

Partie II. LES INVARIANTS DE LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE LINÉAIRE

Je crois qu'il nous faut encor une autre analyse proprement géométrique linéaire, qui exprime directement la situation comme l'algèbre exprime la grandeur. Les calculs y sont de véritables représentations de la figure et donnent directement les constructions.

Leibniz, lettre à Huygens, 8 septembre 1679

Introduction historique

Comme il a été dit dans l'introduction de ce livre, l'un de ses objectifs est de donner corps au rêve de Leibniz rappelé en exergue : construire un “calcul géométrique” qui permette de **comprendre** les propriétés géométriques de manière moins anecdotique, plus unifiée, en un mot, plus profonde. On verra que ce rêve est au moins partiellement réalisé puisque les méthodes utilisées dans la première partie seront largement validées par la théorie, voir ci-dessous chapitres 4 et 5.

Une bonne part de ce programme est réalisée par ce qu'on appelle la théorie des invariants. Cette théorie¹ remonte au début du XIX-ième siècle. Elle est très liée à deux des aspects essentiels de l'algèbre de l'époque : la théorie des équations algébriques et celle des déterminants. La première véritable apparition de la notion d'invariant est due à George Boole dans un article² de 1841 où il montre que le discriminant d'un polynôme homogène de degré quelconque est un invariant relatif sous l'action du groupe linéaire³. Ce thème est repris par Cayley dont une bonne part des travaux⁴ tourne autour des déterminants⁵, résultants et autres invariants (notamment ses résultats sur l'élimination). Nous utiliserons d'ailleurs, au chapitre 6, l'opérateur différentiel Ω introduit par Cayley pour prouver les théorèmes fondamentaux sur les invariants.

Pour l'anecdote, notons que Cayley propose une preuve du théorème de

¹Mes informations historiques proviennent notamment du livre de Weyl *Classical groups* et de celui d'Olver *Classical invariant theory*.

²*Researches on the theory of analytical transformations with a special application to the reduction of the general equation of the second order*. Camb. Math. Jour. II, 1841, p. 64-73.

³Bien entendu, Boole ne dit pas les choses ainsi, mais il affirme que sous l'effet d'une transformation linéaire, le discriminant est multiplié par une puissance du déterminant de la transformation et c'est bien ce que nous appellerons ci-dessous un invariant relatif.

⁴L'œuvre de Cayley est impressionnante, en particulier par la profusion de calculs qu'elle comporte. On a parfois l'impression, comme le dit Olver, qu'il disposait d'un excellent logiciel de calcul formel !

⁵Son *Mémoire sur les hyperdéterminants* publié au Journal de Crelle en 1846 est considéré par beaucoup comme le premier texte important sur les invariants.

Pascal (Cambridge Math. Journal vol. IV (1843), pp. 18-20) qui utilise une relation entre déterminants, essentiellement équivalente à celle que nous utiliserons ci-dessous pour prouver Pappus et dans la Partie III pour prouver Pascal.

La théorie des invariants occupe une place importante durant tout le XIX-ième siècle. Il s'agit essentiellement de déterminer les invariants des polynômes en une variable, relativement aux changements de variable affines ou homographiques⁶. Il revient essentiellement au même, d'étudier les invariants des polynômes homogènes en deux variables⁷, sous l'action du groupe $GL(2)$. On peut citer à ce sujet les noms d'Aronhold (l'inventeur de la fameuse méthode symbolique dont le principe, comme la transformation de Fourier, est de transformer les dérivations en multiplications), Sylvester, Hermite, Clebsch. Le point culminant de cette théorie est l'œuvre de Paul Gordan en 1868. En langage moderne il montre que l'algèbre des invariants d'une forme binaire est de type fini (c'est-à-dire engendrée par un nombre fini d'éléments⁸). Gordan laisse un gros traité sur le sujet⁹. Il s'attaque ensuite, mais sans succès, au problème analogue pour les polynômes en trois variables ou plus.

La solution de ce problème est le travail¹⁰ de Hilbert de 1890 (il a 26 ans), dans lequel il montre la finitude de l'algèbre des invariants sous le groupe linéaire¹¹ associés à une famille finie de polynômes homogènes à un nombre quelconque de variables. Contrairement aux résultats de Gordan qui s'appuyaient sur des calculs explicites, le résultat de Hilbert n'est pas effectif¹². En termes modernes, il montre que tout idéal d'un anneau de polynômes à n variables sur un corps d'abord, sur \mathbf{Z} ensuite, est de type fini. Dans cet article qu'on peut considérer comme la première pierre de l'algèbre commutative moderne, Hilbert montre aussi la finitude de l'idéal des relations entre invariants, voire des relations entre relations et plus généralement la finitude de ce qu'on appelle aujourd'hui la résolution de l'algèbre des invariants et définit au passage ce qu'on appelle maintenant la fonction de Hilbert¹³.

⁶L'archétype de ces invariants est le discriminant, mais il y a aussi les jacobiens, hessiens, et bien d'autres.

⁷Qu'on appelle aussi les formes binaires.

⁸Contrairement à l'idée de Cayley qui pensait qu'elle ne l'était qu'en degré ≤ 6 .

⁹*Vorlesungen über Invariantentheorie* Éditions originales Leipzig 1885 et 1887. Réédité par Chelsea Publishing Company, New-York, 1987.

¹⁰*Über die Theorie der algebraischen Formen*, Math. Annalen 36 p. 473-534 ou Oeuvres, vol.2.

¹¹Pour un sous-groupe du groupe linéaire, la question de la finitude est le 14-ième des fameux problèmes de Hilbert, qui ne reçut une réponse négative qu'en 1958 (Nagata).

¹²La légende fait dire à Gordan à ce sujet : *Das ist Theologie, nicht Mathematik!*

¹³On ne peut qu'être admiratif devant ce travail gigantesque ... et content que les progrès

Sans doute pour couper court aux critiques sur la non-effectivité de ses méthodes, Hilbert reprend la question des invariants dans un article de 1893¹⁴. Dans ce papier, Hilbert forme le projet d’englober la théorie des invariants dans celle des corps de fonctions algébriques (ce qu’on appellerait aujourd’hui la géométrie algébrique) *comme la théorie des corps cyclotomiques est contenue dans la théorie des nombres*. Il commence d’ailleurs par prouver l’un de ses plus célèbres théorèmes (le Nullstellensatz, cf. 1.2.7 ci-dessous), base de la géométrie algébrique moderne. La méthode qu’il propose permet, en principe, de trouver un système d’invariants pour une forme de degré d . Il définit pour cela ce qu’il appelle *Nullforms*, c’est-à-dire les formes dont tous les invariants sont nuls (les ancêtres des points non semi-stables de Mumford que nous verrons au chapitre 7) et il calcule l’idéal qui définit ces formes grâce à une version explicite du Nullstellensatz.

Ces progrès théoriques, ainsi que les limites des méthodes purement calculatoires, font que la théorie est considérée comme moribonde dans les années 1920. C’est ce que traduit la phrase de Bourbaki citée dans l’introduction :

Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants qui parvient enfin à formuler des méthodes générales permettant en principe d’écrire tous les covariants algébriques et toutes leurs “syzygies” de façon purement automatique ; victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la théorie classique des invariants elle-même et de la géométrie “élémentaire”, qui en est devenue pratiquement un simple dictionnaire.

Cependant, la théorie des invariants va renaître de ses cendres¹⁵, et d’abord, sur le plan théorique, avec le livre de Weyl *Classical groups*, 1939, qui met l’accent sur les invariants vectoriels et tensoriels, covariants ou contravariants. Ce livre – vraiment difficile à lire – est l’une de nos sources d’inspiration, en particulier pour tout ce qui tourne autour des théorèmes fondamentaux (chapitres 3 et 6), mais aussi pour l’accent mis dans son Introduction sur le programme d’Erlangen et la transitivité.

Il faut aussi signaler un autre livre, moins connu, celui de Gurevich, *Algebraic theory of invariants*, Noordhoff, 1964. Ce livre, qui a le mérite d’être abordable, insiste sur l’aspect géométrique de la théorie des invariants, ce qui est aussi notre point de vue, notamment dans les chapitres 4 et 5 ci-dessous. On y trouve notamment une définition d’objet géométrique, que Gurevich fait remonter à Veblen et Whitehead, qui correspond à l’image d’un objet,

de la théorie permettent d’être aujourd’hui plus économe sur les notations et les calculs !

¹⁴ *Über die vollen Invariantensysteme*, Math. Annalen 42 p. 313-373 ou Oeuvres, vol. 2.

¹⁵ Voici ce que dit Weyl : *It is high time for a rejuvenation of the classical invariant theory, which has fallen into an almost petrified state.*

disons de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ dans son quotient sous l'action du groupe $PGL(E)$ et qui est au cœur de tout ce qui suit.

Enfin, le dernier ouvrage essentiel sur le sujet est le livre [Mum65] de David Mumford *Geometric invariant theory*, Springer, 1965. Nous y revenons largement ci-dessous, notamment au chapitre 2 et surtout au chapitre 7. Ce travail très difficile, écrit dans le sillage de la révolution qu'A. Grothendieck a apportée à la géométrie algébrique, est centré sur la notion de quotient et les notions de stabilité. Il reprend et amplifie les résultats de Hilbert évoqués ci-dessus. Le lecteur à qui ce livre ferait peur pourra commencer par lire ceux de Newstead [New78] et de Popp [Pop77].

Cette introduction historique ne serait pas complète si l'on n'y faisait allusion à la modification fondamentale qu'a apportée l'irruption des ordinateurs sur le plan du calcul. Les logiciels de calcul formel permettent en effet d'effectuer en quelques minutes des calculs d'invariants et de syzygies qui auraient pris des mois de travail aux mathématiciens du XIX-ième siècle.

Notre objectif étant essentiellement géométrique, cette partie sera seulement une introduction très limitée à l'étude algébrique des invariants. On renvoie à l'abondante littérature sur le sujet et notamment à [JD70], [Die71], [Wey39], [Gur64], [Olv99], [Mum65].

Chapitre 1

Préliminaires

Ce premier chapitre a pour but de définir les objets principaux de notre étude : invariants (crochets et évaluations) et concomitants (produits extérieurs), mais aussi de préciser quelques notions de géométrie algébrique et de faire quelques rappels sur les opérations et les représentations linéaires des groupes.

Dans tout ce chapitre, E désigne un k -espace vectoriel. Le plus souvent, le corps k sera supposé infini, voire de caractéristique 0, et l'espace E sera supposé de dimension 3.

1.1 Crochets, évaluations, produit extérieur

1.1.1 Les crochets

Nous utiliserons la notation suivante : si E est de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et si x_1, \dots, x_n sont des vecteurs de E , on pose : $[x_1, \dots, x_n] = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$. On parlera de cette quantité comme du **crochet** des vecteurs x_1, \dots, x_n . L'application qui à (x_1, \dots, x_n) associe $[x_1, \dots, x_n]$ est n -linéaire alternée. Notons que, si on change la base \mathcal{B} en \mathcal{B}' , le crochet $[x_1, \dots, x_n]$ est multiplié par $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

Nous verrons plus loin que les crochets et les **évaluations** (c'est-à-dire les expressions $f(a)$ où f est une forme linéaire et a un vecteur) sont les invariants fondamentaux de la géométrie projective (voir 3.1.1 et 3.2.1). En tous cas, dans le plan projectif, ces invariants permettent déjà de traduire nombre de propriétés géométriques, incidence, alignement, concours :

1.1.1 Proposition. On suppose E de dimension 3 muni d'une base \mathcal{B} .

1) Soit \bar{a} un point de $\mathbf{P}(E)$ de représentant $a \in E$ et soit D une droite de $\mathbf{P}(E)$ d'équation $f \in E^*$. Le point \bar{a} est sur la droite D si et seulement si on a $f(a) = 0$.

2) Soient $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ trois points de $\mathbf{P}(E)$ de représentants $a, b, c \in E$. Ces points sont alignés si et seulement si on a $[a, b, c] = 0$.

3) Soient F, G, H trois droites de $\mathbf{P}(E)$ d'équations $f, g, h \in E^*$. Ces droites sont concourantes si et seulement si on a $[f, g, h] = 0$.

Démonstration. C'est la proposition ?? de la Partie I.

1.1.2 Les opérations de produit extérieur

Dans ce paragraphe, E est de dimension 3. On suppose que E est muni d'une base¹ $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et son dual E^* de la base duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$. Nous allons définir deux opérations, toutes deux notées \wedge , l'une qui va de $E \times E$ dans E^* , l'autre de $E^* \times E^*$ dans E . Ces applications vont nous donner une interprétation "linéaire" de l'incidence dans l'espace projectif.

Le cas des vecteurs

1.1.2 Proposition-Définition. Soient x, y deux vecteurs de E . La formule $(x \wedge y)(z) = [x, y, z]$ définit une forme linéaire $x \wedge y \in E^*$. L'application $\wedge : E \times E \rightarrow E^*$ est bilinéaire alternée et surjective².

Démonstration. Seule la surjectivité n'est pas évidente. Elle résulte des formules : $e_2 \wedge e_3 = e_1^*, e_3 \wedge e_1 = e_2^*, e_1 \wedge e_2 = e_3^*$.

1.1.3 Remarque. Si on change la base \mathcal{B} en \mathcal{B}' , la forme $a \wedge b$ est multipliée par $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

¹La donnée de cette base fournit la forme trilinéaire alternée non nulle $[x, y, z] = \det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$. Réciproquement, toute forme trilinéaire alternée non nulle $d : E^3 \rightarrow k$ est obtenue ainsi. On notera cependant que la donnée d'une forme d est moins contraignante que celle d'une base, puisque toutes les bases obtenues en faisant agir $SL(E)$ donnent la même forme.

²Le lecteur qui connaît l'algèbre extérieure aura reconnu l'isomorphisme de $\bigwedge^2 E$ sur E^* induit par le produit extérieur $\bigwedge^2 E \times \bigwedge^1 E \rightarrow \bigwedge^3 E$ et par l'isomorphisme $\bigwedge^3 E \simeq k$ associé à la forme trilinéaire $[x, y, z]$.

Calcul en coordonnées

Si $x \in E$ est le vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base (e_i) et y celui de coordonnées (y_1, y_2, y_3) , la forme linéaire $x \wedge y$ est définie par la relation $(x \wedge y)(z) = [x, y, z] = \det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$. La formule du développement du déterminant donne les coordonnées de $x \wedge y$ dans la base duale, ce sont les 2-mineurs de la matrice

$$(xy) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

soit $x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.

Le cas des formes linéaires

Si on a une base \mathcal{B}^* de E^* , on procède exactement de la même façon pour définir, pour f, g dans E^* , le vecteur $f \wedge g \in E$. Pour $f, g, h \in E^*$ la formule devient $h(f \wedge g) = [f, g, h] = \det_{\mathcal{B}^*}(f, g, h)$.

Si $f, g \in E^*$ sont les formes de coordonnées (f_1, f_2, f_3) et (g_1, g_2, g_3) dans la base $\mathcal{B}^* = (e_i^*)$, le vecteur $f \wedge g \in E$ a pour coordonnées dans la base (e_i) duale de \mathcal{B}^* les 2-mineurs de la matrice

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix}$$

soit $f \wedge g = (f_2g_3 - f_3g_2, f_3g_1 - f_1g_3, f_1g_2 - f_2g_1)$.

1.1.3 Produit extérieur et incidence

Les opérations que nous venons de définir ont une interprétation immédiate dans l'espace projectif³ :

1.1.4 Proposition.

- 1) Soient \bar{a}, \bar{b} deux points de $\mathbf{P}(E)$ de coordonnées homogènes $a = (a_1, a_2, a_3)$ et $b = (b_1, b_2, b_3)$. La forme linéaire $a \wedge b$ définie ci-dessus est non nulle si et seulement si les points \bar{a} et \bar{b} sont distincts. Dans ce cas, cette forme est une équation de la droite $(\bar{a}\bar{b})$.
- 2) Soient F, G deux droites de $\mathbf{P}(E)$ définies par deux formes linéaires $f, g \in E^*$. Le vecteur $f \wedge g \in E$ est non nul si et seulement si ces droites sont distinctes. Dans ce cas, leur point d'intersection est le point \bar{a} image de $a = f \wedge g$.

³On peut considérer cette proposition comme le premier pas vers le programme de Leibniz.

Démonstration. Dire que les points \bar{a} et \bar{b} sont distincts signifie que les vecteurs a, b sont indépendants. On peut alors les compléter en une base a, b, c de E et on a $(a \wedge b)(c) = \det_{\mathcal{B}}(a, b, c) \neq 0$, de sorte que la forme $a \wedge b$ est non nulle. Il reste à montrer qu'elle est nulle en a et b . Mais, on a, par exemple, $(a \wedge b)(a) = [a, b, a] = 0$.

1.1.5 Remarque. On notera que le point de $\mathbf{P}(E^*)$ associé à $a \wedge b$ ne dépend ni des représentants des points \bar{a}, \bar{b} , ni du choix de la base \mathcal{B} .

1.2 Quelques rappels de géométrie algébrique

Dans ce qui suit, l'un de nos objectifs est de donner un sens à une notion de "régularité" pour des parties de l'espace projectif ou des fonctions définies sur ces parties. Faute de pouvoir imposer des conditions de continuité ou de différentiabilité qui n'ont pas de sens sur un corps quelconque, nous utiliserons des conditions algébriques centrées autour des fonctions polynomiales ou rationnelles : cela nous fait pénétrer dans l'immense champ de la géométrie algébrique. Nous aurons donc besoin, essentiellement dans les chapitres 2 et 7, de quelques résultats élémentaires de ce domaine. Il y a de nombreux livres sur le sujet, par exemple [Per95] ou [Har77] ou [Ful69] et le lecteur pourra s'y reporter au besoin. Nous donnons simplement ici sans démonstration les rudiments indispensables pour la suite.

1.2.1 Le cas affine

Dans ce paragraphe, on travaille dans l'espace affine k^n , avec $n \geq 1$. Le corps de base k est quelconque, sauf en 1.2.6 et 1.2.7.

Ensembles algébriques affines

On pose $R = k[X_1, \dots, X_n]$.

1.2.1 Définition. Soit S une partie de R . On appelle **ensemble algébrique affine** défini par S et on note $V(S)$, l'ensemble des points $x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$ vérifiant $F(x) := F(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour tout $F \in S$.

1.2.2 Remarques.

- 0) L'application V est décroissante : $S \subset S'$ implique $V(S') \subset V(S)$.
- 1) Une intersection quelconque d'ensembles algébriques affines en est un.
- 2) Une réunion finie d'ensembles algébriques affines en est un.

La topologie de Zariski

Les remarques ci-dessus montrent que les ensembles algébriques affines sont les fermés d'une topologie sur k^n appelée topologie de Zariski.

Attention, la topologie de Zariski est très différente des topologies usuelles, les fermés y sont très petits : dans k^3 les fermés sont les surfaces (algébriques), les courbes ou les points. Au contraire, les ouverts sont très gros, ainsi, deux ouverts non vides de k^3 se coupent toujours (la topologie n'est donc pas séparée). De plus, la topologie de Zariski sur un produit n'est pas la topologie produit des topologies de Zariski sur les facteurs.

Idéal d'un ensemble algébrique affine

1.2.3 Définition. Soit V un sous-ensemble algébrique affine de k^n . On note $I(V)$ l'ensemble des polynômes $F \in R = k[X_1, \dots, X_n]$ nuls sur V . C'est un idéal de R .

1.2.4 Remarques.

0) L'application I est décroissante.

1) Si V est un ensemble algébrique affine on a $V(I(V)) = V$.

2) Inversement, on a $I \subset I(V(I))$, mais, **attention**, il n'y a pas égalité en général, voir 1.2.7 ci-dessous pour un résultat partiel.

1.2.5 Proposition-Définition. Soit $V \subset k^n$ un ensemble algébrique affine. L'algèbre des fonctions polynomiales sur V est isomorphe à $\Gamma(V) = k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$.

Démonstration. En effet, les fonctions polynomiales sur V sont les images par l'opération de restriction ρ des polynômes de R et le noyau de ρ est égal à $I(V)$.

Le théorème de prolongement des identités algébriques

1.2.6 Proposition. (Théorème de prolongement des identités algébriques) Soit k un corps infini, V un ensemble algébrique distinct de k^n et P un polynôme de $k[X_1, \dots, X_n]$. On suppose P nul sur $k^n - V$. Alors P est nul.

Démonstration. Voir par exemple [Per95] Ch. I, 3.4.

Le Nullstellensatz (ou théorème des zéros de Hilbert)

C'est le premier théorème important de la géométrie algébrique.

1.2.7 Théorème. (Nullstellensatz) *On suppose k algébriquement clos. Soit I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$. L'idéal $I(V(I))$ est la racine de l'idéal I (c'est-à-dire l'ensemble des F tels qu'il existe un entier r avec $F^r \in I$). En particulier, si $V(I)$ est vide, on a $I = k[X_1, \dots, X_n]$.*

Démonstration. [Per95] Ch. I, 4.3.

Les morphismes

1.2.8 Définition. *Soient $V \subset k^n$ et $W \subset k^m$ deux ensembles algébriques affines et $\varphi : V \rightarrow W$ une application, que l'on peut écrire $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ avec $\varphi_i : V \rightarrow k$. On dit que φ est un morphisme si ses composantes φ_i sont polynomiales (i.e., sont dans $\Gamma(V)$).*

On vérifie que les morphismes sont continus pour les topologies de Zariski.

1.2.2 Le cas projectif

Ensembles algébriques, topologie de Zariski

1.2.9 Définition. *Soit $\mathbf{P}(E)$ un espace projectif de dimension n que l'on identifie à $\mathbf{P}^n(k)$ par le choix d'un repère et soit $F(X_0, \dots, X_n)$ un polynôme homogène de degré $d > 0$. L'ensemble des points \bar{x} de $\mathbf{P}(E)$, de coordonnées homogènes (x_0, \dots, x_n) vérifiant $F(x_0, \dots, x_n) = 0$ est bien défini et on le note $V(F)$. Si les F_i sont des polynômes homogènes de degrés d_i , on pose $V(F_1, \dots, F_r) = V(F_1) \cap \dots \cap V(F_r)$ et on note $D(F_1, \dots, F_r)$ son complémentaire (c'est l'ensemble des \bar{x} en lesquels les F_i ne sont pas tous nuls). Les ensembles $V(F_1, \dots, F_r)$ sont appelés **ensembles algébriques de $\mathbf{P}(E)$** . La **topologie de Zariski** sur $\mathbf{P}(E)$ est la topologie dont les fermés sont les ensembles algébriques (et dont les ouverts sont les $D(F_1, \dots, F_r)$). De la même manière, on définit ensembles algébriques et topologie de Zariski sur le produit d'un nombre fini d'espaces projectifs $\mathbf{P}(E_1) \times \dots \times \mathbf{P}(E_m)$. On considère, sur ce produit, des points de coordonnées homogènes (x_1, \dots, x_m) , avec $x_i = (x_{i,0}, x_{i,1}, \dots, x_{i,r_i})$, où $r_i + 1$ désigne la dimension de E_i . Les ensembles algébriques (ou fermés du produit) sont définis par des équations $F(x_1, \dots, x_m) = 0$, $x_i \in E_i$, où F est un polynôme en les $x_{i,j}$, homogène séparément en chaque paquet de variables x_i .*

1.2.10 Remarque. Attention, comme dans le cas affine, la topologie de Zariski sur un produit n'est pas la topologie produit des topologies de Zariski de ses facteurs.

1.2.11 Exemples.

- 1) Dans $\mathbf{P}^2(k)$ une droite est un fermé (défini par l'équation $ux+vy+wt=0$). Il en est de même des coniques, par exemple celle définie par $xy-t^2=0$, ou plus généralement d'une courbe algébrique, ou encore d'un ensemble fini.
- 2) Sur $\mathbf{P}^2(k) \times \mathbf{P}^2(k)$ l'application qui à \bar{a}, \bar{b} associe la droite $(\bar{a}\bar{b})$ est définie sur l'ouvert $\bar{a} \neq \bar{b}$. C'est un ouvert de Zariski du produit, car il est défini par l'équation $a \wedge b \neq 0$ qui est polynomiale en a et b (elle est définie par des mineurs, voir le calcul explicite après 1.1.2).

Idéal d'un ensemble algébrique

1.2.12 Proposition-Définition. On reprend les notations de 1.2.9. Soit $V \subset \mathbf{P}(E_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(E_m)$ un sous-ensemble algébrique. On note $I(V)$ l'ensemble des polynômes $F(x_1, \dots, x_m)$ nuls sur V . Alors $I(V)$ est un idéal multi-homogène (ce qui signifie que si F est dans $I(V)$ et si on le décompose en polynômes homogènes en chaque paquet de variables x_i , ces composants sont aussi dans $I(V)$). On a la formule $V(I(V)) = V$.

Irréductibilité

1.2.13 Proposition-Définition. Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes ont équivalentes :

- i) X n'est pas réunion de deux fermés distincts de X ,
- ii) l'intersection de deux ouverts non vides de X est non vide,
- iii) tout ouvert non vide de X est partout dense.

On dit alors que X est **irréductible**

On montre que, si le corps k est infini, les espaces k^n , \mathbf{P}^n , munis de la topologie de Zariski, ainsi que leurs produits, sont irréductibles. Lorsqu'un ensemble algébrique n'est pas irréductible, on peut l'écrire comme réunion de sous-ensembles algébriques irréductibles.

Variétés algébriques

On renvoie le lecteur à la littérature pour la notion plus générale de variété algébrique. Sur un corps algébriquement clos, une variété algébrique

est un objet localement isomorphe à un ensemble algébrique affine équipé des fonctions polynomiales, voir par exemple [Per95] Ch. III. Sur un corps quelconque, par exemple \mathbf{R} , dès qu'on sort des ensembles algébriques, il faut être très prudent. Le cadre algébrique le mieux adapté est celui de la théorie des schémas, mais il rebutera plus d'un néophyte.

1.2.3 Morphismes projectifs

Fonctions “géométriques”

On cherche ici à préciser à quelles conditions des fonctions “régulières” (c'est-à-dire polynomiales ou rationnelles), définies sur une partie de $E_1 \times \cdots \times E_m$ et à valeurs dans k , induisent des fonctions au niveau des espaces projectifs. Attention, cela n'est nullement automatique car les fonctions polynomiales, par exemple, ne définissent pas des fonctions sur $\mathbf{P}(E_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(E_m)$ puisque leur valeur change si l'on remplace les vecteurs x_i par $\lambda_i x_i$. Précisément, on a la notion suivante :

1.2.14 Proposition-Définition. *Soit E_i , $i = 1, \dots, m$, un espace vectoriel de dimension $r_i + 1 \geq 1$, muni d'une base. Soient $x_i = (x_{i,0}, \dots, x_{i,r_i})$, pour i variant de 1 à m , des vecteurs de E_i . Une fonction $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ en les coordonnées $x_{i,k}$ de ces vecteurs, définie sur une partie de $E_1 \times \cdots \times E_m$ (par exemple une fraction rationnelle), est dite “géométrique” (ou une “fonction de points”) si elle est invariante sous l'action de $(k^*)^m$, c'est-à-dire si l'on a :*

$$F(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_m x_m) = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

pour tous $\lambda_i \in k^$ et tous $x_i \in E_i$. Une telle fonction induit une fonction définie sur une partie de $\mathbf{P}(E_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(E_m)$ et à valeurs dans k .*

Il est clair (et cela résulte de 1.2.16 ci-dessous) qu'il n'y a pas de fonctions polynomiales géométriques hormis les constantes. En revanche, il y a des fractions rationnelles géométriques. Un exemple, dont on verra plus loin (cf. 3.4.3) l'universalité, au moins parmi les fonctions invariantes par homographie, est donné par le birapport :

1.2.15 Exemple. On considère quatre vecteurs de $E = k^2$: $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$ et $d = (d_1, d_2)$. Alors le birapport :

$$[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}] = \frac{[c, a][d, b]}{[c, b][d, a]}$$

est une fonction géométrique sur $\mathbf{P}(E)^4$, à valeurs dans k , définie lorsque les points \bar{b}, \bar{c} et les points \bar{a}, \bar{d} sont distincts.

La proposition suivante caractérise les fonctions rationnelles géométriques :

1.2.16 Proposition. *On suppose le corps k infini. Une fraction rationnelle $R(x_1, \dots, x_m)$ de m vecteurs de $E_1 \times \dots \times E_m$ définit une fonction géométrique à valeurs dans k si et seulement si elle s'écrit $R = F/G$ où F et G sont des polynômes en les $x_{i,j}$, homogènes en les variables correspondant à chaque vecteur x_i , avec le même degré d_i au numérateur et au dénominateur.*

Démonstration. La condition est évidemment suffisante. Réciproquement, on peut supposer $R = F/G$ avec F, G premiers entre eux. Pour $\lambda \in k$ on définit $R_\lambda = R(\lambda x_1, x_2, \dots, x_m)$ et de même F_λ et G_λ . On doit avoir, pour tout $\lambda \in k$, $R_\lambda = R(\lambda x_1, x_2, \dots, x_m) = R(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Cela conduit à l'égalité $F_\lambda G = G_\lambda F$. Comme F et G sont premiers entre eux, F divise F_λ et, pour une raison de degré, on a :

$$F_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m) = F(\lambda x_1, x_2, \dots, x_m) = \mu(\lambda) F(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

avec $\mu(\lambda) \in k^*$. Comme le corps est infini, cela n'est possible que si F est homogène de degré d en x_1 (c'est-à-dire par rapport aux variables $x_{1,0}, \dots, x_{1,r_1}$) et on a alors $F_\lambda = \lambda^d F$. (En effet, on écrit $F = F_0 + F_1 + \dots + F_r$ avec des F_i homogènes de degré i en x_1 . S'il y a deux degrés r et s , on obtient, en identifiant les termes de mêmes degrés, $\lambda^r = \lambda^s = \mu(\lambda)$ pour tout λ et c'est impossible si le corps est infini.)

Le même raisonnement s'applique à G et on en déduit que F et G ont même degré en x_1 . La conclusion est identique pour tous les vecteurs x_i .

1.2.17 Remarque. On a évidemment le même résultat avec des fonctions géométriques de points et de droites, autrement dit pour l'opération de $(k^*)^{m+n}$ sur $k[x_1, \dots, x_m, f_1, \dots, f_n]$ et sur son corps des fractions.

Morphismes projectifs

Dans ce paragraphe on définit les bonnes applications entre espaces projectifs, en se ramenant au cas vectoriel.

1.2.18 Définition. *Soient E, E_1, \dots, E_m des espaces vectoriels non nuls de dimensions respectives $r+1$ et r_i+1 et soit $\bar{\Phi} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{P}(E)$ une application définie sur un ouvert de Zariski non vide $\bar{\Omega}$ de $\mathbf{P}(E_1) \times \dots \times \mathbf{P}(E_m)$. Soient $p : E_1 - \{0\} \times \dots \times E_m - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}(E_1) \times \dots \times \mathbf{P}(E_m)$ et $\pi : E - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}(E)$ les projections. On pose $\Omega = p^{-1}(\bar{\Omega})$. On appelle **relèvement** de $\bar{\Phi}$ une application $\Phi : \Omega \rightarrow E - \{0\}$ qui vérifie $\bar{\Phi}p = \pi\Phi$.*

Si $j : \mathbf{P}(E) \rightarrow E - \{0\}$ est une section de π , c'est-à-dire une application vérifiant $\pi j = \text{Id}$, l'application $\Phi = j\bar{\Phi}p$ est un relèvement de $\bar{\Phi}$.

1.2.19 Définition. Avec les notations précédentes, une application $\bar{\Phi} : \bar{\Omega} \subset \mathbf{P}(E_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(E_m) \rightarrow \mathbf{P}(E)$ est appelée **morphisme projectif** si elle admet un relèvement $\Phi : \Omega \rightarrow E - \{0\}$ qui est une application rationnelle. Cela signifie que si on munit les espaces E et E_i de bases, les applications coordonnées de Φ sont des fractions rationnelles en les coordonnées des vecteurs de départ. Cette notion ne dépend pas du choix des bases.

Plus généralement, une application Φ définie sur un ouvert de $\mathbf{P}(E_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(E_m)$ et à valeurs dans $\mathbf{P}(F_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(F_n)$ est appelée **morphisme projectif** si ses composantes sont des morphismes projectifs au sens précédent.

En fait, les morphismes projectifs sont définis par des applications polynomiales :

1.2.20 Proposition. On suppose k infini. Soit $\bar{\Phi} : \bar{\Omega} \subset \mathbf{P}(E_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(E_m) \rightarrow \mathbf{P}(E)$ un morphisme projectif. On suppose E de dimension $r + 1$ et on l'identifie à k^{r+1} par le choix d'une base. Il existe une application

$$\Psi = (\Psi_0, \dots, \Psi_r) : E_1 \times \cdots \times E_m \rightarrow k^{r+1} \simeq E,$$

qui induit $\bar{\Phi}$ sur les espaces projectifs et telle que $\Psi_j(x_1, \dots, x_m)$ soit polynomiale homogène de degré d_i (indépendant de j) par rapport à x_i .

Réciproquement, si $\Psi = (\Psi_0, \dots, \Psi_r)$ est une application polynomiale homogène par rapport aux x_i au sens précédent, elle induit une application $\bar{\Psi}$, de l'ouvert de Zariski $D(\Psi_0, \dots, \Psi_r)$ sur lequel les Ψ_j sont non toutes nulles (cf. 1.2.9), et à valeurs dans $\mathbf{P}(E)$.

Démonstration. Par définition, $\bar{\Phi}$ est induite par une application rationnelle $\Phi = (\Phi_0, \dots, \Phi_r)$. Posons $\Phi_j = \frac{F_j}{G_j}$, où F_j et G_j sont des polynômes premiers entre eux. Soit $\Omega = p^{-1}(\bar{\Omega})$. Comme $\bar{\Phi}$ est définie sur $\bar{\Omega}$, cela montre que les G_j ne s'annulent pas sur Ω et que les F_j n'y ont pas de zéros communs. Quitte à multiplier les Φ_j par le ppcm G des G_j , on est ramené au cas où les Φ_j sont des polynômes. En raisonnant comme dans 1.2.16 on voit qu'ils sont homogènes de même degré par rapport à chaque vecteur x_i .

1.2.21 Corollaire. Un morphisme projectif est continu pour les topologies de Zariski.

1.3 Opérations de groupes

1.3.1 Définitions

Nous rappelons ici quelques notions sur les opérations et les représentations des groupes. Pour toutes précisions voir par exemple [Per96], [JD70] ou [Ser78].

1.3.1 Définition. Soient G un groupe et X un ensemble, on dit que G **opère** (à gauche) sur X si l'on dispose d'une application : $G \times X \rightarrow X$ notée $(g, x) \mapsto g.x$ et vérifiant les axiomes suivants :

- 1) $\forall g, g' \in G, \forall x \in X, g.(g'.x) = (gg').x$
- 2) $\forall x \in X, 1.x = x$.

Il revient au même de se donner un homomorphisme $\phi : G \rightarrow \mathfrak{S}(X)$, où $\mathfrak{S}(X)$ désigne le groupe des bijections de X , car on pose alors : $g.x = \phi(g)(x)$.

1.3.2 Définition. Soit G un groupe et E un espace vectoriel. Une **représentation linéaire** de G dans E est une opération (à gauche) de G sur E qui est "linéaire", c'est-à-dire telle que, pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto g.x$ est linéaire. Il revient au même de se donner un homomorphisme $\rho : G \rightarrow GL(E)$.

L'exemple le plus simple de représentation est fourni par l'opération naturelle de $GL(E)$ lui-même sur E .

La vérification du résultat suivant est immédiate :

1.3.3 Proposition-Définition. Soit G un groupe opérant sur deux ensembles X, Y .

- 1) On définit une opération de G sur $X \times Y$ en posant $g.(x, y) = (g.x, g.y)$.
- 2) On définit une opération de G sur l'ensemble $\mathcal{F}(X, Y)$ des applications de X dans Y en posant $(g.u)(x) = g.(u(g^{-1}.x))$.

Si on a des représentations linéaires de G dans E et F , les formules précédentes définissent des représentations de G dans $E \times F$ et dans l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F . Cela vaut en particulier pour $E^* = \mathcal{L}(E, k)$ (où l'opération de G sur k est l'opération triviale définie par $g.\lambda = \lambda$ pour tous $g \in G, \lambda \in k$). Cette opération de G sur E^* est aussi notée : $f \mapsto f \circ g^{-1} = g^*(f)$.

1.3.4 Remarque. Si, pour une base (e_i) de E , on note (e_i^*) la base duale de E^* et de même $(g.e_i)^*$ pour la base duale de $g.e_i$, les définitions précédentes mènent à la formule : $(g.e_i)^* = g.e_i^*$.

1.3.5 Remarque. Il y a trois raisons de la présence de l'exposant -1 dans les formules précédentes, notamment dans l'opération sur le dual.

- 1) L'exposant -1 est nécessaire pour avoir encore une opération à gauche : $(gh).f = g.(h.f)$.
- 2) L'exposant -1 rend covariante la correspondance $g \mapsto g^*$: on a $(gh)^* = g^*h^*$ (si on avait utilisé $f \circ g = {}^t g(f)$, l'opération serait contravariante).
- 3) Enfin, les opérations ci-dessus induisent des opérations de $PGL(E)$ sur $\mathbf{P}(E)$ et $\mathbf{P}(E^*)$ et le lemme suivant est la troisième justification de l'exposant -1 .

1.3.6 Lemme. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, soit $D \subset \mathbf{P}(E)$ une droite d'équation $f \in E^*$ et soit $\bar{g} \in PGL(E)$. La droite image $\bar{g}(D)$ est la droite d'équation $g.f = f \circ g^{-1}$.

Démonstration. La droite D étant l'ensemble des \bar{x} tels que $f(x) = 0$, $\bar{g}(D)$ est l'ensemble des $\bar{y} = \overline{g(x)}$. Or ces y sont exactement ceux qui vérifient $f \circ g^{-1}(y) = f(x) = 0$.

1.3.2 Exemples

Exemples linéaires

On suppose E de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On déduit de l'action de $GL(E)$ sur E une opération de $GL(E)$ sur k^3 . Si on a $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E$ et $g(x) = y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$, on pose $g.(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$. Si g a pour matrice $A = (a_{ij})$ dans la base considérée, on a $y_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j$, soit, en termes matriciels $Y = AX$, si X et Y sont les matrices colonnes associées à x et y .

Cette action induit, par la formule du lemme 1.3.3, une action de $GL(E)$ sur l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(k^3, k)$ donnée par

$$(g.P)(x_1, x_2, x_3) = P(g^{-1}(x_1, x_2, x_3)).$$

On vérifie immédiatement que l'image d'une fonction polynomiale (resp. rationnelle) dans cette action est une fonction polynomiale (resp. rationnelle). En considérant les variables x_i comme des indéterminées, cette opération définit, par la même formule, une opération de $GL(E)$ sur l'anneau des polynômes $R = k[x_1, x_2, x_3]$.

De même, si on munit E^* de la base duale (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , l'action de $GL(E)$ sur E^* induit une action sur k^3 . Si $\xi = \xi_1e_1^* + \xi_2e_2^* + \xi_3e_3^*$ et $g.\xi = \xi \circ g^{-1} =$

$\eta = \eta_1 e_1^* + \eta_2 e_2^* + \eta_3 e_3^*$, on pose $g.(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Cette opération définit, comme ci-dessus, une opération de $GL(E)$ sur les fonctions sur E^* , notamment sur les fonctions polynomiales, et sur l'anneau de polynômes $k[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$.

Le groupe $GL(E)$ opère aussi sur le produit $E^m \times (E^*)^n$, de manière **diagonale** :

$$g.(a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_n) = (g.a_1, \dots, g.a_m; g.f_1, \dots, g.f_n).$$

Notons $a_{i,k}, f_{j,k}$ ($k = 1, 2, 3$) les coordonnées homogènes des a_i, f_j sur les bases données et $R = k[a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_n]$ l'anneau de polynômes en les $3m + 3n$ indéterminées $a_{i,k}, f_{j,k}$. Le groupe $GL(E)$ opère sur les fonctions définies sur $E^m \times (E^*)^n$ par les formules de 1.3.3 et notamment sur les fonctions polynomiales et donc sur l'anneau R par les mêmes formules que ci-dessus.

1.3.7 Remarques.

1) On notera que toutes les actions définies ci-dessus sur les anneaux de polynômes sont des actions “par homomorphismes d’anneaux”. Cela signifie qu’on a $g.(P + Q) = g.P + g.Q$ et $g.(PQ) = (g.P)(g.Q)$ pour $g \in G$ et $P, Q \in R$.

2) Le lecteur algébriste aura évidemment reconnu dans ces opérations les actions naturelles de $GL(E)$ sur les algèbres symétriques $S(E^m \times (E^*)^n)$.

Exemples projectifs

Le groupe $PGL(E)$ opérant à la fois sur $\mathbf{P}(E)$ et $\mathbf{P}(E^*)$ opère sur les produits $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^m$, en vertu de 1.3.3.

De manière duale, l’action de $PGL(E)$ sur l’espace projectif $\mathbf{P}(E)$ induit une action sur les fonctions définies sur $\mathbf{P}(E)$ et à valeurs dans k par la formule $g.F(x) = F(g^{-1}(x))$. Il opère aussi sur les fonctions définies sur $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^m$.

Ces actions de $PGL(E)$ joueront un rôle crucial dans ce qui suit.

1.3.3 Caractères

1.3.8 Définition. Soit G un groupe et k un corps (commutatif). On appelle **caractère** un homomorphisme $\chi : G \rightarrow k^*$.

1.3.9 Exemples.

1) L’application constante : $\chi(g) = 1$ est un caractère, noté 1. Si $\chi : G \rightarrow k^*$ est un caractère, il en est de même de χ^{-1} , défini par $(\chi^{-1})(g) = (\chi(g))^{-1}$. Si $\chi_1, \chi_2 : G \rightarrow k^*$ sont deux caractères il en est de même de leur produit

défini par $(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$.

2) Dans ce qui suit nous utiliserons essentiellement le caractère $\chi_p : GL(E) \rightarrow k^*$ défini, pour $p \in \mathbf{Z}$, par $\chi_p(u) = (\det u)^p$. Il y a en général d'autres caractères que ceux-là sur $GL(E)$ (par exemple, si k est le corps des réels, le caractère $|\det u|$), mais les χ_p sont les seuls caractères qui sont des fonctions rationnelles, comme le montre la proposition suivante.

1.3.10 Proposition. *On suppose le corps infini et l'espace vectoriel E de dimension n . Soit $\chi : GL(E) \rightarrow k^*$ un caractère. On identifie $GL(E)$ et $GL(n, k)$ au moyen d'une base \mathcal{B} de E et on suppose que $\chi(u)$ est une fonction rationnelle en les coefficients u_{ij} de la matrice de u dans la base \mathcal{B} . Alors il existe un entier $d \in \mathbf{Z}$ tel que $\chi(u) = (\det u)^d$ pour tout $u \in GL(E)$.*

Démonstration. On écrit $\chi(u) = \frac{f(u)}{g(u)}$ où f, g sont des polynômes en les u_{ij} que l'on suppose premiers entre eux. De plus, on peut supposer que f et g sont des caractères. En effet, on a, pour $u, v \in GL(E)$, $f(uv)g(u)g(v) = g(uv)f(u)f(v)$ et cette égalité induit une identité entre polynômes en vertu du principe de prolongement des identités algébriques 1.2.6. Comme $f(u)f(v)$ et $g(u)g(v)$ sont premiers entre eux, $f(u)f(v)$ divise $f(uv)$ et, pour une raison de degré on a $f(uv) = \lambda f(u)f(v)$ avec $\lambda \in k^*$. Quitte à changer f en λf on peut donc supposer que f est un caractère et il s'ensuit que g en est un aussi.

On est donc ramené au cas d'un caractère polynomial. Notons déjà que, dans ce cas, on a $\chi(\lambda \text{Id}_E) = \lambda^d$. En effet, la restriction de χ aux homothéties est un homomorphisme de k^* dans lui-même, polynomial, et on voit aussitôt qu'il est nécessairement de la forme λ^d . On considère alors, pour $u \in GL(E)$ l'adjoint u^* (correspondant à la matrice des cofacteurs de (u_{ij})). On a $uu^* = \det u \text{Id}_E$, d'où $\chi(u)\chi(u^*) = \chi(\det u \text{Id}_E) = (\det u)^d$. Mais, on vérifie aussitôt que $\det u$, vu comme polynôme en les u_{ij} , est irréductible (essentiellement parce qu'il est de degré 1 en chaque variable), de sorte que $\chi(u)$ est bien une puissance de $\det u$.

1.3.4 Invariants

1.3.11 Définition.

1) Soit G un groupe opérant sur un ensemble X . On appelle **invariant** (ou **invariant absolu**) de X sous G tout élément $x \in X$ qui vérifie $g.x = x$ pour tout $g \in G$.

2) Si X est un k -espace vectoriel et si χ est un caractère de G on dit qu'un élément $x \in X$ est un **invariant relatif de poids χ** si on a, pour tout $g \in G$, $g.x = \chi(g)x$. Pour $\chi = 1$ on retrouve la notion d'invariant absolu.

2') En particulier, une application $f : X \rightarrow k$ est un **invariant relatif de poids**⁴ χ si on a, pour tout $g \in G$ et tout $x \in X$, $f(g.x) = \chi(g)^{-1}f(x)$.

1.3.12 Remarques.

1) Si l'opération de G sur E est linéaire et si, pour un x non nul de E , on a, pour tout $g \in G$, $g.x = \chi(g)x$, avec $\chi(g) \in k$, χ est automatiquement un caractère de G .

2) La notion d'invariant relatif sera essentiellement utilisée dans le cas $G = GL(E)$ avec $\chi_p = \det^p$. Dans ce cas on parle d'un invariant de poids p .

3) Dans le cas des fonctions de X dans k , si G opère trivialement sur k , la définition 2) s'écrit $g.f = \chi(g)f$, c'est-à-dire, pour $x \in X$, $g.f(x) = f(g^{-1}.x) = \chi(g)f(x)$. C'est bien ce que donne la formule de 2') en changeant g en g^{-1} .

Exemples

On reprend les notations du paragraphe 1.3.2. En particulier, E est de dimension 3.

1) L'application φ de $E \times E^*$ dans k qui au couple (x, f) associe $f(x)$ est un invariant absolu sous $GL(E)$. En effet, on a $(g.\varphi)(x, f) = \varphi(g^{-1}.(x, f)) = \varphi(g^{-1}.x, g^{-1}.f) = \varphi(g^{-1}(x), f \circ g) = f \circ g(g^{-1}(x)) = f(x) = \varphi(x, f)$.

En coordonnées, on en déduit, avec les notations de 1.3.2, que le polynôme $f(x) = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3$ est un invariant absolu. Rappelons qu'on a désigné ces invariants sous le nom **d'évaluations**.

2) Si x, y, z sont trois vecteurs, le polynôme :

$$[x, y, z] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

est un invariant relatif de poids -1 . En effet, si γ est l'application de k^3 dans k définie par $\gamma(x, y, z) = [x, y, z]$, on a $\gamma(g.m) = \det g \gamma(m)$, de sorte que γ est un invariant relatif au caractère $(\det g)^{-1}$, donc de poids -1 (cf. 1.3.11.2').

3) Si f, g, h sont trois formes, le polynôme

$$[f, g, h] = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}$$

⁴Certains auteurs, cf. [JD70], définissent cette notion avec $\chi(g)$ au lieu de $\chi(g)^{-1}$. La logique de cette définition est qu'un invariant relatif est alors un invariant dans l'opération de G sur $\mathcal{F}(X, k)$, en faisant opérer G sur k par l'intermédiaire de χ . La différence est minime, mais je me suis rallié ici à la version de [Gur64].

est un invariant relatif de poids 1.

1.3.13 Remarques.

1) Nous utiliserons principalement le mot invariant au sens “invariant numérique”, c’est-à-dire pour des fonctions (de vecteurs, de formes, de points, etc.) à valeurs dans k (ou pour leurs variantes formelles : polynômes, fractions rationnelles). Dans le cas de l’opération de G définie en 1.3.3 sur l’ensemble $\mathcal{F}(X, Y)$ des applications de X dans Y , la notion d’invariant devient celle de concomitant, voir ci-dessous 2.3.1.

2) Nous verrons au chapitre 3 que les invariants du type $f(a)$ et les crochets sont essentiellement les seuls invariants du groupe $SL(3)$.

3) La définition des invariants s’applique à l’action de $PGL(E)$ sur les fonctions “géométriques” définies sur l’espace projectif, cf. 1.2.14. D’une certaine manière ces invariants sont même les seuls qui ont un sens géométrique par rapport aux points. Ainsi, le birapport

$$[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}] = \frac{[c, a][d, b]}{[c, b][d, a]}$$

qui est bien invariant sous $PGL(E)$, ne dépend que des points $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ contrairement aux crochets qui le composent et qui dépendent, eux, des représentants vectoriels de ces points. Pour se convaincre de l’intérêt de ces invariants projectifs, il suffit de regarder la place prise par le birapport dans la partie I. Pour une détermination des invariants projectifs, voir 3.4.3, 3.4.10, 3.4.14.

Nous aurons besoin d’un type d’invariant plus général encore que les invariants relatifs :

1.3.14 Définition. Soit G un groupe opérant sur l’ensemble X . Une application $f : X \rightarrow k$ est appelée un **invariant projectif sous G de multiplicateur μ** , s’il existe une application $\mu : G \times X \rightarrow k^*$ telle que l’on ait $f(x) = \mu(g, x) f(g.x)$ pour tout $x \in X$ et tout $g \in G$.

1.3.15 Remarque. Le cas d’un invariant relatif est le cas particulier où $\mu(g, x) = \chi(g)$ est indépendant de x . En vérité, la définition 1.3.14 est presque vide car $f(x)$ et $f(g.x)$ sont deux scalaires, donc proportionnels. La seule requête est du côté de la nullité, c’est la proposition suivante.

1.3.16 Proposition. Avec les notations précédentes, f est un invariant projectif si et seulement si $V(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ est invariant sous G .

Démonstration. La condition d’invariance donne aussitôt $V(f) = V(g^{-1}.f)$. Réciproquement, l’invariance de $V(f)$ permet de définir μ en posant $\mu(g, x) = 1$ si $f(x) = 0$ et $\mu(g, x) = \frac{f(x)}{f(g.x)}$ sinon et on a la formule voulue.

1.3.17 Remarque. Supposons que X soit un espace vectoriel. Une forme linéaire sur X est un invariant projectif sous $GL(X)$ si et seulement si c'est un invariant relatif. En revanche, si $q : X \rightarrow k$ est une forme quadratique anisotrope, c'est un invariant projectif sous $GL(X)$ (mais pas un invariant relatif). En effet, on a $V(q) = V(g.q) = \{0\}$.

1.4 Compléments sur les représentations

Dans cette section, on entre un peu plus dans la théorie des représentations. Le lecteur qui souhaiterait plus de précisions sur ce thème est renvoyé à [Fog69]. Notre objectif est le théorème 1.4.11 qui relie idéaux invariants et idéaux engendrés par des invariants. On verra que la question cruciale est de séparer deux orbites par des fonctions et que cela impose que les orbites soient fermées, condition qui prendra toute sa place dans la section suivante.

Dans ce paragraphe, on suppose⁵ k **algébriquement clos**.

1.4.1 L'opérateur de Reynolds

Groupes linéairement réductifs

Une définition tout d'abord :

1.4.1 Définition. Soit G un groupe algébrique affine⁶ et soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation. On dit que ρ est **admissible** si pour tout $v \in V$ il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie W contenant v et stable par G .

1.4.2 Remarque. Si G est le groupe $GL(E)$ ou l'un de ses avatars, on a vu en 1.3.2 qu'il opère sur l'algèbre symétrique $S(E^m \times (E^*)^n)$, c'est-à-dire l'anneau des polynômes $R = k[a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_n]$. Cette représentation $G \rightarrow GL(R)$ est admissible. En effet, si P est un polynôme de degré (total) $\leq d$, il est contenu dans le sous-espace stable des polynômes de degré $\leq d$.

Nous admettrons le théorème suivant :

1.4.3 Théorème. (Weyl) On suppose k algébriquement clos et de caractéristique 0. Le groupe $G = GL(E)$ est **linéairement réductif**, ce qui signifie que si $\rho : G \rightarrow GL(V)$ est une représentation admissible, et si $W \subset V$ est

⁵On peut se passer de cette hypothèse en utilisant la notion de propriété "géométrique" au sens de Grothendieck.

⁶C'est-à-dire un groupe isomorphe à un sous-groupe fermé (pour la topologie de Zariski) d'un groupe $GL(n, k)$. Dans notre cas, il s'agira toujours de l'un des groupes $GL(E)$ ou $SL(E)$ ou des groupes projectifs associés $PGL(E)$ et $PSL(E)$.

un sous-espace vectoriel stable par G , il admet un supplémentaire W' stable par G . La même assertion vaut pour $SL(E)$, $PGL(E)$ et $PSL(E)$.

Démonstration. On renvoie à [Fog69] pour une preuve. L'hypothèse sur la représentation admissible permet de se ramener au cas où V est de dimension finie, voir [Fog69] 4.5. Comme on est en caractéristique 0, on se ramène à la même propriété pour l'algèbre de Lie de G (*loc. cit.* 3.31) et on traite ce dernier cas (*loc. cit.* 4.35).

Le lecteur qui s'interrogerait sur ce qui se passe en caractéristique p ira consulter le premier appendice de [Mum65] et la bibliographie attenante.

Une autre notion fondamentale en théorie des représentations est celle d'irréductibilité :

1.4.4 Définition. Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation. On dit que ρ est **irréductible** (ou que V est irréductible sous G) si les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par G sont (0) et V .

Lorsqu'un groupe est linéairement réductif, ses représentations se décomposent en morceaux irréductibles :

1.4.5 Proposition. Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation, avec V de dimension finie et G linéairement réductif. Alors V est somme directe $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ où les V_i sont des sous-espaces stables irréductibles.

Démonstration. C'est évident en raisonnant par récurrence sur la dimension de V .

L'opérateur de Reynolds

1.4.6 Corollaire. Soit G un groupe algébrique affine linéairement réductif, soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation admissible et soit V^G le sous-espace vectoriel des invariants sous G .

1) Il existe un unique supplémentaire stable, noté V_G , de V^G dans V . La projection de V sur V^G parallèlement à V_G est appelée **opérateur de Reynolds** et notée r_V (voire r s'il n'y a pas d'ambiguïté).

2) L'opérateur de Reynolds est fonctoriel : si $u : V \rightarrow W$ est une application linéaire compatible⁷ avec les actions de G , on a $r_W u = u r_V$. En particulier, si V est un sous-espace vectoriel stable de W , l'opérateur r_V est la restriction de r_W à V .

3) Si, de plus, $V = A$ est une k -algèbre, si G opère par homomorphisme de k -algèbres, le sous-espace A^G est un sous-anneau de A et on a l'identité de Reynolds : $r(ab) = r(a)r(b)$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in A^G$.

⁷Cela signifie que l'on a $u(g.v) = g.u(v)$ pour tous g, v .

Démonstration. 1) L'existence de V_G provient du théorème 1.4.3. Pour l'unicité, on montre que si un sous-espace stable W non nul ne rencontre pas V^G il est contenu dans V_G . Sinon, il existerait $x \in W$, $x \notin V_G$. Par l'hypothèse d'admissibilité, on est ramené au cas où W est de dimension finie. Quitte à décomposer W en somme d'irréductibles, on peut supposer W irréductible et non contenu dans V_G . On a alors $W \cap V_G = 0$ (car ce sous-espace est stable) et $W \cap V^G = 0$. On en déduit que W est réduit à 0 (ce qui est absurde). En effet, si on a $x \in W$, il s'écrit $x = y + z$ avec $y \in V^G$ et $z \in V_G$. On applique $g \in G$ et on a $g.x = g.y + g.z = y + g.z$, d'où $g.x - x = g.z - z$. Comme W et V_G sont stables, cet élément est dans $W \cap V_G$, donc nul. On a alors $g.z = z$, mais comme z est dans V_G , supplémentaire des invariants, il est nul. Il reste $x = y$, ce qui, avec $W \cap V^G = 0$, donne $x = 0$.

2) Il est clair que u envoie V^G dans W^G . Montrons que $u(V_G)$ est contenu dans W_G . Vu la preuve du point 1), il suffit de montrer que $u(V_G)$ ne rencontre W^G qu'en 0. Soit $x \in V_G$ tel que $u(x)$ soit invariant. On peut inclure x dans un sous-espace X de V_G , stable par G et irréductible. Comme $u(x)$ est invariant, on a $g.u(x) = u(g.x) = u(x)$, de sorte que $g.x - x$ est dans $\text{Ker } u \cap X$. Comme X est irréductible, $\text{Ker } u \cap X$ (qui est stable par G) est nul ou égal à X . S'il est nul on a $g.x = x$ et x est invariant, donc nul puisqu'il est dans V_G . S'il est égal à X , c'est que X est contenu dans $\text{Ker } u$ et on a $u(x) = 0 \in W_G$.

3) Soit $a \in A$ et $b \in B = A^G$. On calcule $r(b(a - r(a))) = r(ba) - r(br(a))$. Comme b et $r(a)$ sont invariants, leur produit aussi et on a $r(b(a - r(a))) = r(ba) - br(a)$. Mais, $a - r(a)$ est dans A_G , de sorte qu'il reste à montrer le lemme suivant :

1.4.7 Lemme. Soit $a \in A_G$ et $b \in A^G$. On a $ba \in A_G$.

Démonstration. On peut supposer $a \neq 0$. Soit V un sous-espace stable irréductible et de dimension finie contenant a . On a alors $V \subset A_G$ en vertu de l'irréductibilité de V . Comme b est un invariant, on a, pour $g \in G$ et $x \in V$, $g.(bx) = (g.b)(g.x) = b(g.x)$ et bV est un sous-espace stable par G . Soit μ_b la multiplication par b , $\mu_b : V \rightarrow bV$. Elle est compatible avec l'opération de G par la formule précédente. Son noyau est donc stable par G , et, comme V est irréductible, on voit que μ_b est nulle ou injective. Dans le premier cas on a $ba = 0 \in A_G$. Dans le second, il suffit de montrer $bV \cap A^G = 0$ (voir la preuve de 1.4.6.1). Supposons qu'on ait bx invariant, avec $x \in V$. On a alors $g.(bx) = b(g.x) = bx$, de sorte que $g.x - x$ est dans le noyau de μ_b , donc nul. Mais, comme x est dans A_G , cela implique que x est nul et on a gagné.

1.4.2 Idéaux invariants, idéaux engendrés par des invariants

1.4.8 Notations. Le corps k est toujours algébriquement clos. Le groupe G est un groupe algébrique affine linéairement réductif, par exemple $GL(E)$ ou ses variantes. On suppose que le groupe G opère sur une variété algébrique affine V d'anneau A . On note B le sous-anneau des invariants de A . On s'intéresse aux liens entre les sous-variétés fermées $W \subset V$ invariantes sous G , les idéaux de A invariants sous G et les idéaux de A engendrés par des invariants.

1.4.9 Proposition. *Avec les notations de 1.4.8, si W est invariante sous G , l'idéal $I(W)$ est invariant sous G . Inversement, s'il existe un idéal J invariant sous G tel que $W = V(J)$, W est invariante.*

Démonstration. Rappelons que g opère sur A par $(g.F)(x) = F(g^{-1}.x)$. Si W est invariante et F nul sur W , on voit qu'il en est de même de $g.F$.

Supposons $W = V(J)$ avec J invariant. Si x est dans W et g dans G , il s'agit de montrer qu'on a $F(g.x) = 0$ pour tout $F \in J$. Mais on a $F(g.x) = (g^{-1}.F)(x)$ et comme J est invariant, $(g^{-1}.F)$ est dans J , donc nul en x .

1.4.10 Remarque. Un idéal engendré par des invariants est évidemment invariant, mais la réciproque est fausse comme nous le verrons plus loin. On a cependant le résultat fondamental suivant.

1.4.11 Théorème. *On suppose k algébriquement clos et de caractéristique 0. On reprend les notations de 1.4.8, avec l'hypothèse supplémentaire suivante :*

() On suppose que les orbites de G dans V sont **fermées**⁸.*

Alors, W est invariant sous G si et seulement si il existe un idéal J engendré par des invariants tel que $W = V(J)$. L'idéal $I(W)$ est la racine⁹ de l'idéal J .

Démonstration. On pose $I = I(W)$, $I_0 = I \cap B$, $J = I_0A$ et $X = V(J)$. Comme on a $J \subset I$, on a $W \subset X$. Montrons que ces ensembles sont égaux. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $y \in X$, $y \notin W$. On considère l'orbite Y de y . Cette orbite est fermée et, comme W est stable sous G , elle est disjointe de W . On a alors le lemme suivant :

⁸Si le corps n'était pas algébriquement clos, il faudrait supposer que les orbites sont "géométriquement" fermées, c'est-à-dire qu'elles le restent quand on passe à une clôture algébrique.

⁹Rappelons que cela signifie que, pour tout $a \in I(W)$, il existe un entier n tel que $a^n \in J$.

1.4.12 Lemme.

- 1) Il existe $f \in I(W)$, $g \in I(Y)$ tels que l'on ait $1 = f + g$.
 2) Dans la situation du théorème, il existe $b \in B$ nulle sur W et non nulle en y .

Démonstration. (du lemme)

1) On considère l'idéal $L = I(W) + I(Y)$. On a $V(L) = W \cap Y = \emptyset$ puisque W et Y sont disjoints. En vertu du Nullstellensatz, on a donc $1 \in L$, d'où le résultat.

2) On écrit $1 = f + g$ avec $f \in I(W)$ et $g \in I(Y)$. On applique l'opérateur de Reynolds $r = r_A$. Comme $I(W)$ et $I(Y)$ sont invariants sous G , ils sont stables par r et on a $1 = r(f) + r(g)$, avec $r(f)$ et $r(g)$ invariants et nuls respectivement sur W et Y . Il est clair que $b = r(f)$ convient.

On a ainsi $b \in I_0$, donc $b \in J$. La fonction b devrait être nulle en y et c'est absurde. On a bien montré que $X = V(J)$ est égal à W , ce qui, comme J est engendré par des invariants, est le résultat souhaité. Le Nullstellensatz impose alors que $I(W)$ est la racine de l'idéal J .

1.4.13 Remarque. J'ignore s'il est vrai que $I(W)$ lui-même est engendré par des invariants. L'exemple suivant incite à la prudence. On considère l'anneau A quotient de $k[X_1, \dots, X_n]$ par l'idéal engendré par tous les polynômes $X_i X_j$ pour $i, j = 1, \dots, n$. On note x_i l'image de X_i dans A . On fait opérer GL_n de la manière naturelle sur A en posant $g.x_j = \sum_i a_{ij} x_i$ si g a pour matrice (a_{ij}) . L'idéal $N = (x_1, \dots, x_n)$, de carré nul, est invariant, mais pas engendré par des invariants (les seuls invariants sont les constantes).

Chapitre 2

Propriétés, constructions et théorèmes projectifs

Ce chapitre est le cœur de cette partie. Il s'agit de montrer les liens entre les objets algébriques introduits au chapitre précédent et les théorèmes de la géométrie projective. On y définit précisément les trois termes de cette géométrie : propriétés, constructions et théorèmes projectifs et on établit le résultat théorique essentiel 2.4.4 sur lequel s'appuieront les chapitres suivants et qui affirme que tout théorème de géométrie projective peut s'interpréter comme une relation entre des invariants. La preuve de ce résultat utilise quelques outils de géométrie algébrique et de théorie des représentations et, de ce fait, elle est moins élémentaire que le reste de ce livre. On donne aussi quelques premiers exemples d'applications de cette théorie (constructions à la règle, théorème de Pappus, etc.). Ces exemples seront repris et amplifiés aux chapitres 4 et 5.

Les notations sont celles du chapitre précédent.

2.1 Propriétés projectives

La problématique des prochaines sections est la suivante. On s'intéresse à la géométrie projective linéaire plane dont les objets d'étude sont les points et les droites de $\mathbf{P}(E)$ (E est toujours de dimension 3), donc les $m+n$ -uplets $(a_1, \dots, a_m; D_1, \dots, D_n)$ de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$. On désignera simplement sous le nom d'**objets** ces $m+n$ -uplets dans ce qui suit et on les notera parfois $(\underline{a}, \underline{D})$.

On commence par le premier terme de la trilogie : définir précisément la notion de propriété projective de ces objets.

2.1.1 Définition des propriétés projectives

2.1.1 Définition. On appelle **propriété** d'un objet $(\underline{a}, \underline{D}) \in \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ une partie \mathcal{P} de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$.

La partie \mathcal{P} est simplement l'ensemble des objets satisfaisant à une certaine propriété (autrement dit, on définit la propriété “en extension”, c'est-à-dire en précisant quels sont les objets qui la vérifient).

2.1.2 Exemples.

1) L'ensemble correspondant à la propriété du couple formé par un point a et une droite D : “le point est sur la droite”, est l'ensemble :

$$\mathcal{P} = \{(a, D) \in \mathbf{P}(E) \times \mathbf{P}(E^*) \mid a \in D\}.$$

2) L'ensemble correspondant à la propriété d'alignement de trois points est :

$$\mathcal{P} = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{P}(E)^3 \mid \text{il existe } D \text{ contenant } a_1, a_2, a_3\}.$$

Caractéristiques topologiques des propriétés

Maintenant que nous avons identifié une propriété comme une partie d'un produit d'espaces projectifs, nous pouvons en donner un début de classification, grâce à la topologie de Zariski.

2.1.3 Définition. Soit $\mathcal{P} \subset \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ une propriété. On dit que la propriété est fermée (resp. ouverte, resp. localement fermée¹) si elle l'est au sens de la topologie de Zariski.

2.1.4 Exemples.

1) Les propriétés fermées sont sans doute les plus importantes. En voici quelques exemples : un point \bar{a} appartient à une droite D d'équation f (la propriété est fermée car elle correspond à la nullité du polynôme $f(a)$). Trois points a_1, a_2, a_3 sont alignés (c'est la nullité du crochet $[a_1, a_2, a_3]$), trois droites d'équations f_1, f_2, f_3 sont concourantes (c'est la nullité de $[f_1, f_2, f_3]$).
2) Les propriétés ouvertes sont simplement les négations des précédentes (deux points sont distincts, un point n'est pas sur une droite, trois points

¹Rappelons qu'une partie est dite localement fermée si elle est intersection d'un ouvert et d'un fermé. Il y a, en géométrie algébrique, une notion plus faible, qui est d'être réunion finie de localement fermés. On parle de parties “constructibles” au sens de Chevalley.

ne sont pas alignés, etc.). En particulier le fait que trois points forment un repère d'une droite ou que quatre points forment un repère du plan sont des propriétés ouvertes.

3) Le cas localement fermé correspond à une propriété mixte, par exemple, le fait que trois points soient distincts, mais alignés.

4) L'égalité des birapports $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \llbracket a', b', c', d' \rrbracket$ de points d'une droite projective est une propriété localement fermée. En effet, elle nécessite déjà de supposer les points a, b, c (resp. a', b', c') distincts, et s'exprime ensuite comme une égalité de crochets, voir Partie I, ??, donc par la nullité d'un polynôme.

Dans la suite, nous nous limiterons aux propriétés localement fermées. Les exemples ci-dessus montrent en effet que cela englobe les plus importantes.

Propriétés projectives

Parmi la multitude des propriétés possibles, il s'agit de dire lesquelles sont "projectives". La définition est dans l'esprit du programme d'Erlangen, il s'agit des propriétés qui résistent à un changement de repère projectif, i.e. à une homographie. On a vu que le groupe² $PGL(E)$ opère sur $\mathbf{P}(E)$ et $\mathbf{P}(E^*)$, donc aussi sur $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ par la formule : $g.(a_1, \dots, a_m; D_1, \dots, D_n) = (g.a_1, \dots, g.a_m; g.D_1, \dots, g.D_n)$. La définition est alors la suivante :

2.1.5 Définition. Soit $\mathcal{P} \subset \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ une propriété. On dit que la propriété est **projective** si elle est localement fermée et invariante par homographie : $g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ pour tout $g \in PGL(E)$.

2.1.6 Exemples.

1) Tous les exemples ci-dessus (incidence, alignement, concours) sont des propriétés projectives. Comme on a vu qu'il s'agit de propriétés fermées, il reste à voir l'invariance par homographie. Cela vient essentiellement du fait que les homographies transforment droite en droite, cf. 1.3.6.

2) Le contre-exemple type de propriété non projective dans le plan s'obtient en prenant une propriété affine : on choisit une droite D_∞ et on définit la propriété de parallélisme relative à cette droite, deux droites étant dites parallèles si elles se coupent sur D_∞ . Cette propriété n'est pas projective car une homographie peut transformer D_∞ en n'importe quelle autre droite.

3) L'égalité des birapports évoquée ci-dessus est une propriété projective puisque le birapport est invariant par homographie.

²On notera que, lorsque $PGL(E)$ opère sur un ensemble X , c'est vrai aussi pour $GL(E)$ et $SL(E)$ et que les invariants sous PGL sont aussi des invariants pour les autres.

2.1.2 Caractérisation des propriétés fermées projectives : premiers pas

L'objectif de ce paragraphe est de faire le lien entre propriétés projectives et invariants. On travaille dans l'espace $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$. On suppose E muni d'une base et E^* de la base duale. On note $a_{i,k}, f_{j,k}$ ($k = 1, 2, 3$) les coordonnées homogènes des a_i, f_j sur les bases. Les fonctions polynomiales sur $E^m \times (E^*)^n$ s'identifient alors à l'anneau $R = k[a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_n]$ sur lequel opère G (voir 1.3.2). Les fermés de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ sont définis par les idéaux multi-homogènes de cet anneau.

Fermé invariant, idéal invariant

La proposition suivante est l'analogue projectif de 1.4.9 et sa démonstration est identique.

2.1.7 Proposition. *Soit I un idéal de R , multi-homogène en les a_i et les f_j et soit $V = V(I)$ l'ensemble de ses zéros dans $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$.*

1) *Si I est invariant sous $G := GL(E)$, V est invariant sous $PGL(E)$ et V est une propriété projective fermée. C'est le cas, en particulier, si I est engendré par des polynômes qui sont des invariants relatifs sous $GL(E)$, ou s'il est engendré par des polynômes qui sont permutés par $GL(E)$ à un scalaire près.*

2) *Inversement, un fermé V de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ est invariant sous $PGL(E)$ si et seulement si l'idéal $I(V)$ des fonctions polynomiales nulles sur V est invariant sous $GL(E)$.*

Démonstration. 1) Rappelons que g opère sur R par $(g.F)(x) = F(g^{-1}.x)$. Si x est dans V et g dans G , il s'agit de montrer qu'on a $F(g.x) = 0$ pour tout $F \in I$. Mais on a $F(g.x) = (g^{-1}.F)(x)$ et comme I est invariant, $(g^{-1}.F)$ est dans I , donc nul en x . Si I est engendré par des polynômes F_α , avec $\alpha \in A$ vérifiant $g.F_\alpha = \lambda F_{\sigma_g(\alpha)}$, où λ est un scalaire non nul et σ_g une permutation de A , il est clair que $g.I$ est engendré par les mêmes polynômes, donc que I est invariant.

2) En un sens cela vient de la formule $V(I(V)) = V$ et du point 1). Pour l'autre, si V est invariant et F nul sur V , cela résulte de la formule $g.F(x) = F(g^{-1}.x)$.

La réciproque

La proposition précédente montre qu'une propriété projective fermée est définie par un idéal invariant sous $GL(E)$, mais, **attention, elle n'assure**

pas que cet idéal est engendré par des polynômes invariants (même relatifs). L'exemple suivant montre qu'on ne peut espérer que cette propriété soit vraie en général et on va devoir utiliser la propriété des orbites fermées 1.4.11.

2.1.8 Exemple. On considère la propriété \mathcal{P} de $\mathbf{P}(E) \times \mathbf{P}(E)$ qui dit que deux points x, y sont égaux, c'est-à-dire la diagonale du produit. C'est clairement une propriété projective fermée et pourtant, elle n'est pas définie par des invariants, car les seuls invariants formés avec deux vecteurs de E sont les constantes.

Une façon de surmonter cette difficulté consiste à introduire une base a, b, c . Cela permet d'écrire x, y sur cette base en termes d'invariants : $x = \frac{[x, b, c]}{[a, b, c]}a + \frac{[a, x, c]}{[a, b, c]}b + \frac{[a, b, x]}{[a, b, c]}c$ et de traduire l'égalité de x, y par la relation $[x, b, c][a, y, c] - [a, x, c][y, b, c] = 0$ et les relations obtenues par permutation. Attention, cependant, ces équations définissent la réunion de deux fermés : le fermé $x = y$ mais aussi le fermé a, b, c alignés !

On voit que pour avoir le théorème souhaité (une propriété est projective si et seulement si elle est définie par un idéal engendré par des invariants), il est nécessaire de disposer de suffisamment de points ou de droites, en position suffisamment générale. La formalisation de cette idée passe par les notions d'objets pré-stables et d'ouverts affines standard que nous définissons maintenant. Le résultat attendu sera obtenu en 2.2.19 à la fin de la section suivante.

2.2 Pré-stabilité, ouverts affines standard et orbites fermées

Cette section, et, en particulier, la notion de pré-stabilité, est inspirée du début du livre [Mum65] de Mumford, livre riche, profond, mais difficile. On a tenté d'en extraire les points les plus élémentaires, mais il n'en demeure pas moins que cette partie est sans doute un peu plus ardue que le reste de ce livre. Nous reviendrons sur les notions de stabilité au chapitre 7.

L'idée initiale est très simple. Notre objectif est de prouver un théorème qui affirme que, sous certaines conditions, un idéal invariant est engendré par des invariants. On a vu en 1.4.11 qu'il suffit pour cela est que les orbites sous l'action du groupe soient fermées. Si cette condition n'est pas réalisée, c'est qu'il y a un point y qui est dans l'adhérence d'une orbite $\omega(x)$ mais pas dans cette orbite. On montre alors que cela implique que l'orbite de y est toute entière contenue dans l'adhérence de $\omega(x)$. Comme tous ces espaces

sont des variétés algébriques irréductibles, cela implique que la dimension de $\omega(y)$ est plus petite que celle de $\omega(x)$. Si l'on se souvient que l'orbite d'un point est le quotient du groupe par le stabilisateur de ce point, la différence de dimension des orbites correspond à une différence de dimension en sens inverse des stabilisateurs. Il y a alors une solution simple pour éviter ce phénomène : imposer que les stabilisateurs soient tous finis, voire triviaux. C'est exactement la définition de la pré-stabilité.

2.2.1 Pré-stabilité

Définition et caractérisation géométrique

2.2.1 Définition. Soit $q = (a_1, \dots, a_m; D_1, \dots, D_n)$ un élément de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$. On dit que q est **pré-stable** (relativement à l'action naturelle de $\mathrm{PGL}(E)$) si le stabilisateur de q est réduit à l'identité.

Nous allons donner une caractérisation géométrique des objets pré-stables (voir 2.2.5). Cela nécessite quelques notions supplémentaires :

2.2.2 Définition. Soit $q = (a_1, \dots, a_m; D_1, \dots, D_n)$ un élément de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$. On lui associe un élément q^* de $\mathbf{P}(E^*)^N$ qui est formé des droites D_k (s'il y en a), dans l'ordre, et des droites $(a_i a_j)$ (lorsque ces points sont distincts), dans l'ordre lexicographique. On associe ensuite à q un élément $q^\sharp \in \mathbf{P}(E)^M$ formé des points a_i et des points d'intersection des droites de q^* (lorsqu'elles sont distinctes), dans l'ordre lexicographique³.

2.2.3 Remarques.

1) Attention, on ne peut en général définir des applications $q \mapsto q^*$ et $q \mapsto q^\sharp$ à cause des conditions de position générale. Ainsi, si l'on prend $q = (a, b, c, d)$, on a, en général, $q^* = ((ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd))$, mais cela ne vaut que si les points sont tous distincts. S'ils sont tous égaux, q^* n'existe pas. De même, on a en général $q^\sharp = (a, b, c, d, c', b', a')$ où a', b', c' sont les intersections de (ad) et (bc) , (bd) et (ca) et (cd) et (ab) respectivement, mais, cela ne vaut que si ces droites et leurs intersections existent, par exemple si a, b, c, d est un repère. Dans le cas contraire on a $q^\sharp = (a, b, c, d)$.

2) Toutefois, si q est un objet donné, on lui associe bien un élément $q^\sharp \in \mathbf{P}(E)^N$ et il existe un ouvert $D(q) \subset \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ sur lequel l'application $q \mapsto q^\sharp$ est bien définie et à valeurs dans le même $\mathbf{P}(E)^N$. Par exemple, si q contient deux droites D_1 et D_2 distinctes permettant de définir le point d'intersection de ces droites, on imposera la condition $D_1 \neq D_2$ aux objets

³Si l'on veut à tout prix donner des noms à ces objets, je propose d'appeler q^* la droiture de q et q^\sharp sa pointure.

de $D(q)$.

3) Il est clair que, si $u \in PGL(E)$ laisse stable q , il laisse stable q^\sharp . La réciproque est fausse comme le montre l'exemple $q = (a, D)$ pour lequel on a $q^\sharp = a$. On a cependant le lemme suivant :

2.2.4 Lemme. *Soit $q \in \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Les points de q sont alignés sur une droite D et les droites de q sont concourantes en un point $a \in D$.*
 - 2) *Les points de q^\sharp sont alignés.*
- Sauf dans le cas où la condition précédente est réalisée, les stabilisateurs de q et de q^\sharp sont égaux.*

Démonstration. Il est clair que 1) implique 2) car alors q^\sharp est formé des points a_i et (peut-être) du point a . Inversement, si les points de q^\sharp sont alignés sur D , ceux de q le sont aussi. Si une des droites D_i est distincte de D elle coupe D en a . Mais alors, les autres droites D_j coupent D_i en a (sinon leur intersection serait un point de q^\sharp hors de D).

Supposons que ces conditions ne sont pas réalisées et soit $u \in PGL(E)$ stabilisant q^\sharp . Il est clair que u laisse fixe les points a_i de q . Soit D une droite de q . Si elle contient deux points distincts de q^\sharp elle est invariante. Sinon, c'est que toutes les droites D_i et toutes les droites $(a_i a_j)$ passent par un même point $a \in D$. Cela implique que tous les points de q sont alignés sur une droite passant par a (s'il y a un triangle dans les a_i , l'un de ses côtés ne passe pas par a). Mais alors, la condition 1) est réalisée, ce qui est absurde.

2.2.5 Théorème. *On reprend les notations de 2.2.2 et on suppose⁴ $k \neq \mathbf{F}_2$. Soit $q = (a_1, \dots, a_m; D_1, \dots, D_n)$ un élément de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *L'objet q est pré-stable.*
- 2) *L'objet q^\sharp est pré-stable.*
- 3) *L'objet q^\sharp de q contient un repère de $\mathbf{P}(E)$.*
- 4) *Les points de q^\sharp ne sont pas contenus dans la réunion d'une droite et d'un point.*
- 5) *On a l'une des conditions suivantes :*
 - i) *Les a_i contiennent un repère de $\mathbf{P}(E)$.*
 - ii) *Il existe une droite D_l qui ne contient pas deux points distincts parmi les a_i et qui coupe les droites $(a_i a_j)$ en trois points distincts au moins.*

⁴Si k est le corps \mathbf{F}_2 , on vérifie que q est pré-stable dès qu'il contient trois points non alignés, ou trois droites non concourantes, ou deux droites distinctes et deux points distincts non alignés avec l'intersection des droites.

iii) Les points a_i ne sont pas tous alignés et il y a deux droites distinctes D_l, D_p distinctes des $(a_i a_j)$ et ne se coupant pas en l'un des a_i .

iv) Les conditions duales des trois précédentes.

2.2.6 Remarque. Si la condition ii) est vérifiée sans que i) le soit, les points a_i ne sont pas tous alignés, mais sont inclus dans la réunion d'une droite D et d'un point a et l'on est dans l'une des situations suivantes :

ii.1) L'une des droites D_l ne passe par aucun des a_i .

ii.2) Il y a au moins trois points a_i distincts sur D . L'une des droites D_l est distincte de D , passe par l'un des a_i de D mais ne passe pas par a .

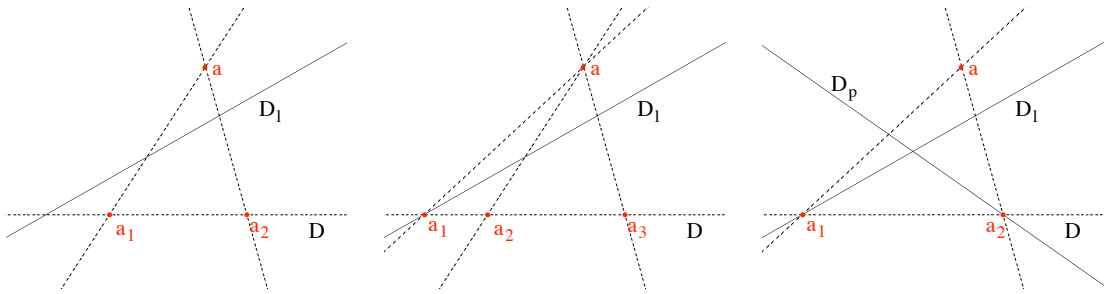


Figure 2.1: Les cas ii.1, ii.2 et iii.

Démonstration. Montrons d'abord l'équivalence des conditions 3) et 4). Il est clair que 3) implique 4). Réciproquement, comme les points ne sont pas alignés, il y a au moins trois points non alignés a, b, c parmi les points a_i de $q^\#$. S'il existe d tel que a, b, c, d est un repère on a fini. Sinon, c'est que les points a_i sont tous sur les côtés du triangle abc . Comme les a_i ne sont pas contenus dans la réunion d'une droite et d'un point, il y en a sur deux côtés au moins, disons d sur (ab) (distinct de a et b) et e sur (ac) (distinct de a et c). Mais alors on vérifie que b, c, d, e est un repère.

Montrons ensuite l'équivalence de 2) et 3). Il est clair que 3) implique 2). Pour l'implication inverse, si 3) n'est pas vérifié, 4) non plus, de sorte que les points de $q^\#$ sont contenus dans la réunion d'une droite D et d'un point a . Mais alors, le stabilisateur de $q^\#$ contient les homologies d'axe D et de centre a , cf. Partie I ?? et, sur un corps k quelconque, il y en a $|k| - 1$, donc au moins une non triviale.

L'équivalence de 1) et 2) est alors claire. En effet, si u stabilise q il stabilise aussi $q^\#$, ce qui montre que 2) implique 1). Inversement, si q est pré-stable, on ne peut être dans le cas d'exception de 2.2.4 (sinon les élations d'axe D et de centre a stabiliseraient q , voir Partie I *loc. cit.*), de sorte que $q^\#$ est pré-stable aussi.

Il reste à montrer l'équivalence de 4) (ou 3)) et 5). On vérifie, par examen des cas, que 5) implique 4) (pour la condition ii), utiliser 2.2.6).

Montrons que 3) implique 5). On sait que le stabilisateur de q est trivial. Si q contient un repère de $\mathbf{P}(E)$ ou du dual, on a fini. On suppose désormais que l'on n'est pas dans l'un de ces cas. Cela signifie que les points a_i distincts sont tous alignés sauf au plus un et que les droites D_i distinctes sont toutes concourantes sauf au plus une. De plus, il est clair qu'on ne peut avoir à la fois les points a_i alignés et les droites D_i concourantes (sinon il y aurait des homologies ou des élations qui stabiliseraient q). Supposons par exemple les points non tous alignés (l'autre cas correspond aux variantes duales).

Les points a_i sont dans la réunion d'une droite D et d'un point a . Si D contient au moins trois points a_i distincts, il y a au moins une droite D_l distincte de D et ne passant pas par a (sinon le stabilisateur de q est non trivial) et l'une des conditions de 2.2.6 est vérifiée. Il reste donc le cas où les a_i comprennent seulement trois points a, b, c non alignés. Si l'on n'est pas dans les cas *ii*), les droites D_k distinctes des côtés de abc passent toutes par l'un des points a, b, c . S'il y a au plus une telle droite, le stabilisateur de q est non trivial. S'il y en a deux, comme ce ne sont pas des côtés, elles se coupent en un point distinct des a_i et on est dans le cas *iii*).

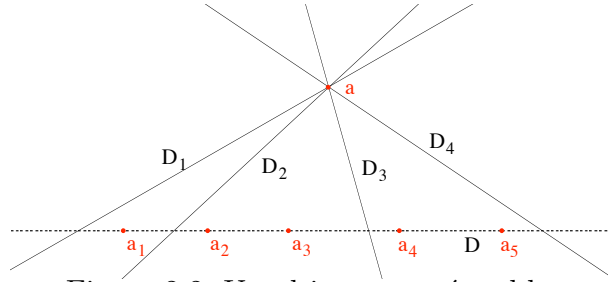


Figure 2.2: Un objet non pré-stable

2.2.7 Remarque. Un objet non pré-stable est de la forme suivante :

$$q = (a_1, \dots, a_m, (a); D_1, \dots, D_n, (D))$$

où les a_i sont alignés sur D et les D_j concourantes en a , le point a et la droite D pouvant faire partie, ou non, de q , voir figure 2.2. En effet, dans ce cas, les homologies⁵ d'axe D et de centre a conservent q . On notera que ce cas est réalisé, en particulier, si m et n sont ≤ 2 .

2.2.8 Corollaire. *L'ensemble des objets pré-stables est un ouvert de Zariski Ω de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$.*

⁵Si l'on connaît la notion de dimension des variétés algébriques, disons sur un corps algébriquement clos, on voit que le stabilisateur est alors de dimension ≥ 1 . Cela montre que dans la définition de pré-stable on aurait pu supposer le stabilisateur de dimension 0, c'est-à-dire fini.

Démonstration. En effet, il est défini par la non nullité de certains crochets ou de certaines évaluations.

2.2.2 Les ouverts standard

L'intérêt des objets pré-stables est que chacun peut être inclus dans un bel ouvert affine de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$. Nous commençons par décrire les différents types d'ouverts en question. On pose $I = \{1, \dots, m\}$ et $J = \{1, \dots, n\}$.

Les ouverts du premier type

2.2.9 Proposition-Définition. *On suppose $m \geq 4$. On choisit 4 indices i, j, k, l distincts dans I , avec $i < j < k$. Pour chaque $\alpha \in I$, $\alpha \neq i, j, k, l$, on choisit deux indices $i_\alpha, j_\alpha \in \{i, j, k\}$, avec $i_\alpha < j_\alpha$. Pour chaque $\delta \in J$, on choisit $l_\delta \in \{i, j, k\}$. Soit $U := U(i, j, k, l; (i_\alpha, j_\alpha)_\alpha, (l_\delta)_\delta) \subset \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ (α varie parmi les indices de $I \neq i, j, k, l$; δ varie dans J) l'ensemble des $m+n$ -uplets $q = (a_1, \dots, a_m; D_1, \dots, D_n)$ vérifiant les conditions suivantes :*

- Les points a_i, a_j, a_k, a_l forment un repère de $\mathbf{P}(E)$.
- Pour chaque $\alpha \neq i, j, k, l$, a_α n'est pas sur la droite $(a_{i_\alpha}, a_{j_\alpha})$.
- Pour chaque $\delta \in J$, la droite D_δ ne passe pas par a_{l_δ} .

L'ensemble U est formé des $q \in \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^)^n$ tels que les crochets $[a_i, a_j, a_k]$, $[a_i, a_j, a_l]$, $[a_i, a_k, a_l]$, $[a_j, a_k, a_l]$, $[a_{i_\alpha}, a_{j_\alpha}, a_\alpha]$ pour $\alpha \neq i, j, k, l$ et les évaluations⁶ $f_\delta(a_{l_\delta})$ soient tous non nuls. C'est un ouvert de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ pour la topologie de Zariski, stable sous l'action de $PGL(E)$. On dit que U est un **ouvert affine standard** du premier type.*

Démonstration. Le fait que U soit défini par les inéquations ci-dessus est la traduction des conditions imposées. C'est un ouvert de Zariski car les crochets et les évaluations sont des polynômes homogènes (cf. 1.2.9) et, comme ce sont des invariants relatifs sous $GL(E)$, U est invariant lui aussi. Le mot "affine" sera expliqué plus loin.

2.2.10 Exemple. Dans le cas de 5 points ($m = 5, n = 0$), un exemple d'ouvert affine standard est l'ensemble des quintuplets $q = (a, b, c, d, e)$ qui vérifient les deux conditions suivantes⁷ :

- i) a, b, c, d est un repère de $\mathbf{P}(E)$,
- ii) e n'est pas sur la droite (ab) .

⁶On note f_1, \dots, f_n les équations des D_i .

⁷On notera que cette condition n'implique pas que les points soient tous distincts : e peut être égal à c ou d .

Les ouverts du second type

La proposition suivante est analogue à 2.2.9 :

2.2.11 Proposition-Définition. *On suppose $m \geq 3$ et $n \geq 1$. On choisit 3 indices i, j, k dans I , avec $i < j < k$ et un indice $l \in J$. Pour chaque $\alpha \in I$, $\alpha \neq i, j, k$, on choisit deux indices $i_\alpha, j_\alpha \in \{i, j, k\}$, avec $i_\alpha < j_\alpha$. Pour chaque $\delta \in J$, $\delta \neq l$, on choisit $l_\delta \in \{i, j, k\}$. Soit $U := U(i, j, k; l; (i_\alpha, j_\alpha)_\alpha; (l_\delta)_\delta) \subset \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ (α varie parmi les indices de I qui sont $\neq i, j, k$; δ parmi ceux de J qui sont $\neq l$) l'ensemble des $m + n$ -uplets $q = (a_1, \dots, a_m; D_1, \dots, D_n)$ vérifiant les conditions suivantes :*

- Les points a_i, a_j, a_k sont non alignés.
- La droite D_l ne passe pas par a_i, a_j, a_k .
- Pour chaque $\alpha \neq i, j, k$, a_α n'est pas sur la droite $(a_{i_\alpha}, a_{j_\alpha})$.
- Pour chaque $\delta \neq l$, le point a_{l_δ} n'est pas sur D_δ .

L'ensemble U est formé des $q \in \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^)^n$ tels que les crochets $[a_i, a_j, a_k]$, $[a_{i_\alpha}, a_{j_\alpha}, a_\alpha]$ pour $\alpha \neq i, j, k$ et les évaluations $f_l(a_i)$, $f_l(a_j)$, $f_l(a_k)$ et $f_\delta(a_{l_\delta})$ soient tous non nuls. C'est un ouvert de Zariski de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$, stable sous l'action de $PGL(E)$. On dit que U est un **ouvert affine standard** du second type.*

Les ouverts du troisième type

Il y a encore un type d'ouvert à considérer :

2.2.12 Proposition-Définition. *On suppose $m \geq 3$ et $n \geq 2$. On choisit 3 indices i, j, k dans I , avec $i < j < k$ et deux indices $l, p \in J$ avec $l < p$. Pour chaque $\alpha \in I$, $\alpha \neq i, j, k$, on choisit deux indices $i_\alpha, j_\alpha \in \{i, j, k\}$, avec $i_\alpha < j_\alpha$. Pour chaque $\delta \in J$, $\delta \neq l, p$, on choisit $l_\delta \in \{i, j, k\}$. Soit $U := U(i, j, k; l, p; (i_\alpha, j_\alpha)_\alpha; (l_\delta)_\delta) \subset \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ (α varie parmi les indices de I qui sont $\neq i, j, k$; δ parmi ceux de J qui sont $\neq l, p$) l'ensemble des $m + n$ -uplets $q = (a_1, \dots, a_m; D_1, \dots, D_n)$ vérifiant les conditions suivantes :*

- Les points a_i, a_j, a_k sont non alignés.
- La droite D_l (resp. D_p) ne passe pas par a_i, a_j , (resp. a_i, a_k).
- Pour chaque $\alpha \neq i, j, k$, a_α n'est pas sur la droite $(a_{i_\alpha}, a_{j_\alpha})$.
- Pour chaque $\delta \neq l, p$, le point a_{l_δ} n'est pas sur D_δ .

L'ensemble U est formé des $q \in \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^)^n$ tels que les crochets $[a_i, a_j, a_k]$, $[a_{i_\alpha}, a_{j_\alpha}, a_\alpha]$ pour $\alpha \neq i, j, k$ et les évaluations $f_l(a_i)$, $f_l(a_j)$, $f_p(a_i)$, $f_p(a_k)$ et $f_\delta(a_{l_\delta})$ soient tous non nuls. C'est un ouvert de Zariski de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$, stable sous l'action de $PGL(E)$. On dit que U est un **ouvert affine standard** du troisième type.*

Les cas duaux

Le lecteur écrira les ouverts standard de types 4,5,6, respectivement duaux des ouverts de types 3,2,1 précédents, obtenus simplement en inversant les rôles des points et des droites.

Ubiquité des ouverts standard

La première vertu de ces ouverts est de recouvrir l'ouvert des points pré-stables :

2.2.13 Proposition. *L'ouvert Ω des points pré-stables de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ est la réunion des ouverts affines standard.*

Démonstration. On vérifie d'abord que les ouverts affines standard sont contenus dans Ω . Par dualité, il suffit de traiter les types 1,2,3. Dans tous les cas on montre que $q^\#$ contient un repère. C'est évident dans le cas du type 1. Dans le cas du type 2 on a trois points a, b, c non alignés et une droite D ne passant pas par ces points. Si d et e sont les intersections de D avec (ab) et (ac) , b, c, d, e est un repère contenu dans $q^\#$. Dans le cas du type 3, avec les notations de 2.2.12, si D_l ou D_p ne contient aucun des points a_i, a_j, a_k , on raisonne comme pour le type 2. Sinon, on appelle a le point d'intersection de D_l et D_p . Alors, les points a_i, a_j, a_k, a forment un repère, qui est dans $q^\#$.

Inversement, supposons que q est dans Ω .

Si les points a_i de q contiennent un repère a_i, a_j, a_k, a_l , q est dans un ouvert du premier type. En effet, chaque point restant a_α est, au plus, sur deux côtés du triangle $T = a_i a_j a_k$, donc, pour chaque a_α il y a un côté $(a_{i_\alpha} a_{j_\alpha})$ de T qui ne le contient pas. De même, chaque droite D_δ passe au plus par deux sommets de T et il y a donc un sommet a_{l_δ} de T qui n'est pas sur D_δ . Il est clair que q est dans l'ouvert standard correspondant.

Supposons maintenant que les points de q ne contiennent pas de repère. Ils ne sont pas tous alignés, de sorte que les points de q sont situés dans la réunion d'une droite $D = (a_j a_k)$ et d'un point $a_i \notin D$.

Si on a la condition *ii.1)* de 2.2.6, il y a une droite D_l qui ne passe par aucun des points de q . Le même raisonnement que ci-dessus montre que q est dans un ouvert du second type associé à a_i, a_j, a_k et D_l . Si on a la condition *ii.2)* de 2.2.6, on prend pour a_j et a_k deux points de D non situés sur D_l et on a la même situation.

Enfin, si on a la condition *iii)* de 2.2.5, il est clair que q est dans un ouvert du troisième type associé aux points a_i, a_j, a_k et aux droites D_l, D_p .

2.2.3 Les ouverts standard sont affines

Dans ce paragraphe, on justifie le mot affine⁸ accolé aux ouverts standard. Précisément, on montre qu'on a un isomorphisme (au sens des variétés algébriques) entre ces ouverts et des variétés affines de la forme $k^N \times PGL(E)$. Le lecteur est renvoyé aux rappels donnés plus haut et aux références [Per95] ou [Har77] ou [Ful69] en ce qui concerne les notions de géométrie algébrique utilisées ici. Il peut se contenter de savoir qu'un morphisme est défini par des applications polynomiales, voire par des applications rationnelles partout définies, et qu'un tel morphisme est en tous cas continu pour les topologies de Zariski.

On pose encore $I = \{1, \dots, m\}$ et $J = \{1, \dots, n\}$.

2.2.14 Théorème. *Soit $U \subset \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ un ouvert standard de l'un quelconque des types de 1 à 6. On a un isomorphisme $\Psi : k^N \times PGL(E) \rightarrow U$, avec $N = 2(m+n-4)$, compatible avec les opérations de $PGL(E)$ (ce groupe opère trivialement sur k^N et par translation sur lui-même).*

Démonstration. On se contente de faire en détail la preuve dans le cas d'un ouvert du premier type $U := U(i, j, k, l; (i_\alpha, j_\alpha)_\alpha, (l_\delta)_\delta)$. On appelle k_α celui des indices i, j, k qui n'est pas égal à i_α ou j_α . On a donc $\{i, j, k\} = \{i_\alpha, j_\alpha, k_\alpha\}$. De même, on écrit $\{i, j, k\} = \{l_\delta, m_\delta, p_\delta\}$ avec $m_\delta < p_\delta$.

On se donne un élément de $k^{2(m-4)}$ soit $(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) = ((\lambda_\alpha, \mu_\alpha))$, avec $\alpha \in I, \alpha \neq i, j, k, l$ et un élément de k^{2n} , soit $(\underline{u}, \underline{v}) = ((u_\delta, v_\delta))$ avec $\delta \in J$. À ces données on associe un "point-base" $b = (b_1, \dots, b_m; G_1, \dots, G_n) \in \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ comme suit. On pose $b_i = (1, 0, 0)$, $b_j = (0, 1, 0)$, $b_k = (0, 0, 1)$, $b_l = (1, 1, 1)$. Pour $\alpha \neq i, j, k, l$, b_α est défini comme le point qui admet les coordonnées homogènes $\lambda_\alpha, \mu_\alpha$ et 1 situées respectivement là où $b_{i_\alpha}, b_{j_\alpha}, b_{k_\alpha}$ ont leur coefficient 1. Par exemple, si on a $i_\alpha = k, j_\alpha = j$ et $k_\alpha = i$ il s'agit du point $(1, \mu_\alpha, \lambda_\alpha)$. On définit ensuite G_δ comme la droite d'équation g_δ dont les coordonnées sur la base duale de b_i, b_j, b_k sont u_δ, v_δ et 1, le coefficient 1 correspondant à b_{l_δ} et les autres respectivement aux b d'indices m_δ et p_δ . Le point b est dans l'ouvert U . En effet, les points b_i, b_j, b_k, b_l forment un repère, le point b_α n'est pas sur la droite $(b_{i_\alpha} b_{j_\alpha})$ car cette droite est définie par l'annulation de la coordonnée correspondant à k_α qui est justement choisie égale à 1 dans b_α . De même, la droite G_δ ne passe pas par le point b_{l_δ} . On pose alors $\Psi(\underline{\lambda}, \underline{\mu}, \underline{u}, \underline{v}, g) = g(b)$. Il est clair que Ψ est une application polynomiale

⁸La justification donnée ici vaut sans conteste dans le cas algébriquement clos. Pour les autres cas, par exemple le cas réel, il faudrait, pour être correct, travailler en termes de schémas, ce qui nous entraînerait trop loin. Pour mesurer la difficulté du cas réel, voir ci-dessous paragraphe 7.1.2 ou [JB98].

et, comme b est dans U et que U est stable par G , cette application est bien à valeurs dans U et compatible avec les opérations.

Pour définir la réciproque Ψ^{-1} on considère $a = (a_1, \dots, a_m; D_1, \dots, D_n) \in U$, avec D_i d'équation f_i . On lui associe d'abord les $2(m-4)$ birapports⁹ suivants :

$$\lambda_\alpha = \llbracket a_{j_\alpha}; a_{i_\alpha}, a_{k_\alpha}, a_l, a_\alpha \rrbracket \quad \text{et} \quad \mu_\alpha = \llbracket a_{i_\alpha}; a_{j_\alpha}, a_{k_\alpha}, a_l, a_\alpha \rrbracket,$$

pour $\alpha \neq i, j, k, l$. Ces birapports existent. En effet, comme a_α est différent de a_{i_α} et a_{j_α} , les droites considérées existent et les trois premières sont bien distinctes. Ils sont dans k (i.e. $\neq \infty$) car a_α n'est pas sur la droite $(a_{i_\alpha} a_{j_\alpha})$. Du côté des droites, on associe à a les scalaires $u_\delta = f_\delta(a_{m_\delta})$ et $v_\delta = f_\delta(a_{p_\delta})$.

Un calcul sans difficulté montre que si a est le point-base b associé à $(\underline{\lambda}, \underline{\mu}; \underline{u}, \underline{v})$, on retombe bien sur les données de départ. Il reste à montrer qu'il existe un unique g qui envoie b sur a . Comme les points d'indices i, j, k, l de b et a forment un repère, il existe un unique g qui envoie b_i, b_j, b_k, b_l sur a_i, a_j, a_k, a_l respectivement. Posons $a'_\alpha = g(b_\alpha)$ et $f'_\delta = g^*(g_\delta)$. Comme g conserve le birapport, on a :

$$\lambda_\alpha = \llbracket b_{j_\alpha}; b_{i_\alpha}, b_{k_\alpha}, b_l, b_\alpha \rrbracket = \llbracket a_{j_\alpha}; a_{i_\alpha}, a_{k_\alpha}, a_l, a'_\alpha \rrbracket = \llbracket a_{j_\alpha}; a_{i_\alpha}, a_{k_\alpha}, a_l, a_\alpha \rrbracket,$$

et de même pour μ_α . Cela implique que les droites $(a_{i_\alpha} a_\alpha)$ et $(a_{i_\alpha} a'_\alpha)$ (resp. $(a_{j_\alpha} a_\alpha)$ et $(a_{j_\alpha} a'_\alpha)$) sont les mêmes. Comme a_α et a'_α ne sont pas sur $(a_{i_\alpha} a_{j_\alpha})$, ces points sont donc égaux. Le calcul est analogue avec les droites et, en définitive, on a bien montré $a = g(b)$. Il est clair que Ψ^{-1} est un morphisme car les birapports et l'élément g sont des fonctions rationnelles des a_i et des f_j .

Pour les ouverts du deuxième type, on utilise le point base $b_i = (1, 0, 0)$, $b_j = (0, 1, 0)$, $b_k = (0, 0, 1)$, $g_l = X + Y + T = (1, 1, 1)$ et le reste du calcul est analogue.

Pour les ouverts du troisième type¹⁰, on utilise le point base $b_i = (1, 0, 0)$, $b_j = (0, 1, 0)$, $b_k = (0, 0, 1)$, $g_l = Y - X$ et $g_p = X - T$.

Pour les cas duaux, on échange droites et points.

2.2.15 Corollaire. Les ouverts standard sont des variétés affines.

Démonstration. Comme k^N est affine, il suffit de montrer que $PGL(E)$ l'est. On identifie les matrices 3×3 à k^9 et le quotient de cet ensemble par les homothéties est l'espace projectif \mathbf{P}^8 . Dans cet espace, $PGL(E)$ est l'ouvert défini par $\det u \neq 0$. Comme le déterminant est un polynôme homogène de

⁹Rappelons qu'on pose $\llbracket a; b, c, d, e \rrbracket = \llbracket (ab), (ac), (ad), (ae) \rrbracket$.

¹⁰Si l'on en rencontre !

degré 3, il s'agit d'un ouvert du type $D^+(f)$, dont on sait que c'est un ouvert affine¹¹ (voir [Per95] III 8).

2.2.16 Remarques. 1) Le lecteur qui trouverait les notations du théorème trop saumâtres à son goût pourra commencer par étudier quelques cas particuliers (par exemple $m = 5$, $n = 0$).

2) Il n'est pas difficile de préciser l'algèbre $\Gamma(U)$ des fonctions sur chaque type d'ouvert affine standard. Dans le cas du premier type, par exemple, $\Gamma(U)$ est le sous-anneau du corps des fractions rationnelles en les coordonnées $a_{i,k}$ et $f_{j,l}$ des vecteurs a_i et des formes f_j formé des fractions dont les numérateurs et dénominateurs sont des polynômes homogènes de mêmes degrés, les dénominateurs étant des monômes en les invariants qui définissent $U : [a_i, a_j, a_k], [a_i, a_j, a_l], [a_i, a_k, a_l], [a_j, a_k, a_l], [a_{i_\alpha}, a_{j_\alpha}, a_\alpha]$ et $f_\delta(a_{l_\delta})$.

2.2.4 La propriété des orbites fermées

La conséquence essentielle du théorème précédent est qu'on a un beau quotient géométrique $U/PGL(E)$, isomorphe à $k^{2(m+n-4)}$, voir [Mum65] ou ci-dessous Chapitre 7. Nous nous contenterons ici du résultat fondamental suivant qui nous permettra d'appliquer 1.4.11 :

2.2.17 Corollaire. *Soit U un ouvert affine standard et soit $q \in U$. Alors, l'orbite de q sous $PGL(E)$ est fermée¹² dans U .*

Démonstration. On compose l'isomorphisme $\Psi^{-1} : U \rightarrow k^N \times PGL(E)$ rencontré au théorème précédent avec la projection de $k^N \times PGL(E)$ sur k^N . On obtient un morphisme Φ et la compatibilité des opérations montre que les fibres de Φ sont exactement les orbites de $PGL(E)$ dans U . Comme Φ est continue pour les topologies de Zariski, les orbites sont bien fermées.

2.2.18 Corollaire. *Soit $\Omega \subset \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ l'ouvert des points pré-stables et soit $q \in \Omega$. Alors, l'orbite de q sous $PGL(E)$ est fermée dans Ω .*

Démonstration. Si $\omega(q)$ est l'orbite de q et si U est un ouvert standard, la trace de $\omega(q)$ sur U est vide ou égale à $\omega(q)$, donc fermée dans U en vertu de 2.2.17. On conclut en utilisant le fait que les ouverts standard recouvrent Ω (cf. 2.2.13).

¹¹C'est ici qu'il faut, soit être sur un corps algébriquement clos, soit parler de schémas.

¹²On montre facilement que les orbites sont "géométriquement" fermées au sens où la propriété reste vraie en passant à la clôture algébrique de k .

2.2.5 Caractérisation des propriétés fermées projectives : suite et fin

On peut maintenant mettre ensemble tout ce qui précède pour obtenir une caractérisation des propriétés projectives en restriction aux ouverts standard :

2.2.19 Théorème. *On suppose k algébriquement clos et de caractéristique 0. Soit $\mathcal{P} \subset \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ une propriété projective fermée et soit U un ouvert affine standard de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$, d'anneau $\Gamma(U) = A$. Alors, il existe un idéal J de A , engendré par des invariants sous l'action de $GL(E)$, tel que $\mathcal{P} \cap U = V(J)$.*

Démonstration. En vertu de 2.2.17 (les orbites sous GL et PGL sont identiques), on est en posture d'appliquer 1.4.11 qui donne exactement le résultat.

2.2.20 Remarque. On a obtenu ainsi le résultat escompté : une propriété projective est définie par un idéal engendré par des invariants. Bien entendu, cette propriété n'est vraie qu'en restriction aux ouverts affines standard, mais cette précaution est innocente pour deux raisons :

1) Il est facile de transformer un objet en objet pré-stable, donc contenu dans un ouvert standard. Il suffit d'ajouter suffisamment de points pour disposer d'un repère¹³.

2) Les invariants de $\Gamma(U)$ sont directement liés à ceux de l'anneau total $R = k[a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_n]$ en vertu de la proposition suivante.

2.2.21 Proposition. *Supposons par exemple que U est un ouvert affine du premier type. Alors, tout invariant de U est quotient d'un invariant de R par un monôme en des crochets et des évaluations.*

Démonstration. Un élément de $\Gamma(U)$ est une fraction rationnelle F/G où G est un monôme en des crochets et des évaluations, donc est invariant. Cet élément est invariant si et seulement si F l'est.

2.3 Constructions projectives et concomitants

Dans cette section, on aborde le deuxième terme de notre trilogie, qui consiste à donner un sens à l'idée de "construction projective". La problématique est la suivante. On considère un certain nombre de points a_1, \dots, a_m et de droites D_1, \dots, D_n du plan projectif $\mathbf{P}(E)$ et on définit, à partir de ces données, de nouveaux points et/ou de nouvelles droites. Autrement dit,

¹³Le lecteur qui n'aurait pas lu en détail les pages précédentes pourra se contenter de l'adage : *si l'on a un repère, la vie est belle.*

on définit une application $\bar{\Phi}$ de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ (ou d'une partie de cet espace) dans $\mathbf{P}(E)^p \times \mathbf{P}(E^*)^q$. L'exemple type de construction que l'on a en vue est une construction à la règle, cf. Partie I, ??, et le cas le plus simple est l'opération qui à deux points (resp. deux droites) distincts associe la droite qui les joint (resp. leur point d'intersection). On notera que, dans cet exemple, l'application en question n'est pas définie sur $\mathbf{P}(E)^2$ ou $\mathbf{P}(E^*)^2$ mais seulement sur l'ouvert de Zariski formé des couples de points ou de droites distincts.

Nous imposerons deux conditions aux applications $\bar{\Phi}$ pour mériter le nom de constructions projectives.

La première condition est une condition de “**régularité**”. Comme on l'a vu dans les préliminaires, la condition la mieux adaptée, sur un corps quelconque, est la notion de morphisme projectif, cf. 1.2.19.

La seconde condition impose à la construction d'être “**résistante aux changements de repères**” ou, ce qui revient au même, aux homographies. Cela signifie que si $g \in PGL(E)$ est une homographie, et si on change les données en appliquant g , le résultat doit être modifié lui aussi par g , autrement dit, en posant $X = (a_1, \dots, a_m; D_1, \dots, D_n)$, on doit avoir : $\bar{\Phi}(g.X) = g.\bar{\Phi}(X)$.

2.3.1 Concomitants

Définition

La dernière condition évoquée est, en fait, une condition d'invariance :

2.3.1 Proposition-Définition. *Soit G un groupe opérant sur des ensembles X, Y . Une application $\Phi : X \rightarrow Y$ vérifie $g.\Phi(x) = \Phi(g.x)$ pour tout $g \in G$ et tout $x \in X$ si et seulement si Φ est un invariant pour l'action de G sur $\mathcal{F}(X, Y)$ définie en 1.3.3. On dit que Φ est un **concomitant** de G .*

Démonstration. La formule de 1.3.3 donne $(g.\Phi)(x) = g.\Phi(g^{-1}.x)$. La fonction Φ est donc un invariant si on a $g.\Phi(g^{-1}.x) = \Phi(x)$ pour tout x , soit $\Phi(g^{-1}.x) = g^{-1}.\Phi(x)$ et on a la formule attendue en changeant g en g^{-1} .

2.3.2 Remarque. En toute rigueur, la notion de concomitant est inutile puisque c'est un cas particulier d'invariant. Cependant, nous utiliserons ce mot, qui est traditionnel et commode, réservant plutôt le nom d'invariant pour les invariants “numériques”, c'est-à-dire à valeurs dans k . On notera que Φ est simplement un morphisme pour la structure d'ensemble à opérateurs, ce qui signifie simplement que Φ et g “commutent”.

Constructions projectives

Avec cette définition on peut maintenant dire ce qu'est une construction projective :

2.3.3 Définition. Soit E un espace vectoriel et soit $\bar{\Phi}$ une application définie sur un ouvert de Zariski $\bar{\Omega}$ de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ et à valeurs dans $\mathbf{P}(E)^p \times \mathbf{P}(E^*)^q$. On suppose que l'ouvert $\bar{\Omega}$ est stable sous l'action de $PGL(E)$. On dit que $\bar{\Phi}$ est une **construction projective** si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- 1) $\bar{\Phi}$ est un morphisme projectif au sens de 1.2.19,
- 2) $\bar{\Phi}$ est un concomitant pour les opérations de $PGL(E)$.

2.3.4 Remarque. Nous montrerons plus loin, voir 2.3.15 que l'application qui à deux points distincts associe la droite qui les joint ou à deux droites distinctes associe leur point d'intersection sont des constructions projectives. Plus généralement, cf. 2.3.17, une construction à la règle au sens de Partie I ?? est une construction projective.

Constructions projectives et propriétés projectives

Le résultat essentiel qui relie constructions et propriétés est le suivant :

2.3.5 Proposition. Soit $\Phi : \Omega \subset \mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n \rightarrow \mathbf{P}(E)^p \times \mathbf{P}(E^*)^q$ une construction projective et soit $\mathcal{P} \subset \mathbf{P}(E)^p \times \mathbf{P}(E^*)^q$ une propriété projective. Alors, l'image réciproque $\Phi^{-1}(\mathcal{P})$ est une propriété projective de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\Phi^{-1}(\mathcal{P})$ est invariant sous $PGL(E)$. Soit x tel que $\Phi(x) \in \mathcal{P}$. On a $\Phi(g.x) = g.\Phi(x)$ par définition d'un concomitant et, comme \mathcal{P} est invariant, cet élément est bien dans \mathcal{P} .

Concomitants relatifs

Lorsque l'espace d'arrivée est un espace vectoriel, il y a une notion de concomitant relatif, qui est la traduction de celle d'invariant relatif dans l'action de G sur $\mathcal{F}(X, Y)$:

2.3.6 Définition. Soit G un groupe opérant sur l'ensemble X et muni d'une représentation linéaire sur l'espace vectoriel E . Soit χ un caractère de G . Une application $\Phi : X \rightarrow E$ est un **concomitant relatif de poids χ** de G si elle vérifie $g.\Phi(x) = \chi(g)\Phi(g.x)$ pour tout $x \in X$.

2.3.7 Exemple. Nous utiliserons exclusivement cette notion dans le cas du groupe $G = GL(E)$ et du caractère $\chi_p = \det^p$, cf. 1.3.9. Dans ce cas, on parlera d'un concomitant de poids p . On notera qu'un concomitant relatif pour $GL(E)$ est un concomitant absolu pour $SL(E)$. De plus, un concomitant relatif pour $GL(E)$ induit, en passant au projectif, un concomitant absolu pour $PGL(E)$.

Concomitants et multiplicateurs

Comme dans le cas des invariants, il y a encore une notion un peu plus faible de concomitant :

2.3.8 Définition. Soit G un groupe opérant sur l'ensemble X et muni d'une représentation linéaire dans l'espace vectoriel E . Une application $\Phi : X \rightarrow E$ est appelée un **concomitant projectif**¹⁴ de G , de **multiplicateur** μ , s'il existe une application $\mu : G \times X \rightarrow k^*$ telle que l'on ait $g.\Phi(x) = \mu(g, x)\Phi(g.x)$ pour tout $x \in X$ et tout $g \in G$.

2.3.9 Proposition. Le multiplicateur μ vérifie les propriétés suivantes :

- 1) Si $\Phi(gh.x)$ est non nul, on a $\mu(gh, x) = \mu(h, x)\mu(g, h.x)$,
- 2) Si $\Phi(x)$ est non nul, on a $\mu(1, x) = 1$.

Une application μ qui vérifie les deux relations ci-dessus pour tous x, g, h est appelée un **multiplicateur**.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition d'une opération.

La proposition suivante fait le lien entre les concomitants absolus de l'espace projectif et les concomitants "à multiplicateurs" de l'espace vectoriel :

2.3.10 Proposition. On note p la projection de $E - \{0\}$ sur $\mathbf{P}(E)$.

- 1) Soit $\Phi : X \rightarrow E$ un concomitant projectif de multiplicateur μ . On suppose que Φ ne s'annule pas. Alors $\bar{\Phi} = p\Phi : X \rightarrow \mathbf{P}(E)$ est un concomitant absolu.
- 2) Réciproquement, si $\bar{\Phi} : X \rightarrow \mathbf{P}(E)$ est un concomitant absolu, il existe un concomitant projectif Φ tel que l'on ait $\bar{\Phi} = p\Phi$.

Démonstration. Le 1) est trivial et pour le 2), on choisit une section quelconque de $p, j : \mathbf{P}(E) \rightarrow E$. La formule qui définit le concomitant projectif est la traduction de l'invariance projective absolue.

2.3.11 Remarque. On notera que le cas d'un concomitant relatif correspond au cas où μ est indépendant de x . En réalité, nous verrons en 2.3.31 que, dans le cas des constructions projectives, les concomitants projectifs proviennent automatiquement des concomitants relatifs.

¹⁴On parlera aussi de concomitant à multiplicateur.

Exemples généraux de concomitants

La proposition suivante, que le lecteur¹⁵ vérifiera sans peine, donne quelques exemples de concomitants :

2.3.12 Proposition.

1) *Le composé de deux concomitants absolus est un concomitant absolu. La projection $p : X \times Y \rightarrow X$ définie par $p(x, y) = x$ est un concomitant absolu.*

2) *Si $\Phi_1 : X \rightarrow Y_1$ et $\Phi_2 : X \rightarrow Y_2$ sont deux concomitants relatifs de même poids χ , il en est de même de $(\Phi_1, \Phi_2) : X \rightarrow Y_1 \times Y_2$.*

3) *Soient $\Phi_1 : X \rightarrow Y$ et $\Phi_2 : Y \rightarrow Z$ deux concomitants relatifs de poids respectifs χ_1 et χ_2 . On suppose que Φ_2 est une application homogène de degré d (i.e. vérifie $\Phi_2(\lambda y) = \lambda^d y$). Alors, $\Phi_2 \circ \Phi_1$ est un concomitant de poids $\chi_2 \chi_1^d$.*

4) *Soient $\Phi_1 : X \rightarrow E_1$ et $\Phi_2 : X \rightarrow E_2$ deux concomitants relatifs de poids χ_1, χ_2 et soit $\Phi : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ une application bilinéaire qui est un concomitant relatif de poids χ . Alors $\Phi \circ (\Phi_1, \Phi_2)$ est un concomitant relatif de poids $\chi \chi_1 \chi_2$.*

2.3.13 Remarque. On notera qu'une application linéaire (resp. bilinéaire) est homogène de degré 1 (resp. 2).

2.3.2 L'exemple des constructions à la règle

L'exemple fondamental de construction projective a été rencontré dans la partie I : il s'agit des constructions à la règle. Cet exemple est fondamental à double titre. D'abord, il permet de comprendre ce que sont les constructions projectives et comment elles s'écrivent sur une base au moyen des invariants. Ensuite, avec le théorème 2.3.31, on verra qu'à des considérations arithmétiques près, toute construction projective est, en fait, une construction à la règle.

Produits extérieurs

L'exemple le plus simple de concomitant est donné par le produit extérieur :

2.3.14 Théorème. *On suppose que E est de dimension 3, muni d'une base \mathcal{B} et E^* de la base duale¹⁶. Alors l'application (polynomiale) de $E \times E$ dans E^* (resp. de $E^* \times E^*$ dans E) qui à (a, b) associe $a \wedge b$ (resp. à (f, g) associe $f \wedge g$) est un concomitant de poids -1 (resp. 1) pour l'action de $GL(E)$. Il en*

¹⁵Il écrira aussi le cas des concomitants projectifs.

¹⁶Ou simplement qu'on s'est donné une forme trilinéaire non nulle.

est de même des restrictions de ces applications aux sous-ensembles (stables par $GL(E)$) formés des couples (a, b) ou (f, g) non colinéaires.

Démonstration. Soient $a, b \in E$. La formule qui définit $a \wedge b$ c'est, pour $x \in E$, $(a \wedge b)(x) = \det_{\mathcal{B}}(a, b, x)$. Rappelons que $GL(E)$ opère sur E^* par $\sigma^*(f) = f \circ \sigma^{-1}$, pour $\sigma \in GL(E)$. Il s'agit donc de prouver la formule :

$$\sigma(a) \wedge \sigma(b) = (\det \sigma) \times \sigma^*(a \wedge b).$$

On calcule : $\sigma^*(a \wedge b)(x) = (a \wedge b)(\sigma^{-1}(x)) = \det(a, b, \sigma^{-1}(x))$. Maintenant, on a $(\sigma(a) \wedge \sigma(b))(x) = \det(\sigma(a), \sigma(b), x) = \det \sigma \times \det(a, b, \sigma^{-1}(x))$, d'où le résultat.

La démonstration est analogue dans le cas de $f \wedge g$. Il s'agit de montrer qu'on a, pour tout $h \in E^*$, $h(\sigma(f \wedge g)) = \det \sigma h(\sigma.f \wedge \sigma.g)$. Cela résulte de la formule : $\det(f \circ \sigma^{-1}, g \circ \sigma^{-1}, h) = \det(f, g, h \circ \sigma) \det \sigma^{-1}$.

Un exemple de construction projective : l'incidence

2.3.15 Corollaire. *L'application qui à deux points distincts \bar{a}, \bar{b} de $\mathbf{P}(E)$ associe la droite $(\bar{a}\bar{b})$ est un concomitant absolu pour $PGL(E)$ et un morphisme projectif (donc une construction projective). Il en est de même de l'application qui à deux droites distinctes de $\mathbf{P}(E)$ associe leur point d'intersection.*

Démonstration. On utilise le théorème précédent dans la version restreinte aux couples de vecteurs ou de formes non colinéaires.

Les constructions à la règle sont projectives

La proposition suivante, qui généralise 2.3.15, montre qu'une construction à la règle est une construction projective, et elle la décrit en termes d'invariants, anticipant sur 2.3.28.

2.3.16 Notations. Soit E un k -espace vectoriel de dimension 3. Dans le plan $\mathbf{P}(E)$ on considère un ensemble de points $\mathcal{A} = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m\}$ et un ensemble de droites $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ d'équations f_1, \dots, f_n . On note k_0 le sous-corps premier de k (c'est-à-dire \mathbf{F}_p ou \mathbf{Q} selon la caractéristique).

2.3.17 Proposition. *Soit $\bar{p} = \bar{\Phi}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m, D_1, \dots, D_n)$ un point construit "à la règle" à partir des a_i et des D_j , cf. Partie I ??.*

1) L'application $\bar{\Phi}$ est une construction projective. Précisément, il existe un concomitant relatif pour $GL(E)$, $\Phi : E^m \times (E^)^n \rightarrow E$, qui est une application polynomiale à coefficients dans k_0 , homogène séparément par rapport aux a_i et aux f_j , et tel que l'on ait $\bar{p} = \bar{\Phi}(a_1, \dots, a_m, f_1, \dots, f_n)$.*

2) Supposons (par exemple) les points $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ non alignés. On relève ces points en des vecteurs (a_1, a_2, a_3) formant une base de E . Alors un représentant $p \in E$ du point \overline{p} s'écrit sur la base (a_1, a_2, a_3) sous la forme $p = p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3$ où les p_i sont des polynômes en les crochets $[a_i, a_j, a_k]$ ($i, j, k = 1, \dots, m$) et les évaluations $f_j(a_i)$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$), à coefficients dans k_0 .

Les résultats qui précèdent sont valables aussi pour une droite D d'équation f construite à la règle à partir des a_i, D_j .

Démonstration.

Dans les deux cas, on reprend les notations de Partie I, ?? et on raisonne par récurrence sur le nombre de pas de la construction à la règle.

1) Le cas d'une construction en un pas relève de 2.3.15. Dans le cas général, le point \overline{p} est obtenu comme intersection de deux droites D, D' de \mathcal{D}_{r-1} , d'équations f, f' . Un représentant de \overline{p} est donc $f \wedge f'$. Mais, en vertu de l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que f et f' sont des fonctions polynomiales en les a_i, f_j qui sont des concomitants relatifs. Comme $(f, f') \mapsto f \wedge f'$ est un concomitant bilinéaire (cf. 2.3.14), on a la conclusion en vertu de 2.3.12. L'assertion sur le corps des coefficients est évidente.

2) Notons plutôt a, b, c les vecteurs a_1, a_2, a_3 . On constate d'abord que les a_i d'indice supérieur s'écrivent sur la base a, b, c au moyen des crochets. Ainsi, si $a_i = \alpha_i a + \beta_i b + \gamma_i c$, on a $\alpha_i = [a_i, b, c]$. Dans E^* on utilise la base duale a^*, b^*, c^* (ou la base $b \wedge c, c \wedge a, a \wedge b$ qui lui est égale au coefficient $[a, b, c]$ près). Sur cette base, les f_j s'écrivent au moyen des évaluations. Par exemple, si $f_j = \alpha_j a^* + \beta_j b^* + \gamma_j c^*$, on a $\alpha_j = f_j(a)$.

Si le point p est construit en un pas à partir des données, il s'écrit $p = f \wedge g$ où f, g sont parmi les f_j il vérifie bien la propriété annoncée car les produits extérieurs des formes de la base duale sont, au coefficient $[a, b, c]$ près, les vecteurs de la base initiale¹⁷ : $a^* \wedge b^* = c/[a, b, c]$, etc. Il en est de même pour une droite construite en un pas. Le raisonnement est identique pour la preuve de la propriété d'hérédité de la récurrence. En effet, si $p = f \wedge g$, les formes f, g sont combinaisons des vecteurs de la base duale, avec des coefficients qui sont des polynômes en les crochets et les évaluations et il en est de même de p sur la base a, b, c .

2.3.18 Remarques.

1) Le lecteur s'étonnera peut-être de la dissymétrie du résultat et de l'absence des crochets de formes $[f_i, f_j, f_k]$. La raison est que ces crochets s'écrivent à partir des crochets de points et des évaluations grâce à la relation \mathcal{T} de 3.2.4.

2) On peut montrer que les points et les droites de $\mathbf{P}(E)$ constructibles à la règle à partir des a_i, f_j sont ceux dont les coefficients sont dans le corps engendré par les (rapports des) coefficients des a_i, f_j , voir 2.6.2.

¹⁷En fait, c'est la formule du double produit, voir 2.3.19.

2.3.3 Constructions à la règle et invariants numériques : exemples

Nous décrivons ci-dessous en termes de concomitants et d'invariants numériques les quatre types les plus simples de constructions à la règle, au-delà des incidences directes vues en 2.3.15.

Le double produit de points

Lorsqu'on a quatre points $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, la construction à la règle la plus simple consiste, lorsque les points correspondants sont distincts, à prendre l'intersection \bar{u} des droites $(\bar{a}\bar{b})$ et $(\bar{c}\bar{d})$ (si ces droites sont distinctes). Comme ces droites ont pour équations $a \wedge b$ et $c \wedge d$, on voit que \bar{u} est défini par le concomitant $u = (a \wedge b) \wedge (c \wedge d)$ (le double produit), qui est de poids -1 . En effet, cette application est composée de l'application $(a, b, c, d) \mapsto (a \wedge b, c \wedge d)$ dans $E^* \times E^*$ qui est de poids -1 (cf. 2.3.14) et de l'application $(f, g) \mapsto f \wedge g$, bilinéaire de poids 1, et on conclut par 2.3.12.

La proposition suivante exprime $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d)$ en termes d'invariants, comme annoncé par 2.3.17.2.

2.3.19 Proposition. *On suppose que E est de dimension 3. Soient $a, b, c, d \in E$. On a la formule :*

$$(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = [a, c, d] b - [b, c, d] a.$$

Démonstration. On écrit a, b, c, d sur une base (e_i) de E : $a = \sum_{i=1}^3 a_i e_i$, etc. On peut évidemment vérifier la formule par un calcul direct, d'ailleurs assez consistant. On peut aussi l'établir sans calcul en raisonnant de la manière suivante. La formule demandée se traduit par des égalités entre fonctions polynomiales. Il suffit, pour la prouver, de montrer l'égalité des polynômes correspondants. Pour cela, on plonge le corps k dans le corps K des fractions rationnelles en les indéterminées a_i, b_i, c_i, d_i et il suffit de montrer l'assertion sur K . Par ailleurs, l'application de E^4 dans E qui à (a, b, c, d) associe $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d)$ est un concomitant de poids -1 . Comme les vecteurs a, b, c sont indépendants dans K^3 , on peut donc écrire, par 2.3.17.2,

$$(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = \lambda(a, b, c, d)a + \mu(a, b, c, d)b + \nu(a, b, c, d)c$$

où λ, μ, ν sont des invariants de poids -1 et il reste à montrer : $\lambda(a, b, c, d) = -[b, c, d]$, $\mu(a, b, c, d) = [a, c, d]$ et $\nu(a, b, c, d) = 0$. Mais, il existe $g \in GL(3, K)$ qui envoie a, b, c sur a_0, b_0, c_0 , avec $a_0 = (1, 0, 0)$, $b_0 = (0, 1, 0)$, $c_0 = (0, 0, 1)$. On vérifie les formules pour a_0, b_0, c_0 et $d_0 = g(d) = (x, y, t)$ quelconque (le calcul est immédiat). Comme λ, μ, ν et les crochets sont tous des invariants de poids -1 , on a le résultat en appliquant g^{-1} .

Le double produit de formes

Lorsqu'on a quatre droites F, G, H, L de $\mathbf{P}(E)$ d'équations f, g, h, l , la construction à la règle la plus simple consiste, lorsque les droites correspondantes sont distinctes, à joindre les points d'intersection de F, G et de H, L s'ils sont distincts. On obtient ainsi une droite D dont une équation est le concomitant $(f \wedge g) \wedge (h \wedge l)$ de poids 1 (un autre double produit) et on a une formule analogue à 2.3.19, lue dans le dual :

2.3.20 Proposition. Soient $f, g, h, l \in E^*$. On a la formule :

$$(f \wedge g) \wedge (h \wedge l) = [f, h, l]g - [g, h, l]f.$$

Les produits mixtes

Enfin, lorsqu'on a une droite d'équation f et deux points a, b (resp. un point a et deux droites f, g), la construction la plus simple consiste à prendre l'intersection de la droite f avec (ab) (resp. à joindre a au point d'intersection de f et g). On obtient les concomitants $f \wedge (a \wedge b)$ (resp. $a \wedge (f \wedge g)$), tous deux de poids 0 et on a la proposition suivante :

2.3.21 Proposition.

- 1) Soient $a, b \in E$ et $f \in E^*$. On a $f \wedge (a \wedge b) = f(b)a - f(a)b$.
- 2) Soient $a \in E$ et $f, g \in E^*$. On a $a \wedge (f \wedge g) = g(a)f - f(a)g$.

Démonstration. On procède par vérification directe ou on applique la méthode de 2.3.19.

2.3.22 Remarque. On peut aussi déduire 2.3.19 de 2.3.21 en utilisant la définition du produit extérieur : $[a, b, c] = (b \wedge c)(a)$, cf. 2.3.23 ci-dessous.

D'autres formules fondamentales

La proposition suivante fait le tour des formules liant invariants (crochets et évaluations) et concomitants (produits extérieurs) que nous utiliserons dans la suite.

2.3.23 Proposition. Soient a, b, c, a', b', c' des vecteurs de E et f, g, h, f', g', h' des formes linéaires. On a les formules suivantes :

- 1) $[a, b, c] = (a \wedge b)(c)$ et $[f, g, h] = h(f \wedge g)$,
- 2) $[a, b, f \wedge g] = f(a)g(b) - f(b)g(a) = [f, g, a \wedge b]$,
- 3) $[a \wedge a', b \wedge b', c \wedge c'] = [a, a', c][b, b', c'] - [a, a', c'][b, b', c]$,
- 4) $[f \wedge f', g \wedge g', h \wedge h'] = [f, f', h][g, g', h'] - [f, f', h'][g, g', h]$.

Démonstration. La formule 1) n'est autre que la définition du produit extérieur. Pour 2), on a, par définition du produit extérieur, $(a \wedge (f \wedge g))(b) = [a, f \wedge g, b]$ et, en vertu de 2.3.21, cette quantité est encore égale à $g(a)f(b) - f(a)g(b)$, d'où le résultat. Les formules 3) et 4) s'obtiennent en utilisant 2) et 1).

2.3.24 Remarques. Les relations 3) et 4) sont d'une importance capitale en géométrie. Voici quelques éléments pour en convaincre le lecteur :

1) La formule 3) donne un critère tout simple permettant de dire quand trois droites (aa') , (bb') , (cc') sont concourantes, c'est la relation $[a, a', c][b, b', c'] = [a, a', c'][b, b', c]$. Outre cette version projective, on en verra des versions affines où le crochet sera vu comme aire (le lemme du double chevron, cf. 5.5.13). On retrouvera notamment le théorème de Ceva à l'aide de cette formule, mais aussi une version plus générale.

2) Cette formule donne la relation fondamentale \mathcal{R}' que nous rencontrerons plus loin, cf. 2.5.4. En effet, par permutation circulaire, on a aussi :

$$[a \wedge a', b \wedge b', c \wedge c'] = [b \wedge b', c \wedge c', a \wedge a'] = [b, b', a][c, c', a'] - [b, b', a'][c, c', a],$$

d'où l'égalité $[a, a', c][b, b', c'] - [a, a', c'][b, b', c] = [b, b', a][c, c', a'] - [b, b', a'][c, c', a]$ qui n'est autre que ce que nous appellerons plus loin $\mathcal{R}'(a, a', c, c'; b, b')$.

3) Si on prend $a' = b, b' = c, c' = a$ la relation 3) devient : $[a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a] = [a, b, c]^2$. On verra une conséquence de cette formule en 5.4.11.

4) Bien entendu, tout ce qui précède vaut aussi pour la formule 4) qui donne une condition d'alignement que nous retrouverons dans les théorèmes de Pappus et Desargues.

2.3.4 Constructions projectives et invariants numériques : le cas général

Ce paragraphe n'est pas indispensable pour la suite, mais il est important pour la compréhension des choses. Pour le résumer en un mot, on y montre que, sur une base convenable, les concomitants se ramènent aux invariants numériques.

Le résultat formel

Le lien entre concomitants et invariants numériques (c'est-à-dire à valeurs dans k) a sa source dans le théorème suivant, d'énoncé sans doute un peu formel, mais dont la démonstration est immédiate :

2.3.25 Théorème. *Soit G un groupe opérant sur un ensemble X et muni d'une représentation linéaire dans l'espace vectoriel V et soit $\Phi : X \rightarrow V$ une*

application. Alors, Φ est un concomitant de poids χ (resp. de multiplicateur $\mu(g, x)$) pour G si et seulement si l'application $\Psi : X \times V^* \rightarrow k$ définie par $\Psi(x, f) = f \circ \Phi(x)$ est un invariant de poids χ (resp. de multiplicateur $\mu(g, x)$), indépendant de f , pour G .

Démonstration. Il suffit de traiter le cas d'un multiplicateur $\mu(g, x)$, le cas relatif étant le cas particulier où μ ne dépend pas de x . On traduit les deux conditions.

Le fait que Φ soit un concomitant de multiplicateur μ se traduit par la formule :

$$g.\Phi(x) = \mu(g, x)\Phi(g.x).$$

De l'autre côté, dire que Ψ est un invariant de multiplicateur $\mu(g, x)$ (indépendant de f) signifie qu'on a :

$$(*) \quad \forall f \in V^*, \quad \Psi(x, f) = \mu(g, x)\Psi(g.(x, f)).$$

Rappelons que G opère sur $X \times V^*$ par $g.(x, f) = (g.x, f \circ g^{-1})$. Cela permet de traduire l'égalité précédente :

$$f(\Phi(x)) = \mu(g, x)f(g^{-1}.\Phi(g.x)) = f(\mu(g, x)g^{-1}.\Phi(g.x)).$$

Comme cette égalité vaut pour toute forme $f \in V^*$, elle implique l'égalité des vecteurs auxquels f s'applique :

$$\Phi(x) = \mu(g, x)g^{-1}.\Phi(g.x).$$

Il ne reste plus qu'à appliquer g aux deux membres de l'égalité en tenant compte de la linéarité de l'opération de G sur V et on a le résultat.

2.3.26 Remarque. Dans le théorème précédent, comme G agit linéairement sur V , il suffit évidemment de vérifier la formule (*) avec des formes f variant dans une base de V^* .

Le théorème de la base concomitante

Comme annoncé, le théorème suivant affirme qu'une application est un concomitant si et seulement si ses coordonnées sur une base sont des invariants. Attention, il faut pour cela que la base elle-même soit concomitante, c'est-à-dire qu'elle varie en respectant l'opération :

2.3.27 Théorème. Soit G un groupe opérant sur un ensemble X et muni d'une représentation linéaire dans l'espace vectoriel V de dimension r (par exemple $r = 3$) et soit $\Phi : X \rightarrow V$ une application. On écrit $\Phi(x) =$

$\sum_{i=1}^r \Phi_i(x) e_i(x)$, où $\Phi_i(x)$ est un scalaire et où les $e_i(x)$ forment une **base concomitante** de V , c'est-à-dire vérifient : $g.e_i(x) = e_i(g.x)$ pour tous $i = 1, \dots, r$, $x \in X$ et $g \in G$. Alors, Φ est un concomitant de poids χ (resp. de multiplicateur $\mu(g, x)$) pour G si et seulement si, pour tout i , la fonction $\Phi_i(x)$ est un invariant de poids χ (resp. de multiplicateur $\mu(g, x)$), indépendant de i , pour G .

Démonstration. En vertu du théorème 2.3.25 appliqué en utilisant, pour $x \in X$ fixé, la base $e_i(x)^*$ de V^* , dire que Φ est un concomitant de multiplicateur $\mu(g, x)$ c'est dire qu'on a, pour tout i :

$$(*_i) \quad \Psi(x, e_i(x)^*) = \mu(g, x) \Psi(g.x, g.e_i(x)^*),$$

soit encore $\Phi_i(x) = \mu(g, x) g.(e_i(x)^*) \Phi(g.x)$. Mais, en vertu de 1.3.4, on a $g.(e_i(x)^*) = (g.e_i(x))^*$ et c'est encore $(e_i(g.x))^*$ puisque la base $e_i(x)$ est concomitante.

Par définition de Φ_i , le deuxième membre de $(*_i)$ est donc $\mu(g, x) \Phi_i(g.x)$ et la condition traduit que Φ_i est un invariant de multiplicateur μ .

Applications

On considère maintenant un espace vectoriel E de dimension 3 et on va traiter le cas de constructions projectives au sens de 2.3.3, c'est-à-dire d'applications $\Phi : X \rightarrow V$ pour lesquelles l'ensemble de départ X est formé de points a_1, \dots, a_m et de droites D_1, \dots, D_n (ou de vecteurs et de formes) et où l'espace vectoriel V d'arrivée est E ou E^* . Il s'agit en particulier de comprendre ce qu'est une base concomitante dans cette situation. L'exemple le plus simple, dans le cas $V = E$, consiste à prendre comme vecteurs de base certains des a_i :

2.3.28 Théorème. Soit m un entier ≥ 3 et Ω un sous-ensemble de $E^m \times (E^*)^n$, stable sous $GL(E)$. On suppose que pour tout $x = (a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_n)$ de Ω , (a_1, a_2, a_3) est une base de E . Soit $\Phi : \Omega \rightarrow E$ une application. On peut écrire :

$$\Phi(a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_n) = \sum_{i=1}^3 \Phi_i(a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_n) a_i,$$

où les coefficients $\Phi_i(x)$ sont dans k . Alors, Φ est un concomitant de poids χ (resp. de multiplicateur $\mu(g, x)$) sous $GL(E)$ si et seulement si les fonctions Φ_i sont des invariants relatifs de poids χ (resp. de multiplicateur $\mu(g, x)$) sous $GL(E)$.

Démonstration. Nous donnons deux preuves de ce théorème, l'une par application du résultat formel, l'autre directe.

Preuve numéro 1

Pour $x = (a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_n)$ et pour $i = 1, 2, 3$, on pose $e_i(x) = a_i$. Il est clair que cette base est concomitante et le résultat vient de 2.3.27.

Preuve numéro 2

On calcule, par linéarité :

$$g(\Phi(a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_n)) = \sum_{i=1}^3 \Phi_i(a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_n) g(a_i).$$

Dire que Φ est un concomitant, par exemple de poids p , c'est dire que cette quantité est aussi égale à $(\det g)^p \Phi(g.a_1, \dots, g.a_m; g.f_1, \dots, g.f_n)$.

On calcule alors

$$\Phi(g.a_1, \dots, g.a_m; g.f_1, \dots, g.f_n) = \sum_{i=1}^3 \Phi_i(g.a_1, \dots, g.a_m; g.f_1, \dots, g.f_n) g(a_i).$$

Comme g est dans $GL(E)$, les $g(a_i)$ forment une base de E et la condition s'écrit donc, pour $i = 1, 2, 3$:

$$(\det g)^p \Phi_i(g.a_1, \dots, g.a_m; g.f_1, \dots, g.f_n) = \Phi_i(a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_n),$$

ce qui signifie exactement que Φ_i est une fonction invariante de poids p .

2.3.29 Remarque. Le résultat est faux si on écrit Φ sur une base e_1, e_2, e_3 **fixe** au lieu d'une base concomitante. L'exemple le plus simple est celui de l'application identique qui est évidemment concomitante, mais dont les coordonnées sur la base e_i ne sont pas des invariants.

2.3.30 Remarque. Le théorème précédent admet une variante évidente avec une application $\Phi : \Omega \rightarrow E^*$ et la base concomitante f_1, f_2, f_3 . Mais, lorsque a_1, a_2, a_3 forment une base de E , il peut être plus intéressant d'utiliser comme base concomitante de E^* la base $a_2 \wedge a_3, a_3 \wedge a_1, a_1 \wedge a_2$. Dans ce cas, les concomitants de base comme $a_1 \wedge a_2$ ont des coordonnées constantes sur la base, mais on peut aussi exprimer les autres $a_i \wedge a_j$ à l'aide des crochets ou des évaluations comme on l'a vu en 2.3.17.

Constructions projectives et invariants

Le théorème suivant caractérise les constructions projectives. Grâce à la condition de régularité de 2.3.3, on montre qu'une construction projective est un concomitant relatif (et pas seulement un concomitant à multiplicateur) :

2.3.31 Théorème. *On suppose E de dimension 3. Les éléments de $E^m \times (E^*)^n$ sont notés $X = (a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_n)$. On considère une construction projective $\bar{\Phi}$ définie sur un ouvert de Zariski de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ et à valeurs¹⁸ dans $\mathbf{P}(E)$. Cette application provient d'une application polynomiale $\Phi : E^m \times (E^*)^n \rightarrow E$ qui est un concomitant projectif sous $GL(E)$ de multiplicateur μ (cf. 1.2.20, 2.3.3 et 2.3.10). On suppose précisément que les coordonnées de Φ sur une base fixe de E sont des fonctions polynomiales homogènes par rapport à a_i et f_j , toutes trois de même degré m_i et n_j respectivement. Soit $e_k(X)$, $k = 1, 2, 3$, une base concomitante sous $GL(E)$ et supposons que les $e_k(X)$ sont des fonctions polynomiales homogènes de degrés $\mu_{k,i}$ et $\nu_{k,j}$ par rapport à a_i et f_j respectivement. Alors, si on écrit Φ sur cette base : $\Phi(X) = \sum_{k=1}^3 \Phi_k(X) e_k(X)$, les fonctions Φ_k sont des polynômes homogènes de degrés respectifs $m_i - \mu_{k,i}$ et $n_j - \nu_{k,j}$ par rapport à a_i et f_j , que l'on peut supposer premiers entre eux, et ce sont des invariants **relatifs** de même caractère (et pas seulement des invariants à multiplicateurs).*

Démonstration. L'assertion sur les degrés est évidente. En vertu de 2.3.27, l'hypothèse assure que l'on a $\Phi_k(X) = \mu(g, X) \Phi_k(g.X)$ pour tous $k = 1, 2, 3$, tout $g \in GL(E)$ et tout $X \in E^m \times (E^*)^n$. On a donc les égalités de polynômes : $\Phi_k(X) \Phi_l(g.X) = \Phi_l(X) \Phi_k(g.X)$, pour $k, l = 1, 2, 3$. Alors, $\Phi_k(X)$ divise $\Phi_k(g.X)$. Sinon, il y aurait un facteur irréductible P de $\Phi_k(X)$ qui serait à une puissance moindre dans $\Phi_k(g.X)$. Mais alors, P diviserait $\Phi_l(X)$ pour tout l , contredisant ainsi le fait que les Φ_j sont premiers entre eux. Pour une raison de degré on a donc $\Phi_k(g.X) = \lambda \Phi_k(X)$ où λ est une constante, donc indépendante de X . C'est bien ce qu'on voulait.

Commentaires

Ce qui précède mérite quelques commentaires. On a vu que le résultat est le même pour les constructions projectives générales que pour les constructions à la règle : sur une base concomitante, elles s'écrivent à partir des invariants numériques. Cette similitude conduit à poser la question : y a-t-il d'autres constructions projectives que les constructions à la règle ?

Il y a, a priori, deux différences. La première c'est que, dans le cas des constructions à la règle, les invariants utilisés sont uniquement les crochets et les évaluations et pas des invariants numériques généraux. La seconde, c'est que dans le cas des constructions à la règle, les coefficients sont des polynômes à coefficients dans le corps premier.

¹⁸Il y a une variante évidente avec $\mathbf{P}(E^*)$.

La différence numéro 1, en fait, n'en est pas une. En effet, on verra au chapitre suivant – mais c'est un théorème non trivial – que tous les invariants sont des polynômes en les crochets et les évaluations, cf. 3.2.1.

En revanche, la différence numéro 2 reste pertinente. Une construction projective qui sort du corps engendré par les coefficients des données sur le corps premier n'est pas une construction à la règle. On en trouvera un exemple dans l'exercice 2.6.3.

2.4 Théorèmes projectifs et relations entre invariants : la théorie

2.4.1 Théorèmes projectifs

Nous formalisons dans la définition suivante ce que nous entendons par un “théorème de géométrie projective plane linéaire”, dernier terme de la trilogie projective. Les deux ingrédients de cette définition sont les notions de propriété et de construction projectives. L'espace E est toujours de dimension 3.

2.4.1 Définition. Dans le plan $\mathbf{P}(E)$, on considère un m -uplet de points $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_m)$ et un n -uplet de droites $\mathcal{D} = (D_1, \dots, D_n)$, que l'on désignera ci-dessous comme “les données”.

On effectue, à partir de ces données, une ou plusieurs constructions projectives (par exemple des constructions à la règle) conduisant à des points a'_1, \dots, a'_p et des droites D'_1, \dots, D'_q .

Un **théorème de géométrie projective plane linéaire** associé à cette situation est une assertion du type $(H) \implies (C)$ dans laquelle :

- 1) les hypothèses (H) portent sur les données et sont des propriétés projectives (fermées, ouvertes ou localement fermées) au sens de 2.1.5,
- 2) les conclusions (C) sont de la même forme, mais font intervenir les points et droites donnés a_i, D_j , ou construits a'_i, D'_j .

2.4.2 Remarques.

1) Les hypothèses (resp. les conclusions) sont donc de la forme $(\underline{a}, \underline{D}) \in \mathcal{H}$ (resp. $(\underline{a}, \underline{a}'; \underline{D}, \underline{D}') \in \mathcal{C}$) où \mathcal{H} et \mathcal{C} sont des parties localement fermées de $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ et $\mathbf{P}(E)^{m+p} \times \mathbf{P}(E^*)^{n+q}$ respectivement, stables sous l'action de $PGL(E)$.

2) Dans ce qui suit, nous nous intéresserons surtout aux théorèmes dont la conclusion est une propriété fermée des points donnés ou construits (alignement, concours par exemple). On parlera à ce propos de “théorèmes fermés”.

2.4.3 Exemple. Le théorème de géométrie projective linéaire le plus simple est le “théorème à quatre points”, cf. Partie I ???. Rappelons son énoncé. On se donne quatre points a, b, c, d de $\mathbf{P}(E)$, formant un repère. On construit à la règle les points a', b', c' , comme intersections respectives de (bc) et (ad) , (ca) et (bd) , (ab) et (cd) . On construit enfin a'', b'', c'' comme intersections de (bc) et $(b'c')$, (ca) et $(c'a')$, (ab) et $(a'b')$. Le théorème affirme que a'', b'', c'' sont alignés. La seule hypothèse sur a, b, c, d est la propriété de “position générale” : trois quelconques des points sont non alignés. C’est une propriété ouverte. La conclusion est une condition d’alignement, donc une propriété fermée.

2.4.2 Le méta-théorème

Le résultat suivant est la clé de voûte de toute cette partie. Il explique que tout théorème de géométrie projective correspond à une relation entre des invariants du groupe $GL(E)$. Il sera illustré au paragraphe suivant et aux chapitres 4 et 5 par une multitude d’exemples. C’est ce résultat qui justifie tout le travail qui sera entrepris aux chapitres 3 et 6 afin de déterminer tous les invariants et toutes les relations, donc, en principe, tous les théorèmes. En vérité, le lecteur pourra trouver, à bon droit, que le chapitre 3 est cher pour un rendement assez faible, puisqu’il mène essentiellement à la conclusion qu’il n’y a pas d’autres invariants que ceux déjà rencontrés (crochets et évaluations) et que les relations entre ces invariants ne donnent, pour l’essentiel, pas d’autres théorèmes que ceux qui ont été vus dans la partie I. Encore fallait-il le prouver et cela sera fait.

Voici donc le “méta-théorème” fondamental des invariants de la géométrie projective du plan :

2.4.4 Théorème. *On suppose k de caractéristique 0. On considère un théorème \mathcal{T} de géométrie projective plane linéaire au sens de 2.4.1. On note $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ et (D_1, \dots, D_n) les points et droites donnés et $(\bar{a}'_1, \dots, \bar{a}'_p)$ et (D'_1, \dots, D'_q) les points et droites construits. On désigne par a_i un vecteur représentant \bar{a}_i et par f_j une équation de D_j . On note \mathcal{H} et \mathcal{C} les hypothèses et les conclusions de \mathcal{T} au sens de 2.4.2 et on suppose :*

- 1) *que \mathcal{H} est contenu dans l’ouvert Ω des objets pré-stables (voir 2.2.1),*
- 2) *que \mathcal{C} est fermé dans $\mathbf{P}(E)^{m+p} \times \mathbf{P}(E^*)^{n+q}$ (théorème “fermé”).*

On fixe une base \mathcal{B} de E . Soient $a_{i,k}, f_{j,k}$ les coordonnées homogènes des données sur cette base et la base duale. On note $R = k[a_i, f_j]$ l’anneau de polynômes en les $a_{i,k}, f_{j,k}$ et S le sous-anneau des invariants¹⁹ (relatifs) sous

¹⁹Ce sont aussi les invariants absolus sous $SL(E)$.

$GL(E)$. On représente S comme quotient d'un anneau de polynômes²⁰ \widehat{S} par l'idéal \mathcal{R} des **relations** entre les invariants.

Alors, \mathcal{T} s'exprime comme une ou plusieurs relations, polynomiales, entre des polynômes en les données a_i, f_j , invariants (relatifs) sous le groupe $GL(E)$. Précisément, hypothèses et conclusions correspondent à des éléments de \widehat{S} et le théorème indique que les conclusions sont dans l'idéal engendré par les hypothèses et les relations.

2.4.5 Commentaires.

1) On notera qu'on a une certaine latitude sur le choix de ensemble \mathcal{H} . Par exemple, pour le théorème de Pappus on peut prendre seulement 6 points, a, b, c, a', b', c' , en supposant a, b, c (resp. a', b', c') alignés, mais a, b, c distincts et de même pour les autres, etc. ou prendre en sus deux droites D, D' et demander $a, b, c \in D$ et de même pour les autres. De même on a une latitude sur les objets construits. Toujours pour Pappus, ce sont u, v, w , mais là encore, on peut rajouter les droites (bc') , etc. si l'on veut.

2) On notera qu'il est toujours possible de se ramener à n'avoir que des points dans les données. En effet, on peut toujours remplacer la donnée d'une droite d'équation f par celle de deux de ses points x, y . On a alors $f = x \wedge y$ et l'évaluation $f(a)$ n'est autre que le crochet $[a, x, y]$, les crochets de formes étant donnés par les formules 2.3.23. Cependant, l'exemple de Pappus (voir 2.5.6 et 2.5.7) montre que cette procédure peut induire des calculs plus compliqués. Une raison en est que la donnée d'une droite générique nécessite 3 paramètres tandis que celle de deux points en nécessite 6.

3) Il est important de discuter les hypothèses introduites dans ce théorème. L'hypothèse que \mathcal{C} est fermé semble assez innocente, tant il est vrai que les théorèmes les plus intéressants sont ceux qui se traduisent par une propriété fermée (alignement, concours, etc.).

En ce qui concerne l'hypothèse sur \mathcal{H} , à savoir qu'il est formé d'objets pré-stables, on peut noter d'abord que, dans la pratique, cette condition sera toujours réalisée (par exemple sous la forme de la présence d'un repère). De plus, si elle ne l'est pas, il est facile de la contraindre en ajoutant au besoin des points ou des droites²¹.

²⁰Un résultat général assure que, si le groupe est réductif, S est une k -algèbre de type fini, de sorte qu'on peut prendre pour \widehat{S} un anneau de polynômes en un nombre fini de variables, voir [Mum65] par exemple. Dans notre cas, nous verrons au chapitre 3 que S est engendré par les crochets de vecteurs et de formes et les évaluations, qui sont en nombre fini.

²¹C'est le principe de Jeanne d'Arc disant à ses juges qui lui demandaient perfidement si elle était en état de grâce : *Si je n'y suis, Dieu veuille m'y mettre, si j'y suis, Dieu veuille m'y garder.*

En vérité, on peut penser qu'il n'y a pas de théorèmes dont les hypothèses ne sont pas pré-stables. En effet, un objet non pré-stable est formé de points a_i alignés sur une droite D et de droites D_j passant par un point a , voir figure 2.2. On peut "saturer" cet objet en ajoutant si besoin est le point a et les points d'intersection des droites D_j et D ainsi que les droites (aa_i) et la droite D , mais alors il n'y a plus aucune construction possible (au moins à la règle) et partant, plus de théorèmes²².

Démonstration.

1) Preuve dans le cas algébriquement clos

La construction est une application Φ de \mathcal{H} dans $\mathbf{P}(E)^p \times \mathbf{P}(E^*)^q$ et l'assertion du théorème c'est que l'image par $\Psi = (\text{Id}, \Phi)$ de \mathcal{H} est contenue dans \mathcal{C} , ou encore que le fermé $\mathcal{C}' = \Psi^{-1}(\mathcal{C})$ contient \mathcal{H} . Comme Φ est une construction projective, il en est de même de Ψ en vertu de 2.3.12. Par hypothèse, \mathcal{H} et \mathcal{C} sont des propriétés projectives et il résulte alors de 2.3.5 que \mathcal{C}' est aussi une propriété projective. On peut décomposer \mathcal{H} en réunion de ses composantes irréductibles (cf. 1.2.13) et il suffit de montrer l'assertion du théorème pour chacune d'elles et de rassembler les relations obtenues. On est donc ramené au cas où \mathcal{H} est irréductible. Comme \mathcal{H} est contenu dans l'ouvert Ω des objets pré-stables, il rencontre un ouvert affine standard U et l'inclusion $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}'$ équivaut à $\mathcal{H} \cap U \subset \mathcal{C}' \cap U$ car $\mathcal{H} \cap U$ est partout dense dans \mathcal{H} (cf. 1.2.13).

On pose $A = \Gamma(U)$ et on note B l'anneau des invariants (relatifs) de A sous l'action de $GL(E)$.

Notons qu'on peut supposer que $\mathcal{H} \cap U$ est fermé dans U . En effet, si on note \mathcal{H}' l'adhérence de $\mathcal{H} \cap U$ dans U , comme \mathcal{C}' est fermé, il revient au même de demander $\mathcal{H}' \subset \mathcal{C}' \cap U$ ou $\mathcal{H} \cap U \subset \mathcal{C}' \cap U$.

En vertu de 2.2.19, il existe des idéaux I et J de A , engendrés respectivement par des invariants sous $GL(E)$, h_1, \dots, h_k et c_1, \dots, c_l , tels que l'on ait $V(I) = \mathcal{H} \cap U$ et $V(J) = \mathcal{C}' \cap U$. Le Nullstellensatz montre alors que le théorème \mathcal{T} est équivalent au fait que J est contenu dans l'idéal racine de I . Cela signifie que tout générateur de J , élevé à une puissance convenable N , est dans I ou encore que les c_i^N sont combinaisons linéaires des h_j *a priori à coefficients dans A* . Mais, on a le lemme suivant :

²²Par exemple, contrairement au cas du théorème à quatre points, il n'y a pas de théorème à deux droites et deux points. On notera aussi que le théorème reliant le birapport de 4 points de D et celui de 4 droites issues de a , qui semble relever de la figure 2.2, ne prend sens que si l'on se donne deux points a, a' ou deux droites D, D' et qu'on explique que le birapport ne dépend pas du choix de a ou D . Mais avec ce point ou cette droite en plus, l'objet étudié est devenu pré-stable !

2.4.6 Lemme. *Soient $c; h_1, \dots, h_k$ des éléments de B . Si c est combinaison linéaire des h_j à coefficients dans A , il l'est aussi à coefficients dans B .*

Démonstration. On suppose qu'on a $c = \sum_{j=1}^k a_j h_j$ et on applique l'opérateur de Reynolds r . Comme h_j est invariant, l'identité de Reynolds donne $r(a_j h_j) = r(a_j) h_j$, d'où $r(c) = c = \sum_{j=1}^k r(a_j) h_j$ avec $r(a_j) \in B$.

Le théorème se traduit donc par des relations $c_i = \sum_{j=1}^k b_{i,j} h_j$, avec $c_i, h_j, b_{i,j} \in B$. Mais, en vertu de 2.2.21, quitte à multiplier par des dénominateurs qui sont des polynômes en les crochets et les évaluations, ces relations se relèvent en des relations entre éléments de S . Si on relève les générateurs c_1, \dots, c_l et h_1, \dots, h_k des idéaux $I(\mathcal{C}')$ et $I(\mathcal{H})$ dans \widehat{S} en $\widehat{c}_1, \dots, \widehat{c}_l$ et $\widehat{h}_1, \dots, \widehat{h}_k$, comme le noyau de $\widehat{S} \rightarrow S$ est \mathcal{R} , le théorème s'exprime donc en disant que les \widehat{c}_i sont dans l'idéal engendré par les \widehat{h}_j et par \mathcal{R} , cqfd.

2) Réduction au cas algébriquement clos

On admettra²³ les deux résultats classiques suivants, tous deux corollaires du théorème de Zorn (voir par exemple [Lan69] II Th. 2.5 et I Th. 5.1) :

2.4.7 Théorème. (Steinitz) *Soit k un corps. Il existe un corps \overline{k} contenant k et algébriquement clos.*

2.4.8 Théorème. *Tout k -espace vectoriel (en particulier \overline{k} avec les notations précédentes) admet une base.*

Supposons 2.4.4 établi dans le cas algébriquement clos. On plonge k dans un corps algébriquement clos \overline{k} et on appelle (ξ_i) une base de \overline{k} sur k . On peut supposer $\xi_0 = 1$.

La base \mathcal{B} de E sur k fournit des isomorphismes de E et E^* sur k^3 . Ces isomorphismes permettent²⁴ de “complexifier” E et E^* en $\overline{E} = \overline{k}^3$ et $(\overline{E})^* = \overline{k}^3$. Le groupe $GL(\overline{E})$ est alors isomorphe à $GL(3, \overline{k})$. On étend aussi les scalaires dans l'anneau de polynômes $R = k[a_i, f_j]$. Il devient $\overline{R} = \overline{k}[a_i, f_j]$. La base (ξ_i) est aussi une base de \overline{R} comme R -module : tout polynôme $\overline{P} \in \overline{R}$ s'écrit de manière unique comme somme finie $\overline{P} = \sum_i P_i \xi_i$ où les P_i sont dans R .

On reprend le début de la démonstration donnée dans le cas algébriquement clos. On a deux parties \mathcal{H} et \mathcal{C}' contenues dans $\mathbf{P}(E)^p \times \mathbf{P}(E^*)^q$, que l'on

²³Le lecteur qui ne voudrait pas admettre le théorème de Steinitz pourra toujours se contenter d'examiner le cas où k est un sous-corps de \mathbf{C} . Celui qui ne voudrait pas du second théorème se contentera du cas $k = \mathbf{R}$.

²⁴Bien entendu, on peut faire toutes ces constructions sans bases à l'aide du produit tensoriel $\overline{E} = E \otimes_k \overline{k}$.

peut supposer fermées. Le théorème \mathcal{T} c'est l'inclusion $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}'$. On pose $J = I(\mathcal{H})$ et $I = I(\mathcal{C}')$. Ce sont des idéaux de R (donc engendrés par un nombre fini d'éléments g_i et h_i respectivement), invariants sous $GL(E)$ et le théorème \mathcal{T} est équivalent à l'inclusion $I \subset J$. Comme I et J sont invariants, ils sont aussi engendrés par l'ensemble des $u.g_i$ et des $u.h_i$ pour $u \in GL(E)$. On considère alors les idéaux \bar{I} et \bar{J} de \bar{R} engendrés par les $u.g_i$ et les $u.h_i$ respectivement, pour $u \in GL(\bar{E})$. L'inclusion $I \subset J$ est équivalente à $\bar{I} \subset \bar{J}$ en vertu du lemme suivant :

2.4.9 Lemme. *On a $\bar{I} \cap R = I$ et $\bar{J} \cap R = J$.*

Démonstration. Soit $f \in \bar{I} \cap R$. On a $f = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} u_i . g_j$, avec $\lambda_{i,j} \in \bar{R}$ et $u_i \in GL(\bar{E})$. On décompose les $\lambda_{i,j}$ et les coefficients des matrices u_i sur la base des ξ_k . En identifiant les coefficients de ξ_0 on voit que f est dans I

On définit alors $\bar{\mathcal{H}} = V(\bar{J})$ et $\bar{\mathcal{C}}' = V(\bar{I})$. Montrons d'abord que l'inclusion $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar{\mathcal{C}}'$ est équivalente à \mathcal{T} . Si on a \mathcal{T} , donc $\bar{I} \subset \bar{J}$, on a bien $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar{\mathcal{C}}'$. Inversement, si on a $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar{\mathcal{C}}'$, on en déduit, par le Nullstellensatz, $\text{rac}(\bar{I}) \subset \text{rac}(\bar{J})$. Soit $f \in I \subset \bar{I} \subset \text{rac}(\bar{I})$. Il existe N tel que f^N soit dans \bar{J} . Mais, comme f^N est dans R , il est dans J en vertu du lemme ci-dessus. Comme J est l'idéal $I(\mathcal{H})$, il est égal à sa racine et on a $f \in J$. On a donc montré $I \subset J$, donc \mathcal{T} .

En vertu du cas algébriquement clos, on sait que l'inclusion $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar{\mathcal{C}}'$ est équivalente à une (voire plusieurs) relation $\bar{\mathcal{S}}$ entre invariants de \bar{R} sous $GL(\bar{E})$. Pour conclure, il reste à montrer que cette relation est équivalente à une (ou plusieurs) relation sur k . Il y a deux voies.

- Nous montrerons au chapitre 3 que les invariants f_i de \bar{R} sont définis sur k (et même sur \mathbf{Q} : ce sont les crochets et les évaluations). On a donc une relation polynomiale $\sum_{i=1}^r g_i f_i$ avec $f_i \in R$ et $g_i \in \bar{R}$. En décomposant les g_i sur la base de \bar{R} sur R on ramène cette relation à un nombre fini de relations polynomiales à coefficients dans k .

- On peut se passer de cet argument en montrant le lemme suivant (qui devient trivial avec les résultats du chapitre 3) :

2.4.10 Lemme.

1) Soit $P \in R$ un polynôme invariant sous $GL(E)$. Alors P est invariant sous $GL(\bar{E})$.

2) Inversement, si \bar{P} est invariant sous $GL(\bar{E})$, il s'écrit $\bar{P} = \sum_i P_i \xi_i$ où les P_i sont des polynômes de R invariants sous $GL(E)$.

Démonstration. On traite le cas des invariants absolus, le cas relatif est analogue.

1) Le groupe $GL(\overline{E})$ est engendré par les transvections et les dilatations (voir [Per96]), de sorte qu'il suffit de montrer l'invariance par ces éléments et plus précisément par les matrices triangulaires $T(\lambda)$ admettant des 1 sur la diagonale et un unique coefficient λ en dehors et les matrices diagonales $D(\lambda) = \text{diag}(1, 1, \lambda)$. Dans chaque cas, l'invariance s'exprime par la nullité de polynômes $F(\lambda)$ à coefficients dans k . Comme ces polynômes sont identiquement nuls sur k par hypothèse, et que k est infini, il sont formellement nuls, donc aussi nuls sur \overline{k} .

2) On écrit $\overline{P} = \sum_i P_i \xi_i$ avec $P_i \in R$ et on applique $g \in GL(E)$. Comme l'opération est linéaire, on a $g.\overline{P} = \sum_i (g.P_i) \xi_i$. Comme \overline{P} est invariant et que les ξ_i forment une base de \overline{R} sur R , on en déduit $g.P_i = P_i$ pour chaque i .

2.5 Exemples

2.5.1 Quelques exemples de relations entre invariants

Le méta-théorème montre l'intérêt de connaître les relations entre invariants. Elles seront systématiquement étudiées au chapitre 3, mais nous en donnons dès maintenant quelques exemples.

Les relations d'alternance

Il s'agit des relations qui expriment le fait que les crochets sont des déterminants, donc des formes multilinéaires alternées. On a donc des relations du genre $[a, a, b] = 0$ et $[a, b, c] + [a, c, b] = 0$. D'une certaine façon, ces relations seront considérées, sinon comme des relations triviales, du moins comme des relations banales.

La relation fondamentale de dimension

La formule 2.3.19 qui exprime le double produit en termes de crochets peut s'écrire d'une autre manière en échangeant les rôles de a, b et c, d . On obtient

$$(c \wedge d) \wedge (a \wedge b) = [c, a, b] d - [d, a, b] c.$$

Comme l'opération \wedge est antisymétrique, on en déduit la relation :

$$[a, c, d] b - [b, c, d] a + [c, a, b] d - [d, a, b] c = 0$$

que l'on peut encore écrire sous de nombreuses formes, par exemple :

2.5.1 Proposition. (Relation fondamentale de dimension) Soient a, b, c, d des vecteurs de E . On a les formules :

$$(1) \quad [b, c, d]a - [a, c, d]b + [a, b, d]c - [a, b, c]d = 0,$$

$$(2) \quad [a, b, c]d = [b, c, d]a + [c, a, d]b + [a, b, d]c.$$

2.5.2 Remarque. Ces relations traduisent essentiellement la dépendance linéaire de d par rapport à a, b, c , donc le fait qu'on travaille dans un espace vectoriel de dimension 3. Elles proviennent de la nullité du déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_1 \end{vmatrix}$$

et des deux déterminants analogues obtenus en mettant les indices 2 et 3 au lieu de 1 dans la dernière colonne.

2.5.3 Remarque. La formule (2) ci-dessus a une interprétation affine très simple, voir 5.6.2 : elle décrit le point d comme barycentre de a, b, c affectés des aires (orientées) des triangles bcd, cad et abd .

Les relations fondamentales \mathcal{R}' et \mathcal{S}

La formule (1) de 2.5.1 donne naissance à deux des relations fondamentales entre invariants, les relations \mathcal{R}' et \mathcal{S} , dont nous verrons qu'elles engendrent essentiellement toutes les autres, voir 3.1.10 et 3.2.4.

2.5.4 Théorème. Soient a, b, c, d, x, y des vecteurs et f une forme linéaire. On a les relations suivantes :

$$(\mathcal{R}') \quad [b, c, d][a, x, y] - [a, c, d][b, x, y] + [a, b, d][c, x, y] - [a, b, c][d, x, y] = 0$$

$$(\mathcal{S}) \quad [b, c, d]f(a) - [a, c, d]f(b) + [a, b, d]f(c) - [a, b, c]f(d) = 0$$

Démonstration. C'est immédiat en appliquant $[\cdot, x, y]$ ou f à la relation (1).

Expression d'une forme à partir de 3 vecteurs

La relation \mathcal{S} conduit au résultat suivant :

2.5.5 Corollaire. Soient a, b, c des vecteurs et f une forme. On a la formule :

$$(\mathcal{S}^*) \quad f(a)(b \wedge c) + f(b)(c \wedge a) + f(c)(a \wedge b) = [a, b, c]f.$$

Démonstration. On vérifie la formule en appliquant les deux membres à un vecteur d quelconque. C'est exactement la relation \mathcal{S} .

2.5.2 Théorèmes projectifs et relations entre invariants : l'exemple de Pappus

Ce paragraphe préfigure le chapitre 4. Nous y donnons une première illustration du théorème 2.4.4 en indiquant comment le théorème de Pappus est issu de relations entre les invariants, provenant des formules fondamentales 2.3.23. Il y a deux voies, l'une passant par les droites, l'autre par les points.

Par les droites

Par rapport au théorème de Pappus usuel, cf. 2.5.7, on introduit les droites $A, B, C; A', B', C'$ qui sont $(bc'), (ca'), (ab'); (b'c), (c'a), (a'b)$ respectivement.

2.5.6 Proposition. *Soient $A, B, C, A', B', C' \in E^*$. On a la formule :*

$$[A \wedge A', B \wedge B', C \wedge C'] = [B' \wedge C, C' \wedge A, A' \wedge B] - [B \wedge C', C \wedge A', A \wedge B'].$$

Démonstration. On utilise la formule 2.3.23.4 qui permet d'écrire le premier membre de la relation : $F = [A, A', C][B, B', C'] - [A, A', C'][B, B', C]$. Le second membre, avec la même formule, s'écrit $F_1 - F_2$ avec :

$$F_1 = [B', C, A'][C', A, B] - [B', C, B][C', A, A'] \quad \text{et}$$

$$F_2 = [B, C', A][C, A', B'] - [B, C', B'][C, A', A].$$

La conclusion résulte des propriétés d'antisymétrie des crochets.

2.5.7 Corollaire. (Pappus) *Soient a, b, c, a', b', c' six points de $\mathbf{P}(E)$. On suppose a, b, c et a', b', c' alignés. Alors, les points d'intersection des droites (bc') et $(b'c)$, (ca') et $(c'a)$, (ab') et $(a'b)$ (supposées distinctes) sont alignés.*

On pose $A = b \wedge c', B = c \wedge a', C = a \wedge b'$ et $A' = b' \wedge c, B' = c' \wedge a, C' = a' \wedge b$ et on applique la formule précédente. Comme les points a, b, c sont alignés, et qu'ils ont pour représentants $B' \wedge C, C' \wedge A, A' \wedge B$, le crochet correspondant est nul et de même pour l'autre et la conclusion s'ensuit.

2.5.8 Remarque. On notera que la formule 2.3.23.4 utilise de façon cruciale le fait que E est de dimension 3. Quant à la relation qui correspond au théorème, à savoir $R = F - F_1 + F_2$, on vérifie qu'il s'agit d'une relation banale (c'est-à-dire engendrée par les relations d'alternance, par exemple $[A, A', C] + [C, A', A]$).

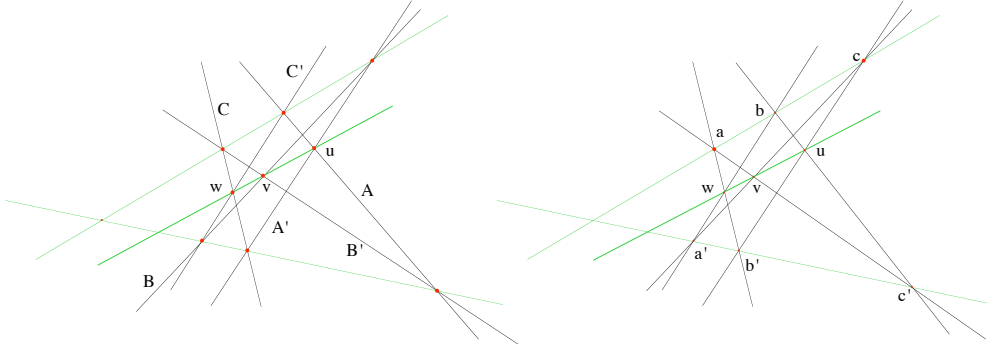


Figure 2.3: Pappus : les deux variantes d'écriture

Par les points

2.5.9 Proposition. Soient $a, b, c, a', b', c' \in E$. On a les formules suivantes :

- $$(1) \quad [(b \wedge c') \wedge (b' \wedge c), (c \wedge a') \wedge (c' \wedge a), (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)] =$$
- $$[a, a', b][b, b', c][c, c', a][a', b', c'] - [a, a', c'][b, b', a'][c, c', b'] [a, b, c].$$
- $$(2) \quad [(b \wedge c') \wedge (b' \wedge c), (c \wedge a') \wedge (c' \wedge a), (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)] =$$
- $$[b', c', a][c', a', b][a', b', c][a, b, c] - [b, c, a'][c, a, b'][a, b, c'][a', b', c'].$$

Démonstration. Pour la première égalité, on applique la formule du double produit 2.3.19 avec les expressions du type $(b \wedge c') \wedge (b' \wedge c)$ et on utilise la multilinéarité du crochet. Pour la seconde, on pose $A = b \wedge c', B = c \wedge a', C = a \wedge b'$ et $A' = b' \wedge c, B' = c' \wedge a, C' = a' \wedge b$ et on applique 2.5.6. Pour d'autres preuves, voir ci-dessous. On notera qu'on passe de la première forme du second membre à la seconde en permutant circulairement a, b, c et en laissant fixes a', b', c' .

2.5.10 Remarques.

- 1) Le théorème de Pappus 2.5.7 est évident avec les formules précédentes : l'hypothèse d'alignement assure la nullité des seconds membres *via* les termes $[a, b, c]$ et $[a', b', c']$, la conclusion est la nullité du premier.
- 2) Nous montrerons dans la Partie III que la nullité des seconds membres des égalités précédentes est exactement équivalente au fait que les six points a, b, c, a', b', c' sont sur une même conique, qu'elle soit dégénérée comme dans le cas de Pappus, ou non, voir Partie III ???. Cela nous donnera une preuve du théorème de Pascal, voir ???. Cela nous permettra aussi de comprendre

l'invariance de la relation ci-dessus par la permutation circulaire (abc) .

3) En vertu des résultats généraux du chapitre suivant, la relation entre les deux versions des seconds membres des égalités précédentes est conséquence des relations fondamentales \mathcal{R} sur les six points, voir exercice 2.6.5. On notera que ces seconds membres sont des sections de type Y au sens de 7.5.5 ci-dessous.

D'autres preuves des formules

Outre les méthodes vues ci-dessus, il y a plusieurs autres possibilités pour prouver les formules de 2.5.9. La plus brutale consiste à vérifier ces formules par un calcul direct, à la main, ou avec un ordinateur.

Lorsqu'on a la formule, une méthode simple pour la vérifier consiste à noter que, puisque les deux membres sont des invariants, on peut supposer par exemple $a' = (1, 0, 0)$, $b' = (0, 1, 0)$, $c' = (0, 0, 1)$ en utilisant le raisonnement vu en 2.3.19. En termes de matrices, si on pose :

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_1c_2 & a_2c_2 & a_2c_3 \\ b_3a_1 & b_2a_3 & b_3a_3 \\ c_1b_1 & c_1b_2 & c_3b_1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a_2c_1 - a_1c_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_3a_2 - b_2a_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_1b_3 - c_3b_1 \end{pmatrix},$$

on a $DA = B + C$ et il n'y a plus qu'à vérifier la formule (à laquelle chaque mathématicien a bien dû rêver une fois, voir 2.6.4) : $\det DA = \det(B + C) = \det B + \det C$!!

2.6 Exercices

Interprétation cohomologique des concomitants à multiplicateurs

Cet exercice n'intéressera que les lecteurs qui connaissent un peu de cohomologie des groupes.

2.6.1 Exercice. On considère le groupe abélien $A = \mathcal{F}(X, k^*)$, muni de la multiplication associée à celle de k^* . On fait opérer G sur A (par homomorphismes de groupes) par la formule $(g.f)(x) = f(g^{-1}.x)$. On rappelle qu'une application $\chi : G \rightarrow A$ est appelée un **cocycle** si elle vérifie la formule : $\chi(gh) = \chi(g)(g.\chi(h))$ et un **cobord** s'il existe $f \in A$ avec la formule $\chi(g) = g.f/f$.

1) Montrer que l'ensemble $Z(G, A)$ des cocycles est un sous-groupe du groupe abélien $\mathcal{F}(G, A)$ et que l'ensemble $B(G, A)$ des cobords en est un sous-groupe. Le quotient $H(G, A) = Z(G, A)/B(G, A)$ est appelé **groupe de cohomologie**.

2) Si μ est un multiplicateur au sens de 2.3.8, on définit $\chi : G \rightarrow A$ par la formule $\chi(g)(x) = \mu(g^{-1}, x)$.

a) Montrer que χ est un cocycle de G dans A .

b) Montrer que ce cocycle est un cobord s'il existe $f \in A$ vérifiant
$$\mu(g, x) = \frac{f(g.x)}{f(x)}.$$

c) Si Φ est un concomitant de multiplicateur μ , montrer que l'élément associé à μ dans le groupe de cohomologie est trivial si et seulement si il existe un concomitant absolu Ψ tels que les concomitants projectifs associés $\overline{\Phi}$ et $\overline{\Psi}$ soient égaux. (Si χ est un cobord associé à f on considérera $\Psi(x) = f(x)\Phi(x)$).

Constructions à la règle

2.6.2 Exercice. On reprend les notations de 2.3.16. On suppose de plus que, parmi les points \overline{a}_i , on dispose d'un repère projectif, par exemple $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4$. On choisit les relèvements de ces points de telle sorte que $a = a_1, b = a_2, c = a_3$ soit une base de E et qu'on ait $d = a_4 = a + b + c$. On munit E^* de la base duale de a, b, c et on écrit les autres points a_i et les formes f_j dans ces bases. Soit K le sous-corps de k engendré par les rapports²⁵ des coordonnées non nulles des a_i, f_j . On se propose de montrer que tout point $x = (x_1, x_2, x_3)$ qui admet un système de coordonnées homogènes à coefficients dans K s'obtient par une construction à la règle à partir des a_i, f_j . On appelle points constructibles les points construits à la règle à partir des a_i, f_j . On pose $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (0, 0, 1)$ et $d = (1, 1, 1)$.

1) Montrer que l'ensemble L des $\lambda \in k$ tels que $(\lambda, 0, 1)$ soit constructible est un sous-corps de k . (Utiliser les constructions des birapports somme, inverse et produit, voir Partie I ??, ?? et ??.)

2) Montrer que le point $m = (\lambda, 0, 1)$ est constructible si et seulement si l'un des points obtenus en permutant ses coordonnées l'est.

3) Montrer que le point (λ, μ, ν) avec $\nu \neq 0$ est constructible si et seulement si les points $(\lambda/\nu, 0, 1)$ et $(0, \mu/\nu, 1)$ le sont.

²⁵La référence aux rapports des coordonnées est là pour se prémunir du cas d'un point de coordonnées homogènes $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ par exemple.

4) Montrer que si $p = (\lambda, \mu, \nu)$ est constructible il en est de même des points obtenus en permutant ses coordonnées.

5) Conclure.

2.6.3 Exercice. Soit $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2$ le plan projectif sur le corps des nombres réels. On considère l'ouvert Ω de $(\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2)^4$ formé des quadruplets (a, b, c, d) qui forment un repère projectif. Soit $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2$ l'application définie de la façon suivante. On associe d'abord à (a, b, c, d) le point d'intersection e de (ab) et (cd) , puis le point m de (ab) défini par $\llbracket a, b, e, m \rrbracket = \sqrt{2}$.

1) Montrer que Φ est un morphisme projectif.

2) Montrer que Φ est une construction projective, mais que Φ n'est pas une construction à la règle.

3) On suppose qu'on s'est donné un cinquième point $f = (x, y, t)$ qui est tel que les rapports x/t et y/t sont dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ mais que l'un au moins n'est pas dans \mathbf{Q} . Montrer qu'alors l'application qui à (a, b, c, d, f) associe m est une construction à la règle.

2.6.4 Exercice. (Lemme du Boenlesgrab) Pour une matrice A de taille 3×3 on note $t(A)$ le vecteur de k^3 des coefficients diagonaux et $\mu(A)$ celui des mineurs de ces coefficients. On munit k^3 de la forme bilinéaire canonique, définie, si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$, par $(x|y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Soient B, C deux matrices 3×3 . Montrer qu'on a $\det(B + C) = \det B + \det C$ si et seulement si on a $(t(B)|\mu(C)) + (t(C)|\mu(B)) = 0$.

2.6.5 Exercice. L'objectif de cet exercice est de prouver directement la relation entre les seconds membres des égalités de 2.5.9. On utilise ici les notations du paragraphe 5 du chapitre 7 et notamment les sections de types X et Y . Pour unifier les notations par rapport à ce chapitre on posera $a' = f$, $b' = d$, $c' = e$. On pose (cf. 7.5.5 et 7.5.8) :

$$Y_1 = [a, b, c][a, e, f][b, d, f][c, d, e], \quad \overline{Y}_1 = [d, e, f][b, c, d][a, c, e][a, b, f],$$

$$Z_1 = [a, b, c][a, d, e][b, e, f][c, d, f], \quad \overline{Z}_1 = [a, b, e][a, c, d][b, c, f][d, e, f],$$

$$Y_2 = [a, b, c][b, d, f][a, d, e][c, e, f], \quad Y_4 = [a, b, f][a, c, d][b, c, e][d, e, f].$$

1) Montrer que le second membre de l'égalité (1) (resp. (2)) de 2.5.9 s'écrit $\overline{Y}_1 - Y_1$ (resp. $\overline{Z}_1 - Z_1$).

2) Montrer, en utilisant la relation fondamentale sur 5 lettres de 3.1.11, qu'on a $Y_1 - Z_1 = Y_1 - Y_2 + Y_2 - Z_1 = -X_1X_6 + X_1X_8$ et $\overline{Y}_1 - \overline{Z}_1 = \overline{Y}_1 - Y_4 + Y_4 - \overline{Z}_1 = -X_1X_4 - X_1X_5$. Conclure en utilisant la relation $X_4 + X_5 + X_8 - X_6 = 0$ (cf. 7.5.2).

Chapitre 3

Énoncé des théorèmes fondamentaux

Le troisième chapitre de cette partie a pour objectif d'énoncer les théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants, dans le cas des dimensions 2 et 3. Maintenant qu'on a compris qu'un théorème de géométrie projective correspond à une relation entre des invariants du groupe linéaire (voir 2.4.4), il s'agit de déterminer ces invariants et ces relations, ce qui, en théorie au moins, nous donnera tous les théorèmes possibles. Le résultat est très simple dans le cas des invariants (il n'y a que les crochets et les évaluations), un peu plus complexe dans le cas des relations, surtout dans le cas où cohabitent des vecteurs et des formes. La difficulté principale, pour énoncer ces résultats réside dans la précision de la formulation, notamment dans le cas des relations, ce qui nous a conduit à présenter des versions très algébriques des théorèmes. De plus, si ces résultats sont simples, il n'en est pas de même des démonstrations, qui sont difficiles, et que le lecteur trouvera au chapitre 6. Il sera d'autant plus motivé pour cela qu'il en aura vu les conséquences géométriques aux chapitres 4 et 5 et qu'il pourra en retirer la satisfaction de "comprendre" enfin la géométrie projective.

On traite ici essentiellement le cas de la dimension 3, le cas de la dimension 2 étant un peu plus facile. En vérité, le cas général de dimension $n \geq 3$ est très similaire, et on renvoie le lecteur aux références : [Wey39], [JD70], [Gur64], [Ric89], etc.

Le cadre

On travaille sur un espace vectoriel E de dimension 3 sur un corps k muni d'une base e_1, e_2, e_3 , le dual étant muni de la base duale. L'espace E est alors isomorphe à k^3 . Les résultats énoncés dans ce chapitre sont valables sans restriction sur le corps, mais nous ne donnerons les démonstrations, au chapitre 6, que dans le cas d'un corps **de caractéristique zéro**, donc infini (pour le cas de la caractéristique positive, le lecteur consultera [Ric89]).

On note I l'ensemble $\{1, 2, \dots, m\}$. Dans le premier paragraphe, on considère m vecteurs “génériques” de E , x_1, \dots, x_m . Cela signifie qu'on introduit l'anneau de polynômes R en les $3m$ indéterminées $x_{i,j}$, $i \in I$, $j = 1, 2, 3$ et son corps des fractions K et qu'on étend les scalaires¹ à K , de sorte que l'espace vectoriel considéré devient $E_K = K^3$. Les vecteurs x_i sont alors $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}) \in K^3$.

Un mot sur les notations. Pour éviter l'accumulation d'indices, nous noterons le plus souvent les vecteurs sans indices (comme le faisaient les mathématiciens du XIX-ème siècle, les premiers à s'être confrontés à ce type de problèmes), c'est-à-dire a, b, c, \dots . Les vecteurs x_1, \dots, x_m forment donc un ensemble $\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots\}$, en bijection avec I , donc totalement ordonné (on supposera que cet ordre est l'ordre alphabétique $a < b < c < \dots$) et leurs coordonnées seront encore notées (a_1, a_2, a_3) , etc. L'anneau de polynômes en les a_i, b_i, \dots à coefficients dans k sera encore noté R . On a donc :

$$R = k[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; \dots; m_1, m_2, m_3].$$

Nous commettrons parfois l'abus de langage d'identifier I et \mathcal{A} , notamment en notant $x, y \in I$ au lieu de $x, y \in \mathcal{A}$. Il faut traduire, bien entendu, $x = x_i$, $y = x_j$ avec $i, j \in I$.

Le groupe $GL(E) = GL(3, k)$ opère sur l'anneau R de la manière décrite au paragraphe 1.3.2 et l'on peut restreindre cette opération au sous-groupe $SL(E) = SL(3, k)$ des applications linéaires de déterminant 1. Il est clair que l'ensemble des polynômes de R invariants sous cette action est un sous-anneau S de R .

Dans le second paragraphe on se donne en plus n formes linéaires “génériques”, f_1, \dots, f_n correspondant à n droites du plan. Cela signifie qu'on introduit $3n$ indéterminées supplémentaires $f_{i,j}$ avec $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, 2, 3$ et qu'on travaille dans l'anneau des polynômes R en les $3m + 3n$ variables $x_{i,j}$ et $f_{i,j}$.

¹Les puristes noteront que E_K n'est autre que le produit tensoriel $E \otimes_k K$.

Un mot sur les groupes : SL , GL , PSL , PGL

Le groupe qui a pour nous la plus grande signification géométrique est évidemment le groupe des homographies $PGL(E)$. Pourtant, ce sont les invariants sous le groupe $SL(E)$ que nous allons déterminer en priorité. Il y a deux raisons à cela, d'abord c'est plus facile, ensuite, on verra qu'on récupère les invariants de GL et de PGL sans difficulté à partir de ceux de SL . Ajoutons que, dans certains cas, notamment celui de \mathbf{R} , le groupe $SL(3)$ et le groupe $PGL(3)$ sont isomorphes.

3.0.6 Proposition. *Soit k un corps tel que l'application $x \mapsto x^3$ soit un isomorphisme de k^* sur lui-même (par exemple $k = \mathbf{R}$ ou $k = \mathbf{F}_q$ avec $q - 1$ non multiple de 3). Alors, l'homomorphisme naturel $\varphi : SL(3, k) \rightarrow PGL(3, k)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Le noyau de φ est formé des homothéties dont le rapport est une racine cubique de l'unité et on a supposé qu'il n'y en a pas d'autre que 1. Pour la surjectivité, on considère $A \in GL(3, k)$. Soit d son déterminant. Il admet une racine cubique δ et $\delta^{-1}A$ est dans $SL(3, k)$ et a même image que A dans PGL .

3.1 Énoncé des théorèmes fondamentaux dans le cas de m vecteurs génériques

Dans cette section on énonce les deux théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants dans le cas de m vecteurs :

- 1) les invariants du groupe $SL(E)$ (et par voie de conséquence ceux de $GL(E)$) sont tous connus et ne sont autres que les crochets (donc les déterminants),
- 2) les relations qui lient ces invariants sont connues elles aussi.

Dans ce paragraphe, l'anneau R est l'anneau de polynômes en les $3m$ indéterminées $x_{i,j}$, $i \in I$, $j = 1, 2, 3$.

3.1.1 Le premier théorème fondamental : détermination des invariants

Le cas de m vecteurs génériques sous $SL(E)$, énoncé

3.1.1 Théorème. (Premier théorème fondamental) *Avec les notations ci-dessus, le sous-anneau S des polynômes de R invariants sous l'action de $SL(E)$ est engendré par les crochets $[x_i, x_j, x_k]$ avec $i, j, k \in I = \{1, 2, \dots, m\}$.*

On peut même se limiter aux crochets $[x_i, x_j, x_k]$, avec $1 \leq i < j < k \leq m$.
En particulier, pour $m \leq 2$, les seuls polynômes invariants sont les constantes.

3.1.2 Remarque. Bien entendu, les crochets sont des polynômes en vertu de la formule :

$$[x_i, x_j, x_k] = \sum_{\sigma \in S_3} \epsilon(\sigma) x_{i, \sigma(1)} x_{j, \sigma(2)} x_{k, \sigma(3)},$$

et ils sont invariants en vertu de 1.3.12.

3.1.3 Remarques.

0) Avec la notation sans indices, les crochets s'écrivent sous la forme $[a, b, c]$ avec $a, b, c \in \mathcal{A}$.

1) Le résultat signifie que tout polynôme invariant s'écrit avec les crochets. Par exemple, on a vu, cf. 2.3.23, la relation : $[a \wedge a', b \wedge b', c \wedge c'] = [a, a', c][b, b', c'] - [a, a', c'][b, b', c]$. La variante avec $1 \leq i < j < k \leq m$ résulte de l'antisymétrie des crochets.

2) De ce point de vue, on peut voir les relations qui donnent naissance aux théorèmes de Pappus (voir 2.5.9) et de Desargues (voir 4.2.1) comme des cas particuliers du théorème qui consistent à écrire des invariants en les vecteurs a, b, c, a', b', c' en fonction des crochets qui respectent² l'ordre a, b, c, a', b', c' . Précisément, il y a deux ingrédients dans ces calculs :

a) la multilinéarité du déterminant qui permet par exemple, dans la première version de Pappus, d'exprimer le crochet

$$[[b, b', c]c' - [c', b', c]b, [c, c', a]a' - [a', c', a]c, [a, a', b]b' - [b', a', b]a]$$

en fonction des crochets en les vecteurs a, b, c, a', b', c' et qui est un cas particulier du premier théorème fondamental,

b) l'alternance du déterminant qui permet de mettre les crochets dans l'ordre de 2.5.9.

Le cas de m vecteurs génériques sous $GL(E)$

Notons d'abord que, dans le cas de $GL(E)$, il n'y a pas d'invariants absolus :

3.1.4 Proposition. *Les seuls polynômes de R invariants (absolus) sous $GL(E)$ sont les constantes.*

Démonstration. On se ramène au cas d'un polynôme homogène de degré d et il suffit de regarder l'action des homothéties (voir ci-dessous 3.1.5).

Dans le cas des invariants relatifs (voir 1.3.11) on montre d'abord qu'il n'y a que des polynômes homogènes :

²Ou un autre ordre, s'il est plus commode.

3.1.5 Proposition. *Soit $P \in R$ un invariant de poids χ sous $GL(E)$. Alors, P est homogène.*

Démonstration. On écrit $P = P_0 + P_1 + \dots + P_n$ comme somme de polynômes homogènes. On choisit un scalaire λ non nul, qui ne soit pas une racine k -ième de l'unité pour $k = 1, 2, \dots, n$ (c'est possible car le corps est infini). On tient compte de l'invariance de P par l'homothétie h_λ de rapport λ : $h_\lambda(P) = P_0 + \lambda P_1 + \dots + \lambda^n P_n = \chi(h_\lambda)P$. On identifie les termes de même degré. Si P_i est non nul on a donc $\lambda^i = \chi(h_\lambda)$. S'il y avait deux termes P_i et P_j non nuls avec $i < j$, on aurait $\lambda^i = \lambda^j$, soit $\lambda^{j-i} = 1$, ce qui contredit le choix de λ .

On montre ensuite que le caractère est rationnel :

3.1.6 Proposition. *Soit P un polynôme non nul invariant de poids χ . Alors $\chi(u)$ est une fonction rationnelle de $u \in GL(E)$ (i.e. des coefficients de la matrice de u dans une base quelconque). Il existe $d \in \mathbf{Z}$ tel que l'on ait $\chi(u) = (\det u)^d$ pour tout u .*

Démonstration. La première assertion est évidente en identifiant deux monômes dans l'égalité $u.P = \chi(u)P$ et la seconde vient de 1.3.10.

3.1.7 Corollaire. *Avec les notations de 3.1.1, les polynômes de R invariants relatifs sous $GL(E)$ sont les polynômes homogènes en les crochets $[x_i, x_j, x_k]$ pour $1 \leq i < j < k \leq m$. Si P est de degré d en les crochets, c'est un invariant de poids $-d$.*

Démonstration. Soit P un invariant relatif sous $GL(E)$. On a vu ci-dessus que le poids est de la forme $(\det u)^d$, de sorte que P est un invariant absolu sous $SL(E)$, donc un polynôme en les crochets. Comme il est homogène en les x_{ij} , il est homogène en les crochets, d'où le résultat. Le calcul du poids vient de 1.3.12.

3.1.8 Corollaire. *Les fractions rationnelles en x_{ij} qui sont des invariants (absolus) sous $GL(E)$ sont les quotients $\frac{F}{G}$ où F et G sont des polynômes en les crochets, homogènes de même degré.*

Démonstration. Si R est une fraction rationnelle invariante on l'écrit sous la forme $R = \frac{F}{G}$ avec F, G premiers entre eux. On a $\frac{u.F}{u.G} = \frac{F}{G}$, soit $(u.F)G = F(u.G)$. Il en résulte que F divise $u.F$ et on a $u.F = \lambda(u)F$ pour une raison de degré. Le polynôme F est donc un invariant relatif et il en est de même de G . On conclut avec 3.1.7.

3.1.2 Le second théorème fondamental : détermination des relations

Le premier théorème fondamental montre que les invariants de m points se calculent avec les crochets $[x, y, z]$. Le second théorème fondamental vise à déterminer les relations qui lient ces crochets et il y a deux variantes selon que l'on se limite ou non aux crochets respectant l'ordre. De façon précise, introduisons deux anneaux de polynômes : l'anneau U des polynômes en les indéterminées X_{ijk} avec $i, j, k \in I = \{1, 2, \dots, m\}$, à coefficients dans le corps de base et l'anneau V des polynômes en les indéterminées X_{ijk} avec $1 \leq i < j < k \leq m$, toujours à coefficients dans le corps de base. Ces indéterminées vont être envoyées sur les crochets $[x_i, x_j, x_k]$. La proposition qui suit précise les liens entre ces deux anneaux :

3.1.9 Proposition. *On considère l'homomorphisme $\theta : U \rightarrow V$ défini sur les indéterminées X_{ijk} de la façon suivante :*

- $\theta(X_{ijk}) = 0$ si deux des indices i, j, k sont égaux,
- $\theta(X_{ijk}) = \epsilon(\sigma)X_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)}$ où σ est l'unique permutation de i, j, k telle que $\sigma(i) < \sigma(j) < \sigma(k)$.

Cet homomorphisme est surjectif et son noyau est engendré par les polynômes suivants :

- 1) les X_{ijk} dans lesquels deux indices au moins coïncident,
- 2) les $X_{ijk} - \epsilon(\sigma)X_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)}$ où σ est une permutation de i, j, k .

On a ensuite un homomorphisme $\Psi : V \rightarrow R$ qui à X_{ijk} associe le crochet $[x_i, x_j, x_k]$. Le composé $\Phi = \Psi \circ \theta$ est aussi l'homomorphisme de U dans R qui X_{ijk} associe le crochet $[x_i, x_j, x_k]$ en vertu de l'alternance du crochet. L'image commune de ces homomorphismes est exactement l'anneau S des polynômes invariants sous $SL(3, k)$ en vertu de 3.1.1. Déterminer les relations entre les crochets c'est chercher l'idéal noyau de Ψ ou de Φ . C'est l'objet du théorème suivant :

3.1.10 Théorème. (Second théorème fondamental) *Avec les notations précédentes, le noyau de Φ est l'idéal J engendré par les éléments suivants :*

- 1) Les X_{ijk} dans lesquels deux indices au moins coïncident,
- 2) les $X_{ijk} - \epsilon(\sigma)X_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)}$ où σ est une permutation de i, j, k ,
- 3) les éléments $\mathcal{R}(i, j, k, l; p, q)$ suivants

$$X_{jkl}X_{ipq} - X_{ikl}X_{jpq} + X_{ijl}X_{kpq} - X_{ijk}X_{lpq},$$

pour $i, j, k, l, p, q \in \{1, 2, \dots, m\}$, qui correspondent aux relations $\mathcal{R}'(a, b, c, d; x, y)$ entre crochets de la forme :

$$[b, c, d][a, x, y] - [a, c, d][b, x, y] + [a, b, d][c, x, y] - [a, b, c][d, x, y] = 0$$

(avec des coïncidences possibles entre les variables).

Le noyau de Ψ est l'image $\theta(\text{Ker}(\Phi))$. Il est engendré par les images par θ des polynômes de la forme $\mathcal{R}(i, j, k, l; p, q)$.

3.1.11 Remarques.

1) Attention, les relations du type $\mathcal{R}(i, j, k, l; p, q)$ faisant intervenir les indéterminées de V (i.e. avec des indices distincts et ordonnés) ne suffisent pas à engendrer $\text{Ker}(\Psi)$. Par exemple, la relation sur 5 lettres :

$$[b, c, d][a, d, y] - [a, c, d][b, d, y] + [a, b, d][c, d, y]$$

qui est obtenue à partir de $\mathcal{R}'(a, b, c, d; x, y)$ en faisant $x = d$, est dans $\text{Ker}(\Psi)$ mais pas dans l'idéal engendré par les relations du type \mathcal{R}' de V (car une telle relation entre indéterminées de V nécessite 6 lettres distinctes).

2) Il faut noter que les éléments de J sont bien dans $\text{Ker} \Phi$. Cela résulte, après application de $x \wedge y$, de la relation fondamentale de dimension 2.5.1

$$[b, c, d]a - [a, c, d]b + [a, b, d]c - [a, b, c]d = 0,$$

laquelle résulte de la formule 2.3.23.3 et de l'antisymétrie des crochets, cf. 2.3.24.

3) *A priori*, il y a aussi des relations entre les relations³, etc., mais un théorème de Hilbert affirme que ce processus s'arrête. On peut imaginer que ces relations "du second ordre" ont aussi une interprétation géométrique (par exemple qu'elles correspondent aux cas où il y a plusieurs preuves vraiment différentes d'un même théorème?), mais l'auteur n'a pas approfondi cette question.

3.2 Le cas de m vecteurs et n formes

De la même manière qu'on s'est donné, pour énoncer 3.1.1, m vecteurs, correspondant à m points du plan projectif, on peut aussi se donner n formes linéaires "génériques", f_1, \dots, f_n correspondant à n droites du plan. Cela signifie qu'on introduit $3n$ indéterminées supplémentaires $f_{i,j}$ avec $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, 2, 3$, l'anneau des polynômes R en les $3m + 3n$ variables $x_{i,j}$ et $f_{i,j}$ et son corps des fractions K . Sur l'espace vectoriel $E = K^3$ on obtient alors n formes linéaires :

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = f_{i,1}x_1 + f_{i,2}x_2 + f_{i,3}x_3.$$

Dans ce paragraphe on considère les opérations des groupes $GL(E)$ et $SL(E)$ sur l'anneau R .

³On dit aussi des syzygies.

3.2.1 Le premier théorème fondamental

3.2.1 Théorème. *Avec les notations ci-dessus, le sous-anneau des polynômes de R invariants sous l'action de $SL(E)$ est engendré par trois types de polynômes : les crochets de vecteurs $[x_i, x_j, x_k]$, avec $1 \leq i < j < k \leq m$, les crochets de formes $[f_i, f_j, f_k]$, avec $1 \leq i < j < k \leq n$ et les évaluations $f_j(x_i)$ pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$.*

3.2.2 Invariants sous $GL(E)$

Comme les invariants $f(a)$, $[a, b, c]$, $[f, g, h]$ sont respectivement de poids $0, -1, 1$, on obtient le résultat suivant :

3.2.2 Proposition. *Les polynômes de R invariants (absolus) sous l'action de $GL(E)$ sont les polynômes en les invariants du type $f(a)$, $[a, b, c]$, $[f, g, h]$ tels que, dans chaque monôme, les degrés des crochets de vecteurs et de formes soient égaux.*

3.2.3 Corollaire. *Les polynômes de R invariants (absolus) sous l'action de $GL(E)$ sont les polynômes en les invariants du type $f(a)$.*

Démonstration. En effet, la relation \mathcal{T} , que nous retrouverons au paragraphe suivant, permet d'éliminer les crochets :

$$(\mathcal{T}) \quad [a, b, c][f, g, h] = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c) \end{vmatrix}$$

3.2.3 Le second théorème fondamental : détermination des relations

Nous énonçons maintenant le second théorème fondamental qui détermine les relations entre les invariants. On considère pour cela l'anneau⁴ des polynômes U à coefficients dans le corps de base et en les indéterminées suivantes : X_{ijk} avec $1 \leq i, j, k \leq m$, Y_{pqr} avec $1 \leq p, q, r \leq n$ et enfin Z_{ip} avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq p \leq n$. On parlera d'indices de type i ou de type p pour désigner les deux sortes d'indices qui interviennent dans les indéterminées.

On a un homomorphisme $\Phi : U \rightarrow R$ qui à X_{ijk} associe le crochet de vecteurs $[x_i, x_j, x_k]$, à Y_{pqr} le crochet de formes $[f_p, f_q, f_r]$ et à Z_{ip} le polynôme $f_p(x_i)$. L'image de Φ est exactement l'anneau S des polynômes invariants sous $SL(E)$ en vertu de 3.2.1. Déterminer les relations entre les invariants c'est chercher l'idéal noyau de Φ . C'est l'objet du théorème suivant :

⁴On pourrait aussi introduire l'anneau V analogue avec les crochets ordonnés.

3.2.4 Théorème. (Second théorème fondamental) Avec les notations précédentes, le noyau de Φ est l'idéal J engendré par les éléments suivants :

- 1) Les X_{ijk} (resp. les Y_{pqr}) dans lesquels deux indices au moins coïncident,
- 2) les $X_{ijk} - \epsilon(\sigma)X_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)}$ (resp. les $Y_{pqr} - \epsilon(\sigma)Y_{\sigma(p)\sigma(q)\sigma(r)}$) où σ est une permutation de i, j, k (resp. de p, q, r),
- 3) les éléments $\mathcal{R}(i, j, k, l; p, q)$ de la forme

$$X_{jkl}X_{ipq} - X_{ikl}X_{jpq} + X_{ijl}X_{kpq} - X_{ijk}X_{lpq},$$

pour $i, j, k, l, p, q \in \{1, 2, \dots, m\}$ et les éléments analogues avec les Y_{pqr} .

- 4) Les éléments $\mathcal{S}(i, j, k, l; p)$ de la forme

$$X_{jkl}Z_{ip} - X_{ikl}Z_{jp} + X_{ijl}Z_{kp} - X_{ijk}Z_{lp}$$

pour $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, m\}$ et $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ et les éléments analogues en inversant les vecteurs et les formes.

- 5) les éléments $\mathcal{T}(i, j, k; p, q, r)$ de la forme :

$$X_{ijk}Y_{pqr} - \begin{vmatrix} Z_{ip} & Z_{iq} & Z_{ir} \\ Z_{jp} & Z_{jq} & Z_{jr} \\ Z_{kp} & Z_{kq} & Z_{kr} \end{vmatrix}$$

avec $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$ et $p, q, r \in \{1, 2, \dots, n\}$.

3.2.5 Remarques.

1) Les relations de type 1, 2, 3 ont déjà été vues. Les relations de type 4 correspondent aux formules du type :

$$(\mathcal{S}) \quad [b, c, d]f(a) - [a, c, d]f(b) + [a, b, d]f(c) - [a, b, c]f(d) = 0.$$

Elles sont conséquences de la relation fondamentale de dimension 2.5.1.

2) Les relations de type 5 correspondent aux formules du type :

$$(\mathcal{T}) \quad [a, b, c][f, g, h] = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c) \end{vmatrix}$$

Pour prouver cette relation on peut supposer que (a, b, c) et (f, g, h) sont des bases de E et E^* respectivement (sinon les déterminants sont nuls). On considère alors la forme bilinéaire naturelle χ de $E^* \times E$ dans k qui à (f, x) associe $f(x)$. Le second membre de \mathcal{T} est le déterminant de la matrice de cette forme dans les bases (a, b, c) et (f, g, h) . Comme la matrice de χ dans les bases canoniques (e_1, e_2, e_3) et (e_1^*, e_2^*, e_3^*) est l'identité, la relation \mathcal{T} n'est autre que

la formule de changement de base usuelle pour les formes bilinéaires.

3) Voici une autre relation importante qui est conséquence des précédentes :

$$(T'(i, j, k, l; p, q, r, s)) \begin{vmatrix} Z_{ip} & Z_{iq} & Z_{ir} & Z_{is} \\ Z_{jp} & Z_{jq} & Z_{jr} & Z_{js} \\ Z_{kp} & Z_{kq} & Z_{kr} & Z_{ks} \\ Z_{lp} & Z_{lq} & Z_{lr} & Z_{ls} \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, si l'on développe ce déterminant selon la dernière colonne, en utilisant les relations \mathcal{T} , on trouve $-Y_{pqr}\mathcal{S}(i, j, k, l; s)$.

3.3 Le cas de la dimension 2

Nous avons choisi de déterminer invariants et relations dans le cas de $SL(3)$ qui correspond à la géométrie projective plane. Bien entendu, il est possible de faire le même travail dans le cas de $SL(n)$. Pour $n \geq 3$, les résultats sont analogues (et pas notablement plus difficiles à prouver). Pour $n = 2$, qui correspond à la géométrie de la droite projective, les preuves sont un peu plus simples. Le lecteur pourra consulter [Olv99] à ce sujet. Nous donnons très brièvement les résultats ci-dessous.

On considère m vecteurs x_1, x_2, \dots, x_m et n formes f_1, f_2, \dots, f_n génériques sur un espace vectoriel de dimension 2. On a donc $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2})$ et $f_i = (f_{i,1}, f_{i,2})$ où les $x_{i,j}$ et $f_{i,j}$ sont des indéterminées. Le groupe $SL(2)$ agit sur l'anneau de polynômes R en ces $2m + 2n$ variables et on a le résultat suivant :

3.3.1 Théorème. *Avec les notations précédentes, le sous-anneau des polynômes de R invariants sous l'action de $SL(2, k)$ est engendré par trois types de polynômes : les crochets de vecteurs $[x_i, x_j]$, avec $1 \leq i < j \leq m$, les crochets de formes $[f_i, f_j]$, avec $1 \leq i < j \leq n$ et les polynômes $f_j(x_i)$ pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$.*

Pour formuler le théorème du côté des relations, il faut introduire l'anneau de polynômes U en les indéterminées X_{ij} , Y_{pq} et Z_{ip} . L'homomorphisme Φ de U dans R associe respectivement $[x_i, x_j]$ à X_{ij} , $[f_p, f_q]$ à Y_{pq} et $f_p(x_i)$ à Z_{ip} . On a alors le résultat suivant :

3.3.2 Théorème. *Avec les notations précédentes, le noyau de Φ est engendré par les éléments suivants :*

1) Les X_{ii} et les Y_{pp} ,

2) les $X_{ij} + X_{ji}$ (resp. les $Y_{pq} + Y_{qp}$),

3) les éléments de la forme

$$(*) \quad R_{ijk,p} = X_{jk}X_{ip} + X_{ki}X_{jp} + X_{ij}X_{kp},$$

pour $i, j, k, p \in \{1, 2, \dots, m\}$ et les éléments analogues avec les Y_{pq} .

4) Les éléments de la forme

$$S_{ijk,p} = X_{jk}Z_{ip} + X_{ki}Z_{jp} + X_{ij}Z_{kp}$$

pour $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$ et $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ et les éléments analogues avec les Y_{pq} au lieu des X_{ij} .

3.3.3 Remarques.

1) Les relations d'antisymétrie $X_{ij} + X_{ji}$ sont conséquences des relations X_{ii} et $R_{ijk,p}$. En effet, on a la relation :

$$R_{ijji,p} = (X_{ij} + X_{ji})X_{ip} + X_{ii}X_{jp}$$

qui montre que $(X_{ij} + X_{ji})X_{ip}$ est dans J . Mais, dans l'image de Φ (qui est un sous-anneau de R donc intègre), $\Phi(X_{ip}) = [x_i, x_p]$ est non nul pour $i \neq p$, donc $X_{ij} + X_{ji}$ est dans J .

2) Les relations R et S se traduisent respectivement par les formules :

$$[b, c][a, x] + [c, a][b, x] + [a, b][c, x] = 0 \quad \text{et} \quad [b, c]f(a) + [c, a]f(b) + [a, b]f(c) = 0$$

pour des vecteurs a, b, c, x et une forme f .

3.4 Application aux invariants projectifs

Dans les paragraphes précédents, nous avons précisé les opérations des groupes $SL(E)$ et $GL(E)$ sur les espaces E (les vecteurs) et E^* (les formes) et sur les anneaux de polynômes associés et nous avons identifié leurs invariants, qui sont essentiellement les crochets de deux ou trois vecteurs ou de deux ou trois formes et les évaluations (c'est-à-dire les polynômes $f(a)$). Bien entendu, ni vecteurs, ni formes ne sont des objets de l'espace projectif, puisque des vecteurs (resp. des formes) colinéaires définissent le même point (resp. la même droite). Les invariants, par exemple du type $[a, b, c]$, n'ont donc pas de sens pour les points du projectif. Il s'agit maintenant de passer aux objets géométriques : les points et les droites. Les opérations pertinentes vont être celles de $PGL(E)$ et $PSL(E)$ sur l'espace projectif ou le projectif dual. Nous allons voir que les résultats précédents permettent de calculer sans difficulté les invariants dans le cas projectif et que ces invariants s'expriment tous à partir de certains birapports. C'est ce qui explique le succès de l'utilisation intensive du birapport dans la Partie I.

3.4.1 Fractions rationnelles géométriques invariantes

On suppose ici que E est de dimension 2 ou 3. Comme dans les paragraphes précédents, on considère m vecteurs génériques de E , x_1, \dots, x_m . Cela signifie qu'on introduit l'anneau de polynômes R en les $3m$ indéterminées $x_{i,j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, 2, 3$ et le corps des fractions rationnelles K associé.

Rappelons que nous avons défini en 1.2.14 (et caractérisé en 1.2.16) la notion de fonction rationnelle "géométrique" : il s'agit d'une fraction rationnelle $R(x_1, \dots, x_m) \in K$ invariante par l'action de $(k^*)^m$:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m).R(x_1, x_2, \dots, x_m) = R(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_m x_m).$$

Contrairement aux polynômes qui ne définissent pas de fonctions sur l'espace projectif, une telle fraction définit une fonction sur la partie de $\mathbf{P}(E)^m$ où son dénominateur est non nul.

Comme le groupe k^* des homothéties correspond à la diagonale de $(k^*)^m$, il opère trivialement sur les fractions rationnelles géométriques et donc le groupe $PGL(E) = GL(E)/k^*$ opère sur les fractions rationnelles géométriques (par $\bar{g}.R = g.R$) et on a le résultat suivant :

3.4.1 Proposition. *Les fractions rationnelles "géométriques" invariantes sous $PGL(E)$ sont de la forme F/G où F et G sont des polynômes homogènes en les crochets qui sont homogènes de même degré par rapport à chaque vecteur.*

Démonstration. Cela résulte de 1.2.16 et du calcul des invariants sous $GL(E)$, cf. 3.1.8.

Le résultat est analogue dans le cas de m vecteurs et n formes :

3.4.2 Proposition. *Les fractions rationnelles "géométriques" en x_1, \dots, x_m , f_1, \dots, f_n invariantes sous $PGL(E)$ sont de la forme F/G où F et G sont des polynômes en les crochets de vecteurs, les crochets de formes et les polynômes évaluations $f_j(x_i)$, qui sont homogènes de même degré par rapport à chaque vecteur et chaque forme.*

3.4.2 Le lien avec les birapports : le cas de la droite projective

Lorsque l'espace vectoriel E est de dimension 2, il y a une bijection entre les hyperplans de $\mathbf{P}(E)$ et les points de $\mathbf{P}(E)$ (voir Partie I, ??). Précisément, si $f = (f_1, f_2)$ est une forme, on lui associe le vecteur $x = (f_2, -f_1)$ et les

crochets $[f, g]$ et les évaluations $f(a)$ deviennent les crochets de vecteurs $[x, y]$ et $[x, a]$. On peut donc se limiter au cas des fonctions de points.

Il y a alors une fonction rationnelle géométrique invariante évidente : le birapport. En effet, on a la formule (voir Partie I ??) :

$$\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \frac{[a, c][b, d]}{[b, c][a, d]}.$$

La proposition suivante montre que c'est essentiellement la seule :

3.4.3 Proposition. *On suppose $\dim E = 2$. Les fractions rationnelles géométriques de m points de la droite $\mathbf{P}(E)$, invariantes sous l'action de $PGL(E)$, sont les fractions rationnelles en les birapports de 4 points pris parmi les m . (Et donc il n'y en a que si $m \geq 4$).*

Démonstration. Soit R une telle fraction géométrique invariante. En vertu de 3.4.1, elle s'écrit $R = F/G$ où F et G sont des polynômes en les crochets $[a, b]$, homogènes de même degré par rapport à chaque vecteur. Soit M un monôme de F . On divise F et G par M , de sorte qu'ils sont maintenant combinaisons linéaires de monômes à exposants positifs et négatifs en les crochets, de degré 0 par rapport à chaque vecteur. Il ne reste plus qu'à prouver le lemme suivant :

3.4.4 Lemme. *Soit $P = M/N$ le quotient de deux monômes (à exposants positifs) en les crochets $[a, b]$. On suppose que les degrés de M et N par rapport à chaque vecteur a, b, \dots sont les mêmes. Alors, P est un produit de birapports.*

Démonstration. On suppose P irréductible par rapport aux crochets (c'est-à-dire qu'aucun crochet ne figure à la fois dans M et N). On raisonne par récurrence sur le degré total de M par rapport aux crochets. Si M ne contient qu'un crochet, disons $[a, b]$, il est de degré 1 en a et b et 0 en les autres vecteurs, donc aussi N . Cela implique que N est lui aussi égal à $[a, b]$, ce qui contredit l'irréductibilité.

Supposons l'assertion prouvée jusqu'au degré n et passons à $n + 1$. Soit $[a, b]$ un crochet intervenant dans M . Comme le degré en a est le même pour N , il y a un crochet $[a, c]$ dans N , avec $b \neq c$ à cause de l'irréductibilité. Mais alors, c intervient dans M par un crochet $[c, d]$. De deux choses l'une. Si N contient le crochet $[b, d]$, le birapport $\llbracket b, c, a, d \rrbracket = \frac{[a, b][c, d]}{[a, c][b, d]}$ est en facteur dans P et, en divisant M et N par $[a, b][c, d]$ et $[a, c][b, d]$ respectivement, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence (car les quotients sont de degré $n - 1$). Sinon, on multiplie M et N par $[b, d]$ (leur degré passe à $n + 2$),

on est ramené au cas précédent et on peut encore appliquer l'hypothèse de récurrence car les degrés des quotients sont égaux à n .

3.4.5 Exemple. Considérons la fraction

$$\frac{[a, b] [c, d] [e, f] + [a, c] [b, e] [d, f]}{[a, b] [c, e] [d, f] + [a, d] [b, c] [e, f]}.$$

Si on divise haut et bas par $[a, b] [c, d] [e, f]$, chaque terme s'écrit avec des birapports. Par exemple on a :

$$\frac{[a, c] [b, e] [d, f]}{[a, b] [c, d] [e, f]} = \frac{[a, c][b, e]}{[a, b][c, e]} \times \frac{[d, f][c, e]}{[c, d][e, f]} = \llbracket c, b, a, e \rrbracket \times \llbracket f, c, d, e \rrbracket.$$

3.4.6 Remarque. Le fait qu'il n'y ait pas d'invariants de moins de 4 points est clair *a priori* puisque le groupe $PGL(E)$ est triplement transitif sur la droite. Il ne peut donc y avoir d'invariants de 3 points (sinon, on ne pourrait envoyer trois points sur trois autres que si leur invariant était le même).

3.4.3 Le lien avec le birapport : le cas du plan projectif

Le cas des points

Comme on l'a dit, si a, b, c sont trois vecteurs de E , l'invariant vectoriel $[a, b, c]$ n'est évidemment pas un invariant des points correspondants $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ de $\mathbf{P}(E)$ puisque si l'on remplace les vecteurs par $\lambda a, \mu b, \nu c$ le crochet est multiplié par $\lambda\mu\nu$. En vertu de 3.4.1, pour obtenir un invariant il faut utiliser des fractions rationnelles en les crochets en prenant garde que chaque vecteur intervienne autant au numérateur et au dénominateur. Lorsqu'on a 5 points de $\mathbf{P}(E)$, on obtient ainsi un invariant géométrique simple qui est encore un birapport.

3.4.7 Lemme. Soient $a, b, c, d; x$ des vecteurs non nuls de E . On note $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}; \bar{x}$ leurs images dans $\mathbf{P}(E)$ et on suppose que \bar{x} est distinct de $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ et que les droites $(\bar{x}\bar{a}), (\bar{x}\bar{b}), (\bar{x}\bar{c})$ sont distinctes⁵. On a la formule :

$$\llbracket (\bar{x}\bar{a}), (\bar{x}\bar{b}), (\bar{x}\bar{c}), (\bar{x}\bar{d}) \rrbracket = \frac{[xac] \times [xbd]}{[xbc] \times [xad]}.$$

On notera indifféremment $\llbracket \bar{x}; \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \rrbracket$ ou $\llbracket x; a, b, c, d \rrbracket$ ce birapport.

⁵Ces conditions sont réalisées si les vecteurs sont génériques.

Démonstration. Le birapport est à entendre au sens suivant : les formes $x \wedge a$, $x \wedge b$, $x \wedge c$, $x \wedge d$ sont dans la droite projective duale x^* et leur birapport est calculé là, avec les déterminants de la forme $[x \wedge a, x \wedge b]$. Les deux termes de la relation sont invariants sous $GL(3)$. Cela permet de calculer l'un et l'autre en choisissant le repère $\bar{x} = (1, 0, 0)$, $\bar{a} = (0, 1, 0)$, $\bar{b} = (0, 0, 1)$, $\bar{c} = (1, 1, 1)$. On pose alors $\bar{d} = (\lambda, \mu, \nu)$ et le calcul montre que les deux membres sont égaux à $\frac{\mu}{\nu}$.

3.4.8 Remarque. Une conséquence de la formule ci-dessus est une manière de calculer le birapport de quatre points alignés avec les crochets :

$$[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}] = \frac{[xac] \times [xbd]}{[xbc] \times [xad]},$$

et ce, pour n'importe quel x (non aligné avec les autres points).

On a évidemment une version duale de 3.4.7 :

3.4.9 Lemme. Soient $A, B, C, D; X$ des formes linéaires non nulles. On note encore A, B , etc. les droites associées et on suppose que X coupe A, B, C, D en des points a, b, c, d avec a, b, c distincts. On a alors :

$$[a, b, c, d] = \frac{[XAC] \times [XBD]}{[XBC] \times [XAD]}.$$

On note $[X; A, B, C, D]$ ce birapport.

Le théorème suivant montre que les birapports $[x; a, b, c, d]$ sont essentiellement les seules fonctions rationnelles géométriques invariantes :

3.4.10 Théorème. On suppose $\dim E = 3$. Les fractions rationnelles géométriques de m points du plan $\mathbf{P}(E)$, invariantes sous l'action de $PGL(E)$, sont les fractions rationnelles en les birapports $[x; a, b, c, d]$ associés à 5 points x, a, b, c, d pris parmi les m . Il n'y a de telles fractions que si l'on a $m \geq 5$.

Démonstration. Elle commence comme celle de 3.4.3. Soit R une fraction géométrique invariante. Elle s'écrit $R = F/G$ où F et G sont des polynômes en les crochets $[a, b, c]$, homogènes de même degré par rapport à chaque vecteur. Soit M un monôme de F . On divise F et G par M , de sorte qu'ils sont maintenant combinaisons linéaires de monômes à exposants positifs et négatifs en les crochets, de degré 0 par rapport à chaque vecteur. Il ne reste plus qu'à prouver le lemme suivant :

3.4.11 Lemme. Soit $P = M/N$ le quotient de deux monômes (à exposants positifs) en les crochets $[a, b, c]$. On suppose que les degrés de M et N par rapport à chaque vecteur a, b, \dots sont les mêmes. Alors, P est un produit de birapports de la forme $\llbracket x; a, b, c, d \rrbracket$.

Démonstration. On suppose P irréductible par rapport aux crochets (c'est-à-dire qu'aucun crochet ne figure à la fois dans M et N). On raisonne par récurrence sur le degré total de M par rapport aux crochets. Si M ne contient qu'un crochet, disons $[a, b, c]$, il est de degré 1 en a, b et c et de degré 0 en les autres vecteurs, donc aussi N . Cela implique que N est lui aussi égal à $[a, b, c]$, ce qui contredit l'irréductibilité.

Supposons l'assertion prouvée jusqu'au degré n et passons à $n + 1$. Soit $[a, b, c]$ un crochet intervenant dans M . Plusieurs cas sont possibles.

Premier cas. Il y a dans N deux crochets qui ont deux couples distincts de points communs avec $[a, b, c]$, disons $[a, b, d]$ et $[a, c, e]$. On multiplie alors M et N par $[a, d, e]$ (ce qui augmente le degré de M et N d'une unité). Le birapport $\llbracket a; c, d, b, e \rrbracket$ est en facteur dans M/N . On divise la fraction par ce birapport, on obtient M'/N' , avec $\deg M' = \deg N' = \deg M - 1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence.

Deuxième cas. Il y a dans N un crochet qui a deux points communs avec $[a, b, c]$, disons $[a, b, d]$. Alors, le point c apparaît dans un crochet de N (à cause de l'égalité des degrés), disons $[c, e, f]$. On multiplie alors M et N par $[a, e, d][a, e, c]$ (ce qui augmente de deux les degrés). Le birapport $\llbracket a; c, d, b, e \rrbracket$ est en facteur. On divise M/N par ce birapport, on obtient M'/N' avec les mêmes degrés que M et N , mais on a, dans M' le terme $[a, e, c]$ et dans N' les termes $[a, e, d]$ et $[c, e, f]$. On est ramené au premier cas.

Troisième cas. Aucun couple de crochets de M et de N n'admet deux points en commun. On a dans N un crochet $[a, d, e]$ et un crochet $[c, f, g]$ (à cause des degrés en a et c). On multiplie M et N par $[a, b, d][a, d, f][a, c, f]$. Le degré de M et N augmente de trois unités. Le birapport $\llbracket a; c, d, b, f \rrbracket$ est en facteur. On divise M/N par ce birapport et on obtient M'/N' de degré un de plus que M, N . Mais, dans M' on a $[a, c, f]$ et dans N' , $[a, d, f]$ et $[c, f, g]$, autrement dit, on est dans la situation du premier cas. Multipliant par $[f, d, g]$ et mettant en facteur le birapport $\llbracket f; c, d, a, g \rrbracket$, on fait diminuer les degrés de M' et N' d'une unité, c'est-à-dire qu'on est revenu aux degrés initiaux. Mais, on a en numérateur $[a, b, d]$ et en dénominateur $[a, d, e]$, et on est ramené au second cas!!

3.4.12 Exemples.

1) Voici un premier exemple de ce type de calculs :

$$F = \frac{[a, b, c][d, e, f]}{[a, b, d][c, e, f]} = \frac{[a, b, c][a, d, e][a, c, e][d, e, f]}{[a, b, d][a, c, e][a, d, e][c, e, f]}$$

$$F = \llbracket a; c, d, b, e \rrbracket \llbracket e; c, d, a, f \rrbracket.$$

2) En voici un second :

$$G = \frac{[a, b, c][d, f, h][e, g, i]}{[a, d, e][f, b, g][c, h, i]},$$

$$G = \llbracket a; c, d, b, h \rrbracket \llbracket h; a, i, c, d \rrbracket \llbracket d; b, e, a, f \rrbracket \llbracket f; b, e, d, g \rrbracket \llbracket d; f, i, h, e \rrbracket \llbracket e; g, d, i, f \rrbracket.$$

3.4.13 Remarque. Le fait qu'il n'existe pas de fonction invariante de 4 points n'est qu'une résurgence de la transitivité de $PGL(E)$ sur les quadruplets de points génériques : s'il existait de telles fonctions invariantes, les orbites de $PGL(E)$ seraient contenues dans leurs lignes de niveau.

Le cas des points et des droites du plan

3.4.14 Théorème. On suppose $\dim E = 3$. Les fractions rationnelles géométriques de m points et de n droites du plan $\mathbf{P}(E)$, invariantes sous l'action de $PGL(E)$, sont les fractions rationnelles en les birapports $\llbracket x; a, b, c, d \rrbracket$ (resp. $\llbracket u; f, g, h, k \rrbracket$) associés à 5 points x, a, b, c, d (resp. 5 droites u, f, g, h, k) pris parmi les m (resp. les n) et en les invariants suivants :

$$\llbracket a, b; f, g \rrbracket := \frac{f(a)g(b)}{f(b)g(a)},$$

associés à deux points et deux droites pris parmi les données.

3.4.15 Remarque. On notera que les invariants ci-dessus ne dépendent que des points et des droites et pas des vecteurs ou des formes qui les représentent.

Démonstration. Comme dans les deux cas précédents, on se ramène, en divisant par un monôme, à prouver les deux lemmes suivants :

3.4.16 Lemme. On a les formules suivantes :

$$1) B(a, b, c; f, g, h) := \frac{f(a)g(b)h(c)}{f(b)g(c)h(a)} = \llbracket a, b; f, g \rrbracket \times \llbracket a, c; g, h \rrbracket,$$

$$2) K(a, b, c; f, g, h) := \frac{[a, b, c][f, g, h]}{f(a)g(b)h(c)} = 1 + B(b, a, c; f, h, g) + B(c, a, b; f, g, h) - \llbracket b, c; h, g \rrbracket - \llbracket c, a; f, h \rrbracket - \llbracket a, b; g, f \rrbracket.$$

Démonstration. Le point 1) est évident et le point 2) vient de la relation \mathcal{T} vue en 3.2.4.

3.4.17 Lemme. Soit $P = M/N$ le quotient de deux monômes (à exposants positifs) en les crochets $[a, b, c]$, les crochets $[f, g, h]$ et les évaluations $f(a)$. On suppose que les degrés de M et N par rapport à chaque vecteur a, b, \dots et chaque forme f, g, \dots sont les mêmes. Alors, P est un monôme à exposants positifs ou négatifs en des termes de la forme $\llbracket x; a, b, c, d \rrbracket$, $\llbracket u; f, g, h, k \rrbracket$ et $K(a, b, c; f, g, h)$.

Démonstration. Quitte à remplacer M/N par N/M on peut supposer que le degré total en les évaluations est plus grand en numérateur qu'en dénominateur. On raisonne alors par récurrence sur le degré en les évaluations dans M . Si celui-ci est nul, il n'y a que des crochets, de points ou de formes dans M/N et le raisonnement est le même qu'en 3.4.11. Sinon, supposons le résultat établi jusqu'au degré n en les évaluations et passons à $n + 1$. Le monôme M contient un terme $f(a)$. Quitte à multiplier au besoin M et N par au plus deux évaluations, on peut supposer qu'il contient aussi les termes $g(b)$ et $h(c)$. On multiplie alors M par $K(a, b, c; f, g, h)$, ce qui a pour effet de ramener le degré de M en les évaluations à n et permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

La notation de l'invariant $\frac{f(a)g(b)}{f(b)g(a)}$ comme une sorte de birapport $\llbracket a, b; f, g \rrbracket$ est justifiée par le lemme suivant :

3.4.18 Lemme. Soient F, G deux droites d'équations f, g et \bar{a}, \bar{b} deux points distincts, non situés sur F et G . On appelle \bar{x}, \bar{y} les points d'intersection de $(\bar{a}\bar{b})$ et de F, G . On a la formule : $\frac{f(a)g(b)}{f(b)g(a)} = \llbracket \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \rrbracket$

Démonstration. Soit \bar{o} l'intersection⁶ des droites F, G , de sorte qu'on peut supposer $f = o \wedge x$ et $g = o \wedge y$. On a alors des formules du type $f(a) = [o, x, a]$ qui montrent que l'invariant ci-dessus n'est autre que le birapport $\llbracket o; a, b, x, y \rrbracket = \llbracket \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \rrbracket$.

Ce lemme permet de donner une nouvelle écriture (cf. 3.4.8) du birapport de quatre points alignés (le "lemme du chevron projectif") :

3.4.19 Lemme. Soient a, b, x, y quatre points distincts alignés sur une droite D et soit o un point n'appartenant pas à D . Soient $c \in (ox)$ et $d \in (oy)$ des points distincts de o . Alors, on a la formule :

$$\llbracket a, b, x, y \rrbracket = \frac{[o, c, a][o, d, b]}{[o, c, b][o, d, a]}.$$

⁶Le résultat est évident si les droites sont confondues.

Démonstration. Cela résulte du lemme précédent appliqué à $f = o \wedge c$ et $g = o \wedge d$.

3.5 Exercices

3.5.1 *Exercice.* Montrer la formule :

$$[c'a][a'b][b'c] - [c'b][a'c][b'a] = [b'c'][a'b][ca] - [c'a'][b'a][bc]$$

utilisée Partie I, exercice ?? à partir de la relation fondamentale :

$$\mathcal{R}(a, b, c; x) : \quad [b, c] [a, x] + [c, a] [b, x] + [a, b] [c, x] = 0$$

appliquée d'abord à b', c', a, c , puis à c', a', b, c .

Chapitre 4

Retour à la géométrie, 1 : la géométrie projective

Ce chapitre et le suivant sont ceux du retour de la géométrie. L'objectif est d'illustrer le fait que les théorèmes de la géométrie projective (voire, au chapitre suivant, ceux de la géométrie affine et même ceux de la géométrie euclidienne) ne sont rien d'autre que des relations entre les invariants, cf. 2.4.4. Comme on connaît maintenant ces relations, ou, au moins, celles qui les engendrent toutes, cf. 3.1.10 et 3.2.4, on espère comprendre enfin le fin mot de l'histoire. De fait, l'analyse des fameuses relations ne fait que conforter ce que nous avons fait dans la première partie, puisqu'on y voit l'importance essentielle des perspectives (et de la conservation du birapport par celles-ci). Notre objectif d'explicitier les fondements de la géométrie projective plane semble donc au moins partiellement atteint. En vérité, nous verrons qu'avant même l'intervention des relations entre invariants, donc du second théorème fondamental, nombre de théorèmes résultent simplement du premier théorème fondamental qui permet d'écrire les invariants à partir des crochets et des évaluations, notamment grâce aux formules vues en 2.3.3.

4.0.2 Notation. Dans ce chapitre et le suivant, un triangle abc consiste en la donnée de trois points a, b, c non alignés.

4.1 Le cas de $SL(2)$

Dans ce paragraphe l'espace vectoriel E est de dimension 2. On considère les droites projectives $\mathbf{P}(E)$ et $\mathbf{P}(E^*)$. On sait que, dans le cas de la dimension

2, on dispose d'une bijection (homographique) $\Phi_E : \mathbf{P}(E^*) \rightarrow \mathbf{P}(E)$ qui associe à \bar{f} , avec $f \in E^*$, $f \neq 0$, l'unique point $\bar{x} \in \mathbf{P}(E)$ tel que $f(x) = 0$. Si E est muni d'une base (e_1, e_2) et E^* de la base duale, l'image du point de coordonnées homogènes (λ, μ) de $\mathbf{P}(E^*)$ par Φ est le point $(-\mu, \lambda)$. On peut identifier $\mathbf{P}(E^*)$ et $\mathbf{P}(E)$ au moyen de Φ et cela nous permet de nous limiter aux invariants de E .

4.1.1 Interprétation projective des invariants

On a vu en 3.4.3 que, sur la droite projective, les invariants géométriques sont les fractions rationnelles en les birapports. Cela vient essentiellement de la formule :

$$\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \frac{[a, c][b, d]}{[b, c][a, d]}.$$

On a donc une assertion mathématique pour confirmer ce qu'on savait depuis belle lurette, à savoir que l'invariant fondamental de la géométrie de la droite projective est le birapport.

4.1.2 Interprétation de la relation \mathcal{R}

La relation $R_{ijk,p}$ se traduit dans R par la formule $[b, c][a, d] - [a, c][b, d] + [a, b][c, d] = 0$. Cette formule s'écrit encore

$$\frac{[b, c][a, d]}{[a, c][b, d]} + \frac{[a, b][c, d]}{[a, c][b, d]} = 1.$$

Avec la formule qui donne le birapport on voit que la relation $R_{ijk,p}$, jointe aux relations d'antisymétrie des crochets, conduit à la formule de permutation du birapport :

$$\llbracket b, c, a, d \rrbracket = 1 - \llbracket b, a, c, d \rrbracket.$$

En revanche, les relations $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \llbracket b, a, c, d \rrbracket^{-1} = \llbracket a, b, d, c \rrbracket^{-1}$ sont triviales et les relations de double transposition $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \llbracket d, c, b, a \rrbracket$, etc. résultent seulement de l'antisymétrie des crochets.

On peut résumer ce qui précède en disant que le théorème fondamental de la géométrie de la droite, celui qui contient tous les autres au sens où les relations correspondantes engendrent l'idéal de toutes les relations, c'est la formule de permutation du birapport au milieu. Nous verrons d'autres interprétations des invariants et des relations correspondant au groupe $SL(2)$ au chapitre suivant dans le cadre de la géométrie affine.

4.2 Le cas de la dimension 3 : les théorèmes issus du premier théorème fondamental

Les deux sections suivantes ont pour objectif d'interpréter les théorèmes de la géométrie projective du plan¹ en termes des théorèmes fondamentaux sur les invariants. En première approximation, on pourrait être tenté de distinguer deux types de théorèmes : ceux qui sont simplement issus du premier théorème fondamental (et des relations banales : antisymétrie des crochets) et ceux qui viennent du second théorème et qui a priori devraient être plus profonds. Ce qui est frappant, c'est que la plupart des théorèmes classiques de la géométrie relèvent du premier type, et même, plus précisément des quelques relations élémentaires que nous avons prouvées au chapitre 2 sur les concomitants et les invariants, cf. 2.3.19 ou 2.3.21 ou encore 2.3.23. En fait, c'est normal, car les relations, même réputées non banales, sont conséquences du premier théorème et de l'antisymétrie des crochets, voir là-dessus, dans le cas de la relation \mathcal{R} , les remarques 2.3.24 et 3.1.11. Nous avons toutefois conservé cette distinction, mais l'exemple de la polaire montre bien qu'elle est assez arbitraire.

4.2.1 Interprétation des invariants : le cas projectif

Cette interprétation a été donnée au chapitre précédent. En effet, on a vu en 3.4.14 que les seules fonctions géométriques invariantes sont des fonctions rationnelles des “birapports” de cinq points $\llbracket x; a, b, c, d \rrbracket$, c'est-à-dire du birapport des quatre droites (xa) , (xb) , (xc) , (xd) , des “birapports” de cinq droites $\llbracket X; A, B, C, D \rrbracket$, birapport des quatre points d'intersection de X avec A, B, C, D et des “birapports” de deux points et deux droites $\llbracket a, b; f, g \rrbracket = \frac{f(a)g(b)}{f(b)g(a)}$, birapport de a, b et des points d'intersections de (ab) et (des droites définies par) f, g .

4.2.2 Rappel des formules

Rappelons les formules obtenues au chapitre 2. Elles sont de deux types :

- les quatre premières expriment les concomitants en termes d'invariants, cf. 2.3.28,
- les suivantes expriment certains invariants en fonction des crochets ou des invariants $f(a)$, en cohérence avec le premier théorème fondamental.

¹Bien entendu, nous avons fait un choix parmi ces théorèmes.

$$(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = [a, c, d] b - [b, c, d] a, \quad (2.3.19),$$

$$(f \wedge g) \wedge (h \wedge l) = [f, h, l] g - [g, h, l] f, \quad (2.3.20),$$

$$f \wedge (a \wedge b) = f(b)a - f(a)b, \quad (2.3.21.1),$$

$$a \wedge (f \wedge g) = g(a)f - f(a)g, \quad (2.3.21.2),$$

$$[a, b, c] = (a \wedge b)(c) \quad \text{et} \quad [f, g, h] = h(f \wedge g), \quad (2.3.23.1),$$

$$[a, b, f \wedge g] = f(a)g(b) - f(b)g(a) = [f, g, a \wedge b], \quad (2.3.23.2),$$

$$[a \wedge a', b \wedge b', c \wedge c'] = [a, a', c][b, b', c'] - [a, a', c'][b, b', c], \quad (2.3.23.3),$$

$$[f \wedge f', g \wedge g', h \wedge h'] = [f, f', h][g, g', h'] - [f, f', h'][g, g', h], \quad (2.3.23.4).$$

4.2.3 Incidence

Revenant au commencement² des choses, nous allons interpréter le premier théorème de géométrie projective (par deux points distincts passe une droite et une seule) en termes d'invariants.

Soient \bar{a} et \bar{b} deux points distincts de $\mathbf{P}(E)$. À partir de \bar{a} et \bar{b} on construit la droite Δ d'équation (non nulle) $a \wedge b$. Il s'agit bien d'une construction projective (on a vu que le produit extérieur est un concomitant). Or, on a la formule $(a \wedge b)(c) = [a, b, c]$ (cf. 2.3.23.1) et les relations d'alternance $[a, b, a] = [a, b, b] = 0$, qui montrent que la droite Δ passe par a et b . On a donc montré l'existence.

De plus, si D est une droite d'équation f , on a, en vertu de la formule 2.3.21 : $(a \wedge b) \wedge f = f(a)b - f(b)a$. Dire que D passe par les points signifie qu'on a $f(a) = f(b) = 0$. Cela implique $(a \wedge b) \wedge f = 0$. Comme les points sont distincts, le produit extérieur $a \wedge b$ est non nul et la condition signifie que f lui est proportionnel. Cela montre que la seule droite passant par \bar{a} et \bar{b} est la droite Δ d'équation $a \wedge b$: voilà l'unicité.

4.2.4 Les formules de Pappus

Nous avons vu en 2.5.6 que le théorème de Pappus est une application directe de la formule suivante sur les droites :

$$[A \wedge A', B \wedge B', C \wedge C'] = [B' \wedge C, C' \wedge A, A' \wedge B] - [B \wedge C', C \wedge A', A \wedge B'].$$

²Le lecteur qui trouverait que ce paragraphe est du pinaillage a le droit de sauter au suivant.

Cette formule résulte du premier théorème fondamental dans la version explicite de 2.3.23.4 c'est-à-dire de l'écriture de $[A \wedge A', B \wedge B', C \wedge C']$ et des autres comme polynômes en les crochets et de l'antisymétrie des crochets.

Une autre variante a été vue en 2.5.9, il s'agit de la formule sur les points :

$$[(b \wedge c') \wedge (b' \wedge c), (c \wedge a') \wedge (c' \wedge a), (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)] = \\ [a, a', b][b, b', c][c, c', a][a', b', c'] - [a, a', c'][b, b', a'][c, c', b'][a, b, c].$$

Là encore, cette formule résulte du premier théorème fondamental, *via* les formules explicites, et de l'antisymétrie des crochets.

4.2.5 La formule de Desargues

Le théorème de Desargues est issu de la relation suivante :

4.2.1 Proposition. *Soient a, b, c, a', b', c' des vecteurs génériques de E . On a l'identité :*

$$[(b \wedge c) \wedge (b' \wedge c'), (c \wedge a) \wedge (c' \wedge a'), (a \wedge b) \wedge (a' \wedge b')] = [a, b, c][a', b', c'][a \wedge a', b \wedge b', c \wedge c'].$$

Démonstration. Posons $A = b \wedge c, B = c \wedge a, C = a \wedge b, A' = b' \wedge c', B' = c' \wedge a', C' = a' \wedge b'$, de sorte que le premier membre est $[A \wedge A', B \wedge B', C \wedge C']$ (le même que pour Pappus!). On applique 2.3.23.4 qui donne comme second membre $[A, A', C][B, B', C'] - [A, A', C'][B, B', C]$. On calcule ces termes ainsi que le dernier crochet du second membre avec 2.3.23.3 et on obtient le résultat.

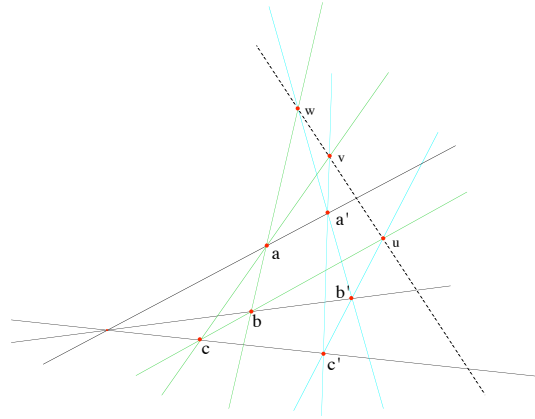


Figure 4.1: Le théorème de Desargues.

4.2.2 Corollaire. (Desargues)

Soient a, b, c, a', b', c' six points de $\mathbf{P}(E)$. Alors, si ces droites existent, les points d'intersection de (bc) et $(b'c')$, (ca) et $(c'a')$, (ab) et $(a'b')$ sont alignés

si et seulement si :

- 1) a, b, c sont alignés,
- 2) ou a', b', c' sont alignés,
- 3) ou $(aa'), (bb'), (cc')$ sont concourantes.

4.2.3 Remarque. On notera qu'il y a une certaine similitude entre Pappus et Desargues : dans les deux cas on a 6 points au départ $a, b, c; a', b', c'$ et on considère trois points obtenus en joignant deux à deux ces 6 points. Il y a cependant une différence essentielle qui fait qu'ils ne sont pas réductibles l'un à l'autre : dans le cas de Desargues les 6 segments considérés forment deux triangles abc et $a'b'c'$, tandis que dans le cas de Pappus ils forment un hexagone $ab'ca'b'c'$.

4.2.4 Remarque. Comme dans le cas de Pappus, on vérifie que la relation en jeu dans Desargues est simplement la relation d'alternance des crochets. On trouvera d'autres méthodes pour établir la relation ci-dessus dans l'exercice 4.4.1.

4.2.6 La polaire

Calcul direct du birapport

Contrairement au chemin suivi dans la Partie I, on commence par le calcul du birapport (cf. ??). Ce calcul résulte essentiellement de la formule du double produit :

4.2.5 Proposition. Soient A, B, C, D quatre droites en position générale. On note o (resp. d) le point d'intersection de A, B (resp. C, D), a, b (resp. a', b') les points d'intersection de A, B et C (resp. D). Soit u le point d'intersection des droites (ab') et $(a'b)$. On a $\llbracket A, B, (od), (ou) \rrbracket = -1$.

Démonstration. On a $o = A \wedge B$, $d = C \wedge D$, $a = A \wedge C$, $b = B \wedge C$, $a' = A \wedge D$ et $b' = B \wedge D$. On en déduit $(od) = (A \wedge B) \wedge (C \wedge D) = [A, C, D]B - [B, C, D]A$ en vertu de la formule du double produit. De même, on a $(ab') = [A, B, D]C + [B, C, D]A$ et $(a'b) = [A, B, C]D - [B, C, D]A$, ce qui conduit à :

$$u = [A, B, D][A, B, C](C \wedge D) - [A, B, D][B, C, D](C \wedge A) + [B, C, D][A, B, C](A \wedge D).$$

Une dernière application de la formule donne :

$$(ou) = [A, B, C][A, B, D][B, C, D]A - [A, B, C][A, B, D][A, C, D]B.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule de calcul du birapport, Partie I ?? et on trouve bien $\llbracket A, B, (od), (ou) \rrbracket = -1$.

4.2.6 Remarques. 1) Le résultat vaut en toutes caractéristiques. En caractéristique 2 il redonne l'alignement de o, d, u (voir Partie I, ??).

2) Bien entendu, ce calcul du birapport donne la propriété d'alignement qui montre l'indépendance des sécantes C, D pour la construction de la polaire de d par rapport aux droites A, B . On peut aussi prouver directement ce résultat, voir ci-dessous.

Calcul direct pour la propriété d'alignement

On reprend les notations de Partie I ??.

4.2.7 Proposition. Soient A, B deux droites distinctes concourantes en o . Soient $\Delta, \Delta', \Delta''$ trois droites distinctes, ne passant pas par o , qui coupent³ respectivement A, B en a, b ; a', b' ; a'', b'' . On considère les points d'intersection u, v de (ab') et (ba') et de $(a'b'')$ et $(b'a'')$ respectivement. Alors, les points o, u, v sont alignés si et seulement si les droites $\Delta, \Delta', \Delta''$ sont concourantes.

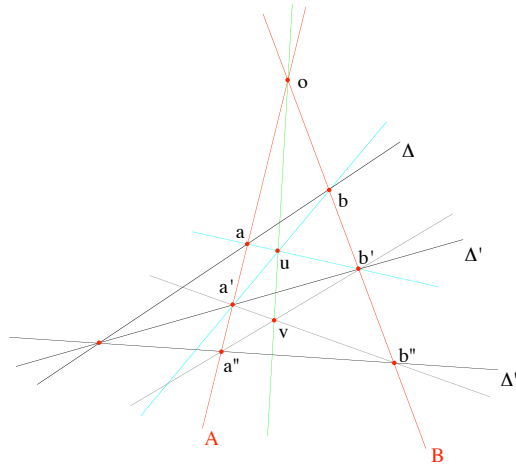


Figure 4.2: La polaire.

Démonstration. C'est un calcul un peu pénible⁴, mais sans malice. On a $a = A \wedge \Delta$, $b = B \wedge \Delta$, $a' = A \wedge \Delta'$, $b' = B \wedge \Delta'$, $a'' = A \wedge \Delta''$, $b'' = B \wedge \Delta''$. Les points u, v, o sont donnés par $u = (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)$, $v = (a' \wedge b'') \wedge (a'' \wedge b')$ et $o = A \wedge B$. On calcule u et v en fonction des droites de départ grâce à 2.3.20, puis on évalue $[u, v, o]$ avec 2.3.23.4. On obtient la formule :

$$[u, v, o] = [A, B, \Delta][A, B, \Delta']^2[A, B, \Delta'']([\Delta', \Delta'', A][\Delta, \Delta', B] - [\Delta, \Delta', A][\Delta', \Delta'', B]).$$

³Dans cet énoncé, quand on parle d'une droite (xx') ou de l'intersection de deux droites D, D' , il est sous-entendu que les points x, x' ou les droites D, D' sont distincts.

⁴Attention, il y a des termes qu'on a envie de simplifier, mais qui s'ajoutent !

Mais, on a :

$$[\Delta', \Delta'', A][\Delta, \Delta', B] - [\Delta, \Delta', A][\Delta', \Delta'', B] = [\Delta' \wedge \Delta'', \Delta \wedge \Delta', A \wedge B]$$

en vertu de 2.3.23.4 et, par l'antisymétrie du crochet, c'est encore égal à

$$[A \wedge B, \Delta' \wedge \Delta'', \Delta \wedge \Delta'] \quad \text{ou enfin à} \quad -[A, B, \Delta'][\Delta, \Delta', \Delta''],$$

toujours par 2.3.23.4, d'où le résultat.

4.2.8 Remarque. On peut voir ce résultat comme une conséquence du premier théorème fondamental et des relations d'antisymétrie comme ci-dessus, mais on peut aussi noter que la relation rencontrée plus haut :

$$[\Delta', \Delta'', A][\Delta, \Delta', B] - [\Delta, \Delta', A][\Delta', \Delta'', B] + [A, B, \Delta'][\Delta, \Delta', \Delta''] = 0$$

n'est autre, à permutation près, que la relation “sur cinq lettres” évoquée en 3.1.11, qui est du ressort du deuxième théorème fondamental.

4.2.7 Pré-Ménélaüs ou la formule à cinq points

4.2.9 Lemme. Soient a, b, c, d, e des points génériques de $\mathbf{P}(E)$. On a la relation suivante :

$$[a; b, c, d, e] = [b; d, e, a, c] \times [c; e, d, a, b].$$

Démonstration. Il suffit d'écrire les birapports en fonction des crochets et d'utiliser l'antisymétrie.

La formule de produit ci-dessus a une interprétation en termes de quotient de $\mathbf{P}(E)^5$ sous l'action de $PGL(E)$, voir 7.3.1. En effet, comme ce quotient est de dimension 2, on peut le paramétrer par les deux birapports du second membre et les autres s'en déduisent.

Si on coupe les droites (bc) , (ca) , (ab) intervenant dans les birapports par (de) , on obtient les points x, y, z et on a l'égalité : $[d, e, z, y] = [d, e, z, x] \times [d, e, x, y]$, vue sous une autre forme dans la partie I (??) :

4.2.10 Lemme. Soient a, b, c, d, e cinq points distincts d'une droite projective D . On a la formule : $[b, c, d, e] \times [c, a, d, e] \times [a, b, d, e] = 1$.

Ménélaüs

Rappelons que le lemme suivant (lemme des trois birapports, cf. Partie I, ??) est la version projective du théorème de Ménélaüs.

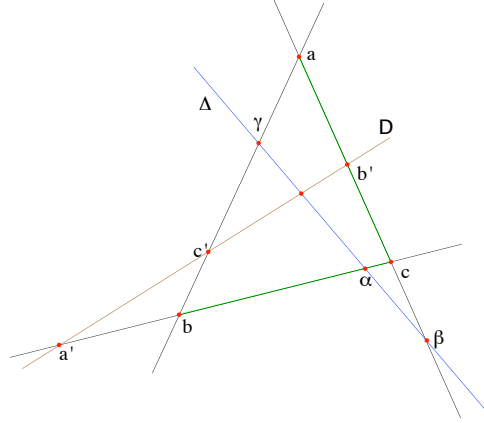


Figure 4.3: Menelaüs.

4.2.11 Lemme. Soient a, b, c trois points non alignés d'un plan projectif $\mathbf{P}(E)$. On considère deux droites distinctes D et Δ ne passant pas par a, b, c et coupant respectivement (bc) , (ca) , (ab) en a', b', c' et α, β, γ . Alors, on a l'égalité :

$$[b, c, a', \alpha] \times [c, a, b', \beta] \times [a, b, c', \gamma] = 1.$$

Démonstration. Nous donnons ci-dessous trois démonstrations de ce lemme, essentiellement équivalentes. L'idée c'est qu'un problème comme celui-ci peut être vu soit comme un problème sur des droites $D, \Delta, (ab)$, etc., soit comme un problème sur des points (a, b, c, a', α) , etc., soit enfin comme un problème mixte avec droites et points. Cette dernière solution est d'ailleurs la plus efficace. Dans tous les cas, il s'agit d'interpréter les birapports en termes d'invariants (crochets ou évaluations), ce qui se fait au moyen de 3.4.9, 3.4.19 et 3.4.18. La conclusion vient alors d'un calcul évident utilisant éventuellement l'antisymétrie des crochets.

1) On note respectivement A, B, C les droites $(bc), (ca), (ab)$. Les birapports apparaissant dans le lemme s'écrivent alors, avec les notations de 3.4.9,

$$[b, c, a', \alpha] = [A; B, C, D, \Delta] = \frac{[A, B, D]}{[A, C, D]} \times \frac{[A, C, \Delta]}{[A, B, \Delta]},$$

$$[c, a, b', \beta] = [B; C, A, D, \Delta] = \frac{[B, C, D]}{[B, A, D]} \times \frac{[B, A, \Delta]}{[B, C, \Delta]},$$

$$[a, b, c', \gamma] = [C; A, B, D, \Delta] = \frac{[C, A, D]}{[C, B, D]} \times \frac{[C, B, \Delta]}{[C, A, \Delta]}.$$

2) On désigne par o le point d'intersection de D et Δ . Les birapports s'écrivent à l'aide du lemme du chevron projectif 3.4.19 :

$$\llbracket b, c, a', \alpha \rrbracket = \frac{[oc'b][o\gamma c]}{[oc'c][o\gamma b]}, \quad \llbracket c, a, b', \beta \rrbracket = \frac{[oc'c][o\gamma a]}{[oc'a][o\gamma c]}, \quad \llbracket a, b, c', \gamma \rrbracket = \frac{[oc'a][o\gamma b]}{[oc'b][o\gamma a]}.$$

3) On note f, g les équations de D et Δ et on utilise la formule de 3.4.18 :

$$\llbracket b, c, a', \alpha \rrbracket = \frac{f(b)g(c)}{f(c)g(b)}, \quad \llbracket c, a, b', \beta \rrbracket = \frac{f(c)g(a)}{f(a)g(c)}, \quad \llbracket a, b, c', \gamma \rrbracket = \frac{f(a)g(b)}{f(b)g(a)}.$$

4.3 Les théorèmes issus du second théorème fondamental

4.3.1 Les relations $\mathcal{R}'(a, b, c, d; x, y)$ et $\mathcal{S}(a, b, c, d; f)$, versions projectives

Rappelons, voir 3.1.10 et 3.2.4, qu'il s'agit respectivement des relations :

$$[b, c, d][a, x, y] + [c, a, d][b, x, y] + [a, b, d][c, x, y] - [a, b, c][d, x, y] = 0,$$

$$\text{et} \quad [b, c, d]f(a) + [c, a, d]f(b) + [a, b, d]f(c) - [a, b, c]f(d) = 0,$$

dans lesquelles a, b, c, d, x, y sont des vecteurs et f une forme et qu'il y a aussi les relations analogues $\mathcal{R}'(A, B, C, D; X, Y)$ entre crochets de formes (cf. 3.2.4).

On a vu aussi, cf. 2.5.4, que les relations \mathcal{R}' et \mathcal{S} sont toutes deux des avatars de la relation fondamentale de dimension :

$$[b, c, d]a + [c, a, d]b + [a, b, d]c = [a, b, c]d,$$

et on passe d'ailleurs de l'une à l'autre en posant $f : x \wedge y$, c'est-à-dire en considérant une équation f de la droite (xy) . Notre objectif est de donner une interprétation géométrique de ces relations. En vérité, il y en a plusieurs (voir exercice 4.4.2), mais toutes s'obtiennent en interprétant les relations en termes de birapports grâce aux formules obtenues en 3.4.7 et 3.4.18.

On en déduit quelques formules :

4.3.1 Lemme. *Soient a, b, c, d quatre points de $\mathbf{P}(E)$ formant un repère et soit D une droite d'équation f , distincte de (bc) , (ca) , (ab) . On note a', b', c' les points d'intersection des droites (ad) et (bc) , (bd) et (ca) , (cd) et (ab)*

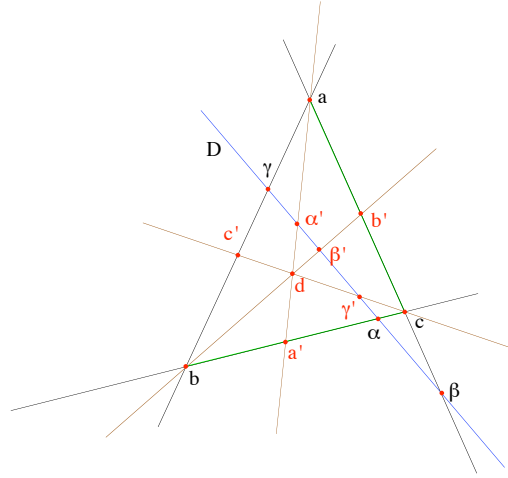


Figure 4.4: Les formules de birapport.

respectivement, α, β, γ les intersections de D avec (bc) , (ca) , (ab) respectivement. Alors, on a les formules

$$\llbracket b, c, a', \alpha \rrbracket = \frac{f(c) [d, a, b]}{f(b) [d, a, c]}, \quad \llbracket c, a, b', \beta \rrbracket = \frac{f(a) [d, b, c]}{f(c) [d, b, a]}, \quad \llbracket a, b, c', \gamma \rrbracket = \frac{f(b) [d, c, a]}{f(a) [d, c, b]}.$$

Si on note α', β', γ' les intersections de D avec (ad) , (bd) , (cd) respectivement, on a aussi :

$$\llbracket d, a, a', \alpha' \rrbracket = \frac{f(a) [b, c, d]}{f(d) [b, c, a]}, \quad \llbracket d, b, b', \beta' \rrbracket = \frac{f(b) [c, a, d]}{f(d) [c, a, b]}, \quad \llbracket d, c, c', \gamma' \rrbracket = \frac{f(c) [a, b, d]}{f(d) [a, b, c]}.$$

Démonstration. La preuve est analogue dans tous les cas. Pour la première formule, par exemple, on pose $g = d \wedge a$ et on applique 3.4.18 et 2.3.23.1.

Les formules précédentes, jointes aux relations \mathcal{S} ou \mathcal{R}' fournissent un théorème “de Gergonne” projectif :

4.3.2 Théorème. Soient a, b, c, d quatre points de $\mathbf{P}(E)$ formant un repère et soit $D = (xy)$ une droite d'équation f , distincte de (bc) , (ca) , (ab) . On note a', b', c' les points d'intersection des droites (ad) et (bc) , (bd) et (ca) , (cd) et (ab) respectivement et α', β', γ' les intersections de D avec (ad) , (bd) , (cd) respectivement. Alors, les relations $\mathcal{S}(a, b, c, d; f)$ (ou $\mathcal{R}'(a, b, c, d; x, y)$) se traduisent par la relation suivante :

$$\llbracket d, a, a', \alpha' \rrbracket + \llbracket d, b, b', \beta' \rrbracket + \llbracket d, c, c', \gamma' \rrbracket = 1.$$

4.3.3 Remarque. Le théorème de Gergonne usuel est la variante affine de ce résultat obtenue lorsque D est la droite de l'infini, cf. ci-dessous 5.6.6.

4.3.2 Variantes affaiblies : réfractions et perspectives

En spécialisant la relation \mathcal{R}' (resp. sa duale) au cas où certains points sont alignés (resp. où certaines droites sont concourantes) on obtient les deux résultats duaux suivants :

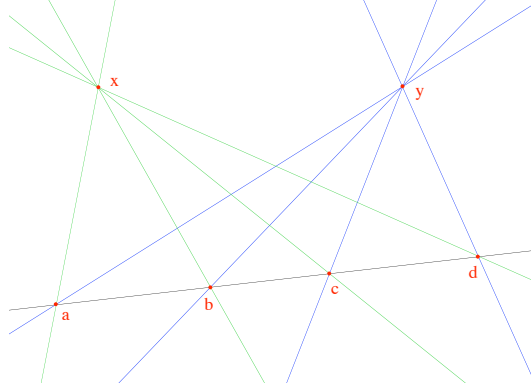


Figure 4.5: La réfraction est une homographie.

4.3.4 Proposition. Soient $a, b, c, d; x, y \in E$ des vecteurs non nuls. On suppose que les points correspondants à a, b, c, d sont alignés sur une droite D et que x et y sont des points de $\mathbf{P}(E)$ non situés sur D . Une conséquence des relations \mathcal{R}' (de vecteurs) en termes projectifs est l'égalité des birapports

$$[(xa), (xb), (xc), (xd)] = [(ya), (yb), (yc), (yd)]$$

c'est-à-dire le fait que la réfraction⁵ de droite D de x^* sur y^* est une homographie.

Démonstration. On applique successivement les relations $\mathcal{R}'(y, x, a, c; b, c)$ et $\mathcal{R}'(y, x, b, d; a, d)$. On obtient $[x, a, c] [y, b, c] = [y, a, c] [x, b, c]$ et $[x, b, d] [y, a, d] = [y, b, d] [x, a, d]$, d'où le résultat par 3.4.7.

4.3.5 Proposition. Soient $A, B, C, D; X, Y \in E^*$ des formes linéaires non nulles. On note encore $A, B, C, D; X, Y$ les droites projectives correspondantes. On suppose que les droites A, B, C, D sont concourantes en o et que X et Y ne passent pas par o . Soient a, b, c, d (resp. a', b', c', d') les points d'intersection de A, B, C, D avec X (resp. Y). Une conséquence des relations \mathcal{R}' (de formes) est l'égalité : $[a, b, c, d] = [a', b', c', d']$ qui exprime que la perspective de centre o de X sur Y est une homographie.

⁵Rappelons, cf. Partie I ??, que la réfraction est l'homographie duale de la perspective.

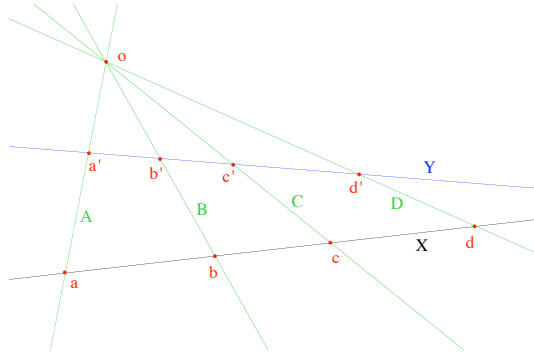


Figure 4.6: La perspective est une homographie.

4.3.6 Remarques.

- 1) On voit que les relations de type \mathcal{R}' traduisent le fait que les réfractions et les perspectives sont des homographies. Comme on a vu, notamment Partie I chapitres 2 et 3, que la conservation du birapport par les perspectives est la source de la plupart des résultats de géométrie projective plane, cela montre que les relations \mathcal{R}' , dont on a vu qu'elles étaient les relations fondamentales du côté algébrique, le sont aussi du côté géométrique.
- 2) La relation sur cinq points (voir 3.1.11) :

$$[x, a, b][x, c, d] - [x, a, c][x, b, d] + [x, a, d][x, b, c] = 0$$

est simplement une permutation de birapport au milieu : $\llbracket x; a, b, c, d \rrbracket = 1 - \llbracket x; a, c, b, d \rrbracket$.

- 3) Nous verrons dans la Partie III une autre interprétation de cette relation en cinq lettres. Si l'on change d en m et y en d elle devient :

$$[b, c, m][d, a, m] - [a, c, m][d, b, m] + [a, b, m][d, c, m] = 0.$$

On peut interpréter cette relation en notant que l'équation en m : $[bcm][dam] = 0$ est l'équation de la conique dégénérée réunion des droites (bc) et (ad) . La relation ci-dessus exprime alors que la conique dégénérée $(ac) \cup (bd)$ est dans le pinceau défini par les deux autres : $(bc) \cup (ad)$ et $(ab) \cup (cd)$, (voir Partie III, ??).

4.3.3 La relation \mathcal{T} , version projective

Rappelons qu'il s'agit de la relation :

$$(\mathcal{T}) \quad [a, b, c][f, g, h] = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(c) \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ h(a) & h(b) & h(c) \end{vmatrix}$$

ou encore

$$\begin{aligned} [a, b, c] [f, g, h] &= f(a)g(b)h(c) + f(b)g(c)h(a) + f(c)g(a)h(b) \\ &\quad - f(c)g(b)h(a) - f(b)g(a)h(c) - f(a)g(c)h(b). \end{aligned}$$

Une simple traduction en termes de birapports donne le résultat suivant :

4.3.7 Proposition. *Soient a, b, c trois points distincts et f, g, h trois (équations de) droites distinctes de $\mathbf{P}(E)$. On suppose que les droites f, g, h ne passent par aucun des points a, b, c . Alors, les points a, b, c sont alignés ou les droites f, g, h concourantes si et seulement si on a la relation :*

$$1 + \llbracket b, c; f, g \rrbracket \llbracket c, a; f, h \rrbracket + \llbracket c, a; f, g \rrbracket \llbracket b, c; g, h \rrbracket = \llbracket c, a; f, h \rrbracket + \llbracket a, b; g, f \rrbracket + \llbracket b, c; h, g \rrbracket.$$

Démonstration. La conclusion est la nullité du premier membre de \mathcal{T} . On obtient l'égalité de birapports en divisant le second membre par $f(a)g(b)h(c)$ et en utilisant la définition du birapport mixte $\llbracket a, b; f, g \rrbracket$, voir 3.4.14.

La relation \mathcal{T} et le théorème à quatre points

Une interprétation de la relation \mathcal{T} redonne le théorème à quatre points (voir Partie I ??, appliquer ce qui suit avec pour d l'intersection des droites (aa') , (bb') et (cc')). Précisément, elle montre une équivalence entre alignement et concours :

4.3.8 Proposition. *Soit abc un triangle et soient a', b', c' des points situés respectivement sur les côtés (bc) , (ca) et (ab) et non alignés. On appelle u, v, w les intersections des droites (bc) et $(b'c')$, (ca) et $(c'a')$, (ab) et $(a'b')$ respectivement. Alors les droites (aa') , (bb') , (cc') sont concourantes si et seulement si les points u, v, w sont alignés.*

Démonstration. On pose $f = a \wedge a'$, $g = b \wedge b'$, $h = c \wedge c'$ et on applique la relation $\mathcal{T}(a', b', c'; f, g, h)$. On a :

$$[a', b', c'] [f, g, h] = [a, a', b'] [b, b', c'] [c, c', a'] + [a, a', c'] [b, b', a'] [c, c', b'].$$

Par ailleurs, la formule du double produit donne :

$$u = (b \wedge c) \wedge (b' \wedge c') = [b, b', c']c - [c, b', c']b$$

et les formules analogues pour v, w . On en déduit :

$$[u, v, w] = [a, b, c] ([b, b', c'] [c, c', a'] [a, a', b'] - [c, b', c'] [a, c', a'] [b, a', b']),$$

d'où le résultat.

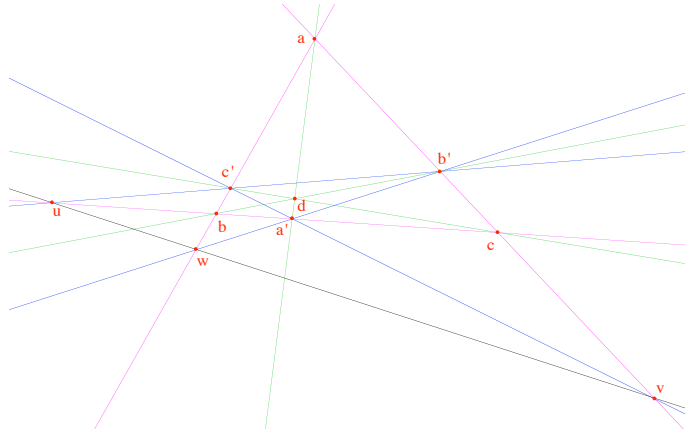


Figure 4.7: La relation \mathcal{T} et le théorème à quatre points.

Application au théorème de Céva

4.3.9 Proposition. Soit abc un triangle de $\mathbf{P}(E)$ et f, g, h des droites passant respectivement par a, b, c et distinctes des côtés du triangle. Les droites f, g, h sont concourantes si et seulement si on a l'égalité :

$$f(b)g(c)h(a) + f(c)g(a)h(b) = 0.$$

Si l est une droite ne passant pas par a, b, c , cette condition est équivalente à la relation :

$$\llbracket b, c; f, l \rrbracket \times \llbracket c, a; g, l \rrbracket \times \llbracket a, b; h, l \rrbracket = -1,$$

qui n'est autre que la relation $(**)$ de Céva, voir Partie I ??.

Démonstration. La première assertion résulte de \mathcal{T} en tenant compte des égalités $f(a) = g(b) = h(c) = 0$. Pour la seconde, on divise la relation de l'énoncé par $f(c)g(a)h(b)$ et on introduit en numérateur et en dénominateur la quantité $l(a)l(b)l(c)$. La conclusion est immédiate.

4.3.10 Remarque. Pour une variante intermédiaire entre le cas général de 4.3.7 et le cas particulier de Céva, voir exercice 4.4.4.

4.3.11 Remarque. Attention, lorsque les points et les droites ne sont pas génériques, on ne peut appliquer les résultats antérieurs et notamment 3.4.16. En effet, la formule qu'on y a prouvée :

$$\frac{f(b)g(c)h(a)}{f(c)g(a)h(b)} = \llbracket b, c; f, g \rrbracket \times \llbracket a, b; h, g \rrbracket$$

donne ici $\infty \times 0$ (puisque b est sur g) et n'a donc plus de sens.

4.3.4 Le théorème de Newton et les relations sur cinq lettres

Le théorème de Newton, (voir Partie I, ??) peut être reformulé en termes de droites :

4.3.12 Théorème. Soient A, B, C, D quatre droites formant un repère de $\mathbf{P}(E^*)$ et Z une droite distincte des précédentes. On note b, c, d (resp. b', c', d') les points d'intersection de $A, B; A, C; A, D$ (resp. $C, D; D, B; B, C$) et p, q, r les points d'intersection de Z avec (bb') , (cc') et (dd') . Soient i, j, k les conjugués de p, q, r par rapport à b, b', c, c' et d, d' respectivement. Alors i, j, k sont alignés.

Démonstration. On peut écrire tous les points à l'aide des produits extérieurs : on a $b = A \wedge B$, $c = A \wedge C$, $d = A \wedge D$, $b' = C \wedge D$, $c' = D \wedge B$ et $d' = B \wedge C$. Pour calculer p il suffit de l'écrire sous la forme $p = \lambda(A \wedge B) + \mu(C \wedge D)$ et d'écrire qu'on a $Z(p) = 0$. On trouve $p = [C, D, Z](A \wedge B) - [A, B, Z](C \wedge D)$ et on a un calcul analogue pour q et r . On en déduit i, j, k comme conjugués harmoniques :

$$i = [C, D, Z](A \wedge B) + [A, B, Z](C \wedge D),$$

$$j = [D, B, Z](A \wedge C) + [A, C, Z](D \wedge B),$$

$$k = [B, C, Z](A \wedge D) + [A, D, Z](B \wedge C).$$

Il ne reste plus qu'à calculer le crochet $[i, j, k]$ et à montrer qu'il est nul. Le calcul donne pour $[i, j, k]$:

$$\begin{aligned} & [C, D, Z][D, B, Z][A, D, Z][A, B, C]^2 + [C, D, Z][A, C, Z][B, C, Z][A, D, B]^2 \\ & + [A, B, Z][D, B, Z][B, C, Z][A, C, D]^2 + [A, B, Z][A, C, Z][A, D, Z][B, C, D]^2. \end{aligned}$$

On peut vérifier sans peine que ce polynôme est nul en prenant A, B, C, D pour repère ($A = (1, 0, 0)$, etc.) et en posant $Z = (x, y, z)$. On peut aussi montrer que cette relation est dans l'idéal engendré par les relations sur les cinq lettres A, B, C, D, Z du type vu en 3.1.11 :

$$P = [B, C, D][A, D, Z] - [A, C, D][B, D, Z] + [A, B, D][C, D, Z]$$

et les trois autres déduites de celle-ci par permutation circulaire sur A, B, C, D . Le calcul n'est pas très simple, mais on trouve effectivement que la relation de Newton est combinaison linéaire des générateurs. En particulier, le coefficient de P est $[A, C, Z]([B, C, D][A, B, Z] + [A, B, D][B, C, Z])$ et les autres s'en déduisent par permutation circulaire de A, B, C, D .

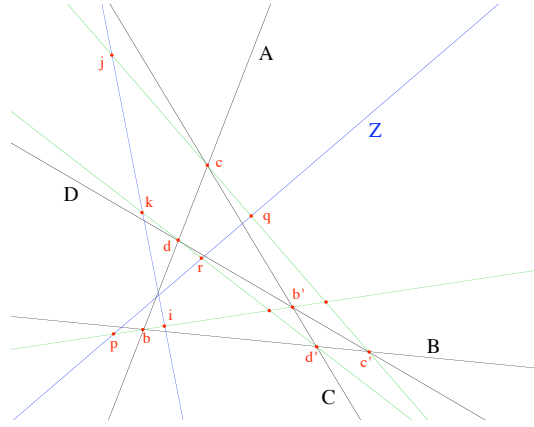


Figure 4.8: Le théorème de Newton, version droites.

4.4 Exercices

4.4.1 Desargues

4.4.1 Exercice. 1) Montrer la relation établie en 4.2.1 soit par un calcul direct, soit en utilisant 2.3.23.3 pour développer les deux membres.

2) Montrer la même formule en raisonnant comme en 2.3.19. On se ramènera au cas où a', b', c' sont les points-base : $a' = (1, 0, 0)$, $b' = (0, 1, 0)$, $c' = (0, 0, 1)$ et on établira l'identité matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -c_2 \\ -a_3 & 0 & c_1 \\ a_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1b_3 - a_3b_1 & -c_2a_1 + c_1a_2 \\ -a_3b_2 + a_2b_3 & 0 & -b_1c_2 + b_2c_1 \\ -c_2a_3 + c_3a_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4.2 Interprétation des relations

4.4.2 Exercice.

1) Montrer que la relation $\mathcal{R}'(a, b, c, d; x, y)$ se traduit en termes de birapports sous la forme suivante⁶ :

$$[[b; d, a, c, x]] [[x; d, a, b, y]] + [[c; d, b, a, x]] [[x; d, b, c, y]] + [[a; d, c, b, x]] [[x; d, c, a, y]] = 1.$$

⁶Cette version dissymétrise les rôles des variables. En effet, il y a 6 birapports, avec chaque fois une lettre absente, et chaque fois une tête (la lettre qui est avant le point virgule) et des jambes (les autres). Deux lettres sont toujours présentes, d et x , mais elles sont différentes : d est toujours jambe, x est trois fois tête et trois fois jambe. La lettre y est la seule qui est trois fois absente et elle est toujours jambe. Enfin, a, b, c jouent des rôles symétriques, chacune est absente une fois, tête une fois, et jambe quatre fois, deux fois avec x , une avec chacune de ses consœurs. Il vaudrait donc mieux écrire la relation ci-dessus $\mathcal{R}(x; d; a, b, c; y)$ (dans l'ordre de présence décroissant et en mettant la tête avant les jambes).

(On utilisera la formule $\llbracket x; a, b, c, d \rrbracket = \frac{[x, a, c] \times [x, b, d]}{[x, b, c] \times [x, a, d]}$.)

2) On reprend les notations de 4.3.2 et on note α'' (resp. β'' , resp. γ'') l'intersection de (bx) et (ad) , (resp. (cx) et (bd) , resp. (ax) et (cd)). Montrer qu'on a $\llbracket d, a, a', \alpha' \rrbracket = \llbracket d, a, a', \alpha'' \rrbracket \llbracket d, a, \alpha'', \alpha' \rrbracket$ et les formules analogues après permutation circulaire (c'est une variante du lemme des trois birapports, cf. Partie I ??) et retrouver le théorème de Gergonne projectif 4.3.2 à partir de 1).

4.4.3 Pappus et polaire

4.4.3 Exercice. On reprend les notations du théorème de Pappus, cf. 2.5.7. On note D et D' les droites contenant respectivement a, b, c et a', b', c' et o l'intersection de D et D' . On se propose de retrouver le résultat de l'exercice ?? de la Partie I.

1) On pose $o = (a \wedge b) \wedge (a' \wedge b')$, $u = (b \wedge c') \wedge (b' \wedge c)$ et $w = (a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)$. Montrer qu'on a :

$$[o, u, w] = [b, a', b']([a, b, a'][a, b, b'][c, b', c'] - [a, b, c'][a, a', b'][b, c, b']).$$

(On utilisera la relation à 5 points 3.1.11.)

2) En déduire que o est sur la droite uvw si et seulement si on a :

$$\frac{[a, b, a'][a, b, b'][c, b', c']}{[a, b, c'][a, a', b'][b, c, b']} = 1.$$

En utilisant la technique vue en 3.4.10, montrer que cette égalité équivaut à la relation :

$$\llbracket a; a', c', b, b' \rrbracket \llbracket b'; c, a, c', b \rrbracket = 1$$

ou encore à $\llbracket o, a, b, c \rrbracket = \llbracket o, a', b', c' \rrbracket$. Conclure que o est sur la droite uvw si et seulement si les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes.

4.4.4 Autour de la relation \mathcal{T}

4.4.4 Exercice. Soit abc un triangle et f, g, h trois (équations de) droites, distinctes des côtés de abc . On suppose que f passe par a et h par c , mais que g ne passe pas par b .

1) Montrer que f, g, h sont concourantes si et seulement si on a la relation $\llbracket b, c; f, g \rrbracket + \llbracket a, b; g, h \rrbracket = 1$ (procéder comme dans la preuve de 4.3.7).

2) On note a' (resp. c') l'intersection de f et de (bc) (resp. de h et de (ab) et α et γ les intersections de g et de (bc) et (ab)). Montrer que la relation précédente s'écrit $\llbracket b, c, a', \alpha \rrbracket = \llbracket b, c', a, \gamma \rrbracket$ et retrouver le résultat de 1) à l'aide d'une perspective de centre d , point d'intersection de f et h .

Chapitre 5

Retour à la géométrie, 2 : la géométrie affine

Comme au chapitre précédent, il s'agit de donner les traductions géométriques des théorèmes fondamentaux énoncés au chapitre 3, mais, cette fois, dans le cadre de la géométrie affine. Pour cela, nous interprétons la géométrie affine comme une sous-géométrie de la géométrie projective, obtenue grâce à une donnée supplémentaire : un hyperplan à l'infini ou, mieux, une forme linéaire non nulle. La lecture affine des relations permet de retrouver le rôle central joué en dimension 1 par la relation de Chasles et en dimension 2 par l'invariant aire et notamment le lemme des proportions (qui correspond à la relation fondamentale) et d'autres résultats bien utiles (lemmes du trapèze, du chevron, etc.). On verra que le lien entre les relations et les théorèmes est tout aussi convaincant en géométrie affine qu'en géométrie projective.

Tout au long de ce chapitre, nous supposons le lecteur familier avec la notion d'espace affine et les notions connexes : barycentres, applications affines, etc. Voir par exemple [Ber90] ou [MCD07]. Un triangle est toujours formé de trois points non alignés.

5.1 Espace affine et espace projectif

Dans ce paragraphe, on précise les données indépendamment de la dimension. Soit E un espace vectoriel de dimension ≥ 2 et $\mathbf{P}(E)$ l'espace projectif associé. On a vu Partie I ?? que se donner une structure affine sur le complémentaire d'un hyperplan de $\mathbf{P}(E)$ revient à se donner une

forme linéaire non nulle qui définit cet hyperplan. Précisément, on se donne une forme linéaire non nulle¹ $T \in E^*$ et on considère l'hyperplan vectoriel E_∞ défini par T . On pose $\mathbf{P}(E_\infty) = H_\infty$ (c'est un hyperplan projectif) et $X = \mathbf{P}(E) - H_\infty$ de sorte que X est l'espace affine défini par T . On rappelle que, si \bar{a}, \bar{b} sont deux points de X , le vecteur \overrightarrow{ab} est le vecteur de E_∞ défini par $\overrightarrow{ab} = \frac{b}{T(b)} - \frac{a}{T(a)}$. Il est indépendant du choix des représentants des points. L'espace vectoriel E_∞ est donc l'espace vectoriel \vec{X} associé au plan affine X .

5.1.1 Remarque. Une manière de se donner une forme linéaire T consiste à se donner une base \mathcal{B} de E formée de $n + 1$ éléments. Si les coordonnées sur cette base sont (x_1, \dots, x_n, t) , on peut prendre pour T la dernière forme coordonnée. Un point de X est l'image d'un vecteur (x_1, \dots, x_n, t) avec $t \neq 0$ et on peut l'écrire sous la forme dite **normalisée** $(x_1, \dots, x_n, 1)$ qui permet d'identifier ce point au point (x_1, \dots, x_n) de l'espace affine k^n .

Les vecteurs de E_∞ sont les vecteurs $(x_1, \dots, x_n, 0)$ et l'on peut aussi les identifier aux points de k^n . Lorsque $a = (a_1, \dots, a_n, 1)$ et $b = (b_1, \dots, b_n, 1)$ sont normalisés, le vecteur \overrightarrow{ab} n'est autre que $b - a = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n, 0)$. On voit que ce calcul est compatible avec les deux identifications ci-dessus.

Dans ce qui suit nous avons choisi de garder autant que possible les choses sous leur forme intrinsèque, car la simplification apportée par l'usage des coordonnées masque parfois les phénomènes. Le lecteur aura sans doute intérêt à travailler avec une base pour bien comprendre les diverses constructions. Dans nombre de cas, cela revient à imposer $T = 1$ pour les points du plan affine.

Le groupe affine de X peut être défini de deux manières différentes :

5.1.2 Proposition. *On considère le sous-groupe $G \subset GL(E)$ qui fixe T :*

$$G = \{u \in GL(E) \mid {}^t u(T) = T \circ u = T\}.$$

La projection naturelle de $GL(E)$ sur $PGL(E)$ induit un isomorphisme de G sur le groupe des homographies de $\mathbf{P}(E)$ qui laissent stable H_∞ . Ce groupe laisse stable X et on le note $GA(X)$. On note $SA(X)$ le sous-groupe $SL(E) \cap G$ de $GA(X)$.

Démonstration. Il est clair que les homographies définies par les éléments de G laissent stable H_∞ , donc aussi X . Le noyau de l'application $GL \mapsto PGL$ étant formé des homothéties, la seule qui est dans G est l'identité, ce

¹La notation renvoie, bien entendu, aux coordonnées usuelles (x, y, t) .

qui montre que la projection, en restriction à G , est injective. Enfin, si une homographie \bar{u} conserve H_∞ , on a ${}^t u(T) = \lambda T$ et, quitte à remplacer u par $\lambda^{-1}u$, on peut supposer que u est dans G .

5.1.3 Remarque. Reprenons les notations de 5.1.1. Les matrices des éléments de $GA(X)$ sont alors de la forme suivante : $\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où A est une matrice inversible $n \times n$, v une matrice colonne $n \times 1$ et 0 la matrice ligne nulle $1 \times n$.

5.2 La droite affine et le groupe $SL(2)$

Dans ce paragraphe l'espace vectoriel E est de dimension 2, toujours muni d'une forme linéaire non nulle T . L'hyperplan H_∞ défini par T est ici un point noté ∞ et la droite affine X est égale à $\mathbf{P}(E) - \{\infty\}$. Si l'on munit E de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, avec les coordonnées homogènes (x, t) , on peut prendre pour T la forme e_2^* . On a alors $\infty = (1, 0)$ et les points de X s'identifient aux points de k par $a \mapsto (a, 1)$.

5.2.1 Le groupe affine

Rappelons que les éléments de $PGL(E)$, avec la base choisie ci-dessus, correspondent aux homographies $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad-bc \neq 0$. Le groupe affine $GA(X)$ est le sous-groupe de $PGL(E)$ formé des homographies qui vérifient $c = 0$ et $d = 1$. Ces transformations opèrent sur X , identifié à k , par les formules $z \mapsto az+b$ avec $a \in k^*$ et $b \in k$. Parmi ces transformations, celles qui sont dans $SA(X)$ sont les translations $z \mapsto z+b$.

5.2.2 Interprétation affine des invariants

Soient $a, b \in E$. On obtient à partir du crochet $[a, b]$ un invariant des points de X en posant $\overline{ba} = \frac{[a, b]}{T(a)T(b)}$. En effet, cette quantité est bien définie (car on a $T(a)T(b) \neq 0$ pour des points de X) et elle ne dépend pas des représentants. Si l'on écrit cet invariant en utilisant la base et en écrivant les points sous forme normalisée, on a $[a, b] = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ b_1 & 1 \end{vmatrix} = a_1 - b_1$ et $T(a) = T(b) = 1$. On retrouve simplement la mesure algébrique \overline{ba} du vecteur $\overrightarrow{ba} = a - b$ sur le vecteur e_1 . La mesure algébrique est un invariant sous $SA(X)$ et un invariant relatif sous $GA(X)$, de sorte que le rapport de mesures algébriques est un invariant absolu sous $GA(X)$.

Si f est une forme linéaire, distincte de λT , il lui est aussi associé un invariant des points de $X : f(a)/T(a)$, mais cet invariant ne donne rien de plus que le crochet. En effet, on a vu dans la Partie I, ??, qu'on dispose dans ce cas d'une homographie Φ_E de $\mathbf{P}(E^*)$ dans $\mathbf{P}(E)$ qui à la forme $f = (u, v)$ (dans la base \mathcal{B}^*) associe le point $f^* = (v, -u)$ et on a alors $f(a) = [f^*, a]$.

5.2.3 Interprétation des relations

Les relations d'alternance $[a, a] = 0$ et d'antisymétrie $[a, b] + [b, a] = 0$ ont une traduction immédiate en termes de mesures algébriques : elles s'écrivent $\overline{aa} = 0$ et $\overline{ba} = -\overline{ab}$.

La relation $S_{ijk,p}$ s'écrit $f(a)[b, c] + f(b)[c, a] + f(c)[a, b] = 0$. Si on applique cette relation avec $f = T$ et qu'on divise le premier membre par $T(a)T(b)T(c)$ on obtient $\overline{bc} + \overline{ca} + \overline{ab} = 0$, c'est-à-dire la **relation de Chasles**.

La relation $R_{ijk,p}$, qui s'écrit : $[b, c][a, x] + [c, a][b, x] + [a, b][c, x] = 0$, donne, en divisant par $T(a)T(b)T(c)T(x)$ (ou en écrivant les points sous forme normalisée) : $\overline{bc}\overline{ax} + \overline{ca}\overline{bx} + \overline{ab}\overline{cx} = 0$ qui est encore un avatar de la relation de Chasles. C'était d'ailleurs prévisible, puisque nous avons vu en 4.1.2 que la relation $R_{ijk,p}$, jointe aux relations d'antisymétrie des crochets, conduit à la formule de permutation du birapport :

$$[b, c, a, d] = 1 - [b, a, c, d],$$

et que cette relation, lorsque l'on prend $d = (1, 0)$ comme point à l'infini et les autres points à distance finie sous la forme $(a, 1)$, etc. s'interprète encore comme la relation de Chasles sur les mesures algébriques, voir ??1 (Partie I).

Bref, le théorème fondamental de la géométrie de la droite affine, celui qui contient tous les autres au sens où les relations correspondantes engendrent l'idéal de toutes les relations, c'est simplement la relation de Chasles !

5.3 Le plan affine et le plan projectif

5.3.1 Plan et droites affines

Le plan

On reprend les notations générales, mais l'espace E est maintenant de dimension 3. On a toujours la forme linéaire T , son noyau E_∞ , qui est un plan vectoriel, le plan projectif $\mathbf{P}(E)$, la droite à l'infini $D_\infty = \mathbf{P}(E_\infty)$ et son complémentaire qui est le plan affine X . Rappelons que E_∞ est alors le

plan vectoriel \vec{X} associé à X . Si on utilise une base \mathcal{B} de E , on notera les coordonnées des vecteurs sous la forme (x, y, t) , et T sera la troisième forme coordonnée.

Les droites

Rappelons quelques résultats concernant les droites affines :

5.3.1 Proposition-Définition. *On appelle **droite affine** la trace² sur X d'une droite projective distincte de D_∞ . Une telle droite D est l'image d'un plan vectoriel V de E , distinct de E_∞ . La droite vectorielle associée est l'intersection $\vec{D} = E_\infty \cap V$ et son image dans D_∞ est l'unique point à l'infini de D (appelé **direction** de D). La droite \vec{D} est aussi l'ensemble des vecteurs \vec{ab} pour $a, b \in D$.*

Deux droites D et D' sont dites **parallèles** si l'on a $D \cap D' = \emptyset$ (il s'agit des points situés dans X) ou $D = D'$. Il revient au même de demander que les droites projectives associées ont même point à l'infini.

Si l'on s'est donné une base et qu'on utilise les deux identifications proposées en 5.1.1, une droite affine est l'ensemble des points $(x, y) \in k^2$ vérifiant une équation $ux + vy + w = 0$ avec $(u, v) \neq (0, 0)$ et la droite vectorielle est l'ensemble des vecteurs $(x, y) \in k^2$ vérifiant $ux + vy = 0$.

Démonstration. Il est facile de vérifier l'ensemble des propriétés en utilisant une base, mais on peut noter aussi :

- que le vecteur $\vec{ab} = \frac{b}{T(b)} - \frac{a}{T(a)}$ (avec $a, b \in V$) est bien dans \vec{D} ,
- qu'inversement, si v est dans \vec{D} , on peut l'écrire $v = \vec{ab}$ en prenant a quelconque (non nul) dans $V - E_\infty$ et en posant $b = a + T(a)v$.

Mesure algébrique

Dans le plan affine, on peut définir (indépendamment de toute structure métrique) la mesure algébrique d'un vecteur **de direction donnée**, mais cette notion nécessite une donnée supplémentaire, soit une équation, soit un vecteur :

5.3.2 Proposition-Définition. *Soit D une droite affine, image d'un plan vectoriel V de E .*

1) *On suppose qu'on s'est donné une équation $f \in E^*$ de V . Alors, le vecteur $\vec{i} = f \wedge T$ est un vecteur non nul de \vec{D} (qu'on appelle un **vecteur***

²Mais on pensera toujours à la droite projective dont elle provient. On parlera notamment du point à l'infini d'une droite affine.

directeur de D). C'est aussi un représentant du point à l'infini ω de D . Inversement, si \vec{i} est un vecteur non nul de \vec{D} et si a est un point de D , $f = \frac{a}{T(a)} \wedge \vec{i}$ est une équation de D qui vérifie $\vec{i} = f \wedge T$. Toutes les f convenables sont de la forme $f + \lambda T$ avec $\lambda \in k$.

2) Si \vec{i} est un vecteur non nul de \vec{D} , et si a, b sont deux points de D , on appelle **mesure algébrique** du vecteur \overrightarrow{ab} relativement à \vec{i} le nombre $\lambda = \overline{ab}$ défini par la formule : $\overrightarrow{ab} = \lambda \vec{i}$. Si f est une équation de D telle que $\vec{i} = f \wedge T$ on a la relation : $a \wedge b = T(a)T(b) \overline{ab} f$.

Démonstration. 1) Il est clair que $f \wedge T$ est à la fois dans V et dans E_∞ à cause des formules $f(f \wedge T) = [f, T, f] = 0$ et $T(f \wedge T) = [f, T, T] = 0$. En sens inverse, la droite d'équation $f = \frac{a}{T(a)} \wedge \vec{i}$ contient a et ω , et c'est donc D . On a $\vec{i} = f \wedge T$ en vertu de 2.3.21. Enfin, si on a $f \wedge T = g \wedge T$, donc $(f - g) \wedge T = 0$, les formes $f - g$ et T sont proportionnelles.

2) Posons $a \wedge b = \mu f$. On calcule $(a \wedge b) \wedge T = T(a)b - T(b)a$ par 2.3.21. Mais on a, d'une part, $(a \wedge b) \wedge T = \mu(f \wedge T) = \mu \vec{i}$ et, d'autre part, $T(a)b - T(b)a = T(a)T(b) \overrightarrow{ab}$, d'où le résultat.

5.3.3 Remarques.

1) On notera que la mesure algébrique \overline{ab} dépend du choix de \vec{i} , mais le rapport de deux mesures algébriques (sur une même droite) n'en dépend pas. On peut aussi définir le rapport de mesures algébriques $\overline{ab}/\overline{cd}$ lorsque les droites $D = (ab)$ et $D' = (cd)$ sont parallèles, il suffit de choisir le même vecteur de base sur la droite vectorielle $\vec{D} = \vec{D}'$.

2) Supposons la droite D donnée par une équation f . Alors, le produit extérieur $a \wedge b$ de deux représentants de points distincts de D est colinéaire à f et il est bilinéaire et antisymétrique. Cela permet de définir un crochet $[a, b]$ par la formule $a \wedge b = [a, b]f$. Avec cette définition, la mesure algébrique est donnée par la formule $\overline{ab} = \frac{[a, b]}{T(a)T(b)}$ comme dans le cas de la droite projective.

3) Dans la présentation de la géométrie affine à partir de la géométrie projective, deux notions se confondent : celle de vecteur directeur d'une droite et celle de point à l'infini. En effet, en coordonnées, si D a pour équation $ux + vy + w = 0$, on a $f \wedge T = (v, -u, 0)$ et ce vecteur est à la fois un vecteur directeur de D et un représentant de son point à l'infini.

5.3.2 Le calcul barycentrique

Ce paragraphe est une parenthèse. Son objectif est de montrer que le plongement de l'espace affine X dans $\mathbf{P}(E)$ permet de retrouver très simplement les résultats usuels sur les barycentres, le calcul barycentrique se ramenant au calcul dans l'espace vectoriel³ E . Dans tout ce qui suit on utilisera une base et les coordonnées (x, y, t) et on se permettra l'abus de langage suivant : on confondra un point a du plan affine X et le vecteur normalisé $a = (x, y, 1) \in E$ dont il est issu. On notera aussi que, si o est l'origine $o = (0, 0, 1)$, le vecteur \overrightarrow{oa} est égal à $(x, y, 0)$.

Barycentres

5.3.4 Proposition. Soient a_1, \dots, a_n des points (normalisés) du plan affine X et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires non tous nuls. On considère l'élément $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ de E . Il y a trois cas.

- 1) Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ est non nul, a est non nul, le point de $\mathbf{P}(E)$ associé à a est dans le plan affine et c'est le **barycentre** des a_i affectés des coefficients λ_i .
- 2) Si on a $a \neq 0$, mais $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, a définit un point à l'infini du plan. Si λ_k est non nul, ce point correspond à la direction de la droite $(a_k g)$ où g est le barycentre des (a_j, λ_j) pour $j \neq k$. On dit que a est le barycentre généralisé des (a_i, λ_i) .
- 3) Si a est nul et si l'on a, par exemple, $\lambda_k \neq 0$, le point a_k est barycentre des (a_j, λ_j) pour $j \neq k$.
- 4) Si a, b sont deux points distincts (normalisés) et si λ, μ sont des scalaires non tous deux nuls, le point $m = \lambda a + \mu b$ est sur (ab) . Si $\lambda + \mu$ est nul, m est le point à l'infini de (ab) et, sinon, c'est le barycentre de a, b affecté des coefficients λ, μ . Si m est distinct de b on a $\frac{\overline{ma}}{\overline{mb}} = -\frac{\mu}{\lambda}$. En particulier, si k n'est pas de caractéristique 2, $a + b$ est le **milieu** de $[a, b]$.

Démonstration. Dans le cas 1) on a $T(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$, ce qui montre que a est non nul, donc définit un point de $\mathbf{P}(E)$, et que ce point est dans le plan affine. On reconnaît la définition du barycentre calculé avec l'origine $o = (0, 0, 1)$: $(\sum_{i=1}^n \lambda_i) \overrightarrow{oa} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{oa_i}$.

Passons au cas 2). Le barycentre est défini par $g = \sum_{j \neq k} \lambda_j a_j$. Comme λ_k est non nul, il en est de même de $\sum_{j \neq k} \lambda_j$, de sorte que g est bien un point de X . On note ensuite que g est distinct de a_k . En effet, sinon, on aurait, dans E , $g = \sum_{j \neq k} \lambda_j a_j = \lambda a_k$. En appliquant T on trouve $\lambda = \sum_{j \neq k} \lambda_j = -\lambda_k$ d'où $a = 0$ contrairement à l'hypothèse. On a enfin $a = g + \lambda_k a_k$ d'où $[a, g, a_k] = 0$,

³Pour une construction intrinsèque de E à partir de l'espace affine X , voir [Ber90].

ce qui montre que a, g, a_k sont alignés. Comme le point a est à l'infini, cela signifie bien que a est la direction de $(a_k g)$.

Le point 3) est clair. Pour 4) on calcule \overline{ma} , mesure algébrique par rapport au vecteur \overrightarrow{ab} . On a $\overline{ma} = \frac{a}{T(a)} - \frac{m}{T(m)} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}(a - b) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\overrightarrow{ba}$, d'où $\overline{ma} = -\frac{\mu}{\lambda + \mu}$. On a, de même, $\overline{mb} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ et le résultat s'ensuit.

5.3.5 Remarques.

1) On ne change pas le barycentre en multipliant les λ_i par un même scalaire non nul.

2) L'**isobarycentre** de n points correspond au cas où les λ_i sont tous égaux. Il est dans X si la caractéristique de k ne divise pas n et à l'infini sinon. Pour $n = 2$ on retrouve la notion de milieu.

3) Bien entendu, on peut donner une variante plus intrinsèque de cette proposition en ne supposant plus les points normalisés. Il faut alors distinguer trois cas selon les valeurs de a et de $\sum_{i=1}^n \lambda_i T(a_i)$.

Coordonnées homogènes, coordonnées barycentriques

On se donne un triangle abc de X (c'est-à-dire trois points non alignés, normalisés). Les vecteurs a, b, c forment une base de E et tout point de $\mathbf{P}(E)$ s'écrit donc en coordonnées homogènes $m = \lambda a + \mu b + \nu c$. Comme d'habitude, les coordonnées homogènes ne sont pas uniques. Si $\lambda + \mu + \nu$ est nul, m est à l'infini, sinon, m est le barycentre de a, b, c affectés des coefficients λ, μ, ν . Dans ce cas, on peut imposer $\lambda + \mu + \nu = 1$ et on parle de coordonnées barycentriques.

Application 1 : médianes

5.3.6 Proposition. *Les médianes d'un triangle du plan affine (qui existent si k n'est pas de caractéristique 2) sont parallèles si k est de caractéristique 3 et concourantes sinon.*

Démonstration. Notons abc le triangle, et supposons a, b, c normalisés. On a vu que les milieux des côtés sont $a' = b + c$, $b' = c + a$ et $c' = a + b$. À partir de là, il y a deux voies possibles :

Variante 1 On considère le point $g = a + b + c$ (ce point est à l'infini si et seulement si on a $T(a + b + c) = 0$, c'est-à-dire $3 = 0$). On a $g = a + a' = b + b' = c + c'$, ce qui montre qu'il est aligné avec a, a' ; b, b' et c, c' .

Variante 2 On montre que les médianes ont des équations linéairement dépendantes, ce qui résulte de la relation :

$$a \wedge (b + c) + b \wedge (c + a) + c \wedge (a + b) = 0.$$

Le point d'intersection se calcule par la formule du double produit et on retrouve $g = [a, b, c](a + b + c)$.

5.3.7 Remarque. Le normalisé du milieu a' de $[b, c]$ étant $\frac{b+c}{2}$, la formule $g = a + 2a'$ montre que g est barycentre de a et a' affectés des coefficients 1 et 2, autrement dit que g est aux deux tiers de la médiane à partir du sommet.

Application 2 : Céva

5.3.8 Corollaire. Soient a, b, c trois points⁴ non alignés du plan affine et soient a', b', c' des points situés respectivement sur les droites affines (bc) , (ca) , (ab) . On écrit $a' = \lambda_1 b + \lambda_2 c$, $b' = \mu_1 c + \mu_2 a$, $c' = \nu_1 a + \nu_2 b$. Alors, les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles si et seulement si on a $\lambda_1 \mu_1 \nu_1 = \lambda_2 \mu_2 \nu_2$. Cette condition peut encore s'écrire (si l'on suppose les points a', b', c' distincts de a, b, c) : $\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \times \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \times \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = -1$. Si les coefficients λ_i, μ_i, ν_i sont tous égaux à 1 on retrouve le fait que les médianes d'un triangle sont concourantes ou parallèles.

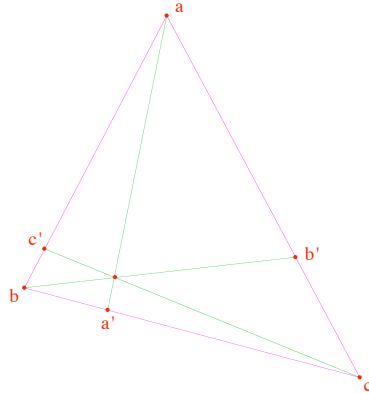


Figure 5.1: Le théorème de Céva (rapports $\frac{-1}{3}$, $\frac{-1}{2}$, -6).

Démonstration. On écrit les équations des droites : $a \wedge a' = \lambda_1(a \wedge b) - \lambda_2(c \wedge a)$, $b \wedge b' = \mu_1(b \wedge c) - \mu_2(a \wedge b)$, $c \wedge c' = \nu_1(c \wedge a) - \nu_2(b \wedge c)$ et elles sont concourantes dans $\mathbf{P}(E)$ (donc concourantes ou parallèles dans le plan affine) si et seulement si le déterminant de ces formes sur la base $b \wedge c$, $c \wedge a$, $a \wedge b$ est nul :

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & -\mu_2 \\ -\nu_2 & \nu_1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1 \mu_1 \nu_1 - \lambda_2 \mu_2 \nu_2 = 0.$$

⁴On peut les supposer normalisés, mais le résultat reste valable sinon.

5.4 Interprétation affine des invariants de $SL(E)$

On suppose encore l'espace E muni de la forme T . Pour définir les crochets, on a besoin d'une base⁵ $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E et l'on suppose encore que les coordonnées relatives à cette base sont (x, y, t) et que la forme $T = e_3^*$ est celle qui correspond à la troisième coordonnée. On repère le plan affine X en se donnant l'origine $o = (0, 0, 1)$ et les vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0)$ qui forment une base du plan vectoriel associé $E_\infty = \vec{X}$. On conserve la double convention qui permet d'identifier à la fois les points du plan affine X aux vecteurs $(x, y, 1) \in E$ ou aux points (x, y) de k^2 , mais aussi les vecteurs $(x, y, 0) \in E_\infty = \vec{X}$ aux points de k^2 .

5.4.1 Interprétation affine des invariants de points : aires orientées.

Aires

Rappelons la définition de l'aire orientée d'un triangle du plan affine :

5.4.1 Définition. Soit X un plan affine et \vec{X} le plan vectoriel associé. On suppose \vec{X} muni d'une base e_1, e_2 . Soit abc un triangle de X . L'aire algébrique⁶ du triangle abc relativement à cette base est la moitié du déterminant des vecteurs \vec{ab} et \vec{ac} sur la base e_1, e_2 .

5.4.2 Remarques.

- 1) La définition de l'aire orientée nécessite la donnée d'une base de \vec{X} , mais elle est invariante par un changement de base de déterminant 1.
- 2) L'aire orientée dépend d'un choix d'ordre des points, disons abc . Elle est invariante par permutation circulaire mais est changée en son opposée par transposition. Cela vient de la relation de Chasles et des propriétés du déterminant. Ainsi, on a $\det(\vec{bc}, \vec{ba}) = \det(\vec{ba} + \vec{ac}, \vec{ba}) = \det(\vec{ac}, \vec{ba}) = \det(\vec{ab}, \vec{ac})$.
- 3) Dans le cas réel, si on a choisi un repère qui tourne dans le sens trigonométrique, l'aire du triangle abc est positive si et seulement si le triangle, vu comme un lacet abc , tourne dans le sens trigonométrique.

Les crochets de points

Dans le plan projectif $\mathbf{P}(E)$, le crochet $[a, b, c]$ de trois points n'a pas de sens puisqu'il dépend de leurs représentants. En revanche, si a, b, c sont

⁵En fait, il suffit de se donner une forme trilinéaire alternée non nulle.

⁶On devrait dire la mesure de l'aire.

dans le plan affine, il va en avoir un, soit en prenant les points sous forme normalisée, soit en divisant par les valeurs de T :

5.4.3 Proposition. *On munit le plan vectoriel \vec{X} de la base e_1, e_2 et on l'identifie à k^2 . Si a, b, c sont trois points (normalisés) du plan affine, le crochet $[a, b, c]$ est le double de l'aire (orientée) du triangle abc . Si les points ne sont pas normalisés, on a $\mathcal{A}(abc) = \frac{[a, b, c]}{2T(a)T(b)T(c)}$.*

Démonstration. On travaille dans la base \mathcal{B} . On a $\vec{ab} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ et $\vec{ac} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2)$. Le calcul du déterminant donne $[a, b, c] = (b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1)$. On reconnaît le déterminant $\det(\vec{ab}, \vec{ac})$.

5.4.2 Interprétation affine des évaluations

Dans le cas des invariants associées aux formes, donc aux droites, les choses sont moins simples car l'équation $ux + vy + w$ d'une droite, même affine, n'est déterminée qu'à un scalaire près⁷. On ne va donc pouvoir interpréter que la nullité des évaluations, ou leurs rapports. Pour les crochets de formes, voir le paragraphe suivant.

Traduction du parallélisme

La donnée de l'équation T de D_∞ et les invariants du type $f(a)$ permettent d'exprimer le parallélisme. On a en effet la proposition suivante (qui nous sera notamment utile dans la preuve du théorème de Thalès) :

5.4.4 Proposition.

- 1) Soient f, g deux formes et F, G les droites d'équations f, g . Les droites F, G sont parallèles si et seulement si on a $T(f \wedge g) = 0$.
- 2) Si f est une forme définissant une droite F et si a, b sont deux points distincts du plan affine, les droites F et (ab) sont parallèles si et seulement si on a $T(b)f(a) = T(a)f(b)$ (ou simplement $f(a) = f(b)$ si les points sont normalisés).

Démonstration. 1) Dire que deux droites sont parallèles c'est dire que leur point d'intersection, défini par $f \wedge g$, est à l'infini, donc annule T .

2) La droite (ab) est définie par $a \wedge b$. On calcule, en utilisant 2.3.21.1, $T(f \wedge (a \wedge b)) = T(f(b)a - f(a)b) = T(a)f(b) - T(b)f(a)$.

⁷Contrairement aux points, les droites du plan affine ne forment pas un plan affine, c'est-à-dire le complémentaire d'une droite projective dans un plan projectif. En effet, la seule droite manquante, dans $\mathbf{P}(E^*)$, est la droite de l'infini. Les droites affines constituent donc un plan projectif privé d'un point.

Rapports d'évaluations

Le lemme suivant relie les rapports des valeurs de $f(a)$ aux rapports de mesures algébriques :

5.4.5 Lemme. *Soit D une droite affine d'équation f et soient a, b deux points distincts du plan affine. On suppose que D coupe (ab) en m . On a les propriétés suivantes (les points a, b, m sont normalisés) :*

- 1) On a $m = \frac{f(b)a - f(a)b}{f(b) - f(a)}$.
- 2) On a la formule : $\frac{\overline{ma}}{\overline{mb}} = \frac{f(a)}{f(b)}$.
- 3) Le point m est le barycentre de a, b affectés des coefficients $f(b), -f(a)$.

Démonstration. Le point d'intersection de D et de (ab) est donné en projectif par 2.3.23 : $f \wedge (a \wedge b) = f(b)a - f(a)b$. Pour en avoir une version affine, il suffit de normaliser en imposant $T(m) = 1$ (on notera que la quantité $f(b) - f(a)$ est non nulle puisque D coupe (ab) à distance finie). Les autres relations proviennent de 5.3.4. La formule 2) n'est autre que la formule 3.4.18 qui donne le birapport $\llbracket a, b; f, g \rrbracket$, appliquée avec $g = T$.

5.4.6 Remarque. On obtient immédiatement la forme usuelle de Ménélaüs à partir de 5.4.5, exactement comme on l'a fait ci-dessus dans la troisième preuve du lemme des trois birapports 4.2.11. En effet, si on a un triangle abc et une droite D d'équation f qui coupe respectivement (bc) , (ca) et (ab) en a', b', c' , on a la formule $\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} = \frac{f(b)}{f(c)}$ et les formules analogues par permutation,

de sorte que le produit des mesures algébriques $\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \times \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \times \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}}$ n'est autre que $\frac{f(b)f(c)f(a)}{f(c)f(a)f(b)}$, donc trivialement égal à 1.

5.4.3 Interprétation métrique des invariants de droites

Comme on l'a vu, l'interprétation affine des invariants de droites, et notamment des crochets, n'est pas évidente. En effet, l'équation d'une droite, même affine, n'est déterminée qu'à un scalaire près. Dans ce qui suit, nous allons remédier à ce défaut en "rigidifiant" ces équations, mais cela ne sera possible qu'à l'aide d'une donnée supplémentaire de nature métrique. Ce paragraphe sera repris et amplifié dans la Partie V.

Notations

Dans ce paragraphe, le corps de base est le corps \mathbf{R} des nombres réels. On suppose donnée une base \mathcal{B} de E , dans laquelle les coordonnées des vecteurs sont (x, y, t) . On munit E^* de la base duale \mathcal{B}^* , et les coordonnées des formes sont alors (u, v, w) . On choisit la droite $t = 0$ comme droite de l'infini. On munit E^* de la forme⁸ quadratique dégénérée q^* définie par $q^*(u, v, w) = u^2 + v^2$. On notera que la forme T est une base du noyau de cette forme. Cette forme permet de définir une notion d'orthogonalité sur les droites affines (celles qui vérifient $(u, v) \neq (0, 0)$) et elle fournit une forme euclidienne sur \mathbf{R}^2 (vu comme l'ensemble des directions de droites). Cette forme est notée $(a|b)$, avec $(a|b) = a_1b_1 + a_2b_2$. On oriente le plan en décidant que la base orthonormée $(1, 0), (0, 1)$ est directe. On parlera de **plan affine euclidien** lorsqu'on est dans cette situation. On a toutes les notions usuelles de la géométrie euclidienne (distance, angle, projeté orthogonal, etc.) avec lesquelles le lecteur est familier.

Nous supposons désormais que les équations des droites affines sont “normalisées” vis-à-vis de la forme donnée sur E^* , autrement dit qu'on a $u^2 + v^2 = 1$.

Si D est une droite affine, elle admet deux équations normalisées opposées : $f = uX + vY + w$ et $-f = -uX - vY - w$ et choisir l'une des deux équations revient à choisir un vecteur directeur unitaire de D : $\vec{i} = f \wedge T = (v, -u)$ ou $-\vec{i} = (-f) \wedge T$ (voir 5.3.2), c'est-à-dire à en faire un **axe** : donnée d'une droite affine D et d'un vecteur unitaire de la droite vectorielle associée. En vertu de 5.3.2, l'équation normalisée de D est alors $\frac{a \wedge b}{ab}$ (où la mesure algébrique est prise selon \vec{i})

Le vecteur directeur \vec{i} détermine un unique vecteur unitaire \vec{n} normal à D tel que la base (\vec{i}, \vec{n}) soit directe. Le vecteur \vec{n} correspondant à $\vec{i} = (v, -u)$ est (u, v) .

Dans tout ce paragraphe, les points du plan affine sont supposés normalisés.

L'invariant $f(a)$

La donnée de la structure métrique permet d'exprimer les évaluations en termes de mesures algébriques sur la droite et sur ses perpendiculaires.

5.4.7 Proposition-Définition. *Soit (D, \vec{i}) une droite orientée et soit \vec{n} son vecteur normal. Soit f l'équation normalisée de D et soit a un point du plan.*

⁸On renvoie à la Partie V pour une étude systématique et intrinsèque de cette situation.

Alors, si a' est le projeté orthogonal de a sur D , et si $\overline{a'a}$ désigne la mesure algébrique de $\overrightarrow{a'a}$ mesurée selon \vec{n} , on a la formule : $\overline{a'a} = f(a)$.

Le nombre $f(a)$ est appelé **distance orientée** de a à (D, \vec{i}) et on le note $d(a, D, \vec{i})$ (voire $d(a, D)$ s'il n'y a pas de risque de confusion). Il est positif si a est dans le demi-plan contenant le vecteur normal à (D, \vec{i}) et négatif sinon.

Démonstration. On pose $a = (a_1, a_2, 1)$, $a' = (a'_1, a'_2, 1)$ et $f = uX + vY + w$, donc $\vec{n} = (u, v)$. On a $\overrightarrow{a'a} = \overline{a'a}\vec{n}$, donc, puisque \vec{n} est unitaire, $\overline{a'a} = (\overrightarrow{a'a}|\vec{n}) = u(a_1 - a'_1) + v(a_2 - a'_2)$. Mais, comme a' est sur D , on a $ua'_1 + va'_2 + w = 0$, d'où $\overline{a'a} = ua_1 + va_2 + w = f(a)$.

5.4.8 Remarque. Un invariant plus rudimentaire est $|f(a)|$, distance ordinaire de a à la droite d'équation (normalisée) f .

5.4.9 Proposition. Soit (D, \vec{i}) une droite orientée et soit Δ une droite perpendiculaire à D , orientée de telle sorte⁹ que son vecteur normal soit \vec{i} . Soit g l'équation normalisée de Δ , soient $a, b \in X$ et a', b' leurs projetés orthogonaux sur D . On a la formule : $\overline{a'b'} = g(b) - g(a)$.

Démonstration. Si l'équation f de D est de la forme $uX + vY + w$ on a $\vec{i} = f \wedge T = (v, -u)$, de sorte que g est égale à $vX - uY + w'$. Posons $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$. On a $\overline{a'b'} = (\overrightarrow{a'b'}|\vec{i}) = v(b_1 - a_1) + u(a_2 - b_2)$ et cette quantité est bien égale à $g(b) - g(a)$.

L'aire du triangle

Les notions précédentes permettent de retrouver la formule de l'aire du triangle ($\text{base} \times \text{hauteur}/2$) sous une forme orientée :

5.4.10 Proposition. Soit abc un triangle. On suppose la droite (bc) orientée et on note f son équation normalisée. On a la formule $2\mathcal{A}(abc) = f(a)\overline{bc}$. Si h désigne le projeté orthogonal de a sur (bc) on a encore $2\mathcal{A}(abc) = \overline{bc}\overline{ha}$ (où \overline{ha} est mesurée selon le vecteur normal à (bc)).

Démonstration. Il résulte de 5.3.2 que l'équation f est égale à $\frac{b \wedge c}{\overline{bc}}$. Le résultat vient alors de la formule $2\mathcal{A}(abc) = [a, b, c] = (b \wedge c)(a)$. La variante avec h vient de 5.4.7.

⁹Attention, si \vec{n} est le vecteur normal à D , cela signifie qu'on prend $-\vec{n}$ comme vecteur directeur de Δ . Un petit dessin évite souvent de dire des bêtises.

Les crochets de formes

Grâce à la donnée d'une structure euclidienne on a une interprétation (certes un peu lourde) du crochet de trois formes :

5.4.11 Proposition. *Soient f, g, h trois formes linéaires normalisées correspondant à trois droites affines orientées F, G, H .*

1) *On suppose que les droites forment un triangle abc (a, b, c étant les intersections de G, H ; H, F et F, G respectivement). Alors on a la formule :*

$$[f, g, h] = \frac{4\mathcal{A}(abc)^2}{bc \cdot \overline{ca} \cdot \overline{ab}}.$$

2) *On suppose F et G parallèles, mais non parallèles à H , et on note a et b les intersections de F, H et G, H respectivement. On pose $\epsilon = 1$ (resp. -1) selon que les droites F et G sont de même sens (resp. de sens opposés). On a alors $f \wedge T = \epsilon(g \wedge T)$, $f(b) = -\epsilon g(a)$ et*

$$[f, g, h] = \frac{-f(b)g(a)}{\overline{ab}} = \epsilon \frac{f(b)^2}{\overline{ab}} = \epsilon \frac{g(a)^2}{\overline{ab}} = \epsilon \frac{d^2}{\overline{ab}}$$

où d désigne la distance des droites F, G , c'est-à-dire, par exemple, la distance de b à son projeté orthogonal sur F .

3) *Si les trois droites sont parallèles on a $[f, g, h] = 0$.*

Démonstration. 1) On sait que l'équation normalisée de (bc) est $f = \frac{b \wedge c}{\overline{bc}}$ et de même pour les autres (cf. 5.3.2). La formule est alors conséquence de 2.3.23.3 : $[b \wedge c, c \wedge a, a \wedge b] = [a, b, c]^2$.

2) Les vecteurs directeurs unitaires de F et G associés aux équations f, g sont $\omega := f \wedge T$ et $g \wedge T$ et ils sont égaux (resp. opposés) selon que f, g sont de même sens (resp. de sens opposés). On sait qu'on a $f = a \wedge (f \wedge T) = a \wedge \omega$ et $g = b \wedge (g \wedge T) = b \wedge \epsilon \omega$ et on en déduit $f(b) = [a, \omega, b]$ et $g(a) = \epsilon [b, \omega, a]$, donc $f(b) = -\epsilon g(a)$.

On peut alors calculer $[f, g, h]$ en utilisant la formule $h = \frac{a \wedge b}{\overline{ab}}$ et 2.3.23.2.

On trouve $[f, g, h] = \frac{-f(b)g(a)}{\overline{ab}}$ et on a les formules annoncées, la dernière venant de 5.4.7.

Le point 3) est évident car des droites affines parallèles concourent à l'infini, donc leur crochet est nul.

Sinus de l'angle de deux axes

Avec la donnée d'une métrique, on peut définir le sinus :

5.4.12 Définition. Soient f, g les équations normalisées de deux axes F, G . On appelle **sinus** de l'angle de F, G le nombre $[f, g, T]$. On le note $\sin(F, G)$.

La justification de cette définition est la suivante. On sait que les vecteurs $f \wedge T$ et $g \wedge T$ sont les vecteurs unitaires des axes F, G . On peut alors calculer leur produit extérieur : $(f \wedge T) \wedge (g \wedge T) = [f, g, T] T = \sin(F, G) T$, analogue de la formule usuelle du produit vectoriel. La proposition suivante est une autre justification de la définition :

5.4.13 Proposition. Soit abc un triangle. On oriente les droites $G = (ca)$ et $H = (ab)$. On a la formule $[a, b, c] = \overline{ca} \overline{ab} \sin(G, H)$, soit encore $\mathcal{A}(abc) = \frac{1}{2} \overline{ab} \overline{ac} \sin((ab), (ac))$.

Démonstration. On sait que les équations normalisées de G et H sont $\frac{c \wedge a}{\overline{ca}}$ et $\frac{a \wedge b}{\overline{ab}}$. On calcule alors, en utilisant 2.3.21 :

$$\sin(G, H) = \frac{1}{\overline{ca} \overline{ab}} [c \wedge a, a \wedge b, T] = \frac{[a, b, c]}{\overline{ca} \overline{ab}}$$

et on a le résultat. La dernière formule résulte de $\sin(H, G) = \sin(-G, H)$.

5.4.14 Proposition. Soient f, g, h trois formes linéaires normalisées correspondant à trois droites affines orientées F, G, H . On suppose que les droites forment un triangle abc (a, b, c étant les intersections de G, H ; H, F , et F, G respectivement). Alors on a la formule :

$$[f, g, h] = \overline{bc} \sin(H, F) \sin(F, G),$$

et les formules analogues obtenues par permutation circulaire.

Démonstration. On applique les propositions 5.4.11 et 5.4.13. Voir aussi 5.6.3 pour une autre formule.

5.5 Les théorèmes issus du premier théorème fondamental, versions affines

Nous passons maintenant aux traductions affines du premier théorème fondamental en termes de l'invariant aires. On verra la richesse extraordinaire que recèlent les quelques formules rappelées ci-dessus. On trouvera des versions "élémentaires" et des applications des résultats donnés ci-dessous dans [Per05].

5.5.1 Les formules de concomitants, versions affines

On suppose toujours qu'on a choisi une droite de l'infini d'équation T et qu'on a normalisé les points du plan affine par $t = 1$. On a d'abord la caractérisation du parallélisme :

5.5.1 Lemme. Soient a, b, c, d des points (normalisés) du plan affine avec $a \neq b$ et $c \neq d$ et D une droite affine d'équation f .

- 1) La droite D est parallèle à (ab) si et seulement si on a $f(a) = f(b)$.
- 2) Les droites (ab) et (cd) sont parallèles si et seulement si on a $[a, c, d] = [b, c, d]$, ou encore $[a, b, c] = [a, b, d]$.

Démonstration. Le point 1) a été vu en 5.4.4 où l'on a noté aussi que le parallélisme des droites d'équations f, g se traduit par $T(f \wedge g) = 0$. Pour le point 2), on a, par 2.3.19, $T((a \wedge b) \wedge (c \wedge d)) = T([a, c, d]b - [b, c, d]a) = [a, c, d] - [b, c, d]$. La deuxième variante vient de la formule $(c \wedge d) \wedge (a \wedge b) = [c, a, b]d - [d, a, b]c$, les deux formules étant liées par la relation fondamentale de dimension 2.5.1. On peut aussi utiliser le point 1) et la formule 2.3.23.1.

5.5.2 Corollaire. (Lemme du trapèze) Soient a, b, c, d quatre points du plan affine avec $a \neq b$ et $c \neq d$. Les droites (ab) et (cd) sont parallèles si et seulement si on a les égalités d'aires orientées $\mathcal{A}(abc) = \mathcal{A}(abd)$ ou encore $\mathcal{A}(bcd) = \mathcal{A}(acd)$.

Démonstration. En effet, on a vu que le crochet n'est autre que l'aire (orientée).

Pour des applications du lemme du trapèze, cf. [Per05].

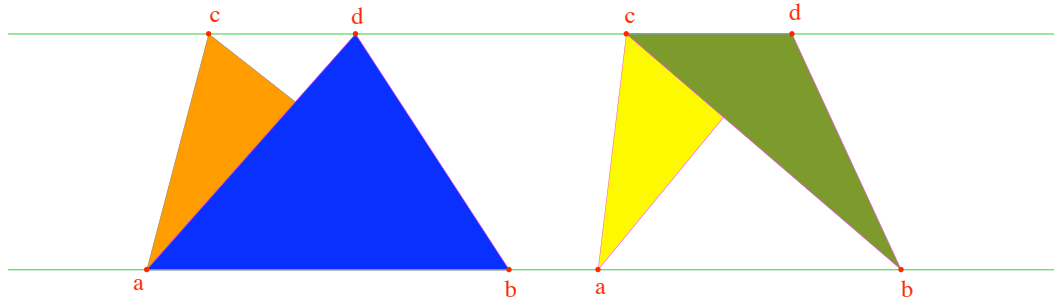


Figure 5.2: Les deux variantes du lemme du trapèze.

5.5.3 Remarques.

- 1) En appliquant le lemme du trapèze aux deux paires de côtés opposés d'un quadrilatère, on retrouve le lemme du "demi-parallélogramme" : si $abcd$ est un parallélogramme, on a $\mathcal{A}(abd) = \mathcal{A}(bcd)$ et $\mathcal{A}(abc) = \mathcal{A}(acd)$. Pour une réciproque, voir exercice 5.7.2.

2) Attention, pour la réciproque, le fait que les aires soient orientées est essentiel. La condition $\mathcal{A}(abc) = -\mathcal{A}(abd)$ signifie que la droite (ab) coupe (cd) en son milieu, voir 5.5.6.

5.5.2 Lemme des proportions, lemme du chevron

Le résultat principal sur les aires est une traduction des formules de double produit ou de produit mixte :

5.5.4 Proposition. *Soient a, b, c, d des points du plan affine. On suppose que a, d (resp. b, c) sont distincts et que (ad) coupe (bc) en a' . Supposons, par exemple, $a' \neq c$. On a la relation suivante : $\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} = \frac{\mathcal{A}(adb)}{\mathcal{A}(adc)}$. En particulier, on a $\frac{\mathcal{A}(adb)}{\mathcal{A}(adc)} = \frac{\mathcal{A}(aa'b)}{\mathcal{A}(aa'c)}$.*

Démonstration. Une première démonstration utilise l'équation $f = a \wedge d$ de (ad) . On a $\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} = \frac{f(b)}{f(c)}$ en vertu de 5.4.5. Mais, on a aussi $f(b) = (a \wedge d)(b) = [a, d, b]$ en vertu de 2.3.23.1 et, de même, $f(c) = [a, d, c]$, d'où le résultat.

Bien entendu, si on a $a' = c$, on considère le rapport inverse.

Une autre démonstration consiste à appliquer la formule du double produit 2.3.19 : $a' = (b \wedge c) \wedge (a \wedge d) = [b, a, d]c - [c, a, d]b$, puis la description de a' comme barycentre de b et c , cf. 5.3.4.

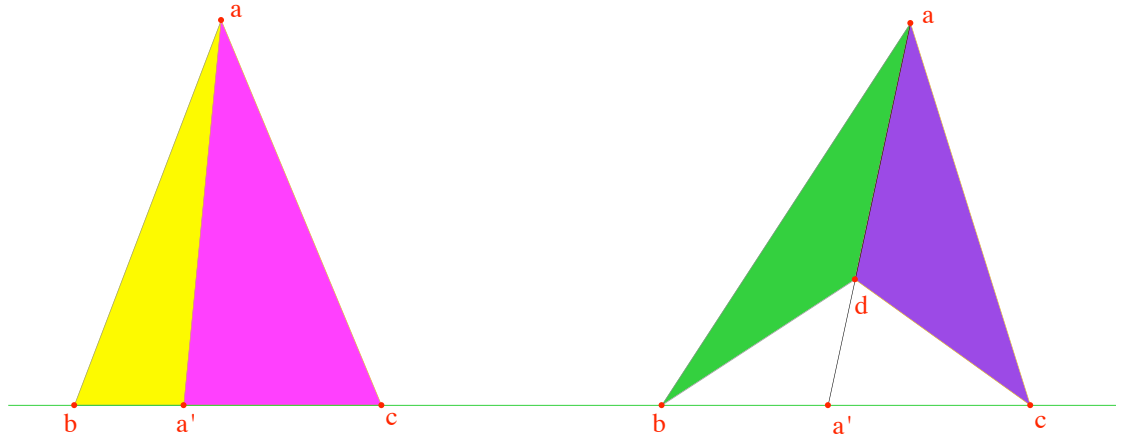


Figure 5.3: Lemme des proportions et lemme du chevron.

5.5.5 Remarque. Ce lemme est appelé lemme des proportions dans le cas où $d = a'$ est sur (bc) , lemme du chevron sinon (le nom fait référence au

cas où d est à l'intérieur du triangle abc , voir figure 5.3). En termes affines le lemme des proportions signifie que le rapport des aires de deux triangles ayant le même sommet a et des bases $[ba']$ et $[ca']$ portées par la même droite ne dépend pas de a . C'est clair si l'on pense à la formule $\text{base} \times \text{hauteur}/2$. Nous verrons que ce lemme est lié à la relation \mathcal{R}' . Il joue déjà un rôle essentiel dans la géométrie d'Euclide.

5.5.6 Corollaire. *On suppose que k n'est pas de caractéristique 2. Soit abc un triangle et d un point du plan. Le point d est sur la médiane de abc issue de a si et seulement si on a $\mathcal{A}(adb) = -\mathcal{A}(adc)$.*

Démonstration. Avec les notations de 5.5.4, si le point d est sur la médiane, a' est le milieu de $[bc]$ et on a $\frac{a'b}{a'c} = -1$, d'où le résultat. Réciproquement, le résultat est évident si d est égal à a . Supposons donc $d \neq a$. La droite (ad) n'est pas parallèle à (bc) . En effet, dans le cas contraire on aurait $\mathcal{A}(adb) = \mathcal{A}(adc)$ en vertu de 5.5.2, ce qui, comme la caractéristique de k est différente de 2, implique $\mathcal{A}(adb) = \mathcal{A}(adc) = 0$. Mais alors, d serait aligné à la fois avec a et b et avec a et c , donc serait en a . Si on note a' le point d'intersection de (bc) et (ad) , on conclut encore avec 5.5.4.

On retrouve ainsi la propriété de concours des médianes :

5.5.7 Corollaire. (Concours des médianes) *On suppose que k n'est pas de caractéristique 2. Les médianes d'un triangle sont parallèles si la caractéristique de k est 3 et sont concourantes sinon.*

Démonstration. Les milieux b' et c' des segments $[a, c]$ et $[a, b]$ sont respectivement $c + a$ et $a + b$, ou encore $\frac{c+a}{2}$ et $\frac{a+b}{2}$ en normalisant. En vertu de 5.5.2, dire que les médianes (bb') et (cc') sont parallèles signifie qu'on a $[b, c, c'] = [b', c, c']$, ce qui se traduit par la relation $2[b, c, a] = [a, c, b]$. Avec l'antisymétrie, on obtient $3[b, c, a] = 0$, ce qui, comme abc est un triangle, a lieu si et seulement si k est de caractéristique 3.

Si ce n'est pas le cas, on note g l'intersection des médianes (bb') et (cc') . On a donc $\mathcal{A}(cga) = -\mathcal{A}(cgb)$ et $\mathcal{A}(bga) = -\mathcal{A}(bgc)$ en vertu de 5.5.6. Par antisymétrie on en déduit $\mathcal{A}(cga) = -\mathcal{A}(bga)$, et g est aussi sur la médiane issue de a , toujours par 5.5.6, voir figure 5.4.

5.5.8 Remarque. On utilise en fait la relation issue de l'antisymétrie du crochet :

$$[a, g, b + c] + [b, g, c + a] + [c, g, a + b] = 0,$$

qui n'est autre que celle utilisée en 5.3.6 appliquée à g :

$$a \wedge (b + c) + b \wedge (c + a) + c \wedge (a + b) = 0.$$

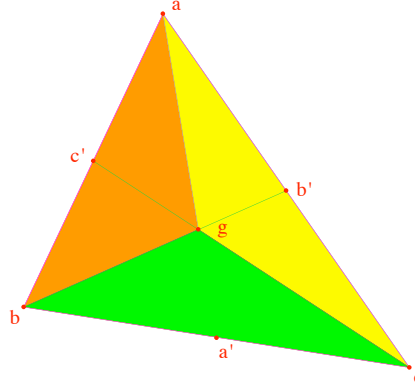


Figure 5.4: Les trois chevrons des médianes.

5.5.9 Corollaire. Soient a, b, c, d quatre points tels que les droites (ab) et (cd) soient parallèles et distinctes. On a $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}} = \frac{\mathcal{A}(acb)}{\mathcal{A}(acd)} = \frac{\mathcal{A}(abd)}{\mathcal{A}(cbd)}$.

Démonstration. Rappelons que les rapports de mesures algébriques sur des droites parallèles ont un sens pourvu qu'on prenne le même vecteur de base sur les droites vectorielles associées. Ici, on prend $a \wedge b$ comme équation et $(a \wedge b) \wedge T = b - a$ comme vecteur directeur de (ab) , de sorte qu'on a $\overline{ab} = 1$. Comme (cd) est parallèle à (ab) elle admet une équation g de la forme $a \wedge b + \lambda T$ et en appliquant cette équation à c , on trouve $g = a \wedge b - [a, b, c]T$. On prend $g \wedge T = b - a$ comme vecteur directeur de (cd) . La mesure algébrique \overline{cd} est alors définie par $c \wedge d = \overline{cd} g = \overline{cd}(a \wedge b - [a, b, c]T)$ (voir 5.3.2). En appliquant cette forme à a on trouve la première égalité. La seconde s'en déduit avec le lemme du trapèze.

5.5.10 Remarque. Il y a bien d'autres preuves de ce résultat, soit en utilisant une formule *base* \times *hauteur*, soit en considérant la parallèle à (ac) passant par b . Elle coupe (cd) en e , de sorte que $abec$ est un parallélogramme et on a donc $\overline{ab} = \overline{ce}$. On a aussi $\mathcal{A}(acb) = \mathcal{A}(ace)$ en vertu du lemme du trapèze. Le lemme des proportions donne alors $\frac{\overline{ce}}{\overline{cd}} = \frac{\mathcal{A}(ace)}{\mathcal{A}(acd)}$.

5.5.3 Le théorème de Thalès

Le théorème de Thalès est essentiellement issu de la formule $f \wedge (a \wedge b) = f(b)a - f(a)b$ par le biais de ses conséquences 5.4.5 et 5.5.1.

5.5.11 Proposition. (Théorème de Thalès) Soient A, B, C trois droites parallèles. Deux droites D, D' coupent respectivement A, B, C en $a, b, c; a', b', c'$.

On a la formule :

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{a'b'}}{\overline{a'c'}}.$$

Démonstration. Soit f une équation de A . En vertu de 5.4.5 on a $\frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} = \frac{f(b)}{f(c)}$ et $\frac{\overline{a'b'}}{\overline{a'c'}} = \frac{f(b')}{f(c')}$. Mais, comme $B = (bb')$ est parallèle à A on a $f(b) = f(b')$ en vertu de 5.5.1 et, de même, $f(c) = f(c')$. Le résultat s'ensuit.

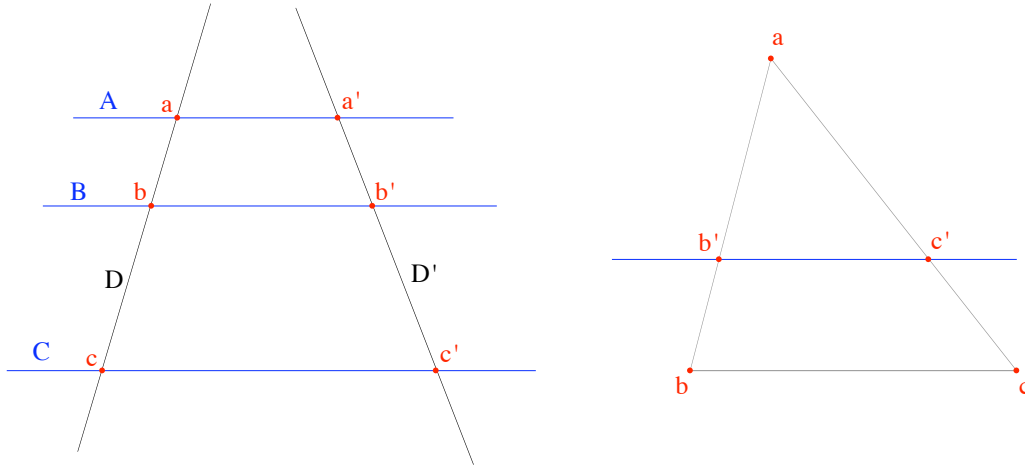


Figure 5.5: Le théorème de Thalès.

On a aussi la variante de Thalès dans le triangle :

5.5.12 Proposition. Soit abc un triangle et soient b', c' des points de (ab) et (ac) distincts de a . On suppose $(b'c')$ parallèle à (bc) . Alors on a :

$$\frac{\overline{ab'}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{ac'}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{b'c'}}{\overline{bc}}.$$

Démonstration. Seule la dernière égalité reste à prouver. En vertu de 5.5.9 on a :

$$\frac{\overline{b'c'}}{\overline{bc}} = \frac{\mathcal{A}(b'bc')}{\mathcal{A}(b'bc)} = \frac{[b', b, c']}{[b', b, c]} = \frac{(b' \wedge b)(c')}{(b' \wedge b)(c)} = \frac{\overline{ac'}}{\overline{ac}},$$

la dernière égalité venant de 5.4.5.

5.5.4 La condition générique de concours ou de parallélisme, ou le lemme du double chevron

L'interprétation affine des invariants permet de donner une condition universelle de concours ou de parallélisme pour trois droites quelconques du plan, chacune étant définie par deux points.

5.5.13 Proposition. Soient a, b, c, a', b', c' six points du plan affine. On suppose que les points a, a' (resp. b, b' , resp. c, c') sont distincts. Alors, les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles si et seulement si on a l'égalité $\mathcal{A}(aa'c) \times \mathcal{A}(bb'c') = \mathcal{A}(aa'c') \times \mathcal{A}(bb'c)$.

Démonstration. C'est une conséquence évidente de la relation vue en 2.3.23.3 :

$$[a \wedge a', b \wedge b', c \wedge c'] = [a, a', c][b, b', c'] - [a, a', c'][b, b', c].$$

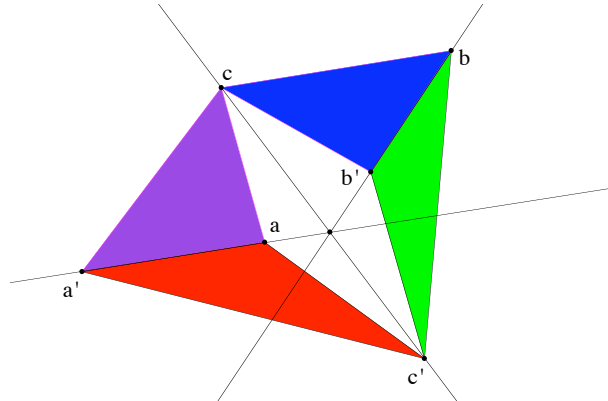


Figure 5.6: Le lemme du double chevron.

On se reportera aux exercices 5.7.3, 5.7.4, 5.7.5 pour d'autres preuves et l'application de cette formule au théorème de Ceva.

5.5.5 Deux droites et deux points

Dans ce paragraphe, on travaille dans un plan affine réel euclidien orienté. Rappelons que si D est une droite orientée, d'équation f normalisée, elle a un vecteur normal canonique et que, si a est un point du plan, $f(a)$ s'interprète comme la distance orientée $d(a, D)$ (comptée positivement si a est dans le demi-plan contenant le vecteur normal à D). On a alors :

5.5.14 Proposition. Soient F, G deux droites orientées et a, b deux points distincts. Les droites $F, G, (ab)$ sont parallèles ou concourantes si et seulement si on a $d(a, F)d(b, G) = d(a, G)d(b, F)$.

Démonstration. C'est une conséquence de la relation $[f \wedge g \wedge (a \wedge b)] = f(a)g(b) - f(b)g(a)$, cf. 2.3.23.2.

5.5.15 Remarques.

1) Dans le cas présent, le fait que la distance soit orientée revient à dire que a et b sont dans la même position par rapport à F et G i.e. dans la même composante connexe du complémentaire de $F \cup G$.

2) Si on note a', b' et a'', b'' les projetés orthogonaux de a, b sur F et G respectivement, la relation n'est autre que $\frac{\overline{aa'}}{\overline{bb'}} = \frac{\overline{aa''}}{\overline{bb''}}$ que l'on peut prouver en utilisant une homothétie si F et G se coupent, et une translation sinon.

5.6 Les théorèmes issus du second théorème fondamental

5.6.1 Relation fondamentale de dimension, relation \mathcal{S} , additivité des aires et barycentres

La relation fondamentale de dimension (voir 2.5.1) est la formule :

$$[a, b, c]d = [b, c, d]a + [c, a, d]b + [a, b, d]c.$$

Elle a pour conséquence la relation \mathcal{S} :

$$[a, b, c]f(d) = [b, c, d]f(a) + [c, a, d]f(b) + [a, b, d]f(c)$$

(où f désigne une forme linéaire quelconque). L'interprétation affine la plus simple de \mathcal{S} est l'additivité des aires :

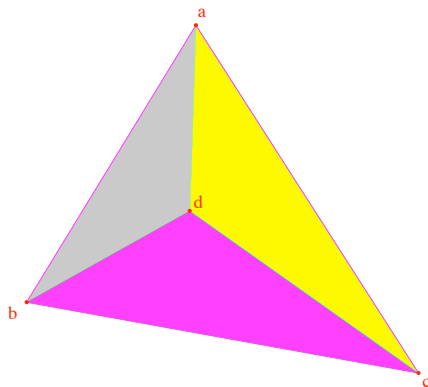


Figure 5.7: Additivité des aires.

5.6.1 Proposition. *On considère quatre points normalisés a, b, c, d du plan affine. On a l'égalité d'aires algébriques $\mathcal{A}(abc) = \mathcal{A}(bcd) + \mathcal{A}(cad) + \mathcal{A}(abd)$.*

Démonstration. C'est la relation \mathcal{S} appliquée en prenant $f = T$. On prendra garde à l'orientation des triangles, bien entendu, mais on obtient, en particulier, le cas naturel où le point d est à l'intérieur du triangle abc .

La relation fondamentale de dimension peut alors être formulée en termes d'aires et de barycentres :

5.6.2 Proposition. Soient a, b, c, d quatre points normalisés du plan affine avec a, b, c non alignés. Le point d est barycentre des points a, b, c affectés des coefficients $\mathcal{A}(bcd)$, $\mathcal{A}(cad)$, $\mathcal{A}(abd)$ (il s'agit toujours des aires algébriques).

Démonstration. C'est exactement la relation fondamentale :

$$\mathcal{A}(abc)d = \mathcal{A}(bcd)a + \mathcal{A}(cad)b + \mathcal{A}(abd)c.$$

(On notera que le coefficient de d est bien la somme de ceux de a, b, c .)

Avec structure euclidienne, la formule de dimension duale donne une autre description du crochet de trois formes :

5.6.3 Proposition. Soient f, g, h trois formes normalisées (cf. 5.4.3) et F, G, H les droites orientées associées. On suppose que G et H se coupent en a (normalisé). On a la formule $[f, g, h] = d(a, F) \sin(G, H)$.

Démonstration. Il suffit d'écrire la formule de dimension :

$$[f, g, h]T = [g, h, T]f + [h, f, T]g + [f, g, T]h,$$

de l'appliquer au point a et d'utiliser 5.4.7 et 5.4.12.

5.6.2 La relation $\mathcal{R}'(a, b, c, d; x, y)$, version affine

Rappelons qu'il s'agit de la relation :

$$[b, c, d][a, x, y] - [a, c, d][b, x, y] + [a, b, d][c, x, y] - [a, b, c][d, x, y] = 0.$$

Cette relation donne une variante du lemme des proportions :

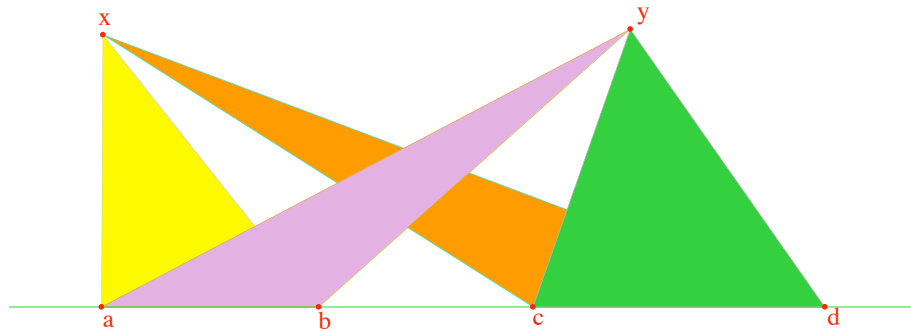


Figure 5.8: Le lemme général des proportions.

5.6.4 Proposition. (Lemme des proportions, variante) Soient a, b, c, d, x, y des points de X . On suppose que les points a, b, c, d sont alignés. Alors le rapport d'aires $\frac{\mathcal{A}(xab)}{\mathcal{A}(xcd)}$ (éventuellement infini) est le même pour x et pour y , donc indépendant du choix de x .

Démonstration. Dans la relation $\mathcal{R}'(y, x, a, b; c, d)$ les termes $[a, c, d]$ et $[b, c, d]$ sont nuls et il reste $[x, a, b][y, c, d] - [y, a, b][x, c, d] = 0$, d'où le résultat.

5.6.5 Remarques.

1) La formule $\frac{\mathcal{A}(adb)}{\mathcal{A}(adc)} = \frac{\mathcal{A}(aa'b)}{\mathcal{A}(aa'c)}$, donnée en 5.5.4 comme conséquence du lemme des proportions correspond à la variante de \mathcal{R}' “sur cinq points” (cf. 3.1.11) :

$$[a, a', b][a, c, d] + [a, a', c][a, d, b] + [a, a', d][a, b, c] = 0.$$

2) Bien entendu, 5.5.4 redonne 5.6.4 (il suffit de passer par l'intermédiaire du triangle xac par exemple). Cela correspond au fait que les formules 2.3.23 donnent la relation \mathcal{R}' (cf. 2.3.24).

5.6.3 D'autres applications de la relation \mathcal{S}

Gergonne

Avec 4.3.2 (ou avec la formule d'additivité des aires 5.6.1) on obtient le théorème de Gergonne affine :

5.6.6 Corollaire. (Gergonne affine) Soit abc un triangle et d un point non situé sur les côtés (tous ces points sont supposés normalisés). Les droites $(ad), (bd), (cd)$ coupent respectivement $(bc), (ca), (ab)$ en a', b', c' . Alors, on a la relation :

$$\frac{\overline{a'd}}{\overline{a'a}} + \frac{\overline{b'd}}{\overline{b'b}} + \frac{\overline{c'd}}{\overline{c'c}} = 1.$$

Aires et distances

Avec les données métriques supplémentaires introduites au paragraphe 5.4.3, on a le joli résultat suivant :

5.6.7 Proposition. Soit $abcd$ un quadrilatère du plan euclidien X et soit D une droite (orientée) quelconque. On désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les distances

(orientées¹⁰) de a, b, c, d à D . On a la formule :

$$\alpha \mathcal{A}(bcd) - \beta \mathcal{A}(acd) + \gamma \mathcal{A}(abd) - \delta \mathcal{A}(abc) = 0.$$

Démonstration. Soit f une équation normalisée de D . La distance orientée d'un point m à D est alors $f(m)$ en vertu de 5.4.7 et la formule n'est autre que la relation \mathcal{S} .

5.6.4 La relation \mathcal{T} ou la formule des deux triangles

5.6.8 Proposition. Soient $a, b, c; p, q, r$ six points du plan affine. On a la formule (en aires algébriques) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(abc)\mathcal{A}(pqr)^2 = & \mathcal{A}(qra)\mathcal{A}(rpb)\mathcal{A}(pqc) + \mathcal{A}(qrb)\mathcal{A}(rpc)\mathcal{A}(pqa) + \mathcal{A}(qrc)\mathcal{A}(rpa)\mathcal{A}(pqb) \\ & - \mathcal{A}(qrc)\mathcal{A}(rpb)\mathcal{A}(pqa) - \mathcal{A}(qrb)\mathcal{A}(rpa)\mathcal{A}(pqc) - \mathcal{A}(qra)\mathcal{A}(rpc)\mathcal{A}(pqb). \end{aligned}$$

Démonstration. Si on pose $f = q \wedge r$, $g = r \wedge p$ et $h = p \wedge q$, la formule ci-dessus n'est autre que la relation \mathcal{T} :

$$\begin{aligned} [f, g, h][a, b, c] = & f(a)g(b)h(c) + f(b)g(c)h(a) + f(c)g(a)h(b) \\ & - f(c)g(b)h(a) - f(b)g(a)h(c) - f(a)g(c)h(b). \end{aligned}$$

5.6.9 Remarque. Quelques clés pour décrypter cette mystérieuse formule : il y a deux triangles, abc et pqr , le second comptant double. Les autres triangles sont tous obtenus en prenant un côté de pqr avec un sommet de abc , il y en a trois types à permutation près et on les compte avec un signe $+$ si l'on prend les trois de même types ou avec un signe $-$ si l'on prend les trois de types différents.

5.6.5 Encore une formule d'aire du triangle

Dans le cadre métrique, on a, avec la relation \mathcal{T} , une formule d'aire du triangle :

5.6.10 Proposition. Soit abc un triangle du plan affine euclidien, D une droite (orientée) et a', b', c' les projetés orthogonaux de a, b, c sur D . On note $\overline{a'a}$, etc. les distances orientées de a, b, c à D et $\overline{a'b'}$, etc. les distances orientées sur D . On a la formule :

$$2\mathcal{A}(abc) = \overline{b'c'} \times \overline{a'a} + \overline{c'a'} \times \overline{b'b} + \overline{a'b'} \times \overline{c'c}.$$

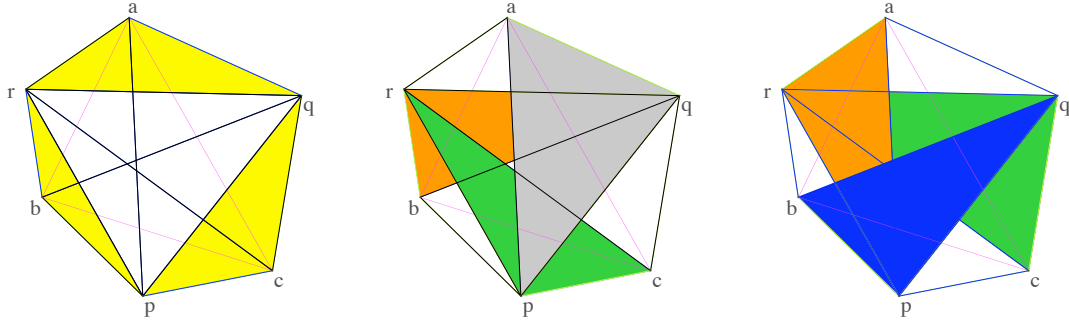


Figure 5.9: Les trois types de triangles

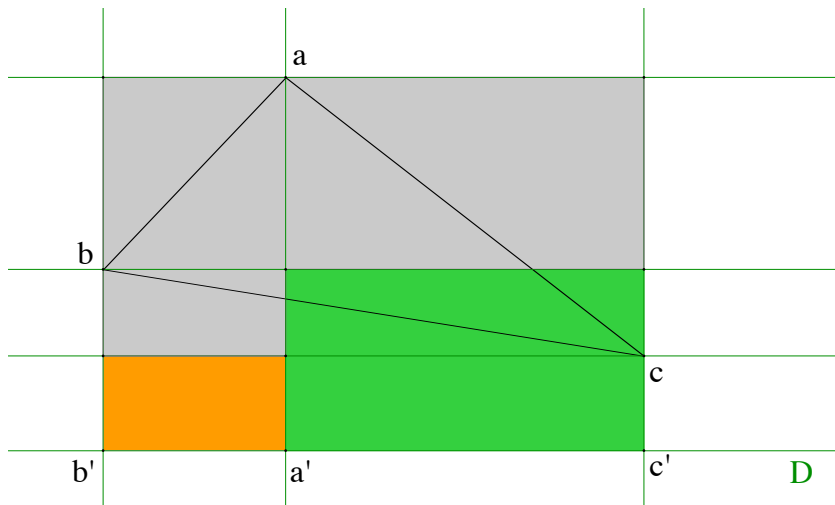


Figure 5.10: L'aire du triangle est la moitié de l'aire grisée.

Démonstration. Soit $f = uX + vY + w$ l'équation (normalisée) de l'axe D , $g = vX - uY$ celle d'une droite perpendiculaire¹¹, h celle de la droite de l'infini. On a alors $\overline{a'a} = f(a)$ et les formules analogues pour b et c , $\overline{a'b'} = g(b) - g(a)$ (cf. 5.4.7 et 5.4.9) et les formules analogues par permutation. Par ailleurs, on a $[f, g, h] = -1$ et on applique la relation \mathcal{T} :

$$[f, g, h][a, b, c] = f(a)g(b)h(c) + f(b)g(c)h(a) + f(c)g(a)h(b) \\ - f(c)g(b)h(a) - f(b)g(a)h(c) - f(a)g(c)h(b).$$

Comme on a $h(a) = h(b) = h(c) = 1$, on obtient la formule :

$$[a, b, c] = f(a)(g(c) - g(b)) + f(b)(g(a) - g(c)) + f(c)(g(b) - g(a)).$$

¹⁰Rappelons en particulier que, si les quatre points sont dans le même demi-plan limité par D , tous les signes sont les mêmes.

¹¹Attention aux orientations. Le mieux pour être sûr d'écrire une formule juste est encore de regarder la figure !

C'est exactement la relation voulue.

5.6.11 Remarques.

- 1) Si on prend pour D la droite (bc) , on trouve exactement la formule $base \times hauteur/2$ (orientée).
- 2) La formule ci-dessus redonne aisément le résultat de 5.6.7.

5.7 Exercices

5.7.1 Barycentres

5.7.1 Exercice. C'est vache les tiers, 1

Cet exercice m'a été communiqué par Michèle Artigue.

On suppose le corps k de caractéristique différente de 2, 3, 5. On considère un triangle abc du plan affine. On partage les côtés $[b, c]$; $[c, a]$; $[a, b]$ du triangle en trois parties égales par des points a', a'' ; b', b'' ; c', c'' (dans cet ordre¹²). Soient i, j, k les points d'intersection de (bb') et (cc'') , (cc') et (aa'') , (aa') et (bb'') respectivement. Montrer que l'isobarycentre de ijk est le même que celui de abc . Étudier les cas de caractéristique 2, 3, 5.

(On écrira les tiers sous la forme $b' = 2c + a$, etc. et on montrera qu'on a $i = a + 2b + 2c$ et les formules analogues pour j et k . On peut aussi écrire les équations des droites, par exemple pour (aa') : $2(a \wedge b) + a \wedge c$ et utiliser la formule du double produit.)

5.7.2 Aires et théorèmes affines

5.7.2 Exercice. On se propose de montrer une réciproque du lemme du "demi-parallélogramme", cf. remarque 5.5.3. Soient a, b, c, d quatre points du plan affine tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. On suppose qu'on a les relations sur les aires (orientées) :

$$(*) \quad \mathcal{A}(abd) = \mathcal{A}(bcd) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(abc) = \mathcal{A}(acd).$$

1) On suppose que la caractéristique de k est différente de 2. Montrer que les droites (ac) et (bd) ne sont pas parallèles. Soit o leur point d'intersection. Montrer qu'on a $\mathcal{A}(abc) = \mathcal{A}(abo) + \mathcal{A}(bco)$ (utiliser 5.6.1). En utilisant les relations analogues avec les autres triangles, montrer les égalités $\mathcal{A}(abo) = \mathcal{A}(cdo)$ et $\mathcal{A}(bco) = \mathcal{A}(dao)$. En déduire que $abcd$ est un parallélogramme.

¹²Cela signifie par exemple qu'on a $\overrightarrow{ba'} = \overrightarrow{a'a''} = \overrightarrow{a''c}$.

2) On suppose que k est de caractéristique 2. Montrer que, si les droites (ac) et (bd) sont parallèles, on a les relations $(*)$. Réciproquement, montrer que si l'on a $(*)$, alors les droites (ac) et (bd) sont parallèles (ce qui est le cas, en particulier, si $abcd$ est un parallélogramme!).

5.7.3 Exercice. On reprend la situation du lemme du double chevron 5.5.13.

1) On suppose les droites (aa') , (bb') , (cc') concourantes. Montrer la formule de 5.5.13 en utilisant deux fois le lemme du chevron 5.5.4.

2) On suppose les droites (aa') , (bb') , (cc') parallèles. Montrer la formule de 5.5.13 en utilisant deux fois le lemme du trapèze 5.5.2.

3) Établir la réciproque.

5.7.4 Exercice. Montrer le lemme du double chevron dans le plan euclidien en utilisant la formule $base \times hauteur$. (On suppose par exemple que les droites $A = (aa')$, $B = (bb')$ se coupent en o . On regarde les projetés α, β (resp α', β') de c (resp. c') sur A et B . Alors (cc') passe par o si et seulement si on a $\frac{\overline{c\alpha}}{c'\alpha'} = \frac{\overline{c\beta}}{c'\beta'}$ comme on le voit en considérant l'homothétie de centre o qui envoie c sur c' .)

5.7.5 Exercice. Soit abc un triangle et a', b', c' des points, distincts de a, b, c , et situés sur les droites (bc) , (ca) , (ab) respectivement. Montrer le théorème de Ceva (les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles si et seulement si on a $\frac{\overline{a'b}}{a'c} \times \frac{\overline{b'c}}{b'a} \times \frac{\overline{c'a}}{c'b} = -1$) en utilisant le lemme du double chevron 5.5.13. (On montrera les relations :

$$\frac{\mathcal{A}(aa'c)}{\mathcal{A}(aa'c')} = \frac{\overline{a'c}}{a'b} \times \frac{\overline{ab}}{ac'} \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{A}(bb'c)}{\mathcal{A}(bb'c')} = \frac{\overline{b'c}}{b'a} \times \frac{\overline{ba}}{bc'}.)$$

5.7.6 Exercice. C'est vache les tiers, 2

Soit abc un triangle du plan affine et soient a', b', c' les points situés respectivement sur les côtés $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$, au tiers à partir de b, c, a . On appelle p l'intersection de (bb') et (cc') et de même q, r par permutation circulaire. Calculer l'aire de pqr en fonction de celle de abc . Étudier les cas des caractéristiques 2, 3, 7. (Indication : on normalise a, b, c , on a $a' = 2b + c$, etc. puis $b \wedge b' = 2(b \wedge c) + (b \wedge a)$, etc. La formule du double produit donne en normalisant $p = \frac{1}{7}(2a + b + 4c)$, etc. On en déduit $[p, q, r] = \frac{1}{7}[a, b, c]$.)

5.7.7 Exercice. Le théorème de Pépé Marcel Soit abc un triangle et a', b', c' des points situés respectivement sur les droites (bc) , (ca) , (ab) . On

appelle u, v, w les points d'intersection de $(bc), (b'c')$; $(ca), (c'a')$; $(ab), (a'b')$ respectivement et on suppose u, v, w alignés¹³. Montrer qu'on a l'égalité :

$$\mathcal{A}(ubc')^2 \mathcal{A}(va'b')^2 \overline{ua'} \cdot \overline{ub'} \cdot \overline{va} \cdot \overline{vc'} \cdot \overline{ac'} = \mathcal{A}(ua'b')^2 \mathcal{A}(vac')^2 \overline{ub} \cdot \overline{uc'} \cdot \overline{bc'} \cdot \overline{va'} \cdot \overline{vb'}.$$

(Poser $f = b \wedge c$, $f' = b' \wedge c'$, $g = c \wedge a$, $g' = c' \wedge a'$, $h = a \wedge b$ et $h' = a' \wedge b'$ et calculer $[f \wedge f', g \wedge g', h \wedge h'] = [f, f', h] [g, g', h'] = [f, f', h'] [g, g', h]$ en utilisant 5.4.11.)

Montrer directement le résultat. (On montrera d'abord $\frac{\mathcal{A}(ua'b')}{\mathcal{A}(va'b')} = \frac{\overline{uw}}{\overline{vw}}$ puis

$$\frac{\mathcal{A}(ubc')}{\mathcal{A}(vac')} = \frac{\mathcal{A}(ubc')}{\mathcal{A}(vbc')} \times \frac{\mathcal{A}(vbc')}{\mathcal{A}(vac')} = \frac{\overline{uw}}{\overline{vw}} \times \frac{\overline{bc'}}{\overline{ac'}}$$

en utilisant les lemmes du chevron et des proportions puis on appliquera deux fois Ménélaus, d'abord avec le triangle $a'bc'$ puis avec $b'ac'$ et toujours la transversale (uvw) . On conclura avec la construction de la polaire de a par rapport à (uc') et (uw) .)

¹³En vertu de 4.3.8, on sait que cela équivaut à (aa') , (bb') , (cc') concourantes.

Chapitre 6

Preuve des théorèmes fondamentaux

Ce chapitre a pour objectif de prouver les théorèmes fondamentaux énoncés au chapitre 3. Le lecteur est averti que ce chapitre est beaucoup plus technique que les autres et surtout beaucoup plus algébrique, mais la preuve des théorèmes est à ce prix et elle est loin d'être triviale.

Les outils essentiels de ce chapitre sont les opérations de polarisation et les célèbres, mais néanmoins mystérieuses, identités de Capelli. On reprend ici toutes les notations du chapitre 3.

Rappelons qu'on suppose le corps k de **caractéristique zéro**, donc infini.

6.1 Polarisations

Ce paragraphe est tout entier destiné à prouver l'identité de Capelli qui va jouer un rôle essentiel dans la preuve des deux théorèmes fondamentaux.

6.1.1 Dérivations

6.1.1 Définition. Soient k un anneau commutatif, R une k -algèbre (commutative) et M un R -module. Une application $D : R \rightarrow M$ est appelée une **k -dérivation** si c'est une application k -linéaire qui vérifie pour tous $x, y \in R$: $D(xy) = xD(y) + yD(x)$.

6.1.2 Remarque. Si D_1, \dots, D_n sont des dérivations et a_1, \dots, a_n des éléments de R , il est clair que $D = \sum_{i=1}^n a_i D_i$ est une dérivation.

6.1.3 Exemples.

1) Si R est l'anneau des polynômes $k[X_i]_{(i \in I)}$, où I désigne un ensemble fini, l'application définie par $D(P) = \frac{\partial P}{\partial X_i}$ est une k -dérivation de R dans R qui envoie X_i sur 1 et les autres variables sur 0.

2) Plus généralement, si on se donne des polynômes $Q_i \in R$, il existe une unique k -dérivation de R dans R qui vérifie $D(X_i) = Q_i \in R$ pour tout i . Elle est donnée par la formule :

$$D(P) = \sum_{i \in I} Q_i \frac{\partial P}{\partial X_i}.$$

En effet, cela résulte de 6.1.2.

6.1.2 Déterminants

Dans ce qui suit nous aurons besoin de calculer des déterminants dans un anneau non commutatif, essentiellement dans l'anneau des matrices ou des opérateurs linéaires :

6.1.4 Définition. Soit Λ un anneau non nécessairement commutatif et soit $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times n$ à coefficients dans Λ . Le déterminant de A est défini par la formule :

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ .

La formule $\det(AB) = \det A \det B$ n'est pas vraie en général dans un tel cadre. On a cependant :

6.1.5 Proposition. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{kl})$ deux matrices $n \times n$ à coefficients dans Λ . On suppose que tous les coefficients a_{ij} et b_{kl} commutent. Alors on a $\det(AB) = \det A \det B$.

Plus généralement, pour des matrices rectangulaires, on a le résultat suivant :

6.1.6 Proposition. (Formule de Cauchy-Binet) Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{kl})$ deux matrices de tailles respectives $p \times n$ et $n \times p$ à coefficients dans Λ . On suppose que tous les coefficients a_{ij} et b_{kl} commutent. On a la formule suivante :

$$\det AB = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \det A_{j_1, \dots, j_p} \det B^{j_1, \dots, j_p}$$

où A_{j_1, \dots, j_p} (resp. B^{j_1, \dots, j_p}) désigne la matrice carrée extraite de A (resp. B) formée des colonnes (resp. des lignes) d'indices j_1, \dots, j_p .

Voir [Gan66], tome I, page 9.

6.1.3 Polarisation

Dans toute la suite, δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker qui vaut 1 pour $i = j$ et 0 sinon.

L'opération de polarisation que nous introduisons maintenant est une dérivation sur les polynômes qui généralise l'opération bien connue qui fait passer d'une forme quadratique, disons $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, à sa forme polaire $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Techniquement, l'objectif de cette opération est de faire régresser un polynôme dans un ordre de type lexicographique en diminuant le degré de certaines variables (ici les x_i) et en augmentant celui d'autres (ici les y_i).

Nous avons choisi de donner une définition assez générale et un peu formelle des polarisations. Cette définition s'applique essentiellement dans le cadre des anneaux intervenant dans les deux théorèmes fondamentaux. L'intérêt de cette définition générale est qu'elle permet de donner une seule preuve de l'identité de Capelli qui apparaît sous deux formes différentes dans les deux théorèmes.

L'anneau

Soit n un entier. On considère un anneau de polynômes $U = k[X_{i_1, \dots, i_n}]$ où pour chaque k l'indice i_k varie dans un ensemble fini I_k , les ensembles I_k pouvant être éventuellement égaux. Nous utiliserons plusieurs exemples de tels anneaux :

1) L'anneau $R = k[x_{i,j}]$ avec $i \in I$ et $j = 1, 2, 3$ du premier théorème fondamental que l'on écrira souvent $R = k[a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \dots]$ avec $a, b, \dots \in \mathcal{A}$. Dans ce cas il y a deux ensembles I_k distincts, l'ensemble $I = I_1$ et l'ensemble $I_2 = \{1, 2, 3\}$. Dans la deuxième variante, on identifie $I = I_1$ à $\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots\}$ et la notation pour a_i devient $X_{a,i}$.

2) L'anneau $U = k[X_{i,j,k}]$, avec $1 \leq i, j, k \leq m$ du second théorème fondamental. Dans ce cas on a $I_1 = I_2 = I_3 = \{1, 2, \dots, m\}$.

3) Les variantes obtenues à partir de R et U par dédoublement, cf. ci-dessous.

Les polarisations

Si a et b sont deux indices appartenant à un même ensemble I_p on définit une k -dérivation $D_{ab} : U \rightarrow U$ appelée **polarisation** en posant

$$D_{ab}(X_{i_1, \dots, i_n}) = \sum_k \delta_{b, i_k} X_{i_1, \dots, i_{k-1}, a, i_{k+1}, \dots, i_n},$$

la somme étant étendue à tous les $k \in \{1, \dots, n\}$ tels que $I_k = I_p$. Pour dire les choses plus simplement, on remplace, dans les variables qui le contiennent, l'indice b par a et ce, autant de fois qu'il apparaît, aux diverses places possibles.

La formule vue en 6.1.3 donne :

$$(\sharp) \quad D_{ab}(P) = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \sum_{k=1}^n \delta_{b, i_k} X_{i_1, \dots, i_{k-1}, a, \dots, i_n} \frac{\partial P}{\partial X_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k, \dots, i_n}}.$$

6.1.7 Remarques.

- 1) L'opération de polarisation n'est évidemment pas symétrique en a, b .
- 2) Si le polynôme F ne fait pas intervenir l'indice b on a $D_{ab}(F) = 0$. Plus précisément, les monômes qui ne contiennent pas l'indice b ont pour image 0 par D_{ab} .

6.1.8 Exemples.

- 1) Dans le cas de l'anneau R du premier théorème fondamental il est commode d'utiliser la notation avec a, b etc. Si a et b sont les vecteurs x_1 et x_2 on écrira donc D_{ab} au lieu de $D_{1,2}$. On a ainsi :

$$D_{ab}(F) = a_1 \frac{\partial F}{\partial b_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial b_2} + a_3 \frac{\partial F}{\partial b_3}.$$

En particulier, si on part de $F = b_1^2 b_2 b_3 c_2^3$, on a $D_{ab}(F) = 2b_1 b_2 b_3 c_2^3 a_1 + b_1^2 b_3 c_2^3 a_2 + b_1^2 b_2 c_2^3 a_3$. Si $\varphi(a, b)$ est une forme bilinéaire symétrique et $q(a) = \varphi(a, a)$ la forme quadratique associée on a $D_{ba}(q(a)) = 2\varphi(a, b)$.

- 2) Dans le cas de l'anneau U du deuxième théorème fondamental on a, par exemple, $D_{ab}(X_{i,b,k}) = X_{i,a,k}$ si i et k sont différents de b , $D_{ab}(X_{b,b,k}) = X_{a,b,k} + X_{b,a,k}$ si k est distinct de b .

Commutation

Avec la formule (\sharp) on obtient, sans autre difficulté que la lourdeur de l'écriture, la proposition suivante :

6.1.9 Proposition. (Règle de commutation) *Soient a, b, c, d des indices avec a, b (resp. c, d) dans le même I_p . On suppose $a \neq d$ et $b \neq c$. Alors, on a $D_{ab} \circ D_{cd} = D_{cd} \circ D_{ab}$.*

6.1.4 Dédoublément

Définition

On considère de nouveau l'anneau $U = k[X_{i_1, \dots, i_n}]$ où i_k est dans l'ensemble fini I_k . Nous allons introduire un nouvel anneau U' obtenu à partir de U par dédoublement de certains indices. Cette opération a pour but de surmonter les difficultés dues à la non commutativité des opérations de polarisation, voir ci-dessous 6.1.10.

On fixe un entier $r \leq n$. On pose : $U' = k[X_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}]$ avec $\alpha_k \in I'_k$, I'_k étant égal à $I_k \times \{0, 1\}$ (pour $i = 1, \dots, r$) ou à I_k (pour $k > r$). Pour $k \leq r$ on a donc deux sortes d'indices α_k , des indices de la forme $(i, 0)$ que l'on notera simplement i et des indices de la forme $(i, 1)$ qui seront notés i' . à côté des anciennes indéterminées $X_{a,b,c,\dots}$ on en a donc de nouvelles de la forme $X_{a,b',c,\dots}$, par exemple.

On dispose d'une part des injections naturelles des I_k dans I'_k (en identifiant i à $(i, 0)$) et d'autre part des applications, notées π_k (ou π par abus de langage), de I'_k sur I_k qui sont les projections sur le premier facteur pour $k \leq r$ et l'identité pour $k > r$. Ces applications consistent simplement à "oublier les primes s'il y en a".

Aux applications précédentes correspondent deux homomorphismes entre U et U' . D'une part une injection naturelle de U dans U' comme le sous-anneau des variables sans prime, d'autre part l'homomorphisme $\varphi : U' \rightarrow U$ qui consiste "à oublier les primes" : l'image d'une indéterminée $X_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ avec $\alpha_k \in I'_k$ est $X_{\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_n)}$. Bien entendu, φ induit l'identité sur U .

Exemples

Décrivons l'opération dans le cas de nos deux exemples fondamentaux :

1) L'anneau obtenu par dédoublement à partir de $R = k[a_1, a_2, a_3, \dots]$ en prenant $r = 1$ est l'anneau $R' = k[a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_2, a'_3, b_1, b_2, b_3, b'_1, b'_2, b'_3, \dots]$. Dans ce cas on dédouble seulement les indices de l'alphabet $I_1 = \mathcal{A}$ (les a, b , etc.) mais pas les indices 1, 2, 3 de I_2 .

2) L'anneau obtenu par dédoublement à partir de $U = k[X_{i,j,k}]$, avec $1 \leq i, j, k \leq m$, en prenant $r = 3$ (donc en dédoublant tous les I_k) contient des variables du type $X_{i,j',k}$ ou $X_{i',j',k}$, etc..

Quelques formules

Les formules qui suivent sont l'ingrédient principal de l'identité de Capelli :

6.1.10 Proposition. *On a les formules suivantes :*

1) *Pour tout $Q \in U'$ et tous $a, b \in I_p$ avec $p \leq r$ on a*

$$D_{ab}(\varphi(Q)) = \varphi(D_{a'b}(Q)) + \varphi(D_{ab'}(Q)).$$

2) *Pour tout $Q \in U'$ et tous $a, b \in I_p$ avec $p \leq r$ on a $\varphi(D_{ab}(Q)) = \varphi(D_{a'b}(Q))$.*

3) *Si $Q \in U'$ ne fait pas intervenir l'indice b' , on a, pour $a, b, c, d \in I_p$ avec $p \leq r$, $D_{ab'}D_{c'd}(Q) = \delta_{bc}D_{ad}(Q)$ où δ_{bc} désigne le symbole de Kronecker.*

Commentaire La condition “ a, b dans le même I_p ” est nécessaire pour qu'on puisse parler de la polarisation D_{ab} , la condition $p \leq r$ pour qu'on puisse “mettre des primes” à a et b .

Démonstration. Pour prouver les deux premières formules il suffit de les vérifier sur les indéterminées X_i . En effet, les composés $D \circ \varphi$ et $\varphi \circ D$ sont des dérivations de U' dans U (U étant considéré comme un U' -module via φ). Elles donc déterminées par leurs valeurs sur les X_i . Montrons par exemple la première formule pour $Q = X_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ où α_k est dans I'_k . On a $\varphi(Q) = X_{\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_n)}$, puis

$$D_{ab}(\varphi(Q)) = \sum_{k=1}^n \delta_{b, \pi(\alpha_k)} X_{\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_{k-1}), a, \dots, \pi(\alpha_n)}.$$

Par ailleurs, on a $D_{a'b}(Q) = \sum_{k=1}^n \delta_{b, \alpha_k} X_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, a', \dots, \alpha_n}$ d'où

$$\varphi(D_{a'b}(Q)) = \sum_{k=1}^n \delta_{b, \alpha_k} X_{\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_{k-1}), a, \dots, \pi(\alpha_n)}$$

et $D_{ab'}(Q) = \sum_{k=1}^n \delta_{b', \alpha_k} X_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, a, \dots, \alpha_n}$ d'où

$$\varphi(D_{ab'}(Q)) = \sum_{k=1}^n \delta_{b', \alpha_k} X_{\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_{k-1}), a, \dots, \pi(\alpha_n)}.$$

La formule cherchée résulte alors de l'égalité évidente $\delta_{b, \pi(\alpha_k)} = \delta_{b, \alpha_k} + \delta_{b', \alpha_k}$ qui se voit en distinguant deux cas selon que α_k est avec ou sans prime.

Pour la formule 3) il faut être un peu plus prudent car la composée de deux dérivations n'en est pas une en général, mais il suffit de noter le lemme suivant :

6.1.11 Lemme. Soient D_1, D_2 deux k -dérivations de l'anneau R' . On suppose D_1 nulle sur un sous-anneau $R \subset R'$. Alors $D_1 \circ D_2$ restreinte à R est une dérivation.

La preuve du lemme est immédiate. En effet, on a, en général, la formule :

$$D_1 D_2(PQ) = P D_1 D_2(Q) + Q D_1 D_2(P) + D_1(P) D_2(Q) + D_1(Q) D_2(P)$$

mais les deux derniers termes disparaissent puisque D_1 est nulle sur R .

On peut maintenant finir de prouver 6.1.10. Comme $D_{ab'}$ est nulle sur le sous-anneau engendré par les variables qui ne font pas intervenir b' , il suffit alors de prouver 3) sur les indéterminées $X_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$, avec $\alpha_k \neq b'$, ce qui est immédiat.

6.1.5 L'identité de Capelli pour le dédoublement

Cette identité est l'outil essentiel de la démonstration des théorèmes fondamentaux. Elle porte sur les polarisations et son objectif est de permettre de raisonner par récurrence. Nous en donnons une variante générale qui sera adaptée dans le cadre des deux théorèmes sous forme de l'identité de Capelli-Cayley et de la congruence de Capelli.

Le lecteur qui souhaiterait en savoir plus sur cette formule consultera [Wey39], ou encore [How89] pour une approche moderne en termes d'algèbre enveloppante.

6.1.12 Théorème. Soient $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n \in I_p$ avec $p \leq r$ et soit $P \in U$. On a la formule $\varphi(\Delta'_n(P)) = \Delta_n(P)$ où Δ'_n et Δ_n sont les déterminants d'opérateurs suivants (dans lesquels les δ_{ij} sont les symboles de Kronecker) :

$$\Delta'_n = \begin{vmatrix} D_{a'_1 b_1} & D_{a'_1 b_2} & \cdots & D_{a'_1 b_n} \\ D_{a'_2 b_1} & D_{a'_2 b_2} & \cdots & D_{a'_2 b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{a'_n b_1} & D_{a'_n b_2} & \cdots & D_{a'_n b_n} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} D_{a_1 b_1} + \delta_{a_1, b_1}(n-1)\text{Id} & D_{a_1 b_2} + \delta_{a_1, b_2}(n-2)\text{Id} & \cdots & D_{a_1 b_n} \\ D_{a_2 b_1} + \delta_{a_2, b_1}(n-1)\text{Id} & D_{a_2 b_2} + \delta_{a_2, b_2}(n-2)\text{Id} & \cdots & D_{a_2 b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{a_n b_1} + \delta_{a_n, b_1}(n-1)\text{Id} & D_{a_n b_2} + \delta_{a_n, b_2}(n-2)\text{Id} & \cdots & D_{a_n b_n} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. On peut supposer les a_i distincts, sinon tous les déterminants sont nuls. L'identité se montre par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ s'écrit $\varphi(D_{a'b}(P)) = D_{ab}(P)$ et, comme P est dans U , il résulte aussitôt de 6.1.10.2. Pour le confort du lecteur, traitons aussi le cas $n = 2$. On a $\varphi(\Delta'_2(P)) = \varphi(D_{a'_1b_1}D_{a'_2b_2}(P)) - \varphi(D_{a'_2b_1}D_{a'_1b_2}(P))$. On calcule le premier terme à l'aide de 6.1.10.1. On obtient $D_{a_1b_1}\varphi(D_{a'_2b_2}(P)) - \varphi(D_{a_1b'_1}D_{a'_2b_2}(P))$ et, avec 6.1.10.2 et 6.1.10.3 il vient, en tenant compte du fait que φ est l'identité sur U , $D_{a_1b_1}D_{a_2b_2}(P) - \delta_{b_1,a_2}D_{a_1b_2}(P)$. De même, le second terme vaut $D_{a_2b_1}D_{a_1b_2}(P) - \delta_{b_1,a_1}D_{a_2b_2}(P)$ et au total on a bien la formule annoncée.

Supposons l'identité établie pour $n - 1$ et passons à n . On développe Δ'_n par rapport à sa première colonne : $\Delta'_n = \sum_{k=1}^n D_{a'_kb_1}\Delta'_{k,1}$ où $\Delta'_{k,1}$ désigne le cofacteur (i.e. le mineur muni d'un signe) de Δ'_n correspondant au terme d'indice $(k, 1)$. On applique alors la formule 6.1.10.1 et on a $\varphi(\Delta'_n(P)) = \sum_{k=1}^n D_{a_kb_1}\varphi(\Delta'_{k,1}(P)) - \sum_{k=1}^n \varphi(D_{a_kb'_1}\Delta'_{k,1}(P))$. Dans la première somme le terme $\varphi(\Delta'_{k,1}(P))$ se calcule par l'hypothèse de récurrence : c'est $\Delta_{k,1}(P)$ où $\Delta_{k,1}$ est le cofacteur de Δ_n associé au terme d'indice $(k, 1)$:

$$D_{a_kb_1} + \delta_{a_k,b_1}(n-1)\text{Id}.$$

Pour l'autre terme, on a le lemme suivant :

6.1.13 Lemme. *Pour $P \in U$, on a la formule :*

$$\varphi(D_{ab'}\Delta'_n(P)) = \sum_{k=1}^n \delta_{a_k,b} \varphi(\Gamma'_{n,k}(P))$$

où $\Gamma'_{n,k}$ est le déterminant obtenu en remplaçant a'_k par a' dans la k -ème ligne de Δ'_n , c'est-à-dire en remplaçant cette k -ème ligne par $(D_{a'b_1}, \dots, D_{a'b_n})$.

Démonstration. (du lemme) On a

$$D_{ab'}\Delta'_n = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) D_{ab'} D_{a'_1b_{\sigma(1)}} \cdots D_{a'_nb_{\sigma(n)}}$$

et si on applique cette somme à un polynôme P de U , le résultat est nul, sauf si b' est égal à l'un des a'_k . Supposons donc $b = a_k$ et montrons qu'on a $\varphi(D_{ab'}\Delta'_n(P)) = \varphi(\Gamma'_{n,k}(P))$. Comme les $D_{a'_ib_j}$ commutent (cf. 6.1.9, c'est tout l'intérêt de l'opération de dédoublement !) on peut écrire :

$$D_{ab'}\Delta'_n(P) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) D_{ab'} D_{a'_k,b_{\sigma(k)}} D_{a'_1b_{\sigma(1)}} \cdots D_{a'_k,b_{\sigma(k)}} \cdots D_{a'_nb_{\sigma(n)}}(P)$$

où le symbole \widehat{D} signifie que ce terme est omis.

Posons $Q = D_{a'_1 b_{\sigma(1)}} \cdots D_{a'_k b_{\sigma(k)}} \cdots D_{a'_n b_{\sigma(n)}}(P)$. En vertu de 6.1.10.3, on a $D_{ab'} D_{a'_k b_{\sigma(k)}}(Q) = \delta_{a_k, b} D_{a, b_{\sigma(k)}}(Q)$ (car b' n'intervient pas dans Q puisque les a_i sont distincts). Mais alors, les termes de $\varphi(D_{ab'} \Delta'_n(P))$ s'écrivent sous la forme $\varphi(\delta_{a_k, b} D_{a, b_{\sigma(k)}}(Q))$ et, en vertu de 6.1.10.2, ils s'écrivent encore $\varphi(\delta_{a_k, b} D_{a', b_{\sigma(k)}}(Q))$. Maintenant, comme $D_{a', b_{\sigma(k)}}$ commute avec les $D_{a'_k, b_l}$ on peut remettre ce terme à la k -ème place et on obtient :

$$\varphi(D_{ab'} \Delta'_n(P)) = \varphi\left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) D_{a'_1 b_{\sigma(1)}} \cdots D_{a', b_{\sigma(k)}} \cdots D_{a'_n b_{\sigma(n)}}(P)\right),$$

et on reconnaît le déterminant attendu $\Gamma'_{n,k}$.

On peut appliquer ce lemme (en dimension $n-1$) au terme $\varphi(D_{a_k b'_1} \Delta'_{k,1}(P))$. On obtient, en tenant compte de l'hypothèse de récurrence, le corollaire suivant :

6.1.14 Corollaire. *On a la formule :*

$$\varphi(D_{a_k b'_1} \Delta'_{k,1}(P)) = - \sum_{\substack{l=1, \dots, n \\ l \neq k}} \delta_{a_l, b_1} \Delta_{l,1}(P).$$

En effet, le déterminant $\Gamma'_{n-1,l}$ du lemme associé à $\Delta'_{k,1}$ et à l'indice $l \neq k$ s'obtient en remplaçant dans $\Delta'_{k,1}$ la ligne d'indice l formée des $D_{a'_l, b_i}$ par la ligne des $D_{a'_k, b_i}$. On obtient ainsi (au signe près) $\Delta'_{l,1}$ qui, en vertu de l'hypothèse de récurrence, donne $\Delta_{l,1}$ par application de φ . Il faut encore vérifier que le signe est bien celui annoncé. Le lecteur s'en convaincra en notant que le signe associé à $\Delta'_{k,1}$ est $(-1)^{k+1}$, celui associé à $\Delta_{l,1}$, $(-1)^{l+1}$ et celui qui correspond à l'échange des lignes d'indice l et k : $(-1)^{|k-l|-1}$.

On peut alors finir de prouver 6.1.12. L'hypothèse de récurrence et le corollaire précédent montrent que dans la somme

$$\varphi(\Delta'_n(P)) = \sum_{k=1}^n D_{a_k b_1} \varphi(\Delta'_{k,1}(P)) - \sum_{k=1}^n \varphi(D_{a_k b'_1} \Delta'_{k,1}(P)),$$

les termes d'indice k s'écrivent :

$$D_{a_k, b_1} \Delta_{k,1}(P) + \sum_{l \neq k} \delta_{a_l, b_1} \Delta_{l,1}(P).$$

Ces termes s'écrivent encore à l'aide du déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \delta_{a_1, b_1} \text{Id} & D_{a_1 b_2} + \delta_{a_1, b_2}(n-2)\text{Id} & \cdots & D_{a_1 b_n} \\ \delta_{a_2, b_1} \text{Id} & D_{a_2 b_2} + \delta_{a_2, b_2}(n-2)\text{Id} & \cdots & D_{a_2 b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{a_k b_1} & D_{a_k b_2} + \delta_{a_k, b_2}(n-2)\text{Id} & \cdots & D_{a_k b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{a_n, b_1} \text{Id} & D_{a_n b_2} + \delta_{a_n, b_2}(n-2)\text{Id} & \cdots & D_{a_n b_n} \end{vmatrix} (P).$$

Il reste à faire la somme de ces n termes pour $k = 1, \dots, n$ et on trouve exactement $\Delta_n(P)$.

6.2 Démonstration du premier théorème fondamental dans le cas de m vecteurs

Nous démontrons maintenant 3.1.1 dont nous reprenons les notations.

6.2.1 Polynômes homogènes

On sait qu'un polynôme en plusieurs variables s'écrit de manière unique $P = \sum_i P_i$ où P_i est un polynôme homogène de degré i . On en déduit aussitôt que P est invariant sous l'action de G si et seulement si ses composantes homogènes P_i le sont. Plus généralement, on a la définition suivante :

6.2.1 Définition. Notons $x = (x_1, x_2, x_3)$ l'un des vecteurs a, b, c, \dots . Un polynôme $P \in R$ est dit homogène de degré d en x s'il s'écrit sous la forme $\sum_{i_1+i_2+i_3=d} \alpha_{i_1, i_2, i_3} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$ où les α_i sont des polynômes en les variables autres que les x_i .

Le résultat suivant est alors immédiat et ramène la détermination des invariants au cas homogène "en les vecteurs" :

6.2.2 Proposition.

- 1) Soit $P \in R$. Alors P s'écrit de manière unique comme somme $P = \sum_{i, j, k, \dots} P_{i, j, k, \dots}$ où les $P_{i, j, k, \dots}$ sont homogènes de degré i en a , j en b , k en c , etc.
- 2) Le polynôme P est invariant sous $G \subset GL(3, k)$ si et seulement si les $P_{i, j, k, \dots}$ le sont.

6.2.2 La démonstration de 3.1.1 dans le cas des polynômes en deux vecteurs

Le théorème fondamental indique qu'il n'y a pas d'invariants à l'exception des constantes lorsqu'on a $m \leq 2$, autrement dit pas d'invariants de la forme $F(a, b)$ en deux vecteurs. Nous prouvons d'abord cette partie du théorème. Nous utiliserons le théorème de prolongement des identités algébriques 1.2.6.

Soit $F(a, b)$ un polynôme en les vecteurs $a = (a_1, a_2, a_3)$ et $b = (b_1, b_2, b_3)$ (à coefficients indéterminés), invariant sous $SL(3, k)$. Nous allons montrer que F est une constante. L'hypothèse signifie qu'on a $F(u(a), u(b)) = F(a, b)$ pour tout $u \in SL(3, k)$ et cette formule vaut encore si l'on spécialise a et b en $\alpha, \beta \in k^3$. Posons $\lambda = F(e_1, e_2)$, où e_1 et e_2 sont les vecteurs de base de k^3 : $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$. Soit $V \subset k^6$ le sous-ensemble algébrique défini par

l'annulation des mineurs 2×2 de la matrice : $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$. Nous allons montrer

que le polynôme $F(a, b) - \lambda$ est nul dans k^6 en dehors de V , ce qui prouvera qu'il est nul en vertu de 1.2.6. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ un point de $k^6 - V$. Vu l'hypothèse sur les mineurs, il existe $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in k^3$ tels que l'on ait

$u = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SL(3, k)$. On a alors $F(\alpha, \beta) = F(u^{-1}(\alpha), u^{-1}(\beta)) = F(e_1, e_2) = \lambda$ en vertu de l'invariance et on a gagné.

6.2.3 Polarisation, suite

Pour montrer 3.1.1 dans le cas général nous allons utiliser les polarisations vues en 6.1. Dans le cas de l'anneau R , si a et b sont deux vecteurs de \mathcal{A} , rappelons (cf. 6.1.8) que la polarisation D_{ab} est définie par la formule :

$$(*) \quad D_{ab}(F) = a_1 \frac{\partial F}{\partial b_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial b_2} + a_3 \frac{\partial F}{\partial b_3}.$$

6.2.3 Remarques.

- 1) Si F est homogène de degré p en a et q en b , $D_{ab}(F)$ est homogène de degré $p + 1$ en a et $q - 1$ en b .
- 2) Si F est homogène de degré p en a on a $D_{aa}(F) = pF$ en vertu de la formule d'Euler (car la caractéristique du corps est nulle).

La proposition suivante donne une interprétation "tangentielle" des polarisations :

6.2.4 Proposition. *On étend les scalaires en adjoignant à k un élément ϵ de carré nul. Soit $F \in R$, considéré comme polynôme en $x = (x_1, x_2, x_3)$ à coefficients polynômes en les autres variables. Si y est un autre vecteur, on a la formule : $F(x + \epsilon y) = F(x) + \epsilon D_{yx}(F)$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier la formule sur un monôme $M(x) = x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$. On calcule, en tenant compte de $\epsilon^2 = 0$:

$$M(x + \epsilon y) = (x_1 + \epsilon y_1)^{i_1} (x_2 + \epsilon y_2)^{i_2} (x_3 + \epsilon y_3)^{i_3} = M(x) + \epsilon (i_1 x_1^{i_1-1} y_1 + i_2 x_2^{i_2-1} y_2 + i_3 x_3^{i_3-1} y_3) M(x)$$

et on obtient :

$$M(x + \epsilon y) = M(x) + \epsilon (y_1 \frac{\partial M}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial M}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial M}{\partial x_3}) = M(x) + \epsilon D_{yx} M.$$

L'un des intérêts de l'opération de polarisation est qu'elle transforme invariants en invariants :

6.2.5 Proposition. *Soit $F \in R$ et a, b deux vecteurs. Si F est invariant sous $SL(3, k)$ il en est de même de $D_{ba}(F)$.*

Démonstration. On étend encore les scalaires à $k[\epsilon]$ avec $\epsilon^2 = 0$. Soit $u \in SL(3, k)$. En vertu de l'invariance de F on a :

$$F(u(a + \epsilon b), u(b), u(c), \dots) = F(a + \epsilon b, b, c, \dots),$$

soit encore, puisque u est linéaire, $F(u(a) + \epsilon u(b), u(b), u(c), \dots) = F(a + \epsilon b, b, c, \dots)$. On développe ces deux termes par 6.2.4 et on obtient :

$$F(u(a), u(b), u(c), \dots) + \epsilon D_{ba} F(u(a), u(b), u(c), \dots) = F(a, b, c, \dots) + \epsilon D_{ba} F(a, b, c, \dots).$$

Comme F est invariant, on voit que $D_{ba}(F)$ l'est aussi.

Précisons enfin ce que deviennent les invariants de base :

6.2.6 Proposition. *On a les formules : $D_{yx}[a, b, c] = 0$ si x n'est pas l'un des vecteurs a, b, c , $D_{ya}[a, b, c] = [y, b, c]$ et les formules analogues en remplaçant a par b ou c . On peut encore écrire cette formule :*

$$D_{ij}[x_u, x_v, x_w] = \delta_{ju}[x_i, x_v, x_w] + \delta_{jv}[x_u, x_i, x_w] + \delta_{jw}[x_u, x_v, x_i].$$

6.2.4 L'identité de Capelli-Cayley

Nous aurons besoin de l'opérateur suivant :

6.2.7 Définition.

On appelle **opérateur de Cayley** l'endomorphisme Ω_{cba} de R dans R défini par :

$$\Omega_{cba}(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial c_1} & \frac{\partial}{\partial b_1} & \frac{\partial}{\partial a_1} \\ \frac{\partial}{\partial c_2} & \frac{\partial}{\partial b_2} & \frac{\partial}{\partial a_2} \\ \frac{\partial}{\partial c_3} & \frac{\partial}{\partial b_3} & \frac{\partial}{\partial a_3} \end{vmatrix} (F).$$

6.2.8 Théorème. (Identité de Capelli-Cayley)

Soient $a, b, c \in I$ trois indices distincts et soit $F \in R$. On a la formule :

$$\begin{vmatrix} D_{cc} + 2\text{Id} & D_{cb} & D_{ca} \\ D_{bc} & D_{bb} + \text{Id} & D_{ba} \\ D_{ac} & D_{ab} & D_{aa} \end{vmatrix} (F) = [c, b, a] \Omega_{cba}(F).$$

Démonstration. La démonstration que nous donnons ici est inspirée de celle de Weyl et s'appuie sur l'identité de Capelli pour le dédoublement, voir aussi Exercice 6.5.1.

On considère l'anneau R' obtenu à partir de R en dédoublant les variables : si $R = k[a, b, c, \dots]$, $R' = k[a, a', b, b', c, c', \dots]$, voir paragraphe 6.1.4. On a vu que l'intérêt de cette opération est de pouvoir effectuer les compositions des polarisations avec des variables toujours différentes pour éviter les difficultés de la non commutativité. On revient dans R par l'homomorphisme $\varphi : R' \rightarrow R$ qui consiste à "oublier les primes" : $\varphi(a) = \varphi(a') = a$, etc.

La formule suivante, dans l'anneau $L(R')$ des endomorphismes de R' , est la traduction de la définition des polarisations, voir la formule (*) ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} D_{c'c} & D_{c'b} & D_{c'a} \\ D_{b'c} & D_{b'b} & D_{b'a} \\ D_{a'c} & D_{a'b} & D_{a'a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c'_1 & c'_2 & c'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial c_1} & \frac{\partial}{\partial b_1} & \frac{\partial}{\partial a_1} \\ \frac{\partial}{\partial c_2} & \frac{\partial}{\partial b_2} & \frac{\partial}{\partial a_2} \\ \frac{\partial}{\partial c_3} & \frac{\partial}{\partial b_3} & \frac{\partial}{\partial a_3} \end{pmatrix}.$$

Soit $\Delta(F)$ le déterminant du premier membre, appliqué à $F \in R$. La formule ci-dessus et la multiplicativité du déterminant dans le cas où les termes commutent (voir 6.1.5), montrent que l'on a $\Delta(F) = [c', b', a'] \Omega_{cba}(F)$. En effet, les multiplications par les variables munies de primes commutent aux

dérivations sans primes. On a donc, pour $F \in R$, $\varphi(\Delta(F)) = [c, b, a] \Omega_{cba}(F)$. Le résultat est alors une conséquence de l'identité de Capelli pour le dédoublement appliquée dans le cas $n = 3$, cf. 6.1.12 (comme les vecteurs a, b, c sont distincts, les symboles de Kronecker non diagonaux sont nuls).

6.2.5 Fin de la démonstration de 3.1.1

Notons S le sous-anneau de R engendré par les crochets $[x, y, z]$ (avec $x, y, z \in \mathcal{A} = \{a, b, c, \dots\}$). En vertu de 6.2.6, S est stable par polarisation.

Soit F un polynôme invariant sous $SL(3, k)$. Il s'agit de montrer que F est dans S . En vertu de 6.2.2 on peut supposer que F est homogène (séparément) en a, b, c, \dots . On ordonne ces polynômes de la façon suivante. Si le degré total de F est plus petit que celui de G on a $F < G$. Si ces polynômes ont même degré total on ordonne suivant l'ordre lexicographique des degrés en a, b, c, \dots , selon l'ordre de l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots\} : a < b < c < \dots$. On raisonne alors par l'absurde en supposant qu'il y a un polynôme invariant multihomogène F qui n'est pas dans S et on choisit un tel polynôme minimal pour l'ordre ci-dessus. Ce polynôme fait intervenir au moins trois vecteurs (sinon il serait dans S , en vertu du paragraphe 6.2.2). Supposons, par exemple, qu'il soit de degré $p > 0$ en a , q en b , r en c , avec $a < b < c$. On applique l'identité de Capelli-Cayley à F avec les vecteurs a, b, c .

Comme F est invariant il en est de même des polarisations de F (cf. 6.2.5), donc du premier membre de l'identité. Il en résulte que $[a, b, c] \Omega_{cba}(F)$ est invariant et, comme $[a, b, c]$ l'est aussi, $\Omega_{cba}(F)$ est un invariant. Comme $\Omega_{cba}(F)$ a un degré total strictement plus petit que celui de F , l'hypothèse de minimalité montre que $\Omega_{cba}(F)$ est dans S , donc aussi $[a, b, c] \Omega_{cba}(F)$ et donc le premier membre de l'identité est dans S .

Examinons maintenant ce premier membre qui comporte six termes. Les quatre termes qui se terminent par D_{xa} avec $x \neq a$ comme par exemple $D_{bc} \circ D_{ab} \circ D_{ca}(F)$ sont dans S . En effet, $D_{ca}(F)$ est invariant, ses degrés sont les mêmes que ceux de F , à l'exception du degré en a qui vaut $p - 1$ et du degré en c qui vaut $r + 1$. Comme on a $a < c$, $D_{ca}(F)$ est plus petit que F , donc il est dans S par l'hypothèse de minimalité de F . Comme les polarisations laissent stable S , le terme considéré est bien dans S .

Le terme $D_{bc} \circ D_{cb} \circ D_{aa}(F)$ est dans S lui aussi. En effet, on a $D_{aa}(F) = pF$ et $D_{cb}(F)$ est de degré p en a et $q - 1$ en b , donc il est dans S par minimalité, ce qui conclut puisque D_{bc} laisse stable S .

Il reste le terme $(D_{cc} + 2I) \circ (D_{bb} + I) \circ D_{aa}(F)$ qui vaut $p(q + 1)(r + 2)F$. Comme le premier membre de l'identité est dans S , ce terme est dans S , donc aussi F (puisque $p > 0$ et $q, r \geq 0$ et que la caractéristique du corps

est nulle!). C'est une contradiction.

6.3 Démonstration du second théorème fondamental, cas de m vecteurs

Nous reprenons dans ce numéro les notations des paragraphes 3.1.2 et 6.1, en particulier l'anneau $R = k[x_{i,j}]$ avec $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ et $j \in \{1, 2, 3\}$, l'anneau $U = k[X_{ijk}]$, avec i, j, k dans l'ensemble I et l'homomorphisme $\Phi : U \rightarrow R$, l'idéal J qui contient les relations d'antisymétrie et les relations $\mathcal{R}(i, j, k, l; p, q) = X_{jkl}X_{ipq} - X_{ikl}X_{jpq} + X_{ijl}X_{kpq} - X_{ijk}X_{lpq}$ et enfin les polarisations.

6.3.1 Polarisation

Nous aurons besoin de plusieurs résultats sur les polarisations :

6.3.1 Proposition. *Soient $a, b \in I$ et soit $F \in U$. On a la formule $\Phi(D_{ab}(F)) = D_{ab}(\Phi(F))$.*

Démonstration. Comme Φ est un homomorphisme et D_{ab} une dérivation, il suffit de montrer l'assertion lorsque F est une indéterminée X_{ijk} . Dans ce cas la relation est évidente si b n'est pas égal à i, j, k et, si b est égal à i par exemple, on a $\Phi(D_{ab}(X_{bjk})) = \Phi(X_{ajk}) = [x_a, x_j, x_k]$ d'une part, et d'autre part, $D_{ab}(\Phi(X_{bjk})) = D_{ab}([x_b, x_j, x_k]) = [x_a, x_j, x_k]$, en vertu de 6.2.6.

6.3.2 Corollaire. *Soient $a, b \in I$. On a $D_{ab}(\text{Ker } \Phi) \subset \text{Ker } \Phi$.*

Démonstration. C'est clair avec la proposition précédente.

6.3.3 Proposition. *L'idéal J est stable par les polarisations.*

Démonstration. On le vérifie sur les trois types de générateurs. On a ainsi, par exemple : $D_{ab}(X_{bii}) = X_{aai}$, $D_{ab}(X_{bbj}) = X_{abj} + X_{baj}$, $D_{ab}(X_{bjk} - X_{jkb}) = X_{ajk} - X_{jka}$ et $D_{ea}(\mathcal{R}(a, b, c, d; x, y) = \mathcal{R}(e, b, c, d; x, y)$.

6.3.2 D'autres relations

Nous allons montrer que l'idéal J contient certains déterminants.

6.3.4 Proposition. *Quels que soient les indices $a, b, c, d; s, t, u, v, w, x, y, z$ dans I , le déterminant suivant est dans J :*

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_{ast} & X_{auv} & X_{awx} & X_{ayz} \\ X_{bst} & X_{buu} & X_{bvx} & X_{byz} \\ X_{cst} & X_{cuv} & X_{cwx} & X_{cyz} \\ X_{dst} & X_{duv} & X_{dwx} & X_{dyz} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. On commence par calculer les mineurs 3×3 de Δ :

6.3.5 Lemme. *Modulo J on a l'égalité*

$$\Delta_{ast} = \begin{vmatrix} X_{buu} & X_{bvx} & X_{byz} \\ X_{cuv} & X_{cwx} & X_{cyz} \\ X_{duv} & X_{dwx} & X_{dyz} \end{vmatrix} \equiv X_{bcd} [X_{xuv}X_{wyz} - X_{wuv}X_{xyz}].$$

Démonstration.

Développons Δ_{ast} par rapport à sa dernière colonne. On obtient, en nommant M_{byz} , etc. les mineurs 2×2 : $\Delta_{ast} = X_{byz}M_{byz} - X_{cyz}M_{cyz} + X_{dyz}M_{dyz}$. Mais, on a $M_{byz} = X_{cuv}X_{dwx} - X_{duv}X_{cwx} = \mathcal{R}(c, d, w, x; u, v) + X_{xuv}X_{cdw} - X_{wuv}X_{cdx}$ et de même pour les autres, de sorte que Δ_{ast} est congru modulo J à $X_{xuv}[X_{cdw}X_{byz} - X_{bdw}X_{cyz} + X_{bcw}X_{dyz}] - X_{wuv}[X_{cdx}X_{byz} - X_{bdx}X_{cyz} + X_{bcx}X_{dyz}]$, et comme les crochets sont égaux à $\mathcal{R}(b, c, d, w; y, z) + X_{bcd}X_{wyz}$ et $\mathcal{R}(b, c, d, x; y, z) + X_{bcd}X_{xyz}$, on a le résultat.

Revenons à 6.3.4. Le développement du déterminant selon la première colonne donne, en tenant compte de 6.3.5 : $\Delta \equiv [X_{ast}X_{bcd} - X_{bst}X_{acd} + X_{cst}X_{abd} - X_{dst}X_{abc}][X_{xuv}X_{wyz} - X_{wuv}X_{xyz}]$. Comme le premier crochet n'est autre que $\mathcal{R}(a, b, c, d; s, t)$, on voit que Δ est dans J .

6.3.3 La congruence de Capelli

On considère de nouveau l'anneau U' obtenu à partir de U par dédoublement des indices : $U' = k[X_{i,j,k}]$ avec $i, j, k \in I' = I \times \{0, 1\}$, cf. paragraphe 6.1.4 et l'homomorphisme $\varphi : U' \rightarrow U$ qui consiste "à oublier les primes" : l'image d'une indéterminée $X_{i,j,k}$ avec $i, j, k \in I \times \{0, 1\}$ est $X_{\pi(i), \pi(j), \pi(k)}$ où $\pi : I' \rightarrow I$ est la projection sur le premier facteur.

On désigne par J' l'idéal de U' analogue à J , il est engendré par les éléments suivants :

- 1) Les X_{ijk} dans lesquels deux indices au moins coïncident,
- 2) les $X_{ijk} - \epsilon(\sigma)X_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)}$ où σ est une permutation de i, j, k ,
- 3) les éléments de la forme

$$(*) \quad X_{jkl}X_{ipq} - X_{ikl}X_{jpp} + X_{ijl}X_{kpp} - X_{ijk}X_{lpp},$$

pour $i, j, k, l, p, q \in I'$. L'image par φ de l'idéal J' est évidemment égale à J .

On a alors le résultat crucial suivant :

6.3.6 Proposition. *Soient $a, b, c, d \in I$ et $F \in U$. L'élément suivant est dans l'idéal J' :*

$$\Delta'(F) = \begin{vmatrix} D_{d'd} & D_{d'c} & D_{d'b} & D_{d'a} \\ D_{c'd} & D_{c'c} & D_{c'b} & D_{c'a} \\ D_{b'd} & D_{b'c} & D_{b'b} & D_{b'a} \\ D_{a'd} & D_{a'c} & D_{a'b} & D_{a'a} \end{vmatrix} (F).$$

Démonstration. Notons A la matrice d'opérateurs :

$$A = \begin{pmatrix} D_{d'd} & D_{d'c} & D_{d'b} & D_{d'a} \\ D_{c'd} & D_{c'c} & D_{c'b} & D_{c'a} \\ D_{b'd} & D_{b'c} & D_{b'b} & D_{b'a} \\ D_{a'd} & D_{a'c} & D_{a'b} & D_{a'a} \end{pmatrix}.$$

Dans ce qui suit nous appliquons ces opérateurs à des éléments $P \in U$. Pour un tel élément, la formule (§) du paragraphe 6.1.3 qui décrit $D_{a'b}$ s'écrit :

$$D_{a'b}(P) = \sum_{i,j,k \in I} X_{a'jk} \frac{\partial P}{\partial X_{bjk}} + X_{ia'k} \frac{\partial P}{\partial X_{ibk}} + X_{ija'} \frac{\partial P}{\partial X_{ijb}}.$$

En effet, on peut limiter la sommation aux indices de I car les dérivées de P par rapport aux variables “avec primes” sont nulles.

De cette formule résulte l'égalité matricielle $A = B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 C_3$ dans laquelle B_1 est la matrice $4 \times m^2$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} X_{d'11} & X_{d'12} & X_{d'21} & \cdots & X_{d'mm} \\ X_{c'11} & X_{c'12} & X_{c'21} & \cdots & X_{c'mm} \\ X_{b'11} & X_{b'12} & X_{b'21} & \cdots & X_{b'mm} \\ X_{a'11} & X_{a'12} & X_{a'21} & \cdots & X_{a'mm} \end{pmatrix}.$$

Dans cette matrice, on a choisi un ordre (arbitraire) sur les couples $(j, k) \in \{1, 2, \dots, m\}^2$: $(1, 1) < (1, 2) < (2, 1) < (1, 3) < \cdots < (m, m)$ par exemple. Les matrices B_2 et B_3 sont les matrices analogues avec $X_{id'k}$ et $X_{ijd'}$ au lieu de $X_{d'jk}$. La matrice C_1 est la matrice $m^2 \times 4$ suivante :

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X_{d11}} & \frac{\partial}{\partial X_{c11}} & \frac{\partial}{\partial X_{b11}} & \frac{\partial}{\partial X_{a11}} \\ \frac{\partial}{\partial X_{d12}} & \frac{\partial}{\partial X_{c12}} & \frac{\partial}{\partial X_{b12}} & \frac{\partial}{\partial X_{a12}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial X_{dmm}} & \frac{\partial}{\partial X_{cmm}} & \frac{\partial}{\partial X_{bmm}} & \frac{\partial}{\partial X_{amm}} \end{pmatrix}.$$

Bien entendu, l'ordre choisi sur les colonnes de C_1 est le même que celui sur les lignes de B_1 . Les matrices C_2, C_3 sont analogues, avec $\frac{\partial}{\partial X_{idk}}$ ou $\frac{\partial}{\partial X_{ijd}}$ au lieu de $\frac{\partial}{\partial X_{djk}}$.

On peut encore écrire la formule $A = B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3$ sous la forme $A = BC$ où B et C sont les matrices $4 \times 3m^2$ et $3m^2 \times 4$ obtenues en concaténant les B_i (resp. les C_i).

Ces produits matriciels s'entendent dans l'anneau des endomorphismes de U' . Un point essentiel est à noter. Considérons les endomorphismes de U' suivants : μ , multiplication par une indéterminée du type $X_{i'jk}$ (avec un indice "prime") et D , dérivée partielle par rapport à X_{uvw} (avec $u, v, w \in I$, "sans prime"). Alors les opérateurs μ et D commutent. En effet, on a $D(X_{i'jk}) = 0$, donc $D(X_{i'jk}P) = X_{i'jk}D(P)$. C'est le principal intérêt de l'opération de dédoublement !

Cette remarque permet de calculer $\det A$ par la formule de Cauchy-Binet, cf. 6.1.6, comme somme des produits des déterminants des matrices 4×4 extraites de B et C . Précisément, on a ainsi :

$$\det A = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \underline{l}} \det B_{\alpha, \beta, \gamma, \delta; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \underline{l}} \det C_{\alpha, \beta, \gamma, \delta; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \underline{l}},$$

la somme étant étendue à tous les quadruplets $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \underline{l})$ d'éléments de I^2 ($\underline{i} = (i_1, i_2)$, etc.) et aux quadruplets $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \{1, 2, 3\}^4$. Ces derniers nombres indiquent dans laquelle des matrices B_1, B_2, B_3 est prise la colonne correspondante, c'est-à-dire la position de l'indice "avec prime". Par exemple, on pose :

$$B_{2,1,3,1;\underline{i},\underline{j},\underline{k},\underline{l}} = \begin{pmatrix} X_{i_1d'i_2} & X_{d'j_1j_2} & X_{k_1k_2d'} & X_{d'l_1l_2} \\ X_{i_1c'i_2} & X_{c'j_1j_2} & X_{k_1k_2c'} & X_{c'l_1l_2} \\ X_{i_1b'i_2} & X_{b'j_1j_2} & X_{k_1k_2b'} & X_{b'l_1l_2} \\ X_{i_1a'i_2} & X_{a'j_1j_2} & X_{k_1k_2a'} & X_{a'l_1l_2} \end{pmatrix}$$

$$C_{2,1,3,1;\underline{i},\underline{j},\underline{k},\underline{l}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X_{i_1di_2}} & \frac{\partial}{\partial X_{i_1ci_2}} & \frac{\partial}{\partial X_{i_1bi_2}} & \frac{\partial}{\partial X_{i_1ai_2}} \\ \frac{\partial}{\partial X_{dj_1j_2}} & \frac{\partial}{\partial X_{cj_1j_2}} & \frac{\partial}{\partial X_{bj_1j_2}} & \frac{\partial}{\partial X_{aj_1j_2}} \\ \frac{\partial}{\partial X_{k_1k_2d}} & \frac{\partial}{\partial X_{k_1k_2c}} & \frac{\partial}{\partial X_{k_1k_2b}} & \frac{\partial}{\partial X_{k_1k_2a}} \\ \frac{\partial}{\partial X_{dl_1l_2}} & \frac{\partial}{\partial X_{cl_1l_2}} & \frac{\partial}{\partial X_{bl_1l_2}} & \frac{\partial}{\partial X_{al_1l_2}} \end{pmatrix}$$

La proposition 6.3.6 résulte alors du lemme suivant :

6.3.7 Lemme. *Pour tous les quadruplets $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \underline{l})$ on a :*

$$\det B_{\alpha, \beta, \gamma, \delta; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \underline{l}} \in J'.$$

Démonstration. En utilisant les relations d'antisymétrie, qui sont dans J' , on note d'abord qu'on peut ramener les indices "avec prime" en tête, autrement dit qu'on a, modulo J' :

$$\det B_{\alpha, \beta, \gamma, \delta; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \underline{l}} = \begin{vmatrix} X_{d'i_1 i_2} & X_{d'j_1 j_2} & X_{d'k_1 k_2} & X_{d'l_1 l_2} \\ X_{c'i_1 i_2} & X_{c'j_1 j_2} & X_{c'k_1 k_2} & X_{c'l_1 l_2} \\ X_{b'i_1 i_2} & X_{b'j_1 j_2} & X_{b'k_1 k_2} & X_{b'l_1 l_2} \\ X_{a'i_1 i_2} & X_{a'j_1 j_2} & X_{a'k_1 k_2} & X_{a'l_1 l_2} \end{vmatrix}$$

pour tout quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Le lemme vient alors de 6.3.4 appliqué à J' .

Le point crucial de la preuve du second théorème fondamental peut maintenant être annoncé :

6.3.8 Corollaire. (Congruence de Capelli) *Soient $a, b, c, d \in I$ des indices distincts et soit $F \in U$. L'élément suivant est dans l'idéal J :*

$$\Delta(F) = \begin{vmatrix} D_{dd} + 3\text{Id} & D_{dc} & D_{db} & D_{da} \\ D_{cd} & D_{cc} + 2\text{Id} & D_{cb} & D_{ca} \\ D_{bd} & D_{bc} & D_{bb} + \text{Id} & D_{ba} \\ D_{ad} & D_{ac} & D_{ab} & D_{aa} \end{vmatrix} (F).$$

Démonstration. Cela résulte de la formule $\varphi(\Delta'(F)) = \Delta(F)$ qui n'est autre que l'identité de Capelli pour le dédoublement, cf. 6.1.12, de 6.3.6 et de la relation $\varphi(J') = J$.

6.3.4 Preuve de 3.1.10

On commence par montrer que si m est petit il n'y a pas de relations non banales :

6.3.9 Proposition. *Avec les notations de 3.1.10, on suppose $m \leq 4$. Alors on a $\text{Ker } \Psi = 0$ (et donc $\text{Ker } \Phi = \text{Ker } \theta$ est engendré par les relations d'alternance).*

Cela va résulter du lemme suivant :

6.3.10 Lemme. *Soient $(x, y, z, t) \in k^4$ avec $x \neq 0$. Il existe des vecteurs a, b, c, d de k^3 avec $[a, b, c] = x$, $[a, b, d] = y$, $[a, c, d] = z$, $[b, c, d] = t$.*

Démonstration. On prend $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (0, 0, x)$ et $d = (\frac{t}{x}, -\frac{z}{x}, y)$.

Revenons à la proposition 6.3.9. Soit $F \in \text{Ker } \Psi$. Cela signifie que F est un polynôme en les quatre indéterminées X_{abc} , X_{abd} , X_{acd} , X_{bcd} qui s'annule si on remplace les variables par les crochets correspondants $[a, b, c]$, etc. En vertu du lemme, F est nul sur l'ouvert de k^4 (au sens de la topologie de Zariski, cf. 1.2.9) défini par $x \neq 0$, donc F est nul par le principe de prolongement des identités algébriques 1.2.6.

On passe maintenant au cas général de 3.1.10. On a vu en 3.1.11 que les éléments de J sont dans $\text{Ker } \Phi$ et il reste à voir, réciproquement, que tout élément de $\text{Ker } \Phi$ est dans J . Pour cela on ordonne les polynômes homogènes de U , d'abord selon le degré total, puis selon les degrés en les variables X_{ijk} prises dans l'ordre lexicographique.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $F \in \text{Ker } \Phi$, $F \notin J$. On peut supposer F homogène et on choisit un tel F minimal pour l'ordre défini ci-dessus. En vertu de la proposition 6.3.9, les variables de F contiennent au moins 5 variables $a < b < c < d < e$. On considère alors l'élément $\Delta(F)$ défini en 6.3.8 dont on a vu qu'il est dans J . On raisonne comme dans la fin de la démonstration de 3.1.1. Le polynôme $\Delta(F)$ est une somme de termes, parmi lesquels le terme diagonal

$$(D_{dd} + 3\text{Id}) \circ (D_{cc} + 2\text{Id}) \circ (D_{bb} + \text{Id}) \circ D_{aa}(F),$$

qui est de la forme λF où λ est un scalaire non nul (car F fait intervenir les 4 variables a, b, c, d). Tous les autres termes sont dans J . En effet, considérons¹ le terme $t = D_{ad} \circ D_{bc} \circ D_{db} \circ D_{ca}(F)$. Comme F est dans $\text{Ker } \Phi$, il en est de même de $D_{ca}(F)$ en vertu de 6.3.2. Mais, $D_{ca}(F)$ est de degré plus petit que F en a . Vu l'hypothèse de minimalité, il est donc dans J , donc aussi t en vertu de 6.3.3. On a donc $\Delta(F) = \lambda F + G$ et G et $\Delta(F)$ sont dans J , donc aussi F , ce qui est absurde.

6.4 Le cas des points et des formes

Nous démontrons maintenant les théorèmes fondamentaux dans le cas de m points et n formes. Les preuves sont analogues à celles qui précèdent et le lecteur est averti qu'elles seront souvent données d'une manière plus elliptique. On reprend les notations de 3.2.1, l'anneau R est l'anneau des polynômes en les indéterminées x_{ij} et f_{ij} .

¹Les autres cas se traitent de manière analogue.

6.4.1 Preuve de 3.2.1

Soit F un polynôme invariant. L'identité de Capelli-Cayley, cf. 6.2.8, permet, en raisonnant comme à la fin de la preuve de 3.1.1, de se ramener au cas où F ne met en jeu que deux vecteurs a, b et deux formes f, g . Il s'agit alors de montrer qu'on peut écrire F comme un polynôme en les quatre polynômes $f(a), f(b), g(a), g(b)$. Pour cela, on montre le lemme suivant :

6.4.1 Lemme. *Soient $a, b \in E$ des vecteurs et $f, g \in E^*$ des formes linéaires. On suppose qu'on a $\det(a \wedge b, f, g) \neq 0$. Alors, il existe $u \in SL(E)$ tel que l'on ait $u(e_1) = a$, $u(e_2) = b$, $f(u(e_3)) = g(u(e_3)) = 0$.*

Démonstration. L'hypothèse montre que a et b sont linéairement indépendants (sinon $a \wedge b$ serait nul). On cherche u tel que $u(e_1) = a$, $u(e_2) = b$ et $u(e_3) = c = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$. Le vecteur inconnu c doit vérifier trois relations : $(a \wedge b)(c) = 1$ (qui assure qu'on a $\det u = 1$), $f(c) = g(c) = 0$. Comme l'hypothèse garantit que les trois formes $a \wedge b, f, g$ sont indépendantes il y a bien un vecteur c solution.

On peut alors finir de prouver 3.2.1. Soit $F(a, b, f, g)$ un polynôme invariant. Appelons Ω l'ouvert de Zariski de $E^2 \times (E^*)^2$ (voir 1.2.9) formé des (a, b, f, g) vérifiant $\det(a \wedge b, f, g) \neq 0$. Si (a, b, f, g) est dans Ω il existe $u \in SL(E)$ comme dans le lemme et on a $F(a, b, f, g) = F(e_1, e_2, f \circ u, g \circ u)$. On calcule alors $f(u(e_1)) = f(a)$, $f(u(e_2)) = f(b)$, $f(u(e_3)) = 0$, ce qui donne $f \circ u = f(a)e_1^* + f(b)e_2^*$ et de même pour g . On a donc $F(a, b, f, g) = F(e_1, e_2, f(a)e_1^* + f(b)e_2^*, g(a)e_1^* + g(b)e_2^*) = G(f(a), f(b), g(a), g(b))$ où G est un polynôme. Comme cette égalité vaut sur Ω elle est vraie sur $E^2 \times (E^*)^2$ tout entier par le principe de prolongement des identités algébriques cf. 1.2.6, donc F est bien un polynôme en $f(a), f(b), g(a), g(b)$.

6.4.2 Une autre preuve

Nous donnons maintenant une autre preuve de 3.2.1. Cette preuve consiste à remplacer une forme f par un produit extérieur $x \wedge y$ en ramenant ainsi le problème au cas des vecteurs. D'un point de vue géométrique, c'est une méthode assez naturelle qui revient à utiliser le fait qu'une droite est définie par deux points.

On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe un polynôme de $R = k[a, b, \dots; f, g, \dots]$, que l'on peut supposer homogène, invariant sous le groupe $SL(3)$, qui n'est pas un polynôme en les crochets et les évaluations. Parmi tous ces contre-exemples au théorème, à un nombre quelconque de variables vecteurs et de variables formes, on en choisit un, F , qui soit de degré minimal, par rapport aux variables formes. Comme le théorème fondamental vaut dans

le cas des vecteurs, F comprend au moins une variable forme, disons f , avec un degré $d > 0$. On introduit une variable “forme” supplémentaire $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, on pose $R' = R[\varphi]$ et on considère la polarisation :

$$D_{\varphi f}(F) = \frac{\partial F}{\partial f_1} \varphi_1 + \frac{\partial F}{\partial f_2} \varphi_2 + \frac{\partial F}{\partial f_3} \varphi_3.$$

C'est encore un polynôme invariant en vertu de 6.2.5 et il est de degré 1 en les φ_i et $d - 1$ en f . On considère aussi l'anneau des polynômes S obtenu en adjoignant à R deux variables vecteurs supplémentaires x et y et on a un homomorphisme injectif $\Phi : R' \rightarrow S$ qui envoie φ sur $x \wedge y$. Le polynôme G , image de $D_{\varphi f}(F)$ par Φ est encore invariant en vertu du lemme suivant :

6.4.2 Lemme. *Soit $P(f)$ un polynôme en une forme, invariant sous $SL(E)$. Alors le polynôme $P'(x, y)$ en deux vecteurs défini par $P'(x, y) = P(x \wedge y)$ est invariant sous $SL(E)$.*

Démonstration. Soit u un élément de $SL(E)$. On a, par définition, $(u.P')(x, y) = P'(u^{-1}x, u^{-1}y) = P(u^{-1}x \wedge u^{-1}y)$. On calcule $u^{-1}x \wedge u^{-1}y$. Soit $z \in E$. On a $(u^{-1}x \wedge u^{-1}y)(z) = [u^{-1}x, u^{-1}y, z]$ par définition, et c'est aussi $[x, y, u(z)]$ car u est dans SL , ou encore $(x \wedge y)(u(z))$, soit $u.(x \wedge y)(z)$. En définitive, on a donc $u^{-1}x \wedge u^{-1}y = u.(x \wedge y)$, donc $(u.P')(x, y) = P(u^{-1}x \wedge u^{-1}y) = P(u.(x \wedge y))$, mais comme P est invariant, c'est encore $P(x \wedge y) = P'(x, y)$: cqfd.

Revenons au polynôme invariant G . Son degré en les variables formes, a diminué d'une unité par rapport à celui de F . Vu l'hypothèse de minimalité, G est donc dans l'anneau engendré par les crochets et les évaluations. Par ailleurs, il est clair par construction que G est un polynôme homogène de degré 1 en les $x_i y_j$.

6.4.3 Proposition-Définition. *Soit $G(x, y) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j$ un élément de S dans lequel les $b_{i,j}$ sont des polynômes en les variables autres que x, y . Le polynôme $G(x, y) - G(y, x)$ est un polynôme en les coefficients $x_i y_j - x_j y_i$ de $x \wedge y$ (avec $i \neq j$). On définit une opération de “restitution” qui à un polynôme G associe le polynôme $\Psi(G)$ obtenu en remplaçant les coefficients de $x \wedge y$ par ceux de f : $\Psi(G) = 2 \sum_{i \neq j} b_{ij} f_k$ où (i, j, k) est une permutation paire de $(1, 2, 3)$. On a la formule : $\Psi \circ \Phi(D_{\varphi f}(F(x, y))) = 2dF$.*

Démonstration. C'est une vérification immédiate.

On peut finir alors la preuve du théorème. Le polynôme G , qui est un polynôme en les crochets et les évaluations et qui est, de plus, homogène de degré 1 en les variables $x_i y_j$ ne contient que des termes de la forme $[a, x, y]$ ou des produits d'un terme du type $[a, b, x]$ ou $g(x)$ par un terme analogue en y . Pour ces termes, on a le lemme suivant :

6.4.4 Lemme. Par l'opération de restitution on a $\Psi([a, x, y]) = 2f(a)$, $\Psi(g(x)h(y)) = [f, g, h]$, $\Psi(g(x)[a, b, y]) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$ et $\Psi([a, b, y][c, d, x]) = f(a)[b, c, d] - f(b)[a, c, d]$.

Démonstration. On calcule d'abord $P(x, y) - P(y, x)$. On obtient successivement $2[a, x, y]$, $g(x)h(y) - h(x)g(y)$, $g(x)[a, b, y] - g(y)[a, b, x]$ et $[a, b, y][c, d, x] - [a, b, x][c, d, y]$. On conclut alors avec les formules 2.3.23. En effet, on a, par exemple $[a, x, y] = (x \wedge y)(a)$ qui donne $f(a)$ par restitution.

Comme, par l'opération de restitution on a $\Psi(G) = 2dF$, on voit que F est bien un polynôme en les crochets et les évaluations, ce qui est la contradiction cherchée.

6.4.3 Preuve de 3.2.4

Premières réductions

Cette fois, l'anneau U est l'anneau des polynômes en les X_{ijk} , Y_{pqr} et Z_{ip} . Soit $F \in U$. On suppose que ce polynôme est dans $\text{Ker } \Phi$, autrement dit qu'il est nul si l'on substitue respectivement $[x_i, x_j, x_k]$, $[f_p, f_q, f_r]$ et $f_p(x_i)$ aux indéterminées et il s'agit de montrer qu'il est dans l'idéal J . On note d'abord qu'on peut supposer F homogène de degré d (resp. e , resp. f) en les variables de type X (resp. Z , resp. Y), avec, par exemple, $d \geq f$. Quitte à remplacer chaque terme $X_{ijk}Y_{pqr}$ par un polynôme en les variables Z grâce aux relations \mathcal{T} on peut alors supposer que les variables Y n'interviennent pas. On est ainsi ramené au cas où F est un polynôme en les variables de type X et Z seulement, homogène séparément en chaque type de variables.

On commence par traiter un cas particulier :

6.4.5 Lemme. Avec les notations précédentes, on suppose que F ne contient que des variables de type X et Z et qu'il fait intervenir au plus trois indices de type i . Alors, le polynôme F est identiquement nul.

Démonstration. Il y a deux cas selon que F contient des variables de type X ou non.

a) Supposons par exemple que F est un polynôme en les seules variables $Z_{i,p}$ avec $i = 1, 2, 3$ et $p \in \{1, 2, \dots, m\}$ quelconque. Soit $(z_{i,p})$ un élément quelconque de k^{3m} . Il existe des formes linéaires φ_p sur k^3 telles que l'on ait, sur les vecteurs de la base canonique, $\varphi_p(e_i) = z_{i,p}$. Si l'on spécialise les variables f_p en φ_p et les x_i en e_i on voit que $F((z_{i,p}))$ est nul sur k^{3m} . En vertu de 1.2.6, F est donc le polynôme nul.

b) Si F fait intervenir des variables X , comme il n'y a que trois indices i possibles, disons 1, 2, 3, on voit que, modulo les relations d'alternance, F ne

contient que la variable $X_{1,2,3}$ et, comme il est homogène, on a $F = X_{1,2,3}^d G$ où G est un polynôme en les Z_{ip} seulement. Si on spécialise les variables X, Z , d'abord en $[x_1, x_2, x_3]$ et $f_p(x_i)$, puis en $x_i = e_i$ et $f_p = \varphi_p$, on voit que G s'annule (car $[e_1, e_2, e_3]$ n'est pas nul) et on est ramené au cas précédent : on a $G = 0$, donc $F = 0$.

Quelques déterminants

Comme dans le cas des relations entre les invariants de m points il faut montrer que certains déterminants sont dans J :

6.4.6 Proposition. *Quels que soient les indices $a, b, c, d; s, t, u, v, w, x; p, q, r, \sigma$, les déterminants suivants sont dans J :*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} X_{ast} & X_{auv} & X_{awx} & Z_{ap} \\ X_{bst} & X_{buw} & X_{bwx} & Z_{bp} \\ X_{cst} & X_{cuw} & X_{cwx} & Z_{cp} \\ X_{dst} & X_{duv} & X_{dwx} & Z_{dp} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} X_{ast} & X_{auv} & Z_{aq} & Z_{ap} \\ X_{bst} & X_{buw} & Z_{bq} & Z_{bp} \\ X_{cst} & X_{cuw} & Z_{cq} & Z_{cp} \\ X_{dst} & X_{duv} & Z_{dq} & Z_{dp} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} X_{ast} & Z_{ar} & Z_{aq} & Z_{ap} \\ X_{bst} & Z_{br} & Z_{bq} & Z_{bp} \\ X_{cst} & Z_{cr} & Z_{cq} & Z_{cp} \\ X_{dst} & Z_{dr} & Z_{dq} & Z_{dp} \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} Z_{a\sigma} & Z_{ar} & Z_{aq} & Z_{ap} \\ Z_{b\sigma} & Z_{br} & Z_{bq} & Z_{bp} \\ Z_{c\sigma} & Z_{cr} & Z_{cq} & Z_{cp} \\ Z_{d\sigma} & Z_{dr} & Z_{dq} & Z_{dp} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Rappelons, cf. 6.3.6, que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_{ast} & X_{auv} & X_{awx} & X_{ayz} \\ X_{bst} & X_{buw} & X_{bwx} & X_{byz} \\ X_{cst} & X_{cuw} & X_{cwx} & X_{cyz} \\ X_{dst} & X_{duv} & X_{dwx} & X_{dyz} \end{vmatrix}$$

est dans l'idéal engendré par les relations d'alternance et les relations \mathcal{R} . Montrons, par exemple, que Δ_1 est dans J . Pour cela on commence par ajouter à U les variables X_{ayz}, \dots, X_{dyz} (en choisissant des indices y, z non encore utilisés). On obtient un nouvel anneau V avec un idéal J_V défini de la même manière que J . En vertu de 6.3.6, Δ est dans J_V . On considère alors l'homomorphisme $\theta : V \rightarrow U$ qui envoie les variables X_{ayz}, \dots, X_{dyz} sur Z_{ap}, \dots, Z_{dp} . Par cet homomorphisme, les relations \mathcal{R} s'envoient sur les relations \mathcal{S} :

$$\theta(\mathcal{R}(i, j, k, l; y, z)) = \mathcal{S}(i, j, k, l; p),$$

de sorte qu'on a $\theta(J_V) \subset J$. Comme on a $\Delta_1 = \theta(\Delta)$, Δ_1 est bien dans J . Le raisonnement est identique pour les quatre déterminants Δ_i .

Le déterminant Δ'

On utilise encore les techniques vues précédemment : polarisation et dédoublement (il suffit ici de dédoubler les indices de type i). Soit U l'anneau $k[(X_{i,j,k}), (Z_{i,p})]$ avec $i, j, k = 1, \dots, m$ et $p = 1, \dots, n$ et U' l'anneau obtenu par dédoublement : $U' = k[(X_{i,j,k}), (Z_{i,p})]$ où i, j, k varient dans $\{1, \dots, m\} \times \{0, 1\}$ (il y a donc des indices i, j, k et des indices i', j', k') et soit φ l'homomorphisme "oubli des primes". On appelle J' l'idéal de U' analogue à J (donc engendré par les relations d'antisymétrie et les relations de types $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$). Il est clair qu'on a $\varphi(J') \subset J$. On a le lemme suivant :

6.4.7 Lemme. *Soit $F \in U$, $a, b, c, d \in \{1, \dots, m\}$. L'élément suivant est dans l'idéal J' :*

$$\Delta'(F) = \begin{vmatrix} D_{d'd} & D_{d'c} & D_{d'b} & D_{d'a} \\ D_{c'd} & D_{c'c} & D_{c'b} & D_{c'a} \\ D_{b'd} & D_{b'c} & D_{b'b} & D_{b'a} \\ D_{a'd} & D_{a'c} & D_{a'b} & D_{a'a} \end{vmatrix} (F).$$

Démonstration. Elle est pratiquement identique à celle de 6.3.6 à laquelle nous renvoyons le lecteur. Cette fois, la matrice A s'écrit $A = B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3 + B_4C_4$ où les matrices d'indice 4 prennent en compte les variables Z , soit précisément :

$$B_4 = \begin{pmatrix} Z_{d'1} & Z_{d'2} & \cdots & Z_{d'n} \\ Z_{c'1} & Z_{c'2} & \cdots & Z_{c'n} \\ Z_{b'1} & Z_{b'2} & \cdots & Z_{b'n} \\ Z_{a'1} & Z_{a'2} & \cdots & Z_{a'n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_4 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial Z_{d1}} & \frac{\partial}{\partial Z_{c1}} & \frac{\partial}{\partial Z_{b1}} & \frac{\partial}{\partial Z_{a1}} \\ \frac{\partial}{\partial Z_{d2}} & \frac{\partial}{\partial Z_{c2}} & \frac{\partial}{\partial Z_{b2}} & \frac{\partial}{\partial Z_{a2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial Z_{dn}} & \frac{\partial}{\partial Z_{cn}} & \frac{\partial}{\partial Z_{bn}} & \frac{\partial}{\partial Z_{an}} \end{pmatrix}.$$

On écrit la relation sous la forme $A = BC$ (B et C sont respectivement de taille $4 \times (3m^2 + n)$ et $(3m^2 + n) \times 4$) et, grâce au dédoublement, les multiplications et les dérivations ne portent pas sur les mêmes variables, donc commutent, ce qui permet d'appliquer la formule de Cauchy-Binet. Cette fois, les déterminants extraits de la matrice B , qui sont obtenus en sélectionnant quatre colonnes de cette matrice, sont formés de p colonnes de variables de type X (avec $p = 4, 3, 2, 1$ ou 0) et de $4 - p$ de colonnes de type Z . On obtient exactement les déterminants $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_4$ de 6.3.6 et 6.4.6. Ces déterminants étant dans J' , il en est de même de $\Delta'(F)$.

6.4.8 Corollaire. (Congruence de Capelli) Soient $a, b, c, d \in I$ des indices distincts et soit $F \in U$. L'élément suivant est dans l'idéal J :

$$\Delta(F) = \begin{vmatrix} D_{dd} + 3\text{Id} & D_{dc} & D_{db} & D_{da} \\ D_{cd} & D_{cc} + 2\text{Id} & D_{cb} & D_{ca} \\ D_{bd} & D_{bc} & D_{bb} + \text{Id} & D_{ba} \\ D_{ad} & D_{ac} & D_{ab} & D_{aa} \end{vmatrix} (F).$$

Démonstration. Comme pour 6.3.8, cela résulte de la formule $\varphi(\Delta'(F)) = \Delta(F)$ qui n'est autre que l'identité de Capelli pour le dédoublement, cf. 6.1.12, de 6.4.6 (qui remplace 6.3.6) et de la relation $\varphi(J') = J$.

Fin de la preuve de 3.2.4

On peut alors finir la preuve de 3.2.4. On ordonne les polynômes homogènes de l'anneau U en imposant que les variables Z soient plus petites que les variables X et en ordonnant ensuite selon un ordre lexicographique chaque type de variables. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un polynôme F , homogène séparément de degrés d, e en X, Z , qui est dans $\text{Ker } \Phi$ et pas dans J . On choisit un tel polynôme, minimal pour l'ordre indiqué ci-dessus. S'il fait intervenir moins de quatre indices de type i , il est nul en vertu de 6.4.5 et c'est une contradiction. S'il fait intervenir quatre indices, disons a, b, c, d , on applique la congruence de Capelli (cf. 6.4.8) au polynôme F avec ces indices. Le lemme précédent et la relation $\varphi(J') \subset J$ montrent que $\Delta(F)$ est dans J . Raisonnant comme dans la fin de la démonstration de 3.1.10, on voit qu'on a $\Delta(F) = \lambda F + G \in J$ où λ est un scalaire non nul (c'est l'hypothèse sur les quatre indices) et où le polynôme G est plus petit que F pour l'ordre indiqué ci-dessus. Comme J est contenu dans $\text{Ker } \Phi$, G est dans $\text{Ker } \Phi$, donc, vu la minimalité de F , il est dans J , donc aussi F , ce qui est absurde.

6.5 Exercices

6.5.1 Exercice. Montrer l'identité de Capelli-Cayley 6.2.8 par le calcul. (On se ramènera au cas où F est un monôme :

$$F(a, b, c) = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} b_3^{\beta_3} c_1^{\gamma_1} c_2^{\gamma_2} c_3^{\gamma_3}$$

et on prendra son courage à deux mains ! On pourra commencer par le cas de deux variables pour s'entraîner.)

Chapitre 7

Opérations, invariants et quotients : quelques exemples

To construct both orbit spaces and moduli “generically” are simple exercises.

D. Mumford

Ce chapitre nous entraîne un peu plus loin dans les mathématiques et il peut notamment être une motivation pour lire le fascinant mais difficile livre de Mumford, Fogarty et Kirwan Geometric Invariant Theory, [Mum65], que nous citerons parfois sous le nom de [GIT], et dont le chapitre 3 (intitulé An elementary example) traite le problème de l’opération de $PGL(E)$ sur les m -uplets de points de $\mathbf{P}(E)$ et montre, dans ce cas particulier, comment s’applique la théorie des points “stables” qui constitue le cœur de [GIT]. Nous allons nous contenter ici d’examiner cet “exemple élémentaire”, et, fidèle à nos principes, uniquement dans le cas particulier du plan projectif, renvoyant le lecteur curieux à la lecture de [GIT] et des 926 items de sa bibliographie pour d’autres exemples plus avancés (on peut notamment conseiller [Pop77] et [New78] pour un premier contact). Dans ce qui suit nous travaillerons principalement sur \mathbf{R} , ce qui nous obligera parfois à un traitement moins algébrique que celui de Mumford. Nous mettrons l’accent sur les propriétés de séparation et de compacité des quotients, mais aussi sur l’existence éventuelle d’un plongement projectif polynomial. Les cas $m = 5$ et $m = 6$, emblématiques du cas général, seront étudiés en détail.

7.1 Problématique et préliminaires

7.1.1 Quelques questions

La problématique de ce chapitre¹ est la suivante. Dans les chapitres précédents, nous avons considéré l'opération naturelle du groupe $G := PGL(E)$ sur $\mathbf{P}(E)$, $\mathbf{P}(E^*)$ et les produits $X = \mathbf{P}(E)^p \times \mathbf{P}(E^*)^q$, c'est-à-dire sur les uplets $(\underline{a}, \underline{D})$ de p points et q droites du plan ou sur certaines parties de ces espaces. Nombre de questions que nous avons abordées sont liées à une question plus générale : décrire le quotient X/G , c'est-à-dire l'ensemble des classes pour la relation $x \sim y \iff \exists g \in G, y = g.x$, autrement dit l'ensemble des orbites de X sous l'action de G . Cette description est la fonction principale des invariants. En effet, si l'on dispose d'invariants des uplets de points et de droites, habitant dans un espace numérique N (affine ou projectif), toute application Φ de X dans N qui à $(\underline{a}, \underline{D})$ associe (certains de) ses invariants se factorise en une flèche $\overline{\Phi} : X/G \rightarrow N$ (c'est le fait même que les invariants soient invariants!) et on peut espérer qu'une telle application fournisse une description de ce quotient. Il y a cependant de multiples questions autour de cette situation :

- De quel quotient parle-t-on ? S'agit-il seulement d'un quotient ensembliste (auquel cas, l'ensemble des orbites fait l'affaire) ? Ou doit-il et peut-il être muni de structures supplémentaires (variété algébrique, différentiable, etc.) ? Dans ce qui suit, nous mettrons notamment l'accent sur l'aspect topologique, qui mène déjà à nombre de questions intéressantes.

- En quel sens est-il un quotient ? (À la suite de Mumford, on peut distinguer entre quotients catégoriques, géométriques, etc.)

- Existe-t-il un quotient de X tout entier (avec une structure de variété) ? On verra que ce n'est guère raisonnable, même dans des cas très simples. Parmi les problèmes cruciaux, on verra apparaître la **séparation** et la **compacité** du quotient.

- Si l'on doit se contenter de l'existence d'un quotient sur un ouvert, quel est le plus grand ouvert sur lequel on a un bon quotient et comment le caractériser ? (Comme le dit Mumford, si les données sont suffisamment génériques, établir l'existence d'un quotient est un simple exercice). On rencontrera ici les diverses notions d'objets stables introduites par Mumford.

- Une des principales qualités d'un beau quotient, c'est de posséder un **plongement** dans un espace affine ou projectif. Nous travaillerons surtout dans le cadre algébrique où les applications Φ que nous utiliserons seront polynomiales et invariantes, donc définies par des crochets. C'est là que la

¹Le lecteur est averti que, plus encore que tous les autres, ce chapitre est une version provisoire.

notion de stabilité de Mumford se révélera cruciale. Dans le cadre topologique ou différentiable, nous verrons que la question est beaucoup plus facile (la seule obstruction sérieuse étant la séparation).

- Enfin, lorsqu'on a un tel plongement dans un espace numérique affine ou projectif, à l'aide d'invariants, ceux-ci ne remplissent pas en général l'espace puisqu'on a vu qu'il y a des relations entre eux. On retrouve la question d'énumérer ces relations, mais dite de manière géométrique : il s'agit de décrire l'espace des invariants vu comme un sous-espace localement fermé d'un espace projectif (quelles sont ses équations, quelle est sa dimension, quel est son degré, est-il connexe, irréductible, lisse, etc. ?). Nous n'aborderons ces questions que dans les cas $m = 5$ et $m = 6$.

7.1.1 Notations. Dans ce qui suit on désigne par E un k -espace vectoriel de dimension 3 (le corps k sera le plus souvent² égal à \mathbf{R}). On pose $G = PGL(E) \simeq PGL(3, k)$. Le groupe G opère sur les m -uplets de points du plan³ projectif $\mathbf{P}(E)$ par $g.(a_1, \dots, a_m) = (g.a_1, \dots, g.a_m)$. Le cas des points et des droites, sera brièvement évoqué en fin de chapitre. Dans ce qui suit, on supposera⁴ toujours $m \geq 4$.

7.1.2 Un peu de géométrie algébrique

Avertissement

Nous avons souhaité présenter ici une bonne partie des résultats de la théorie dans le cas du corps des réels. Le lecteur perspicace ne manquera pas de noter dans ce qui suit une perpétuelle hésitation entre deux tentatives : celle de nous contenter d'un traitement topologique ou différentiable des questions, avec l'inconvénient de perdre les aspects algébriques du livre de Mumford, celle au contraire de travailler dans le cadre algébrique de [GIT], avec l'obligation de sortir du cocon des variétés algébriques (qui ne vaut que dans le cas algébriquement clos) pour aller nous frotter aux schémas. En vérité, sur ce second point, nous ne franchirons jamais vraiment le pas, utilisant le cas des variétés algébriques sur un corps algébriquement clos (par exemple les complexes) comme référence métaphorique au cas général des schémas. Nous indiquons toutefois dans ce paragraphe les difficultés qui se présentent et les idées générales qui permettent de les surmonter.

²Le lecteur qui souhaiterait une approche plus algébrique est renvoyé à [GIT]. Il constatera que la théorie de Mumford fonctionne sur un corps quelconque, voire sur \mathbf{Z} .

³Le cas de la droite projective est évoqué dans les exercices.

⁴Le lecteur se convaincra que lorsque l'on travaille avec trois points du plan ou moins, les choses sont essentiellement triviales.

Le cas algébriquement clos

Lorsqu'on fait de la géométrie algébrique sur un corps k algébriquement clos, les choses se déroulent de manière idyllique. Considérons par exemple un ensemble algébrique affine $V = V(I) \subset k^n$ défini par un idéal I de $S = k[X_1, \dots, X_n]$. On a vu qu'on peut lui associer un anneau $\Gamma(V) = S/I(V)$ où $I(V)$ est l'idéal des polynômes nuls sur V . Le point essentiel est que cet idéal $I(V)$ est déterminé par I grâce au Nullstellensatz 1.2.7 : $I(V)$ est la racine de I et il lui est notamment égal lorsque I est premier. On récupère ensuite V à partir de $\Gamma(V)$ comme l'ensemble des idéaux maximaux de $\Gamma(V)$. L'anneau S/I et l'ensemble $V(I)$ sont donc intrinsèquement liés, au moins lorsque I est premier.

Une autre notion importante est celle d'ouvert affine. Il s'agit d'ouverts isomorphes (en un sens à préciser, voir par exemple [Per95] ou [Har77]) à un ensemble algébrique affine et qui permettent souvent de se ramener à ce cas. Les prototypes de ces ouverts sont les ouverts $D(f)$ de k^n ou $D^+(F)$ de $\mathbf{P}^n(k)$ (avec $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ et $F \in k[X_0, X_1, \dots, X_n]$, homogène) :

$$D(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid f(x_1, \dots, x_n) \neq 0\},$$

$$D^+(F) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{P}^n(k) \mid F(x_0, x_1, \dots, x_n) \neq 0\}.$$

Notons par exemple que l'ouvert $D(f)$ est bien affine car il est isomorphe à l'ensemble algébrique $V \subset k^{n+1}$ défini par l'équation $tf(x_1, \dots, x_n) - 1 = 0$ par le morphisme $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \dots, x_n)})$. En revanche, on montre qu'un ouvert dont le complémentaire est de codimension ≥ 2 (comme $k^2 - \{(0, 0)\}$) n'est pas affine.

Le cas réel

Les choses se compliquent lorsque le corps n'est plus algébriquement clos. Supposons par exemple $k = \mathbf{R}$ et considérons dans \mathbf{R}^2 les ensembles algébriques définis par les équations $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ et $X^2 + Y^2 = 0$ (ou par les idéaux principaux engendrés). Ce sont respectivement le vide et le singleton $\{(0, 0)\}$. Dans ce cas, bien que les polynômes soient irréductibles, donc les idéaux engendrés premiers, les idéaux $I(V)$ correspondants sont beaucoup plus gros (on trouve respectivement l'idéal $(1) = \mathbf{R}[X, Y]$ et l'idéal (X, Y)). Cette fois, la correspondance entre $V(I)$ et $k[X_1, \dots, X_n]/I$ n'est donc plus satisfaisante (ne serait-ce que parce qu'il y a une foule d'anneaux qui correspondent à l'ensemble vide, dont l'anneau nul!).

Deux solutions peuvent être envisagées pour traiter le cas réel.

Celle de la géométrie algébrique réelle (voir [JB98]) consiste à équiper les variétés algébriques du faisceau des fonctions rationnelles réelles. L'un des

inconvenients de cette voie⁵ est que les anneaux de fonctions obtenus ne sont plus de type fini.

Celle des schémas, proposée par A. Grothendieck dans les années 1950, consiste à donner la primeur à l'anneau (ou encore aux équations) par rapport à l'ensemble algébrique (donc aux points). Elle conduit à définir par exemple le schéma $\text{Spec } \mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2)$ avec l'idée que les points de cet objet sont non seulement les zéros réels de $X^2 + Y^2$ (il n'y a que $(0, 0)$), mais aussi ceux de ce polynôme dans toute autre \mathbf{R} -algèbre et essentiellement dans \mathbf{C} . En ce sens, on peut considérer que la théorie de schémas est un moyen de se ramener au cas algébriquement clos.

Un avatar de la difficulté précédente concerne les ouverts affines $D(f)$ évoqués ci-dessus. En géométrie algébrique réelle, la notion n'a guère d'intérêt, tous les ouverts d'une variété affine étant de la forme précédente, donc affines. Ainsi, par exemple, $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ est égal à $D(X^2 + Y^2)$. En fait, presque toutes les variétés, projectives comprises⁶, sont affines en géométrie réelle, voir [JB98]. Dans ce qui suit, les ouverts que nous dirons affines devront avoir tout de même une spécificité.

En théorie des schémas, l'ouvert $U = D(X^2 + Y^2)$ de \mathbf{R}^2 correspond au schéma affine $\text{Spec } \mathbf{R}[X, Y]_{(X^2 + Y^2)}$ défini par l'anneau localisé (l'anneau obtenu en inversant $X^2 + Y^2$). C'est donc bien un ouvert affine dans la théorie de Grothendieck. La difficulté est que cet ouvert n'est pas défini par l'ensemble $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ de ses points réels. On comprend mieux le phénomène en regardant le complémentaire de U dans le plan, qui est le fermé $V = \text{Spec } \mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2)$ défini par l'équation $x^2 + y^2 = 0$. Si les points réels de V sont bien les points du plan différents de $(0, 0)$, en tant que schéma il faut considérer aussi les points à valeurs complexes et là, il y a bien d'autres points que l'origine (par exemple $(1, i)$).

Le cas favorable

Dans tout ce qui suit, nous travaillerons pour l'essentiel sur le corps \mathbf{R} , mais nous essayerons d'éviter comme la peste les difficultés évoquées ci-dessus, notamment en ce qui concerne les ouverts affines $D(f)$ et $D^+(F)$, en nous limitant au cas favorable où les points réels de l'ouvert en question (ou de son complémentaire) déterminent les points complexes. Dans le cas d'un polynôme irréductible, cela correspond au cas où l'on a la formule du Nullstellensatz : $I(V(f)) = (f)$. Le théorème suivant montre que pour qu'il en soit ainsi il suffit que $V(f)$ ne soit pas trop petit, ce qui revient à écarter

⁵L'absence de finitude fait que nous n'utiliserons pas ce point de vue ici.

⁶Car $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, par exemple, n'est autre que $D^+(X^2 + Y^2 + T^2)$!

les polynômes qui gardent un signe constant comme $X^2 + Y^2 + 1$ ou $X^2 + Y^2$:

7.1.2 Théorème. *Soit $f \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme irréductible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *On a $I(V(f)) = (f)$.*
- 2) *Le polynôme f prend des valeurs > 0 et < 0 sur \mathbf{R}^n .*
- 3) *On a $\dim V(f) = n - 1$.*

Si ces conditions sont réalisées, les zéros de f dans \mathbf{C}^n sont l'adhérence (au sens de Zariski) des zéros réels.

Démonstration. Voir [JB98].

Dans ce qui suit, les ouverts $D(f)$ considérés seront des ouverts invariants sous $PGL(E)$ définis par des produits de crochets⁷ et la condition de signe non constant sera toujours réalisée puisqu'en chaque variable les crochets sont linéaires.

7.1.3 Plongements projectifs

Le plongement de Segre

Il n'est pas question ici de donner un exposé d'ensemble sur les plongements des variétés algébriques dans un espace projectif (cela nous conduirait à couvrir une bonne partie de la géométrie algébrique, voir par exemple [Har77]), mais nous aurons toutefois besoin de quelques notions sur le plongement de Segre que l'on peut trouver par exemple dans [Har77] ou [Per96]. On suppose toujours E de dimension 3.

7.1.3 Proposition. *Soit $q = (a_1, \dots, a_m) \in E^m$. On choisit une base de E et on écrit les a_i avec les coordonnées homogènes (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) . On considère l'application σ_0 de E^m dans k^{M+1} avec $M + 1 = 3^m$ définie par :*

$$\sigma_0(a_1, \dots, a_m) = (a_{1,i_1} a_{2,i_2} \cdots a_{m,i_m})$$

où l'on a pris pour les i_k tous les indices possibles parmi 1, 2, 3.

Alors σ_0 induit une application injective $\sigma : \mathbf{P}(E)^m \rightarrow \mathbf{P}^M(k)$ (dite **plongement de Segre**) dont l'image est une sous-variété projective V de \mathbf{P}^M et σ induit un isomorphisme de $\mathbf{P}(E)^m$ sur V .

7.1.4 Exemple. On plonge ainsi $\mathbf{P}(E)^2$ dans $\mathbf{P}^8(k)$ en associant aux points (x, y, z) et (u, v, w) le point de coordonnées homogènes :

$$(xu, xv, xw, yu, yv, yw, zu, zv, zw).$$

⁷Lesquels sont des polynômes irréductibles.

Avec les notations précédentes, si on note x_0, \dots, x_M les coordonnées homogènes sur \mathbf{P}^M et si F est un polynôme homogène en les x_i , on a rappelé ci-dessus que l'ouvert $D^+(F)$ sur lequel F est non nul est un ouvert affine⁸ de \mathbf{P}^M (voir [Per96] Ch. III). On en déduit le corollaire suivant :

7.1.5 Corollaire. *Soit $f(a_1, \dots, a_m)$ un polynôme en les a_{ik} , homogène de même degré d en chaque paquet de variables a_i . On a vu en 1.2.9 que le fait qu'un tel polynôme s'annule en $q = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{P}(E)^m$ ne dépend que de q et pas des représentants des a_i . L'ensemble $D(f)$ où f est non nul est un ouvert affine de $\mathbf{P}(E)^m$.*

Démonstration. L'hypothèse montre que f s'écrit comme un polynôme F en les variables $a_{1,i_1} a_{2,i_2} \cdots a_{m,i_m}$ du plongement de Segre, homogène de degré d . En identifiant $\mathbf{P}(E)^m$ à son image V par σ , on a $D(f) = D^+(F) \cap V$ qui est bien un ouvert affine de V .

On peut d'ailleurs préciser quelles sont les fonctions régulières sur l'ouvert $D(f)$: ce sont les quotients g/f^n où n est un entier et où g est homogène de degré nd en chaque vecteur a_i .

7.1.6 Remarque. Le plongement $\mathbf{P}(E)^m \rightarrow \mathbf{P}^M$ sera en filigrane dans tout ce qui suit. En particulier, on l'utilisera pour tenter de plonger le quotient $\mathbf{P}(E)^m/G$ (ou au moins certains de ses ouverts) dans un espace projectif. Pour cela on partira des fonctions polynomiales homogènes sur \mathbf{P}^M , donc de fonctions polynomiales en a_1, \dots, a_m **homogènes de même degré** en chaque a_i et on cherchera de telles fonctions invariantes sous G .

7.1.4 Linéarisation

Dans ce paragraphe on suppose que k est le corps des réels. Dans ce cas on a une **linéarisation** de l'action de $G = PGL(E)$ sur le produit $\mathbf{P}(E)^m$. Cela signifie que l'opération de G sur $\mathbf{P}(E)^m$ provient d'une représentation linéaire :

7.1.7 Proposition. *On suppose $k = \mathbf{R}$. Il existe une représentation linéaire de $G = PGL(E)$ sur E^m qui induit l'action naturelle sur $\mathbf{P}(E)^m$.*

Démonstration. En effet, on a un isomorphisme $SL(3, \mathbf{R}) \simeq PGL(3, \mathbf{R})$ (voir 3.0.6). L'action naturelle de $SL(3, \mathbf{R})$ sur E^m définie par $g.(x_1, \dots, x_m) = (g.x_1, \dots, g.x_m)$ induit l'action naturelle de PGL sur $\mathbf{P}(E)^m$.

⁸Au sens des variétés algébriques si le corps est algébriquement clos, au sens des schémas sinon, avec le cas favorable de 7.1.2.

7.1.8 Remarque. La proposition précédente vaut pour $SL(n, \mathbf{R})$ avec n impair. Elle est fausse dans le cas n pair sur \mathbf{R} et fausse en général sur un corps autre que \mathbf{R} , par exemple \mathbf{C} . Le cas favorable dans lequel nous nous sommes placés nous permettra d'éviter un certain nombre de complications (tout ce qui tourne, dans Mumford, autour de la notion de "linearization of an invertible sheaf").

De même, on a une linéarisation de l'action de G sur l'espace projectif \mathbf{P}^M associé au plongement de Segre :

7.1.9 Proposition. *On suppose $k = \mathbf{R}$ et on reprend les notations de 7.1.3. Il existe une représentation linéaire de $G = PGL(3, \mathbf{R}) \simeq SL(3, \mathbf{R})$ sur l'espace vectoriel \mathbf{R}^{M+1} . Cette représentation induit une opération sur $\mathbf{P}^M(\mathbf{R})$, qui laisse stable l'image du plongement de Segre $V = \sigma(\mathbf{P}(E)^m)$ et redonne l'action naturelle de G sur $\mathbf{P}(E)^m$.*

Démonstration. On a une matrice 3×3 , $g = (g_{ij})$ et les variables de \mathbf{R}^{M+1} sont les $X_{i_1 \dots i_m}$ avec $i_k = 1, 2, 3$. L'opération de $SL(3, \mathbf{R})$ sur \mathbf{R}^{M+1} est définie par la formule :

$$g(X_{i_1 \dots i_m}) = \sum_{j_k} g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \dots g_{i_m j_m} X_{j_1 \dots j_m}.$$

7.1.5 Quotient géométrique, quotient catégorique

Quand on travaille dans un type de structure donné (c'est-à-dire dans une certaine catégorie), on a des **objets**, par exemple les espaces topologiques, les variétés différentiables, etc. et des **morphismes** entre ces objets, par exemple les applications continues ou différentiables, etc. Dans ce qui suit, nous supposons toujours que les objets considérés sont des ensembles, munis de structures additionnelles, et que les morphismes sont des applications particulières. La notion de quotient peut alors revêtir deux sens distincts. La notion de quotient géométrique⁹ privilégie l'aspect ensembliste :

7.1.10 Définition. *Soit X un objet muni d'une relation d'équivalence \mathcal{R} et soit $p : X \rightarrow Y$ un morphisme. On dit que Y est un **quotient géométrique** de X par \mathcal{R} si on a $x\mathcal{R}y \iff p(x) = p(y)$ pour tous $x, y \in X$.*

La notion de quotient catégorique met en avant les morphismes :

7.1.11 Définition. *Soit X un objet muni d'une relation d'équivalence \mathcal{R} et soit $p : X \rightarrow Y$ un morphisme. On dit que Y est un **quotient catégorique** de X par \mathcal{R} si on a les propriétés suivantes :*

⁹Je m'écarte un peu de Mumford ici.

1) Pour tous $x, y \in X$, $x \mathcal{R} y \implies p(x) = p(y)$.

2) La flèche p est universelle pour cette propriété, i.e. si on a $q : X \rightarrow Z$ avec la condition analogue à 1), il existe un unique morphisme $\varphi : Y \rightarrow Z$ tel que $q = \varphi \circ p$.

7.1.12 Remarque. En général, il n'y a pas identité entre ces notions, ni même d'implication¹⁰. Par exemple, un des résultats de base de [GIT] (th. 1.1) est le suivant :

7.1.13 Théorème. On suppose k algébriquement clos¹¹. Soit G un groupe algébrique réductif opérant sur une variété algébrique affine X d'anneau A . Il existe un quotient catégorique $Y = X/G$ qui est une variété algébrique affine. L'anneau B de Y est le sous-anneau de A formé des éléments invariants sous l'action de G .

La preuve n'est pas très difficile. Elle utilise le fait que G est réductif au travers de l'identité de Reynolds, voir ci-dessus 1.4.6. Cependant, ce quotient n'est pas géométrique en général. Par exemple, si on considère la variété algébrique affine k^2 , d'anneau $k[X, Y]$, sur laquelle opère le groupe réductif $GL(2)$, on a un quotient catégorique qui est la variété algébrique réduite à un point (alors que le groupe a évidemment deux orbites dans X : l'origine et le complémentaire de l'origine). En effet, le groupe opère sur $k[X, Y]$ de la manière évidente, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ opérant sur (X, Y) par $(aX + bY, cX + dY)$ et on voit aussitôt que les seuls polynômes invariants sont les constantes.

Précisément, dans le cas affine, on montre que le quotient est géométrique si et seulement si les orbites sont fermées (voir [GIT] 1.3), ce qui n'est pas le cas ici du complémentaire de l'origine. Cette condition, que nous avons déjà rencontrée ci-dessus (voir 2.2.18), joue un grand rôle dans toute la théorie.

Dans la suite, nous utiliserons presque exclusivement les quotients au sens géométrique.

7.1.6 Quelques rappels topologiques

Dans tout ce qui suit, nous travaillerons sur le corps¹² \mathbf{R} .

¹⁰La définition que donne Mumford pour un quotient géométrique est plus forte que celle donnée ici. En particulier, elle implique que le quotient est aussi catégorique.

¹¹Le résultat de Mumford vaut si le corps n'est pas algébriquement clos, mais dans ce cas, il faut le formuler en termes de schémas.

¹²Mais tout ce qui est dit se transpose sans peine dans le cas de \mathbf{C} où les géomètres algébristes seront plus à leur aise.

Topologie de Zariski et topologie forte

On sait que les espaces projectifs réels sont munis d'une topologie (que l'on dira "naturelle" ou "forte") définie dans la Partie I, exercice ?? . Ils sont aussi munis, comme sur un corps quelconque, de la topologie de Zariski, et il convient de noter que la topologie naturelle est plus fine que la topologie de Zariski : toute partie ouverte (resp. fermée) pour Zariski l'est aussi pour la topologie naturelle.

7.1.14 Proposition.

1) Les applications polynomiales ou rationnelles sont continues pour la topologie de Zariski dès qu'elles sont définies.

2) Les parties de $(\mathbf{P}^r)^m$ définies par des coïncidences ou des alignements comme par exemple :

$$A_{i,j} = \{(a_1, \dots, a_m) \mid a_i = a_j\} \quad \text{ou} \quad B_{i,j,k} = \{(a_1, \dots, a_m) \mid a_i, a_j, a_k \text{ alignés}\}$$

sont des fermés pour la topologie de Zariski.

3) Soient k et l des entiers > 0 avec $l \geq 2$. La partie $U_{k,l} \subset \mathbf{P}(E)^m$ définie comme l'ensemble des $q = (a_1, \dots, a_m)$ tels que :

- k au plus des a_i sont confondus,
- l au plus des a_i sont alignés,

est un ouvert de Zariski invariant sous $PGL(E)$. De plus, si on suppose $l < m$, cet ouvert est réunion d'ouverts définis par des produits de crochets, donc invariants par $PGL(E)$.

Démonstration. Le point 1) est clair. Dans 2), la partie B est définie par l'équation $[a_i, a_j, a_k] = 0$, tandis que A est définie par l'annulation des 2-mineurs de la matrice des coordonnées homogènes des deux points.

Dans 3), le fait qu'on ait un ouvert est conséquence de 2). Pour le dernier point, soit $q \in U_{k,l}$. On considère tous les crochets qui sont non nuls en q et on appelle s le produit de ces crochets. L'ouvert $D(s)$ où s est non nul contient q . Montrons qu'il est contenu dans $U_{k,l}$. Soit $q' \in D(s)$. Si q' admet $l + 1$ points alignés, il y en a trois qui n'étaient pas alignés dans q et qui le deviennent dans q' , ce qui contredit le fait que les crochets non nuls soient les mêmes. Si q' admet $k + 1$ points confondus, il y en a deux qui ne l'étaient pas dans q , disons a'_i, a'_j . On considère alors les crochets $[a'_i, a'_j, a'_p]$ qui sont tous nuls, donc aussi les $[a_i, a_j, a_p]$. Comme $a_i \neq a_j$, cela signifie que tous les points de q sont alignés et cela contredit la condition $l < m$.

7.1.15 Remarque. On notera qu'un ouvert U du type $a_i \neq a_j$, bien qu'invariant par PGL , n'est pas réunion d'ouverts définis par des produits de crochets non nuls. Par exemple, si on prend le produit de tous les crochets

$[a_i, a_j, a_k]$ pour tous les k il est contenu dans U , mais U contient d'autres points, ceux où les m points sont tous alignés, avec $a_i \neq a_j$. C'est une difficulté du même type que celle rencontrée en 2.1.8.

Topologie quotient

Rappelons quelques définitions bien connues :

7.1.16 Définition. Soit X un espace topologique, \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X , Y l'ensemble quotient et $p : X \rightarrow Y$ la projection. On définit une topologie (dite **topologie quotient**) sur Y en imposant qu'une partie $V \subset Y$ est ouverte si et seulement si $p^{-1}(V)$ l'est.

7.1.17 Remarques.

1) La condition précédente assure que p est une application continue. De plus, si $q : X \rightarrow Z$ est une application continue "compatible" avec la relation d'équivalence (i.e. vérifiant $x\mathcal{R}y \implies q(x) = q(y)$), l'application q se factorise de manière unique par Y , autrement dit, il existe une application continue $\varphi : Y \rightarrow Z$ vérifiant $q = \varphi \circ p$. On a ainsi un quotient dans la catégorie des espaces topologiques au sens de 7.1.11 qui est aussi un quotient géométrique.

On parlera d'**espace topologique quotient**.

2) Si U est un ouvert de X , $p(U)$ est ouvert dans X/\mathcal{R} si et seulement si $p^{-1}(p(U))$ est ouvert. Cette partie s'appelle le **saturé** de U et on la note $\text{sat}(U)$. C'est l'ensemble des $x \in X$ qui sont en relation avec un élément de U .

Dans le cas d'une opération de groupe, on a une propriété supplémentaire :

7.1.18 Proposition. On suppose que le groupe G opère sur X et que les applications $x \mapsto g.x$ sont des homéomorphismes¹³. Alors, la projection $p : X \rightarrow X/G$ est ouverte.

Démonstration. Soit U un ouvert de X . Il suffit de montrer que son saturé est encore ouvert. Or on a $\text{sat}(U) = \bigcup_{g \in G} g(U)$ et, comme les $g(U)$ sont ouverts, c'est clair.

Séparation

7.1.19 Définition. Soit Y un espace topologique. On dit que Y est **séparé** si, étant donnés deux points distincts, il existe deux ouverts disjoints qui les contiennent¹⁴. On dit que Y est **localement séparé** si tout point de Y admet un voisinage séparé.

¹³C'est toujours le cas dans les situations que nous envisageons.

¹⁴Et on dira que ces ouverts séparent les points.

C'est l'hypothèse de séparation¹⁵ qui permet d'assurer l'unicité de la limite d'une suite de points de Y . On vérifie aussitôt que, si l'on munit le produit $Y \times Y$ de la topologie produit, cette condition équivaut au fait que la diagonale est fermée¹⁶ dans $Y \times Y$. La proposition suivante est fondamentale :

7.1.20 Proposition. *Si l'espace topologique Y est localement séparé, les singletons $\{y\}$, pour $y \in Y$, sont fermés.*

Démonstration. Soit $y \in Y$. Il s'agit de montrer que le complémentaire de $\{y\}$ est ouvert. Soit x distinct de y . Il faut montrer que x est contenu dans un ouvert V qui ne contient pas y . Il existe un voisinage séparé U de x , que l'on peut supposer ouvert. Si y est dans U , comme U est séparé, il existe un ouvert V de U , donc de Y , qui contient x et pas y ; s'il n'y est pas, on pose $V = U$.

Prouver la séparation

Ce sera le plus souvent à l'aide de la proposition évidente suivante :

7.1.21 Proposition. *Soit X un espace topologique. On suppose que, pour tous $x, y \in X$, il existe un ouvert U contenant x et y et une application continue $\varphi : U \rightarrow Y$, où Y est un espace topologique séparé, avec $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Alors X est séparé.*

Cette proposition admet une variante dans le cadre des variétés algébriques :

7.1.22 Proposition. *Soit X une variété algébrique¹⁷. On suppose que, pour tous $x, y \in X$, il existe un ouvert U contenant x et y et un morphisme $\varphi : U \rightarrow Y$, où Y est une variété algébrique séparée (au sens de Zariski, c'est-à-dire que la diagonale est fermée dans le produit), avec $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Alors, X est séparée (au sens de Zariski).*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $X \times X - \Delta_X$ est ouvert dans $X \times X$. Soit $(x, y) \in X \times X$ avec $x \neq y$ et soient U, φ comme ci-dessus. Alors, $(\varphi \times \varphi)^{-1}(Y \times Y - \Delta_Y)$ est ouvert¹⁸ dans $U \times U$, donc dans $X \times X$, contient (x, y) et ne rencontre pas Δ_X , cqfd.

¹⁵Le lecteur verra que cette condition, pourtant d'apparence anodine, n'est pas réalisée en général dans le cas des espaces quotients.

¹⁶Et en géométrie algébrique où la topologie de Zariski sur le produit n'est pas égale à la topologie produit des topologies de Zariski, c'est par cette condition qu'on définit la séparation.

¹⁷Comme d'habitude, si le corps n'est pas algébriquement clos, il vaut mieux parler de schéma.

¹⁸Car $\varphi \times \varphi$ est un morphisme, donc continu.

Variétés différentiables

7.1.23 Définition. Soit X un espace topologique. On dit que X est une **pré-variété différentiable** de dimension d s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X et des homéomorphismes $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ où V_i est un ouvert de \mathbf{R}^d , qui sont tels que les flèches $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow V_i$ soient de classe C^∞ . Un tel espace est localement séparé. On dit que X est une **variété différentiable** s'il est, en outre, séparé.

7.1.24 Remarque. Les variétés algébriques, lorsqu'on les munit de la topologie forte, sont elles aussi des espaces localement séparés¹⁹. En effet, tout point y admet un voisinage ouvert affine qui est isomorphe à un ouvert de k^n .

Une condition nécessaire de séparation du quotient : les orbites fermées

7.1.25 Proposition. Soit X un espace topologique, \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X , Y l'espace topologique quotient et $p : X \rightarrow Y$ la projection. Alors, si Y est localement séparé (par exemple une pré-variété différentiable), les classes d'équivalence pour \mathcal{R} sont fermées dans X .

Démonstration. Comme les orbites sont les images réciproques des singletons $\{y\}$ par l'application continue $p : X \rightarrow Y$, cela résulte de 7.1.20.

7.1.26 Proposition. Soit X un espace topologique et G un groupe opérant sur X . Si le quotient Y est localement séparé et si une orbite est incluse dans l'adhérence d'une autre, elles sont égales.

Démonstration. Supposons $\omega(x) \subset \overline{\omega(y)}$. Comme le quotient est localement séparé, les orbites sont fermées et on a donc $\overline{\omega(y)} = \omega(y)$ d'où $x \in \omega(y)$ et $\omega(x) = \omega(y)$.

7.1.27 Exemples.

1) Considérons l'opération naturelle de $G = PGL(3, \mathbf{R})$ sur $X = (\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2)^2$. Il y a deux orbites pour cette opération : celle formée des couples (a, b) avec $a \neq b$ et celle des points diagonaux (a, a) . Il est clair que la première orbite n'est pas fermée (l'orbite diagonale est dans l'adhérence de l'orbite ouverte $a \neq b$). Topologiquement, le quotient est donc formé de deux points, l'un

¹⁹On notera que les points d'une variété algébrique sont fermés, même si la variété n'est pas séparée. Bien entendu, en termes de schémas il faut regarder seulement les points rationnels, voire les points géométriques, i.e. à valeurs dans un corps algébriquement clos (et pas du tout les points génériques, évidemment).

ouvert et l'autre fermé et situé dans l'adhérence de l'ouvert. Cet espace n'est pas localement séparé.

2) Cet exemple se généralise dans $(\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2)^m$: si ϵ est le m -uplet (a, a, \dots, a) avec $a \in \mathbf{P}^2$, dans le quotient $(\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^2)^m / PGL(3, \mathbf{R})$ il est dans l'adhérence de toutes les orbites des m -uplets (a_1, \dots, a_m) avec $a_i \in \mathbf{P}^2$. En effet, on peut supposer $a = (1, 0, 0)$ et on considère, pour n entier > 0 , l'homographie g_n définie par $g_n(x, y, t) = (x + ny + nt, y, t) = (x/n + y + t, y/n, t/n)$. Alors, si $q = (a_1, \dots, a_m)$ est un m -uplet quelconque, les $g_n(q)$ sont dans son orbite et tendent vers ϵ quand n tend vers $+\infty$.

7.1.28 Commentaire. L'exemple précédent montre qu'il n'y a aucune chance de pouvoir construire un quotient de $\mathbf{P}(E)^m$ tout entier sous l'action de $PGL(E)$ qui soit localement séparé, puisqu'aucune orbite n'est fermée, hormis celle des m -uplets diagonaux. La question est donc de trouver un ouvert invariant par G , le plus grand possible, sur lequel on ait un bon quotient. La proposition 7.1.26 montre qu'une condition nécessaire est qu'il n'y ait pas d'orbite qui soit adhérente à une autre orbite. Comme nous l'avons vu en 2.2.1, cette condition mène à la notion de "pré-stabilité", mais nous allons voir qu'elle est encore insuffisante.

7.2 Orbites fermées et pré-stabilité : le cas de m points du plan

Dans cette section, on suppose que le corps de base est \mathbf{R} . Comme on l'a vu en 7.1.7 et 7.1.9, on dispose alors d'une **linéarisation** de l'action de G .

Dans ce qui suit, on s'intéresse d'abord à la condition des orbites fermées, dont on a vu le lien avec la séparation²⁰. La plupart des résultats de ce paragraphe ont été vus au chapitre 2 dans le cadre plus général d'objets formés de droites et de points.

7.2.1 Orbites fermées, dimension et stabilisateurs

Ce paragraphe introduit la condition sur les stabilisateurs²¹. Il nécessite de connaître le résultat suivant, qui relève de la géométrie algébrique (et dont la variante élémentaire obtenue en remplaçant la dimension par le cardinal est bien connue) :

²⁰On a vu aussi, au chapitre 2, le rôle crucial que joue cette condition pour la description des idéaux invariants, voir 1.4.11.

²¹Son objectif est de montrer que cette condition est naturelle, mais il ne sera pas utilisé ensuite. Comme d'habitude il y a une variante variété et une variante schéma.

7.2.1 Proposition. Soit G un groupe algébrique irréductible opérant sur une variété algébrique X . Soit G_x le stabilisateur de x et $\omega(x)$ son orbite. On a la formule : $\dim G = \dim \overline{\omega(x)} + \dim G_x$.

7.2.2 Proposition. On suppose que $G = \mathrm{PGL}(E)$ opère sur une variété algébrique X . Soient $x, y \in X$.

- 1) Si y est dans l'adhérence de l'orbite $\omega(x)$ il en est de même de tous les points de $\omega(y)$.
- 2) Dans cette situation, si y n'est pas dans $\omega(x)$, on a $\dim G_x < \dim G_y$.
- 3) On suppose que G_x est de dimension 0 pour tout $x \in X$ (par exemple qu'il est réduit à l'élément neutre). Alors, les orbites de G dans X sont fermées.

Démonstration. Le premier point est évident car l'adhérence de $\omega(x)$ est stable par G . Pour le second, les orbites sont irréductibles puisque G l'est. On a l'inclusion stricte²² de fermés irréductibles $\overline{\omega(y)} \subset \overline{\omega(x)}$, qui impose $\dim \overline{\omega(y)} < \dim \overline{\omega(x)}$ et on conclut par 7.2.1.

Pour 3), si y est dans $\overline{\omega(x)}$ sans être dans $\omega(x)$ on a $0 = \dim G_x < \dim G_y = 0$, ce qui est absurde.

7.2.2 La notion de pré-stabilité

Rappelons la définition vue en 2.2.1 :

7.2.3 Définition. Soit $q = (a_1, \dots, a_m)$ un élément de $\mathbf{P}(E)^m$. On dit que q est **pré-stable** (relativement à l'action naturelle de $G = \mathrm{PGL}(E)$) si le stabilisateur de q est réduit à l'identité.

On a alors le théorème suivant :

7.2.4 Théorème. Soit $q = (a_1, \dots, a_m)$ un point de $\mathbf{P}(E)^m$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

0) **Condition de groupe** Le point q est pré-stable (i.e. le stabilisateur de q est réduit à l'identité).

1) **Condition géométrique 1** Les points a_i ne sont pas contenus dans la réunion d'une droite et d'un point.

2) **Condition géométrique 2** L'ensemble des a_i contient un repère.

3) **Condition d'orbite** Si le point q est contenu dans l'adhérence d'une orbite $\omega(q')$, avec $q' \in \mathbf{P}(E)^m$, il est contenu dans cette orbite.

Si les conditions précédentes sont réalisées, on a $m \geq 4$. L'ensemble des points pré-stables est un ouvert de $\mathbf{P}(E)^m$, noté Ω .

²²Ce point n'est pas tout à fait évident. On montre que $\omega(x)$ contient un ouvert de son adhérence en utilisant un théorème de Chevalley. Voir [Har77] Ch. II Exercice 3.19.

Démonstration. Pour l'équivalence des trois premières conditions voir 2.2.5. Pour l'implication $0) \implies 3)$, voir 2.2.18 ou 7.2.2. Montrons la contraposée de $3) \implies 1)$. Si les points de q sont contenus dans la réunion d'une droite D et d'un point a , on peut supposer, par exemple, que a_1, \dots, a_r sont sur D et que a_{r+1}, \dots, a_m sont confondus avec a . On suppose que la droite D a pour équation $T = 0$ et que le point a est le point $(0, 0, 1)$. Il y a deux cas de figure.

S'il y a au moins deux points confondus en a , disons a_{m-1} et a_m , on considère le m -uplet q_n ($n \in \mathbf{N}^*$) qui est égal à q , sauf pour le point $a_{m-1,n}$ qui vaut $(1/n, 0, 1) = (1, 0, n)$. Les points q_n sont tous dans la même orbite car on passe de q_n à q_p par l'homographie $(x, y, t) \mapsto (x, y, \frac{p}{n}t)$, mais q n'est pas dans cette orbite car on a $a_{m-1,n} \neq a_m = a = (0, 0, 1)$. Lorsque n tend vers l'infini, q_n tend vers q , de sorte que q est dans l'adhérence de l'orbite de q_n , contrairement à l'hypothèse.

S'il n'y a qu'un point en a c'est que tous les autres sont sur D et on peut supposer, par exemple, $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$, $a_i = (\lambda_i, \mu_i, 0)$ pour $3 \leq i \leq m-1$. On considère alors le m -uplet q_n ($n \in \mathbf{N}^*$) égal à q sauf pour le point $a_{3,n}$ égal à $(\lambda_3, \mu_3, 1/n)$. On vérifie que les q_n sont dans la même orbite, qui n'est pas celle de q , et que q_n converge vers q , ce qui donne une contradiction.

La propriété 3) donne la propriété attendue concernant les orbites :

7.2.5 Corollaire.

- 1) Dans l'opération de G sur l'ouvert Ω , les orbites sont fermées.
- 2) Si U est un ouvert de $\mathbf{P}(E)^m$, stable sous G , et si les orbites des points de U sont fermées dans U (par exemple si le quotient U/G est localement séparé), alors U est inclus dans Ω .

Démonstration. Le point 1) vient de la condition 3) ci-dessus. Pour 2), supposons $U \not\subset \Omega$. Cela signifie qu'il existe $q \in U$ et $q' \in \mathbf{P}(E)^m$ tels que $q \in \overline{\omega(q')}$ mais $q \notin \omega(q')$. Comme U est un ouvert contenant q , il rencontre $\omega(q')$ et comme il est stable il contient donc toute l'orbite $\omega(q')$. Mais alors, dans U , cette orbite n'est pas fermée.

7.2.6 Remarque. Attention, les orbites des points de Ω sont fermées dans Ω , mais pas dans $\mathbf{P}(E)^m$. Par exemple, si m est égal à 4, si $q = (a, b, c, d)$ est un repère, écrit en coordonnées sous la forme usuelle, et si g_n est la matrice $\text{diag}(1, 1, 1/n)$, les points $q_n = g_n(q)$ sont dans l'orbite de q , mais pas leur limite q' (qui est contenue dans $(ab) \cup \{c\}$ et n'est donc pas pré-stable).

7.2.3 Les ouverts affines standard

La proposition suivante, qui résulte de 7.1.14, a été vue en 2.2.9 :

7.2.7 Proposition-Définition. *On choisit 4 indices i, j, k, l parmi $\{1, \dots, m\}$, avec $i < j < k$ et, pour chaque $\alpha \neq i, j, k, l$, deux indices $i_\alpha, j_\alpha \in \{i, j, k\}$, avec $i_\alpha < j_\alpha$. Soit $U := U(i, j, k, l; (i_\alpha, j_\alpha)_\alpha) \subset \mathbf{P}(E)^m$ (α varie parmi les indices $\neq i, j, k, l$) l'ensemble des m -uplets vérifiant les conditions suivantes :*

- *Les points a_i, a_j, a_k, a_l forment un repère de $\mathbf{P}(E)$.*
- *Pour chaque $\alpha \neq i, j, k, l$, a_α n'est pas sur la droite $(a_{i_\alpha}, a_{j_\alpha})$.*

*L'ensemble U est formé des $q \in \mathbf{P}(E)^m$ tels que les crochets $[a_i, a_j, a_k]$, $[a_i, a_j, a_l]$, $[a_i, a_k, a_l]$, $[a_j, a_k, a_l]$, et $[a_{i_\alpha}, a_{j_\alpha}, a_\alpha]$ pour $\alpha \neq i, j, k, l$ soient tous non nuls. C'est un ouvert de $\mathbf{P}(E)^m$, stable sous l'action de G . On dit que U est un **ouvert affine standard**.*

7.2.8 Exemple. Dans le cas de 5 points, un exemple d'ouvert affine standard est l'ensemble des quintuplets $q = (a, b, c, d, e)$ qui vérifient les deux conditions suivantes²³ :

- i) a, b, c, d est un repère de $\mathbf{P}(E)$,*
- ii) e n'est pas sur la droite (ab) .*

L'assertion suivante montre que, sur un ouvert affine standard, on a un quotient, aussi beau qu'on puisse en rêver, puisqu'il s'agit d'un espace affine \mathbf{R}^N :

7.2.9 Proposition. *Soit $U = U(i, j, k, l; (i_\alpha, j_\alpha))$ ($\alpha \neq i, j, k, l$) un ouvert affine standard.*

1) On a un homéomorphisme $\Psi : \mathbf{R}^{2(m-4)} \times G \rightarrow U$ compatible avec les opérations (G opère trivialement sur \mathbf{R}^{2m-8} et par translation à gauche sur lui-même).

2) On a un homéomorphisme $\bar{\Phi}$ du quotient U/G sur l'espace affine $\mathbf{R}^{2(m-4)}$.

Démonstration. Le point 1) a été vu en 2.2.14. Pour 2), appelons Φ la composée de Ψ^{-1} et de la projection canonique de $\mathbf{R}^{2(m-4)} \times G$ sur $\mathbf{R}^{2(m-4)}$. Il est clair que cette application est compatible avec la relation d'équivalence associée à l'action de G sur U et elle se factorise donc en une application continue $\bar{\Phi} : U/G \rightarrow \mathbf{R}^{2(m-4)}$. L'application réciproque est donnée par passage au quotient à partir de Ψ .

Enfin, on a vu en 2.2.13 l'ubiquité des ouverts affines standard :

7.2.10 Proposition. *L'ouvert Ω des points pré-stables de $\mathbf{P}(E)^m$ est la réunion des ouverts affines standard.*

²³On notera que cette condition n'implique pas que les points soient tous distincts : e peut être égal à c ou d .

7.3 La stabilité

7.3.1 Introduction : tentatives vers le quotient, le cas de l'ouvert Ω

Avant de définir la stabilité, examinons, sur le cas de l'ouvert Ω des points pré-stables, quelles sont les difficultés qui apparaissent.

Nous avons vu que, sur les ouverts standard, il existait un beau quotient. Le défaut majeur de ces ouverts est de n'être pas stables par permutation des points (a_1, \dots, a_m) . On cherche donc, pour obtenir un quotient symétrique, un ouvert où toutes les lettres jouent le même rôle. L'ouvert Ω , réunion de tous les ouverts affines standard, est évidemment un candidat tout trouvé²⁴. En tout cas, il a déjà une structure de pré-variété (*a priori* non séparée).

La structure différentiable sur le quotient des points pré-stables

7.3.1 Proposition. *On suppose toujours $k = \mathbf{R}$. Soit Ω l'ensemble des m -uplets pré-stables, Y l'espace topologique quotient de Ω sous l'action de G et soit $p : \Omega \rightarrow Y$ la projection. Alors, les images par p des ouverts affines standard sont des ouverts de Y , qui recouvrent Y et le munissent d'une structure de pré-variété différentiable.*

Démonstration. Comme les ouverts affines standard sont stables par G , ils vérifient $U = p^{-1}(p(U))$, ce qui assure que leurs images sont ouvertes. Elles forment un recouvrement de l'ouvert Ω en vertu de 7.2.10 et on a vu que ces ouverts sont homéomorphes à $\mathbf{R}^{2(m-4)}$. Il reste à vérifier la condition de recollement. Le lecteur le fera à titre d'exercice. Il s'agit d'exprimer des couples de birapports (λ, μ) en fonction d'autres de manière rationnelle, donc C^∞ . Les birapports en question sont du type $\llbracket a; b, c, d, e \rrbracket := \llbracket (ab), (ac), (ad), (ae) \rrbracket$. Un tel birapport sera dit de tête a . Les ingrédients de ce calcul sont les suivants :

- Pour passer d'un birapport de tête a aux autres de même tête, on utilise les formules de permutation du birapport (voir Partie I ??).
- Pour changer de tête en restant sur 5 lettres, on utilise les formules de produit du genre : $\llbracket a; b, c, d, e \rrbracket = \llbracket b; d, e, a, c \rrbracket \times \llbracket c; e, d, a, b \rrbracket$, voir 4.2.9.
- Enfin, pour changer une lettre sur 5, on utilise la formule de réfraction : $\llbracket x; a, b, c, d \rrbracket = \llbracket y; a, b, c, d \rrbracket$.

²⁴Il y a un autre candidat pour lequel l'existence d'un beau quotient est évidente à partir de 7.2.9 et qui est stable par permutation des variables, c'est l'intersection de tous les ouverts standard, l'ouvert des points où tous les crochets sont non nuls, qu'on pourrait appeler ouvert "archi-générique". Mais, bien entendu, celui-là est beaucoup trop petit. Il illustre bien la phrase de Mumford citée en exergue : construire les quotients génériquement est un simple exercice. Voir exercice 7.9.1.

7.3.2 Remarque. Mumford montre aussi, par recollement des quotients sur les ouverts affines standard, cf. [GIT] prop. 1.9, que l'ouvert Ω des points pré-stables admet un quotient qui est une pré-variété algébrique²⁵, et que ce quotient est géométrique. Cependant, deux problèmes essentiels se posent.

Problème 1 : la séparation n'est pas acquise pour les points pré-stables

Le premier problème, c'est que le quotient de Ω , qu'on le regarde comme variété algébrique ou différentiable, et en dépit de la réalisation de la condition nécessaire des orbites fermées, n'est pas séparé. Nous nous contenterons du cas réel. La difficulté de recoller les quotients des ouverts standard apparaîtra clairement dans la démonstration.

7.3.3 Proposition. *On suppose $k = \mathbf{R}$. Pour $m \geq 5$, le quotient Ω/G n'est pas séparé.*

Démonstration. On commence par traiter le cas $m = 5$. Le principe est d'exhiber une suite de points du quotient qui admet deux limites distinctes. On considère les quintuplets $q_n = (a_n, b_n, c_n, d_n, e_n)$ avec $a_n = a = (1, 0, 0)$, $b_n = b = (0, 1, 0)$, $c_n = c = (0, 0, 1)$, $d_n = d = (1, 1, 1)$, $e_n = (1, 1, n) = (1/n, 1/n, 1)$. On considère ensuite les quintuplets $q'_n = (a'_n, b'_n, c'_n, d'_n, e'_n)$ avec les mêmes points a, b, c mais $d'_n = (1, 1, 1/n)$ et $e'_n = (1, 1, 1)$. Il est clair que ces quintuplets sont dans l'ouvert Ω . Par ailleurs, ces quintuplets sont équivalents sous l'action de G . En effet, q'_n est l'image de q_n par l'homographie de matrice diagonale²⁶ $g_n = \text{diag}(1, 1, 1/n)$. On a donc $\overline{q_n} = \overline{q'_n}$ dans le quotient Ω/G .

Avec les notations de 7.2.7, les q_n sont dans l'ouvert $U_1 = U(1, 2, 3, 4; (1, 2))$, des quintuplets (a, b, c, d, e) , avec a, b, c, d formant un repère et e non sur la droite (ab) . Dans cet ouvert la suite q_n tend vers le point (a, b, c, d, e) avec $e = c = (0, 0, 1)$ et cette propriété est encore vraie dans le quotient $\overline{U_1}$.

De même, les q'_n sont dans l'ouvert $U_2 = U(1, 2, 3, 5; (2, 3))$ des quintuplets avec a, b, c, e formant repère et d non sur (bc) . Dans cet ouvert, la limite de q'_n est le quintuplet (a, b, c, d', e') avec $d' = (1, 1, 0)$ et $e' = (1, 1, 1)$ et cela vaut encore dans le quotient.

Comme les deux limites ne sont pas égales dans Ω/G puisque l'une a cinq points distincts et l'autre seulement quatre, cela montre que le quotient n'est pas séparé.

²⁵Précisément, un pré-schéma dans l'ancienne terminologie, c'est-à-dire un schéma non séparé.

²⁶Le lecteur familier de [GIT] ne manquera pas de noter ici l'apparition d'un sous-groupe à un paramètre de $PGL(E)$.

Pour le cas général $m \geq 5$, il suffit de compléter les q_n par des points a_6, \dots, a_m indépendants de n et situés sur la droite $T = 0$ (pour que ces points soient invariants sous g_n) et le même argument fonctionne.

Problème 2 : trouver un plongement affine ou projectif

Le second problème est celui de l'existence d'un plongement **polynomial** de Ω dans un espace affine ou projectif. Bien entendu, un tel plongement impliquerait la séparation.

Considérons par exemple, dans le cas $m = 6$, un ouvert standard, disons $U(a, b, c, d; (ab), (bc))$. Cet ouvert est défini par la non nullité des crochets $[a, b, c]$, $[a, b, d]$, $[a, c, d]$, $[b, c, d]$, $[a, b, e]$, et $[b, c, f]$, ou encore d'un produit quelconque faisant intervenir **tous** ces crochets. Pour trouver un plongement de cet ouvert dans un espace projectif \mathbf{P}^N , il faut disposer de $N + 1$ fonctions polynomiales, dont une au moins soit non nulle en un point de l'ouvert. Une idée naturelle pour cela consiste à prendre pour s_0 une section qui ne s'annule nulle part, par exemple :

$$s_0 = [a, b, c][a, b, d][a, c, d][b, c, d][a, b, e][b, c, f],$$

et tous les autres produits de crochets s_1, \dots, s_N , avec les mêmes degrés (ici les degrés respectifs en a, b, c, d, e, f sont 4, 5, 4, 3, 1, 1). Le problème survient quand on veut mettre ensemble les divers ouverts affines car on n'a plus de fonction qui convienne pour tous. Ainsi, avec l'ouvert $U(a, e, c, d; (ae), (ec))$, les degrés seraient inversés entre b et e .

La réponse à cette objection va être fournie par l'ouvert Ω_{ss} des points semi-stables sur lequel on aura des fonctions homogènes **de même degré** en les a_i en nombre suffisant. Nous avons vu que ces fonctions s'introduisent naturellement si on plonge $\mathbf{P}(E)^m$ dans \mathbf{P}^M par le morphisme de Segre²⁷.

Résoudre les deux problèmes à la fois ?

La difficulté que nous allons rencontrer c'est qu'il n'y a aucune inclusion entre l'ouvert Ω des points pré-stables et celui Ω_{ss} des semi-stables. Comme l'âne de Buridan, nous aurons à choisir entre deux inconvénients.

- Si on utilise l'ouvert Ω des points pré-stables, où les orbites sont fermées, on a un quotient géométrique, mais il n'y a pas de plongement dans un espace projectif.

²⁷Dans le livre de Mumford, c'est ce qui explique l'importance du "faisceau inversible G -linéarisé" \mathcal{L} . Dans le cas présent, ce faisceau est l'ensemble des fonctions polynomiales homogènes de **même degré** en toutes les variables a_1, \dots, a_m , c'est-à-dire une puissance du produit des images réciproques du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(3)$ sur chaque facteur de $\mathbf{P}(E)^m$.

- Si on utilise l'ouvert Ω_{ss} des points semi-stables, on a un quotient catégorique, qui est une variété projective (c'est-à-dire une sous-variété fermée d'un espace projectif), mais qui n'est plus géométrique, faute d'avoir ses orbites fermées.

La solution de Mumford est d'utiliser l'ouvert Ω_s des points stables, contenu²⁸ dans les deux autres, et sur lequel les deux problèmes sont résolus. Il présente toutefois un inconvénient²⁹ par rapport à Ω_{ss} : le quotient n'est plus en général une variété projective (donc compacte), mais seulement quasi-projective (sous-variété ouverte d'une variété projective).

Dans ce qui suit, nous allons développer une partie de la théorie dans le cas d'un m quelconque, mais nous mettrons aussi l'accent sur deux cas particuliers emblématiques : $m = 5$ et $m = 6$.

7.3.2 Semi-stabilité et stabilité fonctionnelles

Dans ce paragraphe, le corps de base est toujours \mathbf{R} , mais les définitions et les résultats valent sur un corps k quelconque.

7.3.4 Notations. On pose $I = \{1, \dots, m\}$ et on note $\mathcal{P}_3(I)$ l'ensemble des parties à trois éléments de I . Pour une partie³⁰ $\alpha = \{i, j, k\}$ de I , on note c_α l'application de E^m dans \mathbf{R} qui à un m -uplet (a_1, \dots, a_m) associe le crochet $[a_i, a_j, a_k]$. Soit $q = (\overline{a_1}, \dots, \overline{a_m}) \in \mathbf{P}(E)^m$. L'ensemble des $\alpha \in \mathcal{P}_3(I)$ tels que le crochet associé $c_\alpha = [a_i, a_j, a_k]$ soit non nul, est indépendant du choix des représentants $a_i \in E$. On le note $\mathcal{D}(q)$.

Nous utiliserons la notion suivante :

7.3.5 Définition. On appelle **section**³¹ une fonction $s : E^m \rightarrow \mathbf{R}$ qui s'écrit sous la forme $s = \prod_{\alpha} c_\alpha^{k_\alpha}$, le produit étant étendu à toutes les parties α à 3 éléments de $\{1, \dots, m\}$, et qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- 1) les k_α sont des entiers ≥ 0 ,
- 2) la fonction s est homogène³² **de même degré** $N > 0$ en tous les a_1, \dots, a_m .

Le **support** de la section s est l'ensemble des α vérifiant $k_\alpha > 0$. On le note $\text{Supp}(s)$.

²⁸On verra que l'intersection de Ω et Ω_{ss} ne convient pas en général. C'est une difficulté supplémentaire.

²⁹Au moins dans le cas où m est multiple de 3 car, sinon, les points semi-stables sont automatiquement stables.

³⁰On supposera toujours que cette écriture sous-entend $i < j < k$.

³¹Le lecteur averti fera le lien avec les sections du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(N) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(N)$.

³²Si l'on a $E = \mathbf{R}^3$ et qu'on note $a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3})$, cela signifie que s est un polynôme homogène de degré N en les variables $a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}$.

7.3.6 Remarque. Si s est une section, et si q est dans $\mathbf{P}(E)^m$, la condition d'homogénéité assure que la condition $s(q) = 0$ a un sens indépendamment des représentants des points de q et on a $s(q) \neq 0$ si et seulement si le support de s est contenu dans $\mathcal{D}(q)$.

Nous donnons maintenant une définition de stabilité et de semi-stabilité “fonctionnelle” en termes de sections. Cette définition est très provisoire. Le lecteur est invité à patienter jusqu'en 7.3.19 pour en avoir une version plus géométrique.

7.3.7 Définition. Soit $q = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{P}(E)^m$.

1) On dit que q est **fonctionnellement semi-stable** s'il existe une section $s : E^m \rightarrow \mathbf{R}$ non nulle³³ en q (donc de support inclus dans $\mathcal{D}(q)$).

2) On dit que q est **fonctionnellement stable** s'il est pré-stable et s'il existe une section $s : E^m \rightarrow \mathbf{R}$ dont le support est exactement $\mathcal{D}(q)$. On dit que q est **fonctionnellement instable** s'il n'est pas fonctionnellement stable.

7.3.8 Notations. On note (provisoirement³⁴) Ω_{fss} et Ω_{fs} les ouverts des points semi-stables et stables respectivement.

La première vertu des points semi-stables est d'admettre des voisinages affines invariants :

7.3.9 Proposition. Si q est un point semi-stable de $\mathbf{P}(E)^m$, il existe un ouvert affine $U \subset \mathbf{P}(E)^m$, invariant sous G , contenant q et contenu dans l'ouvert des points semi-stables.

Démonstration. Par définition, on a une section s non nulle en q . L'ouvert $U = D(s)$ convient. En effet, en utilisant le plongement de Segre de $\mathbf{P}(E)^m$ dans \mathbf{P}^M , on voit que les sections s proviennent de polynômes homogènes sur \mathbf{P}^M . L'ouvert $D(s)$ est affine en vertu de 7.1.5, il est formé de points semi-stables et il est invariant puisque défini par des crochets.

7.3.10 Remarques. 1) Il est clair que stable implique semi-stable, la condition de stabilité imposant en plus que tous les crochets non nuls en q interviennent dans la section.

2) La condition de pré-stabilité est essentielle dans la définition de la stabilité (fonctionnelle). Considérons $q \in \mathbf{P}(E)^6$ formé de deux points confondus a_1, a_2 et de quatre points alignés b_1, b_2, b_3, b_4 distincts. Il est clair que q n'est pas pré-stable puisqu'il est contenu dans la réunion d'une droite et d'un point.

³³Les points non semi-stables sont donc ceux où toutes les sections sont nulles. *Via* le plongement de Segre, ce sont ce que Hilbert appelait les *Nullforms*.

³⁴On verra plus loin qu'on peut oublier le mot fonctionnel et il nous arrivera de le faire en anticipant sur 7.3.19.

Les crochets non nuls en q sont les $[a_i, b_j, b_k]$ avec $j < k$. La section s produit de tous ces crochets est de degré 6 en chaque point et son support est $\mathcal{D}(q)$.

Cet exemple montre aussi que la semi-stabilité n'implique pas la pré-stabilité.

Les exemples qui suivent éclairent un peu les notions précédentes, dont on aura des caractérisations beaucoup plus commodes en 7.3.19.

7.3.11 Exemples. Dans tous ces exemples, $q = (a, b, c, d, e)$ est un élément (pré-stable) de $\mathbf{P}(E)^5$.

1) On suppose que les points a, b, c, d, e sont “en position générale”, c'est-à-dire que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés. Les 10 crochets formés avec trois de ces points (pris dans l'ordre alphabétique) sont donc tous non nuls et la fonction s , produit de tous ces crochets, est homogène de degré 6 en chaque point. Le point q est donc fonctionnellement stable.

2) On suppose que a, b, c, d est un repère, mais que e est l'intersection de (ab) et (cd) . Les crochets nuls en q sont alors $[a, b, e]$ et $[c, d, e]$. On vérifie que la fonction :

$$s = [a, b, c]^2 [a, b, d]^2 [a, c, d]^2 [b, c, d]^2 [a, c, e]^3 [a, d, e]^3 [b, c, e]^3 [b, d, e]^3$$

est homogène de degré 12 en a, b, c, d, e et fait intervenir exactement les crochets non nuls en q . Le point q est donc fonctionnellement stable.

3) On suppose que a, b, c, d est un repère, mais qu'on a $a = e$. Les crochets non nuls sont $[a, b, c]$, $[a, b, d]$, $[a, c, d]$, $[b, c, d]$, $[b, c, e]$, $[b, d, e]$ et $[c, d, e]$. On les élève respectivement aux puissances $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Alors, pour que les degrés en chaque point soient égaux, on a les équations $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \beta = \alpha_3 + \alpha_1 + \gamma_3 + \gamma_1 + \beta = \alpha_2 + \alpha_3 + \gamma_2 + \gamma_3 + \beta = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$. On en déduit les relations $\alpha_3 = \gamma_1 + \gamma_2 + \beta$, $\alpha_2 = \gamma_3 + \gamma_1 + \beta$ et $\alpha_1 = \gamma_2 + \gamma_3 + \beta$ et en ajoutant ces relations, on voit que les α, β, γ sont tous nuls. Le point q n'est donc ni stable ni même semi-stable.

7.3.3 Stabilité fonctionnelle, morphismes et plongements

Nous montrons dans ce paragraphe que la condition de stabilité fonctionnelle permet d'obtenir un plongement du quotient dans un espace projectif, ce qui est notre objectif principal. Nous verrons au paragraphe suivant que cette condition peut se traduire d'une manière géométrique simple.

La première étape est de trouver un degré commun pour toutes les sections non nulles en les points de Ω_{fss} ou de Ω_{fs} :

7.3.12 Proposition. *Il existe un entier $N > 0$ tel que, pour tout $q \in \Omega_{fss}$ (resp. $q \in \Omega_{fs}$), il existe une section s de degré N en chaque a_i , non nulle en q (resp. telle que $\text{Supp}(s) = \mathcal{D}(q)$).*

Démonstration. Soit $A \subset \mathcal{P}_3(I)$. On appelle U_A la partie localement fermée constituée des $q \in \mathbf{P}(E)^m$ vérifiant $\mathcal{D}(q) = A$. Les U_A forment une partition de $\mathbf{P}(E)^m$. Si U_A rencontre Ω_{fs} (resp. Ω_{fss}), il existe un point $q \in \mathbf{P}(E)^m$ et une section s_A de degré N_A tels que $\text{Supp}(s) = \mathcal{D}(q) = A$ (resp. $\text{Supp}(s) \subset \mathcal{D}(q) = A$) et cette propriété vaut pour tous les points de U_A , de sorte que U_A est soit disjoint de Ω_{fs} , soit inclus dedans et de même pour Ω_{fss} . Si on a deux parties A et B , on obtient des sections de même degré convenant pour tous les q de la réunion $U_A \cup U_B$ en prenant $s_A^{N_B}$ et $s_B^{N_A}$. On conclut par récurrence sur le nombre de parties A .

On a alors le théorème suivant :

7.3.13 Théorème. *Soit N l'entier fourni par la proposition 7.3.12. On définit une application polynomiale Φ_0 de E^m dans \mathbf{R}^{M+1} en associant à q le $M+1$ -uplet de toutes les valeurs $s(q)$ pour toutes les sections de degré N .*

1) *L'application Φ_0 induit des applications $\Phi : \Omega_{fss} \rightarrow \mathbf{P}^M$ puis $\bar{\Phi} : \Omega_{fss}/G \rightarrow \mathbf{P}^M$.*

2) *L'application $\bar{\Phi}$, restreinte aux images des points stables, est un plongement polynomial de $Y = \Omega_{fs}/G$ dans \mathbf{P}^M . En particulier Y est séparé.*

Démonstration. 1) On commence par composer Φ_0 avec la projection de \mathbf{R}^{M+1} sur l'espace projectif \mathbf{P}^M . Cette composée est bien définie sur l'ouvert Ω_{fss} puisqu'il existe des sections de degré N non nulles sur cet ouvert. On passe ensuite au quotient par G (c'est possible puisque les sections sont invariantes sous G).

2) On a d'abord un lemme :

7.3.14 Lemme. *Soit q un objet fonctionnellement stable et soit s une section de support $\mathcal{D}(q)$ (cf. 7.3.7). On note $D(s)$ l'ouvert des m -uplets en lesquels s est non nulle. Alors l'ouvert $D(s)$ est contenu dans tout ouvert affine standard contenant q .*

Démonstration. (du lemme) Comme q est pré-stable il est contenu dans un ouvert affine standard (au moins) U . Cet ouvert est défini par la non nullité de certains crochets, qui sont donc des c_α pour $\alpha \in \mathcal{D}(q)$. Comme s fait intervenir tous ces c_α , on a bien $D(s) \subset U$.

Revenons à 7.3.13. Soient q et q' deux points de Ω_{fs} et supposons qu'on ait $\Phi(q) = \Phi(q')$. Il s'agit de montrer que \bar{q} et \bar{q}' sont égaux dans le quotient

Y . S'il existe un crochet c_α non nul en q et nul en q' , on a une section s de degré N de support $\mathcal{D}(q)$, donc non nulle en q et nulle en q' , ce qui montre que $\Phi(q)$ et $\Phi(q')$ sont distincts et c'est absurde.

On a donc $\mathcal{D}(q) = \mathcal{D}(q')$, de sorte que q et q' sont dans un même ouvert affine standard $U := U(i, j, k, l; (i_\alpha, j_\alpha)_\alpha) \subset \mathbf{P}(E)^m$ en vertu de 7.3.14. Le quotient U/G de cet ouvert se plonge dans $\mathbf{R}^{2(m-4)}$ au moyen des birapports

$$\lambda_\alpha = \llbracket a_{j_\alpha}; a_{i_\alpha}, a_{k_\alpha}, a_l, a_\alpha \rrbracket \quad \text{et} \quad \mu_\alpha = \llbracket a_{i_\alpha}; a_{j_\alpha}, a_{k_\alpha}, a_l, a_\alpha \rrbracket.$$

On aura gagné si l'on montre que toutes ces fonctions prennent les mêmes valeurs en q et q' . Or, on a, par exemple :

$$\llbracket a_{j_\alpha}; a_{i_\alpha}, a_{k_\alpha}, a_l, a_\alpha \rrbracket = \frac{[a_{j_\alpha}, a_{i_\alpha}, a_l] [a_{j_\alpha}, a_{k_\alpha}, a_\alpha]}{[a_{j_\alpha}, a_{k_\alpha}, a_l] [a_{j_\alpha}, a_{i_\alpha}, a_\alpha]} := \frac{\nu}{\delta}.$$

On sait que δ est non nulle en q et q' par définition de l'ouvert U . Si s est une section de degré N de support $\mathcal{D}(q)$, il en résulte que δ divise s . On a donc $s = \delta s'$. Si on pose $t = \nu s'$, t est aussi une section de degré N (car les points apparaissent avec les mêmes degrés dans δ et ν) et on a $t/s = \nu/\delta$. Mais, on sait que l'on a $\Phi(q) = \Phi(q')$ dans \mathbf{P}^M et donc $s(q') = us(q)$ et $t(q') = ut(q)$ avec $u \in \mathbf{R}^*$, d'où $(t/s)(q) = (t/s)(q') = (\nu/\delta)(q) = (\nu/\delta)(q')$ et on a le résultat.

7.3.15 Remarque. La preuve précédente montre bien l'intérêt de la condition $\text{Supp}(s) = \mathcal{D}(q)$. En contrepartie, cette condition oblige à utiliser des sections de degré N donné par 7.3.12 lequel peut être grand par rapport à m . Ainsi, pour $m = 5$, on montre que l'entier N minimum possible est 9, voir exercice 7.9.3. Nous verrons pourtant en 7.4.6 qu'il existe un plongement de Ω_{fs} qui est de degré 3 par rapport à chaque variable.

7.3.4 Semi-stabilité et stabilité géométriques

On a vu que la condition de stabilité fonctionnelle permet d'obtenir un plongement projectif du quotient. Cependant, c'est une condition peu commode à manipuler. L'un des apports de Mumford est d'avoir donné des conditions géométriques de stabilité beaucoup plus simples :

7.3.16 Définition. Soient $q = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbf{P}(E)^m$.

On appelle **indice de confusion** de q et on note $\text{conf}(q)$ le nombre maximum de points a_i confondus en un même point a . On appelle **indice d'alignement** de q et on note $\text{alig}(q)$ le nombre maximum de points alignés parmi les a_i . On dit que q est **semi-stable** (resp. **stable**) s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- 1) On a $\text{conf}(q) \leq m/3$ (resp. $< m/3$).
 - 2) On a $\text{alig}(q) \leq 2m/3$ (resp. $< 2m/3$).
- Un point non stable sera dit instable.

7.3.17 Proposition.

- 1) L'ensemble des points semi-stables (resp. stables) est un ouvert de $\mathbf{P}(E)^m$ noté Ω_{ss} (resp. Ω_s).
- 2) Les points stables sont pré-stables, autrement dit on a $\Omega_s \subset \Omega$.

Démonstration. Le point 1) est clair car les conditions “points distincts” et “points non alignés” sont toutes deux ouvertes.

2) Soit $q = (a_1, \dots, a_m)$ un point stable. Il s'agit de montrer que les a_i ne sont pas dans la réunion $L \cup \{a\}$ d'une droite et d'un point. Sinon, il y aurait r points dans L et s points confondus avec a avec $r + s = m$. Si s est $\geq m/3$ cela contredit le point 1) de la définition, sinon, on a $r \geq 2m/3$ et cela contredit le point 2).

7.3.18 Remarque. On notera que la semi-stabilité équivaut à la stabilité, sauf lorsque m est multiple de 3. Dans ce cas, la semi-stabilité n'implique pas la pré-stabilité comme le montre l'exemple des points $a_1 = \dots = a_p$, $a_{p+1} = \dots = a_{2p}$, $a_{2p+1} = \dots = a_{3p}$, avec a_1, a_p, a_{2p} non alignés.

Le théorème essentiel est alors le suivant :

7.3.19 Théorème. (Mumford) *Il y a identité entre points semi-stables et fonctionnellement semi-stables et entre points stables et fonctionnellement stables. Le quotient de l'ouvert Ω_s par G admet un plongement polynomial dans un espace projectif. En particulier, il est séparé.*

La démonstration de ce théorème est donnée en annexe, voir section 7.7.

7.3.20 Remarque. Le théorème de Mumford, joint à 7.3.13 donne un plongement projectif de Ω_s/G , ce qui a un grand intérêt théorique, mais ce plongement est loin d'être optimal. Par exemple, pour $m = 5$, il donne un plongement dans \mathbf{P}^{119} , alors que nous verrons qu'on peut avoir un plongement dans \mathbf{P}^{11} . Une étude des premières valeurs de m nous conduit à proposer la conjecture suivante :

7.3.21 Conjecture. *On considère le morphisme Φ_0 , défini sur E^m et à valeurs dans \mathbf{R}^{N+1} , qui associe à (a_1, \dots, a_m) le $N+1$ -uplet formé de tous les produits de m crochets $[a_i, a_j, a_k]$, avec $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$ et $i < j < k$, qui sont tels que chaque a_i intervient dans trois crochets exactement. Ces produits sont des sections de degré 3. L'ouvert de $\mathbf{P}(E)^m$ où ces sections*

sont non toutes nulles est l'ouvert des points semi-stables. Sur cet ouvert, on définit un morphisme Φ à valeurs dans \mathbf{P}^N par passage au quotient à partir de Φ_0 . Ce morphisme induit un plongement du quotient Ω_s/G des points stables dans \mathbf{P}^N .

7.3.5 Les autres résultats de Mumford

L'un des résultats essentiels de Mumford, rencontré ci-dessus, c'est que le quotient de l'ouvert des points stables se plonge dans un espace projectif et, qu'en particulier, il est séparé. Nous allons maintenant évoquer d'autres résultats qui concernent les points semi-stables et les propriétés de compacité (ou de projectivité). Ces résultats seront souvent donnés ici sans démonstration, mais on y reviendra lors de l'étude des cas $m = 5$ et $m = 6$.

Un quotient catégorique de Ω_{ss}

Le résultat est le suivant :

7.3.22 Théorème. *On considère l'application $\Phi : \Omega_{ss} \rightarrow \mathbf{P}^M$ définie en 7.3.13. Soit Y son image dans \mathbf{P}^M . Alors :*

- 1) *Y est une sous-variété fermée de \mathbf{P}^M , donc une variété **projective**,*
- 2) *l'application $\Phi : \Omega_{ss} \rightarrow Y$ fait de Y un quotient catégorique de Ω_{ss} sous G .*

Démonstration. On renvoie à [New78] théorème 3.14 ou [Mum65] 1.10 pour une preuve complète. Le point de départ est l'existence d'un quotient catégorique dans le cas affine (c'est le théorème 1.1 de Mumford, cf. ci-dessus 7.1.13). À partir de ce résultat on combine deux approches.

- Une approche locale qui consiste à noter que, si l'ouvert Ω_{ss} n'est pas affine, on a vu en 7.3.9 qu'il est réunion d'ouverts affines du type $D(s)$ stables sous G . L'existence de ces ouverts permet de montrer l'existence d'un quotient catégorique Ω_{ss}/G . Il suffit pour cela de recoller les quotients obtenus sur chaque ouvert affine.

- Une approche globale, indispensable pour montrer que le quotient est une variété projective. Elle consiste à utiliser le plongement de Segre de $X = \mathbf{P}(E)^m$ dans \mathbf{P}^M , à relever X en \widehat{X} dans k^{M+1} et à prendre la variété projective associée à l'anneau gradué des invariants de $\Gamma(\widehat{X})$, voir [New78].

7.3.23 Remarque. Attention, il faut bien noter que Y est un quotient catégorique de Ω_{ss} , mais pas un quotient géométrique³⁵, ce qui signifie que les fibres de p ne sont pas nécessairement les orbites sous G : deux points de

³⁵Donc peu utilisable en pratique.

la même orbite ont même image dans le quotient, mais il peut y avoir des points q, q' qui ne sont pas dans la même orbite, mais où tous les polynômes invariants prennent les mêmes valeurs (voir 7.6.7 pour un exemple explicite). On a toutefois le résultat suivant :

7.3.24 Corollaire. *On suppose m non multiple de 3. On a donc $\Omega_{ss} = \Omega_s$. Le quotient catégorique $Y = \Omega_s/G$ est aussi un quotient géométrique et c'est une variété projective. En particulier, dans le cas réel, le quotient topologique Ω_s/G est projectif, donc compact.*

Semi-stabilité et séparation

Il y a plusieurs autres moyens de se convaincre que le quotient $Y = \Omega_{ss}/G$ ne peut être géométrique dans le cas où m est multiple de 3. En effet, si c'était le cas, comme Y est une variété projective, le quotient serait séparé. Mais on a le résultat suivant :

7.3.25 Proposition. *On suppose $m = 3p$ avec $p \geq 2$. Le quotient topologique Ω_{ss}/G n'est pas séparé.*

Démonstration. On exhibe une suite de points de ce quotient qui admet deux limites. Les uplets q_n sont formés du point $a = (1, 0, 0)$ répété p fois, $b = (0, 1, 0)$, $c = (0, 0, 1)$, tous deux répétés $p - 1$ fois, $d = (1, 1, 1)$ et $e_n = (1, 1, n) = (1/n, 1/n, 1)$. Dans le quotient, ce point q_n est égal à q'_n avec les mêmes points a, b, c , mais $d'_n = (1, 1, 1/n)$ et $e' = (1, 1, 1)$. En effet, on passe de l'un à l'autre en appliquant la matrice diagonale $g_n = \text{diag}(1, 1, 1/n)$. Ces points sont semi-stables. La limite de q_n est formée de a, b, c, d de multiplicités respectives $p, p - 1, p, 1$, celle de q'_n est formée de a, b, c de multiplicités $p, p - 1, p - 1$, $d' = (1, 1, 0)$ et $e' = d$. Ces limites sont semi-stables et distinctes dans Ω_{ss}/G , et cet espace n'est donc pas séparé.

Semi-stabilité et orbites fermées

Voici encore un autre argument dans la même veine : si le quotient était séparé, ses points seraient fermés et donc les orbites des points devraient aussi être fermées dans Ω_{ss} . Le théorème suivant (et son corollaire) montrent que ce n'est pas le cas et justifient la pertinence de la notion de stabilité :

7.3.26 Théorème. *Soit q un point semi-stable de $\mathbf{P}(E)^m$. L'orbite de q est fermée dans Ω_{ss} si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :*

- 1) *Le point q est stable.*
- 2) *On a $m = 3p$ et q est formé d'un point de multiplicité p et de $2p$ points alignés, de multiplicités $\leq p - 1$.*

3) On a $m = 3p$ et q est formé de trois points non alignés, chacun de multiplicité p .

En particulier, les seuls points semi-stables et pré-stables dont l'orbite est fermée dans Ω_{ss} sont les points stables.

La démonstration de ce théorème sera donnée en exercice, voir 7.9.4.

7.3.27 Corollaire. *On suppose $m > 3$. Soit U un ouvert contenu dans Ω_{ss} et stable par G . On suppose que les orbites $\omega(q)$ des points $q \in U$ sont fermées dans³⁶ Ω_{ss} . Alors, U est contenu dans l'ouvert des points stables. En particulier, le quotient Ω_{ss}/G est séparé si et seulement si on a $\Omega_{ss} = \Omega_s$ autrement dit si m n'est pas multiple de 3.*

Démonstration. Si q est dans U et instable, il est de type 2) ou 3). Mais alors, dans tout voisinage de q , donc dans U , il y a des points q' semi-stables, mais instables, et qui ne sont plus de type 2) ou 3) ce qui contredit le fait que leur orbite est fermée dans U . En effet, il suffit de prendre q' formé des mêmes $2p$ points alignés que q , mais avec, au lieu d'un point de multiplicité p , deux points voisins de multiplicités plus petites.

7.4 Le cas $m = 5$

Nous étudions dans ce paragraphe le cas $m = 5$. Notre objectif est de retrouver directement les résultats de Mumford, en particulier de montrer l'existence de la variété quotient Ω_s/G et le fait qu'elle est projective (donc compacte dans le cas réel). On rappelle que, dans le cas d'un m non multiple de 3, il y a identité entre points stables et semi-stables, ce qui rend ce cas assez nettement simple que le cas $m = 6$ qui sera étudié plus loin. Le lecteur verra aussi apparaître dans ce paragraphe l'un objet qui était bien connu d'Euclide et de Platon, mais qui peut sembler insolite ici : le dodécaèdre.

7.4.1 Les sections dodécaédriques

On cherche à définir un plongement polynomial de Ω_s/G dans un espace projectif. Ce plongement va être défini par des sections s au sens de 7.3.5. Si N est le degré de s par rapport à chacune des variables a, b, c, d, e , et si p est le nombre de crochets d'une section, on a $3p = 5N$, de sorte que N est multiple de 3 et p de 5, la plus petite solution correspondant à $p = 5$ et $N = 3$. Nous allons voir qu'il existe bien des sections de degré 3 et qu'elles définissent un plongement projectif de Ω_s/G .

³⁶Attention, le résultat ne subsiste pas si l'on suppose seulement $\omega(q)$ fermée dans U .

Le dodécaèdre et les crochets

Si l'on pense a, b, c, d, e comme des triplets $a = (a_1, a_2, a_3)$, etc. à coefficients indéterminés, il y a vingt crochets distincts et non nuls formés avec trois lettres prises parmi a, b, c, d, e . En effet, les crochets sont invariants par permutation circulaire : $[a, b, c] = [b, c, a]$; en revanche, une transposition change un crochet en son opposé : $[a, b, c] = -[b, a, c] = -[a, c, b]$. Pour écrire ces crochets, on appliquera systématiquement la règle suivante : **chaque crochet commence par sa première lettre dans l'ordre alphabétique.**

Il est commode de représenter géométriquement les vingt crochets comme les sommets d'un dodécaèdre régulier \mathcal{D} dont on va préciser la combinatoire sous-jacente, voir figure 7.1. Rappelons que le dodécaèdre \mathcal{D} possède 12 faces pentagonales, 20 sommets et 30 arêtes. Notons déjà deux points :

- Les crochets opposés comme $[a, b, c]$ et $[a, c, b]$ correspondent à des points diamétralement opposés du dodécaèdre.
- Le dodécaèdre contient cinq cubes inscrits. Ces cubes correspondent aux cinq lettres a, b, c, d, e . Précisément, les sommets du cube a sont les 8 crochets qui ne contiennent pas la lettre a .

Le groupe \mathfrak{S}_5 des permutations des points a, b, c, d, e induit une opération sur les crochets. Comme $[a, b, c]$ est stable par la transposition (de) , on peut se limiter à faire agir le groupe \mathfrak{A}_5 des permutations paires de a, b, c, d, e . Cela nous ramène au dodécaèdre, puisqu'on sait que le groupe des rotations du dodécaèdre est isomorphe à \mathfrak{A}_5 . Ce groupe contient 24 (resp. 20, resp. 15) éléments d'ordre 5 (resp. 3, resp. 2) que l'on peut voir comme des rotations autour d'axes joignant les centres de faces opposées (resp. des sommets opposés, resp. les milieux d'arêtes opposées) de \mathcal{D} . Les orbites des sous-groupes à 5 éléments sont de deux types, les faces, et ce que nous appellerons les **couronnes**, voir figure ci-dessous.

Première face, première section

On part du sommet-crochet $[a, b, c]$ et on fait agir le groupe des permutations paires \mathfrak{A}_5 de cinq lettres. Précisément, on considère les six 5-sous-groupes de Sylow de \mathfrak{A}_5 , engendrés par les cycles d'ordre 5. On peut repérer ces sous-groupes par leur générateur (unique) qui commence par ab . On a ainsi $(abcde)$, $(abcd e)$, etc. Comme la section $[a, b, c]$ est invariante par le cycle (abc) et que (abc) et $(abcde)$ engendrent \mathfrak{A}_5 , on obtient une section invariante par \mathfrak{A}_5 en appliquant les puissances de $(abcde)$ à ce crochet :

$$[a, b, c] [b, c, d] [c, d, e] [d, e, a] [e, a, b].$$

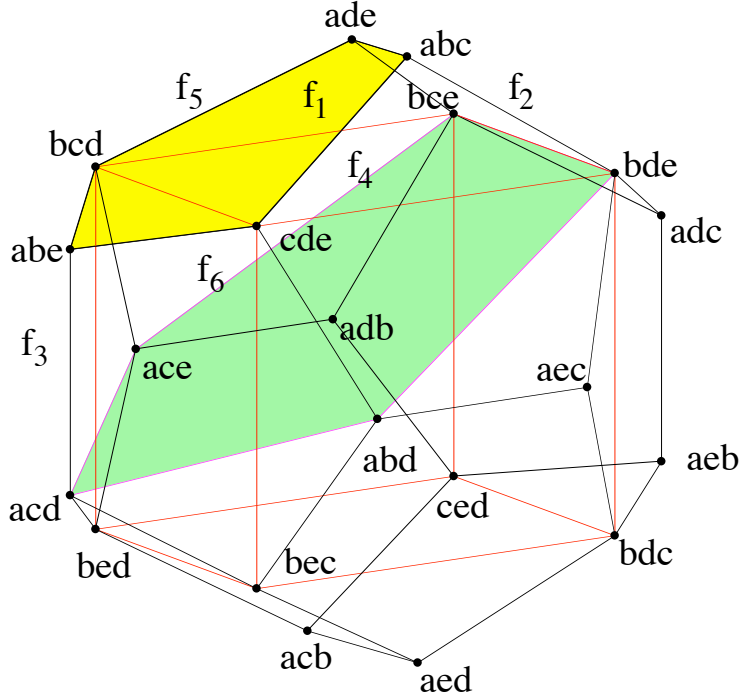


Figure 7.1: Le dodécaèdre, le cube a , la face f_1 et la couronne c_1 .

Avec la convention d'écriture des crochets vue ci-dessus et en écrivant les crochets dans l'ordre lexicographique, cette section devient :

$$f_1 = [a, b, c] [a, b, e] [a, d, e] [b, c, d] [c, d, e].$$

Le groupe cyclique $(abcde)$ admet quatre orbites sur les sommets de \mathcal{D} , qui correspondent géométriquement à deux faces opposées et deux couronnes opposées (voir figure 7.1). Avec la notation de la figure ci-dessus, f_1 correspond à une face. La face opposée est alors $f'_1 = [a, c, b] [a, e, b] [a, e, d] [b, d, c] [c, e, d]$, et les couronnes associées sont :

$$c_1 = [a, b, d] [a, c, d] [a, c, e] [b, c, e] [b, d, e],$$

et $c'_1 = [a, d, b] [a, d, c] [a, e, c] [b, e, c] [b, e, d].$

Les autres sections

Pour obtenir les autres faces de \mathcal{D} et les sections correspondantes, on considère un sommet de f_1 , par exemple $[a, b, c]$, et on effectue la rotation

d'ordre 3 autour de ce sommet, qui correspond à la permutation circulaire $\sigma_1 = (abc)$. On obtient deux nouvelles faces :

$$f_2 = [a, b, c] [a, d, c] [a, d, e] [b, c, e] [b, d, e],$$

et la face opposée³⁷ f'_2 et deux nouvelles couronnes c_2 et c'_2 :

$$c_2 = [a, d, b] [a, e, b] [a, e, c] [b, c, d] [c, d, e].$$

Pour obtenir les autres faces adjacentes à f_1 et les couronnes correspondantes, on applique maintenant la permutation circulaire $\sigma_2 = (abcde)$. On obtient ainsi :

$$f_3 = [a, b, e] [a, c, d] [a, c, e] [b, c, d] [b, e, d],$$

$$c_3 = [a, c, b] [a, d, b] [a, d, e] [b, e, c] [c, d, e],$$

$$f_4 = [a, b, c] [a, b, d] [a, e, c] [b, d, e] [c, d, e],$$

$$c_4 = [a, b, e] [a, d, c] [a, d, e] [b, d, c] [b, e, c],$$

$$f_5 = [a, c, e] [a, d, b] [a, d, e] [b, c, d] [b, c, e],$$

$$c_5 = [a, b, c] [a, b, e] [a, d, c] [b, e, d] [c, e, d],$$

$$f_6 = [a, b, d] [a, b, e] [a, c, d] [b, e, c] [c, d, e],$$

$$c_6 = [a, b, c] [a, e, c] [a, e, d] [b, c, d] [b, e, d].$$

7.4.1 Proposition-Définition. *Les sections $f_1, \dots, f_6, c_1, \dots, c_6$ sont appelées sections dodécaédriques. Elles sont de degré 3 et on a les relations $\mathcal{S}_i : f_1 c_1 - f_i c_i = 0$ pour $i = 2, \dots, 6$.*

Démonstration. Les relations $f_i c_i = f_1 c_1$ résultent de la première et de l'action du groupe \mathfrak{A}_5 .

7.4.2 Remarques.

1) On notera que, dans chaque section, chaque point a, \dots, e est bien présent trois fois comme annoncé. On notera aussi qu'avec un point donné, disons a , il y a deux points qui sont présents dans deux crochets et les deux autres dans un seul.

Si l'on ne tient pas compte des sections opposées f'_1, c'_1 , etc., ni des signes des crochets, on constate enfin que chaque crochet intervient dans trois sections de type f et dans trois de type c .

³⁷Le lecteur écrira, s'il en a besoin, les faces opposées en permutant les deux dernières lettres de chaque crochet.

2) Le groupe \mathfrak{A}_5 agit sur les douze sections f_i, f'_i (resp. c_i, c'_i) en les permutant. Ainsi, la permutation $\sigma = (abcde)$ agit comme $(1)(23456)$, tandis que $\tau = (abc)$ agit comme $(124)(36'5')$ (cela signifie que f_3 donne f'_6 , puis f'_5). Les permutations σ et τ engendrent \mathfrak{A}_5 , de sorte que l'action de \mathfrak{A}_5 sur les sections est entièrement décrite par ces formules. Si l'on considère l'action induite sur $\{1, 2, \dots, 6\}$ en oubliant les signes (c'est-à-dire l'action du groupe des rotations du dodécaèdre sur les paires de faces opposées), on voit que cette opération est doublement transitive³⁸.

7.4.2 Les relations entre les sections

Nous avons déjà vu cinq relations liant les sections : $f_1c_1 - f_2c_2 = \dots = f_1c_1 - f_6c_6 = 0$. Il y a d'autres relations, provenant toutes des relations fondamentales sur cinq lettres qui sont du type suivant (cf. 3.1.11) :

$$(*) \quad [a, b, e][a, c, d] + [a, c, e][a, d, b] + [a, d, e][a, b, c] = 0.$$

Les relations linéaires

7.4.3 Proposition. *On a les relations linéaires \mathcal{R}_i ($i = 1, \dots, 15$) suivantes :*

$$\begin{aligned} c_2 + f_4 - c_3 - f_6 &= c_3 + f_5 - c_4 - f_2 = c_4 + f_6 - c_5 - f_3 = c_5 + f_2 - c_6 - f_4 = c_6 + f_3 - c_2 - f_5 = \\ c_4 + f_1 + c_6 - f_5 &= c_5 + f_1 + c_2 - f_6 = c_6 + f_1 + c_3 - f_2 = c_2 + f_1 + c_4 - f_3 = c_3 + f_1 + c_5 - f_4 = \\ c_1 + f_2 + c_5 + f_3 &= c_1 + f_3 + c_6 + f_4 = c_1 + f_4 + c_2 + f_5 = c_1 + f_5 + c_3 + f_6 = c_1 + f_6 + c_4 + f_2 = 0. \end{aligned}$$

Démonstration. On vérifie la première relation par un calcul direct : on met en facteur $[a, b, d][a, e, c][c, d, e]$ dans $c_2 + f_4$, il reste le terme $[a, b, c][b, d, e] - [a, e, b][b, c, d]$ qui est égal à $-[b, c, e][b, a, d]$ en vertu de la relation fondamentale sur cinq lettres. On procède de même avec le terme $c_3 + f_6$ et on constate qu'ils sont bien égaux. Pour obtenir les autres relations, on fait agir \mathfrak{A}_5 par l'intermédiaire de σ et τ . Il y a seulement quinze relations car le stabilisateur de chaque relation est un groupe à quatre éléments, par exemple, pour la première, c'est le groupe engendré par les doubles transpositions fixant 1 et 5 (du type de $(24)(36)$).

7.4.4 Remarque. Bien entendu, ces relations ne sont pas indépendantes. On vérifie qu'elles sont de rang 6. On obtient une base de l'espace des relations en prenant par exemple les relations d'indices 1, 2, 3, 5, 6, 15.

³⁸Cela montre que le plongement de \mathfrak{A}_5 dans \mathfrak{A}_6 que l'on obtient ainsi n'est pas le plongement banal comme fixateur d'un point, mais le plongement exotique qui induit un automorphisme extérieur de \mathfrak{S}_6 , voir [Per96] Ch. I §8.

Birapports et relations quadratiques

Nous allons exhiber d'autres relations importantes entre les sections (mais nous verrons qu'elles sont conséquence des relations déjà vues). Considérons les birapports du type

$$r = \llbracket a; b, c, d, e \rrbracket = \llbracket (ab), (ac), (ad), (ae) \rrbracket = \frac{[a, b, d][a, c, e]}{[a, b, e][a, c, d]}.$$

Ces birapports s'expriment en fonction des sections. Ainsi, on a : $r = \frac{f_4}{c_5} = \frac{f_5}{c_4} = \frac{f_4 f_5}{f_0}$ en posant $f_0 = f_i c_i$. Cette écriture conduit à des relations entre les sections. En effet, on a notamment l'égalité de birapports $\llbracket a; b, c, d, e \rrbracket = 1 - \llbracket a; b, d, c, e \rrbracket$, équivalente à la relation (*) rappelée ci-dessus. Pour les birapports "de tête a ", les deux autres formules essentielles sont les suivantes (on ne mentionne pas les passages à l'inverse) :

$$\llbracket a; b, d, c, e \rrbracket = 1 - r = \frac{c'_6}{f_3} = \frac{c'_3}{f_6} = -\frac{f_0}{f_3 f_6}, \quad \llbracket a; c, d, b, e \rrbracket = 1 - \frac{1}{r} = \frac{f_1}{c'_2} = \frac{f_2}{c'_1} = -\frac{f_1 f_2}{f_0}.$$

On en déduit les relations :

$$f_3 c_5 - f_3 f_4 + c_5 c_6 = f_1 f_4 + f_4 c_2 - c_2 c_5 = 0.$$

On obtient les valeurs des autres birapports et les autres relations en faisant agir le groupe \mathfrak{A}_5 . Il y a soixante relations quadratiques du type précédent. Comme annoncé, elles sont conséquences des relations linéaires et des relations du type $c_1 f_1 = c_i f_i$:

7.4.5 Proposition. *On a la formule :*

$$-f_3 f_4 + f_3 c_5 + c_5 c_6 = \sum_{i=2}^6 A_i \mathcal{S}_i + \sum_{i=1}^{15} B_i \mathcal{R}_i$$

où les trois premiers A_i valent $1/2$ et les autres $-1/2$ et où les B_i sont nuls à l'exception de $-2B_1 = f_3 + c_1 + c_5$, $-2B_2 = c_1 + c_5$, $-2B_3 = f_3 + c_1 + c_5 + c_6$, $2B_4 = f_3 - c_1 - c_4 - c_5$, $-2B_6 = c_1$ et $2B_{11} = -f_3 + c_2 + c_4$.

Les relations quadratiques définies ci-dessus sont toutes dans l'idéal engendré par les \mathcal{S}_i et les \mathcal{R}_i .

Démonstration. La formule se vérifie par un calcul saumâtre³⁹ mais sans malice. La dernière assertion est immédiate en utilisant l'action du groupe \mathfrak{A}_5 .

³⁹La recette : l'instinct du coureur des prairies ... et le logiciel de calcul formel Macaulay.

7.4.3 Le plongement dodécaédrique

Définition

7.4.6 Proposition-Définition. On note Φ_0 l'application polynomiale de E^5 dans \mathbf{R}^{12} qui associe à (a, b, c, d, e) les 12 valeurs des sections $f_1, \dots, f_6, c_1, \dots, c_6$. L'application Φ_0 induit un morphisme Φ au niveau des espaces projectifs $\mathbf{P}(E)^5$ et $\mathbf{P}^{11}(\mathbf{R})$, dont le domaine de définition est exactement l'ouvert Ω_s des points stables. Le morphisme Φ se factorise en un morphisme $\bar{\Phi} : \Omega_s/G \rightarrow \mathbf{P}^{11}$ que l'on appelle⁴⁰ **plongement dodécaédrique**.

7.4.7 Remarque. Sous l'action du groupe \mathfrak{A}_5 , l'application Φ_0 est transformée par permutation : les coordonnées sont permutées comme indiqué en 7.4.2.2.

Démonstration. Montrons que le domaine de définition de Φ est Ω_s . Cela signifie que les points où les sections dodécaédriques sont toutes nulles sont exactement les points instables⁴¹. Déjà, si deux des points a, b, c, d, e coïncident, il est clair que toutes les sections sont nulles (on le vérifie pour a, b et on fait agir le groupe \mathfrak{A}_5 qui est doublement transitif). De même, si quatre des points sont alignés. Inversement, si a, b, c, d, e est stable, il est pré-stable et on peut supposer, par exemple, que a, b, c, d est un repère. Il y a alors au plus deux crochets nuls, par exemple $[a, d, e]$ et $[b, c, e]$. On vérifie alors que f_3 n'est pas nulle. Les autres cas en résultent par permutation.

Le théorème

7.4.8 Théorème. On désigne par Y la sous-variété projective de $\mathbf{P}^{11}(\mathbf{R})$ définie par les relations \mathcal{S}_i ($i = 2, \dots, 6$) et \mathcal{R}_i ($i = 1, \dots, 15$). Le morphisme $\bar{\Phi}$ est un isomorphisme (et donc un homéomorphisme pour les topologies fortes) de Ω_s/G sur Y . En particulier, Ω_s/G est une variété projective, donc compacte. La variété Y est de dimension 2 et de degré 5.

Démonstration. Montrons que $\bar{\Phi}$ est injectif. Soient $q, q' \in \Omega_s$ deux points stables vérifiant $\Phi(q) = \Phi(q')$.

• Supposons d'abord que q a deux crochets nuls. Comme q n'a pas quatre points alignés, ces crochets ont un seul point commun, et, à permutation près, on peut supposer que ce sont $[a, d, e]$ et $[b, c, e]$. Les sections f_i, c_i sont toutes nulles en q sauf peut-être c_2, f_3, f_4, c_5 . Comme ces sections sont égales ou opposées en vertu des relations \mathcal{R}_i , et que les sections sont non toutes nulles en vertu de 7.4.6, les sections c_2, f_3, f_4, c_5 sont non nulles. La même propriété vaut aussi pour q' puisqu'on a $\Phi(q) = \Phi(q')$. En utilisant les relations $f_1(q') =$

⁴⁰Bien entendu, le mot plongement est prématuré.

⁴¹On retrouve ici les *Nullforms* de Hilbert.

$c_1(q') = 0$, on voit que les crochets $[a', d', e']$ et $[b', c', e']$ sont nuls et en utilisant les quatre sections ci-dessus, on voit que ce sont les seuls. Les points a, b, c, d forment alors un repère et e est à l'intersection de (ad) et (bc) et il en est de même pour q' . On en déduit que les points q, q' sont égaux dans le quotient en envoyant le repère a, b, c, d sur a', b', c', d' .

- Supposons que q a un unique crochet nul, disons $[a, b, c]$, mais que ce crochet n'est pas nul pour q' . Les sections $f_1, f_2, c_3, f_4, c_5, c_6$ sont nulles en q et les autres sont non nulles et il en est de même en q' . Avec $f_1(q') = 0$, on aboutit à une contradiction en notant que les crochets $[a, b, e]$, $[b, c, d]$ et $[c, d, e]$ sont dans c_2 et $[a, d, e]$ dans c_4 .

- Supposons enfin que q et q' ont exactement les mêmes crochets non nuls (et au plus un). Il en résulte que q et q' sont dans un même ouvert affine standard, et on peut supposer qu'il s'agit de $U(a, b, c, d; (ab))$. En vertu de 2.2.14, si \bar{q} et \bar{q}' ne sont pas égaux dans le quotient, les birapports $r_1 = \llbracket b; a, c, d, e \rrbracket$ et $r_2 = \llbracket a; b, c, d, e \rrbracket$ sont distincts. On vérifie que ces birapports sont tous deux quotients de deux sections dodécaédriques avec les dénominateurs non nuls en q et q' . En effet, on a $r_1 = -\frac{c_3}{f_1} = -\frac{c_1}{f_3}$ et $r_2 = \frac{f_4}{c_5} = \frac{f_5}{c_4}$. S'il y a un crochet nul en q , il contient e et on vérifie que l'un au moins des dénominateurs ne le contient pas. Comme on a $\Phi(q) = \Phi(q')$, on a aussi $r_1 = r'_1$ et $r_2 = r'_2$ et on aboutit à une contradiction.

Montrons maintenant la surjectivité. Comme les applications réciproques, définies sur des ouverts de Y , seront rationnelles, cela montrera aussi que $\bar{\Phi}$ est un isomorphisme.

Soit $\omega = (f_1, \dots, f_6, c_1, \dots, c_6)$ un point de Y . Comme il s'agit d'un point d'un espace projectif, l'une des coordonnées est non nulle. Précisément, l'un des f_i est non nul. Sinon, avec les cinq premières relations \mathcal{R}_i on en déduit $c_2 = \dots = c_6$, puis avec \mathcal{R}_6 , on voit que ces termes sont tous nuls et avec \mathcal{R}_{11} on a aussi $c_1 = 0$, ce qui est absurde. Un raisonnement analogue montre que l'un des c_i aussi est non nul. Comme le groupe \mathfrak{A}_5 est doublement transitif dans l'action induite sur $\{1, 2, \dots, 6\}$ (voir 7.4.2.2), on peut supposer par exemple $f_1 \neq 0$ et $c_5 \neq 0$. On pose alors $x = -\frac{c_3}{f_1}$ et $y = \frac{f_4}{c_5}$.

On note d'abord que y est distinct de 1. Sinon, on a $f_4 = c_5$ et la relation quadratique $f_1 f_4 + c_2(f_4 - c_5)$ donne $f_4 = 0$, donc $c_5 = 0$, ce qui est absurde. Il en résulte que x est aussi distinct de 1. Sinon, on a $c_3 + f_1 = 0$ et la relation linéaire $c_3 + f_1 = -c_5 + f_4$ redonne $y = 1$.

Distinguons deux cas.

1) On suppose $x = y$. La relation précédente donne $f_1(1 - x) = -c_5(1 - y)$, donc $f_1 + c_5 = 0$ puisque x et y sont distincts de 1. Les relations linéaires donnent alors $c_2 = f_6$ et $f_4 = c_3$. On pose $g = \sigma\tau$, on applique l'élément

$g\sigma g^{-1}$ à la relation quadratique $(*) : f_1f_4 + c_2f_4 - c_2c_5 = 0$ et on obtient $f_4f_6 + c_1(f_6 - c_2) = 0$ d'où $f_4f_6 = 0$. Comme les produits $f_i c_i$ sont tous égaux, ils sont nuls et on a donc $c_1 = f_5 = 0$. Le cas $f_6 \neq 0$ est impossible (on a successivement $f_4 = 0$ et $c_6 = 0$, puis $c_2 \neq 0$ donc $f_2 = 0$ et avec $c_5 + f_2 = c_6 + f_4$ on trouve $c_5 = 0$, ce qui est absurde.) On a donc $f_6 = c_2 = 0$. Avec la relation quadratique $(*)$ on en déduit $f_4 = 0$, puis $c_3 = 0$ avec les relations linéaires. En définitive, on a $c_1 = c_2 = c_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 0$, les autres étant *a priori* non nuls, mais soumis aux relations $f_1 + c_5 = 0$, $f_2 + c_4 = 0$, $f_3 + c_6 = 0$ et $f_1 + c_4 + c_6 = 0$. Si on définit $q = (a, b, c, d, e)$ avec $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (0, 0, 1)$, $d = (1, 1, 0)$ et $e = (-f_2, f_3, 1)$, on vérifie que $\Phi(q)$ est bien égal à (f_1, \dots, c_6) .

2) On suppose $x \neq y$. On considère le point $q \in \mathbf{P}(E)^5$ défini par $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (0, 0, 1)$, $d = (1, 1, 1)$ et $e = (x, y, 1)$ et on note $\Phi(q) = (g_1, \dots, g_6, d_1, \dots, d_6)$. Il s'agit de montrer que ce point n'est autre que $\omega = (f_1, \dots, c_6)$. Le lecteur calculera les g_i et d_i en fonction de x, y .

Le terme $g_1 = (1 - y)(y - x)$ est non nul et, quitte à multiplier par un scalaire, on peut supposer $f_1 = g_1$. Avec $-x = \frac{c_3}{f_1} = \frac{d_3}{g_1}$ on en déduit $c_3 = d_3$. Avec la relation $c_3 + f_1 = -c_5 + f_4$, son analogue avec d, g et la formule $y = \frac{f_4}{c_5} = \frac{g_4}{d_5}$, on en déduit $c_5 = d_5$ et $f_4 = g_4$. On utilise maintenant la relation quadratique $f_1f_4 + c_2f_4 - c_2c_5 = 0$ et l'analogue avec g, d . Comme on a $f_4 \neq c_5$, on en déduit $c_2 = d_2$. On trouve ensuite $f_6 = g_6$ avec les relations linéaires. En écrivant $g_6d_6 = g_2d_2$ à partir de $g_2 = d_6 + f_2 - c_6$ et en tenant compte du fait que $f_6 - c_2$ est non nul (sinon, on a $x = y$), on trouve $d_6 = c_6$ et $f_2 = g_2$. En poursuivant ainsi avec les relations linéaires on obtient sans peine l'égalité $\omega = \Phi(q)$.

Comme Ω_s est de dimension 10 et G de dimension 8, le quotient est de dimension 2. La valeur du degré de Y peut être obtenue (par exemple) à l'aide du logiciel *Macaulay*.

7.4.4 Une preuve directe de la compacité

Le théorème suivant résulte de 7.4.8, mais il nous a semblé intéressant d'en donner une démonstration directe :

7.4.9 Théorème. *On suppose $k = \mathbf{R}$ et $m = 5$. Le quotient Ω_s/G est compact.*

Démonstration. On sait déjà que ce quotient est séparé (voir 7.3.13). On considère une suite $q_n = (a_n, b_n, c_n, d_n, e_n)$ de points de Ω_s et son image $\overline{q_n}$ dans Ω_s/G . Il s'agit de montrer qu'il existe une sous-suite de $\overline{q_n}$ qui converge.

On sait que chaque q_n contient un repère. Comme il y a un nombre fini de parties à 4 éléments de $\{a, b, c, d, e\}$, l'une d'entre elles, disons a, b, c, d , forme un repère pour une infinité de n . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que c'est un repère pour tout n . Il existe alors une homographie g_n qui envoie a_n, b_n, c_n, d_n sur le repère standard a, b, c, d avec $a = (1, 0, 0)$, etc. et quitte à remplacer q_n par $g_n(q_n)$ (ce qui ne change pas $\overline{q_n}$) on est ramené au cas où $q_n = (a, b, c, d, e_n)$.

De plus, on peut supposer que e_n (ou plutôt son antécédent $\widehat{e_n}$) est sur la sphère unité, qui est compacte, et, quitte encore à extraire une suite, on peut supposer que e_n converge vers e dans \mathbf{R}^3 . Il reste à examiner si $q = (a, b, c, d, e)$ est stable. Si ce n'est pas le cas, comme a, b, c, d est un repère, la seule possibilité est que e soit égal à l'un des autres points, disons $e = a$. Cela signifie que si on pose $e_n = (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$, les suites α_n , β_n et γ_n convergent respectivement vers 1, 0, 0. Comme q_n est stable, les nombres β_n et γ_n ne sont pas tous deux nuls. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer, par exemple, $|\gamma_n| \leq |\beta_n|$ et $\beta_n \neq 0$. On considère alors la matrice $g_n = \text{diag}(1, 1/\beta_n, 1/\beta_n)$ et l'élément $q'_n = g_n(q_n)$. Les points a, b, c sont fixes. Le point d devient $d_n = (1, 1/\beta_n, 1/\beta_n) = (\beta_n, 1, 1)$ et converge vers $d' = (0, 1, 1)$. Le point e_n devient $e'_n = (\alpha_n, 1, \gamma_n/\beta_n)$. Quitte à extraire (une dernière fois) une sous-suite, on peut supposer que la suite γ_n/β_n , qui est dans $[-1, 1]$, converge vers $\gamma \in [-1, 1]$. Alors, e'_n tend vers $e' = (1, 1, \gamma)$. La suite $\overline{q'_n}$, qui est égale à $\overline{q_n}$, tend alors vers l'image du point stable (a, b, c, d', e') et on a le résultat.

7.4.5 Stabilité et géométrie : un exemple

Dans ce paragraphe, on tente de faire le lien entre le présent chapitre et ceux qui précèdent. La problématique est la suivante. Beaucoup de théorèmes de géométrie concernent une propriété de points ou de droites qui vaut avec des conditions de position générale (souvent dans un cas de type “archi-générique” où les points sont non alignés et les droites non concourantes) et il s'agit de voir si elle s'étend à d'autres cas. Le principe général c'est que les théorèmes vont s'étendre au cas stable (par une sorte de passage à la limite) pour toutes les permutations des variables, mais qu'ils ne s'étendront pas au-delà. Dans ce paragraphe nous traitons seulement le cas de la relation fondamentale sur cinq points.

La relation fondamentale et les birapports

On sait que les théorèmes de la géométrie correspondent aux relations entre les invariants. Dans le cas de 5 points du plan, il y a, à permutation

près, une seule relation entre les crochets :

$$[a,b,c][a,d,e] - [a,b,d][a,c,e] + [a,b,e][a,c,d] = 0.$$

Telle quelle, cette relation n'est pas géométrique car les crochets ne sont pas des invariants des points de $\mathbf{P}(E)$ mais de leurs représentants. En divisant par le terme central, on obtient une relation portant sur les points, la permutation du birapport au milieu :

$$(*) \quad \llbracket a; b, e, c, d \rrbracket = 1 - \llbracket a; b, c, e, d \rrbracket.$$

En effet, le premier birapport est par exemple égal à $\frac{[a,b,c][a,d,e]}{[a,b,d][a,c,e]}$. Le birapport $\llbracket a; b, e, c, d \rrbracket$, dont on rappelle qu'il s'agit du birapport des quatre droites $\llbracket (ab), (ae), (ac), (ad) \rrbracket$, est évidemment défini dans le cas archi-générique où tous les crochets sont non nuls et de même pour le second birapport. En revanche, il n'est pas défini dans les cas suivants :

- si a est égal à l'un des autres points (car alors les droites (ab) etc. n'existent plus),

- si les trois premières droites ne sont pas distinctes.

Enfin, il vaut ∞ lorsque a, b, d sont alignés.

Nous allons élargir la définition du birapport pour étendre le plus possible la relation $(*)$ ci-dessus. Déjà, le cas de la valeur infinie ne pose pas de problème. Le birapport est à valeurs dans $\mathbf{P}^1(k)$ et la relation ci-dessus est encore vraie avec la convention $\infty = 1 - \infty$.

Ensuite, revenant au birapport $\llbracket a, b, c, d \rrbracket$ de quatre points d'une droite projective, on peut généraliser sa définition aux cas où deux des points a, b, c sont égaux (les autres points étant distincts). Il y a deux façons concordantes de faire cela. On peut partir de la formule $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \frac{[c,a][d,b]}{[c,b][d,a]}$ ce qui conduit aux formules $\llbracket a, a, c, d \rrbracket = 1$, $\llbracket a, b, a, d \rrbracket = 0$, $\llbracket a, b, b, d \rrbracket = \infty$. On peut aussi utiliser les permutations des birapports, par exemple $\llbracket a, b, a, d \rrbracket = \llbracket a, b, d, a \rrbracket = 1/\infty = 0$.

En définitive, la relation $(*)$ va garder un sens (et rester vraie) pourvu que dans l'expression des birapports comme quotients de crochets il n'y ait pas d'indétermination, c'est-à-dire d'expression de la forme $0/0$. Or on a le lemme suivant :

7.4.10 Lemme. *Si on a $[a,b,c][a,d,e] = [a,b,d][a,c,e] = 0$, le quintuplet $q = (a, b, c, d, e)$ est instable. Inversement, si q est instable, il existe une permutation σ de a, b, c, d, e telle que si l'on pose $a' = \sigma(a)$, etc. on ait la relation $[a', b', c'][a', d', e'] = [a', b', d'][a', c', e'] = 0$.*

Démonstration. Si par exemple on a $[a, b, c] = [a, b, d] = 0$ il y a deux cas. Si $a = b$, q est bien instable. Sinon, les points c, d sont sur la droite (ab) et il y a quatre points alignés, de sorte que q est encore instable.

La réciproque est évidente car le groupe \mathfrak{S}_5 est cinq fois transitif.

7.4.11 Commentaire. Ce qui précède montre que l'ensemble des quintuplets q qui sont tels que la relation $(*)$ et toutes ses permutées soient valables en q est exactement l'ensemble des points stables.

7.5 Le cas $m = 6$

Nous passons au cas $m = 6$, toujours avec l'objectif d'illustrer les résultats de Mumford. La situation est notablement plus compliquée pour plusieurs raisons. D'abord, il n'y a plus identité des objets stables et semi-stables et les deux ouverts Ω_{ss} et Ω_s sont à considérer⁴². Ensuite, dans le cas semi-stable, le quotient topologique naturel n'est pas séparé et, s'il y a un quotient catégorique qui est une variété projective, ce n'est pas un quotient géométrique. Le quotient de l'ouvert des points stables est séparé, c'est une variété quasi-projective, mais il n'est plus compact. Nous verrons enfin qu'il y a dans ce cas deux ouverts intermédiaires dont les quotients sont séparés, mais qui n'admettent pas de plongements projectifs (au moins au sens algébrique).

7.5.1 Rappels des résultats précédents

On suppose $k = \mathbf{R}$ et on considère les quotients topologiques Ω_{ss}/G et Ω_s/G . Rappelons que nous avons vu ci-dessus les faits suivants :

- Le quotient (topologique) Ω_{ss}/G n'est pas séparé (voir 7.3.25 ou 7.3.27).
- Le quotient Ω_s/G admet un plongement polynomial dans un espace projectif et il est donc séparé (voir 7.3.19).

7.5.2 Le morphisme des doubles crochets

Définition

Le fait que le quotient Ω_{ss}/G ne soit pas séparé interdit évidemment qu'il se plonge dans un espace projectif. Nous allons cependant chercher à définir un morphisme polynomial de Ω_{ss}/G dans un espace projectif avec deux objectifs : avoir au moins un plongement de la partie stable et obtenir

⁴²Rappelons que les objets stables n'ont pas de points confondus et au plus trois points alignés, tandis que les semi-stables n'ont pas plus de deux points confondus ni plus de quatre points alignés.

un quotient catégorique. Comme dans le cas $m = 5$, ce morphisme va être défini par des sections s au sens de 7.3.5. Cette fois, le degré minimum d'une section (en chaque variable a, \dots, f) peut être égal à 1 comme le montre l'exemple de $[a, b, c][d, e, f]$. Précisément⁴³ :

7.5.1 Proposition-Définition. *On considère les dix sections suivantes :*

$$X_1 = [a, b, c][d, e, f], \quad X_2 = [a, b, d][c, e, f], \quad X_3 = [a, b, e][c, d, f],$$

$$X_4 = [a, b, f][c, d, e], \quad X_5 = [a, c, d][b, e, f], \quad X_6 = [a, c, e][b, d, f],$$

$$X_7 = [a, c, f][b, d, e], \quad X_8 = [a, d, e][b, c, f], \quad X_9 = [a, d, f][b, c, e], \quad X_{10} = [a, e, f][b, c, d].$$

L'application polynomiale Φ_0 de E^6 dans \mathbf{R}^{10} qui associe à (a, b, c, d, e, f) les dix valeurs des sections X_i induit un morphisme Φ au niveau des espaces projectifs $\mathbf{P}(E)^6$ et $\mathbf{P}^9(\mathbf{R})$, dont le domaine de définition est exactement l'ouvert Ω_{ss} des points semi-stables. Le morphisme Φ se factorise en un morphisme $\overline{\Phi} : \Omega_{ss}/G \rightarrow \mathbf{P}^9$.

Démonstration. La seule chose à prouver est le domaine de définition de Φ . Si un point q n'est pas semi-stable, il y a soit trois points confondus, soit cinq alignés. Dans les deux cas, on vérifie aussitôt que toutes les sections X_i sont nulles⁴⁴. Inversement, supposons q semi-stable. Comme il n'y a pas trois points confondus, on peut supposer, par exemple, $a \neq b$. Comme cinq points ne sont pas alignés, l'un des autres points, disons c , n'est pas sur (ab) . Traitons d'abord le cas extrême où les trois autres points sont égaux à a, b, c , disons $a = d, b = e, c = f$. On voit alors que X_1 est non nul. Supposons maintenant que l'on n'est pas dans ce cas et que toutes les sections X_i sont nulles en q . Il y a un côté du triangle abc , disons (ab) , qui ne contient qu'un point au plus parmi d, e, f . On peut donc supposer $d, e \notin (ab)$. Les crochets $[a, b, c]$, $[a, b, d]$, $[a, b, e]$ sont non nuls, ce qui, avec $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, implique $[d, e, f] = [c, e, f] = [c, d, f] = 0$. Les points c, d, e, f sont alignés sur une droite D et, comme trois ne sont pas confondus, il y a deux paires formées de points distincts parmi cd, ef ; ce, df ou cf, de . Mais alors, la nullité des sections X_5, X_6, X_7 montre que a ou b est sur D , ce qui est absurde car cinq points de q ne sont pas alignés.

Les relations

Les sections X_i ne sont pas indépendantes, mais sont soumises à des relations linéaires qui proviennent des relations fondamentales \mathcal{R} (voir 3.1.10).

⁴³Comme dans le cas $m = 5$, on écrira toujours chaque crochet en commençant par sa première lettre dans l'ordre alphabétique.

⁴⁴Il suffit de traiter un cas, les autres s'en déduisent par permutation.

Ainsi, la relation $\mathcal{R}(c, d, e, f; a, b)$:

$$[a, b, c][d, e, f] - [a, b, d][c, e, f] + [a, b, e][c, d, f] - [a, b, f][c, d, e] = 0,$$

se traduit par $X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 0$.

7.5.2 Proposition. *Il y a 15 relations linéaires de type \mathcal{R} qui engendrent un sous-espace vectoriel de dimension 5 de l'espace dual $(\mathbf{R}^{10})^*$. L'ensemble des (X_1, \dots, X_{10}) vérifiant ces relations est un sous-espace vectoriel \widehat{V} de \mathbf{R}^{10} , de dimension 5. Les sections X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 sont linéairement indépendantes.*

Démonstration. Les relations \mathcal{R} sont déterminées par le choix de deux lettres sur 6. Elles sont donc au nombre de 15. Précisément, il y a 9 relations avec deux signes $+$ et deux signes $-$ (comme $X_1 + X_3 - X_2 - X_4 = 0$ que l'on abrège en $(1, 3; 2, 4)$). En voici la liste : $(1, 3; 2, 4)$, $(1, 5; 2, 10)$, $(1, 7; 4, 8)$, $(1, 9; 8, 10)$, $(2, 7; 3, 8)$, $(2, 9; 5, 8)$, $(3, 9; 5, 7)$, $(3, 10; 4, 5)$, $(4, 9; 7, 10)$. Voici les 6 autres relations (3 signes $+$ et un $-$) : $(1, 3, 9; 6)$, $(1, 5, 7; 6)$, $(2, 4, 9; 6)$, $(2, 7, 10; 6)$, $(3, 8, 10; 6)$, $(4, 5, 8; 6)$.

On vérifie aussitôt que les sections $X_1, X_7, X_8, X_9, X_{10}$ sont combinaisons linéaires des autres. Pour voir que X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 sont linéairement indépendantes on peut, par exemple, montrer que l'image de l'application qui à (a, \dots, f) associe les cinq valeurs des X_i contient une base de \mathbf{R}^5 (utiliser pour cela a, b, c, d formant un repère et faire parcourir à e, f les vecteurs de base de \mathbf{R}^3 , voir la preuve de la surjectivité de Ψ dans 7.5.12).

Nécessité d'autres sections

On note V le sous-espace projectif de dimension 4 de \mathbf{P}^9 image de \widehat{V} . Comme Ω_{ss}/G n'est pas séparé, le morphisme $\overline{\Phi} : \Omega_{ss}/G \rightarrow V$ ne peut pas être un plongement. Le contre-exemple suivant montre que, même en restriction à l'ouvert des points stables, on n'obtient pas non plus un plongement.

7.5.3 Contre-exemple. On considère les objets $q = (a, b, c, d, e, f)$ et $q' = (a', b', c', d', e', f')$ définis comme suit : $a = a' = (1, 0, 0)$, $b = b' = (0, 1, 0)$, $c = c' = (0, 0, 1)$, $d = d' = (1, 1, 1)$, $e = (0, 1, 1)$, $f = (-1, 0, 1)$, $e' = (1, 2, 1)$, $f' = (0, 1, 1)$. Alors, q et q' sont stables, on vérifie qu'on a $\Phi(q) = \Phi(q')$, mais q et q' sont distincts dans le quotient Ω_s/G (par exemple parce que b, c, e sont alignés, mais pas b', c', e').

7.5.4 Remarque. Pour trouver un tel contre-exemple on part de quatre points a, b, c, d formant un repère, que l'on écrit comme ci-dessus, on pose $e = (x, y, t)$, $f = (u, v, w)$ et on cherche le point q' avec les mêmes a, b, c, d mais $e' = (x', y', t')$ et $f' = (u', v', w')$. On peut même supposer $t = t' = w = w' = 1$. Cette construction deviendra plus transparente un peu plus loin.

7.5.3 Le morphisme Ψ

Le contre-exemple précédent oblige à utiliser d'autres sections que les sections X_i de degré 1 pour obtenir un plongement de Ω_s/G dans un espace projectif. L'étape suivante (qui va s'avérer décisive) consiste à utiliser des sections de degré 2.

Les sections de degré 2

Si une section de degré 2 comporte p crochets, on a $3p = 6 \times 2 = 12$, donc $p = 4$ et chaque lettre doit intervenir dans deux crochets. Pour obtenir une telle section qui ne soit pas un produit de deux des X_i , on impose que deux quelconques des crochets aient exactement un point commun. Pour cela, on part d'un crochet, disons $[a, b, c]$. Il reste trois lettres d, e, f et les crochets restants doivent contenir l'un des a, b, c et deux des d, e, f . On obtient par exemple (en rétablissant l'ordre alphabétique) : $Y_1 = [a, b, c][a, e, f][b, d, f][c, d, e]$.

7.5.5 Proposition-Définition. *On appelle sections de type Y les sections produits de quatre crochets (les lettres de chacun d'eux étant rangées dans l'ordre alphabétique), de degré 2 en chacun des points a, \dots, f , telles que deux quelconques des crochets ont exactement un point commun. Il y a 30 sections de type Y . Le groupe \mathfrak{S}_6 opère transitivement sur l'ensemble de ces sections et le fixateur d'une section est un sous-groupe isomorphe⁴⁵ à \mathfrak{S}_4 .*

Démonstration. Dénombrons les sections de type Y . Le point a est dans deux crochets qui n'ont pas d'autre points commun. On les obtient en choisissant deux paires disjointes parmi b, c, d, e, f . Il y a quinze choix possibles (on choisit d'abord le point écarté, puis les paires). Une fois ce choix effectué, il reste deux possibilités. Par exemple, avec $[a, b, c][a, e, f]$, il y a les solutions $[b, d, f][c, d, e]$ et $[b, d, e][c, d, f]$. On a donc bien trente sections en tout.

Le groupe \mathfrak{S}_6 opère sur les crochets, l'image du crochet $[x, y, z]$ par la permutation σ étant le crochet $[\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)]$ remis dans l'ordre alphabétique⁴⁶. Il opère donc aussi sur les sections de type Y .

Le stabilisateur de la section Y_1 permute les quatre crochets, donc s'envoie dans \mathfrak{S}_4 . Cet homomorphisme est surjectif. Il suffit de montrer qu'on obtient les transpositions. Par exemple, pour échanger $[a, b, c]$ et $[a, e, f]$ on utilise la permutation $(a)(d)(bf)(ce)$. Il est aussi injectif. En effet, si une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ laisse stable les parties $\{a, b, c\}$, $\{a, e, f\}$, $\{b, d, f\}$ et $\{c, d, e\}$, elle fixe

⁴⁵Ce sous-groupe \mathfrak{S}_4 est "en travers" de \mathfrak{S}_6 , c'est-à-dire non contenu dans le stabilisateur d'un point.

⁴⁶En fait, il s'agit de l'action de \mathfrak{S}_6 sur les parties à trois éléments de $\{a, \dots, f\}$.

chaque point comme intersection de deux des parties. Comme \mathfrak{S}_6 a $720 = 30 \times 24$ éléments, cela montre la transitivité.

7.5.6 Remarque. On peut représenter géométriquement ces sections de la manière suivante. On considère un cube d'arête unité, on numérote arbitrairement ses faces de a à f , ses sommets étant alors repérés par les trois faces qui les contiennent (voir figure 7.2). On choisit quatre sommets sous-adjacents (i.e. dont les distances mutuelles sont égales à $\sqrt{2}$) et on obtient une section de type Y en prenant le produit des crochets correspondants. La section correspondant aux quatre autres sommets est la section "opposée". Cela permet de paramétrer ces sections de la manière suivante. On choisit une partition de l'ensemble $\{a, b, c, d, e, f\}$ en trois parties à deux éléments, par exemple $\{a, d\}$, $\{b, e\}$, $\{c, f\}$. Ces parties correspondent aux faces opposées du cube. On considère les couples correspondants : (a, d) , (b, e) , (c, f) et on prend le crochet formé par les premiers de chaque couple, ici $[a, b, c]$. À partir de ce crochet on construit une unique⁴⁷ section (ici Y_1) respectant les règles suivantes : les points des couples ne sont jamais ensemble et deux crochets ne sont ni adjacents (deux points communs) ni opposés (aucun point commun). On peut donc noter $Y_1 = Y_{ad,be,cf}$.

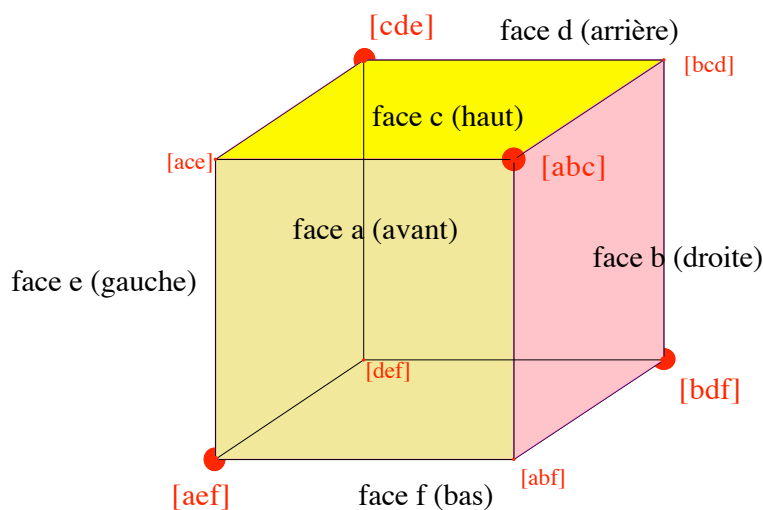


Figure 7.2: Les crochets d'une section de type Y apparaissent en gras.

⁴⁷Le point crucial est que la donnée d'un sommet et des paires de faces opposées détermine le cube.

7.5.7 Remarque. Les sections de type Y permettent d'écrire les birapports qui servent à paramétrer les ouverts standard. On a par exemple :

$$\llbracket a; b, c, d, e \rrbracket = \frac{[a, b, d][a, c, e]}{[a, b, e][a, c, d]} = \frac{[a, b, d][a, c, e][b, c, f][d, e, f]}{[a, b, e][a, c, d][b, c, f][d, e, f]} = \frac{Y_{af, be, dc}}{Y_{af, bd, ec}}.$$

Les relations entre les sections X et Y

7.5.8 Proposition. Soit R l'anneau des polynômes en les indéterminées a_i, \dots, f_i , $i = 1, 2, 3$. On considère le sous-anneau R_0 de R engendré par⁴⁸ les X_i ($i = 1, \dots, 10$), et le sous-anneau R_1 engendré par les X_i et par Y_1 .

1) L'anneau R_1 contient tous les Y_i ($i = 1, \dots, 30$).

2) On a la relation :

$$(*) \quad Y_1^2 + (X_1X_6 + X_4X_{10} - X_2X_8)Y_1 + X_1X_4X_6X_{10} = 0$$

et pour les autres Y_i les relations analogues obtenues par permutation de a, \dots, f .

Démonstration. Prouvons d'abord le point 2). On considère la section $Y_1 = [a, b, c][a, e, f][b, d, f][c, d, e]$ et on note déjà la relation qui lie Y_1 et la section "opposée" $\overline{Y_1} = [d, e, f][b, c, d][a, c, e][a, b, f] : Y_1\overline{Y_1} = X_1X_{10}X_6X_4$.

On calcule alors le produit $X_1X_6 = [a, b, c][d, e, f][a, c, e][b, d, f]$ en utilisant la relation fondamentale sur les cinq lettres a, c, d, e, f :

$$[e, a, c][e, f, d] + [e, c, f][e, a, d] + [e, f, a][e, c, d] = 0,$$

qui donne $X_1X_6 = -Y_1 + Y_2$ avec $Y_2 = [a, b, c][b, d, f][a, d, e][c, e, f]$. On calcule ensuite $X_{10}X_4 = [a, e, f][b, c, d][a, b, f][c, d, e]$ qui donne, avec la relation fondamentale : $X_{10}X_4 = Y_3 - \overline{Y_1}$, avec $Y_3 = [b, c, d][a, b, f][a, d, e][c, e, f]$. La relation fondamentale sur a, b, c, d, f donne $Y_2 + Y_3 = X_2X_8$ et on en déduit : $Y_1 + \overline{Y_1} - X_2X_8 + X_1X_6 + X_{10}X_4 = 0$. En multipliant par Y_1 on obtient la relation quadratique (*).

Pour le point 1), on a vu ci-dessus la relation $Y_2 = Y_1 + X_1X_6$ qui permet de passer de Y_1 à la section Y_2 obtenue en échangeant les lettres d et f . De la même manière on obtient toutes les sections obtenues en effectuant une transposition sur a, b, c, d, e, f , donc toutes les sections puisque les transpositions engendrent \mathfrak{S}_6 .

7.5.9 Remarque. Bien entendu, on peut écrire la relation (*) sous une forme qui ne fait intervenir que les sections X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 en tenant compte des relations suivantes entre les X_i : $X_1 = X_2 - X_3 + X_4$, $X_{10} = -X_3 + X_4 + X_5$ et $X_8 = X_6 - X_4 - X_5$.

⁴⁸Vu 7.5.2, il suffit d'utiliser les variables X_2, \dots, X_6 .

Une parenthèse : espaces projectifs anisotropes

Pour énoncer le théorème principal du cas $m = 6$ nous aurons besoin de la notion d'espace projectif anisotrope qui généralise celle d'espace projectif ordinaire en permettant d'attribuer aux variables des degrés différents. Nous ne ferons qu'effleurer cette notion⁴⁹, renvoyant le lecteur à [Gro66] ou [Del75] pour toutes précisions.

On se donne un entier $n > 0$ et des entiers positifs d_0, d_1, \dots, d_n et on définit sur $k^{n+1} - \{0\}$ la relation d'équivalence suivante :

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \iff \exists \lambda \in k, \quad y_i = \lambda^{d_i} x_i.$$

Le quotient $k^{n+1} - \{0\} / \sim$ est l'espace projectif correspondant aux degrés d_i et il est noté $\mathbf{P}^{d_0, \dots, d_n}$. Autrement dit, la variable x_i se comporte comme si elle avait le degré d_i . L'espace projectif ordinaire correspond au cas $d_0 = \dots = d_n = 1$. Dans ce qui suit nous n'utiliserons que l'espace correspondant aux degrés 1, 1, 1, 1, 1, 2 que nous noterons $\mathbf{P}^{1^5, 2}$.

La proposition suivante résume les propriétés de ces espaces dont nous aurons besoin :

7.5.10 Proposition. 1) *L'espace projectif anisotrope $\mathbf{P}^{d_0, \dots, d_n}$ se plonge comme fermé au sens de Zariski dans un espace projectif \mathbf{P}^N ordinaire pour N assez grand.*

2) *$\mathbf{P}^{d_0, \dots, d_n}$ est une variété projective lisse de dimension n . Si k est le corps des réels et si on munit cet espace de la topologie quotient de la topologie usuelle sur \mathbf{R}^{n+1} , il est compact.*

3) *Les sous-variétés algébriques de $\mathbf{P}^{d_0, \dots, d_n}$ sont définies par des équations polynomiales $F(x_0, \dots, x_n)$ où F est homogène de degré n_i par rapport à x_i avec tous les $n_i d_i$ égaux.*

7.5.11 Exemple. Dans le cas de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{1^5, 2}$, si l'on note x_2, \dots, x_6 et y_1 les variables, on a un plongement dans \mathbf{P}^{15} donné par les monômes $(x_i x_j)$ avec $i \leq j$ et y_1 . La variété \mathbf{P} est définie dans \mathbf{P}^{15} par les équations quadratiques du type $(x_i x_j)(x_k x_l) = (x_i x_k)(x_j x_l)$.

Le théorème

7.5.12 Théorème. *Les sections $X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y_1$ définissent un morphisme Ψ de $\mathbf{P}(E)^6$ dans l'espace projectif anisotrope (de dimension 5) $\mathbf{P} := \mathbf{P}^{1^5, 2}(\mathbf{R})$. Ce morphisme est de degré 1 en les X_i et 2 en Y_1 .*

⁴⁹Ces espaces sont un cas particulier des espaces $\text{Proj } R$ associés à des anneaux gradués quelconques définis par A. Grothendieck.

1) Le domaine de définition de Ψ est exactement l'ouvert Ω_{ss} des points semi-stables. Le morphisme Ψ induit un morphisme $\bar{\Psi} : \Omega_{ss}/G \rightarrow \mathbf{P}$ (non injectif) dont l'image est le fermé W de \mathbf{P} défini par l'équation (*) ci-dessus (de degré 2 en les X_i et 1 en Y_1 conformément à 7.5.10.3). Le morphisme Ψ fait de W un quotient catégorique (mais non géométrique) de Ω_{ss} par G . La variété algébrique W est une sous-variété fermée de \mathbf{P} , donc projective, donc compacte, de dimension 4.

2) En restriction à l'image de Ω_s , le morphisme $\bar{\Psi}$ est injectif et induit un isomorphisme de Ω_s/G sur un ouvert $W' \subset W$. La variété quasi-projective (non compacte) W' est un quotient catégorique et géométrique de Ω_s par G .

7.5.13 Remarque. Le morphisme $\Phi : \Omega_{ss}/G \rightarrow V \simeq \mathbf{P}^4$ étudié plus haut est le composé de $\Psi : \Omega_{ss}/G \rightarrow W$ et de la projection $p : W \rightarrow V$ définie par $p(X_2, \dots, X_6, Y_1) = (X_2, \dots, X_6)$. La fibre de p s'obtient en résolvant l'équation du second degré (*). Sur un corps algébriquement clos, la fibre de p est formée de deux points, sauf sur le fermé défini par $\Delta = 0$ (où Δ désigne le discriminant de l'équation) où elle ne contient qu'un point (c'est le "lieu de ramification" de p). Sur le corps des réels, cette fibre peut être vide (prendre par exemple $X_2 = X_4 = X_5 = X_6 = 1$ et $X_3 = 5/2$, l'équation devient $Y_1^2 + \frac{1}{4} = 0$). Dans ce cas, le morphisme Φ n'est pas surjectif.

7.5.14 Remarque. On peut préciser l'ouvert W' ou plutôt son complémentaire $Z = W - W'$. L'image de Z dans $V \simeq \mathbf{P}^4$ par p est la réunion de 15 droites projectives, chacune étant définie par 4 équations $X_i = X_j = X_k = X_l = 0$. Ces équations ne sont pas indépendantes, mais correspondent aux 15 relations entre les X_i dont on a donné la liste en 7.5.2. Ainsi, le fermé de $\Omega_{ss} - \Omega_s$ défini par l'égalité $a = b$ s'envoie sur le fermé de \mathbf{P}^4 défini par $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0$, fermé qui est de dimension 1 à cause de la relation $X_1 + X_3 - X_2 - X_4 = 0$. On notera, que ce fermé est aussi l'image de la sous-variété de $\Omega_{ss} - \Omega_s$ formée des q tels que c, d, e, f soient alignés. Les droites projectives D ainsi obtenues sont toutes contenues dans le lieu de ramification $\Delta = 0$, ce qui montre qu'il y a un seul point de W au-dessus de chaque point x de D . En revanche, il y a beaucoup de points de Ω_{ss}/G au-dessus de x . En effet, le fermé $a = b$ de Ω_{ss}/G est de codimension (donc aussi de dimension) 2 et il ne peut s'injecter dans une droite. On voit ainsi que $\Psi : \Omega_{ss}/G \rightarrow W$ n'est pas injectif.

La démonstration du théorème 7.5.12 occupe toute la fin de cette section. Notons déjà que l'assertion sur le domaine de définition de Ψ résulte de l'assertion analogue pour Φ et que les assertions sur W (dimension, compacité) sont évidentes.

L'injectivité de $\overline{\Psi}$ sur Ω_s/G

On montre d'abord le lemme suivant :

7.5.15 Lemme. *Soit $q = (a, b, c, d, e, f)$ un élément de Ω_s . On suppose que $[a, b, c]$ est non nul. Alors, il existe une section de type Y , contenant le crochet $[a, b, c]$, et non nulle en q .*

Démonstration. Rappelons que les points de q sont distincts et que quatre d'entre eux ne sont pas alignés. On considère les sections de type Y contenant $[a, b, c]$. Elles contiennent trois autres crochets formés d'un des points a, b, c associé à un côté du triangle def . Notons qu'on peut supposer d, e, f non alignés, sinon, tous les crochets considérés sont non nuls puisqu'il n'y a pas quatre points alignés dans q . Le point a est au plus sur un des côtés de def . Supposons par exemple qu'il n'est pas sur (de) . Le crochet $[a, d, e]$ est donc non nul. Il y a deux sections Y commençant par $[a, b, c][a, d, e]$, l'une comprenant $s = [b, d, f][c, e, f]$, l'autre $t = [c, d, f][b, e, f]$. Supposons que ces deux produits soient nuls. Si $[c, e, f]$ est nul, c, e, f sont alignés et avec la nullité de t , on voit que quatre des points sont alignés, ce qui est absurde. Le raisonnement est identique si $[b, d, f]$ est nul.

Revenons à l'injectivité de $\overline{\Psi}$. Soient q et q' deux points de Ω_s vérifiant $\Psi(q) = \Psi(q')$. Cela signifie qu'il existe $\lambda \neq 0$ qui vérifie $X_i(q') = \lambda X_i(q)$ pour tout i et $Y_1(q') = \lambda^2 Y_1(q)$. De plus, comme on peut écrire Y_i comme polynôme de degré 2 en les X_i et 1 en Y_1 on a aussi $Y_i(q') = \lambda^2 Y_i(q)$.

On note d'abord que les crochets non nuls sont les mêmes pour q et q' . En effet, si l'un deux, disons $[a, b, c]$, est nul pour q' et pas pour q , il existe une section Y_i qui contient $[a, b, c]$ et qui est non nulle pour q (c'est le lemme), mais nulle pour q' . Cela contredit la relation $Y_i(q') = \lambda^2 Y_i(q)$.

On peut donc supposer que q et q' sont dans un même ouvert standard (puisque ceux-ci sont définis par la non nullité de certains crochets) et, à permutation près, que cet ouvert s'écrit $U = U(a, b, c, d; (ab), (\alpha\beta))$ où $(\alpha\beta)$ est un des côtés du triangle abc .

- Supposons d'abord $(\alpha\beta) = (ab)$. Comme les quatre points a, b, c, d forment un repère, on peut supposer, quitte à faire agir G , qu'on a $a = a' = (1, 0, 0)$, $b = b' = (0, 1, 0)$, $c = c' = (0, 0, 1)$, $d = d' = (1, 1, 1)$. Les autres points sont alors $e = (x, y, t)$, $f = (u, v, w)$, $e' = (x', y', t')$, $f' = (u', v', w')$ et, par définition de U , les points e, f, e', f' ne sont pas sur (ab) , ce qui signifie que t, w, t', w' sont non nuls et on peut les supposer tous égaux à 1. On calcule alors $X_2 = xv - yu$, $X_3 = v - u$, $X_4 = y - x$, $X_5 = x - u$, $X_6 = y - yu$ et $Y_1 = (y - v)(u - 1)(y - x)$. Rappelons qu'on a $X_i(q') = \lambda X_i(q)$ et $Y_1(q') = \lambda^2 Y_1(q)$.

Supposons d'abord $y \neq v$ et $y \neq x$. L'équation en Y_1 donne $u' = u$ et on obtient $x' = \lambda x + u(1 - \lambda)$, $v' = \lambda v + u(1 - \lambda)$ et $y' = \lambda y + u(1 - \lambda)$. L'équation en X_6 conduit soit à $u(1 - \lambda) = 0$, soit à $u = 1$.

— Si on a $u(1 - \lambda) = 0$, le résultat est acquis si $\lambda = 1$ et sinon, on a $u = u' = 0$ et l'équation en X_2 conduit à $xv = 0$, ce qui contredit la stabilité de q (si $v = 0$ on a $f = c$, si $x = 0$, b, c, e, f sont alignés).

— Si on a $u = 1$ l'équation en X_2 donne soit $\lambda = 1$ et le résultat, soit $(x - 1)(v - 1) = 0$, ce qui contredit encore la stabilité de q .

Le calcul est analogue dans les cas particuliers $y = v$ et $y = x$.

• Supposons maintenant $(\alpha\beta) = (ac)$. On peut donc supposer $v = v' = 1$. En vertu du lemme et du cas précédent, on peut supposer que q et q' ne sont pas dans l'ouvert relatif à $(\alpha\beta) = (ab)$, donc que f et f' sont sur (ab) i.e. qu'on a $w = w' = 0$. Le calcul est immédiat et on a bien l'injectivité.

Pour la non compacité du quotient Ω_s/G , voir 7.6.5.

La surjectivité de $\Psi : \Omega_{ss} \rightarrow W$

La surjectivité de Ψ n'est pas évidente, elle nécessite des vérifications fastidieuses et nous nous contenterons d'en indiquer les grandes lignes.

On se donne x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 et y_1 vérifiant la relation $(*)$ (transformée en tenant compte des relations entre les x_i , voir 7.5.9, notamment $x_{10} = x_4 + x_5 - x_3$). On sait calculer les autres x_i, y_j à partir des données. On commence par traiter le cas générique où les quantités $x_4, x_{10}, y_1, x_4x_{10} + y_1$ et $x_4x_6x_{10} + (x_4 + x_5)y_1$ sont non nulles. On cherche $q = (a, b, c, d, e, f)$, vérifiant $\Psi(q) = (x_2, \dots, y_1)$, dans l'ouvert $U = U(a, b, c, d; (ab), (ab))$ et on utilise le même paramétrage que dans la preuve de l'injectivité, autrement dit, on cherche des réels x, y, u, v et un réel non nul λ tels que l'on ait $\lambda x_2 = xv - yu$, $\lambda x_3 = v - u$, $\lambda x_4 = y - x$, $\lambda x_5 = x - u$, $\lambda x_6 = y - yu$ et $\lambda^2 y_1 = (y - v)(y - x)(u - 1)$. La dernière relation permet de calculer $u = 1 + \frac{y_1}{x_{10}x_4}$ et on en déduit successivement $v = \lambda x_3 + u$, $x = \lambda x_5 + u$ et $y = \lambda(x_4 + x_5) + u$. En reportant dans l'équation en λx_6 on obtient :

$$\lambda = \frac{-uy_1}{x_4x_6x_{10} + (x_4 + x_5)y_1}.$$

Il reste la dernière équation (en λx_2). Si on remplace toutes les inconnues par leur valeur, on trouve une relation liant les x_i et y_1 et on vérifie que c'est exactement la relation $(*)$, multipliée par x_4x_{10} . On a donc bien trouvé un q convenable.

Le lecteur consciencieux se chargera de la vérification des cas particuliers. Traitons simplement l'exemple du cas : $x_4 = y_1 = 0$. On applique la

même méthode, d'abord avec l'ouvert U , et on calcule q comme ci-dessus (en distinguant encore des cas particuliers). Bien entendu, on ne peut obtenir tous les cas spéciaux à partir du seul ouvert U . Par exemple, si on suppose $x_2 = x_4 = x_5 = y_1 = 0$, on vérifie que la solution ne peut être trouvée que dans un ouvert du type $U(a, b, c, e; (bc), (ab))$.

7.5.16 Remarque. La surjectivité de Ψ redonne une preuve de la non injectivité de Φ sur les points stables. Considérons des nombres x_2, x_3, \dots, x_6 vérifiant $\Delta > 0$ (où Δ est le discriminant de l'équation $(*)$, écrite avec les seuls x_i ci-dessus). Il existe deux nombres y_1 et y'_1 distincts vérifiant $(*)$. En vertu de la surjectivité, il existe q et q' dans Ω_{ss} tels que l'on ait $\Psi(q) = (x_2, \dots, x_6, y_1)$ et de même pour q' avec y'_1 . Si de plus on suppose les x_i non nuls, ces éléments sont stables et comme $\bar{\Psi}$ est injectif sur Ω_s , ils ne sont pas dans la même orbite sous G . Mais on a pourtant $\Phi(q) = \Phi(q') = (x_2, \dots, x_6)$, ce qui montre que $\bar{\Phi}$ n'est (génériquement) pas injectif.

On notera en revanche que $\bar{\Phi}$ est injectif au-dessus du fermé $\Delta = 0$. Dans le cas de l'ouvert U utilisé ci-dessus, cela correspond au fermé d'équation $xv - yu = xv(y + u) - yu(x + v)$.

Le quotient catégorique

Il s'agit de montrer que la flèche $\Psi : \Omega_{ss} \rightarrow W$ fait de W un quotient catégorique de Ω_{ss} par G . Cela signifie que si on se donne une variété Z et un morphisme $\theta : \Omega_{ss} \rightarrow Z$ compatible avec l'action de G , il se factorise par W . Le résultat est vrai pour toute variété, mais nous supposons Z quasi-projective, $Z \subset \mathbf{P}^N$, pour simplifier. Le morphisme θ est alors donné par $N + 1$ polynômes en a, b, c, d, e, f , homogènes de même degré par rapport aux variables et invariants sous G , donc des polynômes en les crochets en vertu du théorème fondamental. Dire que ce morphisme se factorise par W revient à prouver le lemme suivant :

7.5.17 Lemme. *Soit P un polynôme en les crochets formés avec a, b, c, d, e, f , homogène de même degré n par rapport à chaque variable. Le polynôme P est dans l'anneau R_1 engendré par les X_i et les Y_j .*

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un polynôme P qui n'est pas dans R_1 et on le choisit de degré $n > 0$ minimum. L'un des monômes de P n'est pas dans R_1 et on est ramené au cas où P lui-même est un monôme. Quand on considère deux crochets contenus dans P , leur intersection (comme parties à trois éléments de $\{a, b, \dots, f\}$) est de cardinal compris entre 0 et 3. Supposons que toutes ces intersections sont

de cardinal ≥ 2 et considérons un crochet, disons $[a, b, c]$. Tous les autres crochets contiennent deux des lettres a, b, c au moins, donc au plus une des lettres d, e, f et cela contredit le fait que le degré de P est le même en chaque variable. Il y a donc dans P des crochets qui se coupent selon un ensemble de cardinal 0 ou 1.

Si P contient deux crochets disjoints, disons $[a, b, c]$ et $[d, e, f]$, on a $P = X_1 Q$ donc Q est un contre-exemple de degré plus petit que P et c'est absurde. On peut donc supposer qu'il n'y a pas de crochets disjoints dans P .

On a dans P deux crochets se coupant en un point, disons $[a, b, c]$ et $[a, e, f]$. Dans les crochets restants, il y en a au moins deux qui contiennent d et pas a pour une raison de degré. Si parmi ces crochets on a $[d, e, f]$ ou $[d, b, c]$, P contient une section de type X_i en facteur (par exemple $[a, b, c][d, e, f]$) et on conclut comme précédemment. Sinon, ces crochets peuvent être $[d, b, e]$, $[d, b, f]$, $[d, c, e]$ ou $[d, c, f]$. Si l'on a à la fois $[d, b, e]$ et $[d, c, f]$ ou $[d, c, e]$ et $[d, b, f]$, P contient en facteur une section de type Y (par exemple $Y_1 = [a, b, c][a, e, f][d, b, e][d, c, f]$) et on obtient une contradiction en divisant par cette section. Les seuls cas posant problème sont ceux où P contient les produits $[d, b, e][d, b, f]$, $[d, b, e][d, c, e]$, $[d, b, f][d, c, f]$ ou $[d, c, e][d, c, f]$. Traitons par exemple le premier. On a dans P le produit $[a, b, c][a, e, f][d, b, e][d, b, f]$ qui est de degré 3 en b et 1 en c . Il y a donc encore au moins deux crochets qui contiennent c et pas b , c étant accompagné de a, d, e ou f . En éliminant les cas où P contient deux crochets disjoints, donc un X_i , il reste à examiner le cas où l'on a dans P le monôme :

$$M = [a, b, c][a, e, f][d, b, e][d, b, f][c, a, d][c, e, f]$$

qui ne contient aucun terme X_i ni Y_j . On utilise alors la relation sur 5 lettres : $[a, b, c][a, e, f] + [a, b, e][a, f, c] + [a, b, f][a, c, e] = 0$ qui permet de remplacer M par la somme des monômes $M_1 = [a, b, e][a, f, c][d, b, e][d, b, f][c, a, d][c, e, f]$ et $M_2 = [a, b, f][a, c, e][d, b, e][d, b, f][c, a, d][c, e, f]$. On constate que ces monômes contiennent des termes X_i : $[a, f, c][d, b, e]$ et $[a, c, e][d, b, f]$. La minimalité du choix de n montre que ces monômes sont dans R_1 , donc aussi M et le résultat est démontré.

7.6 Le cas $m = 6$: les ouverts intermédiaires

Maintenant que le théorème de Mumford est prouvé, tant en ce qui concerne Ω_{ss} que Ω_s , nous allons porter notre attention sur deux ouverts Ω_i intermédiaires entre stables et semi-stables, que nous allons étudier es-

sentiellement⁵⁰ dans le cas $m = 6$. Le principal intérêt de ces ouverts est de mener à des variétés séparées non quasi-projectives. La définition générale est la suivante :

7.6.1 Définition

7.6.1 Proposition-Définition.

1) On appelle Ω_1 l'ensemble des $q = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{P}(E)^m$ qui vérifient les deux conditions suivantes :

- i) Le nombre de points confondus parmi les a_i est $\leq m/3$.
- ii) Le nombre de points alignés parmi les a_i est $< 2m/3$.

2) On appelle Ω_2 l'ensemble des $q = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{P}(E)^m$ qui vérifient les deux conditions suivantes :

- i) Le nombre de points confondus parmi les a_i est $< m/3$.
- ii) Le nombre de points alignés parmi les a_i est $\leq 2m/3$.

Les ensembles Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts de $\mathbf{P}(E)^m$, stables sous G , contenus dans Ω , dont l'intersection est l'ouvert Ω_s des points stables et la réunion l'ouvert $\Omega_{ss} \cap \Omega$ des points qui sont à la fois semi-stables et pré-stables.

Démonstration. Le seul point non trivial est de prouver que les points de Ω_i sont pré-stables. Notons déjà que, si m n'est pas congru à 0 modulo 3, les ouverts Ω_i sont tous deux égaux à Ω_s et Ω_{ss} , donc contenus dans Ω . Si on a $m = 3p$ et si q est dans Ω_1 , il s'agit de montrer que les a_i ne sont pas dans la réunion $L \cup \{a\}$ d'une droite et d'un point. Sinon, il y aurait r points dans L et s points confondus avec a avec $r + s = m$. Si s est $> p$ cela contredit le point 1) de la définition. Sinon, on a $s \leq p$, donc $r \geq 2p$ et cela contredit le point 2). La preuve dans le cas Ω_2 est analogue.

Dans toute la suite de cette section on suppose $m = 6$ et $k = \mathbf{R}$.

7.6.2 La séparation des quotients des Ω_i

On a le théorème suivant :

7.6.2 Théorème. *On suppose $m = 6$ et $k = \mathbf{R}$. Les quotients topologiques Ω_1/G et Ω_2/G sont séparés⁵¹, mais non compacts. Si U est un ouvert de $\mathbf{P}(E)^m$ qui contient l'un des Ω_i et qui est tel que U/G soit séparé, alors U est égal à Ω_i .*

⁵⁰Ces ouverts n'ont d'intérêt que pour $m = 3p$ et les résultats sont sans doute encore valables pour $p > 2$.

⁵¹En utilisant 7.1.22 au lieu de 7.1.21, on voit que la séparation vaut aussi au sens des variétés algébriques.

Démonstration. Rappelons que les objets de Ω_1 ont au plus deux points confondus et au plus 3 points alignés, tandis que ceux de Ω_2 n'ont pas de points confondus et au plus 4 points alignés.

Le lemme suivant permet de séparer stables et semi-stables et il nous sera utile pour les deux Ω_i :

7.6.3 Lemme. *Soient $q, q' \in \mathbf{P}(E)^m$ n'appartenant pas à la même orbite sous G . On suppose q stable et q' semi-stable. Alors, dans le quotient $\mathbf{P}(E)^m/G$, ces points sont séparés par des ouverts.*

Démonstration. Le résultat est évident si $\mathcal{D}(q) \subset \mathcal{D}(q')$ car alors q et q' sont dans un même ouvert affine standard. Sinon, il existe un crochet nul en q' et pas en q . Il existe des sections s, s' de degrés N, N' non nulles en q et q' respectivement, s étant telle que tous les crochets non nuls en q interviennent. Quitte à remplacer s, s' par $s^{N'}$ et s'^N , on peut supposer ces sections de même degré et on a alors un morphisme $f = (s, s')$ d'un ouvert de $\mathbf{P}(E)^m/G$ contenant q, q' dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$. Comme on a $f(q') = 0$ et $f(q) \neq 0$, le résultat vient de 7.1.21 (et si on utilise 7.1.22 on a la séparation au sens des variétés algébriques).

Séparation de Ω_1/G

Le lemme suivant précise les points instables de Ω_1 :

7.6.4 Lemme. *Soit q un point instable de Ω_1 . Alors, q admet exactement deux points confondus, disons a et f . Les points b, c, d, e sont distincts, le point $a = f$ n'est sur aucune des droites joignant ces points et trois au plus de ces points, disons b, c, e , sont alignés. Les points a, b, c, d forment un repère de $\mathbf{P}(E)$. Les seules sections de degré 1 nulles en q sont $[a, b, f] [c, d, e]$, $[a, c, f] [b, d, e]$, $[a, d, f] [b, c, e]$ et $[a, e, f] [b, c, d]$.*

Démonstration. Cela résulte de la définition de Ω_1 . On notera que si on a deux couples de points confondus il y a quatre points alignés, ce qui est prohibé.

Soient $q, q' \in \Omega_1$ deux objets dont les images dans Ω_1/G sont distinctes. Il s'agit de séparer ces images par des ouverts. On peut appliquer 7.1.21 ou 7.1.22 et il suffit donc d'avoir un morphisme Φ , défini sur un ouvert qui contient q et q' , à valeurs dans \mathbf{P}^N , et qui sépare q et q' (i.e. vérifie $\Phi(q) \neq \Phi(q')$). Cela montre que le résultat est acquis dans les deux cas suivants :

- 1) si l'un des points q, q' est stable (voir la preuve de 7.6.3),
- 2) si q, q' sont dans un même ouvert affine standard (voir 7.2.9).

Le point 1) permet de supposer q, q' instables. On pose $q = (a, b, c, d, e, f)$ et $q' = (a', b', c', d', e', f')$. Vu le lemme, il y a deux cas.

- Les points confondus sont les mêmes pour q et q' , disons $a = f$ et $a' = f'$. On note qu'en vertu de 7.6.4, on peut supposer que a, b, c, d est un repère, avec au plus b, c, e alignés. Si a', b', c', d' est un repère, e' n'est pas à la fois sur $(a'b')$ et $(a'c')$, disons $e' \notin (a'b')$. Alors q et q' sont tous deux dans l'ouvert standard $U(a, b, c, d; (ab), (bc))$ et on peut les séparer.

Sinon, c'est que b', c', d' sont alignés. Mais alors e' n'est pas sur cette droite et a, b, d, e et a', b', d', e' sont tous deux des repères. Dans ces conditions, q et q' sont tous deux dans l'ouvert standard $U(a, b, d, e; (ab), (bd))$ et on peut les séparer.

- Les points confondus ne sont pas les mêmes pour q et q' . On suppose q de la forme donnée par 7.6.4, q' étant analogue, mais avec des points confondus x, y autres que a et f . Alors, si l'on considère les sections de degré 1, les quatre qui associent a, f dans le même crochet sont nulles pour q et, parmi celles-là, on vérifie aussitôt qu'il y en a au moins deux qui n'associent pas x, y dans le même crochet. Comme il y a au plus dans q' un crochet autre que ceux contenant x, y qui peut être nul (toujours en vertu de 7.6.4), l'une de ces sections est non nulle en q' . Le morphisme des doubles crochets Φ (voir 7.5.1) sépare donc q et q' .

7.6.5 Remarque. Le résultat précédent permet de montrer que Ω_s/G , n'est pas compact. Pour cela on considère la suite (q_n) formée des points a, b, c, d du repère standard, de $e_n = (1, 1/n, 0)$ et de $f_n = f$, générique. Les points q_n sont stables et la suite converge vers $q = (a, b, c, d, a, f)$ qui est dans Ω_1 , mais non stable. Si une de ses sous-suites convergeait vers un point q' stable, comme q et q' sont dans Ω_1 dont le quotient par G est séparé, on aurait $\bar{q} = \bar{q}'$, ce qui est impossible puisque q n'est pas stable.

Séparation de Ω_2/G

Soient $q, q' \in \Omega_2$ deux objets dont les images dans Ω_2/G sont distinctes. Il s'agit de séparer q et q' . On peut supposer q et q' instables (cf. 7.6.3). Comme q est pré-stable, on peut supposer, par exemple, que a, b, c, d est un repère et que les points a, b, e, f sont alignés.

Supposons d'abord que les points a', b', e', f' ne sont pas alignés. On utilise encore le morphisme Φ qui est défini en q et q' . Précisément, on considère les sections $[a, b, e][c, d, f]$, $[a, b, f][c, d, e]$, $[a, c, d][b, e, f]$ et $[a, e, f][b, c, d]$. Ces sections sont nulles en q . Supposons qu'elles soient aussi nulles en q' . Il y a deux cas. Si deux des crochets $[a', b', e']$, $[a', b', f']$, $[b', e', f']$ et $[a', e', f']$ sont nuls, les quatre points a', b', e', f' sont alignés, contrairement à l'hypothèse. Sinon, c'est que trois des crochets complémentaires $[c', d', f']$, $[c', d', e']$, $[a', c', d']$

et $[b', c', d']$ sont nuls et cela implique que cinq des points sont alignés ce qui contredit le fait que q' est dans Ω_2 .

Il reste le cas où les points a', b', e', f' sont alignés. Supposons d'abord que a', b', c', d' est un repère. Quitte à appliquer G , on peut supposer qu'on a $a = a' = (1, 0, 0)$, $b = b' = (0, 1, 0)$, $c = c' = (0, 0, 1)$, $d = d' = (1, 1, 1)$, $e = (x, 1, 0)$, $f = (u, 1, 0)$ avec x et u distincts et non nuls et, de même, $e' = (x', 1, 0)$ et $f' = (u', 1, 0)$. Supposons par exemple $e \neq e'$, donc $x \neq x'$. On considère alors le morphisme $s = ([a, c, d][b, c, e], [a, c, e][b, c, d])$. Ce morphisme est défini sur un ouvert de Ω_2 qui contient q et q' et à valeurs dans \mathbf{P}_1 . Il est invariant par G et on a $s(q) = (-x, -1)$ et $s(q') = (-x', -1)$, de sorte que s sépare q et q' .

Si a', b', c', d' n'est pas un repère c'est que a', c', d' ou b', c', d' sont alignés et le même morphisme s sépare encore q et q' .

Séparation, oui, compacité, non

Commençons par le cas de Ω_2 . On considère la suite (q_n) formée des points $a_n = a = (1, 0, 0)$, $b_n = b = (0, 1, 0)$, $c_n = c = (0, 0, 1)$, $d_n = d = (1, 1, 1)$, $e_n = e = (\alpha, \beta, 0)$, $f_n = (1, 1/n, 0)$, avec α, β non nuls. On a $q_n \in \Omega_2 \subset \Omega_{ss}$ et il s'agit de montrer qu'il n'y a pas de sous-suite de $(\overline{q_n})$ qui converge, dans le quotient, vers un point $\overline{q'}$ avec $q' = (a', b', c', d', e', f') \in \Omega_2$.

Si tel était le cas, on note déjà que, comme les points a, b, e et f_n sont alignés sur la droite $T = 0$, et que l'alignement est une condition fermée, les points limites a', b', e', f' sont alignés.

Par ailleurs, il est clair que q_n converge dans Ω_{ss} vers le point $q = (a, b, c, d, e, a)$, donc que $\overline{q_n}$ converge vers \overline{q} dans le quotient. On utilise le morphisme Φ des doubles crochets. Si $\overline{q_{n_k}}$ converge vers $\overline{q'}$, $\overline{\Phi(q_{n_k})}$ converge à la fois vers $\overline{\Phi(q)}$ et vers $\overline{\Phi(q')}$. Comme l'image de $\overline{\Phi}$ est contenue dans \mathbf{P}^9 qui est séparé, ces deux points sont égaux.

On considère la section $X_7 = [a, c, f][b, d, e]$. Elle est nulle en q , donc en q' . Comme q' est dans Ω_2 , ses points sont distincts. La nullité de X_7 implique donc que c' est sur $(a'f')$ ou que d' est sur $(b'e')$. Mais comme a', b', e', f' sont alignés on a 5 points alignés dans q' , ce qui contredit le fait que q' est dans Ω_2 .

Le cas de Ω_1 se montre de manière analogue en utilisant la suite $q_n \in \Omega_1$ formée de a, b, c, d , $e_n = (\alpha, \beta, 1/n)$ et $f_n = a$. Dans Ω_{ss} , cette suite a une limite $q = (a, b, c, d, e, a)$, avec $e = (\alpha, \beta, 0)$, et q n'est pas dans Ω_1 (car a, b, e, f sont alignés). Pour voir que $\overline{q_n}$ qu'elle n'a pas de sous-suite convergeant vers $\overline{q'}$ avec $q' \in \Omega_1$, on utilise cette fois la section $X_3 = [a, b, e][c, d, f]$ qui s'annule en q et donc en q' . Comme on a $a' = f'$ (c'est une propriété fermée), on voit que q' a quatre points alignés : a, b, e, f ou a, c, d, f et c'est absurde.

Maximalité

Prouvons maintenant la maximalité. Soit U un ouvert dont le quotient par G est séparé. Notons que U est contenu dans Ω en vertu de 7.2.5.

Supposons d'abord que U contienne Ω_1 et qu'il contienne un sextuplet $q = (a, b, c, d, e, f)$ hors de cet ouvert, donc avec 4 points alignés. On peut supposer, par exemple, que a, b, c, d forment un repère et que e, f , sont sur (bc) et poser : $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (0, 0, 1)$, $d = (1, 1, 1)$, $e = (0, \alpha, \beta)$, $f = (0, \gamma, \delta)$ avec (α, β) (resp. (γ, δ)) non tous deux nuls. De plus, comme U est ouvert, on peut supposer que les points e et f sont génériques pour cette situation, c'est-à-dire qu'ils sont distincts et distincts de b et c (ce qui signifie qu'on a $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$ et $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$). En effet, si ce n'est pas le cas, il existe une suite de points q_n tendant vers q , avec les mêmes a, b, c, d et $e_n = (0, \alpha_n, \beta_n)$, $f_n = (0, \gamma_n, \delta_n)$ et on peut choisir ces e_n, f_n génériques. Mais, pour n assez grand, q_n est aussi dans U .

Revenons à q et considérons les sextuplets $q_n = (a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n)$ avec $a_n = a$, $b_n = b$, $c_n = c$, $d_n = d$, $e_n = (1/n, \alpha, \beta)$, $f_n = f$. Il est clair que les q_n tendent vers q dans $\mathbf{P}(E)^6$. Comme U est ouvert, ils sont dans U pour n assez grand. On considère ensuite les sextuplets $q'_n = (a'_n, b'_n, c'_n, d'_n, e'_n, f'_n)$ avec les mêmes points a, b, c, f mais $d'_n = (n, 1, 1) = (1, 1/n, 1/n)$ et $e'_n = (1, \alpha, \beta)$. La limite de la suite (q'_n) est le point $q' = (a, b, c, a, e', f)$ avec $e' = (1, \alpha, \beta)$. Les hypothèses faites sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ montrent que q' ne contient pas quatre points alignés, donc qu'il est dans Ω_1 , donc dans U .

Les sextuplets q_n et q'_n sont équivalents sous l'action de G . En effet, q_n est l'image de q'_n par l'homographie de matrice diagonale $\text{diag}(1/n, 1, 1)$.

Les deux limites ne sont pas égales dans U/G . En effet, dans q on a $a \neq d$ et dans q' , $a' = d'$. Cela montre que le quotient U/G n'est pas séparé contrairement à l'hypothèse.

Supposons ensuite que l'ouvert U contienne Ω_2 strictement. Il contient un sextuplet q , que l'on peut supposer dans Ω , avec par exemple a, b, c, d formant le repère usuel, mais avec deux points confondus. Il y a deux cas selon que les points confondus sont un point du repère, disons a , et un autre, disons f , ou les deux points e et f .

Dans le premier cas, on pose $e = (x, y, t)$ et, quitte à modifier le point e en restant dans l'ouvert U , on peut supposer y et t non nuls et distincts. On utilise alors les suites $q_n = (a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n)$ avec $a_n = a$, $b_n = b$, $c_n = c$, $d_n = d$, $e_n = e$, $f_n = (n, 1, 1) = (1, 1/n, 1/n)$ et $q'_n = (a'_n, b'_n, c'_n, d'_n, e'_n, f'_n)$ avec les mêmes points a, b, c mais $d'_n = (1/n, 1, 1)$, $e'_n = (x/n, y, t)$ et $f'_n = (1, 1, 1)$. Les points q_n et q'_n sont égaux dans le quotient (on passe de l'un à l'autre par la matrice $\text{diag}(1/n, 1, 1)$) et on voit que q_n tend vers q et q'_n vers un point $q' \neq q$ qui, avec l'hypothèse sur y, t , est dans Ω_2 , donc dans U .

Traitons enfin le cas où les points confondus sont e et f . On pose $e = f = (x, y, t)$. Quitte à modifier ce point en restant dans l'ouvert U , on peut supposer x, y, t non nuls, de sorte que a, b, c, e est un repère. En échangeant les rôles de a et e , on est ramené au cas précédent.

7.6.3 L'inexistence d'un plongement polynomial projectif pour Ω_1

7.6.6 Proposition. *Il n'existe pas d'application injective $\Theta : \Omega_1/G \rightarrow \mathbf{P}^N$ qui provienne d'un morphisme projectif $\hat{\Theta} : \Omega_1 \rightarrow \mathbf{P}^N$ (donc d'une application polynomiale de E^6 dans \mathbf{R}^{N+1}).*

Démonstration. Supposons qu'on ait un tel morphisme. On a donc $N + 1$ applications $s_i : E^6 \rightarrow \mathbf{R}$, polynomiales, homogènes en chacune des variables⁵² a, b, c, d, e, f (chaque s_i ayant le même degré par rapport à une variable donnée, voir 1.2.20) et, quitte à permuter ces variables, on peut supposer que les degrés respectifs sont ordonnés : $\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq \delta \geq \epsilon \geq \eta$. Le fait que ces applications passent au quotient impose que les polynômes sont invariants, donc des polynômes en les crochets en vertu du théorème fondamental 3.1.1. Le domaine de définition de Θ est l'ouvert où les s_i sont non toutes nulles. Cet ouvert contenant Ω_1 , il contient des sextuplets du type $q = (a, a, \dots)$. Cela implique qu'il y a des s_i qui contiennent des produits de crochets dans lesquels les variables a et b ne cohabitent pas. Considérons une telle section. Dans ceux de ses crochets qui contiennent a , il y a au moins deux variables parmi c, d, e, f , de sorte que le degré total en c, d, e, f de ces crochets est au moins égal à 2α . Le même raisonnement effectué avec les crochets contenant b montre que le degré total de s_i par rapport à c, d, e, f est au moins $2\alpha + 2\beta \geq 4\beta$. Mais, ce degré est égal à $\gamma + \delta + \epsilon + \eta$, donc $\leq 4\gamma$. On en déduit $\beta \leq \gamma$, donc $\beta = \gamma$. Une adaptation facile de cet argument montre que tous les degrés sont égaux⁵³ : $\alpha = \beta = \dots = \eta$. Appelons l ce degré. Si un monôme de s_i contient k crochets, on a $3k = 6l$, d'où $k = 2l$.

On considère alors les points $q = (a, b, c, d, e, f)$ et $q' = (a', b', c', d', e', f')$ de Ω_1 définis comme suit : $a = a' = f = f' = (1, 0, 0)$, $b = b' = (0, 1, 0)$, $c = c' = (0, 0, 1)$, $d = e' = (1, 1, 1)$, $d' = (0, 1, \epsilon)$ et enfin $e = (0, \epsilon, 1)$, avec $\epsilon \neq 0, 1$. Ces éléments sont distincts dans Ω_1/G car a, b, c, d est un repère mais pas a', b', c', d' . Le morphisme Θ doit séparer ces points et donc il y a nécessairement un s_i qui prend des valeurs différentes en q et q' et *a fortiori* un monôme en les crochets. Appelons s un tel monôme. Comme il est non

⁵²Bien entendu, chaque "variable" en comporte trois : $a = (a_1, a_2, a_3)$, etc.

⁵³On voit ainsi la pertinence des sections de type X_i, Y_j .

nul en l'un des points, les points a et f ne cohabitent pas dans ses crochets. Comme ces points interviennent au degré l et qu'il y a $2l$ crochets, c'est que chacun des crochets contient soit a , soit f . Or, entre q et q' , on vérifie que les crochets contenant a (ou f) prennent les mêmes valeurs, sauf les suivants : $[a, b, d] = 1$, $[a', b', d'] = \epsilon$, $[a, c, e] = -\epsilon$, $[a', c', e'] = -1$ et les analogues avec f . Mais, dans s , comme toutes les variables interviennent avec le même degré, il y a autant de crochets contenant b, d que de crochets contenant c, e et donc les produits sont identiques et on a $s(q) = s(q')$ contrairement à l'hypothèse.

7.6.7 Remarque. Les deux points q et q' définis ci-dessus sont semi-stables, leurs images dans Ω_{ss}/G sont distinctes et ce qui précède montre que leurs images par n'importe quel morphisme polynomial à valeurs dans un espace projectif sont égales. Si on applique cela au morphisme Φ de 7.3.13, on retrouve le fait, évoqué en 7.3.23, que le quotient catégorique Y de Ω_{ss} par G n'est pas géométrique.

7.6.4 L'inexistence d'un plongement polynomial projectif pour Ω_2

7.6.8 Proposition. *Il n'existe pas d'application injective $\Theta : \Omega_2/G \rightarrow \mathbf{P}^N$ qui provienne d'un morphisme projectif $\hat{\Theta} : \Omega_2 \rightarrow \mathbf{P}^N$ (donc d'une application polynomiale de E^6 dans \mathbf{R}^{N+1}).*

Démonstration. On raisonne comme dans la preuve de 7.6.6 dont on reprend les notations, avec le même ordre des degrés. L'ouvert de définition de Θ contenant Ω_2 , il contient des éléments q avec a, b, c, d alignés. Les monômes non nuls des s_i sont alors exclusivement constitués avec les crochets qui ne contiennent pas trois des points a, b, c, d , donc qui contiennent au moins un point parmi e, f . Il y a deux types de crochets, ceux qui ne contiennent qu'un des points a, b, c, d (resp. ceux qui en contiennent deux). Appelons α_1, \dots, η_1 (resp. α_2, \dots, η_2) les degrés des variables intervenant dans chaque type de crochet. On a les formules :

$$2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1) = \epsilon_1 + \eta_1 \quad \text{et} \quad \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 = 2(\epsilon_2 + \eta_2)$$

et on en déduit, pour $i = 1, 2$, $2(\epsilon_i + \eta_i) \geq \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i$, donc $2(\epsilon + \eta) \geq \alpha + \beta + \gamma + \delta$. Vu les inégalités entre les degrés, cela donne $4\epsilon \geq 4\delta$ d'où $\delta = \epsilon$. Le même argument convenablement adapté montre que les degrés sont tous égaux. Chaque monôme est de degré l en chaque variable et formé de $2l$ crochets.

On considère alors les deux points q et q' définis comme suit : $a = a' = (1, 0, 0)$, $b = b' = (0, 1, 0)$, $c = c' = (0, 0, 1)$, $d = d' = (1, 1, 1)$, $e = (\epsilon, 1, 0)$,

$e' = (\epsilon', 1, 0)$, $f = (\varphi, 1, 0)$, $f' = (\varphi', 1, 0)$, avec $\epsilon, \varphi, \epsilon', \varphi'$ non nuls. On suppose que ϵ et ϵ' sont distincts (ce qui assure que les points q et q' ne sont pas égaux dans le quotient), mais qu'on a $\epsilon' = \lambda\epsilon$ et $\varphi' = \lambda\varphi$. Les crochets formés avec q et q' sont égaux, sauf les suivants : $[c, e, f] = [d, e, f] = \epsilon - \varphi$, $[b, c, e] = [b, d, e] = \epsilon$ et $[b, c, f] = [b, d, f] = \varphi$ et leurs homologues avec des primes.

Faisons un bilan des crochets. Il y en a quatre sortes qu'il est commode de colorier :

- Les rouges, interdits, ceux qui sont nuls en q et q' . Ce sont $[a, b, e]$, $[a, b, f]$, $[a, e, f]$ et $[b, e, f]$, autrement dit les crochets ne contenant ni c , ni d .
- Les verts, ceux qui diffèrent entre q et q' . Ce sont $[b, c, e]$, $[b, c, f]$, $[b, d, e]$, $[b, d, f]$, $[c, e, f]$ et $[d, e, f]$.
- Les noirs, crochets contenant a et l'un des points c, d : $[a, b, c]$, $[a, b, d]$, $[a, c, e]$, $[a, c, f]$, $[a, d, e]$, $[a, d, f]$.
- Les blancs, crochets contenant c et d : $[a, c, d]$, $[b, c, d]$, $[c, d, e]$ et $[c, d, f]$.

Dans un monôme s non nul il n'y a pas de crochets rouges. Il n'y a pas non plus de crochets blancs. En effet, il y a $2l$ crochets et le degré en chaque variable est l , donc en c et d le degré est $2l$. Or, tous les crochets permis contiennent obligatoirement c ou d . Si un crochet en avait deux on aurait un degré en $c, d > 2l$. Ensuite, il y a exactement l crochets noirs, puisque ce sont les seuls crochets restants qui contiennent a . Il y a donc aussi l crochets verts. Mais alors, le monôme s est homogène en ϵ, φ de degré l . Si on passe de q à q' , on multiplie s par λ^l et donc, dans le projectif on a $\Theta(q) = \Theta(q')$.

7.6.5 Plongement topologique

Nous venons de voir que les quotients des ouverts Ω_i n'ont pas de plongement **polynomial** dans un espace projectif. Nous allons montrer qu'ils admettent cependant un tel plongement qui est une application **différentiable** (et même C^∞).

Rappelons la définition suivante :

7.6.9 Définition. *Un espace topologique est dit **localement compact** s'il est séparé et si tout point admet un voisinage compact. On dit, de plus, qu'il est **dénombrable à l'infini** s'il est réunion dénombrable d'espaces compacts.*

Dans le cas qui nous intéresse, on a les résultats suivants :

7.6.10 Proposition. *Tout ouvert de $\mathbf{P}(E)^m$ (pour la topologie forte) est localement compact et dénombrable à l'infini.*

Démonstration. Un tel ouvert est réunion finie d'ouverts de \mathbf{R}^N et on est ramené à ce cas, qui est classique (on utilise les boules fermées de centres rationnels et de rayon $1/n$).

La proposition suivante est immédiate :

7.6.11 Proposition. *Soit X un espace topologique et G un groupe opérant sur X par homéomorphismes. On suppose que le quotient $Y = X/G$ est **séparé**. Alors, si X est compact (resp. localement compact, resp. localement compact dénombrable à l'infini) il en est de même de Y .*

Le résultat fondamental concernant les plongements est le suivant (voir par exemple le livre *Variétés différentiables* de G. De Rham, Hermann, 1960) :

7.6.12 Théorème. (Théorème de plongement de Whitney) *Soit Y une variété différentiable. On suppose que Y est localement compacte et dénombrable à l'infini. Alors il existe un plongement C^∞ de Y dans un espace affine \mathbf{R}^N .*

Comme les quotients des ouverts de $\mathbf{P}(E)^m$ sous l'action du groupe linéaire sont, de manière naturelle, des pré-variétés différentiables (voir 7.3.1), vu ce qui précède, l'existence d'un plongement de ces quotients, au sens topologique ou différentiable est donc ramenée à leur séparation et on obtient :

7.6.13 Corollaire. *Les quotients Ω_i/G admettent un plongement de classe C^∞ dans un espace affine (donc dans un espace projectif).*

7.6.6 Mumford et les ouverts Ω_i

Les phénomènes repérés sur les ouverts Ω_i permettent de mieux comprendre la pertinence des hypothèses énoncées par Mumford pour obtenir les résultats sur les quotients (proposition 1.9 et théorème 1.10 de [GIT]). Commençons par redonner une définition des notions de stabilité :

7.6.14 Définition. *Soit X une variété algébrique quasi-projective, plongée dans \mathbf{P}^M . On suppose qu'un groupe algébrique réductif G est muni d'une représentation linéaire dans k^{M+1} et opère sur \mathbf{P}^M en laissant X stable.*

*On dit qu'un point $q \in X$ est **pré-stable** relativement à ces données s'il existe un ouvert affine invariant⁵⁴ $U \subset X$ contenant q et tel que les orbites de G dans U soient fermées.*

*On dit que q est **semi-stable** s'il existe une fonction polynomiale homogène s sur \mathbf{P}^M , non nulle en q , invariante par G , telle que l'ouvert $D(s)$*

⁵⁴Mais pas nécessairement de la forme $D(s)$, cf. ci-dessous.

des $x \in X$ vérifiant $s(x) \neq 0$ soit affine. On dit que q est **stable** si, de plus, les orbites de G dans $D(s)$ sont fermées.

On note respectivement X_{ps} , X_{ss} , X_s l'ensemble des points pré-stables, semi-stables et stables de X .

Le lecteur vérifiera que ces notions correspondent bien, dans notre cas particulier, à celles données ci-dessus. Avec ces définitions, voici une version édulcorée des résultats de Mumford :

7.6.15 Théorème. *On reprend les notations de 7.6.14.*

1) *Il existe un quotient catégorique et géométrique $\pi : X_{ps} \rightarrow Y := X_{ps}/G$. De plus, ce quotient est uniforme, ce qui signifie notamment que si U est un ouvert saturé de X , la restriction $p : U \rightarrow p(U)$ est encore un quotient catégorique et géométrique.*

2) *Il existe un quotient catégorique $p : X_{ss} \rightarrow Z := X_{ss}/G$ qui est une variété quasi-projective.*

3) *Soit W l'image de X_s par p . C'est une variété quasi-projective et la restriction $p : X_s \rightarrow W$ est un quotient catégorique et géométrique de X_s .*

7.6.16 Commentaire. Le défaut du cas pré-stable c'est que le quotient n'est pas quasi-projectif, le défaut du cas semi-stable c'est que le quotient n'est pas géométrique⁵⁵. Le cas stable n'a plus de défauts !

Dans notre cas, si on considère l'ouvert Ω_1 de Ω , le point 1) du résultat de Mumford a pour conséquence qu'il existe un quotient catégorique $Y = \Omega_1/G$ qui est une variété algébrique⁵⁶. De plus, la séparation du quotient établie ci-dessus (qui vaut dans le cas algébrique en utilisant 7.1.22) montre que les orbites sont fermées dans Ω_1 et cela implique que le quotient Y est géométrique.

On obtient ainsi une variété algébrique séparée, mais qui pourtant n'est pas quasi-projective (c'est l'inexistence d'un plongement projectif vue ci-dessus). Cela justifie deux remarques.

- Un tel exemple (une variété algébrique séparée mais non quasi-projective) n'est pas si courant et mérite d'être noté.

- Le fait que le quotient ne soit pas quasi-projectif montre que le point 2) du théorème de Mumford ne s'applique pas avec $X = \Omega_1$. Il y a là un apparent paradoxe : Ω_1 est contenu dans l'ouvert des points semi-stables (relativement à l'action de G sur $\mathbf{P}(E)^m$), mais ses points ne sont pas (pas tous) semi-stables pour l'action de G sur Ω_1 !

⁵⁵ Attention, l'ouvert X_{ss} n'est pas contenu dans X_{ps} en général, voir 7.3.10.

⁵⁶ On peut le montrer directement en recollant les quotients des traces sur Ω_1 des ouverts affines standard, qui existent en vertu de 7.1.13.

L'explication du paradoxe peut être dite de deux manières :

1) Si on a un point semi-stable $q \in \mathbf{P}(E)^6$, on a une section s invariante non nulle en q et l'ouvert $D(s)$ est affine et contenu dans Ω_{ss} . On a vu d'ailleurs que les sections de degré 1 du type $s = [a, b, c][d, e, f]$ font l'affaire. Si q est dans Ω_1 , il est semi-stable, donc on peut envisager de prendre la même section s , mais le problème c'est que $D(s)$ contient des points qui ne sont pas dans Ω_1 (par exemple le triple point double : $a = d, b = e, c = f$) et $D(s)$ n'est pas contenu dans Ω_1 . On pourrait imaginer alors de prendre l'ouvert $D(s) \cap \Omega_1$, mais cet ouvert n'est **pas affine** (car son complémentaire est de codimension⁵⁷ 2 dans $D(s)$, voir [Per95] ch. III exercice A2).

2) Bien entendu, on pourrait aussi imaginer de trouver une section t différente des sections du type $[a, b, c][d, e, f]$, non nulle en q avec $D(t) \subset \Omega_1$, et c'est d'ailleurs le cas si q est stable (car dans ce cas $D(t)$ est contenu dans Ω_s si la section utilise tous les crochets non nuls en q). En revanche, si q est dans Ω_1 et instable, il n'existe pas de telle section :

7.6.17 Proposition. *Soit q un point instable de Ω_1 . On peut supposer par exemple qu'on a $a = f$. Soit s une section non nulle en q . Alors, l'ouvert $D(s)$ contient un objet q' avec b, c, d, e alignés, donc n'appartenant pas à Ω_1 .*

Démonstration. Dans la section s tous les points a, \dots, f sont au même degré n . Comme a et f ne peuvent cohabiter, il y a donc exactement n crochets contenant a et n contenant f . Dans ces crochets apparaissent les points b, c, d, e et leur degré total est $2n$ pour les crochets contenant a comme pour ceux contenant f , soit $4n$ en tout. Comme le degré en b, c, d, e est égal à n , c'est qu'il n'y a aucun crochet qui soit purement en b, c, d, e . Mais alors, dans $D(s)$ on a à la fois des points de Ω_1 (prendre b, c, d, e génériques) et des points semi-stables qui ne sont pas dans Ω_1 (prendre b, c, d, e distincts mais alignés).

7.7 Annexe : preuve de 7.3.19

La démonstration qui suit est fidèlement inspirée de [GIT].

La condition nécessaire dans le cas semi-stable

Montrons que la semi-stabilité fonctionnelle implique la semi-stabilité géométrique.

⁵⁷En effet, $D(s)$ est de dimension 12 et les points de $D(s)$ qui ne sont pas dans Ω_1 sont ceux qui ont 4 points alignés. On calcule la dimension de cet ensemble : on se donne une droite D , dimension 2, puis 4 points $a, b, c, d \in D$, dimension 4 et enfin deux points génériques e et f , dimension 4, soit 10 au total : la codimension est bien 2.

Supposons que q contienne r points confondus, disons a_1, \dots, a_r . Si on a un produit s de n crochets non nuls en q , homogène en les a_i , le degré total de s vaut $3n$, donc le degré en chaque lettre vaut $3n/m$. En les variables d'indices $i \leq r$, le degré total de s est donc $3rn/m$. Mais, comme un crochet non nul en q contient au plus un point a_i avec $i \leq r$, le degré total de s en ces variables est au plus égal à n . On doit donc avoir $3rn/m \leq n$, donc $r \leq m/3$.

Supposons que q contienne r points alignés, disons a_1, \dots, a_r . Le même raisonnement montre que le degré total en les variables d'indices $\leq r$, qui vaut encore $3rn/m$, est $\leq 2n$ car deux au plus des variables d'indices $\leq r$ peuvent être présentes dans un crochet non nul. On a donc $r \leq 2m/3$.

Nous passons désormais au cas stable.

Le cône convexe associé à un m -uplet

Soit $q = (a_1, \dots, a_m)$ un élément de $\mathbf{P}(E)^m$ et soit $\alpha \in \mathcal{D}(q)$ une partie $\{i, j, k\}$ telle que le crochet $c_\alpha = [a_i, a_j, a_k]$ correspondant soit non nul. On munit l'espace \mathbf{R}^m de la base canonique $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ et on associe à α le point $e_\alpha = e_i + e_j + e_k$ de \mathbf{R}^m . On note $C(q)$ le cône convexe engendré par les points e_α avec $\alpha \in \mathcal{D}(q)$, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{\alpha \in \mathcal{D}(q)} \lambda_\alpha e_\alpha$ à coefficients $\lambda_\alpha \geq 0$. Commençons par préciser la situation :

7.7.1 Lemme. *Soit $q = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{P}(E)^m$ un élément pré-stable et soit d le cardinal de $\mathcal{D}(q)$. On considère l'application linéaire $\Phi : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^m$ qui à une famille $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}(q)}$ associe le point $\sum_{\alpha \in \mathcal{D}(q)} \lambda_\alpha e_\alpha$. On a les propriétés suivantes :*

- 1) *Le cône $C(q)$ est l'image de $(\mathbf{R}^+)^d$ par Φ .*
- 2) *L'application Φ est surjective et ouverte.*
- 3) *Le noyau de Φ admet une base formée de vecteurs à coordonnées rationnelles.*

Démonstration. Le point 1) est clair. Pour montrer 2), on note que les images des vecteurs de base de \mathbf{R}^d par cette application sont les vecteurs e_α . Comme q est pré-stable, on peut supposer, par exemple, que les points a_1, a_2, a_3, a_4 forment un repère. Les crochets $[a_i, a_j, a_k]$ avec i, j, k distincts et égaux à 1, 2, 3, 4 sont non nuls, de sorte que les vecteurs $e_i + e_j + e_k$ correspondants sont dans l'image de Φ . On en déduit facilement que e_1, e_2, e_3, e_4 sont dans l'image de Φ . Si l est un indice > 4 , il y a un des côtés du triangle $a_1 a_2 a_3$, disons $(a_1 a_2)$, qui ne contient pas a_l . Mais alors, le crochet $[a_1, a_2, a_l]$ est non nul et $e_1 + e_2 + e_l$ est dans l'image de Φ , donc aussi e_l . Il en résulte que Φ est une submersion, donc une application ouverte.

Enfin, le point 3) résulte du fait que la matrice de Φ est à coefficients rationnels. On obtient donc la base cherchée comme une base du noyau de la restriction de Φ à \mathbf{Q}^d .

7.7.2 Remarque. On voit aisément que si q n'est pas pré-stable, Φ n'est pas surjective (si a_1, \dots, a_r sont alignés et a_{r+1}, \dots, a_m confondus, les vecteurs e_α , $\alpha \in \mathcal{D}(q)$, sont les $e_i + e_j + e_k$ avec $i, j \leq r$ et $k > r$ et les points $\sum_{i=1}^m x_i e_i$ de l'image de Φ vérifient donc $\sum_{i \leq r} x_i = 2 \sum_{i > r} x_i$). Dans ce cas, $C(q)$ est contenu dans un hyperplan, donc est d'intérieur vide.

On a alors le lemme suivant :

7.7.3 Lemme. *Soit q un m -uplet pré-stable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Le m -uplet q est fonctionnellement stable.*
- 2) *Il existe un entier N et des entiers $\lambda_\alpha > 0$ tels que l'on ait $(N, N, \dots, N) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}(q)} \lambda_\alpha e_\alpha$.*
- 3) *Le point $\epsilon = (1, 1, \dots, 1)$ est dans l'intérieur de $C(q)$.*

Démonstration. Pour voir l'équivalence de 1) et 2) on considère une fonction $s = \prod_{\alpha \in \mathcal{D}(q)} c_\alpha^{\lambda_\alpha}$ avec les λ_α entiers positifs. Dire qu'elle est homogène de degré

N par rapport à chaque a_i signifie exactement qu'on a $(N, N, \dots, N) = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}(q)} \lambda_\alpha e_\alpha := v$. En effet, le degré de s par rapport à a_i est $\sum_{i \in \alpha} \lambda_\alpha$ et c'est aussi le coefficient de v sur le vecteur e_i .

Montrons que 2) implique 3). Avec les notations de 7.7.1, l'assertion 2) signifie que le point $(1, 1, \dots, 1)$ est l'image de la famille (λ_α/N) qui est intérieure à $(\mathbf{R}^+)^d$ et, comme Φ est ouverte, on a le résultat.

Montrons enfin que 3) implique 2). Comme ϵ est dans $C(q)$, on peut l'écrire sous la forme $\sum_{\alpha \in \mathcal{D}(q)} \lambda_\alpha e_\alpha$ avec des λ_α rationnels. En effet, les λ_α sont solutions d'un système d'équations linéaires dont les coefficients et les seconds membres sont rationnels.

Par ailleurs, comme ϵ est intérieur à $C(q)$, il s'écrit $\sum_{\alpha \in \mathcal{D}(q)} \lambda_\alpha e_\alpha$ avec des λ_α réels strictement positifs. En effet, si on prend $v = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}(q)} \mu_\alpha e_\alpha$ avec $\mu_\alpha > 0$, v est intérieur à $C(q)$ en vertu de 7.7.1. Comme $C(q)$ est convexe, ainsi que son intérieur, sur la droite (ϵv) il y a un segment $[w, v]$, tel que $\epsilon \in]w, v]$, qui est tout entier contenu dans l'intérieur de $C(q)$. Le point w est de la forme $\sum_{\alpha \in \mathcal{D}(q)} \nu_\alpha e_\alpha$ avec des $\nu_\alpha \geq 0$. Comme ϵ est barycentre de v et w , $\epsilon = pv + (1-p)w$ avec $0 < p \leq 1$, on voit qu'il s'écrit sur les e_α avec des coefficients $\lambda_\alpha = p\mu_\alpha + (1-p)\nu_\alpha > 0$.

On considère alors l'ensemble des $(\lambda_\alpha) \in \mathbf{R}^d$ vérifiant $\epsilon = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}(q)} \lambda_\alpha e_\alpha$. C'est un espace affine de dimension $d - m$, dont les points à coordonnées

rationnelles sont partout denses en vertu du point 3) de 7.7.1 et qui contient des points à coordonnées > 0 . Il contient donc des points rationnels à coordonnées positives. En multipliant par un dénominateur commun N on obtient l'écriture cherchée de (N, \dots, N) .

7.7.4 Corollaire. *Soit q un m -uplet pré-stable. Il est fonctionnellement stable si et seulement si pour toute forme linéaire f nulle en $(1, 1, \dots, 1)$ il existe des points e_α et e_β avec $\alpha, \beta \in \mathcal{D}(q)$ tels que l'on ait $f(e_\alpha) > 0$ et $f(e_\beta) < 0$. Inversement, le point q est fonctionnellement instable si et seulement s'il existe une forme linéaire f nulle en $(1, 1, \dots, 1)$ et vérifiant $f(e_\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(q)$.*

Démonstration. Supposons que q est fonctionnellement stable, ce qui signifie que le point $\epsilon = (1, 1, \dots, 1)$ est dans l'intérieur de $C(q)$. Soit f une forme linéaire nulle en ϵ et soit H son noyau. Si les points e_α sont tous dans le même demi-espace fermé limité par H , le convexe engendré $C(q)$ est contenu dans ce demi-espace. C'est absurde, car si B est une boule de centre ϵ contenue dans $C(q)$ elle est symétrique par rapport à ϵ , donc contient des points de chacun des demi-espaces.

Supposons au contraire que ϵ n'est pas dans $C(q)^\circ$. Alors, il existe un hyperplan H contenant ϵ et tel que $C(q)$ soit tout entier contenu dans l'un des demi-espaces limités par H . C'est une variante élémentaire du théorème de séparation de Hahn-Banach (voir par exemple [Ber90] 11.4.1).

Les formes $f_{A,B}$ et les points (géométriquement) instables

7.7.5 Définition. *On considère une partition $A \cup B$ de l'ensemble $\{1, \dots, m\}$ avec A et B non vides. La forme linéaire $f_{A,B} : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ est définie par la formule :*

$$f_{A,B} = |B| \sum_{i \in A} e_i^* - |A| \sum_{j \in B} e_j^*$$

où e_i^* désigne la forme linéaire qui vaut 1 en e_i et 0 en les autres e_j .

On note que les formes $f_{A,B}$ sont toutes nulles au point unité $\epsilon = (1, 1, \dots, 1)$. Le lemme suivant montre que la condition de stabilité s'écrit comme celle de stabilité fonctionnelle vue en 7.7.4, mais en se limitant aux formes $f_{A,B}$:

7.7.6 Lemme. *Soit $q \in \mathbf{P}(E)^m$. Le point q est (géométriquement) instable si et seulement si il existe une forme $f_{A,B}$ telle que l'on ait $f_{A,B}(e_\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(q)$.*

Démonstration. Supposons d'abord q instable. Notons que le cas où tous les points a_i de q sont alignés est trivial puisqu'alors $\mathcal{D}(q)$ est vide. Sinon, il y a deux cas.

Si q contient p points confondus en a avec $p \geq m/3$, on considère la partition $A \cup B$ où B est formé des p indices i tels que $a_i = a$. Alors, on a $f_{A,B}(e_\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(q)$. En effet, si $\alpha = \{i, j, k\}$ est dans $\mathcal{D}(q)$ le crochet $[a_i, a_j, a_k]$ est non nul, donc les points a_i, a_j, a_k ne sont pas alignés, ce qui montre que l'un au plus des indices i, j, k est dans B . Mais alors si les éléments de α sont tous trois dans A il est clair que $f_{A,B}$ est ≥ 0 et si deux sont dans A on a $f_{A,B}(e_\alpha) = 2|B| - |A| = 2p - (m - p) = 3p - m \geq 0$ par hypothèse.

Si q contient p points alignés avec $p \geq 2m/3$, on considère la partition $A \cup B$ où B est formé des p indices i tels que les a_i soient alignés. Alors, on a $f_{A,B}(e_\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(q)$. En effet, si $\alpha = \{i, j, k\}$ est dans $\mathcal{D}(q)$ les points a_i, a_j, a_k ne sont pas alignés, ce qui montre que deux au plus des indices i, j, k sont dans B . Si deux indices sont dans B on a $f_{A,B}(e_\alpha) = |B| - 2|A| = p - 2(m - p) = 3p - 2m \geq 0$ par hypothèse. Si un seul indice, voire zéro, est dans B le résultat est encore plus évident.

Réciproquement, supposons qu'il existe $f_{A,B}$ telle que l'on ait $f_{A,B}(e_\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(q)$. On considère les crochets $[a_i, a_j, a_k]$ non nuls. La condition impose que les indices i, j, k ne sont pas tous trois dans B , autrement dit les points d'indices $i \in B$ sont alignés. Si deux indices $i, j \in B$ sont tels que a_i et a_j sont distincts et si on prend⁵⁸ $k \in A$ tel que le crochet $c_\alpha = [a_i, a_j, a_k]$ soit non nul, on a $f_{A,B}(e_\alpha) = |B| - 2|A| \geq 0$, donc $|B| \geq 2m/3$ par le calcul ci-dessus : le m -uplet q est instable. Si tous les a_i pour $i \in B$ sont confondus, on prend⁵⁹ $j, k \in A$ tels que le crochet $c_\alpha = [a_i, a_j, a_k]$ soit non nul, on a $f_{A,B}(e_\alpha) = 2|B| - |A| \geq 0$, donc $|B| \geq m/3$ et q est encore instable.

La suffisance des formes $f_{A,B}$

Comme les formes $f_{A,B}$ sont des formes particulières nulles en ϵ , le lemme précédent montre qu'un point géométriquement instable l'est aussi fonctionnellement. Pour la réciproque, il reste à voir que les $f_{A,B}$ suffisent à exprimer l'instabilité fonctionnelle :

7.7.7 Lemme. *Soit q un m -uplet pré-stable. S'il existe une forme linéaire f nulle en $(1, 1, \dots, 1)$ et vérifiant $f(e_\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(q)$ (c'est-à-dire si q est fonctionnellement instable) il existe une forme $f_{A,B}$ avec la même propriété (et donc q est géométriquement instable).*

⁵⁸S'il n'y en a pas, c'est que les m points sont alignés et q est évidemment instable.

⁵⁹Même remarque.

Démonstration. Quitte à effectuer une permutation des coordonnées, on peut supposer que f s'écrit $f = \sum_{i=1}^m \mu_i e_i^*$ avec $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_m$. On a le lemme suivant :

7.7.8 Lemme. *On suppose $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_m$. On pose, pour $i = 1, \dots, m-1$, $\beta_i = (\mu_{i+1} - \mu_i)/m$. On a alors $f = \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i f_{A_i, B_i}$ avec $B_i = \{1, 2, \dots, i\}$.*

Démonstration. On a, pour $k \geq 2$, $\mu_k = \mu_1 + m \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i$. Comme on a $\sum_{k=1}^m \mu_k = 0$, on en déduit $\mu_1 = -\sum_{i=1}^{m-1} (m-i)\beta_i$.

Par ailleurs, on a $f_{A_i, B_i} = i \sum_{k>i} e_k^* - (m-i) \sum_{k \leq i} e_k^*$. Calculons le coefficient sur e_k^* de la forme $g = \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i f_{A_i, B_i}$. Il est égal à :

$$\sum_{i < k} i\beta_i - \sum_{i \geq k} (m-i)\beta_i = -m \sum_{i \geq k} \beta_i + \sum_{i=1}^{m-1} i\beta_i = -\sum_{i=1}^{m-1} (m-i)\beta_i + m \sum_{i < k} \beta_i$$

et on constate que ce terme est bien égal à μ_k .

On peut maintenant finir 7.7.7. Soit e_{α_0} celui des vecteurs e_α , avec $\alpha \in \mathcal{D}(q)$, qui est le plus petit dans l'ordre lexicographique associé au nouvel ordre des coordonnées. Précisément, on a $\alpha_0 = \{1, j_0, k_0\}$, où j_0 est le plus petit indice tel que $a_{j_0} \neq a_1$ et k_0 le plus petit indice⁶⁰ tel que a_1, a_{j_0}, a_{k_0} ne soient pas alignés.

Soit g une forme dont les coefficients vérifient $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_m$ (ce qui est le cas pour f par hypothèse et pour les f_{A_i, B_i} dont les coefficients sont $(-(m-i), \dots, -(m-i), i, \dots, i)$). Soit $\alpha = \{i, j, k\} \in \mathcal{D}(q)$ (avec $i < j < k$). Montrons qu'on a $i \geq 1$, $j \geq j_0$ et $k \geq k_0$. C'est clair pour i . Si on a $1 \leq i < j < j_0$, la minimalité de α_0 assure que les points a_1, a_i, a_j sont confondus et le crochet $[a_i, a_j, a_k]$ est nul, ce qui est absurde. Si on a $k < k_0$, on a, *a fortiori*, $i, j < k_0$, la minimalité de α_0 implique que les points a_i, a_j, a_k sont alignés avec a_1 et a_{j_0} . Le crochet $[a_i, a_j, a_k]$ est donc nul, ce qui est absurde.

On a alors $g(e_\alpha) = \nu_i + \nu_j + \nu_k \geq g(e_{\alpha_0}) = \nu_1 + \nu_{j_0} + \nu_{k_0}$. Autrement dit, pour vérifier que toutes les valeurs de g sur les e_α sont ≥ 0 , il suffit de le faire pour e_{α_0} . Mais, on a :

$$f(e_{\alpha_0}) = \sum_{i=1}^m \beta_i f_{A_i, B_i}(e_{\alpha_0})$$

et, comme $f(e_{\alpha_0})$ et les β_i sont positifs, il y a nécessairement un terme $f_{A_i, B_i}(e_{\alpha_0}) \geq 0$. La forme f_{A_i, B_i} est donc la forme convenable.

⁶⁰Ces indices existent parce qu'on a supposé q pré-stable.

Fin de la preuve de 7.3.19

Si l'on met ensemble les résultats 7.7.3, 7.7.4, 7.7.6 et 7.7.7, on voit que les notions de points instables et fonctionnellement instables coïncident, donc aussi celles de points stables et le théorème est démontré dans le cas stable.

La réciproque dans le cas de la semi-stabilité

Il s'agit de montrer que la semi-stabilité géométrique implique la semi-stabilité fonctionnelle.

Il y a plusieurs façons faire. On peut adapter⁶¹ la preuve faite dans le cas de la stabilité. D'ailleurs, si m n'est pas multiple de 3, le résultat précédent est contenu dans le cas stable. Une autre preuve du théorème, dans le cas $m = 3p$, consiste à montrer plus précisément qu'en un point semi-stable, il y a une section de degré 1 en chaque point qui est non nulle (ces sections sont obtenues en prenant tous les produits de p crochets disjoints). Nous avons montré ce résultat dans le cas $m = 6$ en 7.5.1, pour le cas général on raisonne par récurrence sur p , voir exercice 7.9.2.

7.8 Des points et des droites

Nous étudions ici sommairement quelques exemples très simples de variétés de m points et de n droites sans aborder le cas général⁶². Le lecteur qui s'intéresse à la question courra se plonger dans [GIT]. Notons déjà que, dans le cas de m points et n droites, avec $0 < mn \leq 2$, le groupe $PGL(E)$ agit transitivement sur les uplets génériques, ce qui montre que le quotient est réduit à un point. Dans ce qui suit on confondra souvent les notations des points et des vecteurs (resp. des droites et des formes) et on utilisera en particulier les produits extérieurs pour décrire l'incidence.

Pour définir les notions de stabilité à la Mumford, il faut plonger le produit $\mathbf{P}(E)^m \times \mathbf{P}(E^*)^n$ dans un espace projectif \mathbf{P}^N ce que nous ferons encore au moyen du morphisme de Segre : si on a un objet $(a_1, \dots, a_m; f_1, \dots, f_n)$, où les points et les formes ont les coordonnées $(a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3})$ et $(f_{j,1}, f_{j,2}, f_{j,3})$, il se plonge au moyen de l'élément $(a_{1,i_1} a_{2,i_2} \cdots a_{m,i_m} f_{1,j_1} \cdots f_{n,j_n})$ où les i_k et j_k prennent toutes les valeurs possibles parmi 1, 2, 3. Avec ce plongement, on peut définir les notions d'objets stables comme en 7.6.14 ci-dessus.

⁶¹Et c'est plutôt plus facile.

⁶²Peut-être un jour ...

7.8.1 Deux points et deux droites

Ce cas est intéressant car il semble receler un paradoxe. En effet, l'espace X des quadruplets (a, b, f, g) formés de deux points et deux droites⁶³ est de dimension 8, comme $PGL(E)$ et pourtant celui-ci n'est pas transitif, puisqu'il y a un invariant : $\llbracket a, b; f, g \rrbracket = \frac{f(a)g(b)}{f(b)g(a)}$ dont on a vu que c'est le birapport $\llbracket a, b, x, y \rrbracket$ où x, y sont les traces de f et g sur (ab) . L'explication du paradoxe, c'est que le stabilisateur d'un objet $(a, b; f, g)$ est de dimension⁶⁴ ≥ 1 , de sorte que son orbite est de dimension ≤ 7 , cf. 7.2.1. En effet, dans le cas générique où f, g se coupent en $c \notin (ab)$, les homographies qui fixent a, b et stabilisent f, g fixent aussi x et y , donc la droite (ab) et fixent c : ce sont les homologies d'axe (ab) et de centre c . On sait qu'elles correspondent aux dilatations vectorielles de plan et de droite donnés et qu'elles forment un sous-groupe de dimension 1. Le théorème suivant fait le bilan des résultats concernant le quotient :

7.8.1 Théorème. 1) Un objet $q = (a, b; f, g)$ est semi-stable sauf si l'un des points est sur les deux droites ou si l'une des droites contient les deux points. On note Ω_{ss} l'ouvert des objets semi-stables.

2) Un objet $q = (a, b; f, g)$ est stable si de plus les points a, b sont distincts, les droites f, g sont distinctes et si l'un des points n'est sur aucune des droites. On note Ω_s l'ouvert des objets stables.

3) La flèche Φ qui à $(a, b; f, g)$ associe $(f(a)g(b), f(b)g(a)) = \llbracket a, b; f, g \rrbracket \in \mathbf{P}^1(k)$ est définie exactement sur l'ouvert Ω_{ss} . Elle fait de \mathbf{P}^1 un quotient catégorique (mais non géométrique) de Ω_{ss} par G .

4) La restriction de Φ à Ω_s induit un isomorphisme $\bar{\Phi}$ de Ω_s/G sur $\mathbf{P}^1(k)$ qui fait de \mathbf{P}^1 un quotient catégorique et géométrique de Ω_s par G .

Démonstration. 1) Il s'agit de décrire les sections invariantes. Dans le cas présent, les seuls polynômes invariants sont les évaluations (c'est-à-dire les polynômes du type $f(a)$) et les sections sont des polynômes formés à partir des $f(a)$ et qui ont mêmes degrés en a, b, f, g . Il est clair qu'elles s'écrivent toutes à partir des deux sections de degré 1 : $f(a)g(b)$ et $f(b)g(a)$. Dire que q est semi-stable signifie que l'une de ces sections est non nulle en q . Si ce n'est pas le cas on est dans l'un des quatre cas $f(a) = g(a) = 0$, $f(b) = g(b) = 0$, $f(a) = f(b) = 0$, $g(a) = g(b) = 0$ décrits ci-dessus.

2) Dire que q est stable, c'est dire qu'il existe une section s non nulle en q comme ci-dessus, et que, de plus, l'orbite de q dans $D(s)$ est fermée. Un

⁶³Que l'on représente ici par deux vecteurs et deux formes linéaires.

⁶⁴Il faut adapter la caractérisation de la pré-stabilité dans ce cas : les points pré-stables sont ceux dont le stabilisateur est de dimension minimale, ici 1.

argument de dimension montre que cela équivaut au fait que le stabilisateur de q a la dimension minimale 1 et un calcul facile montre que cela est réalisé, sauf si l'on a $a = b$, ou $f = g$, ou l'une des relations $f(a) = g(b) = 0$ ou $f(b) = g(a) = 0$.

3) L'assertion sur le quotient catégorique résulte du fait que tout polynôme invariant homogène en a, b, f, g est un polynôme en les deux sections $f(a)g(b)$ et $f(b)g(a)$.

On voit facilement que Φ n'est pas injective. Par exemple, tous les objets vérifiant $a = b$ et ceux vérifiant $f = g$ ont la même image $(1, 1)$ dans \mathbf{P}^1 .

4) La surjectivité est facile. Soit $\lambda \in \mathbf{P}^1(k)$. On fixe deux points a, b distincts, on choisit $c \in (ab)$ distinct de a, b et on considère l'unique point $d \in (ab)$ vérifiant $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \lambda$. Si on prend une droite f passant par c et une droite g passant par d distinctes et distinctes de (ab) , l'objet q est stable et vérifie $\Phi(q) = \lambda$.

Montrons que $\overline{\Phi}$ est injectif. Cela signifie que si l'on a deux quadruplets $(a, b; f, g)$ et $(a', b'; f', g')$ qui ont même image par Φ ils sont dans la même orbite sous PGL .

On pose $c = f \wedge g$ et $c' = f' \wedge g'$. Supposons d'abord que a, b, c (resp. a', b', c') sont non alignés. On peut alors envoyer un triplet sur l'autre par une homographie. On est ramené ainsi au cas $a = a', b = b', c = c'$. Soient x, x' les intersections de f et f' avec (ab) . Il existe une homographie u qui fixe a, b, c et qui envoie x sur x' . En effet, on peut supposer $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (0, 0, 1)$, $x = (1, 1, 0)$ et $x' = (\alpha, 1, 0)$ avec $\alpha \neq 0$. Il suffit alors de prendre u diagonale avec les coefficients diagonaux égaux à $\alpha, 1, 1$. On est ainsi ramené au cas $x = x'$, donc $f = c \wedge x = f' = c' \wedge x'$. Mais, si $-y$ et y' sont les intersections de g avec (ab) , on a aussi $y = y'$ à cause des formules $\llbracket a, b, x, y \rrbracket = \llbracket a, b, f, g \rrbracket = \llbracket a, b, f, g' \rrbracket = \llbracket a, b, x, y' \rrbracket$. On en déduit $g = c \wedge y = g' = c' \wedge y'$ et la transitivité.

Le cas où a, b, c sont alignés correspond au cas $x = y$ avec les notations précédentes et on a alors $\llbracket a, b, f, g \rrbracket = \llbracket a, b, f, g' \rrbracket = 1$, de sorte que c' est sur $(a'b')$. On se ramène au cas $a = a' = (1, 1, 0)$, $b = b' = (0, 1, 0)$, $c = c' = (1, 0, 0)$ et, en choisissant un point $d = (0, 0, 1)$ de f hors de (ab) , on peut supposer $f = f' = Y$. Il reste g que l'on peut supposer égale à $Y + T$ et g' , de la forme $\lambda Y + \mu T$. On passe alors de q à q' par la matrice $\text{diag}(1, \lambda, \mu)$.

7.8.2 Trois points et deux droites

Dans les deux exemples suivants on se contente essentiellement de donner les résultats.

On considère l'opération de PGL sur les objets $q = (a, b, c; f, g)$ formés de trois points et deux droites. Le résultat est le suivant :

7.8.2 Théorème. 1) Un objet q est pré-stable si et seulement si les points a, b, c ne sont pas alignés et si l'une des conditions suivantes est réalisée :

a) l'une des droites ne passe par aucun des points,
b) les droites se coupent en un unique point d formant un repère avec a, b, c .

2) Un objet q est semi-stable si les points a, b, c sont non alignés et si l'une des conditions suivantes est réalisée :

a) $f \wedge g \neq a, b, c$,
b) $f, g \neq b \wedge c, c \wedge a, a \wedge b$.

3) Si q est semi-stable, il est préstable. Il y a identité entre objets stables et semi-stables. On note Ω_s l'ouvert des objets stables.

4) Le quotient Ω_s/G est isomorphe à une surface cubique de l'espace projectif \mathbf{P}^3 .

7.8.3 Remarque. On a un exemple d'objet pré-stable non semi-stable en prenant a, b, c non alignés, $f = a \wedge b$ et g générique.

Démonstration. (Indications) Le point 1) résulte de 2.2.5. Pour le point 2), on note que les sections invariantes sont les produits de la forme :

$$f(a)^\alpha f(b)^\beta f(c)^\gamma g(a)^\delta g(b)^\epsilon g(c)^\eta [a, b, c]^\varphi$$

et on obtient les conditions voulues en écrivant l'égalité des degrés par rapport à a, b, c, f, g .

Le point 3) est alors immédiat (voir 7.2.2 pour la dernière assertion⁶⁵).

Enfin, pour le point 4), on utilise les sections s, t, u, v suivantes :

$$s = f(a)f(b)^2g(a)g(c)^2[a, b, c], \quad t = f(b)f(c)^2g(a)^2g(b)[a, b, c],$$

$$u = f(a)^2f(c)g(b)^2g(c)[a, b, c], \quad v = f(a)f(b)f(c)g(a)g(b)g(c)[a, b, c],$$

qui vérifient $stu = v^3$.

7.8.3 Trois points et trois droites

Cette fois les objets sont de la forme $q = (a, b, c; f, g, h)$. On a le résultat suivant :

7.8.4 Théorème. 1) Un objet $q = (a, b, c; f, g, h)$ est semi-stable sauf dans les quatre cas suivants : une des droites contient trois points, un des points

⁶⁵On peut aussi utiliser ici les résultats de Mumford sur les sous-groupes à un paramètre, voir [GIT] ch. 2

est sur trois droites, deux des droites se coupent en deux points confondus, deux des points sont alignés sur deux droites confondues.

2) Un objet est stable si deux des points ne sont pas sur l'une des droites et si deux des droites ne passent pas par l'un des points.

3) Le morphisme Φ défini par les six sections :

$$s_1 = f(a)g(b)h(c), \quad s_2 = f(a)g(c)h(b), \quad s_3 = f(b)g(a)h(c),$$

$$s_4 = f(b)g(c)h(a), \quad s_5 = f(c)g(a)h(b), \quad s_6 = f(c)g(b)h(a)$$

est défini exactement sur l'ouvert Ω_{ss} et son image est la surface cubique V de \mathbf{P}^5 définie par l'équation $s_1s_4s_5 = s_2s_3s_6$. Il fait de V un quotient catégorique (non géométrique) de Ω_{ss} par G .

4) La restriction de Φ à Ω_s a pour image l'ouvert V' de V complémentaire de la réunion des 15 droites d'équations $s_i = s_j = s_k = s_l = 0$ (i, j, k, l distincts parmi $1, \dots, 6$). Elle fait de V' un quotient catégorique et géométrique de Ω_s par G .

Démonstration. (Indications) On sait que les polynômes invariants sont les polynômes en les évaluations $f(a)$ et les crochets de points $[a, b, c]$ ou de formes $[f, g, h]$. Un tel polynôme qui est de même degré en les 6 variables $a, b, c; f, g, h$, s'il contient un crochet, contient nécessairement l'autre et au même degré. Comme le produit $[a, b, c][f, g, h]$ est combinaison linéaire des s_i en vertu de la relation \mathcal{T} de 3.2.4, cela montre que les s_i suffisent à engendrer les sections homogènes invariantes, d'où l'assertion sur le quotient catégorique. On en déduit aussi le point 1) en examinant les cas de nullité des s_i .

Pour voir, par exemple, qu'un objet $q = (a, b, c; f, g, h)$ avec $f = a \wedge b$ et g, h génériques n'est pas stable, on écrit $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (0, 0, 1)$ et on considère l'homographie $u_n = \text{diag}(1, 1, 1/n)$. On voit que $u_n(q)$ tend vers un q' semi-stable qui n'est pas dans l'orbite de q .

Pour voir que V n'est pas un quotient géométrique de Ω_{ss} , on peut considérer l'objet q défini par $f = b \wedge c$, $g = c \wedge a$ et $h = a \wedge b$. Son image par Φ est le point $(1, 0, \dots, 0)$ (et q est donc semi-stable). Mais ce point est aussi l'image de q' dès que $f = b \wedge c$ et que g contient c ou que h contient b .

7.9 Exercices

7.9.1 L'ouvert archi-générique

7.9.1 Exercice. On suppose $m \geq 4$ et on note Ω_0 la partie de $\mathbf{P}(E)^m$ formée des m -uplets de points (a_1, \dots, a_m) tels que trois quelconques d'entre eux soient non alignés.

1) Montrer que Ω_0 est l'intersection de tous les ouverts affines standard et que cet ouvert est stable sous l'action de G .

2) On suppose $m \geq 5$. Montrer que l'application $\Phi : \Omega_0 \rightarrow \mathbf{R}^{2(m-4)}$ qui à $q = (a_1, \dots, a_m)$ associe les $(m-4)$ couples de birapports

$$(\lambda_\alpha, \mu_\alpha) = ([a_2; a_1, a_3, a_4, a_\alpha], [a_1; a_2, a_3, a_4, a_\alpha])$$

pour $\alpha \geq 5$, induit un isomorphisme de Ω_0/G sur un ouvert ω_0 de $\mathbf{R}^{2(m-4)}$ que l'on précisera (on donnera les équations du complémentaire de ω_0).

7.9.2 Semi-stabilité

7.9.2 Exercice. ¶¶

Dans tout cet exercice on suppose $m = 3p$ avec $p \geq 2$. L'objectif de cet exercice est de donner une démonstration du cas semi-stable de 7.3.19 en exhibant un morphisme dont le domaine de définition est exactement l'ouvert des points semi-stables.

Pour cela on considère le morphisme Φ_0 , défini sur E^m et à valeurs dans \mathbf{R}^{N+1} , qui associe à (a_1, \dots, a_m) le $N+1$ -uplet formé de tous les produits de p crochets $[a_i, a_j, a_k]$ où les ensembles $\{i, j, k\}$ forment une partition de $\{1, 2, \dots, m\}$. Ces produits sont des sections de degré 1 au sens de 7.3.5. Soit U l'ouvert de $\mathbf{P}(E)^m$ où les sections sont non toutes nulles. On définit le morphisme Φ de U/G dans \mathbf{P}^N par passage au quotient à partir de Φ_0 .

I) Montrer que les points de U sont semi-stables.

II) On se propose de montrer la réciproque. Pour $m = 6$ (donc $p = 2$) le résultat a été vu en 7.5.1 et on va montrer le cas général par récurrence sur p . Pour cela, on introduit les notions suivantes pour un objet $q = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{P}(E)^m$.

- La **multiplicité** du point a_i dans q est le nombre d'indices j tels que $a_j = a_i$. On la note $\mu(a_i)$.

- L'**alignement** du point a_i dans q est le maximum du cardinal des ensembles $J \subset \{1, \dots, m\}$, contenant i , et tels que les points a_j pour $j \in J$ soient alignés. En clair c'est le nombre maximum de points de q (comptés avec multiplicités) alignés avec a_i . On le note $\alpha(a_i)$.

- Le **poids** de a_i dans q est le nombre $\pi(a_i) = \text{Max}(2\mu(a_i), \alpha(a_i))$.

On note que l'objet q est semi-stable si et seulement si on a $\mu(a_i) \leq m/3$ et $\alpha(a_i) \leq 2m/3$ pour tout i et on a alors $\pi(a_i) \leq 2m/3$ pour tout i . Dans le cas $m = 3p$ on a $\pi(a_i) \leq 2p$.

On introduit aussi un ordre sur les points défini comme suit. Soit $q = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{P}(E)^m$. On considère les points a_i distincts de q et on les ordonne de la manière suivante :

- Si on a $\pi(a_i) > \pi(a_j)$ on a $i \prec j$.
- Si on a $\pi(a_i) = \pi(a_j)$ et $\mu(a_i) > \mu(a_j)$ on a $i \prec j$.
- Si on a $\pi(a_i) = \pi(a_j)$, $\mu(a_i) = \mu(a_j)$ et $i < j$, on a $i \prec j$.

1) Montrer que le résultat cherché est conséquence du lemme suivant :
Soit q un objet semi-stable de cardinal $3p + 3$, $p \geq 2$. Il existe trois indices i, j, k tels que $[a_i, a_j, a_k]$ soit non nul et que l'objet q' , égal à q privé des trois points a_i, a_j, a_k , soit encore semi-stable.

2) On montre désormais le lemme énoncé en 1).

On ordonne les points distincts de q selon le procédé ci-dessus. On considère le premier point a de q pour cet ordre et le second, b .

2.1) Montrer qu'ils sont distincts et que tous les points de q ne sont pas sur (ab) .

On considère le premier point c dans l'ordre ci-dessus, non aligné avec a, b . On a donc $[a, b, c] \neq 0$. On considère l'objet $q' \in \mathbf{P}(E)^{3p}$ obtenu en enlevant les points a, b, c . On va montrer par l'absurde que q' est semi-stable.

2.3) Montrer que q' ne peut pas avoir de point de multiplicité $p + 1$.

2.4) On suppose que q' présente un alignement de $2p + 1$ points au moins et on appelle D la droite de cet alignement.

Montrer qu'on aboutit à une absurdité. On considérera les cas suivants :

- La droite D contient a et b .
- La droite D contient le point a , mais pas b .

On suivra le chemin suivant. Montrer que D ne contient pas c , puis qu'elle contient des points $\neq a$ de poids $\geq 2p + 2$. En déduire que b est de poids $\geq 2p + 2$ et distinguer selon qu'on a $\mu(b) = p + 1$ ou $\alpha(b) \geq 2p + 2$.

- La droite D contient b et pas a .

Montrer que a est de poids $2p + 2$ et distinguer, comme ci-dessus, entre multiplicité et alignement.

- La droite D ne contient ni a , ni b .

Montrer qu'on a trois cas : $\mu(a) = \mu(b) = p + 1$ ou $\mu(a) = p + 1$, $\alpha(b) \geq 2p + 1$ ou enfin $\alpha(a)$ et $\alpha(b)$ tous deux $\geq 2p + 1$ et conclure (¶).

7.9.3 Exercice. On suppose $m = 5$. On se propose de montrer que l'entier N minimum fourni par la proposition 7.3.12 est égal à 9.

1) Montrer qu'il a trois types de quintuplets stables a, b, c, d, e :

- les quintuplets archi-génériques pour lesquels il n'y a aucun alignement,
- les quintuplets admettant un unique alignement, par exemple a, b, e ,
- les quintuplets admettant deux alignements, par exemple a, b, e et c, d, e .

2) Montrer que, dans les trois cas, on a des sections de degré total 45 (donc de degré $N = 9$ en chaque variable). (Pour le premier cas on utilisera

le produit d'une section dodécaédrique par la section évidente, produit de tous les crochets. Pour les autres on résoudra les équations correspondantes ou on utilisera des produits de trois sections dodécaédrique.)

7.9.3 Le théorème des orbites fermées

7.9.4 Exercice. ¶ On se propose de prouver le théorème 7.3.26 dont on reprend les notations. On notera que le résultat est évident pour $m \leq 3$. On suppose donc $m \geq 4$.

- 1) Montrer le sens direct du théorème dans le cas stable (si q est stable, son orbite est fermée dans Ω_{ss}). (On utilisera 7.6.3.)
- 2) Montrer le sens direct du théorème dans le cas des points de type 3).
- 3) Prouver le lemme combinatoire suivant :

7.9.5 Lemme. Soit p un entier > 0 et soient b_1, \dots, b_{2p} des points alignés sur D .

1) On suppose que p au plus des b_i sont égaux. Alors, quitte à réordonner les b_i on peut supposer $b_{2i} \neq b_{2i-1}$ pour $i = 1, \dots, p$.

2) On suppose que $p-1$ au plus des b_i sont égaux et qu'on a, par exemple, $b_1 \neq b_2$. Alors, quitte à réordonner les b_i on peut supposer $b_{2i} \neq b_{2i-1}$ pour $i = 1, \dots, p$.

4) Soit q un point de type 2), donc formé de p points confondus $a = a_1 = \dots = a_p$ et de $2p$ points alignés b_1, \dots, b_{2p} et soit q' un point adhérent à $\omega(q)$.

a) Montrer que q' est formé de p points confondus a'_i et de $2p$ points alignés b'_j .

b) On considère le morphisme Ψ , défini sur un ouvert de $\mathbf{P}(E)^m$ et à valeurs dans \mathbf{P}^N , qui associe à (a_1, \dots, a_m) l'image du $N+1$ -uplet formé de tous les produits de p crochets $[a_i, a_j, a_k]$ où les ensembles $\{i, j, k\}$ forment une partition de $\{1, 2, \dots, m\}$.

Montrer que ce morphisme est défini sur les objets de Ω_{ss} formés de p points confondus $a_1 = \dots = a_p$ et $2p$ points alignés b_1, \dots, b_{2p} (utiliser 7.9.5).

c) ¶ Montrer que si q' n'est pas dans $\omega(q)$ on a $\Psi(q) \neq \Psi(q')$. (On distinguera deux cas selon que q et q' ont exactement les mêmes crochets non nuls ou non et on utilisera encore 7.9.5.)

d) Conclure pour le sens direct du théorème dans le cas des points de type 2).

5) Dans cette question on aborde l'autre sens du théorème. Soit q un point semi-stable qui n'est pas de l'un des types 1), 2), 3). Il s'agit de montrer que son orbite n'est pas fermée dans Ω_{ss} .

a) On suppose que q est pré-stable mais contient (exactement) p points confondus en $c = (0, 0, 1)$. On pose $g_n = \text{diag}(1, 1, 1/n)$. Montrer que la suite $g_n(q)$ converge vers un point semi-stable qui n'est pas dans l'orbite de q .

b) On suppose que q est pré-stable mais contient (exactement) $2p$ points alignés sur la droite d'équation $T = 0$. On pose $g_n = \text{diag}(1/n, 1/n, 1)$. Montrer que la suite $g_n(q)$ converge vers un point semi-stable qui n'est pas dans l'orbite de q .

c) Traiter le cas où q n'est pas pré-stable.

7.9.4 Le cas de \mathbf{P}^1

¶ Dans cet exercice, E est un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension 2. Si $q = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ est un m -uplet de points de $\mathbf{P}(E)$, on note encore $\text{conf}(q)$ le nombre maximum de points a_i confondus en un même point a . On dit que q est pré-stable s'il existe trois points distincts parmi les a_i . On dit que q est semi-stable (resp. stable) si on a $\text{conf}(q) \leq m/2$ (resp. $\text{conf}(q) < m/2$). On note respectivement Ω , Ω_{ss} et Ω_s l'ensemble des points pré-stables, semi-stables et stables.

1) Montrer que Ω , Ω_{ss} et Ω_s sont des ouverts de $\mathbf{P}(E)^m$ pour la topologie de Zariski et qu'ils sont stables sous l'action de $G := PGL(E)$.

2) Montrer que si q est un point de Ω , son orbite $\omega(q)$ est fermée dans Ω .

3) On suppose m pair, $m = 2p$.

a) Soit $M + 1$ le nombre de produits de p crochets disjoints formés avec les a_i . Montrer qu'on a $M + 1 = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2p - 1)$. On considère le morphisme Φ à valeurs dans \mathbf{P}^M qui associe à $q = (a_1, \dots, a_m)$ le $M + 1$ -uplet ci-dessus. Montrer que le domaine de définition de Φ est égal à Ω_{ss} .

b) Montrer que Φ induit un morphisme $\bar{\Phi}$ du quotient Ω_{ss}/G dans \mathbf{P}^M . Montrer que $\bar{\Phi}$ est injectif sur Ω_s/G (mais pas sur Ω_{ss}/G) et que l'image de Ω_{ss}/G est une sous-variété fermée (donc projective) de \mathbf{P}^M .

c) Montrer que le quotient Ω_s/G est séparé (mais pas Ω_{ss}/G).

4) On suppose m impair. On notera qu'on a alors $\Omega_s = \Omega_{ss}$.

a) Montrer qu'on a un morphisme Ψ de Ω_s dans \mathbf{P}^N qui associe à $q = (a_1, \dots, a_m)$ le $N + 1$ -uplet des produits de m crochets formés avec les a_i , de telle sorte que chaque produit soit homogène de degré m par rapport à chaque a_i .

b) Montrer que le morphisme $\bar{\Psi}$ est injectif sur Ω_s/G et que son image est une sous-variété fermée (donc projective) de \mathbf{P}^N .

c) Montrer que le quotient Ω_s/G est compact.

Bibliographie

- [Ber90] Marcel Berger. *Géométrie*. Nathan, Paris, 1990.
- [Del75] Charles Delorme. Espaces projectifs anisotropes. *Bull. S.M.F.*, 103 :203–223, 1975.
- [Die71] Jean Dieudonné. La théorie des invariants au xix-ième siècle. *Séminaire Bourbaki*, exp. 395 :257–274, 1970-1971.
- [Fog69] John Fogarty. *Invariant theory*. Benjamin, New-York, 1969.
- [Ful69] William Fulton. *Algebraic curves*. Benjamin, New-York, 1969.
- [Gan66] Felix Gantmacher. *Théorie des matrices*. Dunod, Paris, 1966.
- [Gro66] Alexandre Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique, II : Étude globale de quelques classes de morphismes*. Publications mathématiques de l’IHES, Paris, 1966.
- [Gur64] G. Gurevich. *Algebraic theory of invariants*. Noordhoff, Groningen, 1964.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer, Berlin, 1977.
- [How89] Roger Howe. Remarks on classical invariant theory. *Transactions of the A.M.S.*, 313, 2 :539–570, 1989.
- [JB98] Marie-Françoise Roy Jacek Bochnak, Michel Coste. *Real Algebraic Geometry*. Springer Verlag, Berlin, 1998.
- [JD70] J. Carrell Jean Dieudonné. *Invariant theory, old and new*. Acad. Press, New-York, 1970.
- [Lan69] Serge Lang. *Algebra*. Addison Wesley, New-York, 1969.
- [MCD07] Daniel Perrin Marie-Claude David, Frédéric Haglund. *Géométrie affine (polycopié)*. Université Paris-Sud, Orsay, 2007.
- [Mum65] David Mumford. *Geometric invariant theory*. Springer, Berlin, 1965.
- [New78] P.E. Newstead. *Introduction to moduli problems and orbit spaces*. Tata Institut, Bombay, 1978.

- [Olv99] Peter J. Olver. *Classical invariant theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [Per95] Daniel Perrin. *Géométrie algébrique, une introduction*. Interéditions, Paris, 1995.
- [Per96] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, Paris, 1996.
- [Per05] Daniel Perrin. *Mathématiques d'École*. Cassini, Paris, 2005.
- [Pop77] Herbert Popp. *Moduli theory and classification theory of algebraic varieties*. Springer Lecture Notes 620, Berlin, 1977.
- [Ric89] David R. Richman. The fundamental theorems of vector invariants. *Advances in mathematics*, 73 :43–78, 1989.
- [Ser78] Jean-Pierre Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris, 1978.
- [Wey39] Hermann Weyl. *The Classical Groups : Their Invariants and Representations*. Princeton Math. Series, Princeton, 1939.