu de donner un côté A'B' du polygone demandé, on donnait le rapport de similitude $\frac{m}{n}$, on pourrait encore appliquer la solution précédente, en construisant préalablement une droite A'B' dont le rapport à AB fût égal à $\frac{m}{n}$ (257). Dans ce cas, on préfère souvent opérer de la manière suivante :

On joint (*fig.* 181) les divers sommets du polygone donné ABCDE à un point O pris arbitrairement dans le plan de ce polygone; on prend sur OA une longueur OA' dont le rapport à OA soit égal à $\frac{m}{n}$; puis on mène dans l'angle AOB la parallèle A'B' à AB, dans l'angle BOC la parallèle B'C' à BC,..., et ainsi de suite. Les polygones A′B′C′D′E′, ABCDE, sont semblables, car (216) les triangles additifs OB′A′, OA′E′, OE′D′,

Fig. 181.

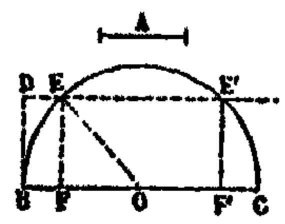


et les triangles soustractifs OB′C′, OC′D′, dont la réunion constitue le polygone A′B′C′D′E′, sont respectivement semblables aux triangles OBA, OAE, OED, et aux triangles OBC, OCD, qui forment par leur assemblage le polygone ABCDE.

PROBLÈME.

267. *Construire deux droites, connaissant leur somme et leur produit* (*fig.* 182).

Fig. 182.



Soient BC la somme donnée et A une droite dont le carré est égal au produit donné. Supposons le problème résolu, et soient BF et FC les deux droites demandées; si sur BC comme diamètre on décrit un demi-cercle, la perpendiculaire FE sera moyenne proportionnelle entre BF et FC (225), et par suite égale à A; la parallèle menée par E à BC interceptera donc une longueur BD égale à A sur la tangente en B. De cette analyse résulte la construction suivante:

Sur BC comme diamètre, décrivez un demi-cercle; au point B, élevez BD perpendiculaire sur BC et égale à A, menez DEE′ parallèle à BC, et projetez en F et en F′ sur BC les points E et E′ où cette parallèle rencontre le cercle. Les deux droites cherchées seront BF et FC, ou, ce qui revient au même, BF′ et F′C.

Ainsi, le problème, quand il est possible, n'a qu'une solution. Pour qu'il soit possible, il faut et il suffit que la parallèle DEE' rencontre la demi-circonférence, c'est-à-dire que la droite BD ou A ne surpasse pas le rayon OE ou la moitié de BC. Lorsque la quantité A atteint sa valeur maximum $\frac{1}{2}$ BC, la parallèle DEE' est tangente au demi-cercle, et les deux segments de BC sont OB et OC. On voit par là que *le produit de deux droites dont la somme est constante est maximum lorsque ces droites sont égales entre elles.*

Scolies.

268. En représentant par m et n^2 la somme et le produit donnés, on a

$$EO = BO = CO = \frac{m}{2}, \quad FE = BD = n,$$

$$OF = \sqrt{\overline{EO}^2 - \overline{EF}^2} = \sqrt{\frac{m^2}{4} - n^2},$$

et par suite,

$$BF = BO - OF = \frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - n^2},$$

$$CF = CO + OF = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n^2}.$$

269. Ce problème permet de construire les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - mx + n^2 = 0.$$

En mettant cette équation sous la forme

$$n^2 = x(m - x),$$

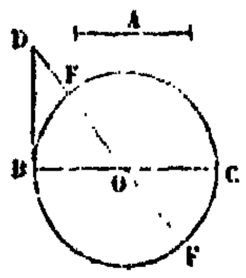
on voit, en effet, que construire ses racines, c'est construire deux droites dont la somme est m et le produit n^2.

PROBLÈME.

270. *Construire deux droites, connaissant leur différence et leur produit* (*fig.* 183).

Soient EF la différence donnée, et A la droite dont le carré est égal au produit donné. Supposons le problème résolu, et soient DE et DF les deux droites demandées. La tangente DB, menée du point D au cercle décrit sur EF comme diamètre, sera moyenne proportionnelle entre DE et DF (247), et par

Fig. 183.



suite égale à A. Et comme cette tangente est perpendiculaire sur le diamètre BC qui est égal à la différence donnée EF, on est conduit à la construction suivante.

Sur les côtés d'un angle droit, prenez une longueur BD égale à A et une longueur BO égale à la moitié de la différence donnée; du point O comme centre avec OB pour rayon, décrivez un cercle; puis menez DO qui coupe la circonférence aux points E et F; DE et DF seront les droites demandées.

Le problème est toujours possible et n'a qu'une solution.

Scolie.

271. En représentant par m et n^2 la différence et le produit donnés, on a

$$OE = OF = OB = \frac{m}{2},\ BD = n,\ OD = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{\frac{m^2}{4} + n^2},$$

et par suite,

$$DE = OD - OE = \sqrt{\frac{m^2}{4} + n^2} - \frac{m}{2},$$

$$DF = OD + OF = \sqrt{\frac{m^2}{4} + n^2} + \frac{m}{2}.$$

272. Ce problème permet de construire les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - mx - n^2 = 0.$$

En mettant cette équation sous la forme

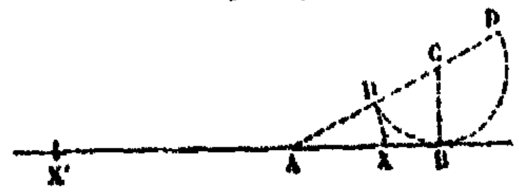
$$n^2 = x(x - m),$$

on voit, en effet, que construire ses racines, c'est construire deux droites dont la différence est m et le produit n^2.

PROBLÈME.

273. *Diviser une droite en moyenne et extrême raison* (*fig.* 184).

Fig. 184.



On dit qu'un point divise une droite AB ***en moyenne et extrême raison***, lorsque sa distance à l'une des extrémités A de cette droite est moyenne proportionnelle entre sa distance à l'autre extrémité B et la droite AB.

On voit à priori :

1° Que, entre A et B, il existe un point X et un seul jouissant de la propriété énoncée. Car, de A en B le rapport $\frac{AB}{XA}$ décroît d'une manière continue de l'infini à 1, tandis que le rapport $\frac{XA}{XB}$ croît de zéro à l'infini; ainsi, quand le point X se meut de A en B, le premier rapport diminue, le second augmente, et comme le premier, d'abord supérieur au second, finit par devenir moindre, il y a entre A et B une position de X, et une seule, telle qu'on ait

$$(1) \qquad \frac{AB}{XA} = \frac{XA}{XB} \quad \text{ou} \quad \overline{XA}^2 = AB.XB.$$

2° Que, sur le prolongement de AB à gauche du point A, il existe un point X' et un seul jouissant de la propriété énoncée. Car, dans cette région, le rapport $\frac{AB}{X'A}$ croît d'une manière continue de zéro à l'infini, tandis que le rapport $\frac{X'A}{X'B}$ décroît de 1 à zéro; il y a donc à gauche de A une position de X', mais une seule, pour laquelle on ait

$$(2) \qquad \frac{AB}{X'A} = \frac{X'A}{X'B} \quad \text{ou} \quad \overline{X'A}^2 = AB.X'B.$$

3° Que sur le prolongement de AB à droite du point B, il ne peut exister aucun point jouissant de la propriété énoncée. Car la distance d'un point de cette région au point A, étant plus grande que la distance du point considéré au point B et que la ligne AB, ne saurait être moyenne proportionnelle entre ces deux longueurs.

Ainsi, sur la droite indéfinie qui unit les points A et B, il existe deux points X et X', et rien que deux, qui divisent la droite AB en moyenne et extrême raison : l'un X *intérieur*, et les deux segments correspondants XA, XB, sont alors *additifs;* l'autre X' *extérieur*, et les deux segments correspondants X'A, X'B, sont alors *soustractifs*.

Pour déterminer ces deux points X et X', il suffit de trouver AX et AX'. Or, d'une part, si l'on retranche la relation (1) de la relation (2), on a

$$\overline{X'A}^2 - \overline{XA}^2 = AB(X'B - XB)$$

ou

$$(X'A + XA)(X'A - XA) = AB(X'B - XB),$$

c'est-à-dire

$$XX'(X'A - XA) = AB.XX',$$

et, par suite,

$$X'A - XA = AB.$$

D'autre part, la relation (1) donne

$$\frac{AB + XA}{AB} = \frac{XA + XB}{XA} \quad \text{ou} \quad \frac{X'A}{AB} = \frac{AB}{XA},$$

c'est-à-dire

$$X'A.XA = \overline{AB}^2.$$

Donc, la recherche des droites AX et AX' revient à construire deux lignes dont la différence est égale à AB et dont le produit est égal à $\overline{AB}^2$; c'est le problème du n° 270, dans un cas particulier. De là cette construction :

Élevez sur AB à son extrémité B une perpendiculaire BC égale à la moitié de AB. Du point C comme centre, avec CB pour rayon, décrivez une circonférence; menez AC qui coupe cette circonférence en D et en D'; la droite AD sera l'inconnue AX, et la droite AD' sera l'inconnue AX'. Deux arcs de cercle décrits de A comme centre avec AD et AD' pour rayons, couperont la droite indéfinie AB aux points cherchés X et X'.

SCOLIE.

274. En désignant par a la droite AB, on a

$$CB = CD = CD' = \frac{a}{2},$$

$$AC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

et, par suite,

$$AX = AD = AC - CD = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$AX' = AD' = AC + CD' = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

C'est le calcul déjà fait au n° 271 dans le cas particulier où $m = a$ et $n^2 = a^2$. Il est bon de remarquer qu'on a

$$BX = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}), \quad BX' = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

PROBLÈME.

275. *Décrire une circonférence passant par deux points donnés et tangente soit à une droite donnée, soit à un cercle donné.*

Fig. 185.

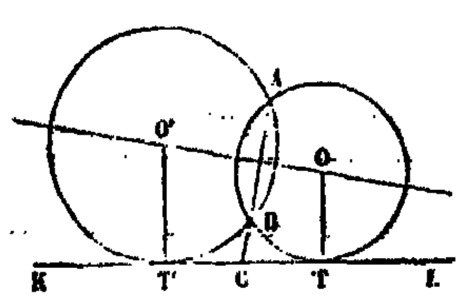
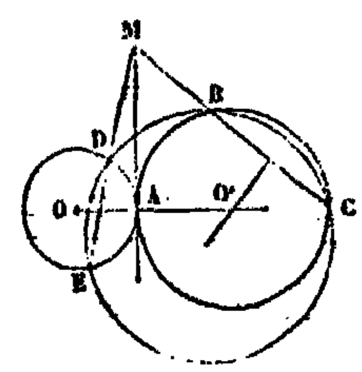


Fig. 186.



1° Soient A et B (*fig.* 185) les deux points donnés et KL la droite donnée. Prolongeons AB jusqu'au point C où elle rencontre KL. Si T est le point où le cercle inconnu O touche cette droite KL, CT sera la moyenne proportionnelle (n° 247) entre les deux droites connues CB et CA. De là cette construction :

Menez AB qui coupe KL en C; déterminez la moyenne proportionnelle entre CB et CA, et portez-la en CT sur la droite CL. Élevez la perpendiculaire TO sur KL et la perpendiculaire OO' sur le milieu de AB; le point O commun à ces deux perpendiculaires sera le centre du cercle cherché.

En portant la moyenne proportionnelle en CT' à gauche de C, on a une seconde solution.

Si AB était parallèle à KL, le point de contact serait sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB, et il n'y aurait qu'une solution.

Enfin, il est évident que le problème n'est possible que si les points A et B sont situés d'un même côté de la droite KL.

2° Soient B et C les deux points donnés et O la circonférence donnée (*fig.* 186). Supposons le problème résolu, et désignons par A le point où le cercle demandé O' touche le cercle O; tout revient à trouver le point M où la tangente AM rencontre la droite BC prolongée. Or, si l'on mène par A et B une circonférence auxiliaire quelconque qui coupe la circonférence O en deux points D et E, la corde DE prolongée passera par M. En effet, désignons un moment par ε le point où la droite MD coupe la circonférence O; on aura

$$MD.M\varepsilon = \overline{MA}^2 = MB.MC.$$

Donc (n° 246) le point ε est sur le cercle déterminé par les trois points C, B, D, c'est-à-dire sur la circonférence auxiliaire; il ne diffère donc pas de l'intersection E du cercle O et de cette circonférence auxiliaire. On déduit de cette analyse la construction suivante :

Par les deux points B et C, menez une circonférence quelconque qui coupe la circonférence donnée O en deux points D et E; et du point M, intersection de BC et de ED, menez une tangente MA au cercle O. Le point A sera le point de contact du cercle O et du cercle inconnu, dont le centre O' se trouvera d'ailleurs à l'intersection de OA prolongée et de la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC.

La seconde tangente menée de M au cercle donné O donnera une seconde solution.

Si les points B et C étaient équidistants du centre O, les droites BC et ED seraient parallèles; il suffirait alors de mener au cercle O une tangente parallèle à BC; il y aurait encore deux solutions.

Enfin, il est évident que le problème n'est possible qu'autant que les points B et C sont tous les deux extérieurs ou tous les deux intérieurs au cercle O.

§ VI. — POLYGONES RÉGULIERS.

DÉFINITIONS.

276. Un polygone est dit *régulier*, lorsqu'il a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux. Tels sont, par exemple, le triangle équilatéral et le carré.

277. On nomme *ligne brisée régulière* toute ligne brisée convexe qui a ses côtés égaux et ses angles égaux.

THÉORÈME.

278. *On peut toujours inscrire ou circonscrire à une circonférence donnée un polygone régulier d'un nombre donné de côtés.*

Fig. 187.

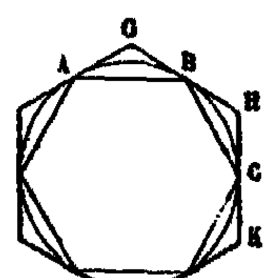
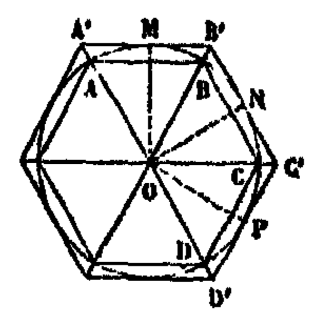


Fig. 188.



Supposons la circonférence divisée en n parties égales, n étant le nombre de côtés que doit avoir le polygone.

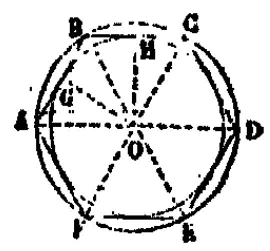
1° En menant (*fig.* 187) les cordes AB, BC,..., qui unissent les points de division, on aura un polygone régulier inscrit de n côtés. En effet, les côtés de ce polygone sont égaux comme cordes d'arcs égaux; et ses angles sont égaux, comme inscrits dans des segments égaux, car tout angle ABC du polygone est inscrit dans un segment correspondant à deux divisions consécutives de la circonférence.

2° En menant des tangentes (*fig.* 187) par les points de division A, B, C,..., on aura un polygone régulier circonscrit de n côtés. En effet, dans les triangles GAB, HBC,..., les côtés AB, BC,..., sont égaux et les angles en A, B, C,..., formés par une tangente et une corde, sont aussi égaux comme ayant tous pour mesure la moitié d'une division de la circonférence; dès lors les triangles GAB, HBC,..., sont isocèles et égaux, et l'on a d'une part G = H = K =..., et de l'autre AG = GB = BH = HC = CK,..., d'où l'on déduit GH = HK =.... Ainsi le polygone GHK... a ses angles égaux et ses côtés égaux.

D'après cette démonstration, pour avoir le polygone régulier de n côtés circonscrit à un cercle, il suffit de diviser la circonférence en n parties égales et de mener des tangentes par les points de division. Or, les milieux M, N, P,..., des arcs AB, BC, CD,..., qui sous-tendent les côtés du polygone régulier inscrit (*fig.* 188), divisent évidemment la circonférence en n parties égales. On aura donc un polygone régulier circonscrit de n côtés en menant des tangentes par ces points. On préfère souvent cette seconde manière d'opérer, parce que le polygone A'B'C'D'..., ainsi obtenu, a ses côtés parallèles à ceux du polygone inscrit ABCD..., et ses sommets A', B', C',..., sur les mêmes rayons OAA', OBB',..., que les sommets du polygone ABCD.... En effet, d'une part deux côtés tels que BC, B'C', sont parallèles comme perpendiculaires sur la même droite ON, et d'autre part deux tangentes telles que MB', NB', doivent se couper (176) sur la bissectrice OB de l'angle MON.

279. Réciproquement, ***on peut toujours inscrire et circonscrire une circonférence à un polygone régulier donné.***

Fig. 189.



Soit ABCDEF le polygone régulier donné (*fig.* 189).

1° Pour démontrer qu'on peut circonscrire une circonférence à ce polygone, il suffit de prouver que la circonférence qui passe par trois sommets consécutifs quelconques A, B, C, passe par le sommet suivant D. Or, soit O le centre du cercle déterminé par les trois points A, B, C; menons OA, OD, et la perpendiculaire OH sur BC. Replions le quadrilatère ABHO autour de OH; les angles en H étant droits, BH prendra la direction HC, et le point B tombera en C, puisque BH = HC. Mais le polygone étant régulier, l'angle ABH est égal à l'angle HCD, comme le côté BA au côté CD; par suite le côté BA prendra la direction CD, et le point A tombera en D. Donc OD est égal au rayon OA, et la circonférence considérée passe par le point D.

2° Les côtés AB, BC,..., étant des cordes égales du cercle circonscrit, les perpendiculaires OH, OG,..., abaissées du centre O sur ces cordes, seront égales (109); donc, si du point O comme centre, avec OH pour rayon, on décrit une circonférence, chacun des côtés du polygone sera touché en son milieu par cette circonférence, qui dès lors sera inscrite u polygone.

Corollaires.

280. On nomme *centre* d'un polygone régulier le centre commun O de la circonférence inscrite et de la circonférence circonscrite. Ce point, étant à égale distance de tous les côtés et de tous les sommets, est à la fois le point de concours des bissectrices de tous les angles et des perpendiculaires élevées sur les milieux des divers côtés.

On appelle *rayon* d'un polygone régulier le rayon du cercle circonscrit, et *apothème* de ce polygone le rayon du cercle inscrit.

On nomme *angle au centre* d'un polygone régulier l'angle AOB de deux rayons consécutifs; cet angle est évidemment égal à l'angle GOH de deux apothèmes consécutifs, et par conséquent est le supplément de l'angle GBH du polygone régulier. D'après cela, si n est le nombre des côtés du polygone, et si l'on prend l'angle droit pour unité, l'angle au centre vaudra $\frac{4}{n}$ et l'angle du polygone, $2 - \frac{4}{n}$. On voit ainsi que, sauf le triangle équilatéral dont les angles sont de 60 degrés, et le carré dont les angles sont droits, tous les polygones réguliers ont leur angle obtus.

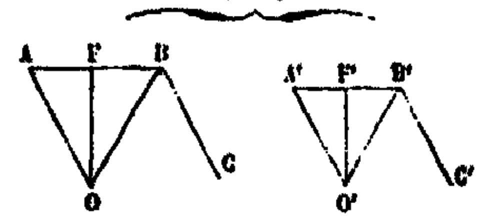
281. On prouverait, par des raisonnements identiques aux précédents, que toute ligne brisée régulière est inscriptible et circonscriptible, et par suite qu'elle a un centre, un apothème et un rayon qui sont le centre et les rayons des circonférences inscrite et circonscrite. Une ligne brisée régulière ne diffère d'une portion du polygone régulier qu'en ce que son angle au centre n'est pas forcément une partie aliquote de quatre angles droits.

THÉORÈME.

282. 1° ***Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables.***

2° ***Leur rapport de similitude est égal à celui de leurs rayons ou de leurs apothèmes.***

Fig. 190.



En effet :

1° Ces polygones ont les angles égaux, puisque la valeur de l'angle d'un polygone régulier ne dépend que du nombre des côtés (280), et que le nombre des côtés est le même dans les deux figures; de plus, les côtés sont évidemment proportionnels, puisque, dans l'une et l'autre figure, ils sont égaux. Donc, les polygones considérés sont semblables.

2° Soient (*fig.* 190) AB le côté du premier polygone, O son centre, OB son rayon, OF son apothème; soient de même A'B' le côté du second polygone, O' son centre, O'B' son rayon et O'F' son apothème. Les triangles rectangles AFO, A'F'O', sont semblables (207), puisque les angles FAO, F'A'O', sont égaux comme moitiés des angles égaux ABC, A'B'C' (280). On a donc

$$\frac{AF}{A'F'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{OF}{O'F'};$$

mais les polygones proposés étant semblables, leur rapport de similitude est égal au rapport des côtés AB, A'B', ou des demi-côtés AF, A'F'; il est donc aussi égal au rapport des rayons OB, O'B', ou au rapport des apothèmes OF, O'F'.

SCOLIE.

283. Pour compléter cette théorie des polygones réguliers, nous emprunterons à un Mémoire de M. Poinsot (*Journal de l'École Polytechnique*, t. IV, p. 21) les considérations suivantes :

« Soit un nombre h inférieur et premier à m, et considérez m points ou sommets rangés en cercle à égales distances dans l'ordre a, b, c, d, e, etc. Si, à partir du premier a, vous les joignez successivement par des droites en les prenant de h en h, comme le nombre h n'a point avec m d'autre commune mesure que l'unité, vous serez obligé de passer par tous les points avant de revenir au premier; alors vous aurez formé un polygone régulier de m côtés avec m angles distincts a, b, c, d, e, etc.

» Si vous suivez la construction du polygone dans l'ordre inverse, vous trouverez que les points sont joints de $m-h$ en $m-h$, et par conséquent la liaison des points de $m-h$ en $m-h$ donne le même polygone que leur liaison de h en h.

» De même, si g est un autre nombre inférieur et premier à m, vous formerez un polygone nouveau de m côtés, en joignant les points de g en g, et le polygone donné par la liaison des points de $m-g$ en $m-g$ sera le même; et ainsi de suite.

» Donc..., on peut construire autant de polygones (réguliers) de m côtés qu'il y a de nombres premiers à m dans la suite $1, 2, 3, 4, \ldots, (m-1)$. Mais, puisque le polygone donné par un de ces nombres est le même que le polygone donné par son complément au nombre m, il s'ensuit simplement qu'*il y a autant de polygones réguliers différents (de m côtés) que de nombres premiers à m depuis* 1 *jusqu'à* $\frac{m-1}{2}$. »

Ainsi, il y a deux pentagones réguliers : l'un est le pentagone ordinaire qui résulte de la jonction des points de 1 en 1, l'autre s'obtient en joignant les points de 2 en 2; on l'appelle *pentagone étoilé* (voir la *fig.* 195). Il n'y a pas d'hexagone étoilé; il y a *deux heptagones étoilés, un seul décagone étoilé* (voir la *fig.* 193), etc.

§ VII. — PROBLÈMES SUR LES POLYGONES RÉGULIERS.

PROBLÈME.

284. *Inscrire un carré dans un cercle donné* (*fig.* 191).

Fig. 191.

Il suffit évidemment de mener deux diamètres AC et BD perpendiculaires entre eux, et de joindre leurs extrémités, pour avoir le carré demandé ABCD.

Le triangle AOB, rectangle en O, donne

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2\,\overline{OA}^2, \quad \text{d'où} \quad AB = OA\,.\sqrt{2}.$$

Ainsi, *le côté du carré inscrit dans le cercle de rayon* R *est égal à* $R\sqrt{2}$.

Il convient de remarquer que l'apothème du carré inscrit est égal à la moitié de son côté, et que le côté du carré circonscrit est égal au diamètre du cercle considéré.

Corollaire.

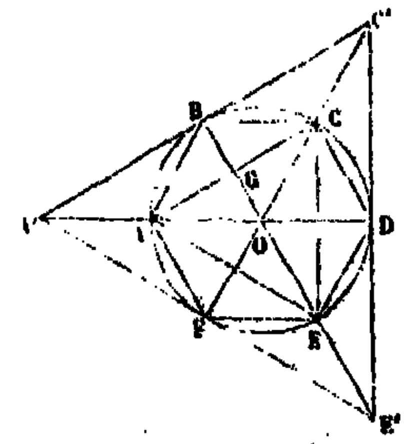
285. Du carré, on passe à l'octogone régulier inscrit en divisant (*fig.* 191) chacun des arcs AB, BC, CD, DA, en deux parties égales. On déduirait de même de l'octogone le polygone régulier de 16 côtés..., et ainsi de suite. On peut donc, *avec la règle et le compas*, inscrire les polygones réguliers de 4, 8, 16, 32,... et, en général, de 2^n côtés.

PROBLÈME.

286. *Inscrire un hexagone régulier dans un cercle* (*fig.* 192).

Supposons le problème résolu, et soit ABCDEF l'hexagone demandé. En menant deux rayons consécutifs OA, OB, on obtient un triangle OAB qui est isocèle, et, par suite, dont les angles A et B sont égaux. Mais, si l'on remarque que le rayon BO prolongé passe par le sommet E de l'hexagone, on voit que l'angle inscrit ABE a pour mesure la moitié de l'arc AFE, c'est-à-dire une division de la circonférence; et comme

Fig. 192.



l'angle au centre AOB a aussi pour mesure une de ces divisions AB, les deux angles ABO et AOB sont égaux, et le triangle OAB est équilatéral. Donc, *le côté de l'hexagone inscrit dans un cercle, est égal au rayon* R *de ce cercle.*

Pour inscrire un hexagone régulier dans un cercle, il suffit, d'après cela, de porter six fois sur la circonférence une ouverture de compas égale au rayon, et de joindre les points de division consécutifs ainsi obtenus.

COROLLAIRES.

287. En joignant de deux en deux les sommets de l'hexagone, on obtient le triangle équilatéral inscrit ACE. Le triangle rectangle AGO donne

$$\overline{AG}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OG}^2.$$

Or, la figure ABCO étant un losange, on a, en désignant par R le rayon du cercle,

$$GO = \frac{1}{2} BO = \frac{R}{2},$$

et, par suite,

$$\overline{AG}^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}, \quad AG = \frac{R\sqrt{3}}{2};$$

d'où enfin

$$AC = 2AG = R\sqrt{3}.$$

Ainsi, *le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon* R *est égal à* $R\sqrt{3}$; son apothème OG est d'ailleurs égal à la moitié du rayon.

288. En menant des tangentes par les points B, D, F, on forme le triangle équilatéral circonscrit A'C'E', dont les côtés sont parallèles à ceux du triangle équilatéral inscrit ACE. Le rapport de similitude de ces deux triangles est égal (282) à $\frac{OB}{OG}$, c'est-à-dire à 2. Ainsi, deux lignes homologues quelconques dans le triangle équilatéral circonscrit et dans le triangle équilatéral inscrit, sont doubles l'une de l'autre.

289. De l'hexagone, on passe au dodécagone régulier inscrit en divisant en deux parties égales les arcs sous-tendus par les côtés de l'hexagone; on déduirait de même du dodécagone le polygone régulier de 24 côtés..., et ainsi de suite. On peut donc, *avec la règle et le compas*, inscrire les polygones réguliers de 3, 6, 12, 24,..., et en général de 3.2^n côtés.

PROBLÈME.

290. *Inscrire un décagone régulier dans un cercle donné* (*fig.* 193).

Fig. 193.

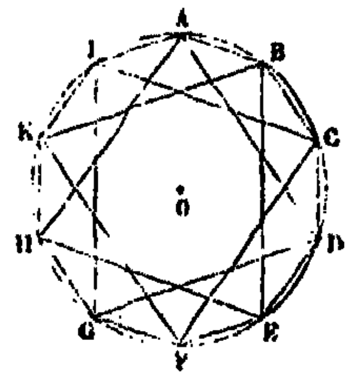
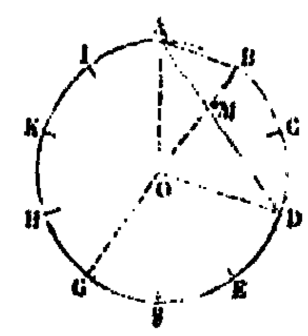


Fig. 194.



Supposons le problème résolu, c'est-à-dire la circonférence divisée en dix parties égales par les points A, B, C, D, E, F, G, H, K, I.

En joignant les points de division consécutifs, on obtient le décagone régulier convexe ABCDEFGHIK; en joignant les points de division de trois en trois, on obtient le décagone régulier étoilé ADGICFKBEH (283). Il s'agit de construire les côtés AB et AD de ces deux décagones.

Or, en remarquant (*fig.* 194) que le rayon BO prolongé passe par le sommet G, on voit que l'angle AMB, dont le sommet est à l'intérieur du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc AB, plus la moitié de l'arc GD, c'est-à-dire deux divisions de la circonférence. D'ailleurs, l'angle inscrit ABG a pour mesure la moitié de l'arc AG, c'est-à-dire encore deux divisions; l'angle au centre BOD a aussi cette même mesure. Les deux triangles AMB, DMO, sont donc isocèles, et l'on a

$$AM = AB, \quad MD = OD \quad \text{ou} \quad AD - AM = OD.$$

D'un autre côté, les angles OMA, DOA, étant égaux comme ayant l'un et l'autre pour mesure trois divisions, les droites OM et OD sont antiparallèles par rapport à l'angle OAD, et l'on a (244)

$$AD \cdot AM = \overline{OA}^2.$$

Les deux relations précédentes montrent que la recherche des côtés AD et AM revient à celle de deux lignes dont la différence est égale au rayon et dont le produit est égal au carré du rayon; *on obtiendra donc ces deux côtés* (273) *en divisant le rayon en moyenne et extrême raison; le plus grand segment additif sera le côté du décagone régulier convexe, et le plus petit segment soustractif sera le côté du décagone régulier étoilé.*

Si R est le rayon du cercle, on aura (274)

$$AM = R \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \text{et} \quad AD = R \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

COROLLAIRES.

291. La circonférence étant divisée en dix parties égales, en joignant les points de division de deux en deux, on obtient le

Fig. 195.

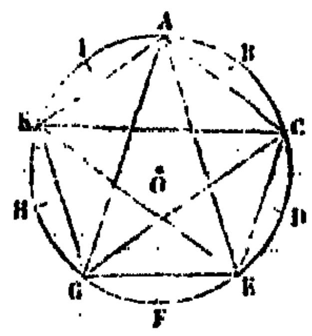
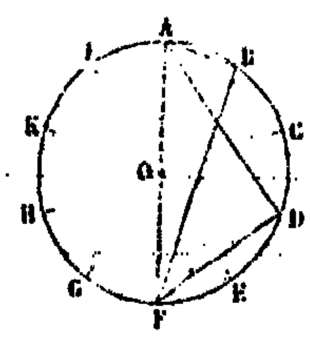


Fig. 196.



pentagone régulier convexe ACEGK; en les joignant de quatre en quatre, on trace le *pentagone régulier étoilé* AEKCG (*fig.* 195).

Soient (*fig.* 196), FD $= p$, FB $= p'$, les côtés du pentagone régulier convexe et du pentagone étoilé, AB $= d$, AD $= d'$, les côtés du décagone régulier convexe et du décagone étoilé ; les triangles rectangles ADF, ABF, donnent

$$p^2 = 4R^2 - d'^2 = R^2 + (3R^2 - d'^2),$$
$$p'^2 = 4R^2 - d^2 = R^2 + (3R^2 - d^2) :$$

or, les relations (290)

$$d' - d = R, \quad dd' = R^2,$$

donnent, lorsqu'on ajoute le double de la seconde au carré de la première,

$$d^2 + d'^2 = 3R^2.$$

On conclut de là

$$p^2 = R^2 + d^2, \quad \text{et} \quad p'^2 = R^2 + d'^2.$$

Ainsi, *le côté du pentagone régulier convexe est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont le rayon et le côté du décagone régulier convexe; et de même, le côté du pentagone régulier étoilé est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont le rayon et le côté du décagone régulier étoilé.*

En remplaçant d et d' par leurs valeurs données au n° 290 en fonction du rayon, on trouve

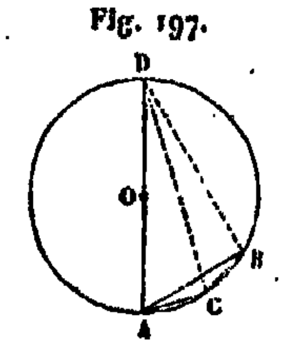
$$p = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad p' = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

292. Du décagone convexe, on passe au polygone régulier de 20 côtés, puis à celui de 40,..., et ainsi de suite, en prenant chaque fois les milieux des arcs sous-tendus par les côtés du polygone précédent. On peut donc, *avec la règle et le compas*, inscrire les polygones réguliers de 5, 10, 20, ..., et, en général, de 5.2^n côtés.

PROBLÈME.

293. *Inscrire un pentédécagone régulier dans un cercle* (*fig.* 197).

Fig. 197.



AB étant le côté de l'hexagone, et AC celui du décagone, l'arc BC sera égal à $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ de la circonférence. La corde BC sera donc le côté du pentédécagone régulier inscrit.

294. Pour calculer ce côté en fonction du rayon, menons le diamètre AD et les droites DB, DC. Le quadrilatère inscrit ABCD donne (238)

$$AB.CD = AC.DB + DA.BC.$$

Or, DB est le côté du triangle équilatéral inscrit, et CD le côté du pentagone étoilé; on a donc

$$R.\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}.R\sqrt{3} + 2R.BC,$$

d'où

$$BC = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right).$$

295. Du pentédécagone, on passe au polygone de 30 côtés, puis à celui de 60, ..., et ainsi de suite, en prenant chaque fois les milieux des arcs sous-tendus par les côtés du polygone précédent. On peut donc, *avec la règle et le compas*, inscrire les polygones réguliers de 15, 30, 60, ..., et, en général, de 15.2^n côtés (*).

296. Ajoutons que, la circonférence étant divisée en quinze parties égales, on obtiendra les trois pentédécagones étoilés en joignant les points de division de 2 en 2, de 4 en 4 et de 7 en 7.

PROBLÈME.

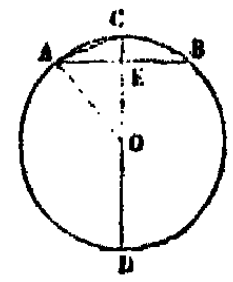
297. *Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit, calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés double* (*fig.* 198).

Soient $AB = a$ le côté donné et R le rayon du cercle;

(*) Les polygones réguliers, dont il a été question du n° 287 au n° 298, ne sont pas les seuls qu'on puisse inscrire géométriquement, ainsi que l'a prouvé Gauss à la fin de ses *Disquisitiones arithmeticæ*. « Hinc colligitur generaliter » dit cet illustre géomètre, « ut circulus geometricè in N partes dividi possit, » N esse debere *vel* 2 aut altiorem potestatem ipsius 2, *vel* numerum primum » formæ 2^m+1, *vel* productum è pluribus hujusmodi numeris primis, *vel* » productum ex uno tali primo aut pluribus in 2 aut potestatem altiorem » ipsius 2. Hujusmodi valores ipsius N infra 300 reperiuntur hi 38 : 2, 3, 4, » 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, » 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272. »

CD étant le diamètre perpendiculaire à AB, AC sera le côté cherché, que nous désignerons par a'.

Fig. 198.



La corde AC est moyenne proportionnelle entre le diamètre CD et sa projection $CE = OC - OE$ sur ce diamètre; on a donc

$$a'^2 = 2R(R - OE) = R(2R - 2OE).$$

Mais le triangle rectangle AEO donne

$$OE = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AE}^2} \quad \text{ou} \quad OE = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

On a donc finalement

$$(1) \qquad a' = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - a^2})}.$$

En particulier, lorsqu'on prend le rayon pour unité, on a

$$(2) \qquad a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}.$$

Scolie.

298. En partant d'un polygone dont on connaît le côté, on pourra, par l'application répétée de la formule (2), calculer successivement les côtés, et par suite les périmètres des polygones réguliers inscrits de $2n$, $4n$, $8n$, $16n$, ... côtés, n étant le nombre des côtés du premier polygone. Voici les résultats que l'on obtient en partant, soit du carré dont le côté est $\sqrt{2}$ dans le cercle de rayon 1, soit de l'hexagone dont le côté est 1 :

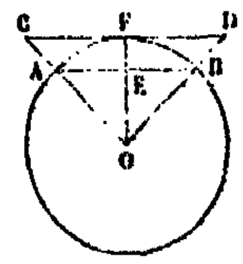
Nombre des côtés.	Demi-périmètres.	Nombre des côtés.	Demi-périmètres.
4	2,82842	6	3,00000
8	3,06146	12	3,10582
16	3,12144	24	3,13262
32	3,13654	48	3,13935
64	3,14033	96	3,14103
128	3,14127	192	3,14145

Ces valeurs sont par défaut à moins d'une unité du cinquième ordre décimal.

PROBLÈME.

299. *Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit, calculer le côté du polygone régulier circonscrit semblable* (*fig.* 199).

Fig. 199.



Soient $AB = a$ le côté donné et R le rayon du cercle; menons la tangente CD au milieu F de l'arc AB et prolongeons-la jusqu'aux points C et D, où elle rencontre les rayons OA et OB prolongés. CD sera le côté cherché (278); désignons-le par α.

Les triangles semblables AOE, COF, donnent

$$\frac{CF}{AE} = \frac{OF}{OE} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{a} = \frac{R}{OE},$$

mais on a (297)

$$OE = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Donc

$$(1) \qquad \alpha = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

En particulier, lorsqu'on prend le rayon pour unité, on a

$$(2) \qquad \alpha = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}}.$$

SCOLIE.

300. Connaissant les côtés des polygones réguliers de n, $2n$, $4n$, $8n$,... côtés, inscrits dans le cercle de rayon 1, on aura par la formule (2) les côtés, et, par suite, les périmètres des polygones réguliers circonscrits semblables. Voici les résultats que l'on obtient pour les séries qui dérivent du carré et de l'hexagone.

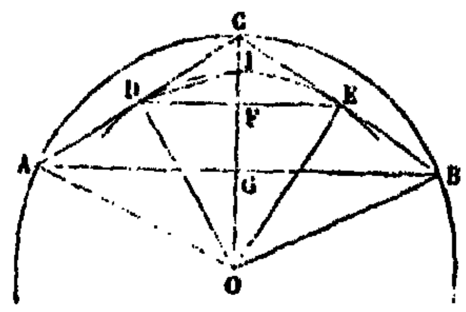
Nombre des côtés.	Demi-périmètres.	Nombre des côtés.	Demi-périmètres.
4	4,00000	6	3,46411
8	3,31371	12	3,21540
16	3,18260	24	3,15967
32	3,15173	48	3,14609
64	3,14412	96	3,14272
128	3,14223	192	3,14188

Ces valeurs sont par excès à moins d'une unité du cinquième ordre décimal.

PROBLÈME.

301. *Étant donnés le rayon r et l'apothème a d'un polygone régulier, calculer le rayon r' et l'apothème a' du polygone régulier qui aurait le même périmètre et un nombre de côtés double* (*fig.* 200).

Fig. 200.



Soient AB le côté et O le centre du polygone donné ; en menant le rayon OGC perpendiculaire sur AB, on aura

$$OC = r, \quad OG = a.$$

Tirons CA et CB, et joignons les milieux D et E de ces deux cordes. La droite DE, parallèle à AB et égale à sa moitié, sera le côté du polygone régulier qui a même périmètre et deux fois plus de côtés que le premier. D'ailleurs, l'angle DOE étant la moitié de l'angle au centre AOB du polygone primitif, le point O sera encore le centre du nouveau polygone, et l'on aura

$$OD = r', \quad OF = a'.$$

Or, le point F est le milieu de CG ; donc

$$(1) \qquad OF = \frac{1}{2}(OG + OC) \quad \text{ou} \quad a' = \frac{1}{2}(a + r).$$

De plus, le triangle rectangle ODC donne (224)

$$(2) \qquad \overline{OD}^2 = OC.OF \quad \text{ou} \quad r' = \sqrt{r.a'}.$$

Les relations (1) et (2) résolvent le problème proposé; la première permet de calculer a'; puis, a' étant connu, la seconde donne r'.

Scolie.

302. On voit sur la figure que OF est plus grand que OG et que OD est moindre que OC. Donc, *quand on passe d'un polygone régulier au polygone régulier isopérimètre d'un nombre de côtés double, l'apothème augmente et le rayon diminue.*

On peut voir que *la différence $r' - a'$ est moindre que le quart de la différence précédente $r - a$.*

En effet, si du point O comme centre, avec OD pour rayon, on trace l'arc DIE, on voit que

$$r' - a' = IF \quad \text{et} \quad r - a = CG = 2CF;$$

il s'agit donc de prouver que IF est inférieur à la moitié de CF, c'est-à-dire que IF est moindre que CI. Or l'angle inscrit IDE et l'angle IDC formé par une tangente et une corde ont pour mesure, le premier la moitié de l'arc IF, l'autre la moitié de l'arc DI; ces angles sont donc égaux, et DI est la bissectrice de l'angle CDF. Donc enfin le rapport de IF à IC est égal (197) à celui de la perpendiculaire DF à l'oblique DC, et, par suite, moindre que un.

Corollaire.

303. Soient p et P les périmètres de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit et l'autre circonscrit, et p' et P' les périmètres des deux polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double. Le rapport de similitude ou celui des périmètres (218) étant égal au rapport des apothèmes (282), on a (*fig.* 200)

$$\frac{p}{P} = \frac{OG}{OC}, \quad \frac{p'}{P'} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OD},$$

d'où

$$\frac{OC}{\frac{1}{p}} = \frac{OG}{\frac{1}{P}} \quad \text{et} \quad \frac{OD}{\frac{1}{p'}} = \frac{OF}{\frac{1}{P'}}.$$

D'ailleurs, les triangles semblables ODC, ACG, donnent

$$\frac{OC}{OD} = \frac{AC}{AG} = \frac{p'}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{OC}{\frac{1}{p}} = \frac{OD}{\frac{1}{p'}}.$$

On a donc

$$\frac{OC}{\frac{1}{p}} = \frac{OG}{\frac{1}{P}} = \frac{OD}{\frac{1}{p'}} = \frac{OF}{\frac{1}{P'}},$$

mais (301)

$$OF = \frac{1}{2}(OC + OG), \quad \text{et} \quad OD = \sqrt{OC.OF}:$$

donc enfin

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{P}\right), \quad \frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{P'}}.$$

Étant donnés les périmètres p et P de deux polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit à un même cercle, ces deux formules permettront de *calculer les périmètres p' et P' des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double.*

§ VIII. — MESURE DE LA CIRCONFÉRENCE.

DÉFINITIONS.

304. L'idée générale de longueur est une de celles qu'on ne peut ramener à aucune autre. Aussi bien, comme nous l'avons déjà dit, il n'est pas nécessaire de savoir définir une grandeur pour pouvoir la mesurer, c'est-à-dire pour pouvoir la comparer à une autre grandeur *de même espèce ;* il suffit de posséder la notion des grandeurs de cette espèce et d'avoir défini leur égalité et leur addition. C'est ainsi qu'après avoir défini l'égalité et l'addition des lignes droites (3), on conçoit nettement ce que c'est qu'une ligne droite ou brisée double, triple,..., d'une autre, et, en général, ayant un rapport quelconque avec une autre ligne droite ou brisée. On peut en dire autant de deux arcs de cercle de même rayon (97).

Il n'en est plus de même lorsqu'il s'agit de comparer la circonférence ou un arc de cercle à la ligne droite. Puisque la décomposition en parties respectivement superposables est ici impossible, et qu'en Géométrie l'*égalité* résulte de la possibilité de la coïncidence, on voit qu'à proprement parler un arc de cercle et une portion de ligne droite ne sauraient être *égaux*, mais tout au plus *équivalents*. Pour ramener la notion de la longueur d'un arc de cercle à celle de la ligne droite, on adopte alors la définition suivante :

La longueur d'un arc de cercle est la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne brisée régulière inscrite dans cet arc (281), *lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre de ses côtés ;*

Et en particulier :

La longueur d'une circonférence est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier qui y est inscrit et dont le nombre des côtés croît indéfiniment.

305. Toutefois, pour justifier cette définition, il faut prouver que *cette limite existe* et *qu'elle est unique*, c'est-à-dire indépendante de la loi suivant laquelle on fait croître le nombre des côtés.

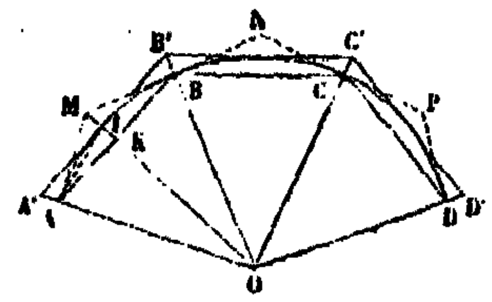
Voici cette démonstration :

1° *Le périmètre d'une ligne brisée régulière inscrite dans un arc de cercle, tend vers une certaine limite quand on fait croître indéfiniment le nombre de ses côtés.* En effet, si, après avoir inscrit dans l'arc considéré une première ligne brisée régulière, on prend sur chacun des arcs sous-tendus par les divers côtés n points intermédiaires équidistants, on formera une seconde ligne brisée régulière inscrite dont le périmètre surpassera évidemment celui de la première. En opérant d'une manière analogue sur cette seconde ligne, c'est-à-dire en divisant chacun des arcs sous-tendus par ses divers côtés en m parties égales (m étant égal à n ou différent de n), et en continuant ainsi indéfiniment, les périmètres successifs croîtront sans cesse ; et comme ils sont tous (76) inférieurs à une ligne polygonale quelconque enveloppant l'arc considéré et ayant les mêmes extrémités, on voit que ces périmètres tendront nécessairement vers une certaine limite.

2° *La limite du périmètre d'une ligne brisée régulière inscrite dans un arc de cercle est la même, quelle que soit la loi suivant laquelle on fait croître indéfiniment le nombre des côtés.*

Observons d'abord que les périmètres d'une ligne brisée régulière inscrite ABCD, et de la ligne brisée circonscrite semblable A'B'C'D' et terminée aux mêmes rayons OAA', ODD', tendent vers la même limite lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre de leurs côtés (*fig.* 201). En

Fig. 201.



effet, le rapport de ces périmètres est égal à celui des côtés AB, A'B', ou à celui des apothèmes OK, OI; et il suffit alors de prouver que le nombre des côtés croissant indéfiniment, le rapport de OK à OI tend vers l'unité, ou, ce qui revient au même, que la différence OI — OK = IK tend vers zéro. Or, cette différence IK est moindre que la corde AI, laquelle a évidemment zéro pour limite.

Remarquons en outre que toute ligne brisée régulière inscrite dans l'arc AD est moindre que toute ligne brisée régulière, telle que A'B'C'D', circonscrite à l'arc AD et comprise entre les mêmes rayons OAA', ODD'. En effet, la ligne A'B'C'D' est égale à celle AMNPD, que l'on obtient en menant des tangentes en A, B, C, D; et cette dernière surpasse toute ligne brisée inscrite dans l'arc AD, puisqu'elle l'enveloppe et a les mêmes extrémités A et D (76).

Cela posé, soient p_n et $p_{n'}$ les périmètres de deux lignes brisées régulières inscrites, qui ont leurs nombres de côtés n et n' très-grands et qui appartiennent à deux lois d'inscription différentes. Soient P_n et $P_{n'}$ les périmètres des deux lignes brisées régulières circonscrites, respectivement semblables aux lignes brisées déjà inscrites. Nous venons de voir que p_n et P_n tendent vers une limite commune L, que $p_{n'}$ et $P_{n'}$ tendent aussi vers une limite commune L', et il s'agit de prouver que ces deux limites L et L' sont égales. Or, d'après la remarque de l'alinéa précédent, p_n est moindre que $P_{n'}$, quels que soient n et n', et par suite la limite L de p_n ne peut pas surpasser la limite L' de $P_{n'}$. De même, $p_{n'}$ étant toujours moindre que P_n, la limite L' de $p_{n'}$ ne saurait surpasser la limite L de P_n. Donc L ne pouvant ni surpasser L' ni être surpassée par L', est nécessairement égale à L'.

306 Il résulte de là (304, 76) : 1° qu'un arc de cercle est moindre que toute ligne polygonale enveloppante et terminée aux mêmes extrémités; 2° que la circonférence est moindre que tout polygone qui l'enveloppe.

THÉORÈME.

301. *Le rapport de deux circonférences quelconques est égal au rapport de leurs rayons.*

Soient R et R' les rayons, et C et C' les longueurs de deux circonférences; inscrivons dans la première un polygone régulier quelconque et, dans la seconde, un polygone régulier d'un même nombre de côtés. P et P' étant les périmètres de ces polygones, on aura (282)

$$\frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}.$$

Cette proportion, ayant lieu quel que soit le nombre des côtés des deux polygones, subsistera quand on fera croître ce nombre indéfiniment; mais alors les périmètres P et P' tendront vers leurs limites respectives C et C', et leur rapport tendra vers $\frac{C}{C'}$. On aura donc, à la limite,

$$\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'}.$$

Corollaire.

308. La proposition précédente donne

$$\frac{C}{R}=\frac{C'}{R'} \quad \text{ou} \quad \frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'}.$$

Donc, le rapport d'une circonférence à son diamètre est le même pour toutes les circonférences; en d'autres termes:

Le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre constant.

Ce nombre, qu'on représente ordinairement par π, est incommensurable (*); on ne peut donc pas l'avoir exactement; mais on peut le calculer, comme nous le montrerons bientôt, avec telle approximation qu'on veut. Voici sa valeur en déci-

(*) C'est Lambert qui a démontré pour la première fois (*Mémoires de Berlin*, 1761) que π était incommensurable. Legendre a prouvé plus tard qu'il en était de même du carré de π.

males, ainsi que celle de son inverse et de son logarithme :

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{\pi} = 0,31830\ 98861\ 83790\ 67153\ldots\ldots,$$

$$\log\pi = 0,49714\ 98726\ 94133\ 85435\ldots\ldots$$

309. En donnant à la formule $\frac{C}{2R} = \pi$ les deux formes

$$C = 2\pi R, \quad R = \frac{C}{2\pi},$$

on voit : 1° que *pour calculer la longueur d'une circonférence, il faut multiplier par le nombre* π *le double de la longueur du rayon* ; 2° que *pour calculer le rayon d'une circonférence, il faut diviser par* π *ou multiplier par* $\frac{1}{\pi}$ *la moitié de la longueur de la circonférence.*

Exemples :

1° *Quelle est la circonférence d'une roue de voiture dont le rayon est de* $0^m,65$?

En multipliant le rayon $0^m,65$ par $6^m,28$ qui est la valeur de 2π à moins d'un centième, on trouve pour la circonférence cherchée $4^m,08$ à moins d'un centimètre.

2° *Quel est le rayon du méridien de Paris?*

On sait que la demi-circonférence de ce méridien est de 20 000 000 de mètres ; en multipliant ce nombre par 0,3183099, qui est la valeur de $\frac{1}{\pi}$ à moins de $\frac{1}{2}$ dix-millionième, on trouve pour le rayon cherché 6 366 197 mètres à moins de 1 mètre.

310. La longueur de l'arc de 180 degrés dans le cercle de rayon R, c'est-à-dire de la demi-circonférence, étant πR, la longueur de l'arc de 1 degré sera $\frac{\pi R}{180}$, et, par suite, *la longueur l de l'arc de n degrés dans le cercle de rayon* R *a pour expression*

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Cette formule et les deux suivantes

$$n = \frac{180\,l}{\pi R}, \quad R = \frac{180\,l}{\pi n},$$

qu'on en déduit, servent à calculer l'une quelconque des trois quantités l, n, R, lorsqu'on connaît les deux autres.

Exemples :

1° *Sur une circonférence dont le rayon a* $0^m,90$, *quelle est la longueur de l'arc de* $25°45'$?

On a ici

$$n = 25 + \frac{45}{60} = 25 + \frac{3}{4} = \frac{103}{4},$$

et par suite

$$l = \frac{\pi . 0,90 . \frac{103}{4}}{180} = \frac{103\,\pi}{800} = \frac{103 . 3,14}{800} = 0^m,40 \ldots .$$

2° *Quel est l'arc dont la longueur est égale au rayon ?*

La seconde des formules qui précèdent donne pour le nombre de degrés de cet arc

$$n = \frac{180°}{\pi} = 180° \times 0,31830988 \ldots = 57°\,17'\,44'',80 \ldots .$$

3° *Quel est le rayon du cercle dans lequel l'arc de* 30 *degrés vaut* 1 *mètre ?*

La troisième formule donne

$$R = \frac{180}{\pi . 30} = \frac{6}{\pi} = 6 . 0,3183 = 1^m,910.$$

THÉORÈME.

311. ***Deux arcs semblables***, c'est-à-dire deux arcs qui répondent à des angles au centre égaux dans des cercles différents, ***sont proportionnels à leurs rayons.***

En effet, soient l et l' les longueurs des deux arcs, R et R' leurs rayons, O et O' les angles au centre égaux qui correspondent à ces arcs ; on a

$$\frac{l}{2\pi R} = \frac{O}{4 \text{ droits}}, \quad \frac{l'}{2\pi R'} = \frac{O'}{4 \text{ droits}};$$

d'où, en divisant membre à membre et observant que $O = O'$,

$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'}.$$

SCOLIE.

312. Dans la pratique, on évalue les angles en parties aliquotes de la circonférence, c'est-à-dire en degrés, minutes et secondes. Il n'en est plus de même en théorie, lorsqu'on veut introduire un angle dans une formule.

Soient VOX un angle et ω le nombre qui le mesure, c'est-à-dire le rapport de cet angle à l'angle unité UOX (*fig.* 202). Décrivons du sommet

Fig. 202.

commun O comme centre une circonférence, et désignons respectivement par r, l, l', les nombres d'unités linéaires contenues dans le rayon et dans les arcs AM, AN, interceptés entre les côtés des deux angles VOX, UOX.

La proportionnalité des angles au centre aux arcs interceptés (138) donne

$$\frac{\text{VOX}}{\text{UOX}} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{l}{l'}.$$

Donc

1° *Si on laisse arbitraires l'unité linéaire et l'unité angulaire, un angle quelconque a pour mesure le rapport des nombres d'unités linéaires contenues dans les arcs que l'angle considéré et l'angle unité interceptent sur une circonférence quelconque, décrite de leur sommet commun comme centre.*

2° Si, sans fixer aucune des deux unités, on les fait correspondre l'une à l'autre, c'est-à-dire *si l'on prend pour unité d'arc l'arc intercepté par l'unité d'angle*, on a $l' = 1$, et $\omega = l$.

Dans ce cas, un angle quelconque a même mesure que l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre avec un rayon quelconque; c'est le théorème du n° 139.

3° Souvent, au lieu d'établir la correspondance entre l'unité linéaire et l'unité angulaire, on laisse indéterminée l'unité de longueur, et l'on fixe l'unité d'angle; *on prend pour unité angulaire l'angle qui intercepte sur une circonférence quelconque un arc égal au rayon.* On a alors $l' = r$, et par suite

$$\omega = \frac{l}{r} \quad \text{ou} \quad l = \omega r.$$

Dans ce cas, un angle quelconque a pour mesure le rapport de l'arc qu'il intercepte sur une circonférence quelconque décrite de son sommet comme centre, au rayon de ce cercle, et inversement, *l'arc est égal à l'angle multiplié par le rayon.*

Pour rendre facile la comparaison entre ce mode de mesure et l'évaluation en degrés, minutes et secondes, il suffit de rappeler (310, 2°) que l'angle unité est alors de $57^{\circ}17'44'',80\ldots$

Ajoutons enfin que si, après avoir fixé de la sorte l'unité d'angle, on prend de plus le rayon r pour unité de longueur, on établit ainsi la correspondance des unités linéaire et angulaire, et l'on retombe sur la formule $\omega = l$. L'angle droit est alors mesuré par $\frac{\pi}{2} = 1,5707\ldots$, l'angle de 45 degrés par $\frac{\pi}{4},\ldots$, etc.

PROBLÈME.

313. *Calculer le rapport de la circonférence au diamètre.*

La formule

$$\pi = \frac{C}{2R} \tag{1}$$

montre que, pour avoir π, on peut :

Soit se donner le rayon R et calculer la longueur de la circonférence C ; c'est la *méthode des périmètres ;*

Soit se donner la circonférence C et calculer le rayon R ; c'est la *méthode des isopérimètres.*

314. *Méthode des périmètres.* — Pour $R = 1$, la formule (1) donne $\pi = \frac{1}{2}C$; le nombre π est donc égal à la demi-circonférence de rayon 1. Par suite, le demi-périmètre de tout polygone inscrit dans cette circonférence est une valeur de π approchée par défaut, et le demi-périmètre de tout polygone circonscrit est une valeur de π approchée par excès. Donc, si on calcule, comme au n° 298, en partant du carré inscrit, les demi-périmètres des polygones réguliers inscrits de 8, 16, 32, ..., côtés, les nombres obtenus seront des valeurs par défaut de plus en plus voisines de π ; et de même, si, en partant du carré circonscrit, on calcule, comme au n° 300, les demi-périmètres des polygones réguliers circonscrits de 8, 16, 32,..., côtés, on aura des valeurs par excès de plus en plus voisines de π. Par exemple, on trouve (298, 300) pour les demi-périmètres des polygones réguliers inscrit et circonscrit de

128 côtés... 3,14127 et 3,14223; on conclut de là que π est compris entre ces deux nombres et que 3,142 est sa valeur à moins d'un millième.

On peut aussi partir de l'hexagone et calculer, comme aux nos 298 et 300, les demi-périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits de 12, 24, 48,..., côtés.

Ainsi présentée, la méthode des périmètres est très-laborieuse; mais en revanche elle est très-simple en principe; c'est d'ailleurs la méthode suivie par Archimède, l'illustre géomètre qui vivait à Syracuse 250 ans avant J. C., et auquel appartient la gloire d'avoir trouvé le premier le rapport de la circonférence au diamètre. Archimède, en partant de l'hexagone et en s'arrêtant aux polygones inscrit et circonscrit de 96 côtés, a prouvé que π était compris entre $3+\frac{10}{71}$ et $3+\frac{10}{70}$. Ce dernier nombre $3+\frac{10}{70}$ ou $\frac{22}{7}$, qui surpasse π de moins d'un demi-centième, suffit dans beaucoup d'applications.

Il convient de signaler encore la valeur par excès $\frac{355}{113}$, qui est due à Adrien Métius, et dont l'erreur n'atteint pas un demi-millionième.

Nous allons voir que la méthode des isopérimètres, publiée en 1813, à Nancy, par le géomètre Schwab, conduit à des calculs beaucoup plus simples; nous reviendrons ensuite sur la méthode des périmètres, pour montrer qu'on peut la présenter de telle sorte qu'elle conduise identiquement aux mêmes calculs que celle des isopérimètres.

315. *Méthode des isopérimètres.* — Prenons la circonférence C égale à 2; la formule (1) donne alors

$$\pi=\frac{1}{R} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\pi}=R.$$

Le nombre $\frac{1}{\pi}$ est donc la valeur du rayon de la circonférence égale à 2. Par suite, l'apothème a et le rayon r de tout polygone régulier ayant un périmètre égal à 2, sont deux valeurs approchées de $\frac{1}{\pi}$, l'une par défaut, l'autre par excès; car, la circonférence inscrite et la circonférence circonscrite à un tel polygone étant l'une moindre, l'autre plus grande que 2, leurs rayons a et r doivent comprendre le rayon R de la circonférence égale à 2 (307), c'est-à-dire le nombre $\frac{1}{\pi}$.

Cela posé, considérons le carré dont le côté est $\frac{1}{2}$: son périmètre est 2, son apothème $a_1 = \frac{1}{4}$ et son rayon $r_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Puis, à l'aide des formules du n° 301, dont la forme générale est

$$a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + r_{k-1}), \quad r_k = \sqrt{a_k \cdot r_{k-1}},$$

calculons successivement les rayons et les apothèmes a_2 et r_2, a_3 et r_3, a_4 et r_4,... des polygones réguliers isopérimètres de 8, 16, 32, ..., côtés. Dans la série

$$a_1,\ r_1,\ a_2,\ r_2,\ a_3,\ r_3, \ldots,\ a_n,\ r_n, \ldots,$$

dont chaque terme à partir du troisième est alternativement moyen arithmétique et moyen géométrique entre les deux qui précèdent, les termes de rangs impairs $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, vont en croissant et restent inférieurs à $\frac{1}{\pi}$, tandis que les termes de rangs pairs $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$, vont en décroissant (302) et restent supérieurs à $\frac{1}{\pi}$. D'ailleurs, puisque chacune des différences $r_2 - a_2$, $r_3 - a_3, \ldots, r_n - a_n, \ldots$, est moindre que le quart de la précédente (302), on aura

$$r_n - a_n < \frac{r_1 - a_1}{4^{n-1}};$$

d'où l'on voit que la différence $r_n - a_n$ peut être rendue moindre que toute quantité donnée en prenant n assez grand, et par suite que les termes de la suite

$$a_1,\ r_1,\ a_2,\ r_2,\ a_3,\ r_3, \ldots,$$

alternativement inférieurs et supérieurs au nombre $\frac{1}{\pi}$, ont ce nombre pour limite.

Si l'on remarque en outre que $r_1 = \frac{1}{4}$ est la moyenne arithmétique entre o et $\frac{1}{2}$, et que $r_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ est la moyenne géométrique entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, on arrive à la proposition suivante :

Le nombre $\frac{1}{\pi}$ est la limite vers laquelle tend la suite des nombres obtenus en partant de o et $\frac{1}{2}$, et en prenant alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique entre les deux qui précèdent.

En prolongeant le calcul de ces moyennes jusqu'à ce que deux termes consécutifs aient $m + 1$ décimales communes, on aura $\frac{1}{\pi}$ à moins d'une unité décimale de l'ordre $m + 1$, et par suite, en divisant 1 par le nombre ainsi trouvé, on aura π à moins d'une unité du $m^{ième}$ ordre décimal (*).

Voici le tableau des calculs jusqu'au polygone de 128 côtés :

Nombre des côtés.	Apothèmes.	Rayons.
4	$a_1 = 0,2500000$	$r_1 = 0,3535534$
8	$a_2 = 0,3017767$	$r_2 = 0,3266407$
16	$a_3 = 0,3142087$	$r_3 = 0,3203644$
32	$a_4 = 0,3162867$	$r_4 = 0,3188217$
64	$a_5 = 0,3180541$	$r_5 = 0,3184377$
128	$a_6 = 0,3182459$	$r_6 = 0,3183418$

On trouve ainsi pour $\frac{1}{\pi}$ la valeur 0,318 à moins d'un millième, et même 0,3183 à moins d'un dix-millième; par suite, en divisant l'unité par ce dernier nombre, on obtient pour π la valeur 3,142 à moins d'un millième.

(*) Car si l'on désigne respectivement par ε' et ε les erreurs correspondantes de π et de $\frac{1}{\pi}$, on a, en négligeant le produit $\pi\varepsilon\varepsilon'$,

$$\varepsilon' = \pi^2\varepsilon, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon' < 10\varepsilon.$$

Ce résultat est le même que celui du numéro précédent; mais les calculs sont ici beaucoup plus simples, surtout si l'on extrait les moyennes géométriques par logarithmes : tout se réduit à des additions.

316. Ce procédé est encore susceptible de plusieurs améliorations très-importantes.

Supposons qu'on veuille obtenir π à moins d'une unité du $m^{ième}$ ordre décimal; il suffira de calculer $\frac{1}{\pi}$ à moins d'une unité de l'ordre $m+1$.

On commencera le calcul comme dans le numéro précédent, et on le continuera jusqu'à ce qu'on arrive à deux nombres a_n et r_n tels, que l'expression

$$\frac{(r_n - a_n)^2}{8a_n}$$

soit moindre qu'une unité décimale e l'ordre $m+1$. Alors l'expression

$$\frac{(r_k - a_k)^2}{8a_k},$$

dans laquelle k est supérieur à n, sera à fortiori moindre qu'une unité du $(m+1)^{ième}$ ordre décimal, puisque a_k est plus grand que a_n et r_k moindre que r_n; et par suite (261), dans le calcul de $r_{n+1}, r_{n+2}, \ldots$, on pourra, en restant dans les limites de l'approximation voulue, remplacer la formule

$$r_k = \sqrt{a_k \cdot r_{k-1}} \quad \text{par} \quad r_k = \frac{1}{2}(a_k + r_{k-1}),$$

c'est-à-dire substituer aux moyennes géométriques des moyennes arithmétiques.

On peut même éviter complétement ces derniers calculs. On sait, en effet (262), que la limite vers laquelle tend la suite des nombres qu'on obtient en partant de deux nombres donnés a_n et r_n et en prenant successivement la moyenne arithmétique entre les deux qui précèdent, est égale à

$$a_n + \frac{2}{3}(r_n - a_n);$$

on aura donc, avec une erreur moindre qu'une unité décimale de l'ordre $m+1$,

$$\frac{1}{\pi} = a_n + \frac{2}{3}(r_n - a_n).$$

Ainsi, si l'on demande π à moins d'une unité du sixième ordre décimal, auquel cas il faudra calculer $\frac{1}{\pi}$ avec sept décimales exactes, on s'arrêtera au polygone de 64 côtés. En effet, le tableau qui précède donne

$$\begin{aligned} r_5 &= 0,3184377 \\ a_5 &= 0,3180541 \\ \hline r_5 - a_5 &= 0,0003836 \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\frac{(r_5-a_5)^2}{8a_5} < \frac{(0.0004)^2}{8.0,318} < \frac{16}{25}\cdot\frac{1}{10^7}.$$

On aura donc, avec 7 décimales exactes,

$$\frac{1}{\pi} = a_5 + \frac{2}{3}(r_5 - a_5) = 0,3180541 + 0,0002557 = 0,3183098,$$

et enfin

$$\pi = 3,141593,$$

à moins d'un millionième.

317. *Retour à la méthode des périmètres.* — Nous avons dit (314) que la méthode des périmètres convenablement dirigée conduisait à des calculs identiques aux précédents.

En effet, p et P étant les périmètres de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit, et p' et P' étant les périmètres des deux polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double, on a (303)

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{p}\right), \quad \frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{P'}\cdot\frac{1}{p}}.$$

Les nombres

$$\frac{1}{P}, \quad \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{P'}, \quad \frac{1}{p'}, \ldots,$$

sont donc, à partir du troisième, alternativement moyens arithmétiques et moyens géométriques entre les deux qui précèdent. D'ailleurs, si l'on prend le rayon du cercle égal à $\frac{1}{2}$, on a $\pi = C$ ou $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{C}$; et, par suite, $\frac{1}{\pi}$ est la limite de la suite formée par les inverses des périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits dont le nombre des côtés va en doublant. Enfin, si l'on part des carrés circonscrit et inscrit, les deux premiers termes de la série sont $\frac{1}{P} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{p} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, et l'on retombe sur le théorème de Schwab énoncé au n° 315.

§ IX. — APPENDICE.

Principe des signes.

318. Nous allons exposer succinctement plusieurs théories qui sont d'un grand secours dans la résolution des problèmes, et dont quelques-unes sont même de puissantes méthodes d'investigation.

319. Il convient d'indiquer avant tout l'usage des signes + et — pour exprimer le sens des segments.

Fig. 203.

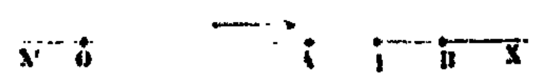
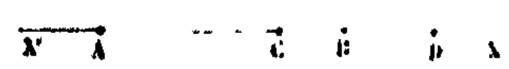


Fig. 204.



Deux points A et B étant situés sur une droite indéfinie X'X (*fig.* 203), on peut parcourir l'intervalle qui les sépare en allant dans le sens de la flèche ou dans le sens contraire; de là deux segments AB et BA de même longueur, d'origines différentes A et B, et de sens opposés. Pour déterminer un segment, il faut donner sa *longueur*, son *origine* et le *sens* qui lui convient. On indique ce sens en affectant du signe + les nombres qui mesurent les longueurs des segments comptés dans un sens convenu, et du signe — les nombres qui mesurent les longueurs des segments comptés dans le sens opposé. Ainsi, on a

$$AB = -BA.$$

320. On voit aisément que, par suite de cette condition, en désignant par I le milieu du segment AB, on a toujours

$$OB - OA = AB, \quad OA + OB = 2OI, \quad OA.OB = \overline{OI}^2 - \overline{AI}^2,$$

quelles que soient les positions relatives des trois points O, A, B, sur la droite indéfinie X'X.

321. Nous avons prouvé, au n° 192, que A et B étant deux points pris sur une droite indéfinie X'X (*fig.* 204), il existait sur cette droite deux points C et D situés, l'un sur AB, l'autre en dehors, et tels que les rapports $\frac{CA}{CB}$, $\frac{DA}{DB}$, fussent égaux. Cette conclusion n'est exacte que relativement aux valeurs absolues des segments; en réalité, les deux rapports sont égaux et de signes contraires; le premier est négatif, le second positif, et l'on a

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB} \quad \text{ou} \quad \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1.$$

Ainsi, lorsqu'on a égard à la fois aux valeurs absolues et aux signes des segments, il n'existe sur la droite indéfinie X'X qu'un seul point qui divise AB dans un rapport donné. Ce point est situé entre A et B ou sur le prolongement de AB, suivant que le rapport donné est négatif ou positif.

322. Le principe des signes permet de raisonner d'une manière générale, et de débarrasser un grand nombre de théorèmes de certaines conditions de situation qui rendraient la démonstration pénible et l'énoncé obscur.

Rapport anharmonique.

323. On nomme *rapport anharmonique* de quatre points A, B, C, D, situés en ligne droite, le quotient des rapports des distances de deux quelconques de ces points aux deux autres. Tels sont, par exemple (*fig.* 204), les quotients

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}, \quad \frac{DA}{DC} : \frac{BA}{BC}, \ldots$$

que nous désignerons respectivement par (ABCD), (ACDB),... (*).

Avec les quatre mêmes points A, B, C, D, on peut former vingt-quatre rapports anharmoniques, dont six seulement sont distincts. Lorsque, dans un théorème, nous parlerons du rapport anharmonique de quatre points, sans indiquer spécialement l'un de ces rapports, il faudra entendre que le théorème s'applique indifféremment à l'un quelconque d'entre eux.

324. Trois points A, B, C, étant donnés d'une manière quelconque sur une droite indéfinie, on peut déterminer sur cette droite un quatrième point D tel, que le rapport anharmonique des quatre points A, B, C, D, ait une valeur donnée λ en grandeur et en signe. Car la relation

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \lambda, \quad \text{ou} \quad \frac{DA}{DB} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{CA}{CB},$$

(*) Il importe de se familiariser avec cette notation. En appelant *premier point* celui qui répond à la première lettre à gauche dans la parenthèse, *deuxième point* celui qui répond à la seconde lettre à gauche, etc., on prend toujours le rapport des distances du troisième point au premier et au deuxième, et on le divise par le rapport des distances du quatrième point au premier et au deuxième.

dont le second membre est entièrement connu, détermine (321) le point D. Toutefois, pour que ce point D soit distinct des trois premiers, il faut que λ n'ait aucune des trois valeurs 0, ∞ ou 1. En effet, si λ était nul, on aurait, en vertu de la relation précédente, $DB = 0$, et D coïnciderait avec B; si λ était infini, on aurait $DA = 0$, et D coïnciderait avec A; enfin, si λ était égal à $+1$, on aurait $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}$, et D (321) coïnciderait avec C. Ainsi, *le rapport anharmonique de quatre points distincts peut avoir une valeur quelconque positive ou négative, excepté les valeurs* 0, ∞ et $+1$.

325. Le rapport anharmonique de quatre points ABCD n'est pas altéré lorsqu'on échange entre eux deux de ces points, pourvu qu'en même temps on échange entre eux les deux autres. Ainsi l'on a

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA.DB}{CB.DA},$$

$$(CDAB) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC.BD}{AD.BC};$$

et par suite

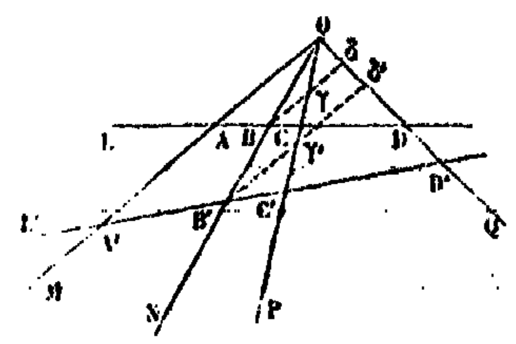
$$(ABCD) = (CDAB).$$

326. On donne le nom de *faisceau* à un système quelconque (*fig.* 205) de droites OM, ON, OP, OQ, issues d'un même point O. Le point O est dit le *centre* du faisceau, dont les droites OM, ON, OP, OQ, sont appelées les *rayons*.

THÉORÈME.

327. *Lorsqu'un faisceau de quatre droites* OM, ON, OP, OQ, *est coupé par deux transversales* L et L', *le rapport anharmonique des quatre points* A, B, C, D, *déterminés sur la première transversale, est égal au rapport anharmonique des quatre points* A', B', C', D', *déterminés sur la seconde* (*fig.* 205).

Fig. 205.



Nous allons démontrer, par exemple, l'égalité (ABCD) = (A' 'C'D').

Les rapports $\frac{CA}{CB}$, $\frac{C'A'}{C'B'}$, ayant le même signe ainsi que les rapports $\frac{DA}{DB}$, $\frac{D'A'}{D'B'}$, il en sera de même pour les quotients ou rapports anharmoniques $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$; $\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}$; et il reste à démontrer l'égalité des valeurs absolues de ces derniers rapports.

Or, en menant par le point B la parallèle $B\gamma\delta$ à OA, on a, par les triangles semblables CAO et $CB\gamma$, DAO et $DB\delta$, les proportions

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{\gamma B}, \quad \frac{DA}{DB} = \frac{OA}{\delta B},$$

qui, divisées membre à membre, donnent

$$(ABCD) = \frac{\delta B}{\gamma B}.$$

En menant par B' la parallèle $B'\gamma'\delta'$ à OA, on obtiendrait de même

$$(A'B'C'D') = \frac{\delta' B'}{\gamma' B'}.$$

L'égalité manifeste (220) des seconds membres des deux relations qui précèdent, prouve l'égalité des premiers.

On peut considérer la figure rectiligne A'B'C'D' comme la *perspective* ou *projection concourante* de la figure rectiligne ABCD, cette projection étant faite du centre O et suivant les rayons projetants OA, OB, OC, OD. De là, cet autre énoncé fort commode du théorème qui nous occupe : *le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est projectif.* Si le centre O est à l'infini, les rayons OA, OB, OC, OD, sont parallèles, et le théorème subsiste.

SCOLIES.

328. On nomme *rapports anharmoniques d'un faisceau* de quatre droites les rapports anharmoniques des quatre points déterminés par ce faisceau sur une transversale quelconque. Ainsi, (ABCD), (ACDB),... (323) sont des rapports anharmoniques du faisceau formé par les droites OM, ON, OP, OQ (*fig.* 205). On désigne ces rapports anharmoniques du faisceau par la notation (O.ABCD), (O.ACDB),....

Il résulte d'ailleurs du n° 325 que le rapport anharmonique d'un faisceau ne change pas de valeur lorsqu'on échange deux rayons quelconques, pourvu qu'on échange en même temps les deux autres; en sorte qu'on a, par exemple, (O.ABCD) = (O.CDAB).

On entend par angles d'un faisceau les six angles formés par ses quatre rayons considérés deux à deux. En se reportant à la démonstration du n° 327, on voit que le rapport anharmonique d'un faisceau n'est pas modifié, quand quelques-uns de ses angles se trouvent remplacés par leurs suppléments.

329. Il est évident que deux faisceaux qui ont respectivement les mêmes

angles ont les mêmes rapports anharmoniques. Voici deux exemples importants de faisceaux de cette nature.

1° *Si l'on joint un point quelconque O d'une circonférence à quatre points fixes A, B, C, D, de cette circonférence, le rapport anharmonique du faisceau ainsi obtenu est constant, quelle que soit la position du point O sur la circonférence.* Il résulte, en effet, des propriétés des angles inscrits que le point O se déplaçant, et les points A, B, C, D, restant fixes sur la circonférence, le faisceau conserve les mêmes angles. Ce rapport constant est ce qu'on appelle le *rapport anharmonique des quatre points* A, B, C, D. *du cercle.*

2° *Si l'on joint le centre d'un cercle aux points où quatre tangentes fixes sont coupées par une cinquième tangente, le rapport anharmonique du faisceau ainsi obtenu est constant, quelle que soit la cinquième tangente.* En effet, l'angle sous lequel on voit du centre la portion d'une tangente mobile comprise entre deux tangentes fixes, est évidemment égal à la moitié de l'angle des deux rayons qui aboutissent aux points de contact de ces tangentes fixes. Cet angle est donc constant, et par suite le faisceau considéré conserve les mêmes angles, quelle que soit la position de la cinquième tangente.

On voit par là que le *rapport anharmonique des points suivant lesquels une tangente mobile est coupée par quatre tangentes fixes est constant.* Ce rapport est ce qu'on appelle le *rapport anharmonique des quatre tangentes fixes.*

Enfin, *le rapport anharmonique de quatre tangentes à un cercle est égal au rapport anharmonique des quatre points de contact;* car le faisceau partant du centre du cercle, et aboutissant aux points d'intersection de ces quatre tangentes avec une cinquième, a ses rayons respectivement perpendiculaires à ceux du faisceau partant du point de contact de la cinquième tangente et aboutissant aux points de contact des quatre tangentes considérées (328).

THÉORÈME.

330. *Quand deux faisceaux de quatre droites* OA, OB, OC, OD, *et* OA′, OB′, OC′, OD′, *ont un rapport anharmonique égal et un rayon homologue commun* OO′, *les trois points* β, γ, δ, *d'intersection des autres rayons homologues pris deux à deux, sont en ligne droite* (*fig.* 206).

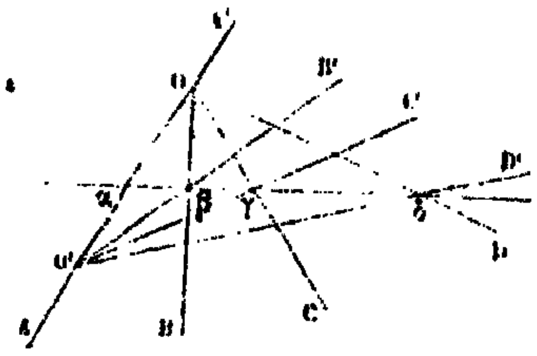
En effet, désignons respectivement par α, δ, δ', les points où la

THÉORÈME.

332. *Quand deux figures rectilignes de quatre points* A, B, C, D, *et* A′, B′, C′, D′, *ont un rapport anharmonique égal et un point homologue commun* A, *les trois droites* BB′, CC′, DD′, *qui joignent les autres points homologues pris deux à deux, concourent en un même point* O (*fig.* 207).

En effet, soit O le point de concours de BB′ et de CC′, et désignons droite $\beta\gamma$ rencontre OO', OD, O'D';

Fig. 206.



on aura, d'après l'hypothèse (328),

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma\delta').$$

Donc δ et δ' coïncident (324), et les trois points β, γ, δ, sont en ligne droite.

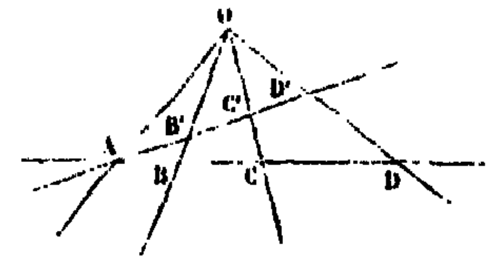
Corollaire.

331. *Lorsque deux faisceaux de quatre droites correspondantes ont un rapport anharmonique égal, les autres rapports anharmoniques sont égaux de part et d'autre.*

En effet, on plaçant les deux faisceaux de façon que deux rayons homologues soient sur la même droite, l'égalité de l'un des rapports anharmoniques exigera que les autres rayons homologues se coupent sur une même droite, et alors les deux faisceaux auront bien tous leurs rapports anharmoniques égaux, puisque ces rapports ne sont autres (328) que ceux des quatre points déterminés par les deux faisceaux sur une transversale commune.

par δ le point où OD' rencontre la

Fig. 207.



droite ABC; on aura (327)

$$(A'B'C'D') = (ABC\delta).$$

Mais on a par hypothèse

$$(A'B'C'D') = (ABCD);$$

donc

$$(ABC\delta) = (ABCD).$$

Par suite (324) δ coïncide avec D, et la droite DD' passe par le point O.

Corollaire.

332. *Lorsque deux figures rectilignes de quatre points correspondants ont un rapport anharmonique égal, les autres rapports anharmoniques sont égaux de part et d'autre.*

En effet, en plaçant les deux droites qui portent les deux figures de manière que deux points homologues coïncident, l'égalité de l'un des rapports anharmoniques exigera que les deux figures soient la perspective l'une de l'autre, et, dès lors (327), tout rapport anharmonique de l'une sera égal au rapport anharmonique analogue de l'autre.

Applications.

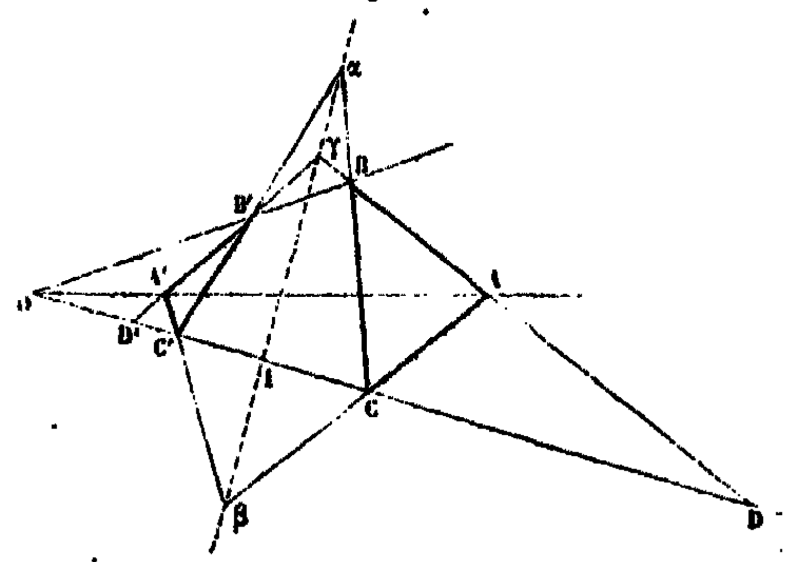
334. Il faut voir dans le *Traité de Géométrie supérieure* de M. Chasles le merveilleux parti qu'on peut tirer de la théorie si simple du rapport anharmonique. L'emploi des théorèmes qui précèdent (327, 330, 332)

constitue, de toutes les méthodes géométriques, peut-être la plus générale et la plus lumineuse, comme on le verra surtout lorsque nous traiterons de l'homographie et de l'involution. Nous nous bornerons ici à quelques exemples; nous rencontrerons d'ailleurs d'autres applications dans le courant même de cet appendice.

335. *Quand deux triangles* ABC, A'B'C', *ont leurs sommets situés deux à deux sur trois droites* OA'A, OB'B, OC'C, *concourantes en un même point* O, *leurs côtés se rencontrent deux à deux* (BC *et* B'C', AC et A'C', AB et A'B') *en trois points* α, β, γ, *situés en ligne droite* (*fig.* 208).

336. *Quand deux triangles* ABC, A'B'C', *sont tels, que leurs côtés se coupent deux à deux* (BC et B'C', AC et A'C', AB et A'B') *en trois points* α, β, γ, *situés en ligne droite, leurs sommets sont situés deux à deux sur trois droites* OA'A, OB'B, OC'C, *concourantes en un même point* O (*fig.* 208).

Fig. 208.



En effet, désignons par D et D' les points où la droite OC'C rencontre respectivement les côtés AB et A'B'. Le faisceau des quatre droites Oγ, OB, OA, OC, étant coupé par les deux transversales AB et A'B', on a (327)

$$(\gamma BAD) = (\gamma B'A'D'),$$

et par suite (328)

$$(C.\gamma BAD) = (C'.\gamma B'A'D').$$

Or, ces deux faisceaux ont un rayon homologue commun DD'; donc les

En effet, soit I l'intersection de la droite $\alpha\beta\gamma$ et de CC'; on aura (328)

$$(C.\alpha\gamma I\beta) = (C'.\alpha\gamma I\beta),$$

Donc, en coupant le premier faisceau par AB et le second par A'B', et en appelant D et D' les points où ces droites coupent CC', on aura (327, 331)

$$(B\gamma DA) = (B'\gamma D'A').$$

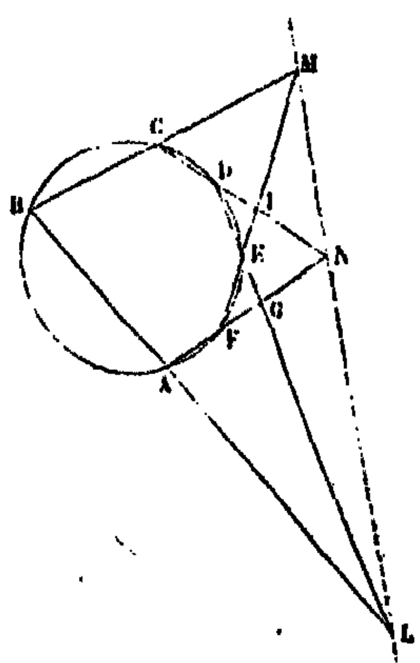
Or, ces deux figures rectilignes ont un point homologue commun γ; donc les droites BB', DD', AA', qui points de concours γ, α, β, des trois autres couples de rayons homologues (330) sont en ligne droite.

joignent les autres points homologues deux à deux, concourent (332) en un même point O.

Ces deux théorèmes, attribués à Desargues, géomètre du XVII^{e} siècle, ont été repris par M. Poncelet (*Traité des propriétés projectives*), qui en a fait la base de sa *Théorie des figures homologiques*. Les deux triangles ABC, A'B'C', qui satisfont aux conditions précédentes, sont dits *homologiques*; le point O et la droite $\alpha\beta\gamma$ sont appelés le *centre et l'axe d'homologie*.

337. *Dans tout hexagone* ABCDEF *inscrit à une circonférence, les points de concours* L, M, N, *des trois couples de côtés opposés* AB et DE, BC et EF, CD et AF, *sont en ligne droite* (*fig.* 209).

Fig. 209.



En effet, on a (329, 1°)

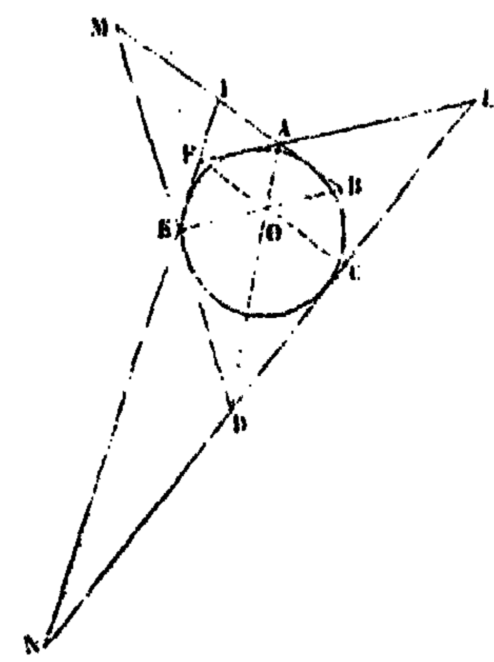
$$(A.BFED) = (C.BFED).$$

Par suite (327), en coupant le premier faisceau par la droite DE, le second par la droite FE, et nommant G l'intersection de AF et de DE, I l'intersection de EF et de CD, on aura

$$(LGED) = (MFEI).$$

338. *Dans tout hexagone* ABCDEF *circonscrit à un cercle, les trois diagonales* AD, BE, CF, *qui unissent les sommets opposés, se coupent en un même point* O (*fig.* 210).

Fig. 210.



En effet, soient I et M les points où le côté AB rencontre FE et DE, et L et N les points où CD rencontre AF et FE ; on aura (329, 2°), en considérant les deux côtés non contigus AB et CD coupés par les quatre autres,

$$(BAIM) = (CLND).$$

Par suite,

$$(E.BAIM) = (F.CLND).$$

Or, ces deux faisceaux ont un rayon

Or, ces deux figures rectilignes ont un point homologue commun E; donc (332) les droites LM, GF, DI, qui joignent les autres points homologues deux à deux, se coupent en un même point N. Les trois points L, M, N, sont dès lors en ligne droite.

Ce théorème, dû à Pascal, et la démonstration si simple que nous venons d'exposer, subsistent quand même l'hexagone cesse d'être convexe.

homologue commun IN; donc (330) les points de concours O, A, D, des trois autres couples EB et FC, EA et FL, EM et FD, de rayons homologues, sont en ligne droite. Les trois droites AD, BE, CF, passent donc par un même point O.

Ce théorème est dû à Brianchon (*Journ. de l'École Polyt.*, 13ᵉ cahier), qui l'a déduit du théorème de Pascal par la considération des polaires, comme nous le verrons bientôt.

339. Si l'on considère les théorèmes des nᵒˢ 330, 335, 337 d'une part, et les théorèmes des nᵒˢ 332, 336, 338 de l'autre, on voit que, dans les premiers, il s'agit de *points en ligne droite*, et dans les seconds de *droites qui concourent en un même point*. On distingue en effet, dans la science de l'étendue, deux genres de propositions, les unes se rapportant à des *points*, les autres à des *droites*, et se correspondant en vertu de certaines lois auxquelles on a donné le nom de *principe de dualité*. Un des grands avantages du rapport anharmonique est de se prêter indifféremment à ces deux genres de propositions *corrélatives*, et d'en fournir des démonstrations directes et corrélatives à leur tour. On peut voir, en effet, que, dans les propositions que nous avons placées en regard l'une de l'autre, on passe de l'énoncé et de la démonstration de l'une à l'énoncé et à la démonstration de l'autre, en substituant certains faisceaux de droites concourantes à certaines séries rectilignes de quatre points, et réciproquement.

340. Le théorème fondamental du n° 327 était connu des anciens; il se trouve dans les *Collections mathématiques* de Pappus, qui vivait à Alexandrie à la fin du IVᵉ siècle. « Aucune autre proposition, dit M. Chasles dans la préface du *Traité de Géométrie supérieure*, ne me paraît aussi propre à servir de lien entre les diverses parties d'une figure dont on veut *découvrir* ou *démontrer* les propriétés. La proposition la plus fréquemment employée est celle de la proportionnalité entre les côtés des triangles semblables. Mais ces triangles n'existent pas en général dans les données de la question, et il faut chercher à les former par des lignes auxiliaires, tandis que les rapports anharmoniques s'aperçoivent presque toujours dans la figure même ou s'y peuvent former aisément. »

Proportion harmonique.

341. On dit que quatre points en ligne droite A, B, C, D (*fig.* 212), forment un *système harmonique* lorsque leur rapport anharmonique (ABCD)

est égal à -1, c'est-à-dire lorsqu'on a (323)

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1. \qquad (1)$$

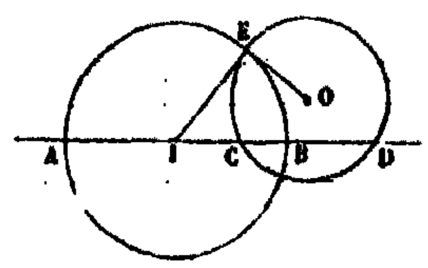
On dit en outre que les points C et D sont *conjugués harmoniques* par rapport aux points A et B, ou qu'ils *divisent harmoniquement* le segment AB; et, de même, que les points A et B *sont conjugués harmoniques* par rapport aux points C et D ou qu'ils *divisent harmoniquement* le segment CD. Enfin la relation (1) porte le nom de *proportion harmonique*. Cette qualification d'*harmonique*, due aux géomètres grecs, provient de ce que la proportion précédente jouait un certain rôle dans leur théorie des tons musicaux. L'épithète *anharmonique* est due à M. Chasles.

Il résulte des raisonnements faits au n° 192: 1° *que les points conjugués* C *et* D *sont toujours situés du même côté par rapport au milieu* I *du segment* AB; 2° *que si* C *se confond avec* I, *son conjugué* D *est à l'infini, et inversement que le conjugué de l'∞ est le point* I. On tirerait d'ailleurs ces mêmes conséquences de la relation (1), laquelle montre en outre: 1° que *si* A *et* B *coïncident en un point* M *différent de* C, D *coïncide avec* M; car on a alors $\frac{DM}{DM} = -1$, d'où $DM = -DM$, $2DM = 0$, $DM = 0$; 2° que *si* A *et* B *étant distincts,* C *coïncide avec l'un d'eux, il en est de même de* D; car si $CA = 0$, on a $DA = 0$; et si $CB = 0$, on a $DB = 0$. On voit par là que la proportion harmonique détermine toujours le quatrième point, quand on connaît les trois autres, à moins que ceux-ci ne se confondent en un seul, auquel cas le quatrième point reste indéterminé.

THÉORÈME.

342. *Lorsqu'un segment* AB *est divisé harmoniquement par deux points* C *et* D, *la moitié de ce segment est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu* I *aux points conjugués* C *et* D, *et réciproquement* (*fig.* 211).

Fig. 211.



En d'autres termes, les relations

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1, \qquad (1)$$

$$\overline{IA}^2 = IC.ID, \qquad (2)$$

sont équivalentes. On passe, en effet, de l'une à l'autre à l'aide des égalités

$$CA = IA + IC, \quad DA = DI + IA,$$
$$CB = IA - IC, \quad DB = DI - IA.$$

COROLLAIRES.

343. *Tout cercle passant par* C *et* D *coupe orthogonalement le cercle décrit sur* AB *comme diamètre* (*fig.* 211). Car, E étant l'un des deux points communs aux deux circonférences, la relation $IC.ID = \overline{IA}^2 = \overline{IE}^2$, qu'on suppose ici satisfaite, prouve (248) que le cercle O est tangent en E au rayon IE, c'est-à-dire que l'angle IEO est droit.

Inversement, *quand deux cercles* I *et* O *se coupent orthogonalement, ils divisent harmoniquement toute droite passant par le centre de l'un d'eux;* car l'angle IEO étant droit par hypothèse, le rayon IE est tangent au cercle O, et l'on a (247) $\overline{IE}^2$ ou $\overline{IA}^2 = IC.ID$.

344. La relation (2) montre que IC augmente lorsque ID diminue; en sorte que, si C' et D' sont deux nouveaux points conjugués harmoniques par rapport à A et à B, et situés comme C et D à droite de I, les segments CD et C'D' seront compris l'un dans l'autre. Ils seraient extérieurs l'un à l'autre si C' et D' étaient à gauche de I. Donc, *quand deux segments* CD, C'D', *sont conjugués harmoniques par rapport à un troisième* AB, *ils sont compris l'un dans l'autre, ou ils n'ont aucune partie commune.* Et par suite, *lorsque deux segments empiètent en partie l'un sur l'autre, on ne peut pas déterminer deux points qui les divisent l'un et l'autre harmoniquement.*

En rapprochant ces propriétés de celles du numéro précédent, on voit que, *lorsque deux cercles n'ont aucun point commun, il existe une circonférence qui les coupe l'un et l'autre orthogonalement et qui a son centre sur la ligne des centres des deux cercles; cette circonférence n'existe plus lorsque les deux cercles se coupent.*

345. On appelle *faisceau harmonique* tout faisceau de quatre droites OA, OB, OC, OD, dont le rapport anharmonique (O.ABCD) est égal à -1, c'est-à-dire (328) tout faisceau qui détermine sur une transversale quelconque un système de quatre points harmoniques (*fig.* 212). On dit alors que les *rayons* OC et OD sont *conjugués harmoniques* par rapport aux rayons OA et OB, ou qu'ils *divisent harmoniquement l'angle* OAB; et, de même, que les *rayons* OA et OB sont *conjugués harmoniques* par rapport aux *rayons* OC et OD, ou qu'ils *divisent harmoniquement l'angle* COD.

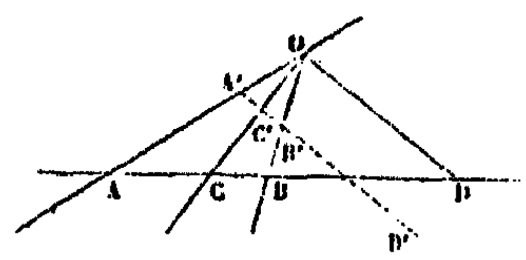
Il est clair, d'après ce qui précède, que, si par un point C pris d'une manière quelconque dans le plan d'un angle OAB on mène diverses sécantes telles que ACB, et, si l'on prend sur chaque sécante le point D conjugué harmonique du point C par rapport au segment AB intercepté entre les côtés de l'angle, le lieu du point D sera le rayon OD conjugué harmonique de OC par rapport à l'angle AOB. Ainsi, pendant que la sécante tourne autour du point C, le conjugué D de ce point fixe décrit une droite fixe OD. On donne à la droite OD le nom de *polaire* du point C *par rapport à l'angle* AOB, et au point C le nom de *pôle* de la droite OD par rapport au même angle AOB.

THÉORÈME.

346. *Dans un faisceau harmonique* OA, OB, OC, OD, *toute transversale* A'C'B'D', *parallèle à l'un des rayons* OD, *est coupée par les trois autres rayons en deux parties égales* (*fig.* 212).

En effet, dans le système harmonique A'B'C'D', le point D' étant à l'infini, puisque A'D' est parallèle à OD, son conjugué C' doit être au milieu du segment A'B' (311).

Fig. 212.



347. Réciproquement, *un faisceau de quatre droites* OA, OC, OB, OD, *est harmonique si une parallèle* A'C'B'D' *à l'un des rayons est divisée en deux parties égales par les trois autres.*

En effet, le point C' étant le milieu du segment A'B', ce segment est divisé harmoniquement par le point C' et par le point D' situé à l'infini sur A'B', c'est-à-dire par le point C' et par le point d'intersection de A'B' et de OD. Le faisceau divisant harmoniquement la transversale particulière A'C'B'D' divise harmoniquement toute autre transversale ACBD (327), et par suite est un faisceau harmonique.

COROLLAIRES.

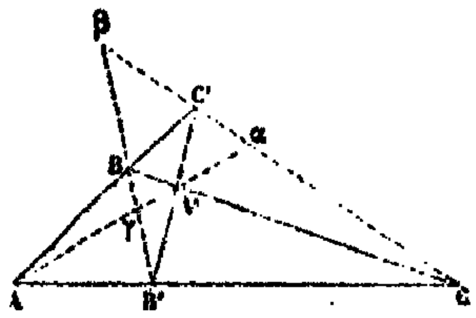
348. *Lorsque, dans un faisceau harmonique, deux rayons conjugués,* OC *et* OD *sont rectangulaires, ces rayons sont les bissectrices des deux angles supplémentaires formés par les deux autres rayons* OA *et* OB; car une transversale A'C'B', perpendiculaire à OC, étant alors parallèle à OD, on a A'C' = C'B'; par suite, les triangles rectangles OC'A', OC'B', sont égaux, et OC est la bissectrice de l'angle AOB.

La proposition réciproque : *Un angle quelconque* AOB *est divisé harmoniquement par sa bissectrice* OC *et celle* OD *de son supplément,* résulterait pareillement du n° 347. Elle a d'ailleurs été démontrée directement au n° 199.

THÉORÈME.

349. *Chacune des trois diagonales d'un quadrilatère complet est divisée harmoniquement par les deux autres* (*fig.* 213).

Fig. 213.



On appelle *quadrilatère complet* le système de quatre droites CB'A, CA'B, C'BA, C'A'B', se coupant deux à deux en six points A, B, C, A', B', C', qu'on nomme les *sommets* du quadrilatère. Il y a trois diagonales AA', BB', CC', qui forment un triangle αβγ, et il s'agit de prouver que chacun des systèmes AγA'α, B'γBβ, CαC'β, est harmonique.

Or, soient x le conjugué harmonique de α par rapport à CC', et z le conjugué harmonique de γ par rapport à BB'; x et z devront être l'un et l'autre sur la droite (345) conjuguée harmonique de AA' par rapport à l'angle CAC', et aussi sur la droite conjuguée harmonique de AA' par rapport à l'angle CA'C'; donc ces deux points x et z coïncident; par suite, ils ne diffèrent pas de l'intersection β des droites BB' et CC', et les systèmes CαC'β, B'γBβ, sont harmoniques. On démontrerait de même que AγA'α l'est aussi.

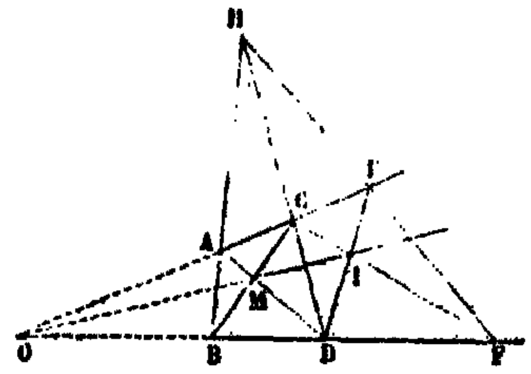
COROLLAIRES.

350. De là résulte un moyen fort simple de construire avec la règle seule le quatrième point harmonique à trois points donnés, C, α, C', par exemple (*fig.* 213). Menez par α une droite quelconque αA'A; en joignant aux points C et C' deux points A et A' de cette droite, vous formerez un quadrilatère ABA'B' dont la diagonale BB' déterminera le point cherché β.

351. On voit en outre que, *si, par un point* β *pris dans le plan d'un angle* CAC', *on mène deux transversales* βBB', βC'C, *le lieu des points d'intersection* A' *des droites* BC, B'C', *est la polaire du point* β *par rapport à l'angle* CAC'.

De là résulte un moyen fort simple de construire avec la règle seule la polaire d'un point par rapport à un angle. On emploie parfois ce procédé dans les épures pour tracer une droite qui passe par un point donné M et par le point de concours de deux autres droites AE et BF, lorsque ce point de concours O est hors du cadre (*fig.* 214).

Fig. 214.



On mène alors par M deux sécantes AD, BC; on joint BA et DC, qui se coupent en un certain point H. On fait partir de H une nouvelle sécante HEF; on joint CF et DE, qui se coupent en I, et la droite MI est la droite demandée. Ce procédé est commode lorsque le point M est notablement plus rapproché de l'une des deux lignes AE et BF que de l'autre, attendu que le point H se trouve alors généralement dans les limites de la feuille de dessin; mais il n'a aucune valeur graphique lorsque le point M est très-rapproché de la bissectrice de l'angle O, car alors le point H est très-éloigné et sort généralement du cadre.

Pôle et polaire dans le cercle.

THÉORÈME.

352. *Si, par un point* O *pris dans le plan d'un cercle* C, *on mène une sécante quelconque* OFE, *et qu'on détermine le conjugué harmonique* I *du point* O *par rapport à* EF, *le lieu géométrique du point* I, *lorsque la sécante tourne autour du point* O, *est une ligne droite perpendiculaire au diamètre* AB *qui passe par le point* O (*fig.* 215 et 216).

Fig. 215.

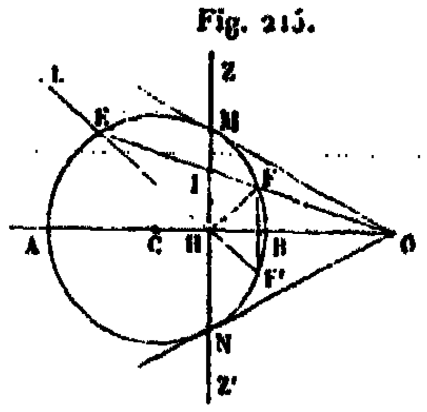
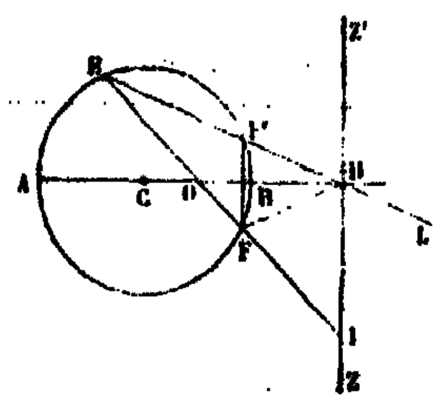


Fig. 216.



En effet, déterminons le point du lieu qui est sur le diamètre AB, c'est-à-dire le point H conjugué harmonique de O par rapport à AB. Il suffit pour cela (201) de joindre le point E au symétrique F' de F par rapport à AB. Mais alors la droite HO est évidemment bissectrice de l'angle FHF', et, par suite, la perpendiculaire HZ est bissectrice de l'angle supplémentaire FHL. Or, dans tout triangle HEF, la base EF est divisée harmoniquement (193) par les bissectrices HZ et HO de l'angle au sommet et de son supplément. Donc le point I est situé sur la perpendiculaire HZ au diamètre AB.

COROLLAIRES.

353. On dit que le point O est le pôle de la droite HZ, et que la droite HZ est la *polaire* du point O par rapport au cercle C.

Le diamètre AB qui passe par le pôle étant divisé harmoniquement par le pôle O et le pied H de la polaire, on a (342) en grandeur et en signe la relation

$$CH.CO = R^2,$$

dans laquelle R désigne le rayon du cercle C. Donc *le rayon du cercle est moyen proportionnel entre les distances du centre au pôle et à la polaire.*

De cette relation, ou bien de ce qui a été dit au n° 341 sur les positions relatives des deux points qui divisent harmoniquement un segment donné, résultent les propriétés suivantes :

1° Le pôle et la polaire sont situés d'un même côté du centre C; la polaire est extérieure au cercle si le pôle est intérieur; elle coupe le cercle si le pôle est extérieur. Dans ce dernier cas, *la polaire coïncide avec la corde de contact* MN *des tangentes issues du pôle* O (*fig.* 215); car, lorsque E et F se confondent en M, le point I, qui est toujours compris entre eux, vient aussi en M, de sorte que ce point de contact appartient au lieu des points I, c'est-à-dire à la polaire du point O.

2° *La polaire du centre est à l'infini, et la polaire d'un point qui s'est éloigné indéfiniment dans une direction donnée est le diamètre perpendiculaire à cette direction.* — Inversement, le pôle d'une droite située à l'infini est au centre, et le pôle d'un diamètre est à l'infini sur la perpendiculaire à ce diamètre.

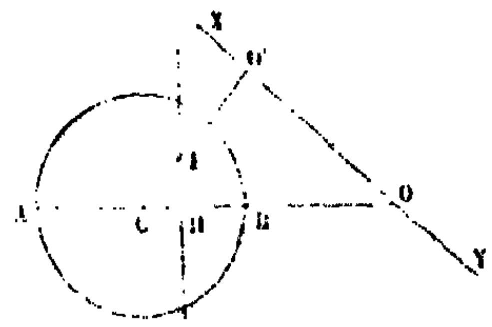
3° *La polaire d'un point du cercle est la tangente en ce point*; et inversement, le pôle d'une tangente est son point de contact.

THÉORÈME.

354. *Les polaires de tous les points d'une droite passent par le pôle de cette droite*; et inversement, *les pôles de toutes les droites qui passent par un point sont situés sur la polaire de ce point* (*fig.* 217).

En effet, soient XY une droite quelconque, I son pôle par rapport au cercle C, et O l'un quelconque de ses points. Si l'on abaisse du point I la

Fig. 217.



perpendiculaire IH sur CO, on aura (242), à cause des droites antiparallèles IH, OO',

$$CH.CO = CI.CO',$$

et par suite

$$CH.CO = R^2.$$

Donc la droite IH est la polaire du point O. Il résulte de là : 1° que la polaire IH d'un point quelconque O de la droite XY passe par le pôle I de cette droite ; 2° que le pôle I d'une droite quelconque XY passant par un point O est située sur la polaire IH de ce point.

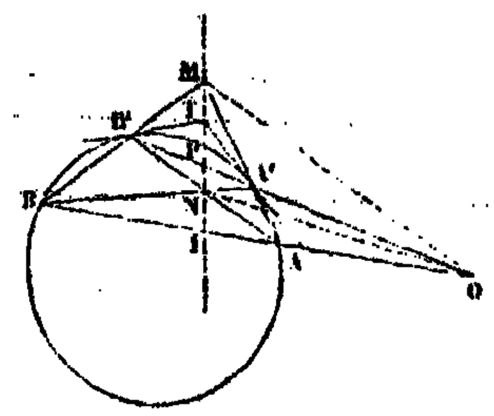
Corollaire.

355. *Toute droite a pour pôle l'intersection des polaires de deux de ses points. Tout point a pour polaire la droite qui joint les pôles de deux droites menées par ce point.*

THÉORÈME.

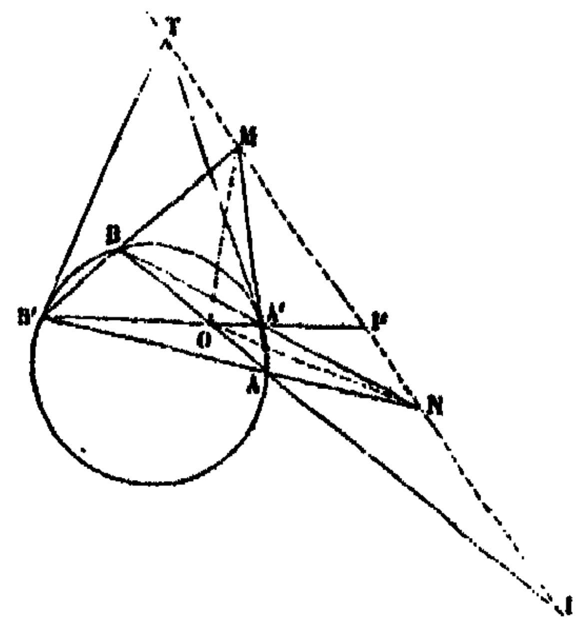
356. *Si, par un point* O *pris dans le plan d'un cercle, on mène deux transversales* OAB, OA'B', *qu'on tire les droites* AA', BB', *qui se coupent en* M, *et les droites* AB', BA' *qui se coupent en* N, *le lieu géométrique des points* M *et* N, *lorsqu'on fait varier les sécantes* OAB, OA'B', *est la polaire du point* O (*fig.* 218 et 219).

Fig. 218.



En effet, si l'on tire MN et si l'on nomme I et I' les points où cette droite coupe AB et A'B', on voit, en considérant le quadrilatère complet

Fig. 219.



MB'NA'BA, que les systèmes OA'I'B', OAIB, sont harmoniques (349); donc les points M et N sont sur la polaire II' du point O.

Corollaires.

357. Ce théorème offre un moyen simple de construire avec la règle seule la polaire MN d'un point O par rapport au cercle.

358. Dans le triangle MNO, chaque côté est évidemment la polaire du sommet opposé. Donc, *dans tout quadrilatère inscrit à un cercle, le point d'intersection des diagonales et les points de concours des côtés opposés forment un triangle dont chaque sommet est le pôle du côté opposé.*

359. Si la transversale OAB tend vers OA'B', les droites AA', BB', deviennent les tangentes au cercle en A' et B'. Donc, *si, par un point O pris dans le plan d'un cercle, on mène une sécante OA'B' et les tangentes A'T, B'T, aux points A' et B' où elle coupe le cercle, le lieu géométrique du point de concours T de ces tangentes, lorsque la transversale tourne autour du point O, est la polaire du point O.*

Par suite, si l'on mène des tangentes au cercle par les sommets du quadrilatère inscrit ABB'A', on forme un quadrilatère circonscrit qui, après avoir été complété, a pour diagonales les trois côtés indéfinis du triangle MNO. Donc, *dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, les trois diagonales forment un triangle dont chaque sommet est le pôle du côté opposé.* Enfin, en réunissant cette dernière propriété à celle du n° 358, et en ayant égard au théorème du n° 349, on arrive à cet énoncé général : *Si l'on inscrit à un cercle un quadrilatère quelconque et qu'on lui en circonscrive un autre dont les côtés touchent le cercle aux sommets du premier : 1° les diagonales intérieures des deux quadrilatères se coupent en un même point et forment un faisceau harmonique ; 2° les troisièmes diagonales sont situées sur la même droite, et leurs extrémités forment une série de quatre points harmoniques ; 3° l'intersection de deux diagonales quelconques est le pôle de l'une des trois autres.*

Les anciens ont probablement connu ces diverses propositions.

Méthode des polaires réciproques.

360. Un polygone quelconque ABCDE étant donné, si l'on prend, par rapport à un cercle quelconque O de son plan, les polaires A'B', B'C', C'D', D'E', E'A', de ses divers sommets, on obtient un second polygone A'B'C'D'E' dont les sommets A', B', C', D', E', sont les pôles des côtés EA, AB, BC, CD, DE, du premier. En effet, le sommet de l'angle C', par exemple, a pour polaire (355) la droite BC qui joint les pôles B et C des deux côtés C'B', C'D', de cet angle. Ainsi on peut considérer le second polygone A'B'C'D'E' comme obtenu soit en prenant les polaires des sommets, soit en prenant les pôles des côtés du premier. Et inversement, si l'on cherchait les pôles des côtés ou les polaires des sommets de la seconde figure, on retomberait sur la première.

Ces deux polygones sont dits *polaires réciproques* par rapport au cercle O qui reçoit le nom de *cercle directeur*. Tels sont, par exemple, un polygone quelconque inscrit dans un cercle et le polygone circonscrit formé en menant des tangentes par les sommets du polygone inscrit (*fig.* 220).

Fig. 220.

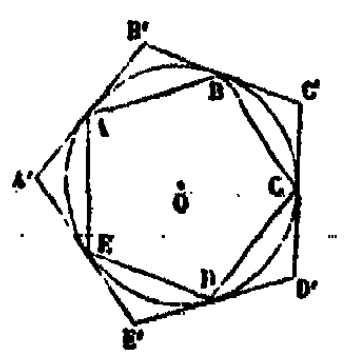
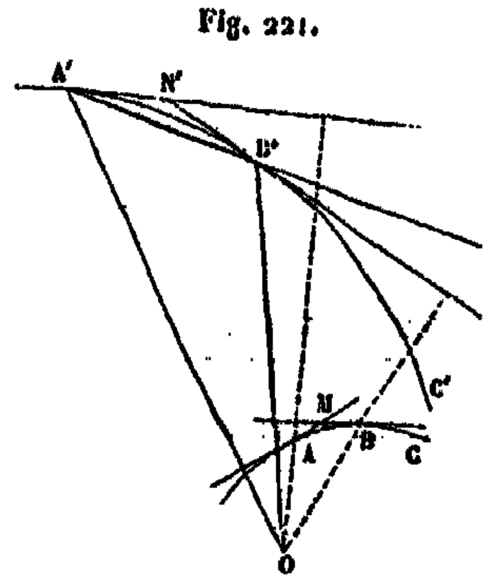


Fig. 221.



361. Considérons en second lieu une courbe quelconque ABC (*fig.* 221). En prenant, par rapport à un cercle quelconque O situé dans son plan, les pôles A', B',..., des diverses tangentes MA, MB,..., on obtient une nouvelle courbe A'B'C' dont les tangentes N'A', N'B',... sont les polaires des points A, B,..., de la première. En effet, le point d'intersection des tangentes MA et MB a pour polaire (355) la corde A'B'; et lorsque B tend vers A, la corde A'B' et le point M, qui sont toujours polaire et pôle, tendent respectivement vers la tangente A'N' et vers le point A. Ainsi, on peut considérer la seconde courbe A'B'C' comme obtenue, soit en prenant les pôles des tangentes, soit en prenant les polaires des points de la première courbe ABC. Dans la seconde manière d'opérer, la courbe A'B'C' est *définie par ses tangentes successives* dont on dit qu'elle est *l'enveloppe*. Inversement, si l'on cherchait les pôles des tangentes ou les polaires des points de la seconde figure, on retomberait sur la première.

Ces deux courbes sont dites *polaires réciproques* par rapport au cercle directeur O. *Le rayon du cercle directeur est* d'ailleurs (353) *moyen proportionnel entre les distances de son centre à un point quelconque de l'une des courbes et à la tangente correspondante de l'autre courbe.* Ainsi, la polaire réciproque d'un cercle concentrique au cercle directeur est un autre cercle concentrique, et le rayon du cercle directeur est moyen proportionnel entre les rayons des deux autres cercles. En particulier, le cercle directeur est à lui-même sa polaire réciproque. Lorsque le cercle considéré n'est pas concentrique au cercle directeur, sa polaire réciproque n'est plus un cercle, comme nous le montrerons plus tard.

362. Cela posé, voici en quoi consiste la méthode des polaires réciproques :

Une figure quelconque étant donnée, si l'on forme sa polaire réciproque par rapport à un cercle directeur, on obtiendra une nouvelle figure corrélative de la première, c'est-à-dire telle que ses *points* et ses *droites* seront respectivement remplacés par des droites et des points. Ainsi, à une série rectiligne de points dans l'une des figures répondra dans l'autre un faisceau de droites, et réciproquement; à des points en ligne droite sur une courbe, répondront autant de tangentes issues d'un même point et menées à la courbe correspondante; le point d'intersection de plusieurs courbes sera remplacé par une tangente commune aux courbes correspondantes, etc. ... Toute propriété *descriptive*, c'est-à-dire n'ayant rapport qu'à la situation des lignes, indépendamment de toute condition de grandeur, conduira à une autre propriété de la figure polaire réciproque que l'on pourra énoncer immédiatement d'après ce qui précède, et qui sera par là même démontrée. Il n'est pas même nécessaire de construire la figure; il suffit, pour passer d'un énoncé à l'autre, de changer les mots *points* et *lignes* en *lignes* et *points*.

C'est ainsi que l'un des deux théorèmes (335, 336) sur les triangles homologiques résulte de l'autre, que la propriété de l'hexagone circonscrit, due à Brianchon, résulte du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit (337, 338), etc. Toute conséquence de l'un de ces deux derniers théorèmes doit aussi conduire à une conséquence corrélative de l'autre: voici quelques exemples :

Dans tout pentagone inscrit à un cercle, le point de concours de la tangente menée par un sommet et du côté opposé, et les points de concours des autres côtés non consécutifs, sont trois points en ligne droite.	*Dans tout pentagone circonscrit à un cercle, la droite qui joint un sommet au point de contact du côté opposé et les diagonales joignant les autres sommets non consécutifs, sont trois droites qui se coupent au même point.*
Dans tout quadrilatère inscrit à un cercle, si l'on mène des tangentes par deux sommets adjacents, le point de concours de chacune d'elles avec le côté passant par le point de contact de l'autre, et le point de concours des deux autres côtés, sont trois points en ligne droite.	*Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, si l'on prend les points de contact de deux côtés adjacents et que l'on joigne le point de contact de chaque côté avec le sommet de l'autre côté, et les deux autres sommets opposés, on aura trois droites se coupant au même point.*
Dans tout quadrilatère inscrit à un cercle, les points de concours des tangentes menées par les sommets opposés, et les points de concours des côtés opposés, sont quatre points en ligne droite.	*Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, les deux diagonales et les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés, sont quatre droites se coupant au même point.*
Dans tout triangle inscrit à un cercle, les points de concours de chaque côté avec la tangente menée par le sommet opposé, sont trois points en ligne droite.	*Dans tout triangle circonscrit à un cercle, les droites qui joignent le point de contact de chaque côté avec le sommet opposé, se coupent au même point.*

Les théorèmes de la colonne de gauche sont des corollaires du théorème de Pascal; ce théorème étant en effet indépendant de la longueur des côtés de l'hexagone inscrit, subsiste lorsque l'on remplace quelques-uns de ces côtés par des tangentes à la circonférence. Les théorèmes de la colonne de droite résultent de ceux de la colonne de gauche, d'après la théorie des polaires réciproques.

On peut aussi considérer les théorèmes de la colonne de droite comme des corollaires du théorème de Brianchon, dans lequel on suppose certains angles égaux à deux droits, et les théorèmes de la colonne de gauche comme résultant alors de ceux de la colonne de droite d'après la théorie des polaires réciproques.

C'est surtout à propos des coniques qu'on pourra voir toute la fécondité de cette belle méthode des polaires réciproques, due au général

Poncelet. Toutefois, il faut remarquer que cette théorie, si utile comme méthode d'invention, puisqu'elle permet, suivant la piquante expression de Gergonne, *de faire en quelque sorte de la géométrie en partie double*, a, comme tous les procédés de transformation, l'inconvénient très-grave de laisser ignorer comment la proposition que l'on découvre se rattache à une théorie, et comment on pourrait s'y prendre pour la démontrer directement. « En général, dirons-nous avec M. Chasles, il ne suffit pas qu'une proposition soit vraie pour qu'on puisse en faire un usage utile en mathématiques, il faut encore connaître toutes ses dépendances avec les diverses propositions qui se rattachent au même sujet. »

363. Nous terminerons cet aperçu par quelques mots sur la transformation des propriétés *métriques*, c'est-à-dire des propriétés dans lesquelles on a égard non-seulement à la situation des lignes, mais encore à certaines relations numériques entre les angles ou les segments des diverses lignes de la figure.

D'abord, les *propriétés métriques angulaires* se transforment simplement par la théorie des polaires réciproques, au moyen du principe suivant:

L'angle de deux droites est égal à l'angle des droites qui joignent leurs pôles au centre du cercle directeur, car ces deux angles ont les côtés respectivement perpendiculaires.

Comme exemple, transformons cette proposition si connue : *Dans tout triangle* ABC, *les hauteurs* Aa, Bb, Cc, *se coupent au même point* I.

Soient O le centre du cercle directeur, et A'B'C' le triangle polaire réciproque de ABC, A' étant le pôle de BC, B' celui de CA et C' celui de AB. Les trois hauteurs Aa, Bb, Cc, se coupant au même point I, leurs pôles α, β, γ, doivent être sur une même droite polaire de I. Or, le pôle α de Aa doit se trouver d'une part sur B'C' polaire de A, et de l'autre sur la perpendiculaire menée par O à la droite OA', puisque, en vertu du principe énoncé plus haut, l'angle αOA' doit être droit comme l'angle AaB des polaires Aa, BC, des points α et A'. On a donc ce théorème :

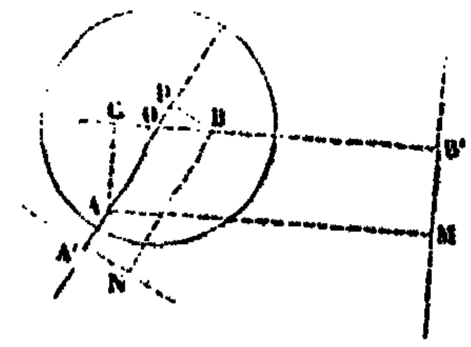
Si l'on joint un point fixe O *pris arbitrairement dans le plan d'un triangle* A'B'C' *aux trois sommets* A', B', C', *les perpendiculaires menées par ce point* O *aux trois droites* OA', OB', OC', *ainsi obtenues, vont couper respectivement les côtés opposés* B'C', C'A', A'B', *en trois points* α, β, γ, *situés en ligne droite.*

364. Quant aux *relations segmentaires*, on en transforme un assez grand nombre à l'aide des deux principes suivants:

1° *Le rapport anharmonique de quatre points situés en ligne droite dans une figure est égal au rapport anharmonique du faisceau des quatre droites correspondantes de la figure polaire réciproque*, car ce faisceau et celui qu'on obtient en joignant les quatre points au centre du cercle directeur ont respectivement leurs angles égaux, d'après le principe du n° 363.

2° *Le rapport* $\frac{AO}{BO}$ *des distances de deux points quelconques* A *et* B *au centre* O *du cercle directeur est égal au rapport* $\frac{AM}{BN}$ *des distances de chacun de ces points à la polaire de l'autre* (*fig.* 222). Car, A'N étant

Fig. 222.



la polaire de A et B'M celle de B, menons AC perpendiculaire sur OB et BD perpendiculaire sur OA; nous aurons, en désignant par R le rayon du cercle directeur,

$$R^2 = OA.OA' = OB.OB', \quad \text{d'où} \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}.$$

Mais BD et AC étant antiparallèles par rapport à l'angle O, on a

$$OA.OD = OC.OB, \quad \text{d'où} \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD};$$

par suite,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'+OC}{OA'+OD} = \frac{CB'}{DA'} = \frac{AM}{BN}.$$

365. On déduit, par exemple, bien simplement du premier principe que *le rapport anharmonique de quatre tangentes d'un cercle est égal au rapport anharmonique des quatre points de contact*. Nous nous bornerons à cette application; mais on sentira aisément la portée de ce premier principe en remarquant qu'il sert à transformer le rapport $\frac{CA}{CB}$ des deux segments formés par trois points quelconques A, B, C, en ligne droite. En effet, l'introduction du point situé à l'infini sur cette droite permet de considérer ce rapport comme égal au rapport anharmonique (A, B, C, ∞); si donc on désigne par A', B', C', les polaires des points A, B, C, par D' la polaire du point à l'infini, et par α, β, γ, δ, les points où une transversale choisie à volonté rencontre le faisceau de ces quatre droites, on aura

$$\frac{CA}{CB} = (ABC\infty) = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta}.$$

306. Le second principe est dû à M. Salmon. En voici une application :

ABCD étant un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R, et M étant un point quelconque de ce cercle, on a l'identité

$$(MA.MB)(MC.MD) = (MA.MD)(MB.MC).$$

D'ailleurs, si ME, MF, MG, MH, sont les perpendiculaires abaissées de M sur les côtés AB, BC, CD, DA, du quadrilatère, les produits renfermés entre parenthèses sont respectivement (252) proportionnels à ME, MG, MH, MF; on a donc

$$(1) \qquad ME.MG = MH.MF,$$

c'est-à-dire que, *dans tout quadrilatère inscrit dans un cercle, le produit des distances d'un point quelconque de la circonférence à deux côtés opposés, est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés*. Transformons ce théorème par la méthode des polaires réciproques : le cercle O étant pris pour cercle directeur, au quadrilatère inscrit ABCD répondra le quadrilatère circonscrit A'B'C'D', et au point M la tangente MT en ce point. Soient A'L, B'N, C'P, D'Q, les distances des sommets A', B', C', D', à la tangente MT. Puisque A' est le pôle de AB et M le pôle de MT, on aura, par le principe de M. Salmon,

$$\frac{ME}{A'L} = \frac{MO}{A'O}, \quad \text{d'où} \quad ME = \frac{MO}{A'O}.A'L.$$

Ainsi, les lignes ME, MG, MH, MF, sont respectivement proportionnelles aux distances A'L, C'P, D'Q, B'N, et la relation (1) devient

$$A'L.C'P = \frac{A'O.C'O}{D'O.B'O}.D'Q.B'N,$$

c'est-à-dire que, *dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, le produit des distances de deux sommets opposés à une tangente quelconque, est dans un rapport constant avec le produit des distances des deux autres sommets à la même tangente.*

Le théorème sur le quadrilatère inscrit peut s'étendre à un polygone inscrit quelconque d'un nombre pair de côtés. En effet, si P est un polygone inscrit de $2n$ côtés, et P' le polygone inscrit de $2n-2$ côtés qu'on obtient en détachant de P un quadrilatère au moyen d'une diagonale, on voit tout de suite que, si le théorème a lieu pour le polygone P' de $2n-2$ côtés, il subsiste pour le polygone P de $2n$ côtés.

On peut même appliquer le théorème à un polygone quelconque en remarquant qu'on peut considérer tout polygone inscrit comme ayant un côté infiniment petit dirigé suivant la tangente en l'un des sommets.

De là les deux propositions suivantes, en regard desquelles nous avons placé les deux propositions corrélatives qui en résultent d'après la méthode des polaires réciproques.

Quand un polygone d'un nombre pair de côtés est inscrit à un cercle, les produits des distances d'un point quelconque de la circonférence aux côtés de rangs pairs, est égal au produit des distances du même point aux côtés de rangs impairs.

Quand un polygone est inscrit dans un cercle, le produit des distances d'un point quelconque de la circonférence aux divers côtés, est égal au produit des distances du même point aux tangentes menées par les sommets du polygone.

Quand un polygone d'un nombre pair de côtés est circonscrit à un cercle, le produit des distances des sommets de rangs pairs à une tangente quelconque, est dans un rapport constant avec le produit des distances des sommets de rangs impairs à la même tangente.

Quand un polygone est circonscrit à un cercle, le produit des distances de ses sommets à une tangente quelconque, est dans un rapport constant avec le produit des distances des points de contact des côtés à la même tangente.

Figures homothétiques.

367. Étant donné un système quelconque A, B, C,... de points situés dans un plan (*fig.* 223 et 224), si, sur les rayons SA, SB, SC,..., issus

Fig. 223.

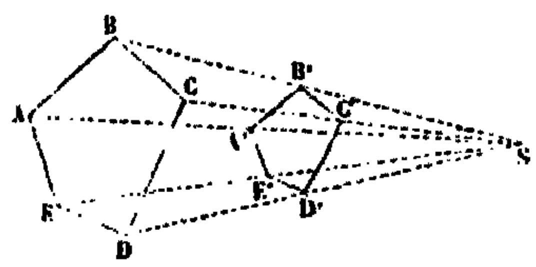
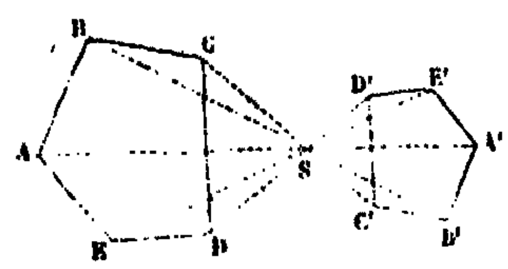


Fig. 224.



d'un point S choisi arbitrairement dans le plan, on prend à partir de ce point des segments SA', SB', SC',... tels qu'on ait

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \ldots = K,$$

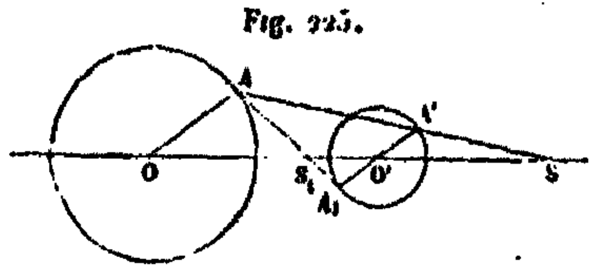
K étant un nombre quelconque, on dit que le nouveau système de points A', B', C',... est *homothétique* au système primitif ABC,....

Le point S est dit le *centre* et le nombre K le *rapport d'homothétie*. Si K est positif, les deux segments SA et SA' sont de même sens, et les points A et A' sont d'un même côté du point S (*fig.* 223). Si K est négatif, les segments SA et SA' sont de sens contraires, et les points A et A' sont de part et d'autre du point S (*fig.* 224): dans le premier cas (*fig.* 223), les deux systèmes sont dits *homothétiques directs;* dans le second (*fig.* 224), ils sont *homothétiques inverses*. Quand deux systèmes sont homothétiques inverses, il suffit évidemment, pour les rendre homothétiques directs, de faire tourner l'un d'eux de 180 degrés autour du centre S. On obtient donc tous les systèmes homothétiques à un système donné en faisant varier la position du centre S et en donnant à K toutes les valeurs positives de 0 à ∞.

368. Suivant que les points du premier système ABC... sont isolés ou forment des lignes continues, les points du système homothétique A'B'C'... sont à leur tour isolés ou forment des lignes continues.

Supposons, par exemple, que la figure primitive soit une circonférence OA dont le centre est O (*fig.* 225), et cherchons la figure homothétique,

Fig. 225.



c'est-à-dire le lieu des points A', tels que $\frac{SA'}{SA} = K$. Si l'on prend sur SO une longueur SO' telle que $\frac{SO'}{SO} = K$, les deux triangles semblables (208) SOA, SO'A', donnent $\frac{O'A'}{OA} = K$; par suite O'A' est constant comme OA, et le lieu est une circonférence dont le point O' est le centre. Ainsi la *figure homothétique d'une circonférence est une circonférence.*

THÉORÈME.

369. *Dans deux systèmes homothétiques, la droite* AB *qui joint deux points quelconques du premier système et la droite* A'B' *qui joint les points homologues du second système, sont parallèles et dans le rapport* K (*fig.* 223 et 224).

En effet, les droites AB et A'B', divisant les rayons SA et SB dans le même rapport K, sont parallèles (196), et l'on a en outre (203)

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = K.$$

COROLLAIRES.

370. Si trois points du premier système sont en ligne droite, il en est de même des trois points homologues du second système; en d'autres termes, *la figure homothétique d'une ligne droite est une ligne droite parallèle à la première;* ces deux droites sont dites *homologues*. Si

une droite passe par le centre d'homothétie, son homologue y passe également, et par suite coïncide avec elle. Réciproquement, si deux droites homologues coïncident, elles passent par le centre d'homothétie.

371. *L'angle de deux droites est égal à celui de leurs droites homologues.* Par suite, *la figure homothétique d'un polygone est un polygone semblable au premier.* Les côtés du nouveau polygone sont parallèles aux côtés homologues du premier, et leur rapport de similitude est égal à K.

372. *Les tangentes en deux points homologues de deux courbes homothétiques, sont parallèles* comme limites de sécantes parallèles.

THÉORÈME.

373. *Deux systèmes sont homothétiques s'il existe dans leur plan deux points* O *et* O' *tels, que les droites qui joignent le point* O *aux divers points du premier système, et les droites qui joignent le point* O' *aux divers points du second système, soient parallèles et dans un même rapport* K (*fig.* 225).

En effet, si les droites OA et O'A' sont parallèles et de même sens la droite AA' ira couper le prolongement de OO' en un point S, tel que

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA} = K = \frac{SA'}{SA}.$$

Le point S est donc le même, quel que soit le couple de points homologues A et A' considéré; et par suite, les deux systèmes sont homothétiques directs, et ont le point S pour centre et le nombre K pour rapport d'homothétie.

Si les droites OA et $O'A_1$ sont parallèles et de sens contraire, la droite AA_1 coupe OO' en un point S_1, tel que

$$\frac{S_1O'}{S_1O} = \frac{O'A_1}{OA} = K = \frac{S_1A_1}{S_1A},$$

et les deux systèmes, alors homothétiques inverses, ont le point S_1 pour centre et le nombre K pour rapport d'homothétie.

COROLLAIRES.

374. *Deux polygones semblables* ABCDE, A'B'C'D'E', *qui ont leurs côtés parallèles, sont homothétiques.* Il résulte en effet des raisonnements faits au n° 215 que si, dans le plan du premier polygone, on prend un point O quelconque et que l'on détermine, conformément aux indications données dans ce n° 215, le point O' homologue de O, les droites OA et O'A', OB et O'B', OC et O'C,..., seront parallèles et dans le rapport K. Donc les polygones seront homothétiques.

L'homothétie est directe (*fig.* 223) ou inverse (*fig.* 224), suivant que les deux polygones ont leurs côtés parallèles de même sens ou de sens contraire.

375. *Deux circonférences quelconques sont homothétiques directes et homothétiques inverses* (*fig.* 225).

En effet, le rapport $\frac{O'A'}{OA}$ de deux rayons parallèles et de même sens étant constant, les deux circonférences sont homothétiques directes, et elles ont un *centre d'homothétie directe* S situé au delà de la ligne du centre, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{R'}{R},$$

R' et R étant les rayons des deux cercles.

De même, le rapport $\frac{O'A_1}{OA}$ de deux rayons parallèles et de sens contraire étant constant, les deux circonférences sont aussi homothétiques inverses, et elles ont un *centre d'homothétie inverse* S_1 situé sur la ligne des centres, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{S_1O'}{S_1O} = -\frac{R'}{R}.$$

La comparaison des deux relations précédentes donne

$$\frac{SO'}{SO} : \frac{S_1O'}{S_1O} = -1.$$

Donc *les deux centres d'homothétie divisent harmoniquement la ligne des centres* OO' *des deux cercles.*

Les tangentes communes extérieures passent par le centre d'homothétie directe, et les tangentes communes intérieures par le centre d'homothétie inverse. C'est sur cette propriété qu'est fondée la construction du n° 263.

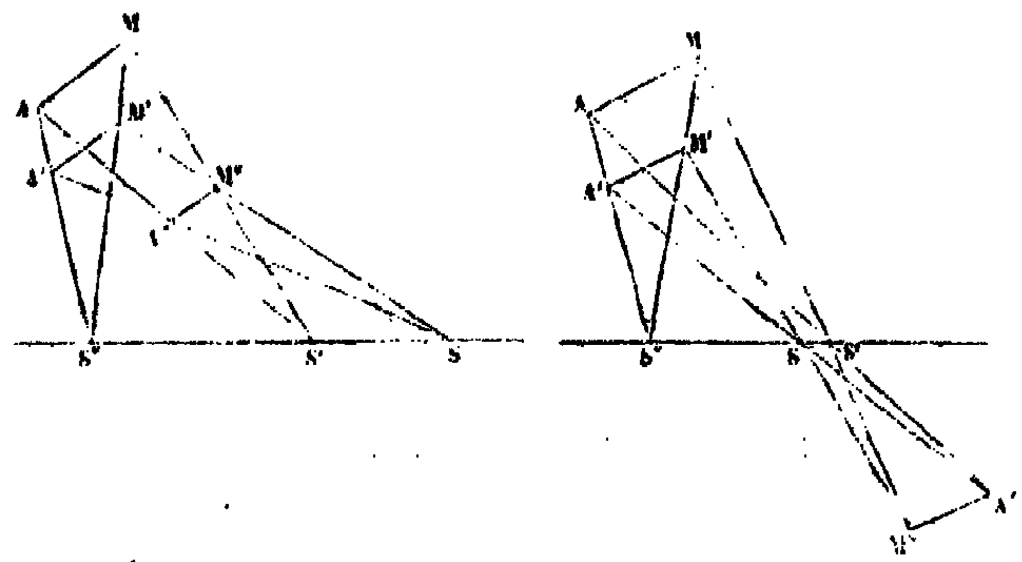
Lorsque les deux cercles sont tangents, leurs points de contact sont un centre d'homothétie, *directe* si le contact est *intérieur, inverse* si le contact est *extérieur.*

THÉORÈME.

376. *Deux systèmes* P' *et* P'' *homothétiques à un troisième* P, *sont homothétiques entre eux* (*fig.* 226 *et* 227).

Soient A un premier point du système P, et A' et A'' ses points homologues dans les systèmes P' et P''. Joignons le point A à un point quelconque M du système P, et joignons A' et A'' aux points M' et M'' homologues de M dans les systèmes P' et P''. Les systèmes P' et P étant homothétiques, les droites A'M' et AM seront parallèles et dans un certain rapport K'; de même, les droites A'M'' et AM seront parallèles et dans le rapport K' d'homothétie des systèmes P' et P. Donc les droites AM et A''M'' sont pa-

Fig. 226. Fig. 227.



rallèles, et dans le rapport constant $\frac{K''}{K'}$. Donc (373), les systèmes P' et P'' sont homothétiques.

COROLLAIRES.

377. Si K'' = K', les systèmes P' et P'' ont un rapport d'homothétie égal à l'unité; ils sont donc superposables. Il résulte de là que, pour avoir tous les systèmes homothétiques à un système donné, il n'est pas nécessaire de faire varier le centre (367): il suffit, en conservant le même centre, de faire varier K de o à ∞.

378. Si P est homothétique direct avec chacun des systèmes P' et P'', AM et A'M' seront de même sens, comme AM et A''M'', et par suite aussi A'M' et A''M''; de sorte que P' et P'' seront homothétiques directs (*fig.* 226).

On verrait de même que si P'' est homothétique inverse avec chacun des systèmes P et P', P et P' sont homothétiques directs (*fig.* 227).

Si P est homothétique direct avec l'un des systèmes P' et P'', et homothétique inverse avec l'autre, P' et P'' sont homothétiques inverses (*fig.* 227).

Parmi les trois systèmes homothétiques ainsi formés, il y en a donc toujours un nombre impair (1 ou 3) dont l'homothétie est directe.

Dans tous les cas, *les trois centres d'homothétie* S, S', S'', *sont en ligne droite* (*fig.* 226 *et* 227).

En effet, la droite S'S'', considérée comme appartenant au système P, a pour homologue dans le système P' cette droite elle-même, puisque (370) elle passe par le centre d'homothétie S'' de P et de P'. Cette droite, considérée comme appartenant au système P, est aussi à elle-même son homologue dans le système P'', puisqu'elle passe par S', centre d'homothétie de P et de P''. Donc, cette droite S'S'' (370) passe par le centre S d'homothétie des systèmes P' et P''.

379. Trois cercles considérés deux à deux ont trois centres d'homothétie directe et trois centres d'homothétie inverse (375). Les trois centres d'homothétie directe sont sur une même droite (378), qu'on nomme *axe d'homothétie directe*. De même, deux centres d'homothétie inverse et le centre direct qui répond au troisième centre inverse sont sur une même droite qu'on nomme *axe d'homothétie inverse*; il y a, d'après cela, trois axes d'homothétie inverse.

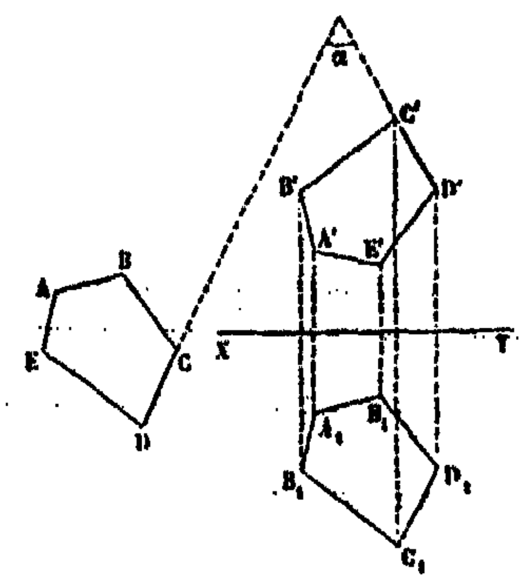
Définition générale de la similitude. — Méthode des figures semblables.

380. Pour étendre aux figures curvilignes la notion de la similitude, il faut prendre pour point de départ une propriété *essentielle* des polygones semblables qui soit immédiatement appréciable envers les courbes. Voici comment on parvient à faire cette généralisation :

1° *Deux polygones semblables* P *et* P' *étant donnés dans un plan, on peut toujours amener le polygone* P' *à avoir ses côtés parallèles aux côtés homologues de* P.

En effet, soit ABCDE le polygone P. Supposons qu'un mobile partant du point A décrive le contour ABCDE, en suivant l'ordre alphabétique. Un observateur placé à l'intérieur du polygone, les pieds appuyés sur son plan, verra le mobile marcher de sa droite à sa gauche ou de sa gauche à sa droite; supposons, pour fixer les idées, que l'observateur voie le mobile marcher de gauche à droite (*fig.* 228).

Fig. 228.



Cela étant, le polygone P', semblable au polygone P et situé dans son plan, pourra offrir deux dispositions différentes; il pourra être, comme

$A'B'C'D'E'$, tel qu'un observateur placé dans son intérieur voie marcher de gauche à droite un mobile qui, partant de A', décrirait son contour dans l'ordre alphabétique, ou bien être, comme $A_1B_1C_1D_1E_1$, tel que l'observateur placé dans son intérieur voie marcher de droite à gauche un mobile qui décrirait, dans l'ordre alphabétique, le contour $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Dans le premier cas, on voit sans aucune difficulté que deux côtés homologues quelconques des deux polygones ABCDE, $A'B'C'D'E'$, font toujours le même angle α, de sorte qu'en faisant tourner le polygone $A'B'C'D'E'$ autour de A' de cet angle α, on amènera ce polygone à avoir ses côtés parallèles aux côtés homologues du polygone ABCDE et de même sens. Une rotation de $180° - \alpha$ amènerait le polygone $A'B'C'D'E'$ à avoir ses côtés parallèles aux côtés homologues de ABCDE, mais de sens contraire.

Dans le second cas, en prenant le symétrique de $A_1B_1C_1D_1E_1$ par rapport à un axe quelconque XY, c'est-à-dire en rabattant ce polygone $A_1B_1C_1D_1E_1$ autour de cet axe, on obtiendra évidemment un second polygone $A'B'C'D'E'$, qui présentera, relativement au polygone ABCDE, la même disposition que dans le premier cas. Un rabattement suivi d'une rotation amènera donc alors le polygone $A_1B_1C_1D_1E_1$ à avoir ses côtés parallèles à ceux de ABCDE.

2° On a vu que deux polygones semblables qui ont les côtés parallèles sont homothétiques (374). Deux polygones semblables peuvent donc, d'après cela, être rendus homothétiques; et réciproquement, la figure homothétique d'un polygone est un polygone semblable au premier (371).

Par suite, pour qu'un polygone P' soit semblable à un autre polygone P, il faut et il suffit que ce polygone P' soit égal à l'un des homothétiques de P.

Voilà donc une propriété *caractéristique* des polygones semblables. D'ailleurs, la définition de l'homothétie est immédiatement applicable aux figures curvilignes (367). On est ainsi conduit à cette définition générale :

On dit qu'*une figure est semblable à une autre lorsqu'elle est égale à l'une des figures homothétiques à cette autre.*

On comprend d'après cela pourquoi on donne, en général, les noms de centres de similitude, d'axes de similitude, de rapport de similitude aux centres, aux axes et au rapport d'homothétie.

381. Nous avons déjà prouvé par de nombreux exemples (§§ II et suiv.) combien la théorie des figures semblables offrait de ressources. Le théorème de Thalès sur la proportionnalité des côtés homologues des triangles équiangles, le théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse, sont, en Géométrie, deux propositions fondamentales qui interviennent sans cesse dans les démonstrations. Mais indépendamment de ces applications générales de la théorie de la similitude, il est un procédé

spécial connu sous le nom de *méthode des figures semblables*, et qui consiste à construire, à l'aide des données, une figure semblable à celle que l'on cherche. On passe ensuite aisément de la figure ainsi construite à la figure demandée en comparant certains éléments des deux figures.

Voici deux exemples :

1° *Construire un triangle* ABC, *connaissant ses trois hauteurs* α, β, γ (*fig.* 229).

a, b, c, étant les côtés du triangle inconnu, et BD et AE étant les hauteurs β et α, les triangles semblables CBD, CAE, donnent

$$\frac{a}{\beta} = \frac{b}{\alpha}.$$

On aurait de même

$$\frac{a}{\gamma} = \frac{c}{\alpha}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{a}{\beta} = \frac{b}{\alpha} = \frac{c}{\frac{\alpha\beta}{\gamma}}.$$

Si donc on construit un triangle A'B'C' dont les trois côtés soient

$$B'C' = \beta,\ C'A' = \alpha,\ A'B' = \frac{\alpha\beta}{\gamma},$$

ce triangle sera semblable au triangle cherché ABC, et pour avoir ce triangle, il suffira de prendre sur la hauteur issue du sommet B une longueur BD = β et de mener par le point D une parallèle AC à A'C'.

Fig. 229.

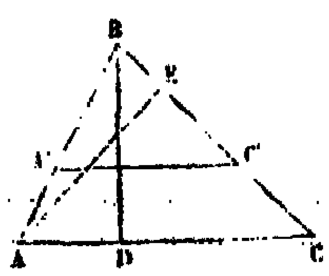
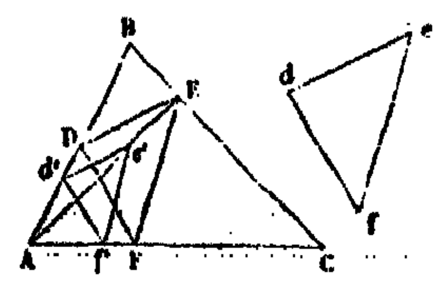


Fig. 230.



2° *Inscrire dans un triangle donné* ABC *un triangle dont les côtés soient parallèles à ceux d'un triangle donné* def (*fig.* 230).

Si l'on trace dans le triangle ABC une parallèle $d'f'$ à df, puis par les points d' et f' des parallèles $d'e'$, $f'e'$, à de et à ef, on formera un triangle $d'f'e'$ homothétique au triangle cherché DFE, et le point A sera pour ces triangles un centre de similitude directe (374). La droite Ae' coupera donc BC en un point E qui sera l'un des sommets du triangle demandé.

et il ne restera plus qu'à mener par ce point E des parallèles ED, EF, à *ed* et *ef*, et à joindre les points D et F.

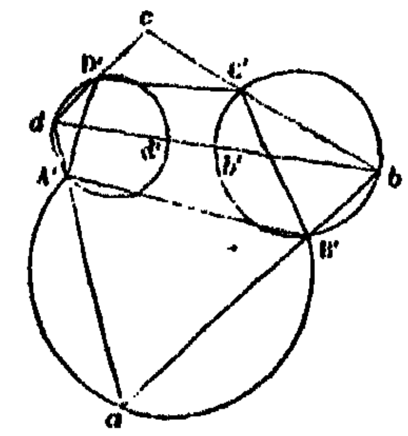
382. A ce procédé, s'en rattache un autre « qui consiste à renverser » l'énoncé, à prendre les données pour inconnues, et réciproquement. » En résolvant ce nouveau problème, on construit une figure semblable » à celle que l'on cherche; si l'on connaît ensuite une seule ligne de » cette dernière, il sera facile de la construire elle-même.

» C'est surtout quand il s'agit d'inscrire dans un polygone donné une » figure semblable à une autre aussi donnée, que l'on préfère cette mé- » thode inverse à la méthode directe, la circonscription des figures sem- » blables ayant l'avantage d'offrir, par les segments capables, des lieux » géométriques des sommets du polygone à construire (*). »

Voici un exemple :

Inscrire dans un quadrilatère donné ABCD *un quadrilatère* a' b' c' d' *semblable à un autre quadrilatère donné* A' B'C' D' (*fig.* 231).

Fig. 231.



Renversons la question et proposons-nous de circonscrire à un quadrilatère donné A'B'C'D' un quadrilatère *abcd* semblable à un quadrilatère donné ABCD.

« Les angles *d*, *a*, *b*, étant donnés, les sommets *d*.*a*, *b*, seront respecti- » vement sur des segments capables d'angles connus, construits sur les » côtés D'A', A'B', B'C'; si, de plus nous joignons *bd*, qui coupe en *b'*, *d'*, » les segments construits sur B'C' et D'A', nous reconnaîtrons que nous » pouvons déterminer *à priori* les points *b'* et *d'*; car, le quadrilatère *abcd* » étant semblable à un quadrilatère donné ABCD, le triangle partiel *abd* » est semblable à un triangle donné ABD : les angles *abd*, *adb*, sont donc » connus, et, comme ils ont pour mesures respectives les demi-arcs B'*b'*, » A'*d'*, nous pourrons, par une construction simple, obtenir chacun des

(*) Lamé, *Examen des différentes méthodes pour résoudre les problèmes de Géométrie*; 1818.

» points b' et d'. Cela posé, la droite $b'd'$ joignant ces deux points ira
» couper une seconde fois les segments construits sur B'C' et sur A'D',
» suivant les points b et d : nous aurons donc deux sommets opposés b
» et d du quadrilatère cherché, et le problème auxiliaire sera résolu.

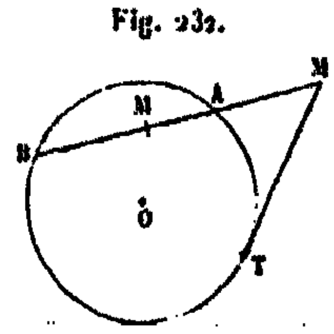
» Enfin, si nous revenons au problème primitif, il nous suffira, pour
» le résoudre, de diviser les côtés du quadrilatère ABCD dans des rap-
» ports égaux aux rapports des segments que les points B', C', D', A', déter-
» minent sur les côtés ab, bc, cd, da, de la figure précédente, et de joindre
» les points de division.

» Le problème proposé a *huit* solutions dans le cas général. Car, si
» nous examinons le nombre des solutions du problème auxiliaire, nous
» trouvons que : 1° en admettant d'abord que l'angle a s'appuie sur le
» côté A'B', nous pouvons supposer, *soit* que les angles b et d s'ap-
» puient respectivement sur B'C' et sur A'D', comme dans notre figure,
» ce qui fournit une première solution ; *soit*, au contraire, que b et d
» s'appuient respectivement sur A'D' et sur B'C', ce qui fournit une se-
» conde solution (cette seconde solution rentrerait toutefois dans la pre-
» mière, si l'on avait à la fois $b = d$ et cercle A'dD' = cercle B'bC', c'est-
» à-dire A'D' = B'C') ; 2° on aura de même trois autres systèmes de deux
» solutions fournis successivement par l'hypothèse que l'angle a s'appuie
» sur les côtés B'C', C'D', D'A', au lieu de s'appuyer sur A'B' (*). »

Axes radicaux.

383. Nous avons vu (215) que, si, par un point M (*fig.* 232) situé comme on voudra dans le plan d'un cercle O, on mène à ce cercle une

Fig. 232.



sécante arbitraire MAB, le produit MA.MB des distances de ce point aux deux intersections A et B de la sécante et de la circonférence est une quantité constante, c'est-à-dire indépendante de la direction de la sécante. Ce produit constant MA.MB, qui est évidemment positif lorsque le point M est extérieur au cercle, et négatif lorsque le point M est intérieur, porte, d'après Steiner (*Journal de Crelle*, t. I), le nom de *puissance du point M par rapport au cercle* O.

(*) P. Serret, *Des méthodes en Géométrie*; 1855.

Considérons en particulier celle des sécantes issues du point M qui passe par le centre O, et désignons par d la distance MO et par r le rayon du cercle. Si le point M est extérieur au cercle, les deux segments MA et MB comptés sur cette sécante sont de même signe, et, comme leurs valeurs absolues sont $d - r$ et $d + r$, la puissance du point M a pour expression $(d+r)(d-r)$ ou $d^2 - r^2$. Si le point M est intérieur, les deux segments MA et MB, comptés sur la sécante qui passe au centre, ont respectivement pour valeurs absolues $r - d$ et $r + d$; mais, comme ils sont de sens opposés, la puissance a pour expression $-(r-d)(r+d) = -(r^2 - d^2)$, c'est-à-dire encore $d^2 - r^2$. Ainsi, dans tous les cas, *la puissance d'un point par rapport à un cercle est égale, en grandeur et en signe, à l'excès du carré de la distance de ce point au centre sur le carré du rayon.*

Lorsque le point M *est extérieur au cercle, sa puissance est égale au carré de la tangente* MT *menée au cercle par ce point.*

Si le point M est sur la circonférence, sa puissance est évidemment nulle.

384. Nous avons démontré que deux circonférences orthogonales divisent harmoniquement la droite qui passe par leurs centres (343). Par suite (342), quand deux cercles *se coupent orthogonalement, le carré du rayon de l'un quelconque d'entre eux est égal à la puissance de son centre par rapport à l'autre cercle.*

THÉORÈME.

385. *Le lieu des points* M *d'égale puissance par rapport à deux cercles* O *et* O', *est une droite perpendiculaire à la ligne des centres* OO'.

En effet, r et r' étant les rayons des deux cercles, on a (383)

$$\overline{MO}^2 - r^2 = \overline{MO'}^2 - r'^2, \quad \text{d'où } \overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = r^2 - r'^2,$$

en supposant $r > r'$. Le lieu cherché est, d'après cela, le lieu des points dont la différence des carrés des distances aux centres O et O' est égale à la différence des carrés des rayons. C'est donc (237) une droite perpendiculaire à OO', plus voisine du centre O' du plus petit cercle que du centre O du plus grand, et dont la distance au milieu de la ligne des centres OO' est égale à

$$\frac{r^2 - r'^2}{2.OO'}.$$

D'après Gaultier (de Tours) [*Journal de l'École Polytechnique*, t. IX], on donne à cette droite le nom d'*axe radical* des deux cercles.

Il résulte de la formule précédente : 1° que *l'axe radical de deux cercles égaux passe par le milieu de la ligne des centres;* 2° que *l'axe radical de deux cercles concentriques disparaît à l'infini;* 3° que *si deux cercles* *n'ont aucun point commun, leur axe radical ne les coupe ni l'un ni l'autre.*

Lorsque les deux cercles se coupent, leur axe radical est leur corde commune indéfiniment prolongée; car chaque point commun aux deux cercles a une puissance nulle par rapport à chacun de ces cercles (383).

Si deux cercles se touchent, soit intérieurement, soit extérieurement, leur axe radical est la tangente au point commun.

COROLLAIRES.

386. Lorsqu'un point est hors d'un cercle, sa puissance par rapport à ce cercle est égale au carré de la tangente issue de ce point (383); donc *l'axe radical de deux cercles est le lieu des points d'où l'on peut leur mener des tangentes égales.* Par suite, *les milieux de toutes les tangentes communes que l'on peut mener aux deux cercles sont situés sur l'axe radical,* et de là résulte un moyen de construire l'axe radical de deux cercles extérieurs l'un à l'autre.

387. Lorsqu'un cercle M coupe orthogonalement deux cercles donnés O et O', le carré de son rayon (384) est égal à la puissance de son centre par rapport à chacun des deux cercles; donc *l'axe radical de deux cercles est le lieu des centres des cercles qui les coupent tous deux orthogonalement.*

Soit M, M', M",..., la série des cercles qui coupent orthogonalement les deux cercles donnés O et O', et dont les centres sont, d'après l'alinéa précédent, sur l'axe radical des cercles O et O'. Deux quelconques M et M' de ces cercles sont coupés orthogonalement par les cercles O et O'; par suite, ces points O et O' sont situés sur l'axe radical des cercles M et M'. Donc *les cercles M, M', M",..., qui coupent orthogonalement deux cercles donnés O et O', ont pour axe radical commun la ligne des centres OO' de ces deux cercles.* Si les cercles O et O' n'ont aucun point commun, l'un des cercles M, M', M",..., a son centre sur OO' (344); et les deux points où il coupe OO' sont communs à tous les cercles M, M', M",....

THÉORÈME.

388. *Les axes radicaux de trois cercles considérés deux à deux concourent en un même point.*

En effet, soient O, O', O", les centres des trois cercles et L, L', L", les axes radicaux des cercles O' et O", O" et O, O et O'. En supposant que les trois points O, O', O", ne soient pas en ligne droite, on voit que L et L', perpendiculaires à deux droites qui se coupent, O'O" et O"O, se rencontreront en un certain point C, qui sera alors d'égale puissance par rapport aux cercles O' et O", et aussi par rapport aux cercles O" et O. Ce point C aura donc même puissance par rapport aux cercles O et O', et par suite il appartiendra à leur axe radical L".

Le point C, commun aux trois axes radicaux, prend le nom de *centre radical* du système des trois cercles O, O', O".

Lorsque les points O, O', O", sont en ligne droite, les axes L, L', L", sont parallèles, et le point C passe à l'infini.

389. Ce théorème permet de construire simplement l'axe radical de deux cercles O et O' extérieurs ou intérieurs l'un à l'autre. Il suffit de couper ces deux cercles par un troisième cercle quelconque O". La corde commune aux cercles O et O" et la corde commune aux cercles O' et O", se couperont au centre radical C des trois cercles O, O', O", et il restera à abaisser de ce point C une perpendiculaire sur la ligne OO' (*fig.* 233 et 234).

Fig. 233.

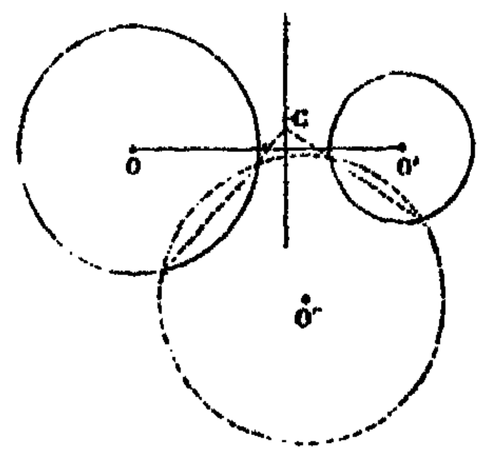
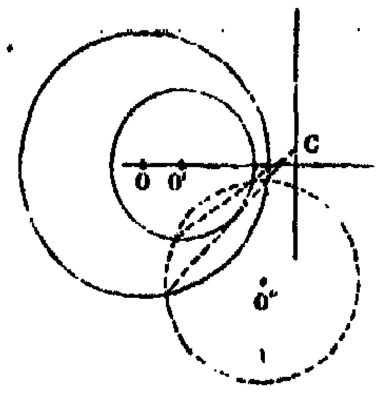


Fig. 234.



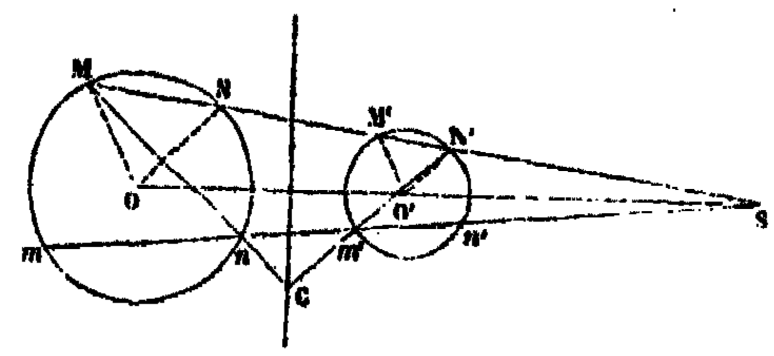
390. Lorsque le centre radical de trois cercles est intérieur à l'un d'eux, il l'est aussi aux deux autres. De même, lorsqu'il est extérieur à l'un d'eux, il est extérieur aux deux autres; c'est alors le seul point du plan d'où l'on puisse mener aux trois cercles des tangentes égales, et c'est aussi le centre du seul cercle qui puisse les couper tous les trois orthogonalement.

THÉORÈME.

391. 1° *Le produit des distances de l'un quelconque des deux centres de similitude de deux cercles à deux points anti-homologues est constant; 2° deux couples de points anti-homologues sont sur une même circonférence; 3° deux cordes anti-homologues se coupent sur l'axe radical.*

Soient deux cercles O et O' (*fig.* 235), S un de leurs centres de similitude. Une sécante SM, issue de S, coupe les cercles O et O' en quatre points M, N, M', N'. Les points M et M' sont homologues par rapport au centre S, car les rayons correspondants OM, O'M', sont parallèles; de même N et N' sont homologues. Les points M et N' sont dits *anti-homologues*, ainsi que les points N et M'. Une corde quelconque Mn du premier cercle, et la corde N'm' du second cercle qui joint les points anti-homologues des extrémités de la première, prennent le nom de *cordes anti-homologues*. Ces définitions établies, voici la démonstration du théorème énoncé :

Fig. 235.



1° En désignant par r et r' les rayons des deux cercles et par p la puissance du point S par rapport au cercle O, on a

$$SM.SN = p \quad \text{et} \quad \frac{SM}{SM'} = \frac{r}{r'}.$$

En divisant la première égalité par la seconde, il vient

$$SN.SM' = p\frac{r'}{r};$$

et l'on trouverait de même

$$SM.SN' = p\frac{r'}{r}.$$

2° D'après cela, si Sm est une autre sécante issue du point S, on aura

$$SM.SN' = Sn.Sm';$$

donc (246) les points M et N', n et m' sont sur une même circonférence O''.

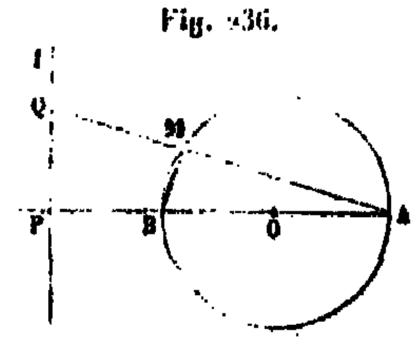
3° Enfin, la corde Mn étant l'axe radical des cercles O et O'', et la corde $N'm'$ l'axe radical des cercles O' et O'', le point d'intersection C des deux cordes est le centre radical (388) des trois cercles O, O', O'', c'est-à-dire un point de l'axe radical des cercles O et O'. Cette dernière propriété, prise à sa limite, prouve encore que *les tangentes en deux points anti-homologues de deux cercles se coupent sur l'axe radical.*

SCOLIE.

392. Lorsque l'un des cercles, O' par exemple, dégénère en une droite L parce que son rayon devient infiniment grand, les points qui jouent le rôle des centres de similitude de la droite L et du cercle O sont les extrémités du diamètre AB perpendiculaire à la droite L (*fig.* 236). En effet, ces deux points jouissent encore de la propriété exprimée par le

théorème précédent ; car si l'on mène par A, par exemple, une sécante quelconque AMQ, et si l'on tire MB, on voit que l'angle inscrit BMA étant

Fig. 236.



droit comme l'angle P, les deux droites PQ et MB sont antiparallèles par rapport à l'angle A ; on a donc

$$AM.AQ = AB.AP = \text{constante}.$$

C'est la droite L elle-même qui joue alors le rôle d'axe radical du système formé par la droite L et le cercle O.

THÉORÈME.

393. *L'axe radical de deux cercles est à égale distance des deux polaires de l'un quelconque des centres de similitude.*

Ce théorème est évident lorsque l'on peut mener par le centre de similitude que l'on considère une tangente commune aux deux cercles ; car l'axe radical, qui est d'ailleurs parallèle aux deux polaires, passe par le milieu de la tangente commune dont les points de contact sont sur les deux polaires.

Dans tous les cas, la proposition résulterait aisément des formules qui donnent la position du centre de similitude, des polaires et de l'axe radical (375, 353, 385). Nous laissons au lecteur le soin de faire ce calcul, qui est sans difficulté.

394. *Si l'un des cercles se réduit à un point, l'axe radical de ce point et de l'autre cercle est à égale distance de ce point et de sa polaire par rapport au cercle,* car ce point est alors le centre de similitude du système formé par lui-même et l'autre cercle.

Figures inverses. Méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques.

395. Étant donné, dans un plan, un système quelconque de points A, B, C,..., isolés ou formant des lignes continues, si, sur les rayons vecteurs SA, SB, SC,..., issus d'un point S choisi arbitrairement dans le plan, on prend, à partir de ce point S, des segments SA', SB', SC',..., tels que

$$SA.SA' = SB.SB' = SC.SC' = \ldots = \mu,$$

μ étant une quantité constante positive ou négative, on dit que le système A'B'C'... est *inverse* du système ABC... Le point fixe S prend le nom d'*origine*, et la constante μ le nom de *puissance*. Si la puissance μ est positive, les rayons vecteurs correspondants SA et SA' sont de même sens, et les points correspondants A et A' sont du même côté de l'origine S; si μ est négatif, les rayons vecteurs SA et SA' sont de sens contraire, et les points correspondants A et A' sont de part et d'autre de l'origine.

Lorsque la constante μ est positive, on peut la regarder comme le carré du rayon d'un cercle décrit autour de l'origine et qu'on nomme *cercle d'inversion*. Lorsqu'on fait varier le rayon du cercle d'inversion sans déplacer son centre, les figures inverses d'une même figure donnée ainsi obtenues sont homothétiques; on a, en effet, en désignant par ρ un rayon vecteur quelconque de la figure primitive et par r et r' les rayons vecteurs correspondants de deux figures inverses de la première, suivant les puissances μ et μ',

$$\rho r = \mu, \quad \rho r' = \mu', \quad \text{d'où} \quad \frac{r'}{r} = \frac{\mu'}{\mu} = \text{constante}.$$

396. Il résulte du n° 392 (*fig.* 236) qu'*une droite* L *et un cercle* O *quelconque peuvent être considérés comme deux figures inverses l'une de l'autre*; l'origine est l'une quelconque des extrémités A et B du diamètre perpendiculaire à la droite L; la puissance est représentée en grandeur et en signe par le produit $d\delta$, dans lequel d désigne le diamètre AB du cercle et δ la distance de l'origine A ou B à la droite L, cette distance étant positive ou négative, suivant qu'elle est, par rapport à l'origine, de même sens que le diamètre du cercle ou de sens contraire. Ainsi, la puissance est positive lorsque A est l'origine, et négative quand l'origine est B.

On conclut de là que *la figure inverse d'une droite* L *est une circonférence* O *passant par l'origine*, et dont on obtient le diamètre en prenant sur la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite L un segment égal en grandeur et en signe à $\frac{\mu}{\delta}$, μ étant la puissance donnée. De même, *la figure inverse d'une circonférence* O, *par rapport à l'un quelconque de ses points pris pour origine, est une droite* L *perpendiculaire au diamètre passant par l'origine*, et dont la distance à cette origine est donnée en grandeur et en signe par la formule $\delta = \frac{\mu}{d}$, μ étant la puissance considérée.

397. Il résulte pareillement du n° 394 (*fig.* 235) que *deux circonférences quelconques* O *et* O' *peuvent être considérées comme deux figures inverses l'une de l'autre*; l'origine est l'un quelconque S des centres de similitude; la puissance est pK, p étant la puissance du centre de similitude S par rapport au cercle O, et K le rapport de similitude des cercles O' et O.

On conclut de là que *la figure inverse d'une circonférence O par rapport à un point S extérieur ou intérieur pris pour origine, est une circonférence* O' telle, que l'un des centres de similitude des circonférences O' et O soit en S et que le rapport de similitude soit égal à $\frac{\mu}{p}$, μ étant la puissance donnée et p la puissance du point S par rapport au cercle O.

THÉORÈME.

398. *La distance* MN *de deux points quelconques d'une figure et la distance* M'N' *des points correspondants de la figure inverse, sont liées par la formule*

$$M'N' = \frac{MN}{SM.SN}.\mu,$$

dans laquelle S *et* μ *représentent l'origine et la puissance considérées* (*fig.* 237).

En effet, la relation

$$SM.SM' = SN.SN' = \mu$$

prouve que les droites MN, M'N', sont antiparallèles par rapport à l'angle MSN, et par suite que les triangles SMN, SM'N' sont semblables. On a donc

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{SN'}{SM} = \frac{\mu}{SM.SN}, \quad \text{d'où} \quad M'N' = \frac{MN}{SM.SN}.\mu.$$

Fig. 237.

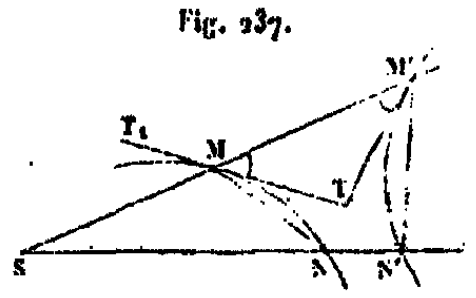
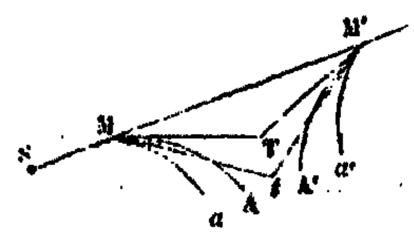


Fig. 238.



THÉORÈME.

399. *L'angle de deux lignes quelconques qui se coupent, est égal à l'angle des deux lignes inverses.*

Considérons d'abord (*fig.* 237) une seule ligne quelconque MN et son inverse M'N'; il est aisé de voir que les angles TMM', TM'M, que leurs tangentes MT, M'T, font avec le rayon vecteur SMM', sont égaux. Car si l'on considère un rayon vecteur voisin SNN', les cordes MN et M'N' sont, comme nous l'avons déjà fait observer, antiparallèles par rapport à l'angle MSN; donc les angles SM'N', SNM sont égaux; or, à la limite, le premier devient l'angle SM'T, et l'autre, l'angle SMT, opposé par le sommet à l'angle TMM'; donc MM'T = TMM'. Pour éviter toute ambiguïté dans la manière de compter les angles, on peut remarquer que les deux tangentes correspondantes forment les deux côtés d'un triangle isocèle TMM' dont la base est la partie MM' du rayon vecteur comprise entre les deux points de contact.

Soient actuellement (*fig.* 238) deux courbes Ma et MA qui se coupent en M, et les courbes inverses $M'a'$ et $M'A'$; il faut prouver que l'angle des deux premières, c'est-à-dire l'angle tMT de leurs tangentes, est égal à l'angle $tM'T$ des deux autres. Or on a, d'après l'alinéa précédent,

$$tMM' = tM'M, \quad TMM' = TM'M,$$

d'où, en retranchant,

$$tMM' - TMM' \quad \text{ou} \quad tMT = tM'M - TM'M \quad \text{ou} \quad tM'T.$$

Cette propriété de conserver les angles, dont jouit ce mode de transformation des figures, est très-importante : elle entraîne la similitude des triangles infiniment petits correspondants, de sorte que deux figures inverses l'une ou l'autre sont deux figures semblables dont le rapport de similitude *varie* d'un lieu à un autre.

400. Ces principes posés, passons aux applications.

Voici d'abord quelques exemples de transformation des propriétés descriptives et des propriétés métriques angulaires.

1° Dans tout triangle rectiligne, la somme des angles est égale à deux angles droits. En formant la figure inverse (396), on obtient un triangle formé par trois arcs de cercle qui se coupent tous à l'origine ; et comme la transformation n'altère pas les angles, on a ce théorème : *La somme des angles d'un triangle curviligne, dont les côtés sont des arcs de cercle qui se croisent en un même point, est égale à deux angles droits.* On aurait un théorème analogue en transformant la proposition relative (85) à la somme des angles d'un polygone.

2° Les trois hauteurs d'un triangle rectiligne se coupent au même point. *Donc, dans tout triangle dont les côtés sont des arcs de cercle passant par un même point, les trois cercles qui passant par ce point et par un sommet du triangle, coupent orthogonalement le côté opposé à ce sommet, concourent en un même point.* Le théorème sur les bissectrices se transformerait d'une manière analogue.

3° Il est évident que si, dans un angle fixe, on inscrit deux cercles tangents entre eux, le lieu de leurs points de contact est la bissectrice de l'angle. Donc, en formant la figure inverse, *si, dans l'espace compris entre deux cercles qui se coupent, on inscrit deux circonférences tangentes entre elles, le lieu de leur point de contact est une autre circonférence.*

401. La transformation des propriétés métriques des segments s'opère à l'aide de la formule du n° 398, dans laquelle on peut d'ailleurs faire

$\mu = 1$. Il suffit, d'après cela, pour transformer une relation entre diverses distances AB, BC, ..., de la figure primitive, de remplacer chaque distance telle que AB par $\frac{AB}{SA.SB}$, S étant le point pris pour origine. Voici un exemple :

Étant donnée sur une droite une série de points se succédant dans l'ordre A, B, C, ..., H, K, on a évidemment

$$AK = AB + BC + \ldots + HK.$$

La figure inverse offre une série de points se succédant dans l'ordre S, A, B, C, ..., H, K, sur un cercle passant par l'origine S, et l'on a entre les distances de ces points la relation

$$\frac{AK}{SA.SK} = \frac{AB}{SA.SB} + \frac{BC}{SB.SC} + \ldots + \frac{HK}{SH.SK}.$$

Si les points ne sont qu'au nombre de trois A, B, C, on a

$$\frac{AC}{SA.SC} = \frac{AB}{SA.SB} + \frac{BC}{SB.SC},$$

ou

$$AC.SB = AB.SC + BC.SA,$$

et l'on retombe sur le théorème de Ptolémée (238) relatif au produit des diagonales du quadrilatère inscrit.

La méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques, proposée par M. Stubbs (*Philosophical Magazine*, 1843), appliquée ensuite par M. William Thomson sous le nom de *principe des images*, a été l'objet d'un Mémoire de M. Liouville, qui en a donné une théorie analytique complète (*Journal de Mathématiques*, t. XII).

Cercle tangent à trois cercles donnés.

402. Désignons par A, B, C, les centres des trois cercles auxquels on demande de mener un cercle tangent.

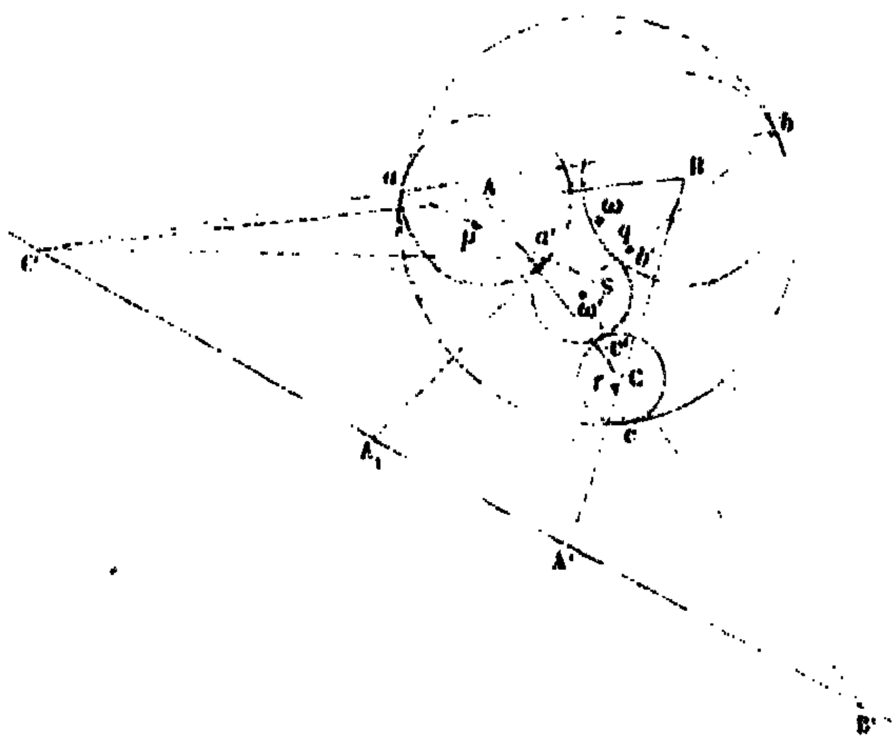
On peut avoir : 1° un cercle ω enveloppant A, B, C, et un cercle ω' enveloppé par A, B, C ; 2° un cercle α qui touche extérieurement le cercle A et intérieurement les cercles B et C, et un cercle α' qui touche intérieurement le cercle A et extérieurement les cercles B et C ; 3° un cercle β touchant le cercle B extérieurement et les deux autres A et C intérieurement, et un cercle β' touchant B intérieurement et A et C extérieurement ; 4° enfin, un cercle γ qui touche C extérieurement et A et B intérieurement, et un cercle γ' touchant C intérieurement et A et B extérieurement. Ainsi, il peut exister dans le cas général *huit* solutions qui se partagent, comme nous venons de l'indiquer, en *quatre* groupes de deux.

Cela posé, cherchons à déterminer les deux circonférences d'un même groupe, ω et ω', par exemple (*fig.* 239).

Supposons le problème résolu : soient a et a' les points de contact des cercles ω et ω' avec le cercle A, de même b et b' leurs points de contact avec le cercle B, c et c' leurs points de contact avec le cercle C. Tout revient évidemment à trouver les cordes aa', bb', cc'. Or ces cordes sont déterminées par les deux propriétés suivantes.

1° *Chacune des cordes aa', bb', cc', passe par le centre radical des trois circonférences données* A, B, C. — En effet, a étant le centre de simili-

Fig. 239.



tude directe des cercles ω et A, et a' le centre de similitude inverse des cercles ω' et A, la corde aa' doit passer par le centre de similitude inverse S des cercles ω et ω' (379). On verrait de même que ce point S appartient aussi à bb' et cc'. Un raisonnement analogue montre que ab et $a'b'$ concourent au centre de similitude directe C' des cercles A et B; donc les cordes aa' et bb' des cercles A et B sont anti-homologues (391), et leur point d'intersection S appartient à l'axe radical des cercles A et B. On verrait de même que ce point de concours S de aa', bb', cc', appartient à l'axe radical des cercles B et C : il est donc le centre radical des trois cercles A, B, C.

2° *Chacune des cordes aa', bb', cc', contient le pôle, par rapport à son cercle, de l'axe de similitude directe* A'B'C' *des trois circonférences données* A, B, C. — En effet, puisque S est un centre de similitude des cercles ω et ω', les deux cordes ab, $a'b'$, sont anti-homologues, et leur point de concours C' doit appartenir à l'axe radical des deux cercles ω et ω'. On verrait de même que cet axe radical passe par le centre de similitude directe A' des cercles B et C et par le centre de similitude directe B' des cercles A et B. Donc l'axe radical des cercles ω et ω' coïncide avec l'axe A'B'C' de similitude directe des trois cercles A, B, C. D'après cela, la droite A'B'C' doit contenir l'intersection A_1 des deux tangentes anti-homologues aA_1, $a'A_1$ (391, 3°), c'est-à-dire le pôle de la corde aa' par rapport au cercle A; donc, réciproquement (355), la corde aa' doit renfermer le pôle p de la droite A'B'C' par rapport au cercle A.

On conclut de là la règle suivante : *Déterminez le centre radical* S *et l'axe de similitude directe des trois cercles donnés* A, B, C; *prenez, par rapport à chacun d'eux, les pôles* p, q, r, *de cet axe, et menez les droites* Sp, Sq, Sr, *qui rencontreront respectivement les cercles* A, B, C, *aux points de contact* a *et* a', b *et* b', c *et* c'; *il ne restera plus alors qu'à faire passer un cercle* ω *par les points* a, b, c, *et un cercle* ω' *par les points* a', b', c'.

En remplaçant l'axe de similitude directe par chacun des trois autres axes de similitude et en opérant d'une manière analogue, on obtiendrait les trois autres couples de cercles tangents.

403. Cette belle solution, due à Gergonne (*Annales de Mathématiques*, t. IV), est remarquable par sa simplicité, et surtout par la facilité avec laquelle elle s'applique à tous les cas particuliers qu'on obtient, en supposant qu'un ou plusieurs des cercles A, B, C, se réduisent à des points ou à des droites.

Ces cas particuliers sont au nombre de dix; en représentant un cercle par C, une droite par D et un point par P, on peut exprimer ces dix problèmes comme il suit : PPP, PPD, PPC, PDD, PDC, PCC, DDD, DDC, DCC, CCC.

Les problèmes PPP (faire passer un cercle par trois points donnés), DDD (mener un cercle tangent à trois droites données), ont été résolus directement dans le II^e livre (n^{os} 170 et 177); les problèmes PPD, PPC, (faire passer par deux points donnés un cercle tangent à une droite ou à un cercle donné) ont été résolus directement dans le III^e livre (n° 275).

Transversales.

404. Lorsqu'une transversale abc (*fig.* 240 et 241) rencontre les trois

Fig. 240.

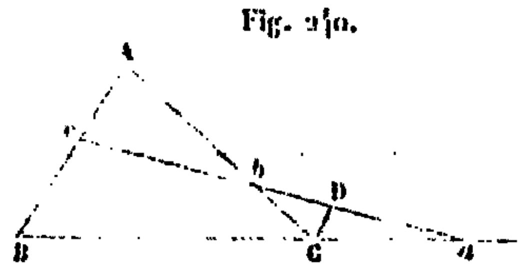
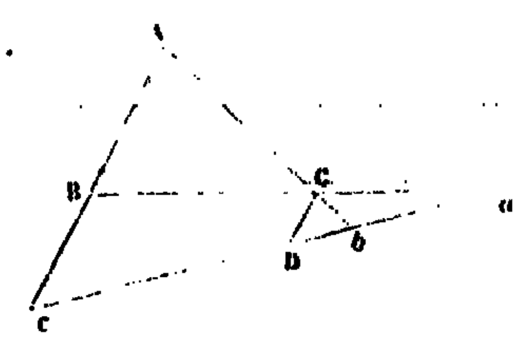


Fig. 241.



côtés d'un triangle ABC, regardés comme indéfinis, chacun des points d'intersection a, b, c, est l'origine commune de deux segments ayant pour extrémités les extrémités du côté que l'on considère. Ainsi, sur AB, sont les deux segments cA et cB, sur BC les segments aB et aC, et sur CA les segments bC et bA. Les deux segments relatifs à un même côté sont de signes contraires ou de même signe (321), suivant que la transversale coupe le côté lui-même ou son prolongement.

THÉORÈME.

405. *Quand un triangle* ABC *est coupé par une transversale abc* (*fig.* 240 et 241), *il existe entre les segments que cette droite détermine sur les côtés la relation*

$$(1) \qquad \frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB} = +1.$$

En effet, en menant CD parallèle à AB, on a, dans les triangles semblables aCD, aBc,

$$\frac{aB}{aC} = \frac{cB}{DC},$$

et, dans les triangles semblables bCD, bcA,

$$\frac{bC}{bA} = \frac{DC}{cA};$$

il suffit donc de multiplier ces deux proportions membre à membre pour avoir la relation (1), qui se trouve ainsi démontrée en valeur absolue.

Il reste à prouver que, eu égard aux signes des segments, c'est le signe + qui convient au second membre de cette égalité. Or il ne peut se présenter que deux cas : la transversale coupe deux côtés et le prolongement du troisième (*fig.* 240), ou elle coupe les prolongements des trois côtés (*fig.* 241). Dans le premier cas, deux des rapports qui figurent dans le premier membre sont négatifs, et le troisième positif; dans le second cas, les trois rapports sont positifs. Le produit des trois rapports a donc toujours le signe +.

406. Réciproquement, *si, sur les trois côtés d'un triangle* ABC *considérés comme indéfinis, on prend trois points a, b, c, tels que la relation* (1) *soit satisfaite, ces trois points seront en ligne droite.*

En effet, en désignant par c' le point où la droite ab rencontre AB, on a, d'après ce qui précède,

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{c'A}{c'B} = 1;$$

par suite, en comparant cette relation à la relation (1), qui est satisfaite par hypothèse, on a

$$\frac{c'A}{c'B} = \frac{cA}{cB}.$$

Donc (321) c' coïncide avec c, et les trois points a, b, c, sont en ligne droite.

Observons que la relation (1), qu'on prend ici pour hypothèse, exige que le nombre des rapports négatifs du premier membre soit pair, c'est-à-dire que parmi les trois points a, b, c, il y en ait un nombre pair situé sur les côtés et, par suite, un nombre impair sur les prolongements.

On peut encore remarquer que les numérateurs des trois rapports sont trois segments sans extrémités communes; il en est de même pour les dénominateurs.

Scolie.

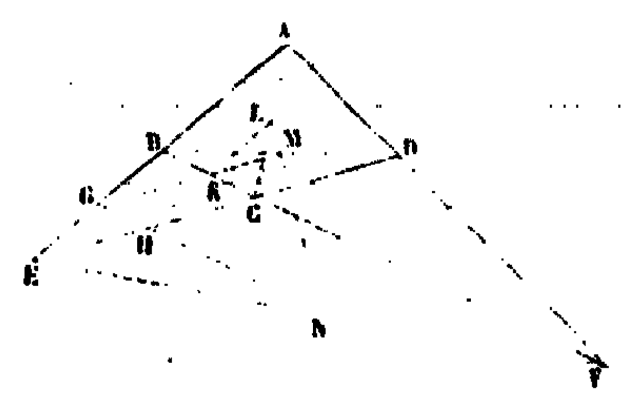
407. Le théorème qui précède, attribué à Ménélaüs, géomètre grec antérieur de près d'un siècle à Ptolémée, sert à prouver que trois points d'une figure sont en ligne droite; outre cet usage spécial, il intervient souvent d'une manière utile comme intermédiaire dans certaines démonstrations.

Par exemple, pour obtenir le théorème de Pascal (337), il suffit de considérer le triangle formé par trois côtés non consécutifs de l'hexagone inscrit, comme coupé successivement par les trois autres côtés. Le théorème du n° 405 donne ainsi trois relations, dont le produit membre à membre se réduit à une nouvelle relation de même forme entre les segments déterminés sur les côtés du même triangle par les points de concours des côtés opposés de l'hexagone. La réciproque (406) de ce théorème prouve alors que ces trois points de concours sont en ligne droite. Mais cette démonstration, due à Sturm, et que le lecteur rétablira sans peine d'après cette analyse, est moins simple que celle que nous avons donnée au n° 337.

408. Voici un autre exemple :

Dans tout quadrilatère complet ABCDEF, *les milieux* L, M, N, *des trois diagonales* AC, BD, EF, *sont en ligne droite* (*fig.* 242).

Fig. 242.



En effet, les milieux G, H, K, des côtés du triangle BCE sont les sommets d'un nouveau triangle dont les côtés passent évidemment par L, M, N, et tout revient à démontrer (406) la relation

$$\frac{MG}{MK}\cdot\frac{LK}{LH}\cdot\frac{NH}{NG}=1.$$

Or l'exactitude de cette relation résulte de ce que les six termes de son premier membre sont respectivement les moitiés des segments que la transversale ADF détermine sur les côtés du triangle BCE.

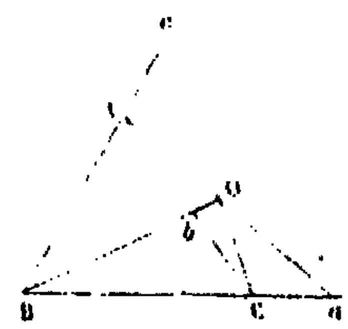
THÉORÈME.

409. *Les droites menées d'un même point* O (*fig.* 243 et 244) *aux trois sommets d'un triangle* ABC, *rencontrent les côtés opposés, considérés comme indéfinis, en trois points* a, b, c, *qui satisfont à la relation*

$$(2)\qquad \frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}=-1.$$

Fig. 243.

Fig. 244.



En effet, le triangle ACa, coupé par la transversale Bb, donne

$$\frac{Ba}{BC}\cdot\frac{OA}{Oa}\cdot\frac{bC}{bA}=1.$$

Le triangle ABa, coupé par la transversale Cc, donne à son tour

$$\frac{CB}{Ca}\cdot\frac{Oa}{OA}\cdot\frac{cA}{cB}=1.$$

En multipliant membre à membre ces deux égalités, on obtient la relation

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}\cdot\frac{CB}{BC}=1,$$

qui ne diffère pas de la relation (2), puisque $\frac{CB}{BC}=-1$.

410. **Réciproquement**, *si, par les sommets d'un triangle* ABC, *on mène trois droites* Aa, Bb, Cc, *telles que la relation* (2) *soit vérifiée, ces trois droites passent par un même point.*

En effet, en désignant par O le point de concours de Aa et Bb, et par c' le point où CO rencontre le côté AB, on a, d'après ce qui précède,

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{c'A}{c'B}=-1;$$

d'où, en comparant avec la relation (2) qui est satisfaite par hypothèse,

$$\frac{cA}{cB}=\frac{c'A}{c'B}.$$

Donc les points c et c' coïncident (321); en d'autres termes, la droite Cc passe par l'intersection O de Aa et de Bb.

SCOLIE.

411. Le théorème qui précède, dû à Jean de Céva, géomètre italien du XVII^e siècle, sert à prouver que trois droites d'une figure sont concourantes; il peut aussi intervenir comme auxiliaire utile dans certaines démonstrations.

Voici quelques exemples :

1° *Dans tout triangle* ABC, *les trois médianes* Aa, Bb, Cc, *passent par un même point;* car chacun des rapports qui figurent dans le premier membre de la relation (2) est alors égal à -1.

2° *Dans tout triangle* ABC, *les bissectrices* Aa, Bb, Cc, *des trois angles passent par un même point.*

En effet, en vertu du théorème du n° 197, les rapports qui figurent dans le premier membre de la relation (2) sont respectivement égaux aux rapports

$$-\frac{AB}{AC},\quad -\frac{BC}{AB},\quad -\frac{AC}{BC},$$

dont le produit est égal à -1.

On verrait de même que *les bissectrices des suppléments de deux angles et la bissectrice du troisième angle passent par un même point.*

3° *Dans tout triangle* ABC, *les trois hauteurs* Aa, Bb, Cc, *passent par un même point.*

En effet, les triangles semblables BAb, CAc donnent

$$\frac{cA}{bA}=\frac{AC}{AB},$$

et l'on a de même

$$\frac{aB}{cB}=\frac{AB}{BC},\quad \frac{bC}{aC}=\frac{BC}{AC};$$

d'où l'on voit, en multipliant membre à membre, que le produit $\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}$ est, en valeur absolue, égal à 1. D'ailleurs, chacun de ces trois rapports est négatif; donc leur produit est égal à -1.

412. Les théorèmes de Ménélaüs et de Jean de Céva ont été reproduits, dans sa *Géométrie de position*, par Carnot, qui en a fait ensuite la base de sa *Théorie des transversales*. Sans méconnaître l'utilité de ces propositions, ni surtout l'heureuse influence qu'ont exercée les idées générales introduites par Carnot dans la science géométrique, il faut cependant avouer que l'emploi de ces théorèmes est, en général, moins simple et moins fécond que celui du rapport anharmonique.

QUESTIONS PROPOSÉES.

§ I. — *Lignes proportionnelles.*

101. d étant la longueur d'une droite BC, et M et M' étant les points conjugués qui la divisent dans le rapport $\frac{a}{b}$, démontrer les relations suivantes :

$$\mathrm{MA} = \frac{ad}{a+b}, \quad \mathrm{MB} = \frac{bd}{a+b};$$

$$\mathrm{M'A} = \frac{ad}{a-b}, \quad \mathrm{M'B} = \frac{bd}{a-b} \quad (\text{si } a \text{ est} > b),$$

et

$$\mathrm{M'A} = \frac{ad}{b-a}, \quad \mathrm{M'B} = \frac{bd}{b-a} \quad (\text{si } a \text{ est} < b).$$

102. O étant le milieu d'une droite BC, et M et M' deux points conjugués par rapport à cette droite, démontrer directement la relation

$$\overline{\mathrm{OB}}^2 = \mathrm{OM}.\mathrm{OM'}.$$

I étant le milieu de MM', on a de même

$$\overline{\mathrm{IM}}^2 = \mathrm{IB}.\mathrm{IC}.$$

103. M et M' étant deux points conjugués par rapport à la droite BC, démontrer la relation

$$\frac{2}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{\mathrm{BM}} + \frac{1}{\mathrm{BM'}}.$$

104. Démontrer directement la réciproque du n° 107, et en déduire la proposition directe.

105. Si, par un point P pris dans le plan d'un cercle O, on mène une sécante quelconque PDE, et qu'on prenne le symétrique E' du point E par rapport au diamètre PO, la droite DE' passe par un point fixe, c'est-à-dire indépendant de la direction de la sécante PDE.

166. Démontrer que, si l'on mène entre les deux côtés d'un triangle une suite de parallèles à la base, la médiane qui correspond à cette base est le lieu des points d'intersection des diagonales des trapèzes ainsi obtenus.

167. Trouver le lieu géométrique des points d'un plan également éclairés par deux foyers lumineux placés dans ce plan, et dont les intensités à l'unité de distance sont représentées par les nombres a et b.

168. Trouver dans le plan déterminé par trois foyers lumineux le point également éclairé par chacun d'eux.

169. Trouver le lieu des points qui partagent dans un rapport donné $\frac{m}{n}$ toutes les droites comprises entre un point donné A et un cercle donné O.

170. Trouver le lieu des points d'où l'on voit sous un même angle deux cercles donnés.

171. Trouver le point d'où l'on voit sous un même angle donné trois cercles donnés.

172. ABC est un triangle équilatéral, E un point de AC; sur BC prolongé, on prend des longueurs CD, CF, respectivement égales à CA et à CE, et l'on mène les droites AF et DE qui se coupent en H. Prouver qu'on a $\frac{HC}{EC} = \frac{AC}{AC + EC}$.

173. Dans un triangle quelconque, on mène une droite par un sommet et par le milieu d'une des médianes du triangle; dans quels rapports se trouvent divisés le côté opposé au sommet choisi et la transversale menée elle-même?

174. Soient deux droites quelconques AB et XY. Si AB est divisée au point C dans le rapport $\frac{m}{n}$, et si des points A, B, C, on abaisse sur XY les perpendiculaires AA′, BB′, CC′, on aura toujours

$$CC'(m+n) = n.AA' + m.BB'.$$

§ II. — *Similitude des polygones.*

175. Si les trois côtés d'un triangle font respectivement avec les trois côtés d'un autre triangle des angles égaux, ces deux triangles sont semblables.

176. Étant donné un triangle ABC, y inscrire un triangle semblable à un triangle donné, et qui ait l'un de ses sommets en un point donné sur l'un des côtés du triangle ABC.

177. Étant donné un triangle ABC, mener à la base BC une parallèle DE telle, que la somme ou la différence des segments BD et CE déterminés sur les côtés AB et AC soit égale à une ligne donnée.

178. Un billard circulaire étant donné, dans quelle direction faut-il lancer la bille pour qu'elle revienne au point de départ, après avoir frappé deux fois la bande?

179. Si un triangle circonscrit à un triangle fixe se meut en restant semblable à lui-même, un point quelconque de son plan décrit une circonférence.

180. On donne une droite XY et un angle BAC dont le sommet est en un point fixe A hors de cette droite. Le point B étant le point commun à la droite XY et au côté BA, on prend sur l'autre côté de l'angle BAC un point C tel qu'on ait

$$AB.AC = k^2.$$

Déterminer le lieu décrit par le point C lorsque l'angle BAC tourne autour de son sommet.

181. Trouver dans le plan de deux droites qui se coupent le lieu des points tels, qu'en menant par chacun d'eux des parallèles aux droites données, le rapport des longueurs de ces parallèles arrêtées à ces droites soit constant et égal à un rapport donné.

182. Lieu des points dont les distances à deux droites données sont dans un rapport constant.

183. Si deux côtés d'un triangle sont inégaux, et qu'on ajoute à chacun d'eux la hauteur correspondante, la plus grande somme correspondra au plus grand côté.

184. Mener à un cercle donné, par deux points donnés extérieurement, deux sécantes qui se coupent sur le cercle, et dont les deux autres points d'intersection avec la circonférence déterminent une corde parallèle à une direction donnée.

185. Inscrire dans un triangle donné un triangle semblable à un triangle donné, et qui soit minimum.

186. Circonscrire au système de trois cercles donnés un triangle semblable à un triangle donné, et qui soit maximum.

187. Inscrire dans un triangle donné trois cercles dont les rayons et les distances des centres soient dans un rapport donné, et qui forment un système minimum.

188. Trouver le lieu du troisième sommet d'un triangle semblable à un triangle donné, et dont un sommet reste fixe, tandis que l'autre décrit une droite ou une circonférence donnée.

189. On donne un point A et une droite BC; trouver le lieu des points M qui divisent les sécantes AN menées du point à la droite, de manière qu'on ait

$$AM.AN = k^2.$$

190. Les diagonales AC, BD, d'un quadrilatère inscrit ABCD se coupent en E. Démontrer qu'on a

$$\frac{AB.BC}{AD.DC} = \frac{BE}{ED}.$$

191. Si un carré DEGF est inscrit dans un triangle rectangle ABC, de manière qu'un côté DE du carré coïncide avec l'hypoténuse BC, ce côté est moyen proportionnel entre les deux segments BD et EC de l'hypoténuse.

192. Soit ABC un triangle inscrit. On mène dans ce triangle la parallèle BD à la tangente en A au cercle circonscrit, jusqu'à sa rencontre D avec le côté AC prolongé s'il le faut; démontrer que

$$\overline{AB}^2 = AC.AD.$$

193. La droite AB étant divisée aux points C et D de manière qu'on ait

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD},$$

si l'on mène par le point A une autre droite AE égale à AC, démontrer que l'angle BED a EC pour bissectrice.

194. Si deux cordes se coupent dans un cercle, de manière que les segments de l'une présentent le même rapport que les segments de l'autre, la bissectrice de l'angle formé par deux segments homologues passe par le centre du cercle.

195. On donne un triangle ABC rectangle en A; une perpendiculaire DE à l'hypoténuse coupe le côté BA en D, le côté CA en F; on mène les droites CD, BF, qui se coupent en M: lieu des points M.

196. Un triangle BAC étant inscrit dans une demi-circonférence, une perpendiculaire menée en D à l'hypoténuse BC coupe les côtés BA et AC du triangle et la demi-circonférence aux points E, G, F; démontrer la relation

$$\overline{DF}^2 = DE.DG.$$

197. Dans un triangle ABC rectangle en A, on mène CD bissectrice de l'angle C; démontrer la proportion

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC - AC}{AD}.$$

198. Si, d'un point A d'une circonférence, on mène les cordes AB, AC, etc., qu'on les coupe par une corde DE parallèle à la tangente en A, le produit de chaque corde issue du point A par le segment compris sur elle entre le point A et la corde DE, est constant.

199. Étant donnés un parallélogramme ABCD et deux points P et Q sur les côtés AD et CD, si l'on mène par ces points, dans une direction

quelconque, deux parallèles qui rencontrent respectivement en M et en M' les deux côtés AB et CB, le produit AM.CM' est constant.

200. On donne trois droites parallèles et deux points P et Q, si autour de ces points on fait tourner deux droites qui se coupent sur l'une des trois parallèles et qui rencontrent respectivement les deux autres en M et en M', la droite MM' passe par un point fixe.

201. Si, par le sommet d'un angle donné et par un point extérieur à cet angle, on fait passer une série de cercles, ces cercles divisent les deux côtés de l'angle en parties proportionnelles. — Quel est le lieu du milieu des cordes interceptées entre les côtés de l'angle donné?

202. Quand un losange ABCD est circonscrit à un cercle, toute tangente MM' à ce cercle détermine sur les côtés AB et AD deux segments BM et DM' dont le produit est constant.

203. Deux cercles tangents extérieurement étant donnés, la portion de tangente commune extérieure comprise entre ses deux points de contact est la moyenne proportionnelle des diamètres des deux cercles.

204. Trouver dans le plan d'un triangle ABC un point O tel, que les circonférences passant par ce point et deux des sommets du triangle soient entre elles comme trois droites données.

205. Si, sur les deux côtés AB et AC d'un triangle ABC, on décrit des cercles de manière que leur second point d'intersection se trouve sur la base BC ou sur son prolongement, les diamètres de ces cercles sont proportionnels aux côtés sur lesquels on les a respectivement décrits.

206. CDE étant la tangente commune à deux circonférences et rencontrant la ligne des centres AB au point E, si l'on mène aux deux circonférences une sécante FGHKE, démontrer la relation

$$EC.ED = EF.EK = EG.EH.$$

207. Si un cercle quelconque touche deux autres cercles donnés, la droite qui unit les deux points de contact passe par un point fixe.

208. Lorsque deux triangles ont deux angles égaux et deux angles supplémentaires chacun à chacun, les côtés de ces triangles respectivement opposés à ces angles sont proportionnels.

209. Si un triangle isocèle est inscrit dans un cercle et qu'on mène par son sommet une droite qui coupe la circonférence et la base du triangle, le produit des distances du sommet aux deux points d'intersection est égal au carré du côté du triangle isocèle.

210. Soient dans un cercle le diamètre AB et la perpendiculaire AC à ce diamètre; si, par un point C quelconque de cette perpendiculaire, on

mène au cercle une seconde tangente CD, la perpendiculaire DE, menée par le point de contact D au diamètre AB, est divisée en deux parties égales par la droite CB.

211. On donne deux cercles dont l'un a pour centre un point O de la circonférence de l'autre : si l'on mène au cercle O une tangente quelconque qui rencontre l'autre cercle en M et en M', le produit OM.OM' est constant.

212. Inscrire un carré dans un triangle. — Discussion.

213. Inscrire à un rectangle donné un rectangle semblable à un autre rectangle donné. — Discussion.

214. Un angle AOB, tournant autour de son sommet O, intercepte sur les côtés d'un angle fixe, supplémentaire du premier, une corde AB : trouver le lieu des points qui divisent cette corde dans un rapport donné.

215. a, b, c, désignant les longueurs des trois côtés d'un triangle ; p, q, r, celles des trois hauteurs ; x, y, z, les côtés des trois carrés inscrits : x', y', z', les côtés des trois carrés ex-inscrits, démontrer les relations

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{p}+\frac{1}{a},\quad \frac{1}{y}=\frac{1}{q}+\frac{1}{b},\quad \frac{1}{z}=\frac{1}{r}+\frac{1}{c},$$
$$\frac{1}{x'}=\frac{1}{p}-\frac{1}{a},\quad \frac{1}{y'}=\frac{1}{q}-\frac{1}{b},\quad \frac{1}{z'}=\frac{1}{r}-\frac{1}{c}.$$

216. Dans tout triangle, la distance du centre du cercle circonscrit à l'un des côtés est égale à la moitié de la droite qui joint le sommet opposé au point de concours des hauteurs.

217. Sur la base BC d'un triangle ABC, on décrit extérieurement au triangle un carré BCDE ; on mène les droites AD et AE qui coupent BC en P et Q : démontrer que PQ est égal au côté du carré inscrit dans le triangle ABC et reposant sur BC.

218. Dans tout triangle ABC, le produit des distances des points B et C à la bissectrice de l'angle intérieur A est égal au produit de la bissectrice de l'angle extérieur supplémentaire par la distance du milieu de BC à la première bissectrice ; de même, le produit des distances des points B et C à la bissectrice de l'angle extérieur A est égal au produit de la bissectrice de l'angle intérieur supplémentaire par la distance du milieu de BC à la première bissectrice.

219. La distance d'un point M d'une circonférence à une corde quelconque est la moyenne proportionnelle des distances du même point aux tangentes menées par les extrémités de la corde considérée.

220. Le produit des distances d'un point quelconque d'une circonférence à deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans cette circonfé-

rence, est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés. (*Voir* 366.)

221. Dans un quadrilatère inscrit à un cercle, on prolonge les côtés opposés jusqu'à leur rencontre, et l'on mène les bissectrices des angles ainsi formés; démontrer que les milieux des portions de ces bissectrices comprises entre les côtés du quadrilatère, sont situés sur la droite qui unit les milieux de ses diagonales.

222. La droite déterminée dans un triangle par le milieu d'un des côtés et le milieu de la droite qui joint le sommet opposé au point de contact du côté considéré avec le cercle inscrit au triangle, passe par le centre de ce cercle. — Énoncer et démontrer le théorème analogue pour un cercle ex-inscrit.

223. Si, des trois sommets d'un triangle et du point de rencontre de ses médianes, on abaisse des perpendiculaires sur un axe quelconque, la dernière perpendiculaire est la moyenne arithmétique des trois premières.

224. Étant donnés deux triangles et un point, mener par ce point une droite telle, que les sommes respectives des distances des sommets des deux triangles à cette droite soient dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

§ III. — *Relations métriques entre les différentes parties d'un triangle.*

225. Si, du milieu d'un des côtés d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, la différence des carrés des segments déterminés sur l'hypoténuse est égale au carré de l'autre côté du triangle.

226. Soit l'angle droit AOB placé au centre de la circonférence OA. D'un point quelconque C pris sur l'arc AB, on abaisse sur OA ou sur OB la perpendiculaire CD, qui rencontre en E le rayon, bissectrice de l'angle AOB; démontrer la relation

$$\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{OA}^2.$$

227. D étant le milieu de la demi-circonférence ADB, et C un point quelconque du diamètre AB, si l'on élève la perpendiculaire CE à ce diamètre jusqu'à la rencontre de la demi-circonférence, démontrer la relation

$$\overline{CE}^2 + \overline{CD}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{2}.$$

228. A étant le sommet d'un triangle isocèle ABC, et CD la perpendiculaire abaissée du sommet C sur le côté AB, la somme des carrés des trois côtés du triangle est égale à

$$\overline{BD}^2 + 2\overline{AD}^2 + 3\overline{CD}^2$$

229. Si, d'un point pris dans le plan d'un polygone, on abaisse des perpendiculaires sur tous ses côtés, les deux sommes des carrés des segments déterminés pris alternativement sont égales.

230. Soit un triangle équilatéral ABC; du point D, milieu de BC, on abaisse DE perpendiculaire sur le côté AB : démontrer que AE est les trois quarts de AB.

231. Étant donné un cercle O, on décrit un demi-cercle sur l'un de ses rayons OA, et l'on mène à ce rayon une perpendiculaire CDE qui coupe le cercle O en D et le demi-cercle OA en E : démontrer la relation

$$\overline{AD}^2 = 2\overline{AE}^2.$$

232. Dans tout quadrilatère, la somme des carrés des diagonales est le double de la somme des carrés des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

233. Soit G le point de rencontre des médianes d'un triangle ABC; démontrer la relation

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 3\left(\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2\right).$$

— En déduire le rapport de la somme des carrés des côtés d'un triangle à la somme des carrés de ses médianes.

234. Soient G le point de rencontre des médianes d'un triangle ABC, et M un point quelconque pris dans son plan; démontrer la relation

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + 3\overline{MG}^2.$$

235. Étant donné un triangle ABC, trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux trois sommets du triangle est constante et égale à un carré donné k^2.

236. La somme des carrés de deux côtés d'un quadrilatère, plus la somme des carrés des diagonales, est égale à la somme des carrés des deux autres côtés, plus quatre fois le carré de la ligne qui joint les milieux de ces côtés.

237. Soient un triangle isocèle ABC et, dans ce triangle, la parallèle DE à la base BC; démontrer la relation

$$\overline{BE}^2 = \overline{EC}^2 + BC.DE.$$

238. La somme des carrés des diagonales d'un trapèze est égale à la somme des carrés des côtés non parallèles, plus deux fois le produit des bases.

239. Si l'on prend deux points à égale distance du centre sur le diamètre d'un cercle, la somme des carrés des distances d'un point de la circonférence à ces deux points est constante.

240. L'hypoténuse BC d'un triangle rectangle ABC étant divisée en trois parties égales aux points D et E, la somme des carrés des côtés du triangle ADE est égale aux deux tiers du carré de BC.

241. M étant un point quelconque pris sur la base BC d'un triangle isocèle ABC, ou sur son prolongement, démontrer la relation

$$\mathrm{MB}.\mathrm{MC} = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{MC}}^2.$$

242. Dans tout triangle ABC, le produit des distances des points B et C à la bissectrice de l'angle intérieur A est égal au carré de la moitié de BC, diminué du carré de la demi-différence des côtés AB et AC; de même, le produit des distances des points B et C à la bissectrice de l'angle extérieur A est égal au carré de la demi-somme des côtés AB et AC, diminué du carré de la moitié de BC.

243. Le sommet A d'un rectangle ABCD est fixe, les sommets B et D se meuvent sur un même cercle; quel est le lieu du sommet C opposé au sommet A?

244. Trouver le lieu des points qui partagent les diverses cordes d'un cercle donné en deux segments (additifs ou soustractifs) dont le produit soit constant.

245. Étant donnés un cercle O et un point P, trouver le lieu des points M tels, que la distance MP soit égale à la tangente menée du point M au cercle O.

246. b et c étant les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, et h la hauteur qui correspond à l'hypoténuse, démontrer la relation

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

247. a, b, c, étant les côtés d'un triangle rectangle en A, et h la hauteur qui correspond à l'hypoténuse a, le triangle qui a pour côtés $b+c$, h et $a+h$, est aussi rectangle.

248. Si un triangle équilatéral a ses sommets respectivement situés sur trois droites parallèles, et si b et c sont les distances de la parallèle intermédiaire aux deux autres, le côté du triangle a pour expression

$$2.\sqrt{\frac{b^2+bc+c^2}{3}}.$$

249. Dans tout trapèze, la différence des carrés des diagonales est à la différence des carrés des côtés non parallèles comme la somme des côtés parallèles est à leur différence.

250. Calculer les diagonales d'un trapèze, connaissant ses quatre côtés.

251. ABCD est un quadrilatère, E le milieu de la droite qui unit les milieux des diagonales; si du point E comme centre on décrit un cercle, montrer que la somme des carrés des distances d'un point P de ce cercle aux quatre sommets A, B, C, D, est constante et égale à la somme des carrés des distances du centre E aux mêmes sommets, plus quatre fois $\overline{EP}^2$.

252. Une corde PAQ coupe en A le diamètre d'un cercle sous un angle de 45 degrés; démontrer que $\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2$ est égale à deux fois le carré du rayon.

253. Si deux cordes se coupent dans un cercle, la différence de leurs carrés est égale à la différence des carrés des différences de leurs segments.

254. Deux cordes parallèles dans un cercle sont égales respectivement à 6 mètres et à 8 mètres, elles sont distantes de 1 mètre : calculer le diamètre du cercle.

255. Soient deux points C et D pris sur une ligne AB; C étant le milieu de AB, on a

$$\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2AD.DB + 4\overline{CD}^2.$$

256. Soit BD l'une des deux hauteurs égales d'un triangle isocèle ABC de base BC; démontrer la relation

$$AC.CD = \frac{\overline{BC}^2}{2}.$$

257. On considère dans un cercle un diamètre AOB et une corde CD parallèle à ce diamètre; E étant un point quelconque du diamètre, on a

$$\overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2.$$

258. Dans un triangle isocèle ABC, les angles en B et en C sont doubles de l'angle au sommet A; démontrer la relation

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + AB.BC.$$

259. Si l'on mène les deux hauteurs BD et CE d'un triangle quelconque ABC, on a

$$\overline{BC}^2 = AB.BE + AC.CD.$$

260. Soient dans un triangle quelconque ABC la médiane BD et la hauteur AE; suivant que le point E tombe sur BC ou sur son prolongement, on a

$$\overline{BD}^2 = \overline{DC}^2 \pm BC.BE.$$

261. Si l'on prend un point dans l'intérieur d'un rectangle, les sommes des carrés des distances de ce point à deux sommets opposés sont égales.

262. Si l'on mène une tangente à un cercle, la partie de cette tangente interceptée par les tangentes menées aux extrémités d'un même diamètre, est divisée au point de contact en deux segments dont le produit est égal au carré du rayon.

263. Si, autour de deux points A et B d'une circonférence, on fait tourner les côtés d'un angle droit M, et que du point N où le côté BM coupe la circonférence on abaisse la perpendiculaire NP sur le diamètre AA', le rapport $\frac{\overline{AM}^2}{AP}$ est constant.

264. Si l'on prend respectivement sur les trois côtés BC, CA, AB, d'un triangle ABC, trois points α, β, γ, tels qu'on ait

$$\left(\overline{B\alpha}^2-\overline{C\alpha}^2\right)+\left(\overline{C\beta}^2-\overline{A\beta}^2\right)+\left(\overline{A\gamma}^2-\overline{B\gamma}^2\right)=0,$$

les perpendiculaires élevées par ces points sur les côtés du triangle concourent en un même point.

265. Déduire de la proposition précédente :

1° Que les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se coupent en un point, qu'il en est de même des trois hauteurs, et des perpendiculaires menées aux côtés d'un triangle par les points de contact des trois cercles ex-inscrits;

2° Que si les perpendiculaires menées des sommets d'un triangle ABC sur les côtés d'un triangle A'B'C' se coupent en un même point, réciproquement les perpendiculaires menées des sommets du triangle A'B'C' sur les côtés du triangle ABC sont aussi concourantes.

266. Soit un triangle ABC rectangle en A, et partagé en deux autres triangles rectangles par la perpendiculaire AD abaissée du sommet A sur l'hypoténuse; si l'on désigne par R, r, r', les rayons des cercles inscrits dans les triangles ABC, ABD, ACD, on a

$$R^2=r^2+r'^2.$$

267. Dans un triangle quelconque, une perpendiculaire étant menée du sommet sur la base, cette base est à la somme des deux autres côtés comme leur différence est à la différence ou à la somme des segments de la base, suivant que la hauteur considérée tombe en dedans ou au dehors du triangle.

268. Si un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est double de l'autre, la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse la divise en deux segments qui sont dans le rapport de 1 à 4.

269. Deux cercles dont les rayons sont dans le rapport de 2 à 3 se touchent intérieurement, et par le centre du plus petit cercle on mène une droite perpendiculaire à la ligne des centres; démontrer que les tangentes

menées au plus petit cercle par les points où cette perpendiculaire rencontre le plus grand, sont à angle droit l'une sur l'autre.

270. Deux cercles sont tangents en O; par le point O, on mène à angle droit l'une sur l'autre les sécantes communes POP', QOQ'; A et A' étant les points où la ligne des centres coupe les deux cercles, démontrer la relation

$$\overline{PP'}^2 + \overline{QQ'}^2 = \overline{AA'}^2.$$

271. AOB est un quadrant; si l'on tire la corde Qq parallèle à la corde AB, jusqu'à ses points de rencontre R et r avec les rayons OA et OB, on a

$$\overline{QR}^2 + \overline{Qr}^2 = \overline{AB}^2.$$

§ IV. — *Lignes proportionnelles dans le cercle.*

272. Étant donnés un point A et un cercle O, on mène à ce cercle par le point A une sécante ABC sur laquelle on prend un point M tel, qu'on ait $AM.AC = k^2$; trouver le lieu décrit par le point M quand la sécante ABC tourne autour du point A.

273. D'un point donné hors d'un cercle, lui mener une sécante telle, que la corde interceptée soit moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.

274. D'un point donné hors d'un cercle, lui mener une sécante telle, que le produit de la sécante entière par sa partie intérieure soit égal à un carré donné k^2.

275. Étant donné un triangle obtusangle, mener du sommet de l'angle obtus au côté opposé une droite dont le carré soit égal au produit des segments qu'elle détermine sur ce côté.

276. AB est un diamètre d'un cercle, CD une corde perpendiculaire à AB; par un point P pris sur CD, on mène une corde APQ : démontrer que le produit AP.AQ est constant.

277. Si l'on joint le centre d'un cercle à un point d'une corde, le carré de la droite obtenue, plus le produit des segments que le point choisi détermine sur la corde, est égal au carré du rayon.

278. Soient dans un cercle un diamètre perpendiculaire en A à une corde donnée MN et une autre corde BC coupant en D la première; démontrer la relation

$$\overline{AD}^2 + BD.DC = \text{const.} = \overline{AM}^2.$$

279. Les cordes communes à un cercle fixe et à tous les cercles que l'on peut mener par deux points donnés, passent par un point fixe.

280. Dans tout triangle, la demi-différence de deux côtés est la moyenne proportionnelle des distances du milieu du troisième côté aux points où ce côté est coupé par la bissectrice et la hauteur issues du sommet de l'angle opposé; de même, la demi-somme de deux côtés est la moyenne proportionnelle des distances du milieu du troisième côté aux points où ce côté est coupé par la bissectrice du supplément de l'angle opposé et par la hauteur issue du sommet de cet angle.

281. Étant donnés un triangle ABC et le cercle circonscrit à ce triangle, on mène la bissectrice AD de l'angle A qui coupe BC en D et le cercle circonscrit en E, et la bissectrice AD' du supplément de l'angle A qui coupe BC prolongé en D' et le cercle circonscrit en E' : démontrer que BE est la moyenne proportionnelle de EA et de ED, et que BE' est la moyenne proportionnelle de E'A et de E'D'.

282. On donne l'angle au sommet d'un triangle en grandeur et en position, et la somme des inverses des côtés qui comprennent cet angle: démontrer que la base du triangle passe par un point fixe.

283. Deux droites se coupent à angle droit dans un cercle ou hors d'un cercle; démontrer que la somme des carrés de deux droites opposées qui unissent leurs points d'intersection avec la circonférence, est égale au carré du diamètre, ainsi que la somme des carrés des quatre segments des deux droites.

284. Si, dans le problème précédent, AB et CD sont les cordes interceptées par la circonférence O sur les deux droites données qui se coupent perpendiculairement en E, on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + 4\overline{OE}^2 = 8\overline{OA}^2.$$

285. Sur le diamètre d'un cercle, on prend deux points à égale distance du centre; par l'un on fait passer une corde quelconque dont on joint les extrémités avec l'autre point: démontrer que la somme des carrés des côtés du triangle ainsi formé est constante.

286. Soit un demi-cercle décrit sur AB; deux cordes quelconques AD et BC se coupent en P: démontrer que $\overline{AB}^2 = AD.AP + BC.BP$.

287. Dans un triangle quelconque ABC, soient M le milieu de la base BC, I son point de contact avec le cercle inscrit au triangle, H et K les points de rencontre de la hauteur et de la bissectrice issues du sommet A avec BC; démontrer la relation

$$MI.HI = MH.KI.$$

288. R, r, ρ_1, ρ_2, ρ_3, étant les rayons du cercle circonscrit, du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits à un triangle quelconque, et d, δ_1, δ_2, δ_3,

étant les distances du centre du cercle circonscrit aux centres des cercles inscrit et ex-inscrits, démontrer les relations

$$R^2 = d^2 + 2Rr = \delta_1^2 - 2R\rho_1 = \delta_2^2 - 2R\rho_2 = \delta_3^2 - 2R\rho_3 = \frac{d^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}{12}.$$

289. Si ABCD est un parallélogramme, et si l'on décrit un cercle passant par A et coupant respectivement en F, H, G, les côtés AB et AD et la diagonale AC, démontrer la relation

$$AB.AF + AD.AH = AC.AG.$$

290. Un cercle et un quadrilatère inscrit étant donnés, démontrer que si l'on *complète* le quadrilatère :

1° Le carré de la troisième diagonale est égal à la somme des carrés des tangentes issues de ses extrémités;

2° Cette diagonale est égale à la somme des deux tangentes issues de son milieu;

3° Le cercle décrit sur cette diagonale comme diamètre coupe orthogonalement le cercle donné.

291. Deux cercles A et B se touchent en C; d'un point D quelconque extérieur à ces cercles, on voit sous le même angle les rayons AC et BC. Si du point D on mène aux deux cercles les tangentes DE et DF, on a

$$DE.DF = \overline{DC}^2.$$

292. Si, du sommet d'un angle A d'un triangle quelconque ABC, on mène une droite AB' anti-parallèle à AB par rapport à l'angle C, puis une droite AC' anti-parallèle à AC par rapport à l'angle B, on obtient sur le troisième côté BC trois segments B'C', BC', CB', dont les deux extrêmes BC' et CB' sont, l'un BC' adjacent au côté AB, l'autre CB' adjacent au côté AC. Démontrer :

1° Que chaque côté de l'angle A est moyen proportionnel entre le troisième côté et le segment qui lui est adjacent;

2° Que les deux droites AC' et AB' sont égales entre elles et que chacune d'elles est moyenne proportionnelle entre les deux segments extrêmes BC' et CB'.

Déduire de là une démonstration directe des théorèmes des nos **224** et **226**.

293. Soient ABC un triangle quelconque, D le milieu de la base BC, AH la hauteur relative à cette base, et AG, AG', les bissectrices de l'angle A et de son supplément; démontrer les relations

$$DH.DG = \frac{1}{4}(AB - AC)^2, \quad DH.DG' = \frac{1}{4}(AB + AC)^2.$$

294. Dans tout triangle, la somme des perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les trois côtés, est égale à la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit.

295. Par deux points donnés, faire passer un cercle qui coupe en deux parties égales une circonférence donnée.

296. Si les bissectrices des angles à la base d'un triangle sont égales, ce triangle est isocèle.

297. ABC étant un triangle quelconque, D le milieu de la base BC, E le pied de la hauteur abaissée sur cette base, L le pied de la bissectrice de l'angle opposé A, enfin H et K les points de contact de BC avec le cercle inscrit au triangle et le cercle ex-inscrit dont le point de contact est entre B et C, démontrer les relations

$$LH.LK = LD.LE, \quad HD.HE = DE.HL.$$

298. Si, par un point G quelconque d'une corde AB d'un cercle, on mène une sécante qui rencontre en C la tangente en A, en D et H la circonférence, et en K la tangente en B, démontrer la relation

$$\frac{\overline{DG}^2}{\overline{GH}^2} = \frac{CD.DK}{HK.HC}.$$

299. Quatre points étant sur une même circonférence, dans chacun des triangles formés par ces quatre points pris trois à trois, existe un point de rencontre des hauteurs : démontrer que ces quatre points de rencontre sont sur une même circonférence égale à la première.

300. La somme des carrés des trois côtés d'un triangle est égale :

1° A deux fois la somme des produits de chaque hauteur par la portion comprise sur elle entre le sommet correspondant et le point de concours des trois hauteurs ;

2° A douze fois le carré du rayon du cercle circonscrit, moins la somme des carrés des trois droites qui unissent les sommets au point de concours des trois hauteurs.

§ V. — *Problèmes relatifs aux lignes proportionnelles.*

301. Mener par un point donné, entre deux droites données, une droite telle, que le point donné la partage dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

302. Étant donnés deux points sur une circonférence, déterminer sur cette circonférence un troisième point tel, que le rapport de ses distances aux deux premiers soit égal à un rapport donné $\frac{m}{n}$.

303. Déterminer hors d'un cercle un point tel, que la somme des deux

tangentes menées au cercle par ce point, soit égale à la sécante entière qui passe par ce point et le centre du cercle.

304. Inscrire dans un triangle un rectangle dont le rapport des côtés soit donné.

305. On donne sur deux parallèles deux points A et B, et un point C extérieur à ces parallèles. Mener par le point C, à ces parallèles, une sécante dont les distances des points d'intersection aux points A et B soient dans un rapport donné.

306. Déterminer le point dont les distances à trois points donnés sont dans des rapports donnés.

307. Étant donnés une circonférence et un point, mener par le point une sécante qui soit divisée par cette circonférence dans un rapport donné.

308. On donne deux cercles qui se coupent; mener par un de leurs points d'intersection une sécante telle, que le produit des deux cordes interceptées soit égal à un carré donné.

309. Déterminer sur la bissectrice de l'angle A d'un triangle ABC, le point M pour lequel la différence des angles MBC et MCB est maximum.

310. Inscrire dans un triangle un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné.

311. Décrire un cercle qui coupe en deux parties égales trois circonférences données.

312. Construire un triangle, connaissant sa base, la somme ou la différence des deux autres côtés, et sachant que son troisième sommet est situé sur une droite donnée.

313. Construire un triangle, connaissant un côté, un angle et le rapport des deux autres côtés.

314. Construire un triangle, connaissant deux côtés et la longueur de la bissectrice de l'angle qu'ils comprennent.

315. On donne trois points A, B, C; mener par le point A une droite telle, que les perpendiculaires abaissées sur elle des points B et C aient leurs pieds à des distances du point A qui soient dans un rapport donné.

316. Étant donnés un angle et un point situé dans cet angle, construire un triangle qui ait l'un de ses sommets en ce point, ses deux autres sommets situés respectivement sur les côtés de l'angle donné, et qui soit semblable à un triangle donné.

317. Dans un cercle donné, inscrire un triangle :

1°. Tel que sa base soit parallèle à une droite donnée, ses deux autres côtés passant respectivement par deux points donnés sur cette droite;

2° Tel que sa base soit parallèle à une droite donnée, ses deux autres côtés passant respectivement par deux points donnés d'une manière quelconque ;

3° Tel que ses trois côtés passent respectivement par trois points donnés d'une manière quelconque.

318. Par un point pris dans le plan d'un angle donné, mener une droite telle, que le produit des segments compris entre ce point et les côtés de l'angle soit égal à un carré donné.

319. Construire un triangle, connaissant le produit de deux côtés, la médiane relative au troisième côté et la différence des angles adjacents à ce côté.

320. Construire un triangle, connaissant un angle, la hauteur relative au côté opposé et la somme ou la différence des deux autres côtés.

321. Par deux points donnés, mener à une circonférence donnée deux sécantes qui se coupent sur la circonférence, et dont les deux autres points d'intersection déterminent une corde parallèle à la droite qui joint les deux points donnés.

322. Par un point pris dans le plan d'un angle donné, mener une droite qui détermine sur les deux côtés de l'angle et à partir de son sommet, des segments dont le produit soit égal à un carré donné.

323. Étant données trois circonférences concentriques, construire un triangle semblable à un triangle donné et qui ait ses sommets respectivement situés sur les trois circonférences données.

324. Construire un carré, connaissant la somme ou la différence de sa diagonale et de son côté.

325. Étant données deux droites qu'on ne peut prolonger, mener par un point donné une droite qui aille passer par le point de concours inconnu des deux premières.

326. Mener par le point d'intersection de deux circonférences une sécante telle, que les cordes interceptées sur elle par les deux circonférences soient dans un rapport donné.

327. On donne deux droites et un point dans leur angle; déterminer sur l'une d'elles un point qui soit à la même distance du point donné et de la seconde droite.

328. Partager, lorsque cela est possible, une droite donnée en deux parties telles, que la somme de leurs carrés soit égale à un carré donné.

329. Prolonger une droite donnée, de manière que son produit par la longueur totale obtenue soit égal à un carré donné.

330. Marquer sur une droite donnée deux points également éloignés de ses extrémités et tels, que le carré de la partie intermédiaire soit égal à la somme des carrés des parties extrêmes.

331. Diviser une droite donnée en deux parties telles, que les carrés de la ligne entière et de l'une des parties forment une somme double du carré de l autre partie.

332. Diviser une droite donnée en deux parties telles, que la somme de leurs carrés soit minimum.

333. Partager une droite donnée en trois parties telles, que la première et la seconde soient dans le rapport de deux droites données M et N, et la seconde et la troisième dans le rapport de deux autres droites données P et Q.

334. Déterminer le point dont les distances aux trois côtés d'un triangle sont proportionnelles à trois droites données.

335. Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant ses quatre côtés. — Déduire de cette construction la réciproque du théorème du n° 239.

336. Par l'un des points d'intersection A de deux circonférences données, mener une sécante commune BAC telle, que la somme des deux cordes AB et AC, multipliées respectivement par deux nombres donnés m et n, soit égale à un carré donné.

337. Construire un trapèze, connaissant les deux diagonales et les deux côtés non parallèles.

338. Étant donnés deux cercles et un point dans leur plan, on demande de mener respectivement à ces deux cercles deux tangentes parallèles telles, que les distances du point donné à ces deux tangentes soient dans un rapport donné.

339. Trois droites données partant d'un même point, leur mener par un point donné une sécante telle, que les segments interceptés sur elle par ces droites soient dans un rapport donné.

340. Par un point donné, faire passer une circonférence qui touche deux droites données.

341. Par un point donné, faire passer une circonférence tangente à deux circonférences données.

342. Par un point donné, faire passer une circonférence tangente à une droite et à une circonférence données.

343. Construire une circonférence tangente à deux droites données et à une circonférence donnée.

344. Construire une circonférence tangente à une droite donnée et à deux circonférences données.

§ VI. — *Polygones réguliers.*

345. En joignant de deux en deux les sommets d'un pentagone régulier *ou* en prolongeant ses côtés de deux en deux, les points d'intersection obtenus forment intérieurement *ou* extérieurement un autre pentagone régulier.

346 ABCDE étant un pentagone régulier, démontrer que la somme des angles ABE, BCA, CDB, DEC, EAD, est égale à deux angles droits.

347. Si l'on prolonge deux côtés AB et CD d'un polygone régulier de centre O, séparés par un seul côté BC, jusqu'à leur rencontre en E, le quadrilatère AECO est inscriptible.

348. Prouver qu'on peut exécuter un pavage, soit avec des triangles équilatéraux, soit avec des carrés, soit avec des hexagones réguliers. — On ne peut le faire en employant des pentagones réguliers ou des polygones réguliers de plus de six côtés.

349. On peut exécuter un pavage, soit en assemblant à la fois des carrés et des octogones réguliers de même côté, soit en assemblant des triangles équilatéraux et des dodécagones réguliers de même côté, soit en assemblant des décagones et des pentagones réguliers de même côté.

350. Un polygone équilatéral dans inscrit un cercle est régulier. — Un polygone équilatéral circonscrit à un cercle est régulier, si le nombre de ses côtés est impair.

351. Un polygone équiangle inscrit dans un cercle est régulier, si le nombre de ses côtés est impair. — Un polygone équiangle circonscrit à un cercle est régulier.

352. Si l'on rapporte un polygone régulier à deux axes coordonnés, les coordonnées de son centre sont respectivement les moyennes arithmétiques des coordonnées de ses différents sommets par rapport aux axes considérés. — Application au triangle équilatéral.

353. Si des sommets d'un triangle équilatéral inscrit, on mène des perpendiculaires sur un diamètre du cercle circonscrit, l'ordonnée qui tombe d'un côté de ce diamètre est égale à la somme des deux ordonnées qui tombent de l'autre côté; de même, l'abscisse qui tombe d'un côté du centre est égale à la somme des deux abscisses qui tombent de l'autre côté.

354. Étant donnés des points en nombre impair, situés d'une manière

quelconque dans un plan, montrer qu'on peut toujours les unir deux à deux à l'aide d'un fil, de toutes les manieres possibles, de façon que les deux bouts du fil viennent à la fin se rejoindre. — Si les points sont en nombre pair, le problème n'est possible qu'à la condition de faire passer le fil deux fois d'un point à l'autre.

355. La somme des distances d'un point pris à l'intérieur d'un polygone régulier aux m côtés de ce polygone, est égale à m fois l'apothème. — Considérer le cas où le point choisi est extérieur.

356. Si d'un point P du cercle circonscrit à un triangle équilatéral ABC, on mène des droites à ses sommets, la somme $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ est constante. — Si ABCP, A'B'C'P', sont deux cercles concentriques dans lesquels soient inscrits les triangles équilatéraux ABC, A'B'C', on a

$$\overline{AP'}^2 + \overline{BP'}^2 + \overline{CP'}^2 = \overline{A'P}^2 + \overline{B'P}^2 + \overline{C'P}^2.$$

357. AB et AC étant les côtés du pentagone et du décagone régulier inscrits dans un cercle dont le centre est O, on mène la bissectrice de l'angle AOC qui coupe en D le côté AB. Démontrer la similitude des triangles ACB et ACD, ainsi que celle des triangles AOB et DOB, et en déduire la relation connue

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{OA}^2.$$

358. Deux diagonales d'un pentagone régulier qui n'aboutissent pas au même sommet, se coupent en moyenne et extrême raison.

359. Dans un polygone inscrit d'un nombre de côtés pair, la somme des angles de rang impair est toujours égale à la somme des angles de rang pair.

§ VII. — *Problèmes sur les polygones réguliers.*

360. Sur une droite donnée comme côté, décrire un octogone régulier.

361. Inscrire un carré dans l'espace compris entre deux cercles sécants égaux.

362. Inscrire un triangle équilatéral dans un carré donné, en plaçant l'un de ses sommets soit en l'un des sommets du carré donné, soit au milieu d'un de ses côtés.

363. Inscrire un carré dans un pentagone régulier donné.

364. Sur une droite donnée comme diagonale, décrire un parallélogramme dont les angles soient doubles l'un de l'autre. — Déduire de la solution de ce problème un moyen d'opérer la trisection de l'angle droit.

365. Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle,

calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés deux fois moindre. — Appliquer cette formule à la recherche du côté du pentagone régulier, connaissant le côté du décagone régulier.

366. Sur le diamètre AB d'un cercle O, on construit un triangle équilatéral ABC; on divise AB en n parties égales, et l'on joint le sommet C à l'extrémité D de la seconde division; CD prolongée coupe le cercle en F, et l'on demande de calculer la corde AF. — Examiner les cas particuliers de $n = 3, 4, 6$.

367. Trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux sommets d'un polygone régulier, est constante et égale à un carré donné.

368. Connaissant l'apothème du décagone régulier, calculer son côté et le rayon du cercle circonscrit.

369. Si dans une circonférence O, on trace les deux diamètres perpendiculaires AB et CF; si du point D milieu de OC comme centre, avec DA pour rayon, on décrit un arc de cercle jusqu'à sa rencontre au point E avec le diamètre CF : démontrer que OE représente le côté du décagone régulier et AE celui du pentagone régulier inscrit.

370. Calculer les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle équilatéral, au carré, au pentagone, à l'hexagone, au décagone et au dodécagone, en prenant pour unité le côté du polygone régulier considéré.

371. Calculer l'apothème du pentagone, de l'hexagone, du décagone et du dodécagone régulier, en prenant pour unité le rayon du cercle circonscrit.

372. Connaissant le rapport du périmètre d'un polygone régulier inscrit au périmètre du polygone régulier circonscrit semblable, calculer les périmètres de ces deux polygones en prenant pour unité le diamètre du cercle donné.

373. m étant le rapport des périmètres des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un même nombre de côtés, et m' le rapport des périmètres des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double, démontrer la relation

$$m' = \sqrt{\frac{m+1}{2}}.$$

374. On divise une demi-circonférence O en un nombre impair de parties égales AC, CD, DE, EF, FG, GH, HB, et l'on mène les parallèles EF, DG, CH, et les rayons OE, OF, qui coupent respectivement les droites intermédiaires aux points I et K, L et M; démontrer que la somme des segments ainsi interceptés sur ces parallèles, c'est-à-dire EF + IK + LM,

est égale au rayon du cercle O. — Déduire de ce théorème la valeur du côté de l'hexagone régulier inscrit.

375. Inscrire dans un triangle équilatéral donné trois cercles égaux tangents entre eux, et déterminer leur rayon en fonction du côté du triangle.

376. Inscrire dans un carré donné quatre cercles égaux tangents entre eux, et déterminer leur rayon en fonction du côté du carré.

377. Inscrire dans un cercle donné m cercles égaux tangents entre eux, et déterminer leur rayon en fonction du rayon du cercle donné et de la corde qui sous-tend la $m^{ième}$ partie de sa circonférence.

§ VIII. — *Mesure de la circonférence.*

378. Dans deux circonférences de rayons différents, le rapport des angles au centre qui interceptent des arcs de même longueur est égal au rapport inverse des rayons.

379. Si deux circonférences sont tangentes intérieurement à une troisième circonférence, et si la somme de leurs rayons est égale à celui de cette troisième circonférence, l'arc compris entre leurs points de contact sur la grande circonférence, est égal à la somme des arcs respectivement compris sur les circonférences intérieures entre leur point de rencontre le plus rapproché de la grande circonférence et les mêmes points de contact.

380. Démontrer que π est compris entre 3 et 4, par la considération des périmètres de l'hexagone régulier inscrit et du carré circonscrit.

381. Quelle erreur commet-on en remplaçant la demi-circonférence d'un cercle par la somme des côtés du triangle équilatéral et du carré inscrits dans ce cercle?

382. Soient dans un cercle O le diamètre AB et la corde AC égale au rayon; menons le rayon OD perpendiculaire sur AC, et prolongeons-le jusqu'à son point de rencontre en E avec la tangente en A; portons à partir du point E sur cette tangente, et dans le sens EA, une longueur EF égale à trois fois le rayon OA; puis, menons la droite FB. Quelle erreur commet-on en remplaçant par cette droite la demi-circonférence OA?

383. Si l'on décrit deux demi-cercles égaux sur le diamètre d'un demi-cercle donné, et si l'on inscrit un cercle dans l'espace compris entre les trois demi-circonférences, le diamètre de ce cercle est à celui des cercles égaux dans le rapport de 2 à 3.

384. Connaissant les longueurs a, b, c, des cordes de trois arcs formant ensemble la demi-circonférence, chercher de quelle équation dépend le diamètre x du cercle considéré.

385. Démontrer que la différence entre un arc moindre qu'une demi-circonférence et sa corde, est plus petite que le cube de l'arc divisé par seize fois le carré du rayon.

386. **Démontrer les formules**

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots\cdots \text{ (indéfiniment)};$$

$$\pi = \lim . 2^m \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}}}$$

Dans la dernière formule, le nombre m, qu'il faut faire croître indéfiniment, est égal au nombre des radicaux placés sous le premier radical.

387. Soient p et p' les périmètres de deux polygones réguliers inscrits dans le cercle de rayon 1, le second polygone ayant deux fois plus de côtés que le premier, et soit b' la corde de l'arc qu'il faut ajouter à l'arc sous-tendu par le côté de ce second polygone pour former la demi-circonférence. Démontrer la formule

$$\frac{p'}{p} = \frac{2}{b'},$$

en déduire l'inégalité

$$\pi > p + \frac{1}{3}(p'-p),$$

et trouver une limite supérieure de l'erreur commise lorsqu'on prend pour π la valeur approchée $p+\frac{1}{3}(p'-p)$.

§ IX. — *Appendice.*

388. A, B, C, D, étant quatre points en ligne droite, on a en grandeur et en signe la relation

$$\mathrm{AB.CD} + \mathrm{AC.DB} + \mathrm{AD.BC} = 0.$$

389. Si l'on désigne par ρ le premier des six rapports anharmoniques distincts

$$(\mathrm{ABCD}),\quad (\mathrm{ACBD}),\quad (\mathrm{ADBC}),\quad (\mathrm{ABDC}),\quad (\mathrm{ACDB}),\quad (\mathrm{ADCB}),$$

auxquels donnent lieu quatre points A, B, C, D, en ligne droite, les cinq autres ont respectivement pour valeurs

$$1-\rho,\quad \frac{\rho-1}{\rho},\quad \frac{1}{\rho},\quad \frac{1}{1-\rho},\quad \frac{\rho}{\rho-1}.$$

390. Si les points P et P' divisent harmoniquement la droite AB, O

étant le milieu de AB, I le milieu de PP', et M un point pris arbitrairement sur AB, on a

$$MP.MP' + MA.MB = 2MI.MO.$$

391. La moyenne proportionnelle de deux droites, est aussi la moyenne proportionnelle de leur moyenne arithmétique et de leur moyenne harmonique.

392. Si A, B, C, D et A', B', C', D', sont deux systèmes de quatre points correspondants, situés sur deux droites distinctes L et L' et ayant même rapport anharmonique, les trois droites PB, PC, PD, issues d'un point quelconque P de AA', coupent respectivement les trois droites P'B', P'C', P'D', issues d'un autre point quelconque P' de AA', en trois points β, γ, δ, situés en ligne droite.

393. A, B, C, D et A', B', C', D', étant deux systèmes de quatre points correspondants, situés sur deux droites L et L' qui se coupent en A, si l'on prend dans leur plan deux points quelconques O et O', les droites OB, OC, OD, coupent respectivement les droites correspondantes OB', OC', OD', en trois points β, γ, δ, situés en ligne droite.

394. A, B, C, étant trois points d'une droite L et A', B', C', trois points correspondants d'une autre droite L', prouver que les trois couples de droites AB' et A'B, AC' et A'C, BC' et B'C, se coupent en trois points λ, μ, ν, situés en ligne droite.

395. Si les trois côtés d'un triangle tournent autour de trois points fixes situés en ligne droite, et si deux sommets glissent sur deux droites fixes, le troisième sommet décrit une ligne droite.

396. Si les côtés d'un polygone tournent autour d'autant de points fixes situés en ligne droite, et si tous les sommets moins un glissent sur des droites fixes, le dernier sommet décrit une ligne droite; et il en est de même du point de rencontre de deux côtés quelconques non contigus.

397. Si les trois sommets d'un triangle glissent sur trois droites fixes qui se coupent en un même point, et si deux de ses côtés tournent autour de deux points fixes, le troisième côté passe par un point fixe en ligne droite avec les deux premiers.

398. Si les sommets d'un polygone glissent sur autant de droites fixes qui concourent en un même point, et si tous les côtés moins un tournent autour d'autant de points fixes arbitraires, le dernier côté passe par un point fixe; et il en est de même d'une diagonale quelconque.

399. Lorsque trois triangles homologiques deux à deux ont le même axe d'homologie, les trois centres d'homologie sont en ligne droite; et lorsque trois triangles homologiques deux à deux ont le même centre d'homologie, les trois axes d'homologie concourent en un même point.

400. Lorsqu'une corde d'un cercle tourne autour d'un point fixe O, la somme des deux quotients qu'on obtient en divisant la distance de chaque extrémité de la corde à une droite donnée L, par la distance de cette corde à la polaire du point O, est constante.

401. Lorsque le sommet d'un angle circonscrit à un cercle décrit une droite L, la somme des deux quotients qu'on obtient en divisant les distances de chaque côté de l'angle à un point fixe et au pôle de L est constante.

402. Les polaires des différents points de l'axe radical de deux cercles se coupent sur cet axe; et réciproquement, si les polaires de chaque point d'une droite par rapport à deux cercles se coupent sur cette droite, elle est l'axe radical des deux cercles.

403. Les pôles de l'axe radical de deux cercles, pris par rapport à ces cercles, divisent harmoniquement la droite qui joint leurs centres de similitude.

404. Si du centre de similitude de deux circonférences on leur mène deux sécantes, les cordes qui joignent dans les deux circonférences les points d'intersection correspondants sont parallèles; et des huit points d'intersection obtenus, quatre quelconques (non situés sur la même sécante) se trouvent sur une même circonférence, pourvu que parmi les quatre points choisis il n'y en ait pas deux homologues.

405. Un cercle O inscrit dans un quadrilatère ABCD, touchant ses côtés aux points E, F, G, H, si l'on joint le point d'intersection K des droites EH et FG au centre O, la droite KO est perpendiculaire sur la diagonale AC.

406. Quand un quadrilatère est circonscrit à deux cercles, chaque diagonale coupe la ligne des centres en un point qui a la même polaire par rapport aux deux cercles.

407. Si on divise un quadrilatère en deux autres par une sécante quelconque, les points de rencontre des diagonales des trois quadrilatères sont trois points en ligne droite.

408. Le rapport anharmonique de quatre points d'un cercle est égal au rapport des produits des côtés opposés du quadrilatère inscrit déterminé par ces quatre points.

409. Trois cercles O, O′, O″, étant donnés, en décrivant un quatrième cercle quelconque ω et prenant les axes radicaux du cercle ω et de chacun des cercles donnés, on forme un triangle ABC; en décrivant un autre cercle ω', on obtient d'une manière analogue un second triangle A′B′C′ : démontrer que les triangles ABC, A′B′C′, sont homologiques.

410. Lorsqu'une série de cercles ayant leurs centres sur une droite

donnée coupent orthogonalement un cercle donné, leur axe radical commun est la perpendiculaire abaissée du centre du cercle donné sur la droite donnée.

411. Les trois cercles décrits sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet, comme diamètres, ont deux à deux le même axe radical et coupent orthogonalement le cercle circonscrit au triangle formé par les trois diagonales.

412. Lorsque deux triangles sont polaires réciproques par rapport à un cercle situé dans leur plan, ils sont homologiques.

413. Si la base d'un triangle est fixe, la somme ou la différence des deux autres côtés restant constante, la polaire du sommet par rapport à un cercle quelconque, ayant pour centre l'une des extrémités de la base donnée, touche constamment un cercle fixe.

414. ABC étant un triangle donné, et a, b, c, les projections des sommets A, B, C, sur les côtés opposés, les trois couples de droites ab et AB, bc et BC, ca et CA, se coupent en trois points γ, α, β, situés sur l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles ABC et abc.

415. Toute tangente commune à deux cercles donnés est divisée harmoniquement par tout cercle dont les axes radicaux avec chacun des cercles donnés se confondent.

416. Dans un cercle donné, inscrire un quadrilatère dont on connaît les trois diagonales.

417. Un triangle étant donné, construire un cercle tel, que chaque sommet du triangle soit, par rapport à ce cercle, le pôle du côté opposé.

418. Décrire un cercle passant par un point donné et coupant orthogonalement deux cercles donnés.

419. Étant donnés trois cercles, en décrire un quatrième tel, que les trois axes radicaux de ce cercle, comparé successivement à chacun des trois premiers, passent par trois points donnés.

420. Étant donnés six points A, B, C, D, E, F, sur une circonférence, marquer sur cette ligne un septième point X tel, que les rapports anharmoniques (XAEC), (XDBF), soient égaux. — Même question en supposant les six points sur une droite donnée.

421. Étant donnés un polygone de n côtés et n points placés arbitrairement, inscrire dans ce polygone un autre polygone dont les n côtés passent respectivement par les n points donnés.

422. Étant donné un triangle coupé par une transversale, si sur chaque côté on prend le conjugué harmonique du point de rencontre de la transversale par rapport aux extrémités de ce côté, les droites qui joignent les

trois points ainsi obtenus aux sommets opposés passent par un même point. — En déduire le théorème du n° 411 relatif aux médianes d'un triangle.

423. Étant donné un triangle coupé par une transversale, si sur deux côtés on prend le conjugué harmonique du point de rencontre de la transversale par rapport aux extrémités du côté considéré, les deux points ainsi obtenus et le point où la transversale coupe le troisième côté sont en ligne droite.

424. Un triangle ABC inscrit dans un cercle O, étant coupé aux points a, b, c, par une transversale, si α, β, γ, représentent les longueurs des tangentes menées des points a, b, c, au cercle O, démontrer la relation

$$\alpha.\beta.\gamma = \mathrm{A}b.\mathrm{B}c.\mathrm{C}a = \mathrm{A}c.\mathrm{B}a.\mathrm{C}b.$$

425. Quatre droites dans un même plan, prises trois à trois, forment quatre triangles dans chacun desquels existe un point de rencontre des hauteurs; démontrer que ces quatre points sont en ligne droite.

426. Un triangle PQR étant circonscrit à un cercle O, on forme un second triangle ABC ayant pour sommets les milieux des côtés du premier; des points A, B, C, on mène au cercle O des tangentes qui rencontrent en a, b, c, les côtés opposés du triangle ABC: démontrer que les points a, b, c, sont en ligne droite.

LIVRE IV.

LES AIRES.

§ I. — MESURE DES AIRES DES POLYGONES.

DÉFINITIONS.

413. On appelle *aire* l'étendue d'une portion limitée de surface. Il y a entre l'*aire* et la *surface* une différence analogue à celle qui existe entre la *longueur* et la *ligne*. Les mots *ligne* et *surface* sont relatifs à la *forme*, tandis que les mots *longueur* et *aire* sont relatifs à l'*étendue*.

Quand deux figures peuvent coïncider, elles sont *égales*. Quand deux figures non superposables ont des aires égales, on dit qu'elles sont *équivalentes*.

414. Un côté quelconque d'un triangle étant pris pour *base*, la *hauteur* du triangle est la perpendiculaire abaissée du sommet opposé sur la base.

Un côté quelconque d'un parallélogramme étant pris pour *base*, la *hauteur* du parallélogramme est la distance constante (72) qui existe entre sa base et le côté opposé.

D'après cela, les deux côtés adjacents d'un rectangle constituent indifféremment sa *base* et sa *hauteur*, et reçoivent le nom de *dimensions* de la figure.

Les *bases* d'un trapèze sont ses deux côtés parallèles, et sa *hauteur* est la distance constante de ces deux côtés.

415. On dit qu'une grandeur M est à la fois proportionnelle à plusieurs autres grandeurs A, B, C, lorsque ces dernières grandeurs, sauf une, restant constantes, la grandeur M est proportionnelle à celle qui varie (132).

416. *Lorsqu'une grandeur* M *est proportionnelle à plusieurs autres grandeurs* A, B, C, *le rapport de deux valeurs quelcon-*

ques de la grandeur M est égal au produit des rapports des valeurs correspondantes des autres grandeurs.

Ainsi, soient

$$\begin{matrix} m, & a, & b, & c, \\ m', & a', & b', & c', \end{matrix}$$

deux séries de valeurs correspondantes des grandeurs M, A, B, C, obtenues en rapportant chaque grandeur à une unité de son espèce. On aura

$$\frac{m}{m'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}.$$

En effet, soient m_1 la valeur de M qui correspond aux valeurs a', b, c, de A, B, C, et m_2 celle qui répond à a', b', c; on aura, d'après la définition du n° 415,

$$\frac{m}{m_1} = \frac{a}{a'}, \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{m_2}{m'} = \frac{c}{c'}.$$

En multipliant ces trois égalités membre à membre et simplifiant, on trouve

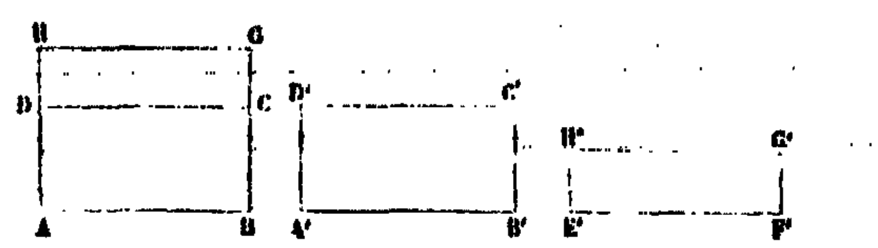
$$\frac{m}{m'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}.$$

THÉORÈME.

417. 1° *Si deux rectangles de même base ont des hauteurs égales, ces deux rectangles sont égaux.*

2° *Si deux rectangles de même base sont tels, que la hauteur du premier soit égale à la somme des hauteurs des deux autres, le premier rectangle est égal à la somme des deux autres.*

Fig. 245.



En effet :

1° Soient (*fig.* 245) les deux rectangles ABCD, A'B'C'D', dont les bases AB et A'B' sont égales ainsi que les hauteurs

AD et A' D'. Ces deux rectangles sont évidemment superposables.

2° Soient (*fig.* 245) les trois rectangles ABGH, A'B'C'D', E'F'G'H', dont les bases AB, A'B', E'F', sont égales, et dont les hauteurs AH, A'D', E'H', satisfont à la condition

$$AH = A'D' + E'H':$$

le rectangle ABGH est égal à la somme des deux autres; car, si l'on prend sur AH une longueur AD égale à A'D', et qu'on mène la parallèle DC à AB, DH sera égale à E'H', en vertu de l'hypothèse. Par suite, des deux rectangles ABCD, DCGH, qui composent le rectangle ABGH, le premier sera égal au rectangle A'B'C'D', et le second au rectangle E'F'G'H' (1°).

COROLLAIRES.

418. *Le rapport de deux rectangles de même base est égal au rapport de leurs hauteurs; en d'autres termes, l'aire d'un rectangle de base constante est proportionnelle à sa hauteur.*

Car le théorème précédent prouve qu'un rectangle de base constante et sa hauteur satisfont aux conditions nécessaires et suffisantes (133, 134) pour qu'il y ait proportionnalité entre ces grandeurs.

419. Comme on peut échanger la base et la hauteur d'un rectangle (414), on peut dire aussi que *le rapport de deux rectangles de même hauteur est égal au rapport de leurs bases.*

420. En rapprochant les deux derniers énoncés et en vertu de la définition donnée au n° 415, on peut dire que *l'aire d'un rectangle est à la fois proportionnelle à sa base et à sa hauteur.*

Donc (416), *le rapport des aires de deux rectangles quelconques est égal au produit des rapports de leurs bases et de leurs hauteurs;* en d'autres termes, *deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur.*

THÉORÈME.

421. *L'aire d'un rectangle a pour mesure le produit du nombre qui mesure sa base par le nombre qui mesure sa hau-*

teur, lorsque l'on prend pour unité d'aire le carré construit sur l'unité de longueur.

En effet, soient (*fig.* 245) ABGH le rectangle à mesurer, et A'B'C'D' le carré dont le côté A'B' = A'D' représente l'unité de longueur. On aura (420)

$$\frac{ABGH}{A'B'C'D'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AH}{A'B'}.$$

Or, le premier membre de cette relation est égal au nombre qui mesure l'aire ABGH (130), et les rapports qui composent le second membre sont respectivement égaux aux nombres qui mesurent la base et la hauteur du rectangle proposé. Donc, dans le système d'unités adopté, le nombre qui mesure l'aire du rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent sa base et sa hauteur. Ainsi, en désignant ces trois nombres par S, B, H, on a la formule :

$$S = B.H.$$

Comme ce théorème est d'un usage très-fréquent, on préfère l'énoncer d'une manière plus rapide, quoique incorrecte, en disant simplement : *L'aire du rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

SCOLIE.

422. L'aire d'un rectangle est encore égale au produit de sa base par sa hauteur, lorsqu'on prend pour unité d'aire le rectangle ayant pour base la longueur prise pour unité de base, et pour hauteur la longueur prise pour unité de hauteur.

423. L'aire d'un carré est égale au carré de son côté ; de là, le nom de *carré* donné à la seconde puissance d'un nombre.

424. EXEMPLES :

1° *Quelle est la surface d'un rectangle dont la base est égale à* $2^m,34$ *et la hauteur à* $3^m,19$?

On a pour l'aire demandée :

$$S = 2,34 \times 3,19 = 7^{mq},4646,$$

ou 7 mètres carrés, 46 décimètres carrés, 46 centimètres carrés.

2° Il a fallu 15 rouleaux de papier, de 10 mètres de longueur chacun sur $0^m,60$ de largeur, pour tapisser une paroi rectangulaire de $18^m,25$ de largeur; quelle est la hauteur de cette paroi?

La surface du rectangle considéré est

$$S = 10 \times 0,60 \times 15 = 90^{mq}.$$

Sa base étant $18^m,25$, on aura pour sa hauteur

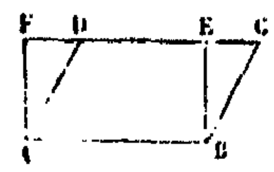
$$H = \frac{90}{18,25} = 4^m,93,$$

à moins de 1 centimètre.

THÉORÈME.

425. *L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 246.



Soit (*fig.* 246) le parallélogramme ABCD. On obtient le rectangle de même base et de même hauteur, en menant des extrémités de la base AB sur le côté opposé les perpendiculaires AF et BE. Pour démontrer le théorème énoncé, il suffit alors (**421**) de prouver l'équivalence du parallélogramme ABCD et du rectangle ABEF. Le trapèze ABED est une partie commune à ces deux figures; il reste donc à comparer les parties non communes BEC, AFD. Or, ces parties non communes sont des triangles rectangles égaux, comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, savoir: BC = AD comme côtés opposés d'un parallélogramme, et BE = AF pour la même raison.

COROLLAIRES.

426. En désignant par S, B, H les trois nombres qui mesurent respectivement l'aire d'un parallélogramme, sa base et sa hauteur, on a la formule

$$S = B.H.$$

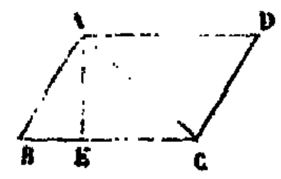
Donc :

Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents; deux parallélogrammes sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur; deux parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

THÉORÈME.

427. *L'aire d'un triangle a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 247.



Il suffit, pour démontrer ce théorème, de prouver que tout triangle est la moitié du parallélogramme de même base et de même hauteur.

Soit le triangle ABC (*fig.* 247). On obtient un parallélogramme de même base BC et de même hauteur AE, en menant, par les sommets A et C du triangle, des parallèles AD et CD aux côtés opposés. Le triangle ABC est la moitié de ce parallélogramme ABCD, car tout parallélogramme est partagé par une de ses diagonales en deux triangles égaux (40). Donc, l'aire du parallélogramme ABCD étant égale au produit de sa base BC par sa hauteur AE (425), l'aire du triangle ABC sera égale à la moitié du produit de sa base BC par sa hauteur AE.

COROLLAIRES.

428. En désignant par S, B, H, les trois nombres qui mesurent respectivement l'aire du triangle, sa base et sa hauteur, on a la formule

$$S = \frac{B.H}{2} = \frac{B}{2}.H = B.\frac{H}{2}.$$

Donc :

Deux triangles de même base et de même hauteur sont équivalents; deux triangles sont entre eux comme les produits *respectifs de leur base par leur hauteur; deux triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

429. Quand le triangle est équilatéral, son aire s'exprime en fonction de son côté a.

La hauteur du triangle tombant alors au milieu de sa base, on a en effet

$$H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

et la formule

$$S = \frac{B}{2} \cdot H$$

devient

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Exemple. — *Quelle est la surface du triangle équilatéral de 1 mètre de côté?*

On a

$$S = \frac{1^{mq}.\sqrt{3}}{4} = \frac{1^{mq},7321}{4} = 0^{mq},4330$$

à 1 centimètre carré près.

430. On peut exprimer *l'aire d'un triangle en fonction de ses côtés a, b, c.*

Nous avons trouvé (231), pour la valeur de la hauteur h qui correspond au côté a, p désignant le demi-périmètre,

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Si l'on multiplie cette hauteur par la moitié de la base ou par $\frac{a}{2}$, il vient

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Exemple. — *Calculer la surface du triangle dont les trois côtés sont*

$$a = 13^m, \quad b = 9^m, \quad c = 6^m.$$

On a

$$a + b + c = 2p = 28^m.$$

Par suite,

$$p = 14^m, \quad p - a = 1^m, \quad p - b = 5^m, \quad p - c = 8^m;$$

et l'on a

$$S = \sqrt{14.1.5.8} = \sqrt{560} = 23^{\text{mq}},67$$

à $\frac{1}{2}$ décimètre carré près.

431. Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle dont les trois côtés sont a, b, c. En désignant toujours par h la hauteur qui correspond au côté a, on a (252) la relation

$$bc = 2R.h.$$

Si l'on multiplie par a les deux membres de cette égalité et si l'on remplace le produit ah par le double $2S$ de la surface du triangle, on trouve

$$abc = 4RS,$$

d'où

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Ainsi, *l'aire d'un triangle est égale aux produits des trois côtés divisé par le double du diamètre du cercle circonscrit.*

En remplaçant S par sa valeur (430) en fonction des côtés, et résolvant par rapport à R, cette formule permet inversement de calculer le *rayon du cercle circonscrit en fonction des côtés,* comme nous l'avons vu au n° 252.

432. Si l'on se reporte à la *fig.* 122 (p. 97), on voit que tout triangle ABC est la somme de trois autres OBC, OCA, OAB, ayant pour sommet commun le centre O du cercle inscrit, c'est-à-dire pour hauteur constante le rayon r de ce cercle, et pour bases respectives les côtés a, b, c. On peut donc écrire

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2}.r = p.r.$$

Ainsi, *l'aire d'un triangle est égale au produit du demi-périmètre par le rayon du cercle inscrit.*

Cette formule, mise sous la forme $r = \frac{S}{p}$, permet inversement de calculer le *rayon du cercle inscrit* dans un triangle *en fonction des trois côtés.*

En se reportant à la *fig.* 123 (p. 98), O' étant le centre et r' le rayon O'I' de l'un des cercles ex-inscrits, on a l'égalité

$$ABC = O'AB + O'AC - O'BC,$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{cr'}{2} + \frac{br'}{2} - \frac{ar'}{2} = \frac{c+b-a}{2}.r' = \frac{2p-2a}{2}.r',$$

ou

$$S = (p-a)r'.$$

On trouverait de même, pour les rayons r'' et r''' des deux autres cercles ex-inscrits,

$$S = (p-b)r'', \quad S = (p-c)r'''.$$

Ces formules permettent inversement de calculer les *rayons des cercles ex-inscrits* à un triangle *en fonction des trois côtés.*

Si l'on multiplie membre à membre les valeurs du rayon du cercle inscrit et des rayons des trois cercles ex-inscrits, il vient

$$rr'r''r''' = \frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^4}{S^2} = S^2,$$

d'où

$$S = \sqrt{r.r'.r''.r'''}.$$

L'aire d'un triangle est donc encore égale à la racine carrée du produit des rayons des quatre cercles inscrit et ex-inscrits.

433. Pour évaluer l'aire d'un polygone, il suffit de décomposer ce polygone en triangles, de calculer les aires de ces triangles et de faire la somme des nombres ainsi obtenus.

Pour opérer cette décomposition, on peut choisir un point quelconque dans le plan du polygone et le joindre à tous ses sommets. Les bases des différents triangles formés seront les côtés du polygone, leurs hauteurs seront les perpendiculaires abaissées du point choisi sur ces côtés. L'aire du polygone sera la somme arithmétique ou algébrique des aires des triangles obtenus, suivant que leur sommet commun sera intérieur ou extérieur au polygone.

Souvent on fait la décomposition en prenant pour centre l'un des sommets du polygone, c'est-à-dire en menant toutes les diagonales qui partent d'un même sommet.

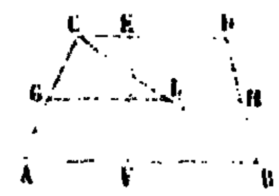
Si l'on peut trouver dans l'intérieur du polygone un point à égale distance de tous ses côtés, c'est-à-dire *si le polygone est circonscriptible,* les triangles qui le composeront auront pour hauteur commune le rayon du cercle inscrit, et *son aire aura pour mesure la moitié du produit de son périmètre par le rayon du cercle inscrit.*

THÉORÈME.

434. *L'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de la demi-somme de ses bases par sa hauteur.*

Soit le trapèze ABCD (*fig.* 248). En menant la diagonale BC, on le partage en deux triangles ABC, BCD, qui ont pour hauteur commune la hauteur EF du trapèze, et pour bases res-

Fig. 248.



pectives les bases mêmes du trapèze. L'aire du premier est égale à $\frac{AB}{2}.EF$, celle du second à $\frac{CD}{2}.EF$. En ajoutant ces deux expressions, on trouve, pour l'aire du trapèze,

$$\frac{AB+CD}{2}.EF.$$

SCOLIES.

435. En désignant par S, B, b, H, les nombres qui mesurent respectivement l'aire d'un trapèze, ses deux bases et sa hauteur, on a la formule

$$S=\frac{B+b}{2}.H.$$

436. Menons par le point G (*fig.* 248), milieu du côté AC, une parallèle GH aux deux bases du trapèze. Cette parallèle coupera le côté BD et la diagonale BC en leurs milieux H et L (194). On aura donc

$$GL=\frac{AB}{2},\quad LH=\frac{CD}{2},\quad \text{c'est-à-dire}\quad GH=\frac{AB+CD.}{2}$$

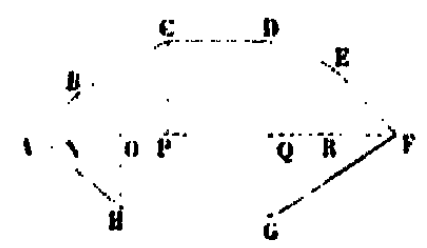
La droite qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est donc égale à la demi-somme de ses bases, et l'on peut dire par suite que *l'aire d'un trapèze est égale au produit de sa hauteur par la droite qui joint les milieux de ses côtés non parallèles.*

EXEMPLE. *L'une des bases d'un trapèze égale 10 mètres, sa hauteur est de 4 mètres, sa surface de 32 mètres carrés. On demande de calculer la longueur de la parallèle aux deux bases, menée à 1 mètre de distance de la base donnée.*

En divisant la surface du trapèze par sa hauteur, on obtiendra 8 mètres pour la longueur de la droite qui joint les milieux de ses côtés non parallèles. Si l'on remarque maintenant que cette droite divise le trapèze proposé en deux autres trapèzes de hauteur égale à 2 mètres, on verra que, dans l'un de ces trapèzes, la droite dont on cherche la longueur est aussi celle qui joint les milieux des côtés non parallèles. Elle sera donc égale à $\frac{10^m + 8^m}{2}$, ou à 9 mètres.

437. Nous avons dit au nº 433 que, pour évaluer l'aire d'un polygone, on décomposait ce polygone en triangles. Plus généralement, il suffit de le décomposer en parties que l'on sache mesurer, et de faire ensuite la somme des aires partielles. Voici un procédé de décomposition très-usité (*fig.* 249), principalement sur le terrain.

Fig. 249.



On mène la plus grande diagonale AF (*fig.* 249) du polygone proposé. Puis, à l'aide des perpendiculaires BN, CP, DQ, ER, HO, GQ, abaissées des sommets extérieurs sur cette diagonale, *on décompose le polygone en triangles et en trapèzes rectangles.* En mesurant avec soin ces diverses perpendiculaires et les distances mutuelles de leurs pieds sur AF, on aura tous les éléments nécessaires pour calculer les aires partielles dont le polygone considéré est la somme. Nous reviendrons sur cette question en traitant des *Applications de la Géométrie.*

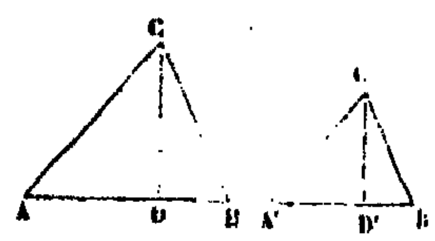
§ II. — COMPARAISON DES AIRES.

THÉORÈME.

438. *Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au carré de leur rapport de similitude,* ou *deux polygones semblables sont entre eux comme les carrés des côtés homologues.*

Soient d'abord deux triangles semblables ABC, A'B'C', (*fig.* 250), ayant pour bases les côtés AB, A'B', et pour hauteurs les droites CD, C'D'.

Fig. 250.



On aura (427)

$$ABC = \frac{1}{2}AB.CD, \quad A'B'C' = \frac{1}{2}A'B'.C'D',$$

d'où

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB.CD}{A'B'.C'D'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{CD}{C'D'}.$$

D'ailleurs, les deux triangles rectangles ACD, A'C'D', étant semblables (207), on peut remplacer le rapport $\frac{CD}{C'D'}$ par son égal $\frac{AC}{A'C'}$ ou $\frac{AB}{A'B'}$, et écrire

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AB}{A'B'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

Soient maintenant deux polygones semblables S et S'. Leur rapport de similitude, égal à celui de deux côtés homologues quelconques AB et A'B', sera représenté par $\frac{AB}{A'B'}$. Ces deux polygones seront décomposables en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés (215), et le rapport de similitude de deux triangles homologues sera égal au rapport de similitude des deux polygones. Si le polygone S est composé des triangles T, T_1, T_2, et le polygone S' des triangles homologues T', T'_1, T'_2, on aura donc, d'après ce qui précède :

$$\frac{T}{T'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}, \quad \frac{T_1}{T'_1} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}, \quad \frac{T_2}{T'_2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2};$$

et par suite, en appliquant un théorème connu,

$$\frac{T+T_1+T_2}{T'+T'_1+T'_2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{S}{S'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

SCOLIE.

439. De la relation démontrée on déduit réciproquement

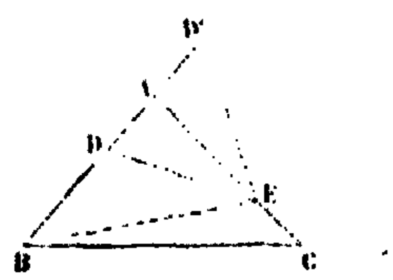
$$\frac{AB}{A'B'}=\sqrt{\frac{S}{S'}}.$$

Donc, lorsqu'on veut *amplifier* ou *réduire* un polygone dans un rapport donné, l'*échelle* à adopter pour amplifier ou réduire les côtés de ce polygone est égale à la racine carrée du rapport donné. Par exemple, si l'aire du nouveau polygone doit être la centième partie du polygone donné, il faudra faire ses côtés dix fois plus petits que les côtés homologues du polygone donné.

THÉORÈME.

440. *Deux triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle.*

Fig. 251.



Soient deux triangles ayant un angle égal. On pourra les placer l'un par rapport à l'autre comme le sont les triangles ADE, ABC (*fig.* 251), c'est-à-dire les disposer de telle sorte qu'ils aient un angle commun.

Menons alors la droite BE, et comparons successivement le triangle ABE aux deux triangles donnés. Les deux triangles ABC et ABE ont même hauteur, puisque leurs bases AC, AE, opposées au sommet commun B, sont en ligne droite; on aura donc (428)

$$(1) \qquad \frac{ABC}{ABE}=\frac{AC}{AE}.$$

De même, les deux triangles ABE et ADE ont même hauteur, puisque leurs bases AB et AD, opposées au sommet commun E, sont en ligne droite; on aura donc également

$$(2)\qquad \frac{ABE}{ADE} = \frac{AB}{AD}.$$

En multipliant membre à membre les égalités (1) et (2) et en supprimant le facteur commun ABE, il viendra

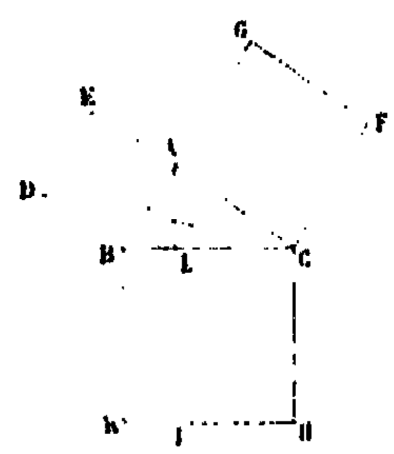
$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AC.AB}{AE.AD} \quad \text{ou} \quad \frac{ABC}{AD'E} = \frac{AC.AB}{AE.AD'}.$$

La démonstration subsiste pour deux triangles ABC, AD'E, qui ont un angle supplémentaire; il suffit de remplacer partout la lettre D par la lettre D'.

THÉORÈME.

441. *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit* (*fig.* 252).

Fig. 252.



Soit le triangle ABC rectangle en A; soient les carrés ABDE, ACFG, BCHK, construits sur ses trois côtés. L'angle en A étant droit, le côté AE du carré ABDE sera le prolongement du côté CA du triangle, et le côté AG du carré ACFG sera le prolongement du côté BA.

Ceci posé, abaissons sur l'hypoténuse BC la perpendiculaire AL, et prolongeons-la jusqu'en I où elle coupe le côté KH; menons les droites AK et DC. Le triangle ABK a même base BK que le rectangle BKIL, et il a aussi même hauteur, puisque son sommet A se trouve sur la droite IL : le triangle ABK équivaut donc (427) à la moitié du rectangle BKIL. De même, le triangle BCD équivaut à la moitié du carré ABDE, car il a la même base BD et même hauteur, puisque son sommet C se trouve sur la droite EA. D'ailleurs, les deux triangles ABK et BDC sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : l'angle ABK égal à l'angle CBD, comme formés tous deux d'un angle droit et de l'angle ABC du triangle donné ; le côté BK égal au côté BC comme côtés d'un même carré, le côté AB égal au côté BD pour la même raison. De l'égalité des deux triangles ABK et BDC, on conclut l'équivalence du rectangle BKIL et du carré ABDE.

On démontrerait d'une manière analogue, en menant les droites AH et BF, l'équivalence du rectangle CLIH et du carré ACFG.

Le carré BCHK, somme des deux rectangles BKIL et CHIL, est donc équivalent à la somme des deux carrés ABDE et ACFG.

Corollaires.

442. Deux rectangles de même hauteur étant entre eux comme leurs bases, on a

$$\frac{\text{BKIL}}{\text{BCHK}} = \frac{\text{BL}}{\text{BC}} \quad \text{et} \quad \frac{\text{CHIL}}{\text{BCHK}} = \frac{\text{CL}}{\text{BC}},$$

d'où, en remplaçant les rectangles par les carrés équivalents,

$$\frac{\text{ABDE}}{\text{BL}} = \frac{\text{ACFG}}{\text{CL}} = \frac{\text{BCHK}}{\text{BC}}.$$

Les carrés construits sur les côtés de l'angle droit et sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle sont donc respectivement proportionnels aux projections de ces côtés sur l'hypoténuse et à l'hypoténuse elle-même.

443. Si l'on construit sur les côtés de l'angle droit et sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle ABC trois polygones semblables P, Q, R, on aura (438)

$$\frac{\text{P}}{\overline{\text{AB}}^2} = \frac{\text{Q}}{\overline{\text{AC}}^2} = \frac{\text{R}}{\overline{\text{BC}}^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{P}+\text{Q}}{\overline{\text{AB}}^2+\overline{\text{AC}}^2} = \frac{\text{R}}{\overline{\text{BC}}^2},$$

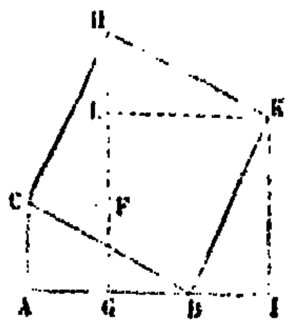
c'est-à-dire (226)

$$\text{R} = \text{P} + \text{Q}.$$

SCOLIES.

444. On peut donner du théorème qui précède (441) une autre démonstration qui montre comment on peut *décomposer effectivement* le carré construit sur l'hypoténuse en parties capables de recouvrir les carrés construits sur les côtés.

Fig. 253.



Soit (*fig.* 253) le triangle ABC rectangle en A. Sur l'hypoténuse BC, construisons le carré BCHK. Des sommets H et K, abaissons sur le côté AB et sur son prolongement les perpendiculaires HG et KI; des sommets C et K, menons à ce même côté, jusqu'à la rencontre de HG, les parallèles CF et KL.

Les quatre triangles rectangles ABC, CFH, HLK, KIB, sont égaux, comme ayant l'hypoténuse égale et un angle aigu égal. GIKL et ACFG sont donc les carrés construits sur les côtés AB et AC du triangle donné. La figure montre alors immédiatement que, si l'on enlève les deux triangles HCL, HLK, qui, avec le pentagone irrégulier CFLKB, constituent le carré construit sur l'hypoténuse, pour les placer en CAB et BKI, on formera, avec les trois mêmes parties disposées de cette nouvelle façon, la figure ACFLKI, qui est précisément la somme des deux carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit.

445. Enfin, on peut déduire le théorème précédent (441 et 444) de celui du n° 226. Car, puisque l'aire du carré construit sur une droite a pour mesure le carré du nombre abstrait qui mesure la longueur de cette droite, on voit que le théorème du n° 226 exprime que la mesure du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des mesures des carrés construits sur les côtés de l'angle droit, et par suite que le premier carré équivaut à la somme des deux autres. Inversement, on passerait du point de vue *concret* au point de

vue *abstrait*, c'est-à-dire du nº 441 au nº 226, en remplaçant les aires des carrés par leurs mesures respectives.

La même remarque s'applique aux diverses relations numériques que nous avons démontrées dans le § III du livre III, entre les divers éléments d'un triangle rapportés à une unité commune. De ces relations résultent immédiatement autant de théorèmes sur les aires, et l'on pourrait inversement donner des démonstrations directes de ces derniers théorèmes et en déduire ensuite les relations numériques correspondantes.

§ III. — AIRES DU POLYGONE RÉGULIER ET DU CERCLE.

DÉFINITIONS.

446. Un *secteur circulaire* est la portion de cercle comprise entre un arc ACDB et les rayons OA, OB, menés aux extrémités de cet arc (*fig.* 254).

Un *secteur polygonal régulier* est la portion de plan comprise entre une ligne brisée régulière ACDB et les rayons OA, OB, menés du centre O de cette ligne (281) à ses extrémités. En divisant en un nombre quelconque de parties égales l'arc AB du secteur circulaire OAB et joignant les points de division, on obtient un secteur polygonal régulier OACDB inscrit dans le secteur circulaire.

Fig. 254.

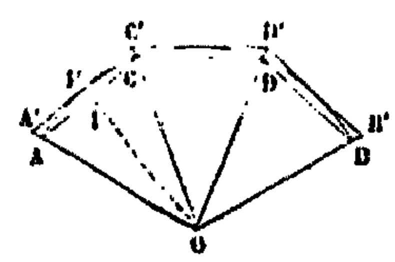
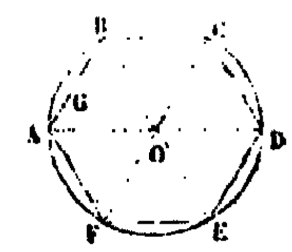


Fig. 255.



THÉORÈME.

447. *L'aire d'un polygone régulier a pour mesure le produit de son périmètre par la moitié de l'apothème* (*fig.* 255).

En effet, en joignant le centre O du polygone régulier ABCDEF à tous ses sommets, on décompose ce polygone en triangles OAB, OBC, ..., OFA, qui ont respectivement pour bases les côtés AB, BC, ..., FA, et pour hauteur commune l'apothème OG.

La somme des aires de ces triangles, c'est-à-dire l'aire du polygone, a donc pour mesure le produit de la somme des côtés AB, BC, ..., FA, par la moitié de l'apothème OG, c'est-à-dire le produit du périmètre par la moitié de l'apothème.

En désignant par S, p, a, l'aire, le périmètre et l'apothème du polygone proposé, on a donc la formule

$$S = \frac{1}{2} pa.$$

COROLLAIRE.

448. *Le rapport des aires de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés est égal au rapport des carrés de leurs apothèmes ou de leurs rayons.*

En effet, soient p, a, r, le périmètre, l'apothème et le rayon du premier polygone, et p', a', r', le périmètre, l'apothème et le rayon du second. En vertu du théorème précédent, le rapport des aires est égal à

$$\frac{\frac{1}{2} pa}{\frac{1}{2} p'a'} \quad \text{ou à} \quad \frac{p}{p'} \cdot \frac{a}{a'}.$$

D'ailleurs on a (n° 282)

$$\frac{p}{p'} = \frac{a}{a'} = \frac{r}{r'}.$$

Le rapport des aires est donc égal à

$$\frac{a^2}{a'^2} \quad \text{ou à} \quad \frac{r^2}{r'^2}.$$

Cette proposition résulte d'ailleurs encore de ce que deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables (282), et de ce que les aires de deux polygones semblables sont entre elles comme les carrés de leurs droites homologues (438, 217).

SCOLIES.

449. Par un raisonnement identique à celui du n° 447, on prouverait que *l'aire d'un secteur polygonal régulier* OACDB (*fig.* 254) *a pour mesure le produit du périmètre de la ligne brisée régulière* ACDB *par la moitié de l'apothème* OI.

450. Soit OAB un secteur circulaire (*fig.* 254). En divisant l'arc AB en un nombre quelconque n de parties égales et menant des tangentes par les milieux des points de division ainsi obtenus, on forme deux secteurs polygonaux réguliers OACDB, OA'C'D'B', semblables, l'un inscrit et l'autre circonscrit au secteur circulaire OAB. Si l'on désigne par a et p l'apothème et le périmètre de la ligne brisée régulière ACDB, et par a' et p' l'apothème et le périmètre de la ligne brisée régulière A'C'D'B', le rapport des aires des deux secteurs polygonaux sera $\frac{p}{p'} \cdot \frac{a}{a'}$. D'ailleurs, nous avons vu au n° 305 que lorsqu'on fait croître n indéfiniment suivant une loi quelconque, les rapports $\frac{p}{p'}$, $\frac{a}{a'}$, ont pour limite l'unité. Donc, il en est de même du rapport $\frac{pa}{p'a'}$, et par suite, à fortiori, du rapport du secteur circulaire à chacun des deux secteurs polygonaux qui le comprennent. Donc :

L'aire d'un secteur circulaire est la limite commune des aires des secteurs polygonaux réguliers semblables inscrit et circonscrit, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés.

Et de même, *l'aire d'un cercle est la limite commune des aires des polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit, dont on fait croître indéfiniment le nombre des côtés.*

Il importe de remarquer que ces deux énoncés sont de véritables *théorèmes*, tandis que les énoncés analogues (304) sur la longueur de l'arc et de la circonférence ne sont que des *définitions*.

THÉORÈME.

451. *L'aire d'un cercle a pour mesure le produit de sa circonférence par la moitié du rayon.*

L'aire du cercle est la limite des aires des polygones réguliers inscrits dont le nombre des côtés croît indéfiniment. D'après cela, soient S, C, R, l'aire, la circonférence et le rayon du cercle considéré, et s, p, a, l'aire, le périmètre et l'apothème d'un polygone régulier inscrit dans ce cercle. On a (447)

$$s = p \cdot \frac{1}{2} a.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés du polygone régulier inscrit, s tend vers S, p vers C et a vers R. On a donc, à la limite,

$$\text{(1)} \qquad S = C \cdot \frac{1}{2} R.$$

COROLLAIRES.

432. En remplaçant dans la relation précédente la circonférence C par sa valeur

(2) $$C = 2\pi R,$$

on obtient la nouvelle formule

(3) $$S = \pi R^2,$$

qu'il faut retenir par cœur et qui montre :

1° Que, *pour calculer l'aire d'un cercle de rayon donné, il faut multiplier par π le carré du rayon.*

2° Que, *pour calculer le rayon d'un cercle d'aire donnée, il faut multiplier par $\frac{1}{\pi}$ ou diviser par π le nombre qui exprime cette aire, et extraire la racine carrée du résultat.*

Si, au lieu d'éliminer C entre les relations (1) et (2), on élimine R, on trouve la formule

(4) $$S = \frac{C^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi},$$

qui permet de calculer directement, la surface connaissant la circonférence, ou la circonférence, connaissant la surface. Cette formule est beaucoup moins usuelle que les précédentes.

EXEMPLES :

1° *Quelle est la surface d'un bassin circulaire dont le rayon est* $2^m,5$?

On a

$$S = \pi(2,5)^2 = \pi . 6,25,$$

et en prenant pour π la valeur 3,142 approchée à moins d'un millième, on trouve $S = 19^{mq},63$ à moins d'un décimètre carré.

2° *Quel est le rayon du cercle dont la surface est de 20 mètres carrés?*

La formule

$$\pi R^2 = 20$$

donne

$$R = \sqrt{20 \cdot \frac{1}{\pi}} = \sqrt{20 . 0,31831} = 2^m,52,$$

à moins d'un centimètre.

3° *Quelle est la surface d'un cercle dont la circonférence est égale à 10 mètres?*

On a

$$S = \frac{10^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{4} \cdot 31,83 = 7^{mq},96,$$

à moins d'un décimètre carré.

453. *Le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport des carrés de leurs rayons.*

Car, en désignant par S et R l'aire et le rayon du premier cercle, et par S' et R' l'aire et le rayon du second, on a

$$S = \pi R^2, \quad S' = \pi R'^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

THÉORÈME.

454. *L'aire d'un secteur circulaire a pour mesure le produit de son arc par la moitié du rayon.*

L'aire du secteur circulaire est la limite des aires des secteurs polygonaux réguliers inscrits (450) dont on fait croître indéfiniment le nombre des côtés. D'après cela, soient S l'aire du secteur considéré, l la longueur de l'arc qui le termine, et R le rayon de cet arc; soient de même s l'aire d'un secteur polygonal régulier inscrit, p le périmètre de la ligne brisée régulière qui le termine, et a l'apothème de cette ligne brisée. On a (449)

$$s = p \cdot \frac{1}{2} a.$$

Mais lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée régulière inscrite, s tend vers S, p vers l, et a vers R. On a donc, à la limite,

$$(5) \qquad S = l \cdot \frac{1}{2} R.$$

Corollaires.

455. En comparant les formules (1) et (5), on voit que *le secteur est au cercle entier comme son arc est à la circonférence.*

Si n est le nombre de degrés de l'arc, le rapport de cet arc à la circonférence sera $\frac{n}{360}$, et par suite l'aire S du secteur s'obtiendra en multipliant par ce rapport l'aire πR^2 du cercle, de sorte qu'on aura

$$S = \pi R^2 \frac{n}{360}.$$

Cette formule permet de calculer l'une quelconque des quantités S, R, n, lorsqu'on connaît les deux autres.

EXEMPLES :

1° *Quelle est l'aire du secteur de* 60 *degrés dans le cercle dont le rayon est* 10 *mètres?*

L'arc de 60 degrés étant le sixième de la circonférence, le secteur est le sixième du cercle, c'est-à-dire

$$\frac{100\pi}{6} = 52^{mq},3599,$$

à moins d'un centimètre carré.

2° *L'aire d'un secteur est égale à l'aire du carré construit sur le rayon. Quel est le nombre de degrés de l'arc qui le termine?*

La formule

$$\pi R^2 \frac{n}{360} = R^2$$

donne

$$n = \frac{360^\circ}{\pi} = 114^\circ 35' 29'',6.$$

3° *Quel est le rayon du cercle dans lequel le secteur de* 45 *degrés renferme* $0^{mq},1250$?

La formule

$$\pi R^2 \frac{45}{360} = 0,1250 \quad \text{ou} \quad \pi R^2 = 0,1250.8 = 1$$

donne

$$R = \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0^{m},564.$$

456. *Le rapport des aires de deux secteurs semblables,* c'est-

à-dire terminés par des arcs semblables, *est égal au rapport des carrés de leurs rayons.*

En effet, S, l, R, étant l'aire, la longueur de l'arc et le rayon du premier secteur, et S', l', R', l'aire, la longueur de l'arc et le rayon du second secteur, on a

$$S = l.\frac{1}{2}R, \quad S' = l'.\frac{1}{2}R', \quad \text{d'où} \quad \frac{S}{S'} = \frac{l}{l'}.\frac{R}{R'};$$

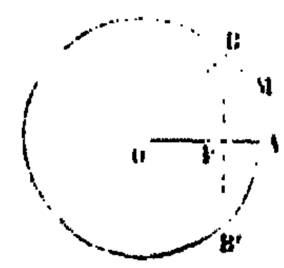
or, les deux arcs l et l' étant semblables, leur rapport est égal à celui de leurs rayons (311) : on a donc

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

THÉORÈME.

457. *L'aire d'un segment circulaire a pour mesure le produit de la moitié du rayon par l'excès de son arc sur la moitié de la corde de l'arc double* (*fig.* 256).

Fig. 256.



En effet, le segment AMB, c'est-à-dire la portion du cercle comprise entre l'arc AMB et sa corde AB, est égal à l'excès de l'aire du secteur OAMB sur l'aire du triangle OAB. Or, l'aire du secteur a pour mesure arc $AB \cdot \frac{1}{2}OA$; l'aire du triangle a pour mesure $BP \cdot \frac{1}{2}OA$, BP étant la perpendiculaire abaissée du point B sur le rayon OA, c'est-à-dire la moitié de la corde BB' de l'arc BAB' qui (106) est le double de l'arc AB. On a donc, en désignant par S l'aire du segment,

$$S = \text{arc}\, AB.\frac{1}{2}OA - \frac{1}{2}BB'.\frac{1}{2}OA.$$

ou

$$S = \frac{OA}{2}\left(\text{arc AB} - \frac{1}{2}BB'\right).$$

Lorsque la corde BB' est le côté de l'un des polygones réguliers que l'on sait inscrire (liv. III, § VII), on peut calculer directement cette corde, par suite l'aire du segment; sinon, il faut recourir aux *tables trigonométriques*.

EXEMPLE :

Quelle est l'aire du segment de 60 degrés dans le cercle dont le rayon est 2 mètres?

L'arc AB est ici le sixième de la circonférence; il est donc égal à

$$\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

La corde BB' est le côté du triangle équilatéral inscrit, égal à $2\sqrt{3}$; on a donc

$$S = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = 0^{mq},362344,$$

à moins d'un millimètre carré.

COROLLAIRE.

458. *Le rapport des aires de deux segments semblables,* c'est-à-dire terminés par des arcs semblables, *est égal au rapport des carrés de leurs rayons.*

En effet, soient S et T les aires du secteur et du triangle dont le premier segment est la différence, et S' et T' les aires du secteur et du triangle dont le second segment est la différence; les secteurs S et S' sont semblables, ainsi que les triangles T et T'; donc, si l'on désigne par R et R' les deux rayons, on aura

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}, \quad \frac{T}{T'} = \frac{R^2}{R'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{S}{S'} = \frac{T}{T'} = \frac{R^2}{R'^2};$$

et, par suite, en vertu d'une proposition connue sur les rapports égaux,

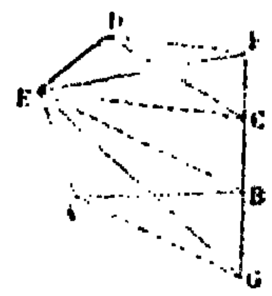
$$\frac{S - T}{S' - T'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

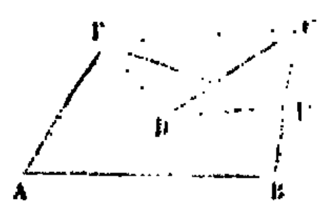
§ IV. — PROBLÈMES SUR LES AIRES.

PROBLÈME.

459. *Construire un triangle équivalent à un polygone donné* (*fig.* 257, 258).

Fig. 257. Fig. 258.





Soit par exemple le pentagone convexe ABCDE (*fig.* 257). En menant la diagonale EC, on détache de ce pentagone le triangle ECD. Si par le sommet D on mène alors une parallèle DF à la diagonale EC, tous les triangles qui auront EC pour base et leurs sommets sur DF seront équivalents au triangle ECD (428), et formeront avec le quadrilatère ECBA un polygone équivalent au pentagone proposé. Or, pour que le nouveau polygone ABCFE ait un sommet de moins, il suffit de choisir parmi tous ces triangles celui dont le sommet est en F, à la rencontre de la parallèle DF et du côté BC prolongé.

La construction indiquée permettant de *transformer un polygone quelconque en un polygone équivalent, mais ayant un côté de moins*, on arrivera toujours, en la répétant, à un triangle équivalent au polygone proposé.

Dans la *fig.* 257, en menant par le sommet A, jusqu'à la rencontre de FB prolongé, la parallèle AG à la diagonale EB, on passe du quadrilatère EABF au triangle équivalent FEG. Ce triangle est donc équivalent au pentagone primitif.

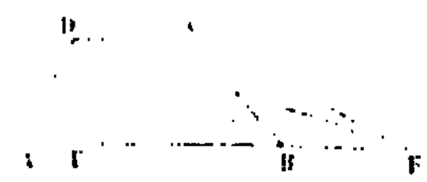
Lorsque le polygone considéré n'est pas convexe (*fig.* 258), la construction reste la même. Le pentagone concave ABCDE, augmenté du triangle EDC, équivaut au quadrilatère ABCE; et ce quadrilatère, diminué du triangle EFC, qui est équivalent au triangle EDC, donne le quadrilatère ABFE équivalent au pentagone proposé.

SCOLIE.

460. Le problème précédent fournit un nouveau moyen pour évaluer l'aire d'un polygone; on peut, en effet, transformer le polygone considéré en un triangle équivalent, puis calculer l'aire de ce triangle.

Appliquons ce procédé à la recherche de l'aire du trapèze.

Fig. 259.



Soit (*fig.* 259) un trapèze quelconque ABCD. Menons la diagonale DB et la parallèle CE à cette diagonale jusqu'à la rencontre de la base AB prolongée.

Le triangle ADE sera équivalent au trapèze ABCD. Il a d'ailleurs même hauteur DF, et sa base AE est la somme des deux bases du trapèze. On retombe ainsi sur la mesure connue (434).

PROBLÈME.

461. *Construire un carré équivalent à un polygone donné.*

Supposons d'abord qu'on veuille construire un carré équivalent à un triangle donné. Soient X le côté de ce carré, B et H la base et la hauteur du triangle proposé. On devra avoir (422, 427)

$$X^2 = \frac{B.H}{2} = \frac{B}{2}.H.$$

Le côté du carré cherché sera donc une moyenne proportionnelle à la moitié de la base du triangle et à sa hauteur.

S'il s'agit d'un parallélogramme, d'un trapèze, d'un polygone régulier et, en général, d'un polygone dont l'aire soit exprimée par le produit de deux lignes, il suffira de chercher la moyenne proportionnelle à ces deux lignes. On obtiendra ainsi le côté du carré équivalent.

Dans tout autre cas, on transformera le polygone donné en un triangle équivalent (459), et on cherchera le carré équivalent à ce triangle, comme on vient de le dire.

PROBLÈME

462. *Trouver deux droites proportionnelles à deux polygones donnés.*

On pourra toujours remplacer les polygones considérés par les carrés équivalents (461). Soient a et a' les côtés de ces carrés, x et y les droites cherchées. On devra avoir

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

On peut choisir arbitrairement l'une des deux droites cherchées, y par exemple, et poser $y = a'$. Il vient alors

$$\frac{x}{a'} = \frac{a^2}{a'^2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a^2}{a'}.$$

x sera donc, dans cette hypothèse, une troisième proportionnelle (258) aux côtés a' et a; et le rapport de cette troisième proportionnelle à a' sera le même que celui des polygones donnés.

PROBLÈME.

463. *Construire un polygone équivalent à un polygone* P *et semblable à un polygone* Q.

Il s'agit ici de transformer un polygone donné P en un autre polygone X équivalent au polygone P, mais semblable à un second polygone donné Q.

Soient q un côté quelconque du polygone Q, et x le côté homologue du polygone X. On devra avoir (438)

$$\frac{Q}{X} = \frac{q^2}{x^2},$$

ou, puisque le polygone X doit être équivalent au polygone P,

$$\frac{Q}{P} = \frac{q^2}{x^2}.$$

Remplaçons les polygones Q et P par les carrés équivalents a^2 et b^2 (461). Il viendra

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{q^2}{x^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{b} = \frac{q}{x}.$$

Le côté x est donc une quatrième proportionnelle aux trois droites a, b, q (257), et il restera à construire sur ce côté, homologue du côté q, un polygone semblable au polygone Q (263).

PROBLÈME.

464. *Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable égale à leur somme ou à leur différence.*

S'il s'agit de deux carrés dont les côtés soient a et b ($a > b$), le côté x du carré égal à leur somme sera l'hypoténuse du triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit a et b; le côté y du carré égal à leur différence sera le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant a pour hypoténuse et b pour premier côté de l'angle droit (441).

S'il s'agit de deux polygones semblables A et B ($A > B$), dont deux côtés homologues quelconques soient a et b, le côté homologue x du polygone semblable $X = A + B$ sera l'hypoténuse du triangle rectangle construit sur a et b comme côtés de l'angle droit; le côté homologue y du polygone semblable $Y = A - B$ sera le second côté de l'angle droit du triangle rectangle ayant a pour hypoténuse et b pour premier côté de l'angle droit (443).

Dans le cas de deux cercles ayant R et R' pour rayons, il suffira de remplacer dans l'alinéa précédent a et b par R et R', pour trouver les rayons x et y des cercles égaux respectivement à la somme ou à la différence des deux cercles donnés.

SCOLIE.

465. Soit à construire une droite x liée à plusieurs longueurs données a, b, c, d, e, par une expression de la forme

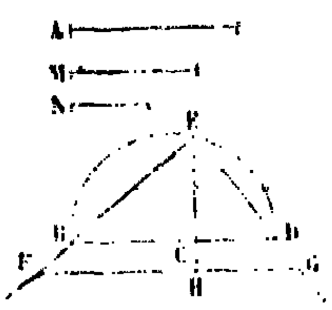
$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2 - e^2}.$$

On cherchera d'abord $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$ à l'aide d'un triangle rectangle ayant a et b pour côtés de l'angle droit: α sera l'hypoténuse de ce triangle; puis $\beta = \sqrt{\alpha^2 - c^2}$, à l'aide d'un triangle rectangle ayant α pour hypoténuse et c pour côté de l'angle droit; β sera le second côté de ce triangle. De même, on cherchera $\gamma = \sqrt{\beta^2 + d^2}$ et $x = \sqrt{\gamma^2 - e^2}$, par deux autres triangles rectangles ayant, le premier β et d pour côtés de l'angle droit, le second γ et e pour hypoténuse et côté de l'angle droit : x sera le second côté de ce dernier triangle.

PROBLÈME.

466. *Construire un polygone semblable à un polygone donné, et dont l'aire soit à celle de ce polygone dans le rapport de deux droites données* M *et* N (*fig.* 260).

Fig. 260.



Supposons d'abord que le polygone donné soit un carré, et soit A son côté. Si X est le côté du carré cherché, on devra avoir (422)

$$\frac{X^2}{A^2} = \frac{M}{N}.$$

La question est donc de construire un triangle rectangle tel, que le rapport des segments déterminés sur l'hypoténuse par la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit soit égal à $\frac{M}{N}$ (442), et que le côté adjacent au segment qui correspond à N soit égal à A.

Or, en portant sur une droite indéfinie BC = M, CD = N, en décrivant une demi-circonférence sur BD comme diamètre et en menant à BD la perpendiculaire CE jusqu'à la rencontre de cette demi-circonférence, on obtiendra un triangle rectangle BED dans lequel les segments de l'hypoténuse présenteront le rapport demandé. Il en sera de même (220) pour tous les triangles rectangles semblables qu'on formera en menant entre les côtés de l'angle droit BED, prolongés ou non, une parallèle à l'hypoténuse BD. Parmi tous ces triangles, celui dont le côté, dirigé suivant ED, est égal à A, répond à la question.

On portera donc sur ED la longueur EG = A; par le point G, on mènera à BD la parallèle GF jusqu'à la rencontre de EB, et FE représentera le côté du carré cherché. On a en effet (442, 220)

$$\frac{\overline{EF}^2}{\overline{EG}^2} = \frac{FH}{HG} = \frac{BC}{CD}, \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{EF}^2}{A^2} = \frac{M}{N}.$$

Soit maintenant un polygone quelconque P, soient p l'un de ses côtés et x le côté homologue du polygone cherché X. On devra avoir, d'après l'énoncé,

$$\frac{X}{P} = \frac{M}{N} \quad \text{et} \quad \frac{X}{P} = \frac{x^2}{p^2},$$

d'où

$$\frac{x^2}{p^2} = \frac{M}{N}.$$

Le problème se trouve donc ramené à trouver le côté d'un carré qui soit à un carré donné dans le rapport de deux droites données, question que nous venons de résoudre. Quand on aura obtenu le côté x homologue de p, il restera à construire sur ce côté un polygone semblable au polygone P.

Dans le cas de deux cercles, en désignant par x et r leurs rayons, on devra avoir

$$\frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \frac{M}{N} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{r^2} = \frac{M}{N}.$$

C'est encore le même problème.

Scolie.

467. Si le rapport $\frac{M}{N}$ était donné numériquement et égal, par exemple, à $\frac{5}{7}$, on choisirait une certaine longueur pour unité, et l'on rentrerait dans le cas précédent en prenant les droites BC et CD égales à cinq fois et à sept fois cette longueur.

On peut aussi, dans ce cas, opérer de la manière suivante. Soit $\frac{M}{N} = \frac{5}{7}$. Sur KH côté du carré donné, comme diamètre (*fig.* 261), décrivez une demi-circonférence. Divisez KH au point I dans le rapport de 5 à 7, et menez à KH la perpendiculaire IL. La droite KL sera le côté du carré cherché. On a, en effet (442),

$$\frac{\overline{KL}^2}{\overline{KH}^2} = \frac{KI}{KH} = \frac{5}{7}.$$

Fig. 261.

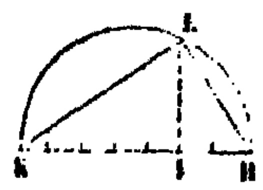
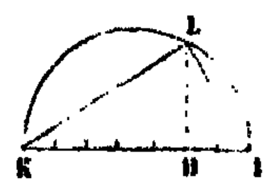


Fig. 262.



Si le rapport $\frac{M}{N}$ est plus grand que 1 et égal à $\frac{7}{5}$, par exemple, divisez le côté donné KH (*fig.* 262), au point I, dans le rapport de 7 à 7 — 5 ou 2. Décrivez sur KI comme diamètre une demi-circonférence, et menez au point H à KI la perpendiculaire HL. La droite KL sera le côté du carré cherché. On a en effet (442)

$$\frac{\overline{KL}^2}{\overline{KI}^2} = \frac{KH}{KI} = \frac{5}{7},$$

d'où

$$\overline{KL}^2 = \frac{5}{7}\overline{KI}^2.$$

Mais

$$\frac{KI}{KH} = \frac{7}{5},$$

d'où

$$\overline{KI}^2 = \frac{7^2}{5^2}\cdot\overline{KH}^2;$$

par suite,

$$\overline{KL}^2 = \frac{5}{7}\cdot\frac{7^2}{5^2}\cdot\overline{KH}^2 = \frac{7}{5}\overline{KH}^2.$$

§ V. — APPENDICE.

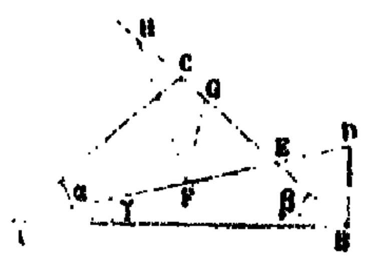
Sur les maximums et les minimums des figures planes.

468. Steiner a publié dans le tome XXIV du *Journal de Crelle* deux Mémoires très-remarquables sur les maximums et les minimums des figures géométriques. Il a traité les questions relatives aux figures planes par cinq méthodes dont les deux premières s'appliquent à la sphère. Nous allons faire connaître, par quelques extraits, la première de ces méthodes, qui surpasse d'ailleurs les autres en élégance et en généralité.

THÉORÈME.

469. « *Entre tous les triangles isopérimètres et de même base, le triangle isocèle est un maximum.*

Fig. 263.



» Soient le triangle isocèle ACB et le non isocèle ADB (*fig.* 263), con-
» struits sur la même base AB, et soit en même temps

$$AC + BC = AD + BD;$$

» puisqu'il y a toujours une partie AEB qui est commune aux deux trian-
» gles, le théorème sera démontré quand on aura prouvé que l'on a
» triangle AEC > triangle BED.

» L'angle α est égal à l'angle β; donc on a $\beta > \gamma$ et AE > BE. Faisons
» EF = EB, et prenons sur la ligne EC, EG = ED; je dis que le point G
» doit nécessairement tomber entre C et E. Car supposons que G tombât
» en C, alors ED étant égal à EC, les deux triangles BED, FEC, seraient
» égaux, d'où résulterait FC = BD; en même temps, la ligne DF serait
» égale à BC; donc (puisque par hypothèse AC + BC = AD + BD) on au-
» rait BD + AF = FC + AF = AC, c'est-à-dire que la somme de deux
» côtés d'un triangle serait égale au troisième, ce qui est impossible. Le
» point G peut encore moins tomber au delà de C, par exemple en H;
» car on aurait alors, par la même raison, AF + FH + HC = AC, c'est-à-
» dire que la ligne brisée AFHC serait égale à la droite AC. Donc, le
» point G doit tomber entre E et C. Cela étant, on a

$$\text{triangle FEG} = \text{triangle BED};$$

» donc

$$\text{triangle AEC} > \text{triangle BED};$$

» donc aussi, le triangle isocèle ACB est plus grand que le triangle non
» isocèle ADB.

470. » Réciproquement, *entre tous les triangles de même base et de
» même surface, le triangle isocèle est celui qui a le plus petit péri-
» mètre.*

» Soient G le triangle isocèle et U un triangle non isocèle quelconque de
» même base et de même surface; désignons par G, un autre triangle isocèle

» construit sur la même base et dont le périmètre soit égal à celui de U :
» on aura (469) $G_1 > U$, et (puisque $U = G$) $G_1 > G$; donc (*)
» périmètre $G_1 >$ périmètre G, ou bien périmètre U > périmètre G. »

Désormais, dans ce qui suit, nous ne démontrerons pas les réciproques; elles se démontrent toutes aisément par voie indirecte, à l'aide d'un raisonnement analogue à celui qui précède.

COROLLAIRE.

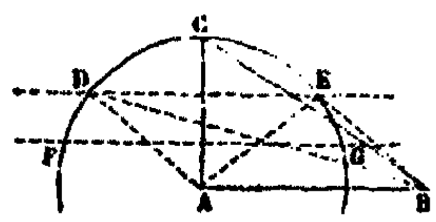
471. « *Entre tous les triangles de même périmètre, le triangle équi-*
» *latéral est un maximum;* et réciproquement, *entre tous les triangles*
» *de même surface, le triangle équilatéral a le plus petit périmètre.*

» Le triangle maximum correspondant au périmètre donné doit tou-
» jours être isocèle, que l'on prenne tel ou tel de ses côtés pour base;
» donc ses côtés pris deux à deux doivent être égaux; donc les trois
» côtés sont égaux entre eux.

THÉORÈME.

472. » *Entre tous les triangles construits avec deux côtés donnés, celui*
» *dans lequel ces deux côtés seront perpendiculaires l'un à l'autre sera*
» *un maximum.*

Fig. 264.



» Soit AB (*fig.* 264) l'un des côtés donnés pris pour base fixe; les
» sommets de tous les triangles que l'on peut construire avec les côtés
» donnés sont situés sur un cercle FCG, qui a le point A pour centre,
» et l'autre côté donné AC pour rayon; tirons les droites FG, DE,..., pa-
» rallèlement à la base AB; elles rencontrent en général le cercle en
» deux points. Ces points de rencontre sont les sommets de deux trian-
» gles équivalents, construits avec les côtés donnés, par exemple des
» triangles ADB et AEB; l'aire de ces triangles devient d'autant plus
» grande que la parallèle est plus éloignée de la base, et il est clair que
» cette distance est la plus grande possible quand la parallèle est tan-
» gente en C; mais, dans ce cas, il n'y a qu'un seul triangle ACB : dans
» ce triangle, qui est un maximum, les côtés donnés AB et AC sont per-
» pendiculaires l'un à l'autre.

(*) Car de deux triangles isocèles construits sur la même base, celui qui a la plus grande aire a le plus grand périmètre, et inversement.

20.

COROLLAIRE.

473. » *Entre tous les triangles dont la somme de deux côtés est donnée, celui dans lequel ces deux côtés sont égaux et perpendiculaires l'un à l'autre est un maximum.*

» Que l'on répartisse la somme donnée, comme l'on voudra, sur les deux côtés, le triangle maximum sera toujours celui qui aura ces deux côtés perpendiculaires l'un à l'autre; il ne reste donc qu'à démontrer que le triangle isocèle est le plus grand de tous ces triangles rectangles. Imaginons pour cela un triangle isocèle construit sur l'hypoténuse de l'un de ces triangles rectangles non isocèles, et dont la somme des côtés soit la même; il sera plus grand que le triangle non isocèle (469), mais plus petit que le triangle isocèle rectangle, dont les côtés de l'angle droit sont égaux à ses côtés (472).

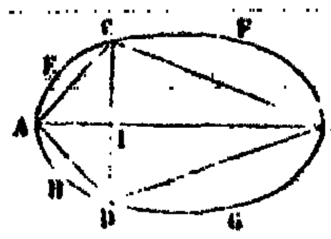
THÉORÈME.

474. » *Entre toutes les figures isopérimètres planes, le cercle est un maximum*; et réciproquement, *entre toutes les figures planes équivalentes, le cercle a le plus petit périmètre.*

» Il est clair qu'il y a une infinité de figures d'un périmètre donné qui ont diverses formes et diverses aires. On comprend de même que l'aire pourra devenir aussi petite qu'on voudra, mais non pas aussi grande qu'on voudra, puisqu'elle reste évidemment toujours comprise dans l'intérieur du cercle décrit d'un point de son contour comme centre avec un rayon égal à la moitié du périmètre donné. Mais, puisque des figures de périmètre donné peuvent avoir différentes aires, sans pouvoir toutefois grandir indéfiniment, il faut qu'il y ait entre elles une figure maximum ou plusieurs maximums de différentes formes et d'une même aire, plus grande que celle des autres figures.

» Remarquons encore qu'*une figure dont l'aire peut être agrandie sans changer de périmètre n'est pas un des maximums*. Il s'ensuit que *chaque figure maximum est convexe.*

Fig. 265.



» Soit EFGH (*fig.* 265) une des figures maximums. A chaque point A du périmètre correspond un second point B, placé de manière que ces

» deux points divisent le périmètre en deux parties égales, de sorte qu'on » a, quant à la longueur, ligne AEFB = AHGB. Supposons que A et B » aient cette propriété, alors la droite AB divise de même l'aire de la » figure en deux parties égales; car si l'une d'elles, par exemple AHGBA, » était plus grande que l'autre AEFBA, on pourrait transformer la seconde » en la rendant égale à la première, puisqu'elles sont isopérimètres et » qu'elles ont la base AB en commun; l'aire de la figure entière se serait » ainsi accrue sans changer de périmètre, ce qui serait contraire à l'hy- » pothèse; donc les deux parties doivent être équivalentes. Si elles étaient » de différentes formes, on pourrait changer l'une d'elles, par exemple » AEFBA, de manière qu'elle devînt symétriquement égale à l'autre » AHGBA, la ligne AB étant l'axe de symétrie; et la figure nouvelle, com- » posée de ces deux parties, serait équivalente de périmètre et d'aire à la » figure primitive; elle serait donc aussi une des figures maximums. » Admettons donc que AEFBA soit la partie transformée devenue symé- » trique à AHGBA; il s'ensuit que le prolongement de la perpendicu- » laire DI, abaissée d'un point quelconque D du demi-périmètre AHGB » sur l'axe AB, rencontre l'autre moitié AEFB en un point C équidistant » de l'axe, de manière qu'on a DI = CI, et que les triangles ADB et ACB » sont symétriques et égaux. Si les angles homologues D et C dans ces » deux triangles n'étaient pas droits, on pourrait agrandir simultanément » l'aire de ces triangles (472) sans rien changer à la longueur de leurs » côtés AD et BD, AC et BC, ni à la grandeur des segments de la figure, » AHD, DGB, BFC, CEA; la base commune AB changerait seule; mais » par là l'aire de la figure entière deviendrait plus grande (puisque le » quadrilatère ADBC en fait partie), sans que le périmètre changeât de » grandeur, ce qui est contraire à l'hypothèse; donc les angles D et C » sont des angles droits. Et comme en laissant les points A et B fixes, » D peut représenter un point quelconque du demi-périmètre AHGB, il » s'ensuit que la figure en question est un cercle. Il est vrai que la » moitié AHGB de ce cercle appartient seule à la figure primitive, et que » l'autre moitié AEFBA de celle-ci pouvait être de forme différente; mais » puisque, comme nous venons de le démontrer, la moitié non changée » de la figure est toujours un demi-cercle (AHGBA), puisqu'en outre on » peut choisir arbitrairement et les points de division A et B, et la moitié » qui doit rester invariable, la figure entière ne peut être qu'un cercle. » Il n'y a donc pas plusieurs figures de différentes formes ayant la pro- » priété d'unir la plus grande aire possible à un périmètre donné; il n'y » en a qu'une seule : le cercle.

» Ce théorème mérite le nom de théorème *principal*, car il contient les » principes les plus essentiels relatifs à la plupart des questions concer- » nant les maximums et les minimums d'aire, de périmètre, etc., dans » les figures planes (et sphériques).

THÉORÈME.

475. » 1° *Si le périmètre d'une figure se compose d'une droite de lon-* » *gueur arbitraire* l *et d'une ligne de forme arbitraire* L, *et si en même* » *temps la longueur de la ligne* L *ou l'aire de la figure est donnée, celle-ci* » *est un maximum ou la ligne* L *est un minimum, quand cette figure* » *est un demi-cercle.*

» Toute figure comprise dans ce théorème peut être considérée comme » la moitié d'une figure symétrique, dont la droite l est l'axe de symétrie, » et dont le périmètre, égal à 2L, est donné. Mais l'aire de la moitié est » nécessairement un maximum, dès que la figure entière en est un. L'é- » noncé est donc une conséquence du théorème principal. Il s'ensuit en » particulier : qu'*entre tous les segments de cercle à arcs égaux ou à aires* » *égales, c'est le demi-cercle qui a l'aire la plus grande ou l'arc le plus* » *petit.*

» 2° *Entre toutes les figures dont le périmètre est composé d'une droite* » *donnée* a *et d'une ligne prise à volonté* L, *le segment de cercle a la* » *plus grande aire pour des longueurs égales de la ligne* L, *et la plus pe-* » *tite ligne* L *quand les aires sont égales.*

» Supposons la ligne L de forme quelconque et qu'elle compose avec la » droite a le périmètre de la figure aL, on peut toujours construire sur » a un segment de cercle dont l'arc α soit égal à L, α et L étant situés » du même côté de a. Complétons le cercle, et désignons l'autre arc par β; » alors le cercle de périmètre $\alpha + \beta$ est plus grand que la figure limitée » par $L + \beta$; ainsi $a\alpha + a\beta > a\mathrm{L} + a\beta$, donc $a\alpha > a\mathrm{L}$.

476. » On déduit de ce théorème cette règle générale :

» *Dans toute figure dont l'aire doit être un maximum sous des condi-* » *tions quelconques, chaque partie du périmètre qui est libre d'avoir* » *une forme quelconque entre deux points donnés, doit être un arc de* » *cercle.* »

THÉORÈME.

477. 1° *Un polygone de côtés donnés est maximum lorsqu'il est inscriptible au cercle.*

Observons d'abord qu'on peut toujours, avec des côtés donnés a, b, c,..., l, dont le plus grand a est moindre que la somme de tous les autres, former un polygone convexe inscriptible, et un seul. En effet, décrivons un premier cercle O assez grand pour que, en portant les unes à la suite des autres à partir de l'un des points A de la circonférence, des cordes AB = a, BC = b,..., LM = l, l'extrémité M de la dernière corde n'atteigne pas le point A. Le centre O étant d'abord situé dans le segment BCMA au-dessus de AB, supposons que ce centre s'abaisse d'une manière continue en décrivant la droite OZ perpendiculaire sur le milieu de AB. L'arc BCMA de la circonférence variable qui a pour centre O et qui passe par A et B décroîtra, et comme il a pour limite la droite AB, c'est-à-dire une longueur moindre que $b+c+\ldots+l$, on voit que l'extrémité M de la ligne brisée inscrite BC...M s'approchera du point A, et l'atteindra pour le dépasser ensuite. Il y aura donc une position du centre O et une seule, pour laquelle la ligne brisée ABC...M formera un polygone inscrit, comme nous l'avions annoncé.

Cela posé, soient S un cercle et P un polygone inscrit de côtés donnés $a, b, c, \ldots, l$; P' étant un polygone quelconque formé avec les mêmes côtés, ajoutons à ce polygone P', sur chacun des côtés, les segments circulaires qui surmontent les côtés correspondants du polygone inscrit P. On obtient ainsi une figure S' terminée par des arcs circulaires, et dont le périmètre est égal à la circonférence du cercle S. On aura donc (471) $S > S'$, d'où, en retranchant de part et d'autre les segments circulaires qui surmontent les côtés, $P > P'$.

2° *Entre tous les polygones isopérimètres d'un même nombre de côtés, le polygone régulier est un maximum*; et réciproquement, *entre les périmètres de tous les polygones équivalents d'un même nombre de côtés, celui du polygone régulier est un minimum.*

En effet, le maximum parmi les polygones isopérimètres de n côtés doit d'abord avoir tous ses côtés égaux entre eux; car si deux côtés consécutifs AB et BC étaient inégaux, en remplaçant le triangle ABC par un triangle isocèle AB'C construit sur la même base et de même périmètre, on aurait (469) une figure isopérimètre de n côtés et d'aire plus grande. Dès lors, les côtés du polygone sont donnés et égaux chacun à la $n^{\text{ième}}$ partie du périmètre, et, en vertu de la première partie du théorème qui nous occupe, le polygone maximum doit être inscriptible au cercle. Donc enfin, le polygone maximum devant être à la fois équilatéral et inscriptible, est régulier.

Corollaire.

478. « D'après cela, quand on cherchera quel polygone a l'aire maximum » pour un périmètre constant, ou le périmètre minimum pour une aire » constante, le nombre des côtés étant variable, on n'aura qu'à s'occuper » des polygones réguliers, et l'on trouvera la loi suivante :

» *Les aires des polygones réguliers isopérimètres forment une série* » *croissante, qui commence par le triangle et se termine par le cercle;* » *et les périmètres des polygones équivalents forment une série décrois-* » *sante, à partir du triangle jusqu'au cercle.*

» En effet, deux polygones réguliers isopérimètres d'un nombre de côtés » différents étant donnés, par exemple un pentagone ABCDE et un qua-

» drilatère *abcd*, on peut considérer ce dernier comme un pentagone dont
» l'un des côtés serait nul, ou bien, en prenant arbitrairement un point *e*
» sur un des côtés de ce quadrilatère, par exemple sur *ad*, le considérer
» comme un pentagone *abcde*, dont l'un des angles *e* serait égal à deux
» angles droits ; le quadrilatère régulier peut donc être regardé comme
» un pentagone irrégulier : donc son aire est plus petite que celle du pen-
» tagone régulier ABCDE. »

QUESTIONS PROPOSÉES.

§ I. — *Aires des polygones.*

427. Chercher l'expression de l'aire d'un trapèze, en le considérant comme la différence des deux triangles obtenus en prolongeant jusqu'à eur rencontre les deux côtés non parallèles.

428. Étant données les bases et la hauteur d'un trapèze, calculer les aires des deux triangles dont il est la différence.

429. L'aire d'un trapèze est égale à la moitié du produit d'un de ses côtés non parallèles par la perpendiculaire abaissée du milieu de l'autre côté sur le premier.

430. Par un point pris sur la bissectrice d'un angle, mener une droite telle que la partie interceptée par les côtés de l'angle soit minimum ou qu'il en soit de même de l'aire du triangle déterminé.

431. Dans un angle donné, mener une droite minimum qui intercepte un triangle dont l'aire soit équivalente à un carré donné.

432. Si, dans un triangle rectangle, l'un des angles aigus est égal à $\frac{2}{3}$ d'angle droit, l'aire du triangle équilatéral construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des triangles équilatéraux respectivement construits sur les côtés.

433. On donne un triangle ABC ; aux points B et C, et d'un même côté de BC, on mène à cette droite des perpendiculaires BD et CE qu'on prend égales à deux fois la hauteur du triangle ABC. Les points F et G étant les milieux des côtés AB et AC, démontrer que le triangle ABC est équivalent à la somme ou à la différence des triangles BDF, CEG, suivant que ses angles en B et en C sont ou non tous les deux aigus.

434. Les deux triangles opposés, qu'on forme en joignant un point pris dans l'intérieur d'un parallélogramme à ses quatre sommets, équivalent ensemble à la moitié du parallélogramme.

435. Le triangle formé en joignant le milieu d'un des côtés non parallèles d'un trapèze aux extrémités du côté opposé, équivaut à la moitié du trapèze.

436. On donne un rectangle ABCD; on prend un point quelconque E sur BC, un point quelconque F sur CD. Démontrer que le rectangle ABCD équivaut au double du triangle AEF, augmenté du rectangle ayant pour dimensions les segments BE et DF.

437. Tout rectangle est moitié du rectangle qui a pour dimensions les diagonales des carrés construits sur ses côtés adjacents.

438. Si, par le milieu E de la diagonale BD d'un quadrilatère ABCD, on mène la parallèle FEG à la seconde diagonale AC, démontrer que la droite AG divise le quadrilatère en deux parties équivalentes.

439. *ABCD étant un rectangle, on inscrit dans le triangle ABC un cercle* qui touche AB en E et BC en F; on mène ensuite EH parallèle à AD et FK parallèle à CD. Démontrer que le rectangle KH est la moitié du rectangle ABCD.

440. Dans un quadrilatère, les perpendiculaires abaissées sur une diagonale des sommets opposés étant égales, on demande de le diviser en quatre triangles équivalents par des droites menées d'un point intérieur aux quatre sommets.

441. Soient le triangle ABC et sa médiane AD; si l'on joint le sommet B au milieu de AD, la droite obtenue partage le côté opposé dans le rapport de 2 à 1.

442. Si, des sommets d'un triangle jusqu'aux côtés opposés ou à leurs prolongements, on mène trois droites égales à une longueur donnée et si, d'un point intérieur, des parallèles sont menées à ces droites jusqu'aux mêmes côtés, la somme de ces parallèles est égale à la longueur donnée.

443. Si les diagonales d'un quadrilatère inscrit se coupent à angle droit, la somme des produits des côtés opposés représente une aire double de celle du quadrilatère donné.

444. Dans un triangle ABC, le côté AC est double du côté BC; on mène les bissectrices CD et CE de l'angle C du triangle et de son supplément formé en prolongeant AC. Démontrer que les aires des triangles CBD, ACD, ABC, CDE, sont dans le rapport des nombres 1, 2, 3, 4.

445. P étant un point pris dans le plan d'un parallélogramme ABCD, démontrer que le triangle PBD est équivalent à la somme des triangles PAB, PBC.

446. ABCD étant un quadrilatère inscrit, démontrer par les propriétés

des aires la relation connue

$$\frac{AC}{BD}=\frac{BA.AD+BC.CD}{AB.BC+AD.DC}.$$

447. D'un point O pris dans l'intérieur d'un triangle ABC, on mène jusqu'aux côtés BC, AC, AB, les droites Oa, Ob, Oc; puis, par les sommets A, B, C, jusqu'aux mêmes côtés, les parallèles Aa', Bb', Cc', aux premières droites; démontrer la relation

$$\frac{Oa}{Aa'}+\frac{Ob}{Bb'}+\frac{Oc}{Cc'}=1.$$

448. Si, des sommets C et D d'un quadrilatère ABCD et de l'intersection E de ses diagonales, des perpendiculaires CF, DG, EH, sont menées au côté AB, l'aire du quadrilatère a pour expression

$$\frac{1}{2}AB.\frac{CF.DG}{EH}.$$

449. Démontrer par les propriétés des aires que, si l'on mène la parallèle cb à la base BC d'un triangle ABC, les droites Bb, Cc, se croisent sur la médiane qui correspond au sommet A.

450. Si l'on inscrit un cercle dans un triangle rectangle, ce triangle est équivalent au rectangle qui a pour dimensions les segments déterminés sur l'hypoténuse par le point de contact du cercle inscrit.

451. Démontrer que l'aire d'un triangle en fonction de ses médianes α, β, γ, est exprimée par la formule

$$S=\frac{1}{3}\sqrt{2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}.$$

452. La droite qui contient les trois projections d'un point A d'une circonférence O sur les côtés d'un triangle équilatéral inscrit, passe par le milieu du rayon OA.

453. Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, la droite qui joint les milieux des diagonales passe par le centre du cercle.

454. Si, par deux points P et P' de l'un des côtés BC d'un triangle ABC, on mène aux deux autres côtés du triangle et jusqu'à ces côtés les parallèles PE et PF, P'E' et P'F', puis si l'on joint un troisième point quelconque M de BC aux extrémités de ces parallèles, la somme des deux triangles EME', FMF', est équivalente au triangle PAP'.

455. Un triangle acutangle est inscrit dans un cercle de centre O; les rayons AO, BO, CO, prolongés, coupent une seconde fois la circonférence aux points A', B', C'; démontrer que l'aire de l'hexagone inscrit AB'CA'BC' est double de celle du triangle ABC. — Considérer le cas où le triangle ABC est obtusangle.

456. Étant données les trois hauteurs h, h', h'', d'un triangle, trouver ses trois côtés et sa surface.

457. L'aire d'un triangle est égale au rayon du cercle circonscrit, multiplié par le demi-périmètre du triangle formé en joignant les pieds des hauteurs.

458. Deux triangles ont un sommet commun ; quel est le lieu décrit par ce sommet lorsque, les deux bases restant fixes, la somme ou la différence des aires des deux triangles demeure constante ? — Discussion. — Déduire du résultat obtenu que les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.

459. Les côtés consécutifs d'un quadrilatère quelconque étant représentés par a, b, c, d, et ses diagonales par m et n, l'aire de ce quadrilatère est exprimée par la formule

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(2mn + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(2mn - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)}.$$

Si le quadrilatère est inscriptible et si p désigne son demi-périmètre, cette formule devient

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Si le quadrilatère est un trapèze ayant a et c pour bases, on a

$$S = \frac{1}{4}\cdot\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(b+d+a-c)(b+d+c-a)(a-c+b-d)(a-c+d-b)}.$$

460. Trouver l'aire d'un quadrilatère quelconque en fonction des deux diagonales et des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

461. Démontrer que l'aire d'un quadrilatère, à la fois inscriptible et circonscriptible, est égale à la racine carrée du produit de ses quatre côtés.

§ II. — *Comparaison des aires.*

462. On donne un triangle rectangle sur les côtés duquel on construit trois carrés ; on joint les sommets consécutifs de ces carrés, et l'on demande l'expression de l'aire de la figure totale ainsi formée.

463. Un triangle étant donné, partager sa surface en moyenne et extrême raison par une parallèle à sa base.

464. Sur les côtés AB, AC, d'un triangle ABC, on construit des parallélogrammes quelconques ABDE, ACFG, dont on prolonge les côtés DE et FG jusqu'à leur rencontre au point H ; démontrer que la somme des aires de ces deux parallélogrammes équivaut à l'aire du parallélogramme qui a pour côtés adjacents BC et une droite égale et parallèle à AH. — Déduire de ce théorème celui du carré de l'hypoténuse.

465. Si dans la *fig.* 252 du n° 441 on joint les points E et G, F et H, K et D, on forme un hexagone; démontrer que la somme des carrés construits sur les côtés de cet hexagone est égale à huit fois le carré construit sur l'hypoténuse BC du triangle ABC.

466. Si l'on construit des carrés sur les trois côtés d'un triangle quelconque, et si l'on joint les sommets consécutifs de ces carrés, on forme un hexagone; démontrer que la somme des carrés construits sur les côtés de cet hexagone équivaut à quatre fois la somme des carrés construits sur les côtés du triangle donné. — Déduire de ce théorème le précédent.

467. On donne un quadrant AOB et un point P quelconque sur l'arc AB; par ce point P, on mène à cet arc la tangente STP : S est son point d'intersection avec le rayon OA, T avec le rayon OB. On mène PM perpendiculaire sur OA, et l'on demande de prouver que le triangle AOB est la moyenne proportionnelle des triangles SOT et OMP.

468. Si l'on divise les côtés d'un triangle ABC dans le rapport $\frac{n}{1}$, en suivant les sommets dans leur ordre naturel, l'aire du triangle formé en joignant les points de division obtenus est à l'aire du premier triangle dans le rapport $\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2}$.

469. Sur les côtés AB, AC, d'un triangle ABC, on marque deux points M et N, et sur la droite MN un point P, tels qu'on ait

$$\frac{BM}{AM}=\frac{AN}{CN}=\frac{PM}{PN};$$

démontrer que le triangle BPC équivaut au double du triangle AMN.

470. Soit un triangle quelconque ABC; on mène BD perpendiculaire et égale à AB, CE perpendiculaire et égale à AC, et l'on tire DE. Démontrer que la somme des carrés construits sur BC et sur DE équivaut à deux fois la somme des carrés construits sur les côtés AB et AC.

471. Par le milieu de chacune des deux diagonales d'un quadrilatère, on mène une parallèle à l'autre, et l'on joint le point d'intersection de ces deux parallèles aux milieux des quatre côtés; démontrer que le quadrilatère est ainsi partagé en quatre parties équivalentes.

472. Deux polygones d'un nombre pair de côtés sont équivalents, lorsque leurs côtés ont les mêmes points milieux.

473. L'aire d'un polygone d'un nombre pair de côtés ne varie pas, lorsque tous les sommets de rangs pairs ou tous les sommets de rangs impairs décrivent des droites égales, parallèles et de même sens.

474. Si deux polygones semblables et intérieurs l'un à l'autre ont leurs côtés homologues parallèles, tout polygone à la fois inscrit dans l'un et

circonscrit à l'autre a une aire moyenne proportionnelle entre les aires de ces deux polygones.

475. Démontrer que la surface du triangle formé avec les médianes d'un triangle donné est les trois quarts de la surface de ce triangle. — En déduire : 1° qu'entre tous les triangles qui ont la somme de leurs médianes constante, le triangle équilatéral est maximum; 2° que de tous les triangles équivalents, le triangle équilatéral est celui dans lequel la somme des médianes est minimum.

476. On donne une droite CF et un point extérieur A; on partage CF en quatre parties égales aux points B, D, E; par chacun de ces points, on mène des parallèles aux cinq droites AC, AB, AD, AE, AF; chacun des quatre triangles ACB, ABD, ADE, AEF, se trouve ainsi divisé en sept parties, savoir en cinq triangles et deux quadrilatères : démontrer que les sept parties qui composent l'un des quatre triangles principaux sont égales chacune à chacune aux sept parties qui composent l'un quelconque des trois autres.

§ III. — *Aires du polygone régulier et du cercle.*

477. Trouver en fonction du rayon du cercle circonscrit l'aire du dodécagone régulier.

478. Si, sur les trois côtés d'un triangle rectangle pris comme diamètres, on décrit des demi-circonférences, la somme des deux *lunules* comprises entre la demi-circonférence décrite sur l'hypoténuse et les deux autres est égale à l'aire du triangle donné.

479. L'aire de l'octogone régulier inscrit dans un cercle équivaut à celle du rectangle qui a pour côtés adjacents les côtés des carrés inscrit et circonscrit.

480. L'aire de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle est les trois quarts de celle de l'hexagone régulier circonscrit.

481. L'aire de l'hexagone régulier inscrit est la moyenne proportionnelle de celles des triangles équilatéraux inscrit et circonscrit.

482. Étant donné un polygone régulier, on mène les diagonales qui sous-tendent successivement deux côtés; ces diagonales déterminent par leurs intersections un autre polygone dont on demande la nature, et l'aire en fonction de celle du premier polygone.

483. On prend les points B et D à égale distance des extrémités de l'arc d'un quadrant AOC, et on mène sur OC les perpendiculaires BG et DH; démontrer que la figure mixtiligne BGHD est équivalente au secteur OBD.

484. Si l'on prend un point C sur le diamètre AB d'un cercle, l'aire comprise entre ce cercle et les cercles décrits sur les segments AC et CB comme diamètres équivaut au cercle qui a pour diamètre la moyenne proportionnelle des segments AC et CB.

485. Dans des cercles différents, les secteurs dont les angles sont en raison inverse des carrés des rayons sont équivalents.

486. Si, sur l'hypoténuse BC d'un triangle rectangle isocèle ABC comme diamètre, on décrit un demi-cercle BDAEC et si, du point A comme centre avec AB pour rayon, on décrit l'arc BFC, démontrer que le segment BFC équivaut à la somme des segments BDA, CEA.

487. AB étant un arc de cercle de centre O et AD une perpendiculaire au rayon OB, on prend l'arc AC égal à cette perpendiculaire; démontrer que le secteur BOC est équivalent au segment ACB.

488. La différence de deux secteurs semblables a pour mesure de son aire le produit de la différence des rayons par l'arc concentrique mené à égale distance des arcs considérés.

489. Si des demi-cercles sont décrits sur les trois côtés d'un triangle rectangle comme diamètres, et si l'on tourne vers l'intérieur du triangle ceux décrits sur les côtés de l'angle droit, la somme des segments extérieurs correspondants aux côtés de l'angle droit, moins la somme des segments déterminés par l'hypoténuse, équivaut à l'aire commune aux demi-cercles décrits sur les côtés.

490. On donne une corde AB dans un cercle O; si, sur le rayon OA qui passe par une de ses extrémités, on décrit un cercle, les segments sous-tendus dans les deux cercles par la corde AB sont dans le rapport de 4 à 1.

491. Des demi-cercles OEDA, OFDB, étant décrits sur les rayons OA, OB, d'un quadrant OACB, démontrer : 1° que les trois points A, B, D, sont en ligne droite; 2° que les aires ACBD, OEDF, sont équivalentes; 3° que les aires OFDA, OEDB, équivalent chacune au quart du carré construit sur le rayon OA.

492. Si AB et CD sont deux diamètres perpendiculaires d'un cercle O et si, du point D comme centre avec DA pour rayon, on décrit un arc de cercle AEB, démontrer que l'aire de la *lune* AEBC équivaut à celle du triangle DAB.

493. Dans un triangle rectangle ABC, AD étant la perpendiculaire abaissée du sommet sur l'hypoténuse, démontrer que les cercles inscrits dans les triangles ABD, ACD, sont proportionnels à ces triangles.

494. On donne deux droites qui se coupent en A, et l'on décrit une série de cercles tous tangents à ces deux droites et successivement tan-

gents entre eux; OA étant la distance du centre du cercle le plus éloigné au point A, et OB son rayon, la somme des aires de tous les cercles est à l'aire du plus éloigné dans un rapport exprimé par $\frac{(OA+OB)^2}{4OA.OB}$.

495. Si le diamètre d'un cercle est divisé en n parties égales aux points P_1, P_2, etc., et si l'on décrit des demi-cercles au-dessus de AB sur les diamètres AP_1, AP_2, etc., et au-dessous de AB sur les diamètres BP_1, BP_2, etc., le contour de chaque figure telle que $AP_{m-1}BP_m$ est égal à la circonférence du cercle donné, et l'aire de la même figure à la $n^{ième}$ partie de celle du cercle donné.

496. A étant l'aire d'un polygone régulier inscrit et B l'aire du polygone circonscrit semblable, démontrer que la différence $B-A$ équivaut à l'aire du polygone régulier semblable inscrit dans la circonférence qui a pour diamètre le côté du polygone B, ou encore à l'aire du polygone régulier semblable circonscrit à la circonférence qui a pour diamètre le côté du polygone A.

497. CBD étant un triangle rectangle en B dans lequel BD est le double de BC, on prolonge BD d'une longueur $Da=\frac{BC}{5}$, puis encore d'une longueur $ab=\frac{2BC}{5}$; on mène les droites Ca, Cb, et on prolonge BC de telle sorte que $BA=Ca$; enfin, par A, on mène à la droite Cb une parallèle qui coupe en E le prolongement de BD. Démontrer que la longueur BE diffère très-peu de la demi-circonférence dont BC est le rayon, et que le triangle BCE diffère très-peu du cercle correspondant; évaluer les deux différences.

498. A et B désignant les surfaces de deux polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit à un cercle, et A′ et B′ celles des deux polygones inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double, démontrer les formules

$$\frac{1}{A'}=\sqrt{\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{B'}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{A'}\right);$$

prouver en outre que $B'-A'$ est $<\frac{B-A}{4}$. — Déduire des formules obtenues une nouvelle démonstration du théorème de Schwab (315).

499. r et a désignant le rayon et l'apothème d'un polygone régulier, r' et a' le rayon et l'apothème du polygone régulier de même aire et d'un nombre de côtés double, démontrer les formules

$$r'=\sqrt{r.a},\quad a'=\sqrt{a.\frac{r+a}{2}}.$$

— Déduire de ces formules, en partant du carré dont l'aire est égale à 2, un théorème analogue à celui de Schwab, c'est-à-dire le moyen d'obtenir une série de nombres tendant vers $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

§ IV. — *Problèmes sur les aires.*

500. Partager un triangle en parties proportionnelles à des droites données par des parallèles à sa base.

501. Partager un trapèze en parties proportionnelles à des droites données par des parallèles aux bases.

502. Partager un polygone en parties proportionnelles à des nombres donnés par une série de droites parallèles à une droite donnée.

503. Partager un triangle en trois triangles équivalents par trois droites menées d'un même point intérieur à ses trois sommets.

504. Par un point pris dans le plan d'un angle donné, mener une droite telle, que le triangle qu'elle détermine par sa rencontre avec les côtés de l'angle soit équivalent à un carré donné.

505. Partager un quadrilatère quelconque en deux parties qui soient dans le rapport de deux droites données, par une parallèle ou une perpendiculaire à l'un de ses côtés.

506. Étant donnés trois points A, B, C, en trouver un quatrième O tel, que les surfaces AOC, AOB, BOC, présentent des rapports donnés.

507. Par un point pris sur l'un des côtés d'un polygone, mener une série de droites qui partagent sa surface en un nombre donné de parties équivalentes.

508. Inscrire dans un triangle donné un parallélogramme ayant une aire donnée. — Discussion.

509. Partager un polygone en n parties équivalentes par une série de droites issues d'un point intérieur.

510. Inscrire dans un cercle donné un trapèze, connaissant son aire et la longueur commune des deux côtés non parallèles.

511. Inscrire dans un cercle donné un rectangle de surface donnée.

512. Construire un triangle, connaissant ses angles et sa surface.

513. Après avoir inscrit un carré dans un carré donné, on en inscrit un troisième dans le second obtenu, et ainsi de suite indéfiniment, en adoptant toujours la même loi d'inscription.

On demande : 1° la limite vers laquelle tend la somme des carrés inscrits; 2° combien il faut construire de carrés inscrits pour que leur somme soit équivalente à une surface donnée.

514. Étant donné un triangle, on en forme un second en joignant les milieux de ses trois côtés, un troisième en joignant les milieux des trois côtés du second, et ainsi de suite indéfiniment. On demande la limite de la somme de tous les triangles inscrits de cette manière.

515. Construire un triangle équivalent à un triangle donné et tel, que ses sommets soient respectivement situés sur trois droites données.

516. Partager un trapèze en parties proportionnelles à des droites données, par des sécantes coupant les deux bases.

517. Partager un cercle en parties proportionnelles à des nombres donnés, par des rayons.

518. Partager un cercle en parties proportionnelles à des nombres donnés, par des circonférences concentriques.

519. Partager un triangle en deux parties proportionnelles à des droites données, par une perpendiculaire à l'un des côtés.

520. Partager un triangle en deux parties proportionnelles à des droites données, par une sécante minimum.

521. Partager un triangle quelconque en quatre parties équivalentes, par deux droites perpendiculaires entre elles.

522. Étant donné un cercle, trouver quatre autres cercles dont les rayons soient proportionnels à des droites données et dont la somme des aires soit équivalente au cercle donné.

523. On donne trois droites en grandeur et en position; trouver un point tel, qu'en le prenant pour sommet commun de trois triangles ayant ces droites pour bases respectives, ces trois triangles soient équivalents.

524. Inscrire dans un carré un rectangle d'aire donnée.

525. Trouver sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle un point tel, que le carré construit sur la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'un des côtés de l'angle droit, soit équivalent au rectangle qui a pour dimensions les deux segments correspondants de l'hypoténuse.

526. Décrire quatre circonférences qui soient en proportion, dont la plus grande soit égale à la somme des trois autres, et telles que leur somme et la somme des cercles correspondants soient respectivement égales à une circonférence et à un cercle donnés.

527. Trouver sur la diagonale prolongée d'un carré donné un point tel, que si l'on mène de ce point une parallèle à l'un des côtés du carré jusqu'à la rencontre du côté adjacent prolongé, on forme ainsi, avec la diagonale prolongée elle-même, un triangle équivalent au carré donné.

528. Construire un triangle isocèle équivalent à un triangle donné.

529. D'un point donné sur l'un des côtés égaux d'un triangle isocèle, mener une droite jusqu'à la rencontre de l'autre côté prolongé, de manière à déterminer un triangle équivalent au triangle donné.

530. On donne un triangle ABC et un point D sur AB; construire un triangle équivalent au triangle ABC, qui ait l'un de ses sommets en D et l'angle A commun avec le triangle ABC.

531. Construire un triangle, connaissant son aire, un de ses angles, et la médiane qui correspond à l'un des deux autres angles.

532. Transformer un triangle quelconque en un triangle isocèle qui ait même angle au sommet.

533. Construire un parallélogramme équivalent à un carré donné et qui ait un angle donné. — Cas du losange.

§ V. — *Appendice.*

534. De tous les triangles qui ont même angle au sommet et même somme des côtés de cet angle, le triangle isocèle est maximum et sa base est minimum.

535. De tous les triangles satisfaisant aux conditions de l'énoncé précédent, le triangle minimum est celui dans lequel la différence des côtés de l'angle donné est maximum, et sa base est maximum. — Réciproque.

536. De tous les triangles équivalents qui ont même angle au sommet, c'est le triangle isocèle qui a le périmètre minimum.

537. De tous les triangles qui ont pour angle au sommet un angle donné et dont la base est astreinte à passer par un point donné, le triangle minimum est celui dont le point donné est le milieu de la base.

538. De tous les triangles ayant même base et même hauteur, le triangle isocèle a le plus grand angle au sommet.

539. De tous les triangles qui ont même angle au sommet et même périmètre, le triangle isocèle a l'aire maximum et la base minimum. — Il en est de même de tous les triangles qui ont même angle au sommet et même différence entre la somme des côtés de cet angle et la base.

540. De tous les triangles qui ont même angle au sommet et des bases égales, le triangle isocèle a l'aire maximum et le périmètre maximum.

541. Étant donnés dans un quadrilatère un angle et les deux côtés opposés à cet angle, l'aire du quadrilatère est maximum lorsque le sommet de l'angle donné est à égale distance des trois autres sommets.

542. De tous les triangles dont deux côtés ont des grandeurs données, le triangle maximum est celui dans lequel les trois sommets sont à égale distance du milieu du troisième côté.

543. L'aire d'un quadrilatère, dans lequel on donne un angle et la

somme des deux côtés opposés, est maximum lorsque ces deux côtés sont égaux.

544. Étant donnés un angle d'un polygone et les côtés non adjacents à cet angle, l'aire du polygone est maximum lorsque le sommet de l'angle donné est également distant de tous les autres sommets.

545. Étant donnés tous les côtés d'un polygone à l'exception d'un seul, son aire est maximum lorsque tous ses sommets sont à égale distance du milieu de ce dernier côté.

546. Les bases de deux triangles et la somme des quatre autres côtés étant données, trouver les conditions du maximum de la somme des aires de ces deux triangles.

547. Étant donnés n points situés comme on voudra dans un plan, décrire le plus petit cercle qui les contienne tous.

QUESTIONS DIVERSES DE GÉOMÉTRIE PLANE.

548. Étant donnés les milieux des côtés d'un polygone convexe d'un nombre impair de côtés, déterminer ses sommets en employant seulement le compas.

549. Construire un triangle rectangle tel, qu'un de ses côtés soit la moyenne proportionnelle de l'hypoténuse donnée et de l'autre côté.

550. Construire un triangle égal à un triangle donné et dont les trois côtés passent respectivement par trois points donnés.

551. On donne un demi-cercle de diamètre AB; soit C un point quelconque de ce diamètre. On décrit deux autres demi-cercles sur AC et CB comme diamètres, et l'on mène à AB une perpendiculaire par le point C. Démontrer que les deux cercles inscrits de part et d'autre de cette perpendiculaire sont égaux entre eux.

552. Si deux cercles de rayons égaux se coupent en A et en B et si, par le point A, on mène la droite AEC qui rencontre respectivement les deux cercles en E et en C, le triangle EBC est équivalent à l'aire comprise entre les deux arcs BE et BC et le côté EC.

553. Trouver, sur la droite qui joint les centres de deux triangles équilatéraux donnés, un point tel que les sommes respectives des carrés de ses distances aux côtés des deux triangles soient dans un rapport donné.

554. Inscrire dans un cercle donné un triangle isocèle dont la somme de la base et de la hauteur soit égale à une droite donnée.

555. Étant donnés une circonférence et un triangle, trouver sur la circonférence un point tel, que la somme des carrés de ses distances aux trois sommets du triangle soit égale à un carré donné.

556. Étant donnés un cercle et une tangente à ce cercle, trouver sur sa circonférence un point dont la somme des distances à la tangente et à son point de contact soit égale à une droite donnée.

557. On partage une droite donnée en moyenne et extrême raison; puis le plus grand segment trouvé en moyenne et extrême raison, et ainsi de suite indéfiniment. Vers quelle limite tend la somme des plus grands segments ainsi obtenus?

558. Étant données la hauteur d'un triangle et les différences de chacun des segments qu'elle détermine sur la base avec le côté adjacent, construire le triangle.

559. Si, du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on mène des droites aux sommets opposés du carré construit sur l'hypoténuse, la différence des carrés de ces droites est égale à la différence des carrés des côtés du triangle.

560. Étant donnés sur une droite trois segments $AB = a$, $BC = b$, $DC = c$, déterminer le point P d'où ces trois segments sont vus sous le même angle; discussion. — Application aux valeurs

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3.$$

561. Soient six points pris dans un plan, les trois premiers A, C, E, sur une même droite, les trois autres, B, D, F, sur une autre droite. Démontrer que les trois intersections de AB et de DE, de BC et de EF, de CD et de AF sont en ligne droite.

562. Étant donnés deux cercles concentriques, mener au plus petit une tangente telle, que si l'on joint respectivement les points A et B où elle coupe le second cercle avec deux points C et D donnés dans le plan des deux cercles, les droites AC et BD soient parallèles.

563. Dans un triangle ABC, on mène la bissectrice AK de l'angle au sommet et la hauteur AF correspondante; des extrémités B et C de la base, on abaisse sur la bissectrice AK les perpendiculaires BD et CE; démontrer que le cercle déterminé par les trois points F, D, E, passe par le milieu G de la base BC, et que l'aire du triangle équivaut au rectangle BD.AE ou CE.AD.

564. On ne peut pas inscrire dans un carré un triangle plus grand que la moitié de ce carré.

565. Démontrer que D étant un point quelconque de la base BC d'un triangle ABC, et AD la droite qui le joint au sommet du triangle, on a

$$\overline{AB}^2.CD + \overline{AC}^2.BD = \overline{AD}^2.BC + BC.BD.CD.$$

566. On donne un point C quelconque sur une droite AB ; trouver sur CB et sur CB prolongée les points D et D' tels que CD soit la moyenne proportionnelle de AD et de BD, CD' la moyenne proportionnelle de AD' et de BD'.

567. AB est divisée au point C en moyenne et extrême raison; sur le plus grand segment CA prolongé, on prend AD = CA, et sur CA on prend AE = BC : démontrer que les droites BD et BE sont aussi divisées en moyenne et extrême raison aux points A et C.

568. AB, AC, DE, DF, étant quatre droites qui, par leurs intersections trois à trois, forment quatre triangles, démontrer que les cercles circonscrits à ces triangles passent par un même point.

569. Si l'on prolonge la base d'un triangle de part et d'autre, de manière que chaque prolongement soit égal au côté adjacent, et si l'on fait passer un cercle par les extrémités obtenues et le sommet du triangle, la droite qui joindra ce sommet au centre du cercle sera la bissectrice de l'angle au sommet.

570. La droite AB étant divisée au point C en moyenne et extrême raison, démontrer que le rapport des segments AC et CB est incommensurable.

571. Démontrer par la Géométrie que, si quatre droites sont en proportion, la somme de la plus grande et de la plus petite est supérieure à la somme des deux autres.

572. Les côtés d'un triangle étant en progression arithmétique, a et a' étant le plus petit et le plus grand côté, R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle, on a

$$6Rr = aa'.$$

573. Construire un triangle rectangle, connaissant la somme des deux côtés de l'angle droit et la somme formée par l'un d'eux et l'hypoténuse.

574. Du sommet A de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC, on abaisse Ap perpendiculaire sur l'hypoténuse BC, pq perpendiculaire sur AB, qr perpendiculaire sur BC, rs perpendiculaire sur AB, et ainsi de suite indéfiniment; démontrer que le rapport de la somme de ces perpendiculaires à AB est égal au rapport de AB + BC à AC.

575. On a dans un cercle une corde CD parallèle à une droite de longueur donnée AB ; la droite AC coupant le cercle une seconde fois en E, et la droite BE une seconde fois en F, démontrer que la droite DF coupe AB en un point fixe, quand la corde CD se déplace parallèlement à elle-même.

576. Dans un triangle inscrit ABC, on mène par le sommet A jusqu'à la base BC des parallèles AD et AE aux tangentes en C et en B; démontrer la relation

$$\frac{BE}{CD} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

577. Le côté d'un polygone est divisé en n parties; sur chacune de ces parties, on construit par rapport au polygone donné un polygone semblable et semblablement placé; démontrer que la somme des périmètres de tous ces polygones est égale au périmètre du polygone donné, et que la somme de leurs aires (si le côté du polygone donné a été divisé en n parties égales) est égale à la $n^{\text{ième}}$ partie de l'aire de ce polygone.

578. Si l'on désigne par a, b, c, les trois côtés d'un triangle ABC, et si Aa', Bb', Cc', sont les bissectrices de ses angles, on a la relation

$$Ab'.Ca'.Bc' = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

579. Si Aa, Bb, Cc, sont les droites menées des sommets d'un triangle aux points de contact des côtés opposés avec le cercle inscrit, on a

$$Ab.Ca.Bc = Ac.Ba.Cb.$$

580. Si l'on prolonge le côté AB d'un triangle ABC jusqu'en D, et si l'on prend CF = BD sur le côté CA, la base BC divise la droite DF dans le rapport des côtés AC et AB; de même, la droite DF divise BC dans le rapport des segments AF et AD.

581. Soient deux cercles extérieurs l'un à l'autre dont les deux tangentes communes intérieures, qui correspondent aux rayons AC et BD, se rencontrent en O et coupent aux points K et H l'une des tangentes communes extérieures; démontrer la relation

$$OC.OD + AC.BD = OK.OH.$$

582. ABCD étant un quadrilatère quelconque et T le point de concours des perpendiculaires menées par les extrémités du côté AB aux côtés adjacents AD et BC, démontrer que la perpendiculaire menée par le point T sur la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère, divise le côté AB en deux segments proportionnels aux projections des côtés BC et AD sur AB.

583. La somme algébrique des perpendiculaires abaissées des sommets d'un polygone régulier sur une droite menée par son centre, est nulle quelle que soit la direction de cette droite.

584. Étant donnés un triangle ABC et des droites Aa, Bb, Cc, qui allant des sommets aux côtés opposés se rencontrent en un même point, on fait

passer un cercle par les trois points a, b, c, lequel coupe les mêmes côtés du triangle en trois autres points a', b', c'; démontrer que les droites Aa', Bb', Cc', se rencontrent aussi en un même point.

585. D'un point pris dans l'intérieur d'un triangle ABC, on mène des sommets aux côtés opposés les droites AH, BE, CF, puis l'on joint deux à deux les points H, E, F; démontrer que les droites AH, BE, CF, sont alors divisées harmoniquement. — Inversement, si une droite AH est divisée harmoniquement en G et D, et si F est un point d'une autre droite AB, les intersections E et C des droites FG et BD, FD et BH, sont en ligne droite avec le point A.

586. Par le sommet A d'un triangle ABC, mener une droite telle que les perpendiculaires BB', CC', abaissées sur elle des extrémités de la base, forment des triangles rectangles ABB', ACC', équivalents.

587. L'aire d'un quadrilatère quelconque ABCD est égale à l'aire du triangle ayant pour base l'un des côtés AB et pour sommet le point de concours des deux diagonales, plus trois fois le triangle ayant pour base le côté CD et pour sommet le point de concours des deux droites qui joignent les centres de gravité des triangles ABC et CDA et des triangles BCD et DAB.

588. Inscrire un carré dans un parallélogramme. — Discussion.

589. Étant donné un quadrilatère ABCD, si l'on prend à volonté un point M sur AB et un point N sur CD, et que l'on mène les droites AN et DM qui se coupent en P, puis les droites CM et BN qui se coupent en Q, la droite PQ passe par un point fixe.

590. Décrire un cercle tangent à deux cercles donnés et qui passe par un point donné de leur axe radical.

591. Démontrer que le cercle qui passe par les milieux des côtés d'un triangle touche les cercles inscrit et ex-inscrits à ce triangle.

592. Étant donnés deux points A et B et deux circonférences passant, l'un par A, l'autre par B, trouver sur l'axe radical de ces circonférences un point C tel, que la droite qui unit les secondes extrémités des cordes déterminées par les sécantes CA et CB soit perpendiculaire à cet axe radical.

593. Deux triangles circonscrits à un cercle donné de rayon R et ayant leurs côtés parallèles deux à deux, déterminent en s'entrecoupant six triangles partiels; démontrer que le produit des surfaces de ces six triangles et des deux triangles donnés est égal à la seizième puissance du rayon R.

FIN DE LA GÉOMÉTRIE PLANE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE V.

LE PLAN.

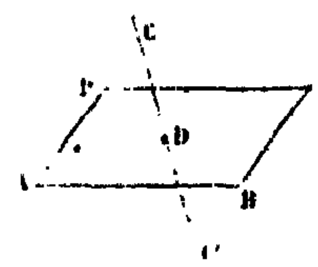
§ I. — PREMIÈRES NOTIONS SUR LE PLAN.

DÉFINITIONS.

479. On sait (5) qu'un plan est une surface telle, qu'une ligne droite y est contenue tout entière dès qu'elle y a deux points.

480. On dit qu'une droite CC′ et un plan P *se coupent* (*fig.* 266), lorsqu'ils n'ont qu'un point commun D; ce point

Fig. 266.



divise la droite CC′ en deux parties DC et DC′ situées de part et d'autre du plan P.

THÉORÈME.

481. *Par une ligne droite et par un point extérieur à cette droite, on peut faire passer un plan, et on ne peut en faire passer qu'un;* en d'autres termes, *une droite et un point extérieur à cette droite déterminent un plan.*

En effet :

1° Un plan, assujetti à la seule condition de contenir une droite AB (*fig.* 267), peut occuper une infinité de positions dans l'espace et tourner autour de la droite AB de manière à venir passer par un point quelconque C extérieur à cette droite. Cela résulte de l'idée que nous avons de la surface plane.

Fig. 267.

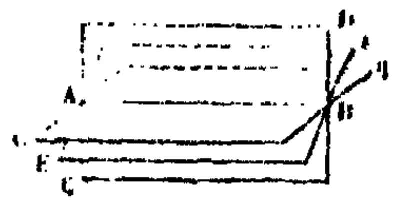
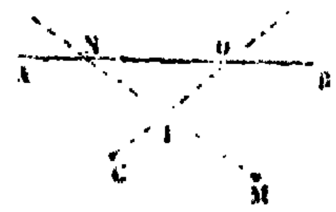


Fig. 268.



2° Le plan P ainsi obtenu est le seul qui puisse contenir à la fois la droite AB et le point C. Pour le prouver, il suffit de faire voir que tout plan Q assujetti à renfermer la droite AB et le point C coïncide avec P. Or, par un point quelconque M du plan P (*fig.* 268), menons dans ce plan une droite MN qui coupe la droite AB, et joignons au point C un point O pris sur AB, de telle sorte que O et C soient situés de part et d'autre de MN; les droites OC et MN du plan P se rencontreront nécessairement en un certain point I. Mais les points N et I sont situés dans le plan Q, car ce plan contient la droite AB par hypothèse et la droite OC (479) dont il renferme deux points O et C. Donc la droite MN tout entière et par suite le point M appartiennent au plan Q. Ainsi, tout point M du plan P appartient au plan Q, et l'on verrait de même que tout point du plan Q est situé dans le plan P. Donc les deux plans P et Q coïncident.

COROLLAIRES.

482. *Trois points* A, B, C, *non situés en ligne droite, déterminent un plan ;* car le plan P, déterminé par la droite AB et le point C, renferme les trois points A, B, C, et réciproquement tout plan qui contient ces trois points passe par AB et par le point C, et par suite ne diffère pas du plan P.

483. *Deux droites* AB *et* AC *qui se coupent déterminent un plan;* car le plan P, déterminé par la droite AB et le point C, renferme les droites AB et AC, et réciproquement tout plan qui contient ces deux droites n'est autre que le plan P puisqu'il passe par AB et par C.

484. *Deux droites parallèles déterminent un plan.* En effet,

deux parallèles sont toujours, par définition (59), situées dans un même plan; et ce plan est le seul qui puisse les contenir, puisqu'on ne peut mener qu'un plan par l'une d'elles et un point de l'autre.

SCOLIES.

485. *Le lieu des positions successives d'une droite assujettie à passer par un point fixe et à rencontrer une droite fixe est le plan déterminé par ce point fixe et cette droite fixe.*

486. *Le lieu des positions successives d'une droite assujettie à rester parallèle à elle-même et à rencontrer une droite fixe est un plan passant par cette droite fixe et une position quelconque de la droite mobile.*

THÉORÈME.

487. *L'intersection de deux plans est une ligne droite.*

En effet, si sur la ligne commune aux deux plans on pouvait trouver trois points non en ligne droite, les deux plans ne seraient pas distincts; ils coïncideraient (482) dans toute leur étendue.

SCOLIES.

488. *L'intersection de trois plans est,* en général, *un point.* C'est le point où la droite commune aux deux premiers plans rencontre le troisième.

489. Un plan est une surface indéfinie. Toutefois, pour représenter les plans, on est obligé de leur assigner des limites; le plus souvent, on représente un plan par un parallélogramme (*fig.* 266 et 267).

§ II. — DROITES PARALLÈLES ET ANGLE DE DEUX DROITES.

DÉFINITIONS.

490. Deux droites AB et CD étant données d'une manière quelconque dans l'espace, le plan P, mené par AB et par un point quelconque D de CD, peut couper cette droite CD ou la contenir tout entière.

Dans le premier cas (*fig.* 266), il n'existe aucun plan qui contienne à la fois les deux droites AB et CD ; car un tel plan, ayant la droite AB et le point D communs avec le plan P, devrait coïncider avec lui (481), et par suite le plan P contiendrait la droite CD, tandis qu'il la coupe par hypothèse. Les deux droites AB et CD, *n'étant pas situées dans un même plan,* ne peuvent ni se rencontrer (483) ni être parallèles (484).

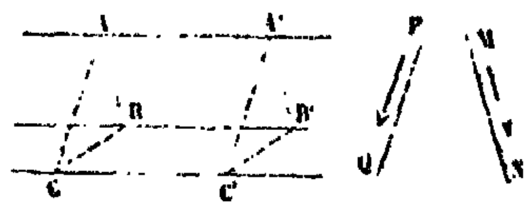
491. On voit par là que, *pour prouver le parallélisme de deux droites de l'espace, il ne suffira plus, comme en Géométrie plane, d'établir qu'elles ne se rencontrent pas, si loin qu'on les prolonge; il faudra, en outre, montrer qu'elles sont situées dans un même plan.*

492. Observons encore que, *par un point A, on ne peut mener dans l'espace,* comme sur un plan, *qu'une parallèle à une donnée* CD; car toute parallèle à CD, menée par le point A, doit (484) être contenue dans le plan ACD déterminé par le point A et la droite CD.

THÉORÈME.

493. *Deux droites* AA' *et* BB', *parallèles à une troisième* CC', *sont parallèles entre elles* (*fig.* 269).

Fig. 269.



Lorsque deux droites sont parallèles, la première ne peut évidemment (484) avoir aucun point commun avec un plan quelconque conduit par la seconde, et par suite avec une droite quelconque menée dans un tel plan.

D'après cela, si par les droites parallèles AA' et CC' et par un point B de BB' on mène deux plans BAA' et BCC', l'intersection de ces deux plans ne rencontrera ni AA' ni CC'; et comme elle est dans un même plan avec chacune de ces droites, elle leur sera parallèle. Mais par le point B on ne peut mener qu'une parallèle BB' à CC'; donc la droite BB' est précisément l'intersection considérée, et par suite elle est parallèle à AA'.

THÉORÈME.

494. *Deux angles qui ont leurs côtés respectivement parallèles sont égaux ou supplémentaires.*

1° Deux angles BAC, B'A'C', dont les côtés AB et AB', AC et A'C', sont deux à deux parallèles et de même sens, sont égaux (*fig.* 269).

En effet, prenons A'B' = AB, A'C' = AC et menons AA', BB', CC', BC, B'C'. Les deux droites AB et A'B' étant égales et parallèles, la figure ABB'A' est un parallélogramme, et par suite BB' est égale et parallèle à AA'. On verrait de même que CC' est égale et parallèle à AA'. Donc (493) BB' et CC' sont égales et parallèles, la figure BB'C'C est un parallélogramme et BC = B'C'. Les triangles ABC, A'B'C', étant égaux comme ayant leurs côtés égaux chacun à chacun, les angles BAC, B'A'C', sont égaux.

2° Deux angles, dont les côtés sont deux à deux parallèles et de sens contraire, sont égaux.

3° Deux angles, qui ont deux côtés parallèles et de même sens et deux côtés parallèles et de sens contraire, sont supplémentaires.

Pour ces deux derniers cas, le raisonnement est le même qu'en Géométrie plane (77).

SCOLIE.

495. Sur une droite quelconque MN (*fig.* 269), il y a deux sens à distinguer : le sens de MN, et le sens contraire, celui de NM.

On appelle *angle de deux droites*, dont la position dans l'espace et le sens sont donnés, l'angle que l'on forme en menant par un point quelconque de l'espace, à chacune des droites données, une droite parallèle et de même sens. Ainsi, MN et PQ (*fig.* 269) étant les deux droites données, par un point quelconque A de l'espace, menons AB parallèle à MN et de même sens, AC parallèle à PQ et de même sens; l'angle BAC sera, par définition, l'angle des deux droites MN et PQ.

Pour que cette définition n'offre rien de contradictoire, il faut que la grandeur de l'angle ainsi obtenu soit indépendante de la position qu'occupe dans l'espace le point par lequel on mène des parallèles aux droites données. Or, soient BAC et B'A'C' les valeurs obtenues pour l'angle de MN et de PQ, en menant à ces droites des parallèles par deux points différents A et A'. AC et A'C', étant chacune parallèles à MN et de même sens que cette droite, sont parallèles et de même sens (493); il en est de même pour AB et A'B'; par suite, les deux angles BAC, B'A'C', sont égaux (494, 1°).

496. On dit que ***deux droites non situées dans le même plan sont perpendiculaires*** l'une à l'autre, lorsque leur angle (495) est droit.

§ III. — DROITE ET PLAN PERPENDICULAIRES.

DÉFINITIONS.

497. On dit qu'une droite et un plan sont ***perpendiculaires l'un à l'autre***, lorsque cette droite est perpendiculaire (496) à toutes les droites du plan.

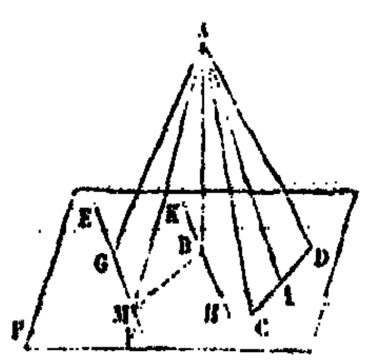
Une droite est dite *oblique* à un plan, lorsqu'elle rencontre ce plan sans lui être perpendiculaire.

THÉORÈME.

498. ***Par un point donné A, on peut toujours mener une perpendiculaire à un plan donné P, et on ne peut en mener qu'une.***

1° Supposons le point A extérieur au plan P (*fig.* 270).

Fig. 270.



La distance du point A à un point quelconque M du plan P varie avec la position du point M dans ce plan; car, si le point M se déplace par exemple sur une droite EF, la longueur AM croît à mesure que le point M s'écarte du pied G de la perpendiculaire AG abaissée du point A sur la droite EF dans le plan AEF (43). Cette distance variable du point A aux divers points du plan P ne pouvant évidemment devenir aussi petite que l'on veut, elle ne descend pas au-dessous d'une certaine limite : *en d'autres termes, elle est susceptible d'un minimum.* — D'ailleurs, parmi les droites qui unissent le point A aux divers points du plan P, il n'en est qu'une qui possède cette longueur minimum; car cette longueur minimum ne saurait appartenir à deux droites égales, telles que AC et AD, puisque la médiane AI du triangle isocèle ACD est moindre que chacune d'elles. — Enfin, cette droite unique AB de longueur minimum, dont nous venons de prouver l'existence, est perpendiculaire à une droite quelconque EF du plan. En effet, en menant par le point B, où AB perce le plan P, la parallèle BH à EF, on forme un angle ABH *égal à celui des deux droites* BA et EF (495); or, cette parallèle BH est située dans le plan BEF, c'est-à-dire dans le plan P; de plus, la droite AB, plus courte distance du point A au plan P, est en particulier la plus courte distance du point A à la droite KBH de ce plan; donc AB est perpendiculaire à BH, et par suite à EF. *Ainsi, on peut mener* du point A une droite AB qui soit perpendiculaire à une droite quelconque du plan, c'est-à-dire (497) qui soit perpendiculaire au plan (*).

On ne peut en mener qu'une. En effet, toute autre droite AM issue du point A est oblique au plan P, puisque le triangle AMB étant rectangle en B, l'angle AMB est aigu.

2° Supposons le point A situé sur le plan P (*fig.* 271).

Fig. 271.

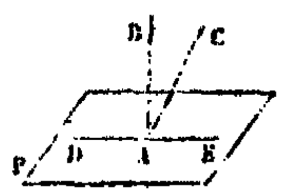


Fig. 272.

Considérons à part un plan quelconque Q (*fig.* 272) et la

(*) Cette démonstration, qui simplifie d'une manière si notable toute cette théorie et en facilite singulièrement les applications, nous a été communiquée par M. O. Bonnet, Membre de l'Institut, Examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique.

perpendiculaire OH abaissée sur ce plan par un point extérieur O pris à volonté; puis, transportons cette figure tout d'une pièce, de telle sorte que le plan Q vienne s'appliquer sur le plan P de la *fig.* 271, et que le pied H de la perpendiculaire OH tombe en A: la droite OH, dans sa nouvelle position AB, sera une perpendiculaire au plan P élevée par le point A.

Toute autre droite AC, issue du même point A, est oblique au plan P. En effet, DAE étant l'intersection du plan P et du plan BAC, AB est, dans ce dernier plan, perpendiculaire sur la droite AE; donc AC est oblique à cette droite AE et par suite oblique au plan P.

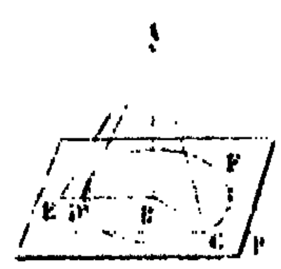
COROLLAIRES.

499. En Géométrie, le mot *distance* est toujours synonyme de *plus courte* distance. *La distance d'un point* A *à un plan* P *est* donc *la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.*

500. *Si d'un point* A *pris hors d'un plan* P (*fig.* 273) *on mène à ce plan la perpendiculaire* AB *et diverses obliques* AC, AD, AE :

1° *Deux obliques* AC *et* AD, *dont les pieds* C *et* D *sont également distants du pied* B *de la perpendiculaire, sont égales;* car les deux triangles rectangles ABC, ABD, étant égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, leurs hypoténuses sont égales.

Fig. 273.



2° *Des deux obliques* AC *et* AE, *l'oblique* AE *qui s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire est la plus longue;* car, en prenant BD = BC, on a, en vertu de l'alinéa précédent, AC = AD, et par la Géométrie plane (43) AE > AD.

Les réciproques sont vraies (33). Il en résulte que *le lieu des pieds des obliques égales, menées d'un point* A *à un plan* P, *est une circonférence ayant pour centre le pied* B *de la perpendiculaire* AB.

De là, un moyen pratique pour abaisser une perpendiculaire sur un plan P par un point extérieur A : fixez au point A l'une des extrémités d'un fil dont l'autre extrémité est armée d'un crayon ; marquez trois points sur le plan, en tenant le fil tendu ; cherchez (**170**) le centre du cercle qui passe par ces trois points, et vous aurez le pied de la perpendiculaire demandée.

THÉORÈME.

501. ***Par un point donné*** **A, *on peut toujours mener un plan perpendiculaire sur une droite donnée*** **XY, *et on ne peut en mener qu'un.***

1° Supposons le point A situé sur la droite XY (*fig.* 274).

Considérons encore la *fig.* 272, construite comme il a été dit au n° **498** (2°), et transportons-la tout d'une pièce de manière que la droite OH s'applique sur la droite XY de la *fig.* 274 et que le point H tombe en A ; le plan Q, dans sa nouvelle position P, sera un plan perpendiculaire à XY au point A.

Il n'existe pas d'autre plan perpendiculaire à XY au point A. En effet, soient AB et AC deux droites menées à volonté par ce point A dans le plan P ; tout plan M perpendiculaire à XY au point A sera coupé par le plan XAB suivant une perpendiculaire à XY (**497**), et par conséquent suivant la droite AB qui est la seule perpendiculaire qu'on puisse élever sur XY par le point A dans le plan XAB ; on voit de même que le plan M contiendra la droite AC ; ce plan M ne diffère donc pas du plan BAC, c'est-à-dire du plan P.

Fig. 274.

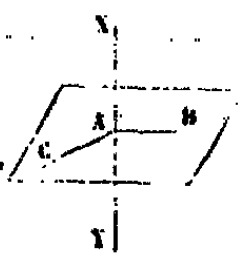
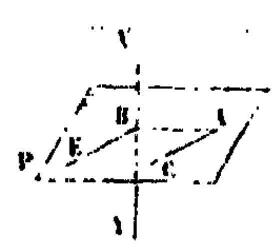


Fig. 275.



2° Supposons le point A extérieur à la droite XY (*fig.* 275).

Dans le plan déterminé par le point A et la droite XY, abaissons la perpendiculaire AB sur cette droite. Le plan P élevé au point B perpendiculairement à XY coupe le plan XBA suivant une perpendiculaire à XY, et par conséquent suivant la droite BA qui est la seule perpendiculaire que l'on puisse mener à XY par le point B dans le plan XBA; ce plan P contient donc le point A, et par suite c'est un plan abaissé du point A perpendiculairement sur XY.

On ne saurait abaisser du point A un autre plan perpendiculaire à la droite XY; car tout plan M ainsi mené doit être coupé par le plan XBA suivant la perpendiculaire AB; il doit donc être perpendiculaire à XY au point B, et par conséquent coïncider avec le plan P (1°).

COROLLAIRES.

502. *Le lieu géométrique des perpendiculaires que l'on peut mener à une droite* XY *par un point* A *est le plan* P *mené par ce point perpendiculairement à cette droite.*

En effet, supposons d'abord le point A situé sur la droite XY (*fig.* 274); toute perpendiculaire AC élevée par A sur XY est contenue dans le plan P, puisque ce plan doit couper le plan XAC suivant une perpendiculaire à XY. — Supposons en second lieu le point A extérieur à la droite XY (*fig.* 275), et désignons par B le point où le plan P abaissé par A perpendiculairement à XY rencontre cette droite; AC étant une perpendiculaire quelconque à XY menée par le point A, sa parallèle BE sera perpendiculaire à XY (496), et par suite, d'après le premier cas, elle appartiendra au plan P que l'on peut considérer comme élevé perpendiculairement à XY par le point B. Dès lors le plan P, renfermant la droite BE et le point A, coïncide avec le plan des deux parallèles BE et AC; il contient donc la droite AC.

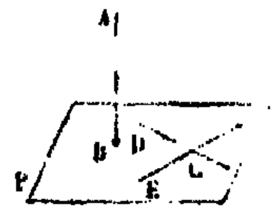
503. *Le lieu des points de l'espace équidistants des extrémités d'une droite est le plan perpendiculaire sur le milieu de cette droite.*

En effet, dans un plan quelconque XYE passant par la droite XY (*fig.* 275), le lieu des points équidistants des extrémités X et Y de cette droite est (50) la perpendiculaire BE élevée dans ce plan sur le milieu B de XY. Or, on vient de voir que le lieu des diverses perpendiculaires élevées sur XY par le point B est le plan mené par ce point perpendiculairement à XY.

THÉORÈME.

504. ***Une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites de ce plan non parallèles entre elles.***

Fig. 276.



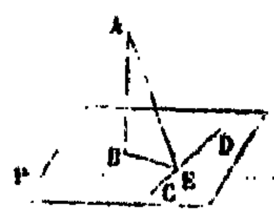
Soient (*fig.* 276) P un plan et AB une droite perpendiculaire à deux droites CD et CE qui sont situées dans le plan P et qui se coupent en un point C; la droite AB est perpendiculaire au plan P.

En effet, le plan conduit par C perpendiculairement à AB contient (502) les deux droites CD et CE, perpendiculaires à AB menées par C; ce plan coïncide donc avec le plan P; par suite, la droite AB est perpendiculaire au plan P.

COROLLAIRE.

505. *Si du pied* B *d'une perpendiculaire* AB *à un plan* P, *on mène la perpendiculaire* BE *sur une droite quelconque* CD *tracée dans ce plan, la droite* AE *qui joint au point* E *un point quelconque de la perpendiculaire* AB *sera perpendiculaire à* CD (*fig.* 277).

Fig. 277.



En effet, la droite CD, étant perpendiculaire à BE par construction et à AB puisque AB est perpendiculaire au plan P, doit être perpendiculaire au plan ABE (504), et par conséquent à la droite AE de ce plan.

Cette proposition est connue sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires.*

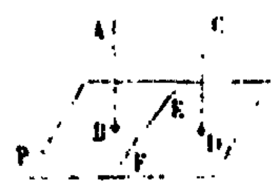
De ce que l'angle BEC était droit, nous avons conclu que l'angle AEC l'était aussi. Inversement, on pourrait prendre pour hypothèse que l'angle AEC est droit, et l'on en conclurait qu'il en est de même de l'angle BEC; car CD étant alors perpendiculaire à AB et à AE, serait perpendiculaire au plan ABE et par suite à BE. Nous laissons au lecteur le soin de formuler cette réciproque.

Nous donnerons plus tard (539), du théorème des trois perpendiculaires, un énoncé plus simple et plus commode dans les applications.

THÉORÈME.

506. *Si une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* P, *toute parallèle* CD *à cette droite est perpendiculaire à ce plan* (*fig.* 278.)

Fig. 278.



En effet, une droite quelconque EF du plan P fait le même angle (495) avec AB et avec sa parallèle CD; or l'angle de AB et de EF est droit, puisque AB perpendiculaire au plan P est perpendiculaire à toute droite EF de ce plan; donc l'angle de CD et de EF est aussi droit, et par suite la droite CD, étant perpendiculaire à une droite quelconque EF du plan P, est perpendiculaire à ce plan.

On énonce encore ce théorème de la manière suivante: *Quand deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre;* ou, plus brièvement: *deux droites parallèles ont leurs plans perpendiculaires communs.*

507. Réciproquement, *deux droites* AB *et* CD, *perpendiculaires à un même plan* P, *sont parallèles* (*fig.* 278).

Car, si l'on imagine par un point quelconque C de CD la parallèle à AB, cette parallèle sera (506) perpendiculaire au plan P; elle coïncidera donc avec CD, puisque d'un point C on ne peut mener qu'une perpendiculaire à un plan P.

§ IV. — DROITE ET PLAN PARALLÈLES.

DÉFINITION.

508. Une droite et un plan sont *parallèles*, lorsqu'ils ne se rencontrent pas, si loin qu'on les prolonge.

THÉORÈME.

509. *Toute droite parallèle à une droite d'un plan est parallèle à ce plan ou située dans ce plan.*

En effet, soient P un plan donné, CD une droite de ce plan et AB une parallèle à CD. Le plan ABCD se confond avec le plan P (*fig.* 279), ou n'a avec ce plan aucun point commun en dehors de la droite CD (*fig.* 280). Dans le premier cas, la

Fig. 279.

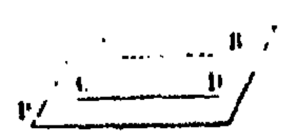


Fig. 280.

droite AB est située dans le plan P; dans le second, elle lui est parallèle.

THÉORÈME.

510. *Si par une droite* AB, *parallèle à un plan* P, *on mène un plan* Q *qui coupe le plan* P, *l'intersection* CD *est parallèle à* AB (*fig.* 280).

En effet, les droites AB, CD, sont dans un même plan; et AB, qui est, par hypothèse, parallèle au plan P, ne saurait rencontrer CD qui est tout entière dans ce plan. Donc les droites AB et CD sont parallèles.

511. Ainsi, *pour que deux droites, l'une située dans un plan, l'autre parallèle à ce plan, soient parallèles entre elles, il suffit qu'elles soient dans un même plan.*

THÉORÈME.

512. *Quand une droite est parallèle à un plan, toute parallèle à cette droite est parallèle à ce plan ou située dans ce plan.*

Fig. 281.

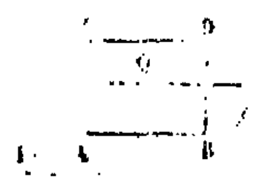


Fig. 282.

En effet, soient P un plan donné, CD une droite parallèle à ce plan, et AB une parallèle à CD. Le plan ABCD ne peut couper le plan P que suivant une parallèle à CD (510). Puisque AB et CD sont parallèles, cette intersection est la droite AB elle-même (*fig.* 281), ou une parallèle EF à AB (*fig.* 282). Donc AB est située dans le plan P ou lui est parallèle (509).

Ce théorème est la généralisation du premier (509).

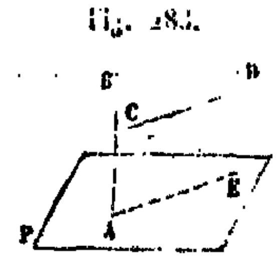
COROLLAIRES.

513. *L'intersection de deux plans parallèles à une même droite est parallèle à cette droite;* car si, par un point commun aux deux plans, on mène la parallèle à la droite considérée, cette parallèle doit (512) appartenir à chacun des deux plans.

En particulier, *l'intersection de deux plans conduits suivant deux droites parallèles est parallèle à ces droites.*

514. *Si une droite AB est perpendiculaire à un plan P, toute perpendiculaire à AB est parallèle au plan P, ou située dans ce plan* (*fig.* 283). En effet, soient CD une perpendiculaire quelconque à AB, et AE la parallèle à CD menée par le pied de AB sur le plan P. La droite AE, étant à angle droit sur AB, appartiendra au plan P (502); et par suite (509), sa parallèle CD sera parallèle à ce plan ou située dans ce plan.

Fig. 283.



Inversement, *toute parallèle* CD *au plan* P *est perpendiculaire à* AB; car la parallèle AE à CD appartient au plan P (512); et par suite (497), l'angle BAE est droit.

THÉORÈME.

515. *Les parallèles* AC *et* BD, *comprises entre une droite* CD *et un plan* P *parallèles, sont égales* (*fig.* 281).

En effet, le plan Q des deux parallèles AC et BD coupe le plan P suivant une droite AB parallèle à CD (510); par suite, le quadrilatère ABDC, ayant ses côtés parallèles deux à deux, est un parallélogramme, et l'on a AC = BD.

COROLLAIRE.

516. Si les deux droites AC et BD étaient perpendiculaires au plan P, et par suite à la droite AB et à sa parallèle CD, elles mesureraient les distances de deux points quelconques C et D de la droite CD au plan P. Donc *une droite et un plan parallèles sont partout équidistants.*

§ V. — PLANS PARALLÈLES.

DÉFINITION.

517. Deux plans sont *parallèles* lorsqu'ils ne se rencontrent pas, si loin qu'on les prolonge.

THÉORÈME.

518. *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*

Car, s'ils se rencontraient, on pourrait d'un point quelconque de leur intersection abaisser deux plans perpendiculaires sur une même droite, ce qui est absurde (501).

COROLLAIRE.

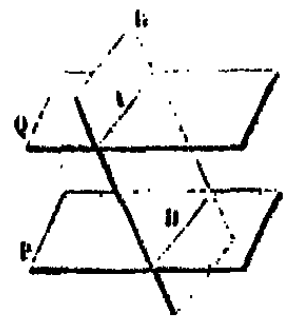
519. *Par un point* A, *extérieur à un plan donné* Q, *on peut toujours mener un plan parallèle à ce plan* Q (*fig.* 285).

Abaissons du point A la perpendiculaire AB sur le plan Q, puis élevons au même point A le plan P perpendiculaire sur AB; les plans P et Q, étant tous deux perpendiculaires sur AB, sont parallèles.

THÉORÈME.

520. *Les intersections* A *et* B *de deux plans parallèles* P *et* Q *par un troisième plan* R *sont parallèles* (*fig.* 284).

Fig. 284.



En effet, les droites A et B sont dans un même plan R, et elles ne se rencontrent pas puisque les plans P et Q ne peuvent avoir aucun point commun; elles sont donc parallèles.

521. Ainsi, *pour que deux droites, situées dans deux plans parallèles, soient parallèles entre elles, il suffit qu'elles soient dans un même plan.*

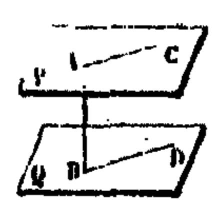
SCOLIE.

522. Quand deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est évidemment parallèle à l'autre.

THÉORÈME.

523. *Lorsque deux plans* P *et* Q *sont parallèles, toute droite* AB *perpendiculaire à l'un* P *est perpendiculaire à l'autre* Q (*fig.* 285); ou, plus brièvement, *deux plans parallèles ont leurs perpendiculaires communes.*

Fig. 285.



En effet, toutes les droites du plan Q, étant parallèles au plan P (522), sont perpendiculaires à AB (514).

COROLLAIRES.

524. *Par un point A, on ne peut mener qu'un plan parallèle à un plan donné* Q. Il résulte en effet du théorème précédent que, si AB est la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan Q, tout plan mené par A parallèlement au plan Q doit être perpendiculaire à AB. Or (501) on ne peut mener par le point A qu'un seul plan perpendiculaire à AB.

525. *Deux plans parallèles à un troisième sont parallèles entre eux*. Car, s'ils se rencontraient, on pourrait par un point quelconque de leur intersection mener deux plans parallèles à un même plan, ce qui est absurde (524).

THÉORÈME.

526. *Lorsque deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre ou située dans l'autre.*

Soient P et Q deux plans parallèles et D une droite parallèle à P. Un plan quelconque mené par D coupera le plan P suivant une droite D' qui sera à la fois parallèle au plan Q (522) et à la droite D (510). La droite D, étant d'après cela parallèle à une droite D' qui est parallèle au plan Q, sera (512) parallèle à ce plan ou située dans ce plan.

COROLLAIRES.

527. *Si par un point A extérieur à un plan Q on mène des droites parallèles à ce plan, le lieu de ces parallèles est le plan P mené par A parallèlement au plan Q.*

Car l'une quelconque AC de ces parallèles doit (526) n'avoir aucun point commun avec le plan P ou y être contenue tout entière : c'est ce dernier cas qui a lieu ici, puisque la droite AC a déjà un point commun A avec le plan P.

528. Dans les applications, on utilise cette propriété *pour mener par un point un plan parallèle à un plan donné ; on mène par ce point deux parallèles au plan donné*, et le plan des deux droites ainsi obtenues est le plan demandé.

529. On voit encore par là que *deux angles* BAC, B'A'C'

(*fig.* 269), *qui ont les côtés parallèles ont leurs plans parallèles;* car chacune des droites AB et AC est parallèle (509) au plan B'A'C'.

THÉORÈME.

530. ***Les parallèles* AB *et* CD *comprises entre deux plans parallèles* P *et* Q *sont égales* (*fig.* 286).**

En effet, le plan des deux parallèles AB et CD coupant les plans P et Q (520) suivant des droites parallèles AC et BD, le quadrilatère ABCD a ses côtés parallèles deux à deux; c'est donc un parallélogramme, et l'on a AB = CD.

COROLLAIRE.

531. Si les deux droites AB et CD étaient perpendiculaires au plan P et par suite (523) au plan Q, elles mesureraient les distances de deux points quelconques B et D du plan P au plan Q. Donc *deux plans parallèles sont partout équidistants.*

Fig. 286.

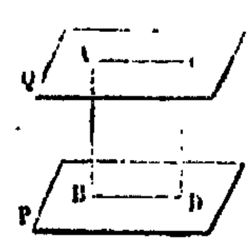
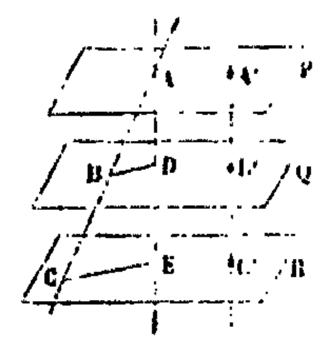


Fig. 287.



THÉORÈME.

532. ***Deux droites quelconques sont coupées par trois plans parallèles en parties proportionnelles.***

Soient AC et A'C' deux droites situées d'une manière quelconque dans l'espace (*fig.* 287); trois plans parallèles P, Q, R, coupent la première droite aux points A, B, C, et la seconde aux points A', B', C'; il s'agit de démontrer la relation

$$(1) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Menons par le point A la parallèle à A'C' et désignons par D et E les points où cette parallèle rencontre les plans Q et R.

Les droites BD et CE étant parallèles (520), on a (195)

$$(2)\qquad \frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}.$$

Mais les segments A'B', B'C', A'C', sont respectivement égaux aux segments AD, DE, AE, comme parallèles comprises entre plans parallèles. La relation (1) est donc démontrée.

COROLLAIRE.

533. Deux droites concourantes AC, AE, sont divisées en parties proportionnelles par le point A et les plans parallèles Q et R. Il en sera de même évidemment d'une série de sécantes partant du point A.

§ VI. — ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN. — PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES.

DÉFINITIONS.

534. On appelle projection d'un point A sur un plan P le pied *a* de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan (*fig.* 288).

La projection d'une ligne quelconque ABC... sur un plan P est le lieu des projections *a*, *b*, *c*,... des divers points de cette ligne.

Fig. 288.

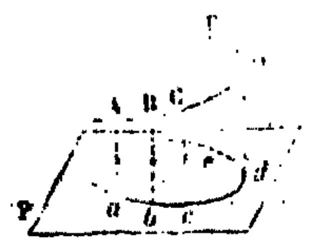
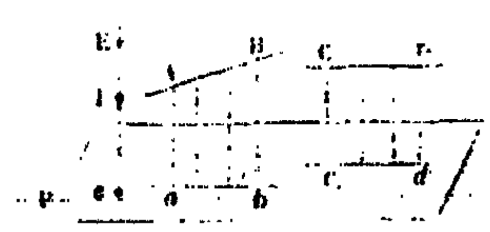


Fig. 289.



THÉORÈME.

535. *La projection d'une ligne droite* AB *sur un plan* P *est une ligne droite* (*fig.* 289).

Car toutes les perpendiculaires A*a*, B*b*,... abaissées sur le plan P par les divers points de la droite AB sont parallèles (507);

leur lieu est donc un plan (486), et, par suite, le lieu de leurs pieds est la droite ab suivant laquelle ce plan coupe le plan P.

SCOLIES.

536. Lorsque la droite est, comme EF, perpendiculaire au plan P, sa projection sur ce plan se réduit évidemment à un point e.

537. Lorsque la droite est, comme CD, parallèle au plan P, elle est parallèle à sa projection cd sur ce plan (510).

COROLLAIRES.

538. *Deux droites parallèles* AB *et* CD *ont leurs projections* ab *et* cd, *sur un même plan* P, *parallèles* (*fig.* 290).

Car la *projetante* Aa d'un point quelconque de AB et la projetante Cc d'un point quelconque de CD étant parallèles (507), les angles BAa, DCc, ont leurs plans parallèles (529); et, par suite, les droites ab et cd, suivant lesquelles le plan P coupe ces deux plans, sont parallèles.

Fig. 290.

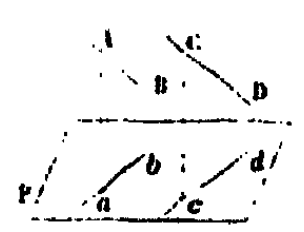
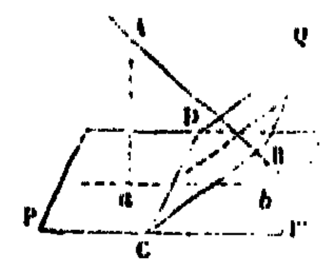


Fig. 291.



539. Nous pouvons maintenant donner du *théorème des trois perpendiculaires* et de sa réciproque un énoncé plus court et souvent très-commode dans les applications :

La projection d'un angle droit, sur un plan passant par l'un de ses côtés, est un angle droit. Inversement, *un angle est droit s'il se projette suivant un angle droit sur un plan renfermant l'un de ses côtés.*

En ayant égard à la définition du n° 496, et en remarquant que *les projections d'une même droite sur deux plans parallèles sont parallèles,* on obtient cette proposition plus générale :

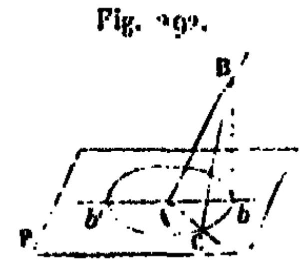
Lorsque deux droites de l'espace sont perpendiculaires l'une à l'autre, leurs projections sur un plan parallèle à l'une d'elles sont aussi perpendiculaires l'une à l'autre.

Considérons, par exemple, une droite quelconque AB et un plan Q perpendiculaire à cette droite; soient *ab* la projection de AB sur un plan quelconque P (*fig.* 291), et CD l'intersection des plans P et Q, ou, comme on dit, la *trace* du plan Q sur le plan P. Les deux droites AB et CD étant perpendiculaires l'une à l'autre (497), il doit en être de même de leurs projections *ab* et CD; de là ce théorème, fondamental en Géométrie descriptive : *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan* Q, *sa projection sur un plan quelconque* P *est perpendiculaire à la trace du plan* Q *sur le plan* P.

THÉORÈME.

540. *Lorsqu'une droite* AB *est oblique à un plan* P, *l'angle aigu* BA*b* *que cette droite fait avec sa projection sur ce plan est moindre que l'angle* BAC *qu'elle forme avec toute autre droite* BC *passant par son pied dans le plan* (*fig.* 292).

Fig. 292.



En effet, *b* étant la projection d'un point quelconque B de la droite AB, prenons AC = A*b*, et menons BC. Les deux triangles BA*b*, BAC ont deux côtés égaux; mais le troisième côté B*b* du premier étant moindre que le troisième côté BC du second, puisque la perpendiculaire est plus courte que l'oblique, il faut (39) que l'angle BA*b* soit moindre que l'angle BAC.

Scolie.

541. En faisant parcourir au point C le cercle décrit dans le plan P, du point A comme centre avec A*b* pour rayon, on voit que l'oblique BC croît d'une manière continue depuis le point *b* jusqu'au point *b'*, puis décroît en reprenant successivement les mêmes valeurs depuis *b'* jusqu'en *b*. Par suite, l'angle BAC, minimum lorsque le point C est en *b*, croît jusqu'à ce que le point C soit en *b'* : il est alors maximum; puis il décroît en reprenant successivement les mêmes valeurs depuis *b'* jusqu'en *b*.

542. On appelle *angle d'une droite et d'un plan* l'angle aigu que cette droite forme avec sa projection sur ce plan.

On voit aisément que *l'angle d'une droite* D *et d'un plan* P *est égal à l'angle d'une droite quelconque* D' *parallèle à* D *et d'un plan quelconque* P' *parallèle à* P.

THÉORÈME.

543. *Étant données deux droites* AB *et* CD *non situées dans le même plan : 1° il existe une droite, et une seule, qui les rencontre l'une et l'autre à angle droit; 2° cette perpendiculaire commune est la plus courte distance des deux droites* (*fig.* 293).

En effet :

1° Par un point quelconque A de AB, menons la parallèle AE à CD; le plan BAE, que nous désignerons par P, sera (509) parallèle à CD, et par suite (538) nous aurons la projection de CD sur ce plan P en menant une parallèle *dc* à la droite DC par la projection *d* d'un point quelconque D de cette droite. Cela posé, pour qu'une droite puisse rencontrer à la fois AB et CD à angle droit, il faut d'abord qu'elle soit perpendiculaire au plan P en un point de AB, puis qu'elle ait son pied sur *cd*, lieu des pieds des perpendiculaires au plan P menées par les divers points de CD. Or, la perpendiculaire au plan P élevée par le point *c* commun à AB et *cd* remplit seule ces conditions; elle rencontre d'ailleurs CD puisqu'elle est parallèle à la projetante D*d*. Il existe donc une droite C*c*, et une seule, qui rencontre à angle droit les deux droites données AB et CD.

Fig. 293.

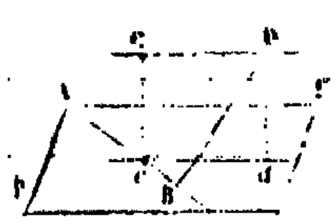
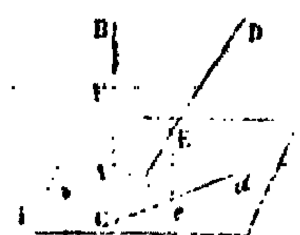


Fig. 294.



2° Cette perpendiculaire commune C*c* est moindre que toute autre droite BD joignant un point de AB à un point de CD. Car, D*d* étant la projetante du point D, on a évidemment C*c* = D*d*, et D*d* < DB.

SCOLIE.

544. La démonstration qui précède permet d'obtenir la plus courte distance des deux droites AB et CD. Voici un second procédé très-usuel (*fig.* 294).

On projette l'une des droites CD sur un plan P perpendiculaire à l'autre droite AB. Du pied A de AB sur le plan P, on abaisse la perpendiculaire A*e* sur la projection *cd* de CD; on mène *e*E parallèle à AB jusqu'à sa rencontre E avec CD, et enfin EF parallèle à A*e*. Le lecteur démontrera sans peine que cette droite EF est en grandeur et en position la plus courte distance des deux droites données.

545. Souvent, dans la pratique, on n'a besoin que de la longueur de la plus courte distance; il suffit alors de mener par chacune des deux droites un plan parallèle à l'autre et de prendre la distance de ces deux plans parallèles.

§ VII. — ANGLES DIÈDRES.

DÉFINITIONS.

546. Lorsque deux plans P et Q se rencontrent (*fig.* 295) et sont terminés à leur intersection commune BE, on dit qu'ils forment un *angle dièdre*. Les deux plans P et Q sont les *faces* et la droite BE est l'*arête* de cet angle.

Pour désigner un angle dièdre isolé, il suffit d'indiquer son arête; ainsi l'on dit (*fig.* 295) l'angle dièdre BE. Mais lorsque plusieurs angles dièdres ont la même arête, pour désigner celui d'entre eux que l'on considère, il faut employer quatre lettres, savoir : une lettre pour chaque face et deux pour l'arête; on place d'ailleurs les deux lettres relatives à l'arête entre les deux

Fig. 295.

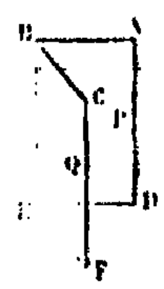
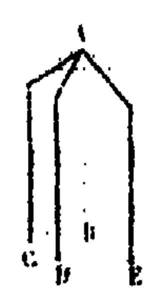


Fig. 296.



autres. Ainsi, dans la *fig.* 296, on distingue les trois dièdres CABD, DABE, CABE.

Deux angles, tels que CABD, DABE (*fig.* 296), qui ont la même arête AB, une face commune ABD, et les deux autres faces situées de part et d'autre de la face commune, sont dits *adjacents*.

347. Deux angles dièdres sont égaux lorsqu'on peut les faire coïncider. Pour ajouter deux angles dièdres, on transporte le second à la suite du premier de manière à former deux angles adjacents, tels que CABD, DABE (*fig.* 296); l'angle CABE des deux faces non communes ABC, ABE, est la somme des deux angles dièdres proposés.

348. On acquiert une idée nette de la grandeur de l'angle dièdre, en supposant que l'une des faces P d'abord appliquée sur l'autre face Q (*fig.* 297) tourne autour de la droite AB; dans cette rotation, le plan mobile P fait avec le plan fixe Q un angle dièdre qui croît d'une manière continue.

Fig. 297.

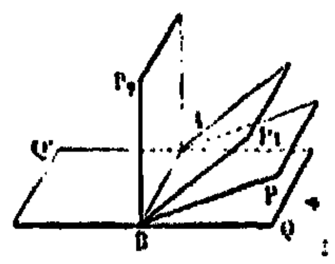
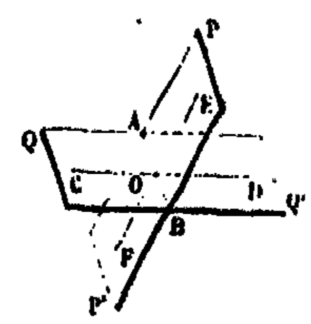


Fig. 298.



Un plan P_1 est dit *perpendiculaire* sur un plan QQ' (*fig.* 297), lorsque les deux angles adjacents P_1ABQ, P_1ABQ', qu'il forme avec celui-ci sont égaux. Un plan P, qui forme avec QQ' des angles adjacents PABQ, PABQ', inégaux, est dit *oblique* sur le plan QQ'.

On nomme *angle dièdre droit* tout dièdre P.ABQ dont une face est perpendiculaire sur l'autre.

349. Deux angles dièdres sont dits *opposés par l'arête* lorsque les faces de l'un sont le prolongement des faces de l'autre. Deux plans indéfinis PP', QQ' (*fig.* 298), forment en se coupant quatre angles dièdres qui sont deux à deux opposés par l'arête AB.

On nomme *plan bissecteur* d'un angle dièdre le plan qui, mené par l'arête, divise cet angle dièdre en deux autres égaux entre eux.

550. On appelle *angle plan correspondant à un angle dièdre* l'angle rectiligne que l'on forme en élevant, par un même point de l'arête, une perpendiculaire à cette arête dans chacune des faces. Ainsi, B étant un point de l'arête BE de l'angle dièdre PBEQ (*fig.* 295), si l'on élève dans le plan P la perpendiculaire BA sur l'arête BE, et dans le plan Q la perpendiculaire BC sur l'arête BE, l'angle ABC sera l'*angle plan* du dièdre considéré.

Pour que cette définition ne soit pas contradictoire, il faut que la grandeur de l'angle plan correspondant à un angle dièdre soit la même en quelque point de l'arête qu'on forme cet angle plan. Or, soient les angles plans ABC, DEF, formés en deux points A et E de l'arête de l'angle dièdre PBEQ (*fig.* 295); les côtés BC et EF sont parallèles et de même sens, comme étant dans un même plan Q perpendiculaires à la même droite BE; il en est de même de BA et de ED; les angles ABC, DEF, sont donc égaux (494, 1°).

Il est à remarquer que le plan ABC est perpendiculaire à l'arête BE (504); réciproquement, tout plan perpendiculaire à l'arête coupe les faces suivant des perpendiculaires à cette arête, et par suite l'angle dièdre suivant son angle plan.

THÉORÈME.

551. *Par une droite AB, située dans un plan QQ', on peut toujours élever un plan P, perpendiculaire sur ce plan, et on ne peut en élever qu'un* (*fig.* 297).

COROLLAIRE.

552. *Tous les angles dièdres droits sont égaux.*

La démonstration de ce théorème et de son corollaire est tout à fait semblable à celle qui a été donnée aux nos 14 et 15 de la Géométrie plane.

Un angle dièdre est dit *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est inférieur ou supérieur à l'angle dièdre droit. Deux angles dièdres sont *complémentaires* lorsque leur somme est égale à un angle dièdre droit.

THÉORÈME.

553. *Tout plan P qui en rencontre un autre QQ′ fait avec celui-ci deux angles dièdres adjacents PABQ, PABQ′, dont la somme est égale à deux dièdres droits* (*fig.* 297). Réciproquement, *si deux angles dièdres adjacents PABQ, PABQ′, sont supplémentaires, c'est-à-dire ont une somme égale à deux angles dièdres droits, leurs faces non communes Q et Q′ sont dans le prolongement l'une de l'autre.* (*Voir* les nos 17, 18 et 19.)

COROLLAIRES.

554. *La somme de tous les angles dièdres consécutifs que l'on peut former autour d'une droite, du même côté d'un plan passant par cette droite, est égale à deux dièdres droits; et la somme de tous les angles dièdres consécutifs que l'on peut former autour d'une même droite est égale à quatre dièdres droits.* (*Voir* les nos 20 et 21.)

THÉORÈME.

555. *Lorsque deux plans PP′, QQ′, se coupent, les angles dièdres opposés par l'arête AB sont égaux* (*fig.* 298). (*Voir* le no 22.)

COROLLAIRES.

556. *Lorsque l'un des quatre angles dièdres formés par la rencontre de deux plans est droit, les trois autres le sont aussi; etc.* (*Voir* le no 23.)

THÉORÈME.

557. 1° *Si deux angles dièdres AIOB, A′I′O′B′, sont égaux, leurs angles plans AOB, A′O′B′, sont égaux.*

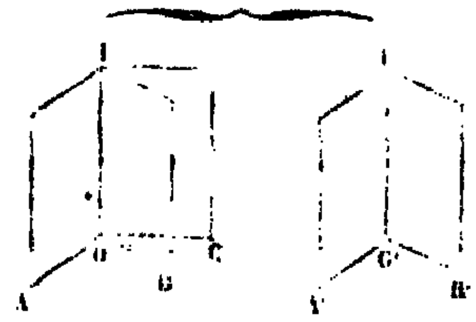
2° *Si un angle dièdre AIOC est la somme de deux autres A′I′O′B′, BIOC, son angle plan AOC est la somme des angles plans A′O′B′, BOC, qui correspondent aux deux autres* (*fig.* 299).

En effet :

1° Transportons l'angle dièdre A′I′O′B′, de manière que l'angle droit I′O′A′ s'applique sur l'angle droit IOA; puisque les dièdres AIOB, A′I′O′B′, sont égaux, le plan I′O′B′ tombera sur le plan IOB, et O′B′ coïncidera avec la perpendiculaire à

IO élevée dans le plan IOB par le point O, c'est-à-dire avec OB; donc les angles plans AOB, A'O'B', sont égaux.

Fig. 299.



2° Puisque l'angle plan A'O'B' est égal à AOB, pour prouver que l'angle plan AOC est égal à la somme de A'O'B' et de BOC, il suffit de faire voir que les trois droites OC, OB, OA, sont dans un même plan; or cela résulte du n° 502.

COROLLAIRES.

558. *Le rapport de deux angles dièdres est égal au rapport de leurs angles plans* (135). Par suite, *tout angle dièdre a la même mesure que l'angle plan correspondant, pourvu que l'on prenne pour unité d'angle dièdre le dièdre auquel correspond l'angle plan choisi pour unité d'angle plan;* ou, d'une manière incorrecte, mais plus rapide, *tout angle dièdre a pour mesure son angle plan.* (*Voir*, pour plus de détails, les n^{os} 138 et 139.)

SCOLIES.

559. *L'angle dièdre droit a pour angle plan un angle droit*, et inversement, *un angle dièdre est droit si son angle plan est droit*. En effet, soient PABQ, PABQ' (*fig.* 298), deux angles dièdres adjacents formés par la rencontre du plan P et du plan QQ'; par un point O de l'arête AB, menons un plan perpendiculaire à cette arête; ce plan déterminera, par ses intersections avec les plans P et QQ', deux angles rectilignes adjacents EOC, EOD, qui seront les angles plans des deux dièdres proposés (550). Or (558), quand les deux dièdres sont égaux, les deux angles plans sont égaux, et réciproquement.

560. La proportionnalité des angles dièdres et des angles plans correspondants permet de conclure un grand nombre de

propriétés des angles dièdres des propriétés analogues des angles rectilignes démontrées en Géométrie plane. Nous citerons par exemple les propositions suivantes, qui sont souvent utiles :

Le plan bissecteur d'un angle dièdre est le lieu des points qui, situés dans l'intérieur de cet angle, sont équidistants de ses faces; etc. (*Voir* les nos 55, 56, 57.)

Deux angles dièdres qui ont leurs faces parallèles deux à deux sont égaux ou supplémentaires. (*Voir* le no 77.)

THÉORÈME.

561. *Lorsque, par un point* O *pris sur l'arête d'un angle dièdre* OI, *on élève sur la face* IOA *une perpendiculaire* OA' *du même côté du plan* IOA *que la face* IOB, *et sur la face* IOB *une perpendiculaire* OB' *du même côté du plan* IOB *que la face* IOA, *l'angle* A'OB' *est le supplément de l'angle plan* AOB *qui mesure le dièdre* OI (*fig.* 300 *et* 301).

Les quatre droites OA, OB, OA', OB', sont dans le plan perpendiculaire à OI menés par O (502); d'ailleurs, OA' perpendiculaire au plan IOA doit être perpendiculaire à OA, et de même OB' doit être perpendiculaire sur OB; les angles AOB, A'OB', sont donc deux angles situés dans un même plan et ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun; pour prouver qu'ils sont supplémentaires, il suffit (78) de prouver qu'ils sont toujours d'espèce différente, c'est-à-dire l'un aigu, l'autre obtus. Or cela résulte de la direction que l'énoncé impose aux perpendiculaires OA' et OB'. En effet, si l'angle AOB est aigu (*fig.* 300), l'angle A'OB' renferme l'angle droit AOA' et par

Fig. 300.

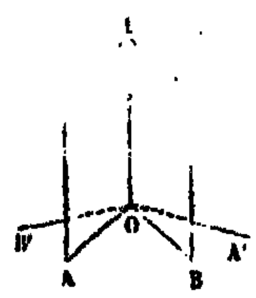


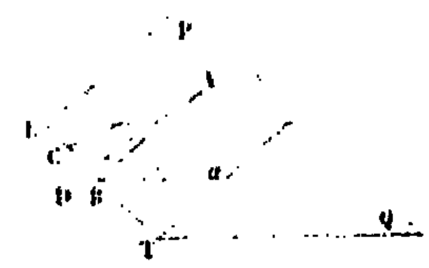
Fig. 301.

suite est obtus; si l'angle AOB est obtus (*fig.* 301), l'angle A'OB' est contenu dans l'angle droit AOA' et par suite est aigu.

THÉORÈME.

562. *Parmi toutes les droites que l'on peut mener par un point* A *dans un plan* P, *celle qui fait le plus grand angle avec un autre plan donné* Q *est la perpendiculaire* AB *abaissée du point* A *sur l'interjection* LT *des deux plans* P *et* Q (*fig.* 302).

Fig. 302.



Soient AC une droite quelconque menée par le point A dans le plan P, et *a* la projection du point A sur le plan Q. *a*B et *a*C seront les projections de AB et de AC, et il s'agit de démontrer (542) que l'angle AB*a* est plus grand que l'angle AC*a*. Or, la droite *a*B étant perpendiculaire sur LT en vertu du théorème des trois perpendiculaires, la droite *a*C est une oblique, et l'on a $a\mathrm{B} < a\mathrm{C}$. Si donc on prend sur la droite *a*B, à partir du point *a*, une longueur *a*D égale à *a*C, le point D sera situé au delà de B, et l'angle AB*a* extérieur au triangle ABD surpassera (80) l'angle intérieur AD*a*; mais, les triangles A*a*C et A*a*D étant égaux comme ayant un angle droit égal compris entre deux côtés égaux, l'angle AD*a* est égal à l'angle AC*a*: donc enfin l'angle AB*a* est plus grand que l'angle AC*a*.

SCOLIE.

563. Lorsque le plan Q est horizontal, la droite AB prend le nom de *ligne de plus grande pente* du plan P. L'angle de cette ligne avec le plan Q est l'angle plan du diédre PLTQ. Par chaque point d'un plan passe une ligne de plus grande pente de ce plan, et une seule.

§ VIII. — PLANS PERPENDICULAIRES.

THÉORÈME.

564. *Lorsque deux plans* P *et* Q *sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute droite* AB, *menée dans le premier plan* P *per-*

pendiculairement à l'intersection commune CD, est perpendiculaire à l'autre plan Q (fig. 303).

En effet, les deux plans P et Q étant perpendiculaires l'un à l'autre, l'angle plan correspondant à l'angle dièdre PCDQ doit être droit; or on forme cet angle plan ABE en élevant dans le plan Q et par le point B la perpendiculaire BE à CD; donc la droite AB est perpendiculaire à BE, et comme elle l'est aussi par hypothèse à CD, elle est perpendiculaire au plan Q.

Fig. 303.

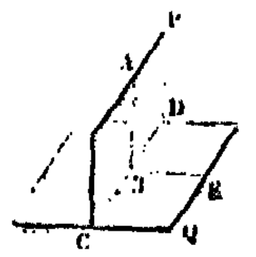
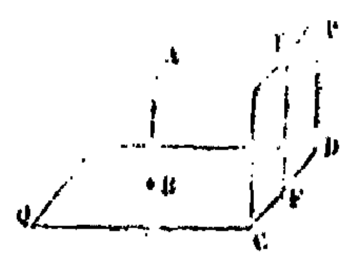


Fig. 304.



THÉORÈME.

565. ***Si une droite AB est perpendiculaire à un plan Q, tout plan P passant par cette droite ou parallèle à cette droite est perpendiculaire au plan Q.***

En effet :

1° Si le plan P passe par AB (*fig.* 303), menons dans le plan Q et par le point B la perpendiculaire BE à l'intersection CD des deux plans P et Q. L'angle ABE sera droit, puisque la droite AB est par hypothèse perpendiculaire au plan Q; d'ailleurs cet angle ABE est l'angle plan du dièdre PCDQ; donc ce dièdre est droit, et le plan P est perpendiculaire au plan Q.

2° Si le plan P est parallèle à AB (*fig.* 304), menons par un point quelconque E de ce plan la parallèle EF à AB; cette droite EF sera à la fois perpendiculaire au plan Q (506) et située dans le plan P (512). Donc le plan P, passant par une droite EF perpendiculaire au plan Q, sera perpendiculaire à ce plan (1°).

566. Réciproquement, *si deux plans Q et P sont perpendiculaires entre eux, toute droite AB perpendiculaire au premier plan Q est située dans l'autre plan P ou lui est parallèle.*

En effet :

1° Si la droite AB est menée perpendiculairement au plan Q (*fig.* 303) par un point A du plan P, cette droite ne saurait différer de la perpendiculaire menée par le même point A dans le plan P, perpendiculairement à l'intersection CD; car cette dernière droite est (564) perpendiculaire au plan Q, et c'est la seule perpendiculaire qu'on puisse mener par A à ce plan; donc enfin la droite AB appartient au plan P.

2° Si la droite AB est menée par un point extérieur au plan P, traçons par un point quelconque E du plan P (*fig.* 304) la parallèle EF à AB; cette droite EF sera (506) perpendiculaire au plan Q, et par suite (1°) située dans le plan P. Donc la droite AB, menée par un point extérieur au plan P parallèlement à une droite EF de ce plan, est (512) parallèle à ce plan.

COROLLAIRE.

567. *Par une droite* AB *oblique à un plan* P (*fig.* 305), *on peut abaisser un plan perpendiculaire sur ce plan* P, *et on ne peut en abaisser qu'un.*

En effet, le plan BA*a*, déterminé par la droite AB et par la perpendiculaire A*a* au plan P abaissée d'un point quelconque de AB, est perpendiculaire (565) au plan P. C'est le seul, car tout plan conduit par AB perpendiculairement au plan P doit (566, 1°) contenir la perpendiculaire A*a*.

Fig. 305.

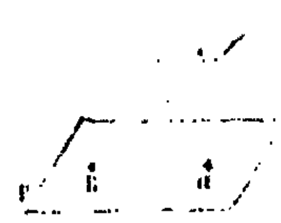
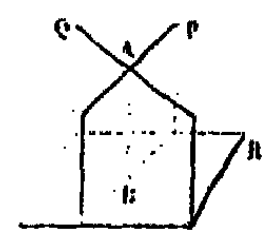


Fig. 306.



THÉORÈME.

568. *Si deux plans* P *et* Q *sont perpendiculaires à un troisième* R, *leur intersection* AB *est perpendiculaire à ce troisième plan* (*fig.* 306).

Car si, par un point quelconque de l'intersection AB, on mène la perpendiculaire au plan R, cette perpendiculaire doit se trouver à la fois dans le plan P et dans le plan Q (566, 1°); elle ne diffère donc pas de AB.

COROLLAIRES.

369. Un plan perpendiculaire à deux plans qui se coupent est perpendiculaire à leur intersection.

370. Si les plans P et Q de la *fig.* 306 forment un angle dièdre droit, les trois plans P, Q, R, seront perpendiculaires entre eux; l'intersection de deux quelconques de ces plans sera perpendiculaire au troisième (368), et les trois intersections seront perpendiculaires entre elles.

§ IX. — ANGLES POLYÈDRES.

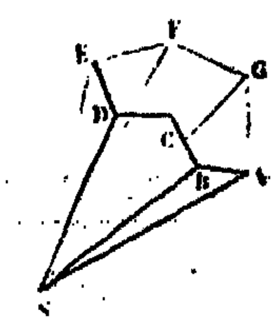
DÉFINITIONS.

371. Lorsque plusieurs plans ASB, BSC, CSD, ... (*fig.* 307) se coupent successivement suivant des droites SB, SC, SD, ... qui concourent en un même point S, on dit qu'ils forment *un angle polyèdre*. Le point S est le *sommet*, les droites SA, SB, SC, ... sont les *arêtes*, et les angles ASB, BSC, CSD, ... sont les *faces* de l'angle polyèdre.

On désigne un angle polyèdre par la lettre du sommet suivie des lettres relatives aux diverses arêtes. Ainsi, pour indiquer l'angle polyèdre de la *fig.* 307, on dira l'angle SABCDE, ou plus simplement l'angle S, car quand un angle polyèdre est isolé, la lettre du sommet suffit.

Fig. 307.

Fig. 308.

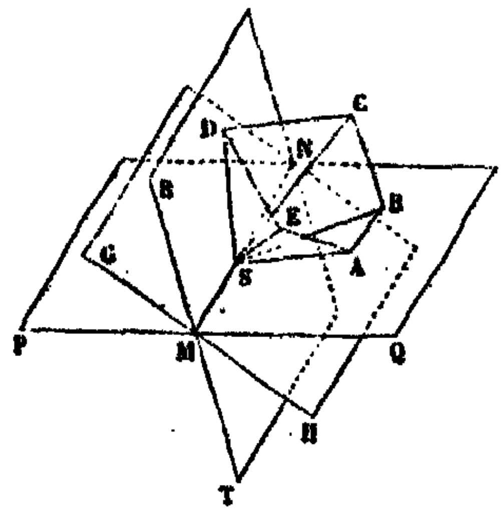


I. Il faut au moins trois plans pour former un angle polyèdre. L'angle formé par trois plans prend le nom d'*angle trièdre*. Dans un angle trièdre SABC (*fig.* 311), on distingue six éléments, savoir : les trois faces ASB, BSC, CSA, et les trois dièdres SA, SB, SC.

572. On dit qu'un angle polyèdre est *convexe*, lorsqu'il est situé tout entier d'un même côté par rapport au plan indéfini de chacune de ses faces (*fig.* 307); il est *concave* dans le cas contraire (*fig.* 308). Tout angle trièdre est convexe.

Considérons un angle polyèdre convexe SABCDE (*fig.* 309);

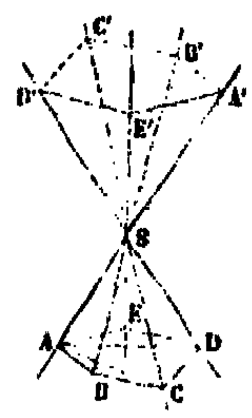
Fig. 309.



ses arêtes seront, d'après la définition de la convexité, situées toutes d'un même côté du plan PQ d'une face quelconque SAB; dans la *fig.* 309 nous les avons placées, pour fixer les idées, au-dessus de ce plan. Par le point S, dans le plan PQ, menons une droite MN située en dehors de l'angle ASB, et concevons une série de plans menés par la droite MN et contenant successivement chacune des arêtes SC, SD, SE. Si DSM ou RMN est celui de tous ces plans qui fait le plus petit angle avec la portion PMN du plan PQ, l'angle polyèdre proposé SABCDE sera situé tout entier dans l'angle dièdre RMNQ formé par la partie antérieure Q et la partie supérieure R des deux plans PQ, RT. Donc, tout plan GH mené par MN et situé dans l'angle dièdre PMNR et dans son opposé par l'arête QMNT, sera un plan mené par le sommet S et laissant toutes les arêtes d'un même côté. Par suite, tout plan parallèle à GH et situé, comme l'angle polyèdre SABCDE, à droite de GH, coupera toutes les arêtes de cet angle sans passer par le sommet. La section sera donc un polygone ABCDE ayant autant de côtés que l'angle polyèdre a de faces, et ce polygone sera convexe; car l'angle polyèdre étant tout entier d'un même côté, par rapport au plan de chacune de ses faces, le polygone se trouvera, par là même, situé tout entier d'un même côté par rapport à chacune des droites indéfinies qui unissent deux sommets consécutifs quelconques.

573. Si l'on prolonge au delà du sommet S toutes les arêtes d'un angle polyèdre SABCDE (*fig.* 310), on obtient un autre angle polyèdre SA'B'C'D'E' qui est dit le symétrique du premier.

Fig. 310.



Deux angles polyèdres symétriques SABCDE, SA'B'C'D'E', ont tous leurs éléments respectivement égaux : les faces ASB et A'SB', BSC et B'SC',... sont égales deux à deux comme angles plans opposés par le sommet, et les angles dièdres SA et SA', SB et SB',..., sont égaux comme opposés par l'arête. Mais la disposition des parties égales n'est pas la même dans les deux angles polyèdres. En effet, un observateur couché sur l'arête SA, ayant la tête en S, les pieds en A, et regardant l'intérieur de l'angle SABCDE, verrait les arêtes se présenter de droite à gauche dans l'ordre SB, SC, SD, SE; tandis qu'un observateur placé de la même manière dans l'autre angle SA'B'C'D'E', c'est-à-dire couché sur SA', ayant la tête en S, les pieds en A' et regardant l'intérieur de l'angle, verrait les arêtes se succéder de droite à gauche dans l'ordre inverse SE', SD', SC', SB'.

A cause de cette différence de disposition, *deux angles polyèdres symétriques, bien qu'égaux dans toutes leurs parties, ne sont pas superposables.*

En effet, considérons, par exemple, deux trièdres symétriques SABC et SA'B'C' (*fig.* 311), et supposons, pour fixer les idées, que l'arête SC soit en avant du plan ASB, et par suite que son prolongement SC′ soit en arrière du même plan. Il y a deux manières différentes d'essayer la superposition des deux trièdres (*fig.* 312) :

Fig. 311.

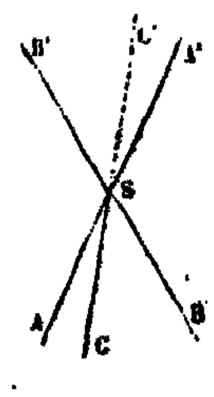
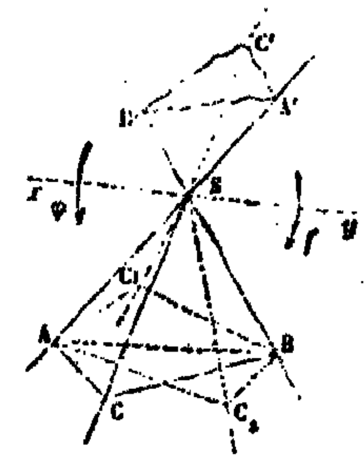


Fig. 312.



1° Concevons la perpendiculaire élevée par le point S sur le plan ASB, et faisons tourner le trièdre SA′B′C′ de 180 degrés autour de cette droite dans le sens de la flèche f; l'arête SA′, qui dans ce mouvement ne sort pas du plan ASB (502), viendra sur SA; de même SB′ s'appliquera sur SB; mais l'arête SC′ restera toujours en arrière du plan ASB; par suite, dans sa nouvelle position SABC₁, le trièdre SA′B′C′ ne coïncidera pas avec SABC.

2° Menons la bissectrice xSy de l'angle BSA′, et, autour de cette droite, qui est située dans le plan ASB, faisons tourner le trièdre SA′B′C′ de 180 degrés dans le sens de la flèche φ. L'arête SA′ s'appliquera sur SB, l'arête SB′ sur SA, et par suite la face A′SB′ coïncidera avec BSA; de plus, l'arête SC′ viendra cette fois en avant du plan ASB. Mais la nouvelle position SC_1 de cette arête différera en général de SC; car les dièdres suivant SA et SB étant en général inégaux, il en sera de même des dièdres SB et SA′, et par suite les plans CSB et C_1SB, étant inégalement inclinés sur le plan ASB, ne coïncideront pas.

On voit cependant que la coïncidence aurait lieu si le trièdre SABC avait les deux angles dièdres SA et SB égaux entre eux. Car, dans cette hypothèse, les plans C_1SB et CSB seraient également inclinés sur le plan ASB; ils tomberaient donc l'un sur l'autre; il en serait de même des plans C_1SA et CSA, et par suite les arêtes SC et SC_1 se confondraient. Observons d'ailleurs que la face C'SA', qui est égale à ASC, s'applique alors sur CSB, de sorte que l'égalité des deux angles dièdres SA et SB entraîne celle des faces CSB et CSA. Donc, en résumé, *pour qu'un trièdre soit superposable à son symétrique, il faut et il suffit que ce trièdre ait deux angles dièdres égaux; et dans un tel trièdre, les faces opposées aux dièdres égaux sont égales.*

THÉORÈME.

574. *Dans tout angle polyèdre, une face quelconque est moindre que la somme de toutes les autres.*

Il n'y a lieu à démontrer cette proposition que lorsque la face considérée est plus grande que chacune des autres.

Cela posé, considérons d'abord un angle trièdre SABC (*fig.* 313). Dans la face ASB que nous supposons plus grande que chacune des deux autres, formons un angle ASD égal à ASC, et prenons, à partir de S, sur les droites SD et SC, des longueurs SC et SD égales entre elles. Par le point D, menons une droite ADB qui rencontre les arêtes SA et SB en A et B;

Fig. 313.

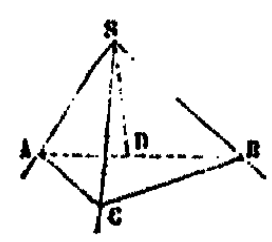
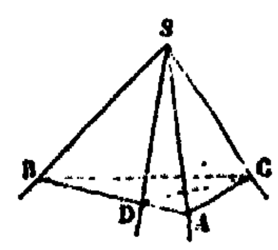


Fig. 314.



enfin, joignons le point C aux points A et B. L'égalité des deux triangles ASD, ASC, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, donne $AD = AC$; et comme on a

$$AB \text{ ou } AD + DB < AC + CB,$$

on voit que le segment DB est moindre que CB. Dès lors, les deux triangles CSB, DSB, ayant SB commun, $SC = SD$, et $DB < DC$, il faut (39) que l'angle DSB soit moindre que CSB. Donc enfin, en ajoutant d'une part l'angle ASD et de l'autre son égal ASC, on a

$$ASD + DSB \quad \text{ou} \quad ASB < ASC + CSB.$$

Pour étendre le théorème au cas d'un angle polyèdre quelconque, il suffit de décomposer cet angle en trièdres en menant par l'une des arêtes SA et par les arêtes opposées SC, SD, des plans diagonaux ASC, ASD (*fig.* 310); la démonstration est évidente.

Corollaire.

575. ***Dans tout angle trièdre, à un plus grand angle dièdre est opposée une plus grande face.***

Soit (*fig.* 314) le trièdre SABC dans lequel l'angle dièdre SC est plus grand que l'angle dièdre SB. On pourra mener dans le dièdre SC et par l'arête SC un plan CSD qui fasse, avec le plan CSB, un angle dièdre égal au dièdre SB. Le trièdre SBCD ayant deux dièdres égaux, les faces BSD, CSD, opposées à ces angles seront égales (573). Or le trièdre SACD (574) donne

$$ASC < ASD + DSC;$$

on aura donc, en remplaçant la face DSC par son égale DSB,

$$ASC < ASD + DSB \quad \text{ou} \quad ASC < ASB.$$

En rapprochant ce théorème de celui qui a été démontré au dernier alinéa du n° 573, et en raisonnant comme au n° 32, on verra que : réciproquement, ***si un angle trièdre a deux faces égales, les dièdres opposés à ces faces sont égaux, et si un angle trièdre a deux faces inégales, à la plus grande face est opposé le plus grand dièdre.***

Scolie.

576. *Si, par le sommet* S *d'un angle trièdre* SABC, *on mène une droite* SO *à volonté dans l'intérieur de ce trièdre, la somme des angles* OSB, OSC, *est moindre que la somme des faces* ASB, ASC.

Si les deux faces d'un angle trièdre sont respectivement égales à deux faces d'un autre angle trièdre, et si l'angle dièdre compris entre les premières est plus grand que l'angle dièdre compris entre les deux autres, la troisième face du premier trièdre est plus grande que la troisième face du second.

Ces propositions sont les analogues de celles des nos 30 et 36; elles se démontrent absolument de même. Il est inutile de faire de nouvelles figures; il suffit de regarder les *fig.* 23, 27, 28 et 29 comme des sections planes des trièdres que l'on considère, les sommets de ces trièdres étant supposés en avant, par exemple, du plan des sections.

THÉORÈME.

577. *Dans tout angle polyèdre convexe, la somme des faces est moindre que quatre angles droits* (*fig.* 315).

En effet, soit ABCDE un polygone *convexe* obtenu en coupant l'angle polyèdre par un plan qui rencontre toutes les arêtes (572). En ajoutant les inégalités

$$\begin{aligned} EAB &< EAS + BAS,\\ ABC &< ABS + CBS,\\ BCD &< BCS + DSC,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

que fournissent les trièdres A, B, C, ... (574), on voit que la somme des angles intérieurs du polygone ABCDE est moindre que la somme des angles à la base des triangles SAB, SBC, SCD,..., qui ont S pour sommet. Or, la somme des angles tant intérieurs qu'extérieurs du polygone convexe ABCDE est égale à la somme de tous les angles des triangles dont S est le sommet commun. Donc, la somme des angles en S de ces triangles, c'est-à-dire la somme des faces de l'angle polyèdre, est moindre que la somme des angles extérieurs du polygone, c'est-à-dire (87) moindre que quatre angles droits.

Fig. 315.

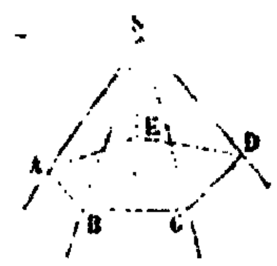
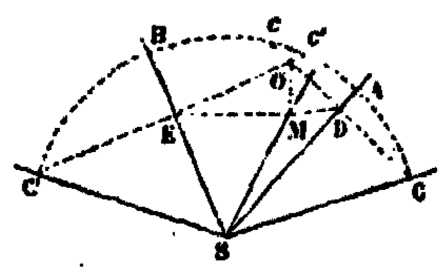


Fig. 316.



SCOLIE.

578. Il résulte des deux théorèmes précédents (574 et 577) que, pour qu'on puisse former un angle trièdre avec trois faces données, *il faut* que la plus grande face soit inférieure à la somme des deux autres, et que la somme des trois faces soit moindre que quatre angles droits. Nous allons prouver que ces deux conditions sont *suffisantes*.

Soient (*fig.* 316) ASB la plus grande face, et ASC, BSC', les deux autres rabattues dans le plan de la première, de part et d'autre de celle-ci; SC et SC' sont les deux droites provenant du dédoublement de la troisième arête.

Décrivons du point S comme centre un arc de cercle CC' de rayon arbitraire; cet arc sera moindre qu'une circonférence, puisque la somme des trois faces données est inférieure à quatre angles droits. Cc et $C'c'$ étant les cordes menées des points C et C' perpendiculairement aux arêtes SA et SB, les arcs AC et Ac sont égaux entre eux, ainsi que les arcs BC' et Bc'; par suite, la relation

$$\text{arc AB} < \text{arc AC} + \text{arc BC'},$$

qui exprime que la plus grande face ASB est inférieure à la somme des deux autres, peut s'écrire

$$\text{arc AB} < \text{arc A}c + \text{arc B}c';$$

elle montre que le point c tombe entre B et c', que c' tombe entre c et A, et par conséquent que les deux cordes Cc et $C'c'$ se croisent en un point O intérieur au cercle CC'.

Élevons au point O la perpendiculaire OM au plan ASB, et dans le plan DOM décrivons du point D comme centre, avec un rayon égal à DC. un arc de cercle qui coupera nécessairement la perpendiculaire OM, puisque OD est moindre que DC. M étant le point d'intersection, menons SM, le trièdre SABM sera formé avec les trois faces données. En effet, si l'on tire MD et ME, ces droites seront respectivement perpendiculaires sur SA et SB, en vertu du théorème des trois perpendiculaires; dès lors les deux triangles SDM, SDC, sont égaux comme ayant un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; on en conclut d'abord que la face ASM est égale à la face donnée ASC, et que l'arête SM est égale à SC. Les deux triangles rectangles SME, SC'E, ont donc l'hypoténuse égale et un côté commun, et leur égalité prouve que la face MSB est égale à l'autre face donnée BSC'.

THÉORÈME.

579. *Si un angle trièdre* SA'B'C' *est le trièdre supplémentaire d'un angle trièdre donné* SABC, *réciproquement* SABC *sera le trièdre supplémentaire de* SA'B'C' (*fig.* 319).

Pour bien comprendre la définition du trièdre supplémentaire et l'objet du présent théorème, il convient de faire une remarque. Par un point O d'un plan P, menons une perpendiculaire OM à ce plan et une oblique ON. Si les deux droites OM et ON *sont d'un même côté du plan* P, l'angle MON qu'elles forment est *aigu* (*fig.* 317), car il est compris dans l'un des angles droits MOT ou MOT' que fait la perpendiculaire OM avec la trace TOT' du plan MON sur le plan P. Si les deux droites OM et ON sont *situées de part et d'autre* du plan P, l'angle MON est *obtus* (*fig.* 318), car il contient l'un des angles MOT ou MOT'. Donc, réciproquement, suivant que l'angle MON est aigu ou obtus, on peut affirmer que la perpendiculaire OM et l'oblique ON sont d'un même côté du plan P ou de part et d'autre de ce plan.

Fig. 317.

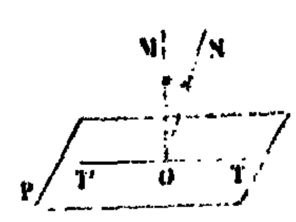


Fig. 318.

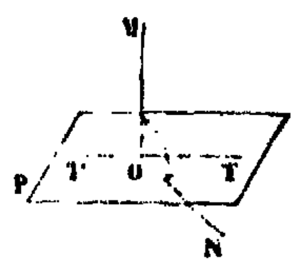
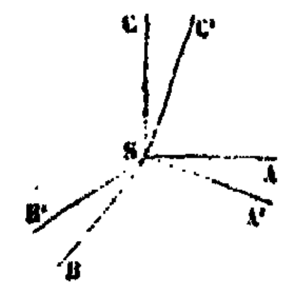


Fig. 319.



Cela posé, on nomme trièdre supplémentaire d'un trièdre SABC, un nouveau trièdre SA'B'C' formé de la manière suivante :

Par le sommet S, on élève une perpendiculaire SC' à la face ASB, du même côté que SC par rapport au plan de cette face; on mène SB' perpendiculaire à la face ASC, du même côté que SB par rapport au plan ASC, et l'on trace enfin SA' perpendiculaire à la face BSC et du même côté que SA par rapport au plan BSC.

Il s'agit maintenant de démontrer que le trièdre SABC résulte du trièdre SA'B'C', comme celui-ci du premier; ou, en d'autres termes, que l'arête SC, par exemple, est perpendiculaire à la face A'SB' et du même côté que SC' par rapport au plan de cette face. Or, par hypothèse, SA' est perpendiculaire au plan CSB et par suite à SC; de même, SB' est perpendiculaire à SC; donc SC est perpendiculaire au plan A'SB'. De plus, SC' ayant été mené perpendiculairement au plan ASB et du côté de SC, l'angle CSC' est aigu; par suite, la perpendiculaire SC au plan A'SB' et l'oblique SC' formant un angle aigu, ces deux droites sont situées d'un même côté par rapport à ce plan A'SB'.

THÉORÈME.

380. *Si* SABC *et* SA'B'C' *sont deux trièdres supplémentaires, chaque angle dièdre de l'un de ces trièdres est le supplément de la face opposée dans l'autre trièdre* (*fig.* 319).

En effet, considérons, par exemple, le dièdre SC. La droite SB' est une perpendiculaire à la face CSA de ce dièdre du côté de SB, et par suite du côté de l'autre face CSB; de même, SA' est une perpendiculaire à la face CSB du dièdre, du côté de la face CSA; donc (361), l'angle A'SB' est le supplément de l'angle qui mesure le dièdre SC ou, plus brièvement, le supplément du dièdre SC. On procéderait de même pour les dièdres SA et SB.

Puisque les deux trièdres SABC, SA'B'C', se déduisent l'un de l'autre par la même construction (379), il est clair que la propriété qui vient d'être établie pour les dièdres du premier s'étend aux dièdres du second. D'ailleurs, la démonstration serait la même.

C'est en raison de cette double propriété que les deux trièdres ont été appelés *supplémentaires*.

SCOLIE.

581. Désignons par a, b, c, les nombres qui mesurent les faces, et par A, B, C, les nombres qui mesurent les angles dièdres d'un angle trièdre, l'angle droit étant pris pour unité d'angle. Les nombres a', b', c', qui mesureront les faces, et ceux A', B', C', qui mesureront les dièdres du trièdre supplémentaire, seront donnés par les formules

$$a' = 2 - A, \qquad A' = 2 - a,$$
$$b' = 2 - B, \qquad B' = 2 - b,$$
$$c' = 2 - C, \qquad C' = 2 - c.$$

Si donc on connaît une propriété quelconque d'un angle trièdre, c'est-à-dire une relation entre les éléments a, b, c, A, B, C, de cette figure, en appliquant cette relation aux éléments a', b', c', A', B', C', du trièdre supplémentaire, puis en remplaçant ces éléments par leurs valeurs tirées des formules précédentes, on aura une relation nouvelle entre a, b, c, A, B, C, c'est-à-dire une nouvelle propriété du trièdre primitif.

De même, toute propriété relative à plusieurs trièdres *conduira*, par la considération des trièdres supplémentaires des proposés, à une propriété nouvelle de ce système de trièdres.

On conçoit par là l'importance du théorème précédent. Voici d'ailleurs quelques applications de la méthode générale que nous venons d'indiquer.

582. Nous avons vu (577) que la somme des faces d'un trièdre était toujours comprise entre zéro et quatre angles droits. Cherchons le théorème correspondant, ou, comme on dit, le théorème *corrélatif*. Considérons à cet effet le trièdre supplémentaire du proposé ; a', b', c', étant ses faces, on a

$$0 < a' + b' + c' < 4.$$

Par suite A, B, C, étant les dièdres du trièdre proposé, on a

$$0 < (2 - A) + (2 - B) + (2 - C) < 4,$$

ou

$$6 > A + B + C > 2.$$

Ainsi, la proposition demandée est la suivante : *Dans tout trièdre, la somme des angles dièdres est comprise entre deux droits et six droits.*

Nous avons vu encore (574) que dans tout trièdre la plus grande face est moindre que la somme des deux autres. Quel est le théorème corrélatif?

Soient a', b', c', les faces du trièdre supplémentaire du trièdre considéré. a' étant la plus grande, on a

$$a' < b' + c';$$

par suite, si A, B, C, sont les dièdres du trièdre proposé, on aura

$$2 - A < (2 - B) + (2 - C), \quad \text{ou} \quad A + 2 > B + C.$$

D'ailleurs, le supplément d'un angle diminuant quand cet angle augmente, A doit être le plus petit des dièdres A, B, C, puisque a' est la plus grande des faces a', b', c'. Donc enfin la proposition demandée est la suivante : *Dans tout trièdre, le plus petit angle dièdre, augmenté de deux droits, est plus grand que la somme des deux autres.*

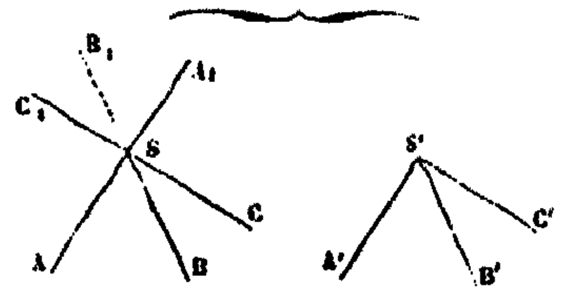
583. En résumé (582), pour qu'on puisse former un angle trièdre avec trois dièdres donnés A, B, C, *il faut* que leur somme soit comprise entre deux droits et six droits, et que le plus petit augmenté de deux droits soit supérieur à la somme des deux autres.

Ces conditions sont *suffisantes*; car, quand elles sont remplies, les suppléments a', b', c', des angles donnés A, B, C, satisfont aux deux conditions du n° 578. On peut donc, avec les trois faces a', b', c', construire un trièdre; par suite, en construisant le trièdre supplémentaire de celui-là, on aura un trièdre dont les dièdres seront les angles donnés A, B, C.

THÉORÈME.

584. *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont une face égale adjacente à deux angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

Fig. 320.



Soient les deux trièdres SABC et S'A'B'C' (*fig.* 320). Par hypothèse, la face ASB est égale à la face A'S'B', les angles dièdres SA et S'A' sont égaux entre eux, ainsi que les dièdres SB et S'B'. On suppose en outre que la disposition est la même, c'est-à-dire que si un observateur dont la tête est en S, le dos appuyé sur la face ASB, et le regard dirigé vers SC, a l'arête SA à sa gauche et l'arête SB à sa droite, un autre observateur, dont la tête serait en S', le dos appuyé sur la face A'S'B' et le regard dirigé vers S'C', aurait l'arête S'A' à sa gauche et l'arête S'B' à sa droite.

Dans ces conditions, les deux trièdres sont égaux, c'est-à-dire superposables. En effet, si l'on place la face A'S'B' sur son égale ASB, de façon que S'A' coïncide avec SA et S'B' avec SB, l'arête S'C' tombe, par rapport au plan ASB, du même côté que SC, sans quoi la disposition des éléments serait différente dans les deux trièdres. Alors, les dièdres SA et S'A' étant égaux, le plan A'S'C' s'applique sur le plan ASC; de même, les dièdres SB et S'B' étant égaux, le plan B'S'C' s'applique sur le plan BSC; donc enfin les arêtes S'C' et SC se confondent et les deux trièdres coïncident.

SCOLIE.

585. Soient $SA_1B_1C_1$ et $S'A'B'C'$ deux triedres qui ont une face égale $A_1SB_1 = A'S'B'$ adjacente à deux dièdres égaux; supposons en outre que la disposition des éléments soit différente, c'est-à-dire que des deux observateurs placés comme nous l'avons dit, l'un voie à sa droite l'arête que l'autre voit à sa gauche, et inversement. Le triedre $SA_1B_1C_1$ et son symétrique SABC ayant les mêmes éléments, mais inversement disposés, les deux triedres SABC et S'A'B'C' satisferont aux conditions du théoreme précédent (584); ils seront donc superposables. Donc les deux triedres $SA_1B_1C_1$ et S'A'B'C' sont *symétriques;* ils sont égaux dans toutes leurs parties sans être superposables (573).

THÉORÈME.

586. *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées.*

Cette proposition résulte de la précédente, dont elle est *corrélative* (581). En effet, les deux trièdres supplémentaires des proposés ont une face égale adjacente à deux dièdres respectivement égaux et semblablement disposés; ils sont donc superposables, et par suite il en est de même des trièdres primitifs.

D'ailleurs, la démonstration directe n'offre aucune difficulté; on voit, par un raisonnement analogue à celui des nos 584 et 585, que la superposition est possible, si, conformément à l'hypothese, la disposition des éléments est la même, et que les deux trièdres sont symétriques si la disposition est inverse.

THÉORÈME.

587. *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont leurs faces égales chacune à chacune et semblablement disposées.*

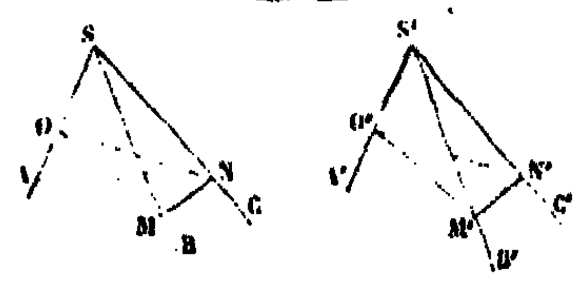
On peut suivre une marche identique à celle de la Géométrie plane, c'est-à-dire démontrer ce théorème comme celui du n° 38, en s'appuyant sur les propositions que nous avons énoncées au n° 576, et qui sont les analogues de celles des nos 30 et 36.

On peut aussi procéder directement, comme il suit:

Soient SABC et S'A'B'C' les deux trièdres; il suffit évidemment de démontrer l'égalité de deux dièdres homologues, des dièdres SA et S'A', par exemple.

Supposons d'abord que les deux faces ASB, ASC, qui comprennent le dièdre SA, soient deux angles aigus. En un point quelconque O de l'arête SA, formons (*fig.* 321) l'angle plan correspondant à l'angle diedre SA; en d'autres termes, élevons par le point O des perpendiculaires sur SA dans les plans ASB et ASC; les angles ASB et ASC étant aigus, ces perpendiculaires rencontreront les arêtes SB et SC en deux points M et N que nous joindrons par une ligne droite. Prenons SO' = SO et construi-

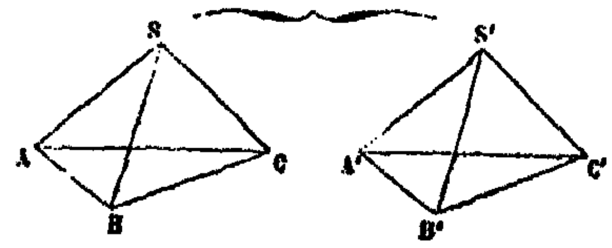
Fig. 321.



sons de même en O' l'angle plan M'O'N' du dièdre S'A'. Il s'agit de démontrer l'égalité des deux angles plans MON et M'O'N'. Or les deux triangles rectangles SOM, S'O'M', sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux : il en est de même des triangles SON et S'O'N'; par suite, les deux triangles SMN, S'M'N', ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, et enfin les deux triangles OMN, O'M'N', ont les trois côtés égaux chacun à chacun. L'égalité de ces derniers triangles entraîne celle des deux angles MON, M'O'N'.

Supposons en second lieu que les deux angles ASB et ASC, qui comprennent le dièdre SA, soient quelconques, et prenons six longueurs égales SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C', à partir des sommets sur les arêtes des deux trièdres (*fig.* 322).

Fig. 322.



Les triangles isocèles ASB et A'S'B', BSC et B'S'C', CSA et C'S'A', sont égaux deux à deux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux; par suite, les triangles ABC, A'B'C', sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. D'après cela, les deux trièdres A et A' ont leurs faces respectivement égales; d'ailleurs les angles SAB, SAC, qui comprennent le dièdre AS, sont aigus comme angles à la base de triangles isocèles; donc, en vertu du raisonnement fait dans l'alinéa précédent, le dièdre AS est égal au dièdre A'S'.

Scolie.

588. Deux trièdres qui ont leurs faces égales chacune à chacune, et inversement disposées, sont symétriques.

THÉORÈME.

589. *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont leurs dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

Ce théorème résulte du précédent, dont il est *corrélatif* (581). En effet, les deux trièdres supplémentaires des proposés ont leurs faces respectivement égales et semblablement disposées; ils sont donc superposables, et par suite il en est de même des trièdres primitifs.

SCOLIE.

590. Deux trièdres, qui ont leurs dièdres égaux chacun à chacun et inversement disposés, sont symétriques.

§ X. — APPENDICE.

Quadrilatère gauche.

591. On dit qu'un quadrilatère ABCD (*fig.* 323) est *gauche* lorsque ses quatre côtés ne sont pas dans un même plan. Pour obtenir une pareille figure, il suffit d'assembler deux triangles ABC, ADC, ayant un côté commun AC, de façon que leurs plans ne coïncident pas.

THÉORÈME.

592. *Quand un plan* P *rencontre les quatre côtés d'un quadrilatère gauche* ABCD *en quatre points a, b, c, d (fig.* 323), *on a la relation segmentaire*

$$(1)\qquad \frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}=+1.$$

En effet, en appliquant le théorème de Ménélaüs (405) aux deux triangles ABC et ADC coupés respectivement par les deux transversales ab et cd, et remarquant que les deux droites ab et cd se rencontrent au point ε où la diagonale AC perce le plan P, on a les égalités

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{\varepsilon C}{\varepsilon A}=1,\quad \frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}\cdot\frac{\varepsilon A}{\varepsilon C}=1,$$

dont le produit est précisément la relation (1).

Fig. 323.

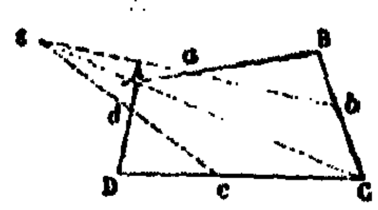
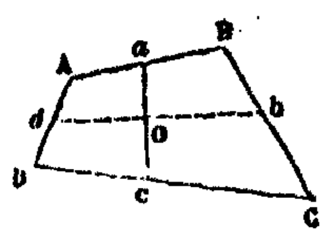


Fig. 324.



593. RÉCIPROQUEMENT, *si sur les quatre côtés d'un quadrilatère gauche*

ABCD *on prend quatre points a, b, c, d, tels qu'on ait la relation* (1), *ces quatre points sont dans un même plan.*

Car le plan P, déterminé par les trois points b, c, d, rencontre le côté AB en un point a', tel qu'on ait (392)

$$\frac{a'A}{a'B} \cdot \frac{bB}{bC} \cdot \frac{cC}{cD} \cdot \frac{dD}{dA} = 1.$$

La comparaison de cette relation avec la relation (1), qui a lieu par hypothèse, donne

$$\frac{aA}{aB} = \frac{a'A}{a'B},$$

et cette proportion entraîne (321) la coïncidence des points a' et a.

COROLLAIRES.

394. La relation (1) est satisfaite lorsqu'on a

$$\frac{aA}{aB} = \frac{cD}{cC} \quad \text{et} \quad \frac{bB}{bC} = \frac{dA}{dD}.$$

De là ce théorème : *Si une première droite ac divise proportionnellement deux côtés opposés* AB *et* DC *d'un quadrilatère gauche* ABCD, *et si une seconde droite bd divise proportionnellement les deux autres côtés* BC *et* AD, *ces deux droites sont dans un même plan* (*fig.* 324).

395. Dans le cas particulier où le plan transversal P est parallèle aux deux côtés opposés BC et AD, les deux points b et d passent à l'infini, les deux rapports $\frac{bB}{bC}$ et $\frac{dD}{dA}$ se réduisent à l'unité, et la relation (1) devient

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{cC}{cD} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{aA}{aB} = \frac{cD}{cC}.$$

Donc : *Tout plan* P, *parallèle à deux côtés opposés* BC *et* AD *d'un quadrilatère gauche* ABCD, *divise proportionnellement les deux autres côtés.*

La démonstration directe de ce théorème est d'ailleurs très-simple : si par chacune des droites BC et AD on imagine un plan parallèle au plan P, on a deux droites AB et CD coupées par trois plans parallèles; donc (332), etc.

Réciproquement : *Toute droite ac, qui divise proportionnellement deux côtés opposés* AB *et* CD *d'un quadrilatère gauche* ABCD, *est située dans un plan parallèle aux deux autres côtés* AD *et* BC. Car si on imagine le plan mené par c parallèlement aux droites AD et BC, ce plan doit, en vertu du théorème direct, diviser le côté AB en parties proportionnelles à cC et cD; ce plan contient donc le point a et par suite la droite ac.

Rapport anharmonique de quatre plans.

596. Il est aisé de voir que, *lorsque quatre plans* A, B, C, D, *passent par une même droite, le rapport anharmonique du faisceau de quatre droites déterminé par un plan transversal quelconque est indépendant de la position de ce plan transversal.* Car les quatre droites a, b, c, d, déterminées par un premier plan P, et les quatre droites a', b', c', d', déterminées par un second plan P', se coupent deux à deux en quatre points α, β, γ, δ, situés sur l'intersection des deux plans P et P', et le rapport anharmonique des points α, β, γ, δ, est égal (328) à celui des droites a, b, c, d, aussi bien qu'à celui des droites a', b', c', d'.

D'après cela, on donne le nom de *rapport anharmonique d'un faisceau de quatre plans* passant par une même droite, à tout rapport anharmonique du faisceau de quatre droites déterminé par un plan transversal quelconque.

597. *Lorsque quatre plans passent par une même droite, toute transversale les rencontre en quatre points dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre plans.* Car ces deux rapports ne sont autres que celui du faisceau de quatre droites déterminé par un plan quelconque contenant la transversale (328, 596).

598. Un faisceau de quatre plans A, B, C, D, passant par une même droite, est dit *harmonique* lorsque le rapport anharmonique (A, B, C, D) de ces quatre plans est égal à -1. Alors tout plan transversal ou toute sécante détermine un système harmonique de quatre droites ou de quatre points.

599. Le théorème du n° 535, relatif à la projection d'une droite sur un plan, subsiste lorsque les projetantes des divers points de la droite sont obliques au plan, pourvu qu'elles soient parallèles entre elles ou qu'elles divergent d'un même point de l'espace; car les projetantes sont encore, dans l'un ou l'autre cas, situées toutes dans le plan de l'une d'elles et de la droite que l'on projette.

On est ainsi conduit à étendre le sens du mot *projection*.

La projection m d'un point M sur un plan P est dite *orthogonale*, *oblique* ou *centrale*, suivant que la projetante Mm est perpendiculaire au plan P, ou qu'elle est parallèle à une direction fixe oblique à ce plan, ou enfin qu'elle est issue du point fixe S de l'espace.

La projection orthogonale, oblique ou centrale d'une figure est le lieu des projections orthogonales, obliques ou centrales de ses divers points, en supposant, bien entendu, dans les deux derniers cas, que la direction oblique des projetantes, ou que le centre S de projection, ne change pas quand on passe d'un point à un autre de la figure que l'on projette.

La *perspective* d'une figure sur un tableau P n'est autre chose que la projection centrale de cette figure sur le plan P, la position de l'œil étant prise pour centre S de projection.

L'*ombre portée* sur un plan P par une figure éclairée par un point lumineux S n'est autre chose que la projection centrale de cette figure faite du centre S sur le plan P.

D'après cela, le théorème du n° 597 peut encore être énoncé de la manière suivante :

Lorsque quatre droites concourantes sont situées dans un même plan, si l'on construit leur projection, leur ombre ou leur perspective sur un plan quelconque, on obtient quatre droites concourantes dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre premières.

QUESTIONS PROPOSÉES.

§§ I, II, III. — *Premières notions sur le plan. — Droites parallèles et angle de deux droites. — Droite et plan perpendiculaires.*

594. Mener par un point donné une droite qui rencontre deux droites données non situées dans un même plan.

595. Démontrer que deux droites qui rencontrent trois droites placées d'une manière quelconque dans l'espace, ne sont pas en général situées dans un même plan.

596. Mener par un point donné une droite qui rencontre une droite et un cercle qui ne sont pas situés dans un même plan.

597. Dans tout quadrilatère gauche, c'est-à-dire dont les côtés ne sont pas situés dans un plan unique, les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme.

598. Mener, dans un plan donné et par un point de ce plan, une droite perpendiculaire à une droite donnée d'une manière quelconque dans l'espace.

599. Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il suffit qu'elle soit également inclinée sur trois droites passant par son pied dans ce plan.

600. Étant donnés un plan P et deux points A et B situés d'un même côté de ce plan, trouver sur le plan P un point tel, que la somme de ses distances aux points A et B soit minimum.

601. Étant donnés un plan P et deux points A et B situés de part et d'autre de ce plan, trouver sur le plan P un point tel, que la différence de ses distances aux points A et B soit maximum.

602. Étant donnés une droite D et deux points A et B situés comme on voudra dans l'espace, trouver le point de la droite D qui est équidistant des points A et B.

603. Étant donnés un triangle ABC et un plan quelconque P, trouver le point du plan P qui est équidistant des trois sommets du triangle ABC.

604. Trouver le lieu des points d'un plan dont la différence des carrés des distances à deux points donnés hors de ce plan soit constante.

605. Trouver le lieu des points d'un plan d'où l'on voit sous un angle droit une droite située hors de ce plan.

606. Trouver le lieu des points de l'espace dont la différence des carrés des distances à deux points donnés soit constante.

607. Plusieurs droites étant données en grandeur, direction et sens, si on les transporte parallèlement à elles-mêmes, de telle sorte que l'extrémité de chacune d'elles se confonde avec l'origine de la suivante, la droite qui part de l'origine de la première et aboutit à l'extrémité de la dernière prend le nom de *résultante* des droites proposées; celles-ci sont dites à leur tour les *composantes* de la résultante. *Composer* des droites, c'est trouver leur résultante; *décomposer* une droite, c'est trouver des droites qui aient pour résultante la première. Ces définitions posées, il s'agit de démontrer les propositions suivantes :

1° La résultante de plusieurs droites reste la même, quel que soit l'ordre dans lequel on compose ces droites.

2° La résultante de plusieurs droites n'est pas changée quand on remplace un certain nombre d'entre elles par leur résultante.

3° Si, sans changer la direction et le sens des composantes, on altère leur grandeur dans un certain rapport, la résultante conserve sa direction et son sens, mais sa grandeur est altérée dans le même rapport.

4° Si, sans altérer la grandeur et la direction des composantes, on change leur sens, la résultante conserve sa grandeur et sa direction, et change de sens.

5° Pour décomposer une droite D en deux autres dont l'une soit une droite donnée d, il suffit de composer D avec d prise en sens contraire.

§§ IV, V, VI. — *Droite et plan parallèles. — Plans parallèles. — Angle d'une droite et d'un plan. — Plus courte distance de deux droites.*

608. Par une droite donnée, on peut mener un plan parallèle à une autre droite donnée, et on n'en peut mener qu'un.

609. Par un point donné, on peut mener un plan parallèle à deux droites données, et on n'en peut mener qu'un.

610. Mener une droite qui soit parallèle à une droite donnée, et qui rencontre deux droites données non situées dans un même plan.

611. Démontrer que deux droites qui sont parallèles à un plan donné, et qui rencontrent deux autres droites placées d'une manière quelconque dans l'espace, ne sont pas en général dans un même plan.

612. Quel est le lieu des points dont le rapport des distances à deux plans parallèles est constant?

613. Une droite se déplace en restant parallèle à un plan donné et en s'appuyant sur deux droites placées d'une manière quelconque dans l'espace: quel est le lieu des points qui divisent la droite mobile dans un rapport donné?

614. Si par l'une des diagonales d'un parallélogramme on mène un plan quelconque, les perpendiculaires, abaissées sur ce plan des extrémités de l'autre diagonale, sont égales.

615. Les angles aigus formés par deux droites parallèles avec un même plan sont égaux.

616. Étant donné un angle AOB, trouver le lieu des points M de l'espace tels que, si on les joint au sommet O de l'angle, la somme des projections de la droite OM sur les deux côtés de l'angle soit constante.

617. Le plan mené parallèlement à deux droites non situées dans un même plan, par le milieu de leur plus courte distance, passe par les milieux de toutes les droites qui joignent un point de la première droite à un point de la seconde.

618. Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, la plus courte distance de cette droite à toutes les droites du plan qui ne lui sont pas parallèles est constante.

619. Entre deux droites données d'une manière quelconque dans l'espace, mener une droite parallèle à un plan donné et ayant une longueur donnée.

620. Trouver le lieu décrit par le milieu d'une droite de longueur constante, dont les extrémités s'appuient sur deux droites rectangulaires et non situées dans un même plan.

621. Un angle AOB tourne dans l'espace autour d'une droite ZZ' parallèle à sa bissectrice; démontrer que, si A'O'B' est une seconde position d'ailleurs quelconque de cet angle: 1° les droites OA et O'A' ne sont pas dans un même plan, non plus que les droites OB et O'B'; 2° OA et O'B' sont dans un même plan, et il en est de même de O'A' et de OB; 3° trois quelconques des droites OA, OB, O'A', O'B', ne sont pas parallèles à un même plan.

622. Soient une droite quelconque AB et un plan P. Si AB est divisée

au point C dans le rapport $\frac{m}{n}$, et si des points A, B, C, on abaisse sur le plan P les perpendiculaires AA′, BB′, CC′, on a

$$(m+n)CC' = n.AA' + m.BB'.$$

623. Si la somme des perpendiculaires abaissées d'un point A sur deux plans donnés est égale à la somme des perpendiculaires abaissées d'un autre point B sur les mêmes plans, cette somme reste la même pour tout autre point C de la droite AB. — Étendre ce théorème au cas d'un nombre quelconque de plans.

624. Soient trois points A, B, C, et deux plans P et Q. Si la somme des deux perpendiculaires abaissées de chacun de ces points sur les deux plans est la même pour les trois points, cette somme restera encore la même pour tout autre point du plan ABC. — Étendre ce théorème au cas d'un nombre quelconque de plans.

§§ VII, VIII, IX. — *Angles dièdres. — Plans perpendiculaires. — Angles polyèdres.*

625. Si, par un point O de l'espace, on mène deux parallèles OA et OB à un plan donné P, puis par le même point O deux plans respectivement perpendiculaires à OA et à OB, l'intersection de ces plans est perpendiculaire au plan P (cette proposition est utile dans les applications).

626. Si l'on projette un même point de l'espace sur deux plans qui se coupent, les perpendiculaires abaissées des deux projections sur l'intersection des deux plans la rencontrent au même point. — Réciproquement, si cette condition est remplie pour deux points des deux plans, ces points sont les projections d'un même point de l'espace.

627. Deux droites égales, parallèles et de même sens, ont leurs projections sur un même plan égales, parallèles et de même sens. — Réciproque de cette proposition.

628. Toute ligne qui se projette sur deux plans qui se coupent suivant une ligne droite, est elle-même une ligne droite.

629. La projection, sur un plan ou sur un axe, de la résultante de plusieurs droites, est la résultante des projections de ces droites. (*Voir* la Question 607.)

630. Si une droite est également inclinée sur les deux faces d'un angle dièdre, ses traces sur les deux faces sont également distantes de l'arête de l'angle dièdre. — Réciproque.

631. Quel est le lieu des points équidistants de deux plans qui se coupent?

632. Quel est le lieu des points de l'espace équidistants de deux droites qui se coupent?

633. Les perpendiculaires abaissées d'un même point sur des plans dont les intersections sont parallèles, sont dans un seul et même plan.

634. Deux angles dièdres qui ont leurs arêtes parallèles et leurs faces perpendiculaires chacune à chacune, sont égaux ou supplémentaires.

635. Quel est le lieu des points équidistants de deux plans donnés et de deux points ou de deux droites données situées dans un même plan?

636. Quel est le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à deux plans donnés soit égale à une droite donnée?

637. Quel est le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à trois plans donnés soit égale à une droite donnée? — Étendre ce problème au cas d'un nombre quelconque de plans.

638. Trouver sur une droite donnée un point tel, que la somme de ses distances à deux plans qui se coupent soit un minimum.

639. Montrer que si, par un même point de l'arête d'un angle dièdre, on mène dans chaque face une droite faisant un angle donné α avec cette arête, l'angle rectiligne ainsi obtenu ne varie pas proportionnellement à l'angle dièdre, à moins que l'angle α ne soit droit.

640. Dans tout angle trièdre, les plans bissecteurs des angles dièdres se coupent suivant une même droite. — Quel est le lieu des points équidistants des trois faces d'un angle trièdre indéfiniment prolongées?

641. Dans tout angle trièdre, les plans menés perpendiculairement aux faces, par les bissectrices de ces faces, se coupent suivant une même droite. — Quel est le lieu géométrique des points équidistants des trois arêtes d'un angle trièdre indéfiniment prolongées?

642. Dans tout angle trièdre, les plans menés par les arêtes perpendiculairement aux faces opposées se coupent suivant une même droite.

643. Dans tout angle trièdre, les plans menés par les arêtes et les bissectrices des faces opposées se coupent suivant une même droite.

Remarque. — Les quatre théorèmes précédents sont vrais lorsque le sommet de l'angle trièdre se transporte à l'infini, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit de trois plans dont les trois intersections deux à deux sont parallèles.

644. Couper un angle polyèdre à quatre faces, de manière que la section soit un parallélogramme.

645. Si, dans le plan de chaque face d'un angle trièdre et par son sommet on mène une perpendiculaire à l'arête opposée, les trois perpendiculaires obtenues sont dans un même plan.

646. Tout plan perpendiculaire à l'une des arêtes d'un angle trièdre rectangle, coupe cet angle trièdre suivant un triangle rectangle.

647. La somme des angles formés par les arêtes d'un angle trièdre avec les faces opposées, est comprise entre la somme des faces et la moitié de cette somme.

648. Si, par un point pris dans l'intérieur d'un angle polyèdre, on abaisse des perpendiculaires sur toutes ses faces, le nouvel angle polyèdre ainsi formé est *supplémentaire* du premier. (*Voir* les n°s 579, 580.)

649. Dans tout angle polyèdre convexe de n faces, la somme des angles dièdres est comprise entre $2n$ et $2n-4$ angles droits.

650. A, B, C, étant trois points pris à volonté sur les arêtes d'un angle trièdre tri-rectangle et O la projection du sommet S de cet angle trièdre sur le plan ABC, démontrer que le triangle ASB est moyen proportionnel entre les triangles ABC et OAB.

651. Une droite quelconque passant par un point donné A et coupant deux plans donnés P et R en deux points C et D, trouver le lieu du point B, conjugué harmonique du point A par rapport à CD.

652. Étant donné le triangle suivant lequel la feuille de dessin est rencontrée par un angle trièdre tri-rectangle, trouver, par des constructions graphiques exécutées sur le plan de cette feuille, les inclinaisons des trois arêtes de l'angle trièdre sur ce plan.

653. Couper un angle trièdre tri-rectangle par un plan tel, que la section soit un triangle égal à un triangle donné.

§ X. — *Appendice*.

654. Quand plusieurs droites sont parallèles, leurs perspectives sur un plan forment un système de droites qui convergent en un même point. — Il y a exception lorsque les droites proposées sont *de front*, c'est-à-dire parallèles au *tableau* sur lequel on projette.

655. Quand plusieurs systèmes de droites parallèles sont parallèles à un même plan, les points de concours des sytèmes rayonnants qui leur correspondent en perspective sont distribués sur une même droite.

656. Démontrer que si, après avoir mis une figure plane en perspective sur un tableau plan, on fait tourner le tableau autour de son intersection avec le plan de la figure primitive, les deux figures resteront toujours en perspective; trouver le lieu décrit par l'œil.

657. On nomme figures *homologiques* des figures qui se correspondent point par point, de telle sorte : 1° que deux points homologues quelconques soient en ligne droite avec un point fixe O; 2° que la figure homo

logue d'une droite quelconque D soit une droite D' rencontrant D sur un axe fixe XY (*voir* les n^os 335, 336). Cela posé, on demande de démontrer que les projections orthogonales sur un plan Q de deux figures planes de l'espace, dont l'une est l'ombre de l'autre, sont deux figures homologiques. — Inversement, on peut toujours considérer deux figures homologiques comme les projections de deux figures planes dont l'une serait l'ombre de l'autre.

658. Quand deux figures sont en perspective, si l'on rabat le plan de la première sur le plan de la seconde, on a dans ce dernier plan deux figures homologiques.

659. Deux figures homothétiques (*voir* le n° 367) étant données dans un plan P, si, en prenant un point S quelconque de l'espace pour centre de projection, on projette ces deux figures sur un plan Q, on obtient deux figures homologiques. — Quel est dans le plan P le point qui se projette sur le *centre* O d'homologie? — Quel est, dans le plan P, le lieu des points qui se projettent sur l'axe XY d'homologie?

660. On donne sur un plan une figure F, le centre O et l'axe XY d'homologie : construire la figure F' homologique de F, connaissant en outre le point a' homologue d'un premier point a de la figure F.

661. Construire la figure F' sans connaître le centre O d'homologie, et en se servant seulement de l'axe XY d'homologie, et des deux points a' et b' homologues de deux points a et b de la figure F.

662. Construire la figure F' sans connaître l'axe XY, et en employant seulement le centre O d'homologie et deux droites A' et B' homologues de deux droites A et B de la figure F.

663. On donne dans un plan une figure F, un point fixe O et une droite fixe XY; m étant un point quelconque de la figure F, on mène Om, qui coupe XY en μ, et l'on prend sur Om un point m' tel que $\frac{Om'}{Om} = k\frac{\mu m'}{\mu m}$, k étant une constante; démontrer que le point m' décrit la figure homologique de F.

664. Examiner ce que deviennent deux figures homologiques : 1° lorsque l'axe d'homologie se transporte à l'infini; 2° lorsque le centre d'homologie est à l'infini.

665. Si deux figures sont homologiques, quatre points en ligne droite ou quatre droites concourantes dans la première figure, ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points ou des quatre droites homologues de la seconde figure.

666. Dans deux figures homologiques, le rapport des distances de deux points homologues quelconques m et m' au centre d'homologie est au rapport des distances de ces deux points m et m' à deux droites homologues D et D'

quelconques, dans une raison constante. — Que devient ce théorème 1° lorsque l'une des droites D et D' est l'axe d'homologie; 2° lorsque la droite D est à l'infini; 3° lorsque, la droite D étant à l'infini, la droite D' se confond avec la droite de la première figure qui correspond aux points de la seconde situés à l'infini.

667. Étant donnés un quadrilatère gauche et une droite qui divise deux côtés opposés en parties proportionnelles, trouver une droite qui soit perpendiculaire à la première et qui divise proportionnellement les deux autres côtés du quadrilatère.

668. Dans un quadrilatère gauche, les trois droites qui joignent les milieux des côtés opposés et les milieux des diagonales se coupent mutuellement en parties égales.

669. Quand un plan transversal coupe les côtés consécutifs d'un polygone gauche ABCD..., en des points $a, b, c, \ldots$, on a, en grandeur et en signe, la relation

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdots = +1.$$

670. Si une droite ac glisse sur deux côtés opposés AB et CD d'un quadrilatère gauche, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{aA}{aB} = \lambda\frac{cD}{cC},$$

λ étant une constante, cette droite rencontre toujours trois droites fixes.

671. Si l'on fait tourner deux plans rectangulaires autour de deux droites fixes dans l'espace, leur intersection rencontre toujours trois droites fixes.

LIVRE VI.

LES POLYÈDRES.

§ I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES ET AIRE LATÉRALE DU PRISME.

DÉFINITIONS.

600. On appelle *polyèdre* tout corps terminé de toutes parts par des plans.

Ces plans, en se limitant mutuellement, déterminent les *arêtes*, les *faces* et les *sommets* du polyèdre. Les angles dièdres et polyèdres formés par les faces sont les angles dièdres et polyèdres de la figure. Le polyèdre a pour *diagonales* les droites qui unissent deux sommets quelconques non situés sur une même face.

On a donné des noms particuliers à certains polyèdres d'après le nombre de leurs faces. Ainsi, tout polyèdre ayant quatre faces est un *tétraèdre*. Les noms *hexaèdre*, *octaèdre*, *dodécaèdre*, *icosaèdre*, correspondent aux polyèdres de six, huit, douze, vingt faces.

601. Un polyèdre est *convexe*, lorsqu'il reste tout entier d'un même côté de chacune de ses faces prolongées indéfiniment.

Une droite quelconque ne peut rencontrer la surface d'un polyèdre convexe en plus de deux points. Car tout plan mené suivant cette droite rencontre nécessairement la surface du polyèdre suivant un polygone convexe (75), dont le contour a, avec la droite donnée, les mêmes points d'intersection que la surface du polyèdre.

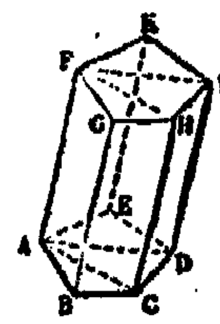
Dans ce qui suit, il ne s'agira que de polyèdres convexes.

602. Parmi les polyèdres, on distingue le *prisme* et la *pyramide*.

Le *prisme* est un polyèdre compris sous plusieurs plans parallélogrammes réunis entre eux par deux faces opposées égales et parallèles.

On construit un prisme de la manière suivante :

Fig. 325.



Soit (*fig.* 325) ABCDE un polygone plan quelconque. Par le sommet A, menons extérieurement au plan de ce polygone la droite AF et, par le point F, un plan parallèle au plan ABCDE; puis, par les sommets B, C, D, E, traçons jusqu'à la rencontre du plan mené par le point F, les droites CH, DI, BG, EK, parallèles à AF. Ces droites sont toutes égales à AF (530); toutes les faces ABGF, BCHG, CDIH, etc., sont donc des parallélogrammes. De plus, les deux polygones parallèles ABCDE, FGHIK, sont égaux comme ayant leurs côtés égaux et parallèles. Le polyèdre obtenu est donc un prisme.

603. Si la droite AF est perpendiculaire au plan ABCDE, le prisme est *droit ;* sinon, il est *oblique.*

Les droites AF, BG, CH, etc., sont les *arêtes latérales* du prisme, et la somme des faces parallélogrammes ABGE, BCHG, etc., forme son aire latérale.

Le prisme a pour *bases* les deux polygones égaux et parallèles ABCDE, FGHIK, et sa *hauteur* est la distance des plans de ses deux bases.

604. Dans un prisme droit, chaque arête latérale est égale à la hauteur. Les faces latérales d'un prisme droit sont des rectangles.

Dans un prisme oblique, la hauteur est moindre que l'arête latérale.

Un prisme *régulier* est un prisme droit qui a pour bases des polygones réguliers.

605. Suivant que les bases d'un prisme sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, des hexagones, etc., le prisme est dit *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *hexagonal*, *etc.*

606. Parmi les prismes quadrangulaires, on distingue celui qui a pour bases des parallélogrammes, et on lui donne le nom de *parallélipipède*. Toutes les faces d'un parallélipipède sont des parallélogrammes (*fig.* 326).

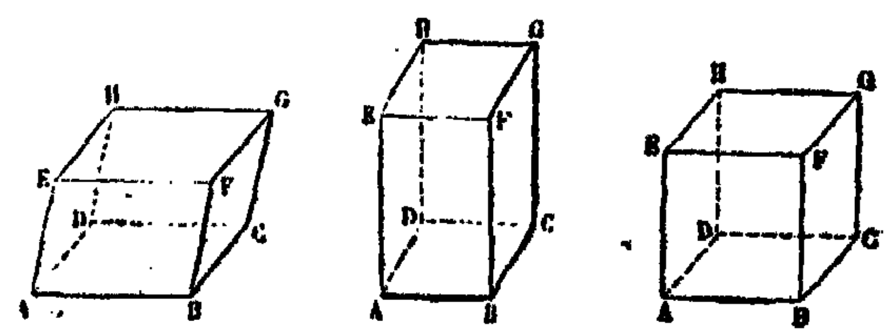
Un parallélipipède peut être *droit* ou *oblique* (603).

Parmi les parallélipipèdes droits, on distingue le *parallélipipède rectangle*, dont les bases sont des rectangles. Toutes les faces d'un parallélipipède rectangle sont des rectangles (*fig.* 327).

On nomme *cube* le parallélipipède rectangle dont les bases et les faces latérales sont des carrés, nécessairement égaux (*fig.* 328).

On remarquera que la perspective déformant les angles, la *fig.* 327 représente aussi bien un parallélipipède droit qu'un parallélipipède rectangle.

Fig. 326. Fig. 327. Fig. 328.



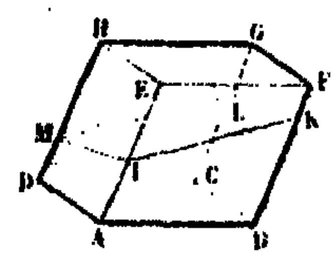
607. De même qu'on appelle dimensions d'un rectangle les longueurs de deux côtés adjacents, on appelle *dimensions* d'un parallélipipède rectangle les longueurs de trois arêtes contigües, c'est-à-dire partant d'un même sommet. Le parallélipipède rectangle AG (*fig.* 327) a pour dimensions les longueurs des arêtes AB, AD, AE.

THÉORÈME.

608. *Les faces opposées d'un parallélipipède sont égales et parallèles.*

Soit (*fig.* 329) le parallélipipède AG. Ses bases ABCD, EFGH, sont, par définition, des parallélogrammes égaux et parallèles. Il faut donc prouver seulement que deux faces latérales opposées, ADHE et BCGF par exemple, remplissent la même condition. Or, AD et BC sont égaux et parallèles comme côtés

Fig. 329.



opposés du parallélogramme ABCD; AE et BF sont aussi égaux et parallèles comme côtés opposés du parallélogramme ABFE. Par suite (494, 529), les deux angles DAE et CBF sont égaux et leurs plans sont parallèles. Les deux parallélogrammes ADHE, BCGH, sont donc égaux et parallèles.

Corollaires.

609. Le parallélipipède étant un prisme compris sous six faces parallélogrammes dont les opposées sont égales et parallèles, *on peut prendre pour bases d'un parallélipipède deux faces opposées quelconques* (602).

610. *Tout plan qui rencontre deux faces opposées d'un parallélipipède, le coupe suivant un parallélogramme.* Soit le plan IKLM (*fig.* 329) qui rencontre les deux faces opposées ADHE et BCGF du parallélipipède AG. Les côtés opposés de la section IKLM étant parallèles comme intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième, cette section est un parallélogramme.

Scolie.

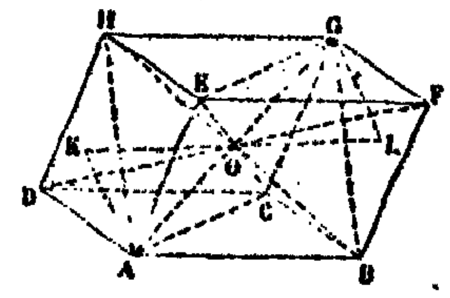
611. Pour construire un parallélipipède sur trois droites données AB, AD, AE, partant d'un même point A et non situées dans un même plan (*fig.* 329), il suffit de mener par l'extrémité non commune de chacune de ces droites un plan parallèle au plan des deux autres. Ainsi, par le point E, on conduira un plan parallèle au plan BAD, par le point D un plan

parallèle au plan BAE, par le point B un plan parallèle au plan DAE. Le polyèdre compris sous les six plans considérés sera un parallélipipède.

THÉORÈME.

612. *Dans un parallélipipède, les quatre diagonales se coupent mutuellement en parties égales.*

Fig. 330.



Soit (*fig.* 330) le parallélipipède AG et ses quatre diagonales AG, CE, BH, DF. Les deux côtés AE et CG étant égaux et parallèles, la figure ACGE est un parallélogramme dont les diagonales AG et CE se coupent mutuellement au point O en parties égales. La figure ABGH étant aussi un parallélogramme, les diagonales AG et BH se coupent mutuellement en parties égales, c'est-à-dire au point O milieu de AG. On prouverait de même que la quatrième diagonale DF passe au point O et y est divisée en parties égales.

Scolies.

613. On appelle *centre* d'un parallélipipède le point de rencontre de ses quatre diagonales.

Toute droite KL passant par le point O et limitée à la surface du parallélipipède AG (*fig.* 330) est divisée au point O en deux parties égales. En effet, le plan déterminé par cette droite et la diagonale AG coupe les deux faces opposées ADHE et BCGF suivant les parallèles AK et GL; les deux triangles AOK, GOL, sont donc égaux.

614. Si le parallélipipède proposé est rectangle, tous les parallélogrammes de la figure deviennent des rectangles. Le parallélogramme ABGH, par exemple, est alors un rectangle, parce que l'arête AB est perpendiculaire à la face ADHE. Les

diagonales d'un rectangle étant égales, *les quatre diagonales d'un parallélipipède rectangle sont égales.*

615. Dans l'hypothèse précédente, les triangles HAB, HDA, étant rectangles, on a

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2, \quad \overline{AH}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2.$$

Par suite,

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2.$$

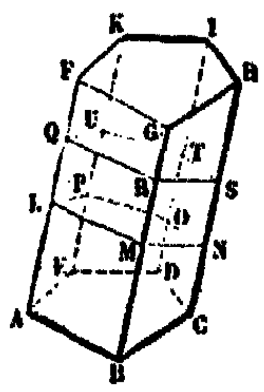
Donc, *le carré de la diagonale d'un parallélipipède rectangle est égal à la somme des carrés de ses trois dimensions.*

Un cube étant un parallélipipède rectangle dont les dimensions sont égales, *le carré de la diagonale d'un cube est égal à trois fois le carré de son arête.*

THÉORÈME.

616. *Les sections faites dans un prisme par deux plans parallèles sont deux polygones égaux.*

Fig. 331.



Soient (*fig.* 331) le prisme AH et les sections LMNOP, QRSTU, faites par deux plans parallèles. Les côtés de ces sections sont deux à deux parallèles comme intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième, et égaux comme parallèles comprises entre parallèles. Les deux polygones obtenus ont donc à la fois leurs angles égaux (494) et leurs côtés égaux.

COROLLAIRES.

617. Lorsque le plan sécant est parallèle à la base du prisme, la section obtenue est égale à cette base.

En supposant les arêtes latérales du prisme prolongées au delà des bases, la démonstration précédente s'applique, que les sections soient intérieures ou extérieures au prisme, et même lorsqu'elles sont en partie intérieures et en partie extérieures. Il suffit que les plans sécants rencontrent toutes les arêtes latérales.

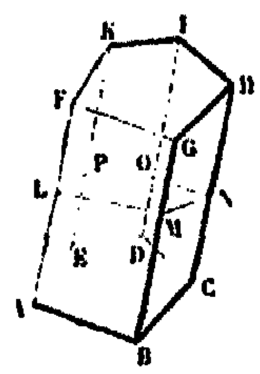
Scolie.

618. On appelle *section droite* d'un prisme la section déterminée dans ce prisme par un plan perpendiculaire à ses arêtes latérales.

THÉORÈME.

619. *L'aire latérale d'un prisme a pour mesure le produit du périmètre de sa section droite par son arête latérale.*

Fig. 332.



Soient (*fig.* 332) le prisme AH et sa section droite LMNOP. Les côtés de cette section droite sont les hauteurs des parallélogrammes qui forment l'aire latérale du prisme, et ces parallélogrammes ont pour bases égales les arêtes latérales du polyèdre. La somme de leurs mesures sera donc

$$AF.LM + BG.MN + \ldots + KE.PL$$
$$= AF.(LM + MN + \ldots + PL).$$

Corollaire.

620. Si le prisme est droit, sa section droite est égale à sa base et son arête latérale à sa hauteur (617, 604). *L'aire latérale d'un prisme droit a* donc *pour mesure le produit du périmètre de sa base par sa hauteur.*

Scolie.

621. En ajoutant à l'aire latérale d'un prisme deux fois l'aire de sa base, on obtient son aire totale.

§ II. — VOLUME DU PRISME.

DÉFINITIONS.

622. On appelle *volume* d'un polyèdre l'étendue du lieu qu'il occupe dans l'espace indéfini.

Quand deux polyèdres peuvent coïncider, ils sont *égaux*. Quand deux polyèdres ont des volumes égaux sans pouvoir coïncider, on dit qu'ils sont *équivalents*.

Pour démontrer que deux polyèdres convexes coïncident, il suffit de prouver qu'ils ont les mêmes sommets.

623. Si l'on détache une portion d'un prisme par un plan incliné à sa base, le polyèdre restant est un *prisme tronqué*. La section obtenue est la base supérieure du tronc de prisme.

THÉORÈME.

624. *Deux prismes droits de même base et de même hauteur sont égaux.*

Car, si l'on fait coïncider les bases inférieures de ces prismes, leurs arêtes latérales prendront deux à deux la même direction (498), et comme elles sont égales à la hauteur donnée, les bases supérieures des deux prismes coïncideront aussi.

SCOLIE.

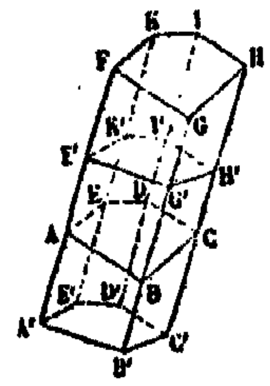
625. La démonstration précédente s'applique au cas de deux prismes droits tronqués de même base, lorsque leurs arêtes latérales sont égales deux à deux.

THÉORÈME.

626. *Tout prisme oblique est équivalent au prisme droit ayant pour base la section droite du prisme oblique et pour hauteur son arête latérale.*

Soit (*fig.* 333) le prisme oblique ABCDEFGHIK ou AH. Par un point G′ de l'arête BG, menons la section droite F′G′H′I′K′. Prolongeons l'arête BG au-dessous de la base ABCDE d'une longueur BB′ = GG′, et par le point B′ menons un plan parallèle au plan de la section droite. Les intersections de ce plan avec les arêtes latérales du prisme prolongées, détermineront un polygone A'B'C'D'E' égal (617) au polygone F'G'H'I'K'. La figure A'B'C'D'E'F'G'H'I'K' ou A'H' sera donc un prisme

Fig. 333.



droit ayant pour base la section droite du prisme oblique AH et, pour hauteur, son arête latérale BG; car on a B'G' = BG, puisque, par construction, BB' = GG'.

Ceci posé, le volume compris entre la base inférieure du prisme oblique AH et la base supérieure du prisme droit A'H' est commun aux deux prismes. Pour démontrer l'équivalence de ces deux prismes, il suffit donc de démontrer l'égalité des deux polyèdres ou prismes droits tronqués (623) A'B'C'D'E'ABCDE ou A'C et F'G'H'I'K'FGHIK ou F'H. Cette égalité résulte immédiatement de la remarque faite au n° 625; car les deux bases A'B'C'D'E', F'G'H'I'K', sont égales, ainsi que les arêtes correspondantes A'A et F'F, B'B et G'G, etc. A'A, par exemple, est l'arête latérale ou la hauteur du prisme droit A'H', diminuée de AF', et F'F est l'arête latérale du prisme oblique AH, diminuée de la même quantité.

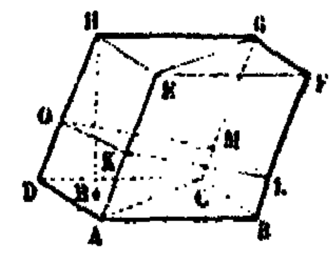
THÉORÈME.

627. *Le plan mené par deux arêtes latérales opposées d'un parallélipipède le partage en deux prismes triangulaires équivalents.*

Soit (*fig.* 334) le parallélipipède quelconque AG. Le plan AEGC, mené par les arêtes opposées AE et CG, partage ce parallélipipède en deux prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH, dont il s'agit de démontrer l'équivalence.

Menons la section droite du parallélipipède AG. Cette section OKLM est un parallélogramme (610); et les deux triangles égaux KLM, KMO, suivant lesquels la diagonale KM la divise, sont respectivement les sections droites des prismes ABCEFG, ACDEGH.

Fig. 334.



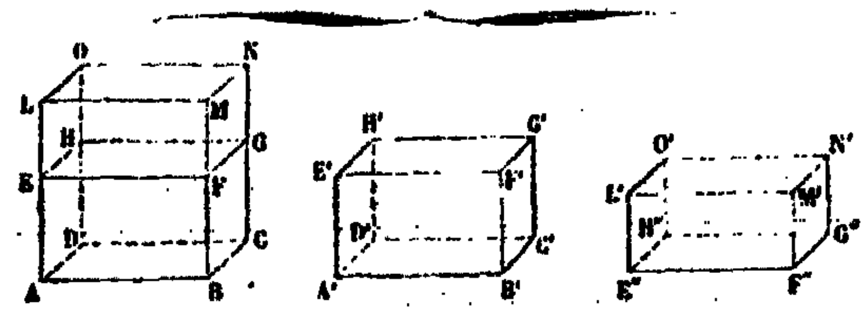
Or, le prisme triangulaire ABCEFG est équivalent au prisme droit ayant pour base KLM et pour hauteur AE (626); de même, le prisme triangulaire ACDEGH est équivalent au prisme droit ayant pour base KMO et pour hauteur AE. Les deux prismes droits énoncés étant égaux (624), les deux prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH, sont équivalents, et chacun d'eux est la moitié du parallélipipède AG.

THÉORÈME.

628. 1° *Si deux parallélipipèdes rectangles de même base ont des hauteurs égales, ils sont égaux;*

2° *Si trois parallélipipèdes rectangles de même base sont tels, que la hauteur du premier soit égale à la somme des hauteurs des deux autres, le premier parallélipipède est égal à la somme des deux autres.*

Fig. 335.



En effet :

1° Soient (*fig.* 335) les deux parallélipipèdes rectangles AG et A'G', dont les bases ABCD, A'B'C'D', sont égales ainsi que les hauteurs AE et A'E'; ces deux parallélipipèdes rectangles seront égaux comme prismes droits ayant même base et même hauteur (624).

2° Soient (*fig.* 335) les trois parallélipipèdes rectangles AN, A'G', E''N', dont les bases ABCD, A'B'C'D', E''F''G''H'', sont égales, et dont les hauteurs AL, A'E', E''L', satisfont à la condition

$$AL = A'E' + E''L';$$

le parallélipipède rectangle AN est égal à la somme des deux autres. Car, si l'on prend sur AL une longueur AE égale à A'E', et qu'on mène par le point E une section EFGH parallèle à la base ABCD, EL sera égale à E''L', en vertu de l'hypothèse énoncée. Par suite, des deux parallélipipèdes rectangles AG, EN, qui composent le parallélipipède rectangle AN, le premier sera égal au parallélipipède rectangle A'G', et le second au parallélipipède rectangle E''N' (1°).

Corollaires.

629. *Le rapport de deux parallélipipèdes rectangles de même base est égal au rapport de leurs hauteurs;* en d'autres termes, *le volume d'un parallélipipède rectangle de base constante est proportionnel à sa hauteur.*

Car le théorème précédent prouve qu'un parallélipipède rectangle de base constante et sa hauteur satisfont aux conditions nécessaires et suffisantes (133, 134) pour qu'il y ait proportionnalité entre ces grandeurs.

Dire que deux parallélipipèdes rectangles ont même base, c'est dire qu'ils ont deux dimensions communes (607). La conclusion précédente peut donc être énoncée de cette manière :

Deux parallélipipèdes rectangles qui ont deux dimensions communes, sont entre eux comme leurs troisièmes dimensions.

Il résulte de là et du théorème général du n° 446 que *deux parallélipipèdes rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs trois dimensions.*

630. L'une des dimensions d'un parallélipipède rectangle étant prise pour sa hauteur, le produit des deux autres dimensions mesure sa base (421). Donc, *deux parallélipipèdes rectangles quelconques sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur.*

THÉORÈME.

631. ***Le volume d'un parallélipipède rectangle a pour mesure le produit du nombre qui mesure sa base par le nombre qui mesure sa hauteur, lorsqu'on prend pour unités d'aire et de volume le carré et le cube construits sur l'unité de longueur.***

En effet, soient (*fig.* 335) AN le parallélipipède rectangle à mesurer et A'G' le cube dont le côté $A'B' = A'D' = A'E'$ représente l'unité de longueur : on a (630)

$$\frac{AN}{A'G'} = \frac{ABCD}{A'B'C'D'} \times \frac{AE}{A'E'}.$$

Or, dans le système d'unités adopté, le premier membre de cette relation est égal au nombre qui mesure le volume AN, et les rapports qui composent le second membre sont respectivement égaux aux nombres qui mesurent la base et la hauteur du parallélipipède rectangle proposé (130). Donc le nombre qui mesure le volume du parallélipipède rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent sa base et sa hauteur. Ainsi, en désignant ces trois nombres par V, B, H, on a la formule

$$V = B.H.$$

On préfère énoncer ce théorème usuel d'une manière plus rapide, quoique incorrecte, en disant : *le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

SCOLIES.

632. En se reportant au n° 629, le rapport du parallélipipède rectangle AN au cube A'G' peut s'écrire

$$\frac{AN}{A'G'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AD}{A'D'} \cdot \frac{AE}{A'E'}.$$

Les rapports qui composent le second membre étant respectivement égaux aux nombres qui mesurent les arêtes contiguës du parallélipipède rectangle, on voit que le nombre qui mesure le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent ses trois dimensions. En d'autres termes, *le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit de ses trois dimensions.*

Ce second énoncé n'est applicable qu'au parallélipipède rectangle; nous allons prouver en terminant ce paragraphe que le premier (631), où entrent explicitement la base et la hauteur du parallélipipède, est applicable à tous les prismes (636).

633. Le volume d'un cube est égal à la troisième puissance de son arête. De là, le nom de *cube* donné à la troisième puissance d'un nombre.

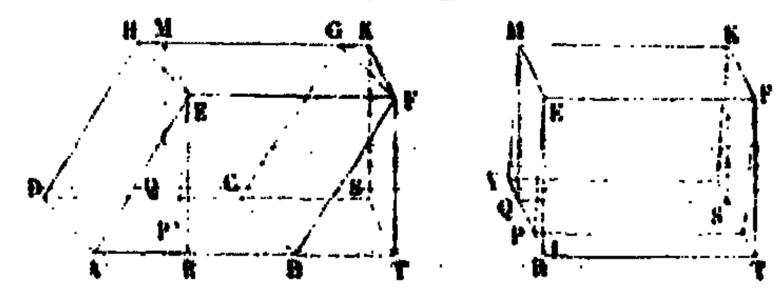
634. Le volume d'un parallélipipède rectangle est encore égal au produit de sa base par sa hauteur, lorsqu'on prend pour unité de volume le parallélipipède rectangle ayant pour base l'unité d'aire quelle qu'elle soit et pour hauteur la longueur prise pour unité de hauteur.

THÉORÈME.

635. *Le volume d'un parallélipipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Soit (*fig.* 336) le parallélipipède quelconque AG ayant pour base ABCD ou EFGH et, pour hauteur, la perpendiculaire EP abaissée du sommet E sur le plan ABCD. Menons par le point E, dans le plan EFGH, la perpendiculaire EM à HG. Si l'on prend la face AEHD pour base du parallélipipède pro-

Fig. 336.



posé (609), son arête latérale sera EF, et sa section droite sera le parallélogramme EMQR déterminé par le plan MEP. Le parallélipipède AG sera donc équivalent au parallélipipède droit RK ayant pour base la section droite EMQR et pour hauteur l'arête EF (626).

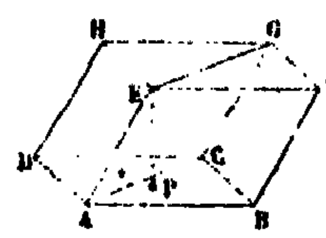
Ceci posé, reproduisons à part, pour plus de clarté (*fig.* 336), ce parallélipipède droit RK, et construisons un parallélipipède rectangle PK ayant pour dimensions EF, EM, EP. Le parallélipipède droit RK et le parallélipipède rectangle PK ainsi déterminé, présentent seulement comme parties non communes les deux prismes droits qui ont pour hauteur EF et pour bases les deux triangles égaux EPR, MVQ. Ces deux prismes droits étant égaux (624), les deux parallélipipèdes seront équivalents et, par suite, il en sera de même du parallélipipède quelconque AG et du parallélipipède rectangle PK. Donc, le produit EF.EM.EP, qui exprime la mesure (632) du parallélipipède rectangle PK, mesure aussi le volume du parallélipipède quelconque AG. Or, EF.EM mesure la base EFGH de ce parallélipipède, et EP est sa hauteur.

Donc enfin, le volume du parallélipipède quelconque AG est égal au produit de sa base par sa hauteur.

THÉORÈME.

636. *Le volume d'un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

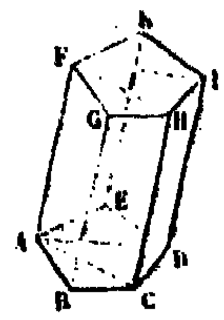
Fig. 337.



1° Soit (*fig.* 337) le prisme triangulaire ABCEFG. Par l'extrémité A de l'arête AB, menons le plan ADHE parallèle à la face BCGF, et par l'extrémité C de l'arête BC le plan CDHG parallèle à la face ABFE; prolongeons en même temps les deux bases du prisme jusqu'à la rencontre de ces plans. On obtiendra ainsi (611) le parallélipipède AG construit sur les trois droites AB, BC, BF. La face ACGE du prisme triangulaire considéré étant un plan diagonal du parallélipipède AG, ce prisme en sera la moitié (627). Donc, le volume du parallélipipède AG ayant pour mesure le produit de sa base ABCD par sa hauteur EP (635), le volume du prisme triangulaire ABCEFG aura pour mesure la moitié de ce produit, c'est-à-dire le produit de sa base ABC, moitié du parallélogramme ABCD, par sa hauteur EP.

2° Soit (*fig.* 338) un prisme quelconque ABCDEFGHIK. On

Fig. 338.



le décompose en prismes triangulaires en faisant passer des plans diagonaux par l'arête AF et chacune des arêtes CH, DI. Ces prismes triangulaires ont pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, qui composent la base du prisme donné, et leur hauteur commune est celle H du prisme. La somme de leurs mesures (1°)

$$ABC.H + ACD.H + ADE.H$$

ou la mesure du prisme AI, sera donc égale au produit de sa base ABCDE par sa hauteur H.

Corollaires.

637. En désignant par V, B, H, les trois nombres qui mesurent respectivement le volume d'un prisme, sa base et sa hauteur, on a la formule générale

$$V = B.H.$$

Donc, *deux prismes de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalents; deux prismes sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur; deux prismes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

638. Application. *Un bassin a la forme d'un prisme hexagonal régulier de* $0^m,75$ *de hauteur, le côté de la base hexagonale est égal à 1 mètre; calculer la capacité du bassin.*

L'aire de la base du prisme considéré étant six fois l'aire du triangle équilatéral de 1 mètre de côté, est égale à

$\frac{6^{mq}.\sqrt{3}}{4}$ (429) ou à $\frac{3^{mq}.\sqrt{3}}{2}$. En appliquant la formule $V = B.H$, on aura donc pour le volume cherché

$$V = \frac{3.\sqrt{3}}{2} \cdot 0,75 = \frac{9.\sqrt{3}}{8} = \frac{9.1,7321}{8} = 1^{mc},946$$

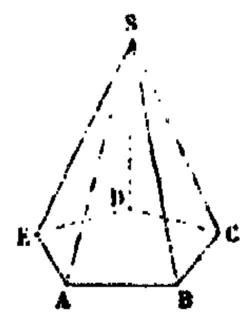
à un décimètre cube près.

§ III. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES ET AIRE LATÉRALE DE LA PYRAMIDE.

DÉFINITIONS.

639. La *pyramide* est un polyèdre dont l'une des faces est un polygone quelconque, et dont toutes les autres faces sont des triangles ayant pour bases respectives les différents côtés de la face polygonale, et pour sommet commun un point extérieur à cette face.

Fig. 339.



Ainsi, soient (*fig.* 339) un polygone ABCDE et un point S pris hors du plan de ce polygone. Le corps limité par la face polygonale ABCDE et par les faces triangulaires SAB, SBC, SCD, SDE, SEA, est une pyramide.

640. La pyramide SABCDE a pour *base* le polygone ABCDE et pour *sommet* le point S. Sa *hauteur* est la distance du sommet S à la base ABCDE, c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.

Les droites SA, SB, SC, etc., sont les *arêtes latérales* de la pyramide, et la somme des faces triangulaires SAB, SBC, SCD, etc., constitue son *aire latérale*.

641. La pyramide est *régulière* lorsque sa base est un poly-

gone régulier dont le centre se confond avec le pied de la hauteur de la pyramide.

Les arêtes latérales d'une pyramide régulière sont nécessairement égales comme obliques s'écartant également du pied de la hauteur; ses faces latérales sont donc des triangles isocèles tous égaux entre eux. La hauteur d'un de ces triangles est l'*apothème* de la pyramide régulière.

642. Suivant que la base de la pyramide est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, etc., la pyramide est dite *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, *hexagonale*, *etc.*

643. Toute pyramide triangulaire ayant quatre faces, on lui donne souvent aussi le nom de *tétraèdre* (600).

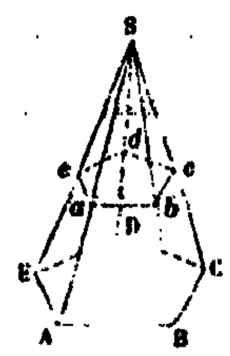
D'après la définition générale de la pyramide, on voit qu'on a le droit de prendre pour base d'un tétraèdre telle face qu'on veut; le sommet du tétraèdre est alors le sommet opposé à la base choisie.

Les tétraèdres sont dans la géométrie de l'espace ce que les triangles sont dans la géométrie plane. On fixe la position d'un point sur un plan en le rattachant par un triangle à deux points donnés. On fixe la position d'un point dans l'espace en le rattachant par un tétraèdre à trois points donnés.

644. Si l'on coupe une pyramide par un plan qui rencontre toutes ses faces latérales, le polyèdre compris entre la section obtenue et la base de la pyramide, est une *pyramide tronquée* ou un *tronc de pyramide*.

Si le plan sécant est parallèle au plan de la base de la pyramide, le tronc de pyramide est dit à *bases parallèles*.

Fig. 340.



Soit (*fig.* 340, la pyramide SABCDE. Coupons cette pyramide par le plan *abcde* parallèle à la base ABCDE, et compris entre cette base et le sommet S. La section *abcde* et la base ABCDE sont les bases du tronc de pyramide à bases parallèles ABCDE*abcde*. La *hauteur* du tronc est la distance constante des plans de ses deux bases. Les segments A*a*, B*b*, C*c*, etc., sont ses *arêtes latérales*, et son *aire latérale* est la somme des trapèzes AB*ab*, BC*bc*, CD*cd*, etc.

645. Si la pyramide considérée est *régulière*, le tronc de pyramide à bases parallèles qui lui correspond est un tronc de pyramide *régulier*.

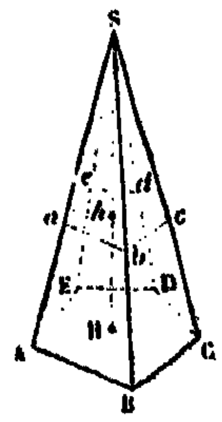
THÉORÈME.

646. *Si une pyramide est coupée par un plan parallèle à sa base :*

1° *Ses arêtes latérales et sa hauteur sont divisées en parties proportionnelles ;*

2° *La section est un polygone semblable à la base de la pyramide.*

Fig. 341.



1° Soit (*fig.* 341) la pyramide SABCDE coupée par le plan *abcde* parallèle à sa base. Ce plan rencontre les arêtes latérales SA, SB, SC, etc., et la hauteur SH de la pyramide aux points *a*, *b*, *c*, ..., *h*. Deux plans parallèles coupant en parties proportionnelles une série de sécantes issues d'un même point (533), on peut écrire immédiatement

$$\frac{Sa}{SA} = \frac{Sb}{SB} = \frac{Sc}{SC} = \ldots = \frac{Sh}{SH}.$$

2° Les polygones ABCDE et *abcde* ont leurs côtés deux à deux parallèles (520) et dirigés dans le même sens. Les angles homologues de ces polygones sont donc égaux (494). De plus, le parallélisme de leurs côtés entraîne la similitude des triangles SAB et Sab, SBC et Sbc, etc. Par suite,

$$\frac{ab}{AB}=\frac{Sb}{SB},\quad \frac{Sb}{SB}=\frac{bc}{BC},$$

d'où

$$\frac{ab}{AB}=\frac{bc}{BC}.$$

On prouverait de la même manière qu'on a

$$\frac{bc}{BC}=\frac{cd}{CD}=\frac{de}{DE}=\frac{ea}{EA}.$$

Les polygones ABCDE et $abcde$ ayant leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels, sont semblables.

Corollaire.

647. La similitude des triangles SAB et Sab donne

$$\frac{ab}{AB}=\frac{Sa}{SA},$$

ou, d'après ce qui précède,

$$\frac{ab}{AB}=\frac{Sh}{SH}.$$

La similitude des polygones ABCDE et $abcde$ donne à son tour

$$\frac{abcde}{ABCDE}=\frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2}.$$

On a donc

$$\frac{abcde}{ABCDE}=\frac{\overline{sh}^2}{\overline{SH}^2},$$

c'est-à-dire que, ***dans une pyramide, les sections parallèles à la base et la base elle-même sont proportionnelles aux carrés de leurs distances au sommet de la pyramide.***

Scolie.

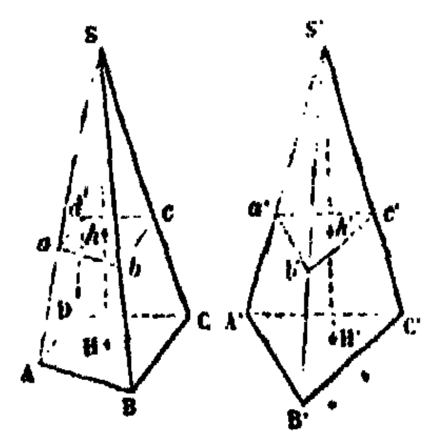
648. Si l'on coupe une pyramide régulière par un plan parallèle à la base, la section $abcde$ étant semblable à la base

ABCDE, est aussi un polygone régulier. Comme les arêtes latérales d'une pyramide régulière sont égales, il en est de même des arêtes latérales du tronc de pyramide régulier obtenu. Les faces latérales d'un tronc de pyramide régulier sont donc des trapèzes isocèles tous égaux entre eux. La hauteur d'un de ces trapèzes est l'*apothème* du tronc de pyramide.

THÉORÈME.

649. ***Lorsque deux pyramides ont des hauteurs égales, les sections faites dans ces pyramides parallèlement à leurs bases et à la même distance de leurs sommets, sont proportionnelles aux bases des deux pyramides.***

Fig. 342.



Soient (*fig.* 342) les deux pyramides SABCD, S'A'B'C', dont les hauteurs SH et S'H' sont égales. Prenons $Sh = S'h'$ et, par les points h et h', menons la section *abcd* parallèle à la base ABCD et la section *a'b'c'* parallèle à la base A'B'C'. Nous aurons (647)

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2}, \quad \frac{a'b'c'}{A'B'C'} = \frac{\overline{S'h'}^2}{\overline{S'H'}^2},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'hypothèse et de la construction,

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{a'b'c'}{A'B'C'}.$$

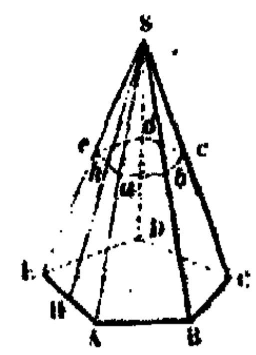
Scolie.

650. ***Si les bases des deux pyramides sont équivalentes, les sections obtenues sont équivalentes.***

THÉORÈME.

651. ***L'aire latérale d'une pyramide régulière a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par son apothème.***

Fig. 343.



Soit (*fig.* 343) la pyramide régulière SABCDE. Les triangles isocèles et égaux qui composent sa surface latérale ayant respectivement pour bases les côtés AB, BC,..., EA, de la base de la pyramide, et, pour hauteur, son apothème SH (641), la somme des aires de ces triangles, c'est-à-dire l'aire demandée, a pour mesure la moitié du produit de la somme des côtés AB, BC,..., EA, par l'apothème SH, c'est-à-dire la moitié du produit du périmètre de la base de la pyramide par son apothème.

SCOLIE.

652. ***L'aire latérale d'un tronc de pyramide régulier a pour mesure le produit de la demi-somme des périmètres de ses deux bases par son apothème.***

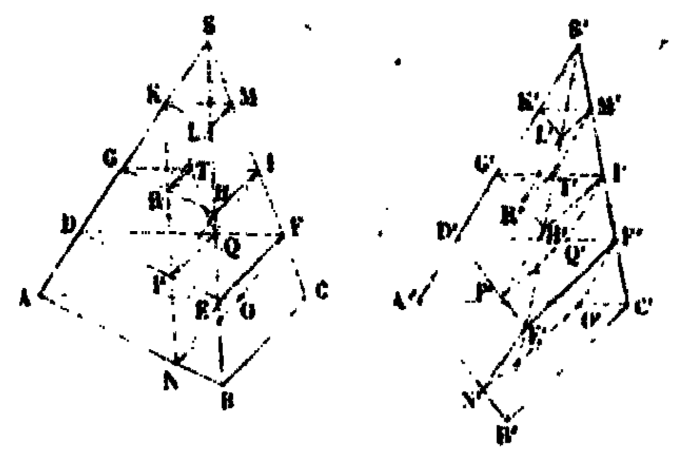
Soit (*fig.* 343) le tronc de pyramide régulier ABCDE*abcde*. Les trapèzes isocèles et égaux qui composent son aire latérale ayant respectivement pour bases les côtés AB et *ab*, BC et *bc*,..., EA et *ea*, des bases du tronc de pyramide, et, pour hauteur, son apothème H*h* (648), la somme des aires de ces trapèzes, c'est-à-dire l'aire demandée, aura pour mesure le produit de la demi-somme des côtés AB et *ab*, BC et *bc*,..., EA et *ea*, par l'apothème H*h*, c'est-à-dire le produit de la demi-somme des périmètres des deux bases du tronc de pyramide par son apothème.

§ IV. — VOLUME DE LA PYRAMIDE.

THÉORÈME.

653. *Deux pyramides triangulaires de bases équivalentes et de hauteurs égales, sont équivalentes.*

Fig. 344.



Soient (*fig.* 344) SABC et S'A'B'C' les deux pyramides proposées. Si leurs bases ABC, A'B'C', sont placées sur un même plan, leurs sommets S et S' seront à la même distance du plan commun des deux bases, puisque ces pyramides ont même hauteur.

Divisons l'arête SA en un certain nombre de parties égales aux points D, G, K, et par ces points menons des plans parallèles au plan commun des bases. Nous déterminerons ainsi dans la première pyramide les sections DEF, GHI, KLM, et dans la seconde pyramide les sections correspondantes D'E'F', G'H'I', K'L'M'.

Comme les bases des deux pyramides sont équivalentes, les sections faites dans ces pyramides par un même plan parallèle au plan commun des bases, sont équivalentes (650). La section DEF est équivalente à la section D'E'F', la section GHI à la section G'H'I', etc.

Construisons maintenant un prisme sur la section DEF comme base et sur la division DA comme arête. Il suffit pour cela (602) de mener, par les points E et F, jusqu'à la rencontre des arêtes AB et AC, des parallèles EN et FO à DA ou SA, et de tracer la droite NO. En agissant de même pour les autres sections GHI, KLM, et les autres divisions GD, KG, on inscrira dans la pyramide SABC un nombre de prismes égal à celui des sections primitivement obtenues, et tous ces prismes inscrits auront pour hauteur la distance constante de deux plans sécants consécutifs.

En opérant d'une manière identique, on inscrit dans la seconde pyramide S'A'B'C' les prismes D'E'F'A'N'O', G'H'I'D'P'Q',..., qui sont en même nombre que ceux inscrits dans la pyramide SABC.

Les prismes de même rang dans les deux pyramides sont équivalents comme ayant des bases équivalentes et des hauteurs égales (637). Le prisme GHIDPQ, par exemple, est équivalent au prisme G'H'I'D'P'Q', parce que les deux sections correspondantes GHI, G'H'I', sont équivalentes, et parce que les hauteurs de ces prismes représentent toutes deux la $n^{ième}$ partie de la hauteur commune des pyramides données, si l'on a divisé l'arête SA en n parties égales.

Donc, la somme des prismes inscrits dans la pyramide SABC est équivalente à la somme des prismes inscrits dans la pyramide S'A'B'C'. Or, si l'on fait croître indéfiniment le nombre des divisions égales de l'arête SA, la somme des prismes inscrits dans la pyramide SABC a pour limite le volume de cette pyramide. En effet, les points K, R, P, N, sont en ligne droite, puisque les droites SK, LR, HP, EN, sont égales et parallèles, et la droite KN est parallèle à SB. De même, les points K, T, Q, O, sont sur une droite KO parallèle à SC. Le plan KNO est donc parallèle à la face SBC, et le polyèdre KNOSBC est un tronc de pyramide à bases parallèles dont la hauteur, distance des deux plans KNO, SBC, est au plus égale à SK = AD. Or, la limite de AD quand on fait croître indéfiniment le nombre des divisions égales de l'arête SA, est zéro. Donc, la hauteur du tronc de pyramide KNOSBC tend vers zéro, et il en est de même par conséquent du volume de ce tronc. Mais ce volume est évidemment supérieur à la différence qui existe entre la pyramide SABC et la somme des prismes qui y sont inscrits. Cette différence s'annule donc à la limite.

On prouverait de même que la différence entre la pyramide S'A'B'C' et la somme des prismes qui y sont inscrits, a zéro pour limite.

Les deux sommes de prismes étant constamment équivalentes, leurs limites, c'est-à-dire les volumes des deux pyramides SABC, S'A'B'C', sont égaux.

THÉORÈME.

654. *Le volume d'une pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 345.

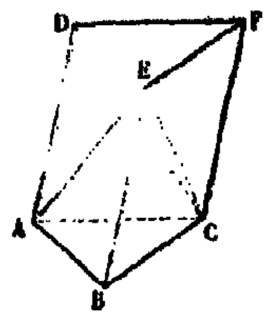
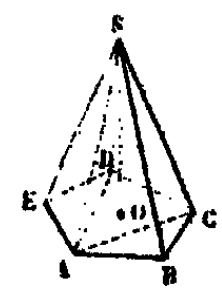


Fig. 346.



1° Soit (*fig.* 345) la pyramide triangulaire EABC. Par les sommets A et C, menons les droites AD et CF, parallèles à l'arête BE, jusqu'à leur rencontre D et F avec un plan mené par le sommet E parallèlement à la base ABC de la pyramide. Le polyèdre ABCDEF sera un prisme triangulaire ayant même base et même hauteur que la pyramide proposée.

En faisant passer un plan par les trois sommets D, E, C, on décompose le prisme triangulaire ABCDEF en trois pyramides triangulaires EABC, EDCA, EDCF. La première est la pyramide donnée. Les deux autres sont équivalentes, car elles ont même hauteur et leurs bases sont équivalentes comme moitiés du parallélogramme ACFD (653). Or, si l'on prend la face DEF pour base de la pyramide EDCF, son sommet est le point C. Cette pyramide a donc même base et même hauteur que le prisme ABCDEF ; elle est donc équivalente à la pyramide EABC.

Les trois pyramides dont se compose le prisme ABCDEF étant équivalentes, chacune d'elles est le tiers de ce prisme. Or, le volume du prisme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur; le volume de la pyramide EABC a donc pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

2° Soit (*fig.* 346) la pyramide polygonale SABCDE. On la décompose en pyramides triangulaires en faisant passer des plans par l'arête SA, et chacune des arêtes SC, SD. Ces pyramides triangulaires ont pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, qui composent la base de la pyramide donnée, et leur hauteur commune est celle de cette pyramide. La somme de leurs mesures ou la mesure de la pyramide SABCDE sera donc égale au tiers du produit de sa base ABCDE par sa hauteur SO.

COROLLAIRES.

655. En désignant par V, B, H, les trois nombres qui mesurent respectivement le volume d'une pyramide, sa base et sa hauteur, on a la formule générale

$$V = \frac{1}{3} B.H.$$

Donc, *toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur. Deux pyramides quelconques de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalentes. Deux pyramides sont entre elles comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur. Deux pyramides de même base sont entre elles comme leurs hauteurs. Deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.*

656. Quand un tétraèdre est régulier, son volume s'exprime en fonction de son arête a.

Un tétraèdre régulier est compris sous quatre triangles équilatéraux égaux. Sa base a donc pour expression (429)

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Sa hauteur est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant pour second côté de l'angle droit le rayon du cercle circonscrit au triangle de base, c'est-à-dire $\frac{a}{\sqrt{3}}$, et pour hypoténuse l'arête a du tétraèdre. Cette hauteur est, par suite,

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

On a donc, pour le volume du tétraèdre régulier en fonction de son arête,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

EXEMPLE.

Quel est le volume du tétraèdre régulier dont l'arête est 1 mètre?

On a

$$V = \frac{1^{mc}.\sqrt{2}}{12} = \frac{1^{mc},4142136}{12} = 0^{mc},117851$$

à $\frac{1}{2}$ centimètre cube près.

SCOLIE.

657. Pour évaluer le volume d'un polyèdre, il suffit de décomposer ce polyèdre en pyramides, de calculer les volumes de ces pyramides et de faire la somme des nombres obtenus. Plus généralement, il suffit de décomposer le polyèdre proposé en parties telles, que l'expression de leur volume soit connue.

Pour opérer la décomposition en pyramides, on peut choisir un point quelconque dans l'espace et le joindre à tous les sommets du polyèdre. Les bases des différentes pyramides formées sont les faces du polyèdre, et leurs hauteurs sont les perpendiculaires abaissées du point choisi sur ces faces. Le volume du polyèdre est la somme arithmétique ou algébrique des volumes des pyramides obtenues, suivant que leur sommet commun est lui-même intérieur ou extérieur au polyèdre.

Souvent, on fait la décomposition en prenant pour centre l'un des sommets du polyèdre, c'est-à-dire en menant toutes les diagonales qui partent d'un même sommet.

Si l'on peut trouver dans l'intérieur du polyèdre un point à égale distance de toutes ses faces, les pyramides qui le composeront auront pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'une des faces, et *le volume du polyèdre aura pour mesure le tiers du produit de son aire par cette perpendiculaire.*

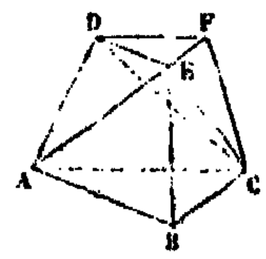
THÉORÈME.

658. *Un tronc de pyramide à bases parallèles est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases respectives les deux*

bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases.

1° Soit (*fig.* 347) le tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles ABCDEF.

Fig. 347.



Faisons passer un plan par les trois sommets A, E, C, puis un autre plan par les trois sommets D, E, C. Nous partagerons le tronc en trois pyramides triangulaires EABC, EDCF, EDCA.

La première EABC a pour base la base inférieure ABC du tronc de pyramide, et elle a même hauteur que ce tronc puisque son sommet E est un sommet de la base supérieure.

Si l'on prend le point C pour sommet de la seconde pyramide EDCF, sa base DEF est la base supérieure du tronc, et elle a même hauteur que ce tronc, puisque son sommet C se confond avec un sommet de la base inférieure.

Dans le cas du prisme triangulaire (634), les deux pyramides EDCA, EDCF, étaient équivalentes, de sorte que le volume de l'une faisait connaître celui de l'autre. Ici, ces volumes sont inégaux et, pour déduire le volume de la pyramide EDCA de celui de la pyramide EDCF, on est conduit à chercher leur rapport.

Les deux pyramides EDCA, EDCF, ayant même hauteur, sont entre elles comme leurs bases CDA, CDF, c'est-à-dire, puisque ces deux triangles ont même hauteur, comme les bases AC et DF de ces triangles. D'ailleurs, les bases du tronc étant semblables (646), on a

$$\frac{AC}{DF}=\frac{\sqrt{ABC}}{\sqrt{DEF}}.$$

Tel est le rapport cherché.

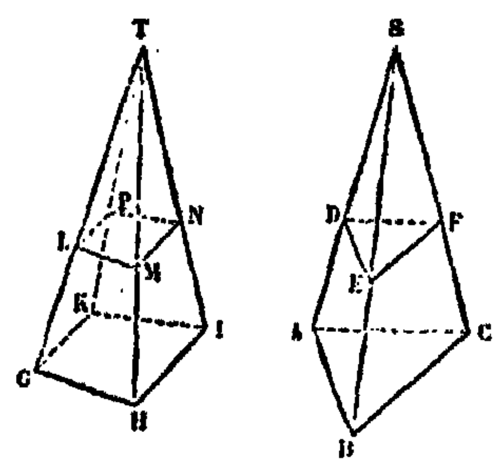
Mais la pyramide EDCF a pour mesure le tiers du produit de la hauteur du tronc par sa base DEF. La pyramide EDCA aura donc pour mesure le tiers du produit de la hauteur du tronc par l'expression

$$\mathrm{DEF}.\frac{\sqrt{\mathrm{ABC}}}{\sqrt{\mathrm{DEF}}}=\sqrt{\mathrm{ABC}.\mathrm{DEF}}.$$

La pyramide EDCA équivaut par suite à une pyramide ayant pour hauteur la hauteur du tronc, et pour base la moyenne proportionnelle entre ses deux bases.

2° Soit (*fig.* 348) le tronc de pyramide polygonale GHIKLMNP.

Fig. 348.



Ce tronc a été obtenu en coupant la pyramide TGHIK par un plan parallèle à sa base. Prenons un point S à la même hauteur que le point T au-dessus de la base GHIK, et construisons dans le plan de cette base un triangle ABC qui lui soit équivalent. La pyramide triangulaire SABC sera équivalente à la pyramide polygonale TGHIK (653). Si l'on prolonge le plan LMNP jusqu'à la pyramide SABC, il déterminera dans cette pyramide une section DEF équivalente à la section LMNP (650); les deux pyramides SDEF, TLMNP, seront donc aussi équivalentes. Par suite, le tronc polygonal GHIKLMNP, différence des pyramides TGHIK, TLMNP, sera équivalent au tronc triangulaire ABCDEF, différence des pyramides SABC, SDEF. Et comme le tronc de pyramide triangulaire est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases, il en sera de même du tronc de pyramide polygonale qui a même hauteur et des bases équivalentes.

COROLLAIRES.

659. En désignant par V, B, b, h, les nombres qui mesurent respectivement le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles, ses deux bases et sa hauteur, on a la formule

$$V = \frac{1}{3} B h + \frac{1}{3} bh + \frac{1}{3} h \sqrt{Bb}$$

ou

$$(1) \qquad V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Souvent, au lieu de donner les deux bases B et b, on donne l'une d'elles B et le rapport $\frac{a}{A}$ de deux côtés homologues de ces deux bases; on a alors

$$\frac{b}{B} = \frac{a^2}{A^2}, \quad \text{d'où} \quad b = \frac{a^2}{A^2} B.$$

Il en résulte

$$(2) \qquad V = \frac{Bh}{3}\left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right).$$

Cette formule, très-commode dans les applications, se trouve dans un Traité de Léonard de Pise, sur *les centres de gravité*.

EXEMPLE.

Les bases parallèles d'un tronc de pyramide sont deux hexagones réguliers ayant respectivement 1 mètre et 2 mètres de côté, sa hauteur est égale à 3 mètres; calculer son volume.

On a dans ce cas

$$B = \frac{3A^2\sqrt{3}}{2} = 6^{mq}.\sqrt{3}$$

et, en appliquant la formule (2),

$$V = \frac{6.\sqrt{3}.3}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right),$$

c'est-à-dire

$$V = 3.\sqrt{3}.3,5 = 18^{mc},18653{,}4$$

à 1 centimètre cube près.

SCOLIES.

660. On aurait pu employer, pour trouver le volume d'un tronc de pyramide polygonale, la méthode de *décomposition* déjà suivie dans d'autres cas (630, 654); mais cette marche exigeant ici la vérification d'une formule algébrique, il était préférable d'avoir recours à la méthode de *transformation* en figures équivalentes.

661. On peut obtenir les formules (1) et (2) en considérant un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles comme la différence de deux pyramides, celle dont il fait partie et celle que sa base supérieure a détachée de la première.

Désignons par V le volume du tronc, par B et b les deux bases, par A et a deux de leurs côtés homologues, par H la hauteur de la pyramide entière, par H' celle de la seconde pyramide; la hauteur h du tronc sera égale à H — H'.

Ceci posé, on a

$$V = \frac{1}{3}BH - \frac{1}{3}bH' = \frac{1}{3}(BH - bH') = \frac{B}{3}\left(H - \frac{bH'}{B}\right).$$

Le tronc étant à bases parallèles, on peut écrire

$$\frac{B}{b} = \frac{A^2}{a^2} = \frac{H^2}{H'^2}.$$

Il en résulte

$$\frac{H}{A} = \frac{H'}{a} = \frac{H - H'}{A - a} = \frac{h}{A - a},$$

d'où

$$H = \frac{Ah}{A - a}, \quad H' = \frac{ah}{A - a}.$$

Si l'on substitue dans l'expression de V les valeurs qu'on vient d'indiquer pour le rapport $\frac{B}{b}$ et pour les hauteurs H, H', on trouve

$$V = \frac{Bh}{3} \cdot \frac{A^3 - a^3}{A^2(A - a)} = \frac{Bh}{3}\left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right),$$

comme précédemment.

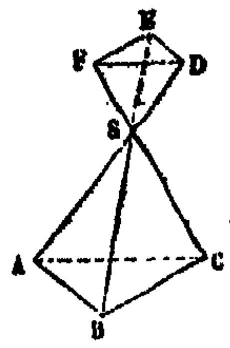
662. On peut donner au mot *tronc* une extension utile.

De même que les théorèmes relatifs aux sections d'un prisme s'étendent au cas où elles sont extérieures (617), les théorèmes relatifs aux sections d'une pyramide (646) s'étendent aux cas où ces sections deviennent extérieures, qu'elles soient faites au delà du sommet ou au-dessous de la base de la pyramide proposée. Les plans sécants doivent seulement rester parallèles à la base de cette pyramide.

On peut distinguer les deux cas possibles en disant que les sections faites au-dessous du sommet donnent des troncs de *première espèce*, et que les sections faites au-dessus du sommet donnent des troncs de *seconde espèce*.

Pour évaluer le volume d'un tronc de seconde espèce ABCDEF (*fig.* 349),

Fig. 349.



il suffit de répéter le calcul fait dans le numéro précédent, en conservant les mêmes notations. Seulement, au lieu d'effectuer la différence des pyramides SABC, SDEF, il faut faire leur somme. La hauteur h du tronc est d'ailleurs égale à la somme des hauteurs H et H' des deux pyramides. On a ainsi

$$V = \frac{1}{3}BH + \frac{1}{3}bH' = \frac{B}{3}\left(H + \frac{bH'}{B}\right).$$

De la relation

$$\frac{B}{b} = \frac{A^2}{a^2} = \frac{H^2}{H'^2},$$

il résulte

$$\frac{H}{A} = \frac{H'}{a} = \frac{H+H'}{A+a} = \frac{h}{A+a},$$

d'où

$$H = \frac{Ah}{A+a}, \quad H' = \frac{ah}{A+a}.$$

Par suite,

$$V = \frac{Bh}{3} \cdot \frac{A^3+a^3}{A^2(A+a)} = \frac{Bh}{3}\left(1 - \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right),$$

et aussi

$$V = \frac{h}{3}\left(B - \frac{Ba}{A} + \frac{Ba^2}{A^2}\right) = \frac{h}{3}(B + b - \sqrt{Bb}).$$

Pour un tronc de seconde espèce, la formule du volume est donc la même que pour un tronc de première espèce, sauf le signe de la moyenne proportionnelle. On passe donc de l'une à l'autre formule en changeant le signe de cette moyenne ou en changeant a en $-a$.

663. PROBLÈME. — *On donne le volume V, la hauteur h et le côté A de la base inférieure d'un tronc de pyramide à bases parallèles; on suppose que cette base est un hexagone régulier, et l'on demande le côté x de l'hexagone régulier, base supérieure du tronc.*

L'équation du problème sera l'équation (2) du n° 659, dans laquelle on remplacera a par l'inconnue x, c'est-à-dire

$$V=\frac{Bh}{3}\left(1+\frac{x}{A}+\frac{x^2}{A^2}\right),$$

d'où

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{x}{A}+1-\frac{3V}{Bh}=0.$$

Les racines de cette équation restent imaginaires tant qu'on a $V<\frac{Bh}{4}$; elles deviennent réelles et elles restent toutes deux négatives tant que V est compris entre $\frac{Bh}{4}$ et $\frac{Bh}{3}$; enfin, elles sont l'une positive et l'autre négative, lorsqu'on a $V>\frac{Bh}{3}$.

Dans le premier cas, le problème est impossible; dans le second cas, deux troncs de seconde espèce répondent à la question; dans le troisième cas, un tronc de première espèce et un tronc de seconde espèce y répondent à la fois.

Supposons, par exemple, $A=1^m$, d'où $B=\frac{3^{mq}.\sqrt{3}}{2}$, $h=1^m\sqrt{3}$, et $V=2^{mc}$. L'équation à résoudre sera

$$x^2+x+1-\frac{4}{3}=0 \quad \text{ou} \quad x^2+x-\frac{1}{3}=0.$$

Elle donne

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}=\frac{-3\pm4,5825757}{6}.$$

La racine positive est $x=0,26376$ à $\frac{1}{100}$ de millimètre près; la racine négative est $x=-1,26376$ avec la même approximation. La première répond à un tronc de première espèce, la seconde, *prise positivement*, à un tronc de seconde espèce. La hauteur de la pyramide qui correspond au tronc de première espèce est (661)

$$H=\frac{Ah}{A-x}=\frac{1^m.\sqrt{3}}{0,73624}=2^m,353$$

à $\frac{1}{2}$ millimètre près. Celle de la pyramide qui correspond au tronc de seconde espèce est (662)

$$H=\frac{Ah}{A+x}=\frac{1^m.\sqrt{3}}{2,26376}=0^m,765$$

à $\frac{1}{2}$ millimètre près.

THÉORÈME.

664. ***Un tronc de prisme triangulaire est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour base commune la base inférieure du tronc, et pour sommets, ceux de la base supérieure*** (*).

Soit (*fig.* 350) le tronc de prisme triangulaire ABCDEF (623); soient EH, DK, FL, les hauteurs des sommets de sa base supérieure par rapport au plan de sa base inférieure ABC.

Fig. 350.

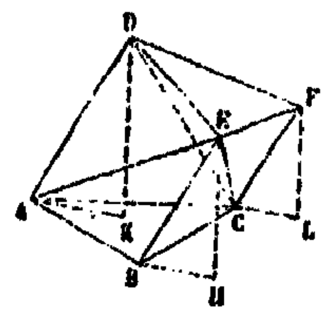
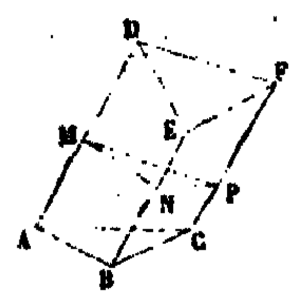


Fig. 351.



Faisons passer un plan par les trois sommets A, E, C, puis un autre plan par les trois sommets D, E, C; nous partagerons ainsi le tronc en trois pyramides triangulaires EABC, EDCF, EDCA.

La première EABC a pour base ABC la base inférieure du tronc, et pour hauteur EH.

Pour trouver le volume de la seconde pyramide EDCF, cherchons son rapport à la pyramide EABC. Si l'on prend pour sommets des pyramides EDCF, EABC, les points D et A, leurs bases sont les triangles ECF, ECB, et leur hauteur est la même, puisque l'arête DA est parallèle à la face EBCF. Ces pyramides sont donc entre elles comme les triangles ECF, ECB. D'ailleurs ces triangles, compris entre les parallèles EB, FC, ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases FC, EB. Donc, les pyramides EDCF, EABC, sont entre elles comme les arêtes FC et EB ou comme les hauteurs FL et EH, évidemment proportionnelles à ces arêtes en vertu de la similitude des triangles rectangles EBH, FCL.

(*) Nous devons la première idée de la démonstration suivante à M. le capitaine P. Bressant.

Pour trouver le volume de la troisième pyramide EDCA, cherchons son rapport à la pyramide EDCF. Ces deux pyramides ayant même hauteur sont entre elles comme leurs bases DCA, DCF, ou comme les arêtes DA et FC, puisque les triangles DCA, DCF, compris entre les parallèles DA, FC, ont même hauteur. Donc, les pyramides EDCA, EDCF, sont entre elles comme les hauteurs DK et FL, proportionnelles aux arêtes DA et FC.

Les trois pyramides EABC, EDCF, EDCA, étant proportionnelles aux hauteurs EH, FL, DK, et le volume de la première étant

$$\frac{ABC.EH}{3},$$

les volumes des deux autres sont respectivement

$$\frac{ABC.FL}{3} \quad \text{et} \quad \frac{ABC.DK}{3}.$$

SCOLIE.

665. Si le tronc considéré est un tronc de prisme droit, les hauteurs EH, FL, DK, se confondent avec les arêtes latérales EB, FC, DA, et la base ABC avec la section droite du tronc. Le volume du corps tronqué a donc alors pour mesure *le produit de sa section droite par la moyenne arithmétique de ses arêtes latérales.*

On étend facilement cet énoncé au cas du tronc de prisme oblique. Soit (*fig.* 351) le tronc de prisme oblique ABCDEF. Menons sa section droite MNP. Elle le partage en deux troncs de prisme MNPABC, MNPDEF, qui sont droits relativement à cette section considérée comme base. Le premier a pour mesure

$$MNP\left(\frac{MA+NB+PC}{3}\right);$$

le second,

$$MNP\left(\frac{MD+NE+PF}{3}\right).$$

Le tronc de prisme oblique ABCDEF, somme des deux troncs de prisme droits MNPABC, MNPDEF, a donc pour mesure la somme de leurs mesures, c'est-à-dire

$$\text{MNP}\left(\frac{\text{AD}+\text{EB}+\text{CF}}{3}\right).$$

COROLLAIRE.

666. En désignant par V, B, β, h, h', h'', a, a', a'', les nombres qui mesurent respectivement le volume d'un tronc de prisme triangulaire, sa base et sa section droite, les hauteurs des sommets de sa base supérieure au-dessus du plan de sa base inférieure et ses arêtes latérales, on a les formules

$$(1)\qquad V = B\left(\frac{h+h'+h''}{3}\right),$$

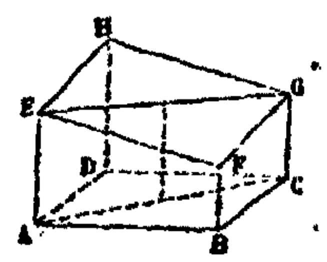
$$(2)\qquad V = \beta\left(\frac{a+a'+a''}{3}\right).$$

APPLICATION.

667. *La base* B *d'un parallélipipède droit tronqué est égale à* 36 *mètres carrés; ses arêtes latérales sont égales à* 5 *mètres,* 3 *mètres,* 7 *mètres et* 9 *mètres; on demande de calculer son volume.*

Soit (*fig.* 352) ABCDEFGH le parallélipipède tronqué pro-

Fig. 352.



posé. Menons le plan diagonal ACGE qui le partage en deux troncs de prismes triangulaires droits, dont les bases sont égales entre elles et à la moitié du parallélogramme ABCD. Les volumes de ces deux troncs de prismes étant respectivement, d'après les formules du numéro précédent,

$$18\left(\frac{5+3+7}{3}\right) \quad \text{et} \quad 18\left(\frac{5+9+7}{3}\right),$$

le volume cherché sera

$$V = 18 \cdot \frac{36}{3} = 216^{\text{mc}}.$$

THÉORÈME.

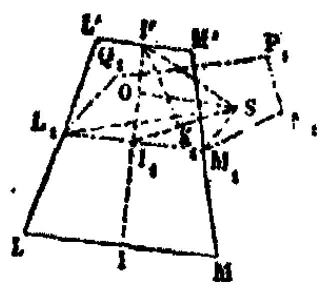
668. *Le volume de tout polyèdre ayant pour bases deux polygones quelconques situés dans des plans parallèles et pour faces latérales des trapèzes ou des triangles, est exprimé par la formule*

$$\frac{H}{6}(B+B'+4B''),$$

dans laquelle H *désigne la distance des deux plans parallèles,* B *la base inférieure du polyèdre,* B' *la base supérieure, et* B'' *la section équidistante des deux bases.*

En effet, soient $L_1M_1N_1P_1Q_1$ la section équidistante des bases (*fig.* 353)

Fig. 353.



et S un point pris à volonté dans l'intérieur de cette section. Le polyèdre peut être décomposé en pyramides ayant pour bases ses diverses faces et pour sommet commun le point S. Les volumes des deux pyramides qui reposent sur les bases B et B' ont évidemment pour mesures $\frac{BH}{6}$, $\frac{B'H}{6}$, et il reste à évaluer les volumes des pyramides qui reposent sur les faces latérales. Soit donc LMM'L' une quelconque de ces faces, par exemple celle qui répond au côté L_1M_1 du polygone $L_1M_1N_1P_1Q_1$; pour raisonner d'une manière générale, nous supposerons que cette face soit un trapèze (si c'était un triangle, l'un des côtés parallèles LM ou L'M' serait nul). Abaissons du point S la perpendiculaire SO sur le plan de la face LMM'L'; dans ce plan, menons par le point O la perpendiculaire $I'OI_1$ à L_1M_1 : la droite SI_1 sera perpendiculaire à L_1M_1; enfin, menons $I'K_1$ perpendiculaire au plan de la section $L_1M_1N_1P_1P_1$: $I'K_1$ sera la moitié de la distance H des bases du polyèdre. Cela posé, la pyramide SLMM'L' a pour mesure

$$L_1M_1 . 2I'I_1 . \frac{1}{3}SO.$$

Or, le produit $I'I_1 . SO$ peut être remplacé par le produit $SI_1 . I'K_1$ qui, comme lui, exprime le double de l'aire du triangle $I'I_1S$; on a donc, pour le volume de la pyramide,

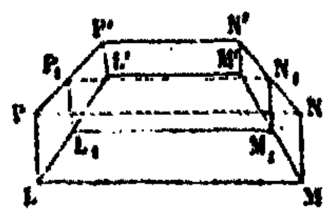
$$\frac{H}{6} 2L_1M_1 . SI_1 = \frac{H}{6} . 4 SL_1M_1.$$

Donc, pour avoir la somme des volumes des pyramides qui reposent sur les faces latérales du polyèdre, il faut multiplier par $\frac{H}{6}$ quatre fois la somme des triangles qui ont S pour sommet commun et pour bases les côtés de la section $L_1M_1N_1P_1Q_1$, c'est-à-dire multiplier par $\frac{H}{6}$ quatre fois l'aire B^1 de cette section.

Application.

669. Les amas de pierres, les fossés ou cuvettes établies de distance en distance le long des routes, les tombereaux, etc., sont terminés haut et bas par deux rectangles parallèles LMNP, L'M'N'P', et latéralement par quatre trapèzes LMM'L', MNN'M', NPP'N', PLL'P'. Exprimons le volume d'un pareil corps en fonction de la distance h des plans des deux rectangles et des dimensions a et b, a' et b', de ces rectangles (*fig.* 354).

Fig. 354.



La section $L_1M_1P_1Q_1$ équidistante des bases est un rectangle dont les dimensions L_1M_1, L_1P_1, sont évidemment égales à $\frac{1}{2}(a+a')$ et $\frac{1}{2}(b+b')$. Le volume du corps est donc, en vertu du théorème précédent, donné par la formule

$$\frac{h}{6}[ab+a'b'+(a+a')(b+b')],$$

que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\frac{bh}{6}(2a+a')+\frac{b'h}{6}(2a'+a).$$

Pour $b'=0$, le volume se réduit à

$$\frac{bh}{6}(2a+a'),$$

et le corps a la forme qu'on donne dans les parcs d'artillerie aux piles de boulets rectangulaires.

§ V. — FIGURES SYMÉTRIQUES.

DÉFINITIONS.

670. Deux points A et A′ sont *symétriques par rapport à un centre* O, lorsque ce centre O est le milieu de la droite AA′ (*fig.* 355).

Deux points A et A′ sont symétriques par rapport à un axe *xy* (*fig.* 356) ou à un plan P (*fig.* 357), lorsque cet axe ou ce plan est perpendiculaire au milieu de la droite AA′.

Fig. 355.

Fig. 356.

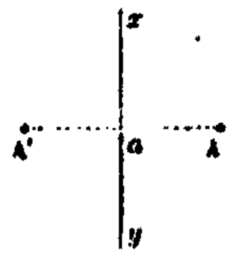
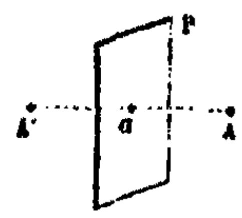


Fig. 357.



Deux figures sont symétriques par rapport à un centre, à un axe ou à un plan, lorsque leurs points sont deux à deux symétriques par rapport à ce centre, à cet axe ou à ce plan. Les points symétriques des deux figures sont dits *homologues*.

Deux figures symétriques, par rapport à un axe, sont égales. Car une rotation de 180 degrés autour de l'axe, imprimée à l'une des deux figures, amène évidemment cette figure sur l'autre.

La symétrie, par rapport à un axe, n'offre donc rien de particulier. Aussi, dans la suite de ce paragraphe, ne sera-t-il question que de la symétrie relative à un point ou à un plan.

THÉORÈME.

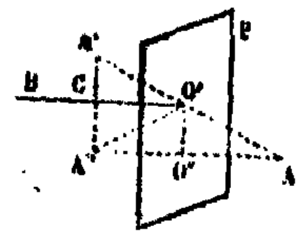
671. *Deux figures* F′ *et* F″, *symétriques d'une même figure* F *par rapport à deux centres différents* O′ *et* O″, *sont égales* (*fig.* 358) (*).

Soient A un point quelconque de la figure F, A′ son homologue dans la figure F′ et A″ son homologue dans la figure F″.

(*) BRAVAIS, *Journal de Mathématiques*, t. XIV. Cie Lyon

O′ étant le milieu de AA′ et O″ le milieu de AA″, la droite A′A″ est parallèle à O′O″ et égale à 2O′O″. La figure F″ n'est donc

Fig. 358.



que la figure F′ transportée parallèlement à la direction O′O″, d'une quantité égale à 2O′O″.

Corollaire.

672. La position du centre de symétrie n'influe ni sur la *forme* ni même sur l'*orientation* de la figure symétrique d'une figure donnée.

THÉORÈME.

673. *Si deux figures* F *et* F″ *sont symétriques par rapport à un plan* P, *on peut toujours les placer de telle sorte qu'elles soient symétriques par rapport à un centre* O′ *pris à volonté dans ce plan;* et réciproquement, *si deux figures* F *et* F′ *sont symétriques par rapport à un centre* O′, *on peut toujours les placer de telle sorte qu'elles soient symétriques par rapport à un plan quelconque* P *passant par ce centre* (*fig.* 358) (*).

Il suffit de faire tourner la figure F″ dans le premier cas, la figure F′ dans le second, de 180 degrés autour de la perpendiculaire O′CB élevée en O′ au plan P.

En effet, considérons une figure F, un plan P, et un point quelconque O′ de ce plan; soient F′ la figure symétrique de F par rapport au point O′, et F″ la figure symétrique de F par rapport au plan P. Le théorème direct et sa réciproque seront démontrés à la fois, si l'on fait voir que les figures F′ et F″ sont symétriques par rapport à la perpendiculaire O′B élevée en O′ au plan P (670). Or, soient A, A′, A″, trois points homologues des figures F, F′, F″, et O″ le point où la droite AA″ rencontre le plan P. O′ étant le milieu de AA′ et O″ le milieu de AA″, la

(*) Bravais, *Journal de Mathématiques*, t. XIV.

droite A'A" est parallèle à O'O", et, par suite, perpendiculaire sur O'B. D'ailleurs, O'B étant menée parallèlement à AA" par le milieu de AA', passe par le milieu C de A'A". Donc enfin, les points A' et A" sont symétriques par rapport à la droite O'B.

COROLLAIRES.

674. Deux figures symétriques d'une même figure F, par rapport à deux plans différents P et Q, ne sont autre chose, quant à la *forme*, que la figure symétrique de F par rapport à un centre quelconque (671); elles sont donc superposables. Mais leur *orientation* dans l'espace n'est pas la même, à moins que les plans P et Q ne soient parallèles.

675. En résumé (671, 674), si l'on fait abstraction de l'orientation pour n'avoir égard qu'à la forme, on voit qu'*une figure* F *n'a qu'une seule figure symétrique*. Toutes les figures obtenues en prenant la figure symétrique de F, par rapport à tel centre ou à tel plan qu'on veut, sont superposables.

SCOLIE.

676. Telle propriété de deux figures *symétriques* (670) est plus ou moins aisée à démontrer, suivant que l'on considère la symétrie relative à un plan ou à un centre. Le théorème précédent (673) permet de choisir le mode de symétrie qui facilite le plus les raisonnements. C'est généralement la symétrie relative à un centre qui rend les démonstrations plus simples, parce qu'en déplaçant le centre de symétrie on n'altère pas même l'orientation de la figure symétrique (672).

THÉORÈME.

677. *La figure symétrique d'une ligne droite est une ligne droite.*

Car, si l'on prend un point quelconque de la droite pour centre de symétrie, ce qui ne peut rien changer au résultat (672), on retrouve évidemment la droite elle-même pour figure symétrique.

COROLLAIRES.

678. *La distance de deux points est égale à celle de leurs symétriques.*

Car, si l'on prend pour centre de symétrie le milieu de la droite qui joint les deux points, on voit que ces deux points ne font que s'échanger.

679. *L'angle de deux droites est égal à l'angle de leurs symétriques.*

Car, en prenant pour centre de symétrie le sommet de cet angle, on voit que les droites symétriques forment l'angle qui lui est opposé par le sommet.

SCOLIE.

680. Il importe de se figurer nettement la situation de deux droites symétriques par rapport à un centre ou par rapport à un plan.

Fig. 359.

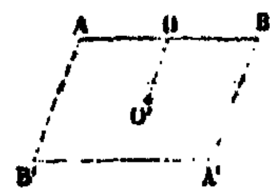
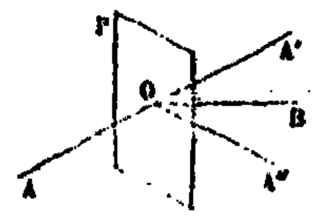


Fig. 360.



Soit AB (*fig.* 359) une droite dont on veut la droite symétrique par rapport à un centre donné O'. Prenons d'abord la droite symétrique de AB par rapport à son milieu O : le point A aura son symétrique en B, et le point B son symétrique en A; de sorte que la droite symétrique de AB, par rapport à son milieu O pris pour centre, sera BA. Dès lors, pour passer du centre O au centre O', il suffira (671) de faire décrire aux points B et A des droites BA' et AB' parallèles à OO' et doubles de OO'. On trouve ainsi, pour symétrique de AB, la droite A'B' *parallèle à* AB, *de sens contraire, et située à la même distance du centre* O' *de symétrie.*

Soit OA (*fig.* 360) une droite dont on veut la droite symétrique par rapport à un plan P qu'elle rencontre en O. En prenant d'abord la droite symétrique de OA par rapport au point O, on trouve son prolongement OA', et il suffit (673) de faire tourner OA' de 180 degrés autour de la perpendiculaire OB au plan P pour avoir la droite OA'' demandée. On voit que *les deux droites* OA et OA'', *symétriques par rapport au plan* P, *sont également inclinées sur ce plan, qu'elles rencontrent d'ailleurs au même point* O.

THÉORÈME.

681. *La figure symétrique d'un plan est un plan.*

Car, si l'on prend un point du plan pour centre de symétrie, on retrouve évidemment le plan lui-même pour figure symétrique.

COROLLAIRES.

682. *La figure symétrique d'un polygone plan est un polygone égal au premier.*

D'abord, c'est un polygone plan (681); il est ensuite égal au premier, parce qu'il a ses côtés et ses angles égaux aux côtés homologues et aux angles homologues de ce polygone (678, 679).

683. *L'angle de deux plans est égal à l'angle de leurs symétriques.*

Car, en prenant pour centre de symétrie un point de l'arête de l'angle dièdre donné, on voit que les plans symétriques de ses faces forment le dièdre qui lui est opposé par l'arête.

SCOLIE.

684. Deux plans symétriques par rapport à un centre sont parallèles et équidistants de ce centre.

Deux plans symétriques par rapport à un plan sont également inclinés sur ce plan, qu'ils coupent d'ailleurs suivant la même droite.

THÉORÈME.

685. *Deux polyèdres symétriques ont : 1° leurs faces égales chacune à chacune ; 2° leurs angles dièdres homologues égaux ; 3° leurs angles polyèdres homologues symétriques* (573).

1° L'égalité des faces homologues résulte du n° 682.

2° L'égalité des angles dièdres homologues résulte du n° 683.

3° Pour montrer clairement la relation qui existe entre un angle polyèdre A de la première figure P et l'angle polyèdre homologue A' de la seconde figure P', il suffit de construire la figure symétrique de P en prenant pour centre de symétrie le sommet A du premier angle polyèdre. On voit ainsi que l'angle polyèdre A' est l'angle polyèdre opposé par le sommet à l'angle polyèdre A.

THÉORÈME.

686. *Deux polyèdres symétriques* P *et* P' *sont équivalents.*

Si l'on décompose le polyèdre P en tétraèdres, à chacun de ces tétraèdres répondra un tétraèdre symétrique, et l'ensemble de ces tétraèdres symétriques formera le polyèdre P'. Deux polyèdres symétriques P et P', étant d'après cela composés d'un même nombre de tétraèdres symétriques deux à deux, il suffit de démontrer que deux tétraèdres symétriques sont équivalents.

Or, soit (*fig.* 361) SABC un tétraèdre quelconque. Formons son symétrique SA'B'C' par rapport au point S. Les triangles ABC, A'B'C', sont égaux (682), et leurs plans sont équidistants du point S (684). Par suite, les deux tétraèdres SABC, SA'B'C', ayant des bases et des hauteurs égales, sont équivalents.

Fig. 361.

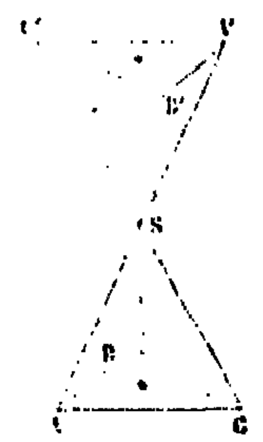
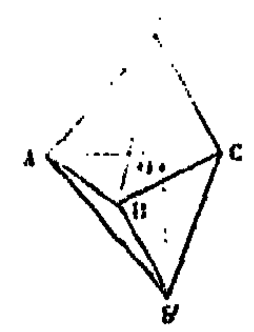


Fig. 362.



La symétrie relative à un plan fournirait dans ce cas une démonstration tout aussi simple ; car, comme la propriété dont il s'agit concerne la *grandeur* et non la *situation*, on peut prendre à volonté le plan de symétrie (674). Or, en construisant (*fig.* 362) la figure S'ABC symétrique de SABC par rapport au plan ABC, on voit que les deux tétraèdres SABC, S'ABC, ont même base ABC et des hauteurs égales SO et S'O; d'où résulte leur équivalence.

SCOLIE.

687. Les deux prismes dans lesquels un parallélipipède est

décomposé par un plan diagonal (627) sont évidemment symétriques par rapport au centre O du parallélipipède (*fig.* 330). C'est pourquoi ils ont même volume (686), bien qu'ils ne soient pas en général superposables. On ne peut les superposer que quand ils sont droits.

§ VI. — POLYÈDRES SEMBLABLES.

DÉFINITIONS.

688. On donne le nom de *polyèdres semblables* aux polyèdres qui ont leurs angles polyèdres égaux et qui sont compris sous un même nombre de faces semblables chacune à chacune.

L'égalité des angles polyèdres entraîne évidemment l'égalité des angles dièdres homologues.

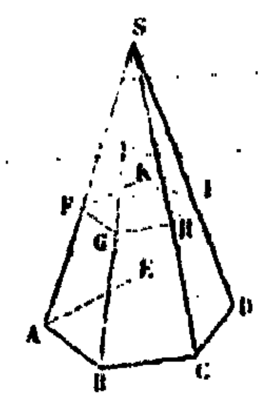
On appelle ***homologues*** les éléments (faces, arêtes, dièdres, etc.) qui se correspondent dans deux polyèdres semblables.

689. *Les arêtes homologues de deux polyèdres semblables sont proportionnelles.* Car les faces semblables de ces polyèdres ayant le même rapport de similitude (202), puisqu'une même arête appartient sur chaque polyèdre à deux faces adjacentes, le rapport de deux arêtes homologues quelconques est constant.

THÉORÈME.

690. *En coupant une pyramide par un plan parallèle à la base, on détermine une seconde pyramide semblable à la première.*

Fig. 363.



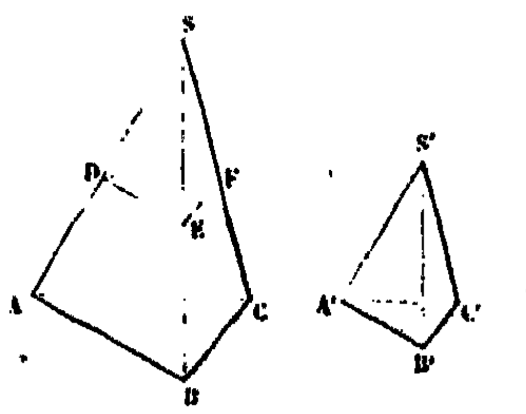
Soit (*fig.* 363) la pyramide SABCDE dans laquelle un plan parallèle à la base a déterminé la section FGHIK. Les deux pyramides SABCDE, SFGHIK, ont leurs faces semblables, car les polygones ABCDE, FGHIK, sont semblables (646), et les faces latérales SAB et SFG, SBC et SGH, etc., le sont aussi (203), par suite du parallélisme des côtés de ces deux polygones.

Quant aux angles polyèdres, l'angle polyèdre S est commun, et deux angles trièdres homologues tels que A et F sont égaux (586) comme ayant un angle dièdre commun compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées, savoir : l'angle dièdre SA commun, la face SAB égale à la face SFG et la face SAE égale à la face SFK.

THÉORÈME.

691. *Deux pyramides triangulaires sont semblables, lorsqu'elles ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées.*

Fig. 364.



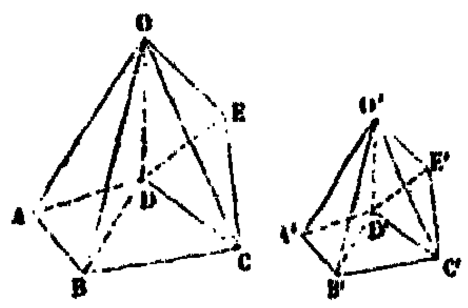
Soient (*fig.* 364) les pyramides SABC, S'A'B'C', dans lesquelles l'angle dièdre SA est égal à l'angle dièdre S'A', et les faces SAB, SAC, semblables aux faces S'A'B', S'A'C', et semblablement placées.

Portons la seconde pyramide sur la première, de manière qu'elles aient même sommet et que les faces homologues de leurs angles dièdres égaux coïncident. Le triangle S'A'B' étant semblable au triangle SAB et le point A' tombant en D sur SA, S'B' se confondra avec SB, et le point B' viendra en un point E tel, que DE soit parallèle à AB. De même, le triangle S'A'C' étant semblable au triangle SAC, S'C' se confondra avec SC, et le point C′ viendra en un point F tel, que DF soit parallèle à AC. La base A′B′C′ occupera donc alors la position DEF, et son plan sera parallèle au plan de la base ABC (528). La pyramide SDEF étant semblable à la pyramide SABC (690), il en est de même de la pyramide S′A′B′C′ qu'elle représente.

THÉORÈME.

692. *Deux polyèdres, composés d'un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement disposés, sont semblables.*

Fig. 365.



Soient (*fig.* 365) OABD, OBCD, OCDE, etc., O′A′B′D′, O′B′C′D′, O′C′D′E′, etc., deux séries de tétraèdres respectivement semblables et semblablement disposés; le polyèdre formé par les premiers tétraèdres est semblable au polyèdre formé par les seconds.

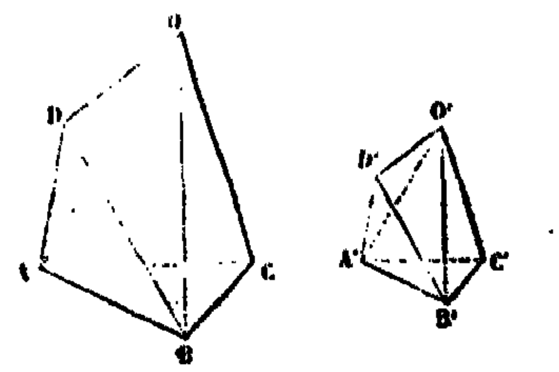
En effet :

1° Les faces homologues des deux polyèdres sont semblables comme composées d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés. Considérons, par exemple, la face ABCD du premier polyèdre. Les triangles ABD, BCD, qui la constituent, sont semblables aux triangles A′B′D′, B′C′D′, comme faces homologues de tétraèdres semblables. De plus, les triangles ABD, BCD, étant dans un même plan, les angles dièdres OBDA, OBDC, des deux tétraèdres OABD, OBCD, sont supplémentaires (553); il en est donc de même des angles dièdres homologues O′B′D′A′, O′B′D′C′, des tétraèdres semblables O′A′B′D′, O′B′C′D′. Par suite, les deux triangles A′B′D′, B′C′D′, sont aussi dans un même plan, et constituent sur le second polyèdre une face A′B′C′D′ semblable à la face ABCD.

2° Les angles polyèdres des deux polyèdres sont égaux comme ayant tous leurs éléments égaux et semblablement disposés; car les faces homologues des deux polyèdres étant semblables et semblablement disposées, leurs angles polyèdres ont d'abord toutes leurs faces égales chacune à chacune et semblablement disposées. De plus, les angles dièdres homologues de ces angles polyèdres sont égaux, soit comme dièdres homologues de deux tétraèdres semblables, soit comme sommes d'angles dièdres égaux. L'angle dièdre BCDE, par exemple, formé par les deux faces ABCD, CDE, du premier polyèdre, est la somme des deux angles dièdres BCDO, ECDO, qui appartiennent aux deux tétraèdres OBCD, OCDE; et l'angle dièdre B'C'D'E', formé par les deux faces A'B'C'D', C'D'E', du second polyèdre, est la somme des deux angles dièdres homologues B'C'D'O', E'C'D'O', qui appartiennent aux deux tétraèdres semblables O'B'C'D', O'C'D'E.

693. Réciproquement, *deux polyèdres semblables peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés.*

Fig. 366.



Soit (*fig.* 366) un point O pris dans l'intérieur du premier polyèdre; décomposons-le en tétraèdres en prenant le point O pour centre de décomposition (657), et soit OABC l'un des tétraèdres obtenus. Les points A, B, C, ayant pour homologues sur le second polyèdre les points A', B', C', menons un plan O'A'B' faisant au-dessus de A'B'C' un angle dièdre égal à celui que forme le plan AOB au-dessus de ABC, et dans ce plan O'A'B' construisons le triangle O'A'B' semblable au triangle OAB. En prenant le point O' pour centre de décomposition, on décompose donc le second polyèdre en tétraèdres qui correspondent à ceux du premier polyèdre, et il reste seulement à prouver que ces tétraèdres sont semblables deux à deux.

Soit D un quatrième sommet du premier polyèdre, tel que les deux triangles ABC, ABD, aient un côté commun, et soient situés sur la même face ou sur deux faces adjacentes. Comparons les deux tétraèdres OABD, O'A'B'D'. Les faces OAB, O'A'B', sont semblables comme faces homologues des deux tétraèdres semblables OABC, O'A'B'C'; les faces ABD, A'B'D', le sont aussi comme triangles homologues de deux faces semblables des polyèdres donnés. De plus, si les deux triangles ABC, ABD, sont dans un même plan, les deux dièdres OABD, O'A'B'D', sont égaux comme suppléments des angles dièdres égaux OABC, O'A'B'C'; si les deux triangles ABC, ABD, ne sont pas dans un même plan, les deux angles dièdres OABD, O'A'B'D', sont encore égaux comme différences des angles dièdres égaux DABC et OABC d'une part, D'A'B'C' et O'A'B'C' d'autre part. Dans les deux cas, les tétraèdres OABD, O'A'B'D', sont semblables (691).

La même démonstration s'appliquera de proche en proche. La similitude des deux tétraèdres considérés en dernier lieu permettra toujours de vérifier la similitude des deux tétraèdres suivants.

Scolies.

694. Deux points O et O' rapportés à deux polyèdres semblables sont dits *homologues*, lorsqu'en joignant l'un d'eux O aux sommets consécutifs A, B, C, de l'un des polyèdres, et l'autre O' aux sommets homologues A', B', C', de l'autre polyèdre, on obtient deux tétraèdres OABC, O'A'B'C', semblables et semblablement disposés par rapport aux deux polyèdres.

Il résulte de la démonstration précédente que deux points homologues quelconques peuvent être pris pour centres de décomposition de deux polyèdres semblables en tétraèdres semblables et semblablement disposés.

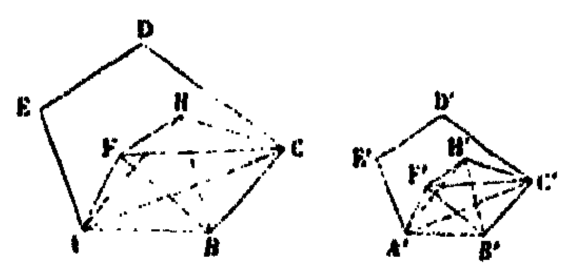
Si le point O est extérieur au premier polyèdre, son homologue O' est aussi extérieur au second polyèdre; il faut alors considérer les deux polyèdres comme composés de tétraèdres additifs et de tétraèdres soustractifs.

Si le point O coïncide avec l'un des sommets A du premier polyèdre, son homologue O' coïncide avec le sommet A' du second polyèdre, et les diagonales homologues des deux polyèdres, relatives aux sommets A et A', se confondent avec les arêtes latérales de leurs tétraèdres homologues.

695. Deux droites rapportées à deux polyèdres semblables sont dites *homologues*, lorsque leurs extrémités sont deux à deux des points homologues. Telles sont, par exemple, les diagonales relatives à des sommets homologues.

Le rapport de deux droites homologues quelconques est égal au rapport de similitude des faces homologues des deux polyèdres.

Fig. 367.



Soient (*fig.* 367) ABCDE, A'B'C'D'E', deux faces homologues quelconques des polyèdres donnés, et FH, F'H', deux droites homologues quelconques. Formons les tétraèdres homologues FABC, F'A'B'C', HABC, H'A'B'C'. La similitude de ces tétraèdres entraîne celle des tétraèdres FHAC, F'H'A'C'. En effet, les faces FAC, HAC, sont respectivement semblables aux faces F'A'C', H'A'C', et l'angle dièdre FACH, différence des angles dièdres FACB, HACB, est égal à l'angle dièdre F'A'C'H', différence des angles dièdres égaux F'A'C'B', H'A'C'B'. Les deux tétraèdres FHAC, F'H'A'C', étant semblables, on a (689)

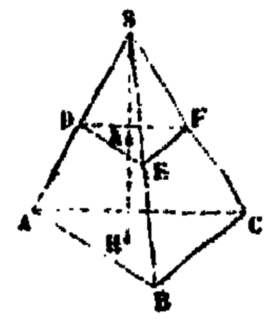
$$\frac{FH}{F'H'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

THÉORÈME.

696. *Le rapport des volumes de deux polyèdres semblables est égal au cube du rapport de similitude de leurs faces homologues, ou deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.*

Soient d'abord (*fig.* 368) deux tétraèdres semblables SABC, SDEF, qu'on peut toujours supposer placés l'un dans l'autre comme l'indique la figure (690), de manière que leurs bases ABC, DEF, soient parallèles.

Fig. 368.



Le premier tétraèdre SABC ayant pour base ABC et pour hauteur SH, son volume a pour expression

$$\frac{ABC.SH}{3}.$$

Le second tétraèdre ayant pour base DEF et pour hauteur SK, son volume est égal à

$$\frac{DEF.SK}{3}.$$

Le rapport cherché est par suite égal à

$$\frac{ABC.SH}{DEF.SK}=\frac{ABC}{DEF}.\frac{SH}{SK}.$$

Mais le plan DEF étant parallèle au plan ABC, on a (647, 646)

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{\overline{SH}^2}{\overline{SK}^2} \quad \text{et} \quad \frac{SH}{SK}=\frac{SA}{SD}=\frac{AB}{DE}.$$

Le rapport des volumes des deux tétraèdres est donc représenté par

$$\frac{\overline{SH}^3}{\overline{SK}^3} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{AB}^3}{\overline{DE}^3}.$$

Soient maintenant deux polyèdres semblables P et P'. Le rapport de similitude de leurs faces homologues sera (689) celui de deux arêtes homologues quelconques AB et A'B'. Ces deux polyèdres sont décomposables en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés (693), et le rapport de similitude des faces homologues de deux tétraèdres homologues est égal (695) au rapport $\frac{AB}{A'B'}$. Si le polyèdre P est composé des tétraèdres T, T_1, T_2, et le polyèdre P' des tétraèdres homologues T', T'_1, T'_2, on aura donc d'après ce qui précède

$$\frac{T}{T'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3},\quad \frac{T_1}{T'_1} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3},\quad \frac{T_2}{T'_2} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3},$$

et, par suite, en appliquant un théorème connu,

$$\frac{T+T_1+T_2}{T'+T'_1+T'_2} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{P'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}.$$

Scolies.

697. *Les aires de deux polyèdres semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs arêtes homologues.*

698. De la relation démontrée, on déduit réciproquement

$$\frac{AB}{A'B'} = \sqrt[3]{\frac{P}{P'}}.$$

Donc, lorsqu'on veut *amplifier* ou *réduire* un polyèdre dans un rapport donné, l'*échelle* à adopter pour amplifier ou réduire les arêtes de ce polyèdre est égale à la racine cubique du rapport donné. Par exemple, si le volume du nouveau polyèdre doit être la millième partie du polyèdre donné, il faudra faire ses arêtes dix fois plus petites que les arêtes homologues du polyèdre donné.

Application.

699. *Étant donnée une pyramide dont l'une des arêtes* SA *est égale à* 1 *mètre, par quels points* a *et* a' *de cette arête faut-il mener des plans parallèles à la base de la pyramide, pour partager son volume en trois parties équivalentes?*

Les pyramides partielles dont les arêtes sont Sa et Sa' représentent respectivement le tiers et les deux tiers de la pyramide donnée. On aura donc (698)

$$\frac{Sa}{SA}=\sqrt[3]{\frac{1}{3}},\quad \frac{Sa'}{SA}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}},$$

d'où, en opérant par logarithmes et en faisant $SA = 1$ mètre,

$$Sa = 0^m,693 \quad \text{et} \quad Sa' = 0^m,874,$$

à $\frac{1}{2}$ millimètre près.

§ VII. — APPENDICE.

Propriétés générales des polyèdres.

THÉORÈME.

700. *Dans tout polyèdre convexe, le nombre des arêtes augmenté de deux est égal au nombre des faces augmenté de celui des sommets.*

Soient A le nombre des arêtes, F celui des faces, et S celui des sommets du polyèdre proposé; il faut démontrer l'égalité

$$(1) \qquad A + 2 = F + S.$$

Considérons d'abord une surface polyédrale convexe *ouverte*, terminée à une ligne brisée plane ou gauche. Si l'on conserve les notations précédentes, les éléments analogues de cette surface satisferont à la relation

$$A + 1 = F + S.$$

En effet, cette formule est vraie dans le cas d'une seule face; car pour un polygone, le nombre des arêtes est égal à celui des sommets. D'après un mode de démonstration connu, il suffit donc de prouver que la formule étant vérifiée dans le cas de F faces, elle l'est encore dans le cas de $F + 1$ faces.

Pour cela, modifions la ligne brisée qui termine la surface polyédrale en ajoutant à cette surface un polygone ayant m côtés et m sommets. Cette nouvelle face laissant toujours la surface ouverte, son contour ne pourra coïncider entièrement avec celui de la ligne terminale primitive; et si elle a avec cette ligne p arêtes communes, elle aura avec elle $p + 1$ sommets communs. En désignant par F', A', S', les nombres de faces, d'arêtes et de sommets de la nouvelle surface polyédrale, on aura donc

$$F' = F + 1, \quad A' = A + m - p, \quad S' = S + m - (p + 1).$$

Ces valeurs satisfaisant encore à la relation $A + 1 = F + S$, la généralité de cette relation est établie.

Ceci posé, revenons au cas d'un polyèdre convexe et à l'égalité (1). Pour passer de ce polyèdre à une surface polyédrale ouverte, il suffit d'en enlever une face. Les nombres d'arêtes et de sommets ne seront pas modifiés et resteront A et S; mais le nombre des faces diminué d'une unité deviendra F — 1. En appliquant la relation trouvée à ces valeurs, on aura donc

$$A + 1 = (F - 1) + S,$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad A + 2 = F + S.$$

Le remarquable théorème exprimé par cette égalité a été découvert par Euler. La démonstration qui précède appartient à Cauchy.

COROLLAIRES.

701. Soient, dans le polyèdre proposé, t le nombre des faces triangulaires, q le nombre des faces quadrangulaires, p celui des faces pentagonales, h, h', o, etc., ceux des faces hexagonales, heptagonales, octogonales, etc. Chaque arête étant commune à deux faces, on aura évidemment

$$(2) \qquad F = t + q + p + h + h' + o + \ldots,$$

$$(3) \qquad 2A = 3t + 4q + 5p + 6h + 7h' + 8o + \ldots.$$

Soient T, Q, P, H, H', O, etc., les nombres d'angles trièdres, tétraèdres, pentaèdres, hexaèdres, etc., du polyèdre proposé; chaque arête unissant deux sommets, on aura de même

$$(4) \qquad S = T + Q + H + H' + O + \ldots,$$

$$(5) \qquad 2A = 3T + 4Q + 5P + 6H + 7H' + 8O + \ldots.$$

D'après l'égalité (3), *le nombre des faces dont le nombre des côtés est impair* (c'est-à-dire le nombre $t + p + h' + \ldots$) *est toujours pair;* d'après l'égalité (5), *le nombre des angles polyèdres ou des sommets dont le nombre des arêtes est impair* (c'est-à-dire le nombre $T + P + H' + \ldots$) *est toujours pair.*

702. On peut exprimer F en fonction de T, Q, P, H, H', O, etc.; il suffit d'éliminer S et A entre les relations (1), (4) et (5). On trouve

$$(6) \qquad 2F = 4 + T + 2Q + 3P + 4H + 5H' + 6O + \ldots.$$

De même, on peut exprimer S en fonction de t, q, p, h, h', o, etc.; il suffit d'éliminer F et A entre les relations (1), (2) et (3). On trouve

$$(7) \qquad 2S = 4 + t + 2q + 3p + 4h + 5h' + 6o + \ldots.$$

SCOLIE.

703. *Si l'on conçoit la surface d'un polyèdre convexe décomposée en plusieurs portions, chaque portion étant une face seule ou le système de plusieurs faces voisines, le théorème d'Euler a encore lieu entre le nombre des portions dont il s'agit, le nombre des arêtes qui servent de*

limites à ces mêmes portions, et le nombre des sommets compris entre ces arêtes.

En effet, que les droites qui terminent chaque portion soient ou non dans un même plan, les nombres considérés ne varient pas. Or, dans la première hypothèse, sans rien changer à ces mêmes nombres, on pourrait former un nouveau polyèdre en substituant à chaque portion une face plane terminée au même contour, et le théorème d'Euler serait applicable à ce polyèdre.

Toutes les formules que nous venons d'établir subsistent dans ce cas; seulement, t est alors le nombre des portions de la surface terminées par un contour triangulaire, q, p, etc., les nombres des portions dont le contour est quadrangulaire, pentagonal, etc.

THÉORÈME.

704. *Dans tout polyèdre convexe, le nombre des faces triangulaires, augmenté de celui des angles trièdres, est au moins égal à huit.*

En effet, si dans la relation (1), qu'on peut écrire

$$4F + 4S = 4A + 8,$$

on remplace F par la valeur (2), S par la valeur (4), et $4A$ par la somme des valeurs (3) et (5), on trouve

$$t + T = 8 + (p + P) + 2(h + H) + 3(h' + H') + 4(o + O) + \ldots.$$

D'après cela, *il n'existe aucun polyèdre convexe qui ne renferme ni face triangulaire, ni angle trièdre.*

THÉORÈME.

705. 1° *Il n'existe aucun polyèdre convexe dont toutes les faces aient plus de cinq côtés;* 2° *il n'existe aucun polyèdre convexe dont tous les angles polyèdres aient plus de cinq arêtes.*

En effet :

1° Si, dans l'inégalité $2A > 3S$, qui résulte de la comparaison de (4) et (5), on remplace A et S par les valeurs (3) et (7), on trouve la formule

$$3t + 2q + p > 12 + (h' + 2o + \ldots),$$

qui prouve que t, q et p, ne peuvent être nuls à la fois.

2° Si, dans l'inégalité $2A > 3F$, qui résulte de la comparaison de (2) et (3), on remplace A et F par les valeurs (5) et (6), on trouve la formule

$$3T + 2Q + P > 12 + (H' + 2O + \ldots),$$

qui prouve que T, Q et P, ne peuvent être nuls à la fois.

SCOLIE.

706. La symétrie de la formule d'Euler par rapport aux nombres F et S et la similitude des équations (2) et (4), (3) et (5), entraînent dans les relations qu'on peut en déduire une corrélation que le lecteur a sans doute déjà remarquée.

THÉORÈME.

707. *Il ne peut exister que cinq espèces de polyèdres convexes dont toutes les faces aient le même nombre n de côtés et dont tous les angles polyèdres aient le même nombre m d'arêtes.*

En effet, chaque arête appartenant à deux faces et joignant deux sommets, on a

$$2A = nF = mS.$$

L'élimination de A et de S entre ces équations et la formule d'Euler, donne

$$F = \frac{4m}{2(m+n) - mn}.$$

Pour $n = 3$, cette relation devient

$$F = \frac{4m}{6-m},$$

et l'on ne peut donner alors à m que les valeurs 3, 4 et 5, auxquelles répondent respectivement les valeurs $F = 4$, $F = 8$, $F = 20$.

Pour $n = 4$ ou $n = 5$, on a

$$F = \frac{2m}{4-m} \quad \text{ou} \quad F = \frac{4m}{10-3m}.$$

On ne peut donner dans les deux cas à m que la valeur 3, et il en résulte $F = 6$ ou $F = 12$.

Pour $n = 6$, on a

$$F = \frac{m}{3-m},$$

et l'on ne peut donner à m aucune valeur. Il en est de même à fortiori pour $n > 6$; ce résultat était d'avance indiqué par le théorème du n° 705.

Il n'y a donc que cinq espèces de polyèdres convexes dont toutes les faces aient le même nombre de côtés et tous les angles polyèdres le même nombre d'arêtes: ce sont le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre à faces triangles; l'hexaèdre à faces quadrilatères, le dodécaèdre à faces pentagones.

THÉORÈME.

708. *L'angle droit étant pris pour unité, la somme des angles de toutes les faces d'un polyèdre convexe est égale à quatre fois le nombre des sommets diminué de 2.*

L'angle droit étant l'unité d'angle, on sait que, pour une face quelconque de n côtés, la somme des angles est $2n-4$. En désignant par n, n', n'', etc., les nombres de côtés des différentes faces, on aura donc pour toutes les faces

$$(2n-4)+(2n'-4)+(2n''-4)+\ldots$$

Cette suite contiendra d'ailleurs F termes. La somme cherchée a donc pour expression

$$2(n+n'+n''+\ldots)-4F.$$

Chaque côté appartenant à deux faces, la parenthèse est égale à $2A$, et l'on obtient la formule

$$4(A-F) \quad \text{ou} \quad 4(S-2)$$

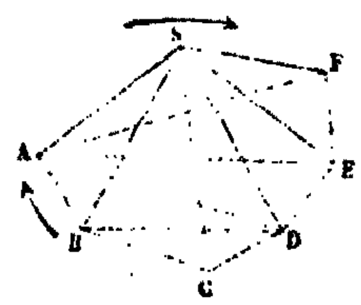
d'après le théorème d'Euler.

Conditions d'égalité et de similitude de deux polyèdres convexes.

LEMME.

709. *Si, dans un angle polyèdre convexe dont toutes les faces moins une seule demeurent constantes, un ou plusieurs angles dièdres non adjacents à la face qui peut varier augmentent ou diminuent tous à la fois, cette face elle-même augmente ou diminue.*

Fig. 369.



Soit (*fig.* 369) l'angle polyèdre SABCDEF et, dans cet angle, la seule face qui puisse varier SAB. Supposons d'abord qu'un seul angle dièdre SD augmente ou diminue. Menons les plans ASD, BSD. Les deux angles polyèdres SBCD, SADEF, ne changent ni de forme ni de grandeur, puisque toutes leurs faces et les angles dièdres qu'elles comprennent restent constants. Par suite, si l'angle dièdre ASDB augmente ou diminue, comme il est compris dans l'angle trièdre SABD entre deux faces invariables de grandeur, la face opposée ASB augmente ou diminue (575).

Si plusieurs angles dièdres non adjacents à la face ASB augmentent ou diminuent à la fois, il en sera de même de cette face; car on peut faire varier isolément, et l'un après l'autre, les angles dièdres considérés, et d'après ce qui précède, chaque changement partiel en produira toujours un de même nature sur la face ASB.

COROLLAIRE.

710. Si, toutes les faces demeurant constantes, certains dièdres d'un angle polyèdre viennent à changer, il est impossible que tous varient dans le même sens, c'est-à-dire il est impossible que tous augmentent ou que tous diminuent.

LEMME.

711. *Dans un angle polyèdre convexe ayant plus de trois faces, toutes les faces demeurant constantes et l'angle polyèdre restant convexe, on suppose que plusieurs angles dièdres ont, les uns augmenté, les autres diminué; si alors, en faisant le tour de l'angle polyèdre, on affecte du signe + l'arête de chaque angle dièdre augmenté, du signe — l'arête de chaque angle dièdre diminué, on trouvera toujours dans le tour entier au moins quatre variations de signes.*

Il est impossible qu'il n'y ait que deux variations de signes, c'est-à-dire il est impossible qu'à une série de signes + succède une série de signes — qui ramène au premier signe +. En effet, si (*fig.* 369), les arêtes SA, SF, SE, étant affectées du signe +, les arêtes suivantes SD, SC, SB. étaient affectées du signe —, la face ASE qui sépare les deux angles polyèdres SAFE, SEDCBA, augmenterait dans l'un et diminuerait dans l'autre (709).

Puisqu'il y a plus de deux variations de signes et qu'on doit fermer le circuit en rejoignant le signe qui a servi de point de départ, il est impossible que le nombre des variations soit impair. Puisque ce nombre est pair et plus grand que 2, il est au moins égal à 4.

THÉORÈME.

712. *Dans un polyèdre convexe dont toutes les faces sont constantes, les angles dièdres sont aussi constants.*

« En effet, supposons, contre l'énoncé ci-dessus, que l'on puisse faire » varier les inclinaisons des faces adjacentes, sans détruire le polyèdre; » et pour simplifier encore la question, supposons d'abord que l'on puisse » faire varier toutes les inclinaisons à la fois. Les inclinaisons sur certaines » arêtes varieront en plus, les inclinaisons sur d'autres arêtes varieront » en moins; et en comparant deux à deux, relativement aux signes de » leurs variations, les inclinaisons des arêtes qui, dans chaque face, aboutissent aux mêmes sommets, on trouvera, en passant successivement » d'une arête à l'autre, plusieurs changements de signes. C'est le nombre » de ces changements que nous allons chercher à déterminer (*). »

Il suit du lemme précédent que chaque angle polyèdre présente sur ses

(*) CAUCHY, *Journal de l'École Polytechnique*, XVI^e Cahier, p. 96.

arêtes au moins quatre changements de signes. Le nombre des changements de signes obtenus en considérant tous les angles polyèdres du polyèdre serait donc au moins égal à 4S. Or il est aisé de voir que cela est impossible.

Remarquons qu'en faisant le tour de chaque sommet ou en faisant celui du périmètre de chaque face, on doit trouver le même nombre total de variations de signes. En effet, chaque variation de signes autour d'un sommet correspond à deux arêtes de signes différents qui se suivent sur le périmètre d'une même face, et réciproquement.

Mais, sur un périmètre, le nombre des variations ne peut dépasser le nombre des côtés et ne peut être impair; car, puisqu'on doit revenir au point de départ, chaque variation en entraîne nécessairement une seconde. Chaque face triangulaire ne peut donc fournir plus de deux changements de signes; les quadrilatères et les pentagones ne peuvent en fournir plus de quatre; de même, les hexagones et les heptagones plus de six, et ainsi de suite. Toutes les faces ou tous les sommets du polyèdre ne pourront donc donner plus de changements de signes qu'il n'y a d'unités dans la somme

$$2t+4q+4p+6h+6h'+8o+\ldots.$$

Or cette somme est inférieure à 4S; car on a (702), d'après la formule (7),

$$4S=8+2t+4q+6p+8h+10h'+12o+\ldots.$$

Il faut en conclure qu'il est impossible que les inclinaisons sur les arêtes changent toutes à la fois.

« Si l'on suppose, en second lieu, que, dans le polyèdre donné, non-» seulement les faces, mais encore les inclinaisons sur plusieurs arêtes » restent invariables, et que cependant on puisse, sans détruire le po-» lyèdre, faire varier les inclinaisons sur les arêtes restantes; alors, pour » démontrer l'absurdité de l'hypothèse, il suffira de concevoir la surface » du polyèdre décomposée en autant de portions que les arêtes sur les-» quelles les inclinaisons varient forment de contours différents, et d'ap-» pliquer aux portions, aux arêtes qui les terminent, et aux sommets » compris entre ces arêtes, les mêmes raisonnements que nous avons ap-» pliqués, dans l'hypothèse précédente, aux faces, aux arêtes et aux som-» mets du polyèdre (*). » On y parviendra en s'appuyant encore sur le lemme précédent et sur le scolie du n° 703.

Corollaires.

713. Il suit du théorème précédent que *deux polyèdres convexes, compris sous un même nombre de faces égales, sont égaux ou symétriques*, suivant que les faces égales sont ou non semblablement placées.

(*) Cauchy, *loc. cit.*

714. Il suit encore du théorème précédent que, *lorsque deux polyèdres convexes sont compris sous un même nombre de faces semblables, le second est semblable au premier ou à un troisième polyèdre symétrique du premier*, suivant que les faces semblables sont ou non semblablement placées.

PROBLÈME.

715. *Chercher le nombre de conditions nécessaires pour déterminer un polyèdre convexe.*

1° Le polyèdre est d'une nature déterminée, c'est-à-dire qu'on connaît pour ce polyèdre les nombres A, F, S, t, q, p, h, h', etc.

Prenons pour base une des faces du polyèdre. Si elle a n côtés, il faut $2n-3$ conditions pour la déterminer (216). Il y a hors de cette base $S-n$ sommets. Pour déterminer un point dans l'espace, il faut trois conditions (643). On aurait donc en tout $2n-3+3(S-n)$ ou $3S-n-3$ conditions. Mais les sommets qui répondent à une même face sont dans un même plan, et trois points suffisent pour déterminer un plan. Par conséquent, pour tous les sommets d'une même face, en sus des trois premiers, il ne faut réellement que deux conditions. On doit donc diminuer $3(S-n)$ de la somme $(n'-3)+(n''-3)+(n'''-3)+\ldots$, en désignant par n', n'', n''', etc., les nombres de côtés des $F-1$ faces qui restent en dehors de la base choisie. Le nombre de conditions demandé est donc finalement

$$3(F+S-2)-(n+n'+n''+n'''+\ldots);$$

mais (700, 701)

$$n+n'+n''+n'''+\ldots=2A \quad \text{et} \quad S+F-2=A.$$

Le nombre cherché se réduit donc à A. Ainsi, *le nombre de données nécessaires pour déterminer un polyèdre*, dans les conditions indiquées, *est égal au nombre de ses arêtes.*

« Remarquez cependant que les données dont il s'agit ne doivent pas » être prises au hasard parmi les lignes et les angles qui constituent les » éléments du polyèdre; car, quoiqu'on eût autant d'équations que d'in» connues, il pourrait se faire que certaines relations entre les quantités » connues rendissent le problème indéterminé. Ainsi il semblerait, d'après » le théorème qu'on vient de trouver, que la connaissance des arêtes » seules suffit en général pour déterminer un polyèdre; mais il y a des » cas où cette connaissance n'est pas suffisante. Par exemple, étant donné » un prisme non triangulaire quelconque, on pourra former une infinité » d'autres prismes qui auront des arêtes égales et placées de la même ma» nière. Car, dès que la base a plus de trois côtés, on peut, en conser» vant les côtés, changer les angles et donner ainsi à cette base une infi» nité de formes différentes; on peut aussi changer la position de l'arête

» longitudinale du prisme par rapport au plan de la base; enfin, on peut » combiner ces deux changements l'un avec l'autre, et il en résultera » toujours un prisme dont les arêtes ou côtés n'auront pas changé. D'où » l'on voit que les arêtes seules ne suffisent pas dans ce cas pour déter- » miner le polyèdre. Les données qu'il convient de prendre sont celles » qui ne laissent aucune indétermination (*). »

2° La nature du polyèdre n'est pas déterminée, et l'on connaît seulement le nombre de ses sommets.

Prenons trois de ces sommets à volonté en construisant un triangle où il entre trois des éléments donnés. Si l'on considère ce triangle comme base, il y a $S-3$ sommets hors de cette base, et la détermination de chacun d'eux exige trois conditions. Le nombre cherché est donc ici $3+3(S-3)$ ou $3S-6$.

SCOLIE.

716. Si un côté et $A-1$ angles déterminent un polyèdre de nature donnée, un autre côté pris à volonté et les mêmes angles déterminent un polyèdre semblable au premier. Donc, *pour que deux polyèdres de même nature soient semblables, il faut* $A-1$ *conditions*.

Si les deux polyèdres ne sont pas de nature déterminée, et s'ils ont seulement le même nombre S d'angles polyèdres, il faut $3S-7$ conditions pour qu'ils soient semblables.

Relation entre l'étendue d'une figure plane et celle de sa projection orthogonale.

717. Soit AOB un angle aigu quelconque (*fig.* 370); MP étant une perpendiculaire à l'un des côtés, le rapport

$$\frac{OP}{OM}$$

est dit le *cosinus* de l'angle AOB : on le désigne par la notation cos AOB.

Pour que cette définition n'offre rien de contradictoire, il faut que la valeur du rapport $\frac{OP}{OM}$ soit indépendante de la position de la perpendiculaire MP; or, si M'P' est une autre perpendiculaire au côté OB, on a évidemment, par les triangles semblables MOP, M'OP',

$$\frac{OP}{OM}=\frac{OP'}{OM'}.$$

Il existe des tables qui donnent les cosinus ou plutôt les logarithmes des cosinus de tous les angles compris entre 0 et 90 degrés.

(*) LEGENDRE, *Éléments de Géométrie*, 14e édition, Note VIII.

La définition qui précède n'a d'ailleurs d'autre but que de simplifier les énoncés des théorèmes suivants.

Fig. 370.

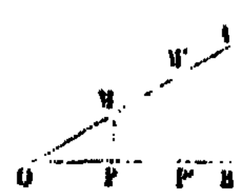


Fig. 371.

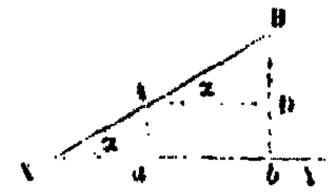
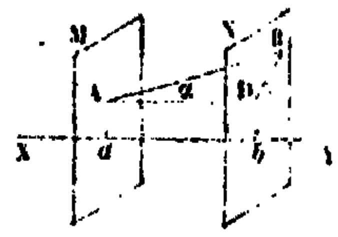


Fig. 372.



THÉORÈME.

718. ***La projection d'une droite AB sur un axe XY est égale au produit de la longueur AB de cette droite par le cosinus de l'angle aigu α qu'elle fait avec l'axe.***

Si la droite AB et l'axe XY sont dans un même plan (*fig.* 371), le théorème résulte immédiatement de la définition du cosinus; car, en menant par le point A la parallèle AD à l'axe XY, on a, dans le triangle rectangle ABD,

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{ab}{AB}, \quad \text{d'où} \quad ab = AB\cos\alpha.$$

Supposons actuellement que la droite AB et l'axe XY ne soient pas dans un même plan (*fig.* 372); la projection ab est alors égale à la portion de l'axe XY comprise entre deux plans M et N menés par A et B perpendiculairement à cet axe, ou bien encore à la portion AD de la parallèle à l'axe menée par le point A jusqu'à la rencontre du plan N. Or le triangle rectangle ABD donne

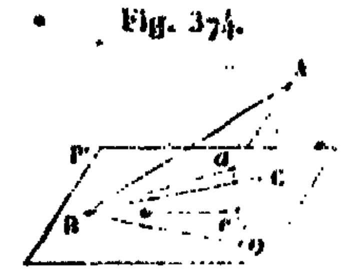
$$AD = AB\cos\alpha \quad \text{ou} \quad ab = AB\cos\alpha.$$

THÉORÈME.

719. ***L'aire de la projection d'un triangle sur un plan est égale à l'aire de ce triangle multipliée par le cosinus de l'angle aigu que forme le plan du triangle avec le plan de projection.***

Fig. 373.

Fig. 374.



Supposons d'abord que le triangle proposé ABC ait un de ses côtés BC situé dans le plan P de projection (*fig.* 373). Si de la projection a du sommet A on mène la perpendiculaire aD sur BC, la droite AD sera, en vertu du théorème des trois perpendiculaires, la hauteur du triangle ABC. Or le rapport des triangles aBC, ABC, de même base BC, est égal au rapport des hauteurs aD et AD, c'est-à-dire au cosinus de l'angle aigu ADa qui mesure l'inclinaison des deux plans.

Considérons actuellement un triangle ABC placé d'une manière quelconque par rapport au plan de projection (*fig.* 374), et menons par le sommet B le plus voisin de ce plan un plan P' qui lui soit parallèle. La projection aBc du triangle ABC sur le plan P' est égale à celle qu'on obtiendrait en le projetant sur le plan primitif. Or, soient O le point où le côté AC prolongé rencontre le plan P', et α l'angle du plan ABC et du plan de projection; le triangle ABC étant la différence de deux triangles ABO, CBO, qui ont un côté BO dans le plan P', on a

$$\begin{aligned} a\mathrm{B}c &= a\mathrm{BO} - c\mathrm{BO} = \mathrm{ABO}\cos\alpha - \mathrm{CBO}\cos\alpha \\ &= (\mathrm{ABO} - \mathrm{CBO})\cos\alpha = \mathrm{ABC}\cos\alpha. \end{aligned}$$

COROLLAIRE.

720. *Le théorème s'étend à la projection de l'aire d'un polygone plan et même d'une courbe plane fermée.*

Il suffit de faire voir que la proposition a lieu pour un polygone, puisqu'une courbe n'est qu'un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

Or, soient T, T', T'',... les aires des triangles qui composent le polygone plan P et t, t', t'',... les triangles correspondants du polygone p, qui est la projection de P; chacun des triangles de la deuxième série est évidemment la projection du triangle correspondant de la première, et si l'on appelle α l'inclinaison du plan du polygone P sur le plan de projection, on a

$$t = \mathrm{T}\cos\alpha, \quad t' = \mathrm{T}'\cos\alpha, \quad t'' = \mathrm{T}''\cos\alpha, \ldots,$$

d'où, en ajoutant,

$$t + t' + t'' + \ldots = (\mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}'' + \ldots)\cos\alpha \quad \text{ou} \quad p = \mathrm{P}\cos\alpha.$$

Centre des distances proportionnelles.

721. Soient A et B deux points donnés, α un *coefficient* ou nombre fixe d'ailleurs positif ou négatif correspondant au point A, et β un coefficient relatif au point B. On sait (321) que sur la droite indéfinie qui passe par les points A et B, il existe un point unique M tel, que le rapport $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ soit égal en grandeur et en signe à $-\frac{\beta}{\alpha}$. Projetons les trois points A, B, M, sur un plan quelconque P, parallèlement à une direction donnée arbitrairement, et proposons-nous de déterminer la longueur de la projetante MM, ou z du point M en fonction des coefficients α et 6, et des projetantes $AA_1 = a$ et $BB_1 = b$ des points A et B.

Il y a deux cas à distinguer, suivant que les coefficients α et 6 sont de même signe ou de signes contraires.

Fig. 375.

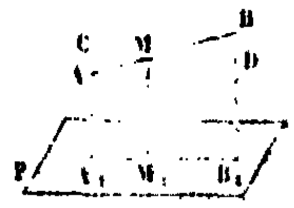
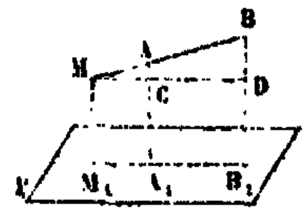


Fig. 376.



Dans le premier cas (*fig.* 375), le rapport $-\dfrac{6}{\alpha}$ est négatif, et par suite (321, 192) le point M est situé entre A et B. D'ailleurs, en menant CMD parallèle au plan P, on voit que le rapport $\dfrac{MA}{MB}$ est égal, en valeur absolue, à

$$\frac{AC}{BD} = \frac{z-a}{b-z};$$

on a donc

$$-\frac{6}{\alpha} = \frac{MA}{MB} = -\frac{z-a}{b-z},$$

d'où

$$z = \frac{a\alpha + b6}{\alpha + 6}.$$

Dans le second cas (*fig.* 376), le rapport $-\dfrac{6}{\alpha}$ est positif, et par suite le point M est situé sur l'un des prolongements de AB (321, 192). On a alors

$$-\frac{6}{\alpha} = \frac{MA}{MB} = \frac{a-z}{b-z} \quad \text{ou} \quad \frac{z-a}{z-b},$$

d'où

$$(1) \qquad z = \frac{a\alpha + b6}{\alpha + 6}.$$

C'est la même formule que dans le premier cas. $\alpha + 6$ sera le coefficient attribué au point M.

722. Nous avons supposé jusqu'ici que les points A, B, M, étaient situés d'un même côté du plan P; mais cette restriction n'est pas nécessaire, et la formule (1) subsiste pour toutes les dispositions possibles de la figure, pourvu qu'on regarde les nombres a, b, z, qui mesurent les projetantes comme positifs pour les points situés d'un côté du plan P, et comme négatifs pour les points situés du côté opposé.

En effet, les points A, B, M, étant situés d'une manière quelconque par rapport au plan P, menons un plan P' parallèle à P et à une distance h assez grande pour que les trois points A, B, M, soient au-dessus du plan P'. Alors, si a', b', z', mesurent les projetantes relatives à ce plan P', on aura (721)

$$(\alpha+\beta)z' = a'\alpha + b'\beta.$$

En retranchant de cette égalité l'identité

$$(\alpha+\beta)h = h\alpha + h\beta,$$

on obtient la relation

$$(\alpha+\beta)(z'-h) = (a'-h)\alpha + (b'-h)\beta.$$

Mais, en ayant égard aux signes des projetantes, on a toujours

$$z'-h = z, \quad a'-h = a, \quad b'-h = b,$$

a, b, z, étant les projetantes relatives au plan P. Donc la formule

$$(\alpha+\beta)z = a\alpha + b\beta$$

subsiste dans tous les cas.

723. Cela posé, soient A, B, C, D, ..., L, autant de points qu'on voudra, situés d'une manière quelconque dans l'espace; désignons par α, β, γ, δ, ..., λ, les coefficients correspondants, et par $a, b, c, d, \ldots, l$, les nombres positifs ou négatifs qui mesurent les droites projetant obliquement ou orthogonalement les points A, B, C, D, ..., L, sur un plan quelconque P.

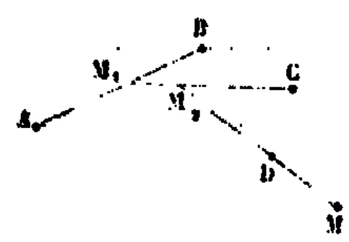
Sur la droite AB (*fig.* 377) prenons le point M_1 tel, que

$$\frac{M_1A}{M_1B} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

La projetante z_1 de ce point sera, en grandeur et en signe,

$$z_1 = \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha+\beta}.$$

Fig. 377.



Menons M_1C et prenons sur cette droite le point M_2 tel, que

$$\frac{M_2M_1}{M_2C} = -\frac{\gamma}{\alpha+\beta}.$$

La projetante z_2 de ce point sera

$$z_2 = \frac{z_1(\alpha+6)+c\gamma}{(\alpha+6)+\gamma} = \frac{a\alpha+b6+c\gamma}{\alpha+6+\gamma}.$$

En menant de même M_2D et prenant sur cette droite un point M_3 tel, que

$$\frac{M_2M_3}{M_2D} = -\frac{\delta}{\alpha+6+\gamma},$$

et continuant ainsi jusqu'au dernier point L, on obtiendra finalement un point M dont la projetante z aura pour expression

$$(2) \qquad z = \frac{a\alpha+b6+c\gamma+\ldots+l\lambda}{\alpha+6+\gamma+\ldots+\lambda}.$$

On dit que ce point M est le *centre des distances proportionnelles* des points donnés (A, α), $(B, 6)$, (C, γ), ..., (L, λ). On arrive d'ailleurs au même point M dans quelque ordre que l'on joigne les points donnés; cela résulte de ce que la formule (2), qui exprime la distance du point M à un plan quelconque P, ne porte aucune trace de l'ordre suivi.

Dans le cas où tous les coefficients α, 6, γ, ..., λ, sont égaux entre eux, le point M prend le nom de *centre des moyennes distances*; sa distance à un plan quelconque, comptée parallèlement à une droite arbitraire, est donnée par la formule

$$z = \frac{a+b+c+\ldots+l}{n},$$

n étant le nombre des points considérés.

724. La formule (2), qu'on peut écrire

$$(3) \qquad z_1\Sigma\alpha = \Sigma a\alpha,$$

en désignant en général par la notation $\Sigma\alpha$ la somme de tous les coefficients et par $\Sigma a\alpha$ la somme de tous les produits $a\alpha$, $b6$, ..., $l\lambda$, exprime que *la somme des produits obtenus en multipliant la projetante de chaque point par son coefficient est égale au produit de la projetante du centre des distances proportionnelles par la somme des coefficients.*

Pour que z soit nul, il faut et il suffit que $\Sigma a\alpha$ le soit, car on suppose expressément que la somme $\Sigma\alpha$ des coefficients donnés est différente de zéro. Donc, *pour qu'un plan passe par le centre des distances proportionnelles, il faut et il suffit que la somme des produits obtenus en multipliant chaque projetante relative à ce plan par le coefficient correspondant, soit égale à zéro.* Cette condition se réduit à $\Sigma a = 0$, lorsqu'il s'agit du centre des moyennes distances.

725. Nous remarquerons enfin que, dans le cas où tous les points donnés A, B, C, ..., L, sont dans un même plan Q, le centre M est aussi dans ce plan ; et si alors on prend pour direction des projetantes une parallèle au plan Q, tous les pieds des projetantes seront situés sur l'intersection XY du plan Q et du plan P de projection ; cela revient à projeter sur une droite quelconque XY du plan Q.

Centre de gravité.

726. On appelle *centre de gravité d'une ligne droite* AB le centre des moyennes distances de ses extrémités A et B, c'est-à-dire par conséquent le milieu de cette droite.

Le *centre de gravité d'une ligne brisée* plane est le centre des distances proportionnelles des centres de gravité des divers côtés de ce contour polygonal, ces centres ayant des coefficients proportionnels aux côtés correspondants.

Il est aisé de voir, d'après cela, que *le centre de gravité du périmètre d'un triangle* ABC *est le centre* O *du cercle inscrit au triangle* A'B'C' *formé en joignant les milieux des côtés du triangle primitif* (*fig.* 378). En effet, si l'on mène les trois hauteurs A'A", B'B", C'C", du triangle A'B'C', et si l'on applique la formule (3) en projetant successivement sur chacun des côtés de ce triangle, on trouve

$$\frac{AB.C'C''}{AB+BC+CA}, \quad \frac{BC.A'A''}{AB+BC+CA}, \quad \frac{CA.B'B''}{AB+BC+CA},$$

pour les distances du centre de gravité aux trois droites A'B', B'C', C'A'. Or, comme les numérateurs de ces trois fractions représentent chacun l'aire du triangle ABC, on voit que le centre de gravité cherché est équidistant des trois côtés du triangle A'B'C'.

727. On appelle centre de gravité de l'aire d'un triangle, ou plus rapidement *centre de gravité d'un triangle*, le centre des moyennes distances des trois sommets.

Fig. 378.

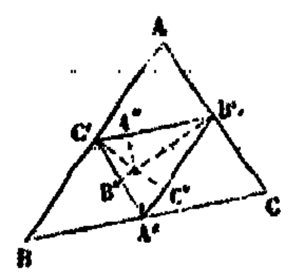
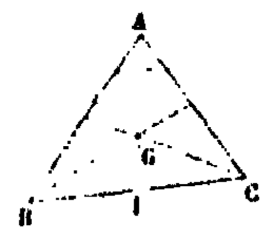


Fig. 379.

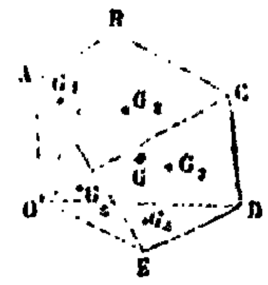


Il est aisé de voir (*fig.* 379) que *le centre de gravité* G *d'un triangle* ABC *est le point de concours des médianes de ce triangle* ; car, pour avoir ce centre, il faut, d'après la construction même du n° 723, prendre le milieu I de BC, puis diviser IA de telle sorte que $\frac{GI}{GA} = \frac{1}{2}$. Donc le point G est sur la médiane AI, au tiers de sa longueur à partir de la base, etc.

728. Un polygone ABCDE étant donné (*fig.* 380), si on le décompose en triangles en joignant tous ses sommets à un point O pris dans son plan, et que l'on cherche le centre G des distances proportionnelles des centres de gravité G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 de ces triangles, en leur attribuant des coefficients proportionnels aux aires des triangles correspondants, on aura ce qu'on appelle le *centre de gravité du polygone*. Si le point O est pris à l'intérieur du polygone, tous les triangles sont additifs, et l'on donne à tous les coefficients le signe $+$; si le point O est pris à l'extérieur du polygone, il y a des triangles additifs et des triangles soustractifs, et l'on donne pour coefficients aux centres de gravité des triangles additifs les aires de ces triangles précédées du signe $+$, et aux centres de gravité des triangles soustractifs les aires de ces triangles précédées du signe $-$.

Pour légitimer cette définition, il faut prouver que la position du centre de gravité G du polygone est indépendante de la position qu'occupe le point O dans son plan. A cet effet, projetons la figure sur un plan quelconque P, en donnant aux projetantes une direction perpendiculaire au plan ABCDE. Soient g, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, les projetantes des points G, G_1,

Fig. 380.



G_2, G_3, G_4, G_5, et γ, γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5, les coefficients correspondants, c'est-à-dire les aires du polygone ABCDE et des triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEA prises avec les signes convenables.

La formule (3) donnant

$$\gamma \cdot g = \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \gamma_3 g_3 + \gamma_4 g_4 + \gamma_5 g_5,$$

$\gamma \cdot g$ représente le volume du tronc de prisme droit dont ABCDE est la base. En effet g_1, projetante du point G_1, est égale au tiers des projetantes des points O, A et B, puisque g_1 est le centre des moyennes distances des trois sommets du triangle OAB. Donc $\gamma_1 g_1$ représente (665) le volume du tronc de prisme droit dont OAB est la base. De même, les produits $\gamma_2 g_2$, $\gamma_3 g_3$, ... représentent les volumes des troncs de prisme construits sur OBC, OCD,.... D'ailleurs, comme les facteurs γ_1, γ_2, γ_3, ..., sont positifs ou négatifs, suivant que les triangles correspondants sont additifs ou soustractifs, on voit que les produits $\gamma_1 g_1$, $\gamma_2 g_2$, ... ont naturellement le signe $+$ ou le signe —, suivant que les troncs de prisme qu'ils représentent sont additifs ou soustractifs. Donc, enfin, le second membre de la relation précédente exprime la mesure du volume du tronc de prisme construit sur le polygone ABCDE; et en désignant ce volume par V, on a

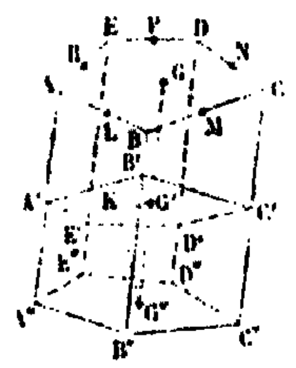
$$\gamma . g = \mathrm{V} \quad \text{ou} \quad g = \frac{\mathrm{V}}{\gamma}.$$

La distance du point G à un plan quelconque P, comptée perpendiculairement au plan ABCDE, est donc indépendante de la position que le point O occupe dans le plan du polygone.

THÉORÈME.

729. *L'aire latérale d'un tronc de prisme quelconque est égale au produit du périmètre de la section droite par la portion de la parallèle aux arêtes du prisme, menée par le centre de gravité du contour de la section droite et comprise entre les deux bases du tronc* (*fig.* 381).

Fig. 381.



Soit A'B'C'D'E'A"B"C"D"E" le tronc de prisme, et ABCDE une section droite située, par exemple, au-dessus des deux bases. Par les milieux L, M, N, P, R, des côtés de la section droite, et par le centre de gravité G du contour de cette section, concevons des parallèles aux arêtes du prisme, et appelons respectivement l', m', n', p', r', g', les longueurs de ces parallèles prolongées jusqu'au plan de la base A'B'C'D'E', et l'', m'', n'', p'', r'', g'', les longueurs des mêmes parallèles prolongées jusqu'au plan de la base A"B"C"D"E". λ, μ, ν, π, ρ étant les côtés AB, BC, CD, DE, EA, de la section droite, on aura, par la formule (3),

$$(\lambda+\mu+\nu+\pi+\rho)g' = \lambda l' + \mu m' + \nu n' + \pi p' + \rho r',$$
$$(\lambda+\mu+\nu+\pi+\rho)g'' = \lambda l'' + \mu m'' + \nu n'' + \pi p'' + \rho r'',$$

d'où, en retranchant,

$$(\lambda+\mu+\nu+\pi+\rho)(g''-g') = \lambda(l''-l') + \mu(m''-m') + \nu(n''-n') + \pi(p''-p') + \rho(r''-r').$$

Le second membre représente évidemment la somme des aires des faces latérales du tronc de prisme; il doit donc en être de même du premier. Or, ce premier membre est le produit du périmètre $\lambda+\mu+\nu+\pi+\rho$ de la section droite, par la portion $g''-g'$ de la parallèle aux arêtes du prisme menée par G et comprise entre les plans A'B'C'D'E' et A''B''C''D''E''.

THÉORÈME.

730. *Les centres de gravité des aires de toutes les sections planes d'un prisme sont situés sur une même parallèle aux arêtes de ce prisme.*

Le théorème est évident pour le prisme triangulaire, car, lorsqu'on projette obliquement ou orthogonalement un triangle sur un plan, chaque médiane du triangle primitif a pour projection une médiane du nouveau triangle.

Considérons actuellement un prisme quelconque; soit ABCDE (*fig.* 380) sa section droite, qu'on a décomposée en triangles en joignant aux divers sommets un point quelconque O de son plan. Soit P le plan d'une section quelconque incliné d'un angle α sur le plan de la section droite; conservons toutes les notations du n° 728, et désignons par A', B', C', D', E', O', G', G'_1, G'_2, G'_3, G'_4, G'_5, les points où les arêtes du prisme et les parallèles à ces arêtes menées par les points O, G, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, rencontrent le plan P. G étant le centre de gravité de la section droite, on a

$$\gamma g=\gamma_1 g_1+\gamma_2 g_2+\gamma_3 g_3+\gamma_4 g_4+\gamma_5 g_5,$$

et par suite, en multipliant par $\cos\alpha$,

$$\begin{aligned}\gamma\cos\alpha.g=\gamma_1\cos\alpha.g_1+\gamma_2\cos\alpha.g_2+\gamma_3\cos\alpha.g_3\\ +\gamma_4\cos\alpha.g_4+\gamma_5\cos\alpha.g_5.\end{aligned}$$

Mais les points G'_1, G'_2, G'_3, G'_4, G'_5, sont, d'après le premier cas, les centres de gravité des triangles O'A'B', O'B'C', O'C'D', O'D'E', O'E'A', dont se compose la section par le plan P, et $\gamma_1\cos\alpha$, $\gamma_2\cos\alpha$, $\gamma_3\cos\alpha$, $\gamma_4\cos\alpha$, $\gamma_5\cos\alpha$ sont (719) les aires de ces triangles prises avec le signe + ou le signe −, suivant que ces triangles sont additifs ou soustractifs. Donc la dernière relation exprime que le point G' est le centre de gravité de la section oblique.

Scolie.

731. Le théorème correspondant sur les centres de gravité du *périmètre* des diverses sections planes d'un prisme n'est pas vrai. Les centres des sections faites par une série de plans parallèles sont bien situés sur une même droite parallèle aux arêtes, mais cette droite se déplace lorsque l'inclinaison de la série des plans parallèles vient à changer.

THÉORÈME.

732. *Le volume d'un tronc de prisme quelconque est égal au produit de l'aire de la section droite par la distance des centres de gravité des deux bases.*

Dans le cas où la section droite est l'une des deux bases du tronc, le théorème résulte immédiatement de ce qui a été dit aux nos 728 et 730. En effet, on a vu au n° 728 qu'en désignant par V le volume d'un pareil tronc, par γ l'aire de la section droite, et par g la parallèle aux arêtes du prisme menée par le centre de gravité de cette section droite jusqu'à l'autre base, on avait $V = g\gamma$, et on sait, d'après le n° 730, que cette droite g réunit les centres de gravité des deux bases.

Considérons actuellement un prisme dont les arêtes soient obliques sur les bases A'B'C'D'E' et A"B"C"D"E" (*fig.* 381). Désignons par V son volume, menons une section droite ABCDE au-dessus des deux bases, et appelons S, V', V", l'aire de cette section et les volumes des deux troncs compris entre cette section et chacune des deux bases primitives. Si l'on observe que les centres de gravité G, G', G" de la section droite et des deux bases sont sur une même parallèle aux arêtes, on a

$$V'' = S.GG'', \quad V' = S.GG',$$

et, par soustraction,

$$V'' - V' = S(GG'' - GG'), \quad \text{ou} \quad V = S.G'G''.$$

SCOLIE.

733. Soit (*fig.* 381) G"K la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de l'une des bases sur l'autre; α étant l'angle G" du triangle rectangle KG"G', on a

$$G''K = G'G'' \cos\alpha;$$

mais l'angle α est égal à l'angle du plan de la section droite ABCDE et du plan de la base A'B'C'D'E', dont nous désignerons l'aire par B; on a donc (720)

$$S = B\cos\alpha,$$

et par suite

$$V = S.G'G'' = B\cos\alpha\frac{G''K}{\cos\alpha} = B.G''K.$$

De là cet autre énoncé :

Le volume d'un tronc de prisme quelconque est égal au produit de l'une des bases par la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de l'autre base sur le plan de la première.

734. Nous terminerons en signalant à l'attention du lecteur le mode de démonstration employé au n° 728. Cette méthode, qui consiste à faire intervenir la Géométrie de l'espace dans la solution d'un problème de Géométrie plane, est surtout remarquable par le caractère intuitif des démonstrations qu'elle fournit. Les travaux de Desargues, de Monge, et surtout ceux de M. Poncelet, dont il sera question dans la suite de cet ouvrage, ont montré que cette méthode était un puissant moyen d'investigation.

QUESTIONS PROPOSÉES.

§§ I, II. — *Du prisme.*

672. Le volume d'un prisme triangulaire a pour mesure la moitié du produit de l'aire d'une face latérale par la distance de cette face à l'arête opposée.

673. Si sur trois droites parallèles et non situées dans un même plan, on prend d'une manière quelconque des longueurs égales à une droite donnée, le volume du prisme triangulaire ainsi formé est constant.

674. Couper un cube par un plan de manière que la section soit un hexagone régulier.

675. Deux prismes sont égaux : 1° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre une base et une face égales chacune à chacune et semblablement disposées; 2° lorsqu'ils ont une base et deux faces adjacentes égales chacune à chacune et semblablement disposées.

676. Deux prismes triangulaires sont égaux, lorsqu'ils ont leurs faces latérales égales chacune à chacune et semblablement disposées.

677. Vérifier par la Géométrie la formule qui donne le cube d'une somme ou d'une différence de deux parties.

678. On donne trois droites deux à deux non situées dans un même plan, et l'on demande de construire un parallélipipède dont trois arêtes soient sur ces trois droites.

679. Dans tout prisme quadrangulaire, la somme des carrés des arêtes surpasse la somme des carrés des diagonales de huit fois le carré de la droite qui joint les milieux communs de ces diagonales considérées deux à deux. — Application au parallélipipède quelconque.

680. Dans un hexaèdre quelconque, la somme des carrés des arêtes surpasse la somme des carrés des diagonales de quatre fois la somme des carrés des quatre droites qui joignent les milieux des diagonales du polyèdre et les milieux des diagonales de deux faces opposées. — Application au parallélipipède.

681. Mener par une droite donnée un plan qui partage un parallélipipède en deux parties équivalentes.

682. Dans tout prisme triangulaire, l'aire de la plus grande face est plus petite que la somme des deux autres.

683. De tous les prismes de n faces, c'est le prisme régulier qui a :

1° La plus petite aire latérale, les bases étant équivalentes et les hauteurs égales;

2° La plus grande base et le plus grand volume, les aires latérales étant équivalentes et les hauteurs égales;

3° La plus grande hauteur et le plus grand volume, les bases et les aires latérales étant respectivement équivalentes;

4° La plus petite base et la plus grande hauteur, les aires latérales et les volumes étant respectivement équivalents.

684. De deux prismes réguliers, celui dont le nombre de faces est le plus grand possède les quatre propriétés énoncées dans le numéro précédent.

685. De tous les prismes quadrangulaires, c'est le cube qui, à égalité d'aire, possède le plus grand volume et qui, à égalité de volume, possède la plus petite aire.

§§ III, IV. — *De la pyramide.*

686. Démontrer que deux tétraèdres sont égaux : 1° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées; 2° lorsqu'ils ont une face égale adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés; 3° lorsqu'ils ont trois faces égales chacune à chacune et semblablement disposées; 4° lorsqu'ils ont une arête égale et cinq angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

687. Les plans menés perpendiculairement sur les milieux des arêtes d'un tétraèdre se rencontrent en un même point.

688. Les plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre se rencontrent en un même point.

689. Les perpendiculaires élevées sur chaque face d'un tétraèdre par le centre du cercle circonscrit à la face considérée se rencontrent en un même point.

690. Les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux points d'intersection des médianes des faces opposées se rencontrent en un même point, situé au quart de chacune de ces droites à partir de la face correspondante.

691. Les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre se coupent mutuellement en parties égales.

692. Trouver dans l'intérieur d'un tétraèdre un point tel, qu'en le joignant aux quatre sommets, on décompose ce tétraèdre en quatre tétraèdres équivalents.

693. Si l'on prend un point O dans l'intérieur d'un tétraèdre SABC, et si l'on prolonge les droites SO, AO, BO, CO, jusqu'à la rencontre des faces opposées en s, a, b, c, on a la relation

$$\frac{Os}{Ss}+\frac{Oa}{Aa}+\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc}=1.$$

694. Si l'on coupe un prisme ou une pyramide par un plan non parallèle à la base, et si l'on prolonge les côtés de la section jusqu'à la rencontre des côtés correspondants de la base, les points d'intersection obtenus sont en ligne droite.

695. Étant données les faces d'un tétraèdre, trouver, en ne se servant que du compas, la longueur de la hauteur du tétraèdre et le pied de cette hauteur sur le plan de la base.

696. Deux tétraèdres qui ont un angle trièdre égal, sont entre eux comme les produits respectifs des arêtes qui comprennent cet angle. — En déduire la première partie du théorème du nº 690.

697. Deux tétraèdres qui ont une arête égale et les angles dièdres correspondants à cette arête égaux chacun à chacun, sont entre eux comme les produits des faces qui comprennent le dièdre égal.

698. Le plan bissecteur de l'angle dièdre d'un tétraèdre partage l'arête opposée en deux segments proportionnels aux faces qui comprennent l'angle dièdre. — Considérer le plan bissecteur de l'angle dièdre extérieur.

699. Soient le tétraèdre SABC et le point O où la droite SO également inclinée sur les trois faces latérales (*voir* la question 640) rencontre la base ABC; démontrer que les triangles OAB, OBC, OAC, sont proportionnels aux faces latérales correspondantes.

700. Le plan déterminé par une arête d'un tétraèdre et le milieu de l'arête opposée partage ce tétraèdre en deux tétraèdres équivalents.

701. Si par la droite DE, qui joint les milieux de deux arêtes opposées SA, BC, d'un tétraèdre SABC, on mène un plan quelconque qui coupe l'arête SB en F et l'arête AC en G, la droite FG est divisée par la droite DE en deux parties égales.

702. Tout plan conduit par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre le partage en deux volumes équivalents.

703. On donne une droite sur l'une des faces d'un tétraèdre, et l'on demande de mener par cette droite un plan qui détermine avec les faces de ce tétraèdre un autre tétraèdre qui soit au premier dans un rapport donné.

704. On donne une droite sur l'une des faces d'un angle trièdre, et l'on demande de mener par cette droite un plan qui ferme l'angle trièdre en déterminant un tétraèdre de volume déterminé.

705. Quelle est la différence des volumes d'un tronc de pyramide à bases parallèles et d'un prisme de même hauteur ayant pour base la demi-somme des bases du tronc de pyramide? — Quelle erreur commet-on en remplaçant l'un des volumes par l'autre, pour une hauteur de 6 mètres et pour des bases du tronc de pyramide égales à $3^{mq},75$ et $2^{mq},85$?

706. Mener, parallèlement à une droite donnée ou par un point donné, un plan qui partage un tétraèdre donné en deux parties équivalentes.

707. Trouver l'expression du volume d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles, en le décomposant en troncs de pyramide triangulaires.

708. Démontrer que le volume d'un tronc de parallélipipède quelconque a pour mesure le produit de sa section droite par la moyenne arithmétique des quatre arêtes latérales.

709. Les arêtes latérales d'une pyramide triangulaire SABC ont pour longueurs L, M, N; on coupe cette pyramide par un plan *abc* non parallèle à la base, qui rencontre les arêtes latérales à des distances du sommet égales à *l*, *m*, *n* : trouver le volume du tronc de pyramide ainsi déterminé.

710. On donne deux tétraèdres SABC, S'A'B'C', tels, que les droites qui unissent les sommets correspondants concourent en un même point; démontrer que, si les faces correspondantes des deux tétraèdres se coupent, les quatre droites d'intersection sont dans un même plan.

711. Soit un tétraèdre SABC; par un point O pris dans la face SBC, on mène aux arêtes SA, AB, AC, jusqu'aux faces ABC, SAC, SAB, les parallèles OD, OE, OF : démontrer la relation

$$\frac{OD}{SA}+\frac{OE}{AB}+\frac{OF}{AC}=1.$$

712. Soit un tétraèdre SABC coupé par un plan quelconque DEF : menons les diagonales des quadrilatères ABDE, BCFE, ACFD; ces diagonales se rencontrent deux à deux aux points G, H, K, et les droites SG, SH, SK, coupent elles-mêmes les côtés de la base ABC aux points L, M, N; démontrer : 1° que les transversales AM, BN, CL, se coupent en un même point O de la base ABC; 2° que les transversales SO, AH, BK, CG, se coupent en un même point P de l'espace. — Examiner le cas où la section DEF est parallèle à la base ABC.

713. Dans un tronc de pyramide triangulaire à bases non parallèles, les points d'intersection des diagonales des trois faces latérales et les points d'intersection des côtés des bases prolongés deux à deux, sont dans un même plan.

714. La hauteur d'un tétraèdre régulier est égale à la somme des perpendiculaires abaissées d'un point pris dans l'intérieur du polyèdre sur ses quatre faces. — Examiner le cas où le point est choisi extérieurement. (*Voir* l'exercice 25.)

715. Si, par un point quelconque pris dans l'espace, on fait passer

plusieurs droites parallèles et égales aux différents côtés d'un polygone ou plusieurs polygones parallèles et égaux aux différentes faces d'un polyèdre quelconque, la somme *algébrique* des produits obtenus en multipliant la longueur ou l'aire de chacun des éléments ainsi transportés par la perpendiculaire abaissée sur lui d'un autre point constant de l'espace, est égale à zéro. — Application au théorème précédent (les produits considérés sont *positifs* ou *négatifs* suivant que la face transportée laisse ou non d'un même côté le centre commun des perpendiculaires).

716. Soit le tétraèdre SABC; menons une section quelconque DEF parallèle à la base ABC, et joignons les milieux des côtés de cette section aux sommets opposés de la base : les trois droites obtenues se croisent en un même point dont on demande le lieu.

717. Par un point quelconque pris dans l'intérieur de la base d'une pyramide régulière, on mène à cette base une perpendiculaire qui rencontre toutes les faces de la pyramide ou leurs prolongements; démontrer que la somme des distances des points de rencontre obtenus à la base de la pyramide est constante. — Considérer le cas où le pied de la perpendiculaire élevée à la base est extérieur à cette base.

718. Étant données les quatre hauteurs d'un tétraèdre et les distances d'un point à trois des faces, déterminer la distance de ce point à la quatrième face.

719. Quelle est la différence des volumes d'un tronc de pyramide à bases parallèles et d'un prisme de même hauteur ayant pour base la section faite dans le tronc de pyramide à égale distance de ses bases?

720. Quand, dans un tétraèdre, sur les trois couples d'arêtes opposées, deux sont formés d'arêtes perpendiculaires, la même condition est remplie par le troisième couple.

721. Dans un tétraèdre, on peut considérer les six angles dièdres formés par les quatre faces prises deux à deux, et les douze angles formés par les six arêtes avec les deux faces auxquelles elles se terminent. Ceci posé, dans tout tétraèdre où les arêtes opposées sont perpendiculaires entre elles :

1° La somme des dix-huit angles indiqués est constante et égale à douze angles droits;

2° Les hauteurs se croisent en un même point;

3° Les plus courtes distances des arêtes opposées se croisent au point de rencontre des hauteurs.

722. Étant donné un tétraèdre SABC, on construit sur les faces SAB, SBC, SAC, trois prismes triangulaires de hauteur arbitraire dont les bases supérieures se rencontrent en O; sur la base ABC du tétraèdre, on construit alors un quatrième prisme triangulaire en prenant ses arêtes laté-

rales égales et parallèles à la droite SO : démontrer que le volume de ce dernier prisme est équivalent à la somme des volumes des trois premiers prismes. (*Voir* l'exercice 464.)

723. La base d'une pyramide régulière étant un hexagone de 3 mètres de côté, calculer la hauteur de cette pyramide, sachant que son aire latérale est dix fois l'aire de sa base.

724. Mener un plan parallèle à la base d'un tétraèdre donné, de manière que ce plan détermine un autre tétraèdre dont l'aire totale soit la moitié de celle du tétraèdre donné.

725. Construire un tétraèdre, connaissant :

1° Les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées et les angles que font entre elles ces trois droites;

2° Un point de chaque arête;

3° La base et les longueurs des trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées;

4° La base et les droites qui joignent les sommets de la base aux points d'intersection des médianes des faces opposées.

726. Trouver le volume d'une pyramide triangulaire, en regardant cette pyramide comme la limite de la somme des prismes inscrits dans cette pyramide, l'inscription étant effectuée comme au n° 653.

727. Soit une pyramide triangulaire SABC. Par le milieu E de l'arête SB, on mène le plan DEF parallèle à la base ABC, le plan EGH parallèle à la face ASC et le plan EDH; la pyramide SABC se trouve ainsi décomposée en deux prismes triangulaires équivalents et en deux pyramides triangulaires équivalentes. On peut faire subir la même décomposition à la pyramide SDEF, et continuer ainsi indéfiniment : en déduire le volume de la pyramide SABC.

728. Étant donnée une pyramide triangulaire SABC, à quelle distance de la base ABC doit-on mener un plan parallèle *abc*, pour que le rapport des volumes de la pyramide S*abc* et du tronc de pyramide ABC*abc* soit égal à *m*?

729. Étant données trois droites parallèles non situées dans un même plan, on porte sur l'une d'elles une longueur AB donnée, et l'on prend arbitrairement un point C sur la seconde droite, un point D sur la troisième; démontrer :

1° Que le volume de la pyramide triangulaire ABCD est constant, quelles que soient les positions des points C et D et la parallèle sur laquelle on porte la longueur AB; 2° que ce volume est proportionnel à AB.

730. On donne l'arête A d'un prisme triangulaire quelconque; sur l'une des arêtes, on prend à partir de la base une longueur x; sur la seconde

arête, on prend de même une longueur a, et sur la troisième une longueur b. Par les trois points ainsi déterminés, on fait passer un plan qui divise le prisme en deux parties; pour quelle valeur de x ces parties seront-elles équivalentes?

731. Trouver le volume du corps limité par quatre plans parallèles deux à deux, une face parallélogramme et un quadrilatère gauche ayant pour plan directeur cette face parallélogramme.

732. Étant donnés quatre polygones plans disposés d'une manière quelconque dans l'espace, trouver un point tel, qu'en le donnant pour sommet commun aux pyramides ayant pour bases ces polygones, les volumes de ces pyramides soient entre eux comme quatre droites ou quatre nombres donnés.

733. Couper un tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes opposées, de manière que la section soit maximum.

734. Par la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre, on peut faire passer une infinité de plans; quel est celui qui détermine la section minimum?

735. Dans une pyramide SABCD dont la base ABCD est un trapèze, on donne la face SAD en grandeur et en position, son inclinaison sur la base ABCD, la direction des arêtes parallèles AB et CD, les angles de la face SBC, et l'on demande de construire la pyramide. — Même problème, en supposant qu'on donne la face SAD en grandeur et en position, son inclinaison sur le plan donné de la face SBC et les angles de cette dernière face.

736. Étant donné un prisme triangulaire, le couper par un plan tel, que la section soit semblable à un triangle donné.

737. Partager une pyramide quadrangulaire régulière en deux parties équivalentes, par un plan mené par l'un des côtés de la base.

738. Construire le parallélipipède circonscrit à une pyramide triangulaire.

739. Le volume d'un tétraèdre est le tiers du volume du parallélipipède circonscrit.

740. Trouver le volume du tétraèdre régulier par la considération du parallélipipède circonscrit.

741. Tout tétraèdre n'a qu'un seul parallélipipède circonscrit; mais tout parallélipipède correspond à deux tétraèdres inscrits, qu'on peut appeler conjugués et qui sont équivalents; l'un de ces tétraèdres étant donné, construire le second.

742. Calculer le volume du noyau octaèdre commun aux deux tétraèdres conjugués d'un même parallélipipède.

743. Si l'on prolonge indéfiniment les arêtes de l'un des tétraèdres conjugués d'un parallélipipède, et si l'on considère quatre de ces arêtes opposées deux à deux, il existe toujours un plan, susceptible de deux inclinaisons différentes, qui, en se mouvant parallèlement à lui-même, coupe ces arêtes en quatre points situés sur une même circonférence. Dans quelle position du plan sécant, le diamètre variable de cette circonférence est-il minimum?

744. Si l'on prolonge indéfiniment les arêtes des deux tétraèdres conjugués d'un parallélipipède, et si l'on considère huit de ces arêtes situées dans quatre faces du parallélipipède et parallèles entre elles deux à deux, il existe toujours un plan, susceptible de deux inclinaisons différentes, qui, en se mouvant parallèlement à lui-même, coupe ces arêtes en huit points situés sur une circonférence.

745. Par un point S pris sur le prolongement de l'axe d'un prisme hexagonal régulier et par les côtés du triangle équilatéral obtenu en joignant de deux en deux les sommets de sa base supérieure, on fait passer des plans qui détachent du prisme trois tétraèdres et les remplacent par un tétraèdre unique reposant sur sa base supérieure; déterminer la position du point S qui rend minimum l'aire du décaèdre ainsi construit (alvéole des abeilles).

746. Sur une première droite AA′, on donne deux points fixes a et b; sur une seconde droite quelconque BB′, deux points mobiles c et d restent à une distance constante : chercher pour quelle position du segment cd l'aire de la pyramide $abcd$ est minimum.

§§ V, VI. — *Figures symétriques, polyèdres semblables.*

747. Déterminer les arêtes d'un parallélipipède rectangle, sachant qu'elles sont proportionnelles aux nombres a, b, c, et que le volume du parallélipipède est V.

748. Chercher le rapport des volumes de deux tétraèdres, dont l'un a été formé en menant par les sommets de l'autre des plans parallèles aux faces opposées.

749. Deux tétraèdres sont semblables : 1° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées; 2° lorsqu'ils ont une face semblable adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés; 3° lorsqu'ils ont trois faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées; 4° lorsqu'ils ont cinq angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

750. Les carrés des volumes de deux polyèdres semblables sont proportionnels aux cubes de deux faces homologues.

751. Une droite comprise entre deux faces d'un polyèdre donné est divisée en plusieurs segments; sur chaque segment, considéré comme l'homologue de la droite donnée, on construit un polyèdre semblable au polyèdre donné. Démontrer que l'aire de ce polyèdre est égale au carré de la somme des racines carrées des aires des polyèdres segmentaires, et que son volume est égal au cube de la somme des racines cubiques des volumes de ces mêmes polyèdres.

752. Construire deux droites qui soient dans le même rapport que deux cubes donnés.

753. Démontrer que le tétraèdre formé en joignant les points de rencontre des médianes des faces d'un tétraèdre donné, est semblable au symétrique de ce tétraèdre; chercher le rapport des volumes de ces deux tétraèdres.

754. On nomme *centre de symétrie* d'un système de points un point O tel, qu'en le joignant à un point quelconque A du système et en prolongeant la droite AO d'une quantité égale à elle-même, le point A' ainsi obtenu soit aussi un point du système proposé. — Démontrer d'après cela que, dans tout système de points limité, il ne peut exister qu'un centre de symétrie.

755. On nomme *axe de symétrie* d'un système de points une droite telle, qu'en faisant tourner le système d'un certain angle autour de cette droite, la nouvelle position de chaque point du système soit l'ancienne position d'un certain point du même système. — Démontrer que le plus petit des angles capables de restituer ainsi le lieu des points du système, dans la rotation de ce système autour d'un axe de symétrie, est une partie aliquote $\frac{1}{q}$ de 360 degrés. Suivant que q est égal à 2, 3, 4,..., l'axe de symétrie est dit *binaire*, *ternaire*, *quaternaire*,...; q est *l'ordre* de symétrie.

756. On nomme *plan de symétrie* d'un système de points un plan tel, qu'en abaissant d'un point quelconque du système une perpendiculaire sur ce plan et en prolongeant cette perpendiculaire d'une quantité égale à elle-même, l'extrémité ainsi obtenue soit encore un point du système. — Démontrer que, si un système possède divers axes et divers plans de symétrie, tous ces axes et tous ces plans doivent se couper en un même point.

757. Dans tout système possédant un plan et un centre de symétrie, la droite menée par le centre normalement au plan est un axe de symétrie d'ordre pair.

758. Lorsqu'un système possède deux plans de symétrie, l'intersection de ces plans est un axe de symétrie.

759. Un système dépourvu d'axe de symétrie ne peut posséder à la fois un centre et un plan de symétrie.

760. Lorsqu'un système possède deux plans de symétrie non rectangulaires, il en possède un troisième.

761. Lorsqu'un système possède un plan P de symétrie et un axe L de symétrie oblique à ce plan, la droite L' homologue de L par rapport au plan P est un nouvel axe de symétrie.

762. Lorsqu'il existe dans un système deux axes de symétrie binaires, la perpendiculaire menée au plan de ces axes par leur point d'intersection est un axe de symétrie.

763. Lorsqu'un système possède trois axes quaternaires rectangulaires entre eux, il possède en même temps quatre axes ternaires.

764. Étudier les polyèdres considérés dans le livre précédent, sous le rapport de leurs centres, de leurs axes et de leurs plans de symétrie.

§ VII. — *Appendice.*

765. Soit un polyèdre divisé en P autres polyèdres quelconques; soient S le nombre des sommets de ces différents polyèdres y compris le premier, F le nombre de leurs faces, A le nombre de leurs arêtes; on aura la formule

$$A + P + 1 = F + S.$$

766. En se reportant à l'exercice précédent, quelle est la relation entre les nombres d'arêtes, de faces et de sommets appartenant à la surface extérieure du polyèdre proposé, et les nombres d'éléments analogues situés à l'intérieur de ce polyèdre?

767. Étant données autant de droites qu'on voudra passant par un même point O, trouver le lieu des points tels, qu'en abaissant de ces points des perpendiculaires sur les droites données, la somme des produits des distances du point O à ces perpendiculaires par des droites données soit égale à un carré donné m^2.

768. Étant donnés autant de plans qu'on voudra passant par un même point, trouver le lieu des points tels, que la somme des produits de leurs distances aux plans donnés par des droites données soit constante.

769. La somme des carrés des cosinus des angles qu'une droite ou un plan forme avec trois axes ou trois plans perpendiculaires entre eux est égale à l'unité.

770. Le carré d'une droite ou d'une aire plane quelconque est égal à la somme des carrés de ses projections sur trois axes ou sur trois plans perpendiculaires entre eux.

771. Si A et A' sont les aires de deux figures situées dans un même plan, P et P', Q et Q', R et R', les projections de ces deux figures sur trois plans perpendiculaires entre eux, on a

$$AA' = PP' + QQ' + RR'.$$

772. Étant donnés les angles que deux droites ou deux plans forment respectivement avec trois axes ou trois plans rectangulaires, trouver l'angle de ces deux droites ou de ces deux plans.

773. Étant données les projections d'une droite ou d'une aire plane sur trois axes ou sur trois plans rectangulaires, trouver sa projection sur un quatrième axe ou un quatrième plan qui fait des angles connus avec les trois premiers.

774. La somme des carrés des projections d'autant de droites ou d'aires planes qu'on voudra sur trois axes ou sur trois plans rectangulaires quelconques est constante.

775. Trouver l'axe ou le plan sur lequel la somme des projections de droites ou d'aires planes données est un maximum. — Cette même somme est constante lorsqu'on projette sur des axes ou des plans faisant le même angle avec l'axe ou le plan de projection maximum.

776. Dans un polygone quelconque, la somme des projections de tous les côtés sur un axe quelconque est égale à zéro. — Dans tout polygone convexe, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés de tous les autres, moins deux fois la somme des produits obtenus en multipliant ces mêmes côtés deux à deux et par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.

777. Dans un polyèdre convexe quelconque : 1° la somme des projections de toutes les faces sur un plan quelconque est égale à zéro ; 2° le carré de l'une des faces est égal à la somme des carrés de toutes les autres, moins deux fois la somme des produits obtenus en multipliant ces mêmes faces deux à deux et par le cosinus du dièdre qu'elles comprennent.

778. Lorsque le volume d'un tronc de prisme et l'une des bases A restent fixes, le plan de l'autre base B passe par un point fixe, et l'aire de cette base B est minimum lorsque son plan est perpendiculaire aux arêtes du tronc.

779. De toutes les pyramides de n faces latérales, qui ont même hauteur et des bases équivalentes, c'est la pyramide régulière qui a la plus petite aire latérale. — De toutes les pyramides dont la base a n côtés et dont les aires latérales sont équivalentes, c'est la pyramide régulière qui a le plus grand volume.

780. De tous les tétraèdres dont les aires sont équivalentes, le tétraèdre régulier a le plus grand volume.

781. La base d'un tétraèdre est semblable à un triangle donné; la somme de cette base et d'une face latérale est constante; enfin, les deux autres faces sont perpendiculaires à la base : de tous les tétraèdres qui remplissent ces conditions, celui dont la base est un quart de la somme donnée a le plus grand volume.

782. La base β d'une pyramide a n côtés et est semblable à un polygone donné; la somme $\beta+\alpha$ de cette base et d'une face latérale α est constante : le volume de la pyramide est maximum lorsque, α étant égale à 2β, la face latérale α est perpendiculaire à la base β.

783. Démontrer que, dans la recherche du centre des distances proportionnelles d'un système de points, on peut remplacer plusieurs de ces points par leur centre particulier, pourvu qu'on donne à ce centre un coefficient égal à la somme des coefficients des points correspondants. — Inversement, on peut remplacer un point par plusieurs autres dont il est le centre, et dont la somme des coefficients est égale à son coefficient.

784. Trouver le centre de gravité d'un trapèze.

785. Trouver : 1° le centre de gravité d'un arc de cercle; 2° le centre de gravité d'un secteur circulaire (on nomme centre de gravité d'une ligne courbe ou d'une aire terminée par une ligne courbe, la limite des positions du centre de gravité du contour ou de l'aire d'une ligne polygonale inscrite ou d'un secteur polygonal inscrit).

786. Trouver le centre de gravité d'un tétraèdre (on appelle ainsi le centre des moyennes distances des sommets du tétraèdre).

787. Pour trouver le centre de gravité d'un polyèdre, on le décompose en tétraèdres en joignant un point quelconque de l'espace à tous ses sommets; on prend les centres de gravité de ces tétraèdres, puis on cherche le centre de tous ces centres partiels affectés chacun d'un coefficient proportionnel au volume du tétraèdre correspondant. — Démontrer que la position du centre de gravité ainsi défini est indépendante de la position du point qu'on a choisi pour sommet commun des tétraèdres.

788. Trouver le centre de gravité d'un tronc de pyramide à bases parallèles.

789. La somme de trois faces latérales d'un tétraèdre étant donnée, son volume est maximum lorsque ces faces latérales sont des triangles rectangles isocèles, perpendiculaires entre eux.

790. Parmi toutes les pyramides limitées latéralement par les faces d'un angle polyèdre S et dont la base est déterminée par un plan qui passe par un point fixe P situé dans l'intérieur de l'angle S, celle dont le volume est maximum a le point P pour centre de gravité de sa base.

791. 1° Parmi toutes les pyramides équivalentes limitées latéralement

par les faces d'un même angle polyèdre, celle dont la hauteur passe par le centre de gravité de la base, a la base minimum;

2° De toutes les pyramides limitées latéralement par le même angle polyèdre et qui ont des bases équivalentes, la pyramide de volume maximum est celle dont le sommet se projette orthogonalement au centre de gravité de la base;

3° Enfin, de toutes les pyramides de même hauteur, limitées latéralement par le même angle polyèdre, la pyramide de volume minimum est celle dont la hauteur passe par le centre de gravité de la base.

LIVRE VII.

LES CORPS RONDS.

§ I. — CYLINDRE DE RÉVOLUTION.

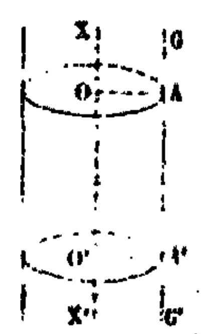
DÉFINITIONS.

735. On nomme ***surface cylindrique de révolution*** la surface engendrée par une droite GG' qui tourne autour d'une droite fixe XX' à laquelle elle est parallèle et invariablement liée (*fig.* 382).

La droite fixe XX' reçoit le nom d'***axe*** de la surface, et la droite mobile GG' celui de ***génératrice*** ou d'***arête***.

736. Tout point A de la droite GG' décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre est sur l'axe; car, pendant la rotation, la perpendiculaire AO abaissée du point A sur XX' reste perpendiculaire à cet axe et conserve toujours la même longueur.

Fig. 382.



On appelle ***section droite*** toute section faite par un plan perpendiculaire à l'axe. Il résulte des considérations précédentes que ***les diverses sections droites d'une même surface cylindrique sont des circonférences égales :*** le rayon commun de ces cercles, c'est-à-dire la distance des deux parallèles XX' et GG', est dit ***le rayon de la surface cylindrique***, et l'on voit que ***le lieu des points de l'espace situés à une distance donnée*** *d'une droite fixe est la surface cylindrique de révolution qui a cette droite pour axe et la distance donnée pour rayon.*

737. Considérons une droite fixe XX', un plan P parallèle à cette droite, et désignons par R la distance de la droite au plan, ou, ce qui revient au même, la distance de la droite à sa projection AA' sur le plan (*fig.* 383). Le lieu des points du plan P, situé à une distance donnée δ de la droite XX', se compose de deux droites BB' et CC' parallèles à XX', placées de part et d'autre de AA', et à une distance de cette droite égale au côté AB de l'angle droit d'un triangle rectangle OAB, dont l'hypoténuse OB est égale à δ, et l'autre côté OA de l'angle droit égal à R. Il en est ainsi tant que δ est plus grand que R; lorsque δ devient égal ou inférieur à R, le lieu se réduit à la droite AA' ou cesse d'exister.

D'après cela (736), un plan parallèle à l'axe d'une surface cylindrique de révolution renferme deux génératrices de cette surface, ou une seule, ou n'a aucun point commun avec la surface, suivant que la distance du plan à l'axe est inférieure, égale ou supérieure au rayon de la surface.

Fig. 383.

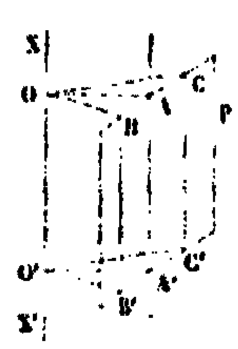
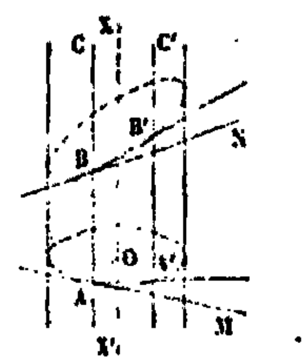


Fig. 384.



738. Arrêtons-nous un moment sur le cas où le plan et la surface n'ont en commun qu'une génératrice AC (*fig.* 384).

Un tel plan peut être considéré comme la position limite d'un plan variable qui, passant par la génératrice fixe AC et par une génératrice voisine A'C', tourne autour de AC jusqu'à ce que A'C' vienne, en restant sur la surface cylindrique, se confondre avec AC. Cela étant, soit BB' une courbe quelconque tracée sur la surface cylindrique; la sécante BB', qui unit les points B et B' où la courbe rencontre les génératrices

AC et A'C', reste constamment dans le plan variable ACA'C'; d'ailleurs cette sécante devient la tangente BN à la courbe BB', lorsque la génératrice mobile A'C' vient se confondre avec AC, c'est-à-dire lorsque le plan variable ACA'C' atteint sa position limite; donc ce plan limite contient la tangente BN. Ainsi, le plan limite considéré renferme les tangentes à toutes les courbes que l'on peut tracer sur la surface, aux points où ces courbes rencontrent la génératrice AC; on lui donne le nom de *plan tangent suivant la génératrice* AC.

La génératrice AC, et la tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface au point où cette courbe rencontre AC, suffisent pour déterminer le plan tangent suivant cette génératrice. Si l'on choisit en particulier la tangente AM à la section droite AA', on voit que *le plan tangent est perpendiculaire au plan déterminé par l'axe et par la génératrice de contact;* en effet, le plan tangent renferme la droite AM qui, étant à angle droit sur AO et sur AC, est perpendiculaire à leur plan CAOX.

739. On appelle *cylindre de révolution* le corps compris entre une surface cylindrique et deux plans perpendiculaires à l'axe de cette surface, ou, en d'autres termes, la figure engendrée par la rotation d'un rectangle AA'O'O autour d'un de ses côtés OO' (*fig.* 385).

La surface cylindrique engendrée par le côté AA' est la *surface latérale* du cylindre; les cercles décrits par les côtés OA et O'A' en sont les *bases*, et la droite OO' en est la *hauteur*.

Fig. 385.

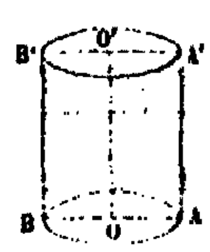
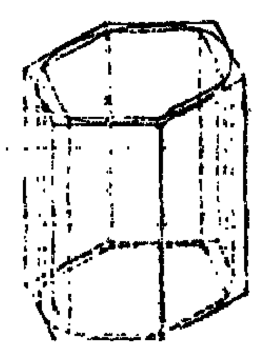


Fig. 386.



740. En construisant un prisme droit, de même hauteur que le cylindre, et ayant pour base un polygone inscrit ou circonscrit au cercle de base du cylindre, on obtient un *prisme in-*

scrit ou circonscrit au cylindre (*fig.* 386). Le plan de chaque face latérale du prisme circonscrit est tangent au cylindre (738). Si le polygone inscrit ou circonscrit au cercle de base est régulier, le prisme inscrit ou circonscrit au cylindre est régulier (604).

Considérons un cylindre de révolution et un prisme régulier inscrit. L'aire latérale du prisme s'obtient en multipliant le périmètre de sa base par sa hauteur (620). Or, quand on fait croître indéfiniment le nombre des côtés du polygone de base, le périmètre de ce polygone tend vers une limite fixe et indépendante de la loi suivant laquelle ses côtés tendent vers zéro (305); d'ailleurs la hauteur du prisme reste constamment égale à la hauteur du cylindre. Donc l'aire latérale du prisme inscrit tend vers une limite fixe indépendante de la loi suivant laquelle les côtés de sa base tendent vers zéro; *c'est cette limite que l'on appelle l'aire latérale du cylindre*.

Considérons en second lieu un cylindre de révolution et deux prismes réguliers de bases semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit au cylindre (*fig.* 386). Le volume du cylindre est compris entre les volumes des deux prismes. Or, ces deux prismes ont même hauteur, et le rapport des aires de leurs bases a pour limite l'unité (450), lorsque le nombre commun de leurs côtés croît indéfiniment; par suite, le rapport des volumes des deux prismes tend vers l'unité, et il en est de même à fortiori du rapport du volume du cylindre au volume de l'un quelconque de ces prismes. Donc *le volume d'un cylindre de révolution est la limite commune des volumes des prismes réguliers de bases semblables inscrit et circonscrit dont on fait croître indéfiniment le nombre des faces.*

Il importe de remarquer que ce dernier énoncé est un véritable *théorème*, tandis que l'énoncé de l'alinéa précédent relatif à l'aire n'est qu'une *définition*.

741. Deux cylindres de révolution sont dits *semblables*, lorsqu'ils sont engendrés par des rectangles semblables, c'est-à-dire lorsque leurs hauteurs sont entre elles comme les rayons de leurs bases.

THÉORÈME.

742. *L'aire latérale d'un cylindre de révolution a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par sa hauteur.*

L'aire latérale du cylindre est la limite des aires latérales des prismes réguliers inscrits dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient S, C, H, l'aire latérale, la circonférence de base et la hauteur du cylindre considéré; soient s et p l'aire latérale et le périmètre de la base d'un prisme régulier inscrit. On a (620)

$$s = p.\text{H}.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du prisme, s tend vers S et p vers C; on a donc, à la limite,

$$\text{S} = \text{C}.\text{H}.$$

COROLLAIRES.

743. Si R est le rayon du cylindre, on a $\text{C} = 2\pi\text{R}$ et, par suite,

$$\text{S} = 2\pi\text{RH}.$$

En ajoutant à cette aire latérale les aires des deux bases ou le double $2\pi\text{R}^2$ de l'aire de l'une d'elles, on obtient, pour l'aire totale T du cylindre,

$$\text{T} = 2\pi\text{RH} + 2\pi\text{R}^2 = 2\pi\text{R}(\text{R} + \text{H}).$$

744. Soient S, S', les aires latérales; T, T', les aires totales; R, R', les rayons et H, H', les hauteurs de deux cylindres de révolution semblables. On aura (741)

$$\frac{\text{R}}{\text{R}'} = \frac{\text{H}}{\text{H}'} = \frac{\text{R}+\text{H}}{\text{R}'+\text{H}'},$$

et par suite

$$\frac{\text{S}}{\text{S}'} = \frac{\text{RH}}{\text{R}'\text{H}'} = \frac{\text{R}}{\text{R}'}.\frac{\text{H}}{\text{H}'} = \frac{\text{H}^2}{\text{H}'^2} = \frac{\text{R}^2}{\text{R}'^2},$$

$$\frac{\text{T}}{\text{T}'} = \frac{\text{R}(\text{R}+\text{H})}{\text{R}'(\text{R}'+\text{H}')} = \frac{\text{R}}{\text{R}'}.\frac{\text{R}+\text{H}}{\text{R}'+\text{H}'} = \frac{\text{H}^2}{\text{H}'^2} = \frac{\text{R}^2}{\text{R}'^2}.$$

Donc, *les aires latérales ou totales de deux cylindres de révolution semblables sont entre elles comme les carrés des rayons ou comme les carrés des hauteurs.*

SCOLIE.

745. Considérons un cylindre de révolution et un prisme régulier inscrit ABCDEFA'B'C'D'E'F' (*fig.* 387); par une rotation autour de l'arête BB', amenons la face ABB'A' dans le prolongement de la face BCC'B'; puis, par une rotation autour de CC', amenons les deux faces déjà réunies dans le prolongement de la face suivante CDD'C', et ainsi de suite

jusqu'à ce que toutes les faces latérales du prisme soient réunies sur le plan de la dernière d'entre elles AFF'A'. Dans son mouvement autour de l'arête BB', le côté AB reste perpendiculaire à cette arête; il se place donc sur le prolongement de CB; de même, la droite ABC, formée dès

Fig. 387.

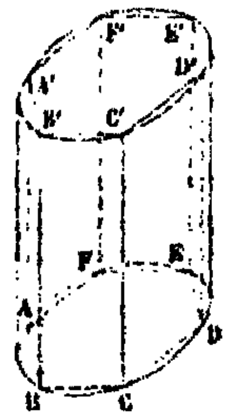
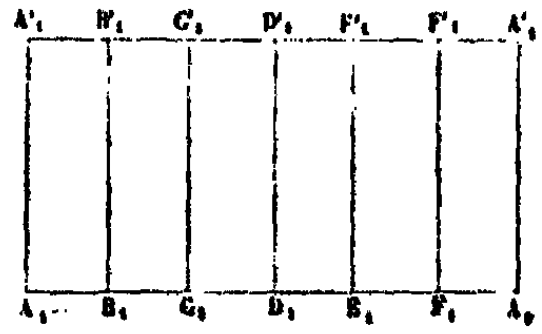


Fig. 388.



lors par la réunion de AB et de BC, vient se placer sur le prolongement de DC, etc. On obtient donc finalement sur le dernier plan un rectangle $A_1A_2A'_2A'_1$ (*fig.* 388) dont la hauteur est celle du prisme droit et dont la base est égale au périmètre de la base du prisme. Ce rectangle est le *développement* de l'aire latérale du prisme.

Si le nombre des côtés du prisme régulier inscrit dans le cylindre croît indéfiniment, le rectangle $A_1A_2A'_2A'_1$ conserve la même hauteur, et la longueur de sa base A_1A_2 tend vers la circonférence de la base du cylindre. Le rectangle limite, qui a une hauteur égale à celle du cylindre et une base égale à la circonférence de la base du cylindre, est dit le *développement* de l'aire latérale de ce cylindre.

THÉORÈME.

746. ***Le volume d'un cylindre de révolution a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.***

Le volume du cylindre est la limite des volumes des prismes réguliers inscrits, dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient V, B, H, le volume du cylindre, l'aire de sa base et sa hauteur; soient v et b le volume et l'aire de la base d'un prisme régulier inscrit au cylindre; on a (636)

$$v = b.\mathrm{H}.$$

Mais lorsque le nombre des faces du prisme croît indéfiniment, v tend vers V et b vers B; on a donc, à la limite,

$$\mathrm{V} = \mathrm{B}.\mathrm{H}.$$

COROLLAIRES.

747. Si R est le rayon du cylindre considéré, on a $B = \pi R^2$, et par suite

$$V = \pi R^2 . H.$$

748. Soient V, V', les volumes, R, R', les rayons, H, H', les hauteurs de deux cylindres de révolution semblables; on aura (741)

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{H'},$$

et par suite

$$\frac{V}{V'} = \frac{R^2 H}{R'^2 H'} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 . \frac{H}{H'} = \frac{R^3}{R'^3} = \frac{H^3}{H'^3}.$$

Donc, *les volumes de deux cylindres de révolution semblables sont entre eux comme les cubes des rayons ou comme les cubes des hauteurs.*

749. EXEMPLE :

Pour mesurer les liquides, on emploie des vases ayant la forme de cylindres de révolution dont la hauteur est double du diamètre ; calculer d'après cela les dimensions du litre.

La capacité du cylindre dont on demande la hauteur H est 1 décimètre cube; en prenant le décimètre pour unité de longueur, et en remarquant que le rayon du cylindre est $\frac{H}{4}$, on a la relation

$$\pi \left(\frac{H}{4}\right)^2 . H = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\pi H^3}{16} = 1;$$

on en déduit

$$H = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}} = 1^{\text{dm}},720.$$

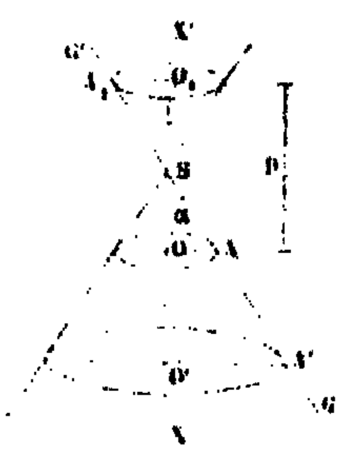
Le litre est donc un cylindre dont la hauteur a 172 millimètres, et dont le rayon a par suite 43 millimètres.

§ II. — CONE DE RÉVOLUTION.

DÉFINITIONS.

750. On appelle *surface conique de révolution* la surface engendrée par une droite GSG' tournant autour d'une droite fixe XSX' qu'elle rencontre en un point S, et à laquelle elle est invariablement liée (*fig.* 389).

Fig. 389.



La droite fixe XX' reçoit le nom d'*axe* de la surface, et la droite mobile GG' celui de *génératrice* ou d'*arête*. Le point S, qu'on nomme *sommet*, sépare la surface conique en deux parties indéfinies qu'on appelle *nappes*.

Le lieu géométrique des droites qui, passant par un point donné S, font un angle donné α avec une droite donnée D, est une surface conique de révolution ayant le point S pour sommet et pour axe la parallèle menée à D par le point S.

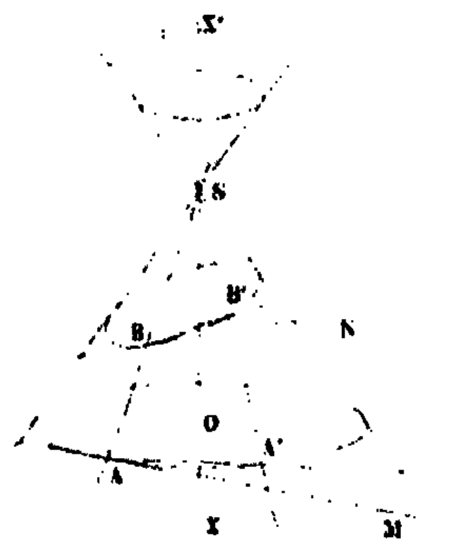
Un point quelconque A de la droite GG' décrit une circonférence dont le centre est sur l'axe, et dont le plan est perpendiculaire à l'axe (736). Par suite, toutes les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe sont des circonférences dont le lieu des centres est l'axe lui-même. Quant aux rayons OA, O'A', de ces cercles, la similitude des triangles SOA, SO'A', prouve qu'ils sont proportionnels aux distances SO, SO', de leurs plans au sommet, ou encore aux portions correspondantes SA, SA', de la génératrice SGG'. Leurs aires sont donc proportionnelles aux carrés des mêmes lignes.

751. Considérons une droite fixe XSX', un plan P passant par un point S de cette droite, et désignons par α l'angle de la droite et du plan, c'est-à-dire l'angle aigu de la droite SX avec sa projection SA sur ce plan (*fig.* 390). Par le point S, on peut mener dans le plan P (540) deux droites SB, SC, faisant avec SX un angle aigu donné ω. Ces deux droites sont symétriques par rapport à AA'. Il en est ainsi tant que ω est supérieur à α; lorsque ω devient égal ou inférieur à α, les deux droites se réduisent à la droite unique SA ou cessent d'exister.

D'après cela, un plan passant par le sommet d'une surface conique de révolution renferme deux génératrices de cette surface, ou une seule, ou enfin n'a de commun avec la surface que le sommet, suivant que l'inclinaison du plan sur l'axe est inférieure, égale ou supérieure à l'angle aigu de la génératrice avec l'axe, c'est-à-dire au *demi-angle au sommet* de la surface conique.

Fig. 390.

Fig. 391.



Dans le cas où le plan donné n'a de commun avec la surface qu'une seule génératrice SA (*fig.* 391), on peut le considérer comme la position limite d'un plan variable qui, passant par la génératrice fixe SA, et par une génératrice voisine SA', tourne autour de SA jusqu'à ce que SA' vienne se confondre avec SA. On voit dès lors, par un raisonnement identique à celui qu'on a fait pour le cylindre (738), que ce plan renferme les tangentes AM, BN, ... à toutes les courbes AA', BB', ... que l'on peut tracer sur la surface, aux points A, B, ..., où la génératrice SA rencontre ces courbes. On donne à ce plan le nom de *plan tangent suivant la génératrice* SA.

La génératrice SA et la tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface au point où cette courbe rencontre SA, suffisent pour déterminer le plan tangent suivant cette génératrice. Si l'on choisit en particulier la tangente AM à une section AA' perpendiculaire à l'axe, on voit, comme pour le cylindre (738), que le *plan tangent est perpendiculaire au plan déterminé par l'axe et la génératrice de contact.*

752. On nomme *cône de révolution* le corps engendré par la rotation d'un triangle rectangle SOA autour de l'un des côtés SO de l'angle droit SOA (*fig.* 392).

La surface conique engendrée par l'hypoténuse SA est la *surface latérale* du cône; le cercle décrit par le côté OA est la *base*, la droite SO est la *hauteur*, et l'hypoténuse SA est le *côté* ou l'*apothème* de ce cône.

Fig. 392.

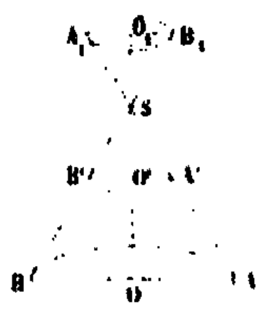
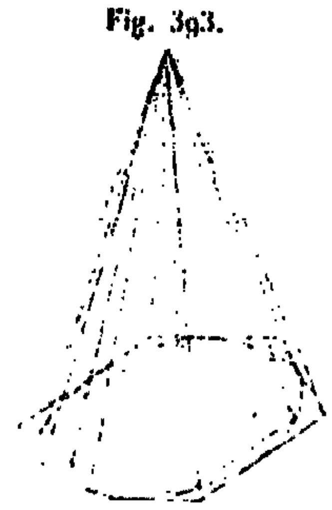


Fig. 393.



753. Si l'on coupe une surface conique de révolution (*fig.* 392) par deux plans AB, A'B', perpendiculaires à l'axe et situés d'un même côté du sommet S, on obtient un volume terminé par une portion de la surface conique, et par les deux cercles AB, A'B'. Ce corps, que l'on nomme *tronc de cône de révolution à bases parallèles*, est la différence des deux cônes SAB, SA'B'. On peut encore le considérer comme engendré par la rotation du trapèze rectangle AOO'A', autour du côté OO'. La droite OO' est la *hauteur* du tronc; les cercles AB, A'B', en sont les bases, et AA' en est le *côté* ou l'*apothème*.

En coupant une surface conique de révolution par deux plans AB, A_1B_1, perpendiculaires à l'axe, mais situés de part et d'autre du sommet S (*fig.* 392) on obtient un corps qui est la somme des deux cônes SAB, SA_1B_1. Il convient de donner encore à ce corps le nom de tronc de cône; mais, pour le distinguer du tronc de cône proprement dit, que nous avons défini dans l'alinéa précédent, nous l'appellerons *tronc de cône de seconde espèce* (662).

754. En construisant une pyramide de même sommet que le cône, et ayant pour base un polygone inscrit ou circonscrit au cercle de base du cône, on obtient une pyramide inscrite ou circonscrite au cône (*fig.* 393). Le plan de chaque face latérale de la pyramide circonscrite est tangent au cône. Si le polygone de base est régulier, la pyramide inscrite ou circonscrite est régulière.

On appelle *aire latérale d'un cône* la limite de l'aire latérale d'une pyramide régulière inscrite dont le nombre des faces croît indéfiniment. On légitime cette *définition* en montrant que la limite considérée existe et est indépendante de la loi suivant laquelle les côtés de la base de la pyramide tendent vers zéro. Le raisonnement est analogue à celui qu'on a employé pour le cylindre (740); seulement, tandis que la hauteur du prisme inscrit au cylindre reste fixe, l'apothème de la pyramide régulière inscrite au cône est variable et tend vers l'apothème du cône.

On *démontre*, absolument comme dans le cas du cylindre, que *le volume d'un cône de révolution est la limite commune des volumes des pyramides régulières de bases semblables inscrite et circonscrite dont on fait croître indéfiniment le nombre des faces.*

755. Deux cônes de révolution sont dits ***semblables*** lorsqu'ils sont engendrés par des triangles rectangles semblables, c'est-à-dire lorsque leurs hauteurs sont entre elles comme les rayons des bases.

THÉORÈME.

756. ***L'aire latérale d'un cône de révolution a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par la moitié de son apothème.***

L'aire latérale du cône est la limite des aires latérales des pyramides régulières inscrites dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient S, C, A, l'aire latérale, la circonférence de base et l'apothème du cône considéré, et s, p, a, l'aire latérale, le périmètre de la base et l'apothème d'une pyramide régulière inscrite. On a (651)

$$s = p \times \frac{1}{2} a.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base de la pyramide, s tend vers S, p vers C, a vers A; on a donc, à la limite,

$$S = C.\frac{1}{2}A.$$

COROLLAIRES.

757. Si R est le rayon de la base du cône, on a $C = 2\pi R$, et par suite

$$S = \pi R A.$$

En ajoutant la base πR^2, on a, pour l'aire totale,

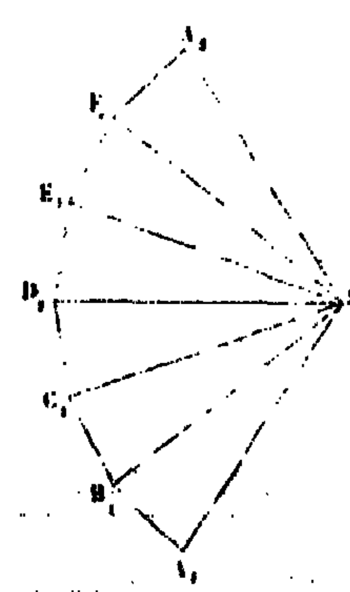
$$T = \pi R A + \pi R^2 = \pi R(A + R).$$

758. En raisonnant comme au n° 744, on reconnaît que *les aires latérales ou totales de deux cônes de révolution semblables sont entre elles comme les carrés des rayons ou des apothèmes ou des hauteurs.*

759. Considérons un cône de révolution et une pyramide régulière inscrite SABCDEF (*fig.* 394); par une rotation autour de l'arête SB ame-

Fig. 394.

Fig. 395.



nons la face SAB dans le prolongement de la face SBC; puis par une rotation autour de SC, amenons les deux faces déjà réunies dans le prolongement de la face suivante SCD; et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les faces latérales de la pyramide soient réunies dans le plan de la dernière d'entre elles FSA. On obtiendra ainsi un secteur polygonal régulier $S_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_1$ (*fig.* 395) ayant pour rayon l'arête de la pyramide régulière, c'est-à-dire l'apothème du cône, et pour base une ligne brisée régulière $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ égale au périmètre de la base de la pyramide.

Si le nombre des côtés de la pyramide régulière inscrite dans le cône croît indéfiniment, le secteur $S_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ conserve le même rayon, et la base dégénère en un arc de cercle, ayant une longueur égale à celle de la circonférence du cône. Le secteur circulaire $S_1A_1A_2$ obtenu est dit le *développement* de l'aire latérale du cône. Il est aisé de calculer le nombre n de degrés contenus dans l'angle A_1SA_2 de ce secteur circulaire. A étant l'apothème du cône et R le rayon de sa base, on a

$$\frac{n}{360} = \frac{\text{arc } A_1A_2}{2\pi . S_1A_1} = \frac{2\pi R}{2\pi A}, \quad \text{d'où} \quad n = 360^\circ \frac{R}{A}.$$

Pour $A = 2R$, on a $n = 180^\circ$, de sorte que le développement est un demi-cercle. Le cône correspondant est dit *équilatéral*; sa section par un plan passant par l'axe SO est un triangle équilatéral SAD.

THÉORÈME.

760. *L'aire latérale d'un tronc de cône de révolution à bases parallèles a pour mesure le produit de la demi-somme des circonférences de base par son apothème.*

L'aire latérale du tronc de cône ADD'A' (*fig.* 396) est la différence des aires latérales des cônes SAD, SA'D'. Cela posé, inscrivons dans le cône SAD une pyramide régulière SABCDEF; le plan A'D' de la base supérieure du tronc de cône décomposera cette pyramide en deux parties qui seront, l'une, SA'B'C'D'E'F', une pyramide régulière inscrite dans le cône SA'D', l'autre, ABCDEFA'B'C'D'E'F', un tronc de pyramide régulier inscrit dans le tronc de cône ADD'A'. Or, les aires latérales des cônes SAD, S'A'D', étant les limites des aires latérales des pyramides SABCDEF, SA'B'C'D'E'F', lorsque le nombre commun de leurs faces croît indéfiniment, l'aire latérale du tronc de cône sera égale à la limite de l'aire latérale du tronc de pyramide régulier inscrit. Soient s, a, p, p', l'aire latérale, l'apothème, et les périmètres des bases du tronc de pyramide; soient de même S, A, C, C', l'aire latérale, l'apothème et les circonférences des bases du tronc de cône; on aura (652)

$$s = \frac{1}{2}(p + p').a.$$

Mais, à la limite, lorsque les côtés du polygone ABCDEF tendent vers zéro, s tend vers S, p vers C, p' vers C', a vers A, et l'on a

$$S = \frac{1}{2}(C + C').A.$$

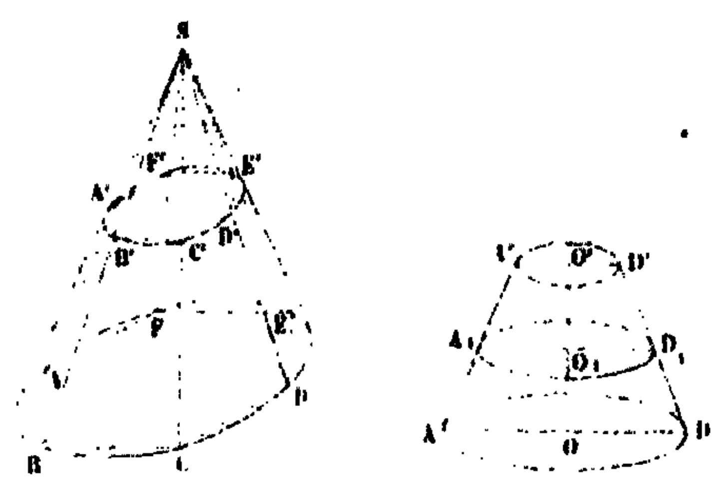
Corollaires.

761. Si R et R' sont les rayons des bases du tronc, on a $C = 2\pi R$, $C' = 2\pi R'$, et par suite

$$S = \pi(R + R').A.$$

Fig. 396.

Fig. 397.



762. Par le milieu A_1 du côté AA' (*fig.* 397), menons un plan parallèle aux bases du tronc de cône; le rayon A_1O_1 de la section circulaire déterminée par ce plan est parallèle (520) aux rayons AO, A'O', des bases, et par suite (436) égal à la demi-somme de ces rayons. Donc la circonférence A_1D_1 est la moyenne arithmétique des circonférences de base, et l'on peut dire que l'*aire latérale d'un tronc de cône de révolution a pour mesure le produit de l'apothème par la circonférence équidistante des deux bases.*

Ce dernier énoncé s'applique aussi au cylindre et au cône, car la circonférence équidistante des bases est égale, dans le cylindre, à celle de la base, et, dans le cône, à la moitié de celle de la base.

THÉORÈME.

763. *Le volume d'un cône de révolution a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.*

Le volume du cône est la limite des volumes des pyramides régulières inscrites dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient V, B, H, le volume du cône, l'aire de sa base et sa hauteur; soient v et b le volume et l'aire de la base d'une pyramide régulière inscrite dans ce cône. On a (654)

$$v = \frac{1}{3} bH.$$

Mais lorsque le nombre des faces de la pyramide croît indéfiniment, v tend vers V et b vers B; on a donc, à la limite,

$$V = \frac{1}{3} BH.$$

Corollaire.

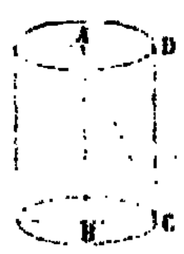
764. Si R est le rayon de la base du cône, on a $B = \pi R^2$ et par suite

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

On voit, comme au nº 748, que *les volumes de deux cônes de révolution semblables sont dans le rapport des cubes des hauteurs ou des rayons des bases.*

765. Lorsqu'un rectangle ABCD tourne autour de l'un de ses côtés AB (*fig.* 398), le triangle ABC engendre un cône

Fig. 398.



dont le volume est le tiers (nºˢ 747, 764) de celui du cylindre engendré par le rectangle ABCD. Par suite le volume engendré en même temps par le triangle ADC est les deux tiers du même cylindre. Cette remarque nous sera utile plus tard.

THÉORÈME.

766. *Le volume d'un tronc de cône de révolution à bases parallèles est égal à la somme des volumes de trois cônes ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour* *bases, le premier la base inférieure, le second la base supérieure, et le troisième la moyenne proportionnelle entre les deux bases du tronc.*

Considérons, comme au n° 760, un tronc de pyramide régulier inscrit dans le tronc de cône. Les volumes des deux pyramides dont ce tronc de pyramide est la différence ayant respectivement pour limites les volumes des deux cônes dont le tronc de cône proposé est la différence, on aura le volume de ce tronc de cône en prenant la limite du volume du tronc de pyramide. D'après cela, soient V, b, B, H, le volume, les bases et la hauteur du tronc de cône, v, b_1, B_1, le volume et les bases du tronc de pyramide inscrit; on aura (659)

$$v = \frac{H}{3}(B_1 + b_1 + \sqrt{B_1 b_1}).$$

Mais, lorsque le nombre des faces du tronc de pyramide croît indéfiniment, v tend vers V, b_1 vers b, B_1 vers B; et l'on a, à la limite, la formule

$$V = \frac{H}{3}(B + b + \sqrt{Bb}),$$

dont l'énoncé ci-dessus n'est que la traduction en langage ordinaire.

COROLLAIRES.

767. Si R est le rayon de la base inférieure B, et r le rayon de la base supérieure b, on a $B = \pi R^2$, $b = \pi r^2$, et par suite

$$(1) \qquad V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

768. Le raisonnement qui précède s'applique au tronc de *seconde espèce;* il faut seulement substituer le mot *somme* au mot *différence*, et remarquer que le tronc de pyramide inscrit correspondant étant de seconde espèce, le radical qui figure dans l'expression de v doit avoir le signe — (662). On obtient ainsi pour le volume du tronc de cône de seconde espèce la formule

$$V = \frac{H}{3}(B + b - \sqrt{Bb}) = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 - Rr).$$

769. Parfois dans la pratique, notamment pour le ***cubage des troncs d'arbres*** non équarris, les bases diffèrent assez peu pour qu'on puisse assimiler sans inconvénient le cône tronqué à un cylindre ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour base la section faite dans le tronc à égale distance des deux bases. L'erreur commise est d'ailleurs facile à évaluer; en retranchant le volume cylindrique

$$(2) \qquad v = \pi H \left(\frac{R + r}{2}\right)^2,$$

du cône tronqué dont le volume est donné par la formule (1), on trouve

$$V - v = \frac{1}{3}\pi H \left(\frac{R - r}{2}\right)^2.$$

L'erreur commise est donc égale au volume d'un cône ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour rayon de sa base la demi-différence des rayons des bases du tronc.

Quand on veut appliquer la formule (2) au cubage d'un tronc d'arbre, il convient de la préparer de la manière suivante : soit C la longueur de la circonférence moyenne que l'on évalue au moyen d'un cordon métrique, le rayon de cette circonférence sera $\frac{C}{2\pi}$ et, par suite, le volume cherché

$$v = \frac{\pi H C^2}{4\pi^2} = \frac{HC^2}{4\pi}.$$

Ainsi, supposons qu'on ait trouvé $1^m,80$ pour la circonférence moyenne et $6^m,50$ pour la hauteur, on aura pour le volume

$$\frac{6,5.(1,8)^2}{4\pi} = \frac{6,5.(0,9)^2}{\pi} = 1^{mc},676.$$

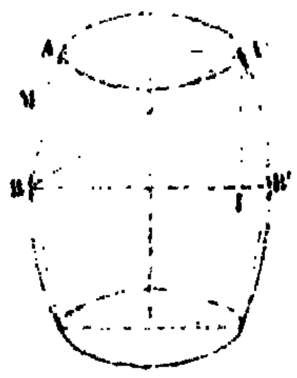
770. La question du ***jaugeage des tonneaux*** se rattache à la mesure du tronc de cône.

En considérant le tonneau comme la somme de deux troncs de cône identiques opposés par leur grande base, on aurait la formule

$$V = \frac{1}{3}\pi H (R^2 + r^2 + Rr),$$

dans laquelle H est la hauteur totale du double tronc, r le rayon du *fond* AA', et R le rayon de la grande base à laquelle on donne le nom de *bouge*. Mais cette formule donne un ré-

Fig. 399.



sultat trop faible, car on néglige le volume engendré par la rotation du segment AMB compris entre la droite AB et l'arc AMB. En remplaçant dans la parenthèse Rr par R^2, on obtient une formule

$$V = \frac{1}{3}\pi H(2R^2 + r^2)$$

qui donne au contraire un résultat trop fort. La formule qui s'adapte le mieux à la forme générale des tonneaux est la suivante (*) :

$$V = \frac{1}{3}\pi H\left[2R^2 + r^2 - \frac{1}{3}(R^2 - r^2)\right].$$

Pour $H = 0^m,756$, $R = 0^m,345$, $r = 0^m,305$, la première formule donne 250 litres, la seconde 261 et la troisième 254.

Enfin, nous signalerons la formule

$$V = 0,605.D^3,$$

qui permet de jauger les tonneaux ordinaires d'une manière très-rapide et suffisamment approchée en mesurant seulement la diagonale BA' = D qui va du trou B ou *bonde* au point le plus bas A' de l'un des fonds. Les *jauges diagonales* sont surtout employées dans les octrois. En calculant d'avance, à l'aide de la formule précédente, les valeurs de V qui répondent aux diverses valeurs de D et inscrivant ces valeurs sur la tige

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLVIII, p. 96.

de fer que l'on introduit dans le tonneau, on obtient la capacité du fût par une simple lecture.

Pour comparer cette dernière formule avec la précédente, il suffit d'observer que l'on a dans le triangle rectangle BA'I,

$$\overline{BA'}^2 = \overline{A'I}^2 + \overline{BI}^2 \quad \text{ou} \quad D^2 = \frac{1}{4}H^2 + (R+r)^2;$$

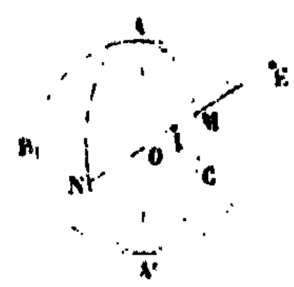
on trouverait ainsi 257 litres pour la contenance du tonneau déjà considéré.

§ III. — PREMIÈRES NOTIONS SUR LA SPHÈRE.

DÉFINITIONS.

771. On appelle ***surface sphérique*** la surface engendrée par la rotation d'une demi-circonférence ABA' autour du diamètre AA' qui la termine (*fig.* 400).

Fig. 400.



Dans ce mouvement, tout point de cette demi-circonférence décrit un cercle dont le centre est situé sur l'axe de rotation AA' et dont le plan est perpendiculaire à cet axe.

La *sphère* est le corps limité par une surface sphérique. On confond souvent dans le discours les mots *sphère* et *surface sphérique*, de même qu'en Géométrie plane on dit parfois *cercle* pour *circonférence de cercle*.

772. Considérons la sphère engendrée par la rotation du demi-cercle ABA' autour du diamètre AA', et un point quelconque de l'espace. Quand le demi-cercle générateur vient se placer suivant ACA' dans le plan déterminé par AA' et par le point considéré, il peut se faire que ce point soit comme E à l'extérieur du cercle ACA', ou comme I à l'intérieur, ou enfin comme M sur la circonférence de ce cercle. Dans le premier cas, le point E est *extérieur* à la sphère et sa distance au centre O du cercle ACB est plus grande que le rayon R de ce cercle; dans le second cas, le point I est *intérieur* à la sphère et la distance OI est moindre que R; enfin dans le troisième cas, le point M est sur la surface sphérique et la distance OM est égale à R.

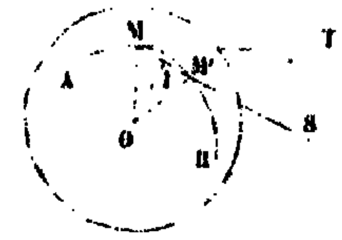
La *surface sphérique* peut donc être encore définie le *lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe.*

Ce point fixe O est dit le *centre* de la sphère. On nomme *rayon* toute droite, telle que OA ou OM, menée du centre O à la surface; *tous les rayons d'une même sphère sont égaux.* On nomme diamètre toute droite, telle que MN, passant par le centre et limitée à la surface sphérique; *tous les diamètres d'une même sphère sont égaux*, car chacun d'eux est la somme de deux rayons.

Deux sphères de même rayon sont égales.

773. La définition donnée au n° 116 pour la tangente aux courbes planes s'étend aux courbes de l'espace. Il est aisé de voir, d'après cela, que *la tangente* MT *à une courbe quelconque* AMB *tracée sur la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OM *mené au point de contact.* En effet (*fig.* 401),

Fig. 401.



prenons sur la courbe AMB un point M' voisin du point M, menons la sécante MM'S et joignons le centre O au milieu I de la corde MM'. Le triangle MOM' étant isocèle, la droite OI est perpendiculaire sur MM' (34). Or, lorsque la sécante MM'S tourne autour du point M de manière à devenir à la limite la tangente MT, le point I milieu de MM' se réunit au point M en même temps que le point M'. L'angle OMT, position limite de l'angle droit OIS, est donc lui-même un angle droit.

774. On appelle *angle de deux courbes* passant par un même point de l'espace, l'angle de leurs tangentes en ce point.

Donc, *l'angle de deux courbes tracées sur la sphère est égal à l'angle des plans menés respectivement par le centre de la sphère et par les tangentes à ces courbes au point commun :* car ces tangentes étant perpendiculaires au rayon qui aboutit au point commun (773), leur angle mesure précisément le dièdre des deux plans considérés.

THÉORÈME.

775. *Toute section plane de la sphère est un cercle.*

En effet, les points de la section sont, puisqu'ils appartiennent à la sphère, situés à la même distance du centre de cette sphère ; or, on sait (96 ; 500, 2°) que le lieu des points d'un plan équidistants d'un point fixe est une circonférence de cercle.

Corollaires.

776. Si le point fixe O, qui est ici le centre de la sphère (*fig.* 402), est situé dans le plan sécant, ce point est le centre même de la section ACB dont le rayon ne diffère pas de celui de la sphère.

Si le point fixe O est extérieur au plan sécant, le centre I de la section DEF est la projection du centre O de la sphère sur le plan sécant (500, 2°). Quant au rayon OE = r de la section, c'est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle OIE dont l'hypoténuse OE est le rayon R de la sphère et dont l'autre côté de l'angle droit OI est la distance d du centre de la sphère au plan sécant. Ce rayon r résulte donc de la formule

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

On est ainsi conduit à diviser les sections planes de la sphère en deux classes : les *grands cercles*, dont les plans passent par le centre de la sphère et qui sont tous égaux entre eux, puisqu'ils ont tous pour rayon le rayon de la sphère ; et les *petits cercles*, dont les plans ne contiennent pas le centre de la sphère, et dont les rayons, inférieurs à celui de la sphère, décroissent à mesure que leurs plans s'éloignent du centre de la sphère. *Deux petits cercles également éloignés du centre de la sphère sont égaux, et, de deux petits cercles inégalement éloignés du centre de la sphère, le plus grand est celui qui est le plus voisin de ce centre.*

Ajoutons qu'il faut *trois points* de la surface sphérique pour déterminer un petit cercle (**118**, **482**), tandis que *deux points* suffisent pour déterminer un grand cercle, attendu que le centre est connu (**481**); toutefois, dans ce dernier cas, les deux points donnés ne doivent pas être en ligne droite avec le centre de la sphère, sans quoi le plan du grand cercle, assujetti seulement à passer par un diamètre, pourrait occuper une infinité de positions (**481**, 1°).

Fig. 402.

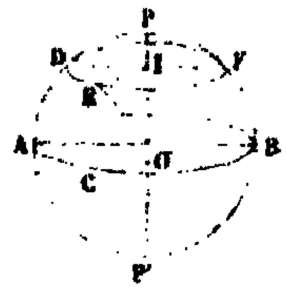


Fig. 403.

777. *Tout grand cercle divise la surface sphérique et la sphère en deux parties égales.* Car si, après avoir séparé les deux parties, on les applique sur la base commune en tournant leur convexité dans le même sens, les deux surfaces coïncideront, sans quoi tous les points de la surface sphérique ne seraient pas à la même distance du centre.

778. *Deux grands cercles* APBP', ABC (*fig.* 403), *se divisent mutuellement en deux parties égales;* car le centre O de la sphère, appartenant à la fois aux plans de ces deux cercles, est situé sur leur intersection commune, qui dès lors est un diamètre.

779. *Une droite ne peut couper la surface sphérique en plus de deux points.* Car cette droite ne saurait avoir plus de deux points communs avec la circonférence de grand cercle, située dans le plan déterminé par cette droite et le centre de la sphère.

780. *La sphère est de révolution autour d'un diamètre quelconque* AB. Car la circonférence ACB déterminée par un plan quelconque passant par AB, ayant même centre O et même rayon OA que la sphère, engendrera évidemment cette surface en tournant autour de AB (*fig.* 403).

781. On nomme *pôles* d'un cercle de la sphère les extrémités du diamètre de la sphère qui est perpendiculaire au plan du cercle.

Deux cercles DFE, ACB (*fig.* 404), dont les plans sont parallèles, ont les mêmes pôles P et P'.

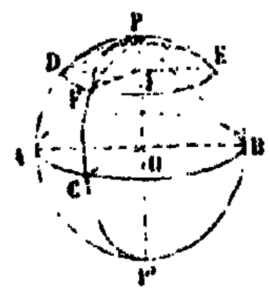
Le centre I d'un cercle quelconque DE, ses pôles P et P', et le centre O de la sphère sont sur une même perpendiculaire au plan de ce cercle.

Tout grand cercle PFCP' passant par les pôles P et P' d'un cercle DFE a son plan perpendiculaire au plan de ce cercle, puisqu'il contient la droite PP' qui est perpendiculaire à ce dernier plan (565).

THÉORÈME.

782. *Tous les points de la circonférence d'un cercle* DFE *de la sphère sont à égale distance de chacun des pôles* P *et* P' *de ce cercle.*

Fig. 404.



En effet, la droite PI, qui joint le pôle P au centre I du cercle DFE, étant perpendiculaire au plan DFE, les droites PD, PF, PE,..., sont des obliques qui s'écartent également du pied I de la perpendiculaire, et qui par suite sont égales.

On voit encore que les arcs de grand cercle PD, PF, PE,..., sont égaux comme sous-tendus par des cordes égales.

Enfin, dans le cas où le cercle considéré DFE devient un grand cercle ACB, la même propriété subsiste ; mais les angles droits POA, POC, POB,..., ayant leurs sommets au centre des grands cercles PAP', PCP', PBP',..., les arcs PA, PC, PD,..., sont tous égaux au quart d'une circonférence de grand cercle.

SCOLIES.

783. Des deux pôles P et P' d'un petit cercle DFE, nous ne considérerons désormais, à moins d'avertissement contraire,

que le pôle P qui est le plus rapproché du plan de ce cercle. Nous donnerons à la distance rectiligne PD, qui sépare le pôle P d'un point quelconque D du cercle DFE, le nom de *distance polaire* de ce cercle, et à la longueur de l'arc de grand cercle PD, qui va du pôle à un point quelconque D du cercle DFE, le nom de *rayon sphérique* de ce cercle.

Le rayon sphérique d'un grand cercle est égal au quart de la circonférence de ce cercle ou à un quadrant, et sa distance polaire est égale à la corde de cet arc, c'est-à-dire au côté du carré inscrit dans un grand cercle.

784. Le théorème précédent permet de tracer des circonférences sur une sphère solide comme on les trace sur un plan. On emploie à cet effet un *compas à branches courbes*, afin de ne pas être gêné par la convexité de la sphère. On donne au compas une ouverture (distance des deux pointes) égale à la distance polaire voulue, et on place la pointe sèche au point choisi pour pôle; l'autre pointe décrit alors le cercle demandé.

Pour décrire un grand cercle, il faut avoir sa distance polaire, c'est-à-dire la corde d'un arc égal au quart d'un grand cercle; ce qui exige la connaissance du rayon de la sphère (798).

THÉORÈME.

785. *L'angle* APB *de deux arcs de grand cercle* PAP', PBP', *a pour mesure soit l'arc de grand cercle* AB *décrit de son sommet* P *comme pôle et compris entre ses côtés, soit le plus petit arc de grand cercle* pp_1 *qui unit les pôles de ses côtés* (*fig.* 405).

En effet :

1° Les arcs PA, PB, étant des quadrants, les angles POA, POB, sont droits, et l'angle AOB est l'angle plan qui mesure l'angle dièdre formé par les plans des deux grands cercles. Mais (774) cet angle dièdre est égal à l'angle APB des deux arcs de grands cercles, et l'angle au centre AOB a pour mesure l'arc AB; donc l'arc AB est aussi la mesure de l'angle APB.

2° Prenons sur la circonférence ABC, à partir des points A et B, *dans le même sens*, deux arcs Ap et Bp_1, égaux à un quadrant; l'arc pp_1 est évidemment égal à l'arc AB, et, pour justifier le second énoncé du théorème, il suffit de prouver que p et p_1 sont les pôles des cercles PAP′, PBP′. Or, la droite Op, perpendiculaire à OA, puisque l'arc Ap est un quadrant,

Fig. 405.

et perpendiculaire à OP, puisqu'elle est dans le plan ABC, est perpendiculaire au plan du grand cercle PAP′; p est donc le pôle de ce grand cercle. De même, p_1 est le pôle du grand cercle PBP′.

Nous avons dit que nous portions les arcs Ap et Bp_1 dans le même sens, à partir de leurs origines respectives A et B; si on les portait l'un dans un sens et l'autre en sens contraire, l'arc pp_1 serait le supplément de l'angle des deux grands cercles. Il y a donc une précaution à prendre dans l'application du second énoncé. Il faut considérer, pour l'un des grands cercles PAP′, le pôle p qui est du même côté que le demi-cercle PBP′ et, pour l'autre grand cercle PBP′, le pôle p_1 qui n'est pas du même côté que le demi-cercle PAP′.

Corollaires.

786. Le lieu géométrique des pôles des grands cercles inclinés d'un angle donné sur un grand cercle donné, se compose de deux cercles dont les pôles se confondent avec ceux du grand cercle donné. Le rayon sphérique de ces cercles est égal à l'arc de grand cercle qui mesure l'angle donné.

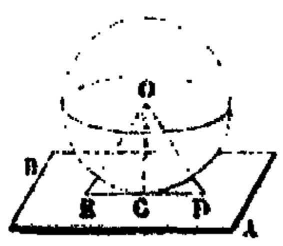
787. Pour que deux grands cercles se coupent à angle droit, il faut et il suffit que chacun d'eux renferme le pôle de l'autre.

788. Deux grands cercles APC, BPD, forment en se coupant au point P quatre angles APB, BPC, CPD, DPA; les angles adjacents APB, BPC, sont supplémentaires, les angles opposés par le sommet APB, CPD, sont égaux.

THÉORÈME.

789. *Tout plan* AB *perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon* OC *est tangent à la sphère, et* réciproquement *tout plan* AB *tangent à la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OC *mené au point de contact* C (*fig.* 406).

Fig. 406.



On dit qu'un plan AB est *tangent* à la sphère lorsqu'il n'a avec cette surface qu'un point commun C, qu'on nomme *point de contact*.

Cela posé, soit AB un plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon OC. D étant un point quelconque de ce plan, autre que C, OD sera oblique à ce plan et l'on aura $OD > OC$, de sorte que le point D sera extérieur à la sphère. Le plan AB n'ayant d'après cela que le point C commun avec la surface sphérique, sera tangent à cette surface.

Inversement, si AB est un plan tangent à la sphère au point C, tout point D de ce plan, autre que C, sera extérieur à la sphère, et l'on aura $OD > OC$; donc OC étant la plus courte distance du centre O au plan AB, sera perpendiculaire sur ce plan.

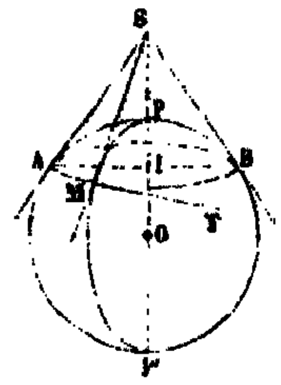
COROLLAIRES.

790. *Par un point pris sur la surface sphérique, on peut toujours mener un plan tangent à cette surface, et l'on ne peut en mener qu'un* (501).

791. Le plan tangent à la sphère en un point C contient les tangentes en ce point à toutes les courbes qu'on peut tracer par ce point sur la surface sphérique (773, 502).

792. Considérons une sphère O et un point extérieur S (*fig.* 407). Par la droite OS, menons un plan quelconque qui déterminera dans la sphère un grand cercle PAP', et menons par S une tangente SA à ce cercle. Pendant que le demi-cercle PAP' en tournant autour de l'axe SO engendre la sphère, la tangente SA engendre un cône de révolution qui a en commun avec la sphère le cercle AB décrit par le point A. De plus, en tout point M de ce cercle, le cône et la sphère ont le

Fig. 407.



même plan tangent; car la génératrice SM et la tangente MT au cercle AB, qui déterminent le plan tangent au cône (751), sont situées l'une et l'autre (791) dans le plan tangent à la sphère. On dit d'après cela que *le cône est circonscrit à la sphère* et que *la sphère est inscrite au cône* le long du cercle commun AB.

On voit encore par là que *par un point extérieur* S, *on peut mener une infinité de plans tangents à une sphère* O, et que *toutes les tangentes* SA, SM, SB,..., *à la sphère, issues du même point* S, *sont égales*.

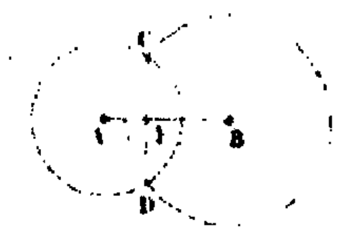
Si le point S s'éloigne indéfiniment sur la droite PP', le cône dégénère en un *cylindre circonscrit*, et le lieu des points de contact de la sphère et de ce cylindre de révolution, devient le grand cercle perpendiculaire à la direction PP' des génératrices du cylindre.

THÉORÈME.

793. *L'intersection de deux sphères* A *et* B *est une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres* AB *des deux sphères et dont le centre est sur cette ligne* (*fig.* 408).

Car, cette intersection n'est autre que la circonférence engendrée par la rotation autour de AB du point C commun aux deux circonférences suivant lesquelles les deux sphères sont coupées par un plan quelconque passant par AB.

Fig. 408.



Scolie.

794. Lorsque deux sphères n'ont qu'un point commun, on dit qu'elles sont tangentes en ce point qu'on nomme *point de contact ;* le point de contact est situé sur la ligne des centres, et en ce point les sphères ont le même plan tangent.

Les positions relatives de deux sphères sont au nombre de cinq (123); D désignant la distance des centres et R et r les rayons, on a :

$$D > R + r,$$

si les deux sphères sont extérieures;

$$D = R + r,$$

si les deux sphères se touchent extérieurement;

$$R + r > D > R - r,$$

si les deux sphères se coupent;

$$D = R - r,$$

si les deux sphères se touchent intérieurement;

$$D < R - r,$$

si l'une des sphères est intérieure à l'autre.

Les réciproques sont vraies.

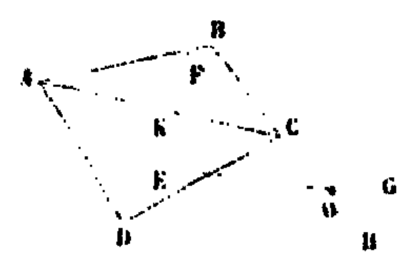
THÉORÈME.

795. *Par quatre points* A, B, C, D, *non situés dans un même plan, on peut faire passer une surface sphérique, mais une seule* (*fig.* 409).

Il s'agit de prouver qu'il existe un point, et un seul, situé à la même distance des quatre points A, B, C, D.

Or, tout point équidistant de A, B, C, D, doit se trouver sur la perpendiculaire FH élevée au plan ABC pour le centre F du cercle circonscrit au triangle ABC, puisque cette perpendiculaire est le lieu des points équidistants de A, B, C, (500, 2°); il doit aussi appartenir à la perpendiculaire EG élevée au plan ACD par le centre E du cercle circonscrit au triangle ABD. Comme deux droites FH, EG, ne peuvent avoir qu'un point commun, on voit d'abord qu'il ne saurait jamais exister qu'un seul point équidistant de A, B, C, D. En second lieu, un tel point existe

Fig. 409.



toujours si, conformément à l'hypothèse, les points A, B, C, D, ne sont pas situés dans un même plan. En effet, le plan perpendiculaire sur le milieu K de AC étant le lieu des points équidistants de A et de C, doit contenir EG et FH; d'ailleurs, les deux droites KF et KE, suivant lesquelles il rencontre les plans ABC et ADC, se coupent, puisque les plans ABC et ADC sont distincts; donc les deux droites EG et FH, étant situées dans un même plan EKF, et étant, dans ce plan, perpendiculaires à deux droites KF et KE qui se coupent, ont un point commun O qui est le centre de la sphère demandée.

Corollaires.

796. Deux sphères, qui ont quatre points communs non situés dans un même plan, coïncident.

797. Les perpendiculaires élevées aux quatre faces d'un tétraèdre par le centre du cercle circonscrit à chacune de ces faces, se coupent en un même point.

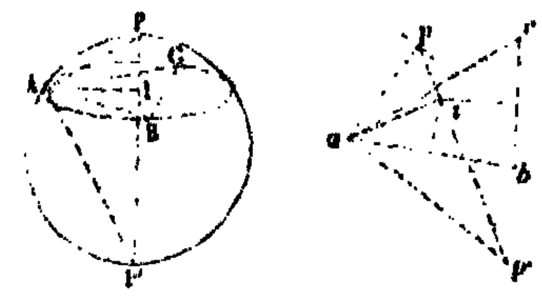
PROBLÈME.

798. *Trouver le rayon d'une sphère solide* (*fig.* 410).

Il existe plusieurs solutions de ce problème; voici la meilleure.

D'un point P de la surface sphérique comme pôle, avec une ouverture de compas arbitraire, on décrit un cercle ABC. On relève avec le compas les trois distances rectilignes AB, BC, CA, et l'on construit sur le papier un triangle *abc* ayant pour côtés ces trois longueurs. On détermine le centre *i* du cercle circonscrit au triangle *abc*, et la droite *ai* est égale au rayon AI

Fig. 410.



du cercle ABC. Dès lors, si du point *a* comme centre avec une ouverture de compas égale à celle qui a servi à décrire le cercle ABC sur la sphère, on décrit un petit arc de cercle jusqu'à la rencontre *p* de la perpendiculaire *pip'* élevée en *i* sur *ai*, on forme un triangle *api* égal à API, et il ne reste plus qu'à élever la perpendiculaire *ap'* sur *ap* pour avoir en *pp'* le diamètre PP' de la sphère.

Pour obtenir des résultats précis lorsqu'on n'a à sa disposition qu'une portion de sphère, il faut : choisir le point P à peu près au milieu de la portion de surface dont on dispose; prendre une distance polaire PA aussi grande que possible, et, enfin, dans tous les cas, choisir les points A, B, C, sur le cercle ABC, de telle sorte que le triangle ABC soit à peu près équilatéral.

Scolie.

799. On emploie souvent pour déterminer le rayon d'une sphère solide un instrument spécial, qui est décrit dans les *Traités de Physique* et qu'on nomme *sphéromètre*. Cet instrument fait connaître le rayon $AI = r$ du cercle ABC, et la flèche $PI = h$. La construction graphique plane reste la même; seulement, au lieu de déterminer le point p à l'aide d'un arc de cercle décrit du point a, on prend $ip = h$. Mais, dans ce cas, on préfère le calcul à la construction graphique; R étant le rayon inconnu de la sphère, le triangle rectangle PAP′ donne

$$\overline{\mathrm{AI}}^2 = \mathrm{IP}.\mathrm{IP}' \quad \text{ou} \quad r^2 = h(2\mathrm{R} - h),$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2}\left(h + \frac{r^2}{h}\right).$$

PROBLÈME.

800. ***Tracer sur la sphère un grand cercle passant par deux points donnés* A *et* B (*fig.* 411).**

L'inconnue de la question est le pôle du cercle demandé. Or, la distance de ce pôle P à chacun des points A et B est égale à la corde du quadrant (783); on l'obtiendra donc en décrivant successivement deux arcs de cercle, des points A et B comme pôles, avec une distance polaire égale à la corde du quadrant.

Fig. 411.

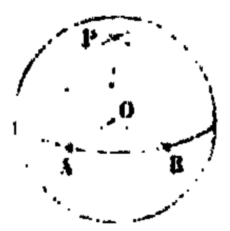


Fig. 412.

PROBLÈME.

801. ***Mener par un point donné* A *sur la sphère, un arc de grand cercle perpendiculaire à un grand cercle donné* BP (*fig.* 412).**

L'inconnue de la question est le pôle du cercle demandé. Or, ce pôle P doit se trouver sur le cercle BP (787), et être à une distance du point A égale à la corde du quadrant. On l'obtiendra donc en décrivant, du point A comme pôle, avec une distance polaire égale à la corde du quadrant, un arc de cercle qui rencontre en P le cercle donné BP.

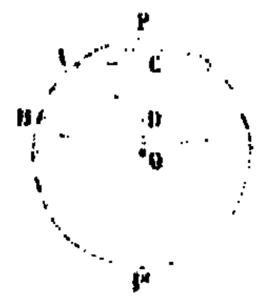
§ IV. — AIRE DE LA SPHÈRE.

DÉFINITIONS.

802. **On appelle *zone* la portion de la surface sphérique comprise entre deux cercles dont les plans sont parallèles. Ces cercles sont les *bases* de la zone et la distance de leurs plans**

est sa *hauteur*. Ainsi, tandis que la demi-circonférence PABP' engendre une sphère en tournant autour du diamètre PP' (*fig.* 413), l'arc AB décrit une zone dont les bases sont les cercles AC et BD décrits par les points A et B, et dont la hauteur est la projection CD de l'arc AB sur l'axe PP'.

Fig. 413.



Si l'un des plans est tangent à la sphère, l'un des cercles considérés se réduit à un point, et la zone, qui n'a plus alors qu'une base, reçoit le nom de *calotte sphérique*. Ainsi l'arc PA, en tournant autour de PP', engendre une calotte sphérique dont le cercle AC est la base et dont PC est la hauteur.

THÉORÈME.

803. *Lorsqu'une droite* AB *tourne autour d'un axe xy situé dans son plan, l'aire qu'elle engendre a pour mesure le produit de la projection* CD *de cette droite sur l'axe par la circonférence dont le rayon est la perpendiculaire* IO, *élevée au milieu* I *de la droite* AB *jusqu'à la rencontre de l'axe xy.*

Fig. 414. Fig. 415. Fig. 416.

Nous supposerons que la droite AB est située tout entière d'un même côté de l'axe xy. Dès lors, quelles que soient les positions relatives de AB et de xy, l'aire engendrée par AB a pour mesure (762)

$$(1) \qquad 2\pi . \mathrm{IM} . \mathrm{AB},$$

IM étant la perpendiculaire abaissée du point I sur xy.

Si la droite AB est parallèle à xy (*fig.* 416), le théorème proposé est tout démontré; sinon il faut transformer l'expression (1). A cet effet, menons AE parallèle à xy jusqu'à la rencontre de la projetante BD (*fig.* 414); les triangles ABE, IMO, sont semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires, et l'on a

$$\frac{IM}{AE} = \frac{IO}{AB}, \quad \text{d'où} \quad IM.AB = IO.AE.$$

L'expression (1) peut être alors remplacée par

$$2\pi.IO.AE \quad \text{ou} \quad 2\pi.IO.CD,$$

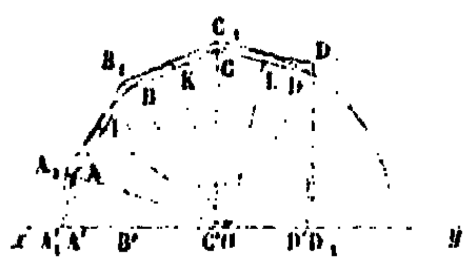
ce qui démontre la proposition énoncée.

Dans le cas où le point A est situé sur l'axe xy (*fig.* 415), le raisonnement subsiste; seulement la droite AE se confond avec l'axe.

THÉORÈME.

804. *L'aire engendrée par une ligne brisée régulière* ABCD, *tournant autour d'un diamètre xy qui ne la traverse pas, a pour mesure le produit de la circonférence inscrite dans la ligne brisée par la projection* A'D' *de cette ligne sur l'axe xy* (*fig.* 417).

Fig. 417.



Soient O le centre et OI = OK = OL, l'apothème de la ligne brisée régulière ABCD; si l'on désigne par aire AB l'aire engendrée par la rotation de AB autour de xy, on a, par le théorème précédent,

$$\text{aire AB} = A'B'.\text{circ. OI},$$

et de même

$$\text{aire BC} = B'C'.\text{circ. OI},$$
$$\text{aire CD} = C'D'.\text{circ. OI},$$

d'où, en ajoutant,

$$\text{aire ABCD} = (A'B' + B'C' + C'D').\text{circ OI} = \text{circ OI}.A'D'.$$

COROLLAIRE.

805. Considérons un arc de cercle AD et une ligne brisée régulière inscrite ABCD; tandis que l'arc AD tourne autour du diamètre xy, la ligne brisée engendre une aire qui tend vers une limite indépendante de la loi suivant laquelle ses côtés tendent vers zéro. En effet, dans le produit A'D'circ.OI qui mesure cette aire, le premier facteur A'D' est invariable et le second circ.OI a toujours pour limite circ.OA. C'est cette limite de l'aire engendrée par la ligne brisée régulière inscrite qu'on appelle *aire de la zone* décrite par l'arc AD.

806. On voit sans peine que la ligne brisée $A_1B_1C_1D_1$ circonscrite au même arc et semblable à la ligne inscrite ABCD, engendre une aire qui tend vers la même limite. En effet, on a

$$\frac{\text{aire } A_1B_1C_1D_1}{\text{aire ABCD}} = \frac{A'_1D'_1 .\text{circ.OA}}{A'D'.\text{circ.OI}}.$$

Or, le rapport $\frac{\text{circ.OA}}{\text{circ.OI}} = \frac{\text{OA}}{\text{OI}}$ tend vers l'unité lorsque le nombre des côtés de la ligne brisée ABCD croît indéfiniment, et il en est de même du rapport $\frac{A'_1D'_1}{A'D'}$ qui, en vertu de la similitude des polygones A'ABCDD', $A'_1A_1B_1C_1D_1D'_1$, est aussi égal à $\frac{\text{OA}}{\text{OI}}$.

THÉORÈME.

807. ***L'aire d'une zone sphérique a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.***

Par définition, l'aire de la zone est la limite vers laquelle tend l'aire engendrée par une ligne brisée régulière inscrite dans l'arc générateur de la zone, lorsque le nombre des côtés de cette ligne brisée croît indéfiniment. D'après cela, soient S l'aire de la zone, H sa hauteur, et R le rayon de l'arc générateur, c'est-à-dire le rayon de la sphère à laquelle la zone appartient; soient de même s l'aire engendrée par une ligne brisée régulière inscrite dans l'arc générateur, et a l'apothème de cette ligne brisée. On a (804), puisque la projection de la ligne brisée sur l'axe est aussi égale à H,

$$s = \text{H}.2\pi a.$$

Mais, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée, H reste invariable, s tend vers S, et a vers R. On a donc, à la limite,

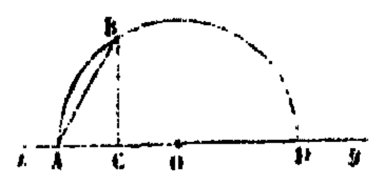
$$S = H \cdot 2\pi R.$$

COROLLAIRES.

808. Dans des sphères égales, deux zones sont entre elles comme leurs hauteurs, et par suite deux zones de même hauteur sont équivalentes.

809. Considérons la calotte sphérique engendrée par l'arc AB tournant autour du diamètre AD (*fig.* 418). En vertu du théo-

Fig. 418.



rème précédent, l'aire de cette calotte a pour mesure

$$2\pi . AO . AC = \pi . AD . AC \quad \text{ou (225)} \quad \pi . \overline{AB}^2.$$

Donc, *une calotte sphérique quelconque équivaut au cercle dont le rayon est égal à la corde de l'arc générateur de la calotte.*

THÉORÈME.

810. *L'aire de la sphère a pour mesure le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle.*

Car cette aire peut être considérée comme une zone dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère. D'ailleurs le raisonnement fait pour la zone s'applique textuellement à ce cas particulier.

COROLLAIRES.

811. S étant l'aire d'une sphère de rayon R, on a

$$S = 2R . 2\pi R = 4\pi R^2.$$

L'aire de la sphère est donc *égale à quatre grands cercles.* On peut dire encore qu'elle équivaut à l'aire d'un cercle dont le rayon serait égal au diamètre de la sphère.

812. *Les aires de deux sphères sont entre elles comme les carrés des rayons ou des diamètres.*

813. Voici deux applications numériques :

1° *Trouver, à moins d'un myriamètre carré, la surface du globe terrestre.*

On sait, par la définition du mètre, que la circonférence d'un grand cercle du globe renferme 40 millions de mètres ou 4000 myriamètres ; son diamètre est donc égal à $\frac{4000}{\pi}$, et par suite (**811**) l'aire du globe est

$$\pi\left(\frac{4000}{\pi}\right)^2 = \frac{16000000}{\pi} = 5092958^{\text{Mmq}}$$

à un myriamètre carré près.

2° *L'aire d'une sphère est 1 mètre carré ; quel est son rayon ?*

La formule

$$4\pi R^2 = 1 \quad \text{donne} \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0^{\text{m}},282$$

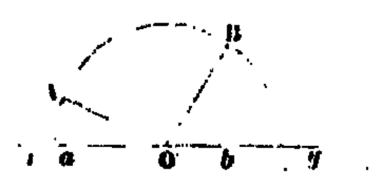
à un millimètre près.

§ V. — VOLUME DE LA SPHÈRE.

DÉFINITIONS.

814. Soient (*fig.* 419), $xABy$ le demi-cercle générateur d'une sphère et, dans ce demi-cercle, le secteur AOB dont la projection de la base AB sur xy est ab. Pendant que la demi-

Fig. 419.



circonférence $xABy$ engendre la surface sphérique, l'arc AB engendre une zone (**802**), et les rayons OA et OB qui limitent le secteur engendrent (**752**) les surfaces latérales de deux cônes de révolution ayant pour bases les cercles Aa et Bb. La portion du volume de la sphère comprise entre les surfaces latérales de ces deux cônes et la zone AB, est le *secteur sphérique* correspondant au secteur circulaire AOB.

Un secteur sphérique est donc le volume engendré par la rotation d'un secteur circulaire autour d'un diamètre extérieur à sa surface; la zone engendrée par l'arc du secteur circulaire est la *base* du secteur sphérique.

815. On appelle ***segment sphérique*** la portion du volume de la sphère comprise entre deux plans sécants parallèles. Les cercles déterminés par ces plans parallèles sont les *bases* du segment sphérique, et leur distance en est la *hauteur*.

Lorsqu'un des plans parallèles devient tangent à la sphère, le cercle correspondant se réduit à son pôle, et l'on a un segment sphérique *à une base*.

Si l'on ajoute (*fig.* 419) au secteur sphérique AOB les deux cônes AOa, BOb, on obtient le segment sphérique compris entre les deux plans parallèles déterminés par la rotation des perpendiculaires Aa, Bb, autour de xy. Ce segment sphérique correspond donc à la rotation du trapèze mixtiligne $aABb$ autour du même axe.

THÉORÈME.

816. *Lorsqu'un triangle tourne autour d'un axe situé dans son plan et passant par l'un de ses sommets sans traverser sa surface, il engendre un volume qui a pour mesure le produit de l'aire que décrit le côté opposé au sommet fixe, par le tiers de la hauteur relative à ce côté.*

Soit le triangle ABC ayant son sommet A sur l'axe xy et AE pour hauteur relative à ce sommet : nous distinguerons trois cas.

Fig. 420.

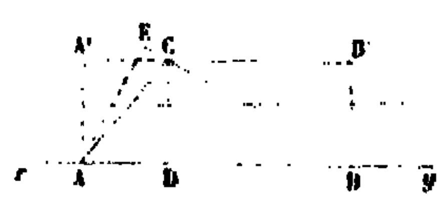
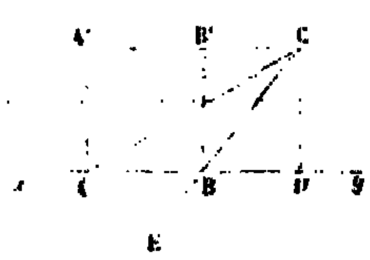


Fig. 421.



1° Supposons l'un des côtés AB du triangle ABC confondu avec l'axe xy. Suivant que la hauteur CD qui correspond au côté AB tombe à l'intérieur (*fig.* 420) ou à l'extérieur (*fig.* 421) du triangle ABC, le volume engendré par ce triangle est la somme ou la différence des cônes engendrés par les triangles rectangles ACD, BCD.

En même temps, le cylindre engendré par la rotation du rectangle ABB'A', qui a même base et même hauteur que le triangle donné ABC, est la somme (*fig.* 420) ou la différence (*fig.* 421) des cylindres engendrés par la rotation des rectangles ADCA', BDCB', dont le rectangle ABB'A' est lui-même la somme ou la différence. D'ailleurs, le cône ACD est le tiers du cylindre ADCA' et le cône BCD, le tiers du cylindre BDCB' (765). Donc, dans l'un et l'autre cas, le volume engendré par le triangle ABC est le tiers du cylindre ABB'A', et l'on a

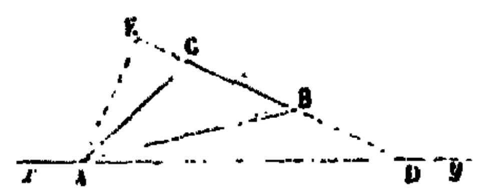
$$\text{vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{CD}^2.AB = \frac{1}{3}\pi CD.BC.AE.$$

En effet, $CD.AB = BC.AE$, ces produits représentant tous deux le double de l'aire du triangle donné. Or, $\pi.CD.BC$ exprime (757) l'aire latérale du cône BCD ou l'aire de la surface engendrée par le côté BC dans la rotation du triangle ABC. Par suite,

$$\text{vol. ABC} = \text{aire BC}\cdot\frac{AE}{3}.$$

2° Supposons (*fig.* 422) que le côté AB du triangle n'ayant plus que le sommet A sur l'axe xy, le côté BC prolongé vienne rencontrer l'axe au point D.

Fig. 422.



Le triangle ABC étant la différence des triangles ACD, ABD, le volume qu'il engendre est la différence des volumes engendrés par ces triangles. On aura donc (1°)

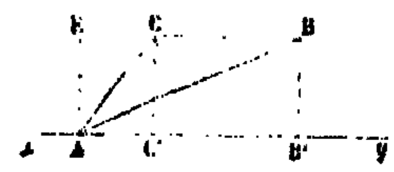
$$\text{vol. ABC} = (\text{aire DC} - \text{aire DB})\,\frac{AE}{3} = \text{aire BC}\cdot\frac{AE}{3}.$$

3° Supposons enfin que le côté AB du triangle n'ayant plus que le sommet A sur l'axe xy, le côté BC soit parallèle à cet axe.

Le volume engendré par le triangle ABC est la somme (*fig.* 423) ou la différence (*fig.* 424) des volumes engendrés

Fig. 423.

Fig. 424.



par les triangles ABE, ACE. Or, le volume engendré par le triangle ABE est les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle AB'BE, et le volume engendré par le triangle ACE les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle AC'CE (765). Donc, dans l'un et l'autre cas, le volume engendré par le triangle ABC est les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle B'C'CB, somme (*fig.* 423) ou différence (*fig.* 424) des rectangles AB'BE, AC'CE; et l'on a encore

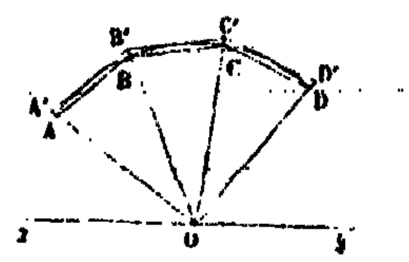
$$\text{vol. ABC} = \frac{2}{3}\pi\overline{AE}^2.BC = \text{aire BC}.\frac{AE}{3}.$$

$2\pi.AE.BC$ exprime en effet l'aire latérale du cylindre engendré par le rectangle B'C'CB ou l'aire de la surface décrite par le côté BC de ce rectangle.

THÉORÈME.

817. ***Le volume engendré par un secteur polygonal régulier tournant autour d'un diamètre extérieur à sa surface, a pour mesure le produit de l'aire que décrit la ligne brisée qui lui sert de base, par le tiers de l'apothème de cette ligne brisée.***

Fig. 425.



Soit (*fig.* 425) le secteur polygonal régulier (446) OABCD, tournant autour du diamètre xy. Décomposons ce secteur en triangles, en joignant au centre O les sommets de sa base ABCD, et appelons a l'apothème de cette base. Le volume engendré par le secteur sera la somme des volumes engendrés par les triangles qui le constituent. Or (816)

$$\text{vol. AOB} = \text{aire AB}\cdot\frac{a}{3},$$

$$\text{vol. BOC} = \text{aire BC}\cdot\frac{a}{3},$$

$$\text{vol. COD} = \text{aire CD}\cdot\frac{a}{3}.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$\text{vol. OABCD} = (\text{aire AB} + \text{aire BC} + \text{aire CD})\cdot\frac{a}{3}$$

ou

$$\text{vol. OABCD} = \text{aire ABCD}\cdot\frac{a}{3}.$$

Scolie.

818. Soient (*fig.* 425) AOD un secteur circulaire et OABCD, OA'B'C'D', deux secteurs polygonaux réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit au secteur circulaire. Si l'on désigne par a et a' les apothèmes des deux secteurs polygonaux, le rapport des volumes engendrés par la rotation de ces secteurs autour de l'axe xy est (817)

$$\frac{a}{a'}\cdot\frac{\text{aire ABCD}}{\text{aire A'B'C'D'}}.$$

Mais, lorsqu'on fait tendre vers zéro les côtés de la ligne brisée régulière ABCD, suivant une loi d'ailleurs quelconque, les deux facteurs du produit qu'on vient d'écrire tendent l'un et l'autre vers l'unité (305, 806). Donc, le rapport des volumes engendrés par les deux secteurs polygonaux a l'unité pour limite, et par suite il en est de même à fortiori du rapport du volume du secteur sphérique engendré par le secteur circulaire AOD au volume décrit par chacun des secteurs polygonaux qui le comprennent. Donc enfin :

Le volume d'un secteur sphérique est la limite commune des volumes engendrés par des secteurs polygonaux réguliers semblables inscrit et circonscrit au secteur circulaire correspondant, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de leurs bases.

THÉORÈME.

819. *Le volume d'un secteur sphérique a pour mesure le produit de l'aire de la zone qui lui sert de base par le tiers du rayon de la sphère.*

Le volume d'un secteur sphérique est la limite des volumes engendrés par les secteurs polygonaux réguliers inscrits dans le secteur circulaire correspondant, quand on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de leurs bases. D'après cela, soient v le volume engendré par un secteur polygonal régulier inscrit, s l'aire de la surface décrite par sa base, a son apothème; soient de même V le volume du secteur sphérique, S l'aire de la zone qui lui sert de base, R le rayon de la sphère. On a (817)

$$v = s \cdot \frac{a}{3}.$$

Mais lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du secteur polygonal, v tend vers V, s vers S et a vers R. On a donc, à la limite,

$$V = S \cdot \frac{R}{3}.$$

Corollaire.

820. Dans des sphères égales, deux secteurs sphériques sont entre eux comme les zones qui leur servent de bases et, par suite, deux secteurs sphériques dont les bases ont même hauteur sont équivalents.

THÉORÈME.

821. *Le volume de la sphère a pour mesure le produit de son aire par le tiers du rayon.*

Car ce volume peut être considéré comme celui d'un secteur sphérique ayant pour secteur circulaire correspondant un demi-cercle ou pour base l'aire de la surface sphérique elle-même. D'ailleurs, le raisonnement fait pour le secteur sphérique s'applique textuellement à ce cas particulier.

Corollaires.

822. V étant le volume d'une sphère de rayon R ou de diamètre D, on a

$$V = 4\pi R^2 \cdot \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

823. *Les volumes de deux sphères sont entre eux comme les cubes des rayons ou des diamètres.*

824. Voici deux applications numériques :

1° *Trouver le volume du globe terrestre.*

L'aire du globe est (813), à moins d'un myriamètre carré, 5092958 myriamètres carrés. Son rayon est d'ailleurs $\frac{20000000^{m}}{\pi}$ ou 6366 kilomètres, à un kilomètre près. Le volume du globe terrestre, égal au produit de son aire par le tiers du rayon, sera donc 1081000000 myriamètres cubes, à un million de myriamètres cubes près.

Si l'on prend le rayon du globe terrestre pour unité, le rayon du Soleil est représenté par 108,5. L'aire et le volume du Soleil sont donc environ 11800 fois et 1280000 fois l'aire et le volume de la Terre (812, 823).

2° *Trouver le rayon de la sphère dont le volume est un mètre cube.*

La formule

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 1 \quad \text{donne} \quad R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0^{m},620$$

à moins d'un millimètre.

Scolie.

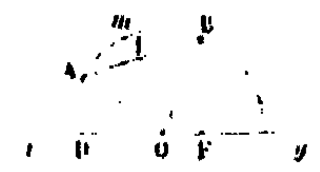
825. *Les volumes de deux polyèdres circonscrits à la même sphère ou à des sphères égales sont entre eux comme les aires de ces mêmes polyèdres.*

Si l'on décompose, en effet, les polyèdres donnés en pyramides, en prenant pour centre de décomposition le centre de la sphère inscrite, la mesure du volume de chacun d'eux s'obtiendra en multipliant l'aire de sa surface par le tiers du rayon de la sphère (657).

THÉORÈME.

826. *Le volume engendré par un segment circulaire tournant autour d'un diamètre extérieur à sa surface, équivaut* *au sixième du cylindre qui a pour rayon la corde du segment et pour hauteur la projection de cette corde sur l'axe.*

Fig. 426.



Le segment AmB (*fig.* 426) est la différence du secteur circulaire AOB et du triangle isocèle AOB; la portion du volume de la sphère engendrée par la rotation de ce segment sera donc égale à la différence des volumes du secteur sphérique AOB et du triangle tournant AOB.

DF étant la projection de AB sur xy et OI la hauteur du triangle AOB, on aura (819, 816, 803)

$$\text{sect. sph. AOB} = \text{zone AB} \cdot \frac{\text{OA}}{3} = \frac{2}{3}\pi\,\overline{\text{OA}}^2 \cdot \text{DF},$$

$$\text{vol. AOB} = \text{aire AB} \cdot \frac{\text{OI}}{3} = \frac{2}{3}\pi\,\overline{\text{OI}}^2 \cdot \text{DF}.$$

Par suite,

$$\text{vol. A}m\text{B} = \frac{2}{3}\pi\left(\overline{\text{OA}}^2 - \overline{\text{OI}}^2\right)\text{.DF}.$$

Le triangle rectangle OIA donnant

$$\overline{\text{OA}}^2 - \overline{\text{OI}}^2 = \overline{\text{AI}}^2 = \frac{\overline{\text{AB}}^2}{4},$$

il vient en réduisant

$$\text{vol. A}m\text{B} = \frac{1}{6}\pi\,\overline{\text{AB}}^2\text{.DF},$$

ce qui vérifie l'énoncé.

THÉORÈME.

827. *Le volume d'un segment sphérique équivaut au volume d'une sphère ayant pour diamètre la hauteur du segment, augmenté de la demi-somme des volumes de deux cylindres ayant pour hauteur commune celle du segment, et pour bases respectives les bases du segment.*

Le trapèze mixtiligne DAmBF (*fig.* 427) engendre un segment sphérique en tournant autour du diamètre xy (815). Ce segment est donc la somme des volumes engendrés par le

Fig. 427.

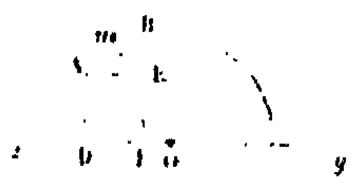
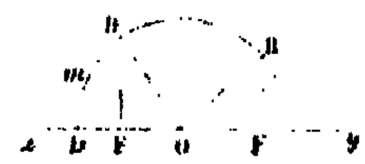


Fig. 428.



segment circulaire AmB et le trapèze rectangulaire DABF. On a d'abord (826)

$$\text{vol. A}m\text{B} = \frac{1}{6}\pi\overline{\text{AB}}^2.\text{DF}.$$

Le trapèze DABF engendrant un tronc de cône de révolution, on a aussi (767)

$$\text{vol. DABF} = \frac{1}{3}\pi\text{DF}\left(\overline{\text{BF}}^2 + \overline{\text{AD}}^2 + \text{BF}.\text{AD}\right).$$

Par suite,

$$\text{vol. DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi.\text{DF}\left(\overline{\text{AB}}^2 + 2\overline{\text{BF}}^2 + 2\overline{\text{AD}}^2 + 2\text{BF}.\text{AD}\right).$$

D'ailleurs, la corde AB est liée à la hauteur DF et aux rayons BF et AD des bases du segment sphérique par la relation

$$\overline{\text{AB}}^2 = \overline{\text{AE}}^2 + \overline{\text{BE}}^2 = \overline{\text{DF}}^2 + (\text{BF} - \text{AD})^2$$

ou

$$\text{AB}^2 = \overline{\text{DF}}^2 + \overline{\text{BF}}^2 + \overline{\text{AD}}^2 - 2\text{BF}.\text{AD}.$$

En substituant cette valeur de $\overline{\text{AB}}^2$ et en simplifiant, il vient

$$\text{vol. DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\text{DF}\left(\overline{\text{DF}}^2 + 3\overline{\text{BF}}^2 + 3\overline{\text{AD}}^2\right),$$

ce qu'on peut écrire

$$\text{vol. DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\overline{\text{DF}}^3 + \frac{1}{2}\left(\pi\overline{\text{BF}}^2.\text{DF} + \pi\overline{\text{AD}}^2.\text{DF}\right),$$

de manière à vérifier l'énoncé (822, 747).

Si le segment considéré n'a qu'une base, c'est-à-dire si (*fig.* 428) le point D vient occuper l'une des extrémités du diamètre xy, on a simplement

$$\text{vol. D}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\overline{\text{DF}}^3 + \frac{1}{2}\pi.\overline{\text{BF}}^2.\text{DF}.$$

Scolie.

828. Quand le segment sphérique n'a qu'une base (*fig.* 428), on peut exprimer son volume V en fonction de sa hauteur $\text{DF} = h$ et du rayon R de la sphère. On a alors, d'après la formule précédente,

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{\text{BF}}^2.h.$$

D'ailleurs (225),

$$\overline{\text{BF}}^2 = h(2\text{R} - h),$$

d'où

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h^2(2\text{R} - h)$$

ou, en simplifiant,

$$(1) \qquad V = \pi h^2\left(\text{R} - \frac{1}{3}h\right).$$

On peut trouver directement cette formule, en regardant le segment à une base comme la somme ou la différence du secteur sphérique terminé à la même calotte sphérique et du cône de révolution qui, ayant la même base que le segment, a son sommet au centre de la sphère. Le segment sphérique est la somme ou la différence des deux volumes indiqués, suivant qu'il est plus grand ou plus petit que la demi-sphère.

Dans le premier cas (*fig.* 428), on a

$$V = \frac{2}{3}\pi\text{R}^2 h - \frac{1}{3}\pi\overline{\text{BF}}^2(\text{R} - h);$$

dans le second (même figure),

$$V = \frac{2}{3}\pi\text{R}^2 h + \frac{1}{3}\pi\overline{\text{BF}}^2(h - \text{R}).$$

Ces deux formules sont identiques, puisque $\overline{\text{BF}}^2$ a toujours la même expression; et, en les simplifiant, on retrouve la formule (1).

Voici une application numérique :

Calculer le volume du segment sphérique à une base de $0^m,1$ *de hauteur dans la sphère de* 1 *mètre de rayon.*

La formule (1) donne

$$V = \frac{1}{3}\pi.0,01.2,9 = 0^{mc},091106$$

à 1 centimètre cube près.

§ VI. — PROPRIÉTÉS DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

DÉFINITIONS.

829. On appelle *polygone sphérique* la portion de surface sphérique ABCDE comprise entre plusieurs arcs de grand cercle. Ces arcs AB, BC, CD, DE, EA, sont les *côtés* du polygone; les angles ABC, BCD,..., qu'ils forment et les sommets B, C,..., de ces angles sont les *angles* et les *sommets* du polygone (*fig.* 429).

Fig. 429.

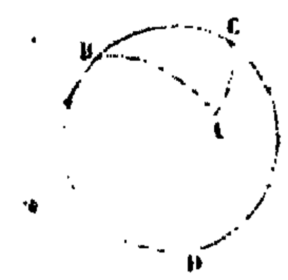
Un polygone sphérique est dit *convexe* lorsque chaque côté prolongé laisse tout le polygone dans le même hémisphère.

Chaque côté d'un polygone sphérique convexe est moindre qu'une demi-circonférence de grand cercle. Car, si le côté AB, par exemple, était plus grand qu'une demi-circonférence, on pourrait prendre sur AB, entre A et B, un point I, tel que AI fût égal à une demi-circonférence; dès lors, le grand cercle auquel appartient le côté AE passerait par le point I (778), et le polygone ne serait pas tout entier dans l'un des deux hémisphères déterminés par ce grand cercle AE.

Un polygone sphérique convexe ne peut être rencontré en plus de deux points par un arc de grand cercle (75).

830. Le polygone sphérique le plus simple est le *triangle sphérique;* c'est la portion ABC de la surface de la sphère comprise entre trois arcs de grand cercle AB, BC, CA, *qui sont chacun moindres qu'une demi-circonférence.* D'après cela, un triangle sphérique est toujours convexe (*fig.* 430).

Fig. 430.



On pourrait admettre des côtés qui surpasseraient la demi-circonférence, et appeler encore triangle sphérique la figure formée par des arcs tels que AB, AC, BDC, dont le dernier est supérieur à une demi-circonférence. Mais d'abord cela serait incommode, parce que ces nouvelles figures présenteraient des angles tels que A qui surpasse deux angles droits; et ensuite cela est inutile, car la connaissance des éléments du triangle sphérique proprement dit ABC entraîne celle de tous les éléments de la figure formée par les arcs AB, AC, BDC.

Un triangle sphérique est *isocèle, équilatéral, rectangle,* dans les mêmes circonstances qu'un triangle rectiligne (26).

831. En joignant les sommets d'un triangle sphérique ABC (*fig.* 432) au centre O de la sphère, on forme un angle trièdre OABC, dont les faces AOB, BOC,..., ont la même mesure (138) que les côtés correspondants AB, BC,..., du triangle sphérique, et dont les angles dièdres OA, OB,..., ont la même mesure (774) que les angles A, B,..., de ce triangle. La même remarque s'étend à un polygone sphérique ABCD (*fig.* 431) et à l'angle polyèdre correspondant OABCD.

D'après cela, *à chaque propriété des angles trièdres ou polyèdres répond une propriété analogue des triangles ou polygones sphériques;* et pour énoncer cette propriété, il suffit de remplacer respectivement les mots *face* et *angle dièdre* par les mots *côté* et *angle*. C'est même cette marche que l'on suit pour établir les premières propriétés des figures sphériques. Mais plus tard, et pour des propriétés moins simples, il est ordinairement préférable de faire l'inverse, c'est-à-dire d'établir directement les propriétés des figures sphériques pour en déduire les propriétés des angles polyèdres correspondants.

Fig. 431.

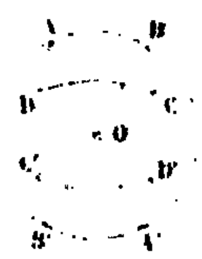


Fig. 432.

On raisonne en effet sur une surface, et en particulier sur la sphère, presque aussi aisément que sur un plan, tandis qu'il faut un certain effort pour se bien représenter une figure de l'espace un peu compliquée. L'étude de l'astronomie ne laisse à cet égard aucun doute, et la conception de la sphère céleste est un des plus heureux artifices géométriques qu'on ait imaginés.

832. Si on prolonge les arêtes de l'angle polyèdre OABCD (*fig.* 431) au delà du sommet O, on forme un angle polyèdre symétrique O'A'B'C'D', qui détermine sur la surface de la sphère un polygone A'B'C'D'. Les deux polygones ABCD, A'B'C'D', dont les sommets sont ainsi diamétralement opposés deux à deux, sont appelés *polygones sphériques symétriques*. Les considérations développées au n° 573 conduisent aux propriétés suivantes :

1° *Deux polygones symétriques ont leurs angles et leurs côtés égaux deux à deux ;* 2° *ces polygones ne sont pas en général superposables, attendu que les parties respectivement égales sont disposées dans un ordre inverse ;* 3° *pour qu'un triangle sphérique soit superposable à son symétrique, il faut et il suffit qu'il ait deux angles égaux, et dans un tel triangle les côtés opposés aux angles égaux sont égaux ;* en d'autres termes, ce triangle est *isocèle*.

THÉORÈME.

833. *Dans tout polygone sphérique, un côté quelconque est moindre que la somme de tous les autres.*

En effet, soit ABCD le polygone proposé (*fig.* 431). Dans l'angle polyèdre correspondant OABCD, on a (574)

$$AOB < BOC + COD + DOA.$$

Donc (138)

$$\text{arc } AB < \text{arc } BC + \text{arc } CD + \text{arc } DA.$$

Scolies.

834. *Dans tout triangle sphérique* ABC (*fig.* 433), *à un plus grand angle est opposé un plus grand côté.*

Cela résulte de la propriété analogue de l'angle trièdre (575). On peut aussi le démontrer comme pour le triangle rectiligne (31, 2°). Soit l'angle ABC plus grand que l'angle C; on pourra mener dans l'angle ABC un arc de grand cercle BD qui fasse avec BC un angle DBC égal à l'angle C. Le triangle BDC ayant deux angles égaux DBC, DCB, sera isocèle (832), et l'on aura BD = DC. Or, le triangle ABD donne (833)

$$AB < AD + BD$$

et, en remplaçant le côté BD par son égal DC,

$$AB < AD + DC \quad \text{ou} \quad AB < AC.$$

En rapprochant ce théorème de celui qui a été démontré au n° 832 (3°), et en raisonnant comme au n° 32, on voit que : réciproquement, *si un triangle sphérique est isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux, et si un triangle sphérique a deux côtés inégaux, au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

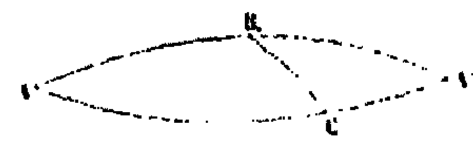
835. De ce qu'un triangle sphérique isocèle est superposable à son symétrique, il résulte, comme au n° 34, que *dans tout triangle sphérique isocèle l'arc de grand cercle qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire sur cette base et divise l'angle au sommet en deux parties égales.*

836. Enfin, les propriétés du triangle rectiligne démontrées

aux nos 30 et 36 s'appliquent au triangle sphérique et se démontrent de même; il suffit de remplacer le mot *droite* par les mots *arc de grand cercle*.

Fig. 433.

Fig. 434.



THÉORÈME.

837. *Dans tout polygone sphérique convexe, la somme des côtés est moindre qu'une circonférence.*

Car la somme des faces de l'angle polyèdre correspondant est moindre que quatre angles droits (577).

La démonstration directe est d'ailleurs facile. Considérons d'abord un triangle sphérique ABC (*fig.* 434), et prolongeons les côtés AB et AC jusqu'à leur rencontre A'; les deux arcs ABA', ACA', sont des demi-circonférences de grand cercle (778), et comme dans le triangle BCA' le côté BC est moindre que BA' + CA', la somme AB + AC + BC des côtés du triangle ABC est inférieure à ABA' + ACA', c'est-à-dire à une circonférence de grand cercle. — En opérant d'une manière analogue sur un polygone, c'est-à-dire en remplaçant un côté par les prolongements des deux qui lui sont adjacents, on voit que si la proposition est vraie pour un polygone convexe, elle subsiste pour le polygone convexe qui a un côté de plus; donc elle est générale.

THÉORÈME.

838. *Si un triangle sphérique* A'B'C' *est le triangle polaire d'un triangle sphérique donné* ABC, *réciproquement* ABC *sera le triangle polaire de* A'B'C'.

Pour bien comprendre la définition du triangle polaire et l'objet du présent théorème, il convient de faire une remarque.

Soient EIF un grand cercle (*fig.* 435), P l'un de ses pôles, et M un point quelconque de la sphère. Si P et M sont d'un même côté du grand cercle EF, le plus petit arc de grand cercle qui va de P en M est moindre qu'un quadrant PI. Si P et M sont de part et d'autre du grand cercle EF, le plus petit arc de grand cercle allant de P en M est supérieur à un quadrant.

Fig. 435.

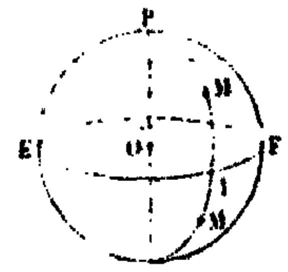
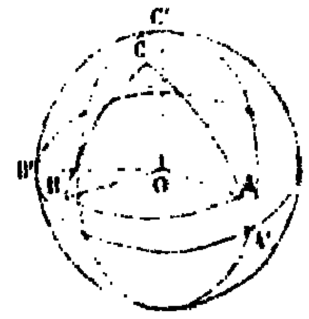


Fig. 436.



Cela posé, on nomme triangle polaire d'un triangle sphérique ABC un nouveau triangle A'B'C' (*fig.* 436) dont les sommets sont définis de la manière suivante : A' est celui des deux pôles du grand cercle BC qui est par rapport à ce grand cercle du même côté que le sommet opposé A ; de même B' est le pôle de AC qui est situé par rapport à AC du même côté que B, et C' est le pôle de AB qui est placé par rapport à AB du même côté que C.

Il s'agit de démontrer que, réciproquement, le triangle ABC est le triangle polaire de A'B'C'. A cet effet, considérons l'un quelconque de ses sommets, C par exemple ; A' étant le pôle de BC, l'arc de grand cercle qui joindrait C et A' est un quadrant ; de même l'arc de grand cercle CB' est un quadrant, puisque B' est le pôle de AC. Donc, le point C (800) est le pôle de A'B'. De plus, puisque C' est le pôle de AB, qui se trouve par rapport à AB du même côté que C, le plus petit arc de grand cercle allant de C en C' est moindre qu'un quadrant ; par suite, C est le pôle de A'B' qui se trouve par rapport à A'B' du même côté que C'.

SCOLIE.

839. D'après cela, le triangle polaire A'B'C' d'un triangle donné ABC peut être considéré comme obtenu en décrivant des sommets A, B, C, pris successivement pour pôles, trois circonférences de grand cercle. Ces trois circonférences divisent la surface de la sphère (*fig.* 436) en huit triangles, dont l'un A'B'C' est le triangle polaire de ABC. C'est celui qui est tel, que les sommets A et A' soient d'un même côté par rapport à BC, les sommets B et B' d'un même côté par rapport à AC, et les sommets C et C' d'un même côté par rapport à AB.

Les deux trièdres OABC, OA'B'C', qui répondent à deux triangles polaires ABC, A'B'C', sont supplémentaires (579). En effet, d'après la construction du point C', on voit que l'arête OC', par exemple, est perpendiculaire (579) au plan AOB et située par rapport à ce plan du même côté que OC : on raisonnerait de même pour les autres arêtes OB' et OA'. Chaque angle de l'un des triangles ABC, A'B'C', doit donc (580) être le supplément du côté opposé dans l'autre triangle. Mais cette propriété, en vertu de laquelle deux triangles polaires sont aussi appelés *triangles supplémentaires*, mérite d'être démontrée directement; c'est là l'objet du théorème qui suit.

THÉORÈME.

840. *Si* ABC, A'B'C', *sont deux triangles polaires, chaque angle de l'un de ces triangles a pour mesure une demi-circonférence de grand cercle, moins le côté opposé dans l'autre triangle* (*fig.* 437).

Fig. 437.

Fig. 438.

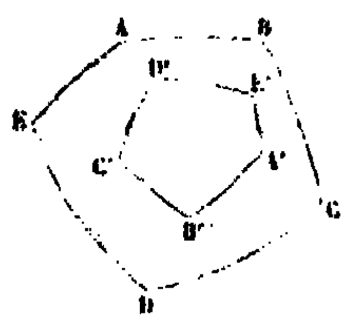
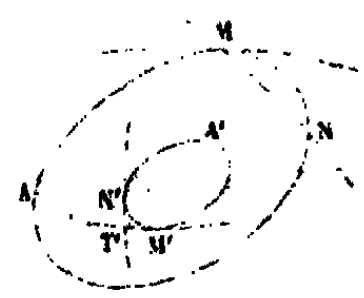


Fig. 439.



En effet, considérons, par exemple, l'angle A et prolongeons, s'il le faut, les côtés AB et AC jusqu'à la rencontre de l'arc B'C'; puisque A est le pôle de B'C', l'angle A a pour mesure l'arc DE (785); mais on a évidemment

$$DE = B'E + DC' - B'C'.$$

D'ailleurs B'E et DC' sont des quadrants, puisque B' est le pôle de AC et C' le pôle de AB. On a donc

$$DE = \frac{1}{2}\,\text{circ. de grand cercle} - B'C'.$$

On procéderait de la même manière pour les angles B et C.

Les triangles ABC et A'B'C' résultant l'un de l'autre par la même construction (839), la propriété que nous venons de démontrer pour les angles A, B, C, du premier triangle convient aux angles A', B', C', du second. On prouverait d'ailleurs directement que l'angle A', par exemple, a pour mesure le supplément de BC, en prolongeant BC jusqu'à la rencontre de A'B' et de A'C'.

Scolie.

841. Les propriétés des triangles polaires s'étendent aux polygones et aux courbes sphériques.

Soit (*fig.* 438) un polygone sphérique convexe ABCDE; prenons des deux pôles de l'arc de grand cercle EA celui qui, par rapport à EA, est dans le même hémisphère que le polygone ABCDE : prenons d'une manière analogue les pôles B', C', D', E', des côtés AB, BC, CD, DE. Le polygone A'B'C'D'E' sera le polygone *polaire* du proposé, et l'on démontrera, comme aux nos 838 et 840 : 1° que, *si un polygone sphérique* A'B'C'D'E' *est le* *polygone polaire d'un polygone donné* ABCDE, *réciproquement* ABCDE *est le polygone polaire de* A'B'C'D'E'; 2° que, *dans deux polygones polaires, tout angle de l'un est le supplément du côté de l'autre dont le sommet de l'angle considéré est le pôle.*

842. On appelle *arc de grand cercle tangent en un point* M *d'une courbe sphérique* AMN (*fig.* 439) la limite des positions que prend le grand cercle mené par le point M et un point voisin N, lorsque ce second point N de la courbe tend vers le premier. Une courbe sphérique est *convexe* si le grand cercle tangent en l'un quelconque de ses points laisse la courbe tout entière dans un seul hémisphère (829). Une courbe sphérique convexe ne saurait être rencontrée par un grand cercle en plus de deux points; et des deux *arcs* de grand cercle qui joignent deux points quelconques de la courbe, le plus petit, c'est-à-dire celui qui est moindre qu'une demi-circonférence, est à l'*intérieur* de la courbe.

Cela posé, soit A'M' une courbe sphérique convexe: en un point quelconque M' de cette courbe, menons le grand cercle tangent et prenons le pôle M de ce cercle qui est dans le même hémisphère que la courbe A'M'; le lieu des points M est la *courbe polaire* AM de A'M'. Inversement, la courbe A'M' est la courbe polaire de AM; en d'autres termes, le point M' est le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M à la courbe AM; car si N est le pôle de l'arc de grand cercle N'T' tangent à la courbe A'M' en un point N' voisin de M', le point T' sera le pôle (800) de l'arc sécant MN, et quand ce dernier arc deviendra tangent en M, le point T' se confondra avec M'. Ainsi, les points M et M' des deux courbes se correspondent deux à deux, de telle sorte que le point M soit le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M' et que le point M' soit le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M.

Deux figures sphériques polaires sont des figures corrélatives; à tout point de l'une répond un arc de grand cercle dans l'autre, de telle sorte que si trois points de la première sont sur un même grand cercle, les trois arcs de grand cercle correspondants de la seconde passent par un même point, pôle de ce grand cercle. Tout théorème en engendre immédiatement un autre; et c'est même cette corrélation des figures sphériques qui a suggéré l'idée du principe général de *dualité*.

COROLLAIRE.

843. *Dans tout triangle sphérique :* 1° *la somme des angles est comprise entre deux et six angles droits;* 2° *le plus petit angle augmenté de deux droits surpasse la somme des deux autres.*

La démonstration est la même que pour les angles trièdres (382), et les propriétés énoncées peuvent être elles-mêmes considérées comme une conséquence des propriétés correspondantes des trièdres.

Il résulte de là qu'un triangle sphérique peut être rectangle, bi-rectangle, tri-rectangle, c'est-à-dire qu'il peut avoir un, deux ou trois angles droits; ses trois angles peuvent même être à la fois obtus.

Dans tout triangle bi-rectangle, le sommet de l'angle qui n'est pas droit est le pôle (800) du côté opposé, et les côtés qui comprennent cet angle sont des quadrants.

Dans le triangle tri-rectangle, tous les côtés sont des quadrants; sur la même sphère, tous les triangles tri-rectangles sont égaux (844); *un tel triangle est le huitième de la sphère*. C'est ce qu'on voit en menant trois grands cercles perpendiculaires entre eux deux à deux.

THÉORÈME.

844. *Deux triangles sphériques tracés sur la même sphère ou sur des sphères égales sont égaux dans toutes leurs parties : 1° lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; 2° lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; 3° lorsqu'ils ont les côtés égaux chacun à chacun; 4° lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun. — Dans tous les cas, ils sont égaux ou symétriques, suivant que la disposition des éléments donnés est la même ou est inverse.*

Ce théorème est une conséquence des propriétés analogues (nos 584 à 590) des angles trièdres. On peut aussi le démontrer directement.

Supposons d'abord que la disposition soit la même dans les deux triangles, on démontrera l'égalité pour les trois premiers cas en raisonnant comme aux nos 37, 38 et 40 de la Géométrie plane. Quant au quatrième cas, il résulte du troisième par la considération du triangle polaire (840). Remarquons en outre que les deux premiers cas sont aussi corrélatifs l'un de l'autre.

Si la disposition des éléments donnés est inverse, le premier triangle et le symétrique du second auront la même disposition : ils seront donc égaux en vertu des données; par suite, les triangles proposés seront symétriques.

SCOLIE.

845. Un trièdre, dont le sommet est placé au centre de deux sphères concentriques, détermine évidemment sur ces sphères deux triangles sphériques dont les angles sont respectivement égaux et les côtés proportionnels. Deux triangles sphériques de cette nature sont dits *semblables*.

THÉORÈME.

846. *Deux triangles sphériques symétriques* ABC, A'B'C', *sont équivalents* (*fig.* 440).

Prenons le pôle P du petit cercle qui passerait par les points A, B, C, et menons les arcs de grand cercle PA, PB, PC, qui sont égaux entre eux (782). Traçons le diamètre POP′ et les arcs de grand cercle P′A′, P′B′, P′C′. L'égalité des angles POA, P′OA′, entraîne celle des arcs PA et P′A′; on voit de même que PB = P′B′, et PC = P′C′; par suite, comme PA = PB = PC, il faut qu'on ait P′A′ = P′B′ = P′C′. D'après cela, les triangles PAB, P′A′B′, sont symétriques et isocèles; ils sont donc superposables. De même les triangles PAC, P′A′C′, sont égaux entre eux, ainsi que les triangles PBC, P′B′C′. Donc enfin, le triangle ABC, somme de PAB, PAC et PBC, est équivalent au triangle A′B′C′, somme de P′A′B′, P′A′C′ et P′B′C′.

Si le pôle P tombait à l'extérieur du triangle ABC, ce triangle ne serait plus une somme mais une différence.

Fig. 440.

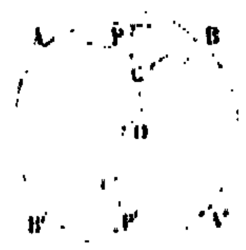
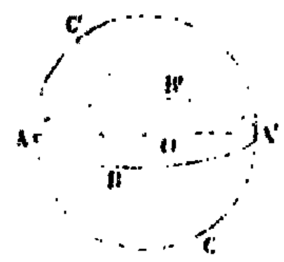


Fig. 441.



COROLLAIRE.

847. *Si deux arcs de grand cercle* AC′A′, BC′B′, *se coupent dans un même hémisphère* C′ABA′B′, *la somme des triangles opposés* AC′B, A′C′B′, *est égale au fuseau dont l'angle est* AC′B (*fig.* 441).

On nomme *fuseau* la portion de surface sphérique comprise entre deux demi-grands cercles CAC′, CBC′, qui se terminent à un diamètre commun COC′; l'angle ACB ou AC′B de ces deux arcs est dit l'*angle du fuseau*.

Cela étant, le fuseau compris entre CAC′ et CBC′ se compose du triangle ABC′ et du triangle ABC; et, comme le triangle A′B′C′ est évidemment le symétrique de ABC et que deux triangles symétriques sont équivalents, on voit que le fuseau dont l'angle est C′ est égal à la somme des triangles opposés AC′B, A′C′B′.

THÉORÈME.

848. *Si l'on prend pour unité d'angle l'angle droit et pour unité d'aire l'aire du triangle tri-rectangle, un fuseau a pour mesure le double du nombre qui mesure son angle.*

On voit immédiatement que, *sur la même sphère ou sur des sphères égales : 1° deux fuseaux de même angle sont superposables; 2° un fuseau est égal à la somme de deux autres, si son angle est égal à la somme des angles de ces deux autres.*

Il résulte de là (135) que *deux fuseaux quelconques d'une même sphère sont entre eux comme leurs angles.*

Cela étant, soient A et A' les nombres qui mesurent les angles de deux fuseaux d'une même sphère, l'angle droit étant pris pour unité; et soient F et F' les nombres qui mesurent ces fuseaux, le triangle tri-rectangle (843) étant pris pour unité d'aire; on aura

$$\frac{F}{F'} = \frac{A}{A'}.$$

Prenons $A' = 1$; le fuseau correspondant, ayant son angle droit, sera égal au quart de la sphère, c'est-à-dire au double du triangle tri-rectangle : on aura donc $F' = 2$, et par suite

$$(1) \qquad \frac{F}{2} = \frac{A}{1}, \quad \text{d'où} \quad F = 2A.$$

Scolie.

849. Soient α, R et φ, l'angle du fuseau évalué en degrés, le rayon de la sphère évalué en mètres et l'aire du fuseau évaluée en mètres carrés : l'angle droit renfermant 90 degrés, et le triangle tri-rectangle étant égal au huitième $\frac{\pi R^2}{2}$ de la sphère, on aura

$$A = \frac{\alpha}{90}, \quad F = \frac{\varphi}{\frac{1}{2}\pi R^2},$$

et par suite, en vertu de la relation (1),

$$(2) \qquad \varphi = \frac{\alpha}{90} \cdot \pi R^2.$$

Évaluons, par exemple, le fuseau de $30^{\circ}15'$ dans la sphère dont le rayon est $1^{m},2$. Nous aurons

$$\varphi = \frac{30 + \frac{1}{4}}{90} \cdot \pi \cdot 1,44 = 0,484\,\pi = 1^{mq},5205$$

à $\frac{1}{2}$ centimètre carré près.

THÉORÈME.

850. ***Si l'on prend l'angle droit pour unité d'angle et le triangle tri-rectangle pour unité d'aire, l'aire d'un triangle sphérique a pour mesure la somme des nombres qui mesurent ses angles diminuée de 2.***

Fig. 440.

Soit ABC le triangle proposé; achevons le grand cercle AB, et prolongeons les côtés AC, BC, jusqu'aux points A' et B' où ils rencontrent ce grand cercle. On aura évidemment

$$ABC + BCA' = \text{fus.}\,A,$$

$$ABC + ACB' = \text{fus.}\,B,$$

et (847)

$$ABC + B'CA' = \text{fus.}\,C.$$

La somme des premiers membres de ces trois égalités se compose de la demi-sphère et de deux fois l'aire du triangle ABC. Comme, dans le système d'unités adopté, la demi-sphère est mesurée par le nombre 4, si l'on désigne par S, A, B, C, les nombres qui mesurent l'aire et les angles du triangle, on aura (848)

$$4 + 2S = 2A + 2B + 2C,$$

d'où

$$S = A + B + C - 2. \tag{1}$$

Scolies.

851. Soient R le rayon de la sphère évalué en mètres, σ l'aire du triangle en mètres carrés, et α, β, γ, les angles de ce triangle évalués en degrés; on aura

$$A = \frac{\alpha}{90}, \quad B = \frac{\beta}{90}, \quad C = \frac{\gamma}{90}, \quad S = \frac{\sigma}{\frac{1}{2}\pi R^2},$$

et par suite, en vertu de la relation (1),

$$(2) \qquad \sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{180} \cdot \pi R^2.$$

Voici deux exemples :

1° ***Quelle est, sur la sphère dont l'aire est égale à 1 mètre carré, l'aire du triangle dont les angles sont de 61 degrés, 109 degrés, 127 degrés?***

Le rapport de ce triangle au triangle tri-rectangle est, d'après la formule (1),

$$\frac{61 + 109 + 127 - 180}{90} = \frac{117}{90} = 1,3;$$

et comme le triangle tri-rectangle est ici le huitième du mètre carré, l'aire du triangle donné est

$$\frac{1}{8} \cdot 1,3 = 0^{mq},1625.$$

2° *Quelle est, sur la sphère dont le rayon est $2^m,4$, l'aire du triangle sphérique dont les angles sont de 51°37', 73°11', 87°43'?*

La formule (2) donne, en réduisant en minutes,

$$\sigma = \frac{(51 + 73 + 87 - 180)60 + 37 + 11 + 43}{180 . 60} \cdot \pi (2,4)^2$$
$$= 1,040533\,\pi = 3^{mq},2689$$

à 1 centimètre carré près.

852. En analyse, on évalue généralement les angles en parties du rayon (312); alors l'angle droit répond à $\frac{\pi}{2}$, et si l'on désigne par A', B', C', les angles du triangle évalués en parties du rayon, on a

$$A = \frac{A'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2A'}{\pi}, \quad B = \frac{2B'}{\pi}, \quad C = \frac{2C'}{\pi},$$

et par suite,

$$A + B + C - 2 = \frac{2}{\pi}(A' + B' + C' - \pi).$$

D'ailleurs le rayon de la sphère étant 1, le triangle tri-rectangle est alors mesure par $\frac{\pi}{2}$, de sorte qu'on a

$$S = \frac{S'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2S'}{\pi},$$

S' étant le nombre qui mesure l'aire du triangle dans ce nouveau système d'unités. On a donc enfin (850), à cause de la formule (1),

$$S' = A' + B' + C' - \pi.$$

On donne à ce nombre abstrait $A' + B' + C' - \pi$ le nom d'*excès sphérique* du triangle.

THÉORÈME.

853. *Si l'on prend l'angle droit pour unité d'angle et le triangle trirectangle pour unité d'aire, l'aire d'un polygone sphérique de n côtés a pour mesure la somme des nombres qui mesurent ses angles diminuée de* $2(n-2)$.

On arrive à ce résultat en décomposant le polygone en triangles à l'aide d'arcs de grand cercle diagonaux issus d'un même sommet, et en appliquant la formule (1) du n° 850 aux $(n-2)$ triangles ainsi obtenus.

Scolie.

854. Soient, dans le système d'unités adopté, $S, A_1, A_2, \ldots, A_n$, les mesures de l'aire et des angles d'un polygone sphérique convexe de n côtés : on aura

$$S = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) - 2(n-2).$$

Désignons par $a_1, a_2, \ldots a_n$, les nombres qui mesurent les côtés du polygone polaire (841), en prenant pour unité de longueur le quart de la circonférence d'un grand cercle : on aura

$$A_1 = 2 - a_1, \quad A_2 = 2 - a_2, \ldots, \quad A_n = 2 - a_n,$$

et par suite,

$$S = [2n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)] - 2(n-2) = 4 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

ou enfin, en désignant par p le périmètre du polygone polaire,

$$S = 4 - p.$$

Ainsi, l'*aire d'un polygone sphérique convexe est égale à 4 moins le périmètre du polygone polaire;* cette relation mérite d'être remarquée.

THÉORÈME.

855. *Le volume d'une pyramide sphérique a pour mesure le produit de sa base par le tiers du rayon de la sphère.*

Une *pyramide sphérique* est la portion du volume de la sphère comprise entre les faces d'un angle polyèdre dont le sommet est au centre de la sphère; le polygone sphérique correspondant à cet angle polyèdre est la *base* de la pyramide. Deux pyramides sphériques sont dites *symétriques* lorsqu'elles ont pour bases des polygones sphériques symétriques.

On appelle *onglet* la portion du volume de la sphère comprise entre deux demi-grands cercles CAC', CBC' (*fig.* 441); le fuseau C'ACBC' est la *base* de l'onglet, et son angle est l'*angle* de l'onglet.

On démontre :

1° Que ***deux pyramides sphériques triangulaires symétriques sont équivalentes*** (846);

2° Que, ***si l'on prend pour unité d'angle l'angle droit, et pour unité de volume la pyramide tri-rectangle qui est le huitième du volume de la sphère, un onglet a pour mesure le double du nombre qui mesure son angle*** (848);

3° Que, ***dans le même système d'unités, le volume d'une pyramide sphérique triangulaire a pour mesure le nombre*** $A+B+C-2$, A, B, C, ***étant les mesures des angles du triangle sphérique qui sert de base à la pyramide*** (850).

Il résulte de là que le rapport du volume d'une pyramide sphérique triangulaire à l'aire de sa base est égal au rapport de la pyramide sphérique tri-rectangle au triangle tri-rectangle; mais ce dernier rapport est égal à celui du volume de la sphère à son aire, c'est-à-dire au tiers du rayon. Donc, le volume de la pyramide sphérique triangulaire est égal au produit de sa base par le tiers du rayon. Et ce théorème s'étend à la pyramide sphérique polygonale, en décomposant sa base en triangles.

THÉORÈME.

856. ***Le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère est l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui joint ces deux points.***

1° Il faut, avant tout, définir la *longueur d'un arc de courbe tracée sur la sphère*.

« Concevons que, dans un arc de courbe sphérique AB (*fig.* 443), on
» inscrive une suite de polygones sphériques se déduisant les uns des au-
» tres d'après une loi arbitraire mais bien déterminée, et telle que le
» plus grand côté des polygones inscrits aille continuellement en décrois-

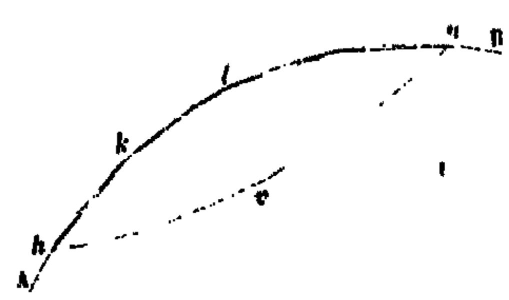
» sant jusqu'à zéro, ce qui exige que le nombre des côtés de ces polygones » croisse au delà de toute limite. Prenons seulement dans chaque polygone la portion inscrite dans l'arc AB, c'est-à-dire la portion correspondante aux sommets h, k, ..., u, compris entre A et B; la longueur de » l'arc AB est, *par définition*, la limite vers laquelle tendent les périmètres de ces portions de polygones.

» Pour légitimer cette définition, il faut prouver que cette limite existe » et qu'elle est indépendante de la loi suivant laquelle varient les polygones » inscrits.

» D'abord, on peut toujours supposer l'arc AB convexe; sans quoi, on » le décomposerait en plusieurs arcs convexes, et la proposition une fois » démontrée pour les arcs partiels s'étendrait à l'arc total.

» Cela posé, soit $hk...u$ la portion d'un polygone sphérique inscrite dans » l'arc AB; en joignant les sommets extrêmes h et u par un arc de grand » cercle hvu moindre qu'une demi-circonférence, nous formerons un polygone sphérique convexe $hk...uvh$ que nous désignerons par P. Construisons le polygone sphérique P′ polaire de P (841); la mesure du périmètre » de P, évaluée en prenant un quadrant pour unité, sera égale à 4 diminué de la mesure de l'aire du polygone P′ évaluée en prenant le triangle » tri-rectangle pour unité d'aire (854). Mais le périmètre de P se compose » du périmètre de la portion $hk...u$ de polygone inscrite dans l'arc AB,

Fig. 443.



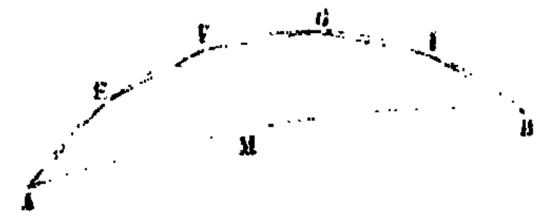
» plus l'arc hvu qui, à la limite, devient l'arc de grand cercle moindre » qu'une demi-circonférence joignant le point A au point B; il suffit donc » de démontrer que l'aire du polygone P′ tend vers une limite bien déterminée et indépendante de la loi suivant laquelle varient les polygones » inscrits dans la courbe AB. Or, soient ω le pôle de l'arc de grand cercle » AB et $\alpha\beta$ le lieu des pôles des arcs de grand cercle tangents à la courbe » AB en tous les points compris entre A et B; le sommet de P′ correspondant au côté hvu tend vers le point ω (842), et tous les autres sommets de P′ tendent vers les différents points de $\alpha\beta$, depuis α jusqu'à β: » donc, l'aire de P′ tend vers l'aire de la figure limitée par $\alpha\beta$ et par les » arcs de grands cercles $\omega\alpha$ et $\omega\beta$. » (*)

(*) Cette démonstration nous a été communiquée par M. O. Bonnet.

2° Il est maintenant très-facile de trouver le plus court chemin entre deux points A et B sur la surface de la sphère (*fig.* 444).

Soient AMB l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui unit les points A et B, et AEFGIB une

Fig. 444.



courbe sphérique quelconque tracée entre ces deux points. AEFGIB étant une portion de polygone sphérique inscrite dans cette courbe, on aura (833)

$$AMB < AE + EF + FG + GI + IB.$$

Or, si l'on fait tendre vers zéro les côtés du polygone inscrit, le second membre a pour limite (1°) la longueur de l'arc de courbe AEFGIB. Donc, l'arc de grand cercle AMB est moindre que toute autre courbe sphérique allant de A en B; c'est le plus court chemin du point A au point B sur la sphère.

THÉORÈME.

857. *Si, d'un point* O *de la sphère, on mène sur un grand cercle* AB *l'arc de grand cercle* OI *perpendiculaire et moindre qu'un quadrant, et plusieurs arcs de grand cercle obliques* OC, OD, OE (*fig.* 445) :

1° *L'arc perpendiculaire* OI *est moindre que tout arc oblique* OC;

2° *Deux arcs obliques* OC *et* OE, *dont les pieds* C *et* E *sont équidistants du pied* I *de l'arc perpendiculaire, sont égaux;*

3° *De deux arcs obliques* OC *et* OD, *ou* OC *et* OE, *celui dont le pied s'écarte le plus du pied* I *de l'arc perpendiculaire est le plus long.*

Fig. 445.

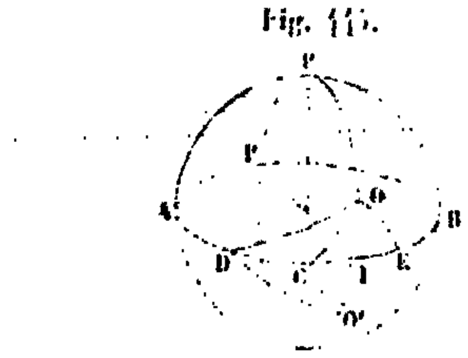
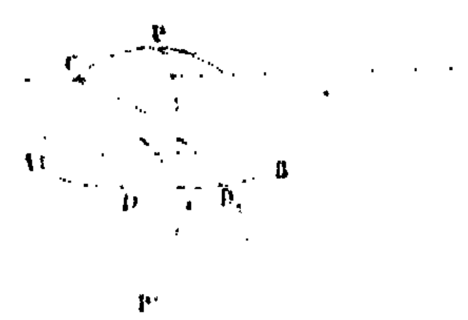


Fig. 446.



Observons d'abord que du point O on peut mener un grand cercle, et un seul, qui soit perpendiculaire à AB : c'est celui qui passe par le point O et par le pôle P du grand cercle AB (787). Par suite, du point O on peut mener dans l'hémisphère OAB deux arcs de grand cercle perpendiculaires à AB : l'un OI moindre qu'un quadrant, l'autre OPI' plus grand qu'un quadrant. C'est de l'arc OI qu'il est question dans le théorème énoncé. La démonstration de ce théorème est d'ailleurs identique à celle du n° 43 de la *Géométrie plane*; nous avons même employé les mêmes lettres afin que le texte de ce numéro pût servir; seulement, les triangles qui interviennent dans la démonstration sont ici symétriques au lieu d'être égaux.

COROLLAIRES.

858. *L'arc de grand cercle OI, moindre qu'un quadrant, mené du point O à angle droit sur un grand cercle AB, est la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur la sphère du point O au grand cercle AB* (856, 857); nous donnerons, d'après cela, à cet arc OI le nom de *distance sphérique* du point O au grand cercle AB.

L'arc OPI' est le plus long de tous les arcs de grand cercle qui vont du point O au grand cercle AB, dans l'hémisphère OAB.

Les réciproques des propositions précédentes sont vraies (47).

Le lieu géométrique des points de la sphère équidistants de deux points de cette surface, est le grand cercle perpendiculaire sur le milieu de l'arc de grand cercle qui unit les deux points (50).

Deux triangles sphériques rectangles sont égaux ou symétriques : 1° lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle oblique égal; 2° lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal (53, 54).

L'arc de grand cercle bissecteur de l'angle de deux grands cercles est le lieu des points de la sphère équidistants des deux côtés de cet angle (57).

859. Voici encore deux remarques importantes :

1° *Dans tout triangle sphérique rectangle, le nombre des côtés supérieurs à un quadrant est pair.* En effet, soient (*fig.* 446) trois grands cercles APB, AIB, PIP', perpendiculaires deux à deux : sur AP, prenons un arc AC moindre qu'un quadrant, et joignons par un arc de grand cercle CD le point C à un point quelconque D de AIB. Dans le triangle rectangle CAD, le côté AC est aigu, et l'on voit que tant que AD reste aigu, c'est-à-dire moindre que le quadrant AI, CD reste inférieur à CI, c'est-à-dire à un quadrant : si AD devient obtus comme AD_1, l'arc CD_1 est supérieur à CI, c'est-à-dire à un quadrant. Le triangle ACD a donc ses trois côtés aigus, ou un aigu et deux obtus. On prouverait pareillement que le triangle rectangle CDB, dont le côté BPC est obtus, possède toujours deux côtés obtus et un aigu; car BD étant obtus, CD est aigu, et BD_1 étant aigu, CD_1 est obtus.

2° *Dans tout triangle sphérique rectangle, tout angle oblique est de même espèce que le côté opposé.* En effet, l'angle ACI étant droit, l'angle ACD est aigu et l'angle ACD_1 est obtus; or AD est aigu et AD_1 est obtus

THÉORÈME.

860. *L'arc de grand cercle* MT, *tangent à un petit cercle, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon sphérique* PM *qui aboutit au point de contact* (*fig.* 447).

Fig. 447.

En effet, par le point M et un point voisin M' menons l'arc de grand cercle MM'S, et joignons par un arc de grand cercle le milieu I de MM' au pôle P du petit cercle. Le point I venant en M en même temps que M', l'angle TMP est la limite de l'angle SIP; mais ce dernier angle est toujours droit puisque le triangle sphérique PMM' est isocèle (835); donc, l'angle TMP est droit.

Scolie.

861. *Lorsque deux petits cercles d'une sphère se coupent, l'arc de grand cercle qui passe par leurs pôles est perpendiculaire sur le milieu de l'arc de grand cercle qui passe par leurs deux points d'intersection.*

Lorsque deux petits cercles d'une sphère sont tangents, leur point de contact est situé sur le grand cercle qui passe par leurs pôles, et l'arc de grand cercle mené par le point de contact à angle droit sur celui qui unit les pôles est tangent à chacun des deux petits cercles.

Désignons par R et r les rayons sphériques des deux petits cercles, et par D l'arc de grand cercle moindre qu'une demi-circonférence qui passe par leurs pôles :

Si les cercles sont extérieurs l'un à l'autre, on aura

$$D > R + r;$$

Si les cercles sont tangents extérieurement, on aura

$$D = R + r;$$

Si les cercles se coupent, on aura

$$R + r > D > R - r;$$

Si les cercles sont tangents intérieurement, on aura

$$D = R - r;$$

Si les deux cercles sont intérieurs l'un à l'autre, on aura

$$D < R - r.$$

Les raisonnements sont identiques à ceux de la *Géométrie plane* (120, 121, 122, 123, 124).

Il y a cependant une condition de plus à laquelle les quantités D, R et r, doivent satisfaire dans tous les cas. Quelle que soit la position relative des deux cercles, on a toujours

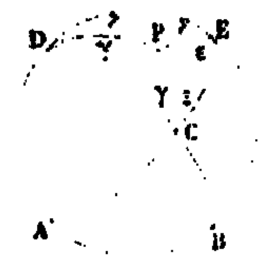
$$D + R + r < 4,$$

en prenant le quart d'un grand cercle pour unité de longueur; en effet, D est toujours moindre que 2, et R et r sont l'un et l'autre inférieurs à 1. Ainsi *la distance sphérique des deux pôles et les rayons sphériques des deux cercles ont une somme moindre qu'une circonférence de grand cercle.*

THÉORÈME.

802. *Le lieu géométrique des sommets* C *des triangles sphériques qui ont une base commune* DE *et dans lesquels la différence entre l'angle au sommet* C *et la somme* D + E *des angles à la base est constante, est un arc de petit cercle qui passe par les points* D *et* E (*fig.* 448).

Fig. 448.



En effet, DEC étant l'un des triangles satisfaisant à la question, et P le pôle du petit cercle circonscrit à ce triangle, les triangles PDC, PCE, PED, sont isocèles; par suite, la différence (D + E) — C est égale à la somme des angles PDE + PED, c'est-à-dire au double de l'un des angles PDE, PED. Ces derniers angles sont donc constants; il résulte de là que le triangle DPE est fixe ainsi que le point P, et que la distance PC = PD est constante, d'où l'on conclut que le sommet C est toujours sur le cercle décrit du point P comme pôle avec un rayon sphérique égal à PD.

Ce théorème est l'analogue de celui du n° 147 de la *Géométrie plane*. En effet, lorsque dans un triangle rectiligne CDE on donne l'angle C, on donne par cela même la somme D + E des deux autres, et par suite la différence D + E — C.

Corollaire.

803. *Le lieu géométrique des sommets* C *des triangles sphériques de même base* AB *et de même aire, est un arc de petit cercle passant par les points* E *et* D *diamétralement opposés aux extrémités* A *et* B *de la base* (*fig.* 448).

En effet, quand l'expression $A + B + C - 2$ est constante, il en est de même de $C - D - E$, puisqu'on a évidemment $A = 2 - E$, $B = 2 - D$. Le lieu proposé est donc le même que celui des sommets des triangles CDE, dont la base DE est fixe et dont la différence entre l'angle au sommet et la somme des angles à la base est constante. Par suite (862), c'est un arc de petit cercle passant par les points fixes D et E.

La proposition qu'on vient de démontrer est connue sous le nom de *théorème de Lexell*.

PROBLÈME.

864. *Mener un arc de grand cercle perpendiculaire sur un arc de grand cercle donné* AB, *en son milieu*; ou, *diviser un arc de grand cercle* AB *en deux parties égales* (*fig.* 449).

Il suffit de décrire des points A et B comme pôles, avec la même ouverture de compas, deux arcs qui se coupent en C et D; puis de faire passer un grand cercle par C et D.

Remarquons que ce grand cercle CD divise aussi en deux parties égales tous les arcs de petit cercle dont les extrémités sont A et B.

Fig. 449.

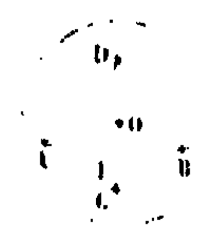


Fig. 450.

PROBLÈME.

865. *Trouver le pôle d'un petit cercle passant par trois points donnés* A, B, C, *sur la sphère* (*fig.* 450).

Ce pôle P, étant équidistant de A, B, C, est à l'intersection des arcs de grand cercle (864) élevés perpendiculairement sur les milieux des arcs de grand cercle AB et BC.

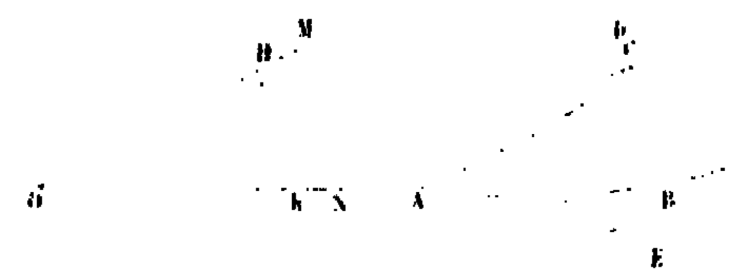
Le pôle P une fois connu, on tracera le petit cercle avec une ouverture de compas égale à PA.

PROBLÈME.

866. *Par un point* A *pris sur un arc de grand cercle* AB, *mener un arc de grand cercle incliné d'un angle donné sur le premier* (*fig.* 451).

Sur une feuille de papier, on trace un angle rectiligne MON égal à l'angle donné, et de son sommet comme centre, avec un rayon égal à celui de la sphère, on décrit un arc de cercle HK; cet arc HK sera la longueur de l'arc de grand cercle qui mesure l'angle du grand cercle donné et du grand cercle inconnu.

Fig. 451.



Cela fait, du point A comme pôle, on décrira sur la sphère un grand cercle DE; puis, en prenant pour pôle le point B où ce cercle coupe le grand cercle donné AB et en donnant au compas une ouverture égale à la corde HK, on décrira un petit arc de cercle coupant DE en C; il ne restera plus alors qu'à mener un grand cercle par les points C et A.

PROBLÈME.

867. *Construire un triangle sphérique, connaissant trois quelconques de ses six éléments* (angles ou côtés).

Ce problème offre six cas distincts: on peut donner: 1° les trois côtés ou les trois angles; 2° deux côtés et l'angle compris, ou un côté et les deux angles adjacents; 3° deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, ou deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

Dans cette énumération, nous avons réuni chaque fois les deux cas corrélatifs, c'est-à-dire qui se ramènent l'un à l'autre par la considération du triangle polaire. Il n'y a donc que trois cas à traiter directement.

1° *On donne les trois côtés a, b, c.*

Supposons, pour fixer les idées, $a > b > c$. Traçons un grand cercle sur la sphère, et prenons sur ce grand cercle un arc BC égal à a; du point B comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de b, traçons un arc de cercle, et du point C comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de c, décrivons un second arc de cercle; A étant un point commun à ces deux arcs, le triangle sphérique ABC sera le triangle demandé.

Les deux arcs se coupent généralement en deux points A et A', situés de part et d'autre du grand cercle BC; de là deux solutions, le triangle ABC et le triangle A'BC, symétrique du premier.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux cercles se coupent, c'est-à-dire qu'on ait (861), en supposant a, b, c, exprimés en degrés,

$$a < b + c, \quad a > b - c, \quad a + b + c < 360.$$

La seconde condition est toujours remplie, puisque nous supposons $a > b > c$, les conditions de possibilité se réduisent donc à

$$a < b + c \quad \text{et} \quad a + b + c < 360°.$$

Donc, *pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois côtés donnés, il faut et il suffit que le plus grand côté soit moindre que la somme des deux autres, et que la somme des trois côtés soit moindre qu'une circonférence de grand cercle.* Nous savions déjà que ces conditions étaient nécessaires (833, 837).

Pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois angles donnés A, B, C, il faut et il suffit que son triangle polaire, dont les côtés sont $180° - A$, $180° - B$, $180° - C$, soit possible. D'après l'alinéa précédent, en supposant, pour fixer les idées,

$$A < B < C, \quad \text{d'où} \quad 180° - A > 180° - B > 180° - C,$$

cela exige qu'on ait

$$180° - A < 180° - B + 180° - C$$

et

$$180° - A + 180° - B + 180° - C < 360°,$$

ou

$$A + 180° > B + C \quad \text{et} \quad A + B + C > 180°.$$

Nous savions déjà (843) que ces conditions étaient nécessaires.

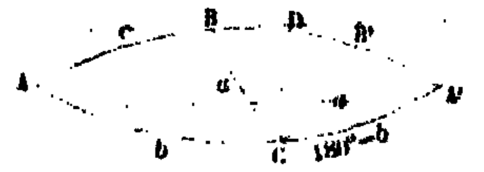
2° *On donne deux côtés a et b et l'angle compris* C.

Même solution qu'en *Géométrie plane* (159).

3° *On donne deux côtés a et b et l'angle* A *opposé au côté a* (*fig.* 452).

Construisons sur la sphère deux grands cercles formant un angle égal à A (866). Prenons, à partir du sommet, sur l'un des côtés de cet angle, un arc AC égal à b, et du point C comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de a, décrivons un arc de cercle; B étant l'intersection de ce cercle avec le second côté de l'angle, le triangle ABC sera le triangle demandé.

Fig. 452.



La discussion de ce problème exige quelque attention.

« Achevons le fuseau A, et du point C abaissons l'arc CD perpendicu-
» laire sur l'autre côté de l'angle. Dans le triangle sphérique rectangle
» ACD, l'arc perpendiculaire CD sera aigu ou obtus suivant que l'angle

» donné A sera lui-même aigu ou obtus (859, 2°). Si l'arc CD est aigu, » il sera le plus court de tous les arcs qu'on pourrait mener du point C » dans le fuseau aux divers points de l'arc ABA', et les arcs obliques augmenteront en s'éloignant du pied de l'arc perpendiculaire : si l'arc CD » est obtus, il sera au contraire le plus grand des arcs menés du point C, » et les arcs obliques augmenteront en se rapprochant du pied de la perpendiculaire (857, 858).

» Cela posé, *pour que le triangle proposé soit possible, il faudra d'abord » que le côté opposé a soit au moins égal à l'arc perpendiculaire, si » l'angle donné A est aigu; ou plus petit, si l'angle donné A est obtus.* » Cette première condition de possibilité est évidemment satisfaite lorsque l'angle donné A et le côté opposé a aussi donné sont de nature » différente.

» Je dis maintenant que :

» *A et a étant de nature différente, le problème, s'il est possible, n'a » qu'une solution;*

» *A et a étant de même nature, le problème, s'il est possible, a une ou » deux solutions.*

» En effet, soient A *aigu et a obtus*, par exemple. Si l'on peut tracer » dans le fuseau, par le point C, une oblique CB égale au côté a, elle ne » pourra se trouver évidemment que du côté de celle des obliques extrêmes b ou $180^\circ - b$ qui sera de même nature que a : ainsi, le problème ne peut avoir qu'une solution. *Cette solution existera* pour » $a <$ que celui des arcs b ou $180^\circ - b$ de même nature : *le triangle sera » impossible* pour a au moins égal à celui des arcs b ou $180^\circ - b$ de même » nature.

» Si l'on supposait A *obtus et a aigu*, on arriverait aux mêmes conclusions; seulement il faudrait renverser les signes, parce que l'arc perpendiculaire CD serait obtus.

» Soient A *et a aigus*. L'arc perpendiculaire CD étant alors aussi aigu, » on voit qu'il pourra exister dans le fuseau une oblique CB' égale à a du » côté de celui des arcs b ou $180^\circ - b$ qui sera aigu, et, à fortiori, qu'il en » existera alors une autre CB du côté de celui des deux arcs b ou $180^\circ - b$ » qui sera obtus. Ainsi le problème pourra avoir deux solutions. *Ces » deux solutions existeront* pour $a <$ que celui des arcs b ou $180^\circ - b$ » de même nature ; *une de ces deux solutions ne sera plus possible* pour » a au moins égal à celui des arcs b ou $180^\circ - b$ de même nature. *Le » triangle sera impossible* pour $a <$ que l'arc perpendiculaire CD.

» Si l'on supposait A et *a obtus*, on arriverait aux mêmes conclusions; » seulement il faudrait renverser les signes, parce que l'arc perpendiculaire CD serait obtus. » (*)

(*) LEMOINE, *Nouvelles Annales*, t. II, 1re série.

PROBLÈME.

868. *Par un point donné, mener un arc de grand cercle tangent à un petit cercle donné (fig. 553).*

Fig. 553.

Si le point donné est sur le cercle, il suffit d'élever par ce point un arc de grand cercle perpendiculaire au rayon sphérique correspondant.

Supposons en second lieu que le point donné A soit extérieur au petit cercle donné, c'est-à-dire soit situé dans la plus grande des deux calottes sphériques séparées par le petit cercle. Considérons le problème comme résolu; nommons P le pôle du petit cercle donné, B le point de contact de l'arc BA, et prolongeons le rayon sphérique PB d'une quantité BC = PB. Le point C se trouve d'abord sur un cercle décrit du point P comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde d'un arc de grand cercle double du rayon sphérique r du petit cercle. Il se trouve en outre sur un second cercle décrit du point A pour pôle avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc PA = D; car BA étant perpendiculaire sur le milieu de PBC, le point A est équidistant de P et de C (858).

Le point C une fois obtenu à l'aide de ces deux cercles auxiliaires, on mènera l'arc de grand cercle PC qui coupera le petit cercle en B, et, en joignant B et A par un arc de grand cercle, on aura l'arc tangent demandé.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux cercles auxiliaires se coupent, c'est-à-dire qu'on ait (861)

$$D < D + 2r, \quad D > 2r - D, \quad D + D + 2r < 4.$$

La première condition est toujours remplie, et les deux autres équivalent à

$$r < D < 2 - r;$$

elles expriment précisément que le point A doit être situé hors de la calotte sphérique PB.

Les cercles auxiliaires se coupent en deux points C et C'; de là deux solutions, AB et AB'.

Observons que les triangles rectangles PAB, PAB', qui ont l'hypoténuse égale et un côté égal, sont symétriques. Donc, *les deux tangentes sphériques* AB *et* AB' *sont égales, et l'arc* PA *divise en deux parties égales chacun des angles* BPB', BAB'.

La construction que nous venons d'indiquer s'applique au problème analogue de *Géométrie plane* (175); celle que nous avons donnée est préférable dans la pratique, parce qu'elle exige moins de place.

PROBLÈME.

869. *Mener un arc de grand cercle tangent à deux petits cercles donnés.*

Nous nous bornerons à indiquer la solution et les conditions de possibilité, laissant au lecteur le soin de faire la figure et de compléter la discussion.

Soient P et P' les pôles des deux petits cercles, R et R' leurs rayons sphériques et D la distance sphérique PP', D, R et R', étant évalués en prenant le quadrant pour unité. Soit d'abord un grand cercle tangent qui coupe l'arc PP' sur son prolongement; si A et A' sont les points où il touche les cercles P et P', son pôle sera à la fois sur les grands cercles PA et P'A'; il sera donc le troisième sommet d'un triangle dont les autres sommets sont P et P', et dont on connaît les trois côtés D, $1-R$, $1-R'$. Les conditions de possibilité sont

$$D > R - R' \quad \text{et} \quad D + R + R' < 2.$$

Considérons en second lieu un grand cercle tangent qui coupe l'arc PP' entre P et P'. On verra que son pôle est le troisième sommet d'un triangle dont les autres sommets sont P et P', et dont on connaît les trois côtés D, $1-R$, $1+R'$. Les conditions de possibilité sont

$$D > R + R', \quad D + R - R' < 2.$$

§ VII. — GÉNÉRALITÉS SUR LES SURFACES.

DÉFINITIONS.

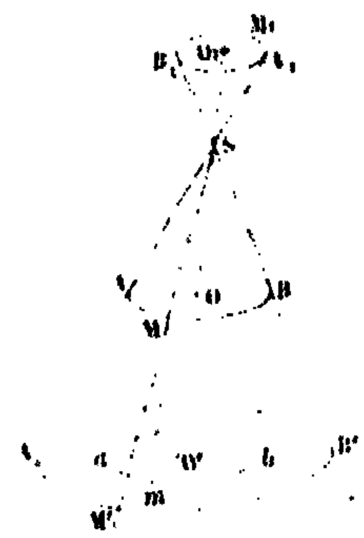
870. Une surface est le lieu des positions successives d'une ligne qui change de position et même de forme, suivant une loi déterminée et continue. Le plus souvent on règle, au moins en partie, le mouvement de cette ligne, qu'on nomme *génératrice*, en l'astreignant à rencontrer sans cesse certaines lignes fixes qu'on appelle *directrices*.

Voici des exemples :

1° Une ***surface conique*** est le lieu des positions successives d'une droite A_1SA (*fig.* 455) qui passe toujours par un point fixe S et qui s'appuie sur une ligne fixe AMB plane ou gauche. Ici, la génératrice est constante de forme, c'est une droite ; et l'une des directrices se réduit à un point S qu'on nomme ***sommet***. Une surface conique a deux nappes SA_1B_1, SAB, séparées par le sommet.

Fig. 454.

Fig. 455.

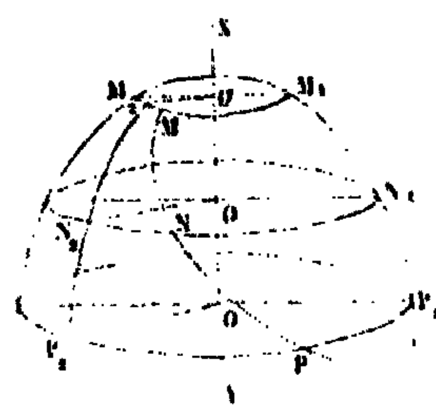


2° Une ***surface cylindrique*** est le lieu des positions successives d'une droite AA' qui s'appuie sur une ligne fixe ABC et reste parallèle à une direction donnée (*fig.* 454). Une surface cylindrique peut être considérée comme la limite d'une surface conique dont le sommet s'est éloigné indéfiniment dans la direction donnée ; ou, plus brièvement, c'est une surface conique dont le sommet est à l'infini dans une certaine direction.

3° Une ***surface de révolution*** est le lieu des positions successives d'une ligne MNP qui tourne autour d'une droite fixe XY à laquelle elle est invariablement liée (*fig.* 456). Dans ce mouvement, tout point M de la génératrice MNP décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe XY, et dont le centre O est sur cet axe ; d'après cela, toutes les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe sont des cercles : ces cercles M_1MM_2, N_1NN_2, P_1PP_2, ..., sont les *pa-*

rallèles de la surface. On appelle *méridiennes* les sections faites dans la surface par des plans passant par l'axe XY; deux méridiennes quelconques $M_1N_1P_1$, $M_2N_2P_2$, sont des lignes superposables : car, si l'on fait tourner le plan XOP_1 de l'angle P_1OP_2 de manière à amener le point P_1 sur le point P_2, les points M_1, N_1,..., arriveront respectivement sur M_2, N_2,..., attendu que les angles M_1OM_2, N_1ON_2,..., P_1OP_2, sont égaux comme angles plans d'un même dièdre.

Fig. 456.



Toute courbe tracée sur une surface de révolution peut être prise pour génératrice de cette surface; le plus souvent on choisit pour génératrice la courbe méridienne. Nous avons déjà étudié trois surfaces de révolution : la surface conique de révolution dont la méridienne est une droite qui rencontre l'axe, la surface cylindrique de révolution dont la méridienne est une droite parallèle à l'axe, et la sphère dont la méridienne est une circonférence ayant son centre sur l'axe.

Les surfaces de révolution admettent un second mode de génération fort remarquable : on peut les considérer comme le lieu des positions d'un cercle dont le centre parcourt l'axe fixe XY, dont le plan reste perpendiculaire à cet axe, et dont le rayon varie suivant une loi telle, que le cercle rencontre sans cesse une méridienne ou toute autre courbe tracée sur la surface. C'est ce cercle variable de grandeur et de position qui est alors la *génératrice*, et la méridienne ou la courbe fixe considérée sur la surface qui est la *directrice*.

THÉORÈME.

871. 1° *Les sections d'une surface cylindrique, par deux plans parallèles, sont égales.*

2° *Les sections d'une surface conique, par deux plans parallèles, sont semblables.*

En effet :

1° Soient la surface cylindrique AA' et deux sections ABC, A'B'C', faites par deux plans parallèles (*fig.* 454). Prenons quatre points A, B, C, M, sur la première section, et menons les génératrices AA', BB', CC', MM', qui rencontrent la seconde section en A', B', C', M'. Les quadrilatères ABCM, A'B'C'M', sont superposables comme bases opposées d'un prisme quadrangulaire. D'après cela, si l'on transporte le plan de la seconde section sur celui de la première, dès que les trois points A', B', C', seront appliqués sur leurs correspondants A, B, C, tout point M' de la seconde section coïncidera avec son correspondant M de la première.

La section A'B'C' peut être considérée comme la projection oblique (599) de ABC; on peut donc encore énoncer ce théorème de la manière suivante : *Une courbe plane quelconque est égale à sa projection oblique* (*ou orthogonale*) *sur un plan parallèle au sien.*

2° Soient la surface conique SAMB et deux sections AMB, A'M'B', faites par deux plans parallèles (*fig.* 455). Menons par le sommet une droite quelconque SOO' qui rencontre les deux plans en O et O', et projetons, parallèlement à SOO', la première section AMB sur le plan de la seconde; cette projection *amb* étant égale à AMB (1°), la proposition sera démontrée si nous prouvons que *amb* et A'M'B' sont homothétiques. Or, SMM' étant une génératrice quelconque de la surface, les droites OM et O'M' sont parallèles, et l'on a

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O'M'}} = \frac{\mathrm{SO}}{\mathrm{SO'}}$$

ou, en observant que la projection m de M est située sur O'M' et que O'm = OM,

$$\frac{\mathrm{O'}m}{\mathrm{O'M'}} = \frac{\mathrm{SO}}{\mathrm{SO'}}.$$

Le second membre de cette égalité ayant une valeur indépendante de la position du point M' sur la courbe A'M'B', les courbes *amb* et A'M'B' sont homothétiques.

SCOLIES.

872. On nomme *section droite d'une surface cylindrique* la section faite par un plan perpendiculaire aux génératrices.

Un *cylindre* est le corps compris entre une surface cylindrique et deux sections planes parallèles. Ces sections sont les *bases* du cylindre, et la distance de leurs plans parallèles est la *hauteur* de ce corps. Le cylindre est *droit* ou *oblique*, suivant que ses génératrices sont perpendiculaires ou obliques au plan de la base. *Le cylindre droit à base circulaire* n'est autre que le cylindre de révolution étudié dans le § I.

L'aire latérale d'un cylindre quelconque est égale au produit de son arête par le périmètre de sa section droite.

Le volume d'un cylindre quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.

On arrive à ces théorèmes en considérant le cylindre comme la limite d'un prisme inscrit, lorsque les côtés de la base polygonale tendent vers zéro.

Les théorèmes relatifs au prisme tronqué, démontrés aux nos 729, 730, 732, 733, sont de même applicables au cylindre tronqué.

873. Un *cône* est le corps compris sous une surface conique limitée d'une part à son sommet et de l'autre à une section plane, qui prend le nom de *base;* la hauteur du cône est la distance du sommet au plan de la base. Un cône à *base circulaire* est *droit* ou *oblique* suivant que la projection orthogonale du sommet sur le plan de la base coïncide ou non avec le centre du cercle. Le cône circulaire droit n'est autre que le cône de révolution étudié au § II.

Le volume d'un cône quelconque est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

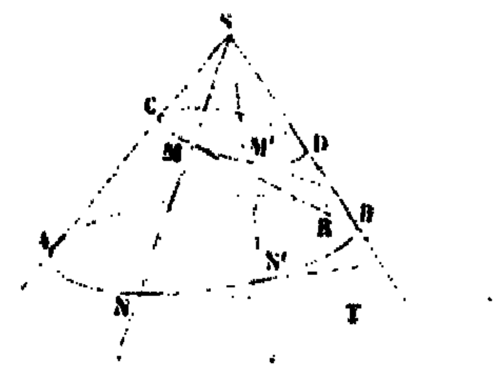
On arrive à ce théorème en considérant le cône comme la limite d'une pyramide inscrite, lorsque les côtés de la base polygonale tendent vers zéro.

THÉORÈME.

874. *Dans un cône ou dans un cylindre, le plan* SNT, *déterminé par une génératrice* SN *et par la tangente* NT *menée à*

une courbe ANB *située sur la surface, au point* N *où cette courbe rencontre la génératrice, est le même, quelle que soit la courbe considérée* (*fig.* 457).

Fig. 457.



Il suffit de prendre une seconde courbe CMD sur la surface coupant la génératrice SN au point M, et de prouver que le plan SNT renferme la tangente MR menée par le point M à cette courbe. Or, le plan NSN′, mené par la génératrice SMN et une génératrice voisine SM′N′, a pour limite SNT, puisque la corde NN′ tend vers la tangente NT. D'ailleurs, quand N′ vient en N, M′ vient en M, et les sécantes NN′, MM′, deviennent en même temps les tangentes NT et MR; comme les sécantes MM′, NN′, sont sans cesse contenues dans le plan SNN′, on voit que le plan SNT renferme la tangente MR.

Ce plan SNT est dit le *plan tangent au cône ou au cylindre suivant la génératrice* SN.

Corollaire.

875. En supposant que la courbe ANB soit plane, on arrive à ce théorème : *La tangente* NT *à la projection ou à la perspective* ANB *d'une courbe* CMD *est la projection ou la perspective de la tangente* MR *à cette courbe* (599).

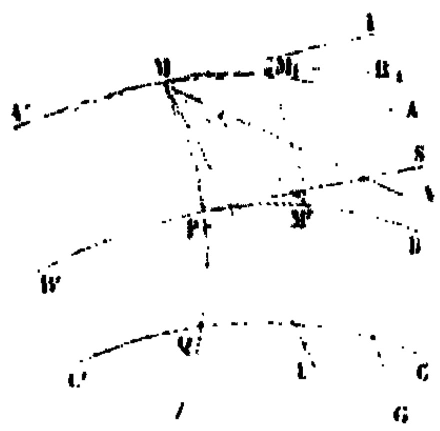
Ce corollaire souffre toutefois une exception, lorsque la tangente de l'espace est elle-même une des droites projetantes. La projection ou la perspective de la tangente se réduit alors à un point, tandis que la tangente de la projection ou de la perspective est une droite bien déterminée; c'est la trace sur le plan de projection du plan tangent au cylindre ou au cône projetant, suivant la génératrice qui coïncide avec la tangente de l'espace.

THÉORÈME.

876. *Le lieu des tangentes menées par un point d'une surface aux diverses courbes que l'on peut tracer par ce point sur la surface, est un plan.*

Soient M le point donné, AMA' une section plane passant par ce point, et BB', CC', ..., des sections voisines faites par des plans parallèles au premier (*fig.* 458). Si l'on prend sur ces courbes les points P, Q, ..., où la

Fig. 458.



tangente est parallèle à MT, on obtiendra une courbe continue MPQ....., située sur la surface. Soit MU la tangente à cette courbe au point M; tout se réduit à prouver que le plan TMU renferme la tangente MV à une courbe quelconque MG tracée par M sur la surface.

Or, soit M' le point où la courbe MG rencontre la section BPB'; menons les cordes MP, MM', et projetons, parallèlement à MP, sur le plan de la première section AMA', la section BPB'; la courbe MM_1B_1 ainsi obtenue sera tangente en M à MT. En effet, la tangente à la projection MM_1B_1 doit être la projection de la tangente PS à la courbe de l'espace BPB' (875), et la projection de PS, parallèlement à MP, est précisément MT, puisque, par hypothèse, PS et MT sont parallèles. Cela étant, si M_1 est la projection de M', le plan M_1MP des deux cordes MM_1 et MP renferme sans cesse la corde MM'; par suite, la tangente MV sera contenue dans le plan limite de M_1MP; or ce plan n'est autre que TMU, puisque les cordes MM_1 et MP ont respectivement pour limites les tangentes MT et MU.

Ce plan, lieu des tangentes aux diverses courbes que l'on peut mener par le point M sur la surface, prend le nom de *plan tangent de la surface* au point M.

SCOLIES.

877. La *normale* à une surface au point M est la perpendiculaire au plan tangent en ce point.

878. Le plan tangent en un point d'une surface est déterminé par les tangentes à deux courbes quelconques menées par ce point sur la surface.

879. Dans toute *surface réglée*, c'est-à-dire engendrée par une ligne droite, le plan tangent en un point contient la génératrice qui passe par ce point : il est alors déterminé par cette génératrice et par la tangente à une courbe quelconque menée par ce point sur la surface. Ce plan *tourne* en général autour de la génératrice. Il est pourtant une classe de surfaces réglées, pour lesquelles le plan tangent est le même tout le long de la génératrice, comme cela arrive (874) pour les cônes et les cylindres. Ces surfaces sont dites *développables*, tandis qu'on appelle *gauches* les surfaces réglées qui ne jouissent pas de cette propriété. Les surfaces développables sont ainsi nommées parce qu'on peut les étendre sur un plan sans les déchirer ni les replier. Considérons, en effet, une surface telle, que les plans tangents soient les mêmes le long de chaque génératrice, c'est-à-dire ne changent qu'en passant d'une génératrice à l'autre : l'ensemble des plans tangents, suivant les diverses génératrices, formera une surface polyédrique circonscrite, qui a pour limite la surface considérée. Or cette surface polyédrique peut être étendue sur un plan, en faisant tourner chaque face plane autour d'une arête, de manière à la rabattre sur le plan de la face précédente ; et comme cette propriété a lieu, quelque rapprochées que soient les génératrices, il en est de même à la limite pour la surface considérée.

880. Le plan tangent à une surface peut laisser la surface tout entière d'un seul côté ; il y a alors un point de contact unique ou une ligne de contact ; le premier cas se présente, par exemple, pour la sphère, le second pour le cylindre et le cône à base circulaire. Le plan tangent peut aussi couper la surface, et la section est alors une courbe à nœud : c'est ce qui arrive, par exemple, en un point de la gorge d'une poulie.

881. Enfin, nous devons observer que le théorème précédent (870) cesse parfois d'être vrai en certains points *singuliers*, tels que le sommet d'un cône ; en ce point, le lieu des tangentes forme, non pas un plan, mais la surface conique proposée. Il en est de même au point d'une surface de révolution situé sur l'axe, lorsque la méridienne rencontre cet axe sous un angle différent de 90 degrés. Ajoutons cependant que, si un point décrit sur la surface d'un cône une courbe bien déterminée et aboutissant au sommet, le plan tangent au cône en chacune des positions du mobile sur sa trajectoire est parfaitement déterminé, et il l'est encore au moment où le mobile atteint au sommet ; c'est le plan tangent suivant la génératrice qui touche au sommet la courbe considérée.

THÉORÈME.

882. *Le plan tangent en un point M d'une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien ZOM qui passe par le point de contact* (*fig.* 459).

En effet, le plan tangent en M contient la tangente MT au parallèle

OM, et cette tangente MT est perpendiculaire au plan méridien ZOM, comme étant à angle droit sur les deux droites OM et OZ de ce plan.

Fig. 459.

COROLLAIRES.

883. La normale MS à la surface au point M est contenue dans le plan méridien ZOM (877). Le point S, où elle rencontre l'axe ZZ_1, est d'ailleurs le même pour toutes les normales qui répondent aux divers points d'un même parallèle; d'où l'on conclut que *les normales menées à une surface de révolution par les divers points d'un parallèle, forment un cône de révolution qui a son sommet S sur l'axe de la surface. Les tangentes aux différents méridiens en des points situés sur un même parallèle, forment* aussi *un cône de révolution qui est circonscrit à la surface et qui a son sommet S_1 sur l'axe de cette surface.* L'angle S_1MS, qui mesure l'angle des plans tangents aux deux cônes au point M, est droit; *les deux cônes sont donc orthogonaux.*

THÉORÈME.

884. ***Dans le cône oblique à base circulaire, toute section anti-parallèle à la base est un cercle.***

Soit (*fig.* 460) S le sommet d'un cône oblique ayant pour base le cercle O. On nomme *plan principal* le plan SAB mené par la droite qui joint le sommet S au centre O de la base, perpendiculairement au plan de cette base; on dit qu'un plan CMD est *anti-parallèle à la base*, lorsqu'il est perpendiculaire sur le plan principal SAB et que sa trace CD sur ce plan principal est anti-parallèle à AB par rapport à l'angle ASB (241). Il s'agit de prouver que la section CMD est un cercle.

Par un point quelconque M de la section, menons un plan parallèle à la base; ce plan coupera le cône suivant un cercle A'MB' (871) décrit sur A'B' comme diamètre, et le plan CMD suivant une droite MP perpendiculaire au plan principal (568). Or, dans le cercle A'MB', on a (225)

$$\overline{MP}^2 = PA'.PB'.$$

D'ailleurs, les triangles PCA', PDB', sont semblables comme ayant leurs angles égaux (241); ils donnent

$$\frac{PA'}{PD} = \frac{PC}{PB'}, \quad \text{d'où} \quad PA'.PB' = PC.PD.$$

Donc

$$\overline{MP}^2 = PC.PD$$

et, par suite (225), le point M appartient à un cercle décrit sur CD comme diamètre.

Fig. 460.

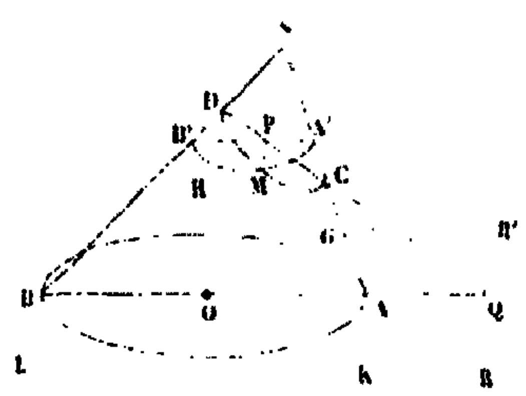


Fig. 461.

885. Réciproquement, *il n'y a que les sections parallèles et les sections anti-parallèles à la base qui soient des cercles.*

En effet, considérons une section circulaire non parallèle à la base, et soit (*fig.* 460) RR' la trace de son plan MRR' sur le plan de la base; du centre O, abaissons sur RR' la perpendiculaire OQ qui rencontre la circonférence de base en A et B; menons les génératrices SA, SB, et les tangentes AK et BL qui sont évidemment parallèles à QR. Les plans SAK, SBL, tangents au cône, couperont le plan MRR' suivant deux droites CG et DH, tangentes au cercle CMD et parallèles à RR'; par suite, la droite DCQ sera perpendiculaire à RR', et l'on conclut de là que les cercles AB et CD sont perpendiculaires au même plan SAB qui passe par leurs centres et par le sommet du cône. D'ailleurs, en menant la section B'MA' parallèle à la base, on a

$$\overline{MP}^2 = PA'.PB', \quad \overline{MP}^2 = PC.PD, \quad \text{d'où} \quad PA'.PB' = PC.PD.$$

Les triangles PA'C, PDB' sont donc semblables, et les angles DB'A, DCA', sont égaux, de sorte que CD est anti-parallèle à AB.

COROLLAIRES.

886. La même propriété subsiste pour le cylindre oblique à base circulaire.

887. *Deux sections, l'une A_1B_1 parallèle, l'autre CD anti-parallèle à la base d'un cône oblique à base circulaire, sont toujours situées sur une même sphère*; car les deux sections circulaires A_1B_1 et CD (*fig.* 461) doivent (884) être perpendiculaires à un même plan SAB passant par leurs centres, et le quadrilatère A_1B_1DC situé dans ce plan doit être inscriptible (241); les cercles A_1B_1 et CD sont donc sur la sphère dont le grand cercle passe par les quatre points A_1, B_1, C, D.

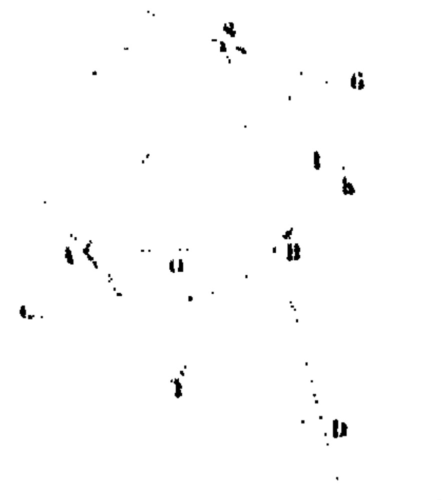
Inversement, *par deux cercles A_1B_1 et CD placés sur la surface d'une sphère, on peut toujours faire passer deux cônes.* — En effet, soient (*fig.* 461) A_1B_1DC une section passant par le centre de la sphère et par les centres des deux cercles, et A_1B_1, CD, les diamètres de ces cercles, déterminés par la section A_1B_1CD; les plans de ces cercles seront perpendiculaires au plan sécant A_1B_1CD. Or, si l'on mène les droites A_1C et B_1D, leur point de concours S sera le sommet d'un cône ayant pour base le cercle A_1B_1 et passant par les points C et D. Mais l'angle DCS est égal à l'angle A_1B_1S; donc, la section CD faite dans le cône par un plan perpendiculaire à A_1B_1DC sera un cercle ayant CD pour diamètre; donc ce cercle se confond avec le cercle CD de la sphère. Il y a un second cône qui coupe la sphère suivant les mêmes cercles A_1B_1 et CD; son sommet est à l'intersection S' des deux diagonales B_1C et A_1D. Ces deux cônes peuvent, dans certains cas, dégénérer en cylindres.

888. Il résulte encore des considérations précédentes que *lorsqu'un cône S pénètre dans une sphère suivant un cercle A_1B_1, il en sort suivant un second cercle CD.*

889. Dans un cône oblique à base circulaire, les centres des sections parallèles à la base sont distribués sur une même droite passant par le sommet; les centres des sections anti-parallèles à la base sont aussi placés sur une seconde droite passant par le sommet. Il importe de connaître la situation respective de ces deux droites.

Soit SAB la section principale du cône dont la base est le cercle décrit sur AB comme diamètre. Le cercle circonscrit au triangle ASB (*fig.* 462) est un grand cercle de la sphère qui contient le cercle AB et le sommet S du cône. La tangente SG au cercle SAB est la trace sur SAB du plan tangent à la sphère en S, et ce plan tangent est perpendiculaire au plan SAB de la figure; d'ailleurs, la droite SG est anti-parallèle à AB, à cause de l'égalité des angles BAS, BSG. Donc le plan tangent SG est parallèle aux plans des sections anti-paralleles à la base AB, et la question se réduit à trouver le centre d'une section quelconque parallèle à ce plan tangent. Nous choisirons celle qui passe par le point de concours T des tangentes en A et B au cercle ASB, c'est-à-dire par le sommet T du cône qui

Fig. 461.



est circonscrit à la sphère suivant le cercle AB. En menant par le point T la parallèle CTD à SG, on aura le diamètre de cette section. Or, il est aisé de voir que le point T est précisément son centre, c'est-à-dire que le point T est le milieu de CD. En effet, l'angle TBD, égal à SBK, a pour mesure la moitié de l'arc SIB; l'angle TDB, alterne-interne de BSG, a la même mesure; donc le triangle TBD est isocèle et l'on a TD = TB. On voit pareillement que TC = TA; par suite, comme TA = TB (176), on a TC = TD. Ainsi, *le lieu des centres des sections anti-parallèles à la base AB est la droite* ST *qui joint le sommet* S *au sommet* T *d'un cône auxiliaire circonscrit, suivant le cercle* AB, *à la sphère déterminée par ce cercle et par le sommet* S *du cône primitif.*

§ VIII. — APPENDICE.

Des polyèdres réguliers convexes.

890. Un *polyèdre régulier* est un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux et dont tous les angles polyèdres sont égaux entre eux.

THÉORÈME.

891. *Il ne peut exister que cinq polyèdres réguliers convexes.*

Cette proposition n'est qu'un cas particulier de celle du n° 707. On peut d'ailleurs la démontrer directement en quelques mots.

La somme des faces d'un angle polyèdre convexe devant être inférieure à quatre angles droits (577), si les faces sont des triangles équilatéraux, on ne peut assembler autour d'un même point, pour former un angle polyèdre, que *trois* ou *quatre* ou *cinq* de ces triangles. On construit ainsi : le *tétraèdre* régulier compris sous quatre triangles équilatéraux : l'*octaèdre* régulier, compris sous huit triangles équilatéraux; l'*icosaèdre* régulier, compris sous vingt triangles équilatéraux. Au delà, *six* triangles équilatéraux assemblés autour d'un même point donnent six angles plans dont la somme est égale à quatre angles droits : il n'y a plus d'angle polyèdre. les six triangles se trouvent développés dans un même plan.

On ne peut employer les carrés ou les pentagones réguliers qu'en les assemblant par *trois*, puisque l'angle d'un carré est droit et que celui d'un pentagone régulier est égal à $\frac{6}{5}$ d'angle droit. On a ainsi l'*hexaèdre* régulier ou cube, compris sous six carrés égaux, et le *dodécaèdre* régulier, compris sous douze pentagones réguliers.

Aucun autre polyèdre régulier convexe n'est possible, puisque, l'angle d'un hexagone régulier étant égal à $\frac{4}{3}$ d'angle droit, trois angles d'hexagone régulier font en somme quatre angles droits.

Nous prouverons l'existence des cinq polyèdres réguliers énoncés, en montrant comment on peut effectuer leur construction.

PROBLÈME.

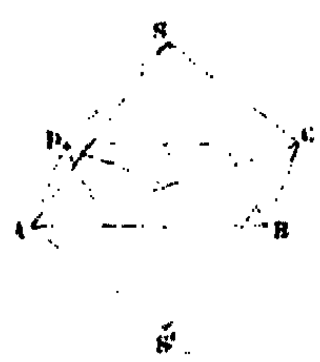
892. *Construire un polyèdre régulier, connaissant son arête.*

La construction du tétraèdre régulier et celle du cube ne peuvent offrir aucune difficulté, d'après ce qui a été dit aux nos 606 et 656. Nous ne nous occuperons que de l'octaèdre, du dodécaedre et de l'icosaèdre.

Octaèdre régulier.

Prenons (*fig.* 463) un carré ABCD de côté a. Élevons en son centre O

Fig. 463.



une perpendiculaire indéfinie, et portons de part et d'autre du point O sur cette perpendiculaire une longueur égale au rayon du carré ABCD, c'est-à-dire à $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. En joignant les points S et S' ainsi obtenus aux sommets A, B, C, D, on formera un octaèdre régulier SABCDS'. En effet, les huit arêtes SA, SB,..., S'D, sont égales entre elles et à

$$\sqrt{\overline{OS}^2+\overline{OA}^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}+\frac{2a^2}{4}} = a.$$

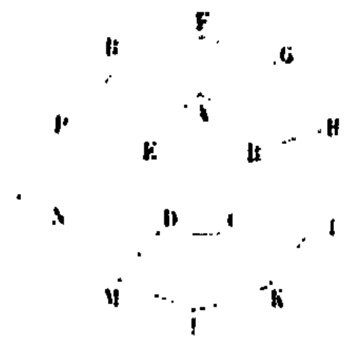
Les huit faces du polyèdre construit sont donc des triangles équilatéraux égaux. De plus, ses six angles polyèdres sont égaux entre eux; car les angles S et B, par exemple, sont les angles au sommet de deux pyramides quadrangulaires régulières SABCD, BASCS', évidemment superposables comme ayant même base et même hauteur.

On peut résumer la construction de l'octaèdre régulier en remarquant que trois droites égales et perpendiculaires entre elles en leur milieu, telles que AC, BD, SS', ont pour extrémités les six sommets d'un pareil polyèdre.

Dodécaèdre régulier.

Soit (*fig.* 464) un pentagone régulier ABCDE de côté a. Prenons d'autres pentagones réguliers de côté a.

Fig. 464.



Avec deux de ces pentagones joints au pentagone ABCDE, formons en A un angle trièdre qui, ayant ses faces égales, aura aussi ses angles dièdres égaux. Les trois côtés BA, BC, BH, déterminent alors un angle trièdre B, égal à l'angle trièdre A, comme ayant un angle dièdre égal compris entre deux faces égales entre elles et chacune à chacune. On peut donc former à tous les sommets du pentagone ABCDE des angles trièdres égaux à A, en employant des pentagones réguliers égaux à ce pentagone et disposés comme l'indique la figure. Le pentagone ABCDE est commun à tous les angles trièdres; le second, le troisième et le quatrième trièdre nécessitent l'addition d'un nouveau pentagone; le dernier angle trièdre en E se trouve tout construit.

On obtient ainsi un assemblage de six pentagones réguliers égaux et également inclinés. Cet assemblage constitue une surface polyédrale ouverte, moitié du dodécaèdre; et les sommets du décagone *gauche* (*) FGHIKLMNPR qui la termine correspondent successivement à *deux* et à *un* pentagone. D'ailleurs, les angles de ce décagone sont égaux entre eux; en effet, les deux angles trièdres en A et en F sont égaux comme ayant

(*) Ce décagone est *gauche*; car si les quatre points B, F, G, H, étaient dans un même plan, ce plan contenant aussi le point A, il n'y aurait plus d'angle trièdre en A.

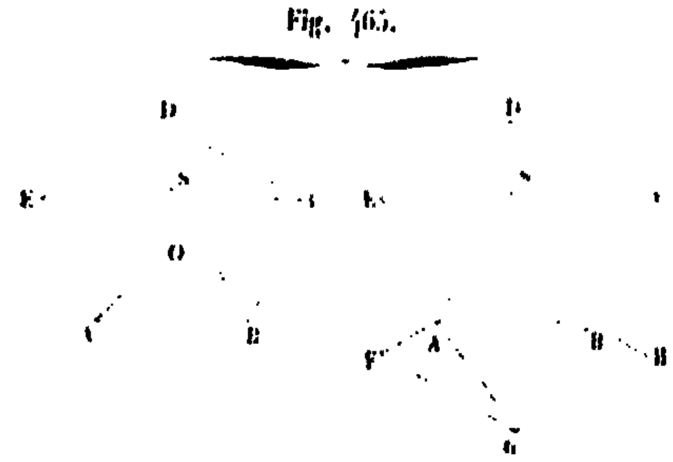
un dièdre égal compris entre deux faces égales entre elles et chacune à chacune. L'angle RFG est donc égal à l'angle EAB et, par suite, à l'angle FGH. On peut alors faire tourner le polygone FGHIKLMNPR sur lui-même, en faisant passer le sommet F en G, le sommet G en H, etc., sans qu'il cesse de coïncider avec sa première position.

Si l'on construit de la même manière la seconde moitié du dodécaèdre et si on la retourne pour l'opposer à la première moitié, on pourra, d'après cela, rapprocher les deux calottes polyédrales et appliquer l'un sur l'autre les polygones qui les terminent, en établissant la coïncidence des sommets du premier où il n'y a qu'*un* pentagone, et des sommets du second qui en réunissent *deux*. Comme les plans de ces pentagones ont déjà entre eux l'inclinaison nécessaire pour composer un angle trièdre égal à l'angle A, l'ensemble obtenu sera bien un dodécaèdre régulier compris sous douze pentagones réguliers égaux formant vingt angles trièdres égaux.

Icosaèdre régulier.

Prenons (*fig.* 465) un pentagone régulier ABCDE de côté a. Élevons en

Fig. 465.



son centre O une perpendiculaire et, dans le plan déterminé par le rayon OA et cette perpendiculaire, décrivons du point A comme centre, avec a pour rayon, un arc de cercle qui coupera la perpendiculaire au point S; car a est plus grand que $OA = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$. Les arêtes SA, SB, ..., SE, seront égales entre elles et à a. Par suite, la surface latérale de la pyramide pentagonale SABCDE sera formée de cinq triangles équilatéraux égaux entre eux et également inclinés, puisque les angles trièdres isocèles en A, B, ..., E, sont égaux entre eux comme ayant leurs trois faces égales chacune à chacune.

Ceci posé, en chacun des sommets A et B du triangle SAB, plaçons (comme l'indique la seconde figure) le sommet d'une pyramide identique à la première SABCDE, de manière que les deux nouvelles pyramides ABSEFG, BASCHG, aient respectivement avec la première les faces communes ASB et ASE, BAS et BSC, et entre elles les faces communes ASB et ABG. Nous aurons ainsi un assemblage de dix triangles équilatéraux égaux et également inclinés.

Cet assemblage forme une surface polyédrale ouverte, moitié de l'icosaèdre, et les sommets de l'hexagone *gauche* (*) CDEFGH qui la termine réunissent successivement *trois* et *deux* triangles. D'ailleurs, les angles de cet hexagone sont égaux : l'angle DEF, par exemple, est égal à l'angle EFG, car tous deux sont évidemment égaux à l'angle EAG. On peut donc faire tourner le polygone CDEFGH sur lui-même, en faisant passer le sommet C en H, le sommet H en G, etc., sans qu'il cesse de coïncider avec sa première position.

Si l'on construit de la même manière la seconde moitié de l'icosaèdre et si on la retourne pour l'opposer à la première moitié, on pourra donc rapprocher les deux calottes polyédrales et appliquer l'un sur l'autre les polygones qui les limitent, en faisant correspondre les sommets de l'un qui réunissent *trois* triangles aux sommets de l'autre qui en réunissent *deux*. Comme les plans de ces triangles ont déjà entre eux l'inclinaison nécessaire pour constituer alors en chaque sommet un angle polyèdre égal à l'angle S, l'ensemble obtenu sera bien un icosaèdre régulier compris sous vingt triangles équilatéraux égaux formant douze angles pentaèdres égaux.

Scolie.

893. En ayant recours aux formules $S = \frac{nF}{m}$ et $A = \frac{nF}{2}$ du n° 707, on forme facilement le tableau suivant qui renferme les nombres des éléments des cinq polyèdres réguliers convexes, dont nous connaissons les nombres de faces.

	F	n	S	m	A
TÉTRAÈDRE RÉGULIER..	4	3	4	3	6
HEXAÈDRE RÉGULIER...	6	4	8	3	12
OCTAÈDRE RÉGULIER...	8	3	6	4	12
DODÉCAÈDRE RÉGULIER.	12	5	20	3	30
ICOSAÈDRE RÉGULIER...	20	3	12	5	30

(*) Le contour CDEFGH est gauche ; car si les quatre points C, D, E, F, étaient dans un même plan, les deux pentagones ABCDE, BSEFG, qui ont déjà dans le plan CDE les sommets A et B communs, seraient tous deux dans ce même plan qui contiendrait le point A en même temps que les points B, E, F ; ce qui est impossible d'après ce qui précède.

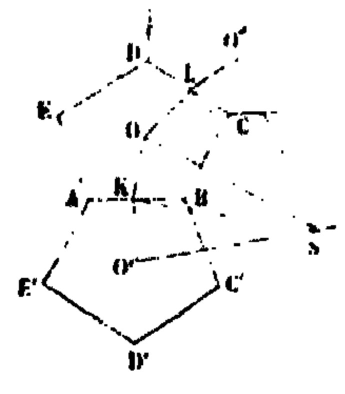
Le nombre des faces de l'hexaèdre et le nombre de côtés de ses faces sont respectivement égaux au nombre des sommets de l'octaèdre et au nombre d'arêtes de ses angles polyèdres. Il en est de même réciproquement pour l'octaèdre comparé à l'hexaèdre : le nombre d'arêtes reste le même de part et d'autre. Les mêmes conditions sont remplies par le dodécaèdre et l'icosaèdre. On peut donc regarder les polyèdres réguliers convexes comme *conjugués* deux à deux ; car le tétraèdre régulier ayant autant de faces que de sommets est conjugué à lui-même.

THÉORÈME.

894. ***Tout polyèdre régulier convexe est inscriptible et circonscriptible à la sphère.***

Soient (*fig.* 466) dans le polyèdre régulier considéré deux faces adjacentes ABCDE, ABC'D'E', dont O et O' sont les centres.

Fig. 466.



Les perpendiculaires OK et O'K au côté commun AB se couperont en un même point K ; les perpendiculaires OS et O'S aux deux faces ABCDE, ABC'D'E', lieux respectifs des points à égale distance de leurs sommets, se couperont en un point S, car elles sont situées dans le plan OKO' perpendiculaire à AB au point K. Les deux triangles rectangles KOS, KO'S, seront d'ailleurs égaux entre eux, puisqu'ils ont l'hypoténuse KS commune et le côté KO égal au côté KO' comme apothèmes de deux polygones réguliers égaux. L'angle OKO' mesurant l'inclinaison constante de deux faces adjacentes du polyèdre, l'angle OKS égal à l'angle O'KS sera la moitié de cette inclinaison, et le triangle KOS sera, par suite, constant pour toutes les faces.

Si l'on considère une troisième face O'', contiguë à la face ABCDE par le côté CD dont le milieu est L, la perpendiculaire élevée à cette face par son centre O'' coupera donc la droite OS au point S, de manière que le triangle LO''S soit identique au triangle KOS ou à son égal OLS.

En continuant de proche en proche, on voit que les perpendiculaires élevées aux différentes faces du polyèdre par leurs centres se coupent mutuellement en un même point S, situé à la même distance de toutes les faces et à la même distance de tous les sommets.

Donc, la sphère de centre S et de rayon SA passe par tous les sommets du polyèdre régulier ou lui est *circonscrite;* la sphere de même centre S et de rayon SO est tangente à toutes les faces du polyèdre en leurs centres ou lui est *inscrite.*

Le point S est le *centre* du polyèdre régulier; SA est son *rayon,* SO son *apothème.*

COROLLAIRES.

895. Si l'on décompose un polyèdre régulier en pyramides en prenant pour centre de décomposition le centre même du polyèdre, les pyramides obtenues sont régulières : *Tout polyèdre régulier peut donc être partagé en autant de pyramides régulières qu'il a de faces.*

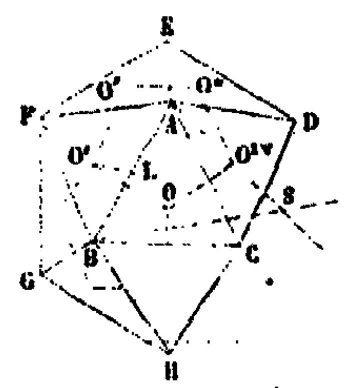
Les faces latérales de ces pyramides étant prolongées, décomposent évidemment la sphère inscrite ou circonscrite en autant de polygones sphériques réguliers égaux que le polyèdre considéré a de faces.

Le volume d'un polyèdre régulier a pour mesure le produit de son aire par le tiers du rayon de la sphère inscrite (657).

Deux polyèdres réguliers de même ordre étant nécessairement semblables, *le rapport des côtés ou des volumes de ces polyèdres est* aussi *celui des rayons ou des cubes des rayons des sphères inscrites ou circonscrites.*

896. *Les centres des faces d'un polyèdre régulier sont les sommets d'un autre polyèdre régulier conjugué du premier* (*fig.* 467).

Fig. 467.



Soient A l'un des sommets du polyèdre donné et S le centre commun des sphères inscrite et circonscrite à ce polyèdre. Désignons par O, O', O", etc., les centres des faces réunies autour du point A. Ces points étant également distants des points S et A, sont situés dans un même plan perpendiculaire à SA en un point qui est le centre du cercle circonscrit au polygone OO'O".... De plus, L étant le milieu du côté AB, le triangle OLO' est constant, et le polygone inscrit OO'O"... ayant ses côtés égaux est régulier. Le polyèdre formé en joignant les centres des faces du polyèdre proposé a donc déjà pour faces des polygones réguliers égaux, et le nombre de ces polygones est égal à celui des sommets du polyèdre donné. Il reste seulement à prouver que ces polygones sont également inclinés. Or, si l'on considère les deux faces du nouveau polyèdre qui s'appuient sur le côté OO', l'angle dièdre qu'elles comprennent est le supplément de l'angle constant ASB des deux perpendiculaires SA et SB à ces deux faces.

La réciproque de ce théorème est évidente.

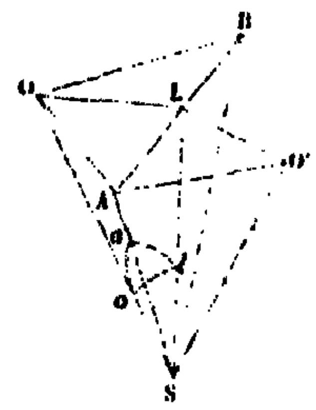
On voit qu'en appliquant la construction indiquée sous l'une ou sous l'autre forme, le tétraèdre régulier conduit à un nouveau tétraèdre, l'hexaèdre régulier à un octaèdre régulier et réciproquement, le dodécaèdre régulier à un icosaèdre régulier et réciproquement ; ce qui justifie la dénomination de *conjugués* donnée à ces polyèdres (893).

PROBLÈME.

897. *Un polyèdre régulier convexe étant donné, trouver : 1° l'inclinaison de deux faces adjacentes ; 2° les rayons des sphères inscrite et circonscrite.*

1° Soient (*fig.* 468) S le centre de la sphère inscrite ou circonscrite,

Fig. 468.



AB le côté commun aux deux faces adjacentes dont les centres sont O et O', L son milieu : l'angle OLO' mesure l'inclinaison cherchée I.

AB étant perpendiculaire au plan OLO', les plans OLO' et ASB sont perpendiculaires. Par suite, si du point S comme centre nous décrivons une sphère, sa rencontre avec l'angle trièdre SAOL déterminera un triangle sphérique *alo*, rectangle en *l*.

Soient, dans le polyèdre considéré, n le nombre de côtés de chaque face, m le nombre d'arêtes de chaque angle polyèdre. On aura évidemment

$$\text{angle } aol = \text{angle AOL} = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n},$$

et

$$\text{angle } oal = \text{angle AOL} = \frac{2\pi}{2m} = \frac{\pi}{m}.$$

Le triangle sphérique rectangle aol donne d'ailleurs

$$\cos oal = \cos ol . \sin aol.$$

Mais

$$\cos ol = \cos \text{OSL} = \sin \text{OLS} = \sin \frac{1}{2} \text{I}.$$

On a donc la formule générale

$$\sin \frac{1}{2} \text{I} = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

En l'appliquant aux différents polyèdres réguliers convexes, on trouve pour l'inclinaison I les valeurs suivantes :

Tétraèdre régulier......	70°31'43",6
Hexaèdre régulier.......	90°
Octaèdre régulier.......	109°28'16",4
Dodécaèdre régulier.....	116°33'54",2
Icosaèdre régulier.......	138°11'22",75

Les valeurs indiquées sont exactes pour l'hexaèdre et l'icosaèdre, approchées pour les trois autres polyèdres. Les inclinaisons des faces du tétraèdre et de l'octaèdre régulier sont supplémentaires l'une de l'autre.

2° Soient a le côté du polygone donné, r son apothème, R son rayon. Le triangle rectangle OLA donne

$$\text{OL} = \text{AL} \cot \text{AOL} = \frac{1}{2} a \cot \frac{\pi}{n}.$$

Le triangle rectangle SOL donne à son tour

$$\text{SO} = \text{OL} \operatorname{tang} \text{OLS},$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{1}{2} a \cot \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{I}. \tag{1}$$

Le triangle sphérique alo donne enfin

$$\cos oa = \cot aol . \cot oal.$$

Or

$$\cos oa = \cos \text{OSA} = \frac{\text{SO}}{\text{SA}}.$$

On a donc

$$\frac{\text{SA}}{\text{SO}} = \operatorname{tang} aol . \operatorname{tang} oal$$

ou

$$\frac{R}{r} = \operatorname{tang}\frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{tang}\frac{\pi}{m}.$$

On en déduit

$$(2) \qquad R = \frac{1}{2}a.\operatorname{tang}\frac{\pi}{m}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}I.$$

En appliquant les formules (1) et (2) aux différents polyèdres réguliers convexes, on obtient les valeurs suivantes :

Tétraèdre régulier......... $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$, $\quad R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Hexaèdre régulier......... $r = \dfrac{a}{2}$, $\quad R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Octaèdre régulier......... $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$, $\quad R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Dodécaèdre régulier....... $r = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{25+11\sqrt{5}}{10}}$, $\quad R = \dfrac{a(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{4}$.

Icosaèdre régulier......... $r = \dfrac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$, $\quad R = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

SCOLIE.

898. Pour deux polyèdres *conjugués*, les nombres n et m ne faisant que s'échanger (893), le rapport $\frac{R}{r}$ demeure constant. Donc, si R est le même pour ces deux polyèdres, r sera aussi le même. En d'autres termes, si deux polyèdres conjugués sont inscrits à une même sphère, ils seront aussi circonscrits à une même sphère, et réciproquement.

Polygones et polyèdres réguliers d'espèce supérieure.

899. Nous avons déjà parlé (283) des nouveaux polyèdres réguliers découverts par M. Poinsot, et nous savons qu'*il y a autant de polygones réguliers différents de m côtés que de nombres premiers à m depuis* 1 *jusqu'à* $\frac{1}{2}(m-1)$.

Pour préciser davantage ce résultat, soit la circonférence divisée en m parties égales aux points A, B, C, etc.; représentons l'arc AB par a, et joignons ces points de p en p, à partir de A.

Si p est premier avec m, le plus petit multiple commun de l'arc pa et de la circonférence ma sera pma; c'est-à-dire qu'on ne reviendra au point de départ qu'après avoir décrit p fois la circonférence ou m fois l'arc pa. On aura donc ainsi un polygone étoilé de m côtés.

Si m et p ont un plus grand commun diviseur θ, le plus petit multiple commun de la circonférence ma et de l'arc pa est $\frac{mp}{\theta}\cdot a$. On revient alors au point de départ, après avoir décrit $\frac{p}{\theta}$ fois la circonférence, ou après avoir compté $\frac{m}{\theta}$ fois l'arc pa; c'est-à-dire qu'on trouve ainsi un polygone étoilé inférieur de $\frac{m}{\theta}$ côtés.

D'ailleurs, si p, entier inférieur à m, est premier avec m, $m-p$ remplira les mêmes conditions. Donc, les nombres entiers inférieurs à m et premiers avec lui se divisent en deux séries dont les termes correspondants forment une somme égale à m. Deux termes correspondants conduisent au même polygone étoilé de m côtés, car la corde de l'arc pa est aussi celle de l'arc $(m-p)a$.

900. Les polygones étoilés qu'on obtient en suivant la marche indiquée (283) « ont leurs m côtés et leurs m angles bien nets et bien distincts : » ce sont les angles qui ont lieu aux bouts réunis deux à deux des m » droites dont la chaine continue achève complétement la figure. Les » autres angles, formés par les côtés non contigus qui se traversent.... » ne doivent pas être comptés; pas plus que, dans les polygones ordi» naires, on ne compte les angles qui auraient lieu à la rencontre des » côtés non contigus suffisamment prolongés. Sous ce point de vue, la » différence de ces polygones étoilés aux polygones ordinaires est que, » dans ceux-ci, un côté quelconque aurait besoin d'être prolongé pour » être rencontré par les côtés non contigus aussi prolongés; au lieu que » dans les autres, les côtés mêmes peuvent être actuellement traversés » par les autres côtés.... Mais toutes ces distinctions sont plus appa» rentes que réelles, et disparaissent tout à fait dans l'analyse où ces » polygones se présentent d'une manière inséparable. Si l'on cherche, en » effet, le côté d'un polygone régulier, on trouve une équation de degré » supérieur, dont toutes les racines sont réelles, et qui donne à la fois les » différents côtés de toutes les espèces de polygones réguliers de l'ordre » que l'on considère. » (POINSOT, *Journal de l'École Polytechnique*, t. IV, p. 25.)

901. L'ordre m d'un polygone est marqué par le nombre m de ses côtés ou de ses sommets; son *espèce* varie en raison du nombre premier à m qui lui a donné naissance. Or si ce nombre est p, il faut décrire p fois la circonférence (899) pour décrire le polygone lui-même. L'espèce d'un polygone étoilé est donc le nombre de circonférences parcourues en suivant tous ses sommets, ou le nombre de fois que les projections de ses côtés sur la circonférence circonscrite recouvrent cette circonférence.

Si l'espèce d'un polygone étoilé est p, la somme de ses angles au centre vaut p fois 4 angles droits.

902. L'ordre d'un angle polyèdre est marqué par le nombre de ses faces. Il est d'ailleurs de même espèce que le polygone qui résulte de sa section par un plan. Si l'on considère une pyramide régulière ayant pour base un pentagone étoilé ou de seconde espèce, l'angle polyèdre au sommet est de seconde espèce, et les angles plans qui le forment, projetés sur la base de la pyramide, remplissent deux fois les quatre angles droits.

903. « ... En conservant toujours la définition générale des polyèdres » réguliers, ... on voit la possibilité de construire de nouveaux polyèdres » réguliers, non-seulement avec les nouveaux polygones (réguliers)..., » mais même avec les polygones réguliers ordinaires : et pour bien en- » tendre ceci, il faut commencer par distinguer nettement dans un po- » lyèdre ses faces, ses arêtes et ses sommets.

» Comme un même polyèdre peut paraître également construit sous » tels ou tels polygones, on prend pour les *faces* les plans qui, en plus » petit nombre, achèvent complétement ce même polyèdre....

» Pour les *arêtes*, ce sont les côtés mêmes qui terminent les faces du » polyèdre, et par lesquels ces faces se joignent deux à deux, de sorte » que chaque arête sert de côté à deux faces adjacentes, et qu'ainsi le » nombre des arêtes est (toujours) égal à la moitié du nombre des côtés » de toutes les faces.

» C'est à ces seules droites, comme faîtes, que se trouvent les angles » dièdres du polyèdre; les autres angles que pourraient former les faces » en se traversant n'en font point partie : et de même, c'est aux seuls » points où se réunissent les extrémités des arêtes que sont les *sommets* » et les angles polyèdres du polyèdre.

» Cela posé, ... on peut construire de nouveaux polyèdres parfaitement » réguliers... : ils ont toutes leurs faces égales et régulières, également » inclinées deux à deux, et assemblées en même nombre autour de chaque » sommet. Ils peuvent être inscrits et circonscrits à la sphère (*).... La » différence essentielle de ces polyèdres aux polyèdres (réguliers) ordi- » naires est que, dans ceux-ci, les faces étant projetées par des rayons » sur la sphère inscrite ou circonscrite, les polygones (sphériques) cor- » respondants recouvrent une seule fois la sphère; au lieu que, dans les » autres, ces polygones la recouvrent exactement ou deux fois ou trois » fois, etc., et cela d'une manière uniforme, de sorte que la surface est

(*) Car la démonstration du n° 894 est fondée seulement sur l'égale incli- naison des faces égales et régulières du polyèdre et sur l'identité de position du centre de chacune d'elles par rapport à ses intersections avec les faces ad- jacentes.

» partout ou doublée ou triplée, etc. » (POINSOT, *Journal de l'École Polytechnique*, t. IV, p. 35.) On voit ici l'analogie étroite entre les polygones étoilés (899) et les nouveaux polyèdres.

904. L'*ordre* d'un polyèdre régulier est marqué par le nombre de ses faces. L'*espèce* du polyèdre est le nombre de fois que sa projection, effectuée comme on vient de le dire (903) sur la sphère inscrite ou circonscrite, recouvre cette sphère.

Dans les polyèdres réguliers ordinaires, les angles polyèdres sont aussi de première espèce (902); mais dans les nouveaux polyèdres, l'espèce de l'angle polyèdre ne fait pas celle du polyèdre. Le polyèdre peut être d'une espèce, et l'angle polyèdre d'une autre.

905. Il est facile de voir qu'en prolongeant les côtés d'un polygone régulier jusqu'à leur rencontre, on forme un polygone étoilé de même ordre, qui a pour noyau le polygone primitif. Les polyèdres réguliers d'espèce supérieure dérivent d'une manière analogue des polyèdres réguliers ordinaires, et en prolongeant les arêtes ou les faces d'un des polyèdres réguliers déjà connus, on obtient, sauf les cas d'impossibilité, un nouveau polyèdre régulier qui a pour noyau le polyèdre régulier ordinaire qui a servi de point de départ (915). C'est ce qu'a établi M. Cauchy (*Journal de l'École Polytechnique*, t. IX, p. 68).

Plus tard, M. J. Bertrand (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLVI) a rattaché les nouveaux polyèdres aux polyèdres réguliers déjà connus, par une démonstration du même genre mais beaucoup plus simple : c'est celle que nous allons exposer.

906. Nous regarderons d'abord comme évident que, *des points quelconques étant donnés dans l'espace, on peut toujours trouver un polyèdre* CONVEXE, *dont les sommets soient pris parmi les points donnés, et qui contienne tous les autres points dans son intérieur, à moins qu'il n'ait précisément pour sommets tous les points donnés eux-mêmes.*

Nous savons d'ailleurs (705) qu'il ne peut exister de polyèdre convexe dont chaque sommet soit la réunion de plus de cinq faces.

THÉORÈME.

907. *Étant donné un polyèdre régulier A, d'espèce quelconque, il existe toujours un polyèdre régulier convexe X qui a les mêmes sommets que le polyèdre A.*

Les sommets du polyèdre régulier quelconque A étant sur une même sphère (903), tout polyèdre convexe dont les sommets sont pris parmi ceux de A ne saurait contenir les autres dans son intérieur. Il existe donc (906) un polyèdre convexe X dont tous les sommets se confondent avec ceux du polyèdre A. Il reste à prouver que ce polyèdre convexe X est régulier.

Désignons par P la figure formée par l'ensemble des deux polyèdres considérés, et par Q une autre figure identique à la première. Puisque le polyèdre A est régulier, la coïncidence des deux figures pourra être obtenue en plaçant un sommet quelconque de Q sur un sommet déterminé de P, ce qui entraîne l'égalité de tous les angles polyèdres du polyèdre convexe X.

De plus, deux sommets étant l'un sur l'autre, la coïncidence des deux polyèdres A qui font partie de P et de Q, et par suite celle des figures totales, pourra être obtenue au moins de trois manières différentes : car les sommets considérés appartiennent à des angles au moins trièdres et, sur l'une des faces du premier angle, on peut placer une face quelconque du second. Les angles polyèdres correspondants des deux polyèdres convexes X sont donc, à leur tour, non-seulement égaux, mais susceptibles de coïncider aussi de trois manières différentes au moins; et comme ces angles sont trièdres, tétraèdres ou pentaèdres (705), ils ont alors nécessairement toutes leurs faces égales et également inclinées.

Les faces des deux polyèdres X sont donc des polygones équiangles et également inclinés, dont la coïncidence peut être établie en plaçant un sommet arbitraire de Q sur un sommet désigné de P : en d'autres termes, ces faces sont des polygones réguliers égaux. Le polyèdre X, ayant pour faces des polygones réguliers égaux et pour angles des angles polyèdres égaux, est régulier.

THÉORÈME.

908. *Il n'existe que quatre polyèdres réguliers d'espèces supérieures.*

« En vertu du théorème précédent, pour obtenir les polyèdres régu- » liers d'espèces supérieures, il faut évidemment prendre les polyèdres » réguliers convexes (891), et procéder de la manière suivante : choisir » un sommet sur l'un de ces polyèdres, et chercher s'il existe d'au- » tres sommets qui, réunis à celui-là, puissent former un polygone ré- » gulier. » (J. Bertrand, *loc. cit.*) Ce polygone est alors une face possible d'un polyèdre d'espèce supérieure ayant mêmes sommets que le polyèdre convexe proposé. Si le polyèdre d'espèce supérieure existe, le nombre des polygones égaux partant ainsi d'un même sommet est le nombre de faces de son angle polyèdre; mais, pour qu'il en soit ainsi, ces polygones égaux doivent pouvoir former un angle polyèdre.

« Il est clair que cette construction appliquée au tétraèdre ne donne » rien.

» Chaque sommet de l'octaèdre appartient à deux carrés, lesquels ne » peuvent évidemment pas former les faces d'un polyèdre.

» Chaque sommet du cube peut former, avec deux autres sommets » convenablement choisis, un triangle équilatéral, et cela de trois ma- » nières différentes : mais ces trois triangles appartiennent à un tétraèdre » régulier.

» Chaque sommet du dodécaèdre régulier peut, de trois manières dif-» férentes, former des triangles équilatéraux avec des sommets apparte-» nant à deux des faces qui s'y réunissent; mais ces triangles ne feront » pas un angle polyèdre, deux d'entre eux n'ayant jamais d'arête com-» mune.

» Chaque sommet du dodécaèdre régulier peut également être consi-» déré comme le sommet de six triangles équilatéraux dont les autres » sommets appartiennent à des faces contiguës à celles qui contiennent » le sommet donné. Mais ces six triangles équilatéraux sont les faces de » deux tétraèdres réguliers.

» Chaque sommet du dodécaèdre est enfin le sommet commun de trois » pentagones réguliers dont les quatre autres sommets appartiennent au » même polyèdre. Ces trois pentagones ne forment pas les faces d'un » angle trièdre, parce que deux d'entre eux n'ont pas d'arête commune; » mais les pentagones étoilés qui ont les mêmes sommets forment un » angle trièdre, et leur ensemble, pour tout le polyèdre, forme le dodé-» caèdre régulier (de septième espèce).

» Chaque sommet de l'icosaèdre est le sommet commun de cinq trian-» gles équilatéraux ayant pour côtés les droites les plus courtes que l'on » puisse mener entre les sommets, après celles qui forment les côtés des » faces. Ces triangles forment l'icosaèdre de septième espèce.

» Chaque sommet de l'icosaèdre peut être considéré comme le sommet » commun de cinq pentagones réguliers de première espèce, dont les » quatre autres sommets appartiennent également à l'icosaèdre; ces pen-» tagones sont les faces du dodécaèdre de troisième espèce (à faces con-» vexes). Enfin, les mêmes sommets peuvent être considérés comme ap-» partenant à des pentagones étoilés qui forment le dodécaèdre (de » troisième espèce, à faces étoilées).

» Il n'y a donc en tout que quatre polyèdres étoilés, qui sont précisé-» ment ceux que M. Poinsot a découverts. » (J. BERTRAND, *loc. cit.*)

Avant d'examiner chacun de ces nouveaux polyèdres réguliers en particulier, cherchons une formule qui nous permette de déterminer exactement l'espèce de chacun d'eux.

PROBLÈME.

909. *Trouver l'espèce d'un polyèdre régulier.*

La formule d'Euler, $A + 2 = F + S$, démontrée au n° 700, n'est pas applicable à tous les polyèdres réguliers. Elle ne subsiste que pour ceux, d'ailleurs quelconques, dont la projection (903), faite sur une sphère de centre intérieur au polyèdre, recouvre exactement cette sphère sans aucune duplicature.

Pour généraliser la formule d'Euler et la rendre applicable aux nouveaux polyèdres réguliers, il faut tenir compte à la fois de l'espèce du polyèdre considéré (902), de l'espèce de ses faces (901) supposées toutes de même espèce, et de celle de ses angles polyèdres (902) supposés tous de même espèce. Ceci posé, projetons le polyèdre donné sur la sphère inscrite ou circonscrite, en prenant pour centre de projection le centre de cette sphère (903).

Soient n le nombre de côtés de l'une des faces du polyèdre, φ le nombre qui en marque l'espèce, a l'aire du polygone sphérique correspondant, s la somme des angles de ce polygone. Décomposons-le en triangles en joignant à ses sommets, par des arcs de grands cercles, la projection du centre de la face considérée. L'aire de l'un de ces triangles, ayant α pour somme de ses angles, sera, en prenant pour unités l'angle droit et le triangle tri-rectangle (850), $\alpha - 2$. L'aire a du polygone sphérique, qui contient n de ces triangles, sera $a = \Sigma\alpha - 2n$. Or $\Sigma\alpha$, c'est la somme des angles des n triangles ou la somme s des angles du polygone, augmentée de la somme des angles au sommet de ces mêmes triangles, somme qui est égale à 4φ, puisque l'espèce de la face projetée est φ (902). Il vient donc

$$a = s + 4\varphi - 2n.$$

En désignant par $a', a'', \ldots, n', n'', \ldots$, les quantités analogues à s et à n, on aura pour les autres faces

$$a' = s' + 4\varphi - 2n',$$
$$a'' = s'' + 4\varphi - 2n'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Soit E l'espèce du polyèdre ou le nombre exact de fois que sa projection recouvre la sphère dont l'aire est ici représentée par 8 (843); nous aurons

$$a + a' + a'' + \ldots = 8\text{E}$$

ou, en supposant F faces,

$$8\text{E} = (s + s' + s'' + \ldots) + 4\varphi.\text{F} - 2(n + n' + n'' + \ldots).$$

La somme $n + n' + n'' + \ldots$ est évidemment égale à 2A. Quant à la somme $s + s' + s'' + \ldots$, elle représente la somme des angles de tous les polygones sphériques obtenus. Mais la somme des angles réunis autour de chacun de leurs sommets, projections de toutes les faces de l'angle polyèdre correspondant, vaut σ fois 4 angles droits, σ marquant l'espèce des angles polyèdres (902). On aura donc, s'il y a S sommets,

$$s + s' + s'' + \ldots = 4\sigma\text{S}.$$

Il vient, par suite, en substituant et en simplifiant,

$$(1) \qquad \text{A} + 2\text{E} = \varphi.\text{F} + \sigma.\text{S}.$$

Si l'on fait dans cette formule $E = \varphi = \sigma = 1$, on retrouve la formule d'Euler.

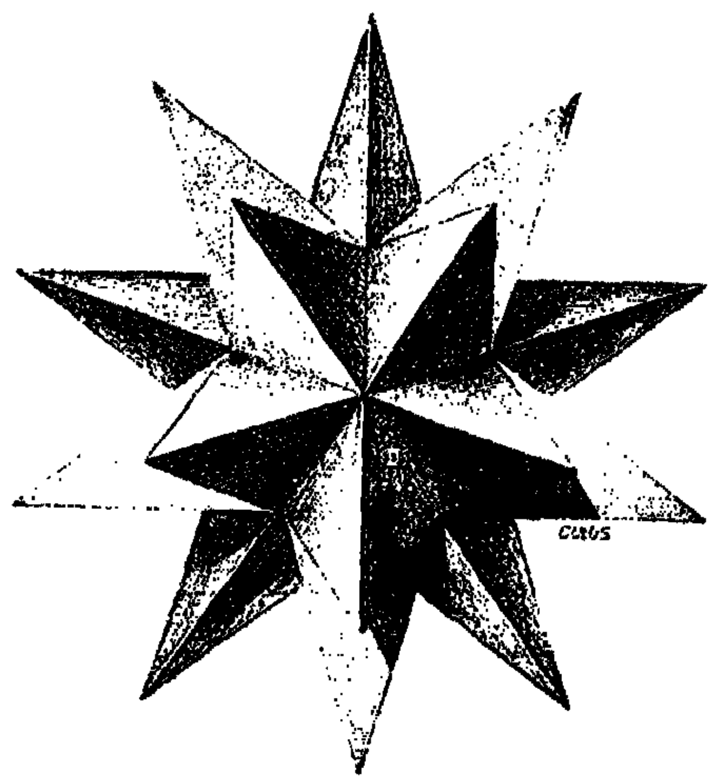
M. Poinsot (Mémoire cité) trouve $A + 2E = F + \sigma S$, parce qu'il ne tient pas compte de l'espèce de la face du polyèdre : cette différence explique les noms différents adoptés pour deux des nouveaux polyèdres.

La formule d'Euler complètement généralisée pour les polyèdres non réguliers d'espèces supérieures est la suivante :

$$A + 2E = \Sigma(\varphi.F) + \Sigma(\sigma.S).$$

910. *Dodécaèdre régulier de septième espèce* (Poinsot, quatrième espèce).

Fig. 469.



On l'obtient à l'aide de pentagones étoilés ou de seconde espèce, formant des angles trièdres do première espèce autour de chaque sommet d'un dodécaèdre régulier ordinaire (908). Ce nouveau polyèdre (*fig.* 469) a donc vingt sommets (893). En désignant par m le nombre des arêtes d'un de ses angles polyèdres et par n le nombre des côtés d'une de ses faces, on a (707)

$$2A = mS \quad \text{et} \quad 2A = nF,$$

d'où l'on déduit (en faisant $S = 20$, $m = 3$, $n = 5$)

$$A = 30 \quad \text{et} \quad F = 12.$$

La formule (1) donne ensuite, en y faisant $\sigma = 1$, $\varphi = 2$, $A = 30$, $F = 12$, $S = 20$,

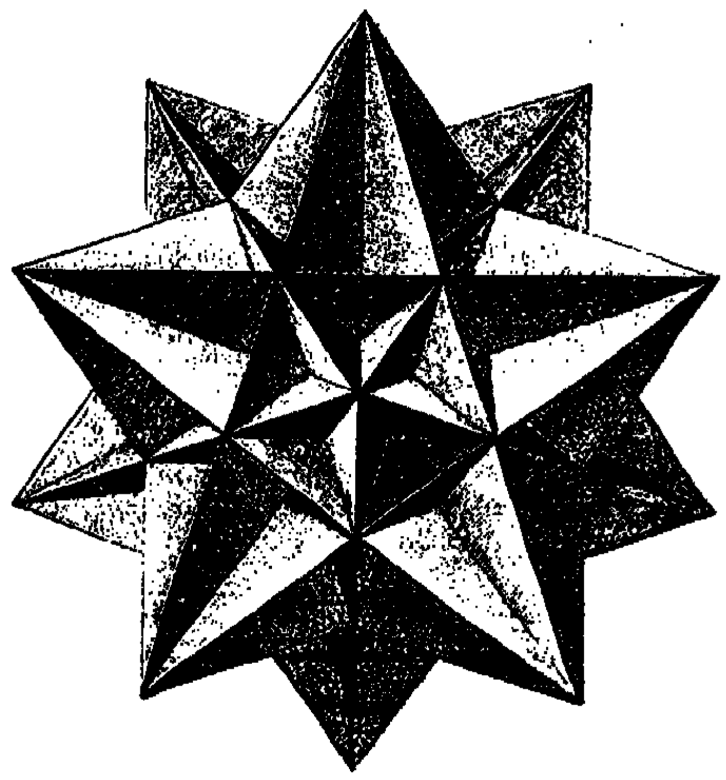
$$2E = 24 + 20 - 30 \quad \text{ou} \quad E = 7.$$

Ce nouveau dodécaèdre est donc de septième espèce.

911. *Icosaèdre régulier de septième espèce.*

On l'obtient (908) à l'aide de triangles équilatéraux formant des angles pentaèdres de seconde espèce autour de chaque sommet d'un icosaèdre régulier ordinaire. Ce nouveau polyèdre (*fig.* 470) a donc 12 sommets (893).

Fig. 470.



En faisant $S = 12$, $m = 5$, $n = 3$, dans les équations $2A = mS$ et $2A = nF$, on trouve

$$A = 30 \quad \text{et} \quad F = 20.$$

La formule (1) donne ensuite, en y faisant $\varphi = 1$ et $\sigma = 2$,

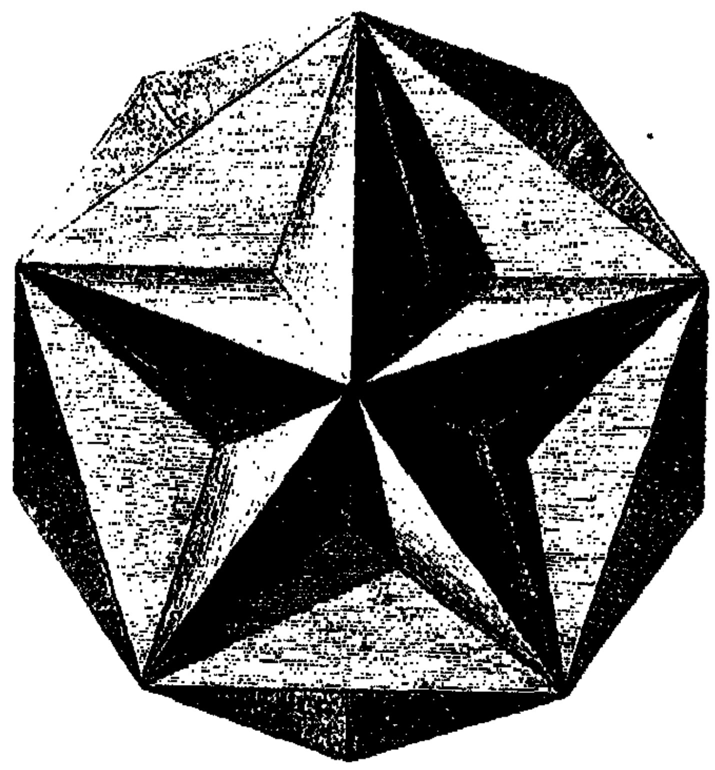
$$2E = 20 + 24 - 30 \quad \text{ou} \quad E = 7.$$

Ce nouvel icosaèdre est donc de septième espèce.

912. *Dodécaèdre régulier de troisième espèce, à faces convexes.*

On l'obtient (908) à l'aide de pentagones réguliers ordinaires formant des angles pentaèdres de seconde espèce autour de chaque sommet d'un icosaèdre régulier ordinaire. Ce nouveau polyèdre ayant 12 sommets, les

Fig. 471.



équations $2A = mS$ et $2A = nF$ donnent (pour $m = 5$ et $n = 5$)

$$A = 30 \quad \text{et} \quad F = 12.$$

La formule (1) donne ensuite, pour $\gamma = 1$ et $\sigma = 2$,

$$2E = 12 + 24 - 30 \quad \text{ou} \quad E = 3.$$

Ce nouveau dodécaèdre à faces convexes (*fig.* 471) est donc de troisième espèce.

913. *Dodécaèdre régulier de troisième espèce, à faces étoilées* (Poinsot, seconde espèce).

On l'obtient (908) à l'aide de pentagones étoilés formant des angles pentaèdres de première espèce autour de chaque sommet d'un icosaèdre régulier ordinaire. Ce nouveau polyèdre a donc 12 sommets (893). Les équations $2A = mS$ et $2A = nF$ donnent alors, pour $m = 5$ et $n = 5$,

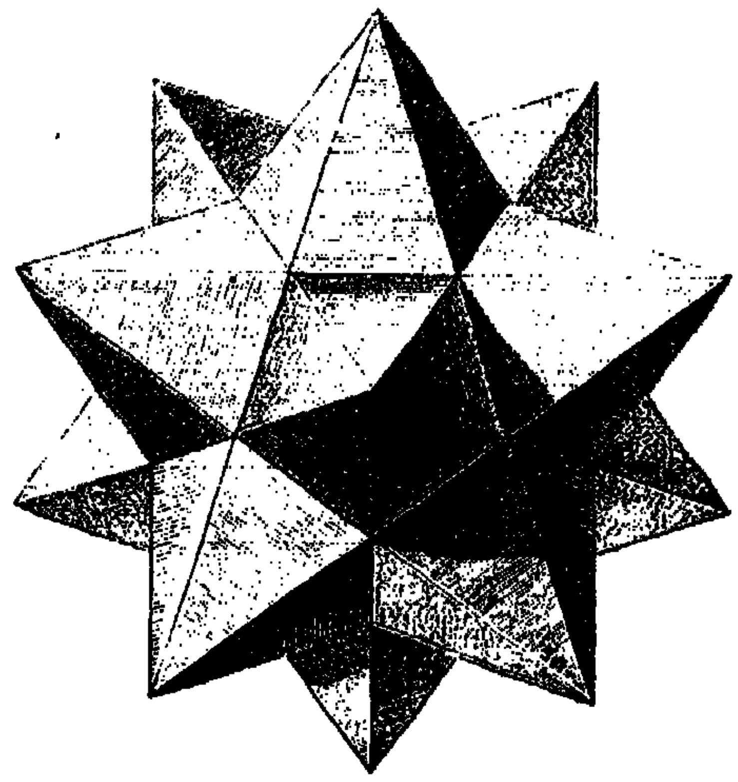
$$A = 30 \quad \text{et} \quad F = 12.$$

La formule (1) donne ensuite, pour $\gamma = 2$ et $\sigma = 1$,

$$2E = 24 + 12 - 30 \quad \text{ou} \quad E = 3.$$

Ce nouveau dodécaèdre à faces étoilées (*fig.* 472) est donc aussi de troisième espèce.

Fig. 472.



914. Voici le tableau des éléments des quatre nouveaux polyèdres réguliers.

	F	n	γ	S	m	σ	A	E
DODÉCAÈDRE RÉGULIER DE SEPTIÈME ESPÈCE.	12	5	2	20	3	1	30	7
ICOSAÈDRE RÉGULIER DE SEPTIÈME ESPÈCE.	20	3	1	12	5	2	30	7
DODÉCAÈDRE RÉGULIER DE TROISIÈME ESPÈCE, A FACES CONVEXES.	12	5	1	12	5	2	30	3
DODÉCAÈDRE RÉGULIER DE TROISIÈME ESPÈCE, A FACES ÉTOILÉES.	12	5	2	12	5	1	30	3

On voit que les nouveaux polyèdres sont *conjugués* deux à deux, comme les polyèdres réguliers ordinaires (893).

915. Pour familiariser davantage le lecteur avec les nouveaux polyèdres,

nous terminerons en indiquant ainsi leur mode de construction d'après Cauchy (905), parce qu'il fait peut-être mieux image que celui adopté plus haut (908).

« En prolongeant dans le dodécaèdre ordinaire les arêtes qui forment les côtés des douze pentagones, on obtient le dodécaèdre étoilé (de » troisième espèce).

« Si, dans le dodécaèdre ordinaire, on prolonge le plan qui contient » chaque face jusqu'à la simple rencontre des plans des cinq faces qui » entourent la face opposée, on obtiendra le dodécaèdre de troisième es- » pèce, compris comme le dodécaèdre ordinaire sous des pentagones de » première espèce.

» Enfin, si l'on prolonge les arêtes qui, dans ce dodécaèdre de troisième » espèce, forment les côtés des douze pentagones, on obtiendra le dodé- » caèdre de septième espèce.

» On obtiendra l'icosaèdre de septième espèce, en prolongeant chaque » face de l'icosaèdre ordinaire jusqu'à la rencontre des plans des trois » triangles qui entourent la face opposée à celle que l'on considère. »

Figures homothétiques dans l'espace.

916. Étant donné un système de points A, B, C,..., situés d'une manière quelconque dans l'espace (*fig.* 223 et 224), si, sur les rayons SA, SB, SC,..., issus d'un point S pris à volonté, on prend à partir de ce point des segments SA', SB', SC',..., tels que

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\ldots=k,$$

k étant un nombre quelconque, on dit que le nouveau système de points A', B', C',..., est *homothétique* au système primitif ABC.... Suivant que le *rapport* k *d'homothétie* est positif ou négatif, les points homologues tels que A et A' sont situés d'un même côté ou de côtés différents par rapport au *centre* S *d'homothétie*, et les deux systèmes ABC..., A'B'C'..., sont dits *homothétiques directs* ou *homothétiques inverses*.

La définition de l'homothétie est donc la même pour les figures de l'espace que pour les figures planes (367). Toutefois, il n'est plus vrai de dire ici, comme dans le plan, que l'homothétie inverse donne, abstraction faite de la position, les mêmes figures que l'homothétie directe; F étant une figure quelconque de l'espace, si l'on construit, à l'aide d'un centre S arbitraire, la figure homothétique directe F' suivant le rapport k, et la figure homothétique inverse F_1 suivant le rapport $-k$, les deux figures F' et F_1 seront *symétriques* par rapport au point S (670). Or, on ne peut plus ici faire coïncider deux pareilles figures (685), tandis que dans le plan une rotation de 180 degrés autour du point S entraînait la coïncidence (367).

917. *La figure homothétique d'une sphère est une sphère;* la démonstration est la même que celle du nº 368. Par suite, comme un cercle peut toujours être considéré comme l'intersection de deux sphères, *la figure homothétique d'une circonférence par rapport à un point quelconque de l'espace est une circonférence.*

918. Le théorème du nº 369 et sa démonstration subsistent. *La figure homothétique d'une droite est une droite parallèle à la première, et l'angle de deux droites est égal à celui de leurs droites homologues* (370, 371).

La figure homothétique d'un plan est un plan parallèle au premier, car si l'on considère dans le plan donné une droite qui tourne autour d'un point A, dans chacune de ses positions cette droite aura pour homothétique une droite parallèle passant par un point fixe A' homothétique de A. Il résulte de là : 1° qu'*un plan qui passe par le centre d'homothétie est à lui-même son homothétique;* 2° que *l'angle de deux plans est égal à l'angle de leurs homothétiques.*

Les tangentes en deux points homologues de deux courbes homothétiques sont parallèles, comme limites de sécantes parallèles. Par suite (527), *les plans tangents en deux points homologues de deux surfaces homothétiques sont parallèles.*

919. *Deux systèmes sont homothétiques, s'il existe dans l'espace deux points O et O' tels, que les droites qui joignent le point O aux divers points du premier système, et les droites qui joignent le point O' aux divers points du second système, soient parallèles et dans un même rapport k;* la démonstration est la même qu'au nº 373.

Il résulte de là que *deux sphères quelconques sont à la fois homothétiques directes et homothétiques inverses* (375); les deux centres d'homothétie divisent harmoniquement la ligne des centres des deux sphères; ces centres sont en outre les sommets des deux cônes qu'on peut circonscrire aux deux sphères. Lorsque les deux sphères sont tangentes, leur point de contact est un centre d'homothétie, *directe* si le contact est *intérieur*, *inverse* si le contact est *extérieur*.

920. Le théorème du nº 376 et sa démonstration subsistent. Ainsi, *deux systèmes homothétiques à un troisième sont homothétiques entre eux, et les trois centres d'homothétie sont sur une même ligne droite,* qu'on nomme *axe d'homothétie* des trois systèmes.

Trois sphères considérées deux à deux ont trois centres d'homothétie directe et trois centres d'homothétie inverse (919). Elles ont donc quatre axes d'homothétie : un *axe d'homothétie directe* qui contient les trois centres d'homothétie directe, et trois *axes d'homothétie inverse* qui renferment chacun deux centres d'homothétie inverse et le centre direct qui répond au troisième centre inverse. Ces *quatre axes d'homothétie* sont ceux des trois cercles (379) que l'on obtient en coupant les trois sphères par le plan qui passe par leurs centres.

921. *Lorsque quatre systèmes* P, P', P'', P''', *sont homothétiques deux à deux, leurs six centres d'homothétie sont situés dans un même plan.*

En effet, soient respectivement O_1, O_2, O_3, les centres d'homothétie de P et P', de P et P'', de P et P'''; le plan $O_1O_2O_3$ est à lui-même son homologue dans les systèmes P et P', puisqu'il contient leur centre O_1; il est aussi à lui-même son homologue dans les systèmes P et P'', puisqu'il contient leur centre O_2. Donc, ce même plan est encore à lui-même son homologue dans les systèmes P' et P'' (920); et par suite, il contient leur centre d'homothétie. On prouverait de même que ce plan passe par les centres d'homothétie de P' et P''', et de P'' et P'''.

Ces six centres d'homothétie sont les sommets d'un quadrilatère complet dont les côtés sont les quatre axes d'homothétie des quatre systèmes proposés pris trois à trois. Le plan de ce quadrilatère reçoit le nom de *plan d'homothétie* des quatre systèmes P, P', P'', P'''.

922. Considérons en particulier le *cas de quatre sphères*. Comme deux sphères sont à la fois homothétiques directes et homothétiques inverses, on aura *douze centres d'homothétie*, dont *six directs* et *six inverses*. Il est aisé de voir qu'il y a *huit plans d'homothétie*. En effet, imaginons le tétraèdre dont les sommets sont les centres des quatre sphères; sur chaque face de ce tétraèdre, il y a six centres d'homothétie, trois directs et trois inverses (920). Considérons l'un O des six centres qui sont sur l'une des faces: ce point O appartient à deux droites A et B dont chacune passe par deux autres centres de la même face. D'ailleurs, ce même point O est commun à une autre face du tétraèdre, et par suite il appartient également à deux autres droites C et D situées sur cette seconde face. En combinant les deux droites A et B de la première face avec les deux droites C et D de la seconde, on obtient quatre plans, AOC, AOD, BOC, BOD, dont chacun passant par cinq centres d'homothétie renferme nécessairement le sixième centre correspondant. Ainsi, par chaque centre O de la première face, passent quatre plans d'homothétie; mais chacun de ces plans est commun à trois centres de cette même face. Donc le nombre total des plans d'homothétie est égal à huit.

923. Deux figures de l'espace sont *semblables* lorsque, par un déplacement convenable, on peut amener la seconde sur l'une des homothétiques directes de la première. Or, d'après le n° 920, pour avoir tous les systèmes homothétiques à un système donné, il n'est pas nécessaire de faire varier le centre: il suffit, en prenant un centre arbitraire, de faire varier k de a à ∞ (377). Donc, on obtiendra toutes les figures semblables à une figure donnée, en construisant, avec un centre pris à volonté, les surfaces homothétiques qui répondent à toutes les valeurs du rapport k, depuis zéro jusqu'à l'infini.

Ainsi *deux sphères quelconques sont semblables* (917).

La seule figure semblable à une surface conique est cette surface conique elle-même; car si l'on prend le sommet O pour centre d'homothétie, l'homologue A' d'un point quelconque A de la surface conique proposée est situé sur la génératrice OA (370).

Enfin, *deux surfaces cylindriques sont homothétiques lorsque leurs génératrices sont parallèles, et leurs directrices deux courbes homothétiques;* car la figure homothétique d'une droite est une droite parallèle. Par suite, *les sections par un même plan de deux cylindres homothétiques sont deux courbes homothétiques* dont le centre est à la rencontre du plan sécant et de la parallèle aux génératrices menée par le centre d'homothétie des deux cylindres (374).

Pôle et plan polaire par rapport à la sphère.

924. *Un point O et une sphère C étant situés d'une manière quelconque dans l'espace, si par le point O on mène une sécante quelconque OFE (fig. 215 et 216, n° 352), et qu'on détermine le conjugué harmonique I du point O par rapport à EF, le lieu géométrique du point I, lorsque la sécante tourne autour du point O, est un plan P perpendiculaire au diamètre AB qui passe par le point O*; car, dans chaque plan mené par OC, le lieu est une droite (352) perpendiculaire au diamètre AB et menée par le point H conjugué harmonique de O par rapport à ce diamètre.

On dit que le point O est le pôle du plan P et que le plan P est le *plan polaire* du point O par rapport à la sphère C.

Le plan polaire P d'un point O est évidemment *le lieu des polaires du point O par rapport à tous les cercles de la sphère dont les plans passent par O.*

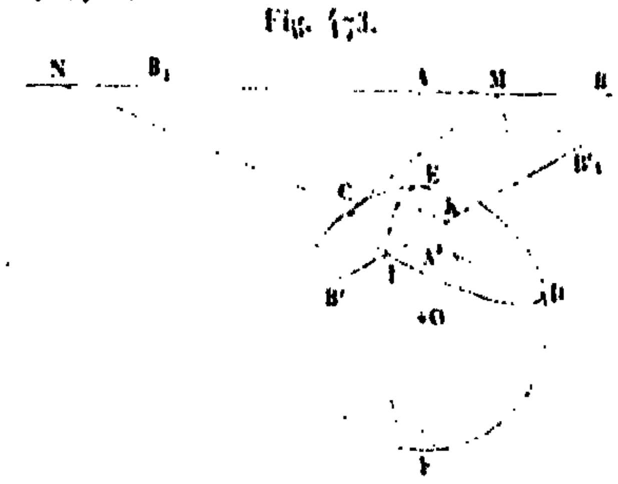
Le rayon de la sphère est moyen proportionnel entre les distances du centre au pôle et au plan polaire. La discussion des positions du pôle et du plan polaire par rapport à la sphère est la même qu'au n° 353. Nous remarquerons seulement que, *lorsque le pôle est extérieur à la sphère, le plan polaire est le plan de la circonférence de contact du cône qui est circonscrit à la sphère et qui a le pôle pour sommet.*

925. *Les plans polaires de tous les points d'un plan passent par le pôle de ce plan;* et inversement, *les pôles de tous les plans qui passent par un même point sont sur le plan polaire de ce point.* La démonstration du n° 354 subsiste, seulement XY (*fig.* 217) représente alors la projection sur le plan considéré, de la droite CO qui joint un point quelconque O de ce plan au centre C de la sphère.

Il résulte de là que, *si chacun des points d'un plan P est pris pour sommet d'un cône circonscrit à la sphère, les plans des cercles de contact passent tous par un même point p pôle du plan P*; inversement, *si, suivant chacun des cercles de la sphère dont les plans passent par un même point p, on circonscrit un cône à la sphère, les sommets de ces cônes sont tous dans un même plan P, qui est le plan polaire du point p.*

920. Soient une sphère dont le centre est O et une droite quelconque AB (*fig.* 473). Prenons le pôle A' de AB par rapport au grand cercle ECFD situé dans le plan AOB, et par le point A' élevons la perpendiculaire A'B' à ce plan AOB; on voit que réciproquement la droite AB est la perpendiculaire au plan OA'B' élevée par le pôle A de A'B' par rapport au grand cercle EIFK situé dans le plan OA'B'. Les deux droites AB, A'B', ont reçu, d'après cela, le nom de *droites réciproques* par rapport à la sphère O.

Fig. 473.



Quand deux droites sont réciproques par rapport à une sphère, chacune d'elles est le lieu des pôles de tous les plans passant par l'autre; ou, ce qui revient au même, *chacune d'elles est l'intersection commune des plans polaires des divers points de l'autre.* En effet, le plan polaire d'un point quelconque M de AB est perpendiculaire au plan FCE, et sa trace sur ce plan est la polaire du point M par rapport au cercle FCE. Cette trace passe donc (354) par le point A' qui est le pôle de AB par rapport au cercle FCE. Par suite, le plan polaire CID du point M renferme la droite A'B'.

Il résulte de là que, *lorsque deux plans sont tangents à la sphère, leur intersection est réciproque de la droite qui unit les deux points de contact,* car ces points de contact sont les pôles des plans tangents.

Remarquons enfin que *la droite AB est le lieu des pôles de sa réciproque A'B' par rapport à tous les cercles de la sphère dont les plans passent par A'B'.* En effet, A' étant le pôle de la droite AB par rapport au cercle FCE, si N est le point où la droite AB rencontre le diamètre CD d'un cercle quelconque CID conduit par A'B', les points C, A', D, N, forment un système harmonique : donc N est le pôle de A'B' par rapport au cercle CD.

Plan radical de deux sphères.

927. Si, par un point M de l'espace, on mène à une sphère O une sécante arbitraire qui rencontre la sphère en A et B, le produit MA.MB a une valeur indépendante de la direction de la sécante. Ce produit constant qui est positif lorsque le point M est extérieur à la sphère, négatif lorsque le point M est intérieur, et nul lorsque le point M est sur la surface sphérique, prend le nom de *puissance du point* M *par rapport à la sphère* O.

La puissance d'un point par rapport à une sphère est égale, en grandeur et en signe, à l'excès du carré de la distance de ce point au centre sur le carré du rayon (383). *Lorsque le point est extérieur à la sphère, sa puissance est égale au carré de la tangente menée à la sphère par ce point.*

Quand deux sphères se coupent orthogonalement, le carré du rayon de chacune d'elles est égal à la puissance de son centre par rapport à l'autre sphère (384).

928. *Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux sphères est un plan perpendiculaire à la ligne des centres* (385).

Ce plan a reçu le nom de *plan radical* des deux sphères. — *Lorsque deux sphères se coupent, leur plan radical est le plan du cercle commun;* lorsque deux sphères se touchent, leur plan radical est le plan tangent au point commun. — Le plan radical de deux sphères concentriques disparaît à l'infini.

Le plan radical de deux sphères est le lieu des points d'où l'on peut leur mener des tangentes égales (386). *C'est aussi le lieu des centres des sphères qui coupent les deux premières orthogonalement* (387).

929. *Les plans radicaux de trois sphères considérées deux à deux passent par une même droite* (388). Cette droite est la perpendiculaire au plan des centres des trois sphères, élevée par le centre radical des trois grands cercles contenus dans ce plan; elle a reçu le nom d'*axe radical* des trois sphères.

Lorsque les centres des trois sphères sont en ligne droite, l'axe radical se transporte à l'infini : il peut cependant arriver que les trois plans radicaux coïncident, auquel cas les trois sphères ont un plan radical au lieu d'un axe radical.

930. Enfin, les *six plans radicaux de quatre sphères considérées deux à deux passent par un même point*. Car le point où l'axe radical des trois premières sphères rencontre le plan radical de l'une de ces sphères et de la quatrième, est d'égale puissance par rapport aux quatre sphères; il est

donc commun aux six plans radicaux des sphères considérées deux à deux, et aussi aux quatre *axes radicaux* des sphères considérées trois à trois.

Ce point est dit le *centre radical* des quatre sphères. Il est unique, à moins que les centres des quatre sphères ne soient dans un même plan; dans ce cas, il peut arriver que le centre radical disparaisse à l'infini, ou bien qu'il soit remplacé par un axe radical, ou même par un plan radical si les centres des quatre sphères sont en ligne droite.

931. Les propriétés des nos 391, 392, 393, 394, subsistent ainsi que leurs démonstrations. Ainsi :

Les plans tangents en deux points anti-homologues de deux sphères se coupent suivant une droite située dans le plan radical des deux sphères.

Le plan radical d'une sphère et d'un plan est ce plan lui-même, et ce sont les extrémités du diamètre perpendiculaire au plan qui jouent alors le rôle de centres de similitude.

Le plan radical de deux sphères est à égale distance des deux plans polaires de l'un quelconque des centres de similitude.

Le plan radical d'une sphère et d'un point est à égale distance de ce point et de son plan polaire par rapport à la sphère.

Sphère tangente à quatre sphères données.

932. Désignons par A, B, C, D, les centres des quatre sphères données, et cherchons à déterminer la sphère ω qui enveloppe les sphères A, B, C, D, et la sphère ω' qui est enveloppée par ces mêmes sphères (402).

Supposons le problème résolu : soient a et a' les points de contact des sphères ω et ω' avec la sphère A, b et b' leurs points de contact avec la sphère B, c et c' avec la sphère C, d et d' avec la sphère D. Tout revient à trouver les cordes aa', bb', cc', dd'. Ces cordes sont déterminées par les deux propriétés suivantes :

1° *Chacune des cordes aa', bb', cc', dd', passe par le centre radical des quatre sphères données* A, B, C, D. — En effet, a étant le centre de similitude directe des sphères ω et A, et a' le centre de similitude inverse des sphères ω' et A, la corde aa' doit passer par le centre de similitude inverse S des sphères ω et ω' (920). On verrait de même que ce point S appartient aussi aux cordes bb', cc' et dd'. Un raisonnement analogue montre que ab et $a'b'$ concourent au centre de similitude directe C' des sphères A et B; donc, les cordes aa' et bb' des sphères A et B sont anti-homologues (391, 931), et leur point d'intersection S appartient au plan radical des sphères A et B. On verrait de même que ce point de concours S de aa', bb', cc', dd', appartient à chacun des plans radicaux des sphères données considérées deux à deux; il est donc le centre radical de ces sphères (930).

2° *Chacune des cordes aa', bb', cc', dd', contient le pôle, par rapport à sa sphère, du plan de similitude directe des quatre sphères données.* — En effet, puisque S est un centre de similitude des sphères ω et ω', les deux cordes ab et $a'b'$ sont anti-homologues, et leur point de concours C doit appartenir au plan radical des deux sphères ω et ω'. On verrait de même que ce plan radical passe par chacun des centres de similitude directe des quatre sphères données considérées deux à deux. Donc, le plan radical des sphères ω et ω' coïncide avec le plan de similitude directe (921, 922) des sphères A, B, C, D. D'après cela, ce plan doit contenir l'intersection des deux plans tangents à la sphère A aux deux points anti-homologues a et a' (931), c'est-à-dire la droite réciproque de la corde aa' par rapport à la sphère A (926); donc, inversement, la corde aa' doit renfermer le pôle p, par rapport à la sphère A, du plan de similitude considéré.

On conclut de là la règle suivante : *Déterminez le centre radical* S *et le plan de similitude directe des quatre sphères données* A, B, C, D; *prenez par rapport à chacune d'elles les pôles p, q, r, s, de ce plan, et menez les droites* Sp, Sq, Sr, Ss, *qui rencontreront les sphères* A, B, C, D, *aux points de contact a et a', b et b', c et c', d et d'; il ne restera plus alors qu'à faire passer une sphère ω par les quatre points a, b, c, d, et une sphère ω' par les quatre points a', b', c', d'.*

En remplaçant le plan de similitude directe par chacun des sept autres plans de similitude (922), on obtiendrait les sept autres couples de sphères tangentes. Le problème admet donc seize solutions.

La construction précédente s'applique à tous les cas particuliers qu'on obtient en supposant qu'une ou plusieurs des sphères A, B, C, D, se réduisent à des points ou à des plans.

933. Supposons que les trois sphères A, B, C, restant fixes, la sphère D varie. Le point S, centre radical des quatre sphères (932), décrira l'axe radical des trois sphères fixes A, B, C. Le plan de similitude directe des quatre sphères tourne alors autour de l'axe de similitude directe des trois sphères A, B, C; par suite, le point p décrit la droite réciproque de cet axe de similitude (926), droite qui est perpendiculaire au plan des centres des sphères A, B, C. La droite Sp s'appuie donc constamment sur deux droites perpendiculaires au plan des centres des sphères A, B, C, et le point a ne sort pas du plan déterminé par ces perpendiculaires. Le lieu du point a est donc le cercle suivant lequel ce plan coupe la sphère A.

On obtient ainsi ce théorème remarquable dû à Dupuis :

Quand une sphère variable ω touche constamment de la même manière trois sphères fixes A, B, C, *chacun des trois points de contact décrit un petit cercle de la sphère fixe correspondante.*

934. Les auteurs qui se sont occupés de la construction donnée au n° 932 [Gaultier (de Tours), *Journal de l'École Polytechnique*, t. IX

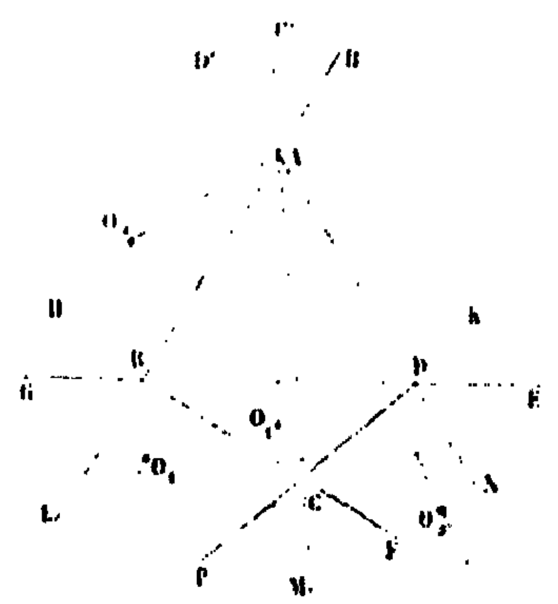
Heegmann, *Mémoires de l'Académie de Lille*, 1823; J.-A. Serret (*), *Journal de Crelle*, t. XXXVII, etc.] ont fondé leur démonstration sur le théorème de Dupuis. Au lieu de suivre cette marche qui rompt l'analogie avec la solution du problème correspondant de Géométrie plane (402), nous avons tenu à conserver complétement cette analogie et à traiter directement la question sans le secours du théorème de Dupuis, qui n'est plus alors qu'un corollaire immédiat de la solution trouvée. Le raisonnement y gagne d'ailleurs en simplicité.

Sphère tangente à quatre plans donnés.

935. Cette question n'est qu'un cas particulier de la précédente, mais elle est assez importante pour qu'il soit utile de la traiter directement.

Supposons que les quatre plans proposés forment un tétraèdre ABCD (*fig.* 474), et cherchons combien il peut exister de sphères tangentes aux quatre faces de ce tétraèdre indéfiniment prolongées, c'est-à-dire de points à égale distance de ces quatre faces.

Fig. 474.



Le lieu des points à égale distance des deux faces ABC, ABD, prolongées, est l'ensemble des deux plans bissecteurs α et α' des angles dièdres DABC, DABH, formés par ces faces. De même, le lieu des points à égale distance des deux faces ABC, ACD, est l'ensemble des deux plans bissecteurs β et β' des dièdres qu'elles forment. Les deux plans β et β' coupent les deux plans α et α' suivant quatre droites partant du point A. L'une d'elles AO_1, intersection des plans α et β, tombe dans l'intérieur du té-

(*) Nous engageons le lecteur familiarisé avec la Géométrie analytique, à lire l'analyse aussi élégante qu'instructive de M. J.-A. Serret.

traèdre ABCD; les trois autres tombent en dehors. L'intersection AO_2 des plans α et β' perce le plan BCD dans la partie EDCF; l'intersection AO_3 des plans α' et β perce le plan BCD dans la partie HBDK; enfin, l'intersection AO_4 des plans α' et β' perce le plan BCD dans la partie GBCP.

Les quatre droites AO_1, AO_2, AO_3, AO_4, ainsi obtenues, étant le lieu des points de l'espace à égale distance des trois faces ABC, ABD, ACD, les plans bissecteurs des dièdres formés par les faces ABD, ACD, passeront par ces droites. Les centres des sphères tangentes aux quatre plans donnés ne peuvent donc se trouver que sur les quatre droites déterminées. Mais ces centres doivent aussi appartenir aux deux plans bissecteurs γ et γ' des dièdres formés par les faces ABC, BCD, prolongées; et comme un plan et une droite ne peuvent avoir qu'un point commun, il ne peut y avoir plus de huit points d'intersection entre les quatre droites considérées et les deux plans γ et γ'. En outre, les points ainsi trouvés étant à égale distance des quatre faces du tétraèdre ABCD, sont contenus dans les plans bissecteurs des autres dièdres à la base. Il ne peut donc exister plus de *huit* sphères tangentes aux quatre plans donnés. Voyons comment elles sont placées.

La sphère tangente intérieurement ou *inscrite* dans le tétraèdre existe toujours; car le plan γ faisant un angle aigu avec le plan BCD, dans le sens CD, rencontre nécessairement la droite AO_1 dans l'intérieur du tétraèdre.

Les quatre sphères tangentes extérieurement à l'une des faces du tétraèdre et aux prolongements des trois autres, ou sphères *ex-inscrites*, existent également toujours. Car le plan γ' coupe nécessairement la droite AO_1 au-dessous du plan BCD, à l'intérieur de l'espece de tronc de pyramide ouvert formé par ce plan et les prolongements des trois autres faces du tétraèdre. De même, si δ et δ' sont les plans bissecteurs des dièdres suivant l'arête CD, le plan extérieur δ' coupe AO_2 en un point situé entre A et O_2, centre de la sphère ex-inscrite qui repose sur la face ACD. Si ε et ε' sont les plans bissecteurs des dièdres suivant BD, le plan ε' coupe AO_3 au centre de la sphère ex-inscrite qui repose sur la face ABD. Enfin, le plan γ' coupe AO_4 au centre de la sphère ex-inscrite qui s'appuie sur la face ABC.

Il reste à considérer les sphères tangentes aux seuls prolongements des faces. Ces sphères ne peuvent être contenues que dans les espèces de *combles* prismatiques ayant pour faîte les arêtes du tétraèdre. Considérons les deux combles MCFNDE, GBHD'AC', qui se terminent aux deux arêtes opposées CD et AB. Le plan bissecteur δ coupera AO_2, soit au-dessous du plan BCD, soit au delà de A et au-dessous de D'AC'. Donc, s'il existe une sphère tangente dans l'un des deux combles répondant à deux arêtes opposées du tétraèdre, elle ne pourra pas exister dans l'autre. Par suite, les six combles prismatiques ayant pour faîtes les six arêtes du tétraèdre ne pourront renfermer que trois sphères tangentes; ce qui conduit bien au nombre total de huit sphères tangentes indiqué plus haut.

Les trois dernières n'existeront pas toujours, car il peut arriver que le plan δ, par exemple, soit parallèle à la droite AO_1 : le centre de la sphère correspondante se transportant alors à l'infini, elle cessera d'exister.

Soient a, b, c, d, les aires des faces du tétraèdre opposées aux sommets A, B, C, D, et V son volume; soient r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, le rayon de la sphère inscrite et ceux des sphères ex-inscrites tangentes aux faces b, c, d, a. Joignons le centre de chacune d'elles aux sommets du tétraèdre, et exprimons son volume en fonction de ceux des quatre tétraèdres obtenus. Ces tétraèdres seront tous additifs pour la sphère inscrite; et pour chaque sphère ex-inscrite, celui qui repose sur la face à laquelle elle est tangente devient soustractif, tandis que les autres restent additifs. On aura donc successivement

$$V = \frac{1}{3} r_1 (a+b+c+d), \quad V = \frac{1}{3} r_2 (a+c+d-b), \ldots,$$

d'où l'on déduira

$$r_1 = \frac{3V}{a+b+c+d}, \quad r_2 = \frac{3V}{a+c+d-b}, \quad r_3 = \frac{3V}{a+b+d-c},$$

$$r_4 = \frac{3V}{a+b+c-d}, \quad r_5 = \frac{3V}{b+c+d-a}.$$

Toutes ces valeurs positives et finies, puisque chaque face d'un tétraèdre est plus petite que la somme des trois autres, prouvent de nouveau l'existence certaine des cinq premières sphères tangentes. On passe de la valeur de r_1 à l'une quelconque des autres, en changeant le signe de la face sur laquelle s'appuie la sphère ex-inscrite dont on cherche le rayon, parce que les centres de cette sphère et de la sphère inscrite sont de côtés différents par rapport à cette face et du même côté par rapport aux trois autres.

Soient maintenant ρ_1, ρ_2, ρ_3, les rayons des trois dernières sphères. Le centre de l'une d'elles, comparé à celui de la sphère inscrite, se trouve d'un même côté par rapport à deux des faces du tétraèdre et de côtés différents par rapport aux deux autres faces. Si la sphère considérée est dans le comble MCFNDE, on aura

$$V = \frac{1}{3} \rho_1 [(c+d) - (a+b)];$$

si elle est dans le comble opposé GBHD'AC', on aura

$$V = \frac{1}{3} \rho_1 [(a+b) - (c+d)];$$

De même, s'il s'agit de la sphère située dans le comble LBHNDK ou dans son opposé PCFB'AD', on aura

$$V = \frac{1}{3}\rho_2[(b+d)-(a+c)] \quad \text{ou} \quad V = \frac{1}{3}\rho_2[(a+c)-(b+d)].$$

Enfin, pour la sphère située dans le comble MCPLBG ou dans son opposé EDKB'AC', il viendra

$$V = \frac{1}{3}\rho_3[(b+c)-(a+d)] \quad \text{ou} \quad V = \frac{1}{3}\rho_3[(a+d)-(b+c)].$$

Il sera facile de décider entre ces valeurs; car si l'on suppose que les quatre faces du tétraèdre, rangées par ordre de grandeur, donnent la série a, b, c, d, on aura

$$a+b > c+d, \quad a+c > b+d,$$

c'est-à-dire que les rayons des deux premières sphères auront les valeurs finies et positives

$$\rho_1 = \frac{3V}{(a+b)-(c+d)}, \quad \rho_2 = \frac{3V}{(a+c)-(b+d)}.$$

Les autres valeurs de ρ_1 et de ρ_2 étant négatives, devront être rejetées. Si la somme $b+c$ n'est pas égale à la somme $a+d$, elle sera plus grande ou plus petite, et l'on n'aura aussi pour ρ_3 qu'une seule valeur finie et positive qui sera

$$\rho_3 = \frac{3V}{\pm[(b+c)-(a+d)]}.$$

On prendra en dehors de la parenthèse le signe + ou le signe —, suivant qu'on aura $b+c >$ ou $< a+d$.

Si $b+c = a+d$, ρ_3 est infini, et l'une des trois sphères seulement possibles disparaît.

Si l'on a à la fois $a=b$ et $c=d$, auquel cas la condition précédente est encore satisfaite, ρ_2 devient infini, et des trois sphères seulement possibles deux disparaissent.

Enfin, si l'on a à la fois $a=b$, $c=d$, et $a+b=c+d$, c'est-à-dire $a=b=c=d$, ρ_1 devient infini comme ρ_2 et ρ_3 et les trois sphères seulement possibles disparaissent toutes les trois.

En résumé, *les huit sphères tangentes se réduisent à sept, si la somme de deux des faces du tétraèdre est égale à la somme des deux autres faces; elles se réduisent à six, si en outre chaque face du premier groupe est équivalente à une face du second groupe; elles se réduisent à cinq si les quatre faces du tétraèdre sont équivalentes.*

936. Les plans proposés peuvent avoir quelques-unes de leurs intersections parallèles; ils peuvent être parallèles entre eux en tout ou en partie

en s'appuyant sur ce qui précède, il sera facile de traiter directement ces cas particuliers.

Complément de la théorie des figures inverses et de la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques.

937. La définition du n° 395 s'applique à des points A, B, C,..., situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Le *cercle d'inversion* devient alors une sphère, et lorsqu'on fait varier le rayon de cette sphère sans déplacer son centre, les figures inverses de la figure donnée ainsi obtenues sont homothétiques (916) entre elles.

938. *Un plan L et une sphère O quelconque peuvent être considérés comme deux figures inverses l'une de l'autre* (396). *La figure inverse d'un plan L est une sphère O passant par l'origine; et la figure inverse d'une sphère O, par rapport à l'un quelconque de ses points pris pour origine, est un plan L perpendiculaire au diamètre passant par l'origine.*

939. *Deux sphères quelconques O et O' peuvent être considérées comme deux figures inverses l'une de l'autre* (397). *La figure inverse d'une sphère O par rapport à un point S extérieur ou intérieur pris pour origine, est une autre sphère O'.*

940. *L'inverse d'une circonférence C par rapport à un point quelconque S de l'espace pris pour origine est une autre circonférence C'.* Car la circonférence C étant considérée comme l'intersection de deux sphères O et O_1, son inverse est l'intersection des deux sphères O' et O'_1 inverses des sphères O et O_1, c'est-à-dire un cercle.

Il résulte immédiatement de la définition des figures inverses que *trois couples quelconques a et a', b et b', c et c', de points correspondants de deux figures inverses sont situés sur une même sphère.* Donc, une circonférence quelconque C et son inverse C' appartiennent à une même sphère, et par suite (887) elles sont des sections anti-parallèles d'un même cône oblique qui a l'origine S pour sommet. De là le moyen de trouver le centre de la circonférence C' inverse d'une circonférence C; *ce centre est* (889) *sur la droite qui joint l'origine S au sommet d'un cône auxiliaire circonscrit suivant le cercle C à la sphère déterminée par la circonférence C et le point S.*

941. La formule du n° 398 et sa démonstration subsistent. Quant au théorème du n° 399, il s'applique aussi à deux lignes quelconques de l'espace, mais une nouvelle démonstration est nécessaire.

Et d'abord on démontre, absolument comme au n° 399, en considérant (*fig.* 237) une ligne quelconque plane ou gauche MN et son inverse M'N', que leurs tangentes MT, M'T', font des angles égaux TMM', T'M'M, avec le rayon vecteur SMM'. Cela étant, soient (*fig.* 238) deux courbes gauches MA et Ma qui se coupent en M, et les courbes inverses M'A', M'a'; il faut prouver que l'angle des deux premières, c'est-à-dire l'angle tMT de leurs tangentes, est égal à l'angle tM'T des deux autres. Or on a, d'après l'observation précédente,

$$t\mathrm{MM}' = t\mathrm{M}'\mathrm{M}, \quad \mathrm{TMM}' = \mathrm{TM}'\mathrm{M};$$

donc le trièdre formé par les droites MM', MT, mt, et le trièdre formé par les droites M'M, M'T, M't, ont un angle dièdre égal MM' compris entre deux faces égales chacune à chacune; ces deux trièdres sont donc symétriques, et par suite les troisièmes faces TMt, TM't, sont respectivement égales.

942. *L'angle de deux surfaces* F *et* F_1, *en un point quelconque* m *de leur ligne d'intersection* amb, *est égal à l'angle sous lequel les surfaces inverses* F' *et* F'_1 *se coupent au point correspondant* m'.

En effet, menons par m sur les surfaces F et F_1 deux courbes mp et mp_1 à angle droit sur la ligne d'intersection amb; leurs inverses $m'p'$ et $m'p'_1$ couperont (941) à angle droit la ligne $a'm'b'$ commune aux surfaces F' et F'_1, et de plus l'angle des deux premières courbes mp et mp_1 sera égal à celui de leurs inverses $m'p'$ et $m'p'_1$. Or, l'angle des courbes mp et mp_1 mesure l'inclinaison mutuelle des deux surfaces F et F_1 au point m, et l'angle de $m'p'$ et de $m'p'_1$ mesure l'inclinaison mutuelle des deux surfaces F' et F'_1 au point correspondant m'.

943. Les lignes et les surfaces inverses jouissent, relativement à la courbure, de propriétés très-importantes que nous ne pouvons pas développer ici. Nous renverrons sur ce sujet aux Mémoires déjà cités dans le n° 401, et à un Mémoire de M. Hirst (*Annales de Tortolini*, t. II, 1859).

944. Voici quelques applications des principes qui précèdent.

On nomme *projection stéréographique* d'une figure sphérique la perspective de cette figure faite en prenant pour *point de vue* S un point de la sphère, et pour plan de projection ou *tableau* le plan P du grand cercle dont le pôle est au point de vue S.

D'après les n^{os} 938 et 396, on peut considérer le plan diamétral P comme l'inverse de la surface sphérique, en prenant pour origine le point S et pour puissance le double du carré du rayon de la sphère. La projection stéréographique n'est donc qu'un cas particulier de la transformation par rayons vecteurs réciproques, et l'on peut énoncer les propositions suivantes qu'on utilise dans la construction des mappemondes :

1° *Les projections stéréographiques de deux lignes tracées sur la sphère se coupent sous le même angle que ces lignes elles-mêmes;*

2° *La projection stéréographique d'un cercle de la sphère est un cercle dont le centre est la perspective du sommet du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle proposé.*

La projection stéréographique a été connue des Grecs. Ptolémée l'a décrite sous le nom de *planisphère*, et les auteurs du moyen âge l'appelaient *astrolabe*. La construction du centre est due à M. Chasles.

945. *On peut toujours transformer un groupe de trois sphères données en un groupe de trois autres sphères ayant leurs centres en ligne droite; le lieu de l'origine ou du pôle de transformation est la circonférence qui coupe à angle droit les grands cercles des sphères données situés dans le plan des trois centres.* En effet, il est évident que les pôles de transformation doivent être dans le plan des trois centres, et que tout revient à transformer les grands cercles situés dans ce plan en trois autres ayant leurs centres en ligne droite. Or, si l'on prend pour pôle un des points de la circonférence qui coupe orthogonalement ces trois grands cercles, cette circonférence orthogonale se transforme en une droite qui coupe à angle droit les transformées des circonférences données et qui, par suite, contient les centres de ces transformées.

Cette remarque conduit immédiatement au théorème de Dupuis (933). En effet, transformons la figure de telle sorte que les trois sphères fixes deviennent trois sphères ayant leurs centres en ligne droite; la sphère variable deviendra une sphère tangente aux transformées des trois premières; et elle touchera évidemment chacune d'elles en un point dont le lieu sera un cercle perpendiculaire à la droite qui renferme les trois centres. Donc, en revenant à la figure primitive, et se rappelant que la transformée d'un cercle est un cercle, on voit que le point de contact de la sphère variable décrit un cercle sur chacune des sphères fixes (Mannheim, *Nouvelles Annales*, t. XIX).

Figures tracées sur la sphère.

946. ***Rapport anharmonique.***

On nomme *rapports anharmoniques de quatre points* A, B, C, D, *situés sur un grand cercle* d'une sphère ω, les rapports anharmoniques du faisceau formé par les quatre rayons ωA, ωB, ωC, ωD, qui aboutissent à ces points.

Lorsqu'un faisceau de quatre arcs de grand cercle OM, ON, OP, OQ, *issus d'un même point* O *de la surface sphérique est coupé par un arc de grand cercle* L, *le rapport anharmonique des quatre points* A, B, C, D, *déterminés par le faisceau sur cet arc transversal a une valeur indépendante de la position de cet arc* L. Car ce rapport est, par définition, égal à celui du faisceau formé par les rayons ωA, ωB, ωC, ωD, lequel ne diffère pas de celui du faisceau des quatre plans ωOA, ωOB, ωOC, ωOD (596).

D'après cela, on nomme *rapport anharmonique d'un faisceau de quatre arcs de grand cercle* le rapport anharmonique des quatre points déterminés par ce faisceau sur un arc de grand cercle transversal quelconque.

Les deux propositions fondamentales (330) et (332) s'étendent aux figures sphériques; par suite, il en est de même de leurs corollaires (331 et 333), de la propriété des triangles homologiques (335 et 336), et des théorèmes de Pascal et de Brianchon (337 et 338). Les démonstrations que nous en avons données subsistent entièrement; le lecteur devra seulement remplacer dans les énoncés et dans les raisonnements les mots *ligne droite* par les mots *arc de grand cercle*.

947. *Rapport harmonique.*

Quatre points A, B, C, D, situés sur un arc de grand cercle, forment un *système harmonique* lorsque le rapport anharmonique (ABCD) est égal à -1.

Un faisceau de quatre arcs de grands cercles OA, OB, OC, OD, est harmonique, lorsque le rapport anharmonique (O.ABCD) est égal à -1, c'est-à-dire lorsqu'on peut trouver un arc de grand cercle qui coupe le faisceau suivant un système de quatre points harmoniques; alors tout autre arc de grand cercle transversal jouira de la même propriété (946).

Il résulte de là que si, par un point C de la surface sphérique, on mène, à travers un angle AOB formé par deux arcs de grands cercles, diverses sécantes telles que ACB, et que l'on prenne sur chacune d'elles le point D conjugué harmonique de C par rapport au segment AB intercepté entre les côtés de l'angle, le lieu du point D sera l'arc de grand cercle OD conjugué harmonique de OC par rapport à l'angle AOB. Le point C et l'arc de grand cercle OD sont dits *pôle* et *polaire* par rapport à l'angle AOB.

La proposition (349) relative au quadrilatère complet et la démonstration que nous en avons donnée subsistent pour la sphère; il suffit de remplacer les mots *ligne droite* par *arc de grand cercle*. Il en résulte un moyen simple de tracer sur la sphère : 1° le quatrième harmonique de trois points d'un grand cercle; 2° la polaire d'un point par rapport à un angle (350 et 351).

948. *Pôle et polaire par rapport à un cercle de la sphère.*

Un point O et un petit cercle AEFB étant donnés sur la sphère (fig. 475), si par le point O on mène un arc de grand cercle sécant OFE et qu'on détermine le conjugué harmonique I du point O par rapport à EF, le lieu géométrique du point I, lorsque l'arc OFE tourne autour du point O, est un arc de grand cercle perpendiculaire au grand cercle OC déterminé par le point O et par le pôle C du cercle donné.

En effet, soit O' le point où le rayon ωO rencontre le plan du cercle donné; les trois points E, F, O', seront en ligne droite, et le faisceau des quatre rayons ωE, ωI, ωF, ωO', sera par hypothèse harmonique; donc, si I' est le point de rencontre de EF et de ωI, le système rectiligne E, I', F, O', sera aussi harmonique. Mais le lieu du point I' est une droite

KH située dans le plan AEB et perpendiculaire au diamètre O'BA (352); donc le lieu du point I est l'intersection de la sphère par le plan ωKH; c'est donc un grand cercle perpendiculaire au grand cercle OC.

Fig. 475.

On dit que le point O est le *pôle* du grand cercle HGK, et que ce grand cercle est la *polaire* du point O par rapport au cercle AEB.

Le mot *pôle* a déjà reçu (924) une autre acception; mais il ne pourra jamais y avoir d'ambiguïté si l'on fait la convention suivante : quand nous emploierons le mot *pôle* dans le nouveau sens que lui attribue le théorème précédent, il sera toujours suivi des mots *par rapport au cercle considéré*, tandis que lorsqu'il sera pris dans le sens primitif (924), ce mot ne sera suivi d'aucune indication.

Nous avons étudié avec détail au n° 353 les positions relatives du point O' et de la droite KH; le lecteur en déduira aisément les positions relatives du point O et du grand cercle KGH.

Quand le point O' décrit une droite dans le plan AEB, on sait (354) que la droite KH tourne dans ce plan autour du pôle de cette droite; mais alors le point O décrit un grand cercle, et le plan ωKH tourne autour du diamètre qui perce la sphère au pôle, par rapport à AEB, du grand cercle décrit par O. Donc, *les polaires de tous les points d'un grand cercle passent par le pôle de ce grand cercle par rapport au cercle directeur* AEB; et *les pôles, par rapport au cercle directeur* AEB, *de tous les grands cercles qui passent par un point de la sphère sont situés sur le grand cercle polaire de ce point.*

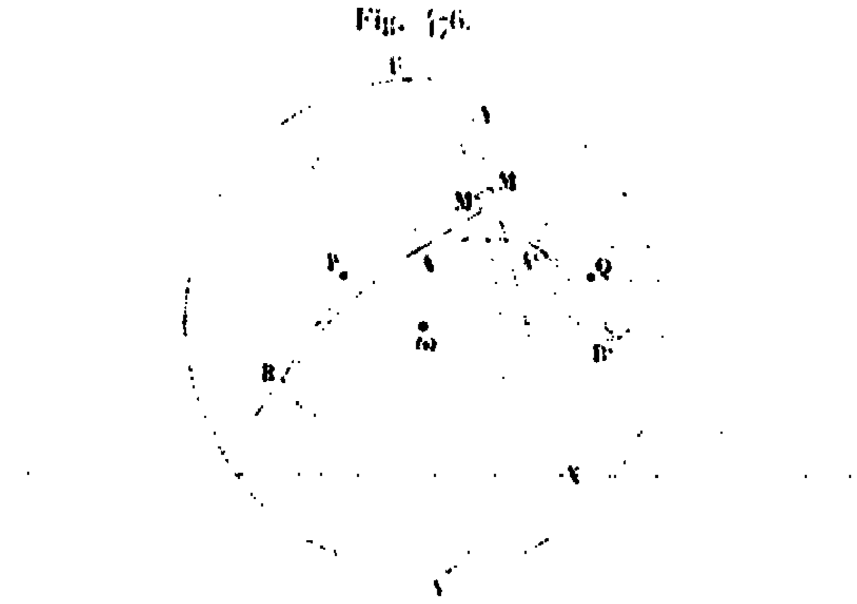
Le théorème du n° 356, sa démonstration et ses conséquences (357, 358, 359) subsistent pour la sphère en remplaçant les droites par des arcs de grand cercle : il en résulte le moyen de construire sur la sphère la polaire d'un point par rapport à un cercle directeur donné.

Enfin, la méthode de transformation par les polaires réciproques (360 et suiv.) s'étend aussi aux figures sphériques. Le mode de transformation général par polaires réciproques dans l'espace contient comme cas particulier le mode de transformation spécial que nous avons exposé au n° 838 pour les figures sphériques, et dans lequel on fait correspondre à un triangle un triangle supplémentaire. Soient, en effet, une sphère de rayon R et un point A de l'espace situé à une distance d du centre ω de la sphère; le plan polaire de ce point est un plan perpendiculaire à COA et situé à une distance de ω égale à $\frac{R^2}{d}$. Si le rayon R de la sphère tend vers zéro, $\frac{R^2}{d}$ tend aussi vers zéro, et les plans polaires de tous les points de la droite indéfinie ωA ont pour limite le plan unique mené par ω perpendiculairement à ωA. On peut, d'après cela, donner à ce plan le nom de *plan polaire* de la droite ωA par rapport à une sphère infiniment petite ayant ω pour centre. Cela posé, si l'on a une figure formée de droites et de plans passant tous par un point ω, on aura la figure corrélative en menant par ω des plans et des droites perpendiculaires aux droites et aux plans de la figure primitive. Sur la sphère, à un grand cercle répondra son pôle, et inversement, de sorte que l'on retombe sur les figures supplémentaires du n° 841.

949. *Axe radical.*

On nomme *axe radical* de deux petits cercles P et Q tracés sur la sphère l'arc de grand cercle UV dont le plan passe par l'intersection XY des plans des deux petits cercles P et Q. D'après cela, cet axe radical est perpendiculaire à l'arc de grand cercle PQ qui joint les pôles des deux petits cercles donnés (*fig.* 476).

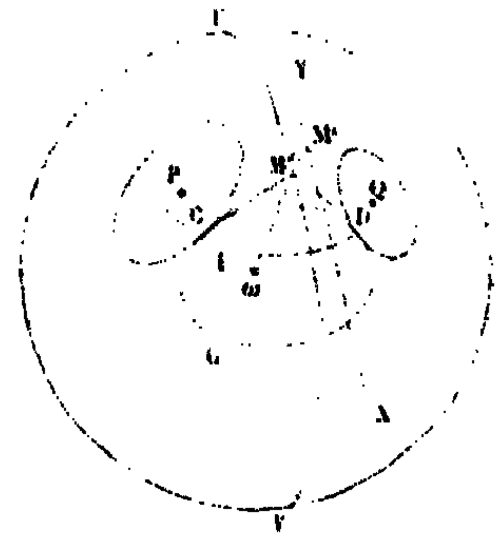
Fig. 476.



Si l'on coupe les deux cercles fixes P *et* Q *par un cercle auxiliaire variable qui coupe le premier en* A *et* B, *et le second en* A' *et* B', *le lieu des points de rencontre* M *des arcs de grand cercle* AB *et* A'B' *est l'axe radical des cercles* P *et* Q. Car les droites AB, A'B' se coupant évidemment en un point M' de XY, le point M où le rayon ωM' perce la sphère appartient à la fois aux trois grands cercles dont les plans passent respectivement par les droites AB, A'B', XY. Cette propriété permet de construire sur la sphère l'axe radical de deux cercles.

Si le cercle sécant ABA'B' devient un cercle CGD tangent en C et D (*fig.* 477), les arcs de grand cercle BAM, B'A'M, deviennent des arcs de

Fig. 477.



grand cercle tangents MC et MD; ils sont d'ailleurs égaux comme tangentes sphériques menées d'un même point M au cercle auxiliaire CGD (868). Donc *l'axe radical UV des deux cercles P et Q est le lieu des points de la sphère d'où l'on peut leur mener des tangentes sphériques égales.*

Le cercle CID, décrit du point M comme pôle, coupe orthogonalement les deux cercles P et Q; car il est à angle droit sur les arcs de grand cercle MC et MD. Donc *l'axe radical des deux cercles P et Q est sur la sphère le lieu des pôles ou centres sphériques des cercles qui coupent orthogonalement les deux cercles P et Q.*

Enfin, le plan du cercle CID est évidemment le plan polaire du point M' qui appartient à XY; et comme, quand le cercle orthogonal CID varie, son pôle M' décrit la droite XY, le plan de ce cercle CID passe constamment par la droite réciproque (926) de XY. Donc, *lorsque deux systèmes de cercles se coupent orthogonalement sur la sphère, les plans des cercles de chaque système passent par une droite, et ces deux droites sont réciproques par rapport à la sphère.* Inversement, *deux séries de plans passant par deux droites réciproques par rapport à une sphère tracent sur cette sphère deux systèmes de cercles orthogonaux* (*). Ajoutons que la

(*) L'étude du double système de cercles orthogonaux sur la sphère a des conséquences importantes relativement aux surfaces dont les lignes de courbure sont planes (O. BONNET, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVe cahier; PICART, *Essai d'une théorie géométrique des surfaces*, 1863).

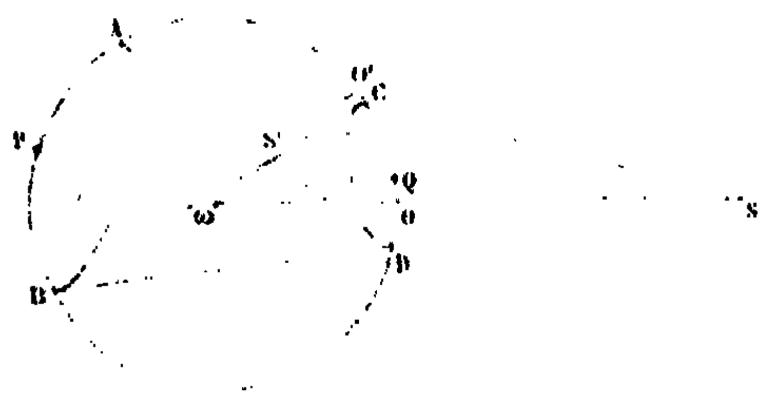
droite réciproque de l'intersection des deux cercles P et Q est précisément la droite qui joint les sommets des deux cônes (887, 889) que l'on peut faire passer par ces deux cercles. En effet, prenons pour plan de la figure le grand cercle (*fig.* 218, p. 215) perpendiculaire aux deux cercles donnés qui sont alors représentés par les deux droites AA' et BB'; en joignant AB et A'B', puis AB' et BA', on aura les sommets N et O des deux cônes considérés, et comme la droite NO est (358) la polaire de l'intersection M des deux droites AA' et BB', la perpendiculaire au plan de la figure élevée par le point M, c'est-à-dire la droite commune aux deux plans des cercles AA' et BB', aura pour réciproque NO (926).

Les axes radicaux de trois cercles d'une sphère considérés deux à deux concourent en un même point; car le rayon qui aboutit au sommet du trièdre formé par les plans des trois cercles perce la sphère en un point commun aux trois axes radicaux. Ce point prend le nom de *centre radical* des trois cercles.

930. ***Centres de similitude.***

On nomme *centres de similitude* de deux cercles AB et CD situés sur une sphère (*fig.* 478) les points O et O' où la sphère est rencontrée par

Fig. 478.



les rayons ωS et ωS' qui vont aux sommets S et S' des deux cônes (887) que l'on peut faire passer par les deux cercles. Le centre *direct* O répond au cône dont le sommet S est *extérieur* à la sphère, et le centre *inverse* O' au cône dont le sommet S' est *intérieur*. Les deux centres sont d'ailleurs sur le grand cercle qui passe par les pôles P et Q des deux cercles donnés.

Si par les points M et N, où les cercles P et Q sont touchés par un cercle variable X, on mène un arc de grand cercle, ce grand cercle passe par l'un des centres O de similitude des cercles P et Q et coupe ces deux cercles sous des angles égaux (*fig.* 479). En effet, la tangente MT commune aux cercles P et X et la tangente NT commune aux cercles Q et X, étant dans le plan du cercle X, ce plan est tangent au cône S et la droite MN passe par le sommet S de ce cône; le plan du grand cercle MN contient donc la droite ωS, et par suite l'arc de grand cercle MN passe par O. D'ailleurs les arcs de grand cercle PM et MX sont dans le prolongement l'un de l'autre, puisque les cercles X et P se touchent en M; il en est de même des arcs de grand cercle QN et XN; on a donc

$$\text{angle PMO}_1 = \text{XMN} = \text{XNM} = \text{angle QNO};$$

le grand cercle MN est donc également incliné sur les rayons sphériques PM et QN, et par suite sur les deux cercles AB et CD (*).

Fig. 479.

Les points M et N des deux cercles AB et CD, relatifs à une même génératrice du cône, sont dits *anti-homologues* (391). *Deux couples de points anti-homologues appartiennent à une même circonférence;* car, étant situés sur deux génératrices du même cône, ils sont dans un même plan. On conclut de là, en raisonnant comme au n° 391-3°, que *l'arc de grand cercle qui joint deux points du cercle AB et celui qui joint les deux points anti-homologues du cercle CD, se coupent sur l'axe radical des deux cercles AB et CD*; en particulier, *les tangentes sphériques en deux points anti-homologues de deux cercles se coupent sur l'axe radical de ces cercles.*

Les six centres de similitude de trois cercles d'une même sphère considérés deux à deux sont situés trois à trois sur quatre grands cercles. Cela résulte de ce que les sommets des six cônes déterminés par ces trois cercles sont trois à trois sur quatre droites situées dans un même plan. Pour démontrer cette proposition, considérons les cônes S, S', S'' dont les sommets sont extérieurs à la sphère; d'après ce que nous venons de voir, ces trois sommets sont dans le plan du cercle qui toucherait extérieurement les trois proposés; ils appartiennent de même au plan du cercle qui toucherait intérieurement les cercles donnés. Donc les sommets S, S', S'', sont en ligne droite. En désignant par S_1, S'_1, S''_1 les sommets des trois autres cônes, on verrait de même que S, S'_1, S''_1 sont en ligne

(*) HERMANN, *Mémoire de l'Académie de Lille*, 1846.

droite, ainsi que S_1, S', S''_1, et que S_1, S'_1, S''. D'ailleurs, chaque sommet appartenant à deux droites différentes, les quatre droites sont situées dans un même plan.

Les quatre grands cercles, qui renferment chacun trois centres de similitude, prennent le nom d'*axes de similitude des trois cercles*. Il y a *un axe de similitude directe* et *trois axes de similitude inverse*.

951. *Cercle tangent à trois petits cercles donnés sur la sphère.*

Le raisonnement et la construction sont les mêmes qu'au n° 402, en remplaçant les droites par des arcs de grand cercle : il y a huit solutions. La méthode s'applique d'ailleurs à tous les cas particuliers qu'on obtient en supposant que les cercles donnés se réduisent à des points ou à des grands cercles.

Théorème de Guldin.

952. L'importante proposition connue sous ce nom se trouve indiquée dans Pappus (fin du IV^e siècle). Elle a été ensuite retrouvée par Guldin (commencement du XVI^e siècle).

THÉORÈME.

L'aire engendrée par une ligne brisée plane quelconque, tournant autour d'un axe extérieur quelconque situé dans son plan, a pour mesure le produit de la longueur de la ligne brisée par la circonférence que décrit son centre de gravité.

Nous savons que le centre de gravité d'une ligne brisée plane est le centre des distances proportionnelles des centres de gravité de ses côtés (726).

Si la ligne brisée se réduit à une droite AB, la proposition a déjà été démontrée (762), puisque le centre de gravité d'une droite est en son milieu (726).

Soit maintenant (*fig.* 480) la ligne brisée plane quelconque MNPQR

Fig. 480.

tournant autour de l'axe xy. Soient a, b, c,..., les longueurs des côtés de cette ligne : α, β, γ,..., les distances des milieux A, B, C,... de ses côtés à l'axe xy. L'aire totale S engendrée par la ligne brisée MNPQR.

étant la somme des aires engendrées par ses côtés MN, NP,..., on aura (762)

$$S = a.2\pi\alpha + b.2\pi\beta + c.2\pi\gamma + \ldots = 2\pi(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots).$$

Si l'on désigne par z la distance à l'axe xy du centre des distances proportionnelles des points A, B, C,..., on a (723)

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots = z(a + b + c + \ldots),$$

d'où

$$S = (a + b + c + \ldots).2\pi z,$$

expression de l'énoncé.

Corollaire.

953. Le théorème subsiste, quels que soient le nombre et la grandeur des côtés de la ligne brisée, c'est-à-dire à la limite, quand il s'agit d'une ligne courbe en tout ou en partie. Le centre de gravité de la ligne obtenue est alors la position limite du centre de gravité de la ligne polygonale. Par suite, *l'aire engendrée par une ligne courbe plane tournant autour d'un axe extérieur quelconque situé dans son plan, a pour mesure le produit de sa longueur (301) par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Applications.

954. 1° *Quelle est l'expression de l'aire engendrée par une circonférence de rayon r, en tournant autour d'une droite xy de son plan qui ne la coupe pas?*

Soit d la distance du centre de cette circonférence à l'axe xy; le centre d'une circonférence est évidemment son centre de gravité; car, dans la recherche du centre des moyennes distances, on peut remplacer plusieurs points par leur centre particulier (*voir* l'exercice 783), et le centre qui correspond aux extrémités d'un diamètre quelconque est le centre de la circonférence. L'aire de la surface engendrée, qu'on appelle *tore*, sera donc

$$2\pi r.2\pi d = 4\pi^2 rd.$$

2° *Trouver la position du centre de gravité d'une demi-circonférence de rayon r.*

Soit x la distance du point cherché au diamètre qui termine la demi-circonférence. Si on la fait tourner autour de ce diamètre, elle engendrera une surface sphérique de rayon r. On devra donc avoir (811)

$$\pi r.2\pi x \quad \text{ou} \quad 2\pi^2 rx = 4\pi r^2, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2r}{\pi}.$$

Le centre de gravité cherché étant d'ailleurs, d'après une remarque précédente, situé sur le rayon perpendiculaire à l'axe, sa position est parfaitement déterminée.

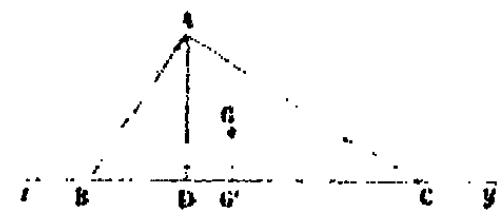
THÉORÈME.

955. *Le volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe extérieur situé dans son plan, a pour mesure le produit de l'aire du triangle par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Nous distinguerons trois cas.

1° L'un des côtés du triangle se confond avec l'axe (*fig.* 481).

Fig. 481.



Le volume engendré par le triangle ABC tournant autour de l'axe xy a pour expression (816-1°)

$$\frac{1}{3}\pi.AD^2.BC,$$

c'est-à-dire, en désignant par S l'aire du triangle dont le double est représenté par AD.BC,

$$\frac{2}{3}\pi.AD.S.$$

Si G est le centre de gravité du triangle ABC, on a (727), pour la perpendiculaire GG' à l'axe,

$$GG' = \frac{AD}{3}.$$

Le volume engendré a donc finalement pour mesure

$$S.2\pi.GG'.$$

2° Le triangle n'a qu'un sommet situé sur l'axe (*fig.* 482).

Fig. 482.

Prolongeons le côté AC jusqu'à sa rencontre en D avec l'axe xy. On aura

$$\text{vol. ABC} = \text{vol. ABD} - \text{vol. CBD}.$$

Si g et g_1 sont les centres de gravité des triangles ABD et CBD, il viendra donc, d'après le premier cas,

$$\text{vol. ABC} = 2\pi(\text{ABD}.gg' - \text{CBD}.g_1g'_1).$$

Le triangle ABC étant la différence des deux triangles ABD et CBD, son centre de gravité G est le centre des distances proportionnelles des points g, g_1, si l'on attribue aux trois points considérés des coefficients proportionnels aux aires des trois triangles correspondants, en donnant à ces coefficients les signes convenables (728). On aura par suite

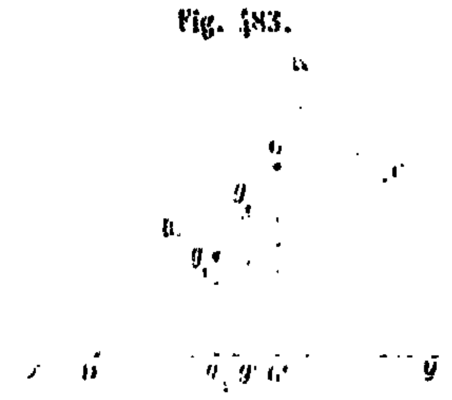
$$\text{ABD}.gg' - \text{CBD}.g_1g'_1 = \text{ABC.GG}'.$$

d'où

$$\text{vol. ABC} = \text{ABC}.2\pi\text{GG}'.$$

3° L'axe est complétement extérieur au triangle (*fig.* 483).

Fig. 483.



Les trois côtés du triangle ne pouvant être parallèles à l'axe, prolongeons le côté AB, par exemple, jusqu'à sa rencontre en D avec l'axe xy, et joignons CD. On aura

$$\text{vol. ABC} = \text{vol. ACD} - \text{vol. BCD},$$

c'est-à-dire, d'après le second cas, en désignant par g et g_1 les centres de gravité des triangles ACD et BCD,

$$\text{vol. ABC} = 2\pi(\text{ACD}.gg' - \text{BCD}.g_1g'_1).$$

Le triangle ABC dont le centre de gravité est G, étant la différence des triangles ACD et BCD, on aura comme ci-dessus

$$\text{ACD}.gg' - \text{BCD}.g_1g'_1 = \text{ABC.GG}'.$$

d'où encore

$$\text{vol. ABC} = \text{ABC}.2\pi\text{GG}'.$$

THÉORÈME.

956. *Le volume engendré par un polygone tournant autour d'un axe extérieur situé dans son plan, a pour mesure le produit de son aire par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Décomposons le polygone donné, dont l'aire est S, en triangles ayant pour aires $t, t', t'', \ldots$ Soient $\delta, \delta', \delta'', \ldots$, les distances des centres de gravité de ces triangles à l'axe, et d la distance du centre de gravité du polygone (728) au même axe. Le volume engendré par le polygone, somme des volumes engendrés par les triangles qui le composent, est

$$2\pi(t\delta + t'\delta' + t''\delta'' + \ldots).$$

Mais, d'après les propriétés du centre des distances proportionnelles, la parenthèse est égale à $S.d$. Par suite, le volume cherché a pour expression

$$S.2\pi d.$$

COROLLAIRE.

957. Le théorème subsiste, quels que soient le nombre et la grandeur des côtés du polygone, c'est-à-dire à la limite, quand le polygone ou une partie du polygone devient une courbe. Dans ce cas, le centre de gravité de la surface obtenue est la position limite du centre de gravité de la surface polygonale. Par suite, *le volume engendré par une surface plane quelconque tournant autour d'un axe extérieur situé dans son plan, a pour mesure le produit de son aire par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

APPLICATIONS.

958. 1° *Quel est le volume du tore ?*

En conservant les notations du n° 954, ce volume a pour expression

$$\pi r^2.2\pi d = 2\pi^2 r^2 d.$$

2° *Trouver la position du centre de gravité d'un demi-cercle de rayon r.*

Le centre de gravité cherché appartient évidemment au rayon perpendiculaire au diamètre qui termine le demi-cercle donné. De plus, si l'on fait tourner le demi-cercle autour de ce diamètre, il engendre une sphère de rayon r. On a donc, en appelant x la distance du centre de gravité à l'axe,

$$\frac{\pi r^2}{2}.2\pi x = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{4r}{3\pi}.$$

La position du point demandé est donc complètement déterminée.

Sur le maximum et le minimum des figures.

959. Nous nous proposons ici de prouver que, *de tous les corps de même aire, la sphère est celui qui a le plus grand volume.*

LEMME.

Quand une figure plane possède deux axes de symétrie OA et OB faisant entre eux un angle α incommensurable avec π, cette figure est un cercle.

D'abord, la droite OC (*fig.* 484), symétrique de OA par rapport à OB, est un nouvel axe de symétrie; car, M étant un point quelconque de la figure et N son symétrique par rapport à OA, si l'on replie la figure autour de OB, les deux points M' et N', sur lesquels s'appliquent M et N, lui appartiennent encore à cause de la symétrie par rapport à OB, et ils sont symétriques par rapport à OC puisque OA s'applique sur OC.

Par suite, en faisant tourner OB de l'angle α autour du point O, on obtient un troisième axe de symétrie OC; une nouvelle rotation de même amplitude α en donnerait un quatrième, etc. — D'ailleurs, α étant incommensurable avec π, on ne saurait trouver des nombres entiers m et n tels que $m\alpha = n\pi$; en d'autres termes, en continuant la rotation on ne retombera jamais sur un axe précédemment obtenu. Donc enfin la figure possède une infinité d'axes de symétrie passant par le point O; d'où l'on conclut que c'est un cercle.

Fig. 484.

Fig. 485.

LEMME.

960. *Si, par les milieux a, b, c, des arêtes latérales* AA', BB', CC', *d'un tronc de prisme triangulaire, on mène un plan : 1° les deux segments du tronc seront équivalents; 2° la section abc sera en général moindre que la demi-somme des bases* ABC, A'B'C'.

La première partie est évidente d'après le n° 665; quant à la deuxième, elle résulte de ce que la section *abc* est, comme on le voit aisément, égale à la demi-somme des projections des bases ABC, A'B'C', sur le plan *abc*.

Il résulte de cette proposition que *si dans un corps terminé par une surface convexe on mène une série de cordes parallèles, la surface lieu des milieux de ces cordes divise le corps en deux parties d'égal volume et a elle-même une étendue moindre que la moitié de l'aire totale du corps.*

THÉORÈME.

961. « *Parmi tous les corps de même surface, la sphère a le plus » grand volume; et parmi tous les corps d'égal volume, elle a la plus » petite surface.*

» Que l'on se représente un corps qui ait la propriété d'avoir le plus » grand volume parmi les corps de même surface, il existera évidemment » dans toutes les directions un plan qui divise la surface en deux parties » égales.

» Soit A un pareil plan (*fig.* 485), et soient α et β les moitiés de la » surface. Si le corps n'était pas divisé par ce plan en deux parties équi- » valentes en volume, si, par exemple, on avait $\alpha A > \beta A$, il ne pourrait » pas avoir un volume maximum ; car on pourrait remplacer β par une » partie symétrique de α, et le volume total aurait grandi sans que la » surface eût changé. Il faut donc que $\beta A = \alpha A$. — Si, dans cette sup- » position, β n'était pas symétriquement égal à α, on n'aurait qu'à se » représenter du même côté de A que β une surface α_1 symétriquement » égale à α, et l'on aurait

$$\alpha_1 A = \alpha A = \beta A,$$

» et le corps $\alpha\alpha_1 = \alpha\beta$. Que l'on mène dans les espaces compris entre » β et α_1 des droites parallèles entre elles, limitées par ces surfaces, leurs » milieux se trouvent sur une troisième surface γ, qui a la même base » que β et α_1, et l'on a

$$\gamma A = \beta A = \alpha_1 A, \quad \text{ou} \quad \gamma\alpha = \beta\alpha,$$

» mais en même temps (960) $2\gamma < \beta + \alpha_1$, ou $\gamma < \beta$ puisque $\beta = \alpha_1$; la sur- » face γ qui est plus petite que β limiterait donc avec α un espace équivalent » en volume à celui qui se trouve entre β et α, ce qui est contraire à » l'hypothèse ; il faut donc que β soit symétriquement égal à α, et le » corps supposé a la propriété d'admettre pour plan de symétrie tout » plan qui divise sa surface en deux parties équivalentes (*). »

Cela posé, considérons une droite quelconque D de l'espace, et par cette droite menons deux plans quelconques P_1 et Q_1 faisant entre eux un angle α incommensurable avec π. Le corps maximum admettra deux plans de symétrie P et Q respectivement parallèles à P_1 et Q_1 ; par suite, toute section du corps faite perpendiculairement à l'intersection des plans P et Q, c'est-à-dire perpendiculairement à la droite D, aura pour axes de symétrie les deux droites p et q suivant lesquelles le plan de cette section coupe les plans P et Q. Mais ces droites p et q font un angle α incommensurable avec π ; donc cette section est un cercle (959), et comme la direction D est arbitraire, on voit que le corps maximum est coupé par un plan quelconque suivant un cercle ; d'où l'on conclut que c'est une sphère.

(*) STEINER, *Journal de Crelle*, t. XXIV.

QUESTIONS PROPOSÉES.

§§ I, II. — *Cylindre et cône de révolution.*

792. 1° Quel est le rapport des volumes de deux cylindres dont les aires convexes sont équivalentes; 2° quel est le rapport des aires convexes de deux cylindres qui ont même volume?

793. Les volumes engendrés par un rectangle tournant successivement autour de ses côtés adjacents sont de a mètres cubes et de b mètres cubes; trouver la longueur de la diagonale de ce rectangle.

794. Calculer l'aire convexe, l'aire totale et le volume d'un cône équilatéral en fonction de son côté. — Pour quelles valeurs de ce côté l'aire totale du cône est-elle un mètre carré, et son volume un mètre cube?

795. Partager l'aire latérale d'un cône de révolution en n parties équivalentes par des plans parallèles à sa base.

796. La hauteur d'un tronc de cône de révolution étant 3 mètres et ses bases ayant pour rayons 2 mètres et 1 mètre, partager son volume en trois parties proportionnelles aux nombres 2, 3 et 7, par deux plans parallèles aux bases.

797. Le volume d'un tronc de cône de révolution étant $41^{mc},328$, sa hauteur $1^{m},817$, le rayon d'une de ses bases $2^{m},698$, on demande de calculer à $0^{m},001$ près le rayon de sa seconde base.

798. Calculer à 0,001 près le rapport que doivent présenter les rayons des bases d'un tronc de cône de révolution, pour que son volume soit la moitié de celui du cylindre de même hauteur élevé sur la base inférieure du tronc.

799. Quel est le rapport des volumes engendrés par un parallélogramme tournant successivement autour de ses deux côtés adjacents?

800. Soit ABCDEF un hexagone régulier circonscrit à un cercle de centre O et de rayon R. On mène la diagonale FC et les droites AC et BF qui se coupent en I sur le rayon OH perpendiculaire à FC, et l'on demande de calculer, en fonction de R, les volumes et les aires des cônes engendrés par les triangles IHA, IOF, en tournant autour de OH pris pour axe.

801. Soit B'C' la projection du diamètre BC d'un cercle OA sur la tangente TT' au point A; chercher pour quelle position de BC le rapport du cercle OA à l'aire totale du tronc de cône engendré par la rotation du trapèze BCB'C' autour de TT', est égal à m; discussion.

802. Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône de révolution, connaissant sa hauteur, son côté et son aire ou son volume.

803. Un tronc de cône de révolution d'une substance dont le poids spécifique est d, est plongé verticalement dans un liquide dont le poids spécifique est d'; les rayons de ses bases sont R et r, sa hauteur est h. On demande de calculer la hauteur de la partie immergée et le rayon de la section déterminée dans le tronc de cône par la surface de niveau du liquide.

804. Quel est le volume maximum d'un cône de révolution dont le côté est donné?

805. Parmi tous les cylindres ou tous les cônes qui ont même aire totale, quel est le cylindre ou le cône de volume maximum? — Parmi tous les cylindres ou tous les cônes équivalents, quel est le cylindre ou le cône d'aire totale minimum?

806. Inscrire dans un cône donné un cylindre de volume donné; discussion. — Circonscrire à un cylindre donné un cône de volume donné; discussion.

§§ III, IV, V, VI. — *Premières notions sur la sphère. — Aire et volume de la sphère. — Propriétés des triangles sphériques.*

807. Trouver le lieu des points qui sont à la distance a d'un point A et à la distance b d'un point B.

808. Par une droite donnée, mener un plan tangent à une sphère donnée.

809. Par une droite donnée, mener à une sphère donnée un plan sécant qui détermine une section de rayon donné.

810. Lorsque trois sphères se coupent deux à deux, les plans des trois cercles d'intersection se coupent suivant une même droite perpendiculaire au plan déterminé par les centres des trois sphères.

811. Trouver le lieu des centres des sections faites dans une sphère donnée par tous les plans sécants qui passent par une droite donnée ou par un point donné.

812. Connaissant les rayons de deux sections parallèles faites dans une sphère et la distance de ces sections, trouver le rayon de la sphère.

813. Trouver la plus courte et la plus grande distance d'un point donné à une surface sphérique. — Trouver le lieu des points qui sont à une distance donnée d'une sphère donnée.

814. Trouver la plus courte distance d'une droite donnée ou d'un plan donné à une surface sphérique.

815. Si d'un point de la surface sphérique comme pôle on trace un cercle avec un rayon sphérique égal au tiers ou au cinquième d'un quadrant, le rayon du cercle obtenu est la moitié du rayon de la sphère ou le plus grand segment de ce rayon divisé en moyenne et extrême raison.

816. La somme des carrés des cordes interceptées par une sphère donnée sur trois droites rectangulaires partant d'un point donné est constante, ainsi que la somme des carrés des six segments déterminés sur ces trois cordes par le point donné.

817. Trouver le diamètre de la sphère circonscrite à une pyramide triangulaire dont trois faces sont perpendiculaires entre elles.

818. Si, d'un point de l'espace, on mène des sécantes à une sphère donnée, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la sphere est constant.

819. Mener dans une sphère donnée trois cordes perpendiculaires entre elles, qui passent par un point donné et qui soient proportionnelles à des nombres donnés. — Mener dans une sphère donnée trois plans perpendiculaires entre eux, qui passent par un point donné et qui déterminent trois cercles dont les aires soient proportionnelles à des nombres donnés.

820. Si deux cercles de l'espace sont tels, que leurs centres soient les projections d'un même point et que les tangentes menées à ces cercles par un point de l'intersection de leurs plans soient égales, ces deux cercles sont situés sur une même sphère.

821. La somme des carrés des projections de trois rayons d'une sphère perpendiculaires entre eux sur un plan quelconque, est égale au double du carré du rayon de la sphère.

822. Étant données deux sphères solides, trouver la distance de leurs centres par une construction plane.

823. Trouver le lieu des points de l'espace dont le rapport des distances à deux points fixes est constant. — Trouver le lieu des points de l'espace également éclairés par deux lumières données.

824. Trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points donnés est constante. — Trois points étant donnés, trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances est à la fois constante par rapport au premier et au second point, par rapport au premier et au troisième.

825. Trouver le lieu des points d'où l'on voit une sphère donnée, deux spheres données ou trois sphères données, sous un angle donné.

826. Indiquer le lieu des points d'où l'on voit une droite donnée sous un angle donné, ou deux droites données issues d'un même point, sous des angles respectivement donnés.

827. Trouver le lieu des centres des sphères qui coupent deux sphères données ou trois sphères données suivant des grands cercles.

828. Quelle est la condition pour que quatre points de la surface sphérique appartiennent à un même plan?

829. Construire une sphère :

1° De rayon donné, qui passe par trois points donnés;

2° De rayon donné, passant par deux points donnés et tangente à un plan ou à une sphère donnée;

3° De rayon donné, passant par un point donné et tangente à deux plans ou à deux spheres données;

4° De rayon donné, tangente à trois plans ou à trois sphères données;

5° De rayon donné, passant par un point donné et tangente à un plan et à une sphère donnés;

6° De rayon donné, tangente à deux plans et à une sphère donnés;

7° De rayon donné, tangente à un plan et à deux sphères donnés.

830. Calculer en myriamètres carrés l'aire de l'une des deux zones glaciales, sachant que le petit cercle qui lui sert de base est à 23°30′ du pôle.

831. Dans une sphère de rayon donné, mener un plan sécant AIB tel, que le rapport de la calotte sphérique qu'il détermine à l'aire latérale du cône qui a pour base le cercle AIB, et pour sommet le centre de la sphère, soit égal à m; discussion.

832. Inscrire dans une sphère un cône dont l'aire latérale soit équivalente à celle de la calotte sphérique terminée au même cercle.

833. Si l'on divise une demi-circonférence en trois parties égales et si on la fait tourner autour de son diamètre, la zone engendrée par l'arc du milieu est équivalente à la somme des zones engendrées par les deux arcs extrêmes.

834. Diviser une zone en moyenne et extrême raison par un plan parallèle à ses bases.

835. La calotte interceptée par une sphère fixe sur une sphère sécante de rayon variable et qui passe toujours par son centre, a une aire constante. — La zone interceptée par deux sphères fixes concentriques sur une sphère sécante de rayon variable et qui passe toujours par leur centre commun, a une aire constante.

836. Placer sur le cercle générateur d'une sphère l'arc générateur d'une zone dont on connaît l'arc et la hauteur.

837. Placer sur une sphère donnée une calotte sphérique dont l'aire soit double de celle engendrée par la corde de l'arc générateur de la calotte.

838. Couper une sphère par un plan tel, que l'aire de la section soit égale à la différence des deux zones que ce plan détermine.

839. Un cylindre inscrit dans une sphère d'un mètre de rayon a pour aire latérale la moitié de l'aire d'un grand cercle de la sphère : calculer son volume.

840. L'aire totale d'une chaudière cylindrique terminée par deux hémisphères est de a^2 mètres carrés, toute section passant par l'axe a un périmètre de b mètres : calculer la hauteur et le rayon de la partie cylindrique de la chaudière ; discussion.

841. Le poids d'un décimètre cube de fonte étant $7^{kg},2$, calculer avec la plus grande approximation possible le diamètre d'un boulet en fonte du poids de 24 kilogrammes.

842. Ayant mené la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle, on le fait tourner autour de son troisième côté pris pour axe ; quel est le rapport des volumes engendrés par les deux parties du triangle ?

843. Dans une sphère de rayon donné, mener un plan sécant AIB tel, que le rapport du segment à une base qu'il détermine, au secteur sphérique ayant pour base la même calotte sphérique, soit égal à m ; discussion.

844. On prolonge l'un des côtés a d'un triangle équilatéral d'une longueur égale à a et, par l'extrémité obtenue, on élève une perpendiculaire à ce côté ; calculer le volume engendré par le triangle équilatéral en tournant autour de cette perpendiculaire.

845. Le volume engendré par un triangle tournant autour d'une droite de son plan qui lui est extérieure, a pour mesure le produit de son aire par la circonférence que décrit dans le mouvement de rotation le point de rencontre de ses trois médianes.

846. Étant donnée une série de cercles concentriques, on mène dans ces cercles des cordes toutes égales entre elles et parallèles à un diamètre commun : les volumes engendrés par les segments correspondants en tournant autour de ce diamètre sont équivalents.

847. Étant donné sur une sphère de rayon R un cercle de rayon r, mener un second cercle parallèle au premier tel, que le rapport du segment compris entre ces deux cercles au cône qui a pour base le second cercle, et qui a pour sommet le centre du premier, soit égal à m ; discussion.

848. Les volumes d'un cône de révolution, d'une sphère et d'un cylindre de révolution, de même hauteur, sont proportionnels aux nombres 1, 2, 3, lorsque le cône et le cylindre ont pour bases un grand cercle de la sphère.

849. L'aire totale ou le volume du cylindre équilatéral inscrit ou circonscrit à une sphère est moyenne proportionnelle entre l'aire ou le volume de cette sphère et l'aire totale ou le volume du cône équilatéral inscrit ou circonscrit.

850. Calculer en fonction de leurs côtés les aires et les volumes engendrés par les polygones réguliers les plus simples, depuis le triangle jusqu'au dodécagone, lorsqu'ils tournent autour d'un de leurs côtés pris pour axe. — Même question, en prenant pour axe de rotation une perpendiculaire menée à l'extrémité d'un des diamètres du cercle circonscrit qui aboutit à un sommet du polygone considéré.

851. On prend un point B sur le prolongement du rayon OA d'un cercle donné, et l'on mène par ce point au cercle la tangente BT; chercher pour quelle position du point B les aires décrites par la droite BT et l'arc AT, lorsqu'on fait tourner la figure autour de l'axe OAB, sont dans un rapport donné; discussion.

852. Étant donné un triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle, trouver le rapport du volume ou de l'aire qu'il engendre, lorsque la figure tourne autour du diamètre du demi-cercle, au volume ou à l'aire de la sphère engendrée par ce demi-cercle. — Cas où le triangle rectangle donné est isocèle.

853. Inscrire ou circonscrire à une sphère donnée un cône ou un cylindre dont l'aire totale ou le volume soit à l'aire ou au volume de la sphère dans un rapport donné: discussion.

854. La longueur de l'axe d'une chaudière cylindrique terminée par deux hémisphères étant donnée, calculer les dimensions de la partie cylindrique de manière que la capacité de la chaudière ait une valeur donnée; discussion.

855. Étant donné le volume d'un secteur sphérique appartenant à une sphère de rayon R, chercher le maximum de son aire totale.

856. On donne les volumes engendrés par un triangle en tournant successivement autour de chacun de ses côtés; calculer les trois côtés du triangle.

857. Construire un triangle, connaissant deux côtés et sachant que le volume engendré par ce triangle en tournant autour du troisième côté est égal à la somme des volumes qu'il engendre en tournant successivement autour des deux côtés donnés.

858. D'un point B extérieur à une circonférence O, on lui mène deux tangentes BA, BC, et l'on projette le point de contact C sur le rayon OA en D; démontrer que, si l'on fait tourner la figure autour de l'axe AOD, le volume engendré par le triangle mixtiligne ABC est équivalent au cône engendré par le triangle rectangle BAD, et le segment sphérique engendré par le triangle mixtiligne DAC équivalent au volume engendré par le triangle BCD.

859. On donne un cône de révolution et deux sphères inscrites dans ce

cône et tangentes extérieurement l'une à l'autre; le volume compris entre le cône et les deux sphères proposées est la moitié du volume compris entre ce même cône et la sphère qui passe par ses deux cercles de contact avec les sphères données.

860. Connaissant les latitudes et les longitudes de deux lieux de la surface terrestre supposée parfaitement sphérique, trouver, à l'aide d'opérations exécutées sur un globe, la distance de ces deux lieux en degrés.

861. Construire un triangle sphérique, connaissant :

1° Un angle, un côté adjacent et la somme ou la différence des deux autres côtés;

2° Un côté, un angle adjacent et la somme ou la différence des deux autres angles;

3° Deux côtés et la hauteur correspondante à l'un d'eux;

4° Un angle, un côté et la hauteur qui lui correspond;

5° Son aire, un angle et l'un des côtés adjacents.

862. Inscrire un cercle dans un triangle sphérique.

863. Transformer un polygone sphérique en un triangle sphérique équivalent.

864. Trouver une aire plane équivalente à celle d'un triangle sphérique donné.

865. Si, dans un quadrilatère sphérique, les côtés opposés sont égaux : 1° les quatre angles du quadrilatère sont égaux, ses diagonales sont égales et se coupent mutuellement en parties égales, ses sommets sont dans un même plan et les cordes correspondantes forment un rectangle; 2° l'aire de ce quadrilatère a pour mesure quatre fois l'excès de son angle sur un droit.

866. Dans un losange sphérique, les diagonales se coupent à angle droit.

867. Deux triangles sphériques sont équivalents lorsque leurs triangles polaires ont même périmètre, et réciproquement.

868. L'enveloppe sur une même sphère des bases de tous les triangles sphériques qui ont un angle commun et même périmètre est un cercle de la sphère. — Même problème sur le plan.

869. Sur une même sphère, le lieu des sommets des triangles sphériques qui ont même base, et dont l'angle opposé à cette base est égal à la somme des deux autres, est un cercle de la sphère.

870. Dans tout polyèdre convexe, le nombre d'angles dièdres droits contenus dans la somme des angles dièdres, moins la moitié du nombre d'angles trièdres trirectangles contenus dans la somme des angles po-

lyèdres, est égal à deux fois le nombre des faces du polyèdre diminué de deux.

871. Dans tout polyèdre convexe, la somme des angles polyèdres supplémentaires de ceux du polyèdre proposé est égale à huit angles trièdres trirectangles.

872. Si de chaque sommet d'un parallélipipède comme centre on décrit des sphères égales, toutes ces sphères réunies interceptent une portion du volume du parallélipipède égale à l'une d'elles.

873. Si P est le pôle d'un arc de grand cercle DE passant par les milieux D et E des côtés AB et AC d'un triangle sphérique BAC, l'angle BPC est le double de l'angle DPE.

874. Si trois petits cercles sont inscrits dans un triangle sphérique dont chaque angle est égal à 120 degrés, de manière que chacun de ces cercles touche à la fois les deux autres et deux côtés du triangle, leur rayon sphérique est égal à 30 degrés et leurs centres sont les sommets du triangle polaire du triangle donné.

875. Par un point donné sur la surface de la sphère, mener un arc de grand cercle qui rencontre un arc de grand cercle donné sous un angle donné; discussion.

§ VII. — *Généralités sur les surfaces.*

876. Indiquer le lieu des points qui sont : 1° à la distance a d'une droite A et à la distance b d'une droite B; 2° à la distance a d'une droite A et à la distance p d'un plan P : 3° à la distance a d'une droite A et à la distance b d'un point B.

877. Étant donnés dans l'espace un point et une surface conique ou cylindrique de révolution, trouver la plus courte distance du point à la surface.

878. Trouver le lieu des points dont les distances à un point donné et à une droite donnée passant par ce point sont dans un rapport donné.

879. Un point et deux droites passant par ce point étant donnés, trouver le lieu des points dont les distances respectives au point donné et aux droites données sont proportionnelles à trois longueurs données.

880. Mener un plan tangent à une surface cylindrique ou à une surface conique de révolution : 1° par un point donné de la surface : 2° par un point extérieur donné, 3° parallèlement à une droite donnée.

881. Étant donnés un nombre quelconque de plans et deux points A et B pris sur deux d'entre eux, trouver le plus court chemin qui conduit du point A au point B, sans sortir des plans proposés. — Application à la recherche du plus court chemin entre deux points sur une surface cylindrique ou conique.

882. Trouver le lieu des points tels, que les plans tangents menés de chacun d'eux à un cylindre ou à un cône donné se coupent sous un angle donné.

883. Deux cylindres de révolution dont les axes sont parallèles ou deux cônes ayant même sommet étant donnés, trouver le lieu des points tels, que les plans tangents menés de chacun d'eux à l'une des surfaces fassent le même angle que les plans tangents menés du même point à l'autre surface.

884. Construire un cône ou un cylindre de révolution, connaissant trois génératrices.

885. Construire un cône de révolution, connaissant : 1° l'axe, le sommet et le rapport des distances d'un point de la surface au sommet et à l'axe; 2° l'axe, le sommet et un plan tangent à la surface; 3° le sommet, un plan dans lequel se trouve l'axe et deux plans tangents à la surface; 4° trois plans tangents à la surface.

886. La Lune et le Soleil étant supposés parfaitement sphériques et le volume du Soleil étant environ 63 000 000 de fois celui de la Lune, calculer le rapport des distances des centres de ces deux astres à la Terre, lorsqu'ils ont même diametre apparent, c'est-à-dire lorsqu'ils sont vus sous le même angle.

887. Les rayons de la Lune, de la Terre et du Soleil étant proportionnels aux nombres $\frac{3}{11}$, 1 et 108,5, trouver le rapport des distances du centre de la Terre aux centres des deux autres astres, lorsqu'on suppose les centres de ces trois globes sur l'axe d'un cône de révolution qui leur est tangent; considérer le cas où les trois astres sont tangents à une même nappe, et celui où la Terre étant située dans une nappe, les deux autres astres sont dans la nappe opposée.

§ VIII. — *Appendice.*

*888. Partager la surface sphérique en parties égales par des polygones égaux et réguliers.

889. Le volume d'un cube est égal à six fois le volume de l'octaèdre régulier qui a ses sommets aux centres des faces du cube.

890. Les milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier sont les sommets d'un octaèdre régulier.

891. Trouver l'aire et le volume d'un polyèdre régulier.

892. Connaissant le rayon d'une sphère, trouver l'aire et le volume des polyèdres réguliers inscrits.

893. Mener par un point donné un plan tangent à deux sphères données.

894. Mener un plan tangent à trois sphères données.

895. Si l'on donne une sphère et deux points quelconques dans l'espace, les distances de ces points au centre de la sphère sont proportionnelles aux distances respectives de chacun d'eux au plan polaire de l'autre.

896. Soient AA_1A_2 un triangle sphérique et O un point de la sphère correspondante. Si l'on élève sur l'arc de grand cercle OA un arc de grand cercle perpendiculaire qui vient rencontrer le côté opposé A_1A_2 en B, et si l'on détermine de la même manière B_1 sur AA_2 et B_2 sur AA_1, les trois points B, B_1, B_2, sont sur une même circonférence de grand cercle.

897. Construire une sphère :

1° Respectivement tangente à trois droites données en un point donné de chacune d'elles;

2° Passant par trois points donnés et tangente à un plan ou à une sphère donnée;

3° Passant par deux points donnés et tangente à deux plans ou à deux sphères données;

4° Passant par un point donné et tangente à trois plans ou à trois sphères données;

5° Tangente à trois plans donnés et à une sphère donnée;

6° Tangente à un plan donné et à trois sphères données;

7° Tangente à deux plans donnés et à deux sphères données.

898. Mener par une droite donnée un plan qui coupe deux sphères données suivant des cercles de rayons proportionnels à ceux des sphères.

899. Mener par un point donné un plan qui coupe trois sphères données suivant des cercles de rayons proportionnels à ceux des sphères.

900. De tous les triangles sphériques formés avec deux côtés donnés, le triangle d'aire maximum est celui dans lequel l'angle compris entre ces côtés est égal à la somme des deux autres angles.

901. De tous les triangles sphériques isopérimètres et de même base, le triangle isocèle est un maximum.

902. Deux triangles et un point étant donnés dans un plan, mener par le point une droite telle, que les volumes engendrés par les triangles tournant autour de cette droite soient dans un rapport donné. — Même problème pour deux cercles donnés. — Même problème pour trois triangles ou trois cercles donnés.

903. Étant donnés un cercle et un point intérieur, est-il possible de le

projeter centralement suivant un cercle qui ait pour centre la projection du point donné?

904. Les trois arcs de grand cercle qui, passant par chaque sommet d'un triangle sphérique, le divisent en deux parties équivalentes, se coupent aux deux mêmes points.

905. On peut toujours transformer un groupe de trois sphères données en un groupe de trois autres sphères de rayons égaux; quel est le lieu des pôles de transformation?

906. Trouver le lieu des points dont les puissances par rapport à trois sphères données sont entre elles comme les rayons de ces sphères.

907. Peut-on, par la méthode des rayons vecteurs réciproques, ramener le problème de la sphère tangente à quatre sphères données au problème de la sphère tangente à une sphère et à trois plans? Quel point faut-il choisir pour pôle de transformation?

908. Étant données quatre sphères de rayons $r_1+\rho$, $r_2+\rho$, $r_3+\rho$, $r_4+\rho$, trouver le lieu que décrit leur centre radical quand on fait varier ρ. — Quel est le problème analogue de Géométrie plane?

909. Par deux points A et B donnés sur la surface de la sphère, on fait passer des cercles auxquels on mène ensuite des grands cercles tangents par un point C pris sur l'arc de grand cercle AB prolongé; quel est le lieu des points de contact?

910. Étant donnés un cercle et deux points de la sphère, mener par ces deux points un second cercle qui coupe le premier en deux points distants d'une longueur donnée.

911. Étant donnés sur une sphère deux grands cercles et un petit cercle A, mener aux deux grands cercles un cercle tangent B tel, que si l'on mène ensuite aux deux cercles A et B deux tangentes communes sphériques, leur angle soit égal à un angle donné.

912. Étant donnés sur une sphère deux points et un grand cercle, trouver sur ce cercle un point tel, que la somme de ses distances sphériques aux deux points donnés soit égale à un arc donné.

913. Étant donnés sur une sphère un point et deux grands cercles, mener par le point un cercle qui coupe les deux autres sous des angles dont la somme soit donnée.

914. Construire un triangle sphérique, connaissant son aire, un angle et un point par lequel doit passer le côté opposé à cet angle.

915. Construire un triangle sphérique, connaissant un angle, le côté opposé et le cercle inscrit au triangle.

916. Étant donnés sur un cercle de la sphère deux points A et B, trouver sur ce cercle un troisième point C tel, que les deux grands cercles CA et CB se coupent sous un angle donné.

917. Le cercle variable qui, sur une sphère, coupe deux cercles fixes chacun sous un angle constant, touche constamment deux autres cercles fixes de la même sphère.

918. Décrire sur une sphère donnée un cercle qui soit tangent à deux cercles donnés et qui coupe en deux parties égales la circonférence d'un troisième cercle donné.

919. Décrire sur une sphère donnée un cercle qui coupe trois cercles donnés A, B, C, chacun en deux points diamétralement opposés.

920. Décrire sur une sphère donnée un cercle qui coupe deux cercles donnés sous des angles donnés et qui rencontre un troisième cercle donné en deux points diamétralement opposés.

921. Décrire sur une sphère donnée un cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles également donnés.

922. Par un point donné sur une sphère, mener un cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles égaux.

923. Décrire sur une sphère donnée un cercle qui coupe quatre cercles donnés sous des angles égaux.

924. Une sphère variable, mais assujettie à passer par deux points fixes, touche une sphère fixe en une suite de points formant une circonférence de cercle.

925. Une sphère variable, mais assujettie à passer par trois points fixes, coupe une sphère fixe suivant une série de cercles dont les plans passent par une même droite.

926. Quel est, sur la sphère, l'analogue du théorème de Ménélaüs en Géométrie plane (405)?

LIVRE VIII.

LES COURBES USUELLES.

§ I. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ELLIPSE.

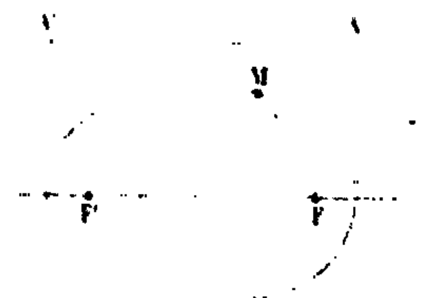
DÉFINITION ET TRACÉ DE LA COURBE.

962. L'*ellipse* est une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes de son plan est égale à une longueur constante. Ainsi (*fig.* 486), les deux points fixes étant F et F' et la longueur donnée étant représentée par la droite AA', on a pour tout point M de l'ellipse

$$MF + MF' = AA'.$$

D'après cela, pour décrire une ellipse d'*un mouvement continu*, on plante sur la feuille de dessin, en F et en F', deux

Fig. 486.



épingles qu'on entoure d'un fil sans fin (c'est-à-dire dont les deux bouts sont réunis) auquel on donne la longueur totale FF' + AA'. On tend constamment ce fil à l'aide d'un crayon que l'on fait mouvoir sur le papier jusqu'à ce qu'on soit ramené au point de départ. La pointe du crayon trace évidemment l'ellipse demandée; car, pour une position quelconque M de cette pointe, on a

$$FF' + MF + MF' = FF' + AA' \quad \text{ou} \quad MF + MF' = AA'.$$

Le procédé qu'on vient d'indiquer est surtout applicable sur le terrain : on remplace alors les épingles par des piquets, le fil par une corde et le crayon par un jalon. Nous mentionnerons plus loin d'autres tracés bien préférables au point de vue de l'exécution des épures.

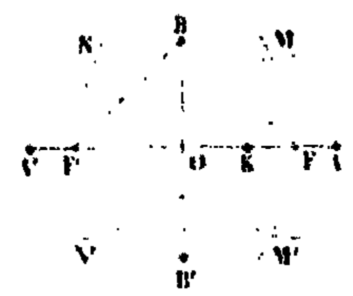
963. Les points F et F′ sont les *foyers* de l'ellipse, les droites MF et MF′ sont les *rayons vecteurs* du point M. La longueur constante AA′ est ordinairement représentée par $2a$, la distance FF′ ou *distance focale* est représentée par $2c$. L'existence du triangle MFF′ entraîne alors la condition $2c < 2a$ ou $c < a$.

Le rapport $\frac{c}{a}$ est l'*excentricité* de l'ellipse. Cette excentricité peut varier de 0 à 1. Pour $c = 0$, elle est nulle, les foyers se confondent et l'ellipse devient un cercle de rayon a. Pour $c = a$, l'excentricité est égale à 1, et l'ellipse se réduit à la portion de droite $FF' = 2a$. Entre ces deux limites, l'ellipse se rapproche d'autant plus de la droite FF′ que son excentricité est plus grande.

964. On peut aussi tracer l'ellipse par points.

En effet, marquons (*fig.* 487) le milieu O de la distance focale

Fig. 487.



FF′ et, de part et d'autre du point O, prenons $OA = OA' = a$; puis, un point quelconque K sur AA′. Si des points F et F′ comme centres, avec des rayons respectivement égaux à AK et A′K, nous décrivons des arcs de cercle, leurs points d'intersection M et M′ appartiendront à l'ellipse, puisqu'on aura

$$MF + MF' = M'F + M'F' = AK + A'K = 2a.$$

La distance des centres FF′ étant toujours moindre que la somme $2a$ des rayons, il suffit, pour l'intersection des deux circonférences, que cette distance soit plus grande que la différence des rayons, c'est-à-dire qu'on ait

$$FF' > A'K - AK \quad \text{ou} \quad 2c > 2a - 2AK.$$

La condition cherchée est donc $AK > a - c$ ou $AK > AF$.

D'ailleurs on peut échanger les centres F et F' sans modifier les rayons employés, de manière à obtenir pour chaque point K quatre points M et M', N et N', de l'ellipse. Les limites des positions du point K sont alors l'un des foyers F et le point O. Tout ceci résulte immédiatement de la symétrie de l'équation de condition $MF + MF' = 2a$ par rapport aux deux rayons vecteurs d'un même point.

Si le point K est en O, les points correspondants de l'ellipse sont en B et en B' sur la perpendiculaire élevée à la droite FF' par son milieu. Si le point K est en F, les deux points correspondants de l'ellipse sont en A et en A'. Le rayon vecteur minimum est AF ou $a - c$, le rayon vecteur maximum est A'F ou $a + c$.

THÉORÈME.

965. *L'ellipse a : 1° pour axes, la droite* AA' *qui passe par ses deux foyers, et la droite* BB' *perpendiculaire au milieu de la première; 2° pour centre, l'intersection de ces deux droites.*

On appelle *axe* d'une courbe toute droite par rapport à laquelle les divers points de cette courbe sont symétriques deux à deux; on appelle *centre* d'une courbe tout point par rapport auquel les divers points de cette courbe sont symétriques deux à deux (670).

1° Soit M un point de l'ellipse (*fig.* 488); on aura

$$MF + MF' = 2a.$$

Supposons alors que le plan de la figure fasse une demi-révolution autour de AA'. Dans ce mouvement, les foyers restent fixes, le point M vient dans la position symétrique M_1 et, comme le triangle MFF' ne se déforme pas, on a

$$M_1F + M_1F' = 2a,$$

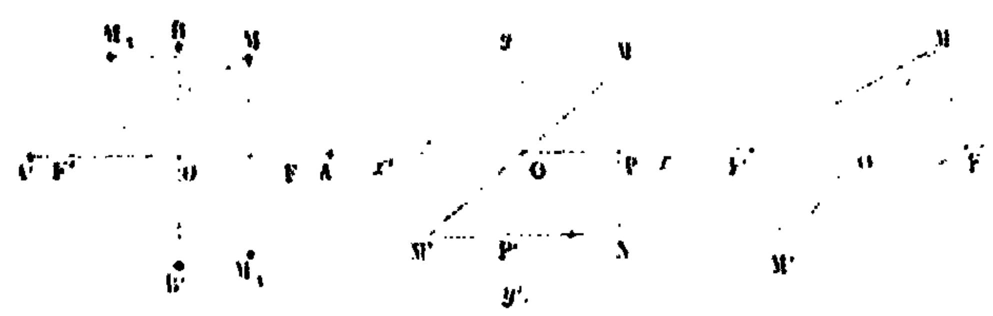
c'est-à-dire que le point M_1 appartient à l'ellipse. Donc, à tout point M de l'ellipse correspond un point M_1, symétrique de M par rapport à AA'.

Si le plan de la figure fait de même une demi-révolution autour de BB′, les foyers ne font que s'échanger, le point M vient dans la position symétrique M_1 et, comme le triangle MFF′ ne se déforme pas, on a encore

$$M_1F + M_1F' = 2a;$$

ce qui montre qu'à tout point M de l'ellipse correspond un autre point M_1 de la courbe, symétrique de M par rapport à BB′.

Fig. 488. Fig. 489. Fig. 490.



2° L'autre partie de la proposition n'est qu'un cas particulier de ce théorème plus général : *Quand une courbe possède deux axes rectangulaires xx' et yy', leur intersection O est un centre de la courbe* (*fig.* 489).

Soient M un point de la courbe, M′ son symétrique par rapport au point O, et N l'intersection des parallèles menées respectivement aux deux axes par les points M et M′. L'égalité des triangles rectangles (53) MOP, OM′P′, donne

$$MP = OP' = PN \quad \text{et} \quad M'P' = OP = P'N.$$

Le point N est donc à la fois symétrique de M par rapport à xx' et symétrique de M′ par rapport à yy'. Or, le point N étant sur la courbe comme symétrique de M, le point M′ en fait aussi partie comme symétrique de N. Donc, à tout point M de la courbe correspond un point M′ symétrique de M par rapport à O.

Il résulte de là que le milieu O de la distance focale FF′ est un centre de l'ellipse.

On peut d'ailleurs le démontrer directement comme il suit (*fig.* 490) :

Soient M un point de l'ellipse et M′ son symétrique par rapport à O; menons les rayons vecteurs de ces points. Les diagonales MM′ et FF′ se coupant mutuellement en parties égales, le quadrilatère MFM′F′ est un parallélogramme (90, 4°), et le point M′ appartient à l'ellipse en vertu de l'égalité des deux contours FMF′ et FM′F′.

COROLLAIRES.

966. On appelle *longueurs* des axes de l'ellipse les longueurs AA′ et BB′ interceptées sur ces axes par la courbe (*fig.* 487). La longueur du premier axe AA′ est donc (964) égale à $2a$, la longueur du second BB′ est représentée par $2b$.

La perpendiculaire BO (*fig.* 487) étant moindre que l'oblique BF $= a$, on a

$$b < a.$$

AA′ est dit alors le *grand axe* et BB′ le *petit axe* de l'ellipse.

Les extrémités A et A′, B et B′, des deux axes sont appelées les *sommets* de la courbe.

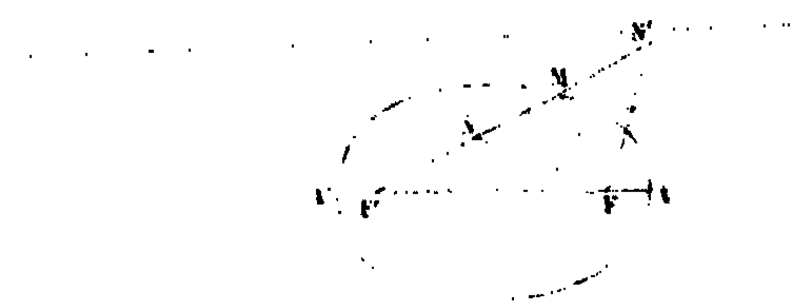
Le triangle rectangle BOF (*fig.* 487) donne $a^2 = b^2 + c^2$, relation qui permet de déterminer l'une des trois quantités a, b, c, lorsqu'on connaît les deux autres.

967. Quand on donne les longueurs a et b, il est facile de déterminer graphiquement les foyers. On n'a qu'à décrire de l'extrémité B du petit axe comme centre (*fig.* 487), avec un rayon égal à a, un arc de cercle qui coupe le grand axe aux deux foyers F et F′.

THÉORÈME.

968. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à l'ellipse, la somme de ses distances aux deux foyers est plus petite ou plus grande que* $2a$.

Fig. 491.



Soit d'abord (*fig.* 491) un point N intérieur à l'ellipse. Joignons ce point aux deux foyers, prolongeons F'N jusqu'à la rencontre de la courbe en M, et menons MF. Un théorème connu (30) donne immédiatement

$$NF + NF' < MF + MF' \quad \text{ou} \quad NF + NF' < 2a.$$

Soit de même un point N' extérieur à l'ellipse. Joignons ce point aux deux foyers; N'F' coupant la courbe au point M, menons MF. En s'appuyant sur le même théorème, on aura ici

$$N'F + N'F' > MF + MF' \quad \text{ou} \quad N'F + N'F' > 2a.$$

COROLLAIRE.

969. Le théorème précédent, rapproché de la définition de l'ellipse, fournit un criterium pour juger de la position d'un point quelconque du plan de la courbe par rapport à cette courbe supposée non tracée. *Suivant que la somme des distances d'un point aux deux foyers est supérieure, égale ou inférieure à 2a, ce point est hors de la courbe, sur la courbe ou dans son intérieur.*

THÉORÈME.

970. *La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs du point de contact, extérieurement à leur angle.*

Prenons sur l'ellipse (*fig.* 492) deux points voisins M et M'; menons la sécante MM'S et les rayons vecteurs des deux points M et M'. Portons sur F'M une longueur F'D = F'M' et sur FM une longueur FC = FM'. MD représente alors l'augmentation que subit le rayon vecteur mené du foyer F' quand on passe du point M au point M', MC la diminution que subit le rayon vecteur mené du foyer F quand on passe du même point M au même point M'; comme la somme des rayons vecteurs d'un point de l'ellipse reste constante, MD est égal à MC.

Cela posé, d'un point quelconque G de la sécante MM'S, menons aux droites M'D et M'C des parallèles GI et GH jusqu'à la rencontre des rayons vecteurs du point M. Le quadrilatère GHMI étant semblable au quadrilatère M'CMD (214), l'égalité de MD et de MC entraîne celle de MI et de MH.

Les droites GH et GI, étant parallèles aux bases M'C et M'D des triangles isocèles CFM', DF'M', sont perpendiculaires aux bissectrices de leurs angles au sommet. Mais à mesure que le point mobile M' se rapproche du point fixe M, la sécante MM'S se rapproche de la tangente au point M. Les bissectrices des angles CFM', DF'M', ayant alors pour limites les rayons vecteurs FM, F'M, du point M, les droites GH et GI ont elles-mêmes pour limites les perpendiculaires abaissées du point G sur ces rayons vecteurs. D'ailleurs, pendant ce mouvement, MH varie en restant toujours égal à MI.

Fig. 492.

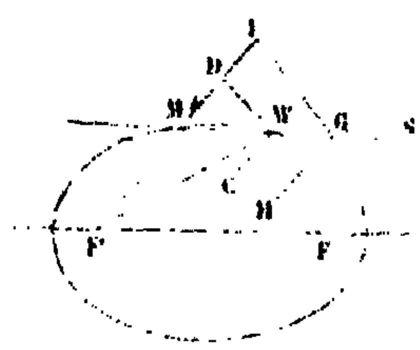
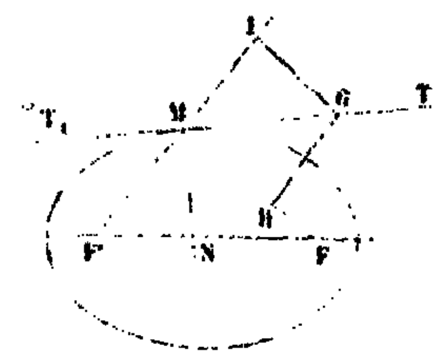


Fig. 493.



La tangente MT au point M (*fig.* 493) doit donc être telle, que si, d'un point quelconque G de cette droite, on abaisse des perpendiculaires GH et GI sur les rayons vecteurs MF et MF' du point M, on ait MH = MI. Les triangles rectangles MGH, MGI, sont alors égaux (54), et il en est de même des angles GMH, GMI. ***La tangente à l'ellipse est donc bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre rayon.***

L'angle F'MT₁ étant l'opposé par le sommet de l'angle GMI, les deux angles GMH ou FMT et F'MT₁ sont égaux, ce qui vérifie le premier énoncé du théorème.

Corollaires.

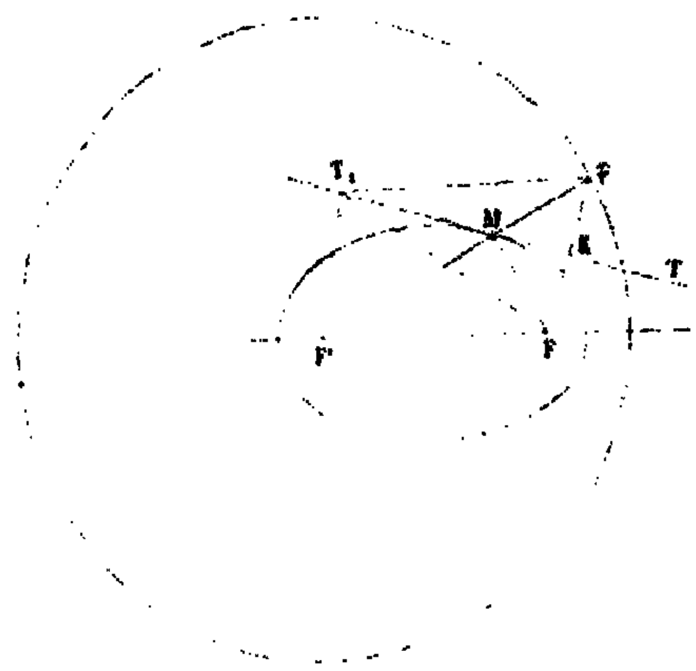
971. ***La tangente à l'ellipse n'a qu'un point commun avec la courbe.***

Abaissons du foyer F (*fig.* 494), sur la tangente MT au point M, une perpendiculaire FK qui vient rencontrer en φ le prolongement de F'M. La tangente étant bissectrice de l'angle FMφ, l'égalité des triangles rectangles FMK, φMK (37), donne FK = φK, c'est-à-dire que le point φ est le symétrique du foyer F par rapport à la tangente MT. L'égalité des mêmes triangles donne $MF = M\varphi$ et, par suite,

$$F'\varphi = MF + MF' = 2a.$$

Cela posé, la tangente étant perpendiculaire sur le milieu

Fig. 494.



de $F\varphi$, un point quelconque T_1 de cette droite est équidistant de F et de φ. On a donc, d'après le triangle $F'T_1\varphi$,

$$T_1F + T_1F' = T_1\varphi + T_1F' \quad \text{ou} \quad T_1F + T_1F' > F'\varphi = 2a.$$

Tous les points de la tangente MT, sauf le point M, sont donc extérieurs à l'ellipse (969).

972. La tangente en un point d'une courbe peut couper la courbe en d'autres points; mais elle a nécessairement (116) avec la courbe au moins un point commun de moins que les droites qui en ont le plus. De ce qu'on vient de démontrer, il résulte donc qu'une droite ne peut rencontrer l'ellipse en plus de deux points, c'est-à-dire que *l'ellipse est une courbe convexe*.

973. Si l'on mène au point M (*fig.* 493) une perpendiculaire MN à la tangente MT, les deux angles FMN, F'MN, sont égaux comme compléments d'angles égaux. Donc, *la normale* *à l'ellipse est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs du point de contact.*

La normale en un sommet de l'ellipse se confond avec l'axe correspondant et la tangente est perpendiculaire à cet axe, de sorte que la courbe est *inscrite* dans le rectangle construit sur ses axes.

Les rayons vecteurs d'un point de l'ellipse, la normale et la tangente en ce point, déterminent sur une sécante quelconque quatre points conjugués deux à deux (199).

SCOLIE.

974. Les propriétés précédentes justifient la dénomination de *foyer*. L'angle d'incidence et l'angle de réflexion étant égaux d'après une loi physique, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent de l'un des foyers F d'une ellipse, viennent, après leur réflexion sur la courbe, converger à l'autre foyer F'.

THÉORÈME.

975. *Le lieu des points symétriques φ de l'un des foyers* F *de l'ellipse, par rapport aux tangentes, est un cercle décrit de l'autre foyer* F' *comme centre, avec la longueur* $2a$ *du grand axe pour rayon* (*fig.* 494).

Le premier alinéa du n° 971 renferme la démonstration de ce théorème.

On donne au cercle $F'\varphi$ le nom de *cercle directeur relatif au foyer* F'. L'ellipse a deux cercles directeurs correspondant à ses deux foyers.

SCOLIE.

976. *Le lieu des points équidistants d'un cercle de centre* F' *et d'un point intérieur* F, *est une ellipse dont les points* F *et* F' *sont les foyers et qui a pour cercle directeur relatif au foyer* F' *le cercle donné* (*fig.* 494).

En effet, soit M un point du lieu. En le joignant aux deux points F et F' et en prolongeant F'M jusqu'à sa rencontre φ avec la circonférence donnée, on a par hypothèse

$$M\varphi = MF, \quad \text{d'où} \quad MF + MF' = F'\varphi.$$

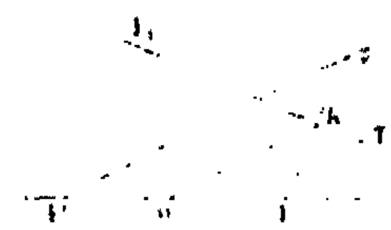
Pour construire le lieu, il suffit évidemment de joindre le point F à un point quelconque φ de la circonférence donnée, et d'élever une perpendiculaire TT, sur le milieu K de la droite $F\varphi$; cette perpendiculaire coupe le rayon $F'\varphi$ en un point M du lieu, et elle est la tangente en ce point (970).

Le cercle directeur d'une ellipse peut donc servir à tracer la courbe par points, lorsqu'on connaît ses foyers et son grand axe. Ce nouveau procédé est plus long que celui indiqué au n° 964; mais il a le grand avantage de donner en même temps la tangente en chaque point déterminé. On peut résumer cette construction comme il suit : *Si d'un point F pris à l'intérieur d'un cercle $F'\varphi$, on mène des droites aux divers points de sa circonférence, les perpendiculaires élevées à ces droites par leurs milieux touchent ou enveloppent une ellipse, qui a pour foyers les points F et F' et pour grand axe le rayon $F'\varphi$.*

THÉORÈME.

977. *Le lieu des projections des foyers d'une ellipse sur ses tangentes est la circonférence de cercle décrite sur le grand axe comme diamètre.*

Fig. 495.



Soient (*fig.* 495) F et F' les deux foyers, K la projection du foyer F sur une tangente quelconque TT_1, et φ le symétrique de F par rapport à cette tangente. Le côté $F'\varphi$ du triangle $FF'\varphi$ étant égal à $2a$ (975), la droite OK qui joint les milieux des deux autres côtés est égale à a. Le point K appartient donc à la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre.

Réciproquement, tout point K de cette circonférence est la projection de l'un des foyers F sur une tangente. Car si l'on prolonge FK d'une quantité $K\varphi = FK$, on aura évidemment

$$F'\varphi = 2OK = 2a.$$

Par suite, le point φ appartient au cercle directeur relatif au foyer F', et la perpendiculaire élevée sur Fφ par son milieu K est (976) une tangente à l'ellipse.

Le cercle OK est dit le *cercle principal* de l'ellipse.

SCOLIE.

978. *Si le sommet d'une équerre décrit le cercle principal d'une ellipse, pendant que l'un de ses côtés passe constamment par un foyer de la courbe, l'autre côté de l'équerre lui reste toujours tangent.* C'est là un nouveau moyen (976) d'obtenir l'ellipse comme enveloppe de ses tangentes.

PROBLÈME.

979. *Mener une tangente à l'ellipse par un point donné.*

1° *Si le point donné* M *est sur la courbe*, on le joint aux deux foyers (*fig.* 493), et l'on mène la bissectrice de l'angle FMI formé par l'un des rayons vecteurs MF et le prolongement MI de l'autre rayon MF' (970).

2° *Si le point donné* P *est extérieur à l'ellipse* (*fig.* 496), on remarque que la question serait résolue, si l'on connaissait le symétrique φ de l'un des foyers F par rapport à la tangente cherchée; car on aurait dès lors cette tangente en abaissant de P une perpendiculaire TT_1 sur Fφ : la droite TT_1 couperait d'ailleurs F'φ au point de contact M (976). Or, le point φ se

Fig. 496.

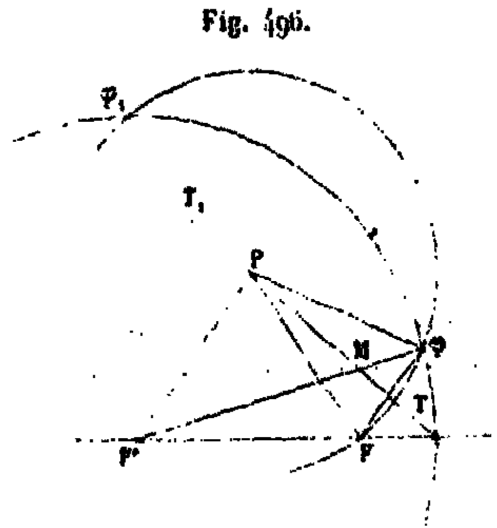
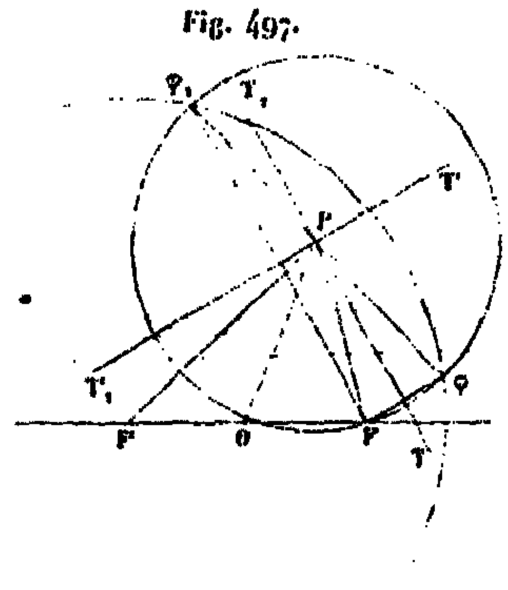


Fig. 497.



trouve à la fois sur le cercle directeur relatif au foyer F' (975) et sur le cercle de centre P et de rayon PF.

Ces deux cercles se coupent toujours quand le point P est extérieur à l'ellipse. En effet, PF′ étant la distance des centres, PF et $2a$ les deux rayons, le triangle PFF′ donne

$$PF' < PF + FF' \quad \text{et, à fortiori,} \quad PF' < PF + 2a.$$

Le point P étant extérieur à la courbe, on peut avoir PF $>$ ou $< 2a$. Si PF est moindre que $2a$, on a

$$PF + PF' > 2a, \quad \text{d'où} \quad PF' > 2a - PF.$$

Si PF est plus grand que $2a$, le triangle PFF′ permet de poser

$$PF' > PF - FF' \quad \text{et, à fortiori,} \quad PF' > PF - 2a.$$

Ainsi, la construction précédente réussit toujours quand le point P est extérieur à la courbe; et comme les circonférences tracées se coupent en deux points φ et φ_1, il y a deux solutions.

COROLLAIRES.

980. Cherchons la condition pour que les deux tangentes menées du point P à l'ellipse soient à angle droit.

Si les deux tangentes TT_1, $T'T'_1$, menées du point P, sont à angle droit (*fig.* 497), comme elles sont respectivement perpendiculaires sur le milieu des droites $F\varphi$, $F\varphi_1$, l'angle $\varphi F \varphi_1$ de ces deux droites doit être lui-même un angle droit. Cet angle étant inscrit dans la circonférence PF dont le centre est P, la droite $\varphi\varphi_1$ est un diamètre de cette circonférence, et P est le milieu de ce diamètre.

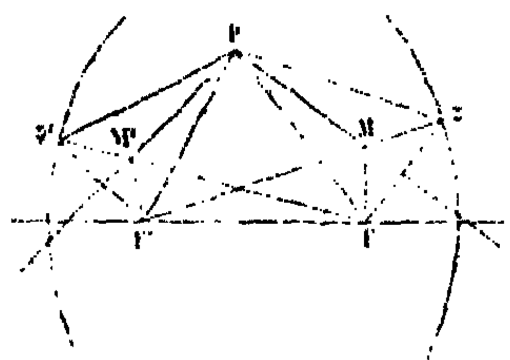
Le lieu des points P est donc le lieu décrit par le milieu de la corde interceptée dans le cercle directeur relatif au foyer F′, par un angle droit tournant autour de son sommet fixe F. Or si l'on joint le point P aux foyers F et F′, on a $P\varphi = PF$, et le triangle rectangle $F'P\varphi$ donne alors

$$\overline{PF'}^2 + \overline{P\varphi}^2 = \overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{F'\varphi}^2 = 4a^2.$$

La somme des carrés des distances du point P aux points F et F′ étant constante, le lieu cherché est une circonférence de cercle concentrique à l'ellipse et qui a pour rayon la médiane OP du triangle PFF′ (234). Comme les sommets du rectangle construit sur les axes et circonscrit à l'ellipse (973) font nécessairement partie du lieu, le rayon OP est égal à la demi-diagonale de ce rectangle, c'est-à-dire à $\sqrt{a^2+b^2}$.

981. *Les tangentes PM, PM', menées à l'ellipse par un point extérieur P, font des angles égaux avec les droites qui vont du point P aux deux foyers; la droite qui va du point P à l'un des foyers est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux deux points de contact M et M' (fig. 498).*

Fig. 498.



Menons les deux cercles directeurs de l'ellipse. φ étant le symétrique de F par rapport à la tangente PM et φ' le symétrique de F' par rapport à la tangente PM', les deux triangles PFφ' et PF'φ sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Les angles FPφ' et F'Pφ sont donc égaux. Si l'on enlève la partie commune FPF', les restes FPφ, F'Pφ', sont égaux, ainsi que leurs moitiés MPF, M'PF'.

En second lieu, l'égalité des triangles PFφ', PF'φ, entraîne celle des angles PFφ', PφF'. Mais les deux triangles PMφ, PMF, étant égaux (40), l'angle PφF' est aussi égal à l'angle PFM, et la droite PF est la bissectrice de l'angle MFM'.

PROBLÈME.

982. *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée.*

Tout revient encore à trouver le point symétrique φ de l'un des foyers F par rapport à la tangente cherchée. Or, ce point est à l'intersection du cercle directeur relatif au foyer F' (975) et de la perpendiculaire menée du foyer F sur la droite donnée DD' (*fig.* 499). Cette perpendiculaire coupe toujours le cercle F' en deux points φ et φ_1, puisque le point F est intérieur à ce cercle. Les perpendiculaires TT_1 et $T'T'_1$ élevées aux droites $F\varphi$ et $F\varphi_1$ par leurs milieux sont les tangentes demandées, et leurs points de contact sont à leurs rencontres respectives avec les rayons $F'\varphi$ et $F'\varphi_1$ (976).

Fig. 499.

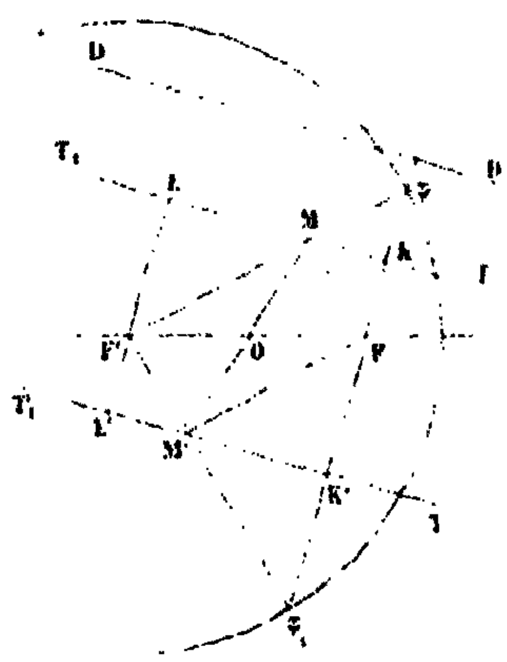


Fig. 500.

COROLLAIRES.

983. *Les deux points de contact* M *et* M' *des deux tangentes parallèles* TT_1, $T'T'_1$, *sont symétriques par rapport au centre* O *de l'ellipse.*

En effet, les triangles $FM\varphi$, $FM'\varphi_1$, $\varphi F'\varphi_1$, sont des triangles isocèles ayant tous un angle égal à la base; ils sont dès lors semblables et ont leurs côtés parallèles. La figure MFM'F' étant un parallélogramme, la diagonale MM' passe par le milieu O de la diagonale FF' et y est divisée en deux parties égales.

Inversement, *les tangentes menées à l'ellipse en deux points symétriques par rapport au centre sont parallèles.* Car le quadrilatère MFM'F' étant dans ce cas un parallélogramme, puisque ses diagonales se coupent en parties égales, les angles $FM\varphi$, $FM'\varphi_1$ ont leurs côtés parallèles et sont égaux. Il en est donc de même de leurs moitiés (970) FMT, $\varphi_1 M'T'$, ce qui entraîne le parallélisme des tangentes MT, M'T', aux points M et M'.

984. La propriété précédente appartient d'ailleurs à toutes les courbes à centre. *Dans toute courbe à centre, les tangentes en deux points M et M', symétriques par rapport au centre O, sont parallèles et, par suite, équidistantes du centre.*

En effet, si N (*fig.* 500) est un point de la courbe voisin de M, et N' son symétrique par rapport à O, l'égalité des triangles MON, M'ON' (38), prouve le parallélisme des cordes ou sécantes MN, M'N', et leur égale distance au centre. Quand N tend vers M, N' tend vers M'. Les deux sécantes tournent donc à la fois autour des points M et M', de manière à devenir ensemble tangentes, en restant toujours parallèles et équidistantes du centre.

985. Les points K et K' (*fig.* 499) appartiennent au cercle principal de l'ellipse (977). Les deux segments FK, FK', étant alors ceux d'une corde quelconque de ce cercle passant par le foyer F, leur produit est constant. On peut donc dire que *le produit des distances d'un foyer à deux tangentes parallèles est constant.* Si l'on mène par le foyer F' la corde LL' du cercle principal qui est parallèle à KK', on a évidemment FK' = F'L. On peut donc dire aussi que *le produit des distances des deux foyers à une même tangente est constant.* Si l'on veut connaître cette constante, il suffit de considérer la tangente à l'une des extrémités du petit axe, et l'on obtient immédiatement le carré du demi petit axe ou b^2 pour sa valeur.

Scolie.

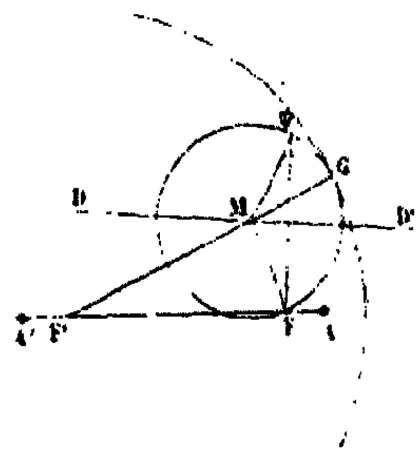
986. Les constructions des nos 979 et 982 n'exigent pas que la courbe soit tracée; il faut seulement qu'elle soit définie par ses deux foyers et la longueur du grand axe.

PROBLÈME.

987. *Étant donnés les foyers F et F' et le grand axe AA' d'une ellipse, déterminer ses points de rencontre avec une droite DD'* (*fig.* 501).

Supposons le problème résolu, et déterminons le symétrique φ du foyer F par rapport à DD'. M étant l'un des points de rencontre de la droite DD' avec l'ellipse, on aura $M\varphi = MF$. Prolongeons F'M d'une longueur MG = MF; F'G sera égal à AA′, et le point G appartiendra au cercle directeur relatif au foyer F′. Le cercle décrit du point M comme centre avec MF pour rayon passe donc par les deux points F et φ et est tangent au cercle directeur F′G. La question est ainsi ramenée à trouver le centre M d'un cercle passant par deux points donnés F et φ et tangent à un cercle donné F′G. Nous avons résolu ce problème (275, 2°).

Fig. 501.



Comme le foyer F est intérieur au cercle directeur relatif au foyer F′, il y aura évidemment deux solutions, une seule ou zéro, suivant que le point φ sera lui-même intérieur, commun ou extérieur au cercle directeur F′G. La droite DD′ sera donc ***sécante, tangente*** ou ***extérieure*** à l'ellipse, dans les mêmes conditions.

COROLLAIRE.

988. *Une droite ne pouvant rencontrer une ellipse en plus de deux points, l'ellipse est une courbe convexe* (972).

§ II. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'HYPERBOLE.

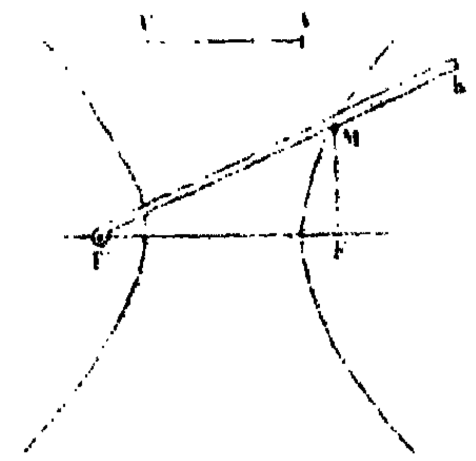
989. L'***hyperbole*** est une courbe plane telle, que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes de son plan est égale à une longueur constante. Ainsi (*fig.* 502), les deux points fixes étant F et F′ et la longueur donnée étant représentée par la droite AA′, on aura pour tout point M de l'hyperbole

$$MF - MF' = \pm AA',$$

suivant que le point considéré sera plus éloigné du point F ou du point F'.

D'après cela, pour décrire un arc d'hyperbole d'un *mouvement continu*, on prend une règle F'K dont on fixe l'une des extrémités au point F' (*fig.* 502), de manière qu'elle puisse

Fig. 502.



seulement tourner autour de ce point. Un fil, dont la longueur est moindre que celle de la règle de la constante AA', est fixé par l'une de ses extrémités au point F et, par l'autre, au point K. Si l'on tend alors constamment ce fil le long de la règle à l'aide d'un crayon, en faisant tourner la règle autour de F', la pointe du crayon trace un arc de l'hyperbole demandée; car, pour une position quelconque M de cette pointe, on a (dans le cas de la figure)

$$MF' - MF = (MF' + MK) - (MF + MK) = AA'.$$

En prenant pour centre de rotation de la règle le point F, et en attachant la seconde extrémité du fil au point F', on obtient la seconde partie de la courbe. Quand la règle est au-dessus de FF', le fil doit être tendu contre son arête inférieure; c'est l'inverse, quand la règle est au-dessous de FF'.

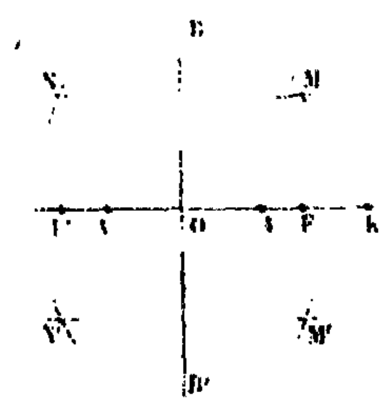
On voit que l'hyperbole est formée de deux parties qui ne peuvent avoir aucun point commun, puisqu'on a toujours, pour la partie de droite de la figure, $MF' > MF$, et pour celle de gauche, $MF > MF'$. Chaque partie est d'ailleurs composée de deux branches qui s'étendent indéfiniment au-dessus et au-dessous de la droite FF'; rien ne limite en effet l'éloignement des points obtenus sur la courbe, que la longueur même de la règle et du fil employés. L'hyperbole est donc une courbe *à branches infinies*, aussi bien dans le sens FF' que dans le sens perpendiculaire.

990. Les points F et F' sont les *foyers* de l'hyperbole, les droites MF et MF' sont les *rayons vecteurs* du point M. La longueur AA' est ordinairement représentée par $2a$. La distance FF' se nomme *distance focale* et on la représente par $2c$. L'existence du triangle MFF' entraîne la condition $2c > 2a$ ou $c > a$.

Le rapport $\frac{c}{a}$ est l'*excentricité* de l'hyperbole. Cette excentricité peut varier de 1 à ∞. Pour $c = a$, elle est égale à 1, et l'hyperbole se réduit aux deux portions de la droite FF' qui sont séparées par la distance FF'; pour $a = 0$, elle est infinie, et l'hyperbole se réduit à la perpendiculaire élevée sur le milieu de FF'. Entre ces deux limites, l'hyperbole se rapproche d'autant plus de la droite FF' que l'excentricité est plus petite.

991. On peut aussi tracer l'hyperbole *par points* (*fig.* 503).

Fig. 503.



En effet, marquons le milieu O de la distance focale FF' et, de part et d'autre du point O, prenons $OA = OA' = a$, puis un point K quelconque sur le prolongement de OA. Si des points F et F' comme centres, avec des rayons respectivement égaux à AK et à A'K, nous décrivons des arcs de cercle, leurs points d'intersection M et M' appartiendront à l'hyperbole, car on aura

$$MF' - MF = M'F' - M'F = A'K - AK = 2a.$$

La distance des centres FF' étant toujours plus grande que la différence $2a$ des rayons, il suffit, pour l'intersection des deux circonférences, que cette distance soit moindre que la somme des rayons, c'est-à-dire qu'on ait

$$FF' < AK + A'K \quad \text{ou} \quad 2c < 2AK + 2a.$$

La condition cherchée est donc

$$AK > c - a \quad \text{ou} \quad AK > AF.$$

Comme on peut échanger les centres sans modifier les rayons, chaque point K permet d'obtenir quatre points M et M', N et N' de l'hyperbole. Le point K doit seulement être au delà du point F, sans que rien limite sa position à droite de ce point. Ce que nous venons de dire résulte d'ailleurs de la symétrie de l'équation de condition $MF' - MF = \pm 2a$, par rapport aux deux rayons vecteurs.

Si le point K est en F, les points correspondants de l'hyperbole sont les points A et A'. Le rayon vecteur minimum est $c - a$; il n'y a pas de rayon vecteur maximum, puisque les rayons vecteurs d'un point de la courbe peuvent croître jusqu'à l'infini.

THÉORÈME.

992. *L'hyperbole a : 1° pour axes, la droite AA' qui passe par ses deux foyers, et la droite BB' perpendiculaire au milieu de la première; 2° pour centre, l'intersection O de ces deux droites (fig. 503).*

Même démonstration que pour l'ellipse (965), en considérant la différence des rayons vecteurs au lieu de leur somme.

COROLLAIRE.

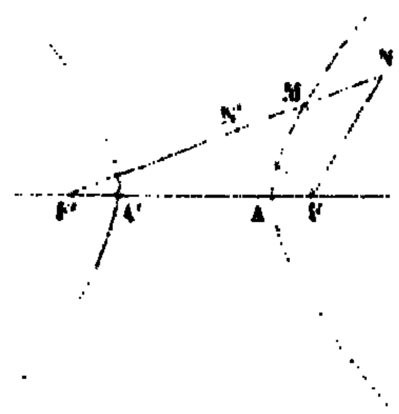
993. Des deux axes AA' et BB', le premier seul rencontre la courbe. L'axe AA' est dit l'axe *transverse* de l'hyperbole, l'axe BB' est dit son axe *non transverse*. Les extrémités A et A' de l'axe transverse sont les *sommets* de la courbe.

THÉORÈME.

994. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à l'hyperbole, la différence de ses distances aux deux foyers est plus grande ou plus petite que 2a (fig. 504).*

Le point N étant intérieur, joignons-le aux deux foyers. NF′ coupant au point M la branche de courbe qui correspond au

Fig. 504.



foyer F, on a

$$NF < MN + MF, \quad \text{d'où} \quad NF' - NF > NF' - MN - MF,$$

c'est-à-dire

$$NF' - NF > MF' - MF \quad \text{ou} \quad 2a.$$

Le point N′ étant extérieur, joignons-le aux deux foyers. F′N′ prolongé coupant au point M la branche de courbe qui correspond au foyer F, on a

$$N'F + MN' > MF, \quad \text{d'où} \quad MF' - N'F - MN' < MF' - MF,$$

c'est-à-dire

$$N'F' - N'F < 2a.$$

Corollaire.

995. Ce théorème, rapproché de la définition de la courbe, fournit un criterium pour juger de la position d'un point quelconque de son plan par rapport à l'hyperbole supposée non tracée. ***Suivant que la différence des distances du point considéré aux deux foyers est inférieure, égale ou supérieure à $2a$, ce point est hors de la courbe, sur la courbe ou dans son intérieur.***

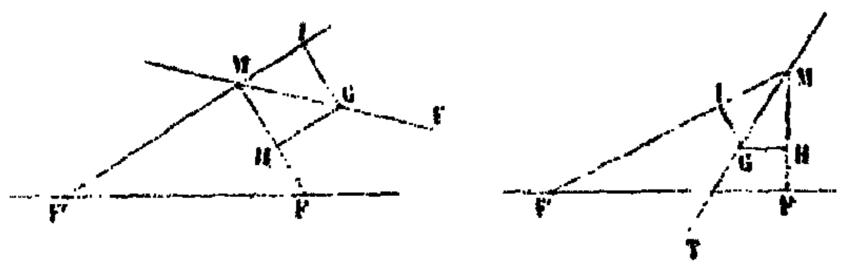
THÉORÈME.

996. *La tangente à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs du point de contact* (*fig.* 505, 506).

Même démonstration que pour l'ellipse (970), en remarquant que dans l'ellipse les rayons vecteurs d'un même point varient en sens contraires, tandis que dans l'hyperbole ils varient dans le même sens.

997. Réciproquement, *la courbe dont la tangente fait des angles égaux, extérieurement ou intérieurement, avec les rayons vecteurs menés du point de contact à deux points fixes, est une ellipse ou une hyperbole dont ces points fixes sont les foyers.*

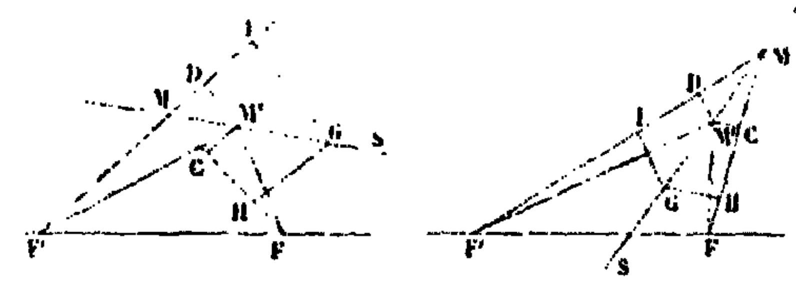
Fig. 505.



En effet, si l'on abaisse d'un point G de la tangente MT (*fig.* 505) des perpendiculaires GH et GI sur les rayons vecteurs du point M, les triangles rectangles ainsi formés seront égaux (53), puisque la tangente est par hypothèse la bissectrice de l'angle HMI; on aura donc MH = MI.

Considérons maintenant la sécante MM'S (*fig.* 506) qui

Fig. 506.



coupe la courbe en M et en M', et portons les rayons vecteurs du point M' sur ceux du point M en FC et en F'D. Si l'on mène alors, d'un point G quelconque de la sécante, les parallèles GH et GI à M'C et à M'D, les quadrilatères M'CMD, GHMI, seront semblables, et l'on aura constamment

$$\frac{MC}{MD} = \frac{MH}{MI}.$$

Mais à la limite, quand le point M' vient en M, la sécante

MM'S est remplacée par la tangente MT, et l'on a MH = MI. Donc, la limite du rapport $\frac{MC}{MD}$ est aussi l'unité.

Or, si les deux rayons vecteurs varient en sens contraires, MD étant la diminution du premier, MC est l'augmentation égale du second, et la courbe est une ellipse, puisque la somme des rayons vecteurs d'un même point demeure constante. Si les deux rayons vecteurs varient dans le même sens, MD étant l'augmentation de l'un, MC est l'augmentation égale de l'autre, et la courbe est une hyperbole, puisque la différence des rayons vecteurs d'un même point demeure constante.

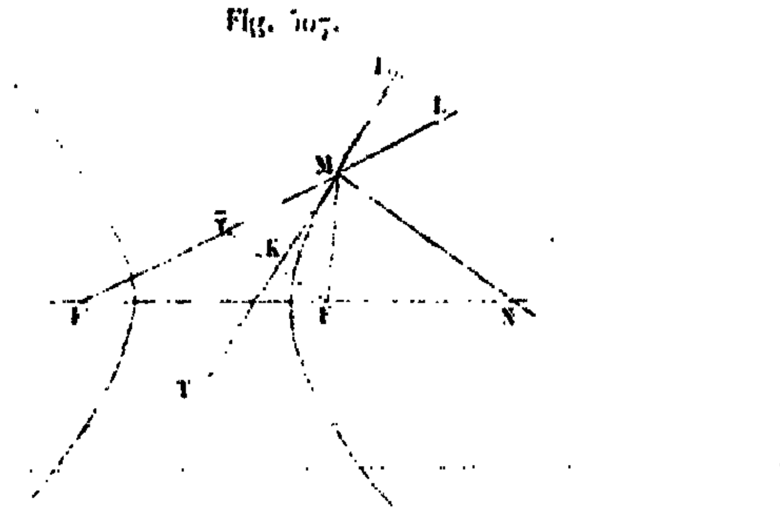
COROLLAIRES.

998. *Tous les points de la tangente* MT, *sauf le point* M, *sont extérieurs à l'hyperbole qui est, par suite, une courbe convexe.*

Même démonstration que pour l'ellipse (971), en remplaçant la somme des rayons vecteurs par leur différence.

999. Si l'on mène au point M (*fig.* 507) une perpendicu-

Fig. 507.



laire MN à la tangente MT, les angles FMN, LMN, sont égaux comme compléments d'angles égaux. Donc, *la normale à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre rayon.*

La normale en un sommet de l'hyperbole se confond avec l'axe transverse, et la tangente est perpendiculaire à cet axe.

La tangente, la normale et les rayons vecteurs menés en un même point de la courbe rencontrent une sécante quelconque en quatre points conjugués deux à deux (199).

Si une ellipse et une hyperbole ont les mêmes foyers ou sont *confocales*, elles se coupent à angle droit; car, en l'un quelconque des points d'intersection, la tangente de l'une est la normale de l'autre (970, 973).

1000. Dans le cas de l'hyperbole, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent de l'un des foyers F s'éloignent de plus en plus de l'autre foyer F' après leur réflexion sur la courbe; mais toutes leurs directions prolongées viennent y converger.

THÉORÈME.

1001. *Le lieu des points symétriques φ de l'un des foyers* F *par rapport aux tangentes est un cercle (directeur) décrit de l'autre foyer* F' *avec la longueur* 2*a de l'axe transverse pour rayon* (*fig.* 507).

Le lieu des points équidistants d'un cercle de centre F' *et d'un point extérieur* F *est une hyperbole dont les foyers sont les points* F *et* F', *et dont le cercle directeur relatif au foyer* F' *est le cercle donné.*

Même démonstration que pour l'ellipse (975, 976), en remplaçant toujours la somme des rayons vecteurs par leur différence. L'hyperbole a, comme l'ellipse, deux cercles directeurs.

COROLLAIRE.

1002. Ce théorème fournit une nouvelle construction par points (991) de l'hyperbole, qu'on peut résumer comme il suit : *Si, d'un point* F *pris à l'extérieur d'un cercle* F', *on mène des droites aux divers points de sa circonférence, les perpendiculaires élevées à ces droites par leurs milieux enveloppent une hyperbole qui a pour foyers les points* F *et* F' *et pour axe transverse le rayon du cercle* F'; *les points de contact de ces tangentes sont à leurs rencontres avec les prolongements des rayons du cercle* F' *qui correspondent aux points considérés.*

THÉORÈME.

1003. ***Le lieu des projections des foyers d'une hyperbole sur ses tangentes est la circonférence décrite sur l'axe transverse comme diamètre*** (*fig.* 508).

Fig. 508.

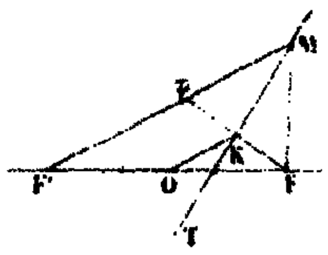
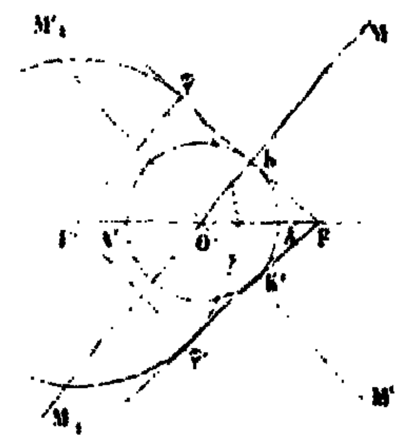


Fig. 509.



Même démonstration que pour l'ellipse (977). Le cercle obtenu est dit le cercle *principal* de l'hyperbole.

COROLLAIRES.

1004. Soient (*fig.* 508) la tangente MT, les rayons vecteurs MF, MF', de son point de contact, φ le symétrique du foyer F par rapport à la tangente MT, K la projection de ce foyer sur la tangente. Les rayons OK et F'φ du cercle principal et du cercle directeur relatif au foyer F' restent toujours parallèles entre eux pendant que, le point φ parcourant le cercle directeur, la droite Fφ tourne autour du foyer F (1002, 1003). Au moment où cette droite devient tangente au cercle directeur, elle le devient donc aussi au cercle principal (263); soient φ et K ses points de contact avec ces deux cercles (*fig.* 509). La tangente qui passe par le point K, étant perpendiculaire à Fφ, n'est alors autre chose que le prolongement du rayon OK et devient parallèle au rayon F'φ, de sorte que son point de contact M s'éloigne à l'infini (1002). La droite OKM ainsi obtenue, qui touche la branche supérieure de la demi-hyperbole de droite à l'infini, est appelée *asymptote* de l'hyperbole.

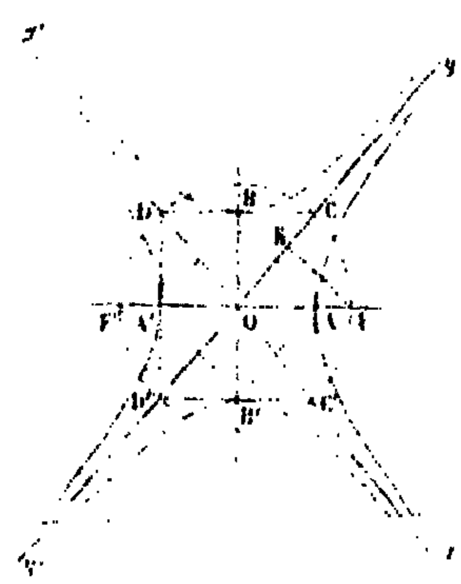
La seconde tangente commune menée au cercle principal et au cercle directeur F' par le foyer F donne une seconde asymptote OK'M', qui touche à l'infini la branche inférieure de la demi-hyperbole de droite.

Les droites OKM, OK'M', étant également inclinées de part et d'autre de l'axe transverse (176), si l'on fait faire à l'hyperbole une demi-révolution autour de son axe non transverse, les foyers ne font que s'échanger ainsi que les deux demi-hyperboles, de sorte que le prolongement OM_1 de la droite OKM est asymptote à la branche inférieure de la demi-hyperbole de gauche, tandis que le prolongement OM'_1 de la droite OK'M' est asymptote à la branche supérieure de cette demi-hyperbole.

En résumé, *l'hyperbole a pour asymptotes les deux droites indéfinies tracées par son centre, parallèlement aux rayons du cercle directeur F' qui correspondent aux tangentes communes menées du foyer F au cercle F' et au cercle principal de la courbe.* Ces droites sont d'un grand secours pour la construction de l'hyperbole, puisqu'elles font connaître les directions vers lesquelles tendent ses branches infinies.

1005. Soient (*fig.* 510) les asymptotes xx', yy', de l'hyper-

Fig. 510.



bole dont les foyers sont F et F' et les axes AA' et BB'. Menons au point A la perpendiculaire AC à l'axe transverse, jusqu'à la rencontre de l'asymptote yy'. D'après ce qui précède, si l'on abaisse aussi FK perpendiculaire sur yy', on aura $OK = a$. Les deux triangles rectangles OAC, OKF, sont donc égaux (54), et

$OC = OF = c$. On voit que a et c étant donnés, on en déduit AC; de même a et AC étant connus, on en déduit c.

Achevons le rectangle CC'D'D. Par analogie avec l'ellipse (966), la longueur $BB' = 2AC$ ainsi déterminée est appelée la *longueur de l'axe non transverse* de l'hyperbole, et on la représente par $2b$. Remarquons que le parallélogramme ABA'B' a ses côtés parallèles aux asymptotes.

Les trois longueurs a, b, c, sont liées entre elles par la relation $c^2 = a^2 + b^2$. Elles sont liées dans l'ellipse par la relation $c^2 = a^2 - b^2$, qui ne diffère de la précédente que par le changement de b^2 en $-b^2$. Par suite, *les propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole qui ne dépendent que des longueurs de leurs axes, se déduisent les unes des autres par le simple changement de b^2 en $-b^2$.*

1006. Lorsqu'on donne les longueurs des axes de l'hyperbole, il est facile de déterminer graphiquement les foyers. On n'a qu'à élever à l'extrémité A de l'axe transverse une perpendiculaire $AC = b$ (*fig.* 510), et à décrire du point O comme centre, avec OC pour rayon, une circonférence qui coupe l'axe transverse aux deux foyers F et F'. On trouve en même temps l'asymptote OC et sa symétrique OC' (1005).

1007. On appelle hyperbole *équilatère* une hyperbole dont les deux axes ont la même longueur. Le rectangle CC'D'D (*fig.* 510) devenant alors un carré, on voit que *les asymptotes d'une hyperbole équilatère sont à angle droit l'une sur l'autre.*

1008. On entend par *hyperboles conjuguées* deux hyperboles qui, ayant les mêmes axes et, par suite, le même centre, la même distance focale et les mêmes asymptotes, sont situées par rapport à ces asymptotes dans des angles différents; c'est-à-dire que l'axe transverse de l'une est l'axe non transverse de l'autre, et réciproquement (*fig.* 510).

Deux hyperboles conjuguées ne sont identiques et ne peuvent se substituer l'une à l'autre par un quart de révolution, que lorsqu'elles sont équilatères (1007).

PROBLÈME.

1009. *Mener une tangente à l'hyperbole par un point donné.*

Mêmes procédés que pour l'ellipse (979).

COROLLAIRES.

1010. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hyperbole est une circonférence concentrique à la courbe et ayant pour rayon* $\sqrt{a^2-b^2}$ (980, 1005).

La démonstration directe est la même que pour l'ellipse. Seulement, la question revient ici à chercher le lieu des milieux des cordes interceptées dans le cercle directeur relatif au foyer F', par un angle droit dont le sommet F lui est extérieur. Le problème peut alors être impossible, et le lieu cesser d'exister, si l'on a $a < b$.

La tangente de l'angle aigu formé par l'asymptote Oy avec l'axe transverse étant représentée par $\frac{b}{a}$, le problème est impossible quand cet angle est supérieur à 45 degrés ou quand l'angle yOx des deux asymptotes (*fig.* 510) est obtus; il est possible, au contraire, quand cet angle est aigu.

En effet, l'angle des deux asymptotes est précisément (1004) le supplément de celui des deux tangentes qu'on peut mener au cercle directeur F' par le foyer F. Or, ce n'est que lorsque l'angle de ces deux tangentes est obtus, que les deux côtés de l'angle droit dont le sommet est en F peuvent rencontrer à la fois le cercle F'.

Lorsque l'angle des asymptotes est droit, celui des deux tangentes menées du foyer F au cercle directeur F' est aussi droit, et il n'y a pas d'autre angle droit circonscrit à l'hyperbole que celui de ses asymptotes. Ce résultat limite est d'ailleurs évident, car la courbe étant alors équilatère (1007), on a $a=b$, et le lieu se réduit au centre de l'hyperbole.

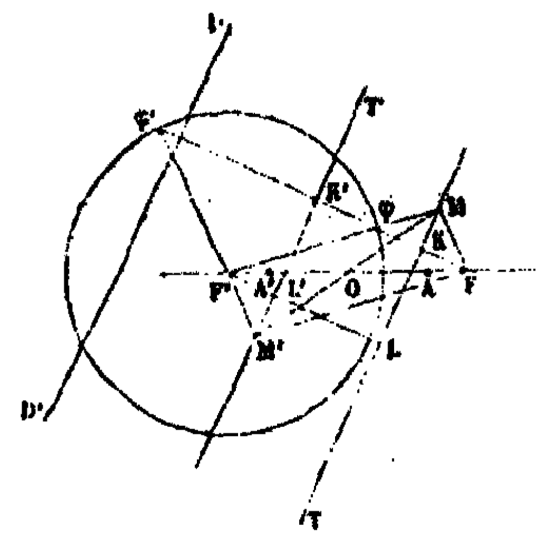
En général, le problème n'est possible que pour l'une des deux hyperboles conjuguées (1008) déterminées par les axes a et b.

1011. *Les tangentes* PM, PM', *menées à l'hyperbole par un point extérieur* P, *font des angles égaux avec les droites qui vont du point* P *aux deux foyers; la droite qui va du point* P *à l'un des foyers est bissectrice de l'angle intérieur ou extérieur des rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux deux points de contact* M *et* M', *suivant que les deux tangentes touchent* *l'hyperbole dans la même région ou dans deux régions différentes.*

PROBLÈME.

1012. *Mener à l'hyperbole une tangente parallèle à une droite donnée* (*fig.* 511).

Fig. 511.



Même procédé que pour l'ellipse (982). Seulement, le problème n'est pas toujours possible. Il faut que, si l'on mène par le centre de la courbe une parallèle à la droite donnée, elle ne tombe pas dans les angles des asymptotes qui renferment l'hyperbole. En effet, pour que la perpendiculaire menée du foyer F à la droite donnée rencontre le cercle directeur F', il est nécessaire qu'elle tombe au-dessous de la perpendiculaire FK à l'asymptote (*fig.* 510), qui est tangente à ce cercle directeur. Le problème n'est donc en général possible que pour l'une des deux hyperboles conjuguées déterminées par les axes *a* et *b*.

COROLLAIRES.

1013. *Les deux tangentes parallèles à une droite donnée ont leurs points de contact symétriques par rapport au centre* (983).

1014. *Le produit des distances d'un foyer à deux tangentes parallèles ou le produit des distances des deux foyers à une même tangente est constant* (985).

SCOLIE.

1015. Les constructions des nos 1009 et 1012 n'exigent pas que l'hyperbole soit tracée (986).

PROBLÈME.

1016. *Connaissant les foyers F et F' et l'axe transverse d'une hyperbole, déterminer ses points de rencontre avec une droite donnée.*

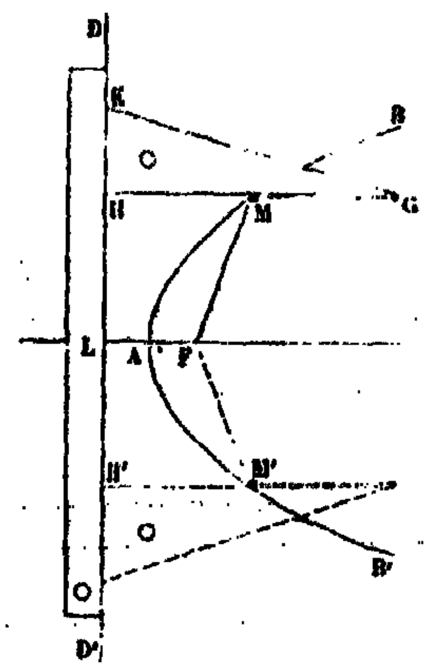
Même procédé que pour l'ellipse (987).

§ III. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE LA PARABOLE.

DÉFINITION ET TRACÉ DE LA COURBE.

1017. La *parabole* est une courbe plane telle, que chacun de ses points est équidistant d'un point fixe et d'une droite fixe donnés dans son plan. Ainsi (*fig.* 512), le point fixe

Fig. 512.



étant F et la droite fixe DD', on aura, pour tout point M de la parabole, en abaissant MH perpendiculaire sur DD', MF = MH. Par sa définition même, la parabole est nécessairement située tout entière du même côté que le point fixe par rapport à la droite fixe.

D'après ce qu'on vient de dire, pour décrire un arc de parabole *d'un mouvement continu*, on fait coïncider l'arête d'une règle avec la droite DD', et l'on applique contre cette règle le petit côté KH d'une équerre KHG. Un fil, égal en longueur au grand côté HG de cette équerre, est fixé par ses deux extrémités, d'une part au point F, et de l'autre à l'extrémité G du côté HG. Si l'on tend alors constamment ce fil contre le grand côté de l'équerre à l'aide d'un crayon, et si l'on fait en même temps glisser l'équerre le long de la règle, la pointe du crayon décrit un arc de parabole. En effet, pour une position quelconque M de cette pointe, on a

$$GM + MF = GH = GM + MH, \quad \text{d'où} \quad MF = MH.$$

En opérant de cette manière, on trace d'un mouvement continu l'arc BA, qui va du point B de la courbe dont la distance au point F est égale à GH, jusqu'au point A milieu de la perpendiculaire FL abaissée du point F sur la droite DD'. Il faut ensuite retourner l'équerre, comme l'indique la figure, pour décrire l'arc AB'.

On voit que la parabole est formée de deux branches qui s'étendent indéfiniment, à partir du point A, au-dessus et au-dessous de la droite FL; car si l'on emploie une règle, une équerre et un fil assez longs, rien ne limite l'éloignement des points obtenus sur la courbe. La parabole est donc une courbe à branches infinies, mais sans séparation, et d'un seul côté de la droite fixe.

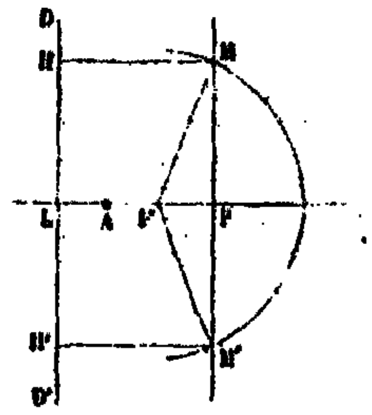
1018. Le point F est le *foyer* de la parabole, la droite DD' est sa *directrice*. La droite MF est le *rayon vecteur* du point M. La distance FL du foyer à la directrice se nomme le *paramètre* de la courbe, et on la représente par p.

1019. On peut aussi tracer la parabole *par points*.

En effet, prenons (*fig.* 513) un point P quelconque sur la perpendiculaire FL abaissée du foyer sur la directrice. Par le point P, menons une perpendiculaire à FL ou une parallèle à la directrice, et du foyer F comme centre, avec PL pour rayon, décrivons une circonférence qui coupera cette parallèle en deux points M et M' appartenant à la parabole, comme équidistants du foyer et de la directrice.

Pour que les points d'intersection M et M' existent, il suffit que le point P soit à l'intérieur du cercle décrit du foyer F comme centre avec PL pour rayon, c'est-à-dire qu'on ait $FP < PL$. Cette condition sera toujours remplie lorsque le point P sera à droite du foyer F (dans le cas de la figure); mais elle exige, si le point P est à gauche de F, qu'il reste à

Fig. 513.



droite du point A, milieu de FL. Si l'on a dans ce cas, comme condition limite, $FP = PL$, le point P se confond avec le point A, et les deux points M et M' se réunissent en ce point. Le rayon vecteur minimum est donc AF ou $\frac{p}{2}$; il n'y a pas de rayon vecteur maximum, rien ne limitant l'éloignement du point P à droite du foyer F.

THÉORÈME.

1020. *La parabole a pour axe la perpendiculaire menée du foyer sur la directrice* (*fig.* 512).

Même démonstration que pour l'ellipse (965, 1°).

Le point A, commun à la parabole et à son axe, est le *sommet* de la courbe.

THÉORÈME.

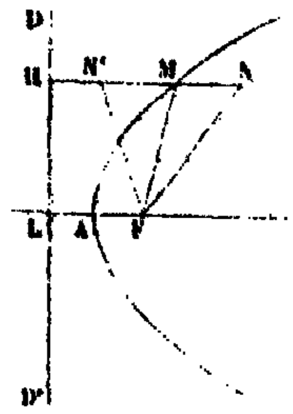
1021. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à la parabole, sa distance au foyer est moindre ou plus grande que sa distance à la directrice* (*fig.* 514).

Soit d'abord un point N intérieur à la courbe. Menons la droite NF et la perpendiculaire NH à la directrice, laquelle coupera la parabole au point M (1017). Le triangle NFM donne alors

$$NF < NM + MF \quad \text{ou} \quad NF < NH, \quad \text{puisque} \quad MF = MH.$$

Soit de même un point N' extérieur à la courbe. Si le point N' et le foyer sont de côtés différents par rapport à la directrice, la proposition est évidente. Sinon, menons la

Fig. 514.



droite N'F et la perpendiculaire N'H à la directrice, laquelle prolongée coupera la parabole au point M. Le triangle N'FM donne alors

$$N'F > MF - MN' \quad \text{ou} \quad N'F > N'H, \quad \text{puisque} \quad MF = MH.$$

COROLLAIRE.

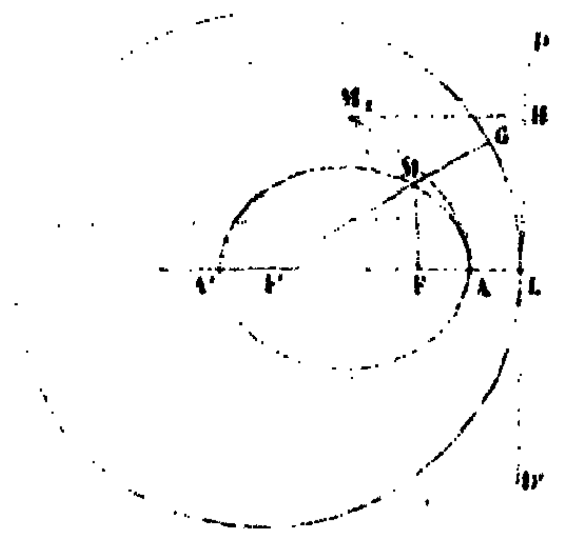
1022. Ce théorème, rapproché de la définition de la courbe, fournit un criterium pour juger de la position d'un point quelconque de son plan par rapport à la parabole supposée non tracée. *Suivant que la distance du point considéré au foyer est égale, supérieure ou inférieure à sa distance à la directrice, ce point est à la courbe, il lui est extérieur ou intérieur.*

THÉORÈME.

1023. *La limite d'une ellipse (ou d'une hyperbole) dont un sommet et le foyer voisin restent fixes, tandis que l'autre foyer s'en éloigne indéfiniment dans la direction du grand axe (ou de l'axe transverse), est une parabole qui a pour sommet et pour foyer le sommet et le foyer fixes (fig. 515).*

En effet, le cercle directeur relatif au foyer mobile F' coupe toujours le grand axe à droite du foyer fixe F, en un même point L déterminé par la condition évidente AL = AF. A mesure que le centre F' de ce cercle s'éloigne dans la direction AA', son rayon croît indéfiniment, de sorte qu'il a pour limite la perpendiculaire DD' menée par le point L au grand axe AA'. D'ailleurs, tout point M de l'ellipse étant également distant du foyer F et du cercle directeur F' (976), on a constamment MF = MG, c'est-à-dire à la limite, quand l'ellipse se

Fig. 515.



déformant le point M vient en M_1, $M_1F = M_1H$, en désignant par M_1H la perpendiculaire abaissée du point M_1 sur la droite DD', limite du cercle F'. Le lieu des positions limites des points de l'ellipse donnée est donc une parabole ayant pour foyer et pour sommet les points F et A, et par suite la droite DD' pour directrice.

La même démonstration s'applique à l'hyperbole (1001). Dans ce cas, la parabole est la limite de la demi-hyperbole de droite à laquelle appartiennent le sommet A et le foyer F; l'autre demi-hyperbole de gauche disparaît à l'infini.

Corollaire.

1024. Le théorème précédent permet de prévoir et de démontrer les propriétés de la parabole, en les déduisant par voie de transformation des propriétés correspondantes de l'ellipse.

Si ces propriétés dépendent explicitement des axes a et b de l'ellipse et de son excentricité c, on substitue à a et à b leurs valeurs en fonction de c et du paramètre $p = 2(a - c)$ de la parabole limite; puis, en supposant c infini dans les formules obtenues, on passe des propriétés de l'ellipse représentées par ces formules, aux propriétés correspondantes de la parabole exprimées en fonction du paramètre p.

THÉORÈME.

1025. ***La tangente à la parabole fait extérieurement des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et avec la parallèle menée à l'axe par le même point.***

Ce théorème est évident d'après ce qui précède (**1024**), si l'on remarque que lorsque l'un des foyers d'une ellipse s'éloigne à l'infini, le rayon vecteur relatif à ce foyer tend à devenir parallèle au grand axe. On arrive d'ailleurs facilement à une démonstration directe, en suivant la même marche que pour l'ellipse.

Prenons sur la parabole (*fig.* 516) deux points voisins M et M'; menons la sécante MM'S, abaissons des deux points considérés les perpendiculaires Mφ, M'φ', sur la directrice DD', et traçons leurs rayons vecteurs. Portons sur FM une longueur FC = FM', et sur φM une longueur φE = φ'M'. D'après la définition de la parabole, MC est égal à ME.

D'un point G quelconque de la sécante MM'S, menons à M'C et à M'E, jusqu'à la rencontre de FM et de φM, les parallèles GI et GH. Les deux quadrilatères CM'EM, IGHM, sont semblables (**214**), et l'égalité de MC et de ME entraîne celle de MI et de MH.

Fig. 516.

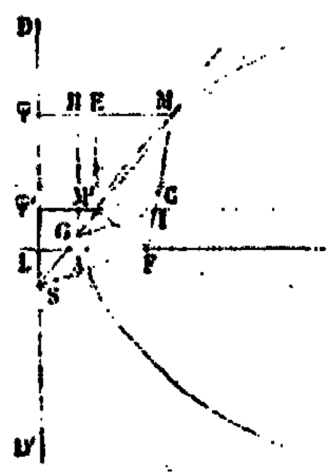
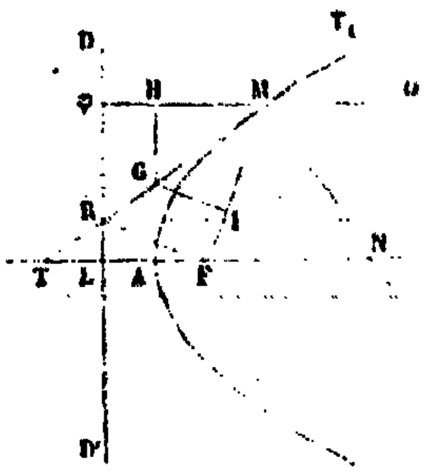


Fig. 517.



A mesure que le point M' se rapproche du point M, GH reste comme M'E perpendiculaire à Mφ, tandis que GI, perpendiculaire à la bissectrice de l'angle au sommet du triangle isocèle M'FC, tend à le devenir au rayon vecteur FM. On a de plus constamment MI = MH. La tangente à la parabole (*fig.* 517) doit donc être telle, que si, d'un point quelconque G pris sur cette droite, on abaisse des perpendiculaires GI et GH sur le rayon vecteur du point de contact M et sur la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice, on ait MI = MH. Les triangles rectangles MGI, MGH, sont alors égaux (54), ainsi que les angles GMI, GMH. *La tangente à la parabole est donc bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice.*

Mais l'angle GMH étant l'opposé par le sommet de l'angle T_1MO, les deux angles GMI ou TMF et T_1MO sont égaux; ce qui conduit à l'énoncé adopté.

1026. Réciproquement, *la courbe dont la tangente est bissectrice de l'angle formé par les droites menées d'un point de la courbe à un point fixe, et perpendiculairement à une droite fixe, est une parabole ayant le point et la droite fixes pour foyer et pour directrice.*

Démonstration analogue à celle donnée pour l'ellipse et l'hyperbole (997).

Corollaires.

1027. Soit S le point où la sécante MM'S (*fig.* 516) coupe la directrice DD'. On a, à cause des parallèles,

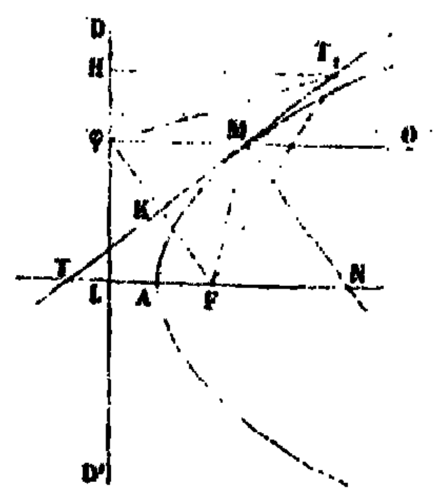
$$\frac{MS}{M'S} = \frac{M\varphi}{M'\varphi'} = \frac{MF}{M'F};$$

la droite SF est donc la bissectrice de l'angle extérieur en F du triangle MFM' (198). *La droite qui joint le foyer d'une parabole au point de rencontre d'une sécante quelconque avec la directrice, est donc bissectrice de l'angle extérieur des rayons vecteurs des points d'intersection de la sécante avec la courbe.*

A la limite, quand la sécante devient tangente, c'est-à-dire quand l'angle MFM' devient nul, la droite SF est remplacée (*fig.* 517) par la droite RF bissectrice de l'angle supplémentaire. Par suite, *la droite qui joint le foyer d'une parabole au point où une tangente quelconque rencontre la directrice, est perpendiculaire sur le rayon vecteur du point de contact.*

1028. *Tous les points de la tangente* MT, *sauf le point de contact* M, *sont extérieurs à la parabole* qui, dès lors (972), est une courbe convexe (*fig.* 518).

Fig. 518.



En effet, le triangle FMφ étant isocèle et la tangente étant la bissectrice de son angle au sommet (1026), elle est perpendiculaire sur le milieu K de Fφ. Pour un point T_1 quelconque de la tangente, on a donc, T_1H étant la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice, $T_1H < T_1\varphi$ ou $T_1H < T_1F$. Le point T_1 est donc extérieur à la courbe (1022).

1029. Si l'on mène au point M (*fig.* 518) une perpendiculaire MN à la tangente MT, les deux angles FMN, OMN, sont égaux comme compléments d'angles égaux (1026). Donc, *la normale à la parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et la parallèle menée à l'axe par ce point.*

Au sommet de la parabole, la normale se confond avec l'axe, et la tangente est perpendiculaire à cet axe.

Soient T et N (*fig.* 518) les points où la tangente et la normale rencontrent l'axe. Les triangles TMF, NMF, étant évidemment isocèles, on a MF = FT = FN. *Le foyer* F *est donc à une* *distance, soit du pied de la tangente, soit du pied de la normale sur l'axe, égale au rayon vecteur du point de contact.*

1030. Dans le cas de la parabole, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent du foyer, deviennent tous parallèles à l'axe après leur réflexion sur la courbe. C'est pourquoi l'on emploie des réflecteurs paraboliques, lorsqu'on veut projeter au loin un faisceau de rayons lumineux parallèles (lanternes de voitures, phares). Réciproquement, tout rayon qui vient rencontrer la parabole parallèlement à son axe se réfléchit au foyer de la courbe. De là, par exemple, l'usage des réflecteurs paraboliques dans les télescopes, pour concentrer au foyer les rayons lumineux venant de l'astre observé.

THÉORÈME.

1031. *Le lieu des points symétriques* φ *du foyer* F *par rapport aux diverses tangentes à la parabole est la directrice* (*fig.* 518).

Cette proposition résulte du n° 975. Elle est d'ailleurs évidente d'après ce qui a été dit au n° 1028.

SCOLIES.

1032. *Étant donnés un point* F *et une droite* DD′ (*fig.* 518), *si l'on mène des droites* Fφ *aux différents points de la droite* DD′, *les perpendiculaires élevées à ces droites par leurs milieux enveloppent une parabole qui a pour foyer le point* F *et pour directrice la droite* DD′; *les points de contact de ces tangentes sont à leurs rencontres avec les perpendiculaires menées à la directrice par les points* φ.

C'est là un nouveau procédé pour décrire la parabole par points (1019). En le suivant, on n'obtient qu'un point à la fois; mais on a en même temps la tangente en ce point.

1033. On voit que *les parallèles à l'axe de la parabole ne rencontrent la courbe qu'en un seul point.* Il serait donc faux de dire qu'une droite qui n'a qu'un point commun avec une courbe, même convexe, lui est tangente. Une droite tangente à une courbe convexe n'a qu'un point commun avec elle (972): mais la réciproque n'est pas vraie.

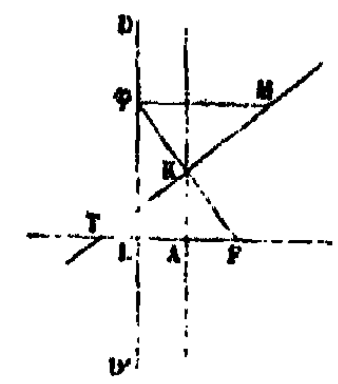
THÉORÈME.

1034. ***Le lieu des projections du foyer d'une parabole sur ses tangentes est la tangente au sommet.***

Cette proposition résulte immédiatement des théorèmes des nos 977 et 1023; car le cercle principal d'une ellipse tend vers la tangente au sommet fixe du grand axe de cette ellipse, lorsque l'autre sommet se transporte à l'infini. En voici néanmoins la démonstration directe.

MT étant la tangente à la courbe au point M (*fig.* 519), et φ

Fig. 519.



le symétrique du foyer F par rapport à cette tangente, le point K où $F\varphi$ coupe la tangente est le milieu de $F\varphi$. D'ailleurs, le sommet A est le milieu de FL. Donc, dans le triangle $FL\varphi$, AK est parallèle à la directrice ou se confond avec la tangente au sommet (1029). La projection K du foyer sur une tangente se trouve par suite sur la tangente au sommet.

Réciproquement, K étant un point de la tangente au sommet, si l'on mène la droite $FK\varphi$, le point φ sera le symétrique du foyer F par rapport à la tangente qui passe par le point K (1032); le point K sera donc la projection du foyer F sur cette tangente.

*Corollaire.

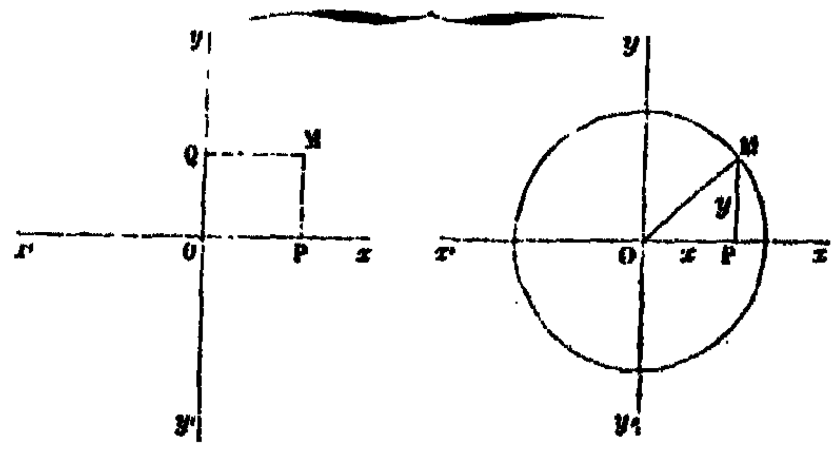
1035. Si l'un des côtés d'une équerre passe constamment par le foyer F, tandis que son sommet parcourt la tangente AK au sommet, l'autre côté de l'équerre reste constamment tangent à la parabole.

THÉORÈME.

1036. *Dans toute courbe rapportée à des axes rectangulaires, l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre la soustangente et la sous-normale.*

Pour indiquer la position d'un point M dans un plan, on peut donner ses distances MP et MQ à deux axes rectangulaires indéfinis xOx', yOy' (*fig.* 520), tracés dans ce plan. Le nombre qui mesure la distance $MQ = OP$, du point M à l'axe yOy', s'appelle l'*abscisse* de ce point; son *ordonnée* est le nombre qui mesure sa distance $MP = OQ$ à l'axe xOx'. L'abscisse est d'ailleurs positive ou négative, suivant que P tombe sur Ox ou sur Ox'; l'ordonnée est positive ou négative, suivant que Q tombe sur Oy ou sur Oy'. L'abscisse et l'ordonnée d'un point M constituent ses deux *coordonnées*. Les axes xOx' et yOy' sont les *axes des coordonnées*, et leur intersection O en est l'*origine*.

Fig. 520.



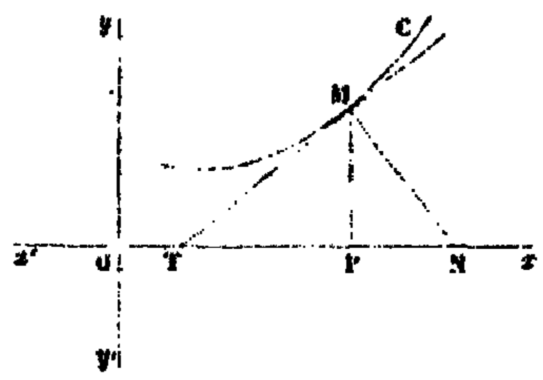
Quand un point appartient à une courbe donnée, son ordonnée y dépend de son abscisse x, et elle est déterminée par le choix de cette abscisse. Par exemple, l'abscisse x et l'ordonnée y d'un point quelconque d'une circonférence de rayon R rapportée à deux axes rectangulaires passant par son centre (*fig.* 520) sont évidemment liées par la relation

$$y^2 + x^2 = R^2, \quad \text{d'où} \quad y^2 = R^2 - x^2.$$

Le choix des axes coordonnés est arbitraire. On adopte de préférence les droites les plus remarquables du plan relativement à la courbe, telles que ses axes, ses tangentes aux sommets, etc. Dans la parabole, on choisit l'axe et la tangente au sommet.

Cela posé, soit (*fig.* 521) une courbe C rapportée à deux

Fig. 521.



axes de coordonnées rectangulaires xOx', yOy'. Menons en un point quelconque M la tangente MT, la normale MN et l'ordonnée MP. La projection TP sur l'axe Ox de la portion de tangente MT comprise entre son point de contact M et son pied T sur cet axe s'appelle *sous-tangente;* de même, PN est la *sous-normale*. Le triangle TMN étant rectangle en M, et MP étant perpendiculaire sur l'hypoténuse TN, le théorème énoncé est démontré (224).

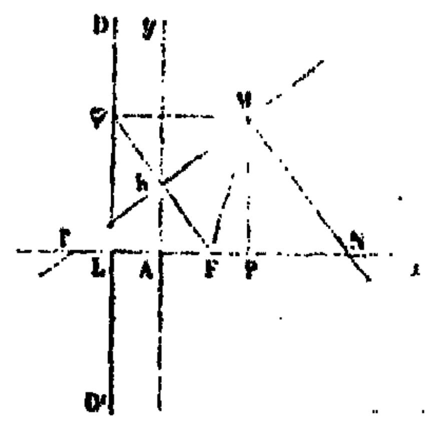
Au lieu d'axes rectangulaires, on peut employer des axes obliques. Les coordonnées d'un point sont encore ses distances aux deux axes, mais comptées parallèlement à ces axes. Les projections ne sont plus alors orthogonales, mais obliques, et le théorème précédent cesse d'être vrai.

THÉORÈME.

1037. *Dans la parabole : 1° la sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact ; 2° la sous-normale est constante et égale au paramètre* (*fig.* 522).

1° Soit la tangente en M à la parabole. Si l'on prend pour axes coordonnés l'axe Ax de la courbe et la tangente au sommet Ay, le point M aura MP pour ordonnée et AP pour abscisse. Le triangle TFM étant isocèle (1029), la projection K du foyer F sur la tangente MT est le milieu de MT. La tangente au sommet AKy étant parallèle à l'ordonnée MP, le sommet A est alors le milieu de la sous-tangente TP, et $TP = 2AP$.

Fig. 522.



2° Soit la normale MN. Elle est perpendiculaire à la tangente comme la droite $F\varphi$. La figure $M\varphi FN$ est donc un parallélogramme, et $\varphi F = MN$. Les deux triangles rectangles MPN, φLF, sont alors égaux (54), et l'on a $PN = LF = p$.

COROLLAIRE.

1038. *Le carré de l'ordonnée d'un point de la parabole est proportionnel à l'abscisse de ce point (fig. 522).*

Soient y et x les coordonnées MP et AP d'un point quelconque M de la parabole. On aura (1036, 1037, 1038)

$$y^2 = TP \cdot PN = 2x \cdot p \quad \text{ou} \quad y^2 = 2px.$$

PROBLÈME.

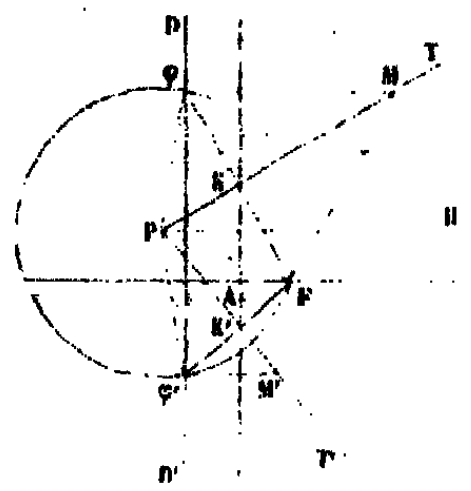
1039. *Mener une tangente à la parabole par un point donné.*

1° *Si le point donné M est sur la courbe (fig. 522)*, on mène le rayon vecteur MF et la perpendiculaire $M\varphi$ sur la directrice; puis, la bissectrice de l'angle $FM\varphi$ qui est la tangente demandée (1025).

Il vaut mieux prendre sur l'axe, du côté du sommet, une longueur FT égale à MF; en joignant le point T ainsi obtenu au point donné M, on a (1037, 1°) la tangente demandée.

2° *Si le point donné P est extérieur à la parabole*, on remarque que la question serait résolue si l'on connaissait le symétrique φ du foyer F par rapport à la tangente cherchée : car on aurait alors cette tangente en abaissant du point P une perpendiculaire TT_1 sur Fφ (*fig.* 523). La droite TT_1 couperait d'ailleurs la parallèle menée à l'axe par le point φ, au point de contact M. Or, le point φ se trouve à la fois sur la directrice DD' (1031) et sur le cercle décrit du point P comme centre avec PF pour rayon.

Fig. 523.



Ce cercle et la directrice se coupent toujours, quand le point P est extérieur à la courbe; car il est alors plus près de la directrice que du foyer (1021), et il y a deux solutions, qui se réduisent à une seule quand le point P est sur la parabole, ou disparaissent lorsqu'il est intérieur à la courbe.

COROLLAIRES.

1040. Cherchons la condition pour que les deux tangentes menées du point P à la parabole soient à angle droit.

Ces tangentes étant supposées à angle droit, comme elles sont respectivement perpendiculaires aux milieux des droites Fφ et Fφ', l'angle φFφ' est aussi droit. Par suite, φφ' est un diamètre de la circonférence PF, et le point P est sur la directrice. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole est donc la directrice.*

Dans ce cas, l'angle PFM est droit ainsi que l'angle PFM' (1027) : la corde des contacts MM' passe donc alors par le foyer et est perpendiculaire à PF.

1041. *Les tangentes* PM, PM′, *menées d'un point extérieur* P *à une parabole, font des angles égaux avec la droite qui joint ce point au foyer et avec la parallèle menée à l'axe par ce point : la droite qui va du foyer au point* P *est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs des points de contact* M *et* M′.

Cette propriété est une conséquence immédiate des nos 981 et 1023. Il est facile de la démontrer directement.

Reportons-nous à la *fig.* 523, et soit PH la parallèle menée à l'axe par le point P. La tangente PMT étant perpendiculaire sur le milieu de Fφ, comme la tangente PM′T′ sur le milieu de Fφ', les deux angles MPH, F$\varphi\varphi'$, ont leurs côtés respectivement perpendiculaires et sont égaux ; la droite PM′ est la bissectrice de l'angle φ'PF, et l'angle au centre M′PF, égal alors à l'angle inscrit F$\varphi\varphi'$, l'est aussi à l'angle MPH. De plus, les angles PFM, PFM′, sont respectivement égaux aux angles PφM, Pφ'M′. Or, le triangle φPφ' étant isocèle, les angles PφM, Pφ'M′, sont égaux comme compléments d'angles égaux ; et leur égalité démontre celle des angles PFM, PFM′.

PROBLÈME.

1042. *Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée.*

Tout revient encore à trouver le point φ symétrique du foyer F par rapport à la tangente cherchée. Or, ce point se trouvera à l'intersection de la directrice et de la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la droite donnée. Il y a toujours une solution, et une seule.

SCOLIE.

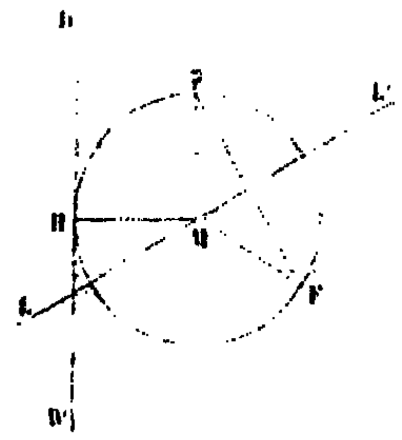
1043. Les constructions des nos 1039 et 1042 n'exigent pas que la courbe soit tracée ; il suffit d'en connaître le foyer et la directrice.

PROBLÈME.

1044. *Connaissant le foyer* F *et la directrice* DD′ *d'une parabole, déterminer ses points de rencontre avec une droite donnée* LL′.

Supposons le problème résolu, et prenons (*fig.* 524) le symétrique φ du foyer F par rapport à LL'. Si M est l'un des points de rencontre de la droite LL' avec la courbe, on aura $M\varphi = MF = MH$, MH étant la perpendiculaire abaissée du point M sur la directrice. Le cercle décrit du point M comme

Fig. 524.



centre, avec MF pour rayon, passe donc par les points F et φ et est tangent à la directrice. La question est ainsi ramenée à trouver le centre M d'un cercle passant par deux points donnés F et φ et tangent à une droite donnée DD'. Nous avons résolu ce problème (275, 1°).

Comme il n'est possible que lorsque les deux points F et φ sont situés d'un même côté de la droite DD', la droite LL' coupera la parabole, lui sera tangente ou ne la rencontrera pas, suivant que le point φ sera du même côté que le foyer par rapport à la directrice, sur cette directrice, ou de l'autre côté de cette droite par rapport au foyer.

COROLLAIRE.

1045. La parabole, ne pouvant être coupée par une droite en plus de deux points, est une courbe convexe (1028).

§ IV. — ELLIPSE, CONSIDÉRÉE COMME PROJECTION ORTHOGONALE DU CERCLE.

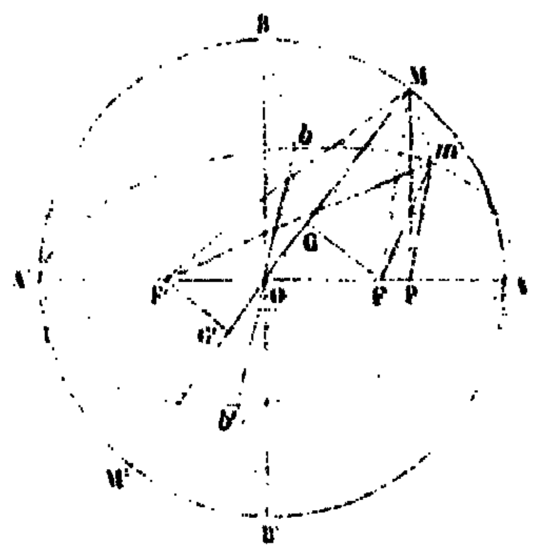
THÉORÈME.

1046. *La projection orthogonale d'une circonférence de cercle sur un plan est une ellipse.*

Quel que soit le plan de projection, on peut toujours supposer qu'il passe par le centre du cercle, puisque les projections d'une même figure sur deux plans parallèles sont égales (871, 1°).

Soit donc AA' (*fig.* 525) le diamètre suivant lequel le plan

Fig. 525.



de projection coupe le cercle donné. Le diamètre BB', perpendiculaire à AA', a pour projection la droite bb', et cette droite, d'après un théorème connu (505), est elle-même perpendiculaire sur AA'. D'ailleurs, des droites parallèles ayant sur un même plan des projections parallèles, et la projection du milieu d'une droite étant le milieu de sa projection, la courbe projection du cercle a nécessairement pour axes les droites AA' et bb'. Dès lors, si cette projection est une ellipse, son grand axe sera AA', et la distance de son centre O à l'un des foyers sera égale à Bb (966). Portons donc sur AA', de part et d'autre du point O, des longueurs $OF = OF' = Bb$. Il restera à démontrer que la somme des rayons vecteurs mF et mF' d'un point quelconque m de la projection obtenue, est constante.

Le point m étant la projection du point M dont l'ordonnée par rapport aux axes AA' et BB' est MP, la droite mP sera aussi perpendiculaire sur AA'. Abaissons des points F et F', sur le diamètre MM' qui répond au point M, les perpendiculaires FG et F'G'. L'égalité des triangles rectangles FOG, F'OG', donne, à la fois $GF = G'F'$ et $OG = OG'$; par suite, $MG' = GM'$.

Cela posé, la similitude des triangles rectangles FOG, MOP, d'une part, MPm, BOb, d'autre part, donne

$$\frac{\text{FG}}{\text{OF ou B}b} = \frac{\text{MP}}{\text{OM ou OB}} = \frac{\text{M}m}{\text{B}b},$$

et il en résulte Mm = FG. Les triangles rectangles MmF, MGF, sont alors égaux (54), et mF = MG.

Comme GF = G′F′, les triangles rectangles MmF′, MG′F′, sont aussi égaux (54), et l'on a

$$m\text{F}' = \text{MG}' = \text{GM}'.$$

La somme mF + mF′, égale à la somme MG + GM′, est donc bien égale au diamètre AA′; ce qui démontre le théorème.

On voit que le grand axe de l'ellipse obtenue est toujours égal au diamètre du cercle donné. On a de plus, dans le triangle rectangle BbO (718),

$$\text{O}b = \text{OB}\cos \text{BO}b.$$

Si l'on désigne par $2a$ et $2b$ les axes AA′ et bb' de l'ellipse projection du cercle, et par V l'angle de leurs plans, on aura donc

$$b = a\cos \text{V} \quad \text{et} \quad \cos \text{V} = \frac{b}{a}.$$

Corollaires.

1047. L'ordonnée MP du cercle (*fig.* 525) étant représentée par Y et l'ordonnée correspondante mP de l'ellipse par y, le triangle rectangle MmP donne

$$y = \text{Y}\cos\text{V}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = \frac{b}{a}\text{Y}.$$

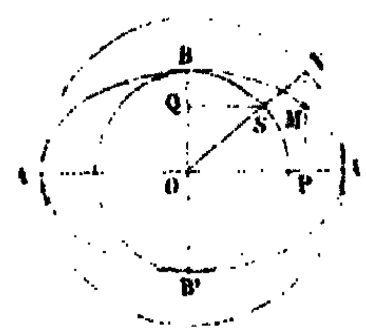
On passe donc du cercle principal d'une ellipse (977) à cette ellipse, en diminuant toutes les ordonnées du cercle dans le rapport du petit axe au grand axe. Cette remarque fournit un nouveau procédé pour décrire l'ellipse par points.

On trace un cercle sur chacun des axes de l'ellipse comme diamètre (*fig.* 526); un rayon quelconque coupe ces cercles aux points N et S. Si l'on mène alors l'ordonnée NP du point N et la parallèle SM au grand axe, l'intersection M de ces deux droites est un point de l'ellipse. On a, en effet,

$$MP = \frac{OS}{ON} \cdot NP, \quad \text{c'est-à-dire} \quad MP = \frac{b}{a} \cdot NP.$$

1048. On peut déduire de là la réciproque du théorème précédent. ***La projection orthogonale d'une ellipse dont les axes sont $2a$ et $2b$, sur un plan passant par son petit axe et faisant avec le plan de l'ellipse un angle V tel que $\cos V = \frac{b}{a}$, est un cercle de diamètre $2b$.*** Car, si l'on considère sur l'ellipse et sur le cercle $2b$ (*fig.* 526) deux points M et S ayant

Fig. 526.



la même ordonnée OQ, leurs abscisses x et X sont liées par la relation

$$\frac{x}{X} = \frac{ON}{OS}, \quad \text{d'où} \quad X = \frac{b}{a} \cdot x.$$

Pour passer de l'ellipse au cercle, il faut donc diminuer les abscisses de l'ellipse dans le rapport de b à a ou les multiplier par $\cos V$; c'est-à-dire que pour que le cercle $2b$ devienne la projection orthogonale de l'ellipse proposée sur son plan primitif, il suffit de faire tourner cette ellipse de l'angle V autour de l'axe BB'.

L'ellipse peut donc être regardée comme provenant de la contraction ou de la dilatation des cercles qui ont ses axes pour diamètres.

1049. Si l'on ne suppose plus que le plan de projection passe par le centre du cercle donné, le grand axe de sa projection elliptique, étant toujours égal à son diamètre, est la projection du diamètre du cercle qui est parallèle au plan de projection. Cette remarque est utile dans les Applications.

Scolie.

1050. Si l'on fait tourner le cercle AA' (*fig.* 525), que nous appellerons *cercle auxiliaire*, autour de son intersection avec le plan de projection, pour le rabattre sur ce plan, les ordonnées MP et mP des points correspondants M et m du cercle et de l'ellipse, se confondront en direction ; et le cercle AA' se superposera au cercle principal (977) de l'ellipse. L'emploi du cercle principal, considéré comme rabattement du cercle auxiliaire dont l'ellipse est la projection, permet de traiter plus simplement plusieurs des questions déjà résolues. Nous en donnerons des exemples (1055, 1056, 1058).

THÉORÈME.

1051. *Lorsque les extrémités d'une droite* AB *de longueur constante glissent sur deux droites rectangulaires* Ox *et* Oy, *un point quelconque* M *de cette droite décrit une ellipse dont les axes sont dirigés suivant* Ox *et* Oy, *et ont pour demi-longueurs* a *et* b *les distances* MA *et* MB *du point* M *aux extrémités de la droite* AB (*fig.* 527).

Fig. 527.

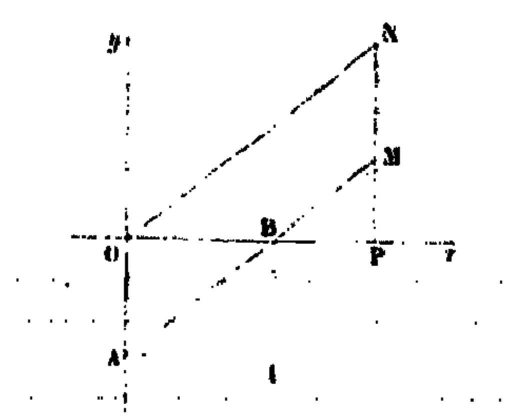
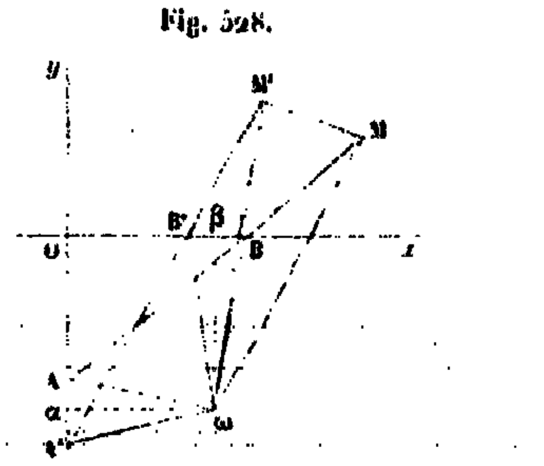


Fig. 528.



Prenons pour axes coordonnés (1036) les deux droites Ox et Oy, les coordonnées du point M seront MP et OP. Par le point O, menons ON parallèle à ABM, jusqu'à la rencontre de l'ordonnée MP. La figure OAMN étant un parallélogramme, ON sera égale à la longueur constante AM ou a. Les triangles rectangles semblables BPM, OPN, donnent d'ailleurs

$$\frac{\text{MP}}{\text{NP}} = \frac{\text{BM}}{\text{ON}} \quad \text{ou} \quad \text{MP} = \frac{b}{a} \cdot \text{NP}.$$

Le point M décrit donc l'ellipse (1047) dont le cercle ON est le cercle principal, et qui a pour demi-axes a et b, c'est-à-dire les distances MA et MB.

Ce théorème donne un moyen pratique très-simple de construire une ellipse par points, à l'aide d'une bande de papier sur les bords de laquelle on marque les trois points A, B, M. Il existe un *compas elliptique* fondé sur ce même principe.

COROLLAIRES.

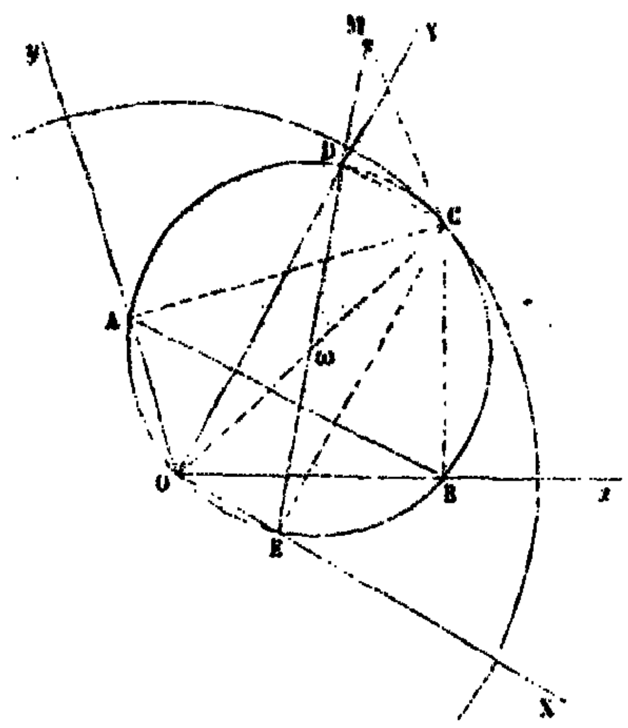
1052. Considérons (*fig.* 528) la droite donnée dans les deux positions voisines ABM, A'B'M'. Sur les milieux de AA' et de BB', élevons les perpendiculaires $\alpha\omega$ et $\beta\omega$ qui se coupent en ω. La perpendiculaire élevée sur le milieu de MM' passera par le point ω. En effet, les deux triangles AωB, A'ωB', étant égaux (40), les angles ABω, A'B'ω, sont égaux. Les angles ωBM, ωB'M', le sont alors eux-mêmes comme suppléments d'angles égaux. Il en résulte l'égalité des triangles ωBM, ωB'M' (38), et par suite celle des distances ωM, ωM'.

Si l'on suppose maintenant que le point M' se rapproche indéfiniment du point M considéré comme fixe sur l'ellipse qu'il décrit, MM' tendra vers la tangente à la courbe en M, et la perpendiculaire élevée sur le milieu de MM' vers la normale au même point. D'ailleurs, $\alpha\omega$ et $\beta\omega$ ont pour limites les perpendiculaires élevées en A et en B aux axes Oy et Ox. En joignant le point I d'intersection de ces perpendiculaires au point M (*fig.* 527), on aura donc la normale en M à l'ellipse tracée.

1053. *Quand les extrémités d'une droite* AB *de longueur constante glissent sur deux droites fixes quelconques* Ox *et* Oy, *un point quelconque* M, *lié invariablement à* AB *dans le plan* AOB, *décrit une ellipse* (*fig.* 529).

Le diamètre du cercle circonscrit au triangle variable AOB est évidemment constant et égal à $\frac{\text{AB}}{\sin.\text{AOB}}$. Le diamètre OC de ce cercle, dans la position actuelle de la droite AB, s'obtient en élevant en A et B, aux axes Ox et Oy, des perpendiculaires qui se coupent au point C.

Fig. 529.



Le cercle OC change de position en même temps que la droite AB; mais il passe toujours par le point O. Si on le regarde comme lié invariablement à cette droite, l'arc AD qui sépare le point A d'un point quelconque D de sa circonférence reste constant; par suite, l'angle AOD restant lui-même constant et ayant son côté OA fixe, tout point D du cercle OC décrira une droite OY.

Si l'on trace le diamètre du cercle OC qui passe par le point donné M, les extrémités D et E de ce diamètre décriront donc pendant le mouvement de AB les deux droites fixes ODY et OEX. Ces droites étant à angle droit, il résulte du théorème précédent (1051) que le point M décrit une ellipse ayant pour demi-longueurs de ses axes dirigés suivant OY et OX, les distances ME et MD.

Les perpendiculaires variables élevées en D et en E aux droites OY et OX se coupant au point mobile C, on obtiendra la normale en M à cette ellipse en menant la droite MC (1052).

Scolie.

1054. La position du point C est indépendante de celle du point donné M. Donc, si le point M varie, toutes les normales aux points correspondants des différentes ellipses obtenues viendront, pour une même position de la droite AB, se couper au point C.

D'ailleurs, le lieu du point C est la circonférence décrite du point O comme centre avec la longueur constante OC pour rayon, et le cercle ωC, variable de position, reste constamment tangent au cercle OC dont le rayon est double du sien.

On peut donc se figurer le mouvement du triangle ABM, en le supposant entraîné dans le mouvement du cercle ωC qui roule sans glisser à l'intérieur du cercle fixe OC de rayon double.

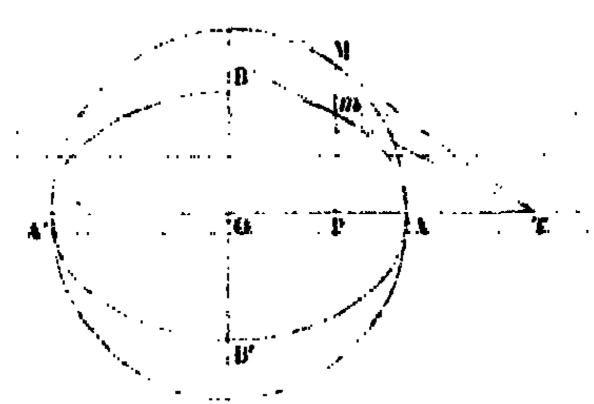
On sait que, dans un pareil mouvement, *tout point du cercle mobile décrit un diamètre du cercle fixe* (théorème de De La Hire), résultat qui coïncide avec la remarque sur laquelle la démonstration précédente est fondée. De plus, d'après ce qu'on vient de voir, *tout point M lié invariablement au cercle mobile, et situé en dehors ou en dedans de ce cercle, décrit une ellipse;* c'est un autre énoncé de la proposition du n° 1053.

PROBLÈME.

1055. *Mener à l'ellipse une tangente par un point donné.*

1° *Supposons d'abord le point donné m sur la courbe.* Si l'on mène (*fig.* 530) l'ordonnée mP et si on la prolonge jusqu'à sa rencontre en M

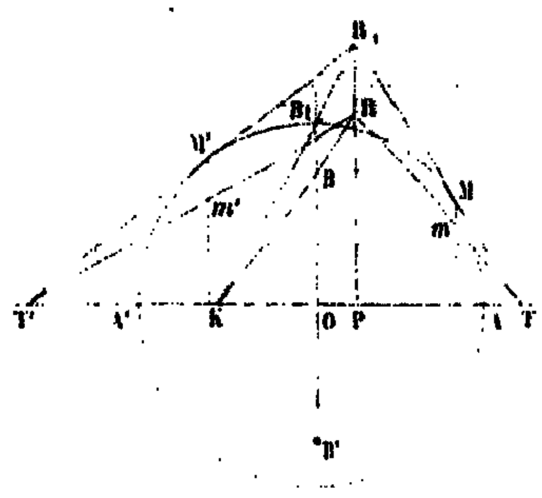
Fig. 530.



avec le cercle principal, la tangente MT menée en M à ce cercle sera le rabattement de la tangente menée au cercle auxiliaire (1050) par le point qui a pour projection m; et comme le point T, pied de la tangente sur l'axe, ne varie pas pendant la rotation autour de AA', c'est en ce même point que la tangente au cercle auxiliaire perce le plan de projection. La projection de la tangente en un point d'une courbe étant tangente à la projection de cette courbe (875), et le point T étant à lui-même sa propre projection, pour avoir la tangente à l'ellipse donnée au point m, il suffira de tracer la droite mT. On peut donc opérer directement à l'aide du cercle principal, sans remonter au cercle auxiliaire.

2° *Soit maintenant le point donné* R *extérieur à l'ellipse* (*fig.* 531).

Fig. 531.



R est la projection d'un certain point du plan du cercle auxiliaire, et il s'agit de trouver le rabattement de ce même point sur le plan du cercle principal. Pour cela, menons les droites RBK et B_1K. Le point K étant sur l'axe et le point B_1 étant le rabattement du point dont B est la projection, la droite B_1K est le rabattement de la droite de l'espace qui a pour projection RBK. Le point cherché R_1 se trouve donc à la fois sur B_1K et sur l'ordonnée RP (1050).

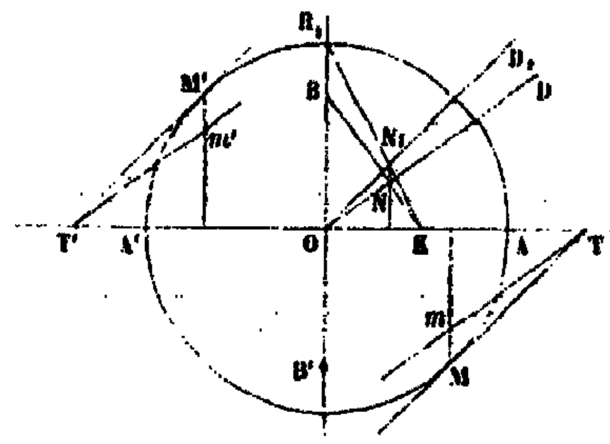
R_1 étant déterminé, il ne reste plus qu'à mener par ce point des tangentes R_1MT, R_1M'T', au cercle principal. Les droites TR et T'R sont alors les deux tangentes qu'on peut mener par le point R à l'ellipse proposée, et les points de contact m et m' de ces tangentes sont à leurs rencontres avec les ordonnées des points M et M' par rapport aux axes AA' et BB'.

PROBLÈME.

1056. *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée* (*fig.* 532).

Soit OD la droite donnée. Elle est la projection d'une certaine droite du plan du cercle auxiliaire, et il s'agit de trouver le rabattement de cette même droite sur le plan du cercle principal. Pour cela, menons la droite quelconque BNK qui coupe OD en N et l'axe AA' en K. La droite B_1K étant le rabattement de la droite de l'espace qui a pour projection BNK, le point N_1, rabattement du point dont N est la projection, se trouve à la fois sur B_1K et sur l'ordonnée du point N. Le point N_1 étant déterminé, la droite ON_1D_1 est le rabattement cherché.

Fig. 532.



Il ne reste plus alors qu'à mener au cercle principal, parallèlement à OD_1, les tangentes MT et M'T'. Les droites Tm et T'm', tracées parallèlement à OD, seront les tangentes demandées, et leurs points de contact m et m' se trouveront sur les ordonnées des points de contact M et M'.

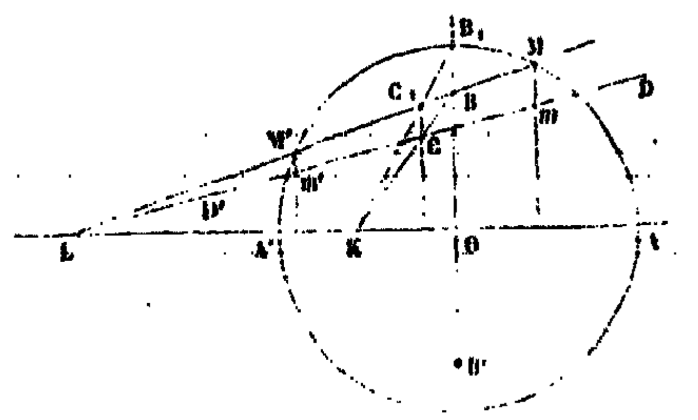
Scolie.

1057. Les constructions précédentes (1055, 1056) n'exigent pas que l'ellipse soit tracée : il suffit que ses axes soient donnés.

PROBLÈME.

1058. *Connaissant les axes d'une ellipse, construire ses points d'intersection avec une droite donnée* (*fig.* 533).

Fig. 533.



Soit DD' la droite donnée. Il s'agit de trouver le rabattement de la droite dont DD' est la projection. Nous mènerons par le point B une droite quelconque BCK qui coupe DD' au point C et l'axe AA' au point K. La droite B_1K étant le rabattement de la droite projetée en BCK, le rabattement C_1 du point C se trouve à la fois sur B_1K et sur l'ordonnée du point C. D'ailleurs, le point L où DD' rencontre l'axe AA' appartenant au rabattement cherché, on l'obtiendra immédiatement en traçant la droite LC_1. Cette droite coupe le cercle principal en deux points M et M', et les ordonnées de ces points coupent DD' aux deux points demandés *m* et *m'*.

THÉORÈME.

1059. *Tous les diamètres de l'ellipse sont des lignes droites passant par son centre.*

On entend par *diamètre* d'une courbe le lieu des milieux des cordes de cette courbe parallèles à une direction donnée. Dans le cercle, tout diamètre est une droite perpendiculaire au système de cordes qu'il divise en deux parties égales (108) ou qui lui est *conjugué*.

Cela posé, tout système de cordes parallèles du cercle a pour projection un système de cordes parallèles de l'ellipse projection du cercle. Les milieux des cordes du cercle étant sur un même diamètre, les projections de ces milieux ou les milieux des cordes correspondantes de l'ellipse sont sur une même droite projection du diamètre du cercle, c'est-à-dire passant par le centre de l'ellipse. Le théorème est donc démontré.

1060. Réciproquement, *toute droite passant par le centre de l'ellipse est un diamètre de la courbe;* car elle est la projection d'un certain diamètre du cercle dont l'ellipse est la projection. Les cordes conjuguées au diamètre de l'ellipse sont les projections des cordes du cercle conjuguées à son diamètre.

Corollaires.

1061. Deux diamètres sont dits *conjugués*, quand chacun d'eux fait partie du système de cordes conjugué à l'autre. Dans le cercle, deux diamètres conjugués sont perpendiculaires entre eux. Pour avoir des diamètres conjugués de l'ellipse projection du cercle, il faut donc projeter deux diamètres rectangulaires du cercle; car chacun des diamètres obtenus en projection divisera alors en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

Les diamètres conjugués de l'ellipse jouissent d'importantes propriétés. (*Voir* l'Appendice.)

1062. La tangente à l'extrémité d'un diamètre du cercle, étant perpendiculaire à ce diamètre, est parallèle au système de cordes qui lui est conjugué. Il en résulte que *la tangente à l'extrémité d'un diamètre de l'ellipse est parallèle au système de cordes conjugué à ce diamètre.*

1063. Si l'on mène deux tangentes à un cercle par un point extérieur.

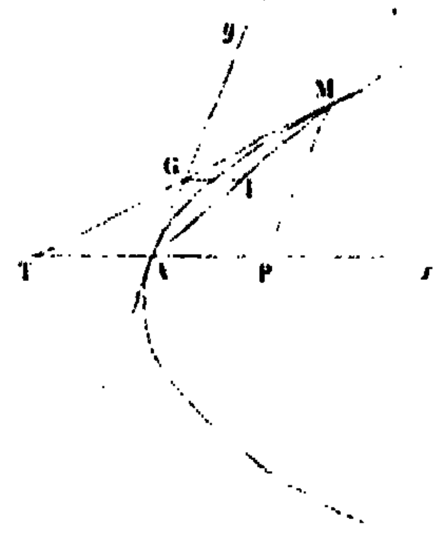
le diamètre mené à leur point de concours est perpendiculaire sur le milieu de la corde qui joint leurs points de contact. Par suite, *si l'on mène à une ellipse deux tangentes par un point extérieur, le diamètre mené à leur point de concours passe par le milieu de la corde qui unit leurs points de contact.*

1064. En considérant la parabole comme la limite d'une ellipse (**1023**) dont l'un des foyers et le sommet voisin coïncident avec le foyer et le sommet de la parabole, mais dont l'autre foyer et par suite le centre se transportent à l'infini sur le grand axe de la courbe, on voit que *la parabole a pour diamètres toutes les droites parallèles à l'axe.*

Les propriétés de l'ellipse démontrées aux nos **1062** et **1063** appartiennent aussi à la parabole limite. Ces propriétés vont nous permettre d'établir la proposition suivante :

La parabole étant rapportée au système d'axes obliques formé par un diamètre et la tangente à son extrémité, dans ce nouveau système d'axes, la sous-tangente est encore double de l'abscisse du point de contact (**1037**).

Fig. 534.



En effet, soient (*fig.* 534) la tangente Ay et le diamètre Ax pris pour axes coordonnés; menons la tangente MT en un point quelconque M de la parabole. Si, par le point d'intersection G des tangentes Ay et MT, on mène une parallèle à Ax, cette parallèle coupera la corde AM en son milieu (**1063**); le point G est donc le milieu de TM. AGy étant parallèle à l'ordonnée MP, le point A est alors le milieu de la sous-tangente TP.

THÉORÈME.

1065. *L'aire de l'ellipse est la moyenne proportionnelle des aires des cercles construits sur ses deux axes comme diamètres.*

L'ellipse donnée, dont les axes sont $2a$ et $2b$, peut être regardée comme la projection orthogonale d'un cercle de diamètre $2a$, dont le plan fait avec celui de l'ellipse un angle V tel que $\cos V = \frac{b}{a}$ (1046). D'après un théorème connu (720), on obtiendra alors l'aire de l'ellipse en multipliant l'aire du cercle par $\cos V$. On trouve ainsi

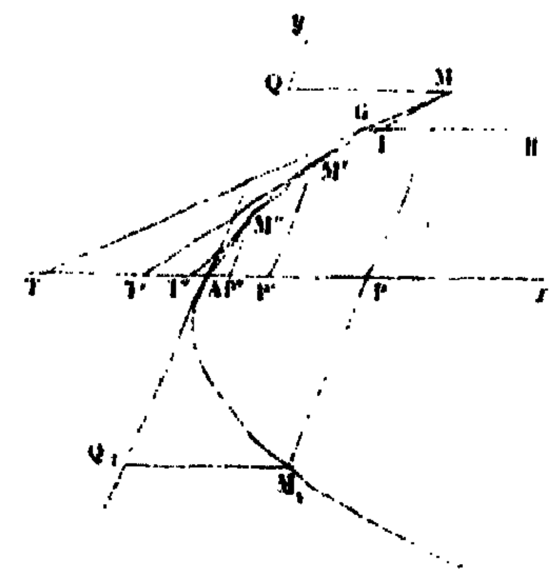
$$\pi ab, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sqrt{\pi a^2 . \pi b^2}.$$

THÉORÈME.

1066. *L'aire d'un segment parabolique est les deux tiers du parallélogramme qui a pour côtés la corde et la flèche du segment, cette flèche étant mesurée sur le diamètre conjugué à la corde du segment.*

Soit (*fig.* 535) le segment parabolique MAM_1 déterminé par la corde MM_1. Prenons pour axes coordonnés le diamètre Ax conjugué à cette corde et la tangente parallèle Ay. Évaluons d'abord l'aire de la portion MAP.

Fig. 535.



Inscrivons dans l'arc AM une ligne brisée MM'M''...A et, par les sommets de cette ligne brisée, menons à la courbe les tangentes MT, M'T',..., jusqu'à la rencontre du diamètre Ax; menons aussi les ordonnées MP, M'P',..., des sommets de la ligne brisée.

Comparons le trapèze MM'P'P au triangle correspondant GTT'. Si l'on mène par le sommet G du triangle une parallèle GH à Ax, elle passera par le milieu I de la corde MM' (1064). La perpendiculaire abaissée du milieu du côté MM' sur le côté PP' du trapèze MM'P'P est donc égale à la hauteur du triangle GTT'. Pour avoir le rapport de leurs aires, il suffit donc (*Questions proposées*, 429) de comparer le côté PP' du trapèze à la base TT' du triangle. Or (1064) AT = AP et AT' = AP', d'où TT' = PP'. Le triangle est donc la moitié du trapèze. Et comme on peut répéter le même raisonnement pour chaque trapèze et pour le triangle correspondant, la somme des trapèzes reste toujours égale au double de la somme des triangles. La limite de la première somme étant l'aire MAP et la limite de la seconde l'aire MAT, l'aire MAP est les deux tiers du triangle total MTP ou du parallélogramme équivalent APMQ.

L'aire M_1AP étant de même les deux tiers du parallélogramme APM_1Q_1, l'aire cherchée MAM_1 est enfin les deux tiers du parallélogramme MQQ_1M_1, qui a pour côtés la corde MM_1 du segment ou le double de l'ordonnée MP et la flèche de ce segment ou l'abscisse AP.

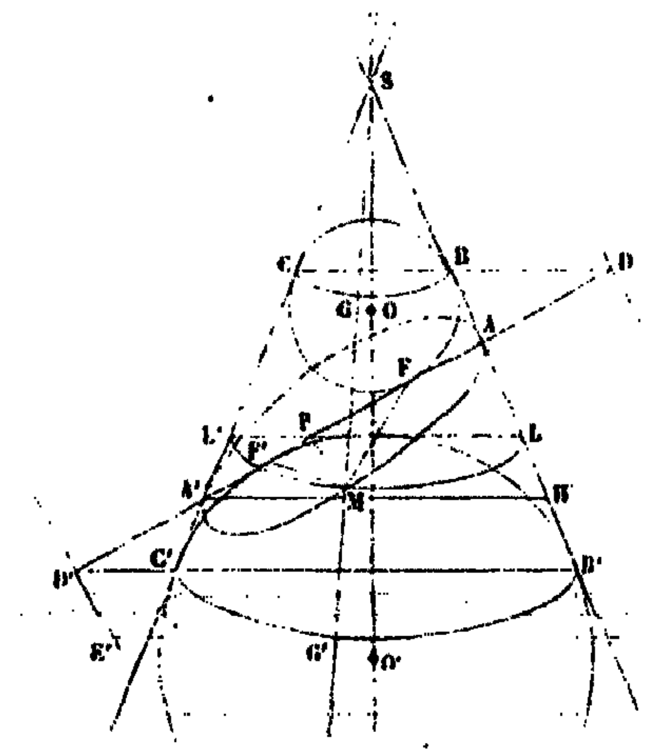
§ V. — SECTIONS PLANES DU CONE DE RÉVOLUTION.

THÉORÈME.

1067. *La section d'un cône circulaire droit par un plan est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

1° Supposons que *le plan sécant rencontre toutes les génératrices du cône sur une même nappe* (*fig.* 536).

Fig. 536.



Menons le plan méridien (870, 3°) du cône qui est perpendiculaire au plan sécant AMA'; il coupera le cône suivant les deux génératrices SA et SA' qui font entre elles l'*angle au sommet* de la surface, et le plan sécant suivant la droite AA'. Dans le plan méridien considéré, construisons les circonférences O et O' qui, situées de part et d'autre de AA', sont à la fois tangentes aux génératrices SA et SA' et à la droite AA' qu'elles touchent aux points F et F'. Si l'on fait tourner le plan méridien autour de l'axe SO, ces deux circonférences engendreront deux sphères tangentes à la surface conique suivant les parallèles (792) BC et B'C', et tangentes au plan sécant en F et en F'.

Ceci posé, prenons un point M quelconque sur la courbe d'intersection; menons les droites MF, MF' et la génératrice SM qui coupera en G et en G' les parallèles BC, B'C'. La droite MF étant tangente à la sphère O (791), on a (792) MF = MG. On a de même, par rapport à la sphère O', MF' = MG'. Par suite,

$$MF + MF' = MG + MG' = GG' = BB' = \text{const.}$$

D'ailleurs, en vertu des propriétés rappelées, on a

$$BB' = AB + AB' = AF + AF' \quad \text{et} \quad BB' = CC' = CA' + A'C' = A'F + A'F'.$$

Il en résulte évidemment

$$AF = A'F' \quad \text{et} \quad BB' = AA'.$$

La courbe obtenue est donc *une ellipse ayant* AA' *pour grand axe et les points* F *et* F' *pour foyers.*

Si l'on trace A'H parallèle à BC, AH est *la distance focale* de cette ellipse. En effet,

$$AF' = AB' \quad \text{et} \quad HB' = A'C' = AF.$$

Les plans des parallèles BC, B'C', prolongés jusqu'à la rencontre du plan sécant, le coupent suivant deux droites DE, D'E', perpendiculaires au plan méridien considéré (568). Si l'on mène le parallèle LL' de la surface qui passe par le point M, son intersection avec le plan sécant est de même dirigée suivant l'ordonnée MP de ce point par rapport au grand axe AA', et PD représente la distance du point M à la droite DE. Les triangles APL, ADB, AA'H, évidemment semblables, donnent alors

$$\frac{BL \text{ ou } MF}{PD} = \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AA'} = \text{const.}$$

Ainsi, les distances de chaque point de l'ellipse trouvée au foyer F et à la droite DE sont entre elles dans un rapport égal à l'excentricité (663) de la courbe. La même démonstration s'applique au foyer F' et à la droite D'E'. Les droites DE, D'E', sont appelées les *directrices* de la section.

2° Supposons que *le plan sécant rencontre les deux nappes du cône* (*fig.* 537).

On a alors

$$MF' - MF = MG' - MG = GG' = BB' = \text{const.};$$

d'ailleurs,

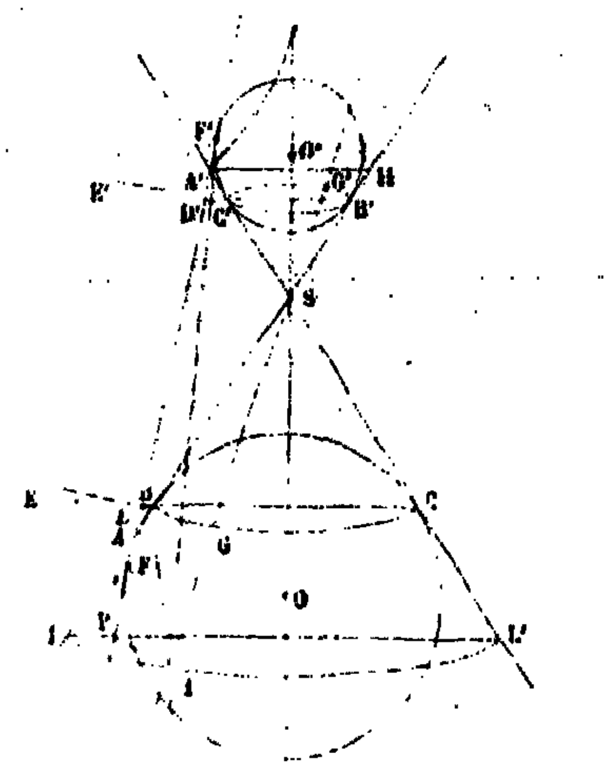
$$BB' = AB' - AB = AF' - AF \quad \text{et} \quad BB' = CC' = A'C - A'C' = A'F - A'F'.$$

Il en résulte évidemment

$$AF = A'F' \quad \text{et} \quad BB' = AA'.$$

La courbe obtenue est donc *une hyperbole, ayant* AA' *pour axe transverse et les points* F *et* F' *pour foyers.*

Fig. 537.



Si l'on trace A'H parallèle à B'C', AH est *la distance focale* de cette hyperbole. En effet,

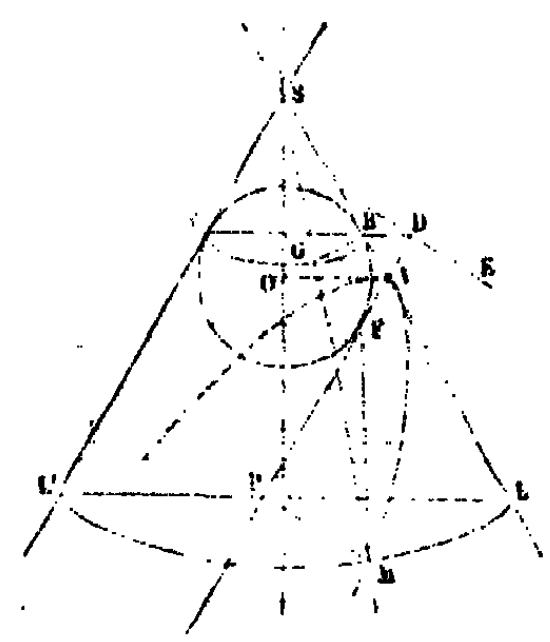
$$AB' = AF' \quad \text{et} \quad B'H = C'A' = A'F'.$$

Les droites DE et D'E', intersections des parallèles BC, B'C', avec le plan sécant, sont les *directrices* de l'hyperbole. Le rapport des distances du point M au foyer F et à la droite DE est égal à l'excentricité de la courbe. C'est ce que les triangles semblables APL, ADB, AA'H, montrent immédiatement.

3° Supposons *le plan sécant parallèle à l'une des génératrices du cône* (*fig.* 538).

Ayant mené le plan méridien LSL' perpendiculaire au plan sécant, ce dernier se trouve parallèle à la génératrice SL' et est coupé par le plan méridien suivant une droite AP parallèle (510) à cette génératrice. Dans le plan méridien, construisons la circonférence O, tangente aux génératrices principales en B et en C, et à la droite AP au point F. Si l'on fait tourner la figure autour de l'axe SO, la sphère engendrée par la circonférence O est tangente au cône suivant le parallèle BC et touche en F le plan sécant.

Fig. 538.



Cela posé, prenons un point quelconque M sur la courbe d'intersection; menons la droite MF et la génératrice SM qui coupe en G le parallèle BC de la surface; menons également le parallèle LL' de la surface qui passe par le point M et qui rencontre le plan sécant suivant l'ordonnée MP de ce point par rapport à AP. On aura toujours

$$MF = MG = BL.$$

D'ailleurs, l'intersection du plan sécant et du parallèle BC est une droite DE perpendiculaire au plan méridien, et PD représente la distance du point M à la droite DE. Les deux triangles APL, ABD, étant isocèles, puisqu'ils sont tous deux semblables au triangle SLL', on aura

$$PD = BL, \quad \text{c'est-à-dire} \quad MF = PD.$$

La courbe obtenue est donc une parabole ayant le point F *pour foyer et la droite* DE *pour directrice.*

COROLLAIRES.

1068. Ce théorème permet de réunir les trois courbes étudiées jusqu'ici sous la dénomination de *sections coniques*.

Les propriétés de ces courbes relativement à leurs foyers et à leurs directrices conduisent à la définition générale suivante : *Le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe (foyer) et à une droite fixe (directrice) est constant, est une section conique.*

Suivant que le rapport donné est inférieur, supérieur ou égal à l'unité, la courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

1069. Les sphères considérées dans la démonstration précédente peuvent, tout en restant inscrites au cône, cesser d'être tangentes au plan sécant qui les coupe alors suivant deux cercles. Les mêmes raisonnements étant applicables à ce cas, on arrive à cette proposition : *Le lieu des points tels, que le rapport qui existe entre les tangentes menées de ces points à un cercle fixe et les distances de ces mêmes points à une droite fixe soit constant, est une section conique dont la nature dépend de la valeur de ce rapport comparée à l'unité* (1068).

PROBLÈME.

1070. *Placer une ellipse, une hyperbole ou une parabole donnée sur un cône de révolution donné.*

1° Si l'on se reporte à la *fig.* 536, on voit qu'on connaît dans le triangle AA'H le grand axe AA' de l'ellipse donnée et sa distance focale AH, ainsi que l'angle AHA', complément du demi-angle au sommet du cône donné. La question revient donc à construire un triangle avec deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. Comme l'angle donné est opposé au plus grand des deux côtés donnés, ce triangle est complétement déterminé (161). Quand il sera construit, on élèvera une perpendiculaire sur le milieu de A'H, et la surface conique engendrée par AH en tournant autour de cette perpendiculaire sera coupée suivant l'ellipse donnée par un plan mené suivant AA' perpendiculairement au plan du triangle AA'H. *On peut donc toujours placer une ellipse donnée sur un cône donné.*

2° Si l'on se reporte à la *fig.* 537, on voit qu'on connaît dans le triangle AA'H l'axe transverse AA' et la distance focale AH de l'hyperbole donnée, ainsi que l'angle AHA', complément du demi-angle au sommet du cône donné. Comme cet angle est opposé ici au plus petit des deux côtés donnés, le problème peut avoir deux solutions ou n'en avoir aucune (161). Pour qu'il soit possible, il faut que AA' surpasse la perpendiculaire abaissée du point A sur HA', c'est-à-dire qu'on ait, en appelant 2β l'angle au sommet du cône et en posant (990) $AA' = 2a$, $AH = 2c$,

$$2a > 2c\cos\beta \quad \text{ou} \quad \cos\beta < \frac{a}{c}.$$

Mais si l'on appelle 2θ l'angle des deux asymptotes de l'hyperbole proposée, on a évidemment (1005)

$$\frac{a}{c} = \cos\theta.$$

La condition cherchée est donc

$$\cos\beta < \cos\theta$$

ou, puisqu'il s'agit d'angles inférieurs à un droit,

$$\beta > \theta \quad \text{ou} \quad 2\beta > 2\theta.$$

Donc, *pour pouvoir placer une hyperbole donnée sur un cône de révolution donné, il faut que l'angle au sommet du cône surpasse celui des deux angles des asymptotes de l'hyperbole qui comprend la courbe.*

3° Si l'on se reporte à la *fig.* 538, on voit que la droite OA est perpendiculaire à l'axe SO, d'après la détermination du point O et le parallélisme des droites SL' et AP. Dans le triangle rectangle OBA, on connaît par suite le côté $AB = AD = \frac{FD}{2}$, demi-paramètre de la parabole donnée (1018), et l'angle BAO complément du demi-angle au sommet du cône donné. Ce triangle est donc complétement déterminé (37). L'ayant construit, on élèvera OS perpendiculaire sur OA, et la surface conique engendrée par la rotation de AB autour de SO sera coupée suivant la parabole donnée par un plan mené perpendiculairement à celui du triangle OBA et passant par la droite AP, tracée de manière que AO soit la bissectrice de l'angle SAP. *On peut* donc *toujours placer une parabole donnée sur un cône donné.*

Scolie.

1071. Le sommet d'un cône de révolution s'éloignant à l'infini dans la direction de l'axe, ce cône dégénère en cylindre de révolution. *Un cylindre circulaire droit est* donc *coupé suivant une ellipse par un plan sécant quelconque* (1067, 1°).

C'est ce qu'on démontrera, au reste, directement en adoptant la même marche que précédemment. Cette marche permettra de déterminer le grand axe, les foyers et les directrices de la section proposée. On en déduira facilement que *toutes les ellipses trouvées en coupant par un plan quelconque un cylindre de révolution, ont pour petit axe le diamètre de ce cylindre.*

On peut toujours placer une ellipse donnée sur un cylindre de révolution donné (1070, 1°).

THÉORÈME.

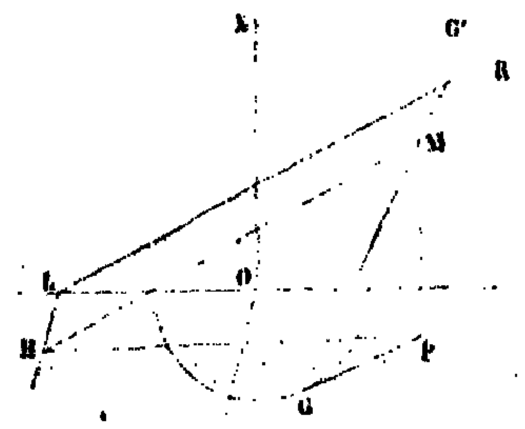
1072. *Si l'on coupe une surface gauche de révolution par un plan, la projection de l'intersection sur un plan perpendiculaire à l'axe de la surface est une section conique* (*fig.* 539).

On appelle *surface gauche de révolution* la surface engendrée par une droite non située dans un même plan avec l'axe autour duquel elle tourne. Le plus petit parallèle de la surface, engendré par la plus courte distance de la génératrice à l'axe (543), porte le nom de *cercle de gorge* de la surface. La projection de la génératrice sur le plan du cercle de gorge est tangente à ce cercle, car cette génératrice étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon du cercle de gorge, il en est de même de sa projection (539).

Cela posé, représentons la surface par son axe OX, son cercle de gorge

OG et l'une de ses génératrices GG'. Coupons-la par un plan HLR. Si ce plan rencontre en M la génératrice GG', M sera un point de la courbe d'intersection. Sa projection sur le plan du cercle de gorge sera en P, sur

Fig. 539.



la tangente GP à ce cercle. La génératrice faisant un angle constant avec le plan du cercle de gorge, le rapport de PG à MP reste constant.

Menons par le point M la ligne de plus grande pente MH (563) du plan HLR, par rapport au plan du cercle de gorge, et traçons la droite PH. La droite MH faisant de même un angle constant avec le plan du cercle de gorge, le rapport de PH à MP reste constant; le rapport de PG à PH est donc aussi constant, et le théorème est démontré (1069).

Corollaire.

1073. Si le rayon du cercle de gorge devient nul, la surface gauche de révolution dégénère en un cône. Donc, *la projection d'une section conique sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône de révolution sur lequel elle est placée, est une section conique dont l'un des foyers est la projection du sommet du cône sur le plan de projection et dont la directrice correspondante est la projection sur le même plan de l'intersection du plan sécant avec le plan mené par le sommet du cône parallèlement au plan de projection.*

En se reportant aux nos 1070 et 1071, on verra facilement qu'on peut toujours construire un cône de révolution dont l'axe soit perpendiculaire à un plan donné, pris pour plan de projection, et sur lequel se trouve placée une hyperbole ou une parabole donnée. Il n'en est pas de même pour l'ellipse, mais on peut toujours construire un cylindre de révolution dont l'axe soit perpendiculaire au plan de projection et sur lequel se trouve placée une ellipse donnée. Comme un cercle est aussi une section conique, on parvient à ce théorème : *La projection d'une section conique sur un plan quelconque est une section conique.*

PROBLÈME.

1074. *Construire une ellipse ou une hyperbole dont on connaît l'excentricité $\frac{c}{a}$, l'un des foyers, et deux points ou deux tangentes ou une tangente et son point de contact.*

Nous résolvons ce problème pour montrer de quelle utilité peut être la considération des directrices.

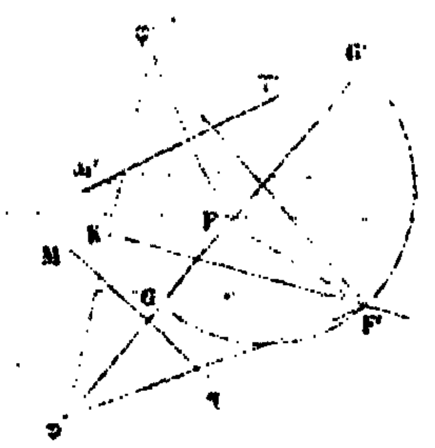
1° Soient F le foyer donné, A et B les deux points donnés; déterminons les droites r et r' par les conditions

$$\frac{AF}{r}=\frac{c}{a},\quad \frac{BF}{r'}=\frac{c}{a},$$

puis décrivons deux circonférences des points A et B comme centres avec les rayons r et r'. La directrice correspondante au foyer F sera une tangente commune aux circonférences décrites. En abaissant sur cette tangente DE une perpendiculaire FD et en marquant sur cette perpendiculaire les deux points A et A' qui la divisent dans le rapport $\frac{c}{a}$, on aura l'axe focal AA' de la section conique; sa distance focale FF' s'obtiendra en prenant, dans le sens convenable, suivant la valeur de $\frac{c}{a}$, $A'F'=AF$. La question sera alors ramenée à construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant ses axes.

2° Soient F le foyer donné, MT, M'T', les deux tangentes donnée (*fig.* 540). Déterminons les points φ et φ' symétriques du foyer par rapport à ces tangentes. La perpendiculaire indéfinie KF' élevée à $\varphi\varphi'$ par son milieu K est un lieu de second foyer F' (975, 1001). Ce second foyer fait

Fig. 540.



également partie du lieu dont le rapport des distances aux deux points fixes F et φ est égal à $\frac{c}{a}$. Nous déterminerons donc les points G et G' qui divisent $F\gamma$ dans ce même rapport, et sur GG' comme diamètre nous décrirons (200) une circonférence qui coupera KF' au point cherché. Il ne restera plus qu'à construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant la distance focale FF' et l'axe focal $F'\gamma$ de la courbe.

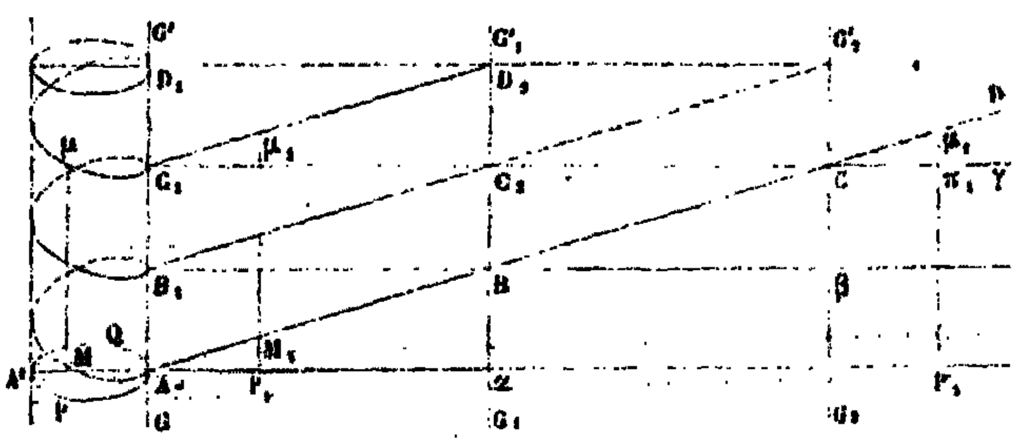
3° Soient F le foyer donné et MT la tangente donnée qui doit toucher la conique au point donné M. Déterminons le symétrique γ du foyer par rapport à MT; en joignant γM, nous aurons un lieu du second foyer F' (976, 1002). Divisons comme précédemment (2°) $F\gamma$, aux points G et G', dans le rapport donné $\frac{c}{a}$. La circonférence décrite sur GG' comme diamètre viendra couper en F' la droite γM prolongée, et le problème sera résolu.

§ VI. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'HÉLICE.

DÉFINITION ET TRACÉ DE LA COURBE.

1075. Considérons un cylindre circulaire droit indéfini ayant pour génératrice la droite GG' (*fig.* 541). Si l'on enroule l'angle indéfini BAα sur la surface cylindrique, de manière que le côté Aα s'applique exactement sur la section droite qui passe par le point A, la courbe que le côté AB trace en s'appliquant sur la surface est une *hélice*.

Fig. 541.



Dans le mouvement indiqué, les perpendiculaires abaissées des différents points de AB sur Aα coïncident avec les différentes génératrices du cylindre. Si la longueur Aα est égale à celle de la circonférence de la section droite du cylindre, le point α venant rejoindre le point A, le point B vient se placer en B_1 sur la génératrice GG', à une distance AB_1 du point A égale à $B\alpha$. On peut alors répéter pour le point B ce qu'on vient de dire pour le point A. Si la parallèle $B\beta$ à $A\alpha$ lui est égale, le point C de la droite AB, qui se projette en β sur $B\beta$, viendra se placer au point C_1 de la génératrice GG', qui est tel que l'on ait $B_1C_1 = C\beta = AB_1$, etc.

Les portions égales de l'hélice qui correspondent ainsi aux divisions égales de la droite indéfinie AD, dont les projections sur le plan de la section droite du cylindre ont des longueurs égales à celle de la circonférence de cette section droite, s'appellent ***spires***.

Les longueurs égales AB_1, B_1C_1, etc., interceptées par deux spires successives sur une génératrice *quelconque* du cylindre, représentent le ***pas*** de l'hélice. Changer, en effet, la génératrice sur laquelle on mesure le pas, c'est prendre un autre point de la surface cylindrique pour origine de l'hélice, sans rien changer aux conditions précédentes.

1076. En remarquant que l'hélice se reproduit par spires identiques qui commencent et se terminent d'une manière continue sur une même génératrice, on peut concevoir autrement la génération de l'hélice.

Faisons glisser le triangle $BC\beta$ sur BB_1 et amenons-le en B_1C_2B; amenons de même le triangle $CD\gamma$ en $C_1D_2C_2$, etc. Si l'on enroule ces triangles sur la surface cylindrique, les droites parallèles AB, B_1C_2, C_1D_2, etc., engendreront séparément les différentes spires de l'hélice.

En supposant donc le cylindre développé (745) suivant le rectangle indéfini $GG'G_1G'_1$ (*fig.* 541), en divisant à partir du point A la génératrice GG' en parties égales à $B\alpha$, en menant par les points B_1, C_1, D_1, ..., ainsi obtenus, des parallèles à AB jusqu'à la rencontre de $G_1G'_1$, et en enroulant la figure formée sur le cylindre, les droites distinctes AB, B_1C_2, C_1D_2, ..., reproduiront l'hélice continue tracée par l'enroulement de la droite indéfinie ABCD....

1077. Si l'on considère un point quelconque M de la première spire de l'hélice (*fig.* 541) et si l'on conçoit la génératrice MP qui passe par ce point et qui rencontre en P la section droite du cylindre menée par l'origine A de l'hélice, la longueur MP est l'*ordonnée* y du point M et l'arc AP est son *abscisse curviligne* x.

Comme le point M peut appartenir à une spire quelconque, son abscisse curviligne peut dépasser un nombre quelconque de circonférences. Soit, par exemple (*fig.* 541), le point μ situé sur la troisième spire et sur la même génératrice que le point M; il correspond au point μ_1 de la droite ABCD..., tel que $C\pi_1 = AP_1 =$ arc AP. Son abscisse curviligne est donc égale à deux fois la circonférence de la section droite plus l'arc AP, et son ordonnée à deux fois le pas $B\alpha$ plus MP.

THÉORÈME.

1078. ***L'ordonnée d'un point de l'hélice est proportionnelle à son abscisse curviligne*** (*fig.* 541).

Prenons un point quelconque μ sur l'hélice et menons son ordonnée $y = \mu P$. Quand on déroulera le cylindre, le point μ viendra en μ_1 sur la droite ABCD...; les ordonnées $\mu_1 P_1$ et μP seront égales, ainsi que l'abscisse rectiligne AP_1 et l'abscisse curviligne $x =$ AA'QAA'QAP. Le rapport $\frac{\mu_1 P_1}{AP_1}$ étant constamment égal au rapport $\frac{B\alpha}{A\alpha} = \frac{h}{2\pi r}$ (en désignant par r le rayon du cylindre et par h le pas de l'hélice), il en est de même du rapport $\frac{y}{x}$.

COROLLAIRE.

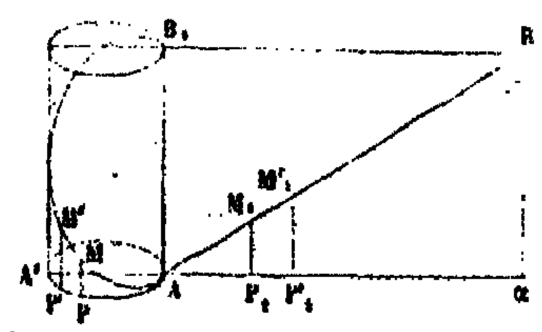
1079. La propriété exprimée par ce théorème peut servir de définition à l'hélice. Il est facile de voir en effet que, si une courbe tracée sur la surface d'un cylindre de révolution jouit de cette propriété, elle provient de l'enroulement d'une certaine droite sur la surface, c'est-à-dire qu'elle est une hélice.

Soit (*fig.* 542) la courbe AMB_1; pour deux points quelconques M et M' de cette courbe, on a la relation

$$\frac{MP}{AP} = \frac{M'P'}{AP'}.$$

Si l'on suppose qu'on développe alors la surface du cylindre dans le plan tangent suivant la génératrice AB_1 (874), la circonférence de la section droite en A s'appliquera sur la droite $A\alpha$ menée perpendiculairement à AB_1 dans ce plan, et les

Fig. 542.



arcs AP et AP′ seront rectifiés en AP_1 et AP'_1. Les points M et M′ viendont d'ailleurs se placer en M_1 et M'_1 sur les perpendiculaires élevées à $A\alpha$ en P_1 et P'_1, et l'on aura

$$M_1P_1 = MP, \quad M'_1P'_1 = M'P'.$$

Puisque par hypothèse $\frac{MP}{AP} = \frac{M'P'}{AP'}$, on aura aussi

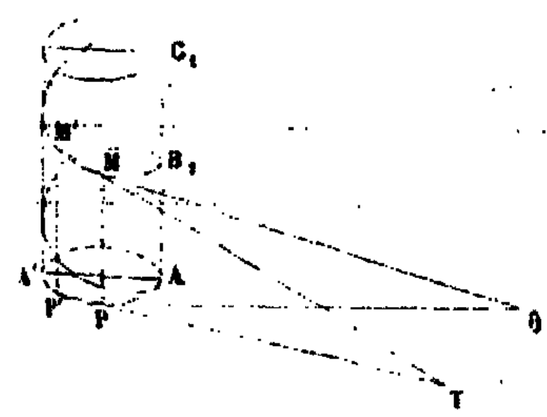
$$\frac{M_1P_1}{AP_1} = \frac{M'_1P'_1}{AP'_1},$$

et les points A, M_1, M'_1, seront en ligne droite.

THÉORÈME.

1080. *La sous-tangente en un point de l'hélice est égale à l'abscisse curviligne de ce point* (*fig.* 543).

Fig. 543.



La *sous-tangente* en un point de l'hélice est la projection, sur le plan de la section droite prise pour base, de la portion de tangente en ce point comprise entre son point de contact et sa trace sur le plan de la base.

Considérons sur la courbe les deux points voisins M et M', dont les ordonnées sont MP et M'P' et les abscisses curvilignes AA'AP et AA'AP'. On a (1078)

$$(1) \qquad \frac{\text{MP}}{\text{AA'AP}} = \frac{\text{M'P'}}{\text{AA'AP'}}.$$

Prolongeons la corde MM' jusqu'au point T où elle rencontre forcément le plan de la base, puisque l'on a M'P' > MP. Ce point T appartiendra au prolongement de la corde PP' de la circonférence de base. Les deux triangles semblables MTP, M'TP', donnent alors

$$\frac{\text{MP}}{\text{TP}} = \frac{\text{M'P'}}{\text{TP'}}.$$

Par suite, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{\text{TP}}{\text{AA'AP}} = \frac{\text{TP'}}{\text{AA'AP'}}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\text{TP'}-\text{TP}}{\text{AP'}-\text{AP}} = \frac{\text{TP'}}{\text{AA'AP'}}.$$

On peut écrire cette dernière égalité sous la forme

$$\frac{\text{TP'}}{\text{AA'AP'}} = \frac{\text{corde PP'}}{\text{arc PP'}}.$$

Lorsque le point M' se rapproche indéfiniment du point M regardé comme fixe, le point P' se rapproche indéfiniment du point P. La sécante M'MT devient la tangente Mθ à l'hélice au point M ; la sécante P'PT devient à la fois la tangente en P au cercle de base et la sous-tangente Pθ au point M. La limite du rapport $\frac{\text{corde PP'}}{\text{arc PP'}}$ étant l'unité (304), on a finalement

$$\lim. \frac{\text{TP'}}{\text{AA'AP'}} = \frac{\text{P}\theta}{\text{AA'AP}} = 1;$$

ce qui démontre le théorème.

Corollaires.

1081. Le rapport $\frac{y}{x}$ étant constant (1078), *le rapport de* *l'ordonnée d'un point à la sous-tangente de ce point est aussi constant.* Le triangle MPθ étant alors toujours semblable à lui-même, *la tangente à l'hélice fait un angle constant, aussi bien avec les génératrices du cylindre qu'avec le plan d'une section droite.* Ces deux angles sont complémentaires.

Comme on a

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{2\pi r},$$

si l'on désigne par i (*fig.* 542) l'angle suivant lequel les génératrices du cylindre sont coupées par l'hélice, on a

$$\operatorname{tang} i = \frac{2\pi r}{h}.$$

Pour construire la tangente en un point M de l'hélice, il suffit donc de mener dans le plan tangent au cylindre en ce point une droite faisant l'angle i avec la génératrice qui passe par ce point.

On peut aussi prendre, à partir du point P pied de l'ordonnée du point M, sur la tangente à la base, une longueur Pθ égale à l'arc AP rectifié, et joindre le point θ au point M.

1082. Si l'on enroule un fil sur une courbe quelconque, une de ses extrémités étant fixée en un point de la courbe; puis qu'on le déroule en le tendant constamment dans la direction des tangentes à la courbe, son extrémité libre décrit une *développante* de la courbe proposée qui, à son tour, est la *développée* de la courbe obtenue.

Le lieu des points θ ou des traces des tangentes à l'hélice sur le plan de la base est *une développante de cercle.* La surface formée par les tangentes elles-mêmes est connue sous le nom d'*hélicoïde développable.*

Scolie.

1083. Tout ce qui précède s'applique sans modifications aux cylindres droits à bases quelconques. Il faut seulement s'appuyer sur ce théorème : *La limite d'un arc de courbe quelconque à sa corde est l'unité lorsque l'arc tend vers zéro.*

§ VII. — APPENDICE.

Divisions homographiques.

1084. On donne le nom de *division* à une suite quelconque de points situés en ligne droite. Sur cette droite, qu'on appelle *base* de la division, on choisit à volonté une origine fixe a, et l'on indique sans ambiguïté la position d'un point quelconque m en donnant le segment am en grandeur et en signe.

Dans un grand nombre de questions de Géométrie, on est conduit à considérer deux divisions dont les points se correspondent un à un suivant une loi déterminée; on appelle alors *homologues* deux points correspondants quelconques, et on les désigne par une même lettre, non accentuée pour le point de la première division, et affectée d'un accent pour le point de la seconde. Soient L et L' les deux bases (*fig.* 544), m et m' deux points homologues, a l'origine prise sur la base L et b' l'origine choisie sur la base L' (*); la loi suivant laquelle les points homologues des deux divisions se correspondent s'exprimera alors par une équation entre les segments am et $b'm'$.

On dit que deux divisions sont *homographiques* lorsque l'équation qui exprime la loi de correspondance des points homologues m et m' est du premier degré par rapport à chacun des segments am et $b'm'$, c'est-à-dire est de la forme

$$A.am.b'm' + B.am + C.b'm' + D = 0, \tag{1}$$

A, B, C, D, étant des constantes données.

Deux divisions homographiques d'une troisième sont homographiques entre elles; car, soit une autre division homographique de la première; en désignant par c'' l'origine et par m'' l'homologue de m, on aura

$$A_1.am.c''m'' + B_1.am + C_1.c''m'' + D_1 = 0,$$

et comme l'élimination de am entre les deux relations précédentes conduit évidemment à une équation de même forme entre $b'm'$ et $c''m''$, les deux divisions engendrées par les points m' et m'' sont homographiques.

Souvent, au lieu de donner les quantités A, B, C, D, on donne des couples de points homologues. Or, l'équation (1) ne renferme en réalité que trois coefficients arbitraires, qui sont les rapports de trois quelconques des quantités A, B, C, D, à la quatrième; d'ailleurs, donner un couple de points homologues, c'est donner une valeur de am et la valeur cor-

---

(*) Nous supposons, pour plus de généralité, que les origines a et b' ne sont pas nécessairement deux points homologues.

respondante de $b'm'$, c'est-à-dire une équation du premier degré entre les trois rapports considérés. Pour déterminer ces rapports, il est donc nécessaire et suffisant d'avoir trois équations de ce genre, c'est-à-dire de connaître trois couples de points correspondants. Ainsi *deux divisions homographiques sont déterminées par trois couples de points homologues.*

1085. Écartons, pour le moment, le cas particulier où A est nul, en nous réservant de l'étudier plus tard (1087); nous pourrons alors diviser par A, et la relation homographique (1) prendra la forme

$$(2) \qquad am.b'm' - \lambda.am - \mu.b'm' + \nu = 0.$$

Les coefficients λ et μ ont des significations géométriques remarquables. Nous désignerons toujours, dans la suite, par I le point de la première division qui est l'homologue du point situé à l'infini dans la seconde, et par J′ le point de la seconde division qui répond à l'infini de la première. Si dans la relation (2) on fait am infini après avoir divisé par am, on trouve

$$b'J' - \lambda = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = b'J',$$

et l'on a, de même, en faisant $b'm'$ infini,

$$aI - \mu = 0, \quad \text{d'où} \quad \mu = aI.$$

La relation homographique (2) peut être transformée de bien des manières. Voici les deux autres formes les plus utiles :

1° L'équation (2) peut s'écrire

$$(am - \mu)(b'm' - \lambda) = k,$$

k étant une constante; en remplaçant dès lors λ et μ par leurs valeurs ci-dessus, on trouve

$$(3) \qquad Im.J'm' = k,$$

formule très-usuelle, car dans les applications on détermine en général très-aisément les points I et J′.

2° Soient a, b, c, trois points choisis à volonté dans la première division; a', b', c', leurs homologues dans la seconde, et m, m', un quatrième couple quelconque de points correspondants. La relation (3) donne

$$Ia = \frac{k}{J'a'}, \quad Ic = \frac{k}{J'c'}, \quad \text{d'où} \quad ca = Ia - Ic = -\frac{k}{J'a'.J'c'}.c'a'.$$

En formant les valeurs analogues de cb, ma, mb, et les portant dans l'expression du rapport anharmonique

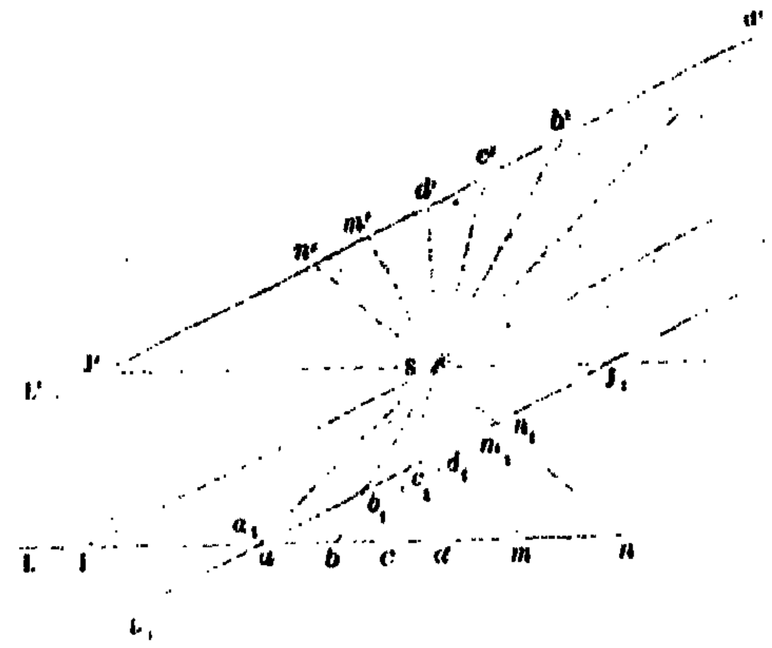
$$(abcm) \quad \text{ou} \quad \frac{ca}{cb} : \frac{ma}{mb},$$

on trouve

$$(4) \qquad (abcm) = (a'b'c'm'), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{ca}{cb} : \frac{ma}{mb} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{m'a'}{m'b'}.$$

Il résulte de cette nouvelle forme de l'équation homographique que, *pour que deux divisions soient homographiques, il faut et il suffit que quatre points quelconques de la première aient leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points homologues de la seconde.* C'est cette propriété que M. Chasles, à qui l'on doit la théorie si simple et si féconde des séries homographiques, prend pour point de départ dans sa *Géométrie supérieure.*

Fig. 544.



1086. Deux divisions $abcdmn\ldots$, $a_1b_1c_1d_1m_1n_1\ldots$, sont dites *en perspective* lorsque les droites bb_1, cc_1, $dd_1,\ldots$, qui joignent les points homologues, concourent en un même point S (*fig.* 544).

Deux divisions en perspective sont homographiques, car (327) le rapport anharmonique de quatre points quelconques de l'une est égal au rapport anharmonique des quatre points homologues de l'autre. Le point d'intersection (a, a_1) des deux bases L et L_1 est alors un point homologue commun. Réciproquement, *si deux divisions homographiques $abcd\ldots$, $a_1b_1c_1d_1\ldots$ ont un point homologue commun (a, a_1), ces deux divisions sont en perspective;* ce théorème fondamental n'est que la proposition du n° 332 avec un autre énoncé.

1087. Examinons maintenant le cas où A est nul. La relation homographique (1) se réduit alors à

$$B.am + C.b'm' + D = 0,$$

ou, comme B et C ne sauraient être nuls à la fois, à

$$am = k(b'm' - h),$$

h et k étant deux constantes. Lorsque m est en a, le premier membre s'annule, et comme m' coïncide alors avec l'homologue a' de a, on voit que $k = b'a'$ et, par suite, que l'équation précédente peut s'écrire

$$am = k(b'm' - b'a') \quad \text{ou} \quad am = k.a'm'.$$

Donc *les deux droites* L *et* L' *sont divisées en parties proportionnelles.* On dit, dans ce cas, que les deux divisions homographiques sont *semblables*.

Dans deux divisions semblables, les points à l'infini sont homologues; car, d'après l'équation précédente, am et $a'm'$ deviennent infinis en même temps. Réciproquement, *deux divisions homographiques dont les points à l'infini se correspondent sont semblables;* car si dans l'équation (1), préalablement divisée par $am.b'm'$, on fait à la fois am et $b'm'$ infinis, on voit que $A = 0$.

Lorsque le coefficient k qui figure dans la relation précédente est égal à ± 1, les deux divisions sont dites *égales*; elles sont *égales et de même sens* pour $k = 1$, *égales et de sens contraires* pour $k = -1$.

Divisions homographiques de même base.

1088. Deux divisions homographiques peuvent être situées sur une même droite L; on appelle alors *point double* tout point de cette droite qui, considéré comme appartenant à la première division, coïncide avec son homologue de l'autre division.

Deux divisions homographiques de même base, qui ont trois points doubles, coïncident; car a, b, c, étant les trois points doubles, et (m, m') un couple quelconque de points homologues, l'égalité des rapports anharmoniques $(abcm)$ et $(abcm')$ exige que m et m' coïncident. Il suit de là que *deux divisions homographiques distinctes et tracées sur une même droite ne peuvent avoir plus de deux points doubles.*

1089. Avant d'étudier plus complétement la question des points doubles, il importe de faire connaître la manière dont on détermine simultanément la position de deux points sur une droite, ce qui amènera naturellement quelques réflexions sur le rôle des imaginaires en Géométrie.

Soient (*fig.* 203) O une origine fixe sur une droite X'X, A et B deux points quelconques de cette droite, et I leur point milieu; on a toujours (320), quelle que soit la situation relative de ces points,

$$(1) \qquad \frac{1}{2}(OA + OB) = OI, \quad OA.OB = \overline{OI}^2 - \overline{AI}^2.$$

Le produit OA.OB est dit la *puissance de l'origine* O par rapport au couple (A, B).

Cela posé, si l'on désigne par p la distance OI de l'origine au milieu du couple (A, B) et par q la puissance de l'origine par rapport à ce couple, les segments OA et OB seront les racines de l'équation

$$x^2 - 2px + q = 0.$$

Les nombres p et q sont dits les *éléments du couple* (A, B); leur connaissance détermine simultanément les points A et B.

Les nombres donnés p et q étant réels, les segments OA et OB seront réels ou imaginaires (conjugués), selon que $p^2 - q$ sera positif ou négatif; dans le dernier cas, les deux points A et B cessent d'exister, et l'on dit qu'ils sont *imaginaires*.

Deux *points imaginaires* peuvent avoir des relations réelles avec des points réels; ce sont des relations contenant d'une manière symétrique les segments imaginaires conjugués, de telle sorte que, tous calculs effectués, il ne reste plus que des équations entre les éléments réels p et q du couple imaginaire. Soient, par exemple, deux couples de points (A, B), (C, D), situés sur une même droite; le premier couple est réel et défini par l'équation

$$x^2 - 2px + q = 0,$$

dans laquelle p^2 est supérieur à q; le second couple est imaginaire et répond à l'équation

$$x^2 - 2p'x + q' = 0,$$

dans laquelle p'^2 est inférieur à q'. Ces quatre points pourront former une figure harmonique, c'est-à-dire qu'on pourra avoir la relation

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} : \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}} = -1,$$

qui, tous calculs effectués, revient à

$$(3) \qquad q + q' = 2pp'.$$

La relation (2) n'a pas de sens explicite; on n'y doit considérer les segments que comme des symboles qui, traités par les règles ordinaires de l'Algèbre, conduisent à la relation (3); en d'autres termes, les relations telles que (2) ne sont que des manières symboliques, plus ou moins commodes, d'écrire des équations telles que (3) entre des éléments réels.

En Géométrie, comme en Algèbre, l'introduction des imaginaires permet de généraliser les énoncés, évite les subdivisions, et leur emploi transitoire peut fournir des démonstrations élégantes et rapides.

1090. Revenons maintenant à l'étude de deux divisions homographiques de même base.

Rapportons les deux divisions à une origine commune, et, pour plus de simplicité, choisissons pour cette origine le milieu O des deux points et J' homologues de l'infini (*fig.* 545); on aura alors $OJ' = -OI$, c'est-à-dire (1085) $\lambda = -\mu$, et l'homographie des deux divisions s'exprimera par l'équation

$$Om.Om' - \lambda(Om - Om') + \nu = o,$$

ou

$$(4)\qquad Om.Om' + \lambda.mm' + \nu = o.$$

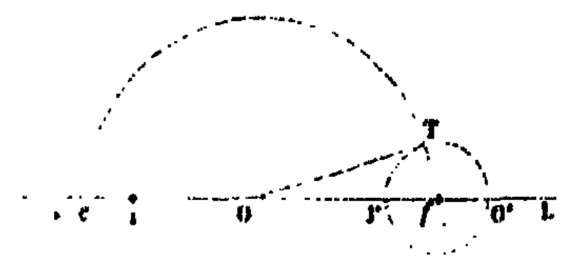
Nous savons d'ailleurs que $\lambda = OJ' = -OI$; et, pour avoir la signification géométrique de ν, il suffit de supposer que m est en O; car alors, m' coïncidant avec l'homologue O' de O, l'équation (4) donne $\lambda.OO' + \nu = o$, d'où $\nu = -OJ'.OO' = OI.OO'$.

Cela posé, cherchons les points doubles. Pour qu'un point m soit double, c'est-à-dire pour qu'il coïncide avec son homologue m', il faut et il suffit qu'on ait, en vertu de l'équation (4),

$$\overline{Om}^2 + \nu = o \quad \text{ou} \quad Om = \pm\sqrt{OJ'.OO'}.$$

On conclut de là que *deux divisions homographiques de même base ont deux points doubles réels ou imaginaires*, et que *le milieu des points doubles coïncide avec le milieu du segment IJ' formé par les homologues de l'infini.*

Fig. 545.



Les points doubles sont imaginaires lorsque les segments OJ' et OO' ont des signes contraires, c'est-à-dire lorsque O' et J' sont de part et d'autre de O. Ils sont réels lorsque O' et J' sont d'un même côté du point O; dans ce cas, en menant par O une tangente au cercle décrit sur O'J' comme diamètre, puis rabattant cette tangente $OT = \sqrt{OO'.OJ'}$ sur la droite L en Oe et Of, on aura les deux points doubles e et f.

1091. *Étant données deux divisions homographiques de même base, et a' et a_1 désignant les homologues d'un même point quelconque a considéré successivement comme appartenant à la première et à la seconde division, le conjugué harmonique α du point a par rapport aux points doubles e et f est le même que par rapport aux points a' et a_1.*

En effet, O étant le milieu des points doubles, l'homographie des deux divisions s'exprime par l'équation (4), qu'on peut écrire

$$Om.Om' - Oa.O\alpha = -\lambda.mm',$$

puisque, α étant le conjugué harmonique de a par rapport aux points e et f, on a

$$\nu = \overline{Oe}^2 = Oa.O\alpha.$$

Dès lors, en exprimant que a' est l'homologue de a considéré comme appartenant à la première division, et que a_1 est l'homologue de a considéré comme appartenant à la seconde division, on a

$$Oa.Oa' - Oa.O\alpha = -\lambda.aa' \quad \text{ou} \quad Oa.\alpha a' = -\lambda.aa',$$
$$Oa_1.Oa - Oa.O\alpha = -\lambda.a_1a \quad \text{ou} \quad Oa.\alpha a_1 = \lambda.aa_1,$$

d'où, en divisant,

$$\frac{\alpha a'}{\alpha a_1} = -\frac{aa'}{aa_1},$$

ce qui prouve que α est conjugué harmonique de a par rapport à a' et a_1.

Ce théorème permet de construire le conjugué harmonique d'un point par rapport aux deux points doubles, sans connaître ces points doubles.

1092. *Pour que deux divisions homographiques de même base soient semblables, il faut et il suffit* (1087) *que l'un des points doubles soit à l'infini.*

On voit immédiatement : 1° que, *pour que deux divisions soient égales et de même sens, il faut et il suffit que les deux points doubles soient à l'infini;* 2° que, *pour que deux divisions soient égales et de sens contraires, il faut et il suffit que l'un des points doubles soit à l'infini et que le second point double soit le milieu de tous les segments mm' formés par deux points homologues quelconques.*

Faisceaux homographiques.

1093. On donne le nom de *faisceau* à un système quelconque de droites issues d'un même point et situées dans un même plan (326).

On dit que deux faisceaux sont *homographiques*, lorsqu'on peut trouver deux droites L et L' qui les coupent suivant deux divisions homographiques. Il est clair qu'*alors toute section rectiligne L_1 du premier faisceau sera homographique d'une section rectiligne quelconque L'_1 du second faisceau;* car, les divisions L et L_1 étant en perspective sont homographiques (1086); il en est de même de L' et L'_1, et comme L et L' sont homographiques par hypothèse et que deux divisions homographiques d'une troisième sont homographiques entre elles (1084), les deux divisions L_1 et L'_1 sont homographiques.

Pour que deux faisceaux soient homographiques, il faut et il suffit que quatre droites quelconques du premier aient le même rapport anharmonique que les quatre droites homologues du second (328 et 1085, 2°).

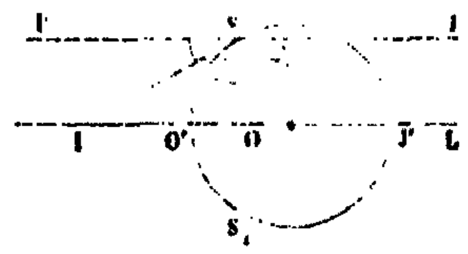
Deux faisceaux homographiques sont déterminés par trois couples de rayons homologues (1084).

Quand deux faisceaux homographiques ont un rayon homologue commun, les autres rayons homologues se coupent deux à deux sur une ligne droite; c'est le théorème fondamental du n° 330 avec un autre énoncé.

1094. *Deux faisceaux homographiques de même centre ont toujours deux rayons doubles* (*réels ou imaginaires*), c'est-à-dire deux rayons tels, que chacun d'eux considéré comme appartenant au premier faisceau coïncide avec son homologue dans le second faisceau. On obtient ces rayons en joignant le centre commun des deux faisceaux aux points doubles des deux divisions homographiques, déterminées par les deux faisceaux sur une transversale arbitraire.

Lorsqu'un angle tourne autour de son sommet S (*fig.* 546), *ses deux*

Fig. 546.



côtés engendrent deux faisceaux homographiques concentriques, car les angles du premier faisceau étant respectivement égaux à ceux du second, quatre droites quelconques du premier faisceau ont (329) le même rapport anharmonique que les quatre homologues du second. *Les rayons doubles de ces deux faisceaux sont* évidemment *imaginaires*, et il importe de remarquer que *la position de ces rayons doubles imaginaires est indépendante de la grandeur de l'angle*. En effet, soient L une transversale quelconque et I'SI, O'SO, J'SJ, trois positions de l'angle donné relatives, la première au cas où le second côté est parallèle à L, la seconde au cas où le premier côté est perpendiculaire à L, et la troisième au cas où le premier côté est parallèle à L. Tout revient à trouver les points doubles imaginaires des deux divisions homographiques que les côtés de l'angle tracent sur L. Or, I et J' sont les homologues de l'infini de ces deux divisions, et O, qui est évidemment leur milieu, est le milieu des points doubles; ces points sont donc de part et d'autre de O à une distance égale (1090) à

$$\sqrt{OJ'.OO'} = \sqrt{-OJ'.O'O}.$$

Mais puisque O'SO = J'SJ, l'angle O'SJ'est droit, et l'on a

$$O'O.OJ' = \overline{SO}^2;$$

donc, la distance du point O aux deux points doubles est égale à $SO.\sqrt{-1}$;

d'où l'on voit qu'elle dépend de la distance de la transversale L au sommet S de l'angle, mais en aucune manière de l'angle tournant.

Réciproquement, *lorsque deux divisions homographiques de même base ont leurs points doubles imaginaires, on peut considérer ces deux divisions comme tracées par un certain angle de grandeur constante tournant autour de son sommet.* En effet, I et J' étant les homologues de l'infini, O leur milieu et O' son homologue, décrivons une circonférence sur O'J' comme diamètre, jusqu'à la rencontre S (ou S_1) de la perpendiculaire élevée par O sur la base L. L'angle OSO' en tournant autour du point S tracera sur L deux divisions homographiques dont (O, O'), (I, ∞), (∞, J') seront trois couples de points homologues ; car, si l'on mène I'SJ parallèle à L, les angles OSJ, O'SJ', I'SO, étant droits, les angles JSJ', O'SO, I'SI, seront égaux. Donc ces deux divisions, ayant trois couples de points homologues communs avec les deux divisions proposées, ne diffèrent pas de celles-ci.

Intersection d'une droite et d'un cercle. — Points circulaires à l'infini.

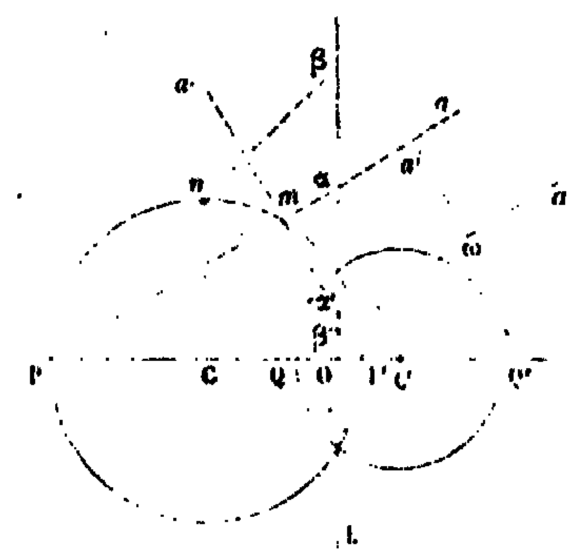
1095. Il résulte du n° 329 : 1° que *lorsqu'un point mobile m décrit un cercle, les droites* P*m*, P'*m*, *qui joignent ce point à deux points fixes,* P *et* P', *pris à volonté sur la circonférence, forment deux faisceaux homographiques ;* 2° que, *lorsqu'une droite mobile enveloppe un cercle, elle trace sur deux tangentes fixes de ce cercle deux divisions homographiques.*

Une droite quelconque L *du plan d'un cercle* C *rencontre toujours la circonférence en deux points (réels ou imaginaires)* ; car, les deux divisions homographiques tracées sur L par les rayons P*m*, P'*m*, des deux faisceaux ont toujours deux points doubles (réels ou imaginaires). *Le milieu des deux points d'intersection est toujours réel : c'est la projection* O *du centre* C *du cercle sur la droite* L ; car si l'on choisit pour les points P et P' (*fig.* 547) les extrémités du diamètre perpendiculaire à L, les deux points I et J', homologues de l'infini dans les deux divisions homographiques αβ..., α'β'..., tracées sur L, coïncident avec O, de sorte que O est le milieu des deux points doubles. *Le carré de la distance des deux points d'intersection au point* O *est égal à la puissance du point* O *par rapport au cercle changée de signe.* Car, puisque I et J' sont confondus avec O, le produit Oα.Oα' est constant (1090), et le carré de la distance du point O aux deux points doubles est égal à cette constante ; or, si β et β' sont les deux points homologues qui répondent au point *n*, milieu du demi-cercle P*m*P', Oβ et Oβ' sont en valeur absolue égaux à OP et OP', et la constante est égale à — OP'.OP.

1096. On doit considérer tous les points à l'infini d'un plan P comme situés sur une même droite qu'on nomme *droite de l'infini*. Voici comment on est conduit à cette conception. Soient Q un second plan non parallèle à P, S un point fixe extérieur aux plans P et Q, P′ le plan mené par S parallèlement à P, et enfin D la droite d'intersection des plans P′ et Q. Toute droite menée du point S à un point quelconque placé à l'infini dans le plan P est située dans le plan P′ et, par suite, perce le plan Q sur la droite D; donc cette droite D est la perspective, faite du point de vue S sur le tableau Q, de tous les points placés à l'infini dans le plan P. Or, comme une ligne plane, dont le plan ne passe pas par l'œil S, ne peut avoir pour perspective une droite qu'autant qu'elle est elle-même une ligne droite (599), on doit considérer les points à l'infini du plan P comme situés en ligne droite.

Cette notion acquise, considérons un cercle C (*fig.* 547) et la droite de

Fig. 547.



l'infini située dans son plan. P et P′ étant deux points fixes pris à volonté sur la circonférence C, les rayons P*m* et P′*m* tracent sur la droite de l'infini, quand le point *m* décrit le cercle, deux divisions homographiques dont les points doubles imaginaires appartiennent à la fois à la droite et au cercle. Or, si ω est un point pris à volonté dans le plan du cercle, les parallèles à P*m* et à P′*m* menées par ce point vont couper la droite de l'infini aux mêmes points *a* et *a′* que les rayons P*m* et P′*m*; d'ailleurs, l'angle *a*ω*a′* de ces parallèles est constant, puisque, en vertu de la propriété de l'angle inscrit, l'inclinaison mutuelle des droites P*m* et P′*m* ne varie pas; donc les points d'intersection du cercle et de la droite de l'infini sont les points doubles imaginaires des deux divisions homographiques tracées sur cette droite par un angle de grandeur constante tournant autour du point ω.

En faisant varier la position et la grandeur du cercle ainsi que la position des points P et P′ sur le cercle, on ne fait que changer la grandeur de l'angle qui tourne autour du point fixe ω, et comme la situation des points doubles imaginaires est indépendante (1091) de la grandeur de l'angle, on arrive à cette conclusion : *Tous les cercles situés dans un plan ont les deux mêmes points imaginaires communs avec la droite de l'infini de ce plan.* On donne d'après cela à ces deux points, dont la considération est souvent utile, le nom de *points circulaires à l'infini.*

Deux cercles quelconques, C et C', admettent donc la droite de l'infini pour corde commune. L'*axe* radical L des deux cercles est une seconde corde commune; en effet, les points réels ou imaginaires où cet axe rencontre l'un quelconque des deux cercles sont de part et d'autre du point O à une distance égale à la racine carrée de la puissance, prise en signe contraire, du point O par rapport au cercle considéré (1095); et comme, si L est l'axe radical, le point O a la même puissance par rapport aux deux cercles, on voit que l'axe radical coupe ces cercles aux deux mêmes points.

Ainsi, *deux cercles quelconques ont toujours quatre points d'intersection situés deux à deux sur deux cordes communes réelles, qui sont l'axe radical et la droite de l'infini. Les deux points d'intersection situés sur l'axe radical peuvent être tous deux réels ou tous deux imaginaires. Quand les cercles sont concentriques,* l'axe radical passe à l'infini, les deux cordes communes se confondent *et les deux cercles ont un double contact imaginaire à l'infini.* Ces dernières idées ont été émises d'abord par M. Poncelet (*Propriétés projectives,* 1re sect., chap. II); mais c'est M. Chasles qui, le premier, a présenté avec rigueur l'introduction des imaginaires en Géométrie.

Involution de deux divisions.

1097. On dit que deux divisions homographiques de même base L sont en *involution,* lorsqu'on peut trouver sur la droite L un point a qui, considéré successivement comme appartenant à l'une et à l'autre division, a toujours pour homologue le même point a'.

L'homographie de deux divisions de même base s'exprime (1090) par la relation générale

$$(1)\qquad \mathrm{O}m.\mathrm{O}m' + \mathrm{OJ}'.mm' + \nu = 0,$$

O étant le milieu des points I et J' dont les homologues sont à l'infini.

Pour que l'égalité

$$\mathrm{O}a.\mathrm{O}a' + \mathrm{OJ}'.aa' + \nu = 0$$

ne change pas quand on permute a et a', il faut et il suffit que $\mathrm{OJ}' = 0$. Donc, *pour que deux divisions homographiques soient en involution, il faut et il suffit que les points* I *et* J', *homologues de l'infini, coïncident.*

La relation (1) se réduit alors à

$$(2)\qquad \mathrm{O}m.\mathrm{O}m' = \text{const.},$$

et la symétrie de cette équation, par rapport à Om et Om', montre que tous les couples de points homologues jouissent de la même propriété que le couple (m, m'). Ainsi, *dans deux divisions homographiques en involution, tout point considéré successivement comme appartenant à la première et à la seconde division a toujours le même homologue.*

Le point O, où sont réunis les points I et J' et dont le conjugué est à l'infini, reçoit le nom de *point central de l'involution.*

1098. L'équation (2), très-commode à cause de sa simplicité, est trop particulière. Lorsqu'on veut prendre pour origine commune des deux divisions non plus le point central O, mais un point quelconque a de la base, il suffit d'exprimer dans la relation

$$am.am' - \lambda.am - \mu.am' + \nu = 0$$

que les points I et J' coïncident, c'est-à-dire, puisque (1085) $\lambda = aJ'$ et $\mu = aI$, que $\lambda = \mu$. L'équation d'involution est alors

$$(3) \qquad am.am' - \lambda(am + am') + \nu = 0.$$

On voit qu'elle ne renferme que deux coefficients arbitraires λ et ν, de sorte qu'*il suffit de deux couples de points homologues pour déterminer deux divisions homographiques en involution.*

Soient (a, a'), (b, b'), (c, c'), trois couples de points homologues de deux divisions en involution : *quatre quelconques de ces six points ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points homologues;* ainsi l'on a, par exemple, $(abcb') = (a'b'c'b)$, car les deux systèmes $abcb'$, $a'b'c'b$, sont homographiques. Réciproquement, *pour que trois couples de points (a, a'), (b, b'), (c, c'), en ligne droite soient en involution,* c'est-à-dire pour que les points c et c' soient deux points homologues des deux divisions homographiques en involution déterminées par les deux couples (a, a') et (b, b'), *il suffit que quatre de ces points aient leur rapport anharmonique égal à celui de leurs homologues;* car si l'on a, par exemple, $(abcb') = (a'b'c'b)$, les deux divisions $abcb'$, $a'b'c'b$, seront homographiques, et au point b, considéré tour à tour comme appartenant à la première et à la seconde division, répondra toujours le même point b'.

Il résulte de là que *l'involution est une propriété projective.*

1099. On sait que deux divisions homographiques de même base ont deux points doubles réels ou imaginaires, dont le milieu coïncide avec le milieu des points I et J' homologues de l'infini. Donc, *deux divisions en involution ont deux points doubles e et f, réels ou imaginaires, dont le milieu est le point central* O; cela résulte d'ailleurs de la relation (2) qui donne pour les segments Oe et Of relatifs aux *points doubles,*

$$Oe = +\sqrt{Oa.Oa'}, \quad Of = -\sqrt{Oa.Oa'},$$

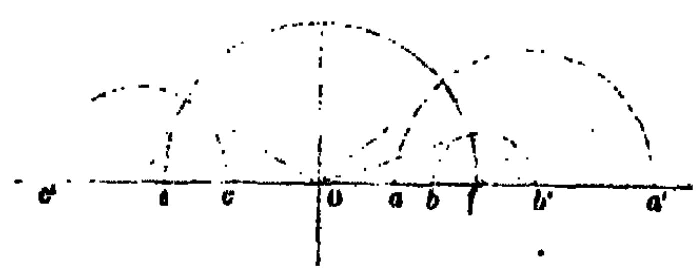
(a, a') étant un couple quelconque de points homologues.

Ces expressions montrent encore que *le segment ef, formé par les deux points doubles réels ou imaginaires, est divisé harmoniquement par chaque couple de points homologues* (a, a'), (b, b'), ... (*). Le point central ayant même puissance par rapport à tous les couples (a, a'), (b, b'), ... de points homologues, appartient à l'axe radical de deux cercles quelconques ayant respectivement pour cordes deux segments quelconques aa', bb'.... Donc : 1° *Si sur les divers segments* aa', bb', cc',... *formés par chaque couple de points homologues on décrit des circonférences passant toutes par un même point quelconque extérieur à la base, ces circonférences auront un second point commun et leur corde commune coupera la base au point central;* 2° *les circonférences décrites sur les divers segments* aa', bb', cc', ... *comme diamètres, ont pour axe radical commun la perpendiculaire à la base élevée par le point central.*

1100. Actuellement, pour nous rendre compte de la situation des points, distinguons deux cas, suivant que les points doubles e et f sont réels ou imaginaires.

1° *Si les points doubles e et f sont réels*, comme le segment ef divise harmoniquement chacun des segments aa', bb', cc', ..., on voit (344) que *le point central* O *n'est jamais compris entre deux points conjugués quelconques*, tels que a et a', et que *deux segments quelconques n'empiètent jamais l'un sur l'autre* : ils sont, comme aa' et bb', compris l'un dans l'autre, ou bien, comme aa' et cc', de côtés différents de O, et par suite extérieurs l'un à l'autre (*fig.* 548). *Les deux points communs*

Fig. 548.



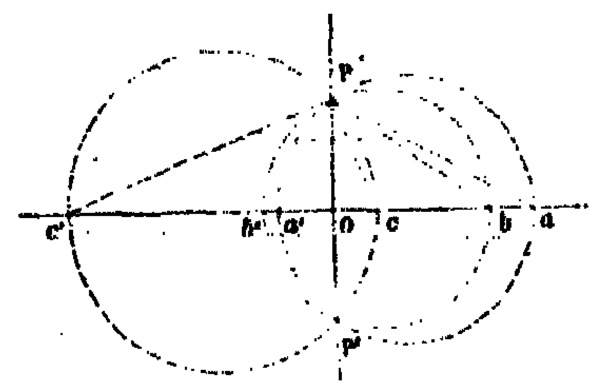
aux cercles décrits sur aa', bb', cc', ..., *comme diamètres, sont ici imaginaires, mais chacun de ces cercles coupe orthogonalement* (343) *le cercle* ef. Étant donnés deux couples (a, a') et (b, b') formant deux segments qui n'empiètent pas l'un sur l'autre, il est aisé de trouver les points doubles e et f de l'involution déterminée par ces deux couples; sur aa' et bb' on décrira deux circonférences passant par un même point pris à volonté hors de la base; la corde commune coupera la base au

(*) Il résulte de là que lorsque l'un des points doubles e est à l'infini, l'autre point double f est le milieu de tous les segments aa', bb', cc', ...

point central O, et la tangente menée de ce point au cercle décrit sur aa' comme diamètre sera le rayon du cercle ef.

2° *Si les points doubles e et f sont imaginaires*, le produit $Oa.Oa'$ est négatif; de sorte que *tout couple de points homologues* (a, a') *est séparé par le point central* O, *et que deux segments quelconques* aa', bb', *empiètent l'un sur l'autre* (*fig.* 549). *Les deux points communs* P *et* P' *aux divers*

Fig. 549.



cercles décrits sur aa', bb', cc', ... *comme diamètres sont* donc *réels*, et *de chacun des points* P *et* P' *on voit les divers segments* aa', bb', cc', ... *sous un angle droit;* on a d'ailleurs $\overline{OP}^2 = Oa.Oa' = -\overline{Oc}^2$, comme on pouvait le prévoir d'après le n° 1090. Inversement, *un angle droit pivotant autour de son sommet trace sur une droite quelconque deux divisions en involution qui n'ont pas de points doubles et dont le point central est la projection du sommet de l'angle sur la droite* (1094). Étant donnés deux segments aa' et bb' d'une involution sans points doubles, en décrivant deux circonférences sur aa' et bb' comme diamètres, on obtiendra le point P, et il suffira de faire pivoter un angle droit autour de ce point pour avoir tous les couples de points homologues.

1101. *Les points doubles e et f de deux divisions homographiques quelconques*, $abc, \ldots$, $a'b'c', \ldots$, *de même base, forment une involution avec chaque système de deux couples tels que* ab' *et* $a'b$; car on a

$$(abef) = (a'b'ef) = (b'a'fe) \quad (323),$$

de sorte que les deux figures $abef$, $b'a'fe$, sont homographiques et que le point e, considéré tour à tour comme appartenant à l'une et à l'autre, a toujours le même homologue f.

On conclut de là (1099): 1° que *les trois circonférences, menées par un même point g quelconque extérieur à la base et par les trois segments* ab', ba', ef, *passent toutes trois par un second point commun;* 2° que *les circonférences décrites sur* ab', ba', ef, *comme diamètres, ont même axe radical.*

Ce théorème donne le moyen de déterminer les points doubles de deux divisions homographiques de même base, données par trois couples (a, a'), (b, b'), (c, c'), de points homologues.

g étant un point pris à volonté, on décrira les deux circonférences circonscrites aux triangles gab', $ga'b$, qui se couperont en un second point g'; on décrira de même les deux circonférences circonscrites aux triangles gac', $ga'c$, qui se couperont en un second point g''; la circonférence déterminée par les points g, g', g'', coupera la base des deux divisions aux deux points doubles (réels ou imaginaires). En effet, en vertu du premier corollaire, le cercle déterminé par les points doubles e et f et par le point g doit contenir les points g' et g''. — La construction se prête à tous les cas.

Relations métriques entre trois segments en involution.

1102. Soient (a, a'), (b, b'), (c, c'), trois couples de points (réels ou imaginaires) situés en ligne droite, et

$$x^2 - 2p_1x + q_1 = 0, \quad x^2 - 2p_2x + q_2 = 0, \quad x^2 - 2p_3x + q_3 = 0$$

les équations qui les représentent, en adoptant pour origine commune un point A arbitraire de la base. Pour que les trois couples forment une involution, il faut et il suffit que chacun d'eux satisfasse à la relation

$$Am.Am' - \lambda(Am + Am') + \nu = 0;$$

de là les trois équations

$$q_1 - 2p_1\lambda + \nu = 0, \quad q_2 - 2p_2\lambda + \nu = 0, \quad q_3 - 2p_3\lambda + \nu = 0,$$

qui doivent être satisfaites pour les mêmes valeurs de λ et ν. La condition d'involution résulte donc de l'élimination de λ et ν entre ces trois équations; on trouve

$$(1) \qquad q_1(p_2 - p_3) + q_2(p_3 - p_1) + q_3(p_1 - p_2) = 0.$$

Cette équation (1) résulterait pareillement de l'élimination du paramètre arbitraire k entre les deux relations

$$p_3 = \frac{p_1 + kp_2}{1 + k}, \quad q_3 = \frac{q_1 + kq_2}{1 + k},$$

qui peuvent dès lors remplacer la condition (1).

En vertu de ces valeurs, l'équation $x^2 - 2p_3x + q_3 = 0$ peut s'écrire

$$x^2 - 2p_1x + q_1 + k(x^2 - 2p_2x + q_2) = 0;$$

telle est l'équation qui détermine le troisième couple (c, c') en fonction des éléments des deux premiers (a, a') et (b, b').

1103. Dans les applications, il est souvent plus commode de substituer aux éléments p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3, les segments Aa, Aa', Ab, Ab', Ac,

Ac'; or si α, β, γ, désignent respectivement les milieux des segments aa', bb', cc', on a

$$p_1 = A\alpha,\quad p_2 = A\beta,\quad p_3 = A\gamma,$$

et par suite la condition d'involution (1) s'écrit

$$(2)\qquad Aa.Aa'.\beta\gamma + Ab.Ab'.\gamma\alpha + Ac.Ac'.\alpha\beta = 0.$$

Cette équation fondamentale en donne beaucoup d'autres. Par exemple, si l'on fait coïncider successivement l'origine arbitraire A avec chacun des points a, a', b, b', c, c', on obtient le groupe

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{ab.ab'}{ac.ac'} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}, &\quad &\frac{a'b.a'b'}{a'c.a'c'} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma},\\ &\frac{bc.bc'}{ba.ba'} = \frac{\beta\gamma}{\beta\alpha}, &\quad &\frac{b'c.b'c'}{b'a.b'a'} = \frac{\beta\gamma}{\beta\alpha},\\ &\frac{ca.ca'}{cb.cb'} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}, &\quad &\frac{c'a.c'a'}{c'b.c'b'} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}.\end{aligned}\right.$$

En remarquant que les équations écrites sur la même horizontale ont le même second membre, on a encore

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{ab.ab'}{ac.ac'} = \frac{a'b.a'b'}{a'c.a'c'},\\ &\frac{bc.bc'}{ba.ba'} = \frac{b'c.b'c'}{b'a.b'a'},\\ &\frac{ca.ca'}{cb.cb'} = \frac{c'a.c'a'}{c'b.c'b'}.\end{aligned}\right.$$

Enfin, en multipliant entre elles de toutes les manières possibles trois des six équations (3), prises de telle façon que le produit des seconds membres soit égal à 1, on obtient

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &ab'.bc'.ca' = -a'b.b'c.c'a,\\ &ab'.bc.c'a' = -a'b.b'c'.ca,\\ &ab.b'c'.ca' = -a'b'.bc.c'a,\\ &ab.b'c.c'a' = -a'b'.bc'.ca.\end{aligned}\right.$$

Faisceaux en involution.

1104. On dit que deux faisceaux homographiques de même centre sont *en involution*, lorsqu'on peut trouver une droite qui les coupe suivant deux divisions en involution. Alors toute autre section rectiligne des deux faisceaux donnera deux divisions en involution (1098).

Dans deux faisceaux en involution, tout rayon considéré tour à tour comme appartenant à l'un et à l'autre faisceau a toujours le même *homologue.* Inversement, *deux faisceaux homographiques de même centre sont en involution s'il existe un rayon qui, considéré successivement comme appartenant au premier et au second faisceau, ait toujours le même homologue* (1097).

Deux faisceaux en involution sont déterminés par deux couples de rayons homologues.

Six rayons issus d'un même point et conjugués deux à deux sont en involution si quatre d'entre eux, convenablement choisis, ont même rapport anharmonique que leurs conjugués; et alors quatre quelconques de ces rayons auront même rapport anharmonique que leurs conjugués (1098).

Dans deux faisceaux en involution, il y a toujours deux rayons doubles réels ou imaginaires; les rayons doubles forment un faisceau harmonique avec deux rayons homologues quelconques (1099).

Un angle droit tournant autour de son sommet engendre deux faisceaux en involution dont les rayons doubles sont imaginaires (1100, 2°).

1105. *Dans deux faisceaux en involution, il existe toujours un couple de rayons homologues rectangulaires.*

En effet, soient a, a', b, b', c, c',... les points conjugués deux à deux, suivant lesquels une transversale L, prise à volonté, coupe les deux faisceaux dont nous désignerons par O le centre commun. Les circonférences circonscrites aux deux triangles Oaa', Obb', se couperont en un second point O', qui ne sera pas symétrique de O par rapport à L, à moins que les angles aOa', bOb', ne soient droits. Il existera donc en général un cercle unique passant par O et O' et ayant son centre sur L; si n et n' sont les points où ce cercle rencontre la droite L, n et n' seront deux points conjugués de l'involution tracée sur L par les deux faisceaux (1101), et l'angle nOn' sera droit. Ainsi il y aura un couple unique de rayons homologues rectangulaires. Mais si les angles aOa', bOb', étaient droits, O et O' seraient symétriques par rapport à L, et tout cercle passant par O et O' ayant son centre sur L, tous les autres couples de rayons homologues seraient rectangulaires. Ainsi *le couple de rayons homologues rectangulaires est unique, à moins que tous les couples de rayons homologues ne soient à angle droit;* dans ce cas particulier les rayons doubles sont imaginaires (1100, 2°).

1106. *Toute transversale* L *menée dans le plan d'un quadrilatère* ABCD *rencontre les quatre côtés et les deux diagonales en six points,* a *et* a', b *et* b', c *et* c', *qui sont en involution* (*fig.* 550); car les faisceaux homographiques (AB, AC, AD, Ac'), (CB, CA, CD, Cc') déterminent sur L deux divisions homographiques, et l'on a

$$(acb'c') = (bca'c') \quad \text{ou (325)} \quad (acb'c') = (a'c'bc),$$

d'où l'on conclut (1098) que les segments aa', bb', cc', sont en involution.

Les six droites menées d'un point quelconque O *du plan d'un quadrilatère* ABCD *aux sommets et aux points de concours* E *et* F *des côtés opposés, sont en involution ;* car, le quadrilatère OAFB, dont OF et AB sont les diagonales, détermine, d'après le théorème précédent, six points en involution sur la transversale DE ; donc les droites OA et OC, OB et OD, OE et OF, qui passent par ces six points, sont en involution.

En plaçant le point O à l'intersection des deux circonférences décrites sur AC et BD comme diamètres, les couples de rayons homologues OA et OC, OB et OD, seront rectangulaires ; donc le troisième couple OE et OF le sera aussi (1105), et par suite la circonférence décrite sur EF comme diamètre passera par les deux points communs aux deux premières ; donc, *les trois circonférences décrites sur les trois diagonales* AC, BD, EF, *d'un quadrilatère complet comme diamètres, se coupent aux deux mêmes points ;* d'où l'on peut conclure immédiatement le théorème du n° 408.

Fig. 550.

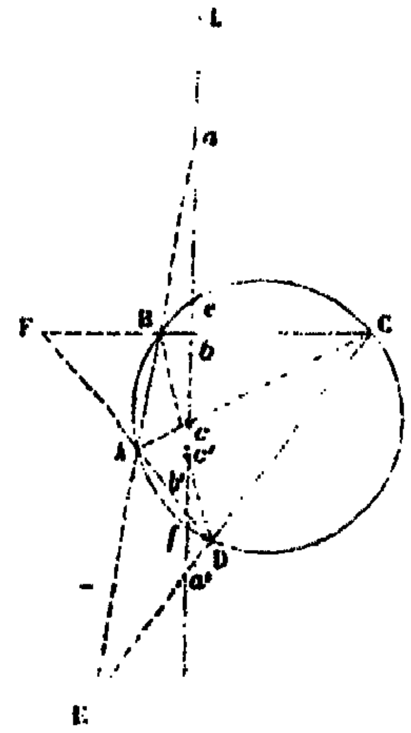
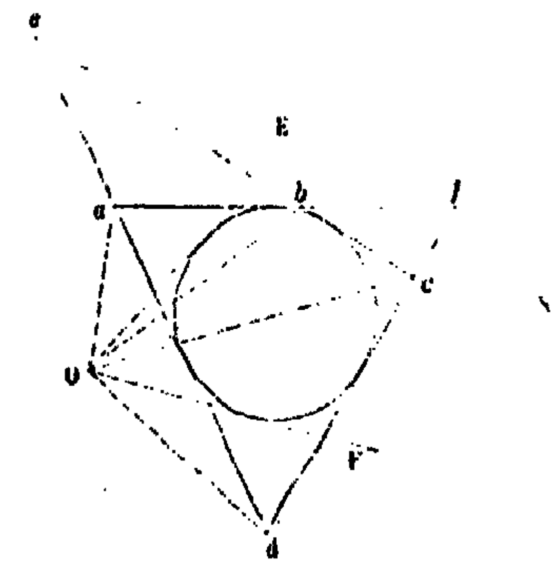


Fig. 551.



1107. *Quand un quadrilatère* ABCD *est inscrit dans un cercle, une transversale quelconque* L *située dans son plan rencontre les deux couples de côtés opposés et le cercle en trois couples de points* (a, a'), (b, b'), (e, f), *qui sont en involution* (*fig.* 550).

En effet, les droites qui joignent aux points fixes A et C un point

1108. *Quand un quadrilatère abcd est circonscrit à un cercle, si d'un point* O *situé dans son plan on mène des droites* Oa, Ob, Oc, Od, *à ses sommets et deux tangentes* OE, OF, *à la courbe, les trois couples de droites* Oa *et* Oc, Ob *et* Od, OE *et* OF, *sont en involution* (*fig.* 551).

En effet, une tangente, en roulant sur le cercle, trace sur les tangentes mobile qui décrit la circonférence, forment deux faisceaux homographiques (1095); par suite, ces faisceaux tracent sur L deux divisions homographiques dont e et f sont les points doubles. D'ailleurs, comme AB et CD, AD et CD, sont deux couples de rayons homologues des deux faisceaux, a et b, b' et a', seront deux couples de points homologues des deux divisions. Donc (1101), les trois couples (a, a'), (b, b'), (e, f), sont en involution.

Au lieu de prendre les deux couples de côtés opposés, on pourrait prendre un couple de côtés opposés et les deux diagonales; le théorème subsisterait, car ces quatre droites forment aussi un quadrilatère inscrit au même cercle.

Il résulte du théorème précédent que *si un quadrilatère inscrit à un cercle se déforme de telle sorte que trois de ses côtés tournent autour de trois points en ligne droite, le quatrième côté tourne aussi autour d'un point fixe de cette droite.*

On déduirait aisément de là une solution de ce problème : *Inscrire dans un cercle un triangle dont les trois côtés passent par trois points donnés en ligne droite.*

fixes ab et cd deux divisions homographiques (329, 1093). Les droites menées du point O à ces divers points forment donc deux faisceaux homographiques dont OE et OF sont les rayons doubles. D'ailleurs, comme a et d, b et c, sont deux couples de points homologues des deux divisions, Oa et Od, Ob et Oc, sont deux couples de rayons homologues des deux faisceaux. Donc (1098), les trois couples Oa et Oc, Ob et Od, OE et OF sont en involution.

Au lieu de prendre les deux couples de sommets opposés, on pourrait prendre un couple de sommets opposés et les deux points de concours e et f des côtés opposés; le théorème subsisterait, car ces quatre points sont aussi les sommets d'un quadrilatère circonscrit au même cercle.

Il résulte du théorème précédent que *si un quadrilatère circonscrit à un cercle se déforme de telle sorte que trois de ses sommets glissent sur trois droites passant par un même point, le quatrième sommet décrira aussi une droite passant par ce point.*

On déduirait aisément de là une solution de ce problème : *Circonscrire à un cercle un triangle dont les sommets reposent sur trois droites données et passant par un même point.*

La théorème du n° 1107 est dû au célèbre géomètre français Desargues (première moitié du XVII^e siècle); toutefois, les anciens (*Collections mathémathiques de Pappus*) en ont connu des cas particuliers.

Génération et classification des coniques.

1109. On nomme *coniques* les sections planes d'un cône quelconque à base circulaire.

On sait que :

Lorsqu'un point mobile décrit un cercle, les droites qui joignent ce point à deux points fixes de la circonférence forment deux faisceaux homographiques

Lorsqu'une droite mobile enveloppe un cercle, elle trace, sur deux tangentes fixes de ce cercle, deux divisions homographiques.

Une conique n'étant que la projection d'un cercle, et l'homographie de deux divisions ou de deux faisceaux se conservant en projection, on voit que :

Lorsqu'un point mobile décrit une conique, les droites qui joignent ce point à deux points fixes de cette conique forment deux faisceaux homographiques.

Lorsqu'une droite mobile enveloppe une conique, elle trace, sur deux tangentes fixes de cette conique, deux divisions homographiques.

1110. Réciproquement :

La courbe, lieu des intersections des rayons homologues de deux faisceaux homographiques (situés dans un même plan), est une section conique.

Soient P et P' les centres des deux faisceaux (*fig.* 552). Observons :

1° Qu'*une droite quelconque du plan rencontre la courbe en deux points* (réels ou imaginaires); car les deux divisions déterminées sur cette droite par les deux faisceaux sont homographiques ; elles ont donc deux points doubles réels ou imaginaires.

2° Que *la courbe passe par les centres* P *et* P' *des deux faisceaux;* car la droite PP' considérée comme un rayon du faisceau P, rencontre en P' le rayon homologue du faisceau P'. On voit de même que la courbe passe en P.

3° Que *la tangente en* P *est le*

La courbe enveloppe des droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques (dont les bases sont dans un même plan), est une section conique.

Soient Ox et Oy les bases des deux divisions (*fig.* 553). Observons :

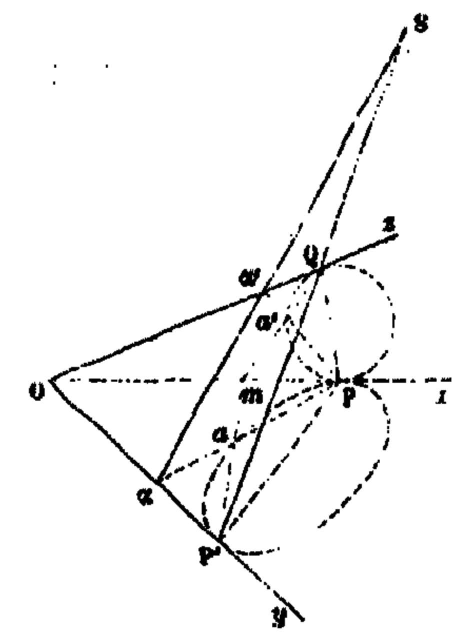
1° Que, *par un point quelconque du plan on peut mener à la courbe deux tangentes* (réelles ou imaginaires); car les deux faisceaux concentriques qu'on obtient en joignant ce point aux divers points des deux divisions sont homographiques ; ils ont donc deux rayons doubles (réels ou imaginaires).

2° Que *la courbe est tangente aux bases* Ox *et* Oy *des deux divisions ;* car la droite Ox unit deux points homologues des deux divisions, savoir : le point O considéré comme appartenant à la division Oy et le point homologue de la division Ox. On voit de même que la courbe touche Oy.

3° Que *le point de contact* P *de*

rayon du faisceau P *qui est l'homologue de la droite* P'P *considérée comme rayon du faisceau* P'; car, lorsque le point a de la courbe vient en P, le rayon Pa devient tangent en P et son homologue P'a vient se confondre avec P'P. De même, *la tangente en* P' *est le rayon du faisceau* P' *qui est l'homologue de la droite* PP' *considérée comme rayon du faisceau* P.

Fig. 552.

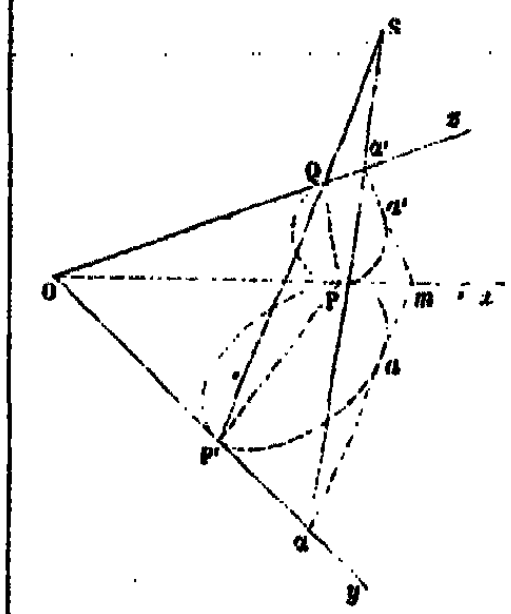


Cela posé, « par le point de concours O des tangentes en P et » en P' à la courbe considérée PaP', » menons dans l'espace une droite » quelconque Oz; dans l'angle zOP » inscrivons un cercle tangent à OP » au point P, et désignons par Q le » point où ce cercle touche Oz.

» a étant un point quelconque de » la courbe PaP', menons P'a qui » coupe OP en m, puis Qm qui rencontre le cercle en a'. Quand le » point a décrit la courbe, les » droites P'a et Qa' engendrent » deux faisceaux homographiques;

la tangente Ox *est le point qui, sur cette droite, répond au point* O *considéré comme appartenant à la division* Oy; car, lorsque la tangente αam se confond avec Ox, le point a devient le point de contact P et son homologue α arrive en O. De même, *le point de contact* P' *de la tangente* Oy *est l'homologue du point* O *considéré comme appartenant à la division* Ox.

Fig. 553.



Cela posé, par le point O menons dans l'espace une droite quelconque Oz; inscrivons dans l'angle zox un cercle tangent à Ox en P, et désignons par Q son contact avec Oz.

a étant un point quelconque de la courbe PaP', menons la tangente correspondante qui coupe Ox en m et Oy en α; puis, par m, menons la tangente ma' au cercle Qa'P, et désignons par α' le point où cette tangente coupe Oz. Quand le point a

« mais les faisceaux décrits par Pa' et « Qa' sont homographiques (1109), « et il en est de même par hypo- « thèse des faisceaux engendrés par « Pa et $P'a$. Donc les droites Pa « et Pa' engendrent deux faisceaux « homographiques, et par suite les « points α et α', où les rayons mo- « biles Pa et Pa' rencontrent les « droites fixes OP' et OQ, forment « sur ces droites deux divisions ho- « mographiques. Les points P' et Q « sont deux points homologues de « ces deux divisions (m est alors « en O); de plus, le point O est un « point correspondant commun (m « est alors en P). Donc (1086) la « droite $\alpha\alpha'$ coupe la droite fixe QP' « en un point fixe S.

» Par conséquent, l'œil étant placé » en S, la droite $P'm$ sera la pro- » jection de Qm, et $P\alpha$ sera celle » de $P\alpha'$; donc a sera la projection » de a', et enfin la courbe propo- » sée PaP' sera la projection du » cercle $Pa'Q$ (*). »

décrit la courbe PaP', les points α et m tracent sur Oy et Ox deux divisions qui, par hypothèse, sont homographiques; les divisions tracées sur Ox et Oz par m et α' sont aussi homographiques (1109); donc les points α et α' décrivent sur Oy et sur Oz deux divisions homographiques. Les points P' et Q sont deux points homologues de ces deux divisions (m est alors en O); de plus, le point O est un point correspondant commun (m est alors en P). Donc la droite mobile $\alpha\alpha'$ coupe (1086) la droite fixe QP' en un point fixe S.

Par conséquent, l'œil étant placé en S, la droite αm sera la projection de $\alpha' m$, et comme la première enveloppe la courbe PaP' et que la seconde enveloppe le cercle $Qa'P$, on voit que la courbe PaP' est la projection du cercle $Pa'Q$.

1111. Les principales propriétés des coniques résultent aisément de ce double mode de génération. Ces deux générations, l'une par point, l'autre par enveloppe, étant *corrélatives*, lorsque, en partant de l'une d'elles, on aura démontré un théorème, il suffira pour démontrer le théorème corrélatif de partir de l'autre mode de génération et de faire des raisonnements corrélatifs des premiers.

Cinq points déterminent une conique; car, après avoir pris deux de ces points pour centres des deux faisceaux générateurs, il suffit de joindre chacun d'eux aux trois autres points pour avoir trois couples de rayons homologues.

Cinq tangentes déterminent une conique; car, en considérant deux de ces tangentes comme fixes, les trois autres traceront sur elles trois couples de points homologues des deux divisions homographiques qui déterminent la conique.

(*) Eugène Rouché, *Bulletin de la Société Philomathique*, 1er juillet 1865.

1112. *Les deux faisceaux homographiques qui déterminent la conique ont deux couples de rayons parallèles* (réels ou imaginaires); car si l'on transporte l'un des faisceaux parallèlement à lui-même de façon que son centre coïncide avec le centre de l'autre faisceau, on a deux faisceaux homographiques concentriques qui ont (1094) deux rayons doubles (réels ou imaginaires).

Si les deux couples de rayons parallèles sont imaginaires, la courbe n'a aucun point à l'infini; elle est fermée, et nous lui donnerons le nom d'*ellipse*, en nous réservant de démontrer plus tard son identité avec l'ellipse définie au n° 962.

Si les deux couples de rayons parallèles sont réels, la courbe a deux points à l'infini; nous lui donnerons le nom d'*hyperbole*, et nous démontrerons plus tard son identité avec l'hyperbole définie au n° 989.

Enfin, si les deux couples de rayons parallèles coïncident, la courbe a deux points à l'infini confondus en un seul, et par suite elle est *tangente à la droite de l'infini;* nous lui donnerons le nom de *parabole*, et nous démontrerons plus tard son identité avec la parabole définie au n° 1017.

Tels sont les trois *genres* de coniques. Comme *variétés* de ces courbes, on peut avoir :

1° *Deux droites* (réelles, coïncidentes ou imaginaires), lorsque les deux faisceaux sont concentriques (1094), ou lorsque la droite qui unit leurs centres est un rayon homologue commun (1093).

2° *Deux points* (réels, coïncidents ou imaginaires), lorsque les deux divisions ont la même base (1088), ou lorsque le point d'intersection des deux bases est un point homologue commun (1090).

1113. Les théorèmes de Pascal (337) et de Desargues (1107), les propositions corrélatives ainsi que leurs corollaires sont applicables aux coniques; les démonstrations données aux n^os^ 337, 338, 1107, 1108, subsistent sans modification.

Le théorème de Desargues a été généralisé par Sturm (*Annales de Gergonne*, t. XVII). Considérons une suite de coniques circonscrites à un même quadrilatère; soient aa', bb', cc',... les segments que ces coniques interceptent sur une transversale quelconque L, et pp', qq', les segments de cette même droite compris entre les deux couples de côtés opposés du quadrilatère. Les deux couples de points (p, p'), (q, q'), déterminent sur la droite L une involution à laquelle appartient, en vertu du théorème de Desargues, chacun des couples (a, a'), (b, b'), (c, c')...; donc ces derniers couples de points forment une involution et l'on a ce théorème : *Les coniques qui passent par quatre points fixes déterminent sur une transversale quelconque une série de points en involution.* On démontrerait pareillement le théorème corrélatif : *Les tangentes menées d'un même point aux coniques tangentes à quatre droites fixes forment un faisceau en involution.*

Pôle et polaire dans les coniques.

1114. *Si par un point* O *pris dans le plan d'une conique, on mène une sécante qui rencontre la courbe en deux points* m *et* m' *(réels ou imaginaires), et si l'on détermine le conjugué harmonique* O' *du point* O *par rapport au segment* mm', *le lieu du point* O', *lorsque la sécante tourne autour du point* O, *est une ligne droite* (*fig.* 554).

Fig. 554.

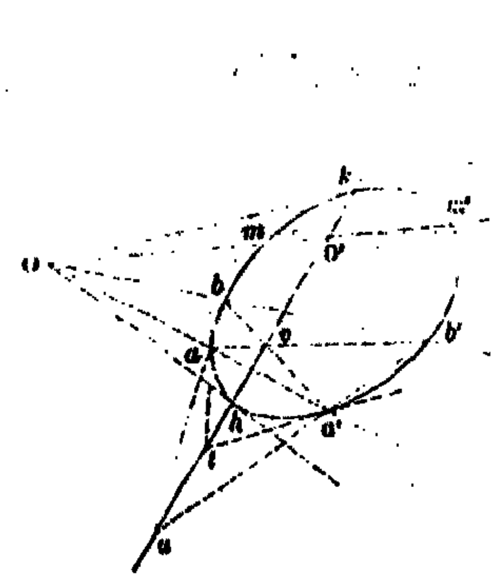
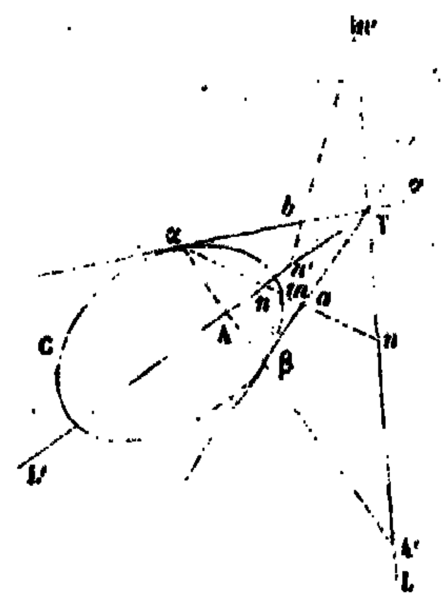


Fig. 555.



En effet, menons deux sécantes fixes Oaa', Obb', et prenons a et b' pour les centres des deux faisceaux homographiques générateurs de la conique. Ces faisceaux déterminent sur la transversale Omm' deux divisions homographiques dont m et m' sont les points doubles. Les points α et α' où cette transversale rencontre les cordes ab et $a'b'$ sont d'ailleurs les homologues du point O considéré successivement comme appartenant à la seconde et à la première division; donc (1091) le point O' est le conjugué harmonique de O par rapport à $\alpha\alpha'$, et par suite, quand la transversale Omm' tourne autour du point O, le point O' décrit la polaire de O par rapport à l'angle bub' formé par les cordes ab et $a'b'$.

Le point O et la droite uO' sont dits *pôle* et *polaire* par rapport à la conique.

En observant que la polaire de O par rapport à l'angle bub' renferme (351) le point d'intersection des droites ab' et ba', on voit, par la démonstration même qui précède, que : *Si par un point* O *pris dans le plan d'une conique on mène deux sécantes* Oaa', Obb', *et si l'on prend les points de rencontre* u *et* v *des droites qui joignent deux à deux les extrémités des cordes* aa' *et* bb', *le lieu des points* u *et* v, *lorsqu'on fait* *varier les sécantes* Oaa', Obb', *est la polaire du point* O *par rapport à la conique*.

Quand les droites Oaa', Obb', se confondent, les cordes ab, $a'b'$, sont les tangentes en a et a'; donc, *si par un point* O *pris dans le plan d'une conique on mène une sécante* Oaa' *et les tangentes* at, $a't$, *aux points* a *et* a' *où elle rencontre la conique, le lieu du point de concours* t *de ces tangentes, lorsque la transversale tourne autour de* O, *est la polaire de ce point* O..

La polaire est la corde de contact des tangentes issues du pôle; car, au point de contact k d'une tangente issue du pôle, les trois points m, m', O', sont réunis. Par suite, *la polaire d'un point de la conique est la tangente en ce point*, et, inversement, *le pôle d'une tangente est son point de contact.*

1115. *Les polaires de tous les points d'une droite passent par le pôle de cette droite;* et, inversement, *les pôles de toutes les droites qui passent par un point sont situés sur la polaire de ce point.*

En effet, soient (*fig.* 555) un point A et une droite L qui sont pôle et polaire par rapport à une conique C. A' étant un point quelconque de L, la droite AA' coupe la conique en deux points α et β (réels ou imaginaires), et A et A' sont conjugués harmoniques par rapport à $\alpha\beta$; donc le point A appartient à la polaire L' de A'. Ainsi la polaire d'un point quelconque A' de L passe par A, et inversement le pôle A d'une droite quelconque L passant par A' est sur la polaire L' du point A'.

Il résulte de là que *toute droite a pour pôle l'intersection des polaires de deux de ses points*, et que *tout point a pour polaire la droite qui joint les pôles de deux droites issues de ce point.*

Les propriétés des quadrilatères inscrits et circonscrits, et leur démonstration (358 et 359), s'appliquent aux coniques.

1116. La polaire d'un point O coupe la conique en deux points réels ou imaginaires qui sont les points de contact des tangentes réelles ou imaginaires issues du point O.

Lorsque la polaire du point O coupe la courbe en deux points réels, de ce point O on peut mener à la conique deux tangentes réelles, et le point O est dit *extérieur* à la conique.

Lorsque la polaire du point O rencontre la courbe en deux points imaginaires, les deux tangentes issues du point O sont imaginaires, et le point O est dit *intérieur* à la courbe.

La région intérieure et la région extérieure ont pour ligne de démarcation la conique elle-même qui est le lieu des points dont les polaires touchent la courbe, c'est-à-dire ont chacune avec la courbe deux points communs réels et coïncidents.

Considérons une conique C et un point *extérieur* T (*fig.* 555). La polaire de ce point rencontre la courbe en deux points réels α et β, et les droites $T\alpha$, $T\beta$, sont les tangentes réelles issues du point T. Nous donnerons à l'angle $\alpha T \beta$ formé par les directions $T\alpha$ et $T\beta$ le nom d'*angle des tangentes*, et nous appellerons l'angle $\beta T \alpha'$ formé par la direction $T\beta$ et par la direction $T\alpha'$ opposée à $T\alpha$ l'*angle supplémentaire des tangentes*. Cela posé, prenons les points α et β pour centres des deux faisceaux générateurs de la conique, et considérons une droite quelconque TL ou TL' issue du point T. *Les deux faisceaux traceront sur cette droite deux divisions homographiques en involution;* car le point T, considéré successivement comme appartenant à l'une ou à l'autre de ces divisions, a toujours pour homologue le même point A (ou A') où la polaire $\alpha\beta$ de T rencontre la transversale TL' (ou TL). Les points doubles, réels ou imaginaires, de cette involution seront les points réels ou imaginaires communs à la transversale et à la conique. Or il est aisé de voir que ces points sont réels tant que la transversale est, comme TL', située dans l'angle $\alpha T \beta$ des tangentes, et imaginaires lorsque la transversale est, comme TL, placée dans l'angle $\beta T \alpha'$ supplémentaire des tangentes. En effet, dans le premier cas le segment TA et le segment nn' formé par deux points homologues de l'involution correspondant à un point quelconque m de la courbe, n'empiètent pas l'un sur l'autre et, par suite, les points doubles de l'involution sont réels; mais si TL' tourne autour de T de manière à venir sur TL dans l'angle supplémentaire, les points n et n' glissent sur les droites fixes αa, βb, se croisent en β, et sont ensuite de part et d'autre du point T; les segments nn' et TA' empiétant l'un sur l'autre, l'involution a ses points doubles imaginaires. Ainsi *la courbe est située tout entière dans l'angle $\alpha T \beta$ des tangentes issues d'un point extérieur quelconque* T (et dans son opposé par le sommet).

1117. Deux points A et A' (*fig.* 555) sont dits *conjugués* par rapport à une conique lorsque la polaire de l'un passe par l'autre. Ces points sont *conjugués harmoniques* par rapport aux deux points (réels ou imaginaires) α et β suivant lesquels la droite AA' qui les joint rencontre la conique. Lorsque les points α et β sont réels, l'un des points A et A' est intérieur et l'autre extérieur à la courbe.

Plusieurs couples de points conjugués sur une même droite forment une involution dont les points doubles sont les points où la droite coupe la conique (1099). Quand ces points doubles sont imaginaires, il existe de chaque côté de la droite un point d'où l'on voit sous un angle droit chaque couple de points conjugués (1100, 2°).

Deux droites L et L' sont dites *conjuguées* par rapport à une conique lorsque le pôle de l'une est situé sur l'autre. Ces deux droites sont *conjuguées harmoniques* par rapport aux deux tangentes réelles ou imaginaires issues de leur point d'intersection; l'une au moins des droites conjuguées rencontre toujours la courbe.

Plusieurs couples de droites conjuguées issues d'un même point forment *un faisceau en involution* dont les rayons doubles sont les tangentes (réelles ou imaginaires) issues de ce point. Donc (1105), *par un point quelconque du plan d'une conique passe toujours un couple de droites conjuguées rectangulaires;* et il n'en passe en général qu'un seul, à moins que tous les couples de droites conjuguées passant par ce point ne soient rectangulaires, ce qui a lieu pour certains points remarquables dont nous parlerons plus tard.

1118. *Les polaires* OA, OB, OC, OD, *de quatre points* a, b, c, d, *situés sur une même droite* L, *forment un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre points.*

En effet, soient a', b', c', d', les points où la droite L rencontre le faisceau (O, ABCD). Comme le centre O du faisceau est le pôle de la droite L (1115), les points a et a', b et b', c et c', d et d', sont conjugués; ils forment donc une involution et, par suite, le rapport anharmonique ($abcd$) est égal au rapport anharmonique ($a'b'c'd'$), qui n'est autre que le rapport anharmonique du faisceau (O, ABCD).

Diamètres et centre.

1119. Les deux points de rencontre α et β d'une conique et d'une droite sont réels ou imaginaires, mais le point milieu du segment $\alpha\beta$ est toujours réel; c'est le conjugué harmonique par rapport à $\alpha\beta$ du point situé à l'infini sur la droite considérée (1099). Il résulte de là que *le lieu des milieux des cordes d'une conique parallèles à une direction donnée est une ligne droite;* c'est la polaire du point à l'infini commun à toutes ces cordes. Cette droite, qui passe évidemment par les points de contact des tangentes parallèles à la direction donnée, a reçu le nom de *diamètre.*

A chaque direction des cordes répond un diamètre. Tous les diamètres passent par un point unique, pôle de la droite de l'infini (1115) et qu'on nomme *centre* de la conique.

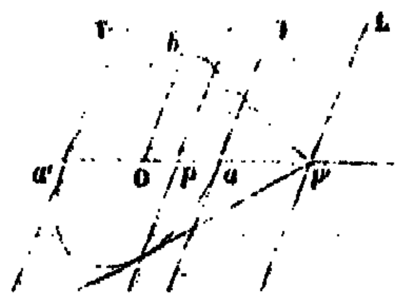
La polaire du centre étant la droite de l'infini, les tangentes réelles ou imaginaires issues du centre ont leurs points de contact à l'infini; on leur donne le nom d'*asymptotes.*

Quand un angle est circonscrit à une conique, la droite qui joint le sommet au milieu de la corde de contact est un diamètre; car c'est la polaire du point à l'infini situé sur cette corde.

1120. On donne le nom de *diamètres conjugués* à deux droites conjuguées quelconques passant par le centre, c'est-à-dire à deux diamètres tels, que le pôle de l'un soit situé sur l'autre. Le pôle d'un diamètre étant à l'infini sur la direction des cordes correspondantes, on voit que : *Quand deux diamètres sont conjugués, chacun d'eux est parallèle aux cordes que l'autre divise en deux parties égales.*

La polaire L *d'un point* p *du plan d'une conique est parallèle au diamètre conjugué* Ob *de celui* Oa *qui passe par ce point* (*fig.* 556); car

Fig. 556.



cette polaire doit passer par le pôle du diamètre Oa, et ce pôle est à l'infini sur Ob. En désignant par p' le point où le diamètre $a'Oap$ rencontre la droite L, les quatre points a', p', a, p, forment une proportion harmonique, et l'on doit avoir $\overline{Oa}^2 = Op.Op'$. En particulier, *les tangentes* T *et* T' *menées aux extrémités d'un diamètre* aa' *sont parallèles à son conjugué* Ob.

Plusieurs couples de diamètres conjugués forment un faisceau en involution (1104) dont les rayons doubles sont les asymptotes (réelles ou imaginaires) de la courbe. On conclut de là qu'*il existe toujours un système de diamètres conjugués rectangulaires*, et un seul (à moins que tous ne le soient, auquel cas la courbe est un cercle); chacun de ces diamètres, divisant alors en deux parties égales les cordes perpendiculaires à sa propre direction, est un *axe* de symétrie; *une conique a* donc *deux axes*. *Les deux axes* étant conjugués harmoniques par rapport aux asymptotes et étant à angle droit l'un sur l'autre, *sont* (348) *les bissectrices des angles formés par les deux asymptotes* (réelles ou imaginaires).

On nomme *cordes supplémentaires* deux cordes qui, partant d'un même point m de la conique (*fig.* 557), aboutissent aux extrémités d'un même diamètre AA'. *Deux cordes supplémentaires* Am, $A'm$, *sont parallèles à un système de diamètres conjugués.* En effet, soient OC et OD deux diamètres respectivement parallèles à $A'm$ et à Am. OC passant par le milieu O de AA' passera par le milieu K de Am; il divise donc en deux parties égales les cordes parallèles à OD, et par suite OC et OD sont conjugués. Inversement, *deux droites* Am *et* $A'm$ *menées par les extrémités d'un diamètre* AA', *parallèlement à deux diamètres conjugués quelconques* OD *et* OC, *se coupent sur la conique.* Car désignons par μ le point où la corde Am parallèle à OD coupe la conique, et menons $\mu A'$; les cordes supplémentaires $A\mu$, $A'\mu$, seront parallèles à deux diamètres conjugués; et comme $A\mu$ est parallèle à OD, $A'\mu$ doit être parallèle à OC; elle ne diffère donc pas de $A'm$ et les points m et μ se confondent.

Cela posé, considérons séparément l'ellipse, l'hyperbole et la parabole.

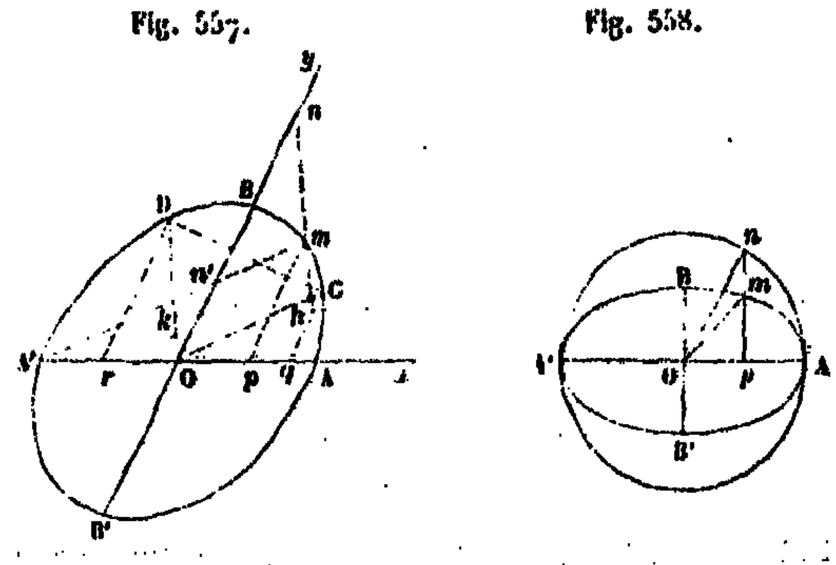
1121. L'*ellipse* n'ayant aucun point à l'infini, la droite de l'infini est extérieure à la courbe, et son pôle O, c'est-à-dire le centre de l'ellipse, est à l'intérieur de la courbe. Tous les diamètres rencontrant la courbe en deux points réels sont limités; et comme les tangentes issues du centre sont imaginaires, le faisceau en involution formé par les divers couples de diamètres conjugués n'a pas de rayons doubles; donc, un couple quelconque (OA, OB) de deux diamètres conjugués est *séparé* par tout autre couple (OC, OD); en d'autres termes, si OC est situé dans l'angle BOA (*fig.* 557), OD est extérieur à cet angle.

Le diamètre AA' étant la polaire du point à l'infini, sur le diamètre conjugué OB, les cordes supplémentaires Am et Am' tracent sur OB, quand m se déplace sur la courbe, une involution dont B est un point double. On a donc, en appelant n et n' les points où OB rencontre Am et Am', la relation

$$(1) \qquad On.On' = \overline{OB}^2.$$

Prenons pour axe des x le demi-diamètre OA, dont nous désignerons la longueur par a', et pour axe des y le demi-diamètre OB, dont nous désignerons la longueur par b'; y et x étant les coordonnées mp et Op

Fig. 557. Fig. 558.



d'un point quelconque m de la conique, on a, en considérant d'abord les triangles semblables nOA et mpA, puis les triangles semblables n'OA' et mpA',

$$\frac{y}{a'-x} = \frac{On}{a'}, \quad \frac{y}{a'+x} = \frac{On'}{a'};$$

en multipliant membre à membre et ayant égard à la relation (1), on obtient pour l'équation de l'ellipse

$$(2) \qquad \frac{y^2}{a'^2 - x^2} = \frac{b'^2}{a'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Si l'on désigne par x', y', et par x'', y'', les coordonnées des extrémités C et D des diamètres OC et OD parallèles aux cordes $A'm$ et Am, on a, en considérant d'abord les triangles semblables OCq et $A'n'O$, puis les triangles semblables ODr, AnO,

$$\frac{y'}{x'} = \frac{On'}{a'}, \quad \frac{y''}{-x''} = \frac{On}{a'};$$

en multipliant membre à membre et ayant égard à la relation (1) on trouve

$$(3) \qquad \frac{y'}{x'} \cdot \frac{y''}{x''} = -\frac{b'^2}{a'^2}.$$

Le rapport $\frac{y'}{x'}$ reçoit le nom de *coefficient angulaire* du diamètre OC; de même $\frac{y''}{x''}$ est le coefficient angulaire du diamètre OD.

Lorsqu'on prend pour axes de coordonnées les axes mêmes de la courbe, on a, en désignant par a le demi grand axe dirigé suivant Ox et par b le demi petit axe dirigé suivant Oy,

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(5) \qquad \frac{y'}{x'} \cdot \frac{y''}{x''} = -\frac{b^2}{a^2};$$

les coordonnées étant alors rectangulaires, le coefficient angulaire $\frac{y'}{x'}$ est égal à tang COA et $\frac{y''}{x''}$ est égal à tang DOA.

Il est facile d'exprimer les coordonnées x'', y'', de l'extrémité D d'un diamètre OD en fonction des coordonnées x', y', de l'extrémité C de son conjugué OC. En effet, le point C étant sur la courbe, ses coordonnées x' et y' satisfont à l'équation (4); on peut donc poser

$$(6) \qquad x' = a\cos\varphi', \quad y' = b\sin\varphi',$$

et de même

$$(7) \qquad x'' = a\cos\varphi'', \quad y'' = b\sin\varphi''.$$

La relation (5) devient alors

$$\cos(\varphi'' - \varphi') = 0, \quad \text{d'où} \quad \varphi'' = \frac{\pi}{2} + \varphi',$$

et, par suite,

$$(8) \qquad x'' = -a\sin\varphi' = \mp\frac{a}{b}y', \quad y'' = b\cos\varphi' = \frac{b}{a}x';$$

pour avoir les coordonnées de l'autre extrémité D' du diamètre OD, il suffirait de changer les signes.

Les relations (6) et (8) donnent

$$x'^2 + x''^2 = a^2, \quad y'^2 + y''^2 = b^2;$$

donc *la somme des carrés des projections orthogonales des deux demi-diamètres conjugués* OC *et* OD *sur un axe est constante.*

En ajoutant les deux égalités précédentes, on a

$$(x'^2 + y'^2) + (x''^2 + y''^2) = a^2 + b^2 \quad \text{ou} \quad \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = a^2 + b^2;$$

donc, *la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués est constante.*

Le triangle OCD est la moitié du parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres conjugués OC et OD. Il est égal au trapèze $CDrq$, diminué de la somme des deux triangles rectangles OCq, ODr; son aire a donc pour expression

$$\frac{1}{2}(y' + y'')(x' - x'') - \frac{1}{2}(-x''y'') - \frac{1}{2}x'y' = \frac{1}{2}(x'y'' - x''y')$$

ou $\frac{1}{2}ab$, eu égard aux formules (6) et (8). *Donc l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués est constante.*

Les deux derniers théorèmes sont dus à Apollonius.

La proposition précédente peut s'écrire, d'après une expression bien connue de l'aire du triangle,

$$OC.OD \sin COD = ab.$$

L'angle COD de deux demi-diamètres conjugués est donc maximum lorsque le produit OC.OD ou son carré $\overline{OC}^2.\overline{OD}^2$ est minimum; ce qui a lieu pour OC = OD, puisque $\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$ est constant. Ainsi *les diamètres conjugués qui font le plus grand angle sont les diamètres conjugués égaux.* Le carré de leur longueur commune est $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, et l'on a

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = x'^2 + y'^2 = a^2\cos^2\varphi' + b^2\sin^2\varphi'.$$

On déduit de là $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\varphi$; par suite les coordonnées x' et y' du point C sont alors proportionnelles à a et b, de sorte que *les diamètres conjugués égaux sont dirigés suivant les diagonales du rectangle construit sur les axes.*

L'angle COD de deux demi-diamètres conjugués est droit lorsque OC coïncide avec le grand axe, puis il augmente jusqu'à ce que OC soit dirigé suivant la diagonale du rectangle des axes; il diminue ensuite et redevient droit lorsque OC prend la position du petit axe.

Quand les axes a et b de l'ellipse sont égaux entre eux, l'équation (4) se réduit à $x^2+y^2=a^2$; tous les points de la courbe sont donc à une distance du centre égale à a, en d'autres termes, l'ellipse dégénère en un cercle.

Pour une même abscisse Op (*fig.* 558), c'est-à-dire pour une même valeur de l'angle φ', l'ordonnée mp de l'ellipse est $b\sin\varphi'$, et celle np du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre est $a\sin\varphi'$: le rapport $\frac{mp}{np}$ est donc constant et égal à $\frac{b}{a}$.

Remarquons enfin que l'angle auxiliaire φ' dont l'emploi est si commode, est précisément l'angle nOp.

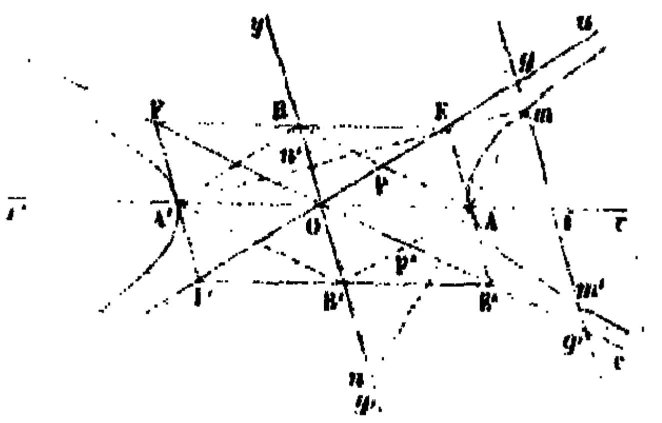
1122. L'*hyperbole* ayant deux points réels sur la droite de l'infini, son centre est extérieur à la courbe (1116); les tangentes Ou, Ov, issues du centre, c'est-à-dire les asymptotes, sont donc réelles; ce sont les rayons doubles du faisceau en involution formé par les deux couples de diamètres conjugués. Il suit de là que *deux diamètres conjugués quelconques divisent harmoniquement l'angle des asymptotes* et qu'aucun couple de diamètres conjugués n'est *séparé* par aucun autre. Enfin, de deux diamètres conjugués, l'un rencontre réellement la courbe et l'autre ne la rencontre pas (1116).

Les portions AE, AE' (*fig.* 559), *d'une tangente comprise entre l'hyperbole et ses asymptotes, sont égales;* car les asymptotes Ou et Ov, le diamètre OAx et son conjugué Oy forment un faisceau harmonique, et la tangente EAE', étant parallèle au rayon Oy de ce faisceau (1120), est divisée en deux parties égales par les autres rayons. Il suit de là que si l'on mène AP et AP' parallèles aux asymptotes, P est le milieu de OE et P' le milieu de OE'; donc, *lorsqu'on prend les asymptotes pour axes de coordonnées, la sous-tangente* OE' *est double de l'abscisse* OP' *du point de contact.*

Les portions gm *et* $g'm'$ *d'une sécante* gg', *comprises entre l'hyperbole et ses asymptotes, sont égales.* En effet, soit EAE' la tangente parallèle à gg' et OA, le diamètre qui passe au point de contact; ce diamètre divise la corde mm' de l'hyperbole en deux parties im et im' égales entre elles; mais puisque A est le milieu de EE', i est évidemment le milieu de la parallèle gg'; donc $ig = ig'$, et, par suite, $ig - im$ ou gm est égal à $ig' - im'$ ou à $g'm'$.

Une tangente quelconque EAE', lorsque son point de contact A se déplace sur la courbe, trace sur les asymptotes (1109) deux divisions homographiques; et comme le point O correspond évidemment à l'infini dans l'une et l'autre division, le produit OE.OE' est constant; il en est donc de même de l'aire du triangle OEE' et, par suite, de l'aire du parallélogramme OPAP' qui est la moitié de ce triangle. On voit par là que si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point quelconque A de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes Ou et Ov, on a pour l'équation de cette courbe $xy =$ const.

Fig. 559.



1123. AOA' étant un diamètre transverse quelconque de l'hyperbole, menons les tangentes en A et A' qui coupent les asymptotes, la première en E et E', l'autre en F et F'. Les triangles OAE, OAF', sont égaux puisqu'ils ont leurs angles respectivement égaux et que OA = OA'; donc AE = AF'; par suite, les droites EE', FF', sont égales, et, comme elles sont parallèles (**1120**), la figure EFF'E' est un parallélogramme dont O est le centre. Soient B et B' les points où le diamètre yOy' conjugué de OA rencontre EF et E'F'; B est le milieu de EF, B' celui de E'F', les droites AB' A'B sont parallèles à l'asymptote Ou, et les droites AB et A'B' à l'asymptote Ov.

Cela étant, posons $OA = a'$, $OB = b'$, et prenons les deux demi-diamètres conjugués OAx, OBy, pour axes de coordonnées; m étant un point quelconque de l'hyperbole, les deux cordes supplémentaires Am, $A'm$, déterminent sur le diamètre yOy' deux points n et n' qui engendrent une involution (**1121**) dont B et B' sont évidemment deux points homologues. On a donc

$$On.On' = OB.OB' = -b'^2.$$

Dès lors, tous les raisonnements faits et les résultats obtenus pour l'ellipse subsistent, en changeant b'^2 en $-b'^2$ ou b' en $b'\sqrt{-1}$. Ainsi :

1° L'hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués a pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Pour $x = 0$, on a $y = \pm b'\sqrt{-1}$; de là le nom de *longueur du demi-diamètre non transverse* attribué à $OB = b'$.

a et b étant les longueurs des deux axes, on a, en prenant ces droites pour axes de coordonnés rectangulaires,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Les triangles semblables giO, EAO, donnent

$$\frac{gi}{Oi} = \frac{EA}{OA} = \frac{b'}{a'} \quad \text{ou} \quad \overline{gi}^2 = \frac{b'^2}{a'^2}\overline{Oi}^2,$$

on a d'ailleurs, par l'équation de l'hyperbole,

$$\overline{mi}^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(\overline{OC}^2 - a'^2):$$

donc, en retranchant,

$$\overline{gi}^2 - \overline{mi}^2 = b'^2$$

ou

$$b'^2 = (gi + mi)(gi - mi) = gm.gm' = mg.mg';$$

ainsi *le produit des segments d'une sécante, compris entre un point de la courbe et les asymptotes, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la sécante.*

2° La relation entre les coefficients angulaires de deux demi-diamètres conjugués est

$$\frac{y'}{x'}.\frac{y''}{x''} = \frac{b'^2}{a'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{y'}{x'}.\frac{y''}{x''} = \frac{b^2}{a^2},$$

suivant qu'on prend pour axes de coordonnées les demi-diamètres conjugués a' et b' ou les axes a et b de la courbe.

3° Les coordonnées de l'extrémité d'un demi-diamètre s'expriment en fonction des coordonnées de l'extrémité du demi-diamètre conjugué par les formules

$$x'' = \pm\frac{a}{b\sqrt{-1}}y', \quad y'' = \mp\frac{b\sqrt{-1}}{a}x',$$

qui sont dues à M. Chasles. (*Aperçu historique, etc.*)

4° *La différence des carrés des projections de deux demi-diamètres conjugués sur un axe est constante. La différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est constante, ainsi que l'aire du parallélogramme construit sur ces diamètres.*

La relation $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$ montre que si a est différent de b, a' est différent de b'; *l'hyperbole n'a* donc *pas de diamètres conjugués égaux.*

Si $a = b$, on a $a' = b'$, c'est-à-dire que *tout diamètre est* alors *égal à son conjugué*, et l'hyperbole est dite *équilatère*. Le parallélogramme EE'F'F construit sur deux diamètres conjugués quelconques est dans ce cas un losange, et les asymptotes qui en sont les diagonales sont alors *rectangulaires.*

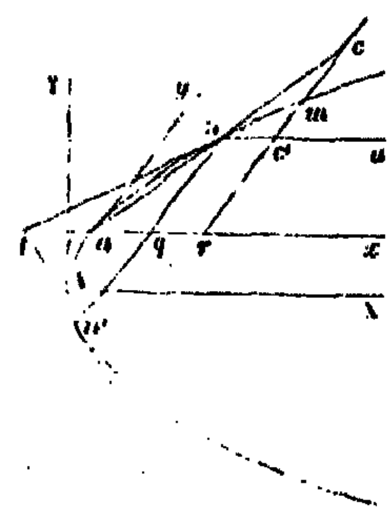
Nous avons vu (1122) que l'hyperbole rapportée à ses asymptotes a pour équation $xy = K^2$; en supposant que dans la *fig.* 559 les droites OA et OB soient les axes a et b de la courbe, le parallélogramme OAE'B' sera un rectangle, et les coordonnées OP' et P'A du sommet A par rapport aux asymptotes, seront l'une et l'autre égales à la moitié de la diagonale $\sqrt{a^2+b^2}$ de ce rectangle; on a donc

$$K^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$$

pour une hyperbole quelconque, et en particulier pour l'hyperbole équilatère $K^2 = \frac{1}{2}a^2$. On donne souvent à cette constante K^2, que nous venons d'exprimer en fonction des axes, le nom de *puissance de l'hyperbole*.

1121. La *parabole* étant tangente à la droite de l'infini, son centre qui est le pôle ou le point de contact de cette tangente disparaît à l'infini. Donc, *tous les diamètres ax, nu, AX,... sont parallèles*, et *cette courbe n'a qu'un axe* AX à distance finie. Le point A, où cet axe rencontre la courbe, est le *sommet* (*fig.* 560) de la parabole.

Fig. 560.



Une tangente mobile détermine sur deux tangentes fixes d'une conique deux divisions homographiques (1109); dans la parabole, ces deux divisions homographiques sont semblables (1087), puisque la droite de l'infini étant une des positions de la tangente mobile, les points à l'infini dans les deux divisions sont homologues. Donc, *toutes les tangentes à la parabole divisent deux tangentes fixes en parties proportionnelles*; et réciproquement, *si deux droites fixes sont divisées en parties proportionnelles, l'enveloppe des droites qui joignent les points homologues, est une parabole tangente aux deux droites fixes*. Cette propriété est très-utile dans les applications.

Prenons pour axes de coordonnées un diamètre quelconque ax et la tangente ay à son extrémité a. m et n étant deux points quelconques de la parabole, menons les ordonnées mr et nq, la droite an et le diamètre nu

qui coupent mr en c et c'. On a (1121)

$$\overline{mr}^2 = rc.rc';$$

mais

$$rc' = nq, \quad \text{et} \quad \frac{rc}{ar} = \frac{nq}{aq}.$$

Donc

$$\frac{rc.rc'}{ar} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{mr}^2}{ar} = \frac{\overline{nq}^2}{aq}.$$

En d'autres termes, l'expression $\frac{y^2}{x}$ est constante; en la désignant par $2p$, l'équation de la parabole rapportée aux axes de coordonnées ax et ay est

$$y^2 = 2px.$$

La valeur de p varie avec la position du point a de la courbe que l'on prend pour origine. Au sommet A, les axes deviennent rectangulaires, et la valeur correspondante de la constante p est ce qu'on appelle le *paramètre* de la parabole.

Soit nt la tangente en n qui coupe ax en t; nq est la polaire du point t (1114); par suite, les quatre points t, a, q, ∞, forment un système harmonique. On a donc $at = aq$, d'où $tq = 2aq$. Ainsi, *dans la parabole, la sous-tangente* (c'est-à-dire la portion tq du diamètre ax comprise entre les pieds de l'ordonnée et de la tangente) *est double de l'abscisse du point de contact.*

Foyers et directrices.

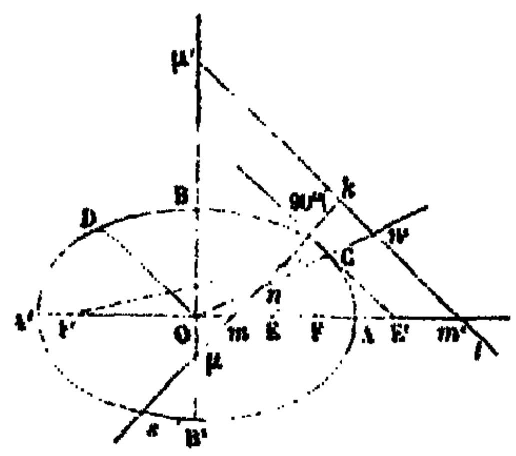
1125. On nomme *foyer* tout point du plan d'une conique autour duquel chaque droite est perpendiculaire à sa conjuguée.

Un foyer ne peut se trouver que sur un axe; car pour tout autre point du plan, le diamètre qui passe par ce point et la parallèle au conjugué de ce diamètre forment un couple de droites conjuguées non rectangulaires.

Pour qu'un point d'un axe soit un foyer, il suffit qu'on puisse mener par ce point un couple de deux droites conjuguées rectangulaires et non parallèles aux axes; car l'axe considéré et la parallèle à l'autre axe menée par le point forment un second couple de droites conjuguées rectangulaires, et l'on sait (1105) qu'autour d'un point tous les couples de droites conjuguées sont rectangulaires dès que deux couples le sont.

Cela posé, considérons deux droites conjuguées rectangulaires quelconques ks et kt (*fig.* 561); désignons par m et m' les points où elles coupent l'axe OA, par μ et μ' ceux où elles rencontrent l'axe OB, et par n et n' les points où elles rencontrent le diamètre OC relatif aux cordes parallèles à kt; n et n' seront les pôles respectifs de kt et de ks (1119, 1120), et l'on aura $On.On' = \overline{OC}^2$. Quand les deux droites conjuguées se transportent parallèlement à elles-mêmes, n et n' se déplacent sur OC, m et m' se meuvent sur OA, et le rapport de Om' à On' reste constant ainsi que celui de Om à On; par suite, comme le produit $On.On'$ est constant, il en est de même du produit $Om.Om'$. Les points m et m' tracent donc alors sur OA une involution dont O est le point central, et les points doubles de cette involution sont évidemment les foyers situés sur l'axe AA'; ils sont de part et d'autre et à égale distance du point O. — Les foyers sur l'axe BB' sont de même les points doubles de l'involution tracée par μ et μ'. — Remarquons d'ailleurs que si les droites rectangulaires kt, ks, coupent l'un des axes en deux points situés du même côté du point O, elles coupent forcément l'autre axe en deux points situés de part et d'autre de O, de sorte que l'une des deux involutions a ses points doubles réels et l'autre ses points doubles imaginaires.

Fig. 581.



Il résulte de là qu'*une conique a deux foyers réels et deux foyers imaginaires*, et que *les deux foyers situés sur un même axe divisent harmoniquement le segment* mm' ou $\mu\mu'$ *compris entre deux droites conjuguées rectangulaires quelconques* kt et ks.

Dans l'ellipse, les deux foyers réels sont situés sur le grand axe. Car la tangente CE' et la normale CE donnent deux points homologues E et E' de l'involution, et comme l'angle OCE', qui est égal à l'angle DOC du demi-diamètre OC et de son conjugué OD, est obtus (1121), la normale CE est comprise dans l'angle OCE'; par suite, les points E, E', sont du même côté du point central O, et l'involution formée sur le grand axe a ses points doubles réels.

Dans l'hyperbole, les deux foyers réels sont situés sur l'axe transverse. Cela résulte immédiatement de ce qu'un foyer réel doit être à l'intérieur de la courbe, attendu que le faisceau en involution formé par les droites conjuguées issues du foyer ne doit pas avoir ses rayons doubles réels.

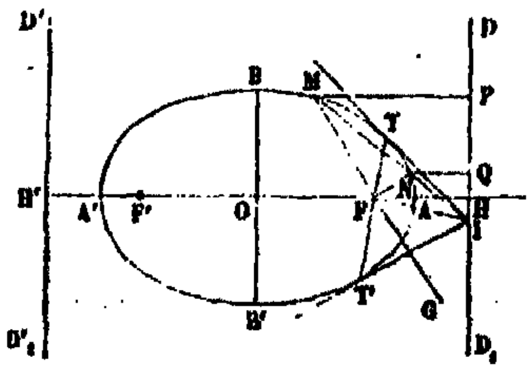
Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, la tangente CE' *et la normale* CE *en un point* C *sont les bissectrices des angles formés par les deux rayons* *vecteurs menés du point de contact aux deux foyers* F *et* F'. Car nous avons vu que les foyers divisent harmoniquement le segment EE' intercepté entre les deux conjuguées rectangulaires CE et CE'; le faisceau (CF', CE, CF, CE') est donc harmonique, et comme les deux rayons CE et CE' sont rectangulaires, ils divisent en deux parties égales les angles formés par les deux autres CF et CF'.

Il résulte de là, comme nous l'avons démontré au n° 997, que *dans l'ellipse la somme* CF + CF' *des rayons vecteurs d'un point quelconque de la courbe est constante*, et que *dans l'hyperbole la différence des rayons vecteurs est constante*. On retombe donc ainsi, comme nous l'avions annoncé (1112), sur les définitions de l'ellipse et de l'hyperbole données aux n^{os} 962 et 989, et nous pouvons dès lors regarder comme acquises les propriétés et les constructions de ces coniques démontrées dans les §§ I, II et IV. En particulier, les longueurs des axes et la distance focale OF = c satisfont dans l'ellipse à la relation $a^2 - b^2 = c^2$, et dans l'hyperbole à la relation $a^2 + b^2 = c^2$.

1126. La polaire d'un foyer prend le nom de *directrice*.

L'ellipse et l'hyperbole ont donc chacune deux directrices DHD$_1$, D'H'D'$_1$ (*fig.* 562), qui sont perpendiculaires à l'axe A'OA qui contient les

Fig. 562.



foyers réels; elles sont situées de part et d'autre et à égale distance du centre, extérieurement à la courbe, puisque les foyers réels qui en sont les pôles sont intérieurs (1116). Les points A', F, A, H, formant un système harmonique, on a

$$\overline{OA}^2 = OF.OH,$$

d'où l'on déduit

$$OH = \frac{a^2}{c}$$

pour la distance du centre aux directrices.

De la définition même du foyer et de la directrice, il résulte que *la* *polaire* TT' *d'un point quelconque* I *de la directrice* DD_1 *passe par le foyer* F *et est perpendiculaire sur la droite qui joint le point* I *au foyer.* Par suite, *si l'on prolonge une corde quelconque* MN *d'une ellipse ou d'une hyperbole jusqu'à sa rencontre en* I *avec la directrice, la droite* IF *et la polaire* FT *du point* I *sont les bissectrices des angles formés par les rayons vecteurs* FM *et* FN ; car, d'après la définition même de la polaire, le faisceau (FI, FN, FT, FM) est harmonique, et nous venons de voir que les deux rayons FT et FI sont rectangulaires.

Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, le rapport des distances MF *et* MP *d'un point quelconque* M *de la courbe au foyer* F *et à la directrice correspondante* DD_1 *est constant.* Car si N est un autre point quelconque de la courbe, et I le point où la corde MN rencontre la directrice, la droite FI est bissectrice de l'angle NFG ; on a donc (197)

$$\frac{MF}{NF}=\frac{MI}{NI} \quad \text{ou} \quad \frac{MP}{NQ}.$$

Pour trouver la valeur constante du rapport $\frac{MF}{MP}$, il suffit de considérer le point B ; sa distance au foyer est égale à a, et sa distance à la directrice est $OH=\frac{a^2}{c}$: le quotient est $\frac{c}{a}$; on le désigne habituellement par e et on lui donne le nom d'excentricité ; il est moindre que *un* pour l'ellipse et plus grand que *un* pour l'hyperbole.

1127. Considérons maintenant la parabole.

Le centre, qui est le point central de l'involution tracée sur l'axe Ax par les pieds des divers couples de droites conjuguées rectangulaires, étant à l'infini, l'involution a l'un de ces points doubles à l'infini, et l'autre point double est le *foyer* unique de la parabole. *Il divise en deux parties égales* (1099) *le segment intercepté sur le grand axe* par deux droites conjuguées rectangulaires quelconques, et en particulier *par la tangente et la normale en un point quelconque de la parabole ;* d'où l'on conclut (347, 318) que *la tangente et la normale en un point quelconque de la parabole sont les bissectrices des angles formés par la parallèle à l'axe menée par ce point et par le rayon vecteur mené de ce point au foyer.*

La *directrice* ou polaire du foyer est perpendiculaire à l'axe, et extérieure à la courbe, puisque son pôle est intérieur comme doit l'être tout foyer réel (1123). Le foyer et la directrice sont d'ailleurs à égale distance du sommet (1126).

On voit, comme au numéro précédent : 1° que *la polaire d'un point quelconque de la directrice est perpendiculaire sur la droite qui joint ce point au foyer ;* 2° que *la droite qui joint le foyer à l'intersection de la directrice et d'une corde quelconque de la parabole est la bissectrice du* *supplément de l'angle formé par les rayons vecteurs des points où la corde coupe la parabole.*

On en déduit que *le rapport des distances d'un point quelconque de la parabole au foyer et à la directrice est constant;* comme le sommet est équidistant du foyer et de la directrice, la constante est égale à *un*; donc *tout point de la parabole est équidistant du foyer et de la directrice.* On retombe ainsi sur la définition de la parabole donnée au n° 1017, et dès lors nous pouvons regarder comme acquises toutes les propriétés et toutes les constructions données dans le § III. En particulier le *paramètre p* représente la distance du foyer à la directrice; il est aussi égal à la *sous-normale comptée sur l'axe,* c'est-à-dire à la partie de l'axe comprise entre les pieds de l'ordonnée et de la normale. (Il importe de remarquer que lorsque la parabole est rapportée à un diamètre quelconque et à la tangente correspondante, la sous-tangente est toujours double de l'abscisse, mais la sous-normale n'est plus constante et égale au paramètre; cette dernière propriété n'est vraie que dans le cas où la parabole est rapportée à son axe et à la tangente au sommet).

1128. Lorsque plusieurs coniques ont les deux mêmes foyers, on dit qu'elles sont *confocales*.

Deux coniques confocales ont le même centre, et leurs axes sont dirigés suivant les mêmes droites; elles ont aussi les mêmes systèmes de droites conjuguées rectangulaires (1125).

Deux ellipses, deux hyperboles, une ellipse et une hyperbole peuvent être confocales. Mais une parabole ne peut être confocale que d'une parabole.

Si par un point on mène deux tangentes à une conique et deux tangentes à une conique confocale, les angles des deux premières tangentes et les angles des deux autres ont les deux mêmes bissectrices.

Par un point P *du plan d'une conique, on peut mener deux coniques confocales avec la première;* ce sont une ellipse et une hyperbole si la conique primitive est une ellipse ou une hyperbole; ce sont deux paraboles de sens opposés si la première conique est une parabole. — *Ces deux coniques se coupent orthogonalement,* car leurs tangentes au point P sont les bissectrices des angles que forment les droites menées de ce point P aux deux foyers de la conique primitive.

1129. Voici quelques formules utiles :

1° Considérons une *ellipse* rapportée à son centre O et à ses axes OA et OB (*fig.* 563); M étant un quelconque de ses points, soient x et y ses coordonnées OP et MP, ρ et ρ' les deux rayons vecteurs MF et MF', et b' la longueur du demi-diamètre conjugué de OM. Menons la tangente TMT' et la normale MNN', la perpendiculaire MD sur la directrice, et les perpendiculaires OE, FK, F'K', abaissées du centre et des foyers sur la tangente.

On a :

$$(1)\quad \rho = a - ex,\qquad \rho' = a + ex,\qquad b'^2 = a^2 - e^2x^2 = \;'.$$

$$(2)\quad \mathrm{OT} = \frac{a^2}{x},\qquad \mathrm{OT'} = \frac{b^2}{y},\qquad \mathrm{PT} = \frac{a^2 - x^2}{x}$$

$$(3)\quad \mathrm{ON} = \frac{c^2}{a^2}x,\qquad \mathrm{ON'} = -\frac{c^2}{b^2}y.\qquad \mathrm{PN} = \frac{b^2}{a^2}x.$$

$$(4)\quad \mathrm{MN} = \frac{b}{a}\sqrt{\rho\rho'} = \frac{bb'}{a},\qquad \mathrm{MN'} = \frac{a}{b}\sqrt{\rho\rho'} = \frac{ab'}{b},\qquad \mathrm{MN}.\mathrm{MN'} = b'^2.$$

$$(5)\quad \mathrm{FK} = b\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} = \frac{bb'}{\rho'},\quad \mathrm{F'K'} = b\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}} = \frac{bb'}{\rho},\quad \mathrm{OE} = \frac{ab}{b'}.$$

La première des formules (1) résulte de la relation

$$\mathrm{FM} = e.\mathrm{MD} = e(\mathrm{OH} - \mathrm{OP}).$$

La troisième des formules (1) s'obtient en faisant la somme des carrés des valeurs (8) du n° 1121, et ayant égard à la position du point M sur l'ellipse. — Les formules (2) sont une conséquence de la théorie des pôles et polaires. — La première formule (3) résulte de la théorie des foyers, et la seconde de la similitude des triangles ONN', NPM. — On obtient la première formule (4) en appliquant la formule du n° 251 ; et la seconde résulte de la similitude des triangles ONN', NPM. — Enfin les deux premières formules (5) s'obtiennent à l'aide du théorème du n° 985 et de la similitude des triangles FMK, F'MK', qui donne le rapport de FK à F'K'; la troisième s'en déduit en prenant la demi-somme.

2° En changeant b^2 en $-b^2$, on a des formules analogues pour l'*hyperbole*.

Fig. 563.

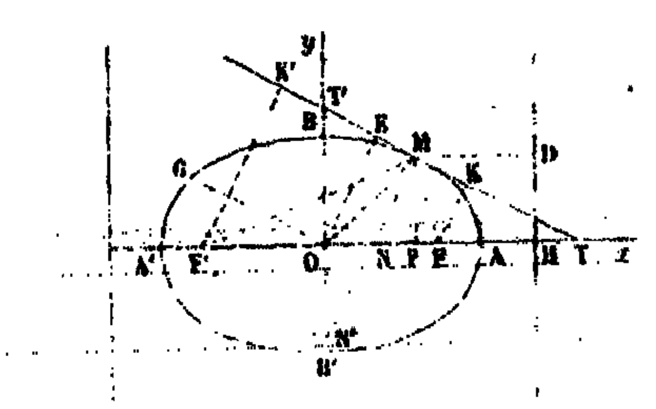
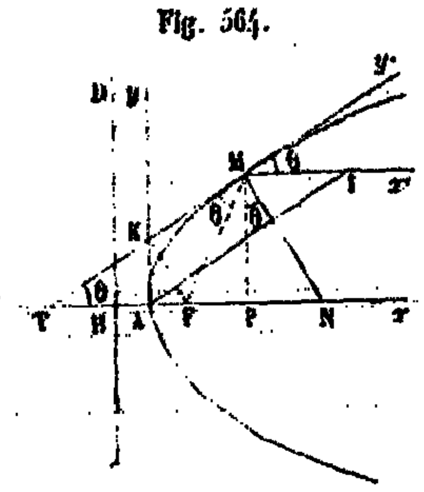


Fig. 564.



3° Considérons une *parabole* rapportée à son axe Ax et à la tangente Ay au sommet (*fig.* 564). M étant un quelconque de ses points, soient x et y ses coordonnées AP et MP, ρ le rayon vecteur MF, p le paramètre FH = 2AF, et θ l'inclinaison de la tangente MT sur l'axe. Menons la normale MN, et abaissons la perpendiculaire FK du foyer sur la tangente MT.

On a :

$$\mathrm{TP} = 2x, \quad \mathrm{PN} = p, \quad \mathrm{TN} = p + x, \quad \rho = \mathrm{FT} = \frac{1}{2}\mathrm{TN} = \frac{p}{2} + x.$$

Le triangle rectangle FTK donne ensuite

$$\overline{\mathrm{TK}}^2 = \mathrm{TF}.\mathrm{TA} = \rho . x, \quad \overline{\mathrm{KF}}^2 = \mathrm{FT}.\mathrm{AF} = \frac{p}{2}\rho,$$

d'où

$$\overline{\mathrm{MT}}^2 = 2\rho x, \quad \overline{\mathrm{MN}}^2 = p\rho.$$

Enfin on a, dans le triangle rectangle TMN,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{MP}} = \frac{p}{y}, \quad \sin^2\theta = \frac{\overline{\mathrm{PN}}^2}{\overline{\mathrm{MN}}^2} = \frac{p^2}{p\rho} = \frac{p}{\rho}.$$

Nous avons vu que la parabole rapportée à un diamètre quelconque Mx' et à la tangente correspondante My' avait pour équation $y'^2 = 2p'x'$. Pour évaluer p', menons AI parallèle à MT, de manière à figurer les coordonnées $x' = \mathrm{MI}$, $y' = -\mathrm{AI}$ du sommet A par rapport aux axes $y'\mathrm{M}x'$; nous aurons alors

$$p' = \frac{y'^2}{2x'} = \frac{\overline{\mathrm{MT}}^2}{2\,\mathrm{AT}} = \frac{\mathrm{MT}^2}{\mathrm{TP}} = \frac{2\rho x}{x} = 2\rho,$$

ou encore, d'après ce qui précède,

$$p' = \mathrm{TN}, \quad p' = p + 2x, \quad p' = \frac{p}{\sin^2\theta}.$$

Remarquons que le paramètre p de la parabole, exprimant la distance du foyer à la directrice, est égal à l'ordonnée du foyer. On donne également le nom de *paramètre*, dans l'ellipse et dans l'hyperbole, à l'ordonnée du foyer; pour avoir sa valeur en fonction des axes a et b, il suffit de multiplier par e ou $\frac{c}{a}$ la distance $\frac{a^2}{c} - c$ du foyer à la directrice, ce qui donne $\frac{b^2}{a}$.

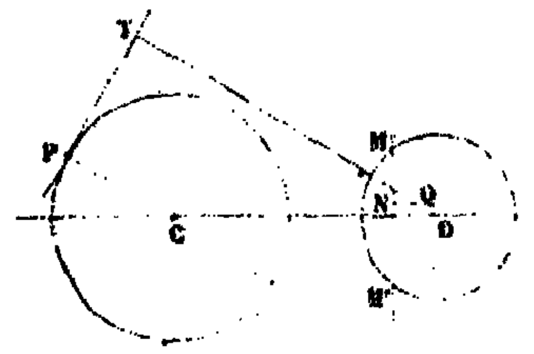
Complément de la méthode des polaires réciproques.

1130. Nous nous proposons dans ce paragraphe de compléter et de généraliser la théorie que nous avons exposée aux nos 360 et suivants.

Nous nommerons *origine* le centre O du cercle auxiliaire par rapport auquel on prend les pôles et les polaires, et nous désignerons par R son rayon.

La polaire réciproque d'un cercle C situé d'une manière quelconque *par rapport au cercle auxiliaire* O, *est une conique qui a pour foyer l'origine* O *et pour directrice la polaire* MM' *du centre* C *du cercle proposé par rapport au cercle auxiliaire* (*fig.* 565).

Fig. 565.



En effet, désignons par ρ le rayon du cercle proposé C, et par δ la distance OC de son centre à l'origine. TP étant une tangente quelconque du cercle C et Q son pôle par rapport au cercle O, on a (364, 2°), en désignant par QN la distance du point Q à la droite MM',

$$\frac{OQ}{QN} = \frac{OC}{CP} = \frac{\delta}{\rho}.$$

Le rapport des distances du point variable Q au point fixe O et à la droite fixe MM' est donc constant.

L'excentricité $\frac{\delta}{\rho}$ de la conique obtenue est inférieure, supérieure ou égale à *un*, suivant que δ est inférieur, supérieur ou égal à ρ. Donc, *la conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'origine* O *est intérieure, extérieure au cercle proposé* C *ou située sur la circonférence de ce cercle.*

Cette proposition, combinée avec le principe du n° 363, permet de déduire de toute propriété du cercle une propriété focale des coniques.

Comme exemple, transformons la propriété de l'angle inscrit : *l'angle* MAB, *formé en joignant un point variable d'une circonférence de cercle à deux points fixes de cette circonférence, est constant et égal à la moitié de l'angle au centre* ACB *correspondant.* Au cercle, répondra une conique ayant pour foyer l'origine O et pour directrice la polaire γ du point C par rapport au cercle auxiliaire O; aux points A, B, M, répondront deux tangentes fixes α et β, et une tangente variable μ de la conique. Les points d'intersection de μ et α, de μ et β, de γ et α, de γ et β, seront respectivement les pôles des droites MA, MB, CA, CB, et par suite, en vertu du principe du n° 363, on aura ce théorème : *L'angle sous lequel on voit du foyer* O *d'une conique la portion d'une tangente mobile* μ *comprise entre deux tangentes fixes* α *et* β, *est constant et égal à la moitié de* *l'angle sous lequel on voit du foyer la portion de la directrice γ comprise entre les deux tangentes fixes α et β.*

Voici d'autres exemples :

Deux tangentes d'un cercle sont également inclinées sur la corde des contacts.	*La droite qui joint le foyer d'une conique à l'intersection de deux tangentes, divise en deux parties égales l'angle sous lequel on voit du foyer la corde des contacts.*
Le lieu du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à un cercle est un cercle concentrique, et la corde des contacts enveloppe un cercle aussi concentrique.	*Si une corde d'une section conique est vue du foyer sous un angle constant, cette corde enveloppe une section conique ayant même foyer et même directrice que la proposée; le point de concours des tangentes aux extrémités de cette corde, décrit une section conique ayant aussi même foyer et même directrice que la proposée.*
Si une corde d'un cercle est vue sous un angle constant d'un point fixe A *de la circonférence, cette corde enveloppe un cercle concentrique.*	*Le lieu du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à la parabole, est une conique ayant le même foyer et la même directrice.*
Les projections d'un point A *d'une circonférence de cercle sur les côtés d'un triangle inscrit quelconque sont en ligne droite.*	*Si, par les sommets d'un triangle circonscrit à une parabole, on élève des perpendiculaires sur les droites qui joignent ces sommets au foyer* F, *les trois perpendiculaires concourent en un même point* I.

Dans les deux derniers exemples, on a pris pour origine le point A ; et comme ce point est sur la circonférence, la transformée de cette circonférence est une parabole. Observons, en outre, qu'en vertu du dernier théorème obtenu, si l'on décrit un cercle sur FI comme diamètre, ce cercle passera par les sommets du triangle circonscrit ; de là cette proposition : *Le lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites fixes est le cercle circonscrit au triangle formé par ces trois droites.*

1131. *La polaire réciproque d'une conique* C *par rapport à un cercle auxiliaire* O *est une conique* C'.

En effet, la conique C peut être considérée (1109) comme l'enveloppe des droites mm' qui joignent les points homologues m et m' de deux divisions homographiques tracées sur deux tangentes fixes L et L'. Or, soient λ, λ', μ, les pôles des tangentes fixes L et L' et de la tangente mobile mm'; les droites $\lambda\mu$, $\lambda'\mu$, décriront deux faisceaux homographiques. Car les droites issues de λ répondant anharmoniquement aux points de la division L, et les droites issues de λ' aux points de la division L' (1093), quatre droites quelconques issues de λ auront même rapport anharmonique que les quatre droites homologues issues de λ', attendu que quatre points quelconques de la division L ont même rapport anharmonique que les quatre points homologues de L'. Donc le lieu des points μ est une conique qui passe par les points λ et λ' (1110, 2°).

A chaque propriété des coniques, en répondra dès lors une autre par la méthode des polaires réciproques. Voici des exemples :

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une ellipse ou à une hyperbole est un cercle.	*L'enveloppe des cordes d'une conique qui sont vues sous un angle droit d'un point fixe du plan de la conique, est une autre conique dont ce point fixe est le foyer.*
Le lieu des projections d'un foyer sur les tangentes d'une ellipse ou d'une hyperbole est un cercle.	*Si par chaque point d'un cercle on élève une perpendiculaire sur la droite qui joint ce point à un point fixe, l'enveloppe de ces perpendiculaires est une conique dont ce point fixe est le foyer.*

1132. Reportons-nous au théorème du n° 366. Si, sans rien changer au raisonnement, on avait pris pour *origine* de la transformation un point quelconque au lieu du centre du cercle circonscrit au quadrilatère, on aurait obtenu pour théorème corrélatif :

Dans tout quadrilatère circonscrit à une conique, le produit des distances de deux sommets opposés à une tangente quelconque est dans un rapport constant avec le produit des distances des deux autres sommets à la même tangente.

Cette dernière proposition, transformée à son tour par la méthode des polaires réciproques, donne alors :

Dans tout quadrilatère inscrit à une conique, le produit des distances d'un point quelconque de la conique à deux côtés opposés est dans un rapport constant avec le produit des distances du même point aux deux autres côtés. Ce théorème est attribué à Pappus. On doit remarquer la manière dont nous l'avons obtenu et qui consiste dans une double application de la méthode des polaires réciproques.

Les explications données au n° 366 permettront au lecteur de voir lui-même comment ces théorèmes peuvent se généraliser et s'étendre à des polygones. Nous appellerons ici, au contraire, l'attention sur un cas particulier : Lorsque deux côtés opposés du quadrilatère inscrit deviennent tangents à la conique, les deux autres se confondent avec la corde de contact, et le théorème de Pappus devient le suivant : *Le produit des distances d'un point quelconque d'une conique aux deux côtés d'un angle circonscrit est dans un rapport constant avec le carré de la distance du même point à la corde de contact*. Le théorème corrélatif s'énonce : *Le produit des distances de deux points fixes d'une conique à une tangente variable est dans un rapport constant avec le carré de la distance de l'intersection des tangentes aux deux points fixes à la même tangente variable*; il résulte immédiatement de la propriété des quadrilatères circonscrits, lorsque l'on suppose que deux côtés adjacents du quadrilatère viennent se confondre avec les deux autres.

1133. On peut généraliser toute cette théorie en substituant au cercle auxiliaire, par rapport auquel on prend les pôles, une conique auxiliaire : *La courbe polaire réciproque d'une conique quelconque par rapport à une conique auxiliaire est encore une conique* (la démonstration du n° 1131 s'applique sans modification), et la méthode ainsi généralisée se prête avec la même facilité à la transformation des propriétés descriptives; mais il n'en est plus de même pour les propriétés métriques, et pour transformer ces propriétés il convient de prendre un cercle pour courbe auxiliaire.

On dit qu'une courbe est *algébrique* ou *transcendante* suivant que son équation en coordonnées rectilignes x et y est algébrique ou transcendante. On appelle *ordre* d'une courbe algébrique le degré en x et y de son équation préalablement rendue rationnelle et entière par rapport à ces variables. Pour que cette définition ne soit pas contradictoire, il faut montrer que le degré de l'équation est indépendant de la position de la courbe par rapport aux axes de coordonnées. C'est ce que nous allons établir.

Considérons une droite située d'une manière quelconque par rapport aux axes coordonnés ox et oy. Soient M, M', M'', ..., divers points de cette droite, P, P', P'',..., les extrémités de leurs abscisses, et Q, Q', Q'',..., les extrémités de leurs ordonnées comptées sur oy. Les deux divisions PP'P''..., QQ'Q''..., sont homographiques et semblables, car chacune d'elles est évidemment semblable (1087) à la division MM'M''... ; il y a donc entre $x = o\mathrm{P}$ et $y = o\mathrm{Q}$ une relation homographique privée de termes en xy; c'est-à-dire que les coordonnées d'un point quelconque M de la droite sont liées constamment par une équation du premier degré.

L'équation d'une ligne droite étant du premier degré, quelle que soit la situation de cette droite par rapport aux axes coordonnés, il faut nécessairement que, si x et y sont les coordonnées d'un point par rapport à certains axes yox, et x' et y' les coordonnées du même point par rapport à d'autres axes $y'ox'$, x et y soient des fonctions du premier degré de x' et y'. Par suite, la substitution de ces valeurs de x et y dans une équation algébrique en x et y n'altérera pas le degré de cette équation. En d'autres termes, l'ordre de la courbe représentée par cette équation sera le même, quels que soient les axes auxquels on la rapporte.

Une courbe algébrique d'ordre n est coupée en n points (réels ou imaginaires) par une droite quelconque. En effet, on prenant cette droite pour axe des x, l'équation de la courbe sera toujours du degré n d'après ce qui précède; et si l'on fait $y = 0$, l'équation se réduira à une équation du degré n en x, qui donnera les abscisses des points communs à la courbe et à la droite; or, on sait par l'Algèbre qu'une équation algébrique rationnelle et entière du degré n a n racines réelles ou imaginaires. Ainsi, *l'ordre d'une courbe algébrique exprime le nombre des points suivant lesquels cette courbe est rencontrée par une droite quelconque.*

Les coniques sont donc des courbes du second ordre, ce qui s'accorde avec les équations trouvées aux nos 1121, 1122, 1124. Inversement, *toute courbe du second ordre est une conique;* car l'équation générale du second degré à deux variables x et y, ne renfermant que cinq coefficients arbitraires, on voit que cinq points déterminent une courbe du second ordre; mais par ces cinq points on peut faire passer une conique et une seule (1111); et comme cette conique est du second ordre, elle ne diffère pas de la courbe proposée.

Deux courbes polaires réciproques sont telles, que chacune d'elles est coupée par une droite quelconque en autant de points (réels ou imaginaires) qu'on peut mener de tangentes (réelles ou imaginaires) à l'autre par un point donné quelconque. On nomme *classe* d'une courbe algébrique le nombre des tangentes réelles ou imaginaires qu'on peut mener à cette courbe d'un point quelconque D'après cela, on peut énoncer la propriété précédente de cette manière plus concise : *Quand deux courbes sont polaires réciproques, l'ordre de l'une est égal à la classe de l'autre.*

Les coniques sont des courbes de la seconde classe, et, inversement, *toute courbe de la seconde classe est une conique.*

1134. *Deux coniques quelconques ont quatre points communs (réels ou imaginaires).*

En effet, en éliminant y^2 entre les équations du second degré qui représentent les deux coniques, on obtient une équation où y ne figure qu'au premier degré et que nous désignerons par (y); puis, en substituant cette valeur de y dans l'une des deux équations primitives, on trouve une équation du quatrième degré en x, que nous désignerons par (x), et dont les racines sont les abscisses des points communs aux deux courbes. Si l'équation (x) a ses quatre racines réelles, l'équation (y) donne pour chacune de ces valeurs de x une valeur réelle de y; et, par suite, les deux coniques ont quatre points communs réels. — Si l'équation (x) a deux racines réelles et deux racines imaginaires (conjuguées), l'équation (y) donne pour y deux valeurs réelles et deux valeurs imaginaires (conjuguées); et, par suite, les deux coniques ont deux points communs réels et deux points communs imaginaires (conjugués). — Enfin, si l'équation (x) a ses quatre racines imaginaires (conjuguées deux à deux), l'équation (y) donne pour y quatre valeurs imaginaires (conjuguées deux à deux); et, par suite, les deux coniques ont quatre points communs imaginaires (conjugués deux à deux).

Deux coniques quelconques ont toujours un ou trois systèmes de deux cordes communes réelles.

Il y a trois cas à distinguer :

1° Les deux coniques ont quatre points communs réels a, b, c, d (*fig.* 566);

Fig. 566.

les trois couples ab et cd, ac et bd, ad et bc, de cordes communes sont alors réels. De plus, en désignant par p le point d'intersection de ab et de cd, par q celui de ac et de bd et par r celui de ad et de bc, on voit que chacun des sommets du triangle pqr est le pôle du côté opposé par rapport à toutes les coniques passant par les quatre points a, b, c, d.

2° Les deux coniques ont deux points communs réels a et b et deux points communs imaginaires conjugués c et d. La corde commune ab est alors réelle; il est aisé de voir que cd l'est aussi : car, soient x' et y' les coordonnées du point c et x'', y'', les coordonnées du point d, l'équation

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'}$$

représente la droite cd, puisqu'elle est du premier degré et qu'elle est satisfaite pour $x = x'$ et $y = y'$, ainsi que pour $x = x''$ et $y = y''$; or, si l'on remplace x' et x'' par deux imaginaires conjuguées $m + n\sqrt{-1}$, $m - n\sqrt{-1}$, et y' et y'' par deux autres imaginaires conjuguées $m' + n'\sqrt{-1}$, $m' - n'\sqrt{-1}$, l'équation se réduit à

$$n'x - ny = mn' - nm',$$

où les imaginaires ont disparu. Les autres cordes communes ac et bd, ad et bc, sont imaginaires; car si, par exemple, ac était réelle, le point c, intersection des droites réelles ac et cd, serait réel, ce qui est contre l'hypothèse. Quant au triangle pqr, il n'a qu'un sommet réel p; car si q, par exemple, était réel, la droite ac qui joindrait les deux points réels a et q serait réelle, ce qui est impossible, comme nous venons de le voir. Il faut remarquer toutefois que q et r sont des points imaginaires conjugués et, par suite, que la droite qr est réelle.

3° Les deux coniques ont quatre points communs imaginaires conjugués deux à deux a et b, c et d. Alors les droites ab et cd sont réelles, puisque chacune d'elles unit deux points imaginaires conjugués; on voit d'ailleurs, en raisonnant comme dans l'alinéa qui précède, que les autres cordes communes sont imaginaires. Le triangle pqr a ses trois sommets réels : cela est évident pour le point p, mais il importe de démontrer nettement la réalité des points q et r. Considérons, par exemple, le point q, intersection des deux droites ac et bd, et soient x' et y' les coordonnées de a, x'' et y'' celles de c, x_1 et y_1 celles de b, x_2 et y_2 celles de d. Les droites ac et bd ont respectivement pour équations

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} \quad \text{et} \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

or, si l'on résout ces équations du premier degré par rapport à x et à y afin d'avoir les coordonnées du point commun q, on constate sans difficulté que les expressions de ces coordonnées ne renferment plus d'imaginaires, si l'on remplace respectivement x' et x_1, y' et y_1, x'' et x_2, y'' et y_2, par des imaginaires conjuguées.

Dans ce numéro et dans le précédent, nous avons fait de légers emprunts à l'analyse. Cela nous a permis d'éviter de longs détours et de fixer d'une manière nette le sens des propositions.

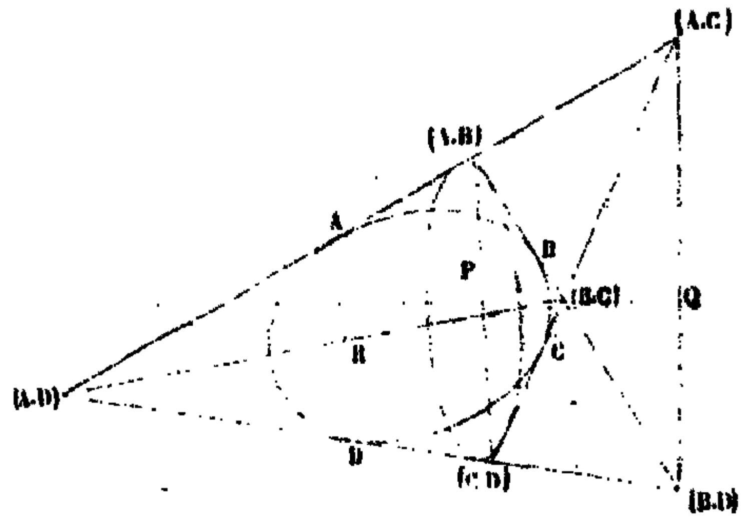
En transformant par la méthode des polaires réciproques les deux théorèmes qui précèdent, on voit que :

Deux coniques quelconques ont quatre tangentes communes (*réelles ou imaginaires*) (*fig.* 567).

Deux coniques quelconques ont toujours un ou trois systèmes de deux ombilics réels (on donne le nom d'*ombilic* à tout point d'intersection de deux tangentes communes).

Si les quatre côtés A, B, C, D, du quadrilatère circonscrit sont réels, les trois couples (A, B) et (C, D), (A, C) et (B, D), (A, D) et (C, D) d'ombilics sont réels, ainsi que les diagonales P, R, du quadrilatère et la droite Q qui joint les points de concours des côtés opposés.

Fig. 567.



Si le quadrilatère circonscrit a deux côtés réels A et B, et deux imaginaires C et D, les ombilics (A, B) et (C, D) sont seuls réels, et des trois droites P, Q, R, la droite P est seule réelle ; le point d'intersection de Q et de R est aussi réel.

Enfin, si les quatre côtés sont imaginaires conjugués A et B, C et D, les ombilics (A, B), (C, D), sont seuls réels, et les trois droites P, Q, R, sont réelles.

Constructions relatives aux coniques.

1135. ***Étant donnés deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole en grandeur et en position, construire les axes de la courbe.***

1° *Ellipse.* — Soient (*fig.* 568) $OA' = a'$ et $OB' = b'$ les deux demi-diamètres conjugués donnés ; désignons par θ leur angle $B'OA'$, et par a et b les longueurs inconnues des deux axes. Les relations (1121)

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2, \quad ab = a'b' \sin\theta,$$

donnent

$$(a+b)^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b'\sin\theta, \quad (a-b)^2 = a'^2 + b'^2 - a'b'\sin\theta.$$

Or, si sur la perpendiculaire B'I, abaissée du point B' sur OA', on prend de part et d'autre de B', $B'H = B'K = a'$, et si l'on joint OH et OK, on a

$$OB'K = \frac{\varpi}{2} - \theta, \quad \cos OB'K = \sin\theta, \quad OB'H = \frac{\varpi}{2} + \theta, \quad \cos OB'H = -\sin\theta,$$

et par suite, en vertu de la formule fondamentale de la Trigonométrie rectiligne,

$$\overline{OH}^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b'\sin\theta, \quad \overline{OK}^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\sin\theta,$$

c'est-à-dire

$$OH = a+b, \quad OK = a-b.$$

On en déduit pour les longueurs des axes

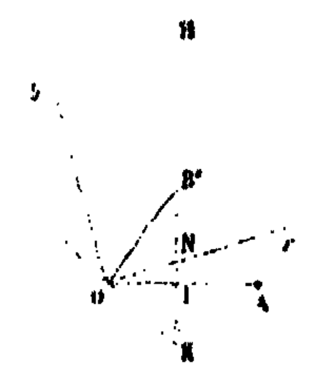
$$a = \frac{1}{2}(OH + OK), \quad b = \frac{1}{2}(OH - OK).$$

Il reste à trouver la direction Ox du grand axe. Or, B'N est la normale en B' à l'ellipse, puisque la tangente en B' serait (1120) parallèle à OA'. On a donc (1129) $B'N = \frac{a'b}{a}$ et, par suite,

$$\frac{NH}{NK} = \frac{B'H + B'N}{B'K - B'N} = \frac{a' + a'\frac{b}{a}}{a' - a'\frac{b}{a}} = \frac{a+b}{a-b} = \frac{OH}{OK};$$

donc le grand axe Ox est la bissectrice de l'angle HOK.

Fig. 568.



2° *Hyperbole*. — En construisant le parallélogramme sur les deux diamètres conjugués donnés et menant les diagonales, on aura les asymptotes; les axes seront les bissectrices des angles des asymptotes. Pour avoir la longueur d'un axe, il suffira (1123, 1°) de mener par l'un des sommets du parallélogramme une parallèle à la direction de cet axe, et de prendre une moyenne proportionnelle entre les distances de ce sommet aux points où cette parallèle coupe les asymptotes.

Remarquons que lorsqu'on connaît les asymptotes Ou et Ov d'une hyperbole et un point m, on obtient au moyen de la règle tant de points de la courbe que l'on veut (*fig.* 559); en menant par m une transversale quelconque qui coupe les asymptotes en g et g', et prenant $g'm' = gm$, on aura un nouveau point m' de l'hyperbole.

1136. *Construire une conique connaissant :*

1° *Cinq points*, a, b, c, d, e. — « $abcd$ forme un quadrilatère inscrit » dans la conique cherchée. Par le point e on mènera une droite quel- » conque ef, et l'on cherchera le point f conjugué du point e dans l'in- » volution déterminée sur cette droite par les points où elle rencontre les » côtés opposés du quadrilatère. Le point f appartiendra à la conique.

» Si l'on veut trouver la tangente bt en b, on regardera $acbt$ comme » un quadrilatère inscrit, dont deux sommets sont infiniment voisins en » b, et la droite ed comme une transversale de ce quadrilatère. Cette » transversale coupe les côtés opposés ba, bc, en α, γ, la courbe en e et d, » et les côtés opposés ac, bt, en δ et x. Ces six points formant une invo- » lution, on déterminera le point x, et par suite la tangente bt. »

2° *Cinq tangentes*, A, B, C, D, E. — « Quatre des tangentes données » forment un quadrilatère circonscrit. Qu'on prenne sur la cinquième un » point quelconque a et qu'on le joigne aux quatre sommets du quadri- » latère ; le sixième rayon, conjugué à la cinquième tangente dans l'in- » volution que ces quatre droites déterminent, est une tangente issue du » point a.

» Supposons qu'on veuille trouver le point de contact de la tangente » B. On considère le quadrilatère formé par les tangentes A, C, B, dont » deux côtés se confondent en un seul suivant B, et dont (A, C), (A, B), » (B, C) et t sont les quatre sommets. Le sommet t est inconnu, mais » les six rayons qui aboutissent au point de concours I de D et E, savoir » D, E, I (A, B), I (B, C), I (A, C), It, sont en involution, et cinq sont » connus. Il sera donc facile de déterminer le sixième et par suite le » point cherché t.

» Dans le cas de la parabole, la cinquième tangente est donnée impli- » citement ; c'est la droite de l'infini. Les quatre qui sont données for- » ment un quadrilatère. Par les sommets de ce quadrilatère, on mènera » quatre parallèles dans une direction arbitraire ; on les coupera par une » transversale quelconque sur laquelle on cherchera le point central de » l'involution qu'elles y déterminent, et la parallèle aux autres droites » menée par ce point sera sur une cinquième tangente. »

3° *Quatre points et une tangente*. — « Soient $abcd$ le quadrilatère » donné et e le point de contact inconnu de la tangente. Soient α, α', et β, β', » les points où cette tangente rencontre respectivement les côtés opposés » du quadrilatère. Ces points déterminent une involution dont e est un » point double. Il sera donc facile de le trouver. On voit que la question » a deux solutions.

» Dans le cas de la parabole, la tangente est à l'infini. Soient S le point » de concours des côtés opposés ad et bc du quadrilatère donné. Qu'on » mène Sc', Sd', parallèles respectivement aux deux autres côtés opposés ;

» on a quatre rayons Sc', Sd', Sc, Sd, issus du point S, qui, conjugués, » deux à deux, déterminent une involution. Chacun des deux rayons » doubles de cette involution est parallèle à l'axe d'une parabole qui satis- » fait à la question. »

4° *Quatre tangentes et un point.* — « On trouve une cinquième tan- » gente en cherchant les rayons doubles de l'involution qui est déter- » minée par les quatre rayons, conjugués deux à deux, qu'on obtient en » joignant le point donné aux sommets du quadrilatère formé par les » quatre tangentes données. Chacun des deux rayons doubles est une » tangente à la conique ; on a donc deux solutions distinctes.

» Pour la parabole, on donne un point et trois tangentes; la quatrième » est à l'infini. La solution est la même; deux des rayons de l'involution » sont parallèles respectivement à deux des tangentes données. »

5° *Trois points et deux tangentes.* — « Soient a, b, c, les trois points » donnés, T et T' les deux tangentes qui se coupent en O et qui touchent » respectivement la courbe aux deux points d et e qu'il s'agit de déter- » miner. On peut regarder la corde de contact de comme représentant un » quadrilatère inscrit dont deux sommets sont en d et les deux autres » en e. La corde bc, considérée comme une transversale du quadrilatère » et de la courbe, fournit une relation d'involution, en vertu du théo- » rème de Desargues, entre les six points où elle coupe les côtés opposés » du quadrilatère et la courbe. Ces points se réduisent ici à cinq, savoir : » t, t', sur les tangentes dO, eO, respectivement ; ι sur les deux autres » côtés opposés qui se confondent en un seul de; et enfin b, c, sur la » courbe. Le point ι est donc un point double de l'involution déterminée » par les segments bc, tt'. — Si l'on prend ab comme transversale au lieu » de bc, on trouvera de même un point φ appartenant à la corde de contact » de, qui se trouve ainsi déterminée par les deux points ι et φ. Mais » comme chacune des deux relations d'involution fournit deux points » doubles ι et ι', φ et φ', on obtiendra quatre positions distinctes de la » corde de, savoir $\iota\varphi$, $\iota\varphi'$, $\iota'\varphi$, $\iota'\varphi'$, c'est-à-dire quatre solutions du » problème proposé.

» Dans le cas de la parabole où l'on ne donne qu'une tangente et trois » points, on obtient de même quatre solutions. La tangente T' est à » l'infini ainsi que le point t'; donc, le point t qui lui est conjugué » dans l'involution est le point central de cette involution, dont on connaît » en outre le segment bc et dont il s'agit de trouver les points doubles. » Chacune des quatre cordes de contact $\iota\varphi$ est un diamètre d'une para- » bole satisfaisant aux conditions proposées. »

6° *Trois tangentes et deux points.* — « Nous allons déterminer deux » nouvelles tangentes à la courbe aux points donnés a et b. Soient AB, » BC, CD, celles qui sont données. Désignons par O le point de contact

» inconnu des deux tangentes cherchées; si l'on regarde l'angle bOa » comme un quadrilatère circonscrit $OaOb$ dont les côtés adjacents se » sont confondus deux à deux en un seul Oa ou Ob, on verra que la » droite BO est un rayon double de l'involution formée par les deux » couples de rayons conjugués Ba et Bb, BA et BC. Pareillement, CO est » un rayon double de l'involution Ca, Cb, CB, CD. Donc, le point O » intersection des rayons BO et CO est déterminé. Mais comme chacune » des involutions comporte deux tels rayons, on obtient quatre positions » distinctes du point O, et par conséquent, le problème admet comme » le précédent quatre solutions.

» S'il s'agit d'une parabole, l'une des trois tangentes données est à » l'infini, BC par exemple. La construction reste la même en principe; » mais ici les deux faisceaux de rayons en involution se composent de » droites parallèles, puisque leurs rayons respectifs B et C sont à l'infini. » Coupons-les par une transversale quelconque. On aura sur cette droite, » relativement au premier faisceau, deux points α, β, intersections des » rayons conjugués aB, bB; un point ω intersection du rayon AB dont » le conjugué CB est à l'infini, ce qui est cause que ω est le point central » de l'involution; enfin un point double x intersection du rayon BX, et » qu'il s'agit de déterminer. Relativement au second faisceau, on aura » de même deux points conjugués d'une involution α', β'; un point cen- » tral ω', et l'on déterminera un point double y. Les droites xO, yO, » parallèles respectivement aux tangentes données AB, DC, se couperont » au sommet O de l'angle circonscrit à l'arc ab de la parabole, et l'on » aura encore quatre solutions, parce que l'on obtiendra deux positions » du point x et deux positions du point y (*). »

Nous avons expliqué dans les paragraphes précédents comment on construit les points doubles de deux divisions homographiques tracées sur une même droite, ainsi que les points doubles et le point central d'une involution. Pour ne laisser aucune lacune, il convient de montrer comment, étant donnés trois couples (a, a'), (b, b'), (c, c'), de points homologues de deux divisions homographiques, on peut construire l'homologue m' d'un point quelconque m de la première division. Or, si l'on porte la première division sur une droite quelconque $a'L_1$, issue du point a' de la seconde, de manière que a soit en a', et b, c, m, en b_1, c_1, m_1, les deux divisions $a'b_1c_1$, $a'b'c'$, seront en perspective puisqu'elles auront un point homologue commun a'; donc, si O est le point de concours de b_1b' et de c_1c', la droite Om déterminera sur la base de la division $a'b'c'$ l'homologue m' de m.

(*) Nous avons extrait ces solutions d'un excellent article de M. E. de Jonquières, inséré au tome XVI des *Nouvelles Annales*, 1re série.

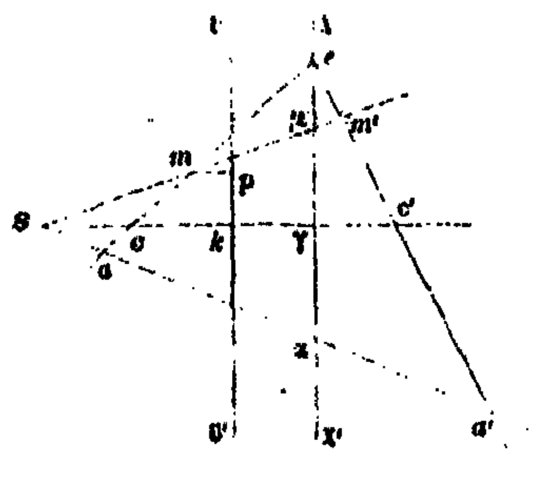
Coniques homologiques.

1137. Soient (*fig.* 569) une figure plane quelconque, un point fixe S et une droite fixe XX' situés dans son plan : si sur la droite Sm qui joint le point S à un point quelconque m de cette figure et qui coupe XX' en μ, on prend un point m' tel, que le rapport anharmonique

$$(S\mu mm') \quad \text{ou} \quad \frac{mS}{m\mu} : \frac{m'S}{m'\mu}$$

ait une valeur constante λ, le lieu du point m' est une seconde figure qui est dite *homologique* de la première. S est le *centre d'homologie*, XX' l'*axe d'homologie*, et λ le *coefficient d'homologie*.

Fig. 569.



Supposons que le point m décrive une droite ae; joignons le point e où cette droite rencontre XX' avec le point a' de la seconde figure qui est l'homologue d'un point a choisi à volonté sur la droite ae; la transversale S$m\mu$ coupera la droite ea' du faisceau (eS, ea, $e\alpha$, ea') en un point m' tel que (327)

$$(S\mu mm') = (S\alpha aa') = \lambda;$$

ce point m' sera donc l'homologue de m dans la seconde figure. Donc : *Quand deux figures sont homologiques, à une droite de l'une répond dans l'autre une droite, et ces deux droites se rencontrent sur l'axe d'homologie.*

Inversement, *si deux figures* F *et* F' *sont telles, qu'à un point quelconque de l'une réponde un point de l'autre, et qu'à une droite de l'une réponde une droite de l'autre, de telle sorte que deux points homologues quelconques soient toujours en ligne droite avec un point fixe* S, *et que deux droites homologues quelconques se coupent toujours sur une droite fixe* XX', *ces deux figures sont homologiques;* car si a et a', m et m', sont deux couples quelconques de points homologues, on a, dans le aisceau (eS, ea, eX', ea') dont le sommet est le point de XX' où concourent les droites homologues am, $a'm'$,

$$(S\mu mm') = (S\alpha aa') = \text{const.}$$

Enfin, puisque deux droites homologues coupent l'axe d'homologie au même point, à la droite de l'infini dans l'une des figures doit correspondre dans l'autre une droite U parallèle à l'axe d'homologie. Si SK et et $S\gamma$ sont les distances du centre S à la droite U et à l'axe XX', on a la relation

$$\frac{KS}{K\gamma} : \frac{\infty S}{\infty \gamma} = \lambda \quad \text{ou} \quad \frac{KS}{K\gamma} = \lambda,$$

qui détermine la position de la droite U.

1138. *Quatre points en ligne droite a, b, c, d, de la première figure, et les quatre points correspondants a', b', c', d', de la seconde ont le même rapport anharmonique;* car les droites aa', bb', cc', dd', passant par S, les deux divisions $abcd$, $a'b'c'd'$, sont en perspective.

Un faisceau de quatre droites OA, OB, OC, OD, *de la première figure et le faisceau des quatre droites correspondantes* O'A', O'B', O'C', O'D', *de la seconde ont le même rapport anharmonique;* en effet, OA et O'A' coupent l'axe d'homologie XX' au même point α; de même, OB et O'B' coupent cet axe au même point β; OC et O'C', au même point γ; OD et O'D', au même point δ. Le rapport anharmonique de l'un et de l'autre faisceau est donc égal à celui des quatre points α, β, γ, δ.

1139. Au lieu de donner la constante λ, on peut donner un couple (a, a') de points homologues. La construction de la figure homologique d'une figure donnée s'effectue alors très-simplement à l'aide de la règle seule. Veut-on le point m' homologue d'un point quelconque m de la première figure? il suffira de prendre l'intersection de Sm avec la droite $a'e$ qui unit le point a' au point e où am coupe XX' (*fig.* 569).

Le théorème de Ménélaüs (405) appliqué au triangle mem' coupé par la transversale Saa' donne

$$\frac{Sm'}{Sm} \cdot \frac{am}{ae} \cdot \frac{a'e}{a'm'} = 1.$$

Si l'on suppose a' à l'infini, le point a est sur UU', le rapport $\frac{a'e}{a'm'}$ devient égal à 1, et le rapport $\frac{am}{ae}$ devient égal au rapport $\frac{mp}{K\gamma}$ des distances de la droite U au point m et à l'axe XX' d'homologie; on a donc

$$(1) \qquad Sm' = K\gamma \cdot \frac{Sm}{mp}.$$

Cette formule est très-utile dans la théorie de l'homologie, elle perme de construire la figure homologique d'une figure donnée au moyen du centre d'homologie et de la droite UU' qui, dans la figure donnée, répond à la droite de l'infini de la figure inconnue.

1140. *La figure homologique d'une conique* C *est une conique* C'.

En effet, P et Q étant deux points fixes pris arbitrairement sur la conique donnée C, et m un point variable de cette conique, les droites Pm, Qm, engendrent deux faisceaux homographiques (1109). Or si P', Q', m', sont les homologues de P, Q, m, le faisceau engendré par P'm' tournant autour du point fixe P' sera homographique du faisceau engendré par Pm (1138); de même, le faisceau décrit par Q'm' sera homographique du faisceau décrit par Qm. Donc, les faisceaux engendrés par P'm' et Q'm' sont homographiques, et (1109) le lieu du point m' est une conique. — *A un point p et à sa polaire* L *relatifs à la première conique* C, *répondent dans la seconde conique un point p' et sa polaire* L'. Car aux quatre points harmoniques p, a, q, b, situés sur une transversale issue du point p et qui coupe la conique C en a et b et la polaire L en q, répondent quatre points, p', a', q', b', qui sont aussi harmoniques (1138). On voit par là que *à deux points ou à deux droites conjuguées relativement à la conique* C, *répondent deux points ou deux droites conjuguées relativement à la conique* C'. — *L'axe d'homologie* XX' *est une corde commune aux deux coniques* C *et* C'. En effet, les points communs à la conique C et à l'axe XX' sont les points doubles des deux divisions homographiques tracées sur XX' par les faisceaux générateurs Pm et Qm de cette conique. De même, les points communs à la conique C' et à XX' sont les points doubles des deux divisions tracées sur XX' par les faisceaux P'm' et Q'm'; mais les rayons homologues des faisceaux P et P' se coupent sur l'axe XX', aussi bien que les rayons homologues des faisceaux Q et Q'. Donc les points doubles sont les mêmes pour les deux divisions. — Enfin on voit, soit par un raisonnement corrélatif du précédent, soit en appliquant à la propriété précédente la transformation par polaires réciproques, que *le centre d'homologie* S *est un ombilic des deux coniques*.

Réciproquement, *deux coniques quelconques* C *et* C' *sont deux figures homologiques dans lesquelles l'axe d'homologie est une corde commune et le centre d'homologie un ombilic correspondant à cette corde*. Considérons le triangle pqr, dont chaque sommet est le pôle du côté opposé par rapport aux deux coniques (*fig.* 566); par chaque sommet passent deux cordes communes, et sur chaque côté sont situés deux ombilics; nous appelons *ombilics correspondant à une corde commune*, les deux ombilics placés sur le côté du triangle pqr opposé au sommet qui est situé sur la corde commune considérée. Cela étant, soient XX' une corde commune aux deux coniques proposées qui les coupe en e et f, et S l'un des deux ombilics correspondants; a étant un point quelconque de la conique C, la droite Sa rencontre la conique C′ en deux points : désignons par a' celui de ces deux points qui, lorsque la sécante Sa tourne autour de S, vient se réunir avec a au point e. Si en prenant S pour centre d'homologie, XX′ pour axe et (a, a') pour un couple de points homologues, on construit la figure homologique de C, on trouvera une conique C_1 qui, ayant en commun avec la conique C′ les points a', e, f, et les deux tangentes issues de S, ne différera pas de la conique C′. Donc C et C′ sont homologiques.

Il faut cependant, d'après la démonstration même, que les deux coniques soient placées de telle façon, que toute transversale issue de l'ombilic S rencontre les deux courbes en des points qui soient à la fois réels ou à la fois imaginaires pour les deux coniques.

De plus, comme il peut y avoir six cordes communes, et qu'à chacune d'elles répondent deux ombilics, on voit que *deux coniques peuvent être homologiques de douze manières différentes.*

1141. *La figure homologique d'un cercle, lorsqu'on prend le centre du cercle pour centre d'homologie, est une conique qui a ce centre pour foyer;* car si dans la formule (1) Sm' est constant, on a

$$\frac{Sm}{mp} = \text{const.};$$

par suite, le rapport des distances d'un point quelconque m de la figure cherchée au point fixe S et à la droite fixe U est constant.

Par suite, une conique étant donnée, on voit qu'il faut placer le centre d'homologie S à l'un des foyers, pour que la figure homologique soit un cercle de centre S.

C'est cette propriété que M. Chasles prend pour définition des foyers dans son *Traité des Sections coniques.*

Voici encore une propriété caractéristique de ces mêmes points :

Plusieurs couples de droites conjuguées issues d'un même point forment un faisceau involutif dont les rayons doubles sont les tangentes menées à la conique par ce point (**1118**). Si ce point est un foyer, tous les couples de droites conjuguées sont rectangulaires, et par suite (**1097**) les rayons doubles du faisceau, c'est-à-dire les tangentes (imaginaires) menées du foyer à la conique passent par les points circulaires à l'infini.

Cela étant, considérons les deux foyers réels d'une conique et les deux tangentes issues de chacun d'eux; ces quatre droites déterminent un quadrilatère imaginaire circonscrit dont les deux points de concours des côtés opposés sont, d'après ce qui précède, les deux points circulaires à l'infini. La seconde diagonale de ce quadrilatère est le petit axe (ou l'axe non transverse) de la conique, puisque cet axe est la polaire du point où la première diagonale (grand axe ou axe transverse) rencontre la droite de l'infini qui contient les points de concours des sommets opposés. Les deux autres sommets opposés du quadrilatère sont les deux foyers imaginaires situés sur le petit axe (ou l'axe non transverse). On voit d'après cela que *les foyers d'une conique sont les sommets du quadrilatère imaginaire circonscrit, dont les côtés opposés concourent deux à deux aux points circulaires à l'infini*, et que toutes les coniques confocales doivent être considérées comme inscrites dans un même quadrilatère imaginaire.

1142. La théorie de l'homologie est due à M. Poncelet, et c'est dans le *Traité des Propriétés projectives* qu'il faut en lire les nombreuses applications. Nous nous bornerons à deux exemples :

1° Considérons une conique C et un cercle C' ayant un foyer F de la conique pour centre. Ces deux courbes sont homologiques, et F est le centre d'homologie. Si un angle de grandeur constante tourne autour de F comme sommet, la corde qu'il intercepte dans le cercle enveloppe un cercle concentrique au premier; donc, la corde interceptée dans la conique enveloppe une seconde conique C". D'ailleurs, deux cercles concentriques ont un double contact sur la droite de l'infini; donc, les coniques C et C" ont un double contact (imaginaire) sur la directrice correspondante au foyer F, attendu que cette directrice, étant la polaire du foyer, correspond à la droite de l'infini dans le cercle, laquelle est la polaire du centre. Ainsi, *lorsqu'un angle de grandeur constante tourne autour du foyer d'une conique comme sommet, la corde qu'il intercepte dans la conique enveloppe une nouvelle conique doublement tangente à la proposée sur la directrice relative au foyer considéré.*

2° Soient une conique C et un cercle C' tangent en S à cette conique. Ces deux courbes sont homologiques, et S est le centre d'homologie. Si un angle de grandeur constante tourne autour de S comme sommet, la corde interceptée dans le cercle enveloppe un cercle concentrique. Donc, la corde interceptée dans la conique enveloppe une seconde conique C" doublement tangente à la première, suivant la parallèle à l'axe d'homologie qui répond à l'infini du cercle. Ainsi, *lorsqu'un angle de grandeur constante tourne autour d'un point d'une conique comme sommet, la corde interceptée dans la conique enveloppe une autre conique qui a un double contact avec la première.*

En particulier, si l'angle est droit, la corde interceptée dans le cercle passe par le centre de ce cercle, c'est-à-dire par un point fixe situé sur la normale commune aux courbes C et C' au point S. Donc, *quand un angle droit pivote autour d'un point* S *d'une conique comme sommet, la corde interceptée dans la conique passe par un point fixe situé sur la normale en* S *à la conique*. Ce théorème, dû à Frégier, donne un moyen simple de construire avec l'équerre la normale en un point donné d'une conique.

Ajoutons, en terminant, que M. Poncelet est arrivé à la notion des figures homologiques en faisant sur un plan la perspective de deux figures homothétiques situées dans un autre plan (*Voir* les exercices 657 à 666).

Coniques homothétiques.

1143. Deux figures homothétiques (367) ne sont autre chose que deux figures homologiques (1137) dont l'axe d'homologie est à l'infini; car la relation

$$\frac{Sm}{Sm'} : \frac{\mu m}{\mu m'} = \lambda,$$

du n° 1137, se réduit à

$$\frac{Sm}{Sm'} = \lambda,$$

lorsque $\frac{\mu m}{\mu m'} = 1$, c'est-à-dire lorsque l'axe XX' s'éloigne indéfiniment. Il suit de là et des propriétés démontrées au n° 1140, que *la figure homothétique d'une conique est une conique, et que deux coniques homothétiques ont une corde commune à l'infini.* — Réciproquement, *lorsque la droite de l'infini est une corde commune à deux coniques* C *et* C', *ces courbes sont homothétiques.* En effet, si deux points de la droite de l'infini sont conjugués par rapport à l'une des coniques, ils sont conjugués par rapport à l'autre; par suite, deux diamètres conjugués quelconques de la courbe C sont parallèles à deux diamètres conjugués de l'autre. Cela posé, soient AB et A'B' deux diamètres parallèles des coniques C et C'; M étant un point quelconque de C, AM et BM sont parallèles à deux diamètres conjugués de C, et par suite les parallèles A'M' et B'M' à AM et à BM se coupent en un point M' de la conique C'. Or (373), les points M et M' ainsi déterminés décrivent deux figures homothétiques dont le rapport de similitude est $\frac{AB}{A'B'}$.

Deux coniques homothétiques et concentriques ont un double contact sur la droite de l'infini. En effet, soient ι et φ les points communs aux deux coniques et à la droite de l'infini. Les tangentes en ι et φ à la première conique doivent passer par le pôle de $\iota\varphi$, c'est-à-dire par le centre O de cette conique; de même, les tangentes en ι et φ à la deuxième conique doivent passer par O; donc les deux coniques ont les mêmes tangentes en ι et φ. Réciproquement, *deux coniques qui ont un double contact sur la droite de l'infini sont homothétiques et concentriques;* car, d'abord elles sont homothétiques puisque la droite de l'infini est une corde commune, et, d'autre part, le centre de chacune d'elles doit être le pôle de la droite de l'infini, qui est le même pour les deux coniques puisque c'est le point de concours des tangentes en ι et φ qui sont les mêmes.

1144. Deux figures semblables ne diffèrent en définitive que par l'échelle à laquelle elles sont construites, de sorte qu'un simple changement d'échelle les rendrait égales. Donc, pour trouver les conditions de similitude de deux courbes de même espèce, il suffira de distinguer, d'après la définition des courbes de cette espèce, les données distinctes et indépendantes relatives à la forme des données relatives à la position. Par exemple, si la connaissance d'une seule grandeur suffit pour déterminer la forme d'une courbe d'une certaine espèce, toutes les courbes de cette espèce seront semblables, car un simple changement d'échelle permettrait de les faire coïncider. Aussi tous les cercles sont semblables, *toutes les paraboles sont semblables*. Si la forme de la courbe dépend de plusieurs données distinctes et indépendantes, il faudra que les données angulaires homologues soient égales et les données linéaires homologues proportionnelles; car le changement d'échelle ne permettant de rendre égaux que deux éléments linéaires homologues, l'égalité des autres éléments linéaires homologues devra résulter de celle des deux premiers. C'est ainsi que la similitude de deux ellipses ou de deux hyperboles consiste dans la proportionnalité de leurs axes.

Quand deux paraboles ont leurs axes parallèles, elles sont homothétiques; elles touchent la droite de l'infini au même point: c'est le point situé sur leurs axes parallèles.

Méthode fondée sur la projection conique.

1145. Nous avons déjà défini (599) la *projection conique ou centrale;* et nous savons que *la projection d'une ligne droite est une ligne droite,* que *la projection de la tangente à une courbe est la tangente de la projection de cette courbe* (875), enfin que *toute conique peut être projetée suivant un cercle* (1109).

On peut toujours projeter une figure plane de telle sorte que l'un de ses points A *passe à l'infini.* Il suffit que le *plan de projection* soit parallèle à la *projetante* SA, c'est-à-dire à la droite qui joint le point A au sommet du cône que, dans tout ce qui suit, nous désignerons par S; alors toutes les droites qui, dans la première figure, concouraient au point A deviennent parallèles dans la figure projetée.

On peut toujours projeter une figure plane de telle sorte qu'une droite L *prise à volonté dans cette figure passe à l'infini.* Il suffit que le plan de projection soit parallèle au plan déterminé par la droite L et le sommet S du cône.

D'après cela, *un quadrilatère peut toujours être projeté suivant un parallélogramme dont les angles ont telle grandeur qu'on veut.* En effet, d'abord pour que la projection A'B'C'D' d'un quadrilatère donné ABCD (*fig.* 242) soit un parallélogramme, il suffit que la troisième diagonale EF passe à l'infini. De plus, comme le plan ABA'B' contient alors la parallèle SE au plan de projection, A'B' sera parallèle à SE (510); de même B'C' sera parallèle à SF, et, par suite, les angles ESF, A'B'C', seront égaux.

Mais l'angle ESF est arbitraire, puisque l'on peut prendre le sommet S du cône à volonté; donc on pourra donner à l'angle A'B'C' du parallélogramme telle grandeur qu'on voudra.

1146. On nomme *propriétés projectives* les propriétés qui se conservent en projection.

Toutes les propriétés descriptives sont évidemment projectives, mais il n'en est pas de même des relations métriques.

Soient A, B, C, D, ... les divers points d'une figure plane quelconque, A', B', C', D', ... les points correspondants de sa projection sur un autre plan. Désignons par a, b, c, d, ... les projetantes SA, SB, SC, SD, ... et par p, q, ... les distances du sommet S du cône aux droites AB, CD, ... En égalant deux expressions bien connues de l'aire du triangle SAB on a

$$AB.p = a.b.\sin ASB, \quad \text{d'où} \quad AB = \frac{ab}{p}\sin ASB,$$

et l'on aurait de même

$$CD = \frac{cd}{q}\sin CSD, \quad \dots.$$

Cela posé, considérons une équation, sans dénominateurs, dont les deux membres n'aient chacun qu'un seul terme; supposons que chaque terme soit, à un coefficient numérique près, le produit de facteurs exprimant de simples distances AB, CD, ... entre les divers points de la figure plane ABCD.... Cette relation sera projective *si les mêmes lettres se retrouvent dans les facteurs linéaires qui composent les deux membres*, et *si à chaque distance appartenant à l'un des membres il en correspond une autre dans le second qui soit sur la même droite que la première*. En effet, quand on substituera aux facteurs linéaires AB, CD, ... les valeurs ci-dessus, toutes les projetantes a, b, ... disparaîtront d'elles-mêmes en vertu de la première hypothèse, et il en sera de même des perpendiculaires p, q, ... en vertu de la seconde condition. Il ne restera donc qu'une égalité entre les sinus des angles ASB, CSD, ..., ce qui prouve que la propriété métrique considérée ne dépend que de ces angles et nullement de la position du plan de la figure ABCD.... La même relation existera donc entre les facteurs linéaires correspondants A'B', C'D', ... de la figure A'B'C'D'....

Cette proposition contient évidemment comme cas particulier celle du n° 327; car la relation

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \lambda, \quad \text{ou} \quad CA.DB = \lambda CB.DA$$

remplit les conditions prescrites dans l'alinéa précédent.

1147. A l'aide de ce petit nombre de principes, nous pouvons déjà faire comprendre en quoi consiste la *méthode par projection*.

« Il résulte de la nature même des propriétés projectives que, voulant » établir une semblable propriété sur une figure donnée, il suffira de dé» montrer qu'elle a lieu pour l'une quelconque de ses projections. Or, » parmi toutes les projections *possibles* de cette figure, il peut en exister » qui soient réduites à des circonstances plus simples et sur lesquelles la » recherche qu'on se propose devienne de la première facilité.... Une » figure étant donnée, tout se réduira, comme on voit, à rechercher celle » de ses projections qui présentera des circonstances plus élémentaires et » plus propres par leur simplicité à faire découvrir les relations particu» lières que l'on a en vue (*). »

Voici deux exemples simples :

1° Soient ABCD un quadrilatère, E et F les points de concours des côtés opposés, et G l'intersection des deux diagonales. Projetons-le suivant un parallélogramme *abcd* (1147) ; dans un parallélogramme, les diagonales se coupent mutuellement en parties égales, *g* projection de G sera le milieu de *ac*; en d'autres termes, la diagonale *ac* est divisée harmoniquement (341) par la diagonale *bd* et par la droite de l'infini *ef* projection de EF. Donc, puisque la propriété harmonique est projective, dans le quadrilatère primitif la diagonale AC est divisée harmoniquement par la diagonale BD et la droite EF. C'est le théorème du n° 349.

2° *Un triangle* ABC *étant tracé dans le plan d'une conique qui rencontre ses côtés consécutifs* AB, BC, CA, *en trois couples de points* (c, c'), (a, a'), (b, b'), *les segments que ces points forment sur les côtés ont entre eux la relation*

$$\frac{Ab.Ab'}{Cb.Cb'}\cdot\frac{Ca.Ca'}{Ba.Ba'}\cdot\frac{Bc.Bc'}{Ac.Ac'}=1.$$

En effet, cette relation est projective, car lorsqu'on a chassé le dénominateur on voit qu'elle satisfait aux conditions prescrites dans le n° 1146. D'ailleurs elle est évidente sur le cercle, à cause de la propriété des sécantes (245) ; donc elle convient à une section conique quelconque, puisqu'une telle courbe peut toujours être projetée suivant un cercle.

Ce théorème, dû à Carnot (*Géométrie de position*, p. 437), est la généralisation de celui de Ménélaüs (408). Il a de nombreuses conséquences. Par exemple, si le sommet B du triangle ABC est à l'infini, la relation précédente devient

$$\frac{Ab.Ab'}{Ac.Ac'}=\frac{Cb.Cb'}{Ca.Ca'}.$$

Or, si par un point quelconque D de la droite Caa' on mène une pa-

(*) PONCELET, *Traité des Propriétés projectives des figures*, p. 50.

rallèle à AC qui rencontre la conique en e et e', on aura de même

$$\frac{De.De'}{Da.Da'} = \frac{Cb.Cb'}{Ca.Ca'},$$

d'où, en rapprochant les deux équations précédentes,

$$\frac{Ab.Ab'}{Ac.Ac'} = \frac{De.De'}{Da.Da'}.$$

Donc : *Si dans le plan d'une conique on mène par un point quelconque* A *deux droites parallèles à deux axes fixes, le rapport des produits des segments (réels ou imaginaires) que la courbe détermine sur ces droites à partir de leur point commun* A, *est constant*. Ce théorème est dû à Newton (*Énumération des courbes du troisième ordre*).

1148. Pour montrer toute la fécondité de cette méthode relativement à la recherche des propriétés des sections coniques, il faut établir quelques nouveaux principes.

1° *On peut projeter une conique* C *de telle sorte qu'une droite* L *de son plan passe à l'infini, et qu'un point* f *de ce même plan se projette au foyer de la nouvelle conique* C'. — Le point F doit, d'après cela, être à l'intérieur de la conique C. Par suite l'involution déterminée sur la droite L par tous les couples de droites conjuguées issues du point F a ses points doubles imaginaires (1105), de sorte qu'il existe de part et d'autre de L deux points P et P' de chacun desquels on voit sous un angle droit les divers segments de l'involution. Plaçons le sommet S du cône sur la circonférence décrite, dans un plan perpendiculaire à celui de la conique C, sur PP' comme diamètre, et prenons pour plan de projection un plan parallèle à celui du sommet S et de la droite L. De cette façon la droite L passera à l'infini dans la projection, et chaque couple de droites conjuguées issues du point f deviendra en projection un couple de droites rectangulaires et conjuguées par rapport à la conique C'. La projection du point f sera donc un foyer de cette nouvelle courbe C'. Ajoutons que cette conique C' sera une hyperbole, une ellipse ou une parabole, suivant que la droite L coupera la conique primitive C en deux points réels, imaginaires ou coïncidents.

Le pôle o de la droite L, par rapport à la conique C, deviendra en projection le centre de la conique C' (1119). Donc, *on peut projeter une conique* C *de manière que deux points* f *et* o *de son plan deviennent, en projection, l'un le foyer, l'autre le centre de la nouvelle conique* C'.

En particulier, si f coïncide avec le pôle o de la droite L par rapport à la conique C, le même point sera en projection le centre et le foyer de la nouvelle conique C', qui dès lors sera un cercle. Donc *on peut projeter une conique suivant un cercle de telle sorte qu'un point de son plan se projette au centre du cercle ou qu'une droite de son plan passe à l'infini.*

2° *On peut projeter deux coniques situées dans un même plan suivant deux cercles.* — Il faut évidemment que les deux coniques proposées aient au plus deux points communs réels; dès lors il y a une corde commune réelle qui rencontre les deux coniques en deux points imaginaires (1134, 2°). En projetant de telle sorte que l'une des coniques devienne un cercle et que cette corde commune passe à l'infini, l'autre conique donnera aussi un cercle, car les deux courbes ayant en projection une corde commune à l'infini seront homothétiques (1143), et la figure homothétique d'un cercle est un cercle.

Si les deux coniques proposées ont un double contact imaginaire on peut les projeter suivant deux cercles concentriques. Car, en projetant l'une des coniques suivant un cercle de telle sorte que la corde de contact passe à l'infini, l'autre conique donnera un cercle de même centre, puisque les deux courbes en projection ayant un double contact sur la droite de l'infini devront être homothétiques et concentriques.

Les deux droites qui joignent le foyer d'une conique aux points circulaires à l'infini sont tangentes à la conique (1141), et la corde de contact est la polaire du foyer, c'est-à-dire la directrice. Donc, *deux coniques qui ont même foyer et même directrice peuvent être projetées suivant deux cercles concentriques*, attendu qu'elles ont un double contact imaginaire sur la directrice commune.

3° *On peut projeter une conique* C *de telle sorte que deux points (intérieurs) de son plan, f et f', deviennent en projection les deux foyers de la nouvelle conique* C'. — En effet, en désignant par a et a' les points où la droite ff' coupe la conique C, et par k et k' les points qui divisent à la fois harmoniquement les segments aa' et ff', il suffit de projeter de telle sorte que f et k deviennent l'un le foyer, l'autre le centre de la nouvelle conique C'. Alors la projection de f' sera évidemment l'autre foyer.

On peut projeter deux coniques situées dans un même plan suivant deux coniques confocales. — Ces deux coniques doivent avoir un seul couple d'ombilics réels, et ces deux ombilics doivent être intérieurs à l'une et à l'autre courbe. Cela étant, il suffit de projeter de manière que ces deux ombilics deviennent en projection les deux foyers de l'une des courbes; ils seront par cela même les deux foyers de l'autre (1128).

Voici des applications :

Dans tout quadrilatère inscrit à une conique, l'intersection des deux diagonales est le pôle de la droite qui joint les points de concours des côtés opposés; les diagonales de ce quadrilatère et celles du quadrilatère dont les côtés sont les tangentes à la conique menées par les sommets du quadrilatère inscrit, se coupent au même point et forment un faisceau harmonique. Car, en projetant la conique suivant un cercle de telle sorte que la droite qui joint les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit passe à l'infini, le théorème devient évident.

Quand deux coniques ont un double contact, toute corde de l'une qui est tangente à l'autre est divisée harmoniquement par le point de contact et par le point où elle rencontre la corde de contact des deux coniques. Car, en projetant les deux coniques suivant deux cercles concentriques, on transforme cette proposition dans la suivante qui est évidente : *Toute corde d'un cercle tangente à un cercle concentrique a son milieu au point de contact.*

Si deux côtés d'un triangle inscrit à une conique passent chacun par un point fixe, le troisième côté enveloppe une conique qui a un double contact avec la première sur la droite qui joint les deux points fixes. Car, en projetant la conique suivant un cercle de telle sorte que les deux points fixes passent à l'infini, on retombe sur ce théorème : *Si deux côtés d'un triangle inscrit dans un cercle sont parallèles à deux droites données, le troisième côté enveloppe un cercle concentrique*, ce qui est évident puisque l'angle au sommet du triangle est constant.

On voit immédiatement que *le lieu des centres des cercles qui passent par un point fixe et qui touchent une droite fixe est une parabole dont le point fixe est le foyer.* En transformant par projection ce théorème, et remarquant que le point fixe ou foyer et les deux points circulaires à l'infini forment un triangle circonscrit à la parabole, on obtient la proposition suivante : *Étant donnés un triangle et une droite, si l'on conçoit toutes les coniques circonscrites à ce triangle et tangentes à cette droite, le lieu des points de concours des tangentes à deux des sommets du triangle est une conique inscrite dans ce triangle.*

Nous avons démontré (1130) que *le cercle circonscrit à tout triangle formé par trois tangentes à la parabole passe par le foyer;* en remarquant que le foyer et les deux points circulaires à l'infini forment un second triangle circonscrit à la parabole, et transformant par projection, on arrive à ce théorème : *Si deux triangles sont circonscrits à une conique, leurs six sommets sont situés sur une même conique.*

Il importe de remarquer que les démonstrations fournies par cette méthode laissent souvent quelque chose à désirer. Par exemple, le théorème sur le triangle inscrit dans une conique, qui fait l'objet de la troisième application, n'est rigoureusement démontré que pour le cas où les deux points fixes autour desquels pivotent les deux premiers côtés sont extérieurs à la conique; car, pour projeter une conique suivant un cercle de manière qu'une droite de son plan passe à l'infini, il faut que cette droite soit extérieure à la conique (1°).

1149. Parlons enfin de la transformation des propriétés angulaires.

On sait (1096) que *si l'on a dans un même plan des angles* (A, A'), (B, B'),... *tous de même grandeur et formés dans le même sens de rotation à partir de leurs origines respectives* A, B,..., *mais placés d'ailleurs d'une manière quelconque, leurs côtés tracent sur la droite de l'in-*

fini deux divisions homographiques dont les points doubles, toujours les mêmes, quelle que soit la grandeur commune de ces angles, sont les points circulaires imaginaires à l'infini.

En projection, les angles cessent d'être égaux, mais leurs côtés tracent deux divisions homographiques sur la droite qui répond à l'infini de la première figure; et, si dans la première figure se trouve un cercle, la conique correspondante de la deuxième figure détermine par son intersection avec cette droite les points doubles des deux divisions.

Ce principe permet de transformer un assez grand nombre de propriétés angulaires.

On voit, en particulier, qu'*à un angle droit de la figure primitive répond en projection un angle dont les côtés divisent harmoniquement l'angle formé par les droites qui joignent la projection du sommet aux projections des deux points circulaires à l'infini.*

Voici quelques applications :

Deux coniques confocales se coupent orthogonalement (1128).	*Si deux coniques sont inscrites dans le même quadrilatère, les deux tangentes à l'un des points communs divisent harmoniquement une diagonale quelconque de ce quadrilatère.*
Le lieu des angles droits circonscrits à une ellipse ou à une hyperbole est un cercle (980, 1010).	*Le lieu des angles circonscrits à une conique, dont les côtés divisent harmoniquement une ligne droite donnée ab, est une conique passant par les points a et b.*
Le lieu des angles droits circonscrits à une parabole est la directrice (1040).	*Le lieu des angles circonscrits à une conique, dont les côtés divisent harmoniquement une tangente ab à cette conique, est la droite qui joint les points de contact des tangentes issues de a et de b.*
Si autour du centre d'un cercle comme sommet, on fait tourner un angle de grandeur constante, la corde qu'il intercepte dans le cercle enveloppe un cercle concentrique.	*Si autour d'un point fixe on fait tourner deux rayons formant deux faisceaux homographiques dont les rayons doubles soient les tangentes à une conique, la corde interceptée dans la conique enveloppe une autre conique qui a avec la première un double contact sur la polaire du point fixe.*
Quand un angle droit pivote autour d'un point d'une conique comme	*Si un faisceau harmonique a pour centre un point d'une conique, et*

sommet, la corde interceptée passe par un point fixe (1142, 2°).

que deux rayons conjugués restent fixes, la corde qui joint les extrémités des deux autres rayons passe par un point fixe.

Ces exemples suffisent pour montrer la fécondité de cette méthode, dont M. Poncelet a tiré un si grand parti dans son *Traité des Propriétés projectives des figures*, et que nous recommandons bien plus comme moyen de recherche que comme procédé de démonstration.

QUESTIONS PROPOSÉES (*).

§§ I, II. *Propriétés fondamentales de l'ellipse et de l'hyperbole.*

927. Quelle est la plus courte et la plus grande distance du centre de l'ellipse à un point de la courbe?

928. Quel est le lieu du centre d'une ellipse qui glisse entre deux axes rectangulaires?

929. Deux ellipses dont les grands axes sont égaux et qui ont un foyer commun, ne peuvent se couper qu'en deux points.

930. Quel est le lieu des points également distants de deux circonférences intérieures ou extérieures l'une à l'autre?

931. Quel est le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés? — On examinera les différents cas possibles.

932. Sur les deux tangentes PM, PM', à une ellipse ou à une hyperbole dont les foyers sont F et F', on prend des longueurs PQ, PQ', respectivement égales à PF et à PF'; démontrer que la droite QQ' est égale au grand axe de l'ellipse ou à l'axe transverse de l'hyperbole.

933. Le grand axe de l'ellipse ou l'axe transverse de l'hyperbole et une tangente quelconque interceptent, sur les deux tangentes menées aux extrémités de l'axe de la courbe, des longueurs dont le produit est constant.

934. Des cercles touchent une droite AB en un point fixe C, et des points fixes A et B on mène des tangentes à ces cercles; trouver le lieu

(*) Dans ce qui suit, la lettre C désigne toujours le centre de la conique dont les axes sont AA' et BB' et qui a les points F et F' pour foyers.

des points d'intersection de ces tangentes. — Le point C peut être entre A et B ou sur AB prolongée.

935. Soient les deux tangentes menées à l'ellipse ou à l'hyperbole par un point extérieur et une troisième tangente quelconque; démontrer que la longueur interceptée sur cette troisième tangente par les deux premières est vue de chaque foyer sous un angle constant.

936. Démontrer directement que si l'on mène à une hyperbole deux tangentes PM, PM', par un même point extérieur P, les angles PFM, PFM', sont égaux ou supplémentaires, suivant que les points de contact M M' appartiennent ou non à la même moitié de la courbe.

937. Trouver le lieu des centres des ellipses dont le grand axe a la même longueur, qui ont un foyer commun et qui touchent une droite donnée.

938. Quel est le lieu des points d'où les tangentes menées à deux ellipses ou à deux hyperboles, ou bien encore à une ellipse et à une hyperbole, qui ont les mêmes foyers, sont à angle droit l'une sur l'autre?

939. Quels sont les lieux géométriques : 1° des sommets; 2° des points de rencontre des côtés non parallèles; 3° des points d'intersection des diagonales, des trapèzes construits sur une base fixe, et dans lesquels la longueur de l'autre base est donnée ainsi que la somme ou la différence des côtés non parallèles?

940. Construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant : 1° ses foyers et un point; 2° ses foyers et une tangente; 3° un foyer, deux points et une tangente; 4° un foyer, un sommet et une tangente; 5° un foyer, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles; 6° un foyer et trois tangentes; 7° le centre, deux tangentes et la longueur du grand axe ou de l'axe transverse.

941. On donne les positions d'un foyer et d'un point d'une ellipse, ainsi que les longueurs de ses axes; déterminer son centre.

942. Le cercle qui a pour diamètre la portion d'une tangente quelconque à l'hyperbole interceptée par les tangentes menées aux extrémités de l'axe transverse, passe par les foyers de la courbe.

§ III. *Propriétés fondamentales de la parabole.*

943. La perpendiculaire abaissée du foyer de la parabole sur une tangente à la courbe, est moyenne proportionnelle entre le rayon vecteur du point de contact et la moitié du paramètre p.

944. Si PM et PM' sont les deux tangentes menées à la parabole par un point extérieur P, les triangles FPM, FPM', sont semblables, et FP est

la moyenne proportionnelle des rayons vecteurs FM, FM', des deux points de contact.

945. Si PM et PM' sont les deux tangentes menées à la parabole par un point extérieur P, démontrer que la parallèle menée à l'axe par le point P passe par le milieu de la corde MM', et que la tangente au point où cette parallèle rencontre la courbe est elle-même parallèle à la corde MM'.

946. Si l'on rapporte la parabole à une tangente et au diamètre mené par son point de contact pris comme axes coordonnés, le carré de l'ordonnée d'un point de la courbe est égal à quatre fois le produit du rayon vecteur de l'extrémité du diamètre par l'abscisse du point considéré.

947. Si deux cordes de la parabole se coupent, les produits de leurs segments sont dans le rapport des rayons vecteurs des extrémités des diamètres qui leur sont conjugués.

948. MN étant une tangente commune à la parabole et au cercle décrit sur la corde menée perpendiculairement à l'axe par le foyer comme diamètre, démontrer que les droites FM et FN sont également inclinées sur cette corde.

949. La tangente en un point de la parabole rencontre la directrice et la corde menée par le foyer perpendiculairement à l'axe, en des points équidistants du foyer.

950. Si l'ordonnée d'un point M de la parabole passe par le milieu de la sous-normale qui correspond à un point M', l'ordonnée du point M est égale à la normale qui correspond au point M'.

951. Si d'un point pris sur une tangente à la parabole on mène une autre tangente à la courbe, l'angle compris entre cette tangente et la droite menée du même point au foyer est constant.

952. Construire une parabole qui touche un cercle donné en un point donné, et dont l'axe soit tangent au même cercle en un autre point donné.

953. Si par le point de contact d'une tangente à la parabole on tire une corde, puis qu'on trace une autre droite parallèle à l'axe, la portion de cette droite comprise entre la tangente et la corde sera divisée par son point de rencontre avec la courbe dans le même rapport que cette droite elle-même divise la corde.

954. Si le diamètre de la parabole mené par le point M rencontre la directrice en K et la corde menée par le foyer parallèlement à la tangente MT en H, on a

$$MK = MH.$$

955. Quel est le lieu du point d'intersection du diamètre mené en un point de la parabole avec la corde tracée par le foyer parallèlement à la tangente au même point?

956. AB et AC étant deux droites rectangulaires, on mène la droite quelconque AR et la parallèle fixe CR à AB; puis on prend sur AR un point M tel, que son ordonnée MQ par rapport à AB soit égale à CR; quel est le lieu du point M?

957. On considère dans un cercle un diamètre fixe AOB et un rayon quelconque OC; D étant le milieu de la corde CE menée parallèlement au diamètre fixe, on demande le lieu du point d'intersection des droites OC et AD.

958. Si deux tangentes égales à la parabole sont coupées par une troisième, les segments déterminés sur ces tangentes sont égaux; mais les segments égaux ne sont pas placés de même sur les deux tangentes.

959. Le cercle déterminé par les points d'intersection de trois tangentes à la parabole, passe par le foyer.

960. MFN étant une corde quelconque menée par le foyer de la parabole, si l'on trace du sommet S les droites SM et SN, elles rencontreront la corde focale perpendiculaire à l'axe en deux points P et Q tels, que leurs distances au foyer soient égales aux ordonnées des points N et M.

961. Si d'un point O pris sur l'axe de la parabole on mène une corde, la distance SO du sommet S au point O est la moyenne proportionnelle des abscisses des extrémités de la corde.

962. Du sommet S on mène deux droites rectangulaires qui viennent rencontrer la parabole aux points M et M'; le paramètre $2p$ est la moyenne proportionnelle des abscisses des points M et M'.

963. Quel est le lieu du centre du cercle inscrit dans le secteur circulaire AOB, dont l'un des rayons OA est fixe et dont l'autre OB est mobile?

964. Sur une corde de la parabole comme diamètre on décrit un cercle qui coupe la parabole en deux autres points; si l'on joint ces points, les deux cordes considérées interceptent sur l'axe de la courbe une longueur égale au paramètre $2p$.

965. Deux paraboles égales qui ont même foyer et leurs axes dirigés en sens contraires, se coupent à angle droit.

966. Si un triangle est inscrit dans une parabole, les points où ses côtés prolongés viennent rencontrer les tangentes menées à la courbe par les sommets opposés, sont en ligne droite.

967. Si les tangentes PM, PM', à la parabole sont coupées en Q et en Q' par une troisième tangente, on a

$$\frac{PQ}{QM} = \frac{Q'M'}{PQ'}.$$

968. Si l'on tire par le sommet de la parabole des cordes à angle droit l'une sur l'autre et qu'on construise sur ces cordes un rectangle, quel est le lieu de son quatrième sommet?

969. Si une parabole roule sur une autre parabole égale, les sommets étant d'abord confondus, le foyer de chaque courbe trace la directrice de l'autre.

970. Quel est le lieu des points également distants d'une droite et d'une circonférence données?

971. Quel est le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à un point fixe et à une droite fixe est constante?

972. Des extrémités d'une corde focale de la parabole on abaisse des perpendiculaires sur une droite quelconque de son plan; la somme des rapports de chaque ordonnée au rayon vecteur correspondant est constante.

973. Les carrés des perpendiculaires abaissées du foyer de la parabole sur deux tangentes, sont proportionnels aux rayons vecteurs des points de contact.

974. Construire une parabole, connaissant : 1° le foyer ou la directrice et deux points; 2° le foyer ou la directrice, un point et une tangente; 3° le foyer ou la directrice, une tangente et son point de contact; 4° le foyer ou la directrice et deux tangentes; 5° trois tangentes, parmi lesquelles la tangente au sommet; 6° quatre tangentes.

§ IV, V. — *Ellipse, considérée comme projection orthogonale du cercle. — Sections planes du cône de révolution.*

975. La distance du centre de l'ellipse ou de l'hyperbole à la directrice est représentée par $\frac{a^2}{c}$.

976. La demi-corde focale de l'ellipse ou de l'hyperbole, perpendiculaire au grand axe ou à l'axe transverse de la courbe, est égale à $\frac{b^2}{a}$.

977. Étant donnée une tangente à l'ellipse ou à l'hyperbole, la droite qui joint au foyer correspondant son point de rencontre avec une directrice, est perpendiculaire sur le rayon vecteur du point de contact. — Les

tangentes aux extrémités d'une corde focale se coupent sur la directrice correspondante.

978. Si la tangente en M à l'ellipse ou à l'hyperbole de centre C rencontre en T le grand axe ou l'axe transverse de la courbe, MP étant l'ordonnée du point M par rapport à cet axe, on a

$$CT.CP = a^2.$$

979. Dans l'ellipse ou l'hyperbole, la distance d'un foyer au pied d'une normale sur le grand axe ou sur l'axe transverse de la courbe est au rayon vecteur correspondant du point de contact, dans un rapport égal à l'excentricité de la courbe.

980. On mène l'ordonnée d'un point de l'ellipse ou de l'hyperbole et la normale au même point; le rapport des distances du pied de l'ordonnée au pied de la normale sur le grand axe ou sur l'axe transverse et au centre, est égal à $\frac{b^2}{a^2}$.

981. MP étant l'ordonnée d'un point de l'ellipse ou de l'hyperbole dont le grand axe ou l'axe transverse est AA', on a

$$\frac{\overline{MP}^2}{AP.A'P} = \frac{b^2}{a^2}.$$

982. Si une tangente en M à l'ellipse ou à l'hyperbole rencontre le petit axe ou l'axe non transverse en U, et si Q est la projection de M sur le même axe, C étant le centre de la courbe, on a

$$CU.CQ = b^2.$$

983. Si deux tangentes PM, PM', à l'ellipse partent d'un même point P, le centre de la courbe étant C, et la droite CP coupant la courbe en R et la corde de contact MM' en H, on a

$$\overline{CR}^2 = CH.CP.$$

984. La somme ou la différence des carrés de deux diamètres conjugués de l'ellipse ou de l'hyperbole est égale à la somme ou à la différence des carrés des axes.

985. L'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués de l'ellipse ou de l'hyperbole est constante et égale à celle du rectangle construit sur les axes.

986. Si l'on rapporte une ellipse ou une hyperbole à deux diamètres conjugués DD' et EE', de longueurs $2a'$ et $2b'$, pris comme axes coor-

donnés, MP étant l'ordonnée d'un point M de la courbe, on a

$$\frac{\overline{MP}^2}{DP.D'P} = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

987. Si CD et CE sont deux diamètres conjugués de l'ellipse ou de l'hyperbole, et que la perpendiculaire EK à CD rencontre le grand axe ou l'axe transverse de la courbe en G, on a

$$EK.EG = b^2.$$

988. Si CD et CE sont deux diamètres conjugués de l'ellipse ou de l'hyperbole, on a

$$FE.F'E = \overline{CD}^2.$$

989. Si deux cordes se coupent dans l'ellipse ou l'hyperbole, les produits de leurs segments sont proportionnels aux carrés des diamètres parallèles à ces cordes.

990. La distance du centre de l'hyperbole au point où une asymptote coupe une directrice est égale au demi-axe transverse. — La perpendiculaire abaissée d'un foyer sur une asymptote est égale au demi-axe non transverse. — Si une asymptote rencontre la tangente au sommet A en H et la directrice correspondante en I, AI est parallèle à FH.

991. Soit un point K de l'asymptote d'une hyperbole, dont l'ordonnée et l'abscisse par rapport aux axes de la courbe sont KP et KR; si KP coupe l'hyperbole en M et si KR coupe l'hyperbole conjuguée en N, on a

$$KP^2 - MP^2 = b^2 \quad \text{et} \quad KR^2 - NR^2 = a^2.$$

De plus, la droite MN est parallèle à la seconde asymptote de l'hyperbole.

992. L'hyperbole et ses asymptotes interceptent des segments égaux sur une sécante quelconque.

993. Si par le point M d'une hyperbole on tire une sécante quelconque qui coupe les deux asymptotes en P et P', la tangente parallèle à cette sécante et limitée aux deux asymptotes étant LQL', on a

$$MP.MP' = \overline{QL}^2.$$

994. Deux hyperboles conjuguées interceptent sur une sécante quelconque des longueurs égales.

995. Si l'on rapporte l'hyperbole à ses asymptotes comme axes coordonnés, le produit des coordonnées d'un point de la courbe est constant et égal à $\frac{c^2}{4}$.

996. Si une tangente LQL' coupe les asymptotes en L et en L', l'aire du triangle CLL' est égale à ab.

997. Si M et N sont les points de rencontre de deux hyperboles conjuguées avec l'ordonnée et l'abscisse d'un point d'une de leurs asymptotes, les tangentes menées aux deux courbes en M et en N sont respectivement parallèles à CN et à CM.

998. Soit un point M de l'hyperbole; si MP est l'ordonnée de ce point par rapport au diamètre CD (c'est-à-dire la parallèle menée par M à la tangente en D) et si la tangente en M coupe CD en T, on a

$$CP.CT = \overline{CD}^2.$$

999. Si MT est une tangente à l'ellipse au point M, rencontrant le grand axe AA' au point T, et si la perpendiculaire élevée en T au grand axe rencontre en Q et en Q' les droites MA et MA', on a

$$QT = Q'T.$$

1000. Soit MFM' une corde focale de l'ellipse dont le grand axe est AA'; si l'on prolonge MA et $M'A$ jusqu'à leurs points de rencontre Q et Q' avec la directrice qui correspond au foyer F, l'angle QFQ' est droit.

1001. Dans l'ellipse, la somme des carrés des deux normales menées aux extrémités de deux demi-diamètres conjugués, est constante (on prend pour longueur d'une normale la distance du point de contact au pied de la normale sur le grand axe).

1002. Soient dans l'ellipse deux demi-diamètres conjugués CD et CE; sur la normale en D, on prend DP égale à CE; quel est le lieu du point P?

1003. M et M' sont deux points de l'ellipse dont le grand axe est AA'; AM' et $A'M'$ coupant l'ordonnée MP du point M en deux points Q et Q', on a

$$\overline{MP}^2 = PQ.PQ'.$$

1004. Soient dans l'ellipse la normale MG et la perpendiculaire GL abaissée du point G sur le rayon vecteur FM; le rapport de GL à l'ordonnée MP du point M est égal à l'excentricité de la courbe.

1005. Si l'ordonnée MP d'un point M de l'ellipse rencontre en Q la tangente menée à l'extrémité de la corde focale principale, on a

$$QP = FM.$$

1006. M étant un point fixe d'une ellipse et QQ' une corde quelconque conjuguée au diamètre CM, le cercle QMQ' rencontre l'ellipse proposée en un point fixe.

1007. M étant un point de l'ellipse, on tire la corde MM' parallèle au grand axe, et, par le point M', on mène les cordes M'Q, M'Q', faisant des angles égaux avec le grand axe; démontrer que la droite QQ' est parallèle à la tangente en M.

1008. Quel est le parallélogramme d'aire minimum circonscrit à l'ellipse?

1009. Quand la somme de deux diamètres conjugués de l'ellipse est-elle minimum?

1010. Si du point M de l'ellipse on tire des droites aux extrémités d'un diamètre DD', lesquelles coupent son conjugué EE' aux points P et P', on a

$$CP.CP' = \overline{CD}^2.$$

1011. Si CD et CE sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse, on a

$$(FD - a)^2 + (FE - a)^2 = c^2.$$

1012. Soient CD et CE deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse dont les axes sont AA' et BB'; traçons les droites BD et BE, ainsi que les droites A'D et AE qui se coupent en O : démontrer que le quadrilatère BDOE est un parallélogramme, et chercher dans quel cas son aire est maximum.

1013. Si MFM', NCN', sont deux cordes parallèles menées par le foyer et par le centre d'une ellipse, démontrer qu'on a

$$\frac{FM.FM'}{CN.CN'} = \frac{b^2}{a^2}.$$

1014. Si la tangente au sommet A de l'ellipse est coupée par deux diamètres conjugués en T et en U, on a

$$AT.AU = b^2.$$

1015. Si les tangentes en trois points P, Q, R, de l'ellipse se coupent deux à deux aux points R', Q' et P', on a

$$PR'.QP'.RQ' = PQ'.QR'.RP'.$$

1016. Si des extrémités des axes d'une ellipse on tire dans une direction quelconque quatre droites parallèles, les points où elles rencontrent la courbe sont les extrémités de deux diamètres conjugués.

1017. Si MFM' est une corde focale de l'ellipse et X le pied de la directrice correspondante, les droites XM et XM' sont également inclinées sur les axes de la courbe.

1018. PM et PM′ étant deux tangentes menées à l'ellipse par un même point P, et la corde MM′ coupant les directrices en R et R′, on a

$$\frac{RM.R'M}{RM'.R'M'} = \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PM'}^2}.$$

1019. CD et CE étant deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse, et CE rencontrant les rayons vecteurs FD et F′D en H et en H′, on a

$$FH = F'H'.$$

1020. Quel est le lieu des milieux des cordes focales d'une ellipse?

1021. M étant un point quelconque de l'ellipse ou de l'hyperbole, quels sont les lieux décrits par les centres des cercles inscrits et ex-inscrits au triangle FMF′?

1022. Si du foyer F de l'ellipse on abaisse des perpendiculaires sur les diamètres conjugués DD′ et EE′, ces perpendiculaires prolongées couperont EE′ et DD′ sur la directrice correspondant au foyer F.

1023. M étant un point de l'ellipse de grand axe AA′, quel est le lieu des points d'intersection des perpendiculaires élevées en A et en A′ aux droites AM et A′M?

1024. Si MP et CP sont l'ordonnée et l'abscisse du point M d'un cercle de centre C rapporté à deux diamètres rectangulaires comme axes coordonnés, et si la droite PQ prise égale à MP est inclinée sur elle d'un angle constant, quel est le lieu du point Q?

1025. Soient un triangle PQR et une ellipse enveloppante ayant son centre C au point de rencontre des médianes du triangle; CP, CQ, CR, prolongées, rencontrent l'ellipse aux points P′, Q′, R′ : démontrer que les tangentes en ces points forment un triangle semblable au triangle PQR et d'une aire quatre fois plus grande.

1026. Si deux cordes menées par les extrémités d'un diamètre de l'ellipse aboutissent à un même point de la courbe, les diamètres parallèles à ces cordes sont conjugués.

1027. Quel est le lieu des points d'intersection des perpendiculaires abaissées des foyers d'une ellipse sur deux diamètres conjugués?

1028. Construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant : 1° ses directrices et un point; 2° ses directrices et une tangente; 3° une directrice, deux points et une tangente; 4° une directrice, un sommet et une tangente; 5 une directrice, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles; 6° une directrice et trois tangentes; 7° un foyer, la directrice correspondante et une tangente; 8° un foyer ou une directrice et trois points.

1029. Soient MP l'ordonnée d'un point M de l'hyperbole dont le centre est C et PQ une tangente au cercle principal; tirons jusqu'à l'axe transverse MN parallèle à CQ, on aura

$$PN = b.$$

1030. Soient MP l'ordonnée d'un point M de l'ellipse ou de l'hyperbole, et menons PQ parallèle à AM jusqu'à la rencontre de CM; démontrer que AQ est parallèle à la tangente en M.

1031. Si l'on mène deux tangentes quelconques à l'hyperbole, les droites déterminées par leurs points d'intersection avec les asymptotes sont parallèles.

1032. Dans l'hyperbole équilatère, les diamètres conjugués sont égaux entre eux, et la portion de normale comprise entre le point de contact et l'axe transverse est égale à la distance du centre au point de contact.

1033. Si l'on tire une droite par un sommet de l'hyperbole, son second point de rencontre avec la courbe divise en deux parties égales la portion de cette droite interceptée par les parallèles menées de l'autre sommet de l'hyperbole à ses asymptotes.

1034. Les asymptotes de l'hyperbole divisent en parties égales les droites qui unissent les extrémités de deux diamètres conjugués.

1035. CD et CE étant deux demi-diamètres conjugués de l'hyperbole, on a

$$F'E - ED = a - b.$$

1036. Dans l'hyperbole équilatère, les cordes focales parallèles à deux diamètres conjugués sont égales.

1037. Le rayon du cercle qui touche une hyperbole et ses asymptotes est égal à la portion de la corde focale principale prolongée comprise entre la courbe et ses asymptotes.

1038. MM' étant une corde de l'hyperbole et CP le demi-diamètre correspondant, si l'on tire par les points M, P, M', des parallèles MH, PK, M'H', à l'une des asymptotes jusqu'à la rencontre de l'autre en H, K, H', on aura

$$CH.CH' = \overline{CK}^2.$$

1039. Soient un cercle de diamètre AA' et une corde PQ perpendiculaire à AA'; trouver le lieu des points d'intersection des droites AP et A'Q.

1040. Si deux hyperboles équilatères égales sont décrites de manière que les axes de l'une soient les asymptotes de l'autre, elles se coupent à angle droit.

1041. Quel est le lieu des points qui sont au tiers des arcs de tous les segments de cercle qu'on peut décrire sur une droite donnée?

1042. Si deux tangentes partant d'un même point P coupent l'une des asymptotes de l'hyperbole en R et en S, l'autre asymptote en r et en s, on a

$$PR.PS = Pr.Ps.$$

1043. MM' étant la double ordonnée d'une ellipse de grand axe AA', quel est le lieu des points de rencontre des droites AM et A'M'?

1044. Si la tangente au point M d'une hyperbole équilatère coupe ses asymptotes en L et en L', et si MG est la normale en M, l'angle LGL' est droit.

1045. Soit la corde MM' d'une hyperbole rencontrant ses asymptotes en R et en R', et la tangente RN à la courbe; si les parallèles MH, NK, M'H', à l'une des asymptotes rencontrent l'autre asymptote aux points H, K, H', on a

$$MH + M'H' = 2NK.$$

1046. Si par les points M et M' d'une hyperbole on mène des droites parallèles aux asymptotes, on forme un parallélogramme dont MM' est une diagonale; démontrer que l'autre diagonale passe par le centre de la courbe.

1047. Quel est le lieu décrit par le milieu d'une droite qui se meut en formant avec deux axes rectangulaires un triangle d'aire constante?

1048. Si par le point M d'une hyperbole on mène des parallèles MD et ME à chaque asymptote, jusqu'à la rencontre de l'autre, et si l'on construit une ellipse ayant CD et CE pour demi-diamètres conjugués, CM coupant l'ellipse en N, les tangentes aux deux courbes en M et en N sont parallèles.

1049. On fait passer un cercle par un point quelconque M d'une hyperbole et les extrémités A et A' de son axe transverse; trouver le lieu du point Q où l'ordonnée MP prolongée rencontre ce cercle.

1050. On donne une série d'ellipses tangentes à une hyperbole équilatère et ayant leurs axes dirigés suivant ses asymptotes; démontrer que le produit des axes de ces ellipses est constant.

1051. Sur deux diamètres conjugués d'une ellipse comme asymptotes on construit deux hyperboles conjuguées l'une à l'autre; démontrer que si l'une de ces hyperboles touche l'ellipse, il en est de même de l'autre, et que les diamètres tirés aux points de contact sont conjugués aussi bien dans l'ellipse que dans l'hyperbole.

1052. Trouver l'angle des asymptotes de l'hyperbole obtenue en coupant un cône de révolution par un plan. — Cas où le plan sécant est parallèle à l'axe du cône.

1053. Deux cônes de révolution qui ont même sommet, même génératrice et leurs axes rectangulaires, sont coupés par deux plans menés parallèlement à leurs axes d'un même point de la génératrice commune suivant des hyperboles conjuguées.

1054. Quel est le lieu des foyers de toutes les sections paraboliques d'un cône de révolution donné?

1055. Quel est le lieu des foyers de toutes les sections elliptiques de même excentricité dans un cône de révolution donné?

1056. Quel est le lieu des extrémités des petits axes de toutes les sections elliptiques parallèles d'un cône de révolution donné?

1057. Dans quels cas un plan peut-il couper un cône de révolution donné suivant une hyperbole équilatère?

1058. Construire une hyperbole, connaissant : 1° un foyer ou une directrice, la longueur de l'axe transverse et une asymptote ; 2° un foyer ou une directrice, une tangente et une asymptote ; 3° deux asymptotes et un point ; 4° trois points et une asymptote.

1059. Trouver le lieu des sommets des cônes de révolution qui passent par une ellipse ou une hyperbole donnée de position et de grandeur.

§ VI. — *Propriétés fondamentales de l'hélice.*

1060. Par deux points d'une surface cylindrique, on peut faire passer une infinité d'hélices.

1061. Quel est le plus court chemin entre deux points d'une surface cylindrique, mesuré sur cette surface elle-même?

1062. Deux hélices tracées sur un cylindre de révolution se coupent orthogonalement; on donne le rayon du cylindre et le pas de l'une des hélices, trouver le pas de l'autre.

1063. Des extrémités A et A′ d'un diamètre de la section droite d'un cylindre de révolution, partent deux hélices orthogonales dont le premier point d'intersection est en M ; trouver, en fonction du pas h de la première hélice et du rayon R du cylindre, l'aire mixtiligne AMA′. — Quel doit être le pas h pour que l'aire AMA′ soit maximum? Le rayon du cylindre étant un décimètre, évaluer à un millimètre carré près cette aire maximum.

1064. Étant donnée une hélice tracée sur un cylindre de révolution, une droite glisse sur cette hélice et sur l'axe du cylindre en restant normale à cette axe; quelle est la section de la surface ainsi engendrée : 1° par un cylindre concentrique au premier; 2° par un cylindre de révolution dont une arête est l'axe même du premier cylindre.

1065. Étant donnée une hélice tracée sur un cylindre de révolution, une droite glisse sur cette hélice et sur l'axe du cylindre en faisant un angle constant avec cet axe; démontrer que la normale à la courbe tracée par cette droite sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre intercepte une longueur constante sur la perpendiculaire élevée par le pied de l'axe dans le plan considéré au rayon vecteur issu du même point.

§ VII. — *Appendice.*

1066. Démontrer que l'homographie de deux divisions peut s'exprimer par l'une quelconque des formules

$$\frac{am}{bm} = \lambda . \frac{a'm'}{b'm'}, \quad \lambda . \frac{am}{bm} + \mu . \frac{a'm'}{b'm'} = 1.$$

1067. Deux divisions homographiques étant données, on peut toujours prendre à partir d'un point donné de la première deux segments qui soient respectivement égaux à leurs homologues de la seconde; mais l'un avec le même signe, l'autre avec un signe contraire.

1068. Deux droites divisées homographiquement peuvent toujours être placées l'une sur l'autre de manière que les deux divisions soint en involution.

1069. Dans deux divisions homographiques de même base, le rapport des distances d'un point quelconque de la première division aux deux points doubles est proportionnel au rapport des distances du point homologue de la seconde division aux deux mêmes points doubles.

1070. Quand deux faisceaux homographiques concentriques ont leurs rayons doubles imaginaires, on peut les projeter suivant deux faisceaux dont les rayons homologues fassent entre eux des angles égaux et de même sens.

1071. Étant donnés dans une involution deux points conjugués, le point central et le milieu de deux autres points conjugués, on demande de déterminer ces derniers points.

1072. Dans deux faisceaux en involution, il existe toujours deux rayons homologues également inclinés sur un rayon donné, et il n'y en a que deux.

1073. Étant donnés deux faisceaux homographiques non concentriques, on peut les couper par une droite suivant deux divisions en involution.

Toutes les transversales qui remplissent cette condition passent par un même point.

1074. Dans toute proportion harmonique $aba'b'$, le conjugué harmonique du milieu de bb' par rapport à a et a' coïncide avec le conjugué harmonique de aa' par rapport à b et b'; et ce point est le point central de l'involution déterminée par les deux couples (a, a') et (b, b').

1075. Lorsqu'un point décrit une hyperbole, les droites qui joignent ce point à deux points fixes interceptent sur une asymptote un segment de longueur constante.

1076. Quel est le lieu des points dont le produit des distances à deux droites fixes est constant?

1077. Dans tout triangle circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés concourent en un même point.

1078. Le sommet d'un angle de grandeur constante décrit une droite fixe, tandis que l'un des côtés passe par un point fixe. Quelle est l'enveloppe de l'autre côté?

1079. Démontrer que lorsque deux triangles sont inscrits à une conique, les six côtés touchent une autre conique.

1080. Deux angles de grandeur constante tournent autour de leurs sommets; deux de leurs côtés se coupent sur une droite fixe: quel est le lieu décrit par l'intersection des deux autres côtés? — Quel est le théorème corrélatif?

1081. Un polygone plan se déforme de telle sorte que ses côtés pivotent autour de points fixes, et que ses sommets moins un glissent sur des droites fixes; quel est le lieu décrit par le dernier sommet? — Quel est le lieu décrit par l'intersection de deux côtés non contigus quelconques? — Quel est enfin le théorème corrélatif?

1082. Si deux cordes d'une conique se divisent mutuellement en deux parties égales, ces cordes passent par le centre.

1083. Dans l'hyperbole équilatère, les droites menées d'un point de la courbe aux extrémités d'un diamètre sont également inclinées sur une asymptote.

1084. Étant données une conique et deux tangentes parallèles, les droites menées du centre aux points où une troisième tangente rencontre les deux premières sont deux diamètres conjugués.

1085. Une hyperbole qui a pour asymptotes deux diamètres conjugués d'une conique, la coupe sur deux autres diamètres conjugués.

1086. D'un point fixe, on abaisse une perpendiculaire sur chaque diamètre d'une conique, et l'on prend l'intersection de cette perpendiculaire et du diamètre conjugué au premier diamètre; quel est le lieu de ce point d'intersection? — Déduire de là que, par un point donné, on peut en général mener quatre normales à une conique.

1087. D'un point fixe, on abaisse une perpendiculaire sur chaque tangente d'une parabole, et l'on prend l'intersection de cette perpendiculaire et du diamètre correspondant à la tangente; quel est le lieu de ce point d'intersection? — Déduire de là que, par un point donné, on peut en général mener trois normales à une parabole.

1088. Si une droite fixe rencontre une série de coniques ayant même foyer et même directrice, les tangentes à ces coniques aux points où elles rencontrent la droite fixe enveloppent une conique qui a même foyer que les proposées, et qui touche à la fois leur directrice commune et la droite fixe.

1089. Quel est le lieu des centres des coniques circonscrites ou inscrites à un quadrilatère donné?

1090. Transformer par la méthode de projection les théorèmes suivants :

1° Dans le cercle, la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon du point de contact;

2° Les tangentes menées par un point extérieur à un système de coniques confocales, font des angles égaux avec les droites qui joignent ce point aux deux foyers;

3° Le lieu des centres d'un cercle qui touche de la même manière deux cercles donnés, est une hyperbole qui a pour foyers les centres des deux cercles donnés.

1091. Étant donnés cinq points d'une hyperbole, construire ses asymptotes.

1092. Étant données cinq tangentes à une conique, construire les deux tangentes qui passent par un point donné.

1093. Construire une conique, connaissant le centre et trois points.

1094. Construire une conique, connaissant un point et les directions de deux couples de diamètres conjugués.

1095. Étant données deux coniques et une droite, construire une troisième conique tangente à la droite et passant par les quatre points communs aux deux premières.

1096. Construire une conique homothétique à une conique donnée, et passant par trois points donnés ou tangente à trois droites données.

QUESTIONS DIVERSES DE GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

1097. Construire un triangle sphérique, connaissant son aire, un côté et le cercle circonscrit.

1098. Construire un triangle sphérique, connaissant son aire, sa base et sa hauteur.

1099. La sphère variable assujettie à couper deux sphères fixes suivant leurs grands cercles, passe par deux points fixes.

1100. La sphère variable assujettie à couper deux sphères fixes sous des angles constants, est constamment tangente à deux sphères fixes.

1101. Si une sphère variable coupe trois sphères fixes sous des angles égaux, mais indéterminés, son centre ne sort pas d'un certain plan.

1102. Si une sphère variable coupe quatre sphères données sous des angles égaux, mais variables simultanément, son centre décrit une droite.

1103. Mener une sphère qui coupe quatre sphères données suivant leurs grands cercles.

1104. Mener une sphère qui coupe quatre sphères données sous des angles donnés.

1105. Mener une sphère qui en coupe cinq autres sous des angles égaux.

1106. En joignant un point de l'espace aux sommets d'un tétraèdre, on obtient une figure dont les plans des faces opposées se coupent deux à deux suivant trois droites comprises dans un même plan; la diagonale issue d'un sommet divisée par la longueur de son prolongement jusqu'à ce plan, est égale à la somme des trois côtés adjacents à ce sommet, divisés respectivement par les longueurs de leurs prolongements jusqu'au même plan.

1107. Une série d'ellipses ont leurs diamètres conjugués égaux de même longueur; l'un de ces diamètres est fixe et commun à toutes les ellipses, l'autre varie quand on passe d'une ellipse à la suivante. Si l'on prend un point fixe sur le diamètre fixe prolongé et si l'on mène de ce point des tangentes aux ellipses considérées, quel est le lieu des points de contact de toutes ces tangentes?

1108. Si l'on décrit une ellipse sur le plus grand côté d'un rectangle comme grand axe, de manière qu'elle passe par le point d'intersection des diagonales, et si l'on joint un point de l'ellipse extérieur à ce rectangle aux extrémités du côté opposé au grand axe, les droites ainsi déterminées divisent le grand axe en segments qui sont en progression géométrique.

1109. Le produit des segments déterminés par son point de contact sur une tangente à l'ellipse limitée à ses points de rencontre avec les axes, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente.

1110. Quel est le lieu du second foyer des ellipses qui ont un foyer commun et deux tangentes communes?

1111. Quel est le lieu des milieux de toutes les cordes d'une ellipse qui vont converger en un point fixe?

1112. Si deux diamètres conjugués d'une ellipse sont en même temps les asymptotes d'une hyperbole, les points de contact des tangentes communes à l'ellipse et à l'hyperbole sont sur une ellipse semblable à la proposée.

1113. La base AB du triangle ABC reste fixe, tandis que le sommet C décrit la moitié d'une hyperbole équilatère passant par les points A et B; P et Q étant les points où AC et BC rencontrent le cercle décrit sur AB comme diamètre, trouver le lieu des points d'intersection de AQ et de BP.

1114. Quel est le lieu du second foyer des ellipses qui ont un foyer commun et qui passent par deux points donnés?

1115. Quel est le lieu des centres des hyperboles équilatères qui passent par trois points donnés?

1116. Si l'on joint aux deux foyers de l'hyperbole les points de rencontre d'une tangente à la courbe avec les asymptotes, on obtient un quadrilatère inscriptible.

1117. Si l'on prend sur la corde focale principale d'une parabole deux points également distants du foyer, le trapèze formé en abaissant de ces points des perpendiculaires sur une tangente quelconque à la courbe a une aire constante.

1118. Les produits des distances du foyer d'une parabole aux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à la courbe, sont égaux.

1119. Étant données deux tangentes à la parabole, si on leur mène des parallèles par un point quelconque de leur corde de contact, la diagonale du parallélogramme ainsi formé, qui est opposée au point choisi sur la corde de contact, est tangente à la courbe.

1120. En un point P de la parabole, la corde du cercle de courbure, qui est menée parallèlement à l'axe de la courbe, est égale à quatre fois le rayon vecteur du point P.

1121. La corde PH du cercle de courbure au point P de l'ellipse ou de l'hyperbole, qui est menée par le centre C de la courbe, satisfait à la relation $PH.CP = 2\overline{CD}^2$, CD étant le conjugué du diamètre CP.

1122. Étant donnés deux triangles, projeter le premier sur un plan de telle sorte que sa projection soit semblable au second triangle.

1123. Couper un cône de révolution donné suivant une ellipse d'excentricité donnée.

1124. Deux cônes de révolution qui se coupent ont même axe, et l'angle au sommet du cône intérieur est de 60 degrés; démontrer que le sommet de ce cône est un foyer commun de toutes les sections déterminées sur le cône extérieur par les plans tangents au cône intérieur.

1125. La perspective d'un cercle sur un plan quelconque est une section conique.

1126. Dans un cône à base circulaire, on nomme *plans cycliques* les deux plans menés par le sommet parallèlement aux plans des deux sections circulaires. Démontrer que tout plan tangent à un cône à base circulaire coupe les deux plans cycliques suivant deux droites également inclinées sur l'arête de contact.

1127. Les quatre droites suivant lesquelles deux plans tangents quelconques à un cône à base circulaire coupent les plans cycliques, appartiennent à un cône de révolution dont l'axe est normal au plan des deux arêtes de contact.

1128. Tout plan tangent à un cône à base circulaire fait avec les deux plans cycliques deux angles dont la somme est constante.

1129. On appelle *homocycliques* deux cônes qui ont même sommet et mêmes plans cycliques. Démontrer que, lorsqu'un plan mené par le sommet commun de deux cônes homocycliques coupe ces cônes suivant quatre arêtes, les deux arêtes de l'un font respectivement deux angles égaux avec les deux arêtes de l'autre. — Qu'arrive-t-il en particulier lorsque le plan considéré coupe l'un des cônes et touche l'autre?

1130. Quand un plan touche deux cônes homocycliques, les deux arêtes de contact sont rectangulaires.

1131. SA et SB étant deux arêtes rectangulaires prises sur deux cônes homocycliques, le plan ASB coupe les deux cônes suivant deux autres arêtes SA' et SB' qui sont encore perpendiculaires l'une à l'autre; les quatre droites suivant lesquelles se coupent les plans tangents au premier cône suivant SA et SA', et les plans tangents au second cône suivant SB et SB', appartiennent à un troisième cône homocyclique avec les deux premiers ; ce troisième cône reste le même, quelles que soient les deux arêtes rectangulaires primitives SA et SB.

1132. Quand deux cônes sont homocycliques, deux plans tangents au premier cône coupent l'autre cône suivant quatre arêtes appartenant à un cône de révolution dont l'axe est normal aux arêtes de contact des deux plans tangents.

1133. Dans tout cône à base circulaire, il existe deux droites passant par le sommet, situées à l'intérieur de la surface et telles, que si par l'une d'elles on mène deux plans rectangulaires quelconques, les plans tangents au cône suivant les deux arêtes contenues dans l'un de ces plans ont pour intersection une droite de l'autre plan. — Ces deux droites sont dites les *lignes focales* du cône.

1134. Étant donnés un cône à base circulaire et deux plans fixes tangents à ce cône, si un autre plan tangent roule sur le cône, ses intersections avec les deux plans fixes sont telles, que les plans menés par chacune d'elles et une ligne focale font un angle constant.

1135. L'angle de deux plans tangents quelconques à un cône à base circulaire, et l'angle des deux plans déterminés par leur intersection et par chacune des lignes focales, ont le même plan bissecteur.

1136. Tout plan tangent à un cône à base circulaire est également incliné sur les plans déterminés par l'arête de contact et chacune des lignes focales.

1137. La somme des angles que chaque arête d'un cône à base circulaire forme avec les deux lignes focales, est constante.

1138. Si par le sommet d'un cône à base circulaire, on mène des normales aux plans tangents de ce cône, ces normales forment un second cône dont les plans tangents sont perpendiculaires aux arêtes du premier. — Deux pareils cônes sont dits supplémentaires.

1139. Quand deux cônes sont supplémentaires, les plans cycliques et les lignes focales du premier sont respectivement perpendiculaires aux lignes focales et aux plans cycliques du second.

1140. Démontrer que le rapport anharmonique du faisceau formé par les deux côtés d'un angle α et par les deux droites qui joignent son sommet aux deux points circulaires à l'infini, est égal à $e^{(\pi - 2\alpha)\sqrt{-1}}$.

1141. Un polygone plan se déforme de telle sorte que ses sommets moins un, glissent sur des droites fixes, tous ses côtés étant vus d'autant de points fixes sous des angles donnés ; trouver le lieu du dernier sommet. — Quel est le théorème corrélatif ?

1142. Sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet, on prend trois couples de points qui divisent harmoniquement ces trois droites; démontrer que les six points considérés sont sur une conique. — Quel est le théorème corrélatif?

1143. On donne une conique et un triangle situé dans son plan; démontrer : 1° que les droites qui joignent les sommets du triangle aux pôles des côtés opposés par rapport à la conique concourent en un même point; 2° que les côtés rencontrent les polaires des sommets opposés en trois points en ligne droite.

1144. Si autour d'un point fixe on fait tourner une sécante qui rencontre une conique aux points a et a', la somme algébrique des inverses des distances des points a et a' à la polaire du point fixe est constante.

1145. Construire la conique déterminée par cinq points, dont quatre sont imaginaires.

1146. Construire la conique déterminée par cinq tangentes, dont quatre sont imaginaires.

1147. Projeter une conique suivant une hyperbole équilatère.

1148. La polaire réciproque d'une parabole par rapport à un point de la directrice, est une hyperbole équilatère.

1149. Les hauteurs d'un triangle circonscrit à la parabole se coupent sur la directrice.

1150. Les hauteurs d'un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère se coupent sur la courbe.

1151. Inscrire dans une conique un polygone dont les côtés passent par autant de points fixes.

1152. Construire une conique tangente à trois droites et ayant un double contact avec une conique donnée.

1153. Trouver le lieu des milieux des cordes d'une conique issues d'un point fixe. — Généraliser par projection.

1154. Trouver l'enveloppe des cordes d'une conique qui ont leurs milieux sur une droite donnée. — Généraliser par projection.

1155. Étant donnée une série de coniques circonscrites à un même quadrilatère, démontrer : 1° que les polaires d'un point quelconque p par rapport à ces coniques passent toutes par un même point q; 2° que si p décrit une droite L, q décrit une conique; 3° que cette conique est le lieu des pôles de la droite L par rapport aux proposées, et qu'elle passe par le point de rencontre des diagonales et par les points de concours des côtés opposés du quadrilatère. — Examiner le cas où la droite L est à l'infini. — Énoncer et démontrer directement les théorèmes corrélatifs.

1156. Si, sur les rayons menés d'une origine fixe O aux divers points d'un plan P, on porte des longueurs proportionnelles aux valeurs inverses de ces rayons, les plans conduits perpendiculairement à ces droites par leurs extrémités passeront tous par un même point p. Lorsque, l'origine O restant fixe, le plan P se déplace en passant sans cesse par un même point, le point p ne sort pas d'un certain plan.

1157. Une droite glisse sur trois droites fixes prises à volonté dans l'espace. — Quel est le lieu décrit par la trace de cette droite sur un plan fixe quelconque?

NOTES.

NOTE I.

SUR L'INCOMMENSURABILITÉ DU NOMBRE π ET DE SON CARRÉ.

1. *Développement de* $\operatorname{tang} x$ *en fraction continue.*

Les formules bien connues

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} \mp \ldots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} \mp \ldots,$$

montrent que, si l'on pose

$$f(a,u) = 1 + \frac{1}{u}\cdot\frac{a}{1} + \frac{1}{u(u+1)}\cdot\frac{a^2}{1.2} + \ldots + \frac{1}{u(u+1)\ldots(u+n-1)}\cdot\frac{a^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

on a

$$\cos x = f(a,u), \quad \sin x = x f(a,u+1) \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} x = x\frac{f(a,u+1)}{f(a,u)},$$

pour $u = \frac{1}{2}$ et $a = -\frac{1}{4}x^2$.

Or, de l'identité

$$f(a,u) - f(a,u+1) = \frac{a}{u(u+1)} f(a,u+2),$$

on déduit

$$\frac{a f(a,u+1)}{u f(a,u)} = \cfrac{a}{u + \cfrac{a f(a,u+2)}{(u+1) f(a,u+1)}};$$

puis, en remplaçant successivement u par $u+1$, $u+2$, ...,

$$\frac{af(a,u+2)}{(u+1)f(a,u+1)} = \cfrac{a}{u+1+\cfrac{af(a,u+3)}{(u+2)f(a,u+2)}},$$

$$\frac{af(a,u+3)}{(u+2)f(a,u+2)} = \cfrac{a}{u+2+\cfrac{af(a,u+4)}{(u+3)f(a,u+3)}}, \ldots;$$

donc,

$$\frac{af(a,u+1)}{uf(a,u)} = \cfrac{a}{u+\cfrac{a}{u+1+\cfrac{a}{u+2+\cfrac{a}{u+3+\cfrac{a}{u+4+\ldots}}}}};$$

et par suite, pour $u=\frac{1}{2}$ et $a=-\frac{1}{4}x^2$,

$$(1) \qquad \tan x = \cfrac{x^2}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{9-\cfrac{x^2}{11-\ldots}}}}}}$$

2. *Théorème sur les fractions continues.*

Soit la fraction continue illimitée

$$F = \cfrac{a}{b_1-\cfrac{a}{b_2-\cfrac{a}{b_3-\cfrac{a}{b_4-\ldots}}}}$$

dans laquelle a, b_1, b_2, b_3, b_4, ... sont des nombres entiers et positifs tels, que les termes de la suite $b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots$ restent, au delà d'un certain rang k, tous supérieurs à a; la valeur totale de cette fraction continue F sera nécessairement un nombre incommensurable.

Nous décomposerons la démonstration en trois parties :

1° *La valeur de la fraction continue illimitée*

$$G = \cfrac{a}{b_{k+1} - \cfrac{a}{b_{k+2} - \cfrac{a}{b_{k+3} - \cfrac{a}{b_{k+4} - \dots}}}}$$

est moindre que l'unité. — En effet, a étant par hypothèse au plus égal à $b_{k+\mu} - 1$, quel que soit l'entier μ, est moindre que $b_{k+\mu} - \varepsilon$, ε étant un nombre positif quelconque inférieur à un. D'après cela, a est moindre que $b_{k+1} - \frac{a}{b_{k+2}}$, et l'on a

$$\frac{a}{b_{k+1} - \frac{a}{b_{k+2}}} < 1.$$

Par la même raison, la quantité $\frac{a}{b_{k+2} - \frac{a}{b_{k+3}}}$ est inférieure à un ; par suite, a est moindre que b_{k+1} diminué de cette quantité, et l'on a

$$\cfrac{a}{b_{k+1} - \cfrac{a}{b_{k+2} - \cfrac{a}{b_{k+3}}}} < 1,$$

et ainsi de suite.

2° *La valeur de la fraction continue* G *est incommensurable.* — En effet, si G était égale à une fraction à termes entiers $\frac{p_1}{p_0}$, en posant

$$\frac{p_2}{p_1} = \cfrac{a}{b_{k+2} - \cfrac{a}{b_{k+3} - \cfrac{a}{b_{k+4} - \dots}}}, \qquad \frac{p_3}{p_2} = \cfrac{a}{b_{k+3} - \cfrac{a}{b_{k+4} - \dots}},$$

$$\frac{p_4}{p_3} = \frac{a}{b_{k+4} - \dots},$$

on aurait

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{a}{b_{k+1} - \frac{p_2}{p_1}}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{a}{b_{k+2} - \frac{p_3}{p_2}}, \quad \frac{p_3}{p_2} = \frac{a}{b_{k+3} - \frac{p_4}{p_3}}, \quad \dots$$

ou

$$p_2 = p_1 b_{k+1} - a p_0, \quad p_3 = p_2 b_{k+2} - a p_1, \quad p_4 = p_3 b_{k+3} - a p_2, \ldots,$$

d'où l'on voit que $p_2, p_3, p_4, \ldots$ seraient entiers comme p_0 et p_1; mais d'après le raisonnement fait dans l'alinéa qui précède, toutes les fractions

$$\frac{p_1}{p_0}, \quad \frac{p_2}{p_1}, \quad \frac{p_3}{p_2}, \quad \frac{p_4}{p_3}, \ldots,$$

ont des valeurs moindres que l'unité. Donc les nombres *entiers* $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots,$ formeraient une suite *indéfinie et décroissante*, ce qui est absurde.

3° *La valeur de la fraction proposée* F *est incommensurable.* — En effet, on a

$$F = \cfrac{a}{b_1 - \cfrac{a}{b_2 - \cfrac{a}{b_3 - \cfrac{a}{b_4 - \cdots - \cfrac{a}{b_{k-1} - \cfrac{a}{b_k - G}}}}}}.$$

Or, puisque les nombres a, b_1, b_2, $b_3, \ldots$ sont entiers et que G est incommensurable, $\frac{a}{b_k - G}$ est aussi incommensurable; par suite, il en est de même de $\cfrac{a}{b_{k-1} - \cfrac{a}{b_k - G}}$; et ainsi de suite, en remontant jusqu'à F.

3. *Le nombre* π *est incommensurable.*

En effet, pour $x = \frac{\pi}{4}$, le premier membre de la relation (1) se réduit à l'unité; si donc $\frac{\pi}{4}$ pouvait être représenté par une fraction à termes entiers $\frac{\alpha}{\beta}$, on devrait avoir

$$1 = \cfrac{\alpha}{\beta - \cfrac{\alpha^2}{3\beta - \cfrac{\alpha^2}{5\beta - \cfrac{\alpha^2}{7\beta - \cdots}}}}, \qquad \text{d'où} \quad \beta - \alpha = \cfrac{\alpha^2}{3\beta - \cfrac{\alpha^2}{5\beta - \cfrac{\alpha^2}{7\beta - \cdots}}};$$

or, cette égalité est absurde, puisque le premier membre est entier et que la fraction continue du second membre, étant de la forme considérée au n° 2, ne saurait représenter un nombre commensurable.

4. *Le carré du nombre π est incommensurable.*

En effet, pour $x = \pi$, la relation (1) devient

$$0 = \cfrac{\pi}{1 - \cfrac{\pi^2}{3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \cfrac{\pi^2}{9 - \cfrac{\pi^2}{11 - \ldots}}}}}}$$

d'où

$$3 = \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \cfrac{\pi^2}{9 - \cfrac{\pi^2}{11 - \ldots}}}}$$

donc, si π^2 pouvait être représenté par une fraction à termes entiers $\frac{\gamma}{\delta}$, on devrait avoir

$$3 = \cfrac{\gamma^2}{5\delta^2 - \cfrac{\gamma^2}{7 - \cfrac{\gamma^2}{9\delta^2 - \cfrac{\gamma^2}{11 - \cfrac{\gamma^2}{13\delta^2 - \ldots}}}}}$$

or, cette fraction continue étant encore de la forme considérée au n° 2 a une valeur incommensurable : elle ne peut donc pas être égale à 3.

Cette Note ne diffère que par la rédaction et par quelques modifications partielles de la Note IV de l'ancienne *Géométrie* de Legendre.

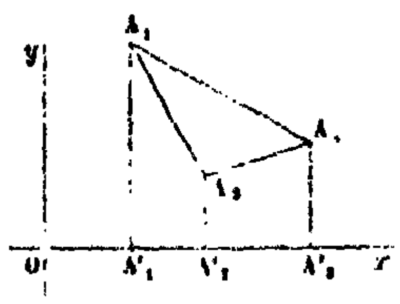
NOTE II.

SUR L'APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA GÉOMÉTRIE.

1. *Aire du triangle en fonction : 1° des coordonnées des sommets; 2° des longueurs des côtés.*

Soient : Ox et Oy deux axes de coordonnées rectangulaires situés dans le plan du triangle $A_1A_2A_3$; x_1 et y_1, x_2 et y_2, x_3 et y_3, les coordonnées respectives des sommets A_1, A_2, A_3; et d_{12}, d_{23}, d_{31} les carrés des longueurs des côtés A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1. L'aire S du triangle est l'excès (*fig.* 570) du trapèze $A_1A_2A'_2A'_1$ sur la somme des trapèzes $A_1A_3A'_3A'_1$ et $A_2A_3A'_3A'_2$. On a donc

Fig. 570.



$$2S = (x_2-x_1)(y_2+y_1)-(x_3-x_2)(y_3+y_2)-(x_3-x_1)(y_3+y_1)$$
$$= (x_2y_3-x_3y_2)-(x_1y_3-x_3y_1)+(x_1y_2-x_2y_1),$$

ou

$$(1)\qquad 2S = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

On peut mettre ce déterminant sous les deux formes suivantes :

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad 2S = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix};$$

dès lors, en multipliant membre à membre, on trouve, d'après la règle de multiplication des déterminants,

$$4S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1^2+y_1^2 & x_2x_1+y_2y_1 & x_3x_1+y_3y_1 \\ 1 & x_1x_2+y_1y_2 & x_2^2+y_2^2 & x_3x_2+y_3y_2 \\ 1 & x_1x_3+y_1y_3 & x_2x_3+y_2y_3 & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix}.$$

Multiplions les trois dernières horizontales par -2, puis divisons la première verticale par -2; le déterminant sera multiplié par 4. Cela fait, aux trois dernières horizontales ajoutons la première successivement multipliée par $x_1^2+y_1^2$, $x_2^2+y_2^2$, $x_3^2+y_3^2$, et de même aux trois dernières verticales ajoutons la première successivement multipliée par les mêmes facteurs; le déterminant ne sera pas altéré par ces dernières transformations, et si l'on se rappelle la formule bien connue

$$d_{ik} = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2,$$

on aura finalement

$$(2) \qquad 16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 \end{vmatrix}.$$

2. *Volume de la pyramide triangulaire en fonction : 1° des coordonnées des sommets; 2° des longueurs des arêtes.*

Soient : ox, oy, oz, trois axes de coordonnées rectangulaires; (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), les coordonnées des sommets A_1, A_2, A_3, A_4; d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{23}, d_{24}, d_{34} les carrés des longueurs des six arêtes.

La marche est absolument pareille à celle que nous avons suivie pour le triangle. En projetant les sommets sur le plan xoy, on verra que le volume du tétraèdre est la somme algébrique de troncs de prismes triangulaires dont les bases ou sections droites s'évalueront à l'aide de la formule (1), et l'on obtiendra pour le volume V du tétraèdre

$$(3) \qquad 6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

puis, en opérant sur ce déterminant comme nous l'avons fait sur le déterminant (1), et observant que

$$d_{ik} = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2.$$

on trouvera

$$(4)\qquad 288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix}.$$

En égalant à zéro les déterminants (2) et (4), on obtient évidemment les *conditions pour que trois points soient en ligne droite ou pour que quatre points soient dans un même plan*. Les formules (2) et (4), abstraction faite de la notation des déterminants, ont été données par Euler, dans les *Mémoires de Pétersbourg*.

3. *Relation entre les distances mutuelles : 1° de quatre points situés sur un même cercle ; 2° de cinq points situés sur une même sphère.*

Soient : (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), les coordonnées rectangulaires des quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 ; et d_{12}, d_{13}, ..., d_{23}, ... les carrés de leurs distances mutuelles. Ces points étant sur un même cercle, on aura, d'après la Géométrie analytique,

$$\begin{aligned} x_1^2+y_1^2+a+bx_1+cy_1 &= 0,\\ x_2^2+y_2^2+a+bx_2+cy_2 &= 0,\\ x_3^2+y_3^2+a+bx_3+cy_3 &= 0,\\ x_4^2+y_4^2+a+bx_4+cy_4 &= 0. \end{aligned}$$

Par suite, le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3^2+y_3^2 & 1 & x_3 & y_3 \\ x_4^2+y_4^2 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix},$$

qui résulte de l'élimination des constantes a, b, c, est nul, et il en est évidemment de même du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^2+y_1^2 & -2x_1 & -2y_1 \\ 1 & x_2^2+y_2^2 & -2x_2 & -2y_2 \\ 1 & x_3^2+y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 \\ 1 & x_4^2+y_4^2 & -2x_4 & -2y_4 \end{vmatrix}.$$

Or, il suffit de multiplier ces deux derniers déterminants par la règle connue et d'égaler le résultat à zéro pour avoir la relation cherchée :

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Un calcul tout à fait analogue donne

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 & d_{45} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

pour cinq points situés sur une même sphère.

La relation (5) revient au fond au théorème de Ptolémée (238); la relation (6) a été donnée sous une autre forme par Feuerbach. — Nous avons suivi la marche indiquée par M. Cayley dans le tome II du *Journal de Cambridge*.

4. *Relation entre les distances mutuelles de cinq points situés d'une manière quelconque dans l'espace.*

Cette relation, indiquée d'abord sous une forme trop concise par Lagrange, puis reprise et développée par Carnot, a été enfin présentée sous une forme lumineuse et mnémonique par M. Cayley à l'aide des déterminants.

Pour l'obtenir, il suffit d'imiter la marche précédente, c'est-à-dire d'égaler à zéro le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_5^2+y_5^2+z_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & 1 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2 & 1 & -2x_5 & -2y_5 & -2z_5 & 0 \end{vmatrix},$$

qui sont évidemment nuls l'un et l'autre, puisqu'ils renferment une verticale à éléments nuls. En désignant par $d_{12}, d_{13}, \ldots$ les carrés des distances mutuelles, on trouve

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 & d_{45} \\ 1 & d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

5. *Rayons des sphères tangentes à quatre autres.*

Supposons que, des cinq points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, que nous venons de considérer, les quatre premiers soient les centres de quatre sphères fixes dont les rayons r_1, r_2, r_3, r_4, sont donnés; désignons par ρ le rayon inconnu et par A_5 le centre d'une sphère tangente aux quatre autres. En posant, dans la relation (7),

$$d_{15} = (r_1 + \rho)^2, \quad d_{25} = (r_2 + \rho)^2, \quad d_{35} = (r_3 + \rho)^2, \quad d_{45} = (r_4 + \rho)^2,$$

on aura une équation qui déterminera ρ.

Quelques transformations simples, que nous laissons au lecteur le soin de chercher, permettent de donner à cette équation la forme suivante :

$$(8)\quad \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\rho} & 1 & -r_1 & -r_2 & -r_3 & -r_4 \\ 1 & -r_1 & r_1^2 & r_1^2+r_2^2-d_{12} & r_1^2+r_3^2-d_{13} & r_1^2+r_4^2-d_{14} \\ 1 & -r_2 & r_2^2+r_1^2-d_{21} & r_2^2 & r_2^2+r_3^2-d_{23} & r_2^2+r_4^2-d_{24} \\ 1 & -r_3 & r_3^2+r_1^2-d_{31} & r_3^2+r_2^2-d_{32} & r_3^2 & r_3^2+r_4^2-d_{34} \\ 1 & -r_4 & r_4^2+r_1^2-d_{41} & r_4^2+r_2^2-d_{42} & r_4^2+r_3^2-d_{43} & r_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, due à M. Bauer (*Journal de Schlömilch*, t. V), est du second degré, et elle ne change pas quand on y change simultanément les signes de r_1, r_2, r_3, r_4. D'après cela, à chaque choix de signes pour r_1, r_2, r_3, r_4, répondent deux racines : l'une se rapporte à un mode de contact relatif aux signes considérés, et l'autre au mode de contact relatif aux signes opposés; de telle sorte qu'en faisant varier les signes de r_1, r_2, r_3, r_4, on trouve les seize solutions que comporte le problème (932), groupées deux à deux.

En opérant d'une manière analogue, on obtiendrait une équation donnant les rayons des cercles tangents à trois cercles fixes; cette équation est celle qu'on trouve en supprimant, dans le déterminant (7), la dernière verticale et la dernière horizontale; en faisant varier les signes de r_1, r_2, r_3, on trouve de même les huit solutions (402) groupées deux à deux.

Ces notions montrent assez l'utilité de l'application des déterminants à la Géométrie. Pour plus de détails, on pourra consulter un Mémoire de M. Joachimsthal, dans le tome XL du *Journal de Crelle;* un Mémoire de M. Brioschi, dans le tome L du même recueil, et enfin le Mémoire déjà cité de M. Cayley.

FIN.

[illegible]