

Partie V. LA GÉOMÉTRIE
D'UNE FORME
QUADRATIQUE, troisième
épisode : LA GÉOMÉTRIE
EUCLIDIENNE

Introduction

Exceptionnellement, cette cinquième partie, consacrée à la géométrie euclidienne, ne débutera pas par une introduction historique. Comme son nom l'indique, la géométrie euclidienne remonte – au moins - à Euclide et nous sommes tous débiteurs des mathématiciens grecs pour cet édifice magnifique que sont les *Éléments*. Je conseille d'ailleurs au lecteur sceptique d'aller se plonger dans cette œuvre exceptionnelle. Nul doute qu'il en sortira admiratif. Mais on peut considérer que cette géométrie est connue de tous puisqu'enseignée dès les premières années du collège et que son histoire¹ nous est plus familière que celle des autres géométries, ce qui m'exonère de devoir la présenter. De plus, cette histoire serait inexacte, car l'objectif de cette partie n'est pas de rendre hommage aux Grecs, et l'entrée choisie est radicalement différente de la leur. Je m'en explique maintenant.

Un premier paradoxe est la place de cette partie dans ce livre, venant après celle consacrée aux géométries non euclidiennes, elliptique ou hyperbolique. Il y a deux raisons à cela. D'abord, le lecteur est supposé instruit, donc familier avec la géométrie euclidienne, et il s'agit ici d'une relecture dont l'objectif est la comparaison des trois géométries. Ensuite, l'entrée dans la géométrie que nous avons choisie depuis le début consiste à partir d'un espace vectoriel E de dimension 3, du plan projectif $\mathbf{P}(E)$ associé et d'une forme quadratique définie sur E . Mais, alors que les cas non euclidiens correspondent aux formes non dégénérées, le cas euclidien correspond à la donnée d'une forme **dégénérée**, donc un cas plutôt plus compliqué à cet égard, et le chemin que nous allons suivre est le chemin inverse du chemin habituel : notre modèle sera la géométrie non euclidienne (régulière de notre point de vue) et nous étudierons en quoi la géométrie euclidienne est singulière et s'écarte du modèle.

Il y a un autre point mystérieux en apparence : cette forme est donnée, non pas sur l'espace vectoriel E (il n'y a pas de forme quadratique naturelle sur E), mais **sur son dual**. Bien entendu, dans le cas d'une forme non dégénérée, cela ne fait pas de différence, mais dans le cas dégénéré, ce n'est pas la même chose. Cette donnée permet de définir immédiatement une structure affine sur le plan (la droite à l'infini correspond au noyau de la forme) et elle induit la notion d'orthogonalité, avant celle de distance. En théorie, cela devrait nous conduire à privilégier les similitudes (transformations conservant

1. Si les programmes des lycées et collèges continuent dans la tendance actuelle, sans doute qu'à la dixième édition de ce livre, dans cent ans, il faudra faire un historique de la géométrie euclidienne, car elle ne sera pas plus familière aux gens de cette époque que les géométries non euclidiennes ne le sont à nos contemporains. En ce qui me concerne : *Je serai sous la terre et fantôme sans os, Par les ombres myrteux je prendrai mon repos ...*

l'orthogonalité) par rapport aux isométries, mais le poids des habitudes est grand en ce domaine...

On verra que le cas euclidien est radicalement différent des autres, avec ses avantages et ses inconvénients. Parmi les avantages, la donnée d'une droite à l'infini canonique qui permet de faire de la géométrie affine. Parmi les inconvénients, l'inexistence d'une dualité convenable.

Notre objectif dans cette partie est donc un peu différent de ce qu'il était dans les précédentes. En vérité, c'est un objectif presque didactique. La comparaison de la géométrie euclidienne aux autres doit permettre d'en dégager les permanences et les singularités, afin d'en tirer des leçons, y compris pour l'enseignement au collège et au lycée.

Le plan de cette partie est le suivant. On commence au chapitre 1 par quelques rappels sur le point de vue vectoriel-affine ordinaire, et notamment les groupes d'isométries et de similitudes et leurs invariants, afin de permettre au lecteur de prendre ses marques. Le chapitre 2 entre dans le vif du sujet avec l'introduction de la forme quadratique dégénérée q^* sur le dual E^* d'un espace vectoriel de dimension 3. On y montre comment récupérer la situation usuelle, parfois au moyen de choix qui sont explicités. Le chapitre 3 a pour but de montrer que les groupes naturellement associés à la donnée de q^* sont les mêmes que ceux de la géométrie euclidienne usuelle, à quelques variantes près. On commence à y aborder les propriétés de transitivité, dans le cadre vectoriel, donc algébrique. Le chapitre 4 permet au lecteur épuisé par les développements théoriques des chapitres précédents, de se reposer en retrouvant les théorèmes de son enfance : concours des droites remarquables du triangle et droite d'Euler, mais traités de notre point de vue. Avec le chapitre 5, on continue l'étude de la transitivité, mais cette fois dans le cadre géométrique, avec les notions d'angles, distances et aires, et les cas d'isométrie et de similitude des triangles. On introduit aussi quelques outils d'algèbre (déterminants de Cayley-Menger, notamment). Le chapitre 6 attaque le problème des espaces de points et de droites modulo isométries, avec une première application aux triangles. Cette étude se poursuit au chapitre 7 pour les quadrangles et quadrilatères, avec une partie importante sur les problèmes de cocyclicité (théorèmes de l'angle inscrit et de Ptolémée). Enfin, le chapitre 8 clôt cette étude en revenant sur la détermination théorique des invariants des différents groupes et de leurs relations qui sont apparus à de multiples reprises dans les chapitres précédents.

Un dernier mot sur ce point qui fait partie des obsessions de ce texte. En géométrie euclidienne comme dans les autres géométries, les invariants jouent un rôle central et les relations qui les lient sont la source des théorèmes les plus importants. On en verra au moins trois illustrations dans cette partie :

- Le rôle universel joué par la relation de Chasles, sous la forme triviale $(B - C) + (C - A) + (A - B) = 0$, dans les théorèmes de concours des droites remarquables du triangle.

- Le caractère dégénéré de la géométrie euclidienne (qui la distingue des géométries hyperbolique et elliptique) traduit à la fois par une relation (la nullité d'un déterminant de Gram) et un résultat géométrique (le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à π).

- La belle relation (*) de 7.3.3, racine commune des théorèmes de l'angle inscrit et de Ptolémée.

Chapitre 1

La géométrie euclidienne : rappels sur le point de vue affine-vectoriel ordinaire

Nous supposons le lecteur familier avec les notions élémentaires de la géométrie euclidienne, à la fois sous la forme originelle d'Euclide, parce que c'est elle qui fournit la base de l'intuition géométrique, mais aussi sous celle que l'on rencontre couramment dans l'enseignement supérieur français et qui repose sur les notions d'espaces vectoriels et affines. Ce chapitre n'est donc là que pour le confort du lecteur et pour faire le lien avec l'entrée plus théorique adoptée au chapitre 2. Nous reviendrons au besoin sur certains points dans la suite du texte. Pour plus de détails, le lecteur consultera [Aud06], [Ber90], [Lad03], [MCD07], [Per96], [RD51], [Ped70], [Gug67], [Mar82], etc.

Nous rappelons donc, très brièvement, la définition d'un espace affine euclidien (a priori sur un corps quelconque), puis nous étudions plus en détail les groupes attachés à cette donnée (isométries et similitudes, vectorielles et affines). Notre objectif est de les reconnaître quand ils apparaîtront sous divers déguisements dans les chapitres suivants. Enfin, nous prenons un premier contact avec les invariants de ces groupes (produits et carrés scalaires et crochets) qui nous accompagneront tout au long de cette partie.

1.1 La géométrie affine euclidienne

1.1.1 La géométrie affine

Soit k un corps de caractéristique différente de 2 et soit \vec{X} un k -espace vectoriel de dimension 2. Rappelons qu'un plan affine X , d'espace vectoriel

sous-jacent \vec{X} , est un ensemble muni d'une application de $X \times X$ dans \vec{X} qui à deux points $x, y \in X$ associe le vecteur $\vec{xy} \in \vec{X}$ et qui vérifie deux propriétés :

- La relation de Chasles : $\vec{xz} = \vec{xy} + \vec{yz}$ pour tous $x, y, z \in X$.
- Le fait que, pour $a \in X$ fixé, l'application $x \mapsto \vec{ax}$ est une bijection de X sur \vec{X} .

Cette donnée permet de définir droites affines, parallélisme, barycentres, milieux, translations, applications affines, etc. Rappelons que $f : X \rightarrow X$ est une application affine si et seulement si il existe une application linéaire (dite associée) \vec{f} qui vérifie, pour tous $a, b \in X$: $\vec{f(a)f(b)} = \vec{f(ab)}$. Le groupe des applications affines bijectives de X dans X est noté $A(X)$, le groupe des translations (isomorphe à $(\vec{X}, +)$) est noté $T(X)$. Les translations sont les applications affines dont l'application linéaire associée est l'identité.

1.1.2 La géométrie euclidienne

On dit que le plan affine X est muni d'une structure euclidienne si l'on s'est donné une forme quadratique q , **anisotrope**, sur \vec{X} , de forme polaire φ . La forme φ sera appelée¹ **produit scalaire** et q sera le **carré scalaire**.

Dans le cas réel, cela permet de définir sur X les notions de distance, d'angle, d'orthogonalité, ainsi que les isométries et les similitudes relatives à la forme q , voir ci-dessous.

Discriminant

Rappelons (voir Partie III) que, si q est une forme quadratique sur l'espace vectoriel V et si \mathcal{B} est une base de V , le discriminant $\Delta_{\mathcal{B}}(q)$ de q est défini comme le déterminant de la matrice de q dans la base \mathcal{B} . Si l'on fait un changement de base de matrice P , le déterminant est multiplié par $(\det P)^2$. Le discriminant de q n'est donc défini qu'à un carré près. Cependant, il est invariant par les changements de base qui sont dans $SL(V)$.

1. Dans le cas général, les mots *structure euclidienne* et *produit scalaire* sont un peu abusifs : ils sont plutôt réservés au cas du corps des réels et d'une forme définie positive.

1.2 Rappels sur les groupes d'isométries et de similitudes des plans vectoriel et affine dans le cas euclidien

L'objectif de ce paragraphe est de rappeler un certain nombre de définitions et de résultats sur les isométries et les similitudes, vectorielles et affines, du plan, dans le cas anisotrope. Nous reviendrons sur ces objets, avec une autre approche, dans le chapitre 3. Pour nombre de ces rappels, le lecteur pourra se référer à [Per96] Chapitres V et VIII ou à [MCD07]. Voir aussi l'exercice de révision 1.4.1.

1.2.1 Notations

Dans toute cette section, q désigne une forme anisotrope (donc non dégénérée) sur un espace vectoriel V de dimension 2 sur un corps k de caractéristique différente de 2. On désigne par $O(q)$ le groupe orthogonal associé, par $O^+(q)$ et $O^-(q)$ ses parties positive et négative. Les éléments de $O^+(q)$ sont appelés **rotations** (vectorielles).

Soit γ un discriminant de q (défini à un carré de k^* près). À un scalaire près, la forme q est équivalente à $q(x, y) = x^2 + \gamma y^2$ avec $-\gamma \notin k^{*2}$ (puisque q est anisotrope). On considère le corps $K = k(\sqrt{-\gamma})$ (dans le cas $k = \mathbf{R}$, il s'agit simplement du corps des nombres complexes) et on pose $i = \sqrt{-\gamma}$. Dans K on a l'automorphisme σ de conjugaison qui à $x + iy$ associe $x - iy = x + i(-y)$ et la "norme²" définie par $N(x + iy) = (x + iy)(x - iy) = x^2 + \gamma y^2$. On a $N(z) \in k$ et N induit un homomorphisme de K^* dans k^* , de noyau $\mathbf{U}_K = \{z \in K \mid N(z) = 1\}$. On note que la forme définie par la norme n'est autre que q .

1.2.2 Isométries vectorielles du plan

Description de $O(q)$

1.2.1 Proposition.

- 1) Si u est dans $O^-(q)$, u est une réflexion.
- 2) Si u est dans $O^+(q)$, on a $u = \tau_1 \tau_2$, où $\tau_1 \tau_2$ sont des réflexions, l'une d'entre elles pouvant être choisie arbitrairement.
- 3) Soient $u \in O^+(q)$ et $\tau \in O^-(q)$, on a $\tau u \tau^{-1} = \tau u \tau = u^{-1}$.
- 4) Le groupe $O^+(q)$ est commutatif.

2. Ici, il s'agit de la norme des arithméticiens qui est, dans le cas de \mathbf{C} , le carré de celle des analystes.

5) Soit $u \in O^+(q)$. On suppose qu'il existe $x \in V$, non nul, tel que $u(x) = x$. Alors on a $u = \text{Id}$.

Démonstration. Voir [Per96] VIII 6.1.

1.2.2 Remarque. Rappelons que le groupe $O(q)$ est non commutatif, voir [Per96] VIII 5.3.

Détermination du groupe $O^+(q)$

Comme la forme q est équivalente, à un scalaire près, à $x^2 + \gamma y^2$, on peut identifier V à k^2 , puis à K , et la forme q à la norme N . On a alors le résultat suivant :

1.2.3 Proposition. *On identifie V et K comme ci-dessus. L'application qui à $\zeta \in \mathbf{U}_K$ associe u_ζ défini par $u_\zeta(z) = \zeta z$ définit un isomorphisme du groupe \mathbf{U}_K sur le groupe $O^+(q)$.*

Démonstration. Il est clair que u_ζ est dans $GL(2, k)$ et, comme $N(\zeta z) = N(\zeta)N(z) = N(z)$ puisque $\zeta \in \mathbf{U}_K$, on a même $u_\zeta \in O(N) = O(q)$. De plus l'application $u : \zeta \mapsto u_\zeta$ est un homomorphisme de groupes de \mathbf{U}_K dans $O(q)$.

Si, pour un $z \neq 0$, on a $u_\zeta(z) = z = \zeta z$, on en déduit $\zeta = 1$. Il en résulte que l'homomorphisme $u : \zeta \mapsto u_\zeta$ est injectif et que u_ζ n'est pas une réflexion, donc (cf. 1.2.1) que u_ζ est dans $O^+(q)$.

Montrons que l'image de u est $O^+(q)$. Soit $\rho \in O^+(q)$ et posons $\zeta = \rho(1)$ (toujours avec l'identification de k^2 et K). On a $N(\zeta) = N(1) = 1$, donc $\zeta \in \mathbf{U}_K$ et $\rho(1) = u_\zeta(1)$. On a alors $u_\zeta^{-1}\rho(1) = 1$, mais comme $u_\zeta^{-1}\rho$ est dans $O^+(q)$ et fixe 1, on a $u_\zeta^{-1}\rho = \text{Id}$ (cf. 1.2.1.5) donc $\rho = u_\zeta$.

1.2.4 Remarques.

1) Dans la base $1, i$ de K , la matrice de u_ζ , pour $\zeta = a + bi \in \mathbf{U}_K$ est :

$$\begin{pmatrix} a & -\gamma b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + \gamma b^2 = 1.$$

2) Si k est le corps fini \mathbf{F}_l , on a $K = \mathbf{F}_{l^2}$ et la suite exacte, cf. [Per96] VIII 6.5 :

$$1 \rightarrow \mathbf{U}_K \rightarrow K^* \xrightarrow{N} k^* \rightarrow 1.$$

On a donc $|\mathbf{U}_K| = l + 1$ et comme K^* est cyclique, \mathbf{U}_K , donc aussi $O^+(q)$, est un groupe cyclique de cardinal $l + 1$.

Angles

Dans ce paragraphe, on suppose que le corps k est le corps des nombres réels et que la forme q est positive. On peut alors supposer $\gamma = 1$ et le corps K est le corps \mathbf{C} des nombres complexes. Par rapport au cas général, on dispose d'une notion essentielle, celle de base orthonormée. Nous rappelons ici les propriétés essentielles liées à cette notion :

1.2.5 Proposition-Définition. *On suppose $k = \mathbf{R}$. Il existe des bases orthonormées de V c'est-à-dire des bases e_1, e_2 vérifiant $q(e_1) = q(e_2) = 1$ et $\varphi(e_1, e_2) = 0$. Dans une telle base, le discriminant de q vaut 1.*

Si v est un vecteur unitaire (c'est-à-dire tel que $q(v) = 1$) il existe deux vecteurs w opposés tels que v, w soit une base orthonormée. Le groupe $O(q)$ opère simplement transitivement sur l'ensemble des bases orthonormées. Le groupe $O^+(q)$ opère simplement transitivement sur l'ensemble des vecteurs unitaires.

Démonstration. La vérification est facile. Voir, au besoin, [MCD07].

La notion de base orthonormée permet de définir celle d'orientation :

1.2.6 Proposition-Définition. *On fixe une base orthonormée e_1, e_2 de V . Si ϵ_1, ϵ_2 est une base orthonormée quelconque, on dit qu'elle est **directe** (resp. **indirecte**) si l'unique isométrie u qui envoie e_1, e_2 sur ϵ_1, ϵ_2 est directe (ou positive) (resp. indirecte). On dit qu'on a ainsi défini une **orientation** de V . Le groupe $O^+(q)$ opère simplement transitivement sur l'ensemble des bases orthonormées directes.*

Dans le cas réel, on a une description du groupe $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{\mathbf{C}}$ grâce à l'exponentielle :

1.2.7 Proposition. *L'application $e : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{U}$ qui à θ associe $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ induit un isomorphisme $\bar{e} : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{U}$.*

Démonstration. Voir [Car61] ou [MCD07].

On a alors une description des rotations vectorielles :

1.2.8 Proposition-Définition. *Soit $u \in O^+(q)$. Il existe un élément $\theta \in \mathbf{R}$, unique modulo 2π , tel que, dans toute base orthonormée directe, u admette la matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. L'image $\bar{\theta}$ de θ dans $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ est appelée **angle** de la rotation³ u , qui est notée $\rho(\bar{\theta})$.*

Démonstration. Cela résulte de 1.2.4. Pour plus de précisions, voir par exemple [MCD07].

3. Par abus de langage on parlera de la rotation d'angle $\theta \in \mathbf{R}$ et on la notera $\rho(\theta)$.

Transitivité

Précisons dès maintenant les conditions de transitivité du groupe⁴ $O(q)$ sur les n -uplets de vecteurs :

1.2.9 Proposition. 1) Soient (e_1, e_2) et (ϵ_1, ϵ_2) deux bases de V . On suppose qu'on a $q(e_1) = q(\epsilon_1)$, $q(e_2) = q(\epsilon_2)$ et $\varphi(e_1, e_2) = \varphi(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Alors il existe un unique $u \in O(q)$ tel que $u(e_1) = \epsilon_1$ et $u(e_2) = \epsilon_2$.

2) Soient v_1, \dots, v_n et w_1, \dots, w_n deux n -uplets de vecteurs de V . Il existe $u \in O(q)$ tel que l'on ait, pour tout $i = 1, \dots, n$, $u(v_i) = w_i$ si et seulement si on a $\varphi(v_i, v_j) = \varphi(w_i, w_j)$ pour tous i, j vérifiant $1 \leq i \leq j \leq n$.

Démonstration. Le point 1) est clair. On note que 2) est évident si tous les vecteurs sont nuls et presque évident s'ils sont tous colinéaires. Sinon, supposons par exemple v_1 et v_2 non colinéaires. En vertu de 1), on se ramène, quitte à appliquer une isométrie, au cas $v_1 = w_1$ et $v_2 = w_2$. Il reste à montrer qu'alors on a $v_i = w_i$ pour tout i . Pour cela, on écrit $v_i = \lambda_i v_1 + \mu_i v_2$ et de même pour w_i . Comme la matrice des produits et carrés scalaires de v_1, v_2 est inversible, les équations donnant λ_i, μ_i en fonction de $\varphi(v_1, v_i)$ et $\varphi(v_2, v_i)$ n'ont qu'une solution et on a $v_i = w_i$.

1.2.3 Similitudes vectorielles du plan

On travaille toujours avec une forme anisotrope q sur un espace vectoriel V de dimension 2.

Détermination du groupe des similitudes $GO(q)$

Rappelons les définitions suivantes (cf. Partie III ?? ou [Per96] Ch. V) :

1.2.10 Définition. Soit u un endomorphisme de V . On dit que u est une **similitude** (vectorielle) relativement à q s'il existe un scalaire $\mu(u) \in k^*$ (qu'on appelle le **multiplicateur** de u) tel que l'on ait, pour tout $x \in V$, $q(u(x)) = \mu(u)q(x)$. On note $GO(q)$ le groupe des similitudes relatives à q .

1.2.11 Remarques. 1) Les isométries sont les similitudes de multiplicateur égal à 1 ; comme q est anisotrope, une similitude vectorielle qui admet un point fixe est nécessairement une isométrie.

2) Si Q est la matrice de q et U celle de u on a ${}^tUQU = \mu(u)Q$, donc $\det u^2 = \det U^2 = \mu(u)^2$ et $\det u = \pm\mu(u)$. Cela nous conduit à la définition suivante.

4. Pour le cas de $O^+(q)$, voir 1.3.4.

1.2.12 Proposition-Définition. Soit $u \in GO(q)$ une similitude. On pose $\epsilon(u) = \det(u)/\mu(u) = \mu(u)/\det(u)$. L'application ϵ , appelée **signe**, est un homomorphisme surjectif de $GO(q)$ dans $\{+1, -1\}$. Son noyau est un sous-groupe distingué d'indice 2 de $GO(q)$ que l'on note $GO^+(q)$. Ses éléments sont appelés **similitudes directes**. Il contient le groupe des rotations $O^+(q)$. Le groupe $GO(q)$ est produit semi-direct de $GO^+(q)$ par $\{1, -1\}$.

Démonstration. Pour la surjectivité et le produit semi-direct, il suffit de noter que les réflexions vérifient $\epsilon = -1$. Le reste est immédiat.

La description de $GO^+(q)$ est analogue à celle de $O^+(q)$:

1.2.13 Proposition. On identifie V et K comme en 1.2.3. L'application qui à $\zeta \in K^*$ associe u_ζ défini par $u_\zeta(z) = \zeta z$ définit un isomorphisme du groupe K^* sur le groupe $GO^+(q)$. Le multiplicateur de u_ζ et son déterminant sont tous deux égaux à $N(\zeta)$.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle de 1.2.3 et laissée au lecteur.

1.2.14 Corollaire. Les similitudes indirectes (c'est-à-dire celles qui vérifient $\det u = -\mu(u)$) correspondent aux applications $v_\zeta : z \mapsto \zeta \bar{z}$ avec $\zeta \in K^*$. Le multiplicateur de v_ζ est $N(\zeta)$ et son déterminant $-N(\zeta)$.

Démonstration. Si σ est la conjugaison de K , il suffit de considérer $u\sigma$ pour se ramener au cas précédent.

1.2.15 Corollaire. (Forme matricielle) On suppose V muni d'une base orthogonale dans laquelle est q de la forme $x^2 + \gamma y^2$. La matrice d'une similitude $u \in GO(q)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -\epsilon\gamma b \\ b & \epsilon a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in k$ non tous deux nuls et $\epsilon = \epsilon(u) = \pm 1$. Le multiplicateur de u est $\mu(u) = a^2 + \gamma b^2$, son déterminant est $\epsilon(a^2 + \gamma b^2)$.

Parmi les similitudes, il y a évidemment les produits (commutatifs) $h_\lambda u$ d'une homothétie de rapport $\lambda \in k^*$ et d'une isométrie. Le multiplicateur d'une telle similitude est λ^2 , et c'est donc un carré. Le groupe des transformations de cette forme est le produit direct $O(q) \times k^*$. Attention, en général, il y a d'autres similitudes que celles-là. Précisément :

1.2.16 Corollaire. Soit $N(K^*)$ le groupe des normes :

$$N(K^*) = \{x^2 + \gamma y^2 \in k^* \mid (x, y) \in k^2, (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

On a les suites exactes :

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow O(q) \rightarrow GO(q) \rightarrow N(K^*) \rightarrow 1, \\ 1 \rightarrow O(q) \times k^* \rightarrow GO(q) \rightarrow N(K^*)/(k^*)^2 \rightarrow 1, \\ 1 \rightarrow O^+(q) \times k^* \rightarrow GO^+(q) \rightarrow N(K^*)/(k^*)^2 \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Démonstration. La flèche de $GO(q)$ dans $N(K^*)$ est définie par le multiplicateur dont on a vu que c'était une norme. La proposition 1.2.13 montre qu'elle est surjective. Comme son noyau est $O(q)$, on a la première suite. Le multiplicateur de u est dans $(k^*)^2$ si et seulement si u est produit d'une isométrie par une homothétie. En effet, si la similitude est positive⁵ on a $u = u_\zeta$, et si $N(\zeta) = \lambda^2$, avec $\lambda \in k^*$, u_ζ est produit de l'homothétie de rapport λ et de l'isométrie $u_{\lambda^{-1}\zeta}$.

1.2.17 Corollaire. *On suppose $k = \mathbf{R}$. Soit u une similitude de multiplicateur μ . Il existe un unique nombre positif λ tel que $\mu = \lambda^2$. Le nombre λ est appelé **rapport** de la similitude. La similitude u est produit d'une isométrie et d'une homothétie de rapport λ .*

Démonstration. Le résultat vient de 1.2.16. En effet, le multiplicateur étant une norme, est positif, donc un carré.

1.2.18 Remarque. Le groupe $GO(q)$ des similitudes n'est pas toujours produit direct de $O(q)$ par k^* (et de même pour GO^+), ou encore, une similitude n'est pas toujours produit d'une isométrie et d'une homothétie. En effet, en général le groupe des normes contient $(k^*)^2$ mais ne lui est pas égal. Par exemple, sur le corps fini \mathbf{F}_l , avec⁶ $l \equiv 1 \pmod{4}$, le groupe des normes est \mathbf{F}_l^* tout entier, de cardinal $l - 1$, tandis que le groupe des carrés est de cardinal $(l - 1)/2$. En effet, on sait qu'alors -1 est un carré, de sorte que $-\gamma$ et γ sont tous deux non carrés. Le groupe des normes contient à la fois les carrés x^2 et les non carrés γy^2 et c'est donc \mathbf{F}_l^* . Sur \mathbf{Q} , avec la forme $x^2 + y^2$, le nombre 2 est une norme, mais n'est pas un carré. Voir aussi 1.4.2.

Transitivité des similitudes

1.2.19 Proposition. *Soient v_1, \dots, v_n et w_1, \dots, w_n deux n -uplets de vecteurs de V . Il existe $u \in GO(q)$ tel que l'on ait, pour tout $i = 1, \dots, n$, $u(v_i) = w_i$ si et seulement s'il existe $\mu \in k^*$ vérifiant $\varphi(w_i, w_j) = \mu\varphi(v_i, v_j)$ pour tous i, j avec $1 \leq i \leq j \leq n$.*

5. Le raisonnement est analogue dans le cas négatif.

6. Le résultat est valable dans tous les cas, voir[Per96], Ch. V, 6.11.

Démonstration. Comme μ est le quotient de deux valeurs de q , c'est une norme et il en est de même de μ^{-1} . Il existe donc une similitude s de multiplicateur μ^{-1} . Si l'on pose $w'_i = s(w_i)$, on est ramené au cas $\mu = 1$ et on applique 1.2.9. Voir aussi exercices 1.4.4 et 1.4.5.

1.2.4 Isométries et similitudes affines

Dans ce paragraphe, X désigne un plan affine et on suppose l'espace vectoriel $\vec{X} = V$ associé muni d'une forme quadratique anisotrope q comme ci-dessus.

Définition

Rappelons qu'une application affine $f : X \rightarrow X$ est appelée une **isométrie** (resp. une **similitude**) si son application linéaire associée \vec{f} est une isométrie pour la forme q (resp. une similitude). Le groupe des similitudes est noté $\text{Sim}(X)$, le groupe des isométries $\text{Is}(X)$, il contient le groupe des isométries positives (ou déplacements) $\text{Is}^+(X)$ qui sont les isométries u vérifiant $\det \vec{u} = 1$. On a les inclusions :

$$\{\text{Id}\} \subset T(X) \subset \text{Is}^+(X) \subset \text{Is}(X) \subset \text{Sim}(X) \subset A(X)$$

où $T(X)$ est le groupe des translations et $A(X)$ le groupe de toutes les applications affines de X .

1.2.20 Proposition. *Le quotient $\text{Sim}(X)/T(X)$ est isomorphe à $GO(q)$. Inversement, soit G un sous-groupe de $\text{Sim}(X)$. On suppose que G contient le groupe des translations $T(X)$ et que l'image de G par l'application $u \mapsto \vec{u}$ est le groupe $GO(q)$. Alors on a $G = \text{Sim}(X)$.*

Démonstration. Soit u un élément de $\text{Sim}(X)$ et soit \vec{u} l'application linéaire associée. C'est une similitude vectorielle, donc il existe $g \in G$ tel que $\vec{g} = \vec{u}$. Mais alors, l'application linéaire associée à $g^{-1}u$ est l'identité, de sorte que $g^{-1}u$ est une translation t . Comme t et g sont dans G , $u = gt$ aussi.

Rotations

1.2.21 Proposition-Définition. *1) On appelle **rotation affine** l'identité, ou une isométrie dont l'application linéaire associée est une rotation vectorielle distincte de l'identité. Une rotation affine distincte de l'identité admet un unique point fixe. Inversement, un élément de $\text{Is}^+(X)$ qui admet un point fixe est une rotation.*

2) Lorsque le corps k est le corps des réels, on appelle rotation de centre a et d'angle θ la rotation qui fixe le point a et admet pour application linéaire associée la rotation vectorielle $\rho(\theta)$ (voir 1.2.8).

Démonstration. Voir [MCD07].

Les rotations donnent une description des stabilisateurs :

1.2.22 Proposition. Soit $a \in X$. Le sous-groupe G_a^+ des isométries positives qui fixent a est isomorphe à $O^+(q)$.

1.2.23 Remarque. Ce résultat est une première différence notable avec les géométries non euclidiennes. En effet, en géométrie non euclidienne, sur un corps quelconque, les groupes G_a^+ ne sont pas tous isomorphes (voir Partie IV, ??). Si cette difficulté s'estompe sur \mathbf{R} , une autre demeure : la composition des rotations de sommets différents ne correspond pas à la somme des angles et cela rend la relation de Chasles beaucoup moins attrayante (voir Partie IV ??). En revanche en euclidien, on a le résultat suivant, dont les conséquences géométriques seront importantes (voir 5.6.4) :

1.2.24 Proposition. On suppose $k = \mathbf{R}$. La composée de deux rotations ρ_a et ρ_b d'angles α et β est une rotation d'angle $\alpha + \beta$, sauf si l'on a $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ (auquel cas c'est une translation).

Démonstration. L'application qui à une isométrie affine f associe l'application linéaire \vec{f} est un homomorphisme, donc l'image de la composée $\rho_b \circ \rho_a$ est la composée des rotations vectorielles. Comme l'application $\theta \mapsto \rho(\theta)$ est un isomorphisme, l'image de $\rho_b \circ \rho_a$ est $\rho(\alpha + \beta)$. Il en résulte que $\rho_b \circ \rho_a$ est une rotation d'angle $\alpha + \beta$, sauf si cet angle est nul, voir figure 1.1.

La composée des rotations de centre a et d'angle α et de centre b et d'angle β est la rotation de centre c et d'angle $\gamma = \alpha + \beta$.

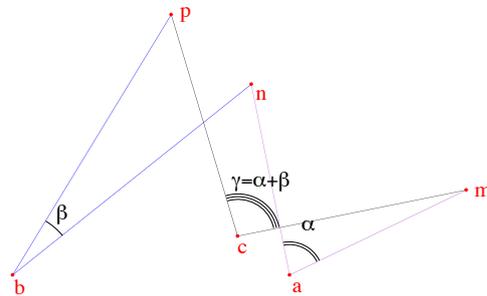


FIGURE 1.1 – La composée des rotations

Involutions

Rappelons le résultat bien connu suivant :

1.2.25 Proposition. *Les involutions contenues dans le groupe $\text{Sim}(X)$ sont des isométries. Il y en a de deux types : les symétries axiales (ou réflexions) et les symétries centrales. Une isométrie u est une symétrie axiale (resp. centrale) si et seulement si elle vérifie $\det \vec{u} = -1$ et si elle admet un point fixe (resp. si elle vérifie $\vec{u} = -\text{Id}$). Une symétrie axiale (resp. centrale) admet une droite de points fixes (resp. un unique point fixe). La réflexion d'axe D est notée τ_D , la symétrie de centre o est notée σ_o .*

Pour des compléments sur ce thème, voir 1.4.1.

Description des similitudes en termes de “nombres complexes”

On choisit une origine o de X . Cela permet d'identifier X et V , puis X et K . La proposition suivante résulte de 1.2.13 et 1.2.14 :

1.2.26 Proposition. *Avec l'identification précédente, le groupe des similitudes de X relatives à q est le groupe formé des transformations de la forme $z \mapsto az+b$ ou $z \mapsto a\bar{z}+b$, avec $a, b \in K$ et $a \neq 0$. Les isométries correspondent au cas $N(a) = 1$, les homothéties distinctes de Id au cas $a \in k^*$, $a \neq 1$.*

Transitivité

1.2.27 Proposition. *Le groupe $\text{Is}(X)$ est transitif sur les points de X . Le groupe $\text{Sim}(X)$ est doublement transitif sur X .*

Le lecteur justifiera la figure ci-contre.

Les points a, b, a', b' sont donnés. La similitude qui envoie a sur a' et b sur b' est composée de la rotation de centre ω et d'angle θ et de l'homothétie de centre ω et de rapport $a'b'/ab$.

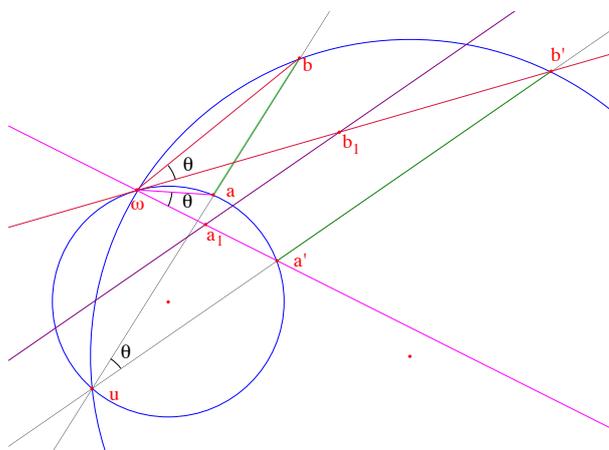


FIGURE 1.2 – La double transitivité des similitudes

Démonstration. C'est évident avec l'écriture "complexe". Dans le cas des isométries on utilise les translations $z \mapsto z + b$. Dans le cas des similitudes, si on se donne des points distincts z, w (resp. z', w') de K , il existe $a, b \in K$, avec $a \neq 0$, uniques, tels que l'on ait $z' = az + b$ et $w' = aw + b$.

1.2.28 Corollaire. *Le groupe $\text{Sim}(X)$ est transitif sur les droites de X .*

Démonstration. Il suffit de choisir deux points distincts sur chaque droite et d'utiliser 1.2.27.

1.2.29 Remarque. En revanche, si le corps est quelconque, le groupe des isométries n'est pas transitif sur les droites, cf. 5.2.2.

1.3 Les invariants du groupe des isométries en dimension 2 et leurs relations

La problématique du calcul des invariants et de leurs relations a déjà été largement abordée dans les Parties II et IV et sera reprise ci-dessous au chapitre 8 de manière plus formelle. Anticipant sur ce chapitre, nous nous contentons ici de présenter ces invariants et leurs relations dans le cas très simple d'un espace vectoriel V de dimension 2 muni d'une forme anisotrope q et de sa forme polaire φ .

1.3.1 Les invariants

Si l'on considère des vecteurs de V notés a, b, c, \dots , ils admettent deux types d'invariants essentiels : les produits et carrés scalaires $\varphi(a, b)$ et $q(a)$, qui sont des invariants sous le groupe $O(q)$ et les crochets $[a, b]$ qui sont invariants sous $SL(V)$, donc sous $O^+(q)$. Comme les crochets nous seront aussi utiles en dimension 3, nous rappelons brièvement leur définition dans le cas général, le lecteur se référera à la Partie II pour plus de précisions.

Les crochets

La propriété suivante est bien connue :

1.3.1 Proposition-Définition. *Soit V un k -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Si \mathcal{B} est une base de V sur k l'application qui à (x_1, \dots, x_n) associe $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est une application n -linéaire alternée non nulle de V^n dans k et, inversement, toute application n -linéaire alternée non nulle de V^n dans k est de cette forme. Si l'on change \mathcal{B} en \mathcal{B}' , l'application $\det_{\mathcal{B}}$ est multipliée par le déterminant de la matrice de changement de base. En particulier,*

elle est invariante par les changements de base de déterminant 1. Une telle application est appelée **crochet** et on note $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_n]$.

La définition des crochets suppose la donnée d'une base (ou d'une famille de bases de même déterminant). Dans le cas particulier des similitudes on a donc :

1.3.2 Corollaire. *Soit V un espace vectoriel de dimension 2 muni d'une forme anisotrope q et soit $u \in GO(q)$. Pour tous $x, y \in V$ on a la formule $[u(x), u(y)] = (\det u)[x, y]$. En particulier, le crochet est invariant par les éléments de $O^+(q)$.*

1.3.3 Remarque. Nous verrons au chapitre 8 que les invariants de n vecteurs génériques sous $O(q)$ (resp. $O^+(q)$) sont les polynômes en les produits et carrés scalaires (resp. en les produits et carrés scalaires et les crochets).

Transitivité (suite)

On peut compléter le résultat de 1.2.9 dans le cas des isométries positives :

1.3.4 Proposition. *Soient v_1, \dots, v_n et w_1, \dots, w_n deux n -uplets de vecteurs de V . Il existe $u \in O^+(q)$ tel que l'on ait, pour tout $i = 1, \dots, n$, $u(v_i) = w_i$ si et seulement si on a $\varphi(v_i, v_j) = \varphi(w_i, w_j)$ et $[v_i, v_j] = [w_i, w_j]$ pour tous i, j vérifiant $1 \leq i < j \leq n$.*

Démonstration. On a un élément de $O(q)$ grâce à 1.2.9 et il a le bon signe grâce à l'égalité des crochets.

1.3.2 Les relations

Là encore, nous reviendrons sur les relations entre invariants au chapitre 8. On considère un k -espace vectoriel V de dimension 2 muni d'une forme quadratique q anisotrope. On suppose qu'on a choisi⁷ une base \mathcal{B} de V , de sorte que le crochet $[a, b]$ de deux vecteurs de V est défini, ainsi que le discriminant⁸ $\Delta(q)$. On a alors le résultat suivant :

1.3.5 Théorème. *Soient $a, b, c, x, y \in V$. On a les relations suivantes :*

$$(1) \quad [a, b][x, y]\Delta(q) = \begin{vmatrix} \varphi(a, x) & \varphi(a, y) \\ \varphi(b, x) & \varphi(b, y) \end{vmatrix},$$

$$(2) \quad [b, c]\varphi(a, x) + [c, a]\varphi(b, x) + [a, b]\varphi(c, x) = 0.$$

7. Comme on l'a dit, ce choix est à une transformation de $SL(V)$ près, à la fois pour le crochet et le discriminant.

8. Rappelons que sur \mathbf{R} on peut supposer $\Delta(q) = 1$.

Démonstration. La relation (1), lorsque les vecteurs a, b (resp. x, y) sont indépendants⁹, résulte de la formule de changement de base pour les formes quadratiques (voir Partie III, ??). Il n'est d'ailleurs pas difficile de la montrer directement par le calcul.

Comme E_∞ est de dimension 2, a, b, c sont liés par la relation de dimension : $[b, c]a + [c, a]b + [a, b]c = 0$ (voir Partie II, ??). On obtient la relation (2) en appliquant $\varphi(\cdot, x)$. Là encore, il est facile de prouver directement la formule.

1.3.6 Remarque. On désignera parfois ces relations sous le nom de relations trigonométriques, car, sur \mathbf{R} , elles sont équivalentes aux formules d'addition pour les cosinus et sinus, voir 5.6.10. On dira aussi *relation de changement de base* pour la première et *relation de dimension* pour la seconde. Nous verrons au chapitre 8 que l'idéal des relations entre invariants est engendré par ces relations.

1.3.7 Corollaire. (Identité de Lagrange)

Avec les notations précédentes, on a la formule $\varphi(a, b)^2 + \Delta(q)[a, b]^2 = q(a)q(b)$.

Le lecteur perspicace aura reconnu la formule $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

1.4 Exercices

1.4.1 Un exercice de révision

Le lecteur qui aurait tout oublié des propriétés du groupe euclidien traitera avec profit l'exercice suivant (voir au besoin [MCD07]). On suppose ici que le corps de base est \mathbf{R} .

1.4.1 Exercice. 1) Montrer que le produit de deux réflexions τ_{ATB} (voir 1.2.25) est égal à :

- la rotation de centre o et d'angle $2(B, A)$, où (B, A) désigne l'angle orienté des droites, si les droites se coupent en o ,
- la translation de vecteur $2\vec{v}$, où \vec{v} est le vecteur orthogonal à A et B vérifiant $t_{\vec{v}}(B) = A$, si les droites sont parallèles.

2) Montrer que le produit de deux symétries centrales $\sigma_a \sigma_b$ est la translation de vecteur $2\vec{ba}$.

3) Montrer que si une isométrie u du plan fixe trois points a, b, c non alignés c'est l'identité. En déduire que si u fixe deux points a, b distincts c'est l'identité ou la réflexion d'axe (ab) .

9. Et sinon, elle est triviale.

4) Montrer que le groupe euclidien est engendré par les réflexions et plus précisément que toute isométrie est produit d'au plus trois réflexions (on peut par exemple utiliser la question précédente).

5) Montrer qu'un produit de trois réflexions qui n'est pas une réflexion peut s'écrire comme produit commutatif d'une réflexion d'axe D et d'une translation de vecteur colinéaire à D (on appelle ces transformations des **symétries glissées**). Montrer qu'une symétrie glissée n'a aucun point fixe et a une unique droite invariante.

6) Établir la classification suivante des isométries de X .

a) Les isométries directes comprennent l'identité, les rotations et les translations et on les distingue selon leurs points fixes (X tout entier, un point, le vide).

b) Les isométries indirectes comprennent les réflexions et les symétries glissées et on les distingue selon leurs points fixes (une droite, le vide).

1.4.2 Exercice. Cet exercice fournit l'exemple le plus simple dans lequel on a des similitudes autres que les produits d'isométries et d'homothéties. On travaille sur le corps \mathbf{F}_3 avec la forme anisotrope $x^2 + y^2$. Montrer que les isométries sont données par les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et leurs opposées, et que les similitudes comportent, en outre, les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et leurs opposées. Conclure.

1.4.2 Structure du groupe des similitudes

1.4.3 Exercice. 1) Montrer que le groupe $\text{Sim}(X)$ est résoluble.

2) Montrer que le groupe $\text{Sim}^+(X)$ est produit semi-direct (voir [Per96]) du groupe additif K par le groupe multiplicatif K^* avec l'opération $a.x = ax$ (utiliser 1.2.26). Étudier le cas de $\text{Sim}(X)$.

3) On suppose $k = \mathbf{R}$. Montrer que le groupe $\text{Sim}(X)$ est une variété différentielle de dimension 4.

1.4.3 Transitivité

1.4.4 Exercice. Transitivité des similitudes, 1

Cet exercice vise à prouver 1.2.19 en utilisant les relations entre les invariants. On utilisera la forme matricielle des similitudes 1.2.15. Les notations sont celles du paragraphe 1.2.

1) Soient v, w deux vecteurs non nuls de V . Montrer qu'il existe une similitude u telle que $u(v) = w$.

2) Soient $a, b; x, y$ des vecteurs non nuls de V . On suppose qu'il existe $\mu \in k^*$ vérifiant :

i) $q(x) = \mu q(a)$,

ii) $\varphi(x, y) = \mu \varphi(a, b)$,

iii) $[x, y] = \mu[a, b]$.

Montrer qu'on a les relations $q(b)\varphi(a, x) = q(a)\varphi(b, y)$ et $q(b)[a, x] = q(a)[b, y]$. (On utilisera les relations (1) et (2) de 1.3.5).

3) Montrer le résultat de 1.2.19 dans le cas $n = 2$, puis dans le cas général (utiliser la forme matricielle des similitudes et la question précédente).

1.4.5 Exercice. Transitivité des similitudes, 2

Cette fois, on prouve 1.2.19 en utilisant les "complexes".

1) Soient $v, w \in V$ deux vecteurs non nuls. Montrer qu'il existe une similitude directe unique u telle que $u(v) = w$ (identifier V et le corps K et prendre $u = u_\zeta$ avec $\zeta = w/v$).

2) Soient $v_1, v_2; w_1, w_2$ des vecteurs non nuls de V . Montrer qu'il existe une similitude directe (resp. indirecte) u vérifiant $u(v_i) = w_i$ pour $i = 1, 2$ si et seulement s'il existe $\mu \in k^*$ tel que l'on ait $q(w_1) = \mu q(v_1)$, $\varphi(w_1, w_2) = \mu \varphi(v_1, v_2)$ et $[w_1, w_2] = \mu[v_1, v_2]$ (resp. $[w_1, w_2] = -\mu[v_1, v_2]$). (Procéder comme à la question 1) en utilisant la formule $v\bar{w} = \varphi(v, w) + i[w, v]$.)

3) Prouver la proposition 1.2.19.

1.4.4 Normalisateurs

1.4.6 Exercice. Rappelons que si G est un groupe et H un sous-groupe de G on appelle **normalisateur** de H dans G le plus grand sous-groupe $N = N_G(H)$ de G dans lequel H est distingué. On a :

$$N = \{n \in G \mid \forall h \in H, nhn^{-1} \in H\}.$$

On a vu (Partie IV ??) que, si G opère sur X , N permute les orbites de H sur X donc conserve la relation de congruence sous H : si x et y sont deux éléments de X équivalents sous l'action de H (i.e. dans la même orbite), il en est de même de $n.x$ et $n.y$ avec $n \in N$.

On suppose $k = \mathbf{R}$, on note X le plan affine euclidien et $\mathfrak{S}(X)$ le groupe des bijections de X . On se propose de montrer que le normalisateur N de $\text{Is}(X)$ dans $\mathfrak{S}(X)$ est le groupe des similitudes $\text{Sim}(X)$. Les notations sont celles de 1.2.25.

1) Soient g un élément de N , D une droite de X et o un point de X .

a) Montrer qu'on a $g\tau_D g^{-1} = \tau_{g(D)}$ et $g\sigma_o g^{-1} = \sigma_{g(o)}$.

b) Montrer que g conserve l'alignement (on notera que σ_o et τ_D commutent si et seulement si o est sur D). En déduire que g est une application affine (on consultera par exemple [Art62] ou on s'inspirera de Partie I, 4.4).

c) Montrer que g conserve l'orthogonalité des droites de X (on notera que, pour $D \neq D'$, τ_D et $\tau_{D'}$ commutent si et seulement si D et D' sont perpendiculaires). En déduire que g est une similitude (voir par exemple [Per96] Ch. V). Conclure.

2) Déduire de ce qui précède que le normalisateur du groupe des similitudes dans $\mathfrak{S}(X)$ est égal à lui-même (on montrera que $\text{Is}(X)$ est en fait un sous-groupe caractéristique de $\text{Sim}(X)$, c'est-à-dire invariant par tout automorphisme; on considérera pour cela les involutions).

1.4.7 Exercice. On suppose $k = \mathbf{R}$ et $q(x, y) = x^2 + y^2$. Soit N le normalisateur de $GO(q)$ dans $GL(V)$.

1) Montrer que si h est dans N il normalise aussi $GO^+(q)$.

2) En déduire qu'on a $N = GO(q)$. (Soit $u = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ un élément de $GO^+(q)$ et $h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ un élément de N . On écrira que huh^{-1} est dans $GO^+(q)$.)

Chapitre 2

L'entrée par le dual : présentation

Dans ce chapitre, on quitte l'approche usuelle de la géométrie euclidienne et l'on entre dans un autre monde, dont on présente ici les personnages principaux : l'espace vectoriel E de dimension 3, son dual E^ et la forme quadratique **dégénérée** parabolique q^* définie sur E^* . Le fait que q^* soit dégénérée fournit aussitôt une droite à l'infini dans le plan projectif $\mathbf{P}(E)$, donc un plan affine X associé, avec une notion de parallélisme, ce qui nous ramène en terrain familier. La forme q^* permet aussi de définir une notion d'orthogonalité sur les droites de X . L'étape suivante, un peu plus délicate parce qu'elle nécessite un choix, est de définir, toujours à partir de q^* , une forme anisotrope q sur l'espace vectoriel \vec{X} . Cela permet de retrouver la situation du chapitre 1 et de disposer des invariants relatifs à q : carrés et produits scalaires. La dernière étape est de définir les invariants orientés sur \vec{X} (c'est-à-dire les crochets). Pour cela, il faut des données supplémentaires (par exemple une équation de la droite de l'infini et des crochets sur E et E^*).*

2.1 L'entrée par le dual

2.1.1 La forme quadratique, la droite à l'infini et la structure affine du plan

La forme q^*

2.1.1 Notations. Dans toute la suite de cette partie, on considère un corps k de caractéristique différente de 2, un espace vectoriel E de dimension 3

sur k , l'espace dual E^* et les plans projectifs $\mathbf{P}(E)$ et $\mathbf{P}(E^*)$ associés. On se donne une forme quadratique q^* **sur l'espace dual E^* , dégénérée de rang 2 et parabolique**, i.e. sans autres vecteurs isotropes que ceux du noyau¹. On note φ^* sa forme polaire. Le noyau L de q^* est une droite vectorielle de E^* , qui correspond à un point de $\mathbf{P}(E^*)$.

Une précision au sujet des notations. Comme d'habitude, on note a, b, c, \dots les vecteurs de E et $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ (voire a, b, c, \dots par abus de langage) les points de $\mathbf{P}(E)$ associés. En ce qui concerne les formes, nous ferons cohabiter deux notations. Quand il s'agira d'un traitement algébrique, on les notera le plus souvent f, g, h, \dots . Cependant, lorsqu'on considérera les droites associées on aura tendance à noter les formes A, B, C, \dots et les droites associées $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$ (voire A, B, C, \dots par abus de langage). Cette dernière notation vaudra en particulier dans les chapitres où l'on étudiera les triangles, quadrilatères, etc.

2.1.2 Exemple. Choisissons une base orthogonale de E^* et des coordonnées (u, v, w) telles que L soit le sous-espace engendré par $(0, 0, 1)$. La forme q^* est alors égale à $\alpha u^2 + \beta v^2$ avec α et β non nuls (car elle est de rang 2) et tels que $-\beta/\alpha$ (ou, encore $-\alpha\beta$) n'est pas un carré de k (car q^* n'a pas d'autres isotropes que les vecteurs de L). On notera que cette situation ne peut pas se produire sur n'importe quel corps. Par exemple, le cas d'un corps comme celui des complexes est exclu. En fait, les deux cas essentiels à examiner sont ceux de \mathbf{R} (et de ses sous-corps) et des corps finis.

2.1.3 Remarque. Si le corps de base est \mathbf{R} , la condition précédente signifie que $-\alpha\beta$ est < 0 donc $\alpha\beta > 0$ et q^* est de signe constant. La forme q^* vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\varphi^*(f, g)^2 \leq q^*(f)q^*(g)$. (Il suffit d'écrire que $q^*(\lambda f + g)$ est de signe constant pour $\lambda \in \mathbf{R}$.)

2.1.4 Remarque. Comme on l'a vu en 1.2.1, il est utile d'introduire le corps K extension quadratique de k obtenue en adjoignant à k une racine carrée i de $-\beta/\alpha$. Sur ce corps, la forme q^* possède des isotropes autres que les éléments du noyau, à savoir les formes $(i, 1, 0)$ et $(-i, 1, 0)$. Lorsque k est le corps des réels on a $K = \mathbf{C}$ et les isotropes vont donner les fameux points cycliques (voir 2.1.29, 3.2.8 ou 5.2.16).

Une mise en garde

2.1.5 Remarque. Attention, comme dans le cas non euclidien, si \bar{A}, \bar{B} sont des droites de $\mathbf{P}(E)$ d'équations A, B , les invariants $q^*(A)$ et $\varphi^*(A, B)$ des

1. En allemand, cf. [Bac59], on dit *nullteilig*.

équations ne sont pas des invariants des droites puisque les équations ne sont définies qu'à un scalaire près. Deux éléments cependant auront un sens indépendant du choix des équations :

- Le fait que $\varphi^*(A, B)$ soit nul : on verra que cela équivaut à l'orthogonalité des droites.

- Les fractions rationnelles en ces quantités avec même degré en chaque équation en numérateur et dénominateur, qui seront des invariants des droites et pas seulement des équations, par exemple $\frac{\varphi^*(A, B)^2}{q^*(A)q^*(B)}$.

Droite à l'infini, plan affine et parallélisme

Le point de $\mathbf{P}(E^*)$ défini par L correspond à une droite de $\mathbf{P}(E)$. Précisément, si on note E_∞ le sous-espace orthogonal à L **au sens de la dualité** :

$$E_\infty = L^\perp = \{x \in E \mid \forall f \in L, f(x) = 0\},$$

ce plan vectoriel définit une droite projective $\overline{E_\infty}$ de $\mathbf{P}(E)$. Comme L est de dimension 1, si l est un générateur de L , on a $E_\infty = \text{Ker } l$.

2.1.6 Proposition-Définition. *La droite $\overline{E_\infty}$ est appelée **droite à l'infini** du plan $\mathbf{P}(E)$ et notée D_∞ . Le complémentaire $X = \mathbf{P}(E) - D_\infty$ est un espace affine d'espace vectoriel associé $\vec{X} = E_\infty$. On l'appelle **plan affine** associé à D_∞ , les éléments de E_∞ sont appelés **vecteurs** du plan affine. Si $x \in E_\infty$ est un vecteur non nul, l'élément \bar{x} de D_∞ est la **direction** de x .*

Démonstration. Cela résulte de Partie I, ???. Il s'agit d'associer à deux points de X un vecteur de E_∞ . On choisit pour cela une équation l de E_∞ , et si p et q sont deux points distincts de X , on les relève en $x, y \in E$, avec $l(x)$ et $l(y)$ non nuls. Le vecteur \vec{pq} est alors l'élément $\frac{y}{l(y)} - \frac{x}{l(x)}$ qui est dans $E_\infty = \text{Ker } l$ et ne dépend pas du choix des représentants.

2.1.7 Remarques. 1) **Attention**, cette preuve montre que la donnée de la droite D_∞ ne suffit pas à définir sur X une structure de plan affine, de plan vectoriel $\vec{X} = E_\infty$: on a besoin aussi de l'équation l et la structure en dépend vraiment car si l'on change l en λl , le vecteur \vec{pq} est divisé par λ . Cette remarque sera cruciale lorsqu'il s'agira de définir une distance sur X .

2) Si x, y, z sont des représentants des points p, q, r , la relation de Chasles $\vec{qr} + \vec{rp} + \vec{pq} = \vec{0}$ est la traduction de la relation triviale :

$$\frac{z}{l(z)} - \frac{y}{l(y)} + \frac{x}{l(x)} - \frac{z}{l(z)} + \frac{y}{l(y)} - \frac{x}{l(x)} = 0.$$

2) Pour définir le vecteur \overrightarrow{pq} on choisit le plus souvent des représentants x, y de p, q vérifiant $l(x) = l(y) = 1$ et le vecteur \overrightarrow{pq} est alors l'élément $y - x$ et la relation de Chasles², la traduction de $z - y + x - z + y - x = 0$.

3) La droite D_∞ de $\mathbf{P}(E)$, peut donc être vue, au choix, comme le point $\overline{L} = (\bar{l})$ de $\mathbf{P}(E^*)$ ou comme l'ensemble de points $\overline{E_\infty}$ de $\mathbf{P}(E)$, avec $E_\infty = L^\perp$. Tout générateur l de L est une équation de D_∞ .

On note que la donnée de la forme parabolique q^ sur E^* fournit une droite particulière D_∞ du plan projectif $\mathbf{P}(E)$, ou, ce qui revient au même, un plan affine $X = \mathbf{P}(E) - D_\infty$ contenu dans le plan projectif, droite et plan qui seront stables par les isométries (et les similitudes). C'est une première différence fondamentale avec le cas des géométries non dégénérées. Cela permet de définir la notion de parallélisme qui va jouer un rôle capital en géométrie euclidienne.*

2.1.8 Définition.

On conserve les notations de 2.1.6.

*On appelle droites **affines**³ de $\mathbf{P}(E)$ les droites distinctes de D_∞ . Soit D une droite affine de $\mathbf{P}(E)$. On lui associe d'une part la droite affine (ordinaire) $D \cap X$ et d'autre part le point d'intersection de D et D_∞ appelé **direction** de D (ou encore **point à l'infini** de D). Deux droites affines de $\mathbf{P}(E)$ sont dites **parallèles** si elles ont même direction. Deux droites affines non parallèles sont dites **sécantes**.*

2.1.9 Proposition. *Deux droites sécantes se coupent dans X . La relation de parallélisme est une relation d'équivalence. On a le postulat d'Euclide : par tout point a (de X) passe une unique parallèle à une droite affine D donnée.*

Démonstration. Pour Euclide, il suffit de joindre a au point à l'infini de D . Le reste est évident.

La proposition suivante donne deux critères de parallélisme :

2.1.10 Proposition-Définition. *Soient D, D' deux droites affines d'équations $f, f' \in E^* - L$.*

1) Les droites D, D' sont parallèles si et seulement si les images \bar{f} et \bar{f}' de leurs équations dans E^/L sont liées. L'espace E^*/L sera appelé espace des **directions d'équations**.*

2) Les droites D, D' sont parallèles si et seulement si on a $\varphi^(f, f')^2 = q^*(f)q^*(f')$.*

². Le lecteur n'a pas fini de rencontrer des avatars de cette relation.

³. On notera qu'on applique ici ce qualificatif à des droites projectives.

Démonstration. 1) Si l est une équation de D_∞ , la condition de parallélisme signifie que f, f' et l ont un zéro commun non trivial, donc que ces formes sont liées, donc que \overline{f} et $\overline{f'}$ le sont.

2) On considère la forme quadratique q_n^* induite par q^* sur E^*/L (voir 2.1.19). Elle est anisotrope et vérifie donc l'identité de Lagrange de 1.3.7 : $\varphi_n^*(\overline{f}, \overline{f'})^2 = q^*(\overline{f})q^*(\overline{f'}) + \Delta(q_n^*)[\overline{f}, \overline{f'}]^2$. On voit que la condition sur les produits scalaires signifie $[\overline{f}, \overline{f'}] = 0$ c'est-à-dire $\overline{f}, \overline{f'}$ colinéaires.

2.1.11 Remarques.

1) Si, dans un système de coordonnées homogènes (x, y, t) , la droite D_∞ a pour équation $t = 0$ et si les équations de D et D' sont $ux + vy + wt = 0$ et $u'x + v'y + w't = 0$, ces droites sont parallèles si et seulement si les couples (u, v) et (u', v') sont proportionnels.

2) Si p, q sont deux points distincts de X relevés en x, y , le vecteur $\overrightarrow{pq} = \frac{y}{l(y)} - \frac{x}{l(x)}$ (qui se réduit à $y - x$ si x, y sont normalisés par $l(x) = l(y) = 1$) est dans le sous-espace vectoriel engendré par x, y , son image dans le projectif n'est autre que la direction de (pq) et on dit que c'est un **vecteur directeur** de la droite (pq) . On a la propriété usuelle : deux droites (pq) et $(p'q')$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs \overrightarrow{pq} et $\overrightarrow{p'q'}$ sont colinéaires.

2.1.2 Orthogonalité sur E^* et sur E

Orthogonalité sur E^*

La seule donnée de la forme q^* permet de définir une notion d'orthogonalité⁴ sur les éléments de E^* , donc sur les droites de $\mathbf{P}(E)$:

2.1.12 Proposition-Définition.

1) Soient D et D' deux droites projectives, d'équations $f, f' \in E^*$. On dit que D et D' sont orthogonales si on a $\varphi^*(f, f') = 0$.

2) Si D et D' sont des droites affines, elles sont alors sécantes et on dit qu'elles sont **perpendiculaires**.

Démonstration. Montrons l'assertion 2). Si D et D' étaient parallèles on aurait $f' = \lambda f + l$ avec $\lambda \in k^*$ et $l \in L$ donc $\varphi^*(f', f) = \lambda q^*(f)$ serait non nul (D étant une droite affine, son équation f n'est pas dans L).

2.1.13 Remarque. On notera que la droite D_∞ est orthogonale à toutes les droites⁵ de $\mathbf{P}(E)$.

4. On notera que cette notion ne change pas si l'on remplace q^* par λq^* avec $\lambda \in k^*$.

5. D'une certaine façon, être orthogonale à tout le monde c'est comme ne l'être à personne, et on peut oublier cette orthogonalité là.

2.1.14 Remarque. Si on choisit une base dans laquelle la forme q^* est donnée par $\alpha u^2 + \beta v^2$ et si les droites ont pour équations $ux + vy + wt = 0$ et $u'x + v'y + w't = 0$, l'orthogonalité se traduit par la formule $\alpha uu' + \beta vv' = 0$.

Orthogonalité et parallélisme

2.1.15 Proposition. Soient D, D', Δ, Δ' des droites affines.

- 1) Si D et D' sont perpendiculaires à Δ , elles sont parallèles.
- 2) Si D est parallèle à D' et perpendiculaire à Δ , D' et Δ sont perpendiculaires.
- 3) Si D (resp. D') est perpendiculaire à Δ (resp. Δ') et si Δ et Δ' sont parallèles, D et D' sont parallèles.

Démonstration. Soient f, f', g, l des équations de D, D', Δ et L .

1) Comme D et Δ sont perpendiculaires, elles ne sont pas parallèles et donc f, g, l sont indépendants et forment une base de E^* . On peut écrire $f' = \lambda f + \mu g + \nu l$ et on a $\varphi^*(f', g) = \lambda\varphi^*(f, g) + \mu q^*(g)$. Comme Δ est perpendiculaire à D, D' , il reste $\mu q^*(g) = 0$, et comme Δ est affine on en déduit $\mu = 0$, donc D, D' parallèles par 2.1.10.

2) Comme D, D' sont parallèles, on a $f' = \lambda f + \mu l$ avec $l \in L$ et $\lambda, \mu \in k^*$, donc $\varphi^*(f', g) = \lambda\varphi^*(f, g)$, d'où la conclusion.

Le point 3) résulte des deux précédents.

2.1.16 Remarque. Le premier point est valable en géométrie hyperbolique (avec la propriété faible de parallélisme), mais pas le point 2.

2.1.17 Proposition. Soit D une droite affine et a un point de X . Il existe une unique droite D' perpendiculaire à D passant par a .

Démonstration. Soit f une équation de D et g une forme telle que f, g, l soit une base de E^* . On peut écrire une équation de D' sous la forme $f' = \lambda f + \mu g + \nu l$ et, comme D et D' doivent être perpendiculaires, donc non parallèles, on peut supposer $\mu \neq 0$ et même $\mu = 1$. Les deux conditions donnent les équations $\varphi^*(f, f') = 0$ et $f'(a) = 0$ et, comme $q^*(f)$ et $l(a)$ sont non nuls, on en déduit une unique solution.

2.1.3 La forme quadratique q sur E_∞

Introduction

Pour comprendre les paragraphes suivants, le lecteur doit se souvenir qu'une structure euclidienne sur un espace affine X consiste en la donnée d'une forme quadratique euclidienne sur l'espace vectoriel associé \vec{X} . Dans

le cas présent, nous allons donc chercher à définir une forme quadratique q sur E_∞ , espace vectoriel associé à l'espace affine $X = \mathbf{P}(E) - D_\infty$. La difficulté vient du fait qu'il y a deux façons de définir une telle forme. En effet, on dispose d'une forme $q^*(f)$ sur les droites (ou leurs équations) et il s'agit de définir une forme $q(x)$ sur les directions de droites. Les deux choix possibles consistent à poser $q(x) = q^*(f)$, soit pour une forme de direction x , soit pour une forme de direction orthogonale à x . S'il peut sembler a priori plus naturel d'utiliser la direction à l'infini de la droite, nous avons pourtant fait l'autre choix, et ce pour plusieurs raisons.

- Le lecteur constatera que ce choix est “canonique”, au sens où c'est celui qui découle de trois opérations algébriques naturelles : induire la forme q^* sur E^*/L par passage au quotient, la transporter sur $(E_\infty)^*$ par isomorphisme et enfin passer à la forme duale sur E_∞ .

- Pour corroborer ce point, nous verrons en 2.2.26 que la définition à partir d'une forme de direction x nécessite des données supplémentaires (par exemple une équation l de la droite à l'infini).

- Enfin, le choix de définir $q(x)$ à partir d'une forme de direction x ne se généralise pas en dimensions plus grandes. En effet, si E est, par exemple, de dimension 4, les points à l'infini de f forment un plan vectoriel de E_∞ , et cela ne permet pas de définir $q(x)$ pour $x \in E_\infty$ (même à un scalaire près). Un autre aspect du même problème : on verra ci-dessous que la définition qui correspond à ce choix conduit à utiliser des formules du genre $q(l \wedge f) = q^*(f)$ ou $q(a - b) = q^*(a \wedge b)$. Mais, dans le cas d'un espace de dimension 4, les produits extérieurs $l \wedge f$ (resp. $a \wedge b$) ne sont pas dans E (resp. E^*), même avec des identifications, mais dans un espace $\wedge^2(E^*)$ ou $\wedge^2(E)$, de dimension 6.

Ces considérations nous ont donc amené à choisir la voie qui utilise la direction orthogonale. Heureusement, les deux choix mènent à des formes proportionnelles (et on peut même s'arranger pour qu'elles soient identiques si le corps de base est \mathbf{R}). En effet, sur une droite projective, dire que deux directions sont orthogonales ou que leurs orthogonales le sont, revient au même, ce qui signifie que l'identité transforme l'orthogonalité pour une forme en l'orthogonalité pour l'autre, donc est une similitude.

On reprend les notations précédentes : l'espace E , son dual E^* , la forme q^* sur E^* , son noyau L et l'orthogonal (au sens de la dualité) $L^\perp = E_\infty$. Le lecteur que l'algèbre rebute peut se rendre directement en 2.1.20.

Un isomorphisme canonique

Avec l'entrée choisie, on dispose d'un plan vectoriel naturel⁶ : le quotient de E^* par la droite L . Le lien de cet espace avec E_∞ est le suivant :

2.1.18 Lemme. *L'application ρ qui à une forme linéaire f sur E associe sa restriction à E_∞ induit un isomorphisme $\bar{\rho} : E^*/L \rightarrow (E_\infty)^*$.*

Démonstration. En effet, l'application ρ est surjective et son noyau est E_∞^\perp , c'est-à-dire L en vertu de la formule⁷ $(L^\perp)^\perp = L$.

La forme q_n^* induite sur E^*/L et sur $(E_\infty)^*$

2.1.19 Lemme. *La forme q^* induit une forme quadratique anisotrope sur E^*/L que l'on transporte par $\bar{\rho}$ en une forme quadratique anisotrope sur $(E_\infty)^*$. Cette forme, dans les deux cas, est notée q_n^* et sa forme polaire φ_n^* . Si \bar{f} et \bar{g} sont des formes linéaires sur E_∞ , restrictions de formes $f, g \in E^*$, on a $q_n^*(\bar{f}) = q^*(f)$ et $\varphi_n^*(\bar{f}, \bar{g}) = \varphi^*(f, g)$ et ces expressions sont indépendantes des choix de f et g .*

Démonstration. C'est clair : il suffit de noter que, comme L est le noyau de q^* , la définition est indépendante du choix de f .

La forme quadratique q sur E_∞ : définition

On dispose donc maintenant d'une forme quadratique sur E_∞^* . Mais on a vu dans la partie III (cf. ??) comment associer à une forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel une forme sur son dual. On traduit ici cette procédure dans le cas de la forme q_n^* sur $(E_\infty)^*$. Cette forme donne une application linéaire bijective $\overline{\varphi}_n^* = (E_\infty)^* \rightarrow (E_\infty)^{**}$ qui à \bar{f} associe la forme $\varphi_{n, \bar{f}}$ définie par $\varphi_{n, \bar{f}}(\bar{g}) = \varphi_n^*(\bar{f}, \bar{g}) = \varphi^*(f, g)$. L'isomorphisme canonique de E_∞ sur son bidual $(E_\infty)^{**}$, qui à \bar{x} associe \hat{x} défini par $\hat{x}(\bar{g}) = \bar{g}(x)$ pour $\bar{g} \in (E_\infty)^*$, permet d'associer à \bar{f} un vecteur $n_f \in E_\infty$ défini par la formule : $\bar{g}(n_f) = \varphi_n^*(\bar{f}, \bar{g})$, ou encore, puisque toutes ces expressions sont indépendantes des choix des formes f, g : $g(n_f) = \varphi^*(f, g)$. On définit alors la forme q sur E_∞ comme la forme duale de q_n^* par la formule $q(n_f) = q^*(f)$.

En résumé, on a montré :

2.1.20 Proposition-Définition. *Soit $f \in E^*$. Il existe un unique vecteur⁸ $n_f \in E_\infty$ qui vérifie pour tout $g \in E^*$, $g(n_f) = \varphi^*(f, g)$. L'application $\overline{\varphi}^*$ de*

6. On peut voir ses éléments comme les "directions d'équations". En effet, si l'équation f est $uX + vY + wT$, son image dans le quotient est définie par (u, v) .

7. Rappelons que l'orthogonal est pris au sens de la dualité, pas de la forme φ^* .

8. Qu'on dira "normal" dans peu de temps.

E^* dans E_∞ qui à f associe n_f est linéaire surjective de noyau L . Si f n'est pas dans L et si g est orthogonale à f on a $g(n_f) = 0$ (de sorte que n_f définit la direction orthogonale à f , voir 2.1.23 ci-dessous).

On définit une forme quadratique non dégénérée q sur E_∞ en posant $q(n_f) = q^*(f)$. La forme polaire φ de q vérifie $\varphi(n_f, n_g) = \varphi^*(f, g)$. On parlera de la forme φ comme du **produit scalaire** de \vec{X} . La forme q est anisotrope.

Démonstration. C'est l'exacte traduction de ce qui précède. On peut cependant montrer le résultat directement en considérant la forme linéaire N_f qui associe à $g \in E^*$ le nombre $\varphi^*(f, g)$. L'isomorphisme de E^{**} avec E montre l'existence de $n_f \in E$ vérifiant $g(n_f) = \varphi^*(f, g)$ pour tout g . On vérifie ensuite sans peine que n_f est dans E_∞ , que l'application $f \mapsto n_f$ est linéaire surjective de noyau L , etc.

On peut aussi donner une preuve en utilisant les coordonnées. On munit E de la base (e_1, e_2, e_3) et E^* de la base duale, dans laquelle les coordonnées sont (u, v, w) , la forme quadratique q^* étant donnée par $\alpha u^2 + \beta v^2$. Le noyau L est le sous espace engendré par e_3^* et E_∞ est engendré par e_1 et e_2 . Si f et g ont pour coordonnées (u, v, w) et (u', v', w') dans la base duale, on a $\bar{f} = (u, v)$, $\bar{g} = (u', v')$ et $\varphi^*(f, g) = \varphi_n^*(\bar{f}, \bar{g}) = \alpha uu' + \beta vv'$ et il est clair que $n_f = (\alpha u, \beta v, 0)$ vérifie les conditions requises. Si l'on se donne $(x, y) \in k^2$ il existe u, v tels que $x = \alpha u$ et $y = \beta v$, et la forme q est donnée, sur E_∞ par $q(x, y, 0) = q^*(u, v, w) = \alpha u^2 + \beta v^2 = \frac{1}{\alpha} x^2 + \frac{1}{\beta} y^2$. Comme q^* est parabolique, il est clair que q est anisotrope.

2.1.21 Remarque. On voit bien sur le calcul précédent en quoi le choix d'utiliser l'orthogonal est pertinent. Si on part de $v = (x, y, 0) \in E_\infty$, modulo les éléments de L qui ne changent pas la valeur de q^* , il y a une unique forme f telle que $v = n_f$ (l'équation d'une droite de direction orthogonale à v), c'est $(x/\alpha, y/\beta, 0)$ (à cause de la relation $g(n_f) = \varphi^*(f, g)$ pour tout g). En revanche, les formes $g = (\lambda y, -\lambda x, 0)$ vérifient toutes $g(v) = 0$ (donc correspondent à une droite de direction v) et ne sont déterminées qu'au scalaire λ près. En l'absence d'une donnée supplémentaire, il n'y a donc pas moyen d'en choisir une.

2.1.22 Corollaire. On choisit une base (e_1, e_2, e_3) de E telle que e_3^* soit une base de L , de sorte que la forme q^* a pour matrice $Q^* = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1^*, e_2^*, e_3^*) . Alors, la matrice de q dans la base (e_1, e_2) est J^{-1} .

Démonstration. C'est le calcul ci-dessus ou Partie III ??.

Vecteur normal, direction orthogonale

2.1.23 Proposition-Définition.

Si d, d' sont deux directions (i.e. deux points de D_∞), on dit que d et d' sont des **directions orthogonales** si elles sont orthogonales au sens de la forme q (cela ne dépend pas des représentants). Il y a une unique direction d' orthogonale à une direction donnée d . On note $d' = d^\perp$ et $d = (d')^\perp$. Avec les notations de 2.1.20, si D est une droite affine de direction d et d'équation f on a $d^\perp = \overline{n_f}$. Le vecteur n_f est appelé **vecteur normal**⁹ à f ou à D . Sa direction est la direction orthogonale à D .

Démonstration. Seule la formule $d^\perp = \overline{n_f}$ est non évidente. On écrit d sous la forme $\overline{n_g}$ et le fait que d soit la direction de D donne $f(n_g) = 0 = \varphi^*(g, f) = \varphi(n_f, n_g)$, ce qui montre que $\overline{n_f}$ est orthogonal à $d = \overline{n_g}$.

2.1.24 Scolie. Il n'est sans doute pas inutile d'encadrer la formule qui définit le vecteur normal n_f à une droite d'équation f :

$$\boxed{\forall g \in E^*, \quad g(n_f) = \varphi^*(f, g).}$$

2.1.25 Exemple. Si q^* est donnée dans une base par $q^*(u, v, w) = \alpha u^2 + \beta v^2$, le vecteur normal n_f à la droite d'équation $ux + vy + wt = 0$ est le vecteur $(\alpha u, \beta v, 0)$. Si d est la direction $(a, b, 0)$, vu l'expression de q , on a $d^\perp = (\beta b, -\alpha a, 0)$.

La proposition suivante fait le lien entre l'orthogonalité des droites, telle qu'elle a été définie en 2.1.12 et l'orthogonalité des directions au sens de la forme q :

2.1.26 Proposition. Soient D et D' deux droites affines de $\mathbf{P}(E)$, d et d' leurs directions et δ et δ' les directions orthogonales à D et D' respectivement. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) Les droites D et D' sont perpendiculaires.
- 2) On a $d = \delta'$.
- 3) On a $\delta = d'$.
- 4) Les directions δ et δ' sont orthogonales (au sens de la forme q).
- 5) Les directions d et d' sont orthogonales (au sens de la forme q).
- 6) Tout vecteur directeur de D est normal à D' et vice-versa.

Démonstration. Soient f, f' des équations de D, D' . Rappelons que les droites D et D' sont perpendiculaires si et seulement si on a $\varphi^*(f, f') = 0$. Par abus

9. De même qu'un vecteur directeur est un représentant de la direction d'une droite, un vecteur normal est un représentant de la direction orthogonale.

de langage, on peut identifier les directions d, d', δ, δ' et des vecteurs qui les représentent et supposer en particulier que δ et δ' sont les vecteurs normaux à f et f' : $\delta = n_f$ et $\delta' = n_{f'}$. On a alors, par définition des n_f et de q , les formules : $\varphi^*(f, f') = \varphi(n_f, n_{f'}) = \varphi(\delta, \delta') = f(\delta') = f'(\delta)$. Cela donne le résultat (pour montrer par exemple 5) implique 3) on utilise l'unicité de la direction orthogonale).

2.1.27 Remarques. 1) On retrouve facilement le résultat de 2.1.17 : pour trouver la perpendiculaire à une droite D passant par a il suffit de joindre a à la direction orthogonale à D .

2) Vu la définition de q , on n'a pas de formule évidente donnant $\varphi(d, d')$ comme on en a une pour $\varphi(\delta, \delta')$. Voir cependant 2.2.26.

3) *Attention, contrairement au cas non dégénéré, il n'y a pas ici de notion d'orthogonalité ou de conjugaison entre les points de $\mathbf{P}(E)$. C'est une différence fondamentale qui fait qu'on perd la plupart des résultats de dualité.*

Orthogonalité et homographies

La proposition suivante est souvent utile dans les applications géométriques :

2.1.28 Théorème. *L'application de D_∞ dans elle-même qui à une direction d associe sa direction orthogonale d^\perp est une homographie involutive.*

Démonstration. Comme d^\perp est l'orthogonal de d au sens de la forme non dégénérée q cela résulte de Partie III, ???. On peut aussi utiliser la description en coordonnées, cf. 2.1.25.

Points cycliques et orthogonalité

Nous introduisons maintenant les points cycliques qui jouent un rôle important dans la théorie.

2.1.29 Proposition-Définition. 1) *Soit Δ un discriminant de la forme q (défini à un carré de k près). On considère le corps¹⁰ $K = k(\sqrt{-\Delta})$, on étend les scalaires de E à K et on note E_K le K -espace vectoriel obtenu. La forme q sur $E_{\infty, K}$ admet exactement deux droites isotropes. Les points images de ces droites dans $D_{\infty, K}$ sont conjugués sur k , ils sont notés I et J et appelés **points cycliques** relatifs à q^* . Les droites de direction I ou J sont orthogonales à elles-mêmes relativement à q^* et sont appelées **droites isotropes**.*

10. Comme on l'a vu au chapitre 1, ce corps est muni d'un automorphisme, analogue à la conjugaison complexe, qui transforme $\sqrt{-\Delta}$ en son opposé. Quand on parle de conjugaison ici c'est relativement à cet automorphisme.

2) Inversement, si K est une extension quadratique de k et si l'on se donne deux points I, J de $\mathbf{P}(E_K)$, conjugués sur k , il existe une forme q^* sur E^* , unique à un scalaire près, telle que I, J soient les points cycliques relativement à q^* .

Démonstration. 1) On sait qu'un plan muni d'une forme quadratique est hyperbolique (donc admet deux droites isotropes) si et seulement si son discriminant est l'opposé d'un carré (voir par exemple [Per96] Ch. VIII, Prop. 2.3). On peut retrouver facilement ce résultat par le calcul. On choisit pour cela des coordonnées de sorte que l'on ait $q^*(u, v) = \alpha u^2 + \beta v^2$, donc $q(x, y) = \frac{1}{\alpha}x^2 + \frac{1}{\beta}y^2$, voir 2.1.20. Un discriminant de q est alors $\frac{1}{\alpha\beta}$ ou encore $\Delta = \frac{\beta}{\alpha}$. Soit $K = k(\sqrt{-\Delta})$ et posons $i = \sqrt{-\Delta}$. À un scalaire près, les isotropes de q dans $E_{K, \infty}$ sont alors $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$, donc conjugués sur k .

Montrons la dernière assertion. Soit f une forme de vecteur normal $n_f = I$, donc de direction orthogonale à I . En vertu de 2.1.20, elle est définie par $g(I) = \varphi^*(f, g)$. On a donc $f(I) = q^*(f) = q(I) = 0$, de sorte que I est aussi la direction de f .

2) Inversement, si $K = k(i)$, avec $i^2 \in k$, $i \notin k$, soient I, J deux points de $\mathbf{P}(E_K)$ conjugués sur k . On appelle l une équation de la droite (IJ) (on peut choisir cette équation à coefficients dans k) et f, g deux formes à coefficients dans K , conjuguées sur k , et telles que l'on ait $f(I) = g(J) = 0$ et $f(J)$ et $g(I)$ non nuls. Les formes l, f, g constituent alors une base de E_K^* . On définit sur cet espace une forme q_K^* dégénérée de noyau l , en posant $q_K^*(f) = q_K^*(g) = 0$ et $\varphi_K^*(f, g) = 2\lambda$, avec $\lambda \in k^*$. Les formes $e_1^* = \frac{f+g}{2}$, $e_2^* = \frac{f-g}{2i}$ et $e_3^* = l$ constituent une base de E^* sur k et la restriction de q_K^* à E^* est donnée, dans cette base, par la formule $q^*(u, v, w) = \lambda u^2 - \frac{\lambda}{i^2}v^2$ et son discriminant est donc $-i^2$ à un carré près. Cette forme, définie au scalaire λ près, vérifie les propriétés requises.

On voit que la donnée des points cycliques permet de récupérer la forme q^* , donc la notion d'orthogonalité. C'est ce que confirme le résultat suivant :

2.1.30 Corollaire. *Soit Δ un discriminant de la forme q . On étend le corps des scalaires à $K = k(\sqrt{-\Delta})$ et on note I, J les points cycliques. Soient $a, b \in D_\infty$. Alors a et b sont des directions orthogonales si et seulement si on a $\llbracket a, b, I, J \rrbracket = -1$.*

Démonstration. Comme I, J sont les points fixes de l'involution $d \mapsto d^\perp$, cela résulte de Partie I ???. On peut aussi faire un calcul direct, par exemple avec la forme $x^2 + y^2$ et $i^2 = -1$. On est ramené à montrer que le birapport $\llbracket a, b, i, -i \rrbracket$, avec $a, b \in k$, est égal à -1 si et seulement si on a $ab = -1$.

2.1.31 Scolie. On a ici une illustration d'une idée importante contenue dans le programme d'Erlangen de Felix Klein : toutes les géométries sont dans la géométrie projective et s'obtiennent à partir de cette géométrie mère avec une donnée supplémentaire. Ici, pour avoir la géométrie euclidienne à partir du plan projectif, on a vu qu'il suffisait de se donner, dans ce plan, les deux points (cycliques) I, J , définis sur une extension quadratique de k et conjugués. On récupère alors la droite de l'infini (IJ) et, au moins à un scalaire près, la forme q^* . Pour une application (sommaire) des points cycliques à la théorie des coniques euclidiennes voir exercice 2.3.3.

2.1.4 Équation de la droite de l'infini et distance

La donnée de la forme q^* nous a déjà permis de définir, sur le plan affine X , et sans aucune donnée supplémentaire, les notions de parallélisme et d'orthogonalité, ainsi que la forme q sur E_∞ . Pour aller plus loin, et notamment pour définir une distance sur X dans le cas réel, nous aurons besoin de plusieurs données accessoires. Une façon d'obtenir à la fois toutes ces données consiste à choisir une base de E , comme nous le verrons plus loin, mais cette méthode est sans doute trop brutale.

Une équation de la droite de l'infini

Nous avons noté en 2.1.7 que la structure affine de X (qui permet d'identifier E_∞ et \vec{X}) dépend de la donnée d'une équation l de la droite à l'infini, c'est-à-dire d'un générateur l de L . Cette donnée détermine la structure affine de X et permet donc de définir q pour les vecteurs de X (voir 2.1.7) :

2.1.32 Proposition-Définition. *On choisit une équation l de D_∞ . Soient a, b, c, d des points de X relevés en des vecteurs de E , notés encore a, b, c, d , et vérifiant $l(a) = l(b) = l(c) = l(d) = 1$. On a $\vec{ab} = b - a$, $\vec{cd} = d - c$. Ces vecteurs sont dans E_∞ et on définit $q(\vec{ab}) = q(b - a)$ et $\varphi(\vec{ab}, \vec{cd}) = \varphi(b - a, d - c)$.*

Avec cette définition on obtient deux résultats classiques :

2.1.33 Proposition. *Soient a, b, c, d des points de X . On suppose $a \neq b$ et $c \neq d$. Alors les droites (ab) et (cd) sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs \vec{ab} et \vec{cd} sont orthogonaux pour φ .*

Démonstration. En effet, le vecteur \vec{ab} est dans E_∞ et son image dans D_∞ est la direction de (ab) (cf. 2.1.11.2). On conclut par 2.1.26.

2.1.34 Proposition. *Trois points a, b, c de X sont alignés si et seulement si on a $q(\overrightarrow{ab})q(\overrightarrow{ca}) - \varphi(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ca})^2 = 0$.*

Démonstration. Si les points sont alignés, on peut écrire $\overrightarrow{ab} = \lambda\vec{v}$ et $\overrightarrow{ca} = \mu\vec{v}$ et le résultat n'est autre que l'égalité $\lambda^2\mu^2 = (\lambda\mu)^2$. Réciproquement, si a et b sont distincts, et si l'on a l'égalité ci-dessus, il s'agit de trouver un scalaire λ tel que $\lambda\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ca} = 0$, soit encore tel que $q(\lambda\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ca}) = \lambda^2q(\overrightarrow{ab}) + 2\lambda\varphi(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ca}) + q(\overrightarrow{ca}) = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré étant nul, elle admet une racine (double) dans k .

2.1.35 Remarque. Dans le cas réel on reconnaît le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz. Nous verrons en 2.2.22 que la quantité $q(\overrightarrow{ab})q(\overrightarrow{ca}) - \varphi(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ca})^2$ est essentiellement le carré du "crochet" $[a, b, c]$ et en 5.4.17 qu'elle correspond à l'aire du triangle abc .

Distance

Lorsque le corps de base est \mathbf{R} , on peut définir une distance sur X , en utilisant la forme q :

2.1.36 Proposition-Définition. *On suppose que le corps de base est \mathbf{R} , que la forme q^* est positive et qu'on s'est donné une équation l de D_∞ . Soient \bar{a}, \bar{b} deux points de X , que l'on relève en $a, b \in E$ avec $l(a) = l(b) = 1$. L'application qui à \bar{a}, \bar{b} associe le réel $d(\bar{a}, \bar{b}) = \sqrt{q(b-a)} = \sqrt{q(\overrightarrow{ab})}$ (que l'on notera plus volontiers \overline{ab}) est une distance sur X .*

Démonstration. Le seul point non trivial est l'inégalité triangulaire. Comme q est définie positive, cela résulte, comme à l'accoutumée, de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Nous verrons au chapitre 5 que cette distance est bien un invariant de transitivité.

2.1.37 Remarque. Si l'on change l en λl avec $\lambda \in \mathbf{R}^*$, la distance $d(a, b)$ devient $d'(a, b) = \frac{1}{|\lambda|}d(a, b)$, autrement dit, la donnée de l est simplement celle d'une unité de longueur.

2.2 Crochets et produits extérieurs

La problématique de ce paragraphe est la suivante. On dispose désormais sur l'espace vectoriel \vec{X} de la forme quadratique q , donc aussi du groupe des isométries $O(q)$ et de deux invariants essentiels de ce groupe : les distances

et les angles non orientés (donnés par leur cosinus grâce à la forme φ). Il manque les invariants orientés (relatifs à $O^+(q)$). On sait (voir Ch. 1) que ces invariants sont les crochets et qu'une base de \vec{X} suffit à les définir, mais nous allons voir que ces invariants proviennent aussi de la donnée de crochets sur E ou E^* , c'est-à-dire de formes trilinéaires alternées. En termes élémentaires, ces invariants ont plusieurs avatars : sinus, produit vectoriel, aire orientée.

À partir de maintenant, on suppose donnée, outre la forme q^* sur E^* , une équation l de la droite de l'infini. On normalisera souvent les points de $\bar{a} \in \mathbf{P}(E) - D_\infty$ en imposant à leurs représentants la condition $l(a) = 1$. On appellera **origine** du plan affine X un tel point o normalisé par $l(o) = 1$.

2.2.1 Définitions

Les crochets

Nous avons vu en 1.3.1 qu'on obtient une forme trilinéaire alternée sur E à partir d'une base \mathcal{B} de E en posant $d(x, y, z) = \det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$ et il en résulte que d est invariante si l'on modifie \mathcal{B} par une transformation de $SL(E)$ (i.e. de déterminant 1). Deux telles formes d sur E et d^* sur E^* seront dites **compatibles** si elles proviennent d'une base \mathcal{B} de E et de sa base duale \mathcal{B}^* .

Conformément aux notations de 1.3.1, nous écrirons $d(x, y, z) = [x, y, z]$ et $d^*(f, g, h) = [f, g, h]$ et ces formes seront désignées sous le nom de **crochets**.

2.2.1 Remarque. Attention, comme les quantités $q^*(A)$ et $\varphi^*(A, B)$, les crochets $[A, B, C]$ et $[a, b, c]$ ne sont pas des invariants des droites et des points mais de leurs équations ou de leurs représentants. Pour avoir de vrais invariants il faudra soit imposer une normalisation, soit utiliser des quotients (par exemple $\frac{[A, B, C]^2}{q^*(A)q^*(B)q^*(C)}$).

Les produits extérieurs

La donnée des formes d et d^* permet de définir les applications bilinéaires alternées $\wedge_E : E \times E \rightarrow E^*$ et $\wedge_{E^*} : E^* \times E^* \rightarrow E$ par les formules :

$$(a \wedge_E b)(x) = d(a, b, x) = [a, b, x] \quad \text{et} \quad h(f \wedge_{E^*} g) = d^*(f, g, h) = [f, g, h].$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté on les note simplement toutes deux \wedge et on les appelle **produits extérieurs**. Le produit extérieur $a \wedge b$ (resp. $f \wedge g$) est nul si et seulement si a et b (resp. f et g) sont proportionnels.

2.2.2 Remarque. Il y a une façon simple d'obtenir d'un seul coup toutes les données précédentes (équation de la droite à l'infini et crochets). Il suffit de se donner une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E et la base duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ de E^* . On note alors (x, y, t) les coordonnées dans E et (u, v, w) les coordonnées dans E^* et on suppose les bases choisies de telle sorte que le noyau de q^* soit

$L = (e_3^*)$. La forme q^* a pour matrice : $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si la base (e_i^*) est

orthogonale, on a $\gamma = 0$. Sur \mathbf{R} on peut même supposer $\alpha = \beta = 1$.

On prend $l = e_3^*$ comme équation de D_∞ . Comme un point (u, v, w) de $\mathbf{P}(E^*)$ s'interprète comme la droite de $\mathbf{P}(E)$ d'équation $ux + vy + wt = 0$, la droite de l'infini de $\mathbf{P}(E)$ est alors la droite d'équation $t = 0$ et le plan affine est formé des points $(x, y, 1)$. La forme trilinéaire alternée sur E (resp. E^*) est le déterminant sur la base \mathcal{B} (resp. \mathcal{B}^*).

À partir de maintenant, on supposera toujours donnés les crochets (i.e. les formes trilinéaires compatibles d et d^), ainsi que l'équation l de la droite à l'infini.*

2.2.2 Interprétation des produits extérieurs

Rappelons le résultat suivant (voir Partie II ?? ou le vérifier à la main) :

2.2.3 Lemme. *On a les formules suivantes, pour $a, b \in E$ et $f, g \in E^*$:*

$$f \wedge (a \wedge b) = f(b)a - f(a)b \quad \text{et} \quad a \wedge (f \wedge g) = g(a)f - f(a)g.$$

On en déduit le lien entre produit extérieur et vecteur :

2.2.4 Proposition. *Soient $a, b \in E - E_\infty$ deux vecteurs non colinéaires et \bar{a}, \bar{b} leurs images dans X . L'élément $(a \wedge b) \wedge l$ est dans E_∞ et on a la formule $(a \wedge b) \wedge l = l(a)l(b)\overrightarrow{\bar{a}\bar{b}}$. En particulier, si les points a, b sont normalisés par $l = 1$, on a $(a \wedge b) \wedge l = b - a = \overrightarrow{\bar{a}\bar{b}}$.*

Démonstration. En vertu de 2.2.3, on a $(a \wedge b) \wedge l = l(a)b - l(b)a = l(a)l(b)\left(\frac{b}{l(b)} - \frac{a}{l(a)}\right)$ et on reconnaît l'expression du vecteur $\overrightarrow{\bar{a}\bar{b}}$ (voir 2.1.6).

Géométriquement, on a les traductions suivantes :

2.2.5 Proposition. *1) Si \bar{a}, \bar{b} sont deux points distincts de X , la forme $a \wedge b$ est une équation de la droite $(\overrightarrow{\bar{a}\bar{b}})$.*

2) Si f, g sont deux formes non proportionnelles, $f \wedge g$ est un représentant du point d'intersection des droites d'équations f et g . En particulier, $l \wedge f$ définit la direction de la droite d'équation f .

3) Si \bar{a} est un point de X et $\bar{\delta}$ ($\delta \in E_\infty$) une direction, $a \wedge \delta$ est une équation de la droite passant par \bar{a} et de direction $\bar{\delta}$.

4) Si D est une droite affine d'équation f et \bar{a} un point de X , la droite perpendiculaire à D passant par a admet pour équation $a \wedge n_f$.

Démonstration. Le résultat est évident à partir des formules du genre $(a \wedge b)(x) = [a, b, x]$. En effet, le point \bar{x} est sur la droite $(\bar{a}\bar{b})$ si et seulement si le crochet $[a, b, x]$ est nul, donc si l'on a $(a \wedge b)(x) = 0$, ce qui signifie bien que $a \wedge b$ est une équation de $(\bar{a}\bar{b})$.

L'application linéaire "direction"

On considère l'application $\bar{\Phi} : \mathbf{P}(E^*) - \{D_\infty\} \rightarrow D_\infty$ qui à une droite D , distincte de D_∞ , associe sa direction, intersection de D et de D_∞ (voir 2.1.8). La proposition suivante montre que cette application provient d'une application linéaire :

2.2.6 Proposition. *L'application linéaire $\Phi : E^* \rightarrow E$, définie par $\Phi(f) = l \wedge f$, a pour noyau L , pour image E_∞ , et vérifie $f(\Phi(f)) = 0$ pour tout $f \in E^*$. Elle induit un isomorphisme de E^*/L sur E_∞ . L'application "direction" $\bar{\Phi}$ provient de l'application linéaire Φ après passage au quotient par la relation de colinéarité.*

Si on suppose que E est muni de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, E^ de la base duale \mathcal{B}^* et qu'on a $l = e_3^*$ (et donc $E_\infty = (e_1, e_2)$), on a $\Phi(\lambda e_1^* + \mu e_2^* + \nu e_3^*) = \lambda e_2 - \mu e_1$.*

Démonstration. On a $l \wedge l = 0$, ce qui montre que L est contenu dans $\text{Ker } \Phi$. Inversement, si $\Phi(f)$ est nul, on a, pour tout $x \in E - E_\infty$, $x \wedge (l \wedge f) = 0 = f(x)l - l(x)f$, avec $l(x) \neq 0$, ce qui montre que f est proportionnelle à l . La formule $l(l \wedge f) = [l, f, l] = 0$ montre que l'image de Φ est contenue dans E_∞ . Elle lui est égale pour une raison de dimension. On a $f(\Phi(f)) = f(l \wedge f) = [l, f, f] = 0$, ce qui montre que le point de $\mathbf{P}(E)$ correspondant à $l \wedge f$ est sur la droite d'équation f . Comme il est sur D_∞ , c'est bien la direction de cette droite.

Le calcul dans la base est immédiat.

Axes

On a vu que les éléments de E^* n'ont pas de sens géométrique car les droites ne définissent leurs équations qu'à un scalaire près. Toutefois, ils

permettent de graduer chaque droite :

2.2.7 Définition. On appelle **axe gradué** la donnée d'une droite D de X et d'un vecteur directeur (non nul) d de D (c'est-à-dire un vecteur \vec{pq} avec $p, q \in D$ distincts, ou encore un représentant de la direction de D). Si le corps de base est \mathbf{R} , deux axes gradués (D, d) et (D, e) sont dits équivalents si l'on a $e = \lambda d$ avec $\lambda > 0$. Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées **axes** (non gradués).

2.2.8 Remarques. 1) L'application linéaire direction permet d'associer à toute équation $A \in E^* - L$ l'axe gradué $(\bar{A}, l \wedge A)$ où \bar{A} est la droite d'équation A , et il est clair que cette application est bijective. Autrement dit, les équations correspondent exactement aux axes gradués.

2) Dans le cas réel, se donner un axe non gradué revient à se donner un vecteur unitaire sur la droite D et il y a évidemment deux choix opposés correspondant aux deux orientations possibles de la droite. Si l'équation f de D est donnée, ces vecteurs unitaires sont $\pm \frac{l \wedge f}{\sqrt{q(l \wedge f)}}$, voir aussi 2.2.27.

2.2.3 Aires et crochets de points

Dans ce paragraphe, on donne, pour $a, b, c \in E$, plusieurs formules autour de l'invariant $[a, b, c]$, dont on verra plus loin le lien avec l'aire du triangle abc .

Crochets de points et crochets de formes

La première formule calcule le crochet à partir des équations des côtés. On y voit apparaître l'un des invariants fondamentaux de la géométrie euclidienne : le crochet $[A, B, l]$, voir 2.2.18.

2.2.9 Proposition. Soient $a, b, c \in E$. On a la formule $[a \wedge b, a \wedge c, l] = [a, b, c]l(a)$.

Démonstration. On a $[a \wedge b, a \wedge c, l] = l((a \wedge b) \wedge (a \wedge c)) = l(-[b, a, c]a) = [a, b, c]l(a)$.

Triangles et aires

Les formules suivantes lient les crochets de E et de E^* :

2.2.10 Proposition. 1) Soient $a, b, c \in E$ et posons $A = b \wedge c$, $B = c \wedge a$ et $C = a \wedge b$. On a la formule $[A, B, C] = [a, b, c]^2$.

2) Soient $A, B, C \in E^*$ et posons $a = B \wedge C$, $b = C \wedge A$ et $a = A \wedge B$. On a la formule $[a, b, c] = [A, B, C]^2$.

Démonstration. Cela résulte de la formule : $[a \wedge a', b \wedge b', c \wedge c'] = [a, a', c][b, b', c'] - [a, a', c'][b, b', c]$ et de son analogue dans E^* .

Formule de dimension et formule des aires

Dans la partie II, nous avons établi la formule dite “de dimension ” (qui exprime simplement que l’espace vectoriel E est de dimension 3) et quelques-unes de ses variantes (voir Partie II ?? et ??) :

2.2.11 Proposition. 1) Soient $a, b, c, d \in E$. On a la formule :

$$(\mathcal{D}) \quad [a, b, c]d = [b, c, d]a + [c, a, d]b + [a, b, d]c.$$

1*) Soient $A, B, C, D \in E^*$. On a la formule :

$$(\mathcal{D}^*) \quad [A, B, C]D = [B, C, D]A + [C, A, D]B + [A, B, D]C.$$

2) Soient $a, b, c \in E$ et $f \in E^*$. On a la formule :

$$(\mathcal{S}^*) \quad f(a)(b \wedge c) + f(b)(c \wedge a) + f(c)(a \wedge b) = [a, b, c]f.$$

Nous avons vu que de ces formules découlent la plupart des relations entre invariants de la géométrie projective, donc des théorèmes de cette géométrie. Elles donnent aussi :

2.2.12 Corollaire. (Formules des aires) 1) Soient $a, b, c, d \in E$. On suppose qu’on a $l(a) = l(b) = l(c) = l(d) = 1$. Alors, on a la formule :

$$[a, b, c] = [b, c, d] + [c, a, d] + [a, b, d].$$

2) Soient $a, b, c \in E$. On suppose qu’on a $l(a) = l(b) = l(c)$. Alors, on a la formule $l(a)(b \wedge c + c \wedge a + a \wedge b) = [a, b, c]l$.

Démonstration. Pour la première formule il suffit d’appliquer l à la formule (\mathcal{D}) , pour la seconde d’appliquer (\mathcal{S}^*) avec $f = l$.

2.2.13 Remarques. 1) Nous verrons plus loin (cf. 5.4.15) que le crochet $[a, b, c]$, pour des points normalisés par $l = 1$, peut s’interpréter comme le double de l’aire algébrique du triangle abc . La relation 2.2.12 peut alors s’interpréter comme la relation de découpage des aires : $\mathcal{A}(abc) = \mathcal{A}(bcd) + \mathcal{A}(cad) + \mathcal{A}(abd)$.

2) La deuxième formule de 2.2.12 a une autre démonstration qui peut sembler paradoxale. On part de la relation de Chasles triviale :

$$\left(\frac{c}{l(c)} - \frac{b}{l(b)}\right) + \left(\frac{a}{l(a)} - \frac{c}{l(c)}\right) + \left(\frac{b}{l(b)} - \frac{a}{l(a)}\right) = 0.$$

On multiplie cette relation par $l(a)l(b)l(c)$ et on utilise les formules de double produit $(b \wedge c) \wedge l = l(b)c - l(c)b$. Si on note e le premier membre de la relation 2), on obtient $e \wedge l = 0$, donc $e = \lambda l$ et en appliquant cette formule au vecteur a on a le résultat.

Ce qui est paradoxal c'est que la relation de Chasles vaut évidemment en toute dimension alors que la formule 2.2.12 ne vaut qu'en dimension 3. En fait, la dimension 3 est dissimulée dans cette preuve, simplement dans l'existence des produits $b \wedge c$.

Dans le cas des formes, on a le corollaire suivant qui fait intervenir l :

2.2.14 Corollaire. *Soient $A, B, C \in E^*$. On a la formule :*

$$[A, B, C]l = [B, C, l]A + [C, A, l]B + [A, B, l]C.$$

Cette formule a des conséquences importantes obtenues en appliquant $\varphi^*(\cdot, D)$ et en tenant compte du fait que $\varphi^*(l, D)$ est nul, voir 2.2.24.

2.2.4 Les espaces de dimension 2 : formes, discriminant, crochets

Problématique

On étudie maintenant les espaces de dimension 2 associés à E^* et q^* , c'est-à-dire l'espace E^*/L des directions d'équations et l'espace $E_\infty = \vec{X}$ des vecteurs de X . Sur ces espaces, on dispose déjà des formes q_n^* et q , essentiellement duales l'une de l'autre (voir 2.1.19 et 2.1.20). En géométrie non euclidienne on a vu (Partie IV, Ch. 1) qu'un autre outil important est le produit vectoriel de deux vecteurs de E ou de deux formes de E^* , que l'on voit respectivement comme un vecteur et une forme. Dans le cas présent, le fait que la forme q^* soit dégénérée complique notablement les choses à cet égard. On peut toutefois, grâce aux crochets sur E et E^* , définir un substitut du produit vectoriel¹¹, c'est-à-dire une fonction bilinéaire alternée de deux objets, dans les deux cas de E^*/L et E_∞ .

Cette notion est importante dans la perspective d'énumérer les invariants et leurs relations et on verra qu'elle revêt plusieurs oripeaux : le crochet de trois points de X , le produit vectoriel ordinaire de deux vecteurs de \vec{X} (à condition de ne pas vouloir en faire un vecteur) et l'aire d'un triangle de

11. On peut aussi, en se fatiguant plus, définir une notion un peu bancale, que nous appellerons produit "métissé" (à ne pas confondre avec le produit mixte euclidien usuel $(x|(y \wedge z))$), et dont le principal intérêt est de conduire à une identité de Jacobi qui donne en particulier le concours des hauteurs, voir les exercices 2.3.4 à 2.3.7 et 4.5.3.

X. Pour définir ces objets, le point essentiel est de préciser une classe de bases des espaces considérés, stable par les transformations de déterminant 1. Cette procédure, que l'on peut voir comme une opération de rigidification, permettra aussi de choisir un discriminant pour les formes q_n^* et q .

Bases normalisées

La donnée des crochets sur E et E^* et de la forme l permet de définir, sur les espaces E^*/L (ou sur l'espace E_∞^* qui lui est canoniquement isomorphe) et E_∞ une notion de base normalisée.

2.2.15 Proposition-Définition. 1) Une base $\overline{e}_1^*, \overline{e}_2^*$ de E^*/L est dite **normalisée**, si l'on a $[e_1^*, e_2^*, l] = 1$.

2) Une base (e_1, e_2) de E_∞ est dite **normalisée** si l'on a, pour tout $o \in E$ vérifiant $l(o) = 1$, $[e_1, e_2, o] = 1$.

Une base (e_1, e_2) de E_∞ est normalisée si et seulement si sa base duale (e_1^*, e_2^*) l'est.

Démonstration. On vérifie d'abord que les conditions ne dépendent ni du choix des représentants e_i^* pour la première, ni du choix du point o pour la seconde.

Pour la dernière assertion, on considère la base e_1, e_2, o de E . Sa base duale est e_1^*, e_2^*, l . En effet, c'est clair pour les premiers vecteurs et pour l , cela résulte des formules $l(o) = 1$ et $l(e_i) = 0$. Mais les crochets sur E et E^* sont compatibles, ce qui signifie qu'ils sont définis par une base $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ et sa base duale $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*$. Si P est la matrice de passage de $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ à e_1, e_2, o , on a $[e_1, e_2, o] = \det P$, et, comme la matrice de passage de $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*$ à e_1^*, e_2^*, l est tP , on a $[e_1^*, e_2^*, l] = \det ({}^tP) = \det P = [e_1, e_2, o]$.

Discriminants

Comme la forme q^* est dégénérée, son discriminant est nul. Cependant, lorsqu'on a une base de E^* , (e_1^*, e_2^*, e_3^*) , avec $e_3^* \in L$, la forme q^* admet une

matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on y voit apparaître un discriminant partiel

$\delta(q^*) = \alpha\beta - \gamma^2$. La proposition suivante montre que ce "petit discriminant" peut être défini dès qu'on dispose du crochet sur E^* et de l'équation l et qu'il est lié au discriminant de la forme q induite sur E_∞ :

2.2.16 Proposition-Définition. On reprend les notations précédentes et notamment les formes q^* , q_n^* et q . On suppose donnés le crochet sur E^* et

le générateur l de L . Le discriminant de q_n^* sur une base **normalisée** est indépendant de cette base, on l'appelle **petit discriminant** de q^* et on le note $\delta(q^*)$.

Si q est la forme sur E_∞ associée à q^* , le discriminant $\Delta(q)$ sur une base normalisée de E_∞ est l'inverse de $\delta(q^*)$:

$$\Delta(q) = \delta(q^*)^{-1}.$$

Démonstration. L'indépendance¹² de la base vient du fait qu'un changement de base normalisée dans E^*/L est induit par un changement de base de déterminant 1 dans E^* . Il est donc de déterminant 1 aussi et ne change pas le discriminant.

L'assertion sur q vient de 2.1.22.

2.2.17 Remarques. 1) Contrairement au discriminant usuel d'une forme quadratique, qui n'est défini qu'à multiplication par un carré près, le petit discriminant de q^* est bien défini dans k^* , sous réserve, bien entendu, de la donnée de la forme l et des crochets.

2) Si le corps de base est \mathbf{R} et si la forme q^* est positive, le petit discriminant est > 0 et on peut même le supposer égal à 1. Plus généralement, si dans une base orthogonale on a $q^*(u, v, w) = \alpha u^2 + \beta v^2$, on pourra supposer $\delta = 1$ si $\alpha\beta$ est un carré. Sur un corps quelconque, ce n'est pas toujours possible (penser à la forme $u^2 + 2v^2$ sur \mathbf{Q}). On peut seulement affirmer que $-\delta(q^*)$ n'est pas un carré, voir exercice 2.3.2.

Crochets en dimension 2

On définit maintenant le crochet pour les “directions d'équations” et les vecteurs. Rappelons qu'il suffit pour cela de se donner une classe de bases invariantes par SL .

2.2.18 Proposition-Définition. On définit le crochet sur E^*/L et sur E_∞ comme la forme bilinéaire alternée **qui vaut 1 sur les bases normalisées**. On a les propriétés suivantes :

1) Soient $\overline{A}, \overline{B}$ des éléments de E^*/L . On a la formule $[\overline{A}, \overline{B}] = [A, B, l]$.

2) Soient $a, b \in E_\infty$ et $o \in E$ vérifiant $l(o) = 1$. On a les formules : $[a, b] = [a, b, o]$ et $a \wedge b = [a, b]l$. Si a, b sont écrits sous la forme $a = l \wedge A$ et $b = l \wedge B$ (voir 2.2.6) on a $[a, b] = [A, B, l] = [\overline{A}, \overline{B}]$.

Démonstration. 1) Soit $\overline{\mathcal{B}} = (\overline{e_1^*}, \overline{e_2^*})$ une base normalisée de E^*/L . Cela signifie qu'on a $[e_1^*, e_2^*, l] = 1$, de sorte que la base $\mathcal{B} = (e_1^*, e_2^*, l)$ définit les

¹². On peut aussi faire un calcul direct.

crochets : $[A, B, l] = \det P$ si P est la matrice de (A, B, l) sur \mathcal{B} . Mais on a $P = \begin{pmatrix} \overline{P} & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où \overline{P} est la matrice de $\overline{A}, \overline{B}$ sur $\overline{\mathcal{B}}$. On a donc bien $[\overline{A}, \overline{B}] = \det \overline{P} = \det P = [A, B, l]$.

2) L'application qui à $(a, b) \in E_\infty^2$ associe $[a, b, o]$ est bilinéaire alternée et vaut 1, par définition, si a, b est une base normalisée de E_∞ . C'est donc le crochet $[a, b]$.

Comme a, b sont dans E_∞ , $a \wedge b$ est dans L : $a \wedge b = \lambda l$. On conclut en appliquant $a \wedge b$ au vecteur o .

Enfin, on a $a \wedge b = (l \wedge A) \wedge (l \wedge B) = [l, l, B]A - [l, B, A]l = [A, B, l]l$ par la formule du double produit (voir Partie II, ??).

On peut maintenant écrire le crochet de deux vecteurs provenant de points de X :

2.2.19 Corollaire. Soient a, b, c des points de X , normalisés par $l = 1$. On a la formule $(b - a) \wedge (c - a) = [a, b, c]l$ donc $[\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}] = [a, b, c]$. Si on pose $B = a \wedge b$ et $C = a \wedge c$, on a aussi la formule $[\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}] = [B, C, l]$.

Démonstration. On calcule le produit par bilinéarité, on obtient $b \wedge c + c \wedge a + a \wedge b$ et la formule vient de 2.2.12. La dernière relation résulte de 2.2.9.

2.2.20 Remarques. 1) En coordonnées, si on pose $a = (a_1, a_2, 0)$ et $b = (b_1, b_2, 0)$, on a $[a, b] = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

2) On voit que les crochets de deux vecteurs de E_∞ sont liés aux crochets de trois vecteurs de E . Cependant, pour éviter des confusions, on parlera parfois du crochet $[\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}]$ comme du **produit vectoriel** de \overrightarrow{ab} et \overrightarrow{ac} . Le lien avec le produit vectoriel ordinaire est le suivant : on plonge l'espace vectoriel E_∞ dans un espace F de dimension 3, muni d'une forme euclidienne, et on appelle \vec{k} un vecteur orthogonal à E_∞ et de norme 1. Si on note $\vec{v} \wedge \vec{w}$ le produit vectoriel usuel, on a $\overrightarrow{ab} \wedge \overrightarrow{ac} = [\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}] \vec{k}$.

3) Pour faire le lien entre ces notions et celle d'aire, voir 5.4.15.

2.2.5 Relations entre produits scalaires et crochets

Les relations 1.3.5 donnent des formules dans les deux cas particuliers des plans euclidiens E^*/L et E_∞ . Dans le cas de E_∞ il n'y a rien à changer¹³ :

13. On peut éventuellement exprimer le discriminant de q en fonction de $\delta(q^*)$: $\Delta(q) = \delta(q^*)^{-1}$. Rappelons que, sur \mathbf{R} , on peut supposer $\delta(q^*) = \Delta(q) = 1$.

2.2.21 Théorème. Soient $a, b, c, x, y \in E_\infty$ et $\Delta(q)$ le discriminant de q . On a les relations suivantes :

$$(1) \quad \Delta(q)[a, b][x, y] = \begin{vmatrix} \varphi(a, x) & \varphi(a, y) \\ \varphi(b, x) & \varphi(b, y) \end{vmatrix},$$

$$(2) \quad [b, c]\varphi(a, x) + [c, a]\varphi(b, x) + [a, b]\varphi(c, x) = 0.$$

2.2.22 Corollaire. (Relations de Lagrange)

1) Soient $a, b \in E_\infty$. On a $\Delta(q)[a, b]^2 = q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2$.

2) Soient $a, b, c \in X$ des points normalisés par $l(a) = l(b) = l(c) = 1$. On a la relation :

$$q(\vec{ab})q(\vec{ac}) - \varphi(\vec{ab}, \vec{ac})^2 = \Delta(q)[\vec{ab}, \vec{ac}]^2 = \Delta(q)[a, b, c]^2.$$

Si l'on pose $u = \varphi(\vec{ca}, \vec{ab})$, $v = \varphi(\vec{ab}, \vec{bc})$ et $w = \varphi(\vec{bc}, \vec{ca})$ et $x = q(\vec{bc})$, $y = q(\vec{ca})$, $z = q(\vec{ab})$, on a les formules :

$$\Delta(q)[a, b, c]^2 = yz - u^2 = vw + wu + uv = -\frac{1}{4}P(x, y, z) \quad \text{avec}$$

$$P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy.$$

Démonstration. Pour 1) on applique la relation (1) avec $x = a$ et $y = b$ et 2) en résulte avec 2.2.18.

La formule avec $yz - u^2$ est claire et les autres proviennent des relations du type $x = -v - w$ ou $u = \frac{x - y - z}{2}$.

2.2.23 Remarque. Le polynôme P est le déterminant de Cayley-Menger $\Gamma_2^\sharp(x, y, z)$, voir 5.5.6.

Pour les directions d'équations, on obtient les variantes suivantes des identités précédentes :

2.2.24 Corollaire. 1) Soient A, B, C, X, Y des formes linéaires quelconques. On a les formules :

$$(1) \quad \delta(q^*)[A, B, l][X, Y, l] = \begin{vmatrix} \varphi^*(A, X) & \varphi^*(A, Y) \\ \varphi^*(B, X) & \varphi^*(B, Y) \end{vmatrix}.$$

$$(2) \quad [B, C, l]\varphi^*(A, X) + [C, A, l]\varphi^*(B, X) + [A, B, l]\varphi^*(C, X) = 0.$$

2) Soient A, B deux formes linéaires quelconques. On a l'identité :

$$q^*(A)q^*(B) - \varphi^*(A, B)^2 = \delta(q^*)[A, B, l]^2.$$

3) Soient $a, b, c \in E$. On a la formule :

$$q^*(a \wedge b)q^*(a \wedge c) - \varphi^*(a \wedge b, a \wedge c)^2 = \delta(q^*)l(a)^2[a, b, c]^2.$$

Démonstration. Le point 1) n'est autre que 1.3.5 appliqué à l'espace vectoriel E^*/L et aux éléments $\overline{A}, \overline{B}, \dots$. Le point 2) en est une conséquence (voir aussi 2.2.14) et le point 3) résulte du point 2) appliqué à $A = a \wedge b$ et $B = a \wedge c$, compte-tenu de la formule $[a \wedge b, a \wedge c, l] = l(a)[a, b, c]$ (voir 2.2.9).

2.2.6 L'autre approche de la forme q

Ce paragraphe reprend la discussion de 2.1.3 sur la définition de la forme q . On dispose de la forme dégénérée q^* sur E^* et de la forme (non dégénérée) induite q_n^* sur E^*/L . Pour définir la forme q sur E_∞ , il suffit d'avoir un isomorphisme de E^*/L sur E_∞ . Dans la définition donnée ci-dessus on a utilisé l'isomorphisme qui consiste, géométriquement, à associer à une droite sa direction orthogonale. Maintenant qu'on dispose de l et des crochets, on peut aussi utiliser celui qui associe à une droite sa direction.

Calcul de q pour la direction d'une forme

Nous avons défini en 2.1.20 la forme q sur E_∞ en posant $q(n_f) = q^*(f)$ où n_f est le vecteur normal à f . La proposition suivante fait le lien entre cette définition et l'autre définition possible qui utiliserait la direction de f en posant $q'(l \wedge f) = q^*(f)$. On y voit que les deux formes sont les mêmes à un scalaire près, le petit discriminant. Nous aurons besoin d'un lemme :

2.2.25 Lemme. *Soit $f \in E^*$, $f \notin L$. Il existe une forme $f^\perp \in E^*$, unique à l'addition près d'un élément de L , qui vérifie : $\varphi^*(f, f^\perp) = 0$ et $[f, f^\perp, l] = 1$. On a $q^*(f)q^*(f^\perp) = \delta(q^*)$.*

Démonstration. On choisit une forme g orthogonale à f et non colinéaire à l . On a alors $[f, g, l] \neq 0$ et on cherche f^\perp sous la forme λg . La condition de crochet détermine λ . La dernière condition vient de 2.2.24.

2.2.26 Proposition. *Soient $f, g \in E^*$. On a les formules $\delta(q^*)q(l \wedge f) = q^*(f)$ et $\delta(q^*)\varphi(l \wedge f, l \wedge g) = \varphi^*(f, g)$.*

Démonstration.

1) Nous donnons d'abord une démonstration intrinsèque. Posons $x = l \wedge f$. C'est un vecteur de E_∞ qui correspond à la direction de f et il s'agit de trouver $f' \in E^*$ telle que l'on ait $n_{f'} = x$, autrement dit de trouver f' dont x soit la direction orthogonale. On cherche donc f' sous la forme $f' = \lambda f^\perp$ (cf. 2.2.25). En vertu de 2.1.24, la forme f' est définie par la relation $g(x) = \varphi^*(f', g)$ qui doit être valable pour tout $g \in E^*$. Comme on a $g(x) = g(l \wedge f) = [l, f, g]$ par définition du produit extérieur, il reste à trouver λ pour que la relation $[l, f, g] = \varphi^*(f', g)$ soit valable pour tout g . On

peut se limiter à la vérifier sur la base l, f, f^\perp de E^* et elle est évidente pour $g = l$ ou $g = f$ (on trouve 0 dans les deux membres). Il reste le cas $g = f^\perp$ qui donne $[l, f, f^\perp] = 1 = \varphi^*(\lambda f^\perp, f^\perp) = \lambda q^*(f^\perp)$. On doit donc prendre $\lambda = 1/q^*(f^\perp)$. Il s'ensuit, par définition de q , qu'on a $q(l \wedge f) = q^*(f') = 1/q^*(f^\perp) = q^*(f)/\delta(q^*)$ (voir 2.2.25) et on a le résultat.

2) On peut aussi faire ce calcul avec une base orthogonale. Avec les notations habituelles, on pose $f = (u, v, w)$ et on a $l \wedge f = (-v, u, 0)$ d'où $q(l \wedge f) = \frac{1}{\alpha}v^2 + \frac{1}{\beta}u^2 = \frac{1}{\alpha\beta}q^*(f)$.

Applications aux axes

Sur le corps des réels, la proposition suivante montre comment associer canoniquement un axe à une équation de droite :

2.2.27 Proposition-Définition. *On suppose $k = \mathbf{R}$ et $\delta(q^*) = 1$. Soit $A \in E^* - L$ une équation de droite. On a $q^*(A) = q(l \wedge A)$. On dit que A est **normalisée** si l'on a $q^*(A) = 1$. Si A est normalisée, on lui associe l'axe formé de la droite \bar{A} munie du vecteur unitaire $l \wedge A$.*

*On appelle **équation normalisée** associée à A l'équation $\frac{A}{\sqrt{q^*(A)}}$.*

Calculs de q en termes de produit extérieur

La description précédente de q en termes de direction de f permet d'obtenir des formules reliant les valeurs de q sur un vecteur et sur un produit extérieur :

2.2.28 Théorème.

1) *Soit $x \in E_\infty$ et soit o une origine du plan affine, i.e. un élément de E vérifiant $l(o) = 1$. On a $\delta(q^*) q(x) = q^*(x \wedge o)$.*
2) *Soient $a, b \in E$ vérifiant $l(a) = l(b) = 1$. On a $\delta(q^*) q(b-a) = q^*(a \wedge b)$, ou encore, en termes de vecteurs : $\delta(q^*) q(\vec{ab}) = q^*(a \wedge b)$. On a $\delta(q^*) \varphi(\vec{ab}, \vec{cd}) = \varphi^*(a \wedge b, c \wedge d)$.*

Démonstration.

1) En vertu de 2.2.26, il suffit de montrer qu'on a $l \wedge (x \wedge o) = x$. Mais, en vertu de 2.2.3 on a $l \wedge (x \wedge o) = l(o)x - l(x)o$ et on conclut avec $l(o) = 1$ et $l(x) = 0$.

2) Cela résulte de 2.2.26 et 2.2.4.

Orthogonalité et similitude

Le résultat précédent permet de montrer que l'orthogonalité est une similitude :

2.2.29 Corollaire. *On munit E_∞ de la forme q et E^*/L de la forme q_n^* induite par q^* .*

1) *L'application de $\vec{X} = E_\infty$ dans E^*/L qui à un vecteur \vec{ab} associe la direction $a \wedge b$ de ce vecteur est bien définie et c'est une similitude de multiplicateur $\delta(q^*)$.*

2) *L'application de $\vec{X} = E_\infty$ dans lui-même qui à \vec{ab} associe le vecteur normal $n_{a \wedge b}$ à (ab) est une similitude de multiplicateur $\delta(q^*)$.*

Démonstration. Dans tout ce qui suit, on identifie les éléments de X avec leurs représentants dans E vérifiant $l(a) = 1$.

1) Pour $a, b \in E$ vérifiant $l(a) = l(b) = 1$, il faut vérifier que $a \wedge b$ ne dépend pas du choix de a, b donnant un même vecteur. Mais la relation $\vec{ab} = \vec{cd}$ signifie $b - a = d - c$, soit $d = b + c - a$. On a alors $c \wedge d = c \wedge b - c \wedge a = a \wedge b$ dans E^*/L en vertu de la formule des aires $l(a)(b \wedge c + c \wedge a + a \wedge b) = [a, b, c]l$ (voir 2.2.12). Le fait que l'application est une similitude vient de 2.2.28.

Le point 2) est une conséquence de 1) et de la formule $q(n_{a \wedge b}) = q^*(a \wedge b)$.

2.2.30 Remarque. Dans tous les calculs précédents on voit apparaître le petit discriminant $\delta(q^*)$. Rappelons que, si le corps de base est \mathbf{R} , on peut le supposer égal à 1. En particulier, on obtient une formule pour la distance en termes de produit extérieur :

2.2.31 Corollaire. *On suppose le corps de base égal à \mathbf{R} , la forme q^* positive et le petit discriminant δ égal à 1. Si \bar{a} et \bar{b} sont deux points de X , de représentants "canoniques" a et b (i.e. vérifiant $l(a) = l(b) = 1$) la distance $\bar{a}\bar{b}$ est égale à $\sqrt{q^*(a \wedge b)}$.*

2.2.32 Remarque. Bien entendu la traduction en coordonnées de ce résultat n'étonnera personne. Si on a $a = (a_1, a_2, 1)$ et $b = (b_1, b_2, 1)$ on en déduit $a \wedge b = (a_2 - b_2, b_1 - a_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ et $(\bar{a}\bar{b})^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$.

Calcul des directions orthogonales aux côtés d'un triangle

2.2.33 Proposition. *Soit abc un triangle (i.e. trois points de X , non alignés). On suppose a, b, c normalisés par $l = 1$. On note n_{bc} , n_{ca} et n_{ab} les directions orthogonales aux côtés (bc) , (ca) , (ab) (c'est-à-dire les vecteurs normaux aux formes $b \wedge c$, $c \wedge a$, $a \wedge b$). On a la formule :*

$$n_{bc} = \frac{\delta(q^*)}{[a, b, c]} (q(\vec{bc})a + \varphi(\vec{bc}, \vec{ca})b + \varphi(\vec{bc}, \vec{ab})c)$$

et les formules analogues pour les autres, obtenues par permutation circulaire. Si l'on pose, comme en 2.2.22, $u = \varphi(\vec{ca}, \vec{ab})$, $v = \varphi(\vec{ab}, \vec{bc})$ et $w = \varphi(\vec{bc}, \vec{ca})$, on a :

$$n_{bc} = \frac{\delta(q^*)}{[a, b, c]} (-(v+w)a + wb + vc).$$

Démonstration. Posons $n_{bc} = \lambda a + \mu b + \nu c$. Ce vecteur est défini par les conditions $g(n_{bc}) = \varphi^*(g, b \wedge c)$ pour tout $g \in E^*$. Il suffit d'appliquer cette formule à la base $b \wedge c$, $c \wedge a$, $a \wedge b$ de E^* . On a ainsi, par exemple avec $g = b \wedge c$, $q^*(b \wedge c) = \lambda(b \wedge c)(a) = \lambda[a, b, c]$ et le résultat vient de 2.2.28. La deuxième formule s'obtient en notant les formules (issues de la relation de Chasles) du type $q(\vec{bc}) = -\varphi(\vec{ab}, \vec{bc}) - \varphi(\vec{bc}, \vec{ca}) = -v - w$.

2.3 Exercices

2.3.1 Divers

2.3.1 Exercice. Image de q

1) Déterminer l'image de la forme q dans le cas particulier où l'on a $q(x, y) = x^2 + y^2$ sur \mathbf{Q} . (On montrera que cette image est formée des rationnels de la forme $r = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ où les p_i sont des nombres premiers (positifs) et les α_i des entiers relatifs tels que α_i soit pair si p_i est congru à -1 modulo 4, voir au besoin [Per96] Ch. 2.)

2) On suppose qu'on a $q(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ et que le corps k est égal à \mathbf{Q} . Montrer que 1 n'est pas dans l'image de q . (On se ramène à montrer que l'équation en nombres entiers $2p^2 + 3q^2 = r^2$ n'a pas de solution non triviale. On peut supposer p, q, r premiers entre eux. On réduit alors modulo 3.)

Il n'est pas évident de déterminer l'image de $q = x^2 + dy^2$, notamment dans le cas $k = \mathbf{Q}$. Ce problème est intimement lié à l'arithmétique de l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(i\sqrt{d})$.

2.3.2 Exercice. Montrer que l'opposé $-\delta(q^*)$ du petit discriminant n'est pas un carré de k (sinon, la forme q^* aurait des isotropes autres que les vecteurs du noyau).

2.3.2 Coniques et points cycliques

2.3.3 Exercice. On suppose $k = \mathbf{R}$. Soient f, f' deux points distincts du plan euclidien, o le milieu de $[ff']$. On considère un repère orthonormé d'origine o dont l'axe des x est porté par (of) et on pose $f = (c, 0)$ et $f' = (-c, 0)$ avec $c > 0$. Soit a un nombre $> c$.

1) Montrer que l'ensemble des points $m = (x, y)$ du plan qui vérifient $mf + mf' = 2a$ est l'ellipse \mathcal{E} d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $b^2 = a^2 - c^2$. Les points f, f' sont les **foyers** de l'ellipse.

2) On étend les scalaires au corps des complexes \mathbf{C} . Montrer que les foyers sont caractérisés comme les points du plan qui sont tels que les tangentes à \mathcal{E} issues de ces points passent par les points cycliques $I = (1, i, 0)$ et $J = (1, -i, 0)$.

2.3.3 Le produit métissé

La série d'exercices qui suit vise à sauver ce qui peut l'être de la notion de produit vectoriel et à produire en particulier des identités de Jacobi.

2.3.4 Exercice. 1) Montrer qu'on définit une application bilinéaire $\mathbb{A} : E \times E^* \rightarrow E^*$ en posant¹⁴ $a \mathbb{A} f = a \wedge_E n_f$. La forme $a \mathbb{A} f$ est appelée **produit métissé** du vecteur a et de la forme f .

2) Montrer que si a n'est pas dans E_∞ (c'est-à-dire si \bar{a} n'est pas un point à l'infini) et si f n'est pas dans L (donc est l'équation d'une droite affine D), la forme $a \mathbb{A} f$ est une équation de la perpendiculaire à D passant par \bar{a} . Étudier les cas exceptionnels.

3) Si o est un vecteur de E , montrer qu'on a la formule : $(a \mathbb{A} f)(o) = \varphi^*(f, o \wedge a)$.

4) On choisit une base de E et sa base duale et on suppose que q^* est la forme $u^2 + v^2$. On pose $a = (x, y, 1)$ et $f = (u, v, w)$. Calculer $a \mathbb{A} f$.

2.3.5 Exercice. (Interprétations géométriques)

1) Montrer que si l'on a trois points $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ de X , avec $\bar{b} \neq \bar{c}$, la perpendiculaire à $(\bar{b}\bar{c})$ passant par \bar{a} admet pour équation $a \mathbb{A} (b \wedge c)$ au sens précédent.

2) Montrer que si l'on a trois droites affines $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$, d'équations A, B, C , avec \bar{B}, \bar{C} non parallèles, la perpendiculaire à \bar{A} passant par le point d'intersection de \bar{B} et \bar{C} a pour équation $(B \wedge C) \mathbb{A} A = \varphi^*(A, B)C - \varphi^*(A, C)B$.

2.3.6 Exercice. Soient $a, b, c, o \in E - E_\infty$ que l'on identifie aux points correspondant de l'espace affine. Montrer qu'on a la formule :

$$\left(a \mathbb{A} (b \wedge c) \right) (o) = \varphi^*(b \wedge c, o \wedge a) = \delta(q^*)\varphi(\overrightarrow{o\bar{a}}, \overrightarrow{\bar{b}\bar{c}}).$$

14. Le lecteur aura noté la différence typographique entre $a \wedge b$ et $a \mathbb{A} f$.

2.3.7 Exercice. (Identités de Jacobi) 1) Soient $A, B, C \in E^*$. Montrer qu'on a la formule :

$$(B \wedge C) \wedge A + (C \wedge A) \wedge B + (A \wedge B) \wedge C = 0.$$

2) Soient $a, b, c \in E$. Montrer qu'on a la formule :

$$a \wedge (b \wedge c) + b \wedge (c \wedge a) + c \wedge (a \wedge b) = 0.$$

Chapitre 3

Les groupes d'isométries et de similitudes, vus du dual

L'objectif de ce chapitre est de faire le lien entre le groupe $PGO(q^)$, qui est le groupe naturel qui correspond à l'entrée dans la géométrie euclidienne via E^* et q^* , introduite au chapitre précédent, et les groupes d'isométries et de similitudes du plan euclidien usuel, interprété comme le plan affine $X = \mathbf{P}(E) - D_\infty$ associé à la droite de l'infini et muni de la forme quadratique q définie sur $\vec{X} = E_\infty$. On verra, bien entendu, qu'on retrouve tous les personnages de la géométrie élémentaire, et d'autres, comme les points cycliques ou le groupe dit des spineurs.*

Il est aussi, comme l'ensemble de cette partie, de comparer la géométrie euclidienne aux non euclidiennes. De ce point de vue, il y a des différences importantes, qui ont des conséquences géométriques fondamentales. D'abord, le groupe "principal" de la géométrie euclidienne n'est pas le groupe des isométries, mais celui des similitudes, normalisateur du précédent, et c'est une différence importante, en particulier parce que ce groupe est de dimension 4 et non pas 3 et qu'il n'a pas d'équivalent non euclidien. On peut voir ce fait comme une richesse supplémentaire du cas euclidien. De manière élémentaire, elle recouvre tout ce qui relève du côté "affine" de la géométrie euclidienne (par exemple le groupe des homothéties-translations). Une autre différence, essentielle aussi, est que ce groupe est résoluble, c'est-à-dire qu'il admet une suite de sous-groupes distingués à quotients abéliens.

Géométriquement, cela produit toute une série d'invariants orientés (vecteurs, angles orientés, sens des transformations, rapports de mesures algébriques, etc.) dont on sait le rôle essentiel qu'ils jouent en géométrie élémentaire. Enfin, la dernière différence est au niveau des involutions, les symétries centrales euclidiennes ayant un comportement très différent des réflexions, là encore parce qu'elles engendrent un (petit) sous-groupe distingué.

Je tenterai d'expliquer, dans la postface de ce livre, en quoi l'existence de ces différences mathématiques a une grande importance quand il s'agit de faire des choix pour l'enseignement de la géométrie euclidienne.

Ce chapitre inaugure aussi une série de résultats concernant la transitivité. Ils sont donnés ici dans le cadre algébrique : transitivité des groupes d'isométries et de similitudes sur $(E^)^n$, mais ces résultats auront des conséquences géométriques dans les chapitres suivants.*

3.1 Le groupe $PGO(q^*)$

Ce chapitre s'appuie sur les rappels du chapitre 1 concernant les groupes de la géométrie euclidienne plane, mais il s'inscrit dans le cadre inauguré au chapitre précédent. Les données sont donc l'espace E de dimension 3, son dual E^* , la forme parabolique q^* sur E^* , le sous-espace E_∞ de E et la droite D_∞ associée, l'espace affine $X = \mathbf{P}(E) - D_\infty$, la forme q associée à q^* sur E_∞ , les crochets et l'équation l de la droite D_∞ . Il s'agit de faire le lien entre ces données et les groupes rencontrés au chapitre 1.

3.1.1 Les groupes de similitudes $GO(q^*)$, $GO^\circ(q^*)$, $\widehat{GO^\circ(q^*)}$

Le groupe $GO(q^*)$

La définition suivante généralise 1.2.10 au cas dégénéré :

3.1.1 Proposition-Définition. *Un élément $u \in GL(E^*)$ est appelé **similitude** relative à q^* , de multiplicateur $\mu(u)$, si l'on a, pour tout $f \in E^*$, $q^*(u(f)) = \mu(u)q^*(f)$. On a alors, pour tous $f, g \in E^*$, $\varphi^*(u(f), u(g)) = \mu(u)\varphi^*(f, g)$. L'automorphisme u laisse stable le noyau L de q^* . On note $GO(q^*)$ le groupe des similitudes relatives à q^* . Le multiplicateur $\mu(u)$ est non nul et définit un caractère $\mu : GO(q^*) \rightarrow k^*$. Son noyau est le groupe des **isométries** $O(q^*)$.*

Démonstration. Pour voir que le multiplicateur est non nul il suffit de considérer $f \in E^*$ tel que $u(f)$ soit non isotrope. Le reste est immédiat.

3.1.2 Remarque. Le groupe $GO(q^*)$ est le groupe “naturel” associé à la géométrie de q^* . C’est le plus grand possible, au sens où son normalisateur dans $GL(E^*)$ lui est égal, voir 3.5.4, 1.4.6 et Partie IV, ??.

La proposition suivante, qui est immédiate, précise ce que devient l’équation l de L :

3.1.3 Proposition. *Soit $u \in GO(q^*)$. On a $u(l) = \lambda(u)l$, où $\lambda : GO(q^*) \rightarrow k^*$ est un caractère.*

Comme les similitudes laissent stables L elles opèrent sur l’espace E^*/L des directions d’équations, sur lequel on dispose de la forme q_n^* , cf. 2.1.19 :

3.1.4 Proposition-Définition. *Soit $u \in GL(E^*)$ un endomorphisme qui laisse stable L et soit \bar{u} l’endomorphisme induit sur E^*/L . Alors u est une similitude relativement à q^* si et seulement si \bar{u} est une similitude relative à q_n^* et on a $\mu(u) = \mu(\bar{u})$ et $\det(u) = \lambda(u)\det(\bar{u})$.*

*Soit $\epsilon(\bar{u}) = \frac{\mu(\bar{u})}{\det(\bar{u})} = \pm 1$ le signe de \bar{u} (voir 1.2.12). On pose $\epsilon(u) = \epsilon(\bar{u})$ et on l’appelle **signe** de u . C’est un caractère de $GO(q^*)$ et son noyau est appelé groupe des similitudes **directes** et noté $GO^+(q^*)$. Plus généralement, si G est un sous-groupe de $GO(q^*)$, on notera G^+ l’intersection $G \cap GO^+(q^*)$. On a la formule $\epsilon(u)\det(u) = \lambda(u)\mu(u)$.*

Démonstration. Le premier point résulte de la formule $q^*(f) = q_n^*(\bar{f})$. Pour l’assertion sur le déterminant, il suffit de compléter l en une base de E^* .

Homographies et sous-groupes

On sait que le groupe qui opère sur $\mathbf{P}(E^*)$, donc sur X , n’est pas $GO(q^*)$, mais le groupe d’homographies $PGO(q^*)$, quotient de $GO(q^*)$ par le sous-groupe des homothéties de rapport non nul. On peut donc remplacer le groupe $GO(q^*)$ par certains de ses sous-groupes, pourvu que le quotient ne soit pas altéré. Cela permet d’éliminer – ou presque – le caractère $\lambda(u)$. Précisément, le résultat suivant indique l’effet d’une homothétie sur les divers caractères :

3.1.5 Lemme. *Si h_α est l’homothétie de rapport $\alpha \in k^*$, c’est une similitude et on a $\mu(h_\alpha) = \alpha^2$, $\det(h_\alpha) = \alpha^3$, $\lambda(h_\alpha) = \alpha$ et $\epsilon(h_\alpha) = 1$. Si u est une similitude, on a $\mu(h_\alpha u) = \alpha^2\mu(u)$, $\det(h_\alpha u) = \alpha^3\det(u)$, $\lambda(h_\alpha u) = \alpha\lambda(u)$ et $\epsilon(h_\alpha u) = \epsilon(u)$.*

Ce lemme montre en particulier que le multiplicateur varie quand on multiplie u par une homothétie et qu’il n’a pas de sens géométrique si on le regarde sur $GO(q^*)$ tout entier. Cela nous conduit à la définition suivante :

3.1.6 Définition. On note $\widehat{GO^\circ(q^*)}$ (resp. $GO^\circ(q^*)$) le sous-groupe (distingué) de $GO(q^*)$ formé des similitudes qui vérifient $\lambda(u) = \pm 1$ (resp. $\lambda(u) = 1$). Les éléments de $\widehat{GO^\circ(q^*)}$ (resp. $GO^\circ(q^*)$) seront appelées similitudes **spinorielles** (resp. **strictes**).

La proposition suivante montre que ces groupes ont le même quotient par les homothéties que $GO(q^*)$:

3.1.7 Proposition. La projection $\pi : GO(q^*) \rightarrow PGO(q^*)$ induit un isomorphisme $GO^\circ(q^*) \simeq PGO(q^*)$ et une surjection de $\widehat{GO^\circ(q^*)}$ sur $PGO(q^*)$ de noyau $\{\pm \text{Id}\}$.

Démonstration. Le lemme 3.1.5 montre que l'intersection de $GO^\circ(q^*)$ (resp. $\widehat{GO^\circ(q^*)}$) et du groupe des homothéties est réduite à l'identité (resp. à $\{\pm \text{Id}\}$), de sorte que π , en restriction à $GO^\circ(q^*)$ est injectif. Ce même lemme montre aussi que, si l'on pose $\alpha = \lambda(u)^{-1}$, $h_\alpha u$ est dans $GO^\circ(q^*)$, ce qui montre la surjectivité pour $GO^\circ(q^*)$, donc *a fortiori*, pour $\widehat{GO^\circ(q^*)}$.

3.1.8 Remarques. 1) La proposition précédente est essentielle car elle montre qu'on peut, pour calculer $PGO(q^*)$ (dont on va voir qu'il est isomorphe à $\text{Sim}(X)$), se limiter à considérer $GO^\circ(q^*)$ car on a $GO^\circ(q^*) = PGO^\circ(q^*) \simeq PGO(q^*)$. Cela fournit, en quelque sorte, une normalisation des éléments de $PGO(q^*)$ qui permet d'en choisir un représentant particulier dans $GO(q^*)$.

2) Comme le groupe $GO^\circ(q^*)$ est isomorphe au quotient, le lecteur se demande peut-être à quoi sert la variante spinorielle¹ $\widehat{GO^\circ(q^*)}$. Son utilité apparaîtra dans les questions de transitivité sur les formes (ou sur les axes, ce qui revient au même), voir 3.3.3. L'objectif sera alors d'avoir des invariants **non orientés** assurant cette transitivité. Ce groupe, *via* ses éléments vérifiant $\lambda(u) = -1$, permettra les ajustements de signe indispensables pour désolidariser angles et aires. On le désignera parfois sous le nom de groupe des **spineurs**.

En revanche, l'expérience montre que le groupe $GO(q^*)$ tout entier ne nous sera plus guère utile, voir 3.5.3. **Dans ce qui suit, on utilisera essentiellement les groupes $GO^\circ(q^*) \simeq PGO(q^*)$ et $\widehat{GO^\circ(q^*)}$.**

3) Le groupe $\widehat{GO^\circ(q^*)}$ peut s'écrire de plusieurs manières comme produit de $GO^\circ(q^*)$ par $\{\pm 1\}$. Si on choisit $-\text{Id}$ comme relèvement de -1 , le produit est direct, mais si l'on choisit² $s = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, il est seulement semi-direct.

1. Il ne faut pas chercher d'explication profonde à ce nom qui indique simplement la présence d'un signe supplémentaire.

2. Ou plus généralement l'opposé d'une involution.

Les éléments $-\text{Id}$ ou s conservent les produits scalaires, ainsi que les crochets $[A, B, l]$, mais changent en leurs opposés les crochets $[A, B, C]$.

Géométriquement, l'élément $-\text{Id}$ n'a d'action ni sur les droites, ni sur les points. Sa seule fonction est de changer le sens de tous les axes à la fois.

On notera que ni $GO^\circ(q^*)$ ni $\widehat{GO^\circ(q^*)}$ ne contiennent le groupe des isométries $O(q^*)$ (si u est dans $O(q^*)$, $\lambda(u)$ peut être quelconque). Cela conduit à la définition suivante :

3.1.9 Définition. On note $O^\circ(q^*)$ (resp. $\widehat{O^\circ(q^*)}$) le sous-groupe $O(q^*) \cap GO^\circ(q^*)$ (resp. $O(q^*) \cap \widehat{GO^\circ(q^*)}$). Les éléments de $O^\circ(q^*)$ (resp. $\widehat{O^\circ(q^*)}$) sont appelées **isométries strictes** (resp. **spinorielles**). On note avec un exposant $+$ les sous-groupes des isométries positives.

Formes matricielles

3.1.10 Notation. Dans une base orthogonale (e_1^*, e_2^*, e_3^*) de E^* , avec $l = e_3^*$, la forme q^* est donnée par $q^*(\xi, \eta, \zeta) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$, où $\alpha, \beta \in k^*$ sont tels que $-\beta/\alpha$ ne soit pas un carré. Quitte à multiplier la forme q^* par $1/\alpha$ (ce qui ne change ni la géométrie de q^* , ni le groupe orthogonal associé), on peut supposer qu'on a $q^*(\xi, \eta, \zeta) = \xi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\eta^2 := \xi^2 + \frac{1}{\gamma}\eta^2$. On sait alors (cf. 2.1.22) que la forme q sur E_∞ , muni de la base e_1, e_2 , est donnée par $q(x, y) = x^2 + \frac{\alpha}{\beta}y^2 := x^2 + \gamma y^2$. On a $\delta(q^*) = 1/\gamma$ et $\Delta(q) = \gamma$.

La donnée de cette base permet d'expliciter l'écriture matricielle des éléments de $GO(q^*)$ et de ses sous-groupes :

3.1.11 Proposition. Avec les notations de 3.1.10, un élément $u \in GO(q^*)$ (resp. $u \in GO^\circ(q^*)$, resp. $u \in \widehat{GO^\circ(q^*)}$) a pour matrice dans la base (e_1^*, e_2^*, e_3^*) :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ v_1 & v_2 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{U} & 0 \\ v & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\text{(resp. } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ v_1 & v_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{U} & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{resp. } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ v_1 & v_2 & \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{U} & 0 \\ v & \pm 1 \end{pmatrix})$$

où $\bar{U} = (a_{ij})$ est la matrice d'une similitude \bar{u} (quelconque) pour la forme (non dégénérée) $\xi^2 + \frac{1}{\gamma}\eta^2$, où $v = (v_1, v_2)$ est un vecteur (quelconque) de k^2 et où $\lambda = \lambda(u)$ est le scalaire non nul défini en 3.1.3. Dans tous les cas, le

3. Voir 3.1.14.

multiplicateur de u est égal à celui de \bar{u} . En particulier, l'élément u est dans $O(q^*)$ si et seulement si \bar{U} est la matrice d'une isométrie. Il est dans $O^\circ(q^*)$ (resp. $\widehat{O^\circ(q^*)}$) si, de plus, on a $\lambda = 1$ (resp. $\lambda = \pm 1$).

Démonstration. Cela résulte de 3.1.3, 3.1.4, 3.1.6 et de la forme de la matrice de $q^* : \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où J est la matrice de q^* en restriction à (e_1^*, e_2^*) .

3.1.12 Commentaire. La matrice d'un élément u de $GO^\circ(q^*)$ se compose donc de trois parties : une similitude vectorielle de dimension 2 de matrice \bar{U} , un vecteur v , dont on verra qu'il correspond à la partie "translation" de u , et le coefficient 1 en dernière place, qui provient de la normalisation choisie. Dans le cas de $\widehat{GO^\circ(q^*)}$, ce coefficient est autorisé à valoir ± 1 .

Caractères et invariants de $\widehat{GO^\circ(q^*)}$: une première liste

On peut faire maintenant un inventaire⁴ des caractères de $\widehat{GO^\circ(q^*)}$ et de leurs noyaux, ainsi que des invariants associés :

3.1.13 Proposition. 1) Sur $\widehat{GO^\circ(q^*)}$, on a deux caractères à valeurs dans k^* : \det et μ et deux à valeurs dans $\{\pm 1\}$: ϵ et λ . Ces caractères sont liés par la formule $\epsilon(u)\det(u) = \lambda(u)\mu(u)$.

2) Le noyau de μ est le groupe des isométries $\widehat{O^\circ(q^*)}$, celui de λ est $GO^\circ(q^*)$, celui de ϵ est le groupe des similitudes (spinorielles) positives.

Le noyau de (μ, λ) est $O^\circ(q^*)$, celui de (μ, ϵ) est $\widehat{O^{+\circ}(q^*)}$ (les isométries spinorielles positives), enfin, le noyau de (μ, ϵ, λ) est $O^{+\circ}(q^*)$.

3) Les produits et carrés scalaires $\varphi^*(A, B)$ et $q^*(A)$ sont des invariants relatifs au caractère μ , les crochets $[A, B, l]$ relatifs à $\lambda \det$ (ou encore $\epsilon\mu$) et les crochets $[A, B, C]$ relatifs à \det (ou $\epsilon\lambda\mu$ ou encore $\epsilon\lambda$ si l'on se restreint au groupe des isométries). Tous sont des invariants absolus du groupe $O^{+\circ}(q^*)$.

3.1.14 Scolie. Attention, les crochets $[A, B, l]$ sont des invariants des formes A, B (mais pas de l). Cela signifie que u opère sur $[A, B, l]$ en le transformant en $[u(A), u(B), l]$ (et non pas $[u(A), u(B), u(l)]$) et c'est en ce sens qu'on a la formule $[u(A), u(B), l] = \epsilon(u)\mu(u)[A, B, l]$.

3.1.15 Remarque. Si le corps de base est égal à \mathbf{R} , le noyau de \det est formé des isométries qui vérifient $\epsilon = \lambda$. En effet, le multiplicateur étant positif, il vaut nécessairement 1. Cette propriété est en défaut sur un corps quelconque, voir 1.4.2.

4. Nous verrons au chapitre 8 qu'il est essentiellement exhaustif.

3.2 L'isomorphisme $PGO(q^*) \simeq \text{Sim}(X)$

Dans ce paragraphe, le lecteur, au prix de calculs algébriques assez répugnants, aura la confirmation que les deux groupes $PGO(q^*)$ et $\text{Sim}(X)$ intervenant dans les deux facettes de la situation sont un seul et même personnage.

3.2.1 Opérations sur E et $\mathbf{P}(E)$

Le principe

On part du groupe $GO(q^*)$ (ou plutôt de son sous-groupe $GO^\circ(q^*)$). Ce groupe opère naturellement sur E^* , mais, par dualité, il opère aussi sur le bidual E^{**} . Comme cet espace est canoniquement isomorphe à E , on va donc pouvoir faire opérer $GO^\circ(q^*)$ sur E . Rappelons comment on procède : on associe à $u \in GO^\circ(q^*)$ une application linéaire ${}^t u \in GL(E)$ définie par la formule : $f({}^t u(x)) = u(f)(x)$ pour $x \in E$ et $f \in E^*$. Une première difficulté est que l'application $u \mapsto {}^t u$ n'est pas un homomorphisme de groupes (car la transposition change l'ordre des produits). On considère donc plutôt l'application⁵ $u \mapsto {}^t u^{-1}$ qui est un homomorphisme injectif de $GO^\circ(q^*)$ dans $GL(E)$. Comme les homothéties se transforment en homothéties, cet homomorphisme induit un homomorphisme, injectif lui aussi, de $GO^\circ(q^*) \simeq PGO(q^*)$ dans $PGL(E)$ qui à u associe $\overline{{}^t u^{-1}}$. La remarque suivante montre que cette application, sur les droites, est induite par l'application u sur leurs équations :

3.2.1 Scolie. Si D est une droite de $\mathbf{P}(E)$, d'équation $f \in E^*$, la droite ${}^t u^{-1}(D)$ a pour équation $u(f)$.

En effet, pour $g \in E^*$, on a, par définition de la transposée, $g({}^t u^{-1}(x)) = u^{-1}(g)(x)$. On en déduit $u(f)({}^t u^{-1}(x)) = u^{-1}(u(f))(x) = f(x)$, de sorte qu'on a l'équivalence $x \in D = V(f) \iff {}^t u^{-1}(x) \in V(u(f))$.

Comme u est une similitude, elle laisse stable L (précisément, comme u est dans $GO^\circ(q^*)$ on a $u(l) = l$), et il en résulte que l'application linéaire ${}^t u^{-1}$ conserve $E_\infty = V(l)$, donc que l'homographie associée $\overline{{}^t u^{-1}}$ laisse stable la droite à l'infini D_∞ et le plan affine $X = \mathbf{P}(E) - D_\infty$. Le plus gros du travail est fait car on a relié la géométrie de E^* à celle de l'espace affine X . Pour mettre les choses au point, on introduit les notations suivantes :

3.2.2 Notations. On note u^\sharp la restriction à X de l'application $\overline{{}^t u^{-1}}$ et u^\natural la restriction à E_∞ de ${}^t u^{-1}$. On a la formule $f(u^\sharp(x)) = u^{-1}(f)(x)$ pour $x \in E_\infty$

5. Les deux opérations de transposition et de passage à l'inverse commutent et il est donc inutile de préciser par laquelle on commence.

et $f \in E^*$. En vertu de 3.2.1, l'action de u^\sharp sur les droites de X est donnée, sur leurs équations, par u .

3.2.2 L'isomorphisme

Le théorème suivant, fondamental, fait le lien entre le groupe $PGO(q^*)$ (ou son avatar $GO^\circ(q^*)$) et le groupe des similitudes affines de X :

3.2.3 Théorème. *Soit $u \in GO^\circ(q^*)$ une similitude de multiplicateur μ (resp. une isométrie).*

1) *L'application linéaire $u^\sharp : E_\infty \rightarrow E_\infty$ est une similitude de multiplicateur μ^{-1} (resp. une isométrie) relativement à q . On a $\epsilon(u) = \epsilon(u^\sharp)$.*

2) *L'application u^\sharp est une application affine bijective de X dans X dont l'application linéaire associée est la similitude vectorielle $u^\sharp \in GO(q)$. C'est une similitude (resp. une isométrie) du plan affine X , relative à la forme q . L'homomorphisme $u \mapsto u^\sharp$ est un isomorphisme de $GO^\circ(q^*)$ sur le groupe $\text{Sim}(X)$ des similitudes du plan affine euclidien X . Sa restriction au groupe $O^\circ(q^*)$ des isométries strictes induit un isomorphisme de $O^\circ(q^*)$ sur $\text{Is}(X)$ et un isomorphisme de $O^{\circ+}(q^*)$ sur $\text{Is}^+(X)$.*

3) *L'application $\Theta : u \mapsto u^\sharp$ est un homomorphisme surjectif de $GO^\circ(q^*)$ sur $GO(q)$ dont le noyau est isomorphe au groupe $T(X)$ des translations de X .*

Démonstration. 1) Soit $x \in E_\infty$. On peut l'écrire comme vecteur normal d'une forme $f : x = n_f$. Par définition cela signifie qu'on a, pour tout $g \in E^*$, $g(n_f) = \varphi^*(f, g)$. On a $q(n_f) = q^*(f)$ par définition de q . Calculons $q(u^\sharp(n_f))$ en écrivant $u^\sharp(n_f)$ sous la forme n_h . On a alors, pour tout $g \in E^*$, $g(n_h) = g(u^\sharp(n_f)) = g({}^t u^{-1}(n_f)) = u^{-1}(g)(n_f) = \varphi^*(f, u^{-1}(g))$. Comme u est une similitude pour q^* , on a $g(n_h) = \mu^{-1} \varphi^*(u(f), g) = \varphi^*(\mu^{-1}u(f), g)$ pour tout g , ce qui montre qu'on a $h = \mu^{-1}u(f)$ à un élément de L près. On en déduit : $q(u^\sharp(n_f)) = q(n_h) = q^*(h) = q^*(\mu^{-1}u(f)) = \mu^{-2}q^*(u(f)) = \mu^{-1}q^*(f) = \mu^{-1}q(n_f) : u^\sharp$ est bien une similitude de multiplicateur μ^{-1} pour la forme q .

On peut aussi donner une preuve matricielle⁶ de ce résultat. Reprenons les notations de 3.1.11. Appelons J la matrice 2×2 de q^* sur les deux premiers vecteurs de base : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix}$. Comme u est dans $GO^\circ(q^*)$ il a pour matrice $u = \begin{pmatrix} U & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}$ où $U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est la matrice d'une similitude relative à J , donc vérifie ${}^t U J U = \mu J$. On sait que la matrice de q dans la base (e_1, e_2) est J^{-1} (voir 2.1.22). Quant à celle de u^\sharp sur E_∞ , c'est $U^\sharp = {}^t U^{-1}$. On

6. Peut-être moins aride ...

a donc à vérifier la relation $U^{-1}J^{-1}({}^tU^{-1}) = \mu^{-1}J^{-1}$. On l'obtient à partir de ${}^tUJU = \mu J$ en passant à l'inverse. Le signe de u est égal à $\mu(u)/\det(u)$, ou encore à $\mu(\bar{u})/\det(\bar{u})$ et, comme le multiplicateur et le déterminant sont changés en leurs inverses en passant à u^\sharp , le signe de u est le même que celui de u^\sharp .

2) Rappelons que la structure d'espace affine sur $X = \mathbf{P}(E) - D_\infty$ est définie de la façon suivante : pour deux points \bar{a}, \bar{b} de X on choisit des représentants (dits "canoniques") $a, b \in E$ tels que l'on ait $l(a) = l(b) = 1$ et on pose $\overrightarrow{\bar{a}\bar{b}} = b - a$. C'est un élément de E_∞ . Rappelons aussi que si $f : X \rightarrow X$ est une application affine, l'application linéaire associée est l'application $\vec{f} : E_\infty \rightarrow E_\infty$ définie par $\vec{f}(\overrightarrow{\bar{a}\bar{b}}) = \overrightarrow{f(\bar{a})f(\bar{b})}$.

Calculons alors l'application linéaire associée à u^\sharp . On prend $a, b \in E$ avec $l(a) = l(b) = 1$. Pour calculer $\overrightarrow{u^\sharp(\bar{a})u^\sharp(\bar{b})}$, il faut trouver les représentants canoniques des points $u^\sharp(\bar{a}) = \overline{{}^tu^{-1}(a)}$ et $u^\sharp(\bar{b}) = \overline{{}^tu^{-1}(b)}$. Comme u est dans $GO^\circ(q^*)$ on a $l({}^tu^{-1}(a)) = u^{-1}(l(a)) = \lambda(u^{-1})l(a) = l(a) = 1$ en vertu de 3.1.6. Le représentant canonique de $u^\sharp(\bar{a})$ est donc ${}^tu^{-1}(a)$ et de même pour b . On a donc $\overrightarrow{u^\sharp(\bar{a})u^\sharp(\bar{b})} = {}^tu^{-1}(b) - {}^tu^{-1}(a) = {}^tu^{-1}(b - a)$. Comme $b - a$ est dans E_∞ , ce vecteur est aussi $u^\sharp(b - a)$. On en déduit que l'application associée est u^\sharp qui est bien linéaire, et de la forme annoncée. Il s'agit d'une similitude vectorielle, de sorte que u^\sharp est bien une similitude affine.

L'application $u \mapsto u^\sharp$ est injective. En effet, si u^\sharp est l'identité sur X , comme X contient un repère projectif de $\mathbf{P}(E)$, $\overline{{}^tu^{-1}}$ est l'identité dans $PGO(q^*) = GO^\circ(q^*)$, donc aussi u .

Pour montrer que l'application est surjective il suffit, en vertu de 1.2.20, de montrer que son image contient le groupe des translations et que l'application $u \mapsto u^\sharp$ a pour image le groupe $GO(q)$ tout entier, c'est-à-dire de prouver le point 3). Pour $GO(q)$ on peut utiliser la forme matricielle. Si l'on se donne un élément de $GO(q)$, de matrice U' , on peut toujours l'écrire sous la forme U^\sharp avec U similitude pour q_n^* . Pour obtenir un élément de $GO^\circ(q^*)$ il n'y a plus qu'à ajouter un 1 en dernière place.

Pour les translations, on a le lemme suivant :

3.2.4 Lemme. *Soit $a \in E_\infty$ et $u_a \in GL(E^*)$ l'application linéaire définie par $u_a(f) = f - f(a)l$. Alors u_a est une isométrie relative à q^* dont l'image u_a^\sharp est la translation de vecteur a .*

Démonstration. Posons $u = u_a$. Il s'agit de vérifier qu'on a $u^\sharp(x) = {}^tu^{-1}(x) = x + a$ pour tout $x \in X$ tel que $l(x) = 1$, ou encore qu'on a, pour tout $f \in E^*$, $f({}^tu^{-1}(x)) = u^{-1}(f)(x) = f(x) + f(a)$. Cela résulte de la formule $u^{-1}(f) = f + f(a)l$. On peut aussi montrer ce résultat en utilisant les matrices, voir 3.5.1.

3.2.3 Les homothéties

La proposition suivante, que le lecteur vérifiera sans peine, caractérise les homothéties de X :

3.2.5 Proposition-Définition. *On reprend les notations de 3.2.2. Soit $u \in GO^\circ(q^*)$ et soit $\alpha \in k^*$, $\alpha \neq 1$. Si a est un élément de X vérifiant $l(a) = 1$ on pose $u^\sharp(a) = a'$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *L'application u^\sharp est une homothétie de rapport α de X (autrement dit, elle admet un unique point fixe $o \in X$ et on a, pour tout $a \in X$, $\overrightarrow{oa'} = \alpha \overrightarrow{oa}$).*

2) *L'application u^\sharp est l'homothétie de rapport α dans E_∞ .*

3) *L'application linéaire induite par u sur E^*/L est l'homothétie de rapport α^{-1} .*

4) *Dans l'écriture matricielle $u = \begin{pmatrix} M & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}$, la matrice M est égale à $\alpha^{-1}\text{Id}$.*

5) *Il existe $o \in E$ vérifiant $l(o) = 1$ tel que l'on ait, pour tout $f \in E^*$, $u(f) = \frac{1}{\alpha}f + \frac{\alpha-1}{\alpha}f(o)l$.*

Une homothétie affine de rapport α est une similitude de multiplicateur α^2 .

3.2.6 Remarque. Dans la base e_1, e_2, e_3 de E , le centre o de l'homothétie a pour coordonnées $(\frac{\alpha}{\alpha-1}v_1, \frac{\alpha}{\alpha-1}v_2, 1)$ où $v = (v_1, v_2)$ est le vecteur apparaissant dans la matrice de u .

3.2.4 Comparaison avec les géométries non euclidiennes, premier épisode

3.2.7 Remarques. On peut noter plusieurs différences par rapport aux cas hyperbolique et elliptique.

1) D'abord, on a, en général, $PO(q^*) \neq PGO(q^*)$ (voir exercice 3.5.3) contrairement au cas non euclidien (cf. Partie III ??).

2) Ensuite, dans le cas réel, le groupe "naturel" $PGO(q^*)$ du cas euclidien est le groupe des similitudes de X . C'est un groupe algébrique de dimension 4 (2 pour les translations, 1 pour les rotations, 1 pour les homothéties). Il est donc plus gros que les groupes d'isométries des géométries non euclidiennes qui sont de dimension 3. Bien entendu, ce groupe ne contient pas que des isométries, mais les similitudes sont intimement liées aux isométries (dont elles sont le normalisateur, groupe inséparable d'un groupe donné, voir 1.4.6 ci-dessus) et il n'y a rien de tel en non euclidien, voir Partie IV ?? et ??. En un certain sens, la géométrie euclidienne, du côté de Thalès, est plus riche que les autres.

3) Enfin, une autre différence essentielle est le fait que le groupe $\text{Sim}(X)$ admet un dévissage :

$$\{\text{Id}\} \subset T(X) \subset \text{Is}^+(X) \subset \text{Is}(X) \subset \text{HI}(X) \subset \text{Sim}(X),$$

où le groupe $\text{HI}(X)$ désigne le sous-groupe de $\text{Sim}(X)$ engendré par les isométries et les homothéties, voir 3.5.3. Les quotients successifs sont égaux à $T(X)$ (le groupe des translations), $O^+(q)$, $\{1, -1\}$, k^* , $N(k)/(k^*)^2$, ce dernier étant trivial sur \mathbf{R} . Ces quotients étant tous abéliens, le groupe $\text{Sim}(X)$ est résoluble, alors que $PGO(q) = PO(q)$ est simple (ou presque) dans le cas non dégénéré. Ce dévissage a une importance géométrique capitale. En effet, à chaque cran, les quotients abéliens fournissent des invariants orientés (vecteurs, angles orientés, signe des transformations, rapport de similitude) que nous retrouverons plus loin et qui jouent un rôle essentiel. On a vu, Partie IV, Ch. 8, qu'il n'y a rien d'aussi satisfaisant en géométrie non euclidienne.

3.2.5 Similitudes et points cycliques

Comme on l'a annoncé plus haut, les points cycliques suffisent à caractériser les similitudes :

3.2.8 Proposition. *On reprend les notations de 2.1.29 : le plan affine X est plongé dans le plan projectif $\mathbf{P}(E)$ et on étend les scalaires à $K = k(\sqrt{\Delta})$. Soit g une application affine de X dans X que l'on prolonge en une application, notée encore g , de $\mathbf{P}(E)$ dans lui-même. Alors, g est une similitude (resp. une similitude directe) si et seulement si g laisse invariant l'ensemble $\{I, J\}$ des points cycliques (resp. si et seulement si elle fixe I et J).*

Démonstration. Il s'agit de montrer que l'application linéaire associée à g est une similitude relativement à q sachant qu'elle en conserve les droites isotropes. C'est facile, classique (voir par exemple [Per96] 7.1). On peut aussi noter que g conserve l'orthogonalité en vertu de 2.1.30 et appliquer [Per96] V Ex. 7.2.

En ce qui concerne le signe de la similitude, le plus simple est d'écrire la forme q dans la base I, J avec la matrice $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les similitudes ont pour matrices $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ou $N = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$ selon qu'elles fixent les points cycliques ou qu'elles les échangent. On a ${}^tMQM = {}^tNQN = \lambda\mu Q$, de sorte que le multiplicateur est $\lambda\mu$ dans les deux cas alors qu'on a $\det M = \lambda\mu$ et $\det N = -\lambda\mu$.

3.3 Les propriétés de transitivité

Dans ce paragraphe, on aborde les propriétés de transitivité des différents sous-groupes de $GO(q^*)$ sur $(E^*)^n$, c'est-à-dire sur les équations de droites, ou, ce qui revient au même, sur les axes gradués, voir 2.2.8. Comme toujours dans ces questions, les résultats font le lien entre la transitivité et les invariants et ils feront l'objet d'une relecture au chapitre 8. On verra qu'il y a quelques subtilités, notamment au niveau des signes qui motivent l'introduction des divers groupes rencontrés ci-dessus. Les résultats de cette section seront utilisés au chapitre 6 dans la détermination de l'espace des n -uplets de droites et les difficultés de signe disparaîtront dans le passage des équations aux droites.

3.3.1 Les isométries positives

On commence par le cas le plus simple, celui des isométries positives. Dans ce cas, voir 3.1.13, on détient trois types invariants absolus⁷ : les produits scalaires $\varphi^*(A, B)$ (dont les $q^*(A)$), les crochets $[A, B, l]$ et les crochets $[A, B, C]$.

3.3.1 Théorème. *Soient A_1, \dots, A_n et B_1, \dots, B_n deux n -uplets d'éléments de $E^* - L$. On suppose que les images des A_i dans E^*/L ne sont pas toutes colinéaires (c'est-à-dire que les droites d'équations A_1, \dots, A_n ne sont pas toutes parallèles).*

Il existe $u \in O^{o+}(q^)$ tel que $u(A_i) = B_i$ pour tout i si et seulement si l'on a les conditions suivantes :*

- $\varphi^*(B_i, B_j) = \varphi^*(A_i, A_j)$ pour tous les couples (i, j) avec $1 \leq i \leq j \leq n$,
- $[B_i, B_j, B_k] = [A_i, A_j, A_k]$ pour tous (i, j, k) avec $1 \leq i < j < k \leq n$,
- $[B_i, B_j, l] = [A_i, A_j, l]$ pour tous les couples (i, j) avec $1 \leq i < j \leq n$.

Démonstration. Les conditions sont nécessaires en vertu de 3.1.13.

Pour la réciproque, on note d'abord que si les A_i vérifient la condition sur les directions d'équations (c'est-à-dire si les droites associées aux A_i ne sont pas toutes parallèles), il en est de même des B_i . En effet, le parallélisme de deux droites se traduit en termes des produits et carrés scalaires (voir 2.1.10). On note aussi que le résultat est immédiat pour $n = 1$ en complétant A_1 en une base orthogonale normalisée A_1, A_2, l de E^* , et de même pour B_1 .

Soient $\overline{A_i}$ et $\overline{B_i}$ les images des A_i, B_i dans E^*/L . On peut supposer par exemple que $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ sont indépendants. On a les formules $\varphi_n^*(\overline{A_i}, \overline{A_j}) =$

7. Que l'on reliera plus loin respectivement aux cosinus des angles, à leurs sinus et aux aires.

$\varphi^*(A_i, A_j)$ pour tous i, j (voir 2.1.19) et $[\overline{A_i}, \overline{A_j}] = [A_i, A_j, l]$ (voir 2.2.18), et de même avec les B_i . Comme la forme induite q_n^* est anisotrope on peut appliquer 1.3.4 et il existe $\bar{u} \in O^+(q_n^*)$ telle que l'on ait $\bar{u}(\overline{A_i}) = \overline{B_i}$ pour tout i . On relève \bar{u} en $u \in O^{\circ+}(q^*)$ (voir 3.2.3 ou 3.1.11) et l'on pose $B'_i = u(A_i)$. On a alors $B'_i = B_i + \gamma_i l$ pour tout i . On considère une translation t_x de vecteur $x \in E_\infty$. Il en existe une qui envoie B'_1 sur B_1 et B'_2 sur B_2 . En effet, on a $t_x(f) = f - f(x)l$ (voir 3.2.4) et il suffit donc de trouver $x \in E_\infty$ vérifiant $B'_1(x) = \gamma_1$ et $B'_2(x) = \gamma_2$. Comme on a $(E_\infty)^* \simeq E^*/L$, un tel x existe (les formules ci-dessus⁸ le définissent comme un élément de $(E_\infty)^{**}$, donc de E_∞).

On est ainsi ramené au cas où l'on a $B'_1 = B_1$ et $B'_2 = B_2$ et il reste à montrer que l'on a aussi $B'_i = B_i$ pour $i \geq 3$. Mais, on a $[A_1, A_2, A_i] = [B_1, B_2, B_i]$ par hypothèse et $[A_1, A_2, A_i] = [B_1, B_2, B'_i]$ par le sens direct du théorème. Comme on a $B'_i = B_i + \gamma_i l$, on trouve $\gamma_i[B_1, B_2, l] = 0$ et, comme $\overline{B_1}, \overline{B_2}$ sont indépendants, on a $\gamma_i = 0$ comme souhaité.

3.3.2 Remarques. 1) Le théorème est en défaut si les $\overline{A_i}$ sont toutes colinéaires⁹, c'est-à-dire si les droites d'équations A_i sont toutes parallèles. En effet, dans ce cas, les crochets $[A_i, A_j, A_k]$ sont tous nuls, de sorte que la condition qui les fait intervenir est vide, alors que les autres ne donnent des indications que sur les directions des droites. On a un contre-exemple explicite très simple avec $A_1 = B_1 = e_1^*$, $A_2 = e_1^* + l$ et $B_2 = e_1^* + 2l$, voir aussi 5.2.7. Pour un théorème alternatif, voir 3.5.5.

2) En revanche, le théorème est vrai si l'on a un "quadrillage", c'est-à-dire des droites admettant seulement deux directions. Dans ce cas, si les droites d'équations A_i, A_j sont dans une direction et A_k dans l'autre, l'invariant $[A_i, A_j, A_k]$ joue le rôle d'une distance orientée entre A_i et A_j , cf. 5.2.7.

3.3.2 Les isométries de signe quelconque

On passe maintenant au cas des isométries de signe quelconque. C'est là que les questions de signe deviennent importantes car certains invariants cessent d'être absolus, comme le montre 3.1.13.

Il y a, pour les éléments de $\widehat{O^\circ(q^*)}$, quatre couples de signes ($\det u, \lambda(u)$) ou $(\epsilon(u), \lambda(u))$ et l'on peut donner un énoncé de transitivité pour chaque variante (voir exercice 3.5.6). On donne ici le plus simple des énoncés, qui n'utilise comme invariants que les produits scalaires et les carrés des crochets.

8. Le lecteur sceptique écrira le système de deux équations linéaires correspondant.

9. En fait, le théorème de transitivité ci-dessus est une étape du calcul du quotient de l'espace des n -uplets de formes par le groupe des isométries, voir 6.1.1, et l'on sait que ce calcul n'est facile que génériquement, voir [Mum65].

En contrepartie, le résultat nécessite vraiment d'utiliser le groupe $\widehat{O^\circ(q^*)}$ des isométries spinorielles :

3.3.3 Corollaire. *Soient A_1, \dots, A_n et B_1, \dots, B_n deux n -uplets d'éléments de $E^* - L$. On suppose que trois au moins des directions des droites d'équations A_i sont différentes. Il existe $u \in \widehat{O^\circ(q^*)}$ tel que $u(A_i) = B_i$ pour tout i si et seulement si on a :*

- $\varphi^*(B_i, B_j) = \varphi^*(A_i, A_j)$ pour tous les couples (i, j) avec $1 \leq i \leq j \leq n$,
- $[B_i, B_j, B_k]^2 = [A_i, A_j, A_k]^2$ pour tous (i, j, k) avec $1 \leq i < j < k \leq n$.

Démonstration. Notons qu'on a aussi les conditions $[A_i, A_j, l]^2 = [B_i, B_j, l]^2$ en raison de la formule "de Lagrange" (voir 2.2.24.2). On a donc $[B_i, B_j, l] = \epsilon_{ij}[A_i, A_j, l]$ avec $\epsilon_{ij} = \pm 1$. De plus, la formule (1) de 2.2.24 montre que tous les ϵ_{ij} sont égaux. Quitte à commencer par appliquer un élément u de $O^\circ(q^*)$ vérifiant $\epsilon(u) = \det u = -1$ on peut supposer que tous les ϵ_{ij} sont égaux à 1.

On commence par traiter le cas $n = 3$. On a, en plus des conditions précédentes, $[A_1, A_2, A_3] = \pm[B_1, B_2, B_3]$. Si le signe est $+$, on peut appliquer 3.3.1 et on a gagné. Si c'est $-$, on applique $-\text{Id}$ (qui est dans $\widehat{O^\circ(q^*)}$, c'est ici qu'on utilise ce groupe) et on est ramené au cas précédent car les produits scalaires ne changent pas, pas plus que les crochets $[A_i, B_i, l]$.

Passons au cas général. Nous allons prouver le résultat dans le cas où la famille de droites d'équations A_i contient un triangle (c'est-à-dire trois droites non deux à deux parallèles et non trois à trois concourantes). Le seul cas qui restera à traiter est celui des droites concourantes, qui est facile et laissé au lecteur (on se ramène au cas $A_1 = B_1, A_2 = B_2$).

On peut supposer, par exemple, que les droites d'équations A_1, A_2, A_3 forment un triangle. Le cas $n = 3$ montre que, quitte à appliquer un élément de $\widehat{O^\circ(q^*)}$, on peut supposer $A_1 = B_1, A_2 = B_2$ et $A_3 = B_3$ et il reste à voir qu'on a aussi $A_i = B_i$ pour $i > 3$. On écrit $A_i = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma l$ et de même pour B_i avec α', β', γ' et il s'agit de voir qu'on a $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$. On a $\varphi^*(A_1, A_i) = \alpha \varphi^*(A_1, A_1) + \beta \varphi^*(A_1, A_2)$ et $\varphi^*(A_2, A_i) = \alpha \varphi^*(A_1, A_2) + \beta \varphi^*(A_2, A_2)$ et de même avec α', β' . Comme les droites d'équations A_1, A_2 ne sont pas parallèles, ce système est de rang 2 (voir 2.1.10) et on en déduit $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$. L'un des nombres α, β est non nul et on peut supposer que c'est β . On a par ailleurs $[A_1, A_2, A_i] = \gamma[A_1, A_2, l]$, et de même avec les B_i , ce qui montre l'égalité $\gamma^2 = \gamma'^2$. Enfin, on a $[A_1, A_3, A_i] = -\beta[A_1, A_2, A_3] + \gamma[A_1, A_3, l]$ et de même avec B_i . Comme les carrés de ces quantités sont égaux, et comme les crochets $[A_1, A_2, A_3] = [B_1, B_2, B_3]$ et $[A_1, A_3, l] = [B_1, B_3, l]$ sont non nuls, on en déduit $\beta\gamma = \beta\gamma'$, donc aussi $\gamma = \gamma'$ puisque β est non nul.

Deux contre-exemples

3.3.4 Remarques. 1) L'exemple suivant ("du rectangle") montre que la condition sur l'existence d'au moins trois directions de droites distinctes¹⁰ est essentielle. On choisit une base orthogonale e_1^*, e_2^*, l de E^* et on prend $A_1 = B_1 = e_1^*$, $A_2 = B_2 = e_2^*$, $A_3 = B_3 = e_1^* + l$, $A_4 = e_2^* + l$ et $B_4 = e_2^* - l$. On vérifie que les invariants (produits scalaires et carrés des crochets) sont bien égaux pour les A_i et les B_i . Pourtant, il n'y a pas d'élément $u \in \widehat{O^\circ(q^*)}$ qui envoie les A_i sur les B_i . En effet, avec les trois premiers A_i on voit que u devrait être l'identité, mais alors on a $u(A_4) \neq B_4$. Bien entendu, il y a une transformation qui fait le travail sur les **droites**, il s'agit de la réflexion d'axe (e_1^*) , mais, sur les axes, elle transforme notamment e_2^* en son opposé.

2) Le second contre-exemple montre que le corollaire n'est pas vrai avec le groupe $O^\circ(q^*)$ et justifie donc l'introduction du revêtement $\widehat{O^\circ(q^*)}$. On prend $A_1 = B_1 = e_1^*$, $A_2 = B_2 = e_2^*$, $A_3 = e_1^* + e_2^* + l$ et $B_3 = e_1^* + e_2^* - l$. On vérifie aussitôt que les invariants sont les mêmes pour les A_i et les B_i . Cependant, si u est dans $O^\circ(q^*)$, il vérifie $u(l) = l$ et s'il envoie A_1 sur B_1 et A_2 sur B_2 c'est l'identité de E^* . Mais alors, il n'envoie pas A_3 sur B_3 . Attention, il existe évidemment un élément qui échange les **droites** correspondantes,

c'est la symétrie σ_o de centre $o = (0, 0, 1)$, de matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mais

il s'agit ici de transitivité sur les formes linéaires, donc sur les **axes** et σ_o change le sens des axes. Ici, l'élément de $\widehat{O^\circ(q^*)}$ qui fait le travail demandé

est le "changeur de spin" : $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3.3.3 Les similitudes

Rappelons que, sous l'action de $\widehat{GO^\circ(q^*)}$, les produits scalaires sont changés par μ , les crochets $[A, B, l]$ par $\lambda \det = \epsilon \mu$ et les crochets $[A, B, C]$ par $\det = \epsilon \lambda \mu$. On a (entre autres) les résultats suivants :

3.3.5 Corollaire. Soient A_1, \dots, A_n et B_1, \dots, B_n deux n -uplets d'éléments de $E^* - L$. On suppose que trois au moins des directions des droites d'équations A_i sont différentes.

1) Il existe $u \in \widehat{GO^\circ(q^*)}$ tel que $u(A_i) = B_i$ pour tout i si et seulement si il existe $\mu \in k^*$ vérifiant :

10. On notera que c'est une condition de généralité un peu plus forte que celle du résultat précédent.

- $\varphi^*(B_i, B_j) = \mu\varphi^*(A_i, A_j)$ pour tous les couples (i, j) avec $1 \leq i \leq j \leq n$,
 - $[B_i, B_j, B_k]^2 = \mu^2[A_i, A_j, A_k]^2$ pour tous (i, j, k) avec $1 \leq i < j < k \leq n$.
- 2) Il existe $u \in GO^{\circ+}(q^*) \simeq \text{Sim}^+(X)$ tel que $u(A_i) = B_i$ pour tout i si et seulement si il existe $\mu \in k^*$ vérifiant :
- $\varphi^*(B_i, B_j) = \mu\varphi^*(A_i, A_j)$ pour tous les couples (i, j) avec $1 \leq i \leq j \leq n$,
 - $[B_i, B_j, B_k] = \mu[A_i, A_j, A_k]$ pour tous (i, j, k) avec $1 \leq i < j < k \leq n$,
 - $[B_i, B_j, l] = \mu[A_i, A_j, l]$ pour tous les couples (i, j) avec $1 \leq i < j \leq n$.

Démonstration. La condition $q^*(B_i) = \mu q^*(A_i)$ assure que le multiplicateur est une norme (voir chapitre 1), ce qui permet d'appliquer une similitude de multiplicateur μ^{-1} et d'invariants $\epsilon = \lambda = 1$. On est alors ramené à l'un des deux résultats précédents.

3.3.6 Remarques. 1) Si A, B sont deux éléments de $E^* - L$ il existe toujours $u \in GO^{\circ+}(q^*)$ tel que $u(A) = B$. (Compléter A en une base orthogonale A, A', l et de même pour B .)

2) Le lecteur vérifiera que, dans le cas 2), la condition de position générale peut être affaiblie au cas où les droites ne sont pas toutes parallèles.

3.4 Les involutions

Dans ce paragraphe, nous montrons que les involutions de la géométrie euclidienne sont bien celles que chacun attend : les symétries par rapport aux droites et aux points, qui vont jouer un rôle crucial dans nombre de phénomènes géométriques, notamment ce qui touche aux notions de médiatrices, bissectrices, médianes. Ce résultat, qui n'est évidemment pas une découverte, confirme cependant la pertinence du cadre (E^, q^*) pour décrire les phénomènes euclidiens et montre quelles adaptations sont nécessaires lorsqu'on utilise cette entrée. En particulier, du côté des droites, c'est-à-dire de E^* , les deux types d'involutions vont apparaître sous des formes différentes (contrairement à ce qui se passe dans le cas non euclidien).*

Les notations sont toujours celles de 1.2.1.

3.4.1 Un lemme de dualité

Le lemme technique suivant sera utilisé dans la preuve de 3.4.5 :

3.4.1 Lemme. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, E^* son dual, $u \in GL(E^*)$ et soit ${}^t u^{-1} \in GL(E)$. On suppose que E^* est somme directe de deux sous-espaces propres V^* et W^* relatifs à deux valeurs propres distinctes λ et μ de u . Soient V et W les orthogonaux de V^* et W^* au sens de la dualité :*

$V = \{x \in E \mid \forall f \in V^*, f(x) = 0\}$. Alors, V et W sont les sous-espaces propres de ${}^t u^{-1}$ relatifs à μ^{-1} et λ^{-1} respectivement et on a $E = V \oplus W$.

Démonstration. Soit $x \in V$. On considère $y = {}^t u^{-1}(x) - \mu^{-1}x$. Il s'agit de montrer que y est nul et il suffit pour cela de montrer qu'on a $f(y) = 0$ pour tout $f \in E^*$, ou simplement, vu la somme directe, pour $f \in V^*$ et $f \in W^*$. Si f est dans V^* on a $f(y) = f({}^t u^{-1}(x)) - \mu^{-1}f(x) = (u^{-1}(f))(x) - \mu^{-1}f(x)$, par définition de la transposée. Comme f est propre pour u relativement à λ , il l'est pour u^{-1} relativement à λ^{-1} et on a alors $f(y) = (\lambda^{-1} - \mu^{-1})f(x)$, et ce nombre est nul, car $f(x)$ l'est, puisque x est dans $V = (V^*)^\perp$. Si f est dans W^* le début du calcul est analogue, mais f est propre pour μ^{-1} : $f(y) = f({}^t u^{-1}(x)) - \mu^{-1}f(x) = (u^{-1}(f))(x) - \mu^{-1}f(x) = (\mu^{-1} - \mu^{-1})f(x) = 0$.

On a montré ainsi que V est inclus dans le sous-espace propre relatif à μ^{-1} . La même chose vaut pour W et la conclusion n'est plus qu'une affaire de dimensions.

3.4.2 Involutions de $PGO(q^*)$

Nous avons vu dans la Partie III, ??, que dans le cas non dégénéré, toute involution \bar{u} de $PGO(q)$ provient d'une involution de $O(q)$. Le même résultat vaut encore ici, mais la démonstration donnée alors ne s'applique plus car $PGO(q^*)$ n'est pas égal à $PO(q^*)$.

3.4.2 Proposition. *Soit $u \in GO^\circ(q^*)$ une similitude telle que \bar{u} soit une involution de $PGO(q^*)$. Alors u est une involution et elle est dans $O(q^*)$.*

Démonstration. Dire que \bar{u} est une involution signifie qu'on a $u^2 = \lambda \text{Id}$ avec $\lambda \in k^*$. Mais, comme u est dans $GO^\circ(q^*)$, on a $u(l) = l$ (où l est l'équation de la droite à l'infini). On a donc $u^2(l) = l = \lambda l$, d'où $\lambda = 1$. Il en résulte que u est une isométrie. Cela vient par exemple de 1.2.26. En effet, on a $u(z) = az + b$ (resp. $u(z) = a\bar{z} + b$) et on vérifie que u est involutive si et seulement si on a $a = \pm 1$ (resp. $N(a) = 1$), ce qui implique que u est une isométrie.

3.4.3 Involutions orthogonales

Nous sommes donc ramenés à déterminer les involutions qui sont des isométries relativement à q^* . Dans le cas d'une forme q non dégénérée sur un espace vectoriel de dimension 3, les involutions de $O(q)$ distinctes de $-\text{Id}$ sont les réflexions orthogonales et leurs opposées, qui donnent naissance aux mêmes homographies : en géométrie non euclidienne, il n'y a, au fond, qu'un

type de symétries, qui sont à la fois axiales et centrales¹¹, voir Partie IV ?? . Nous allons montrer que, si les réflexions sont encore présentes dans le cas dégénéré, il existe un deuxième type d'involutions et comprendre d'une autre manière le fait qu'en géométrie euclidienne il y a deux types de symétries radicalement différents.

On rappelle qu'en caractéristique différente de 2, une involution admet deux sous-espaces propres relatifs aux valeurs propres +1 et -1 et que l'espace en est somme directe. De plus, si l'involution est distincte de $\pm\text{Id}$, ces sous-espaces sont non nuls.

3.4.3 Lemme. *Soit u une involution de E^* , distincte de $\pm\text{Id}$. Soient V^* et W^* les sous-espaces propres de E^* relatifs aux valeurs propres 1 et -1 de u . On suppose que l'on a $\dim V^* = 2$ et $\dim W^* = 1$. Soit g un élément non nul de W^* . Il existe $o \in E$, vérifiant $g(o) = 1$ et $f(o) = 0$ pour tout $f \in V^*$ et on a, pour tout $f \in E^*$, $u(f) = f - 2f(o)g$.*

Si on a $\dim V^ = 1$ et $\dim W^* = 2$, l'involution $-u$ est de la forme précédente.*

Démonstration. Soit $\theta \in E^{**}$ la forme linéaire définie par $\theta(f) = 0$ pour $f \in V^*$ et $\theta(g) = 1$. En vertu de l'isomorphisme entre E et son bidual, il existe $o \in E$ tel que $\theta(f) = f(o)$ pour tout f et ce vecteur a les propriétés requises. De plus, si on pose $u'(f) = f - 2f(o)g$, on vérifie que u' est linéaire et qu'elle est égale à Id (resp. $-\text{Id}$) sur V^* (resp. W^*), donc égale à u .

3.4.4 Corollaire. *Avec les notations de 3.4.3, l'involution u est orthogonale pour q^* dans les deux cas suivants :*

- 1) *Si g est non isotrope et si on a, pour tout $f \in E^*$, $f(o) = \frac{\varphi^*(f, g)}{q^*(g)}$.*
- 2) *Si g est dans le noyau de q^* .*

Démonstration. On calcule $\varphi^*(u(f), u(g)) = -\varphi^*(f, g) + 2f(o)q^*(g)$. Dire que u est une isométrie pour q^* implique¹² que cette quantité est égale à $\varphi^*(f, g)$, donc qu'on a, pour tout $f \in E^*$, $f(o)q^*(g) = \varphi^*(f, g)$. Le résultat en découle immédiatement.

Le théorème suivant fait le bilan des involutions du plan euclidien et montre que les deux types d'involutions correspondent aux deux positions possibles de W^* , non isotrope ou égal au noyau de q^* :

11. Même si, en géométrie hyperbolique réelle, on peut les distinguer selon la position du centre et de l'axe.

12. Le lecteur vérifiera que la réciproque est vraie.

3.4.5 Théorème-Définition.

1) Soit $g \in E^*$ une forme non nulle et non isotrope. On pose, pour $f \in E^*$:

$$\tau_g(f) = f - 2 \frac{\varphi^*(f, g)}{q^*(g)} g.$$

L'application τ_g est linéaire, c'est une involution, elle est dans $O(q^*)$, change g en $-g$ et fixe exactement les points de g^\perp . En particulier, τ_g fixe l donc est dans $GO^\circ(q^*)$. C'est la **réflexion** associée à g . L'application τ_g^\sharp est la **symétrie axiale** par rapport à la droite (affine) D d'équation g . On la note τ_D . Ce cas est caractérisé par la relation $\det u = -1$.

2) Soit o un vecteur de E vérifiant $l(o) = 1$. On pose, pour $f \in E^*$, $s_o(f) = -f + 2f(o)l$. L'application s_o est linéaire, c'est une involution, elle est dans $O(q^*)$, elle fixe l et est égale à $-\text{Id}$ sur l'orthogonal de o (au sens de la dualité). On l'appelle **renversement** associé à o . L'image de o dans $\mathbf{P}(E)$ est un point¹³ \bar{o} de X et s_o^\sharp est la **symétrie centrale** de centre \bar{o} . On la note $\sigma_{\bar{o}}$, voire σ_o . Ce cas est caractérisé par la relation $\det u = 1$.

3) Toute involution de $PGO(q^*)$ est de l'une des formes précédentes, donc induit dans le plan X une réflexion ou une symétrie centrale.

Démonstration. 1) Il est clair que τ_g est linéaire et on vérifie qu'elle a l'effet annoncé sur g et g^\perp . L'orthogonal g^\perp est de dimension 2. En effet, c'est le noyau d'une forme linéaire, de sorte qu'il est de dimension ≥ 2 , et il ne rencontre pas (g) , donc il est de dimension < 3 . On a ainsi une somme directe orthogonale $E^* = (g) \perp g^\perp$, ce qui montre à la fois que τ_g est une involution et que c'est une isométrie. Comme l est dans le noyau de q^* , il est orthogonal à g donc fixe par τ_g .

L'examen des valeurs propres montre qu'on a $\det \tau_g = -1$. Comme τ_g fixe l , il en résulte $\det \tau_g^\sharp = -1$ (voir par exemple la forme matricielle 3.1.11). En vertu de 3.4.1, la droite D est fixe par τ_g^\sharp . Il résulte alors de 1.2.25 que τ_g^\sharp est la symétrie d'axe D .

2) Il est clair que s_o est linéaire et qu'elle fixe l et on vérifie que c'est une involution. Comme l est dans le noyau de q^* , on a bien $q^*(s_o(f)) = q^*(f)$. Enfin, si on a $f(o) = 0$, il est clair que $s_o(f)$ vaut $-f$. Cela signifie, avec les notations de 3.1.11, qu'on a $M = -\text{Id}$, donc aussi $M^\sharp = {}^t M^{-1} = -\text{Id}$ (voir la preuve de 3.2.3). Il en résulte que s_o^\sharp est une symétrie centrale en vertu de 1.2.25 et son point fixe est \bar{o} d'après 3.4.1.

3) Soit \bar{u} une involution de $PGO(q^*)$. En vertu de 3.4.2 on peut supposer que u est une involution de $GO^\circ(q^*)$. On applique alors 3.4.3 et 3.4.4. Comme

13. On notera souvent abusivement o à la fois le vecteur et le point.

l est fixe, il n'y a que deux cas possibles : soit le sous-espace propre correspondant est un plan et on a une réflexion, soit c'est une droite propre, c'est alors $-u$ qui est dans le second cas de 3.4.4 et on a une symétrie centrale.

3.4.4 Expression des involutions dans E

Les expressions analytiques des involutions données en 3.4.5 valent pour des formes linéaires. Bien entendu, nous aurons surtout besoin de connaître la valeur de ces expressions sur les vecteurs de E (qui donneront les images des points de $\mathbf{P}(E)$ et de X). Pour les descriptions matricielles des involutions, voir exercice 3.5.7.

3.4.6 Proposition.

1) Soit $g \in E^*$ une forme linéaire non isotrope, D la droite affine d'équation g , n_g le vecteur normal à D (voir 2.1.20). On a la formule, pour $x \in E$:
 ${}^t\tau_g^{-1}(x) = x - 2\frac{g(x)}{q^*(g)}n_g$. Cette formule donne à la fois, lorsqu'on la restreint à $E - E_\infty$, la symétrie (affine) τ_D et, lorsqu'on la restreint à E_∞ , l'application linéaire associée :

$$\tau_D(x) = x - 2\frac{g(x)}{q^*(g)}n_g \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\tau_D}(\vec{x}) = \vec{x} - 2\frac{g(\vec{x})}{q^*(g)}n_g.$$

2) Soit $o \in E$ un vecteur vérifiant $l(o) = 1$. On a la formule, pour $x \in E$,
 ${}^t s_o^{-1}(x) = 2l(x)o - x$. Cette formule donne, lorsqu'on la restreint à $E - E_\infty$ et qu'on impose $l(x) = 1$, la symétrie centrale¹⁴ : $\sigma_o(x) = 2o - x$. Lorsqu'on la restreint à E_∞ elle montre que l'application linéaire associée à une symétrie centrale est $-\text{Id}$.

Démonstration. 1) Il suffit de montrer que, si f est une forme linéaire quelconque, elle a même effet sur les deux membres de l'égalité. Or, on a, par définition de la transposée : $f({}^t\tau_g^{-1}(x)) = (\tau_g^{-1}(f))(x) = (\tau_g(f))(x)$ puisque τ_g est une involution. En vertu de la définition de $\tau_g(f)$ donnée dans 3.4.5 cette quantité vaut donc $f(x) - 2\frac{\varphi^*(f, g)}{q^*(g)}g(x)$. Par ailleurs, le vecteur normal n_g est caractérisé par la relation $f(n_g) = \varphi^*(f, g)$. On en déduit l'égalité cherchée.

2) Comme s_o est une involution, il suffit de noter qu'on a, pour tout $f \in E^*$, $f({}^t s_o(x)) = s_o(f)(x) = -f(x) + 2f(o)l(x)$.

3.4.7 Remarque. Le lecteur n'aura pas manqué de noter que le statut du signe $-$ dans la formule donnée en 3.4.6.1 n'est pas le même selon que x

14. Notée σ_o au lieu de $\sigma_{\bar{o}}$ par abus de langage.

est, ou non, dans E_∞ . S'il y est, il s'agit simplement de la soustraction dans l'espace vectoriel \vec{X} associé à X . Sinon, il s'agit de l'opération extérieure par translation de \vec{X} sur X .

3.4.8 Remarque. L'expression analytique fait apparaître une différence notable entre les deux types d'involutions : les symétries centrales sont des isométries affines quelle que soit la forme quadratique q donnée sur $E_\infty = \vec{X}$ (q n'intervient pas dans leur expression), mais ce n'est pas vrai pour les symétries axiales.

3.4.5 Propriétés des involutions

La proposition suivante présente quelques propriétés des involutions¹⁵. Toutes sont bien connues, mais il nous a paru intéressant de montrer comment la double interprétation des transformations dans E et E^* permettait de jongler entre les propriétés des points et des droites :

3.4.9 Proposition.

- 1) Soit o un point de X . La symétrie centrale σ_o admet o pour unique point fixe, les seules droites stables par σ_o sont les droites passant par o , toute droite est transformée en une droite parallèle. Si σ_o échange a et b , le point o est sur (ab) .
- 2) Soit D une droite de X . La symétrie axiale τ_D a pour points fixes les points de D , les droites stables par τ_D sont D et les droites perpendiculaires à D .

Démonstration. Toutes ces propriétés sont des conséquences des formules données dans 3.4.5 et 3.4.6.

1) Rappelons qu'on note s_o la transformation de E^* (donc côté droites) et σ_o celle de X (côté points). Si les points o et a de X sont normalisés par $l = 1$, on a $\sigma_o(a) = 2o - a$, donc $\sigma_o(a) = a$ équivaut à $a = o$. Si a est distinct de o , cette formule montre aussi que o est sur la droite qui joint a et $b = 2o - a$. Côté droites, la formule $s_o(f) = -f + 2f(o)l$ montre que les droites d'équations f et $s_o(f)$ sont parallèles. Dire que la droite (affine) D d'équation f est stable signifie qu'on a $\lambda f = -f + 2f(o)l$. Comme f et l sont des formes indépendantes (l est l'équation de D_∞), on en déduit $f(o) = 0$, donc o est sur D .

2) Cette fois, les deux écritures sont τ_g (côté droites) et τ_D (côté points). On a, pour $x \in X$, $\tau_D(x) = x - 2\frac{g(x)}{q^*(g)}n_g$ où g est une équation de D .

15. Pour d'autres propriétés, voir exercices 3.5.8 et 3.5.9

Comme x n'est pas normalisé *a priori*, dire que x est fixe signifie qu'on a $\tau_D(x) = \lambda x$. Mais, comme n_g est dans E_∞ , x et n_g sont indépendants, ce qui impose $g(x) = 0$, donc $x \in D$.

Si la droite d'équation f est stable, on a $\tau_g(f) = \lambda f = f - 2\frac{\varphi^*(f, g)}{q^*(g)}g$. Il y a deux cas : ou bien f et g sont colinéaires, donc correspondent à la même droite, ou bien on a $\varphi^*(f, g) = 0$, ce qui correspond à l'orthogonalité.

3.4.6 Commutation

On sait que, dans un groupe quelconque, deux involutions commutent si et seulement si leur produit est une involution. Dans le cas présent on a le résultat plus précis suivant :

3.4.10 Proposition. *Soient $\tau_D, \tau_{D'}$ des symétries axiales et $\sigma_m, \sigma_{m'}$ des symétries centrales. On suppose $D \neq D'$ et $m \neq m'$. On a les résultats suivants :*

- 1) *Les symétries τ_D et $\tau_{D'}$ commutent si et seulement si D et D' sont perpendiculaires. Leur composée est alors la symétrie centrale par rapport au point d'intersection de D et D' .*
- 2) *Les symétries σ_m et $\sigma_{m'}$ ne commutent jamais.*
- 3) *Les symétries τ_D et σ_m commutent si et seulement si m est sur D . Leur composée est la symétrie d'axe Δ perpendiculaire à D en m .*

Démonstration. C'est essentiellement le principe de conjugaison, voir par exemple [Per96]. Traitons le premier cas. On a $s := \tau_D\tau_{D'} = \tau_{D'}\tau_D$ si et seulement si $u := \tau_D\tau_{D'}\tau_D^{-1} = \tau_{D'}$. Mais, u est une involution qui fixe $\tau_D(D')$, donc elle est égale à $\tau_{D'}$ si et seulement si D' est stable par τ_D , donc perpendiculaire à D (puisqu'on a supposé $D \neq D'$). Dans ce cas, la composée s est une involution, qui fixe le point d'intersection de D et D' . C'est une symétrie centrale car elle est de déterminant 1 dans $GO^\circ(q^*)$. (On peut aussi noter que s laisse stable les droites D et D' . Si c'était une réflexion, l'une de ces droites, disons D , serait fixe par s , donc par $\tau_{D'}$, ce qui n'est pas le cas.)

3.4.7 Comparaison avec les géométries non euclidiennes, deuxième épisode

L'entrée par les involutions révèle un certain nombre de différences entre la géométrie euclidienne et ses consœurs non euclidiennes, en particulier au niveau des symétries centrales. On renvoie à Partie IV Chapitre 1, §4 pour l'étude des involutions dans les cas hyperbolique et elliptique.

Une première différence est liée au théorème de Bachmann :

3.4.11 Proposition. 1) Soient τ_A, τ_B, τ_C trois réflexions. Alors le produit $\tau_A\tau_B\tau_C$ est une réflexion si et seulement si les droites A, B, C sont concourantes ou parallèles.

2) Soient $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ trois symétries centrales. Alors, le produit $\sigma_a\sigma_b\sigma_c$ est une symétrie centrale.

Démonstration. On écrit $\tau_A\tau_B\tau_C = \tau_D$ sous la forme $\tau_A\tau_B = \tau_D\tau_C$ et le point 1) résulte de 1.4.1. Pour le point 2), on utilise la caractérisation des symétries centrales vue en 3.4.5 : être l'identité sur L et induire $-\text{Id}$ sur E^*/L .

On voit que si le résultat est presque le même qu'en non euclidien dans le cas des réflexions, il est fondamentalement différent dans le cas des symétries centrales. On en a une autre preuve du côté des groupes engendrés, puisque celui engendré par les symétries centrales est anormalement petit :

3.4.12 Corollaire. L'ensemble des produits $\sigma_a\sigma_b$ est un sous-groupe distingué de $\text{Sim}(X)$ égal au groupe $T(X)$ des translations.

Démonstration. L'assertion sur distingué est claire en vertu du principe de conjugaison. Pour montrer qu'on a un sous-groupe, on peut utiliser la formule $\sigma_a\sigma_b = t_{\vec{2ba}}$, voir 1.4.1, qui donne l'assertion sur $T(X)$, ou raisonner directement. Pour cela, on regarde $\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d$ et on écrit $\sigma_c\sigma_d = \sigma_b\sigma_e$ en vertu du lemme suivant :

3.4.13 Lemme. Soient $a, b, c \in X$. Il existe un point d tel que $\sigma_a\sigma_b = \sigma_c\sigma_d$.

Démonstration. On regarde $\sigma_c\sigma_a\sigma_b$ et on applique 3.4.11. En termes de vecteurs, c'est simplement la relation $\vec{ab} = \vec{cd}$.

3.5 Exercices

3.5.1 Le produit semi-direct

3.5.1 Exercice. Montrer que si $u \in GO^\circ(q^*)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} I & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}$ où I est la matrice identité 2×2 et v un vecteur (v_1, v_2) de k^2 , l'application $u^\#$ est la translation de vecteur $-v$.

3.5.2 Exercice. On reprend les notations de 3.2.2 et 3.2.3.

1) Montrer que le noyau de Θ est isomorphe au groupe $T(X)$ des translations de X , donc au groupe additif de E_∞ et que, matriciellement, $\text{Ker } \Theta$ est formé des matrices $T(v) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}$, avec $T(v)T(v') = T(v + v')$.

2) On considère l'opération naturelle de $GO(q)$ sur E_∞ donnée par $s.v = s(v)$ et le produit semi-direct $E_\infty \rtimes GO(q)$ associé à cette opération, la loi de groupe étant donc donnée par $(v, s)(v', s') = (v + s(v'), ss')$, cf. [Per96]. Montrer que ce produit semi-direct est isomorphe à $GO^\circ(q^*)$. (On choisira un supplémentaire V de L dans E^* , et on associera à $(v, s) \in E_\infty \rtimes GO(q)$ l'élément $u \in GO^\circ(q^*)$ défini par $u(l) = l$ et $u(f) = {}^t s^{-1}(f) + {}^t s^{-1}(f)(v)l$ pour $f \in V$.) Décrire cet isomorphisme sur les matrices.

3.5.2 L'impertinence du groupe des isométries

3.5.3 Exercice. Le but de cet exercice est de montrer que le groupe $PO(q^*)$, image du groupe des isométries, n'est isomorphe ni à $\text{Is}(X)$, ni à $\text{Sim}(X)$ en général. On rappelle qu'un élément $u \in GO(q^*)$ s'écrit matriciellement sous la forme $u = \begin{pmatrix} U & 0 \\ v & \lambda \end{pmatrix}$, où U est une similitude relative à q_n^* , et que cet élément est dans $O(q^*)$ si et seulement si U est une isométrie.

1) On suppose que U est une isométrie. Montrer que l'image u^\sharp de u dans $\text{Sim}(X)$ est égale à $(u')^\sharp$ avec $u' = \lambda^{-1}u$ et que cet élément n'est une isométrie que si λ vaut ± 1 . En déduire que $PO(q^*)$ n'est pas isomorphe à $\text{Is}(X)$.

2) On suppose $k = \mathbf{R}$, montrer que $PO(q^*)$ est isomorphe à $\text{Sim}(X)$. (Utiliser encore $u' = \lambda^{-1}u$ et le fait que toutes les similitudes sont produits d'isométries et d'homothéties).

3) On suppose k quelconque. Montrer que l'image du groupe $PO(q^*)$ est le sous-groupe $\text{HI}(X)$ de $\text{Sim}(X)$ engendré par les isométries et les homothéties et que ce groupe est différent de $\text{Sim}(X)$ si le groupe des normes $N(K^*)$ n'est pas égal à $(k^*)^2$ (voir 1.2.18).

3.5.3 Normalisateur

3.5.4 Exercice. On suppose $k = \mathbf{R}$ et on se propose de montrer que le normalisateur N de $GO(q^*)$ dans $GL(E^*)$ est égal à $GO(q^*)$.

1) Soit u une similitude directe pour la forme $x^2 + y^2$. Montrer que u n'a pas de valeur propre réelle.

2) Soit h un élément de N . Montrer que $h^{-1}(l)$ est vecteur propre de tous les éléments $f \in GO(q^*)$. En déduire que l est un vecteur propre de h .

3) Montrer qu'on a $N = GO(q^*)$ (effectuer un calcul matriciel par blocs en utilisant la question précédente, 3.1.11 et 1.4.7).

3.5.4 Transitivité

3.5.5 Exercice. On reprend 3.3.1 dans le cas de n axes parallèles.

1) Soient $A, A' \in E^* - L$ deux équations de droites parallèles et soit D une forme quelconque, n'appartenant pas au sous-espace engendré par A et l . Montrer que la quantité $\delta(A, A') = \frac{[A, A', D]}{[A, D, l]}$ est bien définie, indépendante de D , et que c'est un invariant du couple (A, A') sous l'action de $O^{\circ+}(q^*)$.

2) Soient A_1, \dots, A_n et B_1, \dots, B_n des formes correspondant à des droites parallèles. Montrer qu'il existe $u \in O^{\circ+}(q^*)$ qui envoie A_i sur B_i si et seulement si on a $q^*(A_1) = q^*(B_1)$, $\varphi^*(A_1, A_j) = \varphi^*(B_1, B_j)$ et $\delta(A_1, A_j) = \delta(B_1, B_j)$ pour $1 \leq j \leq n$.

3.5.6 Exercice. On se propose de compléter les résultats de transitivité sur les formes ou les axes. On reprend les notations et les hypothèses de 3.3.3.

1) Montrer qu'il existe $u \in O^{\circ}(q^*)$ qui envoie les A_i sur les B_i si et seulement si on a les conditions suivantes : $\varphi^*(A_i, A_j) = \varphi^*(B_i, B_j)$ pour $1 \leq i < j \leq n$ et $[A_i, A_j, l][A_\alpha, A_\beta, A_\gamma] = [B_i, B_j, l][B_\alpha, B_\beta, B_\gamma]$ pour $1 \leq i < j \leq n$ et $1 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq n$.

2) Énoncer et démontrer deux énoncés analogues dans le cas du sous-groupe de $\widehat{O^{\circ}(q^*)}$ correspondant à $\epsilon = 1$ (avec, outre les produits scalaires, les invariants $[A, B, l]$ et $[A, B, C]^2$) et dans le cas du sous-groupe correspondant à $\epsilon = \lambda$ (avec $[A, B, C]$).

3) Énoncer et démontrer un résultat sur la transitivité des similitudes qui traite les cas non abordés dans 3.3.5.

3.5.5 Matrices des involutions

3.5.7 Exercice. On reprend les notations du paragraphe 3.4.2.

On choisit une base (e_1, e_2, e_3) de E et on suppose que dans la base duale (e_1^*, e_2^*, e_3^*) on a $q^*(\xi, \eta, \zeta) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$ et qu'on a choisi $l = e_3^*$. Si u est une involution de $GO^{\circ}(q^*)$, on a $u(e_3^*) = e_3^*$.

1) Montrer que la matrice U de u s'écrit alors par blocs $U = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}$ où σ est une matrice 2×2 qui est une isométrie pour q^* et h une forme linéaire sur k^2 vérifiant $h\sigma = -h$.

2) On suppose $\det u = -1$.

a) Montrer qu'il existe une base $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*$ de E^* , avec $\epsilon_1^* \in W^*$ et $\epsilon_2^* \in V^*$ et préciser la matrice de u dans cette base, ainsi que celle de ${}^t u^{-1}$ dans la base duale. Montrer que u^\sharp est une symétrie axiale.

b) On suppose $k = \mathbf{R}$. Montrer que, sur la base initiale, on a :

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \lambda(\cos \theta - 1) & \lambda \sin \theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'on peut prendre $\epsilon_1^* = (\cos \theta - 1, \sin \theta, \lambda(\cos \theta - 1))$ et $\epsilon_2^* = (\sin \theta, 1 - \cos \theta, 0)$ et écrire l'expression analytique de u^\sharp .

2) On suppose $\det u = 1$. Montrer que u a pour matrice

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

Préciser les sous-espaces $V^* = (e_3^*)$ et W^* , calculer ${}^tU^{-1}$ et montrer qu'on a, dans le plan affine X , $u^\sharp(x, y, 1) = (a - x, b - y, 1)$. Quel est le centre de la symétrie ?

3.5.6 Décomposition des isométries

Les résultats qui suivent sont bien connus (voir par exemple [MCD07]), mais, contrairement à l'exercice 1.4.1, leur objectif est de les montrer "dans E^* ", i.e. directement en termes de $PGO(q^*)$ sans revenir à l'espace affine X .

3.5.8 Exercice. Décomposition des translations Soit $a \in E_\infty$ un vecteur non nul et t_a la translation de vecteur a . On rappelle qu'on a $t_a(f) = f - f(a)l$ pour tout $f \in E^*$. Soit g une forme de direction orthogonale à a , c'est-à-dire telle que $n_g = a$.

1) Montrer que la composée $\tau_g \circ t_a$ est égale à $\tau_{g'}$ avec $g' = g + \frac{q^*(g)}{2}l$.

2) En déduire qu'une translation est produit de deux réflexions.

3.5.9 Exercice. Décomposition des isométries Dans cet exercice, on se propose de montrer que toute isométrie de $O^\circ(q^*) \simeq \text{Is}(X)$ est produit d'au plus trois réflexions.

1) Soit $u \in O^\circ(q^*)$. Montrer que u est une translation si et seulement si, pour tout $f \in E^*$, $u(f) - f$ est dans L .

2) On suppose que u n'est pas une translation. Il existe alors $f \in E^*$, $f \notin L$, tel que $g = u(f) - f \notin L$.

a) Montrer que $\tau_g \circ u$ fixe f .

b) On suppose que $\tau_g \circ u$ est une translation¹⁶. Montrer que u est produit d'au plus trois réflexions.

c) On suppose que $\tau_g \circ u$ n'est pas une translation. Montrer que $\tau_g \circ u$ est une réflexion (on utilisera la méthode précédente) et en déduire que u est produit d'au plus deux réflexions.

3) Conclure.

3.5.10 *Exercice.* Desargues, vecteurs et symétries centrales

1) Montrer que $abcd$ est un parallélogramme si et seulement si on a $\sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d = \text{Id}$.

2) En déduire que si $abb'a'$ et $bcc'b'$ sont des parallélogrammes, il en est de même de $acc'a'$ et retrouver la transitivité de l'égalité des vecteurs ($\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{bb'}$ et $\overrightarrow{bb'} = \overrightarrow{cc'}$ impliquent $\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{cc'}$) ainsi qu'une variante affine du théorème de Desargues sur les triangles (voir Partie I, ??).

16. Dans le dual, une translation a des points fixes!

Chapitre 4

Les droites remarquables du triangle

Dans ce chapitre en forme d'interlude nous abordons le problème de l'existence et du concours des droites remarquables du triangle. Bien entendu, il s'agit là de résultats familiers, mais nous les regardons ici avec un œil neuf, en considérant toujours la géométrie euclidienne de notre point de vue, qui consiste à partir de l'espace dual E^ et de la forme q^* , cette entrée étant vue comme le moyen de comparer la géométrie euclidienne aux géométries non euclidiennes. On verra que cela amène un renversement de l'ordre des résultats par rapport à la situation du collège : les bissectrices et les hauteurs, qui sont des notions directement liées aux droites, sont traitées en premier et il y a peu de différence avec le cas non euclidien, le cas des médiatrices et des médianes étant un peu plus difficile. En vérité, comme dans la partie IV, ce chapitre est un chapitre de propagande, voire de contre-propagande. En effet, on verra que l'approche adoptée ici, qui lie intimement l'algèbre et la géométrie selon le vieux rêve de Leibniz, et qui était tellement efficace en géométrie non euclidienne, se révèle parfois assez lourde et malcommode, ce qui nous conduira peut-être, à la fin de la boucle, à revenir à un traitement ... euclidien de la géométrie euclidienne.*

*Une remarque importante s'inscrit dans le droit fil de nos préoccupations concernant l'interprétation des théorèmes comme des relations entre invariants : on verra que **tous** les résultats de ce chapitre, qu'il s'agisse du concours des droites remarquables ou même de la propriété de la droite d'Euler, sont des avatars de relations triviales du type "relation de Chasles" : $(B - C) + (C - A) + (A - B) = 0$.*

On reprend les notations des chapitres précédents : l'espace vectoriel E , de dimension 3, son dual E^* , la forme parabolique q^* sur E^* , le sous-espace E_∞ de E et la droite D_∞ associée, l'espace affine $X = \mathbf{P}(E) - D_\infty$, la forme q associée à q^* sur E_∞ , les crochets et l'équation l de la droite D_∞ .

Dans ce qui suit on appelle **triangle**, et on note abc , la donnée de trois points a, b, c de X , non alignés. Il revient au même, et nous préférons souvent cette approche ici, de se donner les trois droites non concourantes $A = (bc)$, $B = (ca)$ et $C = (ab)$. Dans tout ce qui suit, on utilisera l'abus de langage habituel qui consiste à confondre une droite et son équation. Cet abus de langage est innocent car les droites vivent dans un espace projectif. On utilisera aussi, avec plus de prudence, l'abus de langage consistant à confondre les points et les vecteurs de E . Là, comme les points vivent dans le plan affine, les choses à prendre avec des pincettes.

En effet, si l'on a des points de X relevés dans E en a, b, c , les droites (bc) , (ca) et (ab) sont définies par les équations $A = b \wedge c$, $B = c \wedge a$ et $C = a \wedge b$ et un changement sur les représentants des points ne fait que multiplier ces équations par un scalaire, ce qui est sans inconvénient. Si on part, au contraire, des droites d'équations A, B, C , on obtient les points $a = B \wedge C$, $b = C \wedge A$ et $c = A \wedge B$, mais dans beaucoup de situations il faudra normaliser ces points pour avoir $l(a) = l(b) = l(c) = 1$. Comme on a $l(A \wedge B) = [l, A, B]$, cela donnera les points :

$$a = \frac{B \wedge C}{[l, B, C]}, \quad b = \frac{C \wedge A}{[l, C, A]}, \quad c = \frac{A \wedge B}{[l, A, B]}.$$

4.1 Bissectrices

4.1.1 Le concours des bissectrices

La définition des bissectrices et la preuve de leur concours sont pratiquement identiques à celles du cas non euclidien et la raison en est simple : les bissectrices sont des droites et sont axes de symétrie de deux droites, donc naturelles avec notre entrée. La recette fondamentale est donnée par 3.2.1 : si on a $u \in GO(q^*)$, il induit $u^\sharp = {}^t u^{-1}$ sur le plan affine X et l'action de u^\sharp sur les droites de X est donnée par u .

On a la proposition suivante :

4.1.1 Proposition-Définition. *Soient A, B deux droites affines de $\mathbf{P}(E)$ distinctes, que l'on considère aussi comme des points de $\mathbf{P}(E^*)$. On suppose qu'on a $q^*(A) = q^*(B)$ dans k^*/k^{*2} . Cette condition est automatique sur \mathbf{R} et elle permet de supposer $q^*(A) = q^*(B)$, quitte à changer de représentants de A et B .*

1) On suppose A et B non parallèles et on note o leur point d'intersection. Il y a exactement deux droites D^+ et D^- telles que les symétries d'axes D^+ et D^- échangent A et B . Les droites D^+ et D^- sont perpendiculaires en o . Des représentants de D^+ et D^- sont $A+B$ et $A-B$. Les droites D^+ et D^- sont les **bissectrices** de A et B .

2) On suppose A et B parallèles. Quitte à changer de représentants, on peut supposer $A = B + l$. Il y a une unique droite D^+ telle que la symétrie d'axe D^+ échange A et B . Cette droite est parallèle à A et B . On l'appelle **parallèle équidistante** à A et B . Elle a pour représentant $A + B$. On appelle **bissectrices généralisées** de A et B les droites D^+ et $D^- = A - B = l$.

Démonstration. Il n'y a presque rien à changer au raisonnement effectué dans la partie IV. Rappelons que la symétrie euclidienne d'axe D (distincte de D_∞), provient de la réflexion τ_D définie sur E^* par la formule :

$$\tau_D(D') = D' - 2 \frac{\varphi^*(D, D')}{q^*(D)} D.$$

Cette réflexion change D en $-D$ et fixe les formes D' orthogonales à D . Dans la situation où l'on a $q^*(A) = q^*(B)$, si l'on pose $D = A + B$, comme $A - B$ est orthogonal à $A + B$, on voit que τ_D fixe $A - B$, change $A + B$ en $-A - B$, donc échange A et B . Le raisonnement avec $D = A - B$ est analogue.

Ce raisonnement vaut si les droites $A + B$ et $A - B$ ne sont pas isotropes, c'est-à-dire ici égales à la droite de l'infini. Ce cas correspond au parallélisme (cf. 2.1.10). On notera que dans ce cas on a automatiquement $q^*(A) = q^*(B)$.

4.1.2 Remarque. Attention, sur un corps quelconque, il n'y a pas toujours de bissectrices, pire, le groupe des isométries n'est pas transitif sur les droites en général, cf. 5.2.2. Par exemple, si $k = \mathbf{Q}$ avec $q^* = u^2 + v^2$, les droites $x = 0$ et $x = y$ n'ont pas de bissectrices. En revanche, on a vu que le groupe $\text{Sim}(X)$ est transitif sur les droites, voir 1.2.28.

Comme promis, le concours des bissectrices est maintenant évident, avec la même preuve qu'à la partie IV :

4.1.3 Théorème. Soient A, B, C trois droites affines de $\mathbf{P}(E)$ distinctes. On suppose qu'on a $q^*(A) = q^*(B) = q^*(C)$ dans k^*/k^{*2} et on peut supposer plus précisément qu'on a $q^*(A) = q^*(B) = q^*(C)$ dans k . On appelle A^+, A^- ; B^+, B^- ; C^+, C^- les bissectrices (éventuellement généralisées) des droites B, C ; C, A ; A, B respectivement. Alors les triplets de droites A^+, B^+, C^- ; A^+, B^-, C^+ ; A^-, B^+, C^+ ; A^-, B^-, C^- sont concourantes.

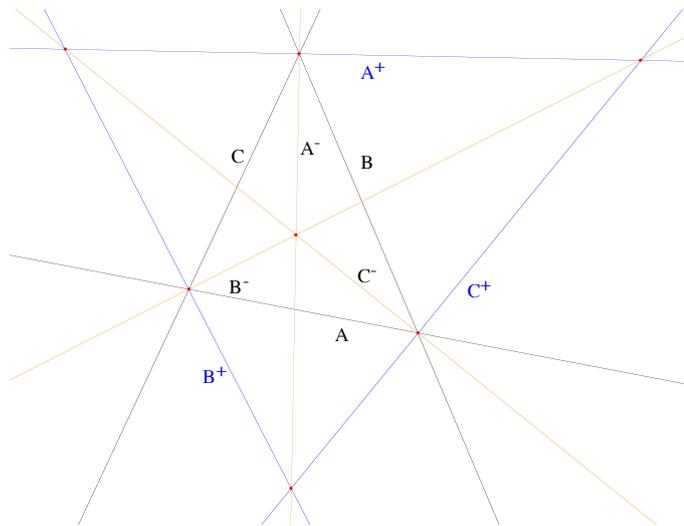


FIGURE 4.1 – Concours des bissectrices

Démonstration. Cela résulte des relations “de Chasles” évidentes¹ du type annoncé ci-dessus $(B - C) + (C - A) + (A - B) = 0$, cf. Partie IV, ??.

4.1.4 Remarque. On retrouve ainsi le concours des bissectrices en euclidien, ainsi que des résultats du genre : si A, B sont parallèles et que C est une sécante à ces droites les bissectrices de A, C et B, C sont parallèles, ou se coupent sur la parallèle équidistante à A et B , etc.

L’existence des bissectrices, leur nombre, leur concours sont donc vraiment des théorèmes absolus, au sens où ils ne dépendent pas de la nature de la forme quadratique !

4.1.5 Remarques. 1) Si deux droites admettent des bissectrices, elles en ont toujours deux, mais les notions de bissectrices intérieures et extérieures n’ont évidemment pas de sens sur un corps quelconque. Sur \mathbf{R} elles n’ont de sens que si l’on a orienté les droites, c’est-à-dire choisi des demi-droites ou des axes. Voir exercice 4.5.1.

2) Les points de concours des bissectrices de ABC sont les centres des cercles tangents aux trois droites (cercles inscrits et exinscrits). Pour des précisions sur ce thème, voir exercice 4.5.2.

4.1.2 Points bissecteurs

Si les symétries axiales se comportent essentiellement comme dans le cas

1. Leibniz serait sans doute content de cette preuve.

non euclidien, il n'en est pas de même des symétries centrales. En effet, l'absence de polarité ne permet pas de se ramener aux droites comme dans le cas non euclidien. Ainsi, on ne peut pas sauver grand-chose des points bissecteurs rencontrés en non-euclidien :

4.1.6 Proposition. *Soient A, B deux droites distinctes. Il existe une symétrie centrale σ_m qui échange A et B si et seulement si elles sont parallèles, auquel cas il y a alors une infinité de points bissecteurs qui sont ceux de l'axe de symétrie $D^+ = A + B$.*

Démonstration. Rappelons qu'on note s_m la symétrie, vue comme transformation de E^* . En vertu de 3.4.5, on a la formule $\sigma_m(A) = s_m(A) = -A + 2A(m)l$. La relation $s_m(A) = B$ impose donc $A + B = A(m)l$, ce qui signifie que A et B sont parallèles². Pour montrer que les points m de D^+ sont bissecteurs, il suffit d'écrire $s_m = \tau_\Delta \tau_{D^+}$ où Δ est la perpendiculaire à D^+ en m (voir 3.4.10).

4.2 Hauteurs

Après les bissectrices, nous abordons le cas des hauteurs. Là encore, les choses sont naturelles à partir de l'entrée par le dual, puisque les hauteurs se définissent en termes de droites.

Le concours *via* les équations des hauteurs

Soit abc un triangle, A, B, C des équations des côtés du triangle, c'est-à-dire des droites $(bc), (ca), (ab)$. La **hauteur** du triangle issue de a est la droite passant par a et perpendiculaire à (bc) (voir 2.1.15). On en calcule aisément une équation :

4.2.1 Lemme. *Une équation de la hauteur issue de a est $H_A = \varphi^*(C, A)B - \varphi^*(A, B)C$.*

Démonstration. En effet, la hauteur issue de a passe par ce point, donc concourt avec les droites B, C et s'écrit $H_A = \lambda B + \mu C$. On détermine les coefficients en écrivant que H_A est perpendiculaire à $A = (bc)$, donc qu'on a $\varphi^*(H_A, A) = 0$.

4.2.2 Corollaire. *Les trois hauteurs du triangle abc sont concourantes en un point h appelé **orthocentre** du triangle.*

2. On peut aussi raisonner ainsi : si σ_m échange A, B , comme elle fixe les points de D_∞ , cela impose que A et B ont le même point à l'infini, donc sont parallèles.

Démonstration. Avec les notations précédentes, on vérifie qu'on a $H_A + H_B + H_C = 0$.

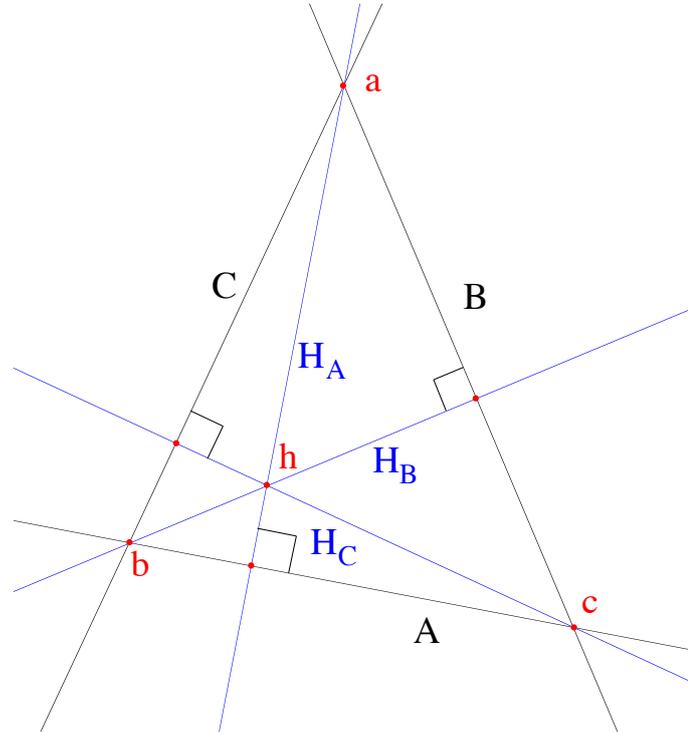


FIGURE 4.2 – Concours des hauteurs

4.2.3 Remarques. 1) Si l'on pose $B' = \varphi^*(C, A)B$, et de même pour les autres par permutation circulaire, on voit que la relation $H_A + H_B + H_C = 0$ s'écrit³ $(B' - C') + (C' - A') + (A' - B') = 0$.

2) L'orthocentre h s'écrit à partir des équations des côtés :

$$h = \varphi^*(C, A)\varphi^*(A, B)(B \wedge C) + \varphi^*(A, B)\varphi^*(B, C)(C \wedge A) + \varphi^*(B, C)\varphi^*(C, A)(A \wedge B).$$

3) Pour rapprocher cette preuve de celle donnée en géométrie non euclidienne, on peut en donner une variante qui utilise le produit métissé et l'identité de Jacobi, voir exercice 4.5.3.

³. Les relations de Chasles, vous dis-je.

La preuve via φ , décalque élémentaire de la précédente

4.2.4 Lemme. Soit o un point de X et abc un triangle. On a l'identité :

$$\varphi(\vec{oa}, \vec{bc}) + \varphi(\vec{ob}, \vec{ca}) + \varphi(\vec{oc}, \vec{ab}) = 0.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire $\vec{bc} = \vec{oc} - \vec{ob}$ et l'identité est encore du type $(B - C) + (C - A) + (A - B) = 0$.

4.2.5 Remarques. 1) On déduit de ce lemme le concours des hauteurs. En effet, comme les côtés du triangle ne sont pas parallèles, les hauteurs ne le sont pas non plus (cf. 2.1.15). On choisit alors pour o le point d'intersection des hauteurs issues de a et b . Dans la relation précédente les deux premiers termes sont nuls (cf. 2.1.33), donc aussi le troisième. On notera que cette démonstration du concours des hauteurs peut donc être produite dès qu'on dispose de Chasles et du produit scalaire.

2) En fait, la formule de 4.2.4 n'est qu'un avatar de celle de 4.2.1, car le terme $\varphi(\vec{oa}, \vec{bc})$ est, à un scalaire constant près, égal à $H_A(o)$ comme le montre le lemme suivant :

4.2.6 Lemme. Soient $a, b, c, o \in E$. On pose $A = b \wedge c$, $B = c \wedge a$ et $C = a \wedge b$. On a la formule $\varphi^*(C, A)B(o) - \varphi^*(A, B)C(o) = \delta(q^*)[a, b, c]\varphi(\vec{bc}, \vec{oa})$.

Démonstration. On sait qu'on a $o \wedge (B \wedge C) = B(o)C - C(o)B$ d'après 2.2.3. On en déduit $S := \varphi^*(A, o \wedge (B \wedge C)) = \varphi^*(C, A)B(o) - \varphi^*(A, B)C(o)$. Mais on a $B \wedge C = (c \wedge a) \wedge (a \wedge b) = [a, b, c]a$ par la formule du double produit (voir Partie II ??) et donc $S = [a, b, c]\varphi^*(b \wedge c, o \wedge a) = \delta(q^*)[a, b, c]\varphi(\vec{bc}, \vec{oa})$ en vertu de 2.2.28, d'où le résultat.

Variante en fonction des sommets

Avec la paramétrisation vue en 2.2.33 on obtient les équations des hauteurs et les coordonnées de l'orthocentre en fonction non plus des côtés, mais des sommets :

4.2.7 Proposition. Soit abc un triangle normalisé par $l = 1$. On pose $u = \varphi(\vec{ca}, \vec{ab})$, $v = \varphi(\vec{ab}, \vec{bc})$ et $w = \varphi(\vec{bc}, \vec{ca})$. La hauteur issue de a admet pour équation : $w(a \wedge b) - v(c \wedge a)$ et de même pour les autres par permutation circulaire.

L'orthocentre du triangle s'écrit (en version non normalisée) : $h = vw a + wu b + uv c$. On obtient la version normalisée en divisant les coordonnées par $l(h) = vw + wu + uv$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer 4.2.1 et 2.2.28. On peut aussi noter que la hauteur issue de a a pour équation $a \wedge n_{bc}$ et conclure par 2.2.33. La valeur de h vient de la formule du double produit (Partie II, ??).

4.2.8 Remarque. En tenant compte de la relation de Chasles $\vec{bc} = -\vec{ab} - \vec{ca}$, on vérifie aussitôt que la quantité $vw + wu + uv$ est égale à $q(\vec{ab})q(\vec{ca}) - \varphi(\vec{ab}, \vec{ca})^2$. En vertu de 2.2.22 on a donc $vw + wu + uv = \frac{[a, b, c]^2}{\delta(q^*)}$. Cette quantité est donc nulle si et seulement si les points a, b, c sont alignés (voir aussi 2.1.34). Dans ce cas, les hauteurs sont parallèles et l'orthocentre vérifie $l(h) = 0$ donc est à l'infini.

4.3 Médiatrices et milieux

Contrairement à ce qui se passe pour les droites, le groupe des isométries est transitif sur les points, et ce quel que soit le corps de base, ne serait-ce que grâce aux translations. Nous montrons ici que les symétries suffisent à assurer la transitivité sur les points, retrouvant ainsi les deux notions fondamentales de milieu et de médiatrice.

4.3.1 Existence

4.3.1 Proposition-Définition. Soient a, b deux points distincts de X .

1) Il existe un unique point $m \in X$ tel que σ_m échange a et b . Le point m est appelé **milieu** de a et b et il est sur (ab) . Si a, b et m sont normalisés par $l = 1$, on a $m = \frac{a + b}{2}$.

2) Il existe une unique droite Δ telle que τ_Δ échange a et b . La droite Δ est appelée **médiatrice** de a et b , c'est la perpendiculaire à la droite (ab) en m .

Démonstration. 1) On peut supposer $l(a) = l(b) = 1$ et on cherche m , avec $l(m) = 1$ tel que $\sigma_m(a) = b$, soit $b = 2m - a$ en vertu de 3.4.6 : le résultat est clair.

2) Si la symétrie τ_Δ échange a et b , le produit $\tau_\Delta \sigma_m$ fixe a et b et n'est pas l'identité. C'est donc la réflexion d'axe (ab) en vertu de 1.4.1. On en déduit que Δ est la perpendiculaire à (ab) en m . Inversement, si Δ est cette perpendiculaire, on a $\tau_\Delta \tau_{(ab)} = \sigma_m$ en vertu de 3.4.10 et il en résulte que τ_Δ échange a et b .

4.3.2 Notations. Lorsque abc est un triangle, on parlera de ses "côtés" $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$, notés comme des segments, même si, sur un corps autre que \mathbf{R} , ces

notions n'ont pas grand sens. Lorsqu'on parle du milieu ou de la médiatrice d'un tel côté, disons $[ab]$, il s'agit, bien entendu, de celui ou celle des points a, b .

On retrouve bien sûr les caractérisations usuelles de ces objets :

4.3.3 Proposition. *Soient a, b deux points distincts de X . Le milieu m de a, b est caractérisé par la relation vectorielle $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{mb}$. C'est aussi l'unique point de (ab) qui vérifie $q(\overrightarrow{am}) = q(\overrightarrow{bm})$. La médiatrice Δ de a, b est l'ensemble des points $p \in X$ vérifiant $q(\overrightarrow{ap}) = q(\overrightarrow{bp})$ (dans le cas réel Δ est l'ensemble des points p équidistants de a et b : $ap = bp$).*

Démonstration. La condition vectorielle sur le milieu s'écrit, pour des points normalisés par $l = 1$, $m - a = b - m$ et elle est équivalente à $m = \frac{a+b}{2}$. Si m est le milieu, comme σ_m fixe m , échange a, b et conserve q , on a la condition sur q . Réciproquement, comme les vecteurs sont colinéaires, cette condition implique $\overrightarrow{am} = \pm \overrightarrow{bm}$ et le cas $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{bm}$ est exclu car on a $a \neq b$.

Supposons $p \in \Delta$. Comme τ_Δ est une isométrie pour q qui fixe p et échange a, b , on a bien la condition. Réciproquement, si m est le milieu de a, b , on écrit $\overrightarrow{pa} = \overrightarrow{pm} + \overrightarrow{ma}$ et $\overrightarrow{pb} = \overrightarrow{pm} - \overrightarrow{ma}$ et la condition sur q donne $\varphi(\overrightarrow{pm}, \overrightarrow{ma}) = 0$, donc m est sur la perpendiculaire à (ab) en m qui est Δ .

4.3.2 Écritures en termes de droites

Fidèle aux options choisies, nous donnons ici les écritures des milieux et des médiatrices en termes de droites :

4.3.4 Proposition. *Soit abc un triangle et A, B, C (les équations de) ses côtés.*

1) *Le milieu du côté $[bc]$ est donné par la formule :*

$$a' = \frac{1}{2} \left(\frac{C \wedge A}{[l, C, A]} + \frac{A \wedge B}{[l, A, B]} \right)$$

et de même pour les autres par permutation circulaire.

2) *La médiatrice de $[bc]$ a pour équation :*

$$\Delta_A = H_A + \frac{1}{2} [A, B, C] \left(\frac{\varphi^*(A, B)}{[l, A, B]} - \frac{\varphi^*(C, A)}{[l, C, A]} \right) l$$

où H_A est l'équation de la hauteur issue de a (voir 4.2.1) et de même pour les autres par permutation circulaire.

Démonstration. Le point 1) résulte de 4.3.1 et des rappels du début du chapitre. Pour 2), on cherche une droite Δ_A perpendiculaire à (bc) , donc parallèle à H_A , donc de la forme $H_A + \lambda l$. De plus, comme Δ_A passe par a' on doit avoir $\lambda = -H_A(a')$ et le résultat s'ensuit avec 4.2.1 et le point 1).

4.3.3 Le théorème de la droite des milieux

4.3.5 Proposition. *Soit abc un triangle, a', b', c' les milieux des côtés $[bc]$, $[ca]$ et $[ab]$ respectivement. Alors les droites $(b'c')$, $(c'a')$ et $(a'b')$ sont respectivement parallèles à (bc) , (ca) , (ab) .*

Démonstration. Normalisons a, b, c par $l = 1$. Les points à l'infini des côtés (bc) , (ca) , (ab) sont alors respectivement $b - c$, $c - a$, $a - b$ (à un scalaire près) et les milieux de ces mêmes côtés (non normalisés) sont $a' = b + c$, $b' = c + a$ et $c' = a + b$ qui vérifient $l(a') = l(b') = l(c') = 2$. Il s'agit de voir (par exemple) que les points à l'infini de (bc) et $(b'c')$ sont les mêmes. Comme $b' - c'$ est le point à l'infini de $(b'c')$, cela résulte de la relation $b' - c' = c - b$.

Pour une preuve en termes d'équations de droites voir 4.5.8.

Signalons aussi le résultat bien connu suivant :

4.3.6 Proposition. *Soient a, b deux points distincts de X . Le milieu de a, b est le conjugué harmonique du point à l'infini de la droite (ab) .*

Démonstration. On peut prendre comme ci-dessus $a+b$ et $a-b$ pour représentants du milieu et du point à l'infini et la conclusion vient de Partie I ??.

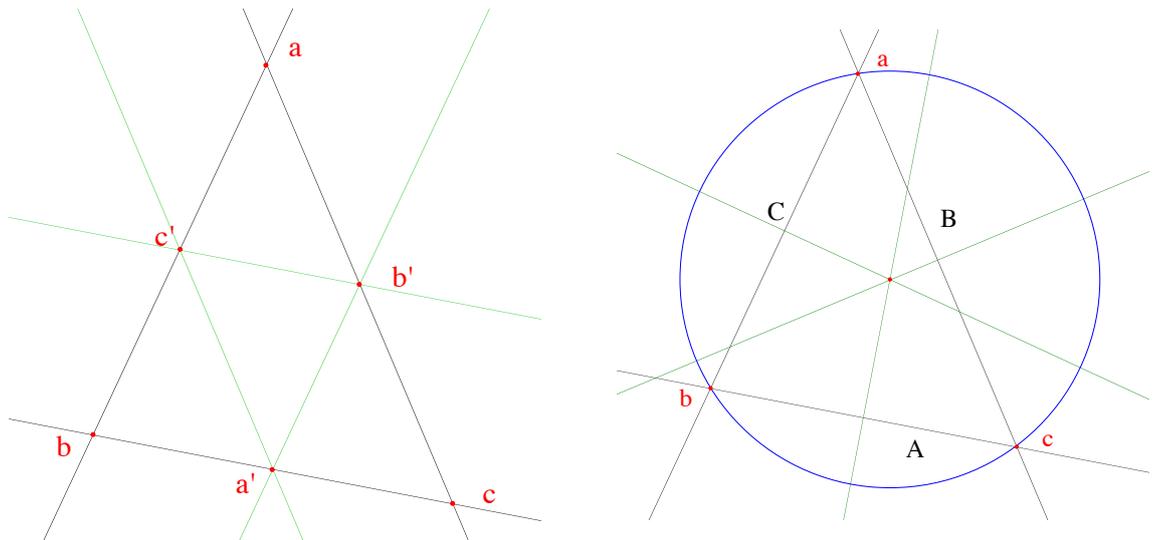


FIGURE 4.3 – La droite des milieux et le concours des médiatrices

4.3.4 Concours des médiatrices

Avec l'entrée euclidienne, le concours des médiatrices d'un triangle abc est très facile à établir : on montre que les médiatrices de $[ab]$ et $[ac]$ se coupent en un point o qui vérifie donc $ob = oa = oc$ et on conclut que ce point est aussi sur la médiatrice de $[bc]$. Nous donnons ici une preuve de ce résultat en termes de relations :

4.3.7 Théorème. *Soit abc un triangle. Les médiatrices des côtés de abc sont concourantes en un point o appelé **centre du cercle circonscrit** à abc .*

4.3.8 Remarque. L'appellation "centre du cercle circonscrit" rappelle que o vérifie l'égalité de "distances" $q(\vec{oa}) = q(\vec{ob}) = q(\vec{oc})$.

Démonstration. En vertu de 4.3.4, la médiatrice de $[bc]$ a pour équation $\Delta_A = H_A + (C' - B')l$ où l'on a posé $C' = \frac{1}{2} [A, B, C] \frac{\varphi^*(A, B)}{[l, A, B]}$ et de même pour les autres. Comme on a $H_A + H_B + H_C = 0$, le résultat, une fois encore, vient de l'identité $(C' - B') + (B' - A') + (A' - C') = 0$.

Pour une preuve en termes de produit métrisé voir 4.5.6.

Équations des médiatrices : variante en termes de points

Avec la paramétrisation déjà rencontrée plus haut on a les équations des médiatrices et les coordonnées du centre du cercle circonscrit :

4.3.9 Proposition. *Soit abc un triangle normalisé par $l = 1$. On pose $u = \varphi(\vec{ca}, \vec{ab})$, $v = \varphi(\vec{ab}, \vec{bc})$ et $w = \varphi(\vec{bc}, \vec{ca})$. La médiatrice de b, c admet pour équation :*

$$(v + w)(a \wedge b - c \wedge a) + (v - w)(b \wedge c)$$

et de même pour les autres par permutation circulaire.

Le point d'intersection des médiatrices s'écrit (en version non normalisée) :

$$o = (v + w)u a + (w + u)v b + (u + v)w c.$$

La version normalisée s'obtient en divisant les coefficients par leur somme $2(vw + wu + uv)$.

Démonstration. Cela résulte du fait que la médiatrice de b, c a pour équation $(b + c) \wedge (b \wedge c) = (b + c) \wedge n_{bc}$ et de l'écriture de n_{bc} donnée en 2.2.33. (On notera la formule $v + w = -q(\vec{bc})$.)

4.3.10 Remarque. Comme dans 4.2.8, la quantité $vw + wu + uv$ est nulle si et seulement si les points a, b, c sont alignés, ce qui correspond au cas où les médiatrices sont parallèles et où o est à l'infini.

Pour le calcul du rayon du cercle circonscrit, voir l'exercice 4.5.9.

4.3.5 Concours des médianes

Nous rappelons pour mémoire le concours des médianes qui a déjà été vu dans la Partie II (cf. ??). En effet, il s'agit là d'un résultat affine qui ne fait pas appel à la forme quadratique q^* .

4.3.11 Proposition. *Soit abc un triangle et soient a', b', c' les milieux de ses côtés. Alors, les médianes (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes en un point g appelé **centre de gravité** du triangle (sauf si la caractéristique du corps est égale à 3 auquel cas elles sont parallèles). On a $g = a + b + c$ (ou $(a + b + c)/3$ en version normalisée).*

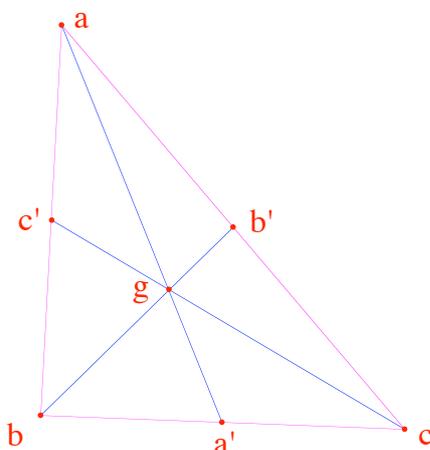


FIGURE 4.4 – Concours des médianes

Démonstration. On peut donner plusieurs preuves de ce résultat.

1) On suppose $l(a) = l(b) = l(c) = 1$. On a vu qu'on peut prendre $a' = b + c$, $b' = c + a$, $c' = a + b$. On considère le point $g = a + b + c = a + a' = b + b' = c + c'$. On a $l(g) = 3$, de sorte que ce point est dans X , sauf si la caractéristique⁴ du corps est 3. Comme il est sur (aa') , (bb') , (cc') , on a gagné.

Pour les autres preuves, on a besoin des équations des médianes, en termes de points ou de droites :

4.3.12 Lemme. *Soit abc un triangle, a', b', c' les milieux des côtés (bc) , (ca) , (ab) et A, B, C des équations de ces côtés.*

4. Dans ce cas, il faut vérifier que g définit bien un point, ce qui vient du fait que a, b, c ne sont pas alignés.

1) On suppose $l(a) = l(b) = l(c) = 1$. La médiane (aa') a pour équation $a \wedge (b + c)$.

2) Elle a aussi pour équation $[l, A, B]C - [l, C, A]B$.

Démonstration. La médiane ayant pour équation $a \wedge a'$, cela résulte du fait que a' s'écrit, en version non normalisée, soit $b + c$ (ce qui donne le point 1), soit $\left(\frac{C \wedge A}{[l, C, A]} + \frac{A \wedge B}{[l, A, B]} \right)$ (ce qui donne le point 2).

2) Avec la variante 1) du lemme, le résultat de concours⁵, éventuellement à l'infini, provient de la relation :

$$a \wedge (b + c) + b \wedge (c + a) + c \wedge (a + b) = 0.$$

3) Avec la variante 2) on a, comme d'habitude, une identité du type $(B' - C') + (C' - A') + (A' - B') = 0$.

4.3.13 Remarque. En géométrie non euclidienne où les segments ont deux milieux, il y a d'autres concours de médianes qui proviennent de la relation :

$$a \wedge (b + c) - b \wedge (c - a) + c \wedge (a - b) = 0$$

et des deux autres obtenues par permutation circulaire (voir Partie IV ??). En euclidien, la signification de cette relation est la suivante. La forme $b \wedge (c - a)$ (resp. $c \wedge (a - b)$) est une équation de la parallèle à (ac) (resp. (ab)) passant par b (resp. c). La relation signifie que ces deux droites et la médiane (aa') sont concourantes en un point d . Mais, comme $abdc$ est un parallélogramme, cela signifie seulement que ses diagonales (ad) et (bc) se coupent en le milieu a' de $[bc]$ (qui est aussi celui de $[ad]$ comme on le voit en considérant $\sigma_{a'}$).

4.4 La droite d'Euler

Il s'agit là d'un théorème emblématique de la géométrie euclidienne, dont on a vu qu'il est faux en géométrie hyperbolique ou elliptique (voir Partie IV, exercice ??).

4.4.1 Théorème. *On suppose la caractéristique de k différente de 3. Soit abc un triangle. L'orthocentre h , le centre du cercle circonscrit o et le centre de gravité g sont alignés et l'on a $\vec{hg} = 2\vec{g\acute{o}}$, ou encore $\vec{oh} = 3\vec{o\acute{g}}$.*

5. Et l'on calcule aisément le point de concours $[a, b, c](a + b + c)$ par la formule du double produit extérieur.

Démonstration. Vu l'importance du résultat, on a jugé intéressant d'en donner plusieurs preuves, toutes dans l'esprit de cette partie, donc exprimées à l'aide des invariants. Le lecteur qui souhaiterait se rafraîchir la mémoire trouvera en exercices quelques preuves élémentaires.

On note encore a, b, c les représentants normalisés des points, c'est-à-dire vérifiant $l(a) = l(b) = l(c) = 1$.

4.4.1 Première preuve

On sait que g est l'isobarycentre des points a, b, c . On a donc $3\vec{og} = \vec{oa} + \vec{ob} + \vec{oc}$. Il suffit de montrer que ce vecteur est égal à \vec{oh} . Pour cela, on définit m par la formule $\vec{om} = \vec{oa} + \vec{ob} + \vec{oc}$ et il suffit de montrer que \vec{am} est orthogonal à \vec{bc} (et de même pour les autres). Mais, on a $\vec{am} = \vec{ob} + \vec{oc}$, et $\vec{bc} = \vec{oc} - \vec{ob}$. On conclut en calculant $\varphi(\vec{am}, \vec{bc})$ et en tenant compte du fait qu'on a $q(\vec{ob}) = q(\vec{oc})$ puisque o est le centre du cercle circonscrit.

4.4.2 Deuxième preuve

On a montré ci-dessus trois formules donnant les trois points incriminés, en écriture normalisée, en fonction de $u = \varphi(\vec{ca}, \vec{ab})$, $v = \varphi(\vec{ab}, \vec{bc})$ et $w = \varphi(\vec{bc}, \vec{ca})$: $g = (a + b + c)/3$ (cf. 4.3.11), $h = \frac{vw a + wu b + uv c}{vw + wu + uv}$ (cf. 4.2.7) et $o = \frac{(v + w)u a + (w + u)v b + (u + v)w c}{2(vw + wu + uv)}$ (cf. 4.3.9). La relation vectorielle à montrer s'écrit $g - h = 2(o - g)$, soit encore $h + 2o = 3g$, c'est-à-dire :

$$vw a + wu b + uv c + u(v + w) a + v(w + u) b + w(u + v) c = (vw + wu + uv)(a + b + c),$$

mais c'est clair !

Discussion sur les paramètres et les relations

La seconde preuve donnée ci-dessus aboutit à une relation triviale entre les paramètres u, v, w qui cache un peu une autre relation sous-jacente. En effet, pour décrire l'espace des triangles, voir 6.3.1 ci-dessus, le plus naturel est sans doute de se donner les 6 paramètres $x = q(\vec{bc})$, $y = q(\vec{ca})$, $z = q(\vec{ab})$, $u = \varphi(\vec{ca}, \vec{ab})$, $v = \varphi(\vec{ab}, \vec{bc})$, $w = \varphi(\vec{bc}, \vec{ca})$. On a vu que l'écriture de o est tributaire de celle de n_{bc} qui fait intervenir les paramètres x, v, w : $n_{bc} = \frac{\delta(q^*)}{[a, b, c]} (x a + w b + v c)$, voir 2.2.33. Pour obtenir la version que nous avons donnée ci-dessus, et qui ne fait intervenir que u, v, w , il faut utiliser

les trois relations $x + v + w = y + w + u = z + u + v = 0$ (elles-mêmes conséquences de la relation de Chasles : $\vec{bc} + \vec{ca} + \vec{ab} = \vec{0}$ à qui on applique $\varphi(\vec{bc}, \bullet)$ et les deux autres).

Si l'on conserve les six paramètres x, y, z, u, v, w , pour montrer le théorème 4.4.1, il suffit de calculer $m = h + 2o - 3g$ sur la base a, b, c en prenant o sous la forme $o = (xua + yvb + zwc)/(xu + yv + zw)$. On trouve alors $m = uP_a a + vP_b b + wP_c c$ où P_a, P_b, P_c sont des polynômes en x, y, z, u, v, w et le théorème résulte du fait que ces polynômes sont dans l'idéal engendré par les relations $x + v + w, y + w + u$ et $z + u + v$. Précisément, on a $P_a = 2x(vw + wu + uv) - (v + w)(xu + yv + zw) = xQ - (xu + yv + wz)(x + v + w)$ avec $Q = u(x + v + w) + v(y + w + u) + w(z + u + v)$ et de même pour les autres. On voit que, dans cette optique, la droite d'Euler apparaît comme une conséquence ultime de la relation de Chasles.

4.4.3 Troisième preuve

Cette preuve est une variante de la deuxième qui va nous permettre de retrouver nos relations favorites. Elle consiste à partir de l'équation présumée de la droite d'Euler⁶ :

$$u(v - w)(b \wedge c) + v(w - u)(c \wedge a) + w(u - v)(a \wedge b)$$

et à montrer qu'elle passe par les points g, h, o ce qui se traduit par le fait que le vecteur $u(v - w), v(w - u), w(u - v)$ est orthogonal pour la forme naturelle $x^2 + y^2 + z^2$ de k^3 aux trois vecteurs $(1, 1, 1)$, (vw, wu, uv) et enfin $((v + w)u, (w + u)v, (u + v)w)$. Les trois relations à montrer sont toutes de la forme $Y - Z + Z - X + X - Y = 0$, avec pour X, Y, Z les quantités vw, wu, uv ; u, v, w et v^2w^2, w^2u^2, u^2v^2 respectivement.

4.4.4 Quatrième preuve

Cette preuve repose essentiellement sur un lemme purement projectif :

4.4.2 Lemme. *Soient abc un triangle et g un point du plan. Les droites (ag) , (bg) , (cg) coupent les côtés (bc) , (ca) , (ab) en a', b', c' . Les droites (bc) et $(b'c')$ (resp. (ca) et $(c'a')$, resp. (ab) et $(a'b')$) se coupent en a'' , (resp. b'' , resp. c''). Les points a'', b'', c'' sont alignés⁷ sur une droite D . Soient α, β, γ trois points de D . On suppose que les droites $(a\alpha)$, $(b\beta)$, $(c\gamma)$ sont concourantes en h . Alors, les droites $(a'\alpha)$, $(b'\beta)$, $(c'\gamma)$ concourent en o et les points o, g, h sont alignés.*

6. Si l'on ne veut pas la sortir du chapeau, on peut calculer $g \wedge h$.

7. C'est le théorème "à quatre points", voir Partie I, ??.

Démonstration. Le plus simple est de choisir un repère approprié et de faire le calcul. On prend $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (0, 0, 1)$ et $g = (1, 1, 1)$. Les points a', b', c' sont alors $a' = (0, 1, 1)$, $b' = (1, 0, 1)$ et $c' = (1, 1, 0)$ et on calcule $a'' = (0, 1, -1)$, $b'' = (-1, 0, 1)$ et $c'' = (1, -1, 0)$ qui sont alignés sur la droite D d'équation $X + Y + T = 0$. On choisit alors trois points $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ et $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ alignés sur D , donc vérifiant $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ et les relations analogues avec β, γ . Les droites $(a\alpha)$, $(b\beta)$ et $(c\gamma)$ sont concourantes si et seulement si on a la relation $\alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_3\beta_1\gamma_2 = 0$. Pour montrer que cette condition est équivalente au concours des autres droites, le mieux est d'utiliser les paramètres $d_1 = \alpha_3 - \alpha_2$, $s_1 = \alpha_3 + \alpha_2$, $d_2 = \beta_1 - \beta_3$, $s_2 = \beta_1 + \beta_3$, $d_3 = \gamma_2 - \gamma_1$, $s_3 = \gamma_2 + \gamma_1$. La relation précédente est alors équivalente à $s_1s_2d_3 + s_1d_2s_3 + d_1s_2s_3 + d_1d_2d_3 = 0$ et on vérifie qu'elle est aussi équivalente au concours de $(a'\alpha)$, $(b'\beta)$, $(c'\gamma)$.

Comme les points α, β sont sur la droite D , on a $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3$ et on note t cette quantité. On calcule alors facilement les intersections : $h = (\alpha_3\beta_1, \alpha_2\beta_3, \alpha_3\beta_3)$ et $o = (-\alpha_1\beta_3, -\alpha_3\beta_2, t - \alpha_3\beta_3)$. On en déduit $h + o = tg$ ce qui montre que ces points sont alignés.

Le théorème de la droite d'Euler résulte de ce lemme. En effet, on prend d'abord pour g le centre de gravité de abc . Les points a', b', c' sont alors les milieux des côtés et les points a'', b'', c'' sont à l'infini. Si on prend pour α, β, γ les directions orthogonales à (bc) , (ca) et (ab) respectivement, les droites $(a\alpha)$, $(b\beta)$, $(c\gamma)$ sont les hauteurs de abc et $(a'\alpha)$, $(b'\beta)$, $(c'\gamma)$ en sont les médiatrices et on a le résultat annoncé.

4.4.3 Remarque. L'intérêt de cette preuve est qu'elle permet de voir ce qui ne fonctionne plus en géométrie non euclidienne. Les points α, β, γ intersections des hauteurs et des médiatrices doivent être remplacés par les pôles des droites (bc) , (ca) , (ab) , voir Partie IV. La différence essentielle c'est qu'en euclidien les trois directions α, β, γ sont alignées sur D_∞ , tandis qu'en hyperbolique, les pôles ne sont pas alignés (sinon les côtés du triangle seraient concourants).

4.4.5 Une dernière preuve avec les droites

Dans cette preuve on utilise les équations A, B, C des côtés du triangle. Le lecteur vérifiera sans peine les calculs suivants. On pose $u = \varphi^*(B, C)$, $v = \varphi^*(C, A)$ et $w = \varphi^*(A, B)$ (cf. 2.2.33 et 2.2.28), puis $[l, B, C] = \alpha$, $[l, C, A] = \beta$ et $[l, A, B] = \gamma$. On a alors, en version non normalisée :

$$h = vw(B \wedge C) + wu(C \wedge A) + uv(A \wedge B),$$

$$g = \beta\gamma(B \wedge C) + \gamma\alpha(C \wedge A) + \alpha\beta(A \wedge B),$$

$$o = \frac{\beta w u + \gamma u v}{\alpha}(B \wedge C) + \frac{\gamma u v + \alpha v w}{\beta}(C \wedge A) + \frac{\alpha v w + \beta w u}{\gamma}(A \wedge B)$$

et on calcule $l(h) = \alpha v w + \beta w u + \gamma u v$, $l(g) = 3\alpha\beta\gamma$ et $l(o) = 2l(h)$.

Après normalisation on obtient trivialement la relation $3g = h + 2o$.

4.4.4 Remarque. Pour un dernier hommage à Chasles ou Leibniz, on peut noter que le déterminant de h, g, o sur $B \wedge C, C \wedge A, A \wedge B$ est égal à $(Y^2 - Z^2) + (Z^2 - X^2) + (X^2 - Y^2)$, avec $X = \alpha v w$, $Y = \beta w u$ et $Z = \gamma u v$.

4.5 Exercices

4.5.1 Bissectrices

4.5.1 Exercice. Dans cet exercice, on suppose que k est le corps des réels et qu'on a $\delta(q^*) = 1$. Il s'agit de définir les notions de bissectrices intérieure et extérieure.

Soient $A, B \in E^*$ les équations de deux droites $\overline{A}, \overline{B}$ sécantes en o . On suppose A, B normalisées par $q^*(A) = q^*(B) = 1$. On sait qu'alors les équations A, B définissent deux axes portés par $\overline{A}, \overline{B}$, de vecteurs directeurs unitaires $\vec{u} = l \wedge A$ et $\vec{v} = l \wedge B$. Soit D la droite passant par o et de vecteur directeur $\vec{u} + \vec{v}$.

1) Montrer que la réflexion τ_D échange les droites A, B . La droite D est donc une des bissectrices des droites A, B , qui sera dite **bissectrice intérieure des axes** A, B , l'autre étant dite extérieure. Montrer que D admet $A + B$ pour équation.

Soient maintenant $A, B, C \in E^*$ les équations de trois droites non concourantes. On suppose A, B, C normalisées par $q^* = 1$. On note respectivement a, b, c les points d'intersection de $\overline{B}, \overline{C}$; $\overline{C}, \overline{A}$; $\overline{A}, \overline{B}$. En version normalisée par $l = 1$ on a donc, par exemple, $a = \frac{B \wedge C}{[B, C, l]}$.

2) Montrer qu'on a $\vec{ab} = b - a = \frac{C \wedge A}{[C, A, l]} - \frac{B \wedge C}{[B, C, l]}$, et en déduire la formule : $[A, B, C](l \wedge C) = [B, C, l][A, B, l]\vec{ba}$ (utiliser 2.2.14). Préciser les formules analogues avec les autres vecteurs.

3) Par définition, la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{bac} du triangle est la bissectrice intérieure des axes dirigés par les vecteurs \vec{ab} et \vec{ac} . Montrer que la bissectrice intérieure de \widehat{bac} coupe le segment $[bc]$.

4) On oriente les côtés A, B, C du triangle abc par les vecteurs $\vec{bc}, \vec{ca}, \vec{ab}$ respectivement (cela signifie qu'on a, par exemple, $l \wedge A = \frac{\vec{bc}}{bc}$). Montrer que les bissectrices intérieures de abc ont pour équations $B - C, C - A, A - B$.

4.5.2 Exercice. On reprend les notations de l'exercice précédent.

1) Montrer que les bissectrices intérieures de abc sont concourantes en le point $i = B \wedge C + C \wedge A + A \wedge B$ ou, en version normalisée par $l = 1$:

$$i = \frac{B \wedge C + C \wedge A + A \wedge B}{[B, C, l] + [C, A, l] + [A, B, l]}.$$

2) Montrer que le point i est équidistant des droites A, B, C et à la distance r avec $r^2 = \frac{[A, B, C]^2}{([B, C, l] + [C, A, l] + [A, B, l])^2}$ (voir 5.2.4). Cela signifie que le cercle de centre i et de rayon r est tangent aux droites A, B, C , voir 7.5.5. Ce cercle est le cercle **inscrit** dans le triangle abc .

3) Traiter le cas des cercles "exinscrits" correspondant à deux bissectrices extérieures et une intérieure et montrer qu'il y a exactement quatre cercles tangents à trois droites $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ formant un triangle.

4) Dans cette question on ne suppose plus que les équations A, B, C sont normalisées par $q^* = 1$. Montrer que le centre du cercle inscrit est donné par la formule :

$$i = \sqrt{q^*(A)}(B \wedge C) + \sqrt{q^*(B)}(C \wedge A) + \sqrt{q^*(C)}(A \wedge B).$$

On pose $\xi = l(i)$, montrer que le rayon r du cercle inscrit est donné par la formule $r^2 = [A, B, C]^2 / \xi^2$.

4.5.2 Le concours des hauteurs

4.5.3 Exercice. (Le concours des hauteurs via le produit métissé) On renvoie à 2.3.4 pour la notion de produit métissé. Soit abc un triangle et A, B, C des équations de ses côtés. Montrer que la hauteur issue de a a pour équation le produit métissé $(B \wedge C) \# A$ (voir 2.3.5). En déduire que les hauteurs sont concourantes (voir 2.3.7).

4.5.4 Exercice. Cet exercice contient des indications sommaires pour sept nouvelles preuves du concours des hauteurs du triangle abc . On note a', b', c' les projetés orthogonaux de a, b, c sur $(bc), (ca), (ab)$.

1) **(La preuve classique)** On mène les perpendiculaires en a, b, c aux hauteurs de abc . On obtient un nouveau triangle dans lequel les hauteurs ont une autre fonction ...

2) (**Vecteurs**) Soit o le centre du cercle circonscrit à abc . On définit h par la formule $\vec{oh} = \vec{oa} + \vec{ob} + \vec{oc}$. Quel est ce mystérieux point h ?

3) (**Céva**) Montrer le concours des hauteurs en utilisant le théorème de Céva (cf. Partie I, ??).

4) (**Homothétie**) Soit g le centre de gravité de abc . Utiliser une homothétie de centre g pour ramener le concours des hauteurs au concours des médiatrices.

5) (**Par les angles**) Soit h l'intersection des hauteurs (bb') et (cc') . Montrer qu'on a $\widehat{hab} + abc = \pi/2$ en utilisant les quadrilatères inscriptibles $ac'hb'$ et $bc'b'c'$.

6) (**Chasles encore**) Montrer qu'un point m est sur la hauteur (aa') si et seulement si il vérifie $mb^2 - mc^2 = ab^2 - ac^2$. Conclure.

7) (**Euler en prime**) Soient o le centre du cercle circonscrit et g le centre de gravité de abc . La droite (og) coupe (aa') en h . Les triangles oga' et hga sont semblables et on en déduit $og = \frac{1}{2}gh$. Mais pourquoi (aa') plutôt que les autres ?

4.5.5 Exercice. Soit abc un triangle de X , supposé non rectangle en a , et soient (aa') , (bb') , (cc') ses hauteurs (a', b', c' sont les pieds des hauteurs) et soit h l'orthocentre de abc . Soit m un point de la droite $(b'c')$. La perpendiculaire à (cm) (resp. (bm)) passant par b (resp. c) coupe (ah) en u (resp. v). Montrer que u et v sont symétriques par rapport au milieu i de a, h . (Indication : en décrivant la construction en termes d'incidences et d'orthogonalité, on montrera que l'application qui fait passer de u à v est une involution de (ah) qui échange a et h et fixe le point à l'infini de (ah) .)

4.5.3 Médiatrices

4.5.6 Exercice. (Le concours des médiatrices via le produit métissé)

Soit abc un triangle. On suppose les points relevés en des vecteurs vérifiant $l(a) = l(b) = l(c) = 1$.

1) Montrer que la médiatrice de $[ab]$ a pour équation $(a + b) \wedge (a \wedge b)$ où \wedge désigne le produit métissé (voir 2.3.4).

2) Montrer la relation suivante sur les produits métissés :

$$M := (b + c) \wedge (b \wedge c) + (c + a) \wedge (c \wedge a) + (a + b) \wedge (a \wedge b) = 0.$$

(Développer l'expression par bilinéarité et utiliser la formule des aires 2.2.12, le fait que, pour un point m quelconque de X , on a $m \wedge l = 0$ et la seconde identité de Jacobi 2.3.7.) Conclure sur le concours des médiatrices.

3) On désigne par a', b', c' les milieux des côtés de abc . Montrer que le calcul précédent ramène le concours des médiatrices de abc à celui des hauteurs de $a'b'c'$, ce qui est le chemin inverse de celui que l'on suit habituellement en géométrie élémentaire !

4.5.7 Exercice. Montrer le concours des médiatrices de abc en utilisant le théorème de Bachmann 3.4.11 (si A, B, C sont les médiatrices, considérer le produit des réflexions $\tau_A\tau_B\tau_C$).

4.5.8 Exercice. Soit abc un triangle et soient a', b', c' les milieux de ses côtés. En utilisant les formules de 4.3.4, montrer que la droite $(b'c')$ admet pour équation $-[l, B, C]A + [l, C, A]B + [l, A, B]C$. En déduire que $(b'c')$ est parallèle à (bc) en utilisant la relation fondamentale de dimension (voir 2.2.14) :

$$[A, B, C]l = [l, B, C]A + [l, C, A]B + [l, A, B]C.$$

4.5.9 Exercice. 1) En utilisant 4.3.9, montrer la formule donnant le carré du rayon du cercle circonscrit : $R^2 = q(\vec{oa}) = q(\vec{ob}) = q(\vec{oc})$:

$$R^2 = -\frac{(v+w)(w+u)(u+v)}{4(vw+wu+uv)}.$$

2) On suppose $k = \mathbf{R}$. Montrer que la formule précédente devient : $R^2 = \frac{bc^2 \cdot ca^2 \cdot ab^2}{4[a, b, c]^2}$ et qu'elle donne la relation $4R |\mathcal{A}|(abc) = bc \times ca \times ab$ où $|\mathcal{A}|(abc)$ désigne l'aire du triangle abc , voir 5.4.15.

Retrouver cette formule de manière élémentaire en utilisant la relation $|\mathcal{A}|(abc) = \frac{1}{2}ab \sin \widehat{bac}$ et la relation entre angle au centre et angle inscrit (voir au besoin les chapitres 5 et 7).

4.5.4 La droite et le cercle d'Euler

4.5.10 Exercice. Montrer le théorème 4.4.1 en contemplant la figure ci-dessus.

4.5.11 Exercice. On reprend les notations de 4.4.1 et on note a', b', c' les milieux des côtés $[bc]$, $[ca]$ et $[ab]$.

1) On considère l'homothétie u de centre g et de rapport $-1/2$. Montrer qu'elle transforme abc en $a'b'c'$ et qu'elle transforme les hauteurs de abc en les médiatrices de abc . En déduire le théorème 4.4.1.

2) On note Γ l'image par u du cercle circonscrit à abc et ω son centre. Montrer que ω est le milieu de $[oh]$ et que Γ passe par les neuf points remarquables suivants : a', b', c' , les pieds des hauteurs de abc et les milieux des segments joignant l'orthocentre h aux sommets a, b, c .

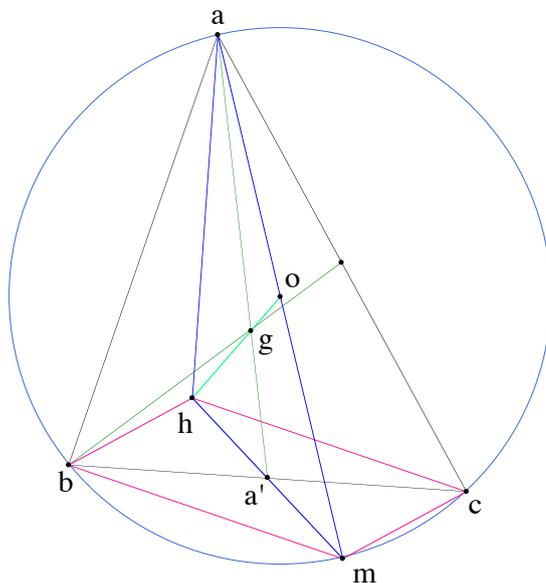


FIGURE 4.5 – La droite d'Euler

4.5.12 Exercice. Encore une variante des preuves de 4.4.1

On considère un triangle abc et on suppose toujours a, b, c normalisés par $l(a) = l(b) = l(c) = 1$. On appelle α, β, γ les directions orthogonales à (bc) , (ca) , (ab) respectivement.

- 1) Montrer la formule $h = [a, b, \beta]\alpha + [\alpha, \beta, b]a$ (version non normalisée).
- 2) Montrer qu'on a $[\alpha, \beta, b] = [\alpha, \beta, c] = [\alpha, \beta, a]$ (utiliser le fait que α, β et les points $b - c, c - a, a - b$ sont sur D_∞).
- 3) Montrer la formule $o = -[a, b, \beta]\alpha + [\alpha, \beta, a](b + c)$ (version non normalisée), (on utilisera la formule des aires 2.2.12).
- 4) En passant aux expressions normalisées, montrer la formule $3g = h + 2o$.

Chapitre 5

Transitivité, invariants, cas d'isométrie et de similitude

Dans les chapitres précédents, nous avons rencontré les problèmes de transitivité pour les objets algébriques (vecteurs et équations de droites, voir par exemple 1.2.9 ou 3.3.5). Dans ce chapitre et les deux suivants, nous abordons ces problèmes pour les objets géométriques, points, droites et familles de points ou de droites. Cela nous conduit à définir des invariants géométriques, qui vont correspondre aux longueurs, angles et aires et à retrouver les résultats classiques concernant les cas d'isométrie et de similitude. On est là au cœur de la géométrie euclidienne.

Signalons tout de suite une différence notable entre la géométrie euclidienne et les géométries non euclidiennes. Dans le cas des géométries non euclidiennes, on dispose d'une dualité qui fait que les résultats de transitivité sont essentiellement les mêmes pour les droites et pour les points et qu'ils sont liés à des propriétés "arithmétiques" du corps. Il n'en va pas de même en euclidien, en tous cas sur un corps de base quelconque. En effet, le groupe $\text{Sim}(X) \simeq \text{PGO}(q^)$ est transitif sur les points (et c'est encore vrai pour le groupe des isométries), et cela quel que soit le corps de base, alors qu'il y a une condition arithmétique sur le corps (comme dans le cas non euclidien) pour la transitivité sur les droites.*

Même sur un corps quelconque, nous tenterons systématiquement, dans ce chapitre, de retrouver les principaux outils de la géométrie euclidienne, ceux qui lui donnent toute son efficacité, notamment en ce qui concerne les angles. En particulier, nous prêterons attention aux notions de supplémentaire et complémentaire, aux résultats concernant les parallèles (angles alternes-internes, etc.) et à la somme des angles d'un triangle. Eu égard à son importance, le théorème de l'angle inscrit fera l'objet d'un chapitre suivant.

En ce qui concerne la somme des angles d'un triangle, nous verrons que ce résultat est vraiment caractéristique de la géométrie euclidienne, directement lié au fait que la forme quadratique q^ est dégénérée et qu'il se traduit par une belle relation sur les invariants. Cela sera d'ailleurs l'occasion d'un rappel sur les déterminants de Gram, de Cayley-Menger et de Ptolémée.*

Enfin, nous étudierons les angles orientés, qui fournissent un outil très précieux pour montrer de nombreux résultats géométriques. On dispose avec ces angles d'une relation de Chasles efficace (ce qui fait cruellement défaut dans le cas non euclidien) et qui est un peu ici l'arme absolue.

Les données sont celles du chapitre 2 : l'espace vectoriel E et son dual, la forme q^* sur E^* , la droite à l'infini D_∞ et l'espace affine $X = \mathbf{P}(E) - D_\infty$. On en déduit la forme q induite sur E_∞ . On suppose aussi qu'on dispose des crochets et donc des produits extérieurs. On suppose enfin qu'on a choisi une équation l de la droite à l'infini. On se permettra nombre d'abus de langage, comme par exemple de confondre une droite de $\mathbf{P}(E)$ et son équation.

5.1 Distances

5.1.1 Transitivité des similitudes et des isométries sur les points de X

Notons déjà que le groupe des isométries de X est transitif sur X , sans aucune restriction :

5.1.1 Proposition. *Le groupe des isométries est transitif sur X . Plus précisément, si a, b sont deux points de X il existe une isométrie positive (resp. négative) qui envoie a sur b .*

Démonstration. Il suffit de prendre la translation de vecteur \vec{ab} (voir 1.2.27) si l'on veut une isométrie positive ou la symétrie d'axe la médiatrice de $[ab]$ (voir 4.3.1) si l'on préfère une négative.

5.1.2 Remarque. Bien entendu, il n'y a pas du tout unicité de ces transformations. En effet, si l'on a $u(a) = b$, on peut composer u avec une transformation qui fixe b . Or, le stabilisateur d'un point est isomorphe au groupe vectoriel $O(q)$, lié à \mathbf{U}_k , voir 1.2.1 et 1.2.3. Son cardinal est $2 \times (|k| + 1)$ (voir exercice 5.7.1), de sorte que si k est infini, $O(q)$ aussi.

Dans le cas des similitudes, on a même une propriété de double transitivité, voir 1.2.27 :

5.1.3 Proposition. *Le groupe des similitudes $\text{Sim}(X) \simeq \text{PGO}(q^*)$ est doublement transitif sur les points de X . Précisément, si a, b sont deux points de X il existe une unique similitude directe (resp. indirecte) qui envoie a sur b .*

Il n'y a rien de tel en géométrie non euclidienne : le groupe des isométries est certes transitif sur les points (en faisant abstraction des conditions arithmétiques), mais il n'y a pas de groupe doublement transitif associé à la forme quadratique.

5.1.2 Distance de deux points

Bien entendu, le groupe des isométries n'est pas doublement transitif. Dans le cas réel, la distance de deux points de X a été définie en 2.1.36 par la formule $ab = \sqrt{q(\vec{ab})}$. Nous montrons ici que cette distance (ou la forme q dans le cas général) est bien l'invariant de la double transitivité sur les points de X pour le groupe des isométries.

5.1.4 Proposition. *Soient (a, b) et (a', b') deux couples de points de X . Il existe une isométrie (resp. une isométrie positive) qui envoie a sur a' et b sur b' si et seulement si l'on a $q(\vec{ab}) = q(\vec{a'b'})$.*

Démonstration. Il est clair que la condition est nécessaire. Pour la réciproque, on se ramène au cas $a = a'$ par translation. On considère ensuite la médiatrice Δ de $[bb']$. Il résulte de 4.3.3 que a est sur Δ , de sorte que τ_Δ fixe a et échange b, b' comme souhaité. La transformation utilisée est indirecte, mais il suffit de composer avec la réflexion d'axe $(a'b')$ pour obtenir une transformation directe qui fait le travail.

On en déduit une description du quotient $(X \times X)/\text{Is}(X)$, voir 6.5.3.

Dans le cas réel, l'invariant $q(\vec{ab})$ redonne la norme euclidienne :

5.1.5 Définition. *On suppose $k = \mathbf{R}$. Soit $v \in E_\infty$. On définit la **norme**¹ de v comme le réel $\|v\| = \sqrt{q(v)}$. Lorsque v est le vecteur \vec{ab} avec $a, b \in X$ il y a identité entre norme et distance : $\|\vec{ab}\| = ab$.*

5.2 Angles

5.2.1 Transitivité sur les droites

Similitudes

Rappelons le résultat de 1.2.28 :

1. Le lecteur vérifiera qu'il s'agit bien d'une norme au sens des analystes.

5.2.1 Proposition. *Le groupe $\text{Sim}(X)$ est transitif sur les droites de X .*

Isométries

En revanche, les isométries ne sont transitives qu'au prix de conditions arithmétiques :

5.2.2 Proposition. *Deux droites affines $\overline{A}, \overline{A}'$ d'équations A, A' sont dans la même orbite sous $\text{Is}(X) \simeq O^\circ(q^*)$ si et seulement si on a $q^*(A) = q^*(A')$ dans k^*/k^{*2} .*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, quitte à changer A' en $\lambda A'$ on peut supposer $q^*(A) = q^*(A')$. On complète A (resp. A') en une base orthogonale A, B, l (resp. A', B', l) de E^* et, quitte à multiplier B et B' par un scalaire, on peut supposer qu'on a $[A, B, l] = [A', B', l] = 1$. On a alors $\delta(q^*) = q^*(A)q^*(B) = q^*(A')q^*(B')$ (cf. 2.2.24). On en déduit $q^*(B) = q^*(B')$. Les autres valeurs de φ^* sur les vecteurs de base étant nulles, l'application linéaire qui à A, B, l associe A', B', l est bien une isométrie stricte.

5.2.3 Remarques. 1) Bien entendu, la condition sur q^* est triviale sur \mathbf{R} , mais pas sur les rationnels. Ainsi, si $q^*(u, v, w) = u^2 + v^2$, on ne peut échanger les droites $x = 0$ et $x = y$. Pour le cas des corps finis, voir exercice 5.7.2.

2) On notera que le résultat, sur les droites, est tout à fait analogue au cas non euclidien.

5.2.2 Double transitivité 1

Une droite et un point

La proposition suivante permet de retrouver, en termes de la forme q^* , la notion de distance d'un point à une droite :

5.2.4 Proposition-Définition. *Soient $\overline{A}, \overline{A}'$ deux droites affines d'équations A, A' et $\overline{m}, \overline{m}'$ deux points de X de représentants m, m' vérifiant $l(m) = l(m') = 1$. On suppose que \overline{m} et \overline{m}' ne sont pas sur \overline{A} et \overline{A}' , respectivement. Il existe $\overline{u} \in \text{Is}(X)$ telle que $\overline{u}(\overline{A}) = \overline{A}'$ et $\overline{u}(\overline{m}) = \overline{m}'$ si et seulement si l'on a $\frac{A(m)^2}{q^*(A)} = \frac{A'(m')^2}{q^*(A')}$. La quantité $\frac{A(m)^2}{q^*(A)}$ est indépendante du choix de l'équation A de \overline{A} . Elle est appelée carré de la **distance** de \overline{m} à \overline{A} et notée $d(\overline{m}, \overline{A})^2$.*

Si \overline{h} est le point d'intersection de la perpendiculaire à \overline{A} passant par \overline{m} on a $d(\overline{m}, \overline{A})^2 = q(\overrightarrow{\overline{m}\overline{h}})$.

Démonstration. Supposons d'abord l'existence d'un élément $\bar{u} \in \text{Is}(X)$. En vertu de 3.2.3, on a $u = {}^t v^{-1}$ où $v \in O^\circ(q^*)$, ou encore $v = {}^t u^{-1}$ et cette formule signifie qu'on a $v(g) = g \circ u^{-1}$ pour $g \in E^*$. Comme v est une isométrie stricte, elle vérifie $v(l) = l$ et cela implique $l \circ u = l$. Comme m et m' sont normalisés par $l = 1$, la relation $\bar{u}(\bar{m}) = \bar{m}'$, c'est-à-dire $u(m) = \lambda m'$, implique $u(m) = m'$. Comme \bar{u} transforme \bar{A} en \bar{A}' , on a $v(A) = A \circ u^{-1} = \alpha A'$, avec $\alpha \in k^*$ (voir 3.2.1). Quitte à remplacer A' par $\alpha A'$, on peut supposer $v(A) = A'$ et, comme v est une isométrie, on en déduit $q^*(A) = q^*(A')$. On a alors $A'(m') = A(u^{-1}(m')) = A(m)$ et l'égalité annoncée.

Réciproquement, comme $A(m)$ et $A'(m')$ sont non nuls, la condition $\frac{A(m)^2}{q^*(A)} = \frac{A'(m')^2}{q^*(A')}$ montre déjà que $q^*(A) = q^*(A')$ sont égaux dans k^*/k^{*2} et, quitte à multiplier A ou A' par un scalaire, on peut supposer qu'ils sont égaux dans k^* . En vertu de 5.2.2, on peut déjà envoyer \bar{A} sur \bar{A}' et on est ainsi ramené au cas $\bar{A} = \bar{A}'$, $A = A'$ et $A(m) = \pm A(m')$. Si on a $A(m) = A(m')$, on considère la translation de vecteur $m' - m$. Elle envoie m sur m' et conserve \bar{A} . En effet, si x est un point de \bar{A} on a $A(x) = 0$, mais aussi $A(x + m' - m) = 0$. Si, au contraire, on a $A(m') = -A(m)$ on effectue d'abord la symétrie τ d'axe \bar{A} . On a $\tau(m) = m - 2 \frac{A(m)}{q^*(A)} n_A$, mais la formule $A(n_A) = q^*(A)$ (voir 2.1.24) donne $A(\tau(m)) = -A(m)$ et on est ramené au cas précédent.

Montrons la dernière formule. La perpendiculaire à \bar{A} passant par \bar{m} a pour équation $m \wedge n_A$ (voir 2.2.5). Son intersection avec \bar{A} est donc le point $h = A \wedge (m \wedge n_A) = A(n_A)m - A(m)n_A$. On a $l(h) = A(n_A) = q^*(A)$ et le point h normalisé est donc $m - \frac{A(m)}{q^*(A)} n_A$. On en déduit $q(\overrightarrow{h\bar{m}}) = q(m - h) = \frac{A(m)^2}{q^*(A)^2} q(n_A) = \frac{A(m)^2}{q^*(A)} = d(\bar{m}, \bar{A})^2$.

5.2.5 Remarque. Dans le cas de \mathbf{R} , si l'on choisit une base de E et que l'on suppose que q^* est donnée par $u^2 + v^2$ on peut écrire $m = (x, y, 1)$, $A = ux + vy + w$ et l'invariant apparu ci-dessus s'écrit $\frac{(ux + vy + w)^2}{u^2 + v^2}$. On reconnaît le carré de la distance de m à \bar{A} au sens usuel.

5.2.6 Remarques.

1) Une adaptation évidente de la preuve de 5.2.4 montre, pour les couples (\bar{m}, \bar{A}) avec $\bar{m} \in \bar{A}$, la condition de transitivité se résume à $q^*(A) = q^*(A')$ dans k^*/k^{*2} (car on a alors $d(\bar{m}, \bar{A}) = 0$). Sur \mathbf{R} , le groupe est donc transitif

2. Sur \mathbf{R} c'est le cas où m, m' sont du même côté de \bar{A} .

sur ces couples. La même assertion est encore vraie avec $\text{Is}^+(X)$ (composer au besoin avec la réflexion τ_A).

2) On peut montrer que le groupe $\text{Sim}(X)$ opère transitivement sur les couples (D, m) avec $m \notin D$, voir exercice 5.7.3.

Le cas des droites parallèles

5.2.7 Proposition-Définition. Soient \bar{A}, \bar{A}' deux droites parallèles d'équations A, A' et soient m un point de \bar{A}' .

1) La quantité $d(m, \bar{A})^2$ est indépendante du choix de m . Cette quantité est notée $d(\bar{A}, \bar{A}')^2$ et appelée carré de la distance de \bar{A} à \bar{A}' . Elle est symétrique en A et A' . Étant donnés deux couples (A_1, A'_1) et (A_2, A'_2) de droites parallèles, il existe une isométrie u qui envoie A_1 sur A_2 et A'_1 sur A'_2 si et seulement si on a $d(A_1, A'_1)^2 = d(A_2, A'_2)^2$.

2) Soit \bar{B} une droite quelconque, non parallèle à \bar{A} . On a la formule (dans laquelle le second membre est donc indépendant de B et symétrique en A, A') :

$$(*) \quad d(\bar{A}, \bar{A}')^2 = \frac{[A, A', B]^2}{[A', B, l]^2 q^*(A)}.$$

Démonstration. 1) Si on remplace³ m par $m' \in A'$, comme A' est parallèle à A , $m' - m$ est la direction de A et on a donc $A(m) = A(m')$, ce qui montre l'indépendance de l'invariant. Pour montrer l'existence d'une isométrie envoyant les couples de droites l'un sur l'autre on choisit $m_1 \in A'_1$ et $m_2 \in A'_2$ et on applique 5.2.4. On conclut par le postulat d'Euclide 2.1.9.

2) On considère le point $A' \wedge B$ de A' . On a $l(A' \wedge B) = [A', B, l]$, de sorte que le point normalisé s'écrit $m = \frac{A' \wedge B}{[A', B, l]}$. On a alors $A(m) = \frac{[A, A', B]}{[A', B, l]}$, d'où la formule.

5.2.8 Remarques. 1) Le fait que le second membre de l'égalité (*) soit symétrique en A, A' s'écrit, en tenant compte des formules 2.2.24, $\frac{\varphi^*(A, B)^2}{q^*(A)q^*(B)} = \frac{\varphi^*(A', B)^2}{q^*(A')q^*(B)}$, soit $I^*(A, B) = I^*(A', B)$. C'est l'égalité des angles "alternes-internes", voir ci-dessous 5.2.12.

2) Comme les droites sont parallèles, les formes A, A', l sont liées, et on peut supposer $A' = A + \lambda l$. On a alors $q^*(A) = q^*(A')$ et $d(A, A')^2 = \lambda^2 / q^*(A)$.

3. On confond ici les points et leurs représentants normalisés et les droites et leurs équations.

Si l'on écrit les équations $ux + vy + wt$ et $u'x + v'y + w't$ avec $u^2 + v^2 = u'^2 + v'^2$ on obtient $d(A, A')^2 = \frac{(w - w')^2}{u^2 + v^2}$.

3) Les similitudes opèrent transitivement sur les couples de droites parallèles et distinctes, voir exercice 5.7.3.

5.2.3 Double transitivité 2 : les angles de droites

Définition

La définition est exactement la même qu'en non euclidien :

5.2.9 Proposition-Définition. Soient $\overline{A}, \overline{B}$ deux droites affines d'équations $A, B \in E^*$. On pose $I^*(\overline{A}, \overline{B}) = \frac{\varphi^*(A, B)^2}{q^*(A)q^*(B)}$. Cet invariant ne dépend pas du choix des représentants des droites. On l'appelle (abusivement) **angle (non orienté) des droites \overline{A} et \overline{B}** . Si on considère un triangle abc , l'angle des droites (ab) et (ac) est donné par la formule :

$$I^*((ab), (ac)) = \frac{\varphi(\vec{ab}, \vec{ac})^2}{q(\vec{ab})q(\vec{ac})}.$$

Démonstration. C'est clair. On notera que, comme \overline{A} et \overline{B} sont des droites affines, $q^*(A)$ et $q^*(B)$ sont non nuls. La dernière formule vient de 2.2.28.

5.2.10 Remarque. Comme il a été dit, on omettra le plus souvent les barres dans l'écriture des droites $\overline{A}, \overline{B}$ et on écrira donc $I^*(A, B)$.

Quelques propriétés

5.2.11 Proposition.

- 1) On a $I^*(A, B) = 1$ si et seulement si les droites sont parallèles.
- 2) On a $I^*(A, B) = 0$ si et seulement si les droites sont perpendiculaires.

Démonstration. 1) La condition signifie $\varphi^*(A, B)^2 = q^*(A)q^*(B)$ et elle est vérifiée si et seulement si les droites sont parallèles, cf. 2.1.10.

2) Cela résulte de 2.1.12.

5.2.12 Proposition. (Angles et parallèles)

Si A, A' sont parallèles et si B est sécante à A, A' , on a $I^*(A, B) = I^*(A', B)$.

Démonstration. Comme A, A' sont parallèles on a $A' = A + \lambda l$ et la conclusion résulte du fait que l est dans le noyau de q^* .

5.2.13 Remarque. Cette proposition est l'analogie de celles sur les angles alternes-internes ou correspondants, sans la notion d'orientation, bien entendu.

Angle et transitivité

Comme dans le cas non euclidien, l'angle est le *taraboutzim* attaché à deux droites (non parallèles) pour l'opération du groupe des isométries :

5.2.14 Proposition. *Pour les couples (A, B) de droites affines non parallèles de $\mathbf{P}(E)$, un système complet d'invariants⁴ pour le groupe des isométries $\text{Is}(X) \simeq O^\circ(q^*)$ est constitué par : $q^*(A), q^*(B)$ dans k^*/k^{*2} et $I^*(A, B)$ dans k .*

Démonstration. Il est clair que les conditions sont nécessaires. Réciproquement, quitte à changer de représentants, on peut supposer $q^*(A) = q^*(A')$, $q^*(B) = q^*(B')$ et $\varphi^*(A, B) = \varphi^*(A', B')$. Comme A et B (resp. A' et B') ne sont pas parallèles, on les complète en des bases A, B, l et A', B', l de E^* et le résultat est immédiat en envoyant ces bases l'une sur l'autre.

5.2.15 Remarques.

1) Dans le cas parallèle, l'invariant angle ne suffit plus, on a besoin aussi de la distance, voir ci-dessus 5.2.7.

2) Dans le cas réel on pose $I^*(A, B) = \cos^2(\theta)$, avec $\theta \in [0, \pi/2]$ (c'est justifié par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cf. 2.1.3) et l'angle des droites A, B est le réel θ . On notera que, paradoxalement, l'invariant le plus naturel ici est le moins usité des invariants angles de la géométrie euclidienne usuelle. Cela tient au fait que nous travaillons sur un corps quelconque, pas nécessairement ordonné.

3) Bien entendu, deux angles supplémentaires au sens usuel sont égaux en tant qu'angles de droites (changer \overrightarrow{ab} en son opposé ne change pas l'angle ici). En revanche, on a un résultat sur les angles complémentaires : si A, A' sont perpendiculaires en o et si B passe par o on a $I^*(A, B) + I^*(A', B) = 1$, voir exercice 5.7.4. En termes réels, cela correspond au fait que, si $\varphi = \pi/2 - \theta$, on a $\cos^2 \varphi = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$.

4) Il y a un autre invariant de deux droites, à savoir $\frac{[A, B, l]^2}{q^*(A)q^*(B)}$ qui correspond au sinus de l'angle, mais il est relié au précédent par la formule de Lagrange : $q^*(A)q^*(B) = \varphi^*(A, B)^2 + \delta(q^*)[A, B, l]^2$, voir 2.2.24. Cette formule, en termes réels, n'est que la traduction de l'identité $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

4. Rappelons, cf. Partie IV ??, que cela signifie qu'il existe $g \in O^\circ(q^*)$ telle que $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$ si et seulement si on a $q^*(A) = q^*(A')$ et $q^*(B) = q^*(B')$ dans k^*/k^{*2} et $I^*(A, B) = I^*(A', B')$ dans k .

La formule de Laguerre

On reprend les notations de 2.1.29.

5.2.16 Proposition. *Soient A, B deux droites affines non parallèles de directions a, b et soit o leur point d'intersection. Soient I, J les points cycliques et $(oI), (oJ)$ les deux droites isotropes passant par o . On pose $r = \llbracket A, B, (oI), (oJ) \rrbracket = \llbracket a, b, I, J \rrbracket$. On a la formule de Laguerre : $4I^*(A, B) = r + r^{-1} + 2$.*

Démonstration. On a $q^*(A) = \delta(q^*)q(a)$, en vertu de 2.2.6 et 2.2.26, et de même pour les autres. Le résultat est alors une conséquence de la formule de Laguerre appliquée au plan vectoriel hyperbolique $E_{\infty, K}$ (voir Partie IV ??).

5.3 Les cas d'isométrie et de similitude des triangles

Dans cette section on énonce les cas d'isométrie et de similitude des triangles dans le cas d'un corps quelconque. Rappelons qu'un triangle abc consiste en la donnée de trois points non alignés de X . La première chose à faire est de repérer des invariants d'un triangle. Pour le groupe des isométries on a évidemment les produits scalaires du type $q(\vec{ab})$ ou $\varphi(\vec{ab}, \vec{ac})$. Pour le groupe des similitudes, ces éléments ne sont pas invariants, mais multipliés par le multiplicateur μ . On obtient des invariants en prenant des quotients des produits scalaires, avec la règle que les degrés par rapport aux vecteurs soient les mêmes au numérateur et au dénominateur. Ainsi $q(\vec{ab})/q(\vec{ac})$, par exemple, est un invariant de similitude, de même que l'“angle” $\frac{\varphi(\vec{ab}, \vec{ac})^2}{q(\vec{ab})q(\vec{ac})}$.

5.3.1 Le troisième cas d'isométrie

Contrairement à Euclide, on commence ici par le troisième cas :

5.3.1 Proposition. *Soit abc un triangle. Un système complet d'invariants de abc pour l'action du groupe des isométries est formé des quantités $q(\vec{bc})$, $q(\vec{ca})$ et $q(\vec{ab})$. Autrement dit, étant donnés deux triangles abc et $a'b'c'$, il existe une isométrie u qui envoie respectivement a sur a' , b sur b' et c sur c' si et seulement si l'on a $q(\vec{bc}) = q(\vec{b'c'})$, $q(\vec{ca}) = q(\vec{c'a'})$ et $q(\vec{ab}) = q(\vec{a'b'})$.*

Démonstration. En vertu de 5.1.4 on peut trouver une isométrie qui envoie a sur a' et b sur b' . Quitte à composer par cette isométrie on est donc ramené

au cas $a = a'$ et $b = b'$. Il y a alors deux possibilités. Si c et c' sont égaux, on a fini. Sinon, on considère la médiatrice D de c, c' . En vertu de 4.3.3, elle contient a et b et c'est donc la droite (ab) . Mais alors, la symétrie par rapport à $D = (ab)$ fixe a et b et échange c et c' et on a gagné.

5.3.2 Corollaire. *Soit abc un triangle. Un système complet d'invariants de abc pour l'action du groupe des isométries est formé des quantités $u = \varphi(\vec{ca}, \vec{ab})$, $v = \varphi(\vec{ab}, \vec{bc})$ et $w = \varphi(\vec{bc}, \vec{ca})$.*

Démonstration. Cela résulte des formules du type $q(\vec{bc}) = -v - w$ qui proviennent de la relation de Chasles.

5.3.2 La formule d'Al-Kashi pour un corps quelconque

5.3.3 Théorème. *Soit abc un triangle de X .*

1) *On suppose les représentants a, b, c normalisés par $l = 1$. On a la formule d'Al-Kashi :*

$$q^*(b \wedge c) = q^*(a \wedge b) + q^*(c \wedge a) - 2\varphi^*(a \wedge b, a \wedge c).$$

2) *On a la formule vectorielle :*

$$q(\vec{bc}) = q(\vec{ab}) + q(\vec{ac}) - 2\varphi(\vec{ab}, \vec{ac}).$$

Démonstration. 1) On repart de la formule des aires 2.2.12 :

$$b \wedge c + c \wedge a + a \wedge b = [a, b, c]l.$$

On en tire $b \wedge c = a \wedge c + b \wedge a + [a, b, c]l$ et comme l est dans le noyau, on a $q^*(b \wedge c) = q^*(a \wedge c) + q^*(b \wedge a) + 2\varphi^*(a \wedge c, b \wedge a)$ d'où le résultat.

2) Il y a deux façons de faire. On peut utiliser la formule précédente et 2.2.28 ou simplement⁵ appliquer q à la relation de Chasles $\vec{bc} = \vec{ba} + \vec{ac}$.

5.3.4 Corollaire. (Pythagore) *Soit abc un triangle rectangle en a (i.e. tel que (ab) et (ac) soient perpendiculaires). On a $q(\vec{bc}) = q(\vec{ab}) + q(\vec{ac})$. Dans le cas où le corps de base est \mathbf{R} on a $bc^2 = ab^2 + ac^2$.*

Démonstration. En effet, on a $\varphi(\vec{ab}, \vec{ac}) = 0$.

5. Cette option est préférable car elle vaut en toute dimension, alors que les formules mettant en jeu les produits extérieurs ne sont valables qu'en dimension 3.

5.3.3 Le premier et le deuxième cas d'isométrie

Pour le premier cas d'isométrie, on a une variante en termes de produits scalaires (voir aussi 6.2.3) :

5.3.5 Proposition. *Soit abc un triangle. Un système complet d'invariants de abc pour l'action du groupe des isométries est formé des quantités $q(\vec{ab})$, $q(\vec{ac})$ et $\varphi(\vec{ab}, \vec{ac})$.*

Démonstration. En effet, Al-Kashi montre que ces données sont équivalentes à celles de $q(\vec{bc})$, $q(\vec{ca})$ et $q(\vec{ab})$.

5.3.6 Remarque. En revanche, les quantités $q(\vec{ab})$, $q(\vec{ac})$ et $I^*((ab), (ac))$ ne forment pas un système complet d'invariants. En effet, il suffit de considérer deux points distincts b, b' , leur milieu a et un point c hors de (bb') . Les invariants ci-dessus sont les mêmes pour abc et $ab'c$ (l'angle I^* , qui est un angle de droites, ne change pas en changeant \vec{ab} en $\vec{ab}' = -\vec{ab}$) et pourtant ces triangles ne sont isométriques que si c est sur la médiatrice de b, b' .

5.3.7 Remarque. Sur un corps k quelconque, on ne peut pas sauver le deuxième cas d'isométrie (celui qui comporte deux angles et un côté). En effet, ni les quantités $q(\vec{bc})$, $\varphi(\vec{bc}, \vec{ba})$ et $\varphi(\vec{cb}, \vec{ca})$, ni $q(\vec{bc})$, $I^*((bc), (ba))$ et $I^*((cb), (ca))$ ne constituent des systèmes complets d'invariants⁶. Pour les premières, cela résulte du fait que ces quantités sont liées par la relation $q(\vec{bc}) = \varphi(\vec{bc}, \vec{ba}) + \varphi(\vec{cb}, \vec{ca})$ obtenue en appliquant $\varphi(\vec{bc}, \cdot)$ à la relation de Chasles $\vec{bc} + \vec{ca} + \vec{ab} = 0$. Pour les secondes, comme les angles sont des angles de droites, la propriété est fautive même sur \mathbf{R} (voir la figure ci-dessous).

5.3.4 Cas de similitude

Les rapports de longueur donnent un critère de similitude :

5.3.8 Proposition. *Soit abc un triangle. Un système complet d'invariants de abc pour l'action du groupe des similitudes est formé des deux rapports $q(\vec{ab})/q(\vec{bc})$ et $q(\vec{ca})/q(\vec{bc})$.*

Démonstration. Soient abc et $a'b'c'$ deux triangles avec les mêmes invariants. En vertu de 5.1.3, on sait qu'on peut envoyer b sur b' et c sur c' par une

6. En revanche, un système mixte avec un terme φ^* et un I^* peut convenir, voir exercice 5.7.5.

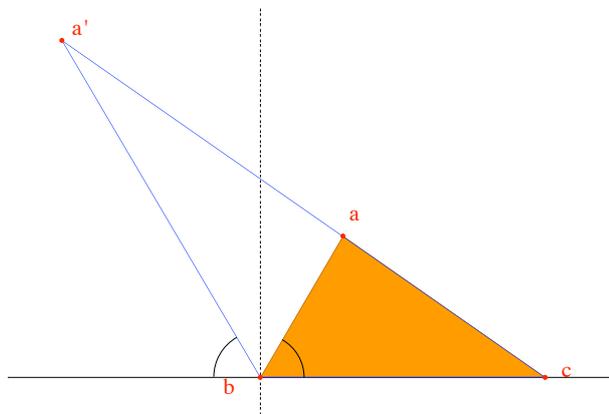


FIGURE 5.1 – Le contre-exemple au deuxième cas d'isométrie

similitude. On est donc ramené au cas $b = b'$, $c = c'$ et on a $q(\vec{bc}) = q(\vec{b'c'})$. On en déduit $q(\vec{ab}) = q(\vec{a'b'})$ et $q(\vec{ca}) = q(\vec{ca'})$ et on conclut en appliquant le troisième cas d'isométrie.

5.3.9 Remarques.

- 1) On peut donner d'autres critères de similitude mettant en jeu deux invariants choisis (presque) n'importe comment, voir exercice 5.7.6.
- 2) Attention, deux angles de droites ne constituent pas un système complet d'invariants pour le groupe des similitudes (les angles de droites ne permettent pas de distinguer entre un angle et son supplémentaire). Le lecteur vérifiera qu'on obtient un contre-exemple (sur le corps des réels) comme suit. On considère un triangle abc isocèle en a . On choisit un point m sur le segment $[bc]$, distinct du milieu de b, c . Alors les triangles abm et acm ont les mêmes angles de droites en b, c et en m , mais ne sont pas semblables.

5.4 Le cas réel : angles de demi-droites

Dans ce paragraphe on suppose que le corps de base est \mathbf{R} et que la forme q^* est positive.

5.4.1 Demi-plans, demi-droites, segments

Nous rappelons brièvement quelques définitions liées à la structure d'ordre du corps des réels. Pour tout ce qui concerne les barycentres et la convexité, le lecteur est renvoyé à Partie II, ?? ou à [MCD07].

5.4.1 Proposition-Définition. On suppose les points normalisés par $l = 1$. Soit D une droite d'équation f . Les **demi-plans ouverts** limités par D sont les parties X^{+0} et X^{-0} définies par $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$. Les **demi-plans fermés** sont les parties X^+ et X^- définies par $f(x) \geq 0$ et $f(x) \leq 0$. Ils sont réunions des demi-plans ouverts et de D .

Si la droite D est définie par deux points a et b , et si c est un point de X n'appartenant pas à D , le demi-plan ouvert limité par D contenant c est l'ensemble des points m qui s'écrivent sous l'une des formes équivalentes suivantes :

- $m = \alpha a + \beta b + \gamma c$ avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $\gamma > 0$,
 - $m = a + \beta \vec{ab} + \gamma \vec{ac}$, soit encore $\vec{am} = \beta \vec{ab} + \gamma \vec{ac}$, avec $\gamma > 0$.
- La réflexion τ_D échange les demi-plans X^{+0} et X^{-0} .

Démonstration. Que les deux formes soient équivalentes résulte de l'écriture d'un vecteur \vec{ab} sous la forme $b - a$ et la conclusion vient de la formule $f(m) = \gamma f(c)$.

Le dernier point résulte de l'écriture de la réflexion 3.4.6 et de la formule 2.1.24.

5.4.2 Proposition-Définition. Soient $a, b \in X$ avec $a \neq b$. On suppose a, b relevés en des vecteurs de E vérifiant $l(a) = l(b) = 1$. La **demi-droite** $[ab)$ est l'ensemble des points $c \in X$ qui s'écrivent sous l'une des formes équivalentes suivantes :

- $c = a + \mu \vec{ab}$ avec $\mu \geq 0$, soit encore $\vec{ac} = \mu \vec{ab}$ avec $\mu \geq 0$,
- $c = \lambda a + \mu b$ avec $\lambda + \mu = 1$ et $\mu \geq 0$.

La demi-droite opposée est l'ensemble des points qui s'écrivent avec $\mu \leq 0$.

5.4.3 Définition. Soient a, b deux points de X normalisés par $l(a) = l(b) = 1$. Le **segment** $[ab]$ est l'ensemble des points $m = \lambda a + \mu b$ avec $\lambda, \mu \geq 0$ et $\lambda + \mu = 1$. C'est l'intersection des demi-droites $[ab)$ et $[ba)$. Le **segment ouvert** $]ab[$ est l'ensemble des points $m = \lambda a + \mu b$ avec $\lambda, \mu > 0$ et $\lambda + \mu = 1$. On a $[ab] =]ab[\cup \{a, b\}$.

Le lecteur trouvera quelques précisions autour de ces notions dans l'exercice 5.7.8. Le résultat suivant est la base du traitement axiomatique de ces questions chez Hilbert :

5.4.4 Proposition. Soit D une droite. Les points a, b sont dans des demi-plans ouverts différents par rapport à D si et seulement si le segment ouvert $]ab[$ rencontre D . On dit alors qu'ils sont (strictement) **de part et d'autre** de D .

Démonstration. Un point m du segment $]ab[$ s'écrit $m = \lambda a + (1 - \lambda)b$ avec $0 < \lambda < 1$. On a donc $f(m) = \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$ et on vérifie qu'il existe un point m du segment vérifiant $f(m) = 0$ si et seulement si on a $f(a)f(b) < 0$.

5.4.5 Proposition. *Soit D une droite et soient X^+ (resp. X^{+0}) l'un des demi-plans limités par D . Si a est dans D et b dans X^+ (resp. X^{+0}) toute la demi-droite $[ab)$ (resp. $[ab) - \{a\}$) est dans X^+ (resp. X^{+0})*

La proposition suivante est utilisée implicitement par Euclide pour montrer le premier cas d'égalité des triangles :

5.4.6 Proposition. *1) Le groupe $Is^+(X)$ opère transitivement sur les drapeaux formés d'un point a et d'une demi-droite $[ab)$.*

2) Le groupe $Is(X)$ opère transitivement sur les drapeaux formés d'un point a , d'une demi-droite $[ab)$ et d'un demi-plan limité par (ab) .

Démonstration. 1) On considère deux demi-droites $[ab)$ et $[a'b')$. En vertu de 5.2.6 on peut envoyer a sur a' et (ab) sur $(a'b')$ par une isométrie positive. Si la demi-droite $[ab)$ s'envoie sur la demi-droite $[a'b')$ on a gagné, sinon on compose par la symétrie centrale $\sigma_{a'}$.

2) Si l'isométrie précédente ne convient pas pour les demi-plans on la compose avec la réflexion $\tau_{(a'b')}$.

5.4.2 Angles (non orientés) de demi-droites

5.4.7 Proposition-Définition. *Soient a, b, c trois points de X dont les représentants vérifient $l(a), l(b), l(c) > 0$ (par exemple des points normalisés par $l = 1$). On suppose que a est distinct de b et c . On pose :*

$$I^+([ab), [ac)) = \frac{\varphi^*(a \wedge b, a \wedge c)}{\sqrt{q^*(a \wedge b)q^*(a \wedge c)}}.$$

La quantité I^+ ne dépend que des demi-droites $[ab), [ac)$.

En termes de vecteurs, on a la formule :

$$I^+([ab), [ac)) = \frac{\varphi(\vec{ab}, \vec{ac})}{\sqrt{q(\vec{ab})q(\vec{ac})}}.$$

On a $I^+([ab), [ac)) \in [-1, 1]$. On définit l'angle (non orienté) des demi-droites $[ab), [ac)$ comme le réel $\widehat{bac} = \text{Arccos } I^+([ab), [ac))$. C'est un élément de $[0, \pi]$ et on a $\cos \widehat{bac} = I^+([ab), [ac))$.

Démonstration. Comme on a imposé $l > 0$, I^+ ne dépend pas du choix des représentants de a, b, c et elle est aussi inchangée si l'on remplace, disons, b par $b' = \lambda a + \mu b$ avec $\mu > 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que I^+ est dans $[-1, 1]$. La formule avec les vecteurs résulte de 2.2.28 (dans le cas réel, avec q^* positive, le petit discriminant $\delta(q^*)$ est positif, voir 2.2.17).

5.4.8 Remarques.

- 1) En vertu de 5.2.9, on a $I^+([ab], [ac])^2 = I^*((ab), (ac))$.
- 2) On a $\widehat{bac} = \widehat{cab}$: il s'agit bien d'un angle non orienté.
- 3) Si l'on change la demi-droite $[ac]$ en son opposée $[ac']$, la quantité $I^+([ab], [ac])$ est changée en son opposée et l'angle \widehat{bac} est changé en son **supplémentaire** $\pi - \widehat{bac}$. Cet angle est distinct de \widehat{bac} sauf si les droites (ab) et (ac) sont perpendiculaires.

Une formule familière

On retrouve ici la définition élémentaire du produit scalaire en termes de distances et de cosinus de l'angle :

5.4.9 Proposition. Soient $a, b, c \in X$ avec $a \neq b, c$. Rappelons (cf. 2.1.36) qu'on a posé $ab = \sqrt{q(\vec{ab})}$. On a la formule : $\varphi(\vec{ab}, \vec{ac}) = ab \, ac \, \cos \widehat{bac}$.

Double transitivité sur les demi-droites

5.4.10 Proposition. Soient $([ab], [ac])$ et $([a'b'], [a'c'])$ deux couples de demi-droites de X .

- 1) Si une similitude envoie a sur a' et les demi-droites $[ab]$ et $[ac]$ respectivement sur $[a'b']$ et $[a'c']$ on a l'égalité d'angles : $\widehat{bac} = \widehat{b'a'c'}$.
- 2) Réciproquement, si on a l'égalité d'angles, il existe une isométrie qui envoie a sur a' et $[ab]$ et $[ac]$ sur $[a'b']$ et $[a'c']$ respectivement.

Démonstration. 1) Rappelons que, sur \mathbf{R} , une similitude est produit d'une isométrie par une homothétie (voir 1.2.17), donc multiplie la forme quadratique par un nombre > 0 . Cela donne le premier point.

2) Pour la réciproque, les angles de droites étant égaux, il existe une isométrie qui envoie (ab) sur $(a'b')$ et (ac) sur $(a'c')$ en vertu de 5.2.14. Elle envoie donc a sur a' . Quitte à faire une symétrie de centre a' on peut supposer que $[ab]$ s'envoie sur $[a'b']$. L'image de $[ac]$ est alors $[a'c']$ ou la demi-droite opposée $[a'c'']$. Si c'est $[a'c'']$, en vertu du point 1), on a $\widehat{bac} = \widehat{b'a'c''} = \widehat{b'a'c'}$, ce qui n'est possible que si les droites $(a'b')$ et $(a'c')$ sont perpendiculaires (voir 5.4.8). Dans ce cas on termine en appliquant la symétrie d'axe $(a'b')$.

Al-Kashi et Pythagore

On peut traduire les résultats 5.3.3 et 5.3.4 dans le cas réel sous des formes plus familières :

5.4.11 Théorème. *Soit abc un triangle. On a la formule d'Al-Kashi : $bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2 ab ac \cos \widehat{bac}$.*

5.4.12 Corollaire. *Soit abc un triangle rectangle en a . On a $bc^2 = ab^2 + ca^2$.*

Angles et parallèles

5.4.13 Définition. *Deux demi-droites $\overrightarrow{[ab]}$ et $\overrightarrow{[a'b']}$ sont dites directement (resp. inversement) parallèles si l'on a $\overrightarrow{a'b'} = \lambda \overrightarrow{ab}$ avec $\lambda > 0$ (resp. < 0).*

On retrouve alors immédiatement les résultats d'Euclide :

5.4.14 Proposition. *Soient a, a' deux points distincts.*

1) *Si deux demi-droites $[ab]$ et $[a'b']$ sont inversement parallèles on a l'égalité d'angles (alternes-internes) $\widehat{a'ab} = \widehat{aa'b'}$.*

2) *Si deux demi-droites $[ab]$ et $[a'b']$ sont directement parallèles on a l'égalité d'angles (correspondants) $\widehat{a''ab} = \widehat{aa'b'}$ où a'' est un point la demi-droite opposée à $[aa']$.*

5.4.3 Aires et sinus des angles

Dans ce paragraphe, on suppose que le petit discriminant $\delta(q^*)$ de q^* est égal à 1. C'est le cas, par exemple, si la base qui définit le crochet sur E^* est du type (e_1^*, e_2^*, e_3^*) avec $l = e_3^*$ et (e_1^*, e_2^*) orthonormée pour q^* . On a alors $\Delta(q) = 1$. On définit l'aire d'un triangle (cf. Partie II ??) :

5.4.15 Définition. *Soit abc un triangle. On appelle aire algébrique de abc le nombre $\mathcal{A}(abc) = \frac{1}{2} \frac{[a, b, c]}{l(a)l(b)l(c)}$. L'aire "ordinaire" de abc est la valeur absolue de l'aire algébrique et on la note $|\mathcal{A}|(abc)$. Si les représentants de a, b, c vérifient $l(a) = l(b) = l(c) = 1$, on a $\mathcal{A}(a, b, c) = \frac{1}{2}[a, b, c] = \frac{1}{2}[\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}]$ (voir 2.2.19).*

Comme le crochet (alias produit vectoriel) est un déterminant, on en déduit le comportement de l'aire par similitude :

5.4.16 Proposition. *Soit u une similitude de rapport $\lambda > 0$ (voir 1.2.17). Si u est directe (resp. indirecte) elle multiplie l'aire algébrique par λ^2 (resp. $-\lambda^2$). En particulier, une isométrie conserve l'aire ordinaire.*

Démonstration. Comme u est produit d'une isométrie par une homothétie, cela résulte du comportement du déterminant par ces applications.

On déduit de la définition de l'aire son calcul en termes de sinus :

5.4.17 Proposition. *On a les formules :*

$$|\mathcal{A}|(abc) = \frac{1}{2}ab \, ac \, \sin \widehat{bac} \quad \text{et} \quad \sin \widehat{bac} = \frac{|[a, b, c]|}{ab \cdot ac}.$$

Démonstration. On a vu (cf. 2.2.22) l'identité de Lagrange :

$$q(\vec{ab})q(\vec{ac}) - \varphi(\vec{ab}, \vec{ac})^2 = \Delta(q)[a, b, c]^2.$$

Par hypothèse, on a $\Delta(q) = 1$ et la formule précédente s'écrit alors : $ab^2 \, ac^2 - ab^2 \, ac^2 \cos^2 \widehat{bac} = [a, b, c]^2$, d'où le résultat (le sinus est positif car \widehat{bac} est dans $[0, \pi]$).

5.4.18 Remarque. Avec cette formule, on voit que l'identité de Lagrange se réduit à la formule $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

5.4.19 Corollaire. (Formule des sinus) *Soit abc un triangle. On note \widehat{a} , \widehat{b} , \widehat{c} ses angles. On a la formule :*

$$\frac{\sin \widehat{a}}{bc} = \frac{\sin \widehat{b}}{ca} = \frac{\sin \widehat{c}}{ab}.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire l'aire de trois manières différentes en utilisant la formule précédente appliquée en chaque sommet.

5.4.4 Les cas d'isométrie et de similitude dans le cas réel

Ce paragraphe est un hommage aux mânes d'Euclide.

5.4.20 Théorème. *Soit abc un triangle.*

1) *Les triplets d'invariants suivants constituent des systèmes complets d'invariants pour l'action du groupe des isométries sur les triangles :*

- les trois longueurs, bc, ca, ab ,
- deux longueurs et un angle (compris entre les côtés correspondants), par exemple ab, ac, \widehat{bac} ,
- deux angles, disons \widehat{abc} et \widehat{bca} , et la longueur reliant leurs sommets, ici bc .

2) *Les couples d'invariants suivants constituent des systèmes complets d'invariants pour l'action du groupe des similitudes sur les triangles :*

- deux angles, \widehat{bac} , \widehat{abc} par exemple,
- un angle et le rapport des côtés qui l'entourent, par exemple \widehat{bac} et ab/ac ,
- deux rapports de longueurs de côtés, par exemple ab/bc et ac/bc .

Démonstration. 1) Le cas des trois longueurs résulte de 5.3.1, celui de deux longueurs et un angle résulte du précédent et de la formule d'Al-Kashi ou de 5.3.5 et de 5.4.9. Il reste le cas d'une longueur et deux angles. On considère deux triangles abc et $a'b'c'$ vérifiant $bc = b'c'$, $\widehat{b} = \widehat{b'}$ et $\widehat{c} = \widehat{c'}$. En utilisant 5.4.10 on se ramène au cas $b = b'$, $c = c'$ et $[ba] = [ba']$. Toujours en vertu de 5.4.10 il existe alors une isométrie qui envoie $[cb]$ sur elle-même et $[ca]$ sur $[ca']$. Cette isométrie fixe c et b , donc la droite (cb) , et c'est donc l'identité (auquel cas on a $(ca) = (ca')$, donc $a = a'$ et on a gagné) ou la symétrie τ par rapport à (cb) . Mais ce dernier cas est impossible. En effet, appelons X^+ le demi-plan limité par (bc) qui contient a . En vertu de 5.4.5 il contient aussi les demi-droites $[ba]$ et $[ca]$, donc a' et $[ca']$. Mais, comme on a $\tau([ca]) = [ca']$, cette demi-droite est dans l'autre demi-plan limité par (bc) (voir 5.4.1) et c'est absurde.

2) Le cas où l'on se donne deux rapports de longueurs vient de 5.3.8. Pour le cas de deux angles, soient abc et $a'b'c'$ deux triangles avec des angles égaux en a, a' et en b, b' . En vertu de 5.1.3, il existe une similitude qui envoie a sur a' et b sur b' . Comme cette similitude conserve les angles, on est ramené au cas $a = a'$, $b = b'$. Mais alors, on a aussi $ab = a'b'$ et on conclut par le dernier cas d'isométrie vu en 1). Il reste le cas où l'on se donne un angle, disons \widehat{a} , et le rapport ab/ac . On peut encore envoyer a sur a' et b sur b' par une similitude. On est donc ramené au cas $a = a'$, $b = b'$. On a alors $\widehat{a} = \widehat{a'}$, $ab = a'b'$, mais aussi, par conservation des rapports, $ac = a'c'$ et on conclut par le cas d'isométrie "deux côtés et un angle".

5.4.21 Remarques. 1) Nous verrons au paragraphe suivant qu'on a la relation $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = \pi$. Il en résulte que la condition du cas "deux angles, un côté" peut être oubliée (et on a une preuve plus facile du résultat avec 5.4.19).

2) Avec 5.4.16 on peut énoncer un "quatrième cas" d'isométrie : deux triangles sont isométriques (resp. directement isométriques) si et seulement si ils ont deux angles égaux et même aire (resp. même aire algébrique), cf. 3.3.3.

5.5 La somme des angles d'un triangle

Nous abordons ici le théorème peut-être le plus important de la géométrie euclidienne : le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à π (en

géométrie réelle). On sait que ce résultat est en défaut dans les géométries non euclidiennes puisque la somme des angles est plus petite que π en géométrie hyperbolique (voir ??) et plus grande en géométrie elliptique (voir ??). Avec l'entrée que nous avons choisie, ce théorème va apparaître comme une conséquence directe du fait que la forme quadratique q^* qui définit la géométrie est dégénérée et il va se traduire, comme attendu, par une relation entre les invariants de la géométrie. Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous aurons besoin de résultats sur les déterminants qui seront utiles dans ce chapitre et les suivants.

5.5.1 Déterminants de Gram, de Cayley-Menger et de Ptolémée

Les déterminants de Gram et de Cayley-Menger décrivent les relations entre les invariants produits scalaires et distances introduits dans les chapitres précédents et que nous retrouverons de manière plus systématique en 6.2.3 notamment. Ces déterminants existent de manière générale, mais nous n'étudierons guère ici que le cas des dimensions très petites. Il y a deux raisons à cela. La première relève de la paresse : comme nous étudierons surtout les espaces des triangles et des quadrilatères, il ne nous a pas semblé utile d'approfondir le cas général. La seconde est plus sérieuse : les petites dimensions sont les seules où apparaissent des phénomènes algébriques remarquables (identités, factorisation) dont les conséquences géométriques sont importantes.

Pour plus de détails le lecteur se reportera à [Ber90] et [CD05].

Les déterminants de Gram

Rappelons la définition suivante (voir Partie III ??) :

5.5.1 Définition. Soit E un espace vectoriel muni d'une forme quadratique q de forme polaire φ . Soit v_1, v_2, \dots, v_n une famille de vecteurs de E . Le **déterminant de Gram** associé à ces vecteurs est le déterminant suivant :

$$\text{Gram}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} q(v_1) & \varphi(v_1, v_2) & \cdots & \varphi(v_1, v_n) \\ \varphi(v_1, v_2) & q(v_2) & \cdots & \varphi(v_2, v_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi(v_1, v_n) & \varphi(v_2, v_n) & \cdots & q(v_n) \end{vmatrix}.$$

Les déterminants de Gram donnent un critère de dimension qui va conduire à nombre de relations fondamentales :

5.5.2 Proposition. Avec les notations précédentes, si n est plus grand que $\dim E$, le déterminant de Gram est nul.

Démonstration. Les vecteurs v_1, \dots, v_n n'étant pas indépendants, on peut écrire, par exemple, $v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$ et la dernière colonne du déterminant est combinaison linéaire des premières avec ces mêmes coefficients.

5.5.3 Remarque. Plus précisément, on a l'identité (voir Partie III ??) :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)^2 \Delta_{\mathcal{B}}(q) = \text{Gram}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

où $\Delta_{\mathcal{B}}(q)$ est le discriminant de q dans la base \mathcal{B} de E , voir aussi l'exercice 6.5.1 pour une variante. Dans le cas $n = 2$ on retrouve l'identité de Lagrange (voir 2.2.22) :

$$q(\vec{ab})q(\vec{ac}) - \varphi(\vec{ab}, \vec{ac})^2 = \Delta(q)[\vec{ab}, \vec{ac}]^2 = \Delta(q)[a, b, c]^2.$$

Dans le cas $n = 3$ on obtient le corollaire suivant :

5.5.4 Corollaire. Si a, b, c, d sont quatre points du plan euclidien, on a :

$$\text{Gram}(\vec{ab}, \vec{ac}, \vec{ad}) = \begin{vmatrix} q(\vec{ab}) & \varphi(\vec{ab}, \vec{ac}) & \varphi(\vec{ab}, \vec{ad}) \\ \varphi(\vec{ac}, \vec{ab}) & q(\vec{ac}) & \varphi(\vec{ac}, \vec{ad}) \\ \varphi(\vec{ad}, \vec{ab}) & \varphi(\vec{ad}, \vec{ac}) & q(\vec{ad}) \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas où n est égal à la dimension, mais où la forme est dégénérée, on a aussi la nullité du déterminant de Gram. En particulier, on obtient :

5.5.5 Corollaire. On suppose l'espace E^* de dimension 3 muni de la forme dégénérée q^* . Soient $A, B, C \in E^*$. On a la formule :

$$\begin{aligned} \varphi^*(B, C)^2 q^*(A) + \varphi^*(C, A)^2 q^*(B) + \varphi^*(A, B)^2 q^*(C) \\ - 2\varphi^*(B, C)\varphi^*(C, A)\varphi^*(A, B) - q^*(A)q^*(B)q^*(C) = 0 \end{aligned}$$

Déterminant de Cayley-Menger

Les déterminants de Gram peuvent s'exprimer uniquement en termes de carrés scalaires⁷ avec les formules du type Al-Kashi : $\varphi(\vec{ab}, \vec{ac}) = \frac{1}{2}(ab^2 + ac^2 - bc^2)$. On obtient par exemple la formule :

$$\text{Gram}(\vec{ab}, \vec{ac}, \vec{ad}) = \begin{vmatrix} ab^2 & \frac{1}{2}(ab^2 + ac^2 - bc^2) & \frac{1}{2}(ab^2 + ad^2 - bd^2) \\ \frac{1}{2}(ab^2 + ac^2 - bc^2) & ac^2 & \frac{1}{2}(ac^2 + ad^2 - cd^2) \\ \frac{1}{2}(ab^2 + ad^2 - bd^2) & \frac{1}{2}(ac^2 + ad^2 - cd^2) & ad^2 \end{vmatrix}.$$

7. Que nous écrirons comme carrés de longueurs : $q(\vec{ab}) = ab^2$, pour alléger les notations, même sur un corps quelconque.

Le défaut de cette formule est qu'elle fait jouer un rôle particulier au point a . Les résultats suivants remédient à cet inconvénient :

5.5.6 Proposition. Soient a, b, c, d quatre points du plan euclidien. On pose $x = q(\overrightarrow{bc}) = bc^2$, $y = q(\overrightarrow{ca}) = ca^2$, $z = q(\overrightarrow{ab}) = ab^2$, $X = q(\overrightarrow{ad}) = ad^2$, $Y = q(\overrightarrow{bd}) = bd^2$ et $Z = q(\overrightarrow{cd}) = cd^2$.

1) On a la formule $4 \text{ Gram}(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) = -\Gamma_2(a, b, c)$ avec :

$$\Gamma_2(a, b, c) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & ab^2 & ac^2 \\ 1 & ab^2 & 0 & bc^2 \\ 1 & ac^2 & bc^2 & 0 \end{vmatrix} = \Gamma_2^\sharp(x, y, z) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

On a $\Gamma_2^\sharp(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy$.

2) On a la formule $8 \text{ Gram}(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ad}) = \Gamma_3(a, b, c, d) = 0$ avec :

$$\Gamma_3(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & ab^2 & ac^2 & ad^2 \\ 1 & ab^2 & 0 & bc^2 & bd^2 \\ 1 & ac^2 & bc^2 & 0 & cd^2 \\ 1 & ad^2 & bd^2 & cd^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & y & X \\ 1 & z & 0 & x & Y \\ 1 & y & x & 0 & Z \\ 1 & X & Y & Z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce dernier déterminant est noté $\Gamma_3^\sharp(x, y, z, X, Y, Z)$. Les déterminants Γ sont les **déterminants de Cayley-Menger** d'ordres 2 et 3.

5.5.7 Remarque. Les formules précédentes sont deux cas particuliers d'une formule générale, voir [Ber90] 9.7.3.3 où l'on trouvera aussi le lien entre les déterminants Γ_n et la forme volume de \mathbf{R}^n .

Démonstration. La première identité a été vue en 2.2.22.

La seconde égalité s'obtient par deux manipulations du déterminant Γ_3 : on commence par retrancher la deuxième colonne aux trois dernières. En développant alors par rapport à la première ligne, il reste l'opposé du déterminant 4×4 ci-dessous :

$$\begin{vmatrix} 1 & ab^2 & ac^2 & ad^2 \\ 1 & -ab^2 & bc^2 - ab^2 & bd^2 - ab^2 \\ 1 & bc^2 - ac^2 & -ac^2 & cd^2 - ac^2 \\ 1 & bd^2 - ad^2 & cd^2 - ad^2 & -ad^2 \end{vmatrix}$$

On retranche la première ligne aux autres, on développe par rapport à la première colonne et il reste le déterminant 3×3 de Gram, multiplié par -8 , d'où le résultat.

5.5.8 Proposition. *On suppose que les indéterminées x, y, z sont des carrés : $x = \alpha^2, y = \beta^2, z = \gamma^2$. On a l'identité :*

$$-\Gamma_2^\sharp(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = \\ (\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma).$$

Démonstration. C'est une vérification sans difficulté.

5.5.9 Remarques. 1) Il n'existe pas de telle factorisation en dimension plus grande, voir [CD05].

2) Cette identité s'applique en particulier lorsque x, y, z sont les carrés des longueurs des côtés d'un triangle : $x = bc^2, y = ca^2, z = ab^2$ et on obtient : $\Gamma_2(a, b, c) = (ca + ab - bc)(ab + bc - ca)(bc + ca - ab)(bc + ca + ab)$. Pour comprendre le lien de cette formule avec la formule de Héron et la somme des angles d'un triangle, voir paragraphe 6.3.3.

Déterminant de Ptolémée

Les mineurs des termes diagonaux des déterminants de Cayley-Menger sont de deux sortes. Il y a d'une part des déterminants de Cayley-Menger d'ordre un de moins, mais aussi un autre déterminant qui va jouer un rôle essentiel au chapitre 7 :

5.5.10 Définition. *On reprend les notations de 5.5.6. On appelle⁸ déterminant de Ptolémée le déterminant suivant :*

$$\Delta_3(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 & ad^2 \\ ab^2 & 0 & bc^2 & bd^2 \\ ac^2 & bc^2 & 0 & cd^2 \\ ad^2 & bd^2 & cd^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & z & y & X \\ z & 0 & x & Y \\ y & x & 0 & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix}.$$

Ce dernier déterminant est noté $\Delta_3^\sharp(x, y, z, X, Y, Z)$.

L'identité mystérieuse

5.5.11 Proposition. *On a l'identité :*

$$\Delta_3^\sharp(x, y, z, X, Y, Z) = \begin{vmatrix} 0 & z & y & X \\ z & 0 & x & Y \\ y & x & 0 & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix} = \Gamma_2^\sharp(xX, yY, zZ) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & zZ & yY \\ 1 & zZ & 0 & xX \\ 1 & yY & xX & 0 \end{vmatrix}.$$

Avec les notations de 6.3.1, ces deux déterminants sont égaux à $P(xX, yY, zZ) = (xX)^2 + (yY)^2 + (zZ)^2 - 2(yY)(zZ) - 2(zZ)(xX) - 2(xX)(yY)$.

8. Bien entendu cette appellation est totalement anachronique.

Démonstration. On peut faire le calcul directement, c'est facile. On peut aussi appliquer la formule de développement de Laplace (voir Bourbaki, *Algèbre*, éd. 1970, Ch. 3, §8, N° 6, p. AIII98). En effet, on constate que les produits des mineurs 2×2 de la première matrice correspondant aux colonnes 1, 2 et 3, 4 (et aux lignes complémentaires) sont les mêmes que ceux de la seconde avec les colonnes 1, 4 et 2, 3.

5.5.12 Remarques. 1) Il n'y a pas de formule analogue en dimension plus grande.

2) Attention, même si les matrices ci-dessus ont à la fois même trace et même déterminant, elles ne sont pas semblables. En effet, on peut vérifier que les autres termes du polynôme caractéristique sont différents ou noter qu'elles n'ont pas même rang lorsqu'on annule toutes les variables.

3) Si xX, yY, zZ sont des carrés, on peut appliquer la factorisation 5.5.8. En particulier, si x, \dots, Z sont les carrés des longueurs bc, \dots, cd on obtient :

$$-\Delta_3(a, b, c, d) = (ac.bd + ad.bc - ab.cd)(ab.cd + ad.bc - ac.bd) \\ (ab.cd + ac.bd - ad.bc)(ab.cd + ac.bd + ad.bc),$$

formule que nous reverrons au chapitre 7 à propos du théorème de Ptolémée.

5.5.2 La relation fondamentale, ou la somme des angles du triangle, cas d'un corps quelconque

Nous donnons maintenant une version en termes d'invariants de la relation 5.5.5, qui traduit le fait que la forme quadratique q^* est dégénérée. Il y a en vérité deux formules. La première montre que l'invariant Spin (qui jouait un grand rôle en géométrie non euclidienne, voir Partie IV ??) est ici inutile. C'est elle qui, au paragraphe suivant, donnera la somme des angles du triangle dans le cas réel. La seconde formule, obtenue par élévation au carré de la première, ne fait plus intervenir que les invariants I^* et permettra de décrire l'espace des trilatères, voir 6.4.9.

5.5.13 Définition. Soient $A, B, C \in E^*$ des éléments non isotropes. On définit leur **Spin** comme la quantité $S^*(A, B, C) = \frac{\varphi^*(B, C)\varphi^*(C, A)\varphi^*(A, B)}{q^*(A)q^*(B)q^*(C)}$. Cette quantité ne dépend que des droites affines $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ d'équations A, B, C .

5.5.14 Théorème. Soient $A, B, C \in E^*$ des éléments non isotropes (de sorte que $\overline{A}, \overline{B}$ et \overline{C} sont des droites affines). On a les relations suivantes :

$$2S^*(A, B, C) = I^*(B, C) + I^*(C, A) + I^*(A, B) - 1$$

$$4I^*(B, C)I^*(C, A)I^*(A, B) = (I^*(B, C) + I^*(C, A) + I^*(A, B) - 1)^2.$$

Démonstration. La première formule s'obtient en divisant la relation 5.5.5

$$\begin{aligned} & \varphi^*(B, C)^2 q^*(A) + \varphi^*(C, A)^2 q^*(B) + \varphi^*(A, B)^2 q^*(C) \\ & - 2\varphi^*(B, C)\varphi^*(C, A)\varphi^*(A, B) - q^*(A)q^*(B)q^*(C) = 0 \end{aligned}$$

par $q^*(A)q^*(B)q^*(C)$ et la seconde s'obtient en élevant au carré.

5.5.3 La somme des angles d'un triangle, cas réel

Dans ce paragraphe on suppose $k = \mathbf{R}$. On considère un triangle abc et on appelle $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}$ ses angles (autrement dit, $\widehat{a} = \widehat{bac}$, par exemple). Ce sont des éléments de $]0, \pi[$.

Somme de deux angles d'un triangle

Le lemme suivant est déjà présent dans Euclide et il vaut aussi en géométrie hyperbolique (voir Partie IV ?? et, pour les triangles de spin positif, en géométrie elliptique (voir Partie IV ??). :

5.5.15 Lemme. *La somme de deux angles d'un triangle est $< \pi$.*

Démonstration. Il s'agit de voir qu'on a $\widehat{a} + \widehat{b} < \pi$ ou encore $\widehat{a} < \pi - \widehat{b}$ ce qui équivaut (vu la décroissance de la fonction cosinus) à $\cos \widehat{a} > -\cos \widehat{b}$ ou encore à $\cos \widehat{a} + \cos \widehat{b} > 0$.

En remplaçant le cosinus par sa valeur on est ramené à montrer :

$$bc \varphi(\vec{ab}, \vec{ac}) + ac \varphi(\vec{ba}, \vec{bc}) > 0.$$

Par Chasles, on a $\varphi(\vec{ba}, \vec{bc}) = \varphi(\vec{ab}, \vec{cb}) = -\varphi(\vec{ab}, \vec{ac}) + q(\vec{ab})$ et il reste à voir : $(bc - ac) \varphi(\vec{ab}, \vec{ac}) + ac ab^2 > 0$. Il suffit pour cela que l'on ait $|bc - ac| |\varphi(\vec{ab}, \vec{ac})| < ac ab^2$. Cela résulte de Cauchy-Schwarz et de l'inégalité triangulaire (les deux inégalités sont strictes car le triangle n'est pas aplati).

Somme des trois angles d'un triangle

5.5.16 Théorème. *On a $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = \pi$.*

Démonstration. On a d'abord un lemme :

5.5.17 Lemme. La relation $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = \pi$ est équivalente à :

$$(1) \quad \cos^2 \widehat{a} + \cos^2 \widehat{b} + \cos^2 \widehat{c} + 2 \cos \widehat{a} \cos \widehat{b} \cos \widehat{c} - 1 = 0.$$

Démonstration. (du lemme) La relation signifie $\widehat{a} + \widehat{b} = \pi - \widehat{c}$ et elle implique $\cos \widehat{a} \cos \widehat{b} + \cos \widehat{c} = \sin \widehat{a} \sin \widehat{b}$. En élevant au carré et en remplaçant $\sin^2 \widehat{a}$ et $\sin^2 \widehat{b}$ par $1 - \cos^2 \widehat{a}$ et $1 - \cos^2 \widehat{b}$ on trouve (1). Inversement, le premier membre de (1) est égal à :

$$(\cos \widehat{a} \cos \widehat{b} + \cos \widehat{c} + \sin \widehat{a} \sin \widehat{b})(\cos \widehat{a} \cos \widehat{b} + \cos \widehat{c} - \sin \widehat{a} \sin \widehat{b}),$$

de sorte que (1) équivaut à $\cos \widehat{a} \cos \widehat{b} + \cos \widehat{c} = \pm \sin \widehat{a} \sin \widehat{b}$, c'est-à-dire à $\cos(\widehat{a} + \widehat{b}) = \cos(\pi - \widehat{c})$ ou $\cos(\widehat{a} - \widehat{b}) = \cos(\pi - \widehat{c})$. Comme \widehat{a}, \widehat{b} et \widehat{c} sont dans $]0, \pi[$ et $\widehat{a} + \widehat{b} < \pi$ en vertu de 5.5.15, la première relation donne $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = \pi$. La deuxième donne $\widehat{a} + \widehat{c} = \pi + \widehat{b}$ ou $\widehat{b} + \widehat{c} = \pi + \widehat{a}$. Dans les deux cas, cela contredit 5.5.15. La relation (1) est donc équivalente à la relation cherchée.

Revenons au théorème. Il reste à prouver la relation (1). On pose $A = b \wedge c$, $B = c \wedge a$ et $C = a \wedge b$. On a alors $\cos \widehat{a} = -\frac{\varphi^*(C, B)}{\sqrt{q^*(C)q^*(B)}}$, donc $I^*(B, C) = \cos^2 \widehat{a}$ et de même pour les autres. On en déduit aussi $S^*(A, B, C) = -\cos \widehat{a} \cos \widehat{b} \cos \widehat{c}$ et la relation (1) n'est autre que la première relation de 5.5.14.

5.5.18 Remarques. 1) La preuve donnée ci-dessus pourra sembler bien calculatoire par rapport à celle d'Euclide (voir 5.7.11). En fait, dans la preuve d'Euclide, les assertions de position (la relation de Chasles "géométrique", voir 5.7.10), sont lues sur la figure alors qu'elles devraient être, en toute rigueur, établies. De plus, la preuve donnée ci-dessus a le mérite de bien montrer en quoi la relation fondamentale entre les angles d'un triangle : $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = \pi$, est caractéristique de la géométrie euclidienne, en tant que géométrie dégénérée, puisqu'elle est essentiellement équivalente à la nullité du discriminant de la forme q^* .

2) On peut donner une version de cette démonstration en termes de vecteurs, voir exercice 5.7.12.

3) On retiendra la relation $S^*(A, B, C) = -\cos \widehat{a} \cos \widehat{b} \cos \widehat{c}$. On notera que le signe de S^* indique si le triangle est acutangle ou obtusangle.

5.6 Angles orientés de vecteurs et de droites dans le cas réel

On suppose toujours que le corps est le corps des réels⁹ et que la forme q^* est positive.

Dans cette section, on reprend la problématique déjà abordée au chapitre 8 de la partie IV, mais dans un cadre beaucoup plus familier, ce qui nous permettra de traiter les problèmes plus rapidement. Pour avoir des invariants orientés, l'essentiel, comme expliqué dans la partie IV, est de disposer d'un groupe abélien qui opère simplement transitivement sur un ensemble. Dans le cas des géométries non euclidiennes, les groupes en question étaient les groupes G_a^+ des isométries positives fixant un point. Ce sont encore eux qui vont servir ici, mais la différence est l'existence du quotient $O^+(q)$ de $\text{Is}^+(X)$ auquel ils sont tous isomorphes, voir 1.2.22. Quant à l'ensemble sur lequel ce groupe va opérer, ce sera celui des vecteurs unitaires ou, ce qui revient au même, des demi-droites issues d'un point. Pour les angles de droites, l'opération sera celle du quotient $O^+(q)/\{\pm\text{Id}\}$ opérant sur les droites vectorielles.

5.6.1 Les angles de vecteurs

Rappelons, voir 1.2.7 et 1.2.8, que le groupe $O^+(q)$ est isomorphe au groupe $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ par l'application qui à $\bar{\theta}$ associe la rotation vectorielle d'angle $\bar{\theta}$, notée $\rho(\bar{\theta})$ ou $\rho(\theta)$. Cet isomorphe induit un isomorphisme de $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ sur $O^+(q)/\{\pm\text{Id}\}$.

Comme le groupe abélien $O^+(q)$ opère simplement transitivement sur les vecteurs unitaires (i.e. vérifiant $q(v) = \|v\| = 1$) de E_∞ (voir 1.2.5), on peut définir :

5.6.1 Proposition-Définition. 1) Soient v et w deux vecteurs unitaires de E_∞ . On appelle **angle des vecteurs** v et w (pris dans cet ordre) et on note $\widehat{(v, w)}$ (ou simplement (v, w) s'il n'y a pas de risque de confusion) l'unique élément $\bar{\theta} \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ tel que $\rho(\bar{\theta})(v) = w$.

2) Si v et w sont deux vecteurs non nuls de E_∞ , leur angle est par définition celui des vecteurs $v/\|v\|$ et $w/\|w\|$.

3) Si on a trois points a, b, c avec $a \neq b, c$, l'angle de vecteurs (\vec{ab}, \vec{ac}) est l'angle de l'unique rotation qui transforme \vec{ab} en $\lambda\vec{ac}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}^{+*}$.

9. Mais on peut faire toute la théorie sur un corps quelconque, à l'exception de ce qui concerne l'exponentielle. Il suffit de copier ce qui est fait ici, en remplaçant $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ par un groupe abélien \mathcal{A} , isomorphe à $O^+(q)$, mais noté additivement. Voir Partie IV, chapitre 8.

4) Si on a trois points a, b, c avec $a \neq b, c$, l'angle de vecteurs (\vec{ab}, \vec{ac}) ne dépend pas du choix des points b, c sur les demi-droites $[ab)$ et $[ac)$. C'est, par définition, l'angle orienté de ces demi-droites et c'est l'angle de l'unique rotation qui envoie la demi-droite $[ab)$ sur $[ac)$.

5.6.2 Remarque. L'isomorphisme entre $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ et $O^+(q)$ (donc l'angle $\widehat{u, v}$) dépend *a priori* du choix d'une base orthonormée de E . En vertu de 1.2.1, l'angle est inchangé si le changement de base est direct, mais il est changé en son opposé s'il est indirect.

Le lecteur n'aura aucun mal à prouver la proposition suivante en se référant au chapitre 8 de la Partie IV (ou en consultant, au besoin, [MCD07]) :

5.6.3 Proposition. *On a les propriétés suivantes :*

- 1) $(u, w) = (u, v) + (v, w)$ (relation de Chasles).
- 2) $(u, v) = (u', v') \iff (u, u') = (v, v')$ (règle du parallélogramme).
- 3) Si f est dans $O^+(q)$ (resp. dans $O^-(q)$) on a $(f(u), f(v)) = (u, v)$ (resp. $-(u, v)$).
- 4) Si abc est un triangle de X et si on choisit un représentant θ de (\vec{ab}, \vec{ac}) dans $[-\pi, \pi]$, on a $\widehat{bac} = |\theta|$.

5.6.4 Remarque. Il y a plusieurs différences entre la situation euclidienne et celle des géométries hyperbolique et elliptique. On renvoie au chapitre 8 de la Partie IV pour toutes précisions.

1) Sur un corps quelconque, en géométrie non euclidienne, les groupes G_a^+ ne sont pas nécessairement isomorphes. Il n'est donc pas possible de comparer des angles de sommets différents.

2) Dans le cas elliptique réel, les angles orientés opposés sont indiscernables car les rotations associées sont conjuguées.

3) Même dans le cas hyperbolique réel, il subsiste une différence fondamentale : l'application qui à une rotation associe son angle **n'est pas** un homomorphisme (la composée de deux rotations de centres différents n'a pas pour angle la somme des angles) et cela rend caduque la relation de Chasles lorsque les angles n'ont pas même sommet. En revanche, en géométrie euclidienne, on peut comparer, additionner, etc. des angles de sommets différents. Cela mérite un encadré :

La relation de Chasles vaut pour des angles de sommets différents.

Une manière simple de comprendre pourquoi cette relation est constitutive de la géométrie euclidienne est de revenir au triangle. En effet, on a le corollaire suivant :

5.6.5 Corollaire. Soit abc un triangle. On a la relation : $(\vec{ab}, \vec{ac}) + (\vec{ca}, \vec{cb}) + (\vec{bc}, \vec{ba}) = \pi$

Démonstration. C'est la relation de Chasles, appliquée avec les angles en a, b, c : $(\vec{ab}, \vec{ac}) + (\vec{ca}, \vec{cb}) + (\vec{bc}, \vec{ba}) = (\vec{ab}, \vec{ac}) + (\vec{ac}, \vec{bc}) + (\vec{bc}, \vec{ba}) = (\vec{ab}, \vec{ba}) = \pi$.

5.6.6 Remarque. En repassant aux angles non orientés, on retrouve le résultat sur la somme des angles du triangle dont on sait bien qu'il n'est pas valable en géométrie non euclidienne.

Les angles orientés permettent de préciser la formule 5.4.17 :

5.6.7 Proposition. Soit abc un triangle. On a $[\vec{ab}, \vec{ac}] = ab ac \sin(\vec{ab}, \vec{ac})$ ou encore $\mathcal{A}(abc) = \frac{1}{2} ab ac \sin(\vec{ab}, \vec{ac})$ (aire algébrique).

Démonstration. Posons $\vec{ab} = (x_1, x_2)$, $\vec{ac} = (y_1, y_2)$ et $(\vec{ab}, \vec{ac}) = \theta$. Par définition de l'angle de vecteurs, on a $\rho(\theta)(\vec{ab}/ab) = \vec{ac}/ac$, et, vu la matrice de $\rho(\theta)$ (voir 1.2.8), on en déduit

$$(y_1, y_2) = \frac{ac}{ab} (\cos \theta x_1 - \sin \theta x_2, \sin \theta x_1 + \cos \theta x_2).$$

On conclut grâce aux formules $[\vec{ab}, \vec{ac}] = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 2\mathcal{A}(abc)$.

5.6.8 Remarque. Pour des vecteurs v, w , la donnée de l'angle orienté $\theta = (v, w)$ est équivalente à celle de ses lignes trigonométriques $\cos \theta$ et $\sin \theta$ (par exemple à cause de la matrice 1.2.8). Si les vecteurs sont unitaires, cela revient à se donner les deux invariants $\varphi(v, w) = \cos(v, w)$ et $[v, w] = \sin(v, w)$.

5.6.2 Axes, angles et relations trigonométriques

Axes et angles

Dans tout ce paragraphe on suppose $k = \mathbf{R}$ et $\Delta(q) = \delta(q^*) = 1$.

Rappelons (voir 2.2.8 et 2.2.27) qu'un axe consiste en la donnée d'une droite et d'un vecteur unitaire de cette droite et que si A est une équation de droite normalisée (i.e. vérifiant $q^*(A) = 1$) on lui associe le vecteur unitaire $l \wedge A$ de la droite \bar{A} . On peut alors décrire les angles de vecteurs en termes d'invariants de droites :

5.6.9 Proposition. On suppose $k = \mathbf{R}$ et $\Delta(q) = 1$. Soient A, B deux équations de droites normalisées et soient $a = l \wedge A$ et $b = l \wedge B$ les vecteurs unitaires associés. On a les formules $\cos(a, b) = \varphi^*(A, B)$ et $\sin(a, b) = [A, B, l]$.

Démonstration. Cela résulte des formules $\varphi^*(A, B) = \varphi(l \wedge A, l \wedge B)$ (voir 2.2.26) et $[A, B, l] = [l \wedge A, l \wedge B]$ (voir 2.2.18) et de 5.6.8.

Les relations trigonométriques

Les formules précédentes permettent d'interpréter les relations trigonométriques de 2.2.24 (appliquées avec $X = A$ et $Y = C$) pour des formes linéaires A, B, C :

$$(1) \quad [A, B, l][A, C, l] = \begin{vmatrix} q^*(A) & \varphi^*(A, C) \\ \varphi^*(B, A) & \varphi^*(B, C) \end{vmatrix}.$$

$$(2) \quad [B, C, l]q^*(A) + [C, A, l]\varphi^*(B, A) + [A, B, l]\varphi^*(C, A) = 0.$$

5.6.10 Proposition. *On suppose $k = \mathbf{R}$ et $\Delta(q) = 1$. Soient A, B, C trois formes normalisées, $a = l \wedge A$, $b = l \wedge B$ et $c = l \wedge C$ les vecteurs unitaires associés et $\alpha = (b, c)$, $\beta = (c, a)$ et $\gamma = (a, b)$ leurs angles orientés. On a $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et les relations précédentes se traduisent respectivement par les formules :*

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\beta + \gamma) = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \quad \text{et} \\ -\sin \alpha &= \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta. \end{aligned}$$

Dans le cas $\beta = -\gamma$, on retrouve la relation $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$.

Démonstration. Cela résulte des formules (1) et (2) traduites à l'aide de 5.6.9.

Pour une version en termes de points voir l'exercice 5.7.15

5.6.3 Les angles de droites

On passe maintenant aux angles de droites. Étant données deux droites A, B il existe deux rotations qui envoient A sur B , ρ et $-\rho = (-\text{Id})\rho$. La donnée de A et B définit donc un unique élément de $O^+(q)/\{\pm \text{Id}\} \simeq \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ qui est l'angle orienté des droites.

5.6.11 Définition. *Soient a, b, c trois points de X avec $a \neq b, c$. On appelle angle orienté des droites (ab) et (ac) et on note $((ab), (ac))$ (souvent abrégé en (ab, ac)) la classe modulo π de l'angle de vecteurs (\vec{ab}, \vec{ac}) .*

5.6.12 Corollaire. *Les angles orientés de droites vérifient les propriétés de 5.6.3 : la relation de Chasles, la règle du parallélogramme, le fait que l'angle est conservé (resp. changé en son opposé) par une isométrie positive (resp. négative).*

5.6.13 Corollaire. *On convient que la tangente de $k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$ est égale à ∞ (sans précision de signe). Soient a, b, c trois points avec $a \neq b, c$. La tangente de l'angle de droites (ab, ac) est bien définie, elle détermine l'angle et on a la formule :*

$$\tan(ab, ac) = \frac{[\vec{ab}, \vec{ac}]}{\varphi(\vec{ab}, \vec{ac})}.$$

Démonstration. Cela résulte de 5.6.7 et 5.6.3.

5.6.14 Corollaire. *On conserve la convention précédente. Soient B, C deux éléments de E^* . On a la formule :*

$$\tan(\overline{B}, \overline{C}) = \frac{[B, C, l]}{\varphi^*(B, C)}.$$

Démonstration. Le cas des droites parallèles est évident puisque les deux membres sont nuls. Sinon, on note a le point d'intersection de B, C et on choisit des points b, c sur B, C respectivement. Comme la formule ne dépend que des droites et pas de leurs équations, on peut prendre $B = a \wedge b$ et $C = a \wedge c$. La formule résulte alors de 2.2.18 et 2.2.28 en tenant compte de $\delta(q^*) = 1$.

Somme des angles de droites d'un triangle

La propriété de la somme des angles du triangle est très simple à prouver en termes d'angles de droites : on a $(ab, ac) + (bc, ba) + (ca, cb) = 0 \pmod{\pi}$ ou encore, si l'on prend trois droites A, B, C quelconques, $(B, C) + (C, A) + (A, B) = 0$, c'est la relation de Chasles. Si l'on appelle α, β, γ ces angles, la relation $\alpha + \beta + \gamma = 0$ donne, sur les tangentes :

$$\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma = \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma.$$

Cette relation a pour traduction en termes d'invariants la relation (#) :

$$\begin{aligned} [B, C, l]\varphi^*(C, A)\varphi^*(A, B) + [C, A, l]\varphi^*(A, B)\varphi^*(B, C) + [A, B, l]\varphi^*(B, C)\varphi^*(C, A) \\ = [B, C, l][C, A, l][A, B, l]. \end{aligned}$$

Pour prouver (#) on utilise deux relations fondamentales : la relation de dimension 2.2.14 :

$$(\mathcal{D}^*) \quad [A, B, C]l = [B, C, l]A + [C, A, l]B + [A, B, l]C$$

et la relation de changement de base 2.2.24 (dans le cas réel on peut supposer $\delta(q^*) = 1$) :

$$[A, B, l][C, D, l] = \begin{vmatrix} \varphi^*(A, C) & \varphi^*(A, D) \\ \varphi^*(B, C) & \varphi^*(B, D) \end{vmatrix}.$$

En effet, on part de la relation de changement de base $[C, A, l][A, B, l] = \varphi^*(C, A)\varphi^*(A, B) - q^*(A)\varphi^*(B, C)$, que l'on multiplie par $[B, C, l]$. Par ailleurs, on applique $\varphi^*(\cdot, A)$ à la relation (\mathcal{D}^*) :

$$[B, C, l]q^*(A) + [C, A, l]\varphi^*(A, B) + [A, B, l]\varphi^*(C, A) = 0$$

et on multiplie par $\varphi^*(B, C)$. En ajoutant ces deux relations on obtient $(\#)$.

5.6.4 En avant-première : une application

Pour montrer comment on peut se servir des angles orientés de droites, en particulier en utilisant la relation de Chasles avec des angles de sommets différents, nous montrons le théorème suivant :

5.6.15 Théorème. *Soit abc un triangle, h son orthocentre. Le symétrique de h par rapport à l'un quelconque des côtés du triangle est sur le cercle circonscrit à abc .*

Appelons h' le symétrique de h par rapport à (bc) . En vertu du théorème de l'angle inscrit (cf. 7.3.9) il suffit de montrer l'égalité d'angles orientés de droites : $(h'b, h'c) = (ab, ac)$. Or, en appliquant la symétrie par rapport à (bc) , on a $(h'b, h'c) = -(hb, hc) = (hc, hb)$. On applique alors la relation de Chasles (et peu importe si les angles n'ont pas même sommet) : $(hc, hb) = (hc, ab) + (ab, ac) + (ac, hc)$. Mais comme les droites (hb) et (hc) sont des hauteurs, les angles (hc, ab) et (ac, hc) sont droits (égaux à $\pi/2$), donc leur somme vaut π , donc est nulle dans $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ et on a le résultat.

5.7 Exercices

5.7.1 Transitivité

5.7.1 Exercice. On reprend les notations de 1.2.1. Montrer que les éléments de \mathbf{U}_k distincts de 1 s'écrivent sous la forme $x + iy$ avec $x = \frac{\gamma t^2 - 1}{\gamma t^2 + 1}$ et $y = \frac{-2t}{\gamma t^2 + 1}$ avec $t \in k$ (couper l'ellipse $x^2 + \gamma y^2 = 1$ par la droite $y = t(x-1)$). En déduire que le cardinal de \mathbf{U}_k est égal à $|k| + 1$.

5.7.2 Exercice. Soit $k = \mathbf{F}_q$ un corps fini de caractéristique différente de 2 et soit Q^* une forme quadratique parabolique de rang 2 sur $E^* = k^3$. On peut écrire $Q^*(u, v, w) = \alpha u^2 + \beta v^2$ avec α et β non nuls et $-\beta/\alpha$ non carré.

1) Montrer que, pour tout $\lambda \in k$, l'équation $\alpha u^2 + \beta v^2 = \lambda$ admet au moins une solution $(u, v) \in k^2$. (On comptera le nombre d'éléments de k de la forme αu^2 et ceux de la forme $1 - \beta v^2$.)

2) En déduire qu'il existe à la fois des $f = (u, v, w)$ tels que $Q^*(f)$ soit un carré et des f tels que $Q^*(f)$ ne soit pas un carré. Que peut-on en conclure sur la transitivité du groupe $PGO(Q^*)$ sur les droites affines ?

5.7.3 Exercice.

1) Montrer que le groupe $\text{Sim}(X)$ opère transitivement sur les couples (D, m) où D est une droite affine et m un point non situé sur D . (Considérer les projetés orthogonaux h et h' de m et m' sur D et D' et utiliser la double transitivité de $\text{Sim}(X)$ sur les points.)

2) En déduire que le groupe $\text{Sim}(X)$ opère transitivement sur les couples de droites parallèles distinctes.

5.7.4 Exercice. Complémentaires

Soient A, A' deux droites perpendiculaires en o et B une droite passant par o . Montrer la formule $I^*(A, B) + I^*(A', B) = 1$ (on écrira $B = \lambda A + \lambda' A'$ et on tiendra compte de $\varphi^*(A, A') = 0$).

5.7.5 Exercice. Variante du deuxième cas

Montrer que $q(\vec{bc}), \varphi(\vec{cb}, \vec{ca})$ et $I^*((bc), (ba))$ forment un système complet d'invariants.

5.7.6 Exercice. Cas de similitude

Soit abc un triangle. On considère les produits scalaires des vecteurs correspondant aux côtés : $x = q(\vec{bc}), y = q(\vec{ca}), z = q(\vec{ab}), u = \varphi(\vec{ca}, \vec{ab}), v = \varphi(\vec{ab}, \vec{bc}), w = \varphi(\vec{bc}, \vec{ca})$. On suppose que le triangle n'est pas rectangle, c'est-à-dire que u, v, w sont non nuls. On construit les 15 invariants de similitude obtenus en considérant les quotients de deux de ces quantités, distinctes et prises dans l'ordre ci-dessus.

1) Montrer qu'on a la relation $x + v + w = 0$ et deux relations analogues. Les rapports obtenus à partir de deux des termes de ces relations (par exemple w/x) seront dits "dans la même famille". Montrer que si l'on connaît un rapport d'une famille on connaît les deux autres.

2) Montrer que deux quelconques des rapports, choisis parmi les 15 possibles forment un système complet d'invariants pour l'action du groupe des similitudes sur les triangles, sauf s'ils sont dans la même famille. (On pourra,

par exemple, se ramener au cas où l'on a $b = (0, 0)$, $c = (1, 0)$, $a = (\alpha, \beta)$, montrer que les orbites du groupe sont alors déterminées par α et β^2 , puis calculer les invariants ci-dessus et conclure.)

3) Traiter le cas des triangles rectangles.

5.7.7 Exercice. Similitude et angles de droites

On suppose $k = \mathbf{R}$.

Montrer que les triangles abc et $a'b'c'$ sont semblables si et seulement si on a les égalités d'angles de droites $(ab, ac) = \epsilon(a'b', a'c')$ et $(bc, ba) = \epsilon(b'c', b'a')$ où $\epsilon = \pm 1$ est le même dans les deux égalités. (On se ramènera au cas $\epsilon = 1$, puis au cas $a = a'$, $b = b'$.)

5.7.2 Secteurs et relation de Chasles géométrique

Dans cette série d'exercices, on suppose $k = \mathbf{R}$.

5.7.8 Exercice. Cet exercice rassemble quelques résultats sur les demi-plans, demi-droites, etc. Rappelons qu'une partie A de X est dite **convexe** si pour tous $a, b \in A$, le segment $[ab]$ est contenu dans A .

1) Montrer que les demi-plans (ouverts ou fermés) sont convexes.

2) Soit D une droite, $o \in D$ et $a \notin D$. On note X^+ (resp. X^{+0}) le demi-plan fermé (resp. ouvert) limité par D qui contient a .

a) Montrer que la demi-droite $[oa)$ est toute entière dans X^+ , et même, à l'exception de o , dans X^{+0} .

b) Montrer que la demi-droite opposée est dans le demi-plan X^- .

c) Montrer que la trace d'un demi-plan sur une droite sécante à son bord est une demi-droite.

d) Soit D' la parallèle à D passant par a . Montrer que D' est toute entière dans X^{+0} .

5.7.9 Exercice. Soient o, a, b trois points non alignés du plan. On définit le **secteur saillant** $[\widehat{aob}]$ comme l'intersection des demi-plans fermés A^+ limité par (oa) et contenant b et B^+ limité par (ob) et contenant a . Si les points sont alignés il y a deux cas :

- Si les demi-droites $[oa)$ et $[ob)$ sont égales, on convient que le secteur $[\widehat{aob}]$ est égal à la demi-droite $[oa)$,

- si les demi-droites $[oa)$ et $[ob)$ sont opposées, on convient qu'il y a deux secteurs $[\widehat{aob}]$ qui sont les deux demi-plans limités par (ab) et on parle de secteurs **plats**.

1) On suppose o, a, b non alignés. Montrer que c est dans le secteur $[\widehat{aob}]$ si et seulement si l'on a $\vec{oc} = \lambda\vec{oa} + \mu\vec{ob}$ avec $\lambda, \mu \geq 0$.

2) Soient a, o deux points distincts et b, c deux points situés dans le même demi-plan ouvert limité par (oa) . On suppose que c n'est pas dans le secteur $[\widehat{aob}]$. Montrer que $[ac]$ coupe la demi-droite $[ob)$ et que b est dans le secteur $[\widehat{aoc}]$.

3) Soit $[\widehat{aob}]$ un secteur saillant et c un point de ce secteur, non situé sur les droites (oa) et (ob) . Montrer que le segment $[ab]$ coupe la demi-droite $[oc)$.

4) Soient o, c deux points distincts et a, b deux points situés de part et d'autre de (oc) . On désigne par a' et b' des points des demi-droites opposées à $[oa)$ et $[ob)$. Montrer que le point c est soit dans le secteur $[\widehat{aob}]$ soit dans le secteur $[\widehat{a'ob'}]$.

5.7.10 Exercice. Relation de Chasles géométrique

Soient a, b, c des points du plan et o un point distinct de a, b, c .

1) On suppose que c est dans le secteur $[\widehat{aob}]$. On pose $\alpha = \widehat{boc}$, $\beta = \widehat{coa}$ et $\gamma = \widehat{aob}$ et on se propose de montrer que l'on a $\gamma = \alpha + \beta$ (relation de Chasles géométrique). On notera qu'on peut pour cela supposer qu'on a $oa = ob = 1$. On écrit $\vec{oc} = \lambda \vec{oa} + \mu \vec{ob}$ avec $\lambda, \mu \geq 0$ (voir 5.7.9).

a) Montrer les formules : $\cos \alpha = \frac{\mu + \lambda \cos \gamma}{oc}$, $\cos \beta = \frac{\lambda + \mu \cos \gamma}{oc}$,
 $\sin \alpha = \frac{\lambda \sin \gamma}{oc}$ et $\sin \beta = \frac{\mu \sin \gamma}{oc}$.

b) En déduire qu'on a $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma \geq 0$, donc $\alpha + \beta \leq \pi$.

c) Montrer qu'on a aussi $\cos \gamma = \cos(\alpha + \beta)$ et conclure.

2) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) On a la relation de Chasles géométrique : $\widehat{aob} = \widehat{aoc} + \widehat{cob}$.

ii) Le point c est dans le secteur $[\widehat{aob}]$.

iii) Les points a et b sont de part et d'autre de (oc) et on a $\widehat{aoc} + \widehat{cob} \leq \pi$.

5.7.11 Exercice. Somme des angles d'un triangle

Montrer, à la manière d'Euclide, que la somme des angles du triangle abc est égale à π . (Considérer une demi-droite $[cb')$ parallèle à $[ba)$ et de même sens et la demi-droite $[cc')$ opposée à $[cb)$. Utiliser les propriétés des angles alternes-internes et correspondants 5.4.14, montrer que a est dans le secteur $[\widehat{bcb'}]$ (ou que b' est dans le secteur $[\widehat{acc'}]$) et conclure avec la relation de Chasles géométrique).

5.7.12 Exercice. Somme des angles d'un triangle, bis

On reprend les notations de 5.5.16 et on pose $u = \vec{bc}$, $v = \vec{ca}$ et $w = \vec{ab}$.

1) Montrer la formule $\cos \widehat{a} = \frac{\varphi(\vec{ab}, \vec{ac})}{\sqrt{q(\vec{ab})q(\vec{ac})}} = -\frac{\varphi(v, w)}{\sqrt{q(v)q(w)}}$ et de même

pour les autres.

2) Montrer que la relation (1) de 5.5.16 est équivalente à la suivante :

$$q(u)q(v)q(w)+2\varphi(v,w)\varphi(w,u)\varphi(u,v)-q(u)\varphi(v,w)^2-q(v)\varphi(w,u)^2-q(w)\varphi(u,v)^2=0.$$

Conclure en utilisant un déterminant de Gram.

En vertu de 2.2.28, cette preuve et celle de 5.5.16 sont équivalentes. Dans celle-ci, le point essentiel, qui différencie la géométrie euclidienne des autres, c'est l'existence de vecteurs, qui forment un espace de dimension 2, la relation exprimant alors le fait que la forme q induite sur cet espace est (évidemment !) de rang (au plus) 2.

5.7.13 Exercice. Triangles isocèles

1) Soit abc un triangle. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une réflexion qui fixe a et échange b, c .

ii) On a $ab = ac$.

iii) Les angles \widehat{abc} et \widehat{acb} sont égaux.

Un triangle vérifiant ces conditions sera dit **isocèle** en a .

2) Montrer que, si le corps de base est \mathbf{R} , les conditions précédentes sont encore équivalentes à $(\vec{bc}, \vec{ba}) = (\vec{ca}, \vec{cb})$.

3) Soit abc un triangle isocèle en a . Montrer que la hauteur issue de a est aussi médiane, médiatrice, bissectrice.

5.7.14 Exercice. On suppose $k = \mathbf{R}$. Soit abc un triangle acutangle et o un point intérieur au triangle. On note a', b', c' les projetés orthogonaux de o sur les côtés $(bc), (ca), (ab)$ respectivement.

1) Montrer la formule $oa' \sin \widehat{a} + ob' \sin \widehat{b} + oc' \sin \widehat{c} = \frac{4A(abc)^2}{bc \cdot ca \cdot ab}$.

2) Faire le lien entre cette formule et la relation :

$$[A, B, C] = [B, C, l]A(o) + [C, A, l]B(o) + [A, B, l]C(o)$$

où A, B, C sont trois éléments de E^* et o un point normalisé par $l(o) = 1$ (voir 5.4.17, 5.2.4 et 8.3.16).

5.7.3 Une autre version des relations trigonométriques

5.7.15 Exercice. On suppose $k = \mathbf{R}$ et $\Delta(q) = 1$. Soient $a, b, c, x, y \in \vec{X}$. Montrer que les relations (1) et (2) de 1.3.5 se traduisent par les formules :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \text{et} \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

(Dans (1) on prendra $b = y$ et on posera $\alpha = \widehat{(a, b)}$ et $\beta = \widehat{(b, x)}$, dans (2) on prendra $b = x$ et on posera $\alpha = \widehat{(a, b)}$ et $\beta = \widehat{(b, c)}$.)

5.7.4 Signe des angles orientés et arc capable

5.7.16 Exercice. Dans cet exercice le corps de base est \mathbf{R} , la forme q^* est positive. Si $\bar{\theta}$ est un élément de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, le **signe** de $\bar{\theta}$ est, par définition, celui de $\sin \theta$ pour n'importe quel représentant de $\bar{\theta}$.

1) Soient $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ trois vecteurs non nuls et soit \vec{D} la droite vectorielle engendrée par \vec{x} . Montrez que les angles $\widehat{\vec{x}, \vec{y}}$ et $\widehat{\vec{x}, \vec{z}}$ sont de même signe si et seulement si \vec{y} et \vec{z} sont dans le même demi-plan limité par \vec{D} . (On supposera les vecteurs unitaires, on complétera \vec{x} en une base orthonormée directe \vec{x}, \vec{x}' et on évaluera \vec{y} et \vec{z} sur cette base.)

2) Soient a, b, c trois points non alignés de l'espace affine euclidien E . Montrez que les trois angles $(\vec{bc}, \vec{ba}), (\vec{ca}, \vec{cb}), (\vec{ab}, \vec{ac})$ sont de même signe (on pourra utiliser une base orthonormée directe de premier vecteur $\vec{bc}/\|\vec{bc}\|$ pour comparer les signes de (\vec{bc}, \vec{ba}) et (\vec{ca}, \vec{cb}) et celui de l'ordonnée de a dans cette base).

3) Soient a, b, c (resp. a, b, d) trois points non alignés de E . Montrez que c et d sont dans le même demi-plan limité par (ab) si et seulement si (\vec{ca}, \vec{cb}) et (\vec{da}, \vec{db}) sont de même signe.

4) Montrez que l'ensemble des points m qui vérifient $(\vec{ma}, \vec{mb}) = (\vec{ca}, \vec{cb})$ est l'arc $\mathcal{A} = \widehat{ab}$ du cercle circonscrit Γ à abc qui contient c (c'est l'**arc capable** défini par les points a, b et l'angle (\vec{ca}, \vec{cb})). Montrez que les points de l'autre arc \widehat{ab} de Γ vérifient $(\vec{ma}, \vec{mb}) = (\vec{ca}, \vec{cb}) + \pi$.

5) Montrez que l'ensemble des points m qui vérifient $\widehat{amb} = \widehat{acb}$ est l'union de \mathcal{A} et de son symétrique par rapport à (ab) . Montrez que si m est dans $\Gamma - \mathcal{A}$ on a $\widehat{amb} = \pi - \widehat{acb}$.

5.7.5 Quelques exercices de vraie géométrie (réelle)

5.7.17 Exercice. Soit abc un triangle. On construit, sur les côtés du triangle, extérieurement à celui-ci, les triangles équilatéraux bca', cab' et abc' . Soient p, q, r leurs centres respectifs.

1) Soit s la similitude directe de centre a qui transforme q en c . Préciser son rapport et son angle. Même question pour la similitude directe s' de centre b qui transforme c en p .

2) Quelle est la nature du triangle pqr ?

3) Montrer que les triangles abc et pqr ont même centre de gravité.

Cette propriété est généralement attribuée à Napoléon. La légende raconte qu'à la présentation du théorème devant l'Académie des sciences en 1797 au

retour de la campagne d'Italie, Lagrange aurait dit à Napoléon : « *Nous attendions tout de vous, mon Général, mais pas une leçon de géométrie.* »

5.7.18 Exercice. Soit abc un triangle. Un point e varie sur le cercle circonscrit à abc . La droite (ae) coupe (bc) en d . Trouver le lieu du centre o du cercle circonscrit au triangle bde .

Indications : on commencera par se faire une idée du lieu, par exemple avec un logiciel de géométrie. On pourra ensuite utiliser l'une des pistes suivantes :

- a) Tracer le segment $[od]$, comparer \widehat{obd} et \widehat{bod} .
- b) Tracer le segment $[db']$ où b' est le point diamétralement opposé à b sur le cercle circonscrit à bde et comparer \widehat{obd} et $\widehat{bb'd}$.
- c) Tracer le segment $[eb']$ et comparer \widehat{obd} et $\widehat{deb'}$.

Pour éviter les nombreux cas de figures on aura intérêt à utiliser les angles orientés de droites.

5.7.19 Exercice. 1) Soit abc un triangle. On construit deux triangles rectangles isocèles abc' et acb' à l'extérieur de abc . Soit m le milieu de $[bc]$. Montrer qu'on a $b'm = c'm$ et $\widehat{b'mc'} = \pi/2$.

(Il y a de nombreuses méthodes utilisant rotations, similitudes, triangles isométriques, complexes, etc.)

2) Soit $abcd$ un quadrilatère convexe. On construit à l'extérieur de $abcd$ quatre carrés bâtis sur les côtés de $abcd$. Soient a', b', c', d' les centres de ces carrés (dans l'ordre). Montrer qu'on a $a'c' = b'd'$ et que ces droites sont perpendiculaires.

5.7.20 Exercice. ¶ Soit abc un triangle isocèle en a avec $\widehat{a} = 20^\circ$. On porte les points $q \in [ac]$ et $r \in [ab]$ avec $\widehat{cbq} = 60^\circ$ et $\widehat{bcr} = 50^\circ$. Calculer \widehat{bqr} .

5.7.21 Exercice. Soit abc un triangle. Construire des points $m \in [ab]$ et $n \in [ac]$ tels que les droites (bc) et (mn) soient parallèles et que l'on ait l'égalité de longueurs $an = mb$. (Il y a de nombreuses méthodes, en utilisant Thalès, des parallélogrammes, des réflexions, l'abandon de contrainte, des transformations, etc. voir [DJC01]).

5.7.22 Exercice. Soit $abcd$ un parallélogramme. On construit, à l'extérieur de $abcd$ les triangles équilatéraux adp et abq . Montrer que pqc est équilatéral.

Chapitre 6

Espaces de points, de vecteurs et de droites : généralités et cas des triangles

La problématique de ce chapitre a déjà été rencontrée plusieurs fois et notamment au chapitre 7 de la partie II et au chapitre 4 de la partie IV. Il s'agit d'étudier le quotient $\mathcal{P} = X^n/\text{Is}(X)$ de l'espace des n -uplets de points a_1, \dots, a_n de X , modulo l'action du groupe des isométries (voire des similitudes). Cette question est intimement liée à celle des invariants de ces objets et de leurs relations : les invariants fournissent un paramétrage de \mathcal{P} , c'est-à-dire une application Φ de \mathcal{P} dans \mathbf{R}^N (dans le cas réel), injective si les invariants sont assez nombreux, et les relations décrivent l'image de Φ comme un fermé algébrique de \mathbf{R}^N . Dans le cas de la géométrie euclidienne, il y a une petite simplification du problème qui provient de l'existence de la notion de vecteur. En effet, étudier les n -uplets de points (a_1, \dots, a_n) modulo $\text{Is}(X)$ revient à étudier les $n - 1$ -uplets de vecteurs $(\overrightarrow{a_1a_2}, \dots, \overrightarrow{a_1a_n})$ modulo $O(q)$ avec le double avantage de passer de n objets à $n - 1$ et d'un groupe de dimension 3 à un groupe de dimension 1, mais l'inconvénient de privilégier l'un des points. D'ailleurs, s'agissant de l'ordre des points, une autre question est d'étudier les "paquets" de n points, sans ordre, c'est-à-dire de passer au quotient, non seulement par $\text{Is}(X)$, mais aussi par le groupe symétrique \mathfrak{S}_n .

Nous commençons en plantant le décor autour des quotients précédents et en faisant le lien entre ces questions et les deux théorèmes fondamentaux sur les invariants et les relations. Nous étudions ensuite l'espace des triangles, essentiellement dans le cas réel, en en donnant plusieurs paramétrages. Le dernier paragraphe est consacré à l'espace des n -uplets de droites (sans l'apport des vecteurs cette fois) et notamment au cas des trilatères.

Les notations sont toujours celles du chapitre 2. Le corps de base est quelconque dans un premier temps, mais le cas réel sera primordial.

6.1 Une parenthèse générale : le lien entre la description des quotients et les théorèmes fondamentaux sur les invariants

La problématique de la construction des quotients du type X/G où X est contenu dans un espace numérique (affine ou projectif) et où G est un groupe algébrique (c'est-à-dire pouvant se représenter comme un groupe de matrices) est intimement liée à la recherche des invariants polynomiaux de X (c'est-à-dire des fonctions polynomiales sur X à valeurs dans k^N et invariantes par G) et de leurs relations¹. Nous ferons l'hypothèse que les invariants polynomiaux en question séparent les points de X/G . Cela signifie qu'étant donnés $x, y \in X$, distincts dans X/G , il existe un invariant polynomial P tel que $P(x) \neq P(y)$. Nous verrons que c'est bien le cas pour les espaces de points et de vecteurs, voir 6.2.3.

6.1.1 Le premier théorème fondamental

Rappelons (voir Partie II, chapitre 3), que l'assertion d'un “premier théorème fondamental sur les invariants” (voir par exemple, Partie II, ??) exprime que tous les invariants sont dans l'algèbre engendrée par certains d'entre eux, dits fondamentaux. Un tel théorème a pour conséquence le résultat suivant :

6.1.1 Proposition. *On suppose que les invariants polynomiaux séparent les points de X/G . Alors, si Φ_1, \dots, Φ_N engendrent l'algèbre des invariants polynomiaux sur X , l'application $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N) : X/G \rightarrow k^N$ est injective.*

Démonstration. Si Φ n'est pas injective on a $x, y \in X/G$ distincts avec $\Phi_i(x) = \Phi_i(y)$ pour tout i . Mais, comme les points sont distincts, il existe un polynôme invariant P tel que $P(x) \neq P(y)$. Pourtant, on a $P = Q(\Phi_1, \dots, \Phi_N)$, où Q est un polynôme, ce qui est absurde.

6.1.2 Remarques. 0) Le premier intérêt du “premier théorème fondamental” est la propriété de **finitude** : on ramène les invariants à un nombre fini d'entre eux.

1. Weyl ([Wey39] p. 31) parle à ce propos de “partie fonctionnelle” des théorèmes sur les invariants mais remarque que la partie algébrique est beaucoup plus profonde. En fait, il s'agit de la différence entre une version ensembliste et une version schématique des énoncés.

1) Attention, le premier théorème fondamental implique l'injectivité du paramétrage associé, mais la réciproque n'est pas vraie² : en général le théorème sur les invariants est beaucoup plus difficile à établir que sa variante fonctionnelle.

2) Une question naturelle qui surgit à cet endroit est celle de la minimalité des invariants fondamentaux. Elle conduit à chercher d'éventuelles relations entre ces invariants et c'est l'objet du paragraphe suivant. Il peut y avoir deux variantes légèrement différentes :

- Il se peut que certains des Φ_i soient trivialement superflus. Par exemple, voir 6.3.1, dans le cas des triangles abc , on peut utiliser comme invariants le système "total" formé des trois carrés scalaires des côtés (qu'on nomme x, y, z) et des trois produits scalaires de deux d'entre eux (notés u, v, w), mais, à cause des relations linéaires du type $x + v + w = 0$ qui les lient, on peut se contenter de trois convenablement choisis, par exemple x, y, z ou u, v, w .

- Dans d'autres cas, comme celui de quatre points ou de trois vecteurs, les systèmes naturels (les six longueurs ou les six produits scalaires) ne sont pas indépendants (car le quotient est de dimension 5) et ils sont liés par une relation qui est une fonction implicite des invariants (un déterminant de Cayley-Menger ou de Gram, voir 7.1.4 ci-dessous). Cependant, cette relation est non linéaire et, si l'on peut la résoudre sur un ouvert générique, on ne peut l'utiliser pour éliminer globalement un paramètre. D'ailleurs, si l'on omet l'un des paramètres, l'application n'est plus injective sur X/G tout entier, de sorte que les invariants sont bien globalement minimaux.

6.1.3 Exemples. Voici deux exemples pour illustrer la remarque précédente. Dans les deux cas, v_1, v_2, v_3 sont des vecteurs d'un espace V réel de dimension 2. Ces exemples s'éclaireront avec l'équation 2) de 7.1.4.

1) On suppose que (v_1, v_2) est une base orthonormée de V et on prend $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$. On voit que $\varphi(v_1, v_3)$ et $\varphi(v_2, v_3)$ déterminent λ et μ , donc $q(v_3)$. En revanche, la donnée de $\varphi(v_1, v_3)$ et de $q(v_3)$ détermine λ mais ne détermine μ (donc $\varphi(v_2, v_3)$) qu'au signe près.

2) Si l'on suppose v_1 et v_2 colinéaires et qu'on impose tous les produits scalaires sauf $q(v_3)$, on voit aisément que ce dernier est arbitraire.

6.1.4 Remarque. Dans la situation de la géométrie euclidienne, la proposition 6.1.1 s'applique pour les points mais pas pour les droites. En effet, comme celles-ci vivent dans un espace projectif et non vectoriel, il faut utiliser, non pas des polynômes invariants, mais des fractions rationnelles. À ceci près, le résultat est identique : si des fractions Φ_1, \dots, Φ_n engendrent le corps des

2. De manière triviale, on conserve l'injectivité si l'on remplace les Φ_i par leurs carrés qui n'engendrent plus l'algèbre des invariants.

fractions rationnelles invariantes, elles définissent un plongement injectif, voir 6.4.1 et § 8.3.3.

6.1.2 Le second théorème fondamental

Rappelons qu'un "second théorème fondamental" d'une théorie des invariants digne de ce nom, donne les relations entre les générateurs Φ_1, \dots, Φ_N , c'est-à-dire l'idéal des polynômes F qui vérifient $F(\Phi_1, \dots, \Phi_N) = 0$. Ce théorème, lui, décrit l'image du paramétrage³ :

6.1.5 Proposition. *On suppose que k est infini, que X est contenu dans k^n et qu'il contient un ouvert de Zariski non vide de k^n . Soient Φ_1, \dots, Φ_N des invariants fondamentaux, I l'idéal des relations entre ces invariants et $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N) : X/G \rightarrow k^N$ le paramétrage associé. Alors, l'adhérence de $\text{Im } \Phi$ dans k^N (au sens de la topologie de Zariski), est égale à l'ensemble $V(I)$ des zéros de I .*

Démonstration. 1) Montrons que $\text{Im } \Phi$ est contenu dans $V(I)$ (son adhérence y sera aussi par définition de la topologie de Zariski). Si x est dans X , on a $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_N(x))$ et si F est dans I on a $F(\Phi_1, \dots, \Phi_N) = 0$, donc $F(\Phi(x)) = 0$.

2) Soit F un polynôme nul sur $\text{Im } \Phi$ (donc aussi sur $Y = \overline{\text{Im } \Phi}$). On a $F(\Phi_1(x), \dots, \Phi_N(x)) = 0$ pour tout $x \in X$ et, comme k est infini et X dense dans k^n au sens de Zariski, cela montre que le polynôme $F(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ est nul, donc que F est dans I . Autrement dit, on a $I(Y) \subset I$. Sur les ensembles on a, en sens inverse, $V(I) \subset V(I(Y)) = Y$ et la conclusion s'ensuit.

6.1.6 Exemple. Dans le cas des espaces (isomorphes) \mathcal{P}_4 (les quadrilatères) et \mathcal{V}_3 (les triplets de vecteurs), on a les six invariants distances et produits scalaires, voir 7.1.1. Le quotient est de dimension 5 ($8-3$ pour les points, $6-1$ pour les vecteurs) et on a une unique relation dans chaque cas. Ces relations sont données par des déterminants, de Cayley-Menger pour les points et de Gram pour les vecteurs, ces relations étant d'ailleurs équivalentes en vertu de 5.5.6.

6.1.7 Remarques. 1) La description de l'image donnée ci-dessus reste assez vague. Dans le cas des points de l'espace euclidien, on la précisera ci-dessous dans deux directions :

- On fera souvent des hypothèses assurant que les données sont génériques (points distincts, voire non alignés) et l'image sera alors contenue dans un ouvert de Zariski de k^N , voir par exemple 6.3.1.

3. Voir Partie II §1.2 pour les notions de géométrie algébrique évoquées ici.

- Dans le cas réel, les points de l'image vérifieront en plus des conditions de positivité (longueurs positives, inégalités de Cauchy-Schwarz), voir par exemple 6.3.3.

2) Comme pour le premier théorème, dans le cas des droites, les invariants à considérer sont des fractions rationnelles et non des polynômes, voir § 8.3.3.

3) Pour l'application des résultats précédents aux espaces de vecteurs et de points, voir 8.2.17 et 8.2.18.

6.2 Espace des points et espace des vecteurs

Nous abordons la question – centrale – de la description des quotients⁴ $\mathcal{P}_n = X^n/\text{Is}(X)$. Il s'agit de décrire les configurations⁵ possibles de n points du plan euclidien. D'une certaine manière, toute la géométrie est dans cette question.

6.2.1 L'isomorphisme

Nous montrons d'abord le lien entre les espaces de points modulo isométries $\mathcal{P}_n := X^n/\text{Is}(X)$ et les espaces de vecteurs, toujours modulo isométries, $\mathcal{V}_{n-1} := \vec{X}^{n-1}/O(q)$. Il s'agit du théorème suivant :

6.2.1 Théorème. *L'application $\Theta : X^n \rightarrow \vec{X}^{n-1}$ définie par $\Theta(a_1, \dots, a_n) = (\overrightarrow{a_1 a_2}, \dots, \overrightarrow{a_1 a_n})$ induit un isomorphisme :*

$$\overline{\Theta} : \mathcal{P}_n := X^n/\text{Is}(X) \rightarrow \mathcal{V}_{n-1} := \vec{X}^{n-1}/O(q).$$

Démonstration. Pour montrer l'existence de l'application, il suffit de voir que si $b = (b_1, \dots, b_n)$ est l'image de $a = (a_1, \dots, a_n)$ par $g \in \text{Is}(X)$, $\vec{b} = (\overrightarrow{b_1 b_2}, \dots, \overrightarrow{b_1 b_n})$ est l'image de $\vec{a} = (\overrightarrow{a_1 a_2}, \dots, \overrightarrow{a_1 a_n})$ par un élément de $O(q)$. C'est simplement le fait que l'application linéaire \vec{g} associée à g est dans $O(q)$ et vérifie $\overrightarrow{g(a_i)g(a_j)} = \vec{g}(\overrightarrow{a_i a_j})$. L'application réciproque, au niveau des quotients, est obtenue en choisissant arbitrairement une origine a_1 et en associant à $(\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ le n -uplet des points a_1 et $a_i = a_1 + \vec{v}_i$ pour $i = 2, \dots, n$.

4. On se limitera parfois à l'étude du quotient de certaines parties de X^n , par exemple formées de points "en position générale". Comme on l'a vu partie II, chapitre 7, cela facilite beaucoup le travail.

5. Pour voir les liens entre cette étude et l'astronomie, notamment le problème à n corps, on se reportera au bel article d'A. Chenciner *La forme de n corps*, Mélanges Gilles Châtelet, in Revue de synthèse, Springer Verlag, 2008.

6.2.2 Remarques. 1) Ce théorème n'a pas d'équivalent en géométrie non euclidienne faute de vecteurs dignes de ce nom.

2) On notera que cet isomorphisme dépend du choix de a_1 . On peut bien sûr utiliser n'importe lequel des a_i à la place.

3) Nous n'avons pas précisé le mot isomorphisme ici. Pour l'heure il signifie bijection, mais nul doute qu'il conserverait toute structure raisonnable (par exemple topologique).

6.2.2 Les paramétrages

Pour décrire les quotients précédents, la méthode est toujours la même (voir Partie II ch. 7 ou Partie IV ch. 4), on repère, pour les objets étudiés, un certain nombre d'invariants (numériques) sous l'action du groupe. Ils définissent une application du quotient dans k^N et il s'agit de montrer que cette application est injective, puis d'en préciser l'image. Dans le cas présent, il y a beaucoup de choix d'invariants possibles. Par exemple, pour caractériser un triangle modulo isométrie, on peut se donner à la fois les longueurs des côtés et les angles, voire trois seulement de ces invariants bien choisis. Nous n'envisagerons pas tous ces cas en général, nous contentant essentiellement de deux systèmes d'invariants particuliers :

- Dans le cas des n -uplets de points (a_1, \dots, a_n) , les $n(n-1)/2$ carrés des "distances" $d_{ij} = (a_i a_j)^2 := q(\overrightarrow{a_i a_j})^2$ pour $1 \leq i < j \leq n$.
- Dans le cas des $n-1$ -uplets de vecteurs (v_2, \dots, v_n) , les $n(n-1)/2$ produits (et carrés) scalaires $\varphi_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$ pour $2 \leq i \leq j \leq n$.

Ces deux systèmes sont équivalents en vertu de la proposition suivante :

6.2.3 Proposition. *On pose $N = n(n-1)/2$. On a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_n & \xrightarrow{\bar{\Theta}} & \mathcal{V}_{n-1} \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Psi \\ k^N & \xleftarrow{\Lambda} & k^N \end{array}$$

où Φ est l'application qui associe à (a_1, \dots, a_n) les N (carrés de) "distances" d_{ij} , où Ψ est l'application qui à (v_1, \dots, v_{n-1}) associe les N produits scalaires φ_{ij} et où Λ est l'application linéaire bijective qui aux φ_{ij} associe les d_{ij} définis par $d_{ij} = \varphi_{ii} + \varphi_{jj} - 2\varphi_{ij}$ pour $i, j \geq 2$ et par $d_{1i} = \varphi_{ii}$ pour $i \geq 2$.

Les applications Φ et Ψ sont injectives, autrement dit les d_{ij} et φ_{ij} sont respectivement des systèmes complets d'invariants (voir Partie IV ??) pour les points et les vecteurs.

Démonstration. Pour voir que Λ est bijective, il suffit de calculer les φ_{ij} en fonction des d_{ij} ce qui est immédiat. Pour le dernier point il suffit de traiter

le cas de Ψ . Cela résulte exactement de 1.2.9.

6.2.4 Remarques. 1) Nous utiliserons ces deux systèmes de paramètres pour décrire l'espace des n -uplets de points. Le système qui fait intervenir les vecteurs présente l'avantage de mener à des calculs plus simples. En revanche, il fait jouer un rôle particulier à l'un des points.

2) Il y a un autre système (qu'on peut dire "total") qui consiste à considérer les $N = \frac{n(n-1)}{2}$ vecteurs $\overrightarrow{a_i a_j}$ et leurs $\frac{N(N+1)}{2}$ produits et carrés scalaires. Cela donne $\frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}$ paramètres (6 dans le cas des triangles, 21 pour les quadrilatères, etc.). Nous n'utiliserons ce système que dans le cas des triangles.

3) Si k est le corps des réels et si l'on munit le quotient $\mathcal{P}_n = X^n / \text{Is}(X)$ de la topologie quotient, l'application $\Phi : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbf{R}^N$ est continue et injective, ce qui montre que \mathcal{P}_n est un espace topologique séparé et que les orbites dans l'action de $\text{Is}(X)$ sur X^n sont fermées.

6.2.3 L'espace des points à permutation près

Pour décrire la configuration formée de n points on peut, comme nous l'avons fait, considérer des n -uplets (a_1, \dots, a_n) . Le défaut de cette approche, c'est qu'elle revient à imposer un ordre sur les points alors qu'il peut être intéressant d'envisager le "paquet" des points sans privilégier aucun d'entre eux. Par exemple, s'agissant de triangles, on peut ainsi considérer que abc et bac sont un seul et même objet. Cela revient à regarder les points, non seulement modulo l'action du groupe des isométries, mais aussi modulo celle du groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Bien entendu, on souhaite ensuite décrire le quotient obtenu à l'aide d'invariants, par une procédure analogue à celle utilisée ci-dessus. Une méthode pour cela consiste à saturer l'ensemble des invariants polynomiaux, pour le rendre stable par permutation, puis à utiliser les polynômes symétriques pour décrire le quotient.

6.2.5 Définition. Soit $R = k[Y_1, \dots, Y_N]$ un anneau de polynômes. Le groupe \mathfrak{S}_N opère sur R par $\sigma(P)(Y_1, \dots, Y_N) = P(Y_{\sigma(1)}, \dots, Y_{\sigma(N)})$. Les polynômes invariants sous cette action sont dits **symétriques**. On appelle **polynômes symétriques élémentaires** les polynômes $S_1 = Y_1 + \dots + Y_N$, ..., $S_p = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq N} Y_{i_1} Y_{i_2} \cdots Y_{i_p}$, ..., $S_N = Y_1 \cdots Y_N$.

On rappelle que tout polynôme symétrique est un polynôme en les S_i . Voir par exemple [Lan65] Ch. V, §9. Par ailleurs, si deux n -uplets (y_1, \dots, y_n) et (y'_1, \dots, y'_n) ont les mêmes polynômes symétriques élémentaires : $s_1 = y_1 + \dots + y_n = y'_1 + \dots + y'_n$, etc. les y_i et les y'_i sont égaux à permutation près car ce sont les n racines du polynôme $X^n - s_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n$.

6.2.6 Définition. Soit $\mathcal{P} = \{\Phi_1, \dots, \Phi_N\}$ un ensemble de polynômes de $k[X_1, \dots, X_n]$. On dit que \mathcal{P} est **saturé** (sous l'action de \mathfrak{S}_n) si pour tout $P = P(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{P}$ et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le polynôme $\sigma(P)$ (c'est-à-dire $P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$) est dans \mathcal{P} . Si c'est le cas, on obtient ainsi une représentation χ de \mathfrak{S}_n dans \mathfrak{S}_N .

6.2.7 Remarque. À partir d'un ensemble d'invariants quelconque, on obtient un ensemble saturé en ajoutant au besoin les transformés des invariants sous l'action du groupe symétrique. Ainsi, avec quatre points a, b, c, d on obtient, à partir de l'invariant ab , les invariants ac, ad, bc, bd, cd et, à partir de $[a, b, c]$, les invariants $[a, b, d], [a, c, d]$ et $[b, c, d]$.

Dans le cas des longueurs, on peut se demander si le résultat suivant est vrai :

6.2.8 Conjecture. Soit n un entier ≥ 2 et soient (a_1, \dots, a_n) des points de X . Posons $N = n(n-1)/2$. On note Φ_1, \dots, Φ_N les carrés des distances $(a_i a_j)^2$ pour $i < j$. Alors, les polynômes $S_k(\Phi_1, \dots, \Phi_N)$, pour k variant de 1 à N , constituent un système complet d'invariants de a_1, \dots, a_n modulo $\text{Is}(X) \times \mathfrak{S}_n$.

Si on a deux n -uplets (a_1, \dots, a_n) et (a'_1, \dots, a'_n) l'hypothèse implique que leurs invariants Φ_i sont les mêmes à permutation près (car ce sont les racines d'un même polynôme de degré N), mais il n'est pas clair que cette permutation provienne d'une permutation des a_i (sauf dans le cas $n = 3$ où l'on a $n = N$). La conjecture est encore vraie pour $n = 4$, (voir 7.1.13). Pour le reste ...

6.3 L'espace des triangles

Nous appliquons ce qui précède au premier exemple non trivial⁶, celui des triangles abc de X (ou des couples de vecteurs de \vec{X}). Dans un premier temps le corps k est quelconque.

6.3.1 Sur un corps quelconque

Il s'agit de décrire l'ensemble \mathcal{T} des triplets de points $a, b, c \in X$, formant triangle, c'est-à-dire non alignés, modulo l'action du groupe des isométries $G := \text{Is}(X)$. Pour décrire le quotient \mathcal{T}/G , on peut, comme il a été expliqué ci-dessus, utiliser un paramétrage par des invariants et on a vu qu'il revenait

6. Voir 6.5.3 pour le cas des doublets.

au même d'étudier l'espace des couples de vecteurs (avec trois choix possibles d'origine). Cela conduit au paramétrage défini ci-dessous par Φ_3 . Dans le cas des triangles, d'autres solutions sont possibles. On peut utiliser le système "total" formé de tous les carrés et produits scalaires (voir 6.2.4), mais aussi les systèmes partiels évoqués en 6.2.3. On a le résultat suivant :

6.3.1 Proposition. *Soit abc un triangle de X . On pose $x = q(\vec{bc})$, $y = q(\vec{ca})$, $z = q(\vec{ab})$, $u = \varphi(\vec{ca}, \vec{ab})$, $v = \varphi(\vec{ab}, \vec{bc})$ et $w = \varphi(\vec{bc}, \vec{ca})$. On a les relations $x + v + w = y + w + u = z + u + v = 0$. L'application $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow k^6$, qui à abc associe (x, y, z, u, v, w) se factorise en une application injective du quotient \mathcal{T}/G dans k^6 .*

Les applications Φ_1, Φ_2 et $\Phi_3 : \mathcal{T} \rightarrow k^3$ qui à abc associent respectivement (x, y, z) , (u, v, w) et (u, y, z) se factorisent aussi en des applications injectives de \mathcal{T}/G dans k^3 dont les images sont contenues dans les ouverts définis respectivement par $\Gamma_2^\sharp(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy \neq 0$, $vw + wu + uv \neq 0$ et $zy - u^2 \neq 0$.

Démonstration. Les relations sont issues de la relation de Chasles et elles permettent, au choix, d'exprimer x, y, z en fonction de u, v, w ($x = -v - w$, etc.) ou au contraire u, v, w en fonction de x, y, z ($u = \frac{x - y - z}{2}$ etc.). La factorisation vient du fait que x, \dots, w sont invariants et l'injectivité résulte du troisième cas d'isométrie.

Par ailleurs, si on normalise les points par $l(a) = l(b) = l(c) = 1$, on a l'identité de Lagrange 2.2.22 :

$$q(\vec{ab})q(\vec{ac}) - \varphi(\vec{ab}, \vec{ac})^2 = \Delta(q)[a, b, c]^2,$$

dont on a vu en 2.2.22 qu'elle s'écrivait aussi :

$$\Delta(q)[a, b, c]^2 = zy - u^2 = vw + wu + uv = -\frac{1}{4}\Gamma_2^\sharp(x, y, z),$$

où Γ_2^\sharp est le déterminant de Cayley-Menger, voir 5.5.6. Comme a, b, c sont non alignés, on voit que cette quantité est non nulle.

6.3.2 Remarques. 1) Comme le groupe algébrique G est de dimension 3, la dimension attendue de \mathcal{T}/G est 3 ce qui légitime le paramétrage par trois⁷ scalaires algébriquement indépendants x, y, z ou u, v, w . Pour d'autres paramétrages, voir exercice 6.5.4.

2) Dans le cas d'un corps k quelconque, il n'est pas évident de préciser l'image

7. On est ici dans le premier cas évoqué en 6.1.2, où l'on peut exprimer certains invariants en fonction des autres.

des applications Φ , voir 2.3.1. On peut toutefois préciser que $\Gamma_2^\sharp(x, y, z)$ n'est pas un carré, voir 2.3.2.

3) Pour l'étude des triangles généralisés, voir 6.5.8.

6.3.2 Le cas réel

Nous poursuivons l'étude de l'espace des triangles entamée ci-dessus, mais en supposant cette fois $k = \mathbf{R}$. On désigne encore par \mathcal{T} l'espace des triplets (a, b, c) de points non alignés de X et par G le groupe $\text{Is}(X)$. On peut identifier \mathcal{T} à une partie de l'espace \mathbf{R}^6 en prenant des coordonnées et on munit \mathcal{T} et \mathcal{T}/G des topologies induite et quotient. On a le résultat suivant :

6.3.3 Proposition. *Le quotient \mathcal{T}/G est homéomorphe aux espaces suivants :*

1) *L'ouvert de \mathbf{R}^3 formé des points (x, y, z) vérifiant $x, y, z > 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy < 0$, intérieur d'un demi-cône à base circulaire de \mathbf{R}^3 .*

2) *L'ouvert de \mathbf{R}^3 formé des points (u, v, w) tels que $v + w, w + u$ et $u + v$ soient négatifs et vérifient $vw + wu + uv > 0$.*

3) *L'ouvert de \mathbf{R}^3 formé des points (u, y, z) tels que $y, z > 0$ et $zy - u^2 > 0$, intérieur d'un cône à base parabolique.*

4) *L'ouvert de \mathbf{R}^3 formé des points (α, β, γ) vérifiant $0 < \alpha < \beta + \gamma$, $0 < \beta < \gamma + \alpha$ et $0 < \gamma < \alpha + \beta$, intérieur d'un trièdre.*

Démonstration. Dans les cas 1), 2) et 3), les applications Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 de \mathcal{T} dans les ouverts considérés ont été définies en 6.3.1 (on a, par exemple, $x = q(\vec{bc})$, $u = \varphi(\vec{ca}, \vec{ab})$, etc.) et il reste seulement à montrer les assertions concernant l'image. Comme x, y, z sont les carrés des longueurs des côtés, elles sont positives et vérifient les inégalités triangulaires : $\sqrt{x} < \sqrt{y} + \sqrt{z}$ et les autres, ainsi que les inégalités de Cauchy-Schwarz (par exemple $zy - u^2 > 0$). Il y a plusieurs façons de procéder (voir aussi exercice 6.5.5). Montrons par exemple la surjectivité de Φ_3 . On considère les points $a = (0, 0)$, $b = (\sqrt{y}, 0)$ et $c = (s, t)$. On a $q(\vec{ab}) = y$ et on calcule s, t pour avoir $\varphi(\vec{ab}, \vec{ac}) = s\sqrt{y} = -u$ (ce qui donne $s = -\frac{u}{\sqrt{y}}$) et $ac^2 = s^2 + t^2 = z$ (ce qui donne $t = \sqrt{\frac{zy - u^2}{y}}$). L'image de Φ_3 est donc bien l'intérieur du cône de sommet $o = (0, 0, 0)$ et de base la parabole d'équation $z = 1$, $y = u^2$ et on voit sur les formules précédentes que l'application réciproque est continue.

Les points 1) et 2) résultent des formules de passage de x, y, z à u, v, w et des égalités $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = -4(vw + wu + uv) = -4(zy - u^2)$ (et c'est un cas particulier de 6.2.3). Pour montrer 4), il suffit de poser $\alpha = \sqrt{x}$,

$\beta = \sqrt{y}$ et $\gamma = \sqrt{z}$ (autrement dit d'introduire les longueurs des côtés de abc , $\alpha = bc$, etc.). On notera que les inégalités $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \gamma + \alpha$ et $\gamma < \alpha + \beta$ impliquent (par addition) que α, β et γ sont > 0 .

Pour préciser l'image de Φ_1 , on note que, comme le polynôme $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy$ est homogène, l'ensemble de ses zéros est un cône et on vérifie que sa section par le plan $x + y + z = 1$ est le cercle de centre $(1/3, 1/3, 1/3)$ et de rayon $1/\sqrt{6}$.

6.3.4 Remarques. 0) L'identité de Lagrange 2.2.22 : $[a, b, c]^2 = q(\vec{ab})q(\vec{ac}) - \varphi(\vec{ab}, \vec{ac})^2$ se traduit en termes d'aires en tenant compte de $[a, b, c] = 2\mathcal{A}(abc)$ et donne $-16\mathcal{A}(abc)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy$ (voir au paragraphe suivant le lien entre cette relation et la formule de Héron). On voit ainsi que la condition $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy < 0$ exprime simplement qu'un triangle non aplati est d'aire > 0 .

1) La relation qui exprime que la somme des angles du triangle est égale à π , ou encore que la forme q^* est dégénérée se traduit par la nullité du déterminant (voir la première preuve de 5.5.16) :

$$\begin{vmatrix} x & w & v \\ w & y & u \\ v & u & z \end{vmatrix} = xyz + 2uvw - xu^2 - yv^2 - zw^2 = 0.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs, on voit qu'elle est conséquence des relations "de Chasles" $x + v + w = 0$, etc. Comme on l'a dit, l'existence même des vecteurs (avec Chasles comme propriété principale) est à elle seule constitutive de la géométrie euclidienne.

2) Analytiquement, si l'on écrit dans un repère $a = (a_1, a_2)$ etc., l'application Φ_1 associe à $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$ la quantité $x = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2}$ et les autres. Elle est continue, et lisse lorsque la quantité sous le radical est non nulle, ce qui est le cas sur \mathcal{T} .

3) Pour d'autres paramétrages de \mathcal{T}/G , voir le paragraphe suivant et l'exercice 6.5.4.

4) Pour l'étude des triangles généralisés (c'est-à-dire les triplets (a, b, c) avec des points alignés voire confondus), voir exercices 6.5.8 et 6.5.10.

5) Le cas du quotient par le groupe Is^+ est étudié en 6.5.7, celui du quotient par Sim en 6.5.6.

6) Comme application de ce qui précède, le lecteur pourra traiter l'exercice 6.5.15.

6.3.3 Al-Kashi, aire et somme des angles

On reprend les notations du paragraphe précédent : un triangle abc , ses invariants algébriques $x, y, z; u, v, w$ et leurs variantes géométriques, les longueurs $\alpha = bc$, $\beta = ca$ et $\gamma = ab$ et les angles \widehat{a} , \widehat{b} , \widehat{c} . Ces deux types d'invariants sont liés par les relations $x = \alpha^2$ etc., $u = \beta\gamma \cos \widehat{a}$, etc.

Comme il a été dit en 6.3.1, le plus naturel, pour paramétrer l'espace \mathcal{T}/G des triangles est d'utiliser les six invariants x, \dots, w ou leurs variantes géométriques $\alpha, \dots, \widehat{c}$. Comme X est de dimension 6 et G de dimension 3, le quotient est de dimension 3, donc doit pouvoir être défini par trois paramètres, ce que nous avons fait au paragraphe précédent. En effet, il y a des relations entre les six invariants et, toujours pour une raison de dimension, on s'attend à ce qu'il y ait trois telles relations.

Dans le cas algébrique, c'est bien le cas, avec les formules $x + v + w = 0$ etc. On a vu que la relation "somme des angles", $xyz + 2uvw - xu^2 - yv^2 - zw^2 = 0$, un peu cachée dans ce cadre, en est une conséquence. Dans le cas géométrique, il apparaît quatre relations, les trois relations d'Al-Kashi : $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos \widehat{a}$ et les deux obtenues par permutation circulaire, mais aussi la relation $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = \pi$ très naturelle ici. Là encore, c'est une relation de trop et il s'agit de comprendre que la relation de la somme des angles est une conséquence des trois relations d'Al-Kashi.

Voici le calcul qui donne ce résultat. On part des formules d'Al-Kashi qui donnent $\cos \widehat{a} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$ et les autres. Avec ces formules on peut calculer les carrés des sinus :

$$\begin{aligned} \sin^2 \widehat{a} &= \frac{(\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2)((\beta + \gamma)^2 - \alpha^2)}{4\beta^2\gamma^2} \\ &= \frac{(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)}{4\beta^2\gamma^2} \end{aligned}$$

et il y a (en apparence) un petit miracle : le numérateur de $\sin^2 \widehat{a}$ est symétrique en α, β, γ , de sorte que si l'on calcule $\sin^2 \widehat{a} \sin^2 \widehat{b}$ on trouve un **carré parfait**, ce qui donne (les sinus sont positifs) :

$$(*) \quad 4\alpha\beta\gamma^2 \sin \widehat{a} \sin \widehat{b} = (\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma).$$

On peut maintenant vérifier le fait que la somme des angles du triangle est égale à π . En effet, cette relation s'écrit $\widehat{a} + \widehat{b} = \pi - \widehat{c}$ et elle équivaut à $\cos(\widehat{a} + \widehat{b}) = \cos(\pi - \widehat{c})$ ou encore à $\cos \widehat{a} \cos \widehat{b} + \cos \widehat{c} = \sin \widehat{a} \sin \widehat{b}$. Les calculs précédents permettent d'écrire cette formule sous la forme :

$$(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) = (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2) + 2\gamma^2(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)$$

et en posant $x = \alpha^2$, $y = \beta^2$ et $z = \gamma^2$, le second membre s'écrit $-x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = \Gamma_2^\sharp(x, y, z)$ et la relation cherchée n'est autre que la factorisation du déterminant de Cayley-Menger vue en 5.5.8.

Avec les calculs précédents, la factorisation du déterminant de Cayley-Menger a une interprétation simple en terme de calcul d'aire : elle explique que l'aire du triangle peut se calculer soit avec les formules vues en 5.4.17 : $|\mathcal{A}|(abc) = \frac{1}{2}\alpha\gamma \sin \widehat{b} = \frac{1}{2}\beta\gamma \sin \widehat{a}$, mais aussi par la fameuse formule de Héron :

$$|\mathcal{A}|(abc) = \sqrt{p(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)}$$

où p est le demi-périmètre du triangle, $p = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$. En effet, les deux membres de la relation (*) sont tous deux égaux à $16 \mathcal{A}(abc)^2$ (et cela prouve la formule de Héron ici).

6.3.5 Remarque. Le changement de paramétrisation qui consiste à passer des carrés scalaires x, y, z à leurs racines α, β, γ , s'il est innocent sur l'ouvert des vrais triangles, ne l'est plus au bord, c'est-à-dire sur le fermé F des triplets de points alignés. En effet, en x, y, z , ce fermé est défini par le polynôme $\Gamma_2^\sharp(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy$, qui est irréductible et donne un cône du second degré, tandis qu'en α, β, γ , la factorisation 5.5.8 montre que F se décompose en trois plans (le quatrième se réduisant à un point en l'occurrence). Ces deux variétés (le cône et le trièdre) sont homéomorphes, mais pas difféomorphes. Cela tient au fait que l'application racine est singulière aux points où x, y ou z s'annulent.

6.3.4 L'espace des triangles à permutation près

Modulo le groupe $\text{Is}(X)$

Le corps de base est encore le corps des réels. On reprend l'espace des triangles \mathcal{T} et on considère le quotient de cet espace sous l'action du groupe $H = \text{Is}(X) \times \mathfrak{S}_3$, c'est-à-dire l'espace des triangles à isométrie et permutation près, que l'on munit de la topologie quotient. On utilise le paramétrage par les longueurs $\alpha = bc$, $\beta = ca$ et $\gamma = ab$ et on introduit leurs fonctions symétriques : $p = \alpha + \beta + \gamma$, $q = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta$ et $r = \alpha\beta\gamma$. On a alors le résultat suivant :

6.3.6 Proposition. *L'espace \mathcal{T}/H est homéomorphe à la partie T de $(\mathbf{R}^{+*})^3$ formée des triplets (p, q, r) vérifiant les deux conditions : $p^3 - 4pq + 8r < 0$ et*

$$\Delta(p, q, r) = p^2q^2 - 4q^3 - 4p^3r - 27r^2 + 18pqr \geq 0.$$

Démonstration. On sait que $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}/\text{Is}(X)$ est homéomorphe à l'ensemble des triplets (α, β, γ) vérifiant les inégalités triangulaires. Il est clair que l'application de $\overline{\mathcal{T}}$ dans \mathbf{R}^3 qui associe à un triangle les fonctions symétriques p, q, r passe au quotient par \mathfrak{S}_3 et l'application obtenue est injective car les fonctions symétriques déterminent α, β, γ à permutation près (comme racines du polynôme $X^3 - pX^2 + qX - r$). Pour déterminer l'image de $\overline{\mathcal{T}}$, il faut d'abord s'assurer que le polynôme ci-dessus admette bien trois racines réelles α, β, γ . Cela revient à dire que son discriminant $\Delta = (\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2(\alpha - \beta)^2$ est positif ou nul⁸. Un calcul classique de fonctions symétriques donne la valeur de Δ annoncée dans l'énoncé. Il faut ensuite vérifier les inégalités triangulaires. Comme α, β, γ sont > 0 , elles sont équivalentes à $(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)(\alpha + \beta - \gamma) > 0$. Un petit calcul de fonctions symétriques montre que cette quantité est égale à $-p^3 + 4pq - 8r$ et on obtient l'image annoncée.

Il reste à voir qu'on a un homéomorphisme. Il est clair que l'application qui à (α, β, γ) associe (p, q, r) est continue. Sur l'ouvert formé des triangles non isocèles, c'est-à-dire où α, β, γ sont distincts, la continuité de la réciproque résulte du théorème des fonctions implicites. En effet, le jacobien

de l'application est égal à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta + \gamma & \gamma + \alpha & \alpha + \beta \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \end{vmatrix} = (\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta) \neq 0$.

Dans le cas général, on montre que l'application est propre comme dans l'exercice 6.5.3.

6.3.7 Remarques. 1) Si l'on pose $x = \alpha^2, y = \beta^2$ et $z = \gamma^2$, on sait que les conditions d'inégalités triangulaires sont équivalentes à $S := x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy < 0$ et on a $S = p(p^3 - 4q + 8r)$.

2) La quantité $p^3 - 4pq + 8r$ s'interprète en termes de l'aire $\mathcal{A} = \mathcal{A}(abc)$. En effet, la formule de Héron donne

$$16\mathcal{A}^2 = (\alpha + \beta + \gamma)(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)(\alpha + \beta - \gamma)$$

soit $16\mathcal{A}^2 = -p(p^3 - 4pq + 8r)$. La condition de l'énoncé signifie donc simplement que l'aire du triangle est non nulle.

3) La partie T est localement fermée dans \mathbf{R}^3 et sa frontière est formée de l'ensemble des triangles isocèles. Elle n'est pas ouverte : on vérifie qu'au voisinage du point $p = q = 3, r = 1$ qui correspond aux triangles équilatéraux de côté 1, les points $(3, 3, 1 + \epsilon)$ avec $\epsilon \neq 0$ ne sont pas dans T .

4) On a choisi ici de prendre comme paramètres les longueurs. Si l'on souhaite un paramétrage polynomial en les coordonnées des points il faut remplacer les longueurs par leurs carrés. *Mutatis mutandis*, le résultat est le même.

8. Le lecteur vérifiera que si le polynôme admet deux racines complexes conjuguées α et $\bar{\alpha}$ et une racine réelle γ on a $\Delta < 0$.

Le corollaire suivant permet, entre autres, de répondre négativement à la question : *Deux triangles de même aire et même périmètre sont-ils nécessairement isométriques ?* posée dans le numéro 152 des *Chantiers de pédagogie mathématique* de l'APMEP (voir aussi les exercices du paragraphe 6.5.4) :

6.3.8 Corollaire. *Il n'existe pas d'application continue injective de l'espace des triangles modulo isométries et permutations dans \mathbf{R}^2 .*

Démonstration. C'est le théorème dit *d'invariance du domaine* de Brouwer⁹ : une application injective et continue d'un ouvert de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^n est ouverte (donc ne tombe pas dans un sous-espace de dimension $< n$).

Modulo le groupe $\text{Is}^+(X)$

On étudie cette fois le quotient de \mathcal{T} par $H^+ = \text{Is}^+(X) \times \mathfrak{S}_3$. On conserve les notations du paragraphe précédent. Outre les invariants p, q, r vus ci-dessus, il y a un invariant plus caché : $\xi(a, b, c) = [a, b, c] (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)$. En effet, il est clair que ξ est invariant par $\text{Is}^+(X)$ et il est aussi invariant par \mathfrak{S}_3 car la transposition (bc) , par exemple, change $[a, b, c]$ en son opposé, mais aussi la "racine du discriminant" $\delta = (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)$ en son opposé (elle induit sur α, β, γ la transposition $(\beta\gamma)$). On obtient alors le résultat suivant :

6.3.9 Proposition. *Le quotient \mathcal{T}/H^+ est homéomorphe à la partie T^+ de $(\mathbf{R}^{+*})^3 \times \mathbf{R}$ formée des quadruplets (p, q, r, ξ) vérifiant les conditions $p^3 - 4q + 8r < 0$ et $4\xi^2 + p(p^3 - 4q + 8r)\Delta(p, q, r) = 0$.*

La flèche naturelle de T^+ dans T induite par l'identité de \mathcal{T} est un revêtement de degré 2 ramifié le long des triangles isocèles, i.e. des triangles vérifiant $\Delta = 0$.

Démonstration. Le lecteur écrira les détails. La relation provient des deux formules $16A^2 = 4[a, b, c]^2 = -p(p^3 - 4pq + 8r)$ vue ci-dessus et $\delta^2 = \Delta$. Au-dessus d'un triangle abc modulo $\text{Is}(X)$ il y en a deux modulo $\text{Is}^+(X)$: abc et $\tau(abc)$ où τ est une réflexion, ce qui correspond aux deux valeurs ξ et $-\xi$ au-dessus de ξ^2 . Le cas de ramification correspond à $\xi = 0$, donc si l'on suppose le triangle non aplati autrement dit $[a, b, c] \neq 0$, à $\Delta = 0$, c'est-à-dire au cas où deux côtés sont de même longueur.

9. Résultat non trivial que l'on peut trouver par exemple dans le livre de Marvin Greenberg *Lectures on algebraic topology*, Benjamin, 1967 (p. 82).

6.4 Espace des droites

Dans ce paragraphe nous abordons la description de l'espace des n -uplets de droites. Pour éviter les problèmes arithmétiques¹⁰, nous supposons que k est le corps des réels.

Il s'agit de décrire le quotient $\mathbf{P}(E^*)^n/\text{Is}(X)$ de l'espace des droites sous l'action du groupe des isométries, voire des similitudes. Suivant en cela les bons préceptes de Mumford, nous allons prendre quelques précautions avant d'énoncer un résultat et nous contenter du cas générique. Ici, les problèmes viennent évidemment de la droite à l'infini. On commence donc par l'écartier de l'espace, mais cela ne suffit pas, il faut aussi écartier les paquets de droites parallèles (voir 3.3.2 ou 5.2.7) et les configurations de "quadrillage", c'est-à-dire formées de deux paquets de droites parallèles, voir 6.5.16 et 6.5.18.

6.4.1 Transitivité

Soit n un entier ≥ 3 (les cas $n = 1, 2$ ont été vus en 5.2.2, 5.2.7 et 5.2.14). Quand on a n droites d'équations $A_1, \dots, A_n \in E^*$, on dispose d'un certain nombre d'invariants des équations, par exemple les produits scalaires $\varphi^*(A_i, A_j)$ et les crochets $[A_i, A_j, A_k]$. Comme les équations ne sont définies qu'à un scalaire près, ce ne sont pas des invariants des droites et notre objectif est de les modifier pour qu'ils ne changent plus si l'on transforme A_i en λA_i . On a vu comment faire dans les chapitres précédents en utilisant des quotients, donc des fractions rationnelles en les équations, voir § 8.3.3 pour un traitement systématique. On utilisera ici les nombres $I^*(A_i, A_j) = \frac{\varphi^*(A_i, A_j)^2}{q^*(A_i)q^*(A_j)}$, qui correspondent aux angles, et les nombres $K^*(A_i, A_j, A_k) := \frac{[A_i, A_j, A_k]^2}{q^*(A_i)q^*(A_j)q^*(A_k)}$, qui correspondent aux aires (voir 8.3.22 pour plus de précisions). Ces nombres ne dépendent pas du choix des équations et cela nous permet de prouver le théorème suivant (version fonctionnelle du premier théorème fondamental sur les invariants 8.3.21) :

6.4.1 Théorème. *On suppose $k = \mathbf{R}$ et la forme q^* positive.*

Soit n un entier ≥ 3 et soient $\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_n$ (resp. $\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_n$) des droites affines de X d'équations A_i, B_i . On suppose que trois au moins des directions des droites sont différentes.

1) Il existe une isométrie qui envoie \overline{A}_i sur \overline{B}_i pour tout i si et seulement si on a $I^(A_i, A_j) = I^*(B_i, B_j)$ pour $1 \leq i < j \leq n$ et $K^*(A_i, A_j, A_k) =$*

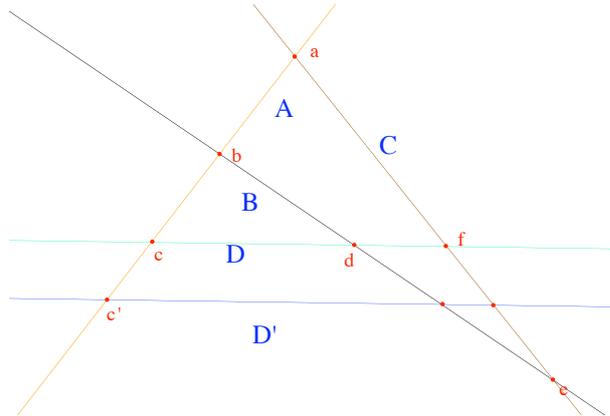
¹⁰. Le théorème 6.4.1 est en défaut même pour $n = 1$ si l'on ne fait pas d'hypothèses sur les $q(A_i)$ en termes de carrés, voir 5.2.2.

$K^*(B_i, B_j, B_k)$ pour $1 \leq i < j < k \leq n$.

2) On suppose que l'un des invariants K^* est non nul¹¹, par exemple $K^*(A_1, A_2, A_3)$, ainsi que l'invariant correspondant¹² des B_i . Il existe une similitude qui envoie $\overline{A_i}$ sur $\overline{B_i}$ pour tout i si et seulement si dans les conditions précédentes on remplace la condition d'égalité des K^* par la suivante :

$$\frac{K^*(A_i, A_j, A_k)}{K^*(A_1, A_2, A_3)} = \frac{K^*(B_i, B_j, B_k)}{K^*(B_1, B_2, B_3)} \quad \text{pour } 1 \leq i < j < k \leq n.$$

6.4.2 Remarque. Sauf dans le cas des trilatères, la condition sur les invariants I^* (donc sur les angles) ne suffit pas à assurer l'existence d'une similitude. Un calcul de dimension permet de s'en convaincre aussitôt et on le vérifie sur l'exemple suivant : si on a quatre droites A, B, C, D et qu'on remplace D par une parallèle D' , les angles sont inchangés, pourtant les figures ne sont pas semblables (à cause de ABC elles seraient alors isométriques, donc identiques).



Démonstration. Montrons que les conditions sont nécessaires. Rappelons que le groupe $\text{Sim}(X)$ est isomorphe à $PGO(q^*)$, ou encore à $GO^\circ(q^*)$ et que si u est dans $GO^\circ(q^*)$, son action sur les droites est donnée par le passage au quotient de l'action sur les équations (voir 3.2.1). Soit $u \in GO^\circ(q^*)$ une similitude de multiplicateur μ . Comme elle multiplie les produits scalaires par μ , elle conserve les invariants I^* . Comme son déterminant est égal à

11. Sinon, les droites sont toutes concourantes et l'existence d'une similitude est équivalente à celle d'une isométrie.

12. Attention au cas où les A_i sont les côtés d'un triangle et les B_i trois droites concourantes parallèles aux côtés.

$\pm\mu(u)$ (voir 3.1.13), elle multiplie les “aires” (i.e. les invariants K^*) par $1/\mu$. En particulier, si u est une isométrie, elle conserve les aires.

Pour la réciproque, on commence par le cas des isométries. Comme on a supposé que le corps est celui des réels et que la forme est positive, les nombres $q^*(A_i)$ sont positifs. Si l’on remplace l’équation A_i par $\frac{A_i}{\sqrt{q^*(A_i)}}$, ce qui ne

change pas la droite $\overline{A_i}$, on est ramené au cas où tous les $q^*(A_i)$ sont égaux à 1. On procède de même avec les B_i et on a alors les conditions $\varphi^*(A_i, A_j)^2 = \varphi^*(B_i, B_j)^2$ et $[A_i, A_j, A_k]^2 = [B_i, B_j, B_k]^2$. Il suffit de montrer que, quitte à changer le signe de certains B_i , on peut supposer qu’on a $\varphi^*(A_i, A_j) = \varphi^*(B_i, B_j)$ pour tous i, j . En effet, en vertu de 3.3.3, il existe alors $u \in \widehat{O^\circ(q^*)}$ qui envoie A_i sur B_i et l’isométrie associée envoie la droite $\overline{A_i}$ sur $\overline{B_i}$. Par hypothèse, on dispose de trois droites de directions distinctes et cela implique que deux au moins parmi elles ne sont pas perpendiculaires (si D est perpendiculaire à la fois à D_1, D_2 , ces droites sont parallèles). On a donc deux droites ni parallèles, ni perpendiculaires et on peut supposer qu’il s’agit de A_1, A_2 . Quitte à changer B_2 en $-B_2$ on peut supposer qu’on a $\varphi^*(A_1, A_2) = \varphi^*(B_1, B_2) \neq 0$. On considère alors les équations A_i, B_i pour $i \geq 3$. Si $\varphi^*(A_i, A_1)$ est non nul, on peut supposer, quitte à changer B_i en $-B_i$, qu’on a $\varphi^*(A_i, A_1) = \varphi^*(B_i, B_1)$. S’il est nul, c’est-à-dire si les droites A_1, A_i sont perpendiculaires, A_i n’est pas perpendiculaire à A_2 et on impose $\varphi^*(A_i, A_2) = \varphi^*(B_i, B_2)$. Il reste à voir qu’alors tous les produits scalaires $\varphi^*(A_i, A_j)$ et $\varphi^*(B_i, B_j)$ sont bien égaux. On dispose pour cela de la relation de Gram 5.5.5 pour A_i, A_j, A_k :

$$\begin{aligned} & \varphi^*(A_j, A_k)^2 q^*(A_i) + \varphi^*(A_k, A_i)^2 q^*(A_j) + \varphi^*(A_i, A_j)^2 q^*(A_k) \\ & - 2\varphi^*(A_j, A_k)\varphi^*(A_k, A_i)\varphi^*(A_i, A_j) - q^*(A_i)q^*(A_j)q^*(A_k) = 0 \end{aligned}$$

et de même pour les B_i . Ces relations impliquent l’égalité :

$$\varphi^*(A_j, A_k)\varphi^*(A_k, A_i)\varphi^*(A_i, A_j) = \varphi^*(B_j, B_k)\varphi^*(B_k, B_i)\varphi^*(B_i, B_j).$$

En prenant $k = 1$ ou $k = 2$, cette égalité permet de conclure, sauf dans le cas où l’on a, par exemple, $\varphi^*(A_1, A_j) = 0$ et $\varphi^*(A_2, A_i) = 0$. Posons alors $a = \varphi^*(A_1, A_2)$, $b = \varphi^*(A_1, A_i)$, $c = \varphi^*(A_2, A_j)$ et $d = \varphi^*(A_i, A_j)$, les nombres a, b, c étant non nuls. La variante de la relation de Gram¹³ (voir 6.5.1) appliquée aux deux triplets A_1, A_i, A_j et A_2, A_i, A_j équivaut à la nullité du déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & d \\ c & d & 1 \end{vmatrix}$$

13. On peut aussi appliquer la relation de Gram aux quatre droites A_1, A_2, A_i, A_j , mais on obtient un déterminant 4×4 .

c'est-à-dire à $a(1 - d^2) + bcd = 0$ et on a aussi la relation analogue avec les B_i . Comme les termes a, b, c sont les mêmes dans les deux relations, qu'ils sont non nuls et que les termes d sont égaux au signe près, on voit qu'ils sont égaux, autrement dit, on a bien $\varphi^*(A_i, A_j) = \varphi^*(B_i, B_j)$.

Pour le cas des similitudes, on commence par appliquer une homothétie de rapport $k \neq 0$, qui multiplie les K^* par k^{-2} , de façon à avoir $K^*(A_1, A_2, A_3) = K^*(B_1, B_2, B_3)$. Comme elle ne change pas les invariants I^* on se ramène ainsi au cas d'une isométrie.

6.4.3 Remarque. Le lecteur montrera que pour assurer l'existence d'une isométrie **directe** dans 6.4.1, il suffit d'imposer en plus l'égalité des "tangentes" $T(A_i, A_j) = T(B_i, B_j)$ avec $T(A, B) = \frac{[A, B, l]}{\varphi^*(A, B)}$, cf. 8.3.17.

6.4.2 Paramétrage du quotient

La voie directe

Rappelons qu'on note L le noyau de la forme q^* (L est l'ensemble des équations de la droite de l'infini). La transitivité donne l'injectivité du paramétrage défini par les invariants :

6.4.4 Corollaire. *On suppose $k = \mathbf{R}$ et q^* positive.*

Soit $\Phi : (E^ - \{L\})^n \rightarrow k^N$ l'application qui à (A_1, \dots, A_n) associe les nombres :*

$$I^*(A_i, A_j) = \frac{\varphi^*(A_i, A_j)^2}{q^*(A_i)q^*(A_j)}, \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq n \quad \text{et les nombres}$$

$$K^*(A_i, A_j, A_k) = \frac{[A_i, A_j, A_k]^2}{q^*(A_i)q^*(A_j)q^*(A_k)}, \quad \text{pour } 1 \leq i < j < k \leq n.$$

Dans le quotient $\mathbf{P}(E^)^n / \text{Is}(X)$, on note Ω_n l'ouvert formé des images des n -uplets de droites affines "génériques", au sens où trois directions des A_i au moins sont différentes. Alors, l'application Φ induit une application injective $\bar{\Phi} : \Omega_n \rightarrow k^N$. Autrement dit, on a ainsi défini un système complet d'invariants pour n droites génériques $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}$.*

En passant par les points

L'image du paramétrage précédent est en général difficile à calculer, aussi préfère-t-on souvent utiliser, pour décrire un polygone, ses sommets, c'est-à-dire les intersections de ses côtés. Il va sans dire que, là encore, des hypothèses de position générale sont nécessaires pour avoir un résultat.

6.4.5 Définition. 1) Soient A_1, \dots, A_n des droites de X . On dit qu'elles sont **en position générale** si deux droites consécutives¹⁴ A_i et A_{i+1} ne sont pas parallèles et si trois consécutives ne sont pas concourantes.

2) Soient a_1, \dots, a_n des points de X . On dit qu'ils sont **en position générale** si deux points consécutifs sont distincts et si trois points consécutifs sont non alignés.

La proposition suivante est alors évidente :

6.4.6 Proposition. Les applications qui à n droites (resp. n points) associent les n points d'intersection des droites consécutives (resp. les n droites joignant deux points consécutifs) sont bien définies et réciproques l'une de l'autre sur les ouverts des droites (resp. des points) en position générale.

6.4.7 Remarque. Algébriquement, les applications précédentes sont données par les produits extérieurs. Précisément, on impose aux points la condition de normalisation $l(a_i) = 1$ et aux droites la condition :

$$[A_{i-1}, A_i, A_{i+1}] = [A_{i-1}, A_i, l] [A_i, A_{i+1}, l]$$

(il suffit pour cela de remplacer l'équation A_i par $B_i = \lambda(A_i)A_i$ avec $\lambda(A_i) = \frac{[A_{i-1}, A_i, A_{i+1}]}{[A_{i-1}, A_i, l] [A_i, A_{i+1}, l]}$). Les applications sont alors données par les formules :

$$A_i = a_{i-1} \wedge a_i \quad \text{et} \quad a_i = \frac{A_i \wedge A_{i+1}}{[A_i, A_{i+1}, l]}.$$

6.4.8 Remarque. Il est intéressant de voir à quels invariants des droites correspondent les invariants naturels des points, i.e. les $ab^2 = q(\overrightarrow{ab})$. Si on part de trois droites A, B, C et si on pose $a = \frac{A \wedge B}{[A, B, l]}$ et $b = \frac{B \wedge C}{[B, C, l]}$, un calcul facile donne $ab^2 = \frac{[A, B, C]^2 q^*(B)}{[A, B, l]^2 [B, C, l]^2}$ (voir 8.3.16). Comme les termes $[A, B, l]^2$ se calculent avec les produits scalaires on retrouve les invariants vus au paragraphe précédent, mais sous des formes plutôt plus compliquées.

6.4.3 L'exemple des trilatères

Nous appellerons **trilatère**¹⁵ la donnée de trois droites formant un triangle (donc non concourantes et telles que deux d'entre elles ne sont pas parallèles), pour indiquer simplement que c'est sur les droites que nous portons

14. Comme d'habitude, on considère que les entiers n et 1 sont consécutifs.

15. La notion est légèrement différente de celle utilisée dans la Partie IV.

notre attention. L'ensemble des trilatères sera noté \mathcal{T}^* . On pose $G = \text{Is}(X)$. L'espace des trilatères est défini par les trois invariants I^* et l'invariant K^* associés aux trois droites, avec une relation entre eux :

6.4.9 Proposition. *L'espace des trilatères (c'est-à-dire le quotient \mathcal{T}^*/G) est homéomorphe à la partie de \mathbf{R}^4 formé des points $(\alpha, \beta, \gamma, \kappa)$ vérifiant $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1[$, $\kappa > 0$ et $(\alpha + \beta + \gamma - 1)^2 = 4\alpha\beta\gamma$.*

Démonstration. On considère l'application qui aux droites d'équations A, B, C associe les invariants $\alpha = I^*(B, C)$, $\beta = I^*(C, A)$, $\gamma = I^*(A, B)$ et $\kappa = K^*(A, B, C)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que les invariants I sont ≤ 1 et même < 1 puisque le triangle n'est pas aplati. Enfin, la relation entre α, β et γ n'est autre que 5.5.14.

L'injectivité de l'application résulte de 6.4.4 (et c'est essentiellement ce que nous avons appelé plus haut le "quatrième cas d'isométrie des triangles", voir 5.4.21).

Pour la surjectivité, on peut supposer qu'on a $E^* = \mathbf{R}^3$ et que q^* est la forme $u^2 + v^2$. On se donne $(\alpha, \beta, \gamma, \kappa)$ et on considère les droites $A = (1, 0, 0)$, $B = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ et $C = (\cos \varphi, \sin \varphi, w)$, avec $\theta, \varphi \in]0, \pi[$ et $w > 0$. Les invariants q^* de ces droites valent tous 1 et on en déduit $I^*(B, C) = \cos^2(\theta - \varphi)$, $I^*(C, A) = \cos^2 \varphi$, $I^*(A, B) = \cos^2 \theta$ et $K^*(A, B, C) = w^2 \sin^2 \theta$. On utilise alors le lemme suivant :

6.4.10 Lemme. *On pose $\beta = \cos^2 \varphi$ et $\gamma = \cos^2 \theta$. La relation $(\alpha + \beta + \gamma - 1)^2 = 4\alpha\beta\gamma$ s'écrit :*

$$\alpha^2 + 2\alpha(\beta + \gamma - 1 - 2\beta\gamma) + (\beta + \gamma - 1)^2 = 0$$

et les solutions de cette équation en α sont $\cos^2(\theta - \varphi)$ et $\cos^2(\theta + \varphi)$.

Démonstration. On vérifie que le discriminant réduit de cette équation est égal à $4 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \sin^2 \varphi$, le reste est facile.

On peut maintenant finir la démonstration de 6.4.9. Il existe $\theta, \varphi \in]0, \pi/2[$ vérifiant $\cos^2 \theta = \gamma$ et $\cos^2 \varphi = \beta$. On pose alors $w = \sqrt{\kappa} / \sin \theta$ et on considère A, B, C définis comme ci-dessus. Si α est égal à $\cos^2(\theta - \varphi)$, le triplet obtenu convient. S'il est égal à $\cos^2(\theta + \varphi)$, on change φ en $\pi - \varphi$ et on a le résultat.

6.4.11 Remarques. 1) Les deux cas ci-dessus correspondent aux cas où le triangle défini par A, B, C est acutangle ou obtusangle, voir exercice 6.5.2.

2) On peut donner une autre description de \mathcal{T}^*/G en utilisant θ, φ, w , voir exercice 6.5.21.

3) Pour le quotient par $\text{Is}^+(X)$ voir 6.5.22, pour les trilatères généralisés, voir 6.5.23.

6.4.12 Remarque. Si l'on utilise le passage par les sommets a, b, c du triangle, on est amené aux invariants $bc^2 = \lambda = \frac{\kappa}{(1-\beta)(1-\gamma)}$, $ca^2 = \mu = \frac{\kappa}{(1-\gamma)(1-\alpha)}$, $ab^2 = \nu = \frac{\kappa}{(1-\alpha)(1-\beta)}$ et on voit aisément qu'on peut calculer $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$ en fonction de λ, μ, ν (par exemple en traduisant la relation de Gram, voir exercice 6.5.19).

6.5 Exercices

6.5.1 Généralités

6.5.1 Exercice. Une variante de la formule de Gram

Soit φ une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel E de dimension n , q la forme quadratique associée, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , Q la matrice de q dans cette base et $\Delta(q) = \det Q$ le discriminant associé. Soient a_1, \dots, a_n (resp. b_1, \dots, b_n) des vecteurs de E , A (resp. B) la matrice des a_i (resp. b_i) sur la base \mathcal{B} et soit R la matrice des $\varphi(a_i, b_j)$.

Montrer la formule $\det R = \det A \det B \Delta(q)$. En particulier, si q est dégénérée, on a $\det R = 0$.

6.5.2 Exercice. Soit abc un triangle. Montrer que abc est obtusangle (resp. rectangle, resp. acutangle) si l'on a $\cos^2 \hat{a} + \cos^2 \hat{b} + \cos^2 \hat{c} > 1$ (resp. $= 1$, resp. < 1).

6.5.2 Espaces quotients

6.5.3 Exercice. L'espace des doublets

Montrer que l'application $(a, b) \mapsto q(\overrightarrow{ab})$ induit une bijection du quotient de l'ensemble des couples de points de X sous l'action de $\text{Is}(X)$ avec la partie de k image de q (voir 2.3.1). Préciser l'image de la diagonale.

Dans le cas de \mathbf{R} , montrer que l'image est \mathbf{R}^+ et qu'on a un homéomorphisme $(X \times X)/\text{Is}(X) \simeq \mathbf{R}^+$.

6.5.4 Exercice. On reprend les notations de 6.3.1.

1) Montrer qu'on a des paramétrages de l'espace des triangles par deux quelconques des variables u, v, w et une des variables x, y, z . Préciser la condition de non alignement dans ce cadre.

2) Dans le cas réel, montrer qu'on a des paramétrages de \mathcal{T}/G utilisant :
 • les variables $\beta = ac$, $\gamma = ab$ et \hat{a} , avec un homéomorphisme de \mathcal{T}/G sur $\mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^{+*} \times]0, \pi[$,

• les variables $\alpha = bc$, \widehat{b} et \widehat{c} , avec un homéomorphisme de \mathcal{T}/G sur la partie de $\mathbf{R}^{+*} \times]0, \pi[\times]0, \pi[$ des triplets vérifiant $\widehat{b} + \widehat{c} < \pi$.

6.5.5 Exercice. (Une autre preuve de 6.3.3)

On reprend les notations de 6.3.3.

1) On suppose $x, y, z > 0$. Montrer que la condition (1) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy < 0$ est équivalente aux trois conditions $\sqrt{x} < \sqrt{y} + \sqrt{z}$, $\sqrt{y} < \sqrt{z} + \sqrt{x}$ et $\sqrt{z} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$. (Utiliser la factorisation du déterminant de Cayley-Menger 5.5.8 :

$$-x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + 2zx + 2xy =$$

$$(\sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})$$

et raisonner par l'absurde.)

2) Montrer la surjectivité de l'application $\Phi_1(a, b, c) = (x, y, z)$. (On utilisera les points $b = (0, 0)$, $c = (\sqrt{x}, 0)$ et $a = (s, t)$ avec s, t convenables.)

6.5.6 Exercice. (Quotient par les similitudes)

1) Montrer que le quotient de l'espace \mathcal{T} des triangles du plan réel euclidien par le groupe des similitudes est homéomorphe à la partie de $]0, \pi[\times]0, \pi[$ formée des couples $(\widehat{b}, \widehat{c})$ vérifiant $\widehat{b} + \widehat{c} < \pi$.

2) Montrer que le quotient \mathcal{T}/Sim est aussi homéomorphe à la partie de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ définie par les inéquations $y + z - x > 0$, $z + x - y > 0$ et $x + y - z > 0$. Identifier cette partie comme l'intérieur d'un triangle (également homéomorphe à l'intérieur d'un disque).

6.5.7 Exercice. (Triangles directs) Dans cet exercice on décrit le quotient de l'espace \mathcal{T} des triangles du plan réel euclidien par le groupe des isométries positives G^+ . On suppose le petit discriminant égal à 1 et on normalise les points a, b, c par $l(a) = l(b) = l(c) = 1$.

1) Dans cette question, on utilise les paramètres $y = q(\overrightarrow{ca})$, $z = q(\overrightarrow{ab})$, $u = \varphi(\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{ab})$ et l'aire algébrique $\mathcal{A} = \frac{1}{2}[a, b, c]$.

a) Montrer que \mathcal{T}/G^+ est homéomorphe à la partie (non connexe) de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^*$ formée des quadruplets (y, z, u, \mathcal{A}) vérifiant $y, z > 0$, $4\mathcal{A}^2 = yz - u^2$.

b) Montrer que l'application canonique de \mathcal{T}/G^+ dans \mathcal{T}/G est un revêtement de degré 2.

2) On utilise les paramètres $x = q(\overrightarrow{bc})$, $y = q(\overrightarrow{ca})$, $z = q(\overrightarrow{ab})$ et $\mathcal{A} = \frac{1}{2}[a, b, c]$.

Montrer que \mathcal{T}/G^+ est homéomorphe à la partie de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^*$ formée des (x, y, z, \mathcal{A}) vérifiant $x, y, z > 0$ et $16\mathcal{A}^2 = 2yz + 2zx + 2xy - x^2 - y^2 - z^2$.

3) On utilise maintenant les paramètres \widehat{b} , \widehat{c} et \mathcal{A} . Montrer que \mathcal{T}/G^+ est homéomorphe à la partie de $]0, \pi[\times]0, \pi[\times \mathbf{R}^*$ formée des triplets $(\widehat{b}, \widehat{c}, \mathcal{A})$ vérifiant $\widehat{b} + \widehat{c} < \pi$.

4) Soit abc un triangle et soit $\epsilon \in \{+1, -1\}$ le signe de ses angles orientés $(\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba})$, $(\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb})$ et $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$, voir 5.7.16. En utilisant le paramétrage par $\alpha = bc$, \widehat{b} , \widehat{c} et ϵ , montrer que \mathcal{T}/G^+ est homéomorphe à la partie de $\mathbf{R}^{+*} \times]0, \pi[\times \{+1, -1\}$ des quadruplets $(\alpha, \widehat{b}, \widehat{c}, \epsilon)$ vérifiant $\widehat{b} + \widehat{c} < \pi$.

5) Décrire le quotient de \mathcal{T} par le groupe Sim^+ des similitudes directes en utilisant \widehat{b} , \widehat{c} et ϵ .

6.5.8 Exercice. (Triangles généralisés)

On se propose de préciser le quotient de l'espace des triangles **généralisés** du plan euclidien X sous l'action du groupe des isométries dans le cas d'un corps quelconque. Le plan X est identifié à k^2 et les triangles généralisés sont les points $(a, b, c) \in X^3 = (k^2)^3$. Le groupe des isométries opère sur cet espace.

1) Montrer que l'application Φ qui à (a, b, c) associe $x = q(\overrightarrow{bc})$, $y = q(\overrightarrow{ca})$, $z = q(\overrightarrow{ab})$ induit une application injective $\overline{\Phi}$ de $X^3/\text{Is}(X)$ dans k^3 (on s'inspirera de la preuve de 5.3.1). Montrer que l'image est contenue dans l'ensemble des points (x, y, z) tels que $P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy$ ne soit pas un carré non nul (utiliser l'identité de Lagrange et 2.3.2).

2) Même question en utilisant les paramètres u, v, w .

3) Montrer que l'image des triangles dégénérés (i.e. formés de points alignés) est contenue dans le fermé $P(x, y, z) = 0$. Expliquer algébriquement pourquoi la condition $x = 0$ impose $P(x, y, z) = 0$, puis $y = z$.

6.5.9 Exercice. (Triangles généralisés, le cas réel, 1)

On reprend le thème et les notations de l'exercice précédent dans le cas $k = \mathbf{R}$.

1) Montrer que l'image de Φ est exactement l'ensemble des triplets (x, y, z) de nombres ≥ 0 vérifiant l'inégalité $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy \leq 0$.

2) Soient x, y, z des réels vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0$. Montrer que x, y, z sont tous trois ≥ 0 ou tous trois ≤ 0 (si, par exemple, on a $x, y \geq 0$ et $z < 0$ on notera qu'on a $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = z^2 + (x - y)^2 - 2yz - 2xz > 0$). En déduire que (x, y, z) ou son opposé est dans l'image de Φ .

6.5.10 Exercice. (Triangles généralisés, le cas réel, 2)

On reprend le thème de l'exercice précédent, toujours dans le cas $k = \mathbf{R}$, mais avec une autre paramétrisation.

1) Montrer que l'application f qui à (a, b, c) associe les trois longueurs $\alpha = bc$, $\beta = ca$ et $\gamma = ab$ induit une application injective \bar{f} de $X^3/\text{Is}(X)$ dans $(\mathbf{R}^+)^3$.

2) Montrer que l'image de f est l'ensemble T des triplets (α, β, γ) vérifiant les trois inégalités $\alpha \leq \beta + \gamma$, $\beta \leq \gamma + \alpha$ et $\gamma \leq \alpha + \beta$. Montrer que T est un trièdre (fermé) dont on précisera les intersections avec les plans de coordonnées. Décrire l'image des triangles dégénérés (alignés, avec deux points confondus, etc.).

3) On munit $X^3/\text{Is}(X)$ de la topologie quotient de celle de X^3 . Montrer que \bar{f} est continue. En déduire que $X^3/\text{Is}(X)$ est séparé.

4) Montrer que l'application \bar{f} est propre (i.e. que l'image réciproque d'un compact K est un compact). Pour cela on considérera le plongement j de X^2 dans X^3 qui à (b, c) associe (o, b, c) avec $o = (0, 0)$ et on montrera que $(f \circ j)^{-1}(K)$ est compact.

5) Déduire de 4) que \bar{f} est un homéomorphisme de $X^3/\text{Is}(X)$ sur T . (On notera que T est localement compact.)

6.5.3 Permutations de \mathbf{C}^n

Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n opère sur \mathbf{C}^n de la manière canonique :

$$\sigma.(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

On munit $\mathbf{C}^n/\mathfrak{S}_n$ de la topologie quotient. Le but de l'exercice est de montrer que ce quotient est homéomorphe à \mathbf{C}^n . On note S_1, \dots, S_n les fonctions symétriques élémentaires : $S_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$, ..., $S_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$.

1) On appelle S l'application de \mathbf{C}^n dans \mathbf{C}^n qui à (x_1, \dots, x_n) associe (S_1, \dots, S_n) . Montrer que S induit une application $\bar{S} : \mathbf{C}^n/\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbf{C}^n$ et que cette application est continue et bijective. (On se souviendra que x_1, \dots, x_n sont les racines du polynôme $X^n - S_1(x_1, \dots, x_n)X^{n-1} + S_2(x_1, \dots, x_n)X^{n-2} + \dots + (-1)^n S_n(x_1, \dots, x_n)$ et on utilisera le fait que \mathbf{C} est algébriquement clos.)

2) a) Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ un polynôme à coefficients complexes. On suppose que les modules des a_i sont majorés par un réel M . Montrer que les modules des racines de P sont majorés par $\text{Max}(nM, 1)$.

b) Déduire de a) que l'image réciproque d'un compact de \mathbf{C}^n par S est compacte.

c) Montrer que \bar{S} est un homéomorphisme. (Comme \mathbf{C}^n est localement compact, il suffit de montrer que, pour tout K compact de \mathbf{C}^n , \bar{S} induit un homéomorphisme de $\bar{S}^{-1}(K)$ sur K . On conclura grâce à la compacité de $\bar{S}^{-1}(K)$, sans oublier de noter que $\mathbf{C}^n/\mathfrak{S}_n$ est séparé.)

6.5.4 Aire et périmètre

Les exercices suivants permettent de donner une réponse négative à la question :

Deux triangles de même aire et même périmètre sont-ils nécessairement isométriques ?

Sur ce sujet on pourra consulter aussi le blog du projet Klein intitulé *Le conte des deux triangles : triangles de Héron et courbes elliptiques* par William Mc Callum, voir <http://blog.kleinproject.org/?p=408&lang=fr>

6.5.11 Exercice. On note α, β, γ les longueurs des côtés d'un triangle abc .

1) Montrer que le périmètre de abc vaut $p = \alpha + \beta + \gamma$ et que, si p est connu, la donnée de l'aire est équivalente à celle de $s = (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)p - 2\alpha\beta\gamma$. On pose $q = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta$ et $r = \alpha\beta\gamma$.

2) Montrer que l'application qui à α, β, γ associe p, q, r est un C^1 -difféomorphisme sur l'ouvert où les longueurs α, β, γ sont distinctes.

En déduire qu'il y a, au voisinage de chaque point α, β, γ avec $\alpha < \beta < \gamma$, des points avec mêmes valeurs de p et s correspondant à des triangles non isométriques.

6.5.12 Exercice. Une procédure pour construire des triangles non isométriques admettant même aire et même périmètre est la suivante.

On part d'un triangle $T_0 = a_0bc$, on pose $\alpha = bc$ et on appelle h la longueur de la hauteur issue de a_0 . On suppose $h > 2\alpha$. Si on considère un triangle $T = abc$ avec a variant sur la parallèle à (bc) passant par a_0 , il a même aire que T_0 , mais son périmètre peut devenir arbitrairement grand. On considère ensuite un point $c' \in [bc]$, on pose $bc' = \alpha'$ et on suppose $\alpha < \alpha' < \alpha\sqrt{2}$. On pose $h' = \alpha h / \alpha'$ et on considère les triangles $T' = a'bc'$ de hauteur h' , avec a' variant sur une parallèle à (bc) .

Montrer qu'il existe des triangles T, T' avec $p(T_0) < p(T') < p(T)$ et en déduire qu'il existe des triangles T, T' de même aire et même périmètre et non isométriques. (On utilisera le théorème des valeurs intermédiaires, ou une ellipse bien choisie.)

Donner une autre construction à partir de familles de triangles à périmètre constant.

6.5.13 Exercice. ¶ Soit abc un triangle isocèle non équilatéral. Montrer qu'il existe exactement un triangle isocèle, non isométrique à abc , admettant même aire et même périmètre. (Utiliser l'exercice 6.5.11.)

6.5.14 Exercice. Montrer qu'il existe des triangles non isométriques, dont les longueurs de côtés sont des entiers, qui ont même aire et même périmètre

(on pourra écrire quelques lignes de programme pour en trouver, par exemple 3, 14, 14 et 8, 8, 15 ou 5, 17, 18 et 10, 11, 19).

6.5.5 Résolution de triangles

6.5.15 Exercice. ¶¶ On suppose $k = \mathbf{R}$. Cet exercice (en fait une collection¹⁶ d'exercices) était, sous une forme élémentaire, très en vogue dans les cours de géométrie d'autrefois. Il consiste à utiliser le fait que l'espace des triangles modulo isométries est de dimension trois pour déterminer un triangle, à isométrie près, à partir de trois paramètres.

Dans ce qui suit, le lecteur fera son choix, pour un triangle abc , dans la liste \mathcal{L} de paramètres suivants : les trois longueurs des côtés, les trois angles (ou leurs cosinus), le périmètre, l'aire, les longueurs (ou leurs carrés) des médianes, des hauteurs, des bissectrices, les rayons du cercle circonscrit et du cercle inscrit, les distances des points de concours des droites remarquables aux sommets ou entre eux, et tout ce qui lui semblera pertinent. On repérera ici un triangle abc par les longueurs¹⁷ de ses côtés $\alpha = bc$, $\beta = ca$, $\gamma = ab$ (ou leurs carrés x, y, z). L'exercice consiste à choisir arbitrairement trois paramètres p, q, r dans \mathcal{L} et – si l'on ne trouve pas une méthode plus astucieuse – à traiter les points suivants :

1) (**Calcul**) Calculer p, q, r en fonction de α, β, γ .

2) (**Finitude**) On note F l'application de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^3 qui à (α, β, γ) associe (p, q, r) . Calculer le jacobien de F et vérifier¹⁸ qu'il est non nul sur un ouvert non vide de \mathbf{R}^3 .

3) (**Explicitation**) Si le jacobien de F est non nul, le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'un inverse local de F . Déterminer (si possible) explicitement cet inverse et préciser l'ouvert de l'espace des paramètres (p, q, r) sur lequel il est défini.

4) (**Degré**) On peut (en général) se ramener à une application F polynomiale. Dans ce cas, sur un ouvert, F est un revêtement dont on précisera le degré d (cela signifie que, pour (p, q, r) donnés dans cet ouvert, il y a d triangles admettant les invariants donnés).

5) (**Construction**) Proposer (si possible) une construction à la règle et au compas des triangles de paramètres (p, q, r) et discuter.

16. J'en ai compté 8436 au moins, de quoi occuper les longues soirées d'hiver.

17. Mais d'autres choix seraient possibles pourvu qu'ils déterminent le triangle de manière unique : deux côtés et un angle, etc.

18. Sinon, c'est que le choix de paramètres ne permet pas de déterminer le triangle (ni même un nombre fini), penser au cas des trois angles, liés par la relation $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \pi$.

6) (**Exemples**) a) Traiter le cas où p, q, r sont les longueurs des trois médianes (utiliser 7.5.6 et employer plutôt les carrés des longueurs, ce cas est linéaire donc facile).

b) Traiter le cas où p, q, r sont les (carrés des) longueurs des trois hauteurs. Par le calcul, on peut montrer, avec les notations de 6.3.1, la formule, pour la hauteur issue de a :

$$p = aa'^2 = \frac{w^2}{x^2}z + \frac{v^2}{x^2}y - \frac{2uvw}{x^2}$$

et, avec un bon logiciel de calcul formel, on voit que le jacobien est égal à :

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy)^3}{x^2y^2z^2}.$$

Mais il est beaucoup plus simple d'utiliser l'aire, on a (voir 6.3.4) :

$$16\mathcal{A}^2 = 4px = 4qy = 4rz = 2yz + 2zx + 2xy - x^2 - y^2 - z^2$$

et cela mène directement à une formule donnant x en fonction de p, q, r :

$$x = \frac{4pq^2r^2}{2pqr(p+q+r) - (q^2r^2 + r^2p^2 + p^2q^2)}.$$

6.5.6 Le théorème de transitivité sur les droites : les cas particuliers

Dans les exercices de ce paragraphe on suppose $k = \mathbf{R}$ et la forme q^* positive et on considère des droites affines distinctes $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}$ (resp. $\overline{B_1}, \dots, \overline{B_n}$). On se propose d'étudier ce que devient le théorème 6.4.1 dans certains cas particuliers. On suppose donc que l'on a les conditions $I^*(A_i, A_j) = I^*(B_i, B_j)$ pour $1 \leq i < j \leq n$ et $K^*(A_i, A_j, A_k) = K^*(B_i, B_j, B_k)$ pour $1 \leq i < j < k \leq n$ et on cherche s'il existe une isométrie envoyant les A_i sur les B_i .

6.5.16 Exercice. Montrer que si la famille de droites ne contient pas de trilatère (i.e. trois droites ni concourantes ni parallèles) on est dans l'un des cas suivants :

- Les n droites sont parallèles,
- On a une situation de "quadrillage" : p droites sont parallèles à une direction δ et q sont parallèles à δ' , avec $\delta \neq \delta'$, $0 < p, q < n$ et $p + q = n$.
- Les n droites sont concourantes.

6.5.17 Exercice. On suppose que les droites \overline{A}_i sont concourantes et on se propose de montrer directement le théorème 6.4.1. On peut supposer qu'on a $q^*(A_i) = q^*(B_i) = 1$ pour tout i .

a) Montrer que les droites \overline{B}_i sont aussi concourantes.

b) Traiter le cas $n = 2$ (voir 5.2.14).

c) On suppose $n \geq 3$. Montrer qu'on peut supposer \overline{A}_1 et \overline{A}_2 non orthogonales et qu'on peut se ramener au cas $\overline{A}_1 = \overline{B}_1$ et $\overline{A}_2 = \overline{B}_2$. On pose $\lambda = \varphi^*(A_1, A_2)$. Montrer qu'on a $\lambda \neq 0, 1, -1$.

d) On suppose qu'on est dans ce dernier cas et on écrit, pour $i \geq 3$, $A_i = \alpha A_1 + \beta A_2$ et $B_i = \alpha' A_1 + \beta' A_2$. En écrivant les relations $q^*(B_i) = q^*(A_i) = 1$, $\varphi^*(A_1, A_i)^2 = \varphi^*(A_1, B_i)^2$ et $\varphi^*(A_2, A_i)^2 = \varphi^*(A_2, B_i)^2$, montrer que l'on a $\alpha^2 = \alpha'^2$, $\beta^2 = \beta'^2$ et $\alpha\beta = \alpha'\beta'$.

e) Conclure à l'aide de 3.3.3.

6.5.18 Exercice. Dans cet exercice on se propose de montrer que 6.4.1 est en défaut dans les deux autres cas particuliers vus en 6.5.16.

1) Soient $\overline{A}_1, \overline{A}_2$ (resp. $\overline{B}_1, \overline{B}_2$) deux droites parallèles. Montrer qu'on a $I^*(A_1, A_2) = I^*(B_1, B_2)$ mais qu'il n'existe pas en général d'isométrie qui envoie les \overline{A}_i sur les \overline{B}_i (voir 5.2.7). Généraliser au cas de n droites.

2) On considère une base orthogonale e_1^*, e_2^*, l de E^* et les droites d'équations $A_1 = e_1^*$, $A_2 = e_2^* + e_1^*$, $A_3 = e_1^* + l$, $A_4 = e_1^* + e_2^* + l$ et $B_3 = e_1^* - l$. Montrer que les quadruplets (A_1, A_2, A_3, A_4) et (A_1, A_2, B_3, A_4) sont en position de "quadrillage", qu'ils vérifient les conditions de 6.4.1 sur les invariants I^* et K^* , mais qu'il n'existe pas d'isométrie qui laisse stables les droites A_1, A_2, A_4 et envoie A_3 sur B_3 . Généraliser au cas de n droites, $n \geq 4$. Montrer qu'en revanche 6.4.1 est vrai dans le cas de trois droites dont deux exactement sont parallèles.

6.5.19 Exercice. On reprend les notations de 6.4.9 et 6.4.12. On pose $\alpha' = 1 - \alpha$, $\beta' = 1 - \beta$, $\gamma' = 1 - \gamma$.

1) Montrer qu'on a la relation :

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 - 2\beta'\gamma' - 2\gamma'\alpha' - 2\alpha'\beta' + 4\alpha'\beta'\gamma' = 0.$$

2) En déduire qu'on peut calculer $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$ en fonction de λ, μ, ν (commencer par calculer les rapports du type β'/α').

6.5.7 Les couples de droites

6.5.20 Exercice. Montrer que le quotient par $\text{Is}(X)$ des couples de droites non parallèles est homéomorphe à $]0, \pi/2]$ (on pourra écrire les droites sous la forme $A = (1, 0, 0)$ et $B = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$).

On notera que les couples de droites parallèles ont été écartés. En effet, ce sont des objets non pré-stables au sens de Mumford car leur stabilisateur est de dimension 1 (les translations dont le vecteur a la direction commune des droites), donc anormalement gros. Le problème est le suivant. Les couples de droites parallèles forment un fermé de Zariski de l'ensemble des droites et sont donc dans l'adhérence des couples génériques. Pourtant, au niveau du quotient, ils se retrouvent avec la dimension 1 (ils ont un invariant qui est la distance des droites, voir 5.2.7), autant que les couples de droites génériques (définis par l'invariant angle) et ne peuvent plus être dans l'adhérence de ceux-ci. On se reportera à la partie II pour des détails sur ce sujet.

6.5.8 Trilatères

Dans tout ce paragraphe, G désigne le groupe $\text{Is}(X)$, G^+ le groupe $\text{Is}^+(X)$ et \mathcal{T}^* l'ensemble des trilatères (voir 6.4.9).

6.5.21 Exercice. ¶ Dans cet exercice on propose une autre paramétrisation de l'espace des trilatères \mathcal{T}^*/G .

On considère la partie Y de $]0, \pi/2] \times]0, \pi[\times \mathbf{R}^{+*}$, formée des (θ, φ, w) vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\theta \neq \varphi$,
- si $\theta = \pi/2$ alors $\varphi < \pi/2$.

Montrer que l'application de Y dans $(E^*)^3$ qui à (θ, φ, w) associe $A = (1, 0, 0)$, $B = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $C = (\cos \varphi, \sin \varphi, w)$ induit un homéomorphisme de Y sur \mathcal{T}^*/G . (Voir aussi 7.2.1. Pour la surjectivité on utilisera des changements de signes, la symétrie de centre $o = (0, 0, 1)$ et les réflexions d'axes A, B . Pour l'homéomorphisme on utilisera le paramétrage en $(\alpha, \beta, \gamma, \kappa)$. On pourra soit calculer la différentielle de l'application $(\theta, \varphi, w) \mapsto (\alpha, \beta, \gamma, \kappa)$, soit définir l'application réciproque en distinguant selon le signe de $\alpha + \beta + \gamma - 2\beta\gamma - 1$.)

6.5.22 Exercice. Montrer que le quotient \mathcal{T}/G^+ est homéomorphe à l'ensemble Y^+ de $]0, \pi[\times]0, \pi[\times \mathbf{R}^{+*}$ formée des (θ, φ, w) vérifiant $\theta \neq \varphi$.

6.5.23 Exercice. Dans cet exercice on étend 6.4.9 au cas de trilatères plus généraux. On note $\widehat{\mathcal{T}}^*$ l'espace des trilatères généralisés, formés de trois droites non toutes parallèles. Montrer que le quotient $\widehat{\mathcal{T}}^*/G$ est homéomorphe à l'ensemble des quadruplets $(\alpha, \beta, \gamma, \kappa) \in [0, 1]^3 \times \mathbf{R}^+$ vérifiant $(\alpha + \beta + \gamma - 1)^2 = 4\alpha\beta\gamma$ et tels que l'un au plus des nombres α, β, γ soit égal à 1. (Par rapport au cas générique, on verra apparaître le cas de trois droites concourantes qui correspond à $\kappa = 0$ et celui de deux parallèles et une sécante qui correspond au cas où l'un des nombres α, β, γ vaut 1.)

Là encore, on notera que l'on a écarté le cas de trois droites parallèles, objets non pré-stables au sens de Mumford, cf. 6.5.20.

Chapitre 7

Quadrilatères et cocyclicité

Après avoir étudié en détail les triangles, il est temps de franchir un cap et de passer aux quadrilatères (ou aux quadrangles, voir ci-dessous) ! Le premier objectif de ce chapitre est donc de décrire l'espace de ces objets et d'en donner un plongement et des équations. On verra que la situation est sensiblement plus simple dans le cas des points que dans celui des droites. Mais l'objectif principal est d'étudier un fermé de l'espace des quadrilatères : celui des points cocycliques ou alignés. Cela nous conduit à prouver l'un des théorèmes emblématiques de la géométrie euclidienne : le théorème de l'angle inscrit. Quiconque a pratiqué un peu la géométrie sait bien que ce résultat, et surtout sa réciproque, sont à la racine de toute une kyrielle de propriétés spectaculaires, dont nous donnerons un aperçu dans ce chapitre. Un mot sur nos parti-pris. D'abord, dans les énoncés angulaires, nous avons choisi d'utiliser les angles orientés de droites, parce que ce sont eux qui donnent les résultats les plus simples et les plus élégants. Attention, il ne s'agit nullement d'une position didactique, bien au contraire, voir par exemple [Per03]. Ensuite, fidèle en cela à nos principes, nous avons montré que le théorème de l'angle inscrit provient d'une relation entre les invariants (voir ci-dessous 7.3.3 et 7.3.10). Ce qui est remarquable à cet égard c'est que la relation en question fournit, outre le résultat visé qui concerne les angles, l'autre condition majeure de cocyclicité, qui concerne cette fois les longueurs, à savoir le théorème de Ptolémée, voir 7.3.17 et 7.3.18. Belle illustration de l'unité de la mathématique !

7.1 L'espace des quadrangles

7.1.1 Notations

Il y a une difficulté ici en ce qui concerne les appellations. Traditionnellement, et de manière un peu étonnante, la dénomination des figures planes à n côtés utilise trois suffixes différents, puisqu'on parle de triangles pour $n = 3$, de quadrilatères pour $n = 4$, puis de pentagones, hexagones, etc. ensuite. Outre le fait de savoir si l'on préfère les racines grecques ou latines, il y a une autre question. Lorsqu'on dit *triangle*, on met l'accent sur les angles, donc les sommets. D'ailleurs, nous avons utilisé au chapitre précédent la dénomination *trilatère* pour indiquer que l'accent était mis sur les côtés. En fait, dans le cas des triangles, cela n'a que peu d'importance puisque les données d'un triangle ou d'un trilatère sont équivalentes. Il n'en va pas de même pour $n = 4$ ou plus. En effet, si l'on se donne quatre points a, b, c, d , ce qui vient naturellement ce sont six droites (ab) , (ac) , (ad) , (bc) , (bd) , (cd) , lesquelles donnent d'ailleurs trois points supplémentaires, intersections de (ab) et (cd) , de (ac) et (bd) et de (ad) et (bc) . Si l'on se donne quatre droites A, B, C, D , en revanche, par dualité, ce sont six points qui apparaissent, et trois droites supplémentaires : dans un cas on a 7 points et 6 droites, dans l'autre 7 droites et 6 points. Ces objets géométriques sont donc différents, même du simple point de vue combinatoire, et nous parlerons – rompant ainsi avec les traditions – de **quadrangle** lorsque la donnée sera celle de quatre points et de **quadrilatère** lorsqu'elle sera de quatre droites. Cela étant, nous nous permettrons de multiples dérogations à cette règle, justifiées notamment par le point de vue de l'école primaire : un quadrilatère est aussi obtenu en se donnant quatre points a, b, c, d **dans cet ordre**¹, et dans ce cas, il définit quatre droites, ses côtés (ab) , (bc) , (cd) et (da) , qui correspondent aux sommets consécutifs, les deux autres (ac) et (bd) étant ses diagonales.

7.1.2 Cayley-Menger ou l'équation des quadrangles

Dans ce paragraphe, le corps k est quelconque.

Nous reprenons ici la problématique inaugurée au chapitre précédent dans le cas des triangles. On s'intéresse aux **quadrangles** généralisés², c'est-à-dire aux quadruplets (a, b, c, d) de points de X . Le groupe $G = \text{Is}(X)$ opère sur X^4 et l'espace des quadrangles est le quotient X^4/G . Comme X^4 est une

1. D'ailleurs, c'est ce que nous avons fait au chapitre précédent en nous intéressant aux n -uplets de points de X : un n -uplet est naturellement ordonné.

2. Ce mot signifie que l'on n'impose pas, pour l'instant, de condition de position, par exemple que trois des points soient non alignés.

variété de dimension 8 et G un groupe algébrique de dimension 3, on s'attend à ce que le quotient soit de dimension 5. La question est d'en donner une description, et pour cela de le paramétrer. Il y a pléthore de possibilités. Sur un corps quelconque on dispose *a priori* des six paramètres de type $q(\vec{ab})$, carrés scalaires des six vecteurs définis par les quatre points, et des quinze paramètres correspondant aux produits scalaires des vecteurs distincts. Comme on l'a vu en 6.2.3, deux choix semblent plus intéressants que les autres :

- prendre les carrés scalaires des six vecteurs possibles,
- prendre tous les carrés et produits scalaires des trois vecteurs d'origine

a .

7.1.1 Notations. Il est difficile d'avoir des notations satisfaisantes pour les deux options. Nous avons choisi de poser $x = q(\vec{bc})$, $y = q(\vec{ca})$, $z = q(\vec{ab})$, $X = q(\vec{ad})$, $Y = q(\vec{bd})$ et $Z = q(\vec{cd})$, $u = \varphi(\vec{ac}, \vec{ad})$, $v = \varphi(\vec{ad}, \vec{ab})$ et $w = \varphi(\vec{ab}, \vec{ac})$. Grâce à la relation de Chasles on a les relations $x = y + z - 2w$, $Y = z + X - 2v$, $Z = X + y - 2u$.

Le résultat suivant est un cas particulier de 6.2.3 :

7.1.2 Proposition. *Les invariants x, y, z, X, Y, Z (resp. X, y, z, u, v, w) définis en 7.1.1 constituent un système complet d'invariants pour les quadruplets (a, b, c, d) . Autrement dit, l'application $\Phi : X^4 \rightarrow k^6$ (resp. Ψ) définie par $\Phi(a, b, c, d) = (x, y, z, X, Y, Z)$ (resp. $\Psi(a, b, c, d) = (X, y, z, u, v, w)$) induit une application injective $\bar{\Phi}$ (resp. $\bar{\Psi}$) de X^4/G dans k^6 .*

7.1.3 Remarque. Comme le quotient est de dimension 5, il y a nécessairement une relation entre les 6 paramètres x, y, z, X, Y, Z (resp. X, y, z, u, v, w). Cette relation vient de la considération des déterminants de Gram et de Cayley-Menger, que nous avons rencontrés au chapitre 5. En particulier, la proposition suivante résulte de 5.5.6 et 5.5.4 :

7.1.4 Proposition. *L'espace X^4/G des quadrangles généralisés est contenu dans les fermés suivants de k^6 :*

- 1) *l'ensemble des points (x, y, z, X, Y, Z) vérifiant l'équation*

$$\Gamma_3^\sharp(x, y, z, X, Y, Z) := \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & y & X \\ 1 & z & 0 & x & Y \\ 1 & y & x & 0 & Z \\ 1 & X & Y & Z & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

où le polynôme $\Gamma_3^\sharp(x, y, z, X, Y, Z)$ est homogène de degré 3 en les 6 variables x, y, z, X, Y, Z ,

2) l'ensemble des points X, y, z, u, v, w vérifiant l'équation :

$$\begin{vmatrix} z & w & v \\ w & y & u \\ v & u & X \end{vmatrix} = Xyz + 2uvw - u^2z - v^2y - w^2X = 0.$$

7.1.3 Calcul de l'image de Ψ dans le cas réel

Comme on l'a dit, sur un corps quelconque, le calcul de l'image d'applications mettant en jeu la forme q est en général très difficile (voir 2.3.1). Nous nous limiterons donc au cas où le corps k est égal à \mathbf{R} . Le cas de Ψ est le plus facile.

7.1.5 Théorème. Avec les notations de 7.1.2, l'image de Ψ est l'ensemble des $m = (X, y, z, u, v, w) \in \mathbf{R}^6$ vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $X, y, z \geq 0$,
- 2) $u^2 \leq Xy, v^2 \leq zX, w^2 \leq yz$,
- 3) $Xyz + 2uvw - u^2z - v^2y - w^2X = 0$.

Démonstration. Il est clair que les points de l'image vérifient les conditions (la condition 2) vient de Cauchy-Schwarz). Inversement, soit (X, y, z, u, v, w) vérifiant les conditions ci-dessus. Supposons d'abord $z > 0$. On considère les points $a = (0, 0)$, $b = (\sqrt{z}, 0)$, $c = (s, t)$ et $d = (p, r)$ et on va déterminer les paramètres pour avoir $\Psi(a, b, c, d) = m$. On calcule $w = \varphi(\vec{ab}, \vec{ac}) = s\sqrt{z}$ et $y = q(\vec{ac}) = s^2 + t^2$, ce qui donne $s = \frac{w}{\sqrt{z}}$ puis $t^2 = \frac{zy - w^2}{z}$. De même, on calcule $v = p\sqrt{z}$ et $X = p^2 + r^2$ qui donnent $p = \frac{v}{\sqrt{z}}$ et $r^2 = \frac{Xz - v^2}{z}$. Par ailleurs, la relation 3), du second degré en u , donne :

$$u = \frac{vw}{z} \pm \frac{\sqrt{zy - w^2} \sqrt{Xz - v^2}}{z} = sp \pm tr$$

et on peut choisir les signes de t et r pour obtenir $u = \varphi(\vec{ac}, \vec{ad}) = sp + tr$, ce qui montre le résultat.

Si z est nul, on a aussi $v = w = 0$. Le cas où y est nul est évident (on prend $a = b = c = (0, 0)$ et $d = (\sqrt{X}, 0)$). Sinon, les points $a = b = (0, 0)$, $c = (\sqrt{y}, 0)$ et $d = (p, r)$ avec $p = \frac{u}{\sqrt{y}}$ et $r^2 = \frac{Xy - u^2}{y}$ conviennent.

7.1.6 Remarque. Le début du calcul précédent montre que $m = (X, y, z, u, v, w)$ est dans l'image de Ψ dès que l'on a les conditions $z > 0, v^2 \leq zX, w^2 \leq yz$ et l'égalité (3). On en déduit qu'alors les conditions $y, X \geq 0$ sont vérifiées (ce qui est évident) mais aussi $u^2 \leq Xy$ (ce qui l'est moins et constituera un bon exercice de calcul pour le lecteur).

7.1.4 Calcul de l'image de Φ dans le cas réel

On suppose encore $k = \mathbf{R}$ et on cherche cette fois à préciser l'image de Φ . Elle se déduit de celle de Ψ , conformément à 6.2.1 :

7.1.7 Théorème. *Avec les notations de 7.1.2, l'image de Φ est formée des $(x, y, z, X, Y, Z) \in (\mathbf{R}^+)^6$, vérifiant $\Gamma_3^\sharp(x, y, z, X, Y, Z) = 0$ et les relations :*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy \leq 0, \quad X^2 + Y^2 + z^2 - 2Yz - 2zX - 2XY \leq 0$$

$$\text{et } X^2 + y^2 + Z^2 - 2yZ - 2ZX - 2Xy \leq 0.$$

Démonstration. Cela résulte de 7.1.5 et des formules de passage : $x = y + z - 2w$, $Y = z + X - 2v$, $Z = X + y - 2u$. Pour une preuve directe, voir 7.5.2.

7.1.5 Les quadrangles génériques

7.1.8 Définition. *On appelle quadrangle générique (ou en position générale) un quadrangle $abcd$ tel que trois quelconques des points soient non alignés. On note \mathcal{Q} l'ensemble des quadrangles génériques.*

Les résultats précédents permettent de préciser les images de \mathcal{Q} par Ψ et Φ . On notera qu'il apparaît une condition supplémentaire par rapport aux résultats précédents.

7.1.9 Corollaire. *On conserve les notations de 7.1.2.*

1) *L'image par Ψ de \mathcal{Q} est l'ensemble des $m = (X, y, z, u, v, w) \in \mathbf{R}^6$ vérifiant les conditions de 7.1.5, avec des inégalités strictes et vérifiant de plus l'inégalité :*

$$u^2 + v^2 + w^2 + 2zu + 2yv + 2wX - yz - zX - Xy - 2vw - 2wu - 2uv < 0.$$

2) *L'image par Φ de \mathcal{Q} est l'ensemble des $(x, y, z, X, Y, Z) \in (\mathbf{R}^+)^6$, vérifiant les conditions de 7.1.7, avec des inégalités strictes et vérifiant de plus l'inégalité :*

$$x^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ - 2Zx - 2xY < 0.$$

Démonstration. Les conditions données en 7.1.5 et 7.1.7, lorsqu'on les énonce avec des inégalités strictes, imposent que les points a, b, c (resp. a, b, d , resp. a, c, d) sont non alignés. La condition supplémentaire, qui n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz stricte : $\varphi(\vec{bc}, \vec{bd})^2 < q(\vec{bc})q(\vec{bd})$, assure que b, c, d ne le sont pas non plus.

7.1.6 L'espace des quadrangles à isométrie et permutation près

Nous reprenons la problématique inaugurée au paragraphe 6.2.3 du chapitre précédent. Il s'agit de préciser le quotient de l'espace des quadrangles (à isométrie près) par le groupe \mathfrak{S}_4 (donc en oubliant l'ordre des points). Notre objectif est de prouver la conjecture 6.2.8 dans le cas $n = 4$. On reprend les notations de 7.1.1 et on note S_1, \dots, S_6 les six polynômes symétriques élémentaires en x, y, z, X, Y, Z : $S_1 = x+y+z+X+Y+Z, \dots, S_6 = xyzXYZ$. Le groupe \mathfrak{S}_4 opère de manière naturelle sur les quadrangles et induit une opération sur l'ensemble $\{x, y, z, X, Y, Z\}$ de la manière suivante : si σ est dans \mathfrak{S}_4 , il envoie par exemple $x = (ab)^2$ sur $(\sigma(a)\sigma(b))^2$. Cette représentation est équivalente à celle de \mathfrak{S}_4 opérant par conjugaison sur ses propres transpositions. On note $\chi : \mathfrak{S}_4 \rightarrow \mathfrak{S}_6$ l'homomorphisme associé. Comme \mathfrak{S}_6 opère sur l'anneau de polynômes $k[x, y, z, X, Y, Z]$ on en déduit une opération de \mathfrak{S}_4 sur cet anneau.

7.1.10 Remarque. Rappelons que les invariants x, y, z, X, Y, Z associés à quatre points a, b, c, d sont liés par la relation $\Gamma_3^\sharp(x, y, z, X, Y, Z) = 0$. Un petit calcul montre que le polynôme s'écrit $-2P + 2Q - 2R$ avec

$$P = Xx^2 + xX^2 + Yy^2 + yY^2 + Zz^2 + zZ^2,$$

$$R = YZx + ZXy + XYz + xyz$$

et où Q est la somme de tous les termes produits de trois lettres distinctes parmi x, y, z, X, Y, Z à l'exception des termes de R et de ceux de $S = yzX + zxY + xyZ + XYZ$ (les mêmes que ceux de R , mais "changés de taille") qui ne figurent pas dans Γ_3^\sharp .

Nous proposons maintenant une notion de position générale, conçue pour faire fonctionner le théorème 7.1.13. Cette notion peut sembler un peu bizarre, et il serait sans doute possible d'en donner une variante plus géométrique, mais elle définit bien un ouvert de Zariski de l'espace des quadrangles, ce qui est l'essentiel.

7.1.11 Proposition-Définition. 1) Dans l'opération de \mathfrak{S}_6 sur l'anneau $k[x, y, z, X, Y, Z]$, le fixateur de Γ_3^\sharp est l'image $G = \chi(\mathfrak{S}_4)$.

2) On choisit un système Σ de 30 représentants de \mathfrak{S}_6/G , contenant Id , et on considère les polynômes $\sigma(\Gamma_3^\sharp)$ pour $\sigma \in \Sigma$. On dit que a, b, c, d sont en **position générale** si leurs invariants x, y, z, X, Y, Z vérifient :

$$\sigma(\Gamma_3^\sharp)(x, y, z, X, Y, Z) \neq 0 \quad \text{pour tout } \sigma \in \Sigma - \{\text{Id}\}.$$

Démonstration. On commence par un lemme :

7.1.12 Lemme. *Les formules suivantes donnent les images des transpositions par χ : $\chi((ab)) = (xy)(XY)$, $\chi((ac)) = (xz)(XZ)$, $\chi((ad)) = (yZ)(zY)$, $\chi((bc)) = (yz)(YZ)$, $\chi((bd)) = (xZ)(zX)$, $\chi((cd)) = (xY)(yX)$. Ces permutations engendrent G . La représentation χ est imprimitive : elle laisse invariante la partition $\{x, X\} \cup \{y, Y\} \cup \{z, Z\}$.*

Démonstration. C'est un calcul immédiat.

Le lemme montre déjà que Γ_3^\sharp est invariant par G car P, R, S le sont, donc aussi Q . Pour la réciproque, on note qu'une permutation σ qui fixe Γ_3^\sharp conserve nécessairement la partition ci-dessus. En effet, pour des raisons de degré, elle conserve le polynôme P (partie de Γ_3^\sharp qui contient des variables au degré 2). Mais les variables qui apparaissent dans un même monôme de P sont toujours membres d'un même ensemble de la partition et cela implique la conservation de la partition. Or, il y a 15 partitions de $\{x, y, \dots, Z\}$ en trois parties à deux éléments, de sorte que le stabilisateur d'une partition est de cardinal 48. Ce groupe est engendré par G et par l'une des transpositions (Xx) , (Yy) et (Zz) , ou encore par leur produit τ . Mais, on voit que τ conserve P mais transforme R en S , donc ne conserve pas Γ_3^\sharp . Le fixateur de Γ_3^\sharp est donc égal à G .

On peut alors énoncer le résultat attendu, à savoir le cas $n = 4$ de 6.2.8 :

7.1.13 Théorème. *Soient a, b, c, d (resp. a', b', c', d') quatre points en position générale de X (au sens de 7.1.11) et soient x, \dots, Z (resp. x', \dots, Z') les carrés de leurs distances. On suppose qu'on a, pour tout $i = 1, \dots, 6$, $S_i(x, \dots, Z) = S_i(x', \dots, Z')$. Alors, il existe une isométrie $u \in \text{Is}(X)$ et une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ telles que l'on ait $a' = u(\sigma(a))$, $b' = u(\sigma(b))$, $c' = u(\sigma(c))$, $d' = u(\sigma(d))$. Autrement dit, les S_i forment un système complet d'invariants pour l'action de $\text{Is}(X) \times \mathfrak{S}_4$ sur X^4 .*

Démonstration. Si les fonctions symétriques élémentaires S_i sont les mêmes, cela montre que l'on passe de x, \dots, Z à x', \dots, Z' par une permutation s . Comme x, \dots, Z annulent Γ_3^\sharp , ils annulent aussi l'image de ce polynôme par s . Comme les points sont supposés en position générale, cela impose que s fixe Γ_3^\sharp , donc que s est dans G , $s = \chi(\sigma)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_4$. Mais alors, quitte à appliquer σ à a, b, c, d , on peut supposer que les invariants x, \dots, Z sont les mêmes pour a, b, c, d et a', b', c', d' et donc, par 7.1.2, ces quadruplets sont équivalents sous $\text{Is}(X)$.

7.2 L'espace des quadrilatères

L'étude de l'espace des quadrilatères $\mathbf{P}(E^*)^4/\text{Is}(X)$ étant plutôt plus délicate que celle des quadrangles, on se contente ici de la mener dans le cas réel, avec la forme $q^* = u^2 + v^2$, et pour des quadrilatères **génériques**. On entend par là la donnée de quatre droites deux à deux non parallèles et trois à trois non concourantes. On note \mathcal{Q} l'ensemble des quadrilatères génériques. Le plus naturel pour décrire l'espace $\mathcal{Q}/\text{Is}(X)$ est d'associer à un quadrilatère ses invariants I^* et K^* , voir §6.4.1. C'est le plus naturel, mais pas le plus facile et on va d'abord définir une application dans l'autre sens : on part de certains paramètres, bien choisis et indépendants, et on leur associe des droites. L'avantage de cette méthode est d'éviter l'épineuse question des relations entre les paramètres : il n'y en a pas ici.

7.2.1 Un paramétrage direct

Le résultat est le suivant :

7.2.1 Proposition. *On considère l'ouvert Y de $]0, \pi/2[\times]0, \pi[\times \mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^*$ formé des quintuplets $(\beta, \gamma, \delta, c, d)$ vérifiant les conditions suivantes.*

i) Les nombres β, γ, δ sont distincts.

ii) Si $\beta = \pi/2$ on a $\gamma < \pi/2$.

iii) Les nombres $c \sin \delta - d \sin \gamma$ et $c \sin(\delta - \beta) - d \sin(\gamma - \beta)$ sont non nuls.

Alors, l'application qui à $(\beta, \gamma, \delta, c, d)$ associe les droites d'équations³ $A = (1, 0, 0)$, $B = (\cos \beta, \sin \beta, 0)$, $C = (\cos \gamma, \sin \gamma, c)$, $D = (\cos \delta, \sin \delta, d)$ induit un homéomorphisme de Y sur l'espace des quadrilatères génériques au sens ci-dessus, modulo l'action du groupe $\text{Is}(X)$.

Démonstration. On vérifie d'abord que le quadrilatère (A, B, C, D) est bien générique. Le fait que β, γ, δ sont non nuls et distincts assure que les droites sont non parallèles. Les conditions $c, d \neq 0$ et *iii)* montrent que trois quelconques des droites sont non concourantes.

On prouve maintenant la surjectivité. On se donne quatre droites génériques. Comme on est sur \mathbf{R} , on peut supposer que toutes vérifient $q^* = 1$ et cela permet d'imposer $A = (1, 0, 0)$ en vertu de 5.2.2. En vertu de 5.2.6, on peut aussi supposer que le point d'intersection de A et B est $o = (0, 0, 1)$, ce qui donne l'équation $B = (\cos \beta, \sin \beta, 0)$. *A priori* β est dans $]0, \pi[$, mais quitte à changer B en $-B$ on peut supposer $\cos \beta \geq 0$, donc $\beta \in]0, \pi/2]$. On a alors les équations de C, D sous la forme annoncée (quitte à changer

3. Bien entendu, (u, v, w) correspond à l'équation $uX + vY + wT = 0$.

C, D en leurs opposés, on peut supposer $\sin \gamma, \sin \delta > 0$). Quitte à faire une symétrie de centre o , on peut supposer $c > 0$. L'hypothèse de position générale assure que les conditions sont réalisées, sauf *ii*). Pour cette dernière, si on a $\beta = \pi/2$, on dispose de quatre transformations qui conservent A, B (l'identité, les réflexions d'axes A, B , la symétrie de centre o), ce qui, avec la possibilité de changer C, D en leurs opposés, permet d'ajuster tous les signes dans C, D et de remplir la condition *ii*).

On montre ensuite l'injectivité. Supposons que deux quintuplets $(\beta, \gamma, \delta, c, d)$ et $(\beta', \gamma', \delta', c', d')$ aient même image dans le quotient $\mathcal{Q}/\text{Is}(X)$. En particulier les droites A, B, C, D et A', B', C', D' auraient mêmes invariants I^* et K^* . Donnons la liste de ces invariants : $I^*(A, B) = \cos^2 \beta$, $I^*(A, C) = \cos^2 \gamma$, $I^*(A, D) = \cos^2 \delta$, $I^*(B, C) = \cos^2(\beta - \gamma)$, $I^*(B, D) = \cos^2(\beta - \delta)$, $I^*(C, D) = \cos^2(\gamma - \delta)$, $K^*(A, B, C) = c^2 \sin^2 \beta$, $K^*(A, B, D) = d^2 \sin^2 \beta$, $K^*(A, C, D) = (c \sin \delta - d \sin \gamma)^2$ et $K^*(B, C, D) = (c \sin(\delta - \beta) - d \sin(\gamma - \beta))^2$.

Comme β et β' sont dans $[0, \pi/2]$ on en déduit $\beta = \beta'$. Pour les autres, on a *a priori* $\gamma' = \gamma$ ou $\pi - \gamma$ et $\delta' = \delta$ ou $\pi - \delta$. Mais, on a aussi $\cos^2(\beta - \gamma) = \cos^2(\beta - \gamma')$, soit $\beta - \gamma' = \pm(\beta - \gamma)$ ou $\pm(\pi - \beta + \gamma)$. On vérifie alors que cela implique $\gamma' = \gamma$ (le seul cas douteux est $\beta - \gamma' = -\beta + \gamma$ qui, avec $\gamma' = \pi - \gamma$, implique $\beta = \pi/2$ et on conclut avec la condition *ii*). Le raisonnement est quasiment identique pour δ . Si en utilisant $\cos^2(\beta - \delta) = \cos^2(\beta - \delta')$ on est dans le cas douteux $\beta = \pi/2$, on utilise alors $\cos^2(\gamma - \delta) = \cos^2(\gamma - \delta')$ et, comme β, γ sont distincts, on n'est pas dans le cas douteux $\gamma = \pi/2$.

Comme c est positif, l'égalité des $K^*(A, B, C)$ donne $c' = c$. Pour d , on utilise à la fois $K^*(A, B, D)$ qui donne $d' = \pm d$ et $K^*(A, C, D)$ qui conclut.

Il reste à voir que l'application est bien un homéomorphisme. Elle est évidemment continue. Pour obtenir l'application réciproque on associe à A, B, C, D ses invariants I^* et K^* et il s'agit de calculer β, \dots, d à partir de ces invariants. On a déjà $\beta = \text{Arccos} \sqrt{I^*(A, B)}$, puis c avec $K^*(A, B, C)$. Continuons avec γ . On vérifie d'abord la formule :

$$I^*(B, C) + I^*(C, A) + I^*(A, B) - 2I^*(C, A)I^*(A, B) - 1 = 2 \cos \beta \cos \gamma \sin \beta \sin \gamma.$$

Le premier membre $s(A, B, C)$ de cette formule donne le signe de $\cos \gamma$ et on associe donc à A, B, C, D le nombre $\gamma = \text{Arccos} \sqrt{I^*(C, A)}$ si s est ≥ 0 et $\pi - \text{Arccos} \sqrt{I^*(C, A)}$ sinon. Pour montrer que γ est fonction continue des invariants, la seule chose à vérifier est le cas d'annulation de s . Si cela correspond à $\cos \gamma = 0$, on a $\gamma = \pi/2 = \pi - \gamma$ et la continuité est évidente. Si on est dans le cas $\cos \beta = 0$, donc $\beta = \pi/2$, on conclut grâce à la condition *ii*). Pour δ la méthode est analogue en utilisant soit $s(A, B, D)$, soit $s(A, C, D)$, ce qui, comme β et γ ne sont pas tous deux égaux à $\pi/2$, permet d'éviter le cas d'annulation de s .

7.2.2 Avec les invariants

Nous donnons maintenant une deuxième description de l'espace des quadrilatères, cette fois avec les invariants et leurs relations. Soient A, B, C, D quatre droites génériques au sens ci-dessus. On leur associe six invariants de type $I^*(A, B) \in [0, 1[$ et quatre invariants de type $K^*(A, B, C) \in \mathbf{R}^{+*}$, soit dix invariants. En vertu de 6.4.4, on obtient ainsi un plongement de l'espace des quadrilatères dans \mathbf{R}^{10} . Comme l'espace des quadrilatères est de dimension $5 = 8 - 3$, il y a cinq⁴ relations au moins entre ces paramètres. La détermination précise de ces relations n'est pas évidente et fera l'objet du théorème 8.4.1 au chapitre suivant. Nous nous contentons ici de décrire quelques relations naturelles entre les invariants.

Les relations entre I^*

Il y a tout d'abord quatre relations du type encadré en 5.5.14 (“somme des angles du triangle”), qui correspondent aux quatre trilatères ABC, ABD, ACD, BCD et que l'on note $\mathcal{R}(A, B, C)$, etc. Il y a ensuite une autre relation, un peu plus cachée. Cette relation provient de la formule suivante (voir 2.2.24 ou 8.4.1) :

$$(*) \quad [B, C, l]\varphi^*(A, D) + [C, A, l]\varphi^*(B, D) + [A, B, l]\varphi^*(C, D) = 0.$$

A priori il s'agit d'une relation entre les invariants vectoriels, mais on en déduit une relation $\mathcal{S}(A, B, C; D)$ entre les I^* par la procédure suivante. On commence par isoler un terme, on élève au carré :

$$\begin{aligned} [A, B, l]^2\varphi^*(C, D)^2 &= [B, C, l]^2\varphi^*(A, D)^2 + [C, A, l]^2\varphi^*(B, D)^2 \\ &\quad + 2[B, C, l][C, A, l]\varphi^*(A, D)\varphi^*(B, D) \end{aligned}$$

et on divise le tout par $q^*(A)q^*(B)q^*(C)q^*(D)$. On fait ainsi apparaître des termes du type $I^*(A, B) = \frac{\varphi^*(A, B)^2}{q^*(A)q^*(B)}$ et $1 - I^*(A, B) = \frac{[A, B, l]^2}{q^*(A)q^*(B)}$ (voir 2.2.24). On utilise ensuite la formule (1) de 2.2.24 pour éliminer le produit $[B, C, l][C, A, l]$. Le point crucial est d'écrire :

$$\frac{\varphi^*(B, C)\varphi^*(C, A)\varphi^*(A, D)\varphi^*(B, D)}{q^*(A)q^*(B)q^*(C)q^*(D)} = \frac{S^*(A, B, C)S^*(A, B, D)}{I^*(A, B)}$$

où S^* est le Spin : $S^*(A, B, C) = \frac{\varphi^*(B, C)\varphi^*(C, A)\varphi^*(A, B)}{q^*(A)q^*(B)q^*(C)}$. On conclut car le Spin se calcule aussi avec les I^* , voir 5.5.14.

4. Il y en a bien plus, mais pas indépendantes.

7.2.2 Remarques. 1) On peut bien sûr expliciter la relation $\mathcal{S}(A, B, C; D)$, et le lecteur sérieux ne manquera pas de le faire, mais sa complexité rend son usage difficile. La seule chose qu'il faut en retenir c'est que le premier membre est égal à $(1 - I^*(A, B))I^*(C, D)$, de sorte que, si $I^*(A, B)$ est différent de 1, elle détermine $I^*(C, D)$ (car celui-ci n'apparaît pas dans le second membre).

2) Dans cette relation, le terme D joue un rôle particulier. Bien entendu, il y a quatre relations de ce type obtenues en permutant A, B, C, D .

Les relations avec K^*

On obtient des relations⁵ entre les invariants I^* et K^* de la manière suivante. On part de la relation fondamentale de dimension : $[B, C, D]A - [A, C, D]B + [A, B, D]C - [A, B, C]D = 0$ et on applique $[\bullet, A, l]$, ce qui donne la relation $-[A, C, D][B, A, l] + [A, B, D][C, A, l] - [A, B, C][D, A, l] = 0$. On en déduit, en vertu de l'identité 5.5.8, la formule

$$\Gamma_2^\sharp([A, C, D]^2[B, A, l]^2, [A, B, D]^2[C, A, l]^2, [A, B, C]^2[D, A, l]^2) = 0.$$

En divisant les termes $[A, C, D]^2[B, A, l]^2$ par $(q^*(A))^2q^*(B)q^*(C)q^*(D)$ et en utilisant 2.2.24 on obtient la relation \mathcal{T}_A ci-dessous :

$$\Gamma_2^\sharp(K^*(A, C, D)(1 - I^*(A, B)), K^*(A, B, D)(1 - I^*(C, A)), K^*(A, B, C)(1 - I^*(A, D))) = 0.$$

Il y a trois relations similaires $\mathcal{T}_B, \mathcal{T}_C$ et \mathcal{T}_D obtenues par permutation circulaire.

Le théorème

Complètes ou non, indépendantes ou non, les relations énoncées ci-dessus suffisent en tous cas à décrire l'image :

7.2.3 Théorème. Soit Ω l'ouvert de $\mathbf{P}(E^*)^4$ formé des quadruplets $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D})$ de droites deux à deux non parallèles et trois à trois non concourantes. L'application Φ de Ω dans $Y := [0, 1]^6 \times (\mathbf{R}^{+*})^4$ qui à $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D})$ associe les six invariants de type $I^*(A, B)$ et les quatre invariants de type $K^*(A, B, C)$ induit une bijection du quotient $\Omega/\text{Is}(X)$ sur le fermé de Y défini par les douze relations $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$ ci-dessus.

Démonstration. Il reste à montrer la surjectivité. On se donne dix nombres $i(A, B)$, etc., $k(A, B, C)$, etc. vérifiant les relations du théorème et on cherche

5. Bien entendu, ces relations ne sont pas indépendantes. La détermination des syzygies qui les lient pourrait se faire en utilisant les bases de Gröbner, *via* un logiciel de type Macaulay.

quatre droites A, B, C, D telles que l'on ait $i(A, B) = I^*(A, B)$, etc., $k(A, B, C) = K^*(A, B, C)$, etc.

Comme les $i(A, B)$ sont dans $[0, 1[$, on peut les écrire sous la forme $\cos^2 \theta$, précisément, on pose, en copiant la preuve de 7.2.1, $i(A, B) = \cos^2 \beta$, $i(A, C) = \cos^2 \gamma$ et $i(A, D) = \cos^2 \delta$ avec $\beta \in]0, \pi/2]$ et $\gamma, \delta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\gamma, \delta \neq 0$. On écrit aussi $k(A, B, C) = c^2 \sin^2 \beta$ avec $c > 0$ et $k(A, B, D) = d^2 \sin^2 \beta$ avec $d \neq 0$.

En écrivant la relation $\mathcal{R}(A, B, C)$ on voit qu'on a alors $i(B, C) = \cos^2(\beta - \gamma)$ ou $\cos^2(\beta + \gamma)$ (voir 6.4.10) et, quitte à changer γ en $-\gamma$, on peut supposer qu'on a $i(B, C) = \cos^2(\beta - \gamma)$. De même, avec $\mathcal{R}(A, B, D)$, on obtient $i(B, D) = \cos^2(\beta - \delta)$.

Posons $k(A, C, D) = p^2$. En écrivant la première relation entre les invariants K^* (relation \mathcal{T}_A ci-dessus) et en utilisant la factorisation 5.5.8, on obtient l'égalité :

$$p \sin \beta = \pm d \sin \gamma \sin \beta \pm c \sin \delta \sin \beta$$

et, quitte à changer d en $-d$, on peut supposer qu'on a $k(A, C, D) = (c \sin \delta - d \sin \gamma)^2$.

On définit alors les droites A, B, C, D par les formules de la preuve de 7.2.1. On voit que les invariants sont bien les i, k donnés, sauf peut-être $I^*(C, D)$ et $K^*(B, C, D)$. Comme $i(C, D)$ et $I^*(C, D)$ sont tous deux déterminés par la relation $\mathcal{S}(A, B, C; D)$ (voir 7.2.2), ils sont égaux.

Il reste à montrer qu'on a bien $z_1 := k(B, C, D) = z_2 := K^*(B, C, D)$, ce qui est nettement plus ardu. Les trois relations $\mathcal{T}_B, \mathcal{T}_C$ et \mathcal{T}_D , montrent que ces deux nombres sont solutions de trois équations du second degré de la forme $z^2 - 2z(x + y) + (x - y)^2 = 0$ (voir 5.5.6) et s'ils sont distincts c'est que ces trois équations admettent les mêmes solutions z_1 et z_2 , donc sont identiques. Les nombres x, y intervenant dans ces équations sont de la forme $x_1 = \frac{K^*(A, B, C)(1 - I^*(B, D))}{1 - I^*(A, B)}$ et de même pour y_1, x_2, y_2 et x_3, y_3 . Dire que les coefficients des équations sont égaux signifie que l'on a $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$ et $x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3$. Les trois paires $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$ et $\{x_3, y_3\}$ sont donc égales.

On calcule les coefficients x_i, y_i en fonction des paramètres $\beta, \gamma, \delta, c, d$:

$$\begin{aligned} x_1 &= c^2 \sin^2(\beta - \delta), & y_1 &= d^2 \sin^2(\beta - \gamma), \\ x_2 &= \frac{c^2 \sin^2 \beta \sin^2(\gamma - \delta)}{\sin^2 \gamma}, & y_2 &= \frac{(c \sin \delta - d \sin \gamma)^2 \sin^2(\beta - \gamma)}{\sin^2 \gamma}, \\ x_3 &= \frac{(c \sin \delta - d \sin \gamma)^2 \sin^2(\beta - \delta)}{\sin^2 \delta}, & y_3 &= \frac{d^2 \sin^2 \beta \sin^2(\gamma - \delta)}{\sin^2 \delta}. \end{aligned}$$

On écrit alors toutes les possibilités d'égalité des paires et on montre qu'on aboutit à une contradiction dans chaque cas. Par exemple, $x_1 = x_2 = x_3$ et $y_1 = y_2 = y_3$ donne, avec $x_1 = x_3$, $c^2 \sin^2 \delta = (c \sin \delta - d \sin \gamma)^2$ d'où $d \sin \gamma = 2c \sin \delta$. Mais avec $y_1 = y_2$ on obtient $c \sin \delta = 2d \sin \gamma$ d'où $3c \sin \delta = 0$ et c'est impossible. Il y a ainsi quatre cas à traiter dont un seul est difficile : $x_1 = y_2 = y_3$ et $y_1 = x_2 = x_3$. Le lecteur montrera successivement les relations suivantes :

$$c^4 \sin^2 \delta \sin^2(\beta - \delta) = d^4 \sin^2 \gamma \sin^2(\beta - \gamma)$$

$$(c \sin \delta - d \sin \gamma)^4 = c^2 d^2 \sin^2 \gamma \sin^2 \delta$$

$$c^2 \sin^2 \gamma \sin^4(\beta - \delta) = d^2 \sin^2 \delta \sin^4(\beta - \gamma)$$

pour aboutir à la relation $d^6 \sin^6 \gamma = c^6 \sin^6 \delta$, soit $d \sin \gamma = \pm c \sin \delta$. Le signe $+$ est éliminé car il donnerait $k(A, C, D) = 0$, le signe $-$ conduit à l'égalité $\sin^2 \gamma \sin^2(\beta - \delta) = 0$ qui est impossible à cause des conditions de position générale.

7.2.4 Remarques. 1) Le lecteur se reportera à l'exercice 7.5.3 pour comprendre pourquoi les relations \mathcal{S} sont nécessaires.

2) La description du quotient que nous venons de donner n'est guère satisfaisante. En effet, avec 10 variables liées par 12 relations, on n'a même pas la dimension du quotient. Pour l'obtenir, il faudrait non seulement avoir les invariants et leurs relations, mais aussi les relations entre celles-ci, voir la discussion autour de 8.2.21.

3) Pour une paramétrisation de l'espace des quadrilatères obtenue en passant par les points, voir l'exercice 7.5.4. On y verra que les calculs ne sont pas plus simples.

7.3 Cocyclicité : théorèmes de l'angle inscrit et de Ptolémée

7.3.1 Cercles

Le lecteur se reportera au chapitre 7 de la Partie IV pour une discussion sur la notion de cercle, vu comme orbite du groupe des isométries fixant un point. Le cas euclidien étant supposé familier au lecteur, nous nous contenterons d'en rappeler la définition (sur un corps quelconque).

7.3.1 Définition. Soient $a, b \in X$ deux points du plan euclidien. On appelle **cercle** de centre a passant par b l'ensemble des points m de X qui vérifient

$q(\overrightarrow{am}) = q(\overrightarrow{ab})$. On dit que des points sont **cocycliques** s'il existe un cercle contenant ces points.

7.3.2 Remarque. Dans le cas réel, la quantité $ab = \sqrt{q(\overrightarrow{ab})}$ est appelée **rayon** du cercle. Attention, sur un corps quelconque, il n'y a pas de raison que $q(\overrightarrow{ab})$ soit un carré (penser à la forme $x^2 + 2y^2$ sur \mathbf{Q} ou \mathbf{F}_5).

7.3.2 La relation fondamentale

On a vu en 4.3.8 que trois points non alignés sont toujours cocycliques. Ce n'est plus vrai pour quatre points (ou plus) et c'est une des questions majeures de la géométrie euclidienne de savoir à quelle condition quatre points sont cocycliques⁶. On s'attend à trouver un fermé de l'espace des quadrangles et c'est effectivement ce que dit le théorème suivant. L'intérêt de ce résultat est que la relation qu'il propose est la source de deux des théorèmes essentiels de la géométrie euclidienne : le théorème de l'angle inscrit et le théorème de Ptolémée.

Énoncé et variantes

Dans ce paragraphe, le corps k est quelconque.

Le crochet de deux vecteurs (un avatar du produit vectoriel) a été défini en 2.2.18 et son lien avec l'aire a été vu en 5.4.15. Rappelons qu'on a $[\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}] = [a, b, c]$ si a, b, c sont normalisés par $l = 1$.

7.3.3 Théorème. Soient a, b, c, d quatre points distincts du plan affine euclidien X . Les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si on a la relation :

$$(*) \quad C(a; b, c, d) := q(\overrightarrow{ab})[\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ad}] + q(\overrightarrow{ac})[\overrightarrow{ad}, \overrightarrow{ab}] + q(\overrightarrow{ad})[\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}] = 0.$$

Sur \mathbf{R} , la relation (*) peut encore s'écrire sous les formes suivantes, d'abord en termes de longueurs et d'aires orientées :

$$ab^2 \mathcal{A}(acd) + ac^2 \mathcal{A}(adb) + ad^2 \mathcal{A}(abc) = 0,$$

puis en termes de sinus (voir 5.6.7) :

$$ab \sin(\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ad}) + ac \sin(\overrightarrow{ad}, \overrightarrow{ab}) + ad \sin(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) = 0.$$

6. On parlait autrefois de quadrilatère inscriptible pour évoquer cette situation. On notera que, pour avoir des énoncés satisfaisants, il faut souvent englober le cas des points alignés.

7.3.4 Remarque. On notera que cette relation, qui fait intervenir le crochet de deux vecteurs, n'est pas une relation entre invariants de $\text{Is}(X)$ mais de $\text{Is}^+(X)$. Pour obtenir une relation entre invariants de $\text{Is}(X)$ il faut faire disparaître les crochets par élévation au carré en utilisant la première relation trigonométrique 1.3.5 qui exprime le produit de deux crochets en fonction des produits scalaires. La relation obtenue sera explicitée plus loin, voir 7.3.18.

7.3.5 Remarque. La relation (*) fait jouer un rôle particulier au point a . Si l'on en croit le théorème, il y a plusieurs relations équivalentes obtenues en changeant le point de base, par exemple :

$$bc^2[\vec{bd}, \vec{ba}] + bd^2[\vec{ba}, \vec{bc}] + ba^2[\vec{bc}, \vec{bd}] = 0.$$

On vérifie que les deux premiers membres de ces relations sont opposés en utilisant la relation de Chasles, la linéarité, l'alternance et la deuxième relation trigonométrique de 1.3.5.

Il y a beaucoup de démonstrations possibles de 7.3.3. Nous en donnons deux ici.

Preuve de 7.3.3 : la preuve analytique

On écrit les points en choisissant un repère orthonormé⁷, c'est-à-dire une origine, qu'on prend ici égale à a , et deux vecteurs \vec{i}_1 et \vec{i}_2 formant une base orthonormée de E_∞ et on a alors $\vec{ab} = b_1\vec{i}_1 + b_2\vec{i}_2$, $\vec{ac} = c_1\vec{i}_1 + c_2\vec{i}_2$ et $\vec{ad} = d_1\vec{i}_1 + d_2\vec{i}_2$.

L'équation d'un cercle ou d'une droite Γ est de la forme $\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0$ avec des coefficients α, β, γ non tous nuls. On cherche ces coefficients pour que Γ passe par a, b, c, d . Le fait que Γ passe par a impose $\delta = 0$. Les autres conditions imposent les équations $\alpha(b_1^2 + b_2^2) + \beta b_1 + \gamma b_2 = 0$ et les équations analogues avec c, d . On obtient un système linéaire de déterminant :

$$\begin{vmatrix} b_1^2 + b_2^2 & b_1 & b_2 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & c_2 \\ d_1^2 + d_2^2 & d_1 & d_2 \end{vmatrix}$$

et les points sont cocycliques ou alignés si et seulement si ce déterminant est nul. On calcule ce déterminant en le développant par rapport à la première colonne. Le terme $b_1^2 + b_2^2$ n'est autre que le carré de la longueur ab^2 et de même pour les autres et le déterminant 2×2 : $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$ est le crochet $[\vec{ac}, \vec{ad}]$ et de même pour les autres. On obtient bien la condition annoncée.

7. Cette preuve vaut dans le cas réel, mais le lecteur vérifiera qu'elle fonctionne sur n'importe quel corps. Il suffit de remplacer la forme $x^2 + y^2$ par $ux^2 + vy^2$.

La preuve de 7.3.3 via le centre du cercle circonscrit

Supposons d'abord les points a, b, c non alignés. Soit o le centre du cercle circonscrit à abc . Dire que d est aussi sur ce cercle, c'est-à-dire qu'on a $q(\vec{od}) = q(\vec{oa})$. Si on écrit $\vec{od} = \vec{oa} + \vec{ad}$, on voit que la cocyclicité est équivalente à la relation $q(\vec{ad}) = 2\varphi(\vec{ab}, \vec{ad})$. On calcule ces deux derniers vecteurs. Pour \vec{ab} , le calcul résulte de 4.3.9 (voir aussi 4.2.8 pour le dénominateur) et on a :

$$\vec{ab} = -\frac{q(\vec{ac})\varphi(\vec{ab}, \vec{bc})\vec{ab} + q(\vec{ab})\varphi(\vec{bc}, \vec{ca})\vec{ac}}{2[\vec{ab}, \vec{ac}]^2}.$$

Pour calculer \vec{ad} , on pose $\vec{ad} = \lambda\vec{ab} + \mu\vec{ac}$ et, en calculant les crochets de \vec{ad} avec \vec{ab} et \vec{ac} , on obtient :

$$\vec{ad} = \frac{[\vec{ad}, \vec{ac}]}{[\vec{ab}, \vec{ac}]} \vec{ab} - \frac{[\vec{ad}, \vec{ab}]}{[\vec{ab}, \vec{ac}]} \vec{ac}.$$

On calcule maintenant le produit scalaire $\varphi(\vec{ab}, \vec{ad})$. Pour cela, il suffit de développer et d'utiliser la relation de changement de base (1) de 1.3.5 :

$$q(\vec{ac})\varphi(\vec{ab}, \vec{bc}) - \varphi(\vec{bc}, \vec{ac})\varphi(\vec{ab}, \vec{ac}) = [\vec{ac}, \vec{ab}] [\vec{ac}, \vec{bc}]$$

et la relation analogue donnant $[\vec{bc}, \vec{ab}] [\vec{ab}, \vec{ac}]$. On trouve :

$$2\varphi(\vec{ab}, \vec{ad}) = \frac{q(\vec{ab})[\vec{ad}, \vec{ac}] - q(\vec{ac})[\vec{ad}, \vec{ab}]}{[\vec{ab}, \vec{ac}]}$$

et, en écrivant que cette quantité est égale à $q(\vec{ad})$, on obtient exactement la relation $C(a; b, c, d) = 0$.

Traisons le cas a, b, c alignés. On note d'abord que le résultat est évident si deux des points sont confondus. En effet, les quatre points sont alors toujours cocycliques ou alignés et la relation (*) est trivialement vérifiée. On suppose donc les quatre points distincts. On peut écrire $\vec{ac} = \lambda\vec{ab}$ avec $\lambda \neq 0, 1$ puisque c est distinct de a et de b . La relation (*) se réduit à $\lambda(1 - \lambda)q(\vec{ab})[\vec{ab}, \vec{ad}] = 0$ donc à $[\vec{ab}, \vec{ad}] = 0$ et elle signifie bien que d est aligné avec a et b .

7.3.6 Remarque. Pour traduire la cocyclicité des points a, b, c, d , au lieu d'écrire que les cercles circonscrits à abc et abd ont même centre, on pourrait imaginer de dire qu'ils ont même rayon. Attention, même si l'on utilise tous les triangles possibles formés avec les quatre points, il s'introduit un autre cas, celui où l'un des points est l'orthocentre du triangle formé par les autres, voir exercice 7.5.11.

Lien avec les birapports

7.3.7 Proposition. *On suppose $k = \mathbf{R}$ et on identifie le plan euclidien X et le plan complexe \mathbf{C} . Soient a, b, c, d quatre points distincts du plan et soit $r = \llbracket a, b, c, d \rrbracket$ leur birapport. On a la formule :*

$$\operatorname{Im} r = -\frac{ab^2[\vec{ac}, \vec{ad}] + ac^2[\vec{ad}, \vec{ab}] + ad^2[\vec{ab}, \vec{ac}]}{bc^2 \times ad^2} = -\frac{C(a; b, c, d)}{bc^2 \times ad^2}.$$

Démonstration. On a $r = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a}$. Le birapport étant invariant par translation, on peut supposer $a = 0$ et il reste

$$r = \frac{c(d-b)}{(c-b)d} = \frac{c\bar{c}d\bar{d} - d\bar{d}bc - c\bar{c}b\bar{d} + b\bar{b}c\bar{d}}{|d|^2|c-b|^2}.$$

Pour calculer la partie imaginaire, on peut oublier $c\bar{c}d\bar{d}$ et remplacer $b\bar{b}c\bar{d}$ par $-b\bar{b}cd$. On note alors que, pour des complexes $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$, on a $\operatorname{Im} \bar{b}c = b_1c_2 - b_2c_1 = [b, c]$ et on obtient la formule annoncée.

7.3.8 Remarque. Cette relation permet d'interpréter le théorème de l'angle inscrit en termes de réalité du birapport.

Elle permet aussi de comprendre les relations entre les diverses valeurs de la quantité C . Limitons nous aux valeurs de C obtenues par permutation circulaire, comme $C(b; c, d, a)$. Le birapport correspondant est $r/(r-1)$ dont la partie imaginaire vaut $-\operatorname{Im} r/|r-1|^2$. Comme on a $1-r = \llbracket a, c, b, d \rrbracket$, donc $|r-1| = \frac{ab \times cd}{bc \times ad}$, on trouve bien $C(b; c, d, a) = -C(a; b, c, d)$. On a évidemment alors $C(c; d, a, b) = C(a; b, c, d) = -C(d; a, b, c)$. On montre de même la formule $C(a; b, c, d) = -C(c; a, d, b)$.

On obtiendra une autre démonstration de 7.3.3 dans la Partie VI à l'aide du birapport, en utilisant la transitivité du groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ sur les cercles-droites.

7.3.3 Le théorème de l'angle inscrit

Il s'agit du théorème suivant, l'un des plus importants de toute la géométrie euclidienne. La preuve que nous en donnons est une nouvelle illustration du rôle des relations entre invariants.

7.3.9 Théorème. *On suppose⁸ $k = \mathbf{R}$. Soient a, b, c, d quatre points distincts du plan affine euclidien X . Les points a, b, c, d sont cocycliques ou*

8. Cette hypothèse est nécessaire car nous n'avons défini les angles orientés que dans ce cas, mais un résultat analogue vaut sans doute sur un corps quelconque en appelant angle un avatar additif d'une rotation.

alignés si et seulement si on a la relation entre angles orientés de vecteurs : $(\vec{ca}, \vec{cb}) = (\vec{da}, \vec{db})$ modulo π ou encore $(ca, cb) = (da, db)$ entre angles orientés de droites.

Démonstration. Les angles (ca, cb) et (da, db) sont des éléments de $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ et ils sont égaux si et seulement si leurs tangentes sont égales. En vertu de 5.6.13, on voit que la condition s'écrit :

$$I(c, d; a, b) := [\vec{ca}, \vec{cb}]_{\varphi}(\vec{da}, \vec{db}) - [\vec{da}, \vec{db}]_{\varphi}(\vec{ca}, \vec{cb}) = 0.$$

Il s'agit de voir que cette relation est équivalente à $C(a; b, c, d) = 0$. Mais on dispose de la deuxième relation trigonométrique de 1.3.5 (dite de dimension) :

$$D(a; b; c, d) := [\vec{ac}, \vec{ad}]_q(\vec{ab}) + [\vec{ad}, \vec{ab}]_{\varphi}(\vec{ac}, \vec{ab}) + [\vec{ab}, \vec{ac}]_{\varphi}(\vec{ad}, \vec{ab}) = 0.$$

Le résultat est alors conséquence du lemme suivant :

7.3.10 Lemme. *Avec les notations précédentes et celles de 7.3.3, on a l'identité :*

$$I(c, d; a, b) = C(a; b, c, d) - D(a; b; c, d).$$

Démonstration. Grâce à la relation de Chasles, on introduit le point a dans la relation I là où il n'est pas présent :

$$I = [\vec{ca}, \vec{ca} + \vec{ab}]_{\varphi}(\vec{da}, \vec{da} + \vec{ab}) - [\vec{da}, \vec{da} + \vec{ab}]_{\varphi}(\vec{ca}, \vec{ca} + \vec{ab})$$

et, en utilisant les propriétés de bilinéarité et d'alternance du crochet, de bilinéarité et de symétrie de φ , on constate qu'on a la relation annoncée.

La relation rencontrée ci-dessus mérite d'être mise en exergue :

7.3.11 Corollaire. *Soient a, b, c, d quatre points distincts du plan affine euclidien X . Les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si on a la relation $I(c, d; a, b) = 0$:*

$$[\vec{ca}, \vec{cb}]_{\varphi}(\vec{da}, \vec{db}) - [\vec{da}, \vec{db}]_{\varphi}(\vec{ca}, \vec{cb}) = 0.$$

7.3.4 La preuve "élémentaire" de 7.3.9

Elle consiste à montrer d'abord la relation entre angle au centre et angle inscrit :

7.3.12 Proposition. *Soient a, b, c trois points distincts d'un cercle de centre o . On a l'égalité d'angles orientés de vecteurs : $2(\vec{ab}, \vec{ac}) = (\vec{ob}, \vec{oc})$.*

Démonstration. On considère le triangle oab , qui est isocèle en o puisqu'on a $oa = ob$. On a donc, en vertu de 5.7.13, $(\vec{ab}, \vec{a\hat{o}}) = (\vec{bo}, \vec{ba})$. Comme la somme des angles de oab vaut π (voir 5.6.5), on a donc :

$$(\vec{ab}, \vec{a\hat{o}}) + (\vec{bo}, \vec{ba}) + (\vec{o\hat{a}}, \vec{ob}) = \pi = 2(\vec{ab}, \vec{a\hat{o}}) + (\vec{o\hat{a}}, \vec{ob}).$$

Le même raisonnement dans oac donne $2(\vec{ac}, \vec{a\hat{o}}) + (\vec{o\hat{a}}, \vec{oc}) = \pi$ ou encore $2(\vec{ao}, \vec{ac}) + (\vec{oc}, \vec{o\hat{a}}) = -\pi$. En additionnant ces deux relations et en utilisant les relations de Chasles en a et o on obtient le résultat.

7.3.13 Remarque. Dans cette démonstration, on utilise trois ingrédients. Deux sont innocents, au sens où ils valent aussi en géométrie non euclidienne : les relations de Chasles en a et o et l'égalité des angles à la base d'un triangle isocèle. Le troisième, en revanche, qui est la propriété de la somme des angles d'un triangle, ne subsiste pas en non euclidien, et disqualifie du même coup le théorème de l'angle inscrit, voir Partie IV §8.5 la discussion autour du Lotensatz.

On en déduit aussitôt le sens direct du théorème de l'angle inscrit :

7.3.14 Corollaire. Soient a, b, c, d quatre points distincts d'un cercle. On a l'égalité d'angles orientés de droites : $(ab, ac) = (db, dc)$.

Démonstration. Si o est le centre du cercle, on a $2(\vec{ab}, \vec{a\hat{o}}) = (\vec{ob}, \vec{oc}) = 2(\vec{db}, \vec{d\hat{o}})$ modulo 2π , d'où l'égalité modulo π en divisant par 2.

On a aussi le cas limite :

7.3.15 Corollaire. (Théorème de l'angle inscrit limite) Soient a, b, c trois points distincts d'un cercle et soit T la tangente (voir 7.5.5) en b . On a l'égalité d'angles de droites : $(ab, ac) = (T, bc)$.

Démonstration. La somme des angles du triangle isocèle obc donne $(\vec{ob}, \vec{oc}) + 2(\vec{bc}, \vec{bo}) = \pi$ et c'est encore égal à $2(\vec{ab}, \vec{a\hat{o}}) + 2(\vec{bc}, \vec{bo})$ par 7.3.12. Choisissons un vecteur directeur \vec{t} quelconque de T . On sait (voir 7.5.5) que la tangente est perpendiculaire au rayon (ob) et on a donc $(\vec{t}, \vec{bo}) = (\vec{t}, \vec{bc}) + (\vec{bc}, \vec{bo}) = \pm\pi/2$ modulo 2π . On en déduit en passant au double : $2(\vec{t}, \vec{bc}) + 2(\vec{bc}, \vec{bo}) = \pi = 2(\vec{ab}, \vec{a\hat{o}}) + 2(\vec{bc}, \vec{bo})$ modulo 2π , d'où le résultat modulo π en divisant par 2.

On peut maintenant finir de prouver 7.3.9 par la méthode élémentaire. On note déjà que si a, b, c, d sont alignés les angles de droites sont tous deux égaux à zéro, ce qui achève de prouver le sens direct du théorème.

Réciproquement, si a, b, c sont alignés, l'angle (ab, ac) est nul, donc aussi (db, dc) , ce qui montre que d est aussi sur la droite (ab) . Le même raisonnement vaut si b, c, d sont alignés. On peut donc supposer a, b, c (resp. b, c, d) non alignés. On considère le cercle Γ circonscrit à abc et on raisonne par l'absurde en supposant que d n'est pas sur Γ . Montrons d'abord que (bd) n'est pas tangente à Γ en b . Sinon, par 7.3.15, on aurait $(ab, ac) = (db, bc)$, mais aussi $(ab, ac) = (db, dc)$ par hypothèse, donc $(dc, bc) = 0$ par Chasles, c'est-à-dire b, c, d alignés et c'est absurde.

Soit alors d' le point d'intersection de (bd) et Γ autre que b . Par le sens direct du théorème on a $(ab, ac) = (d'b, d'c)$, donc $(d'b, d'c) = (db, dc)$. Mais, comme les droites (db) et $(d'b)$ sont égales, on a aussi $(dc) = (d'c)$, donc $d = d'$.

7.3.16 Remarque. Il y a six variantes du théorème de l'angle inscrit, obtenues en changeant les paires de points choisies comme "têtes" et les relations correspondantes sur les angles de droites sont donc équivalentes. Si l'on part de la relation $(ab, ac) = (db, dc)$, on en déduit aisément $(ba, bd) = (ca, cd)$ en utilisant la relation de Chasles. En revanche, il est plus difficile d'obtenir la relation $(ac, ad) = (bc, bd)$. Elle résulte de l'égalité $C(b; c, a, d) = -C(c; d, b, a)$ établie en 7.3.8.

7.3.5 Le théorème de Ptolémée

7.3.17 Corollaire. Soient a, b, c, d quatre points distincts du plan affine euclidien X . Les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si le déterminant⁹ suivant est nul :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & z & y & X \\ z & 0 & x & Y \\ y & x & 0 & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 & ad^2 \\ ab^2 & 0 & bc^2 & bd^2 \\ ac^2 & bc^2 & 0 & cd^2 \\ ad^2 & bd^2 & cd^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Avec les notations de 6.3.1, on a $\Delta = P(xX, yY, zZ)$, c'est-à-dire :

$$\Delta = (xX)^2 + (yY)^2 + (zZ)^2 - 2(yY)(zZ) - 2(zZ)(xX) - 2(xX)(yY).$$

Si le corps de base est \mathbf{R} , cette condition équivaut à l'une des trois suivantes qui portent sur les longueurs des côtés et des diagonales du quadrilatère $abcd$: $ab \cdot cd = ac \cdot bd + ad \cdot bc$, $ac \cdot bd = ab \cdot cd + ad \cdot bc$, $ad \cdot bc = ab \cdot cd + ac \cdot bd$.

Démonstration. La première assertion résulte de 7.3.3 et du lemme suivant :

9. Comme d'habitude, on écrit $q(\vec{ab}) = ab^2$ même si le corps de base n'est pas \mathbf{R} .

7.3.18 Lemme. Avec les notations précédentes et celles de 7.3.3, on a l'identité $\Delta = -4C(a; b, c, d)^2$.

Démonstration. Choisissons le point a comme origine : $a = (0, 0, 1)$. On a alors $b = (b_1, b_2, 1)$, $c = (c_1, c_2, 1)$ et $d = (d_1, d_2, 1)$. Nous avons vu ci-dessus que le premier membre $C(a; b, c, d)$ de la relation (*) de 7.3.3 n'est autre que le déterminant :

$$C(a; b, c, d) = \begin{vmatrix} b_1^2 + b_2^2 & b_1 & b_2 \\ c_1^2 + c_2^2 & c_1 & c_2 \\ d_1^2 + d_2^2 & d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \det A \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & ab^2 & b_1 & b_2 \\ 1 & ac^2 & c_1 & c_2 \\ 1 & ad^2 & d_1 & d_2 \end{pmatrix}.$$

En échangeant les deux premières colonnes on obtient :

$$C(a; b, c, d) = -\det A' \quad \text{avec} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ ab^2 & 1 & b_1 & b_2 \\ ac^2 & 1 & c_1 & c_2 \\ ad^2 & 1 & d_1 & d_2 \end{pmatrix}.$$

En transposant A et en multipliant les deux dernières lignes de tA par -2 , on obtient l'égalité :

$$4 \det A = \det B \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & ab^2 & ac^2 & ad^2 \\ 0 & -2b_1 & -2c_1 & -2d_1 \\ 0 & -2b_2 & -2c_2 & -2d_2 \end{pmatrix}.$$

On a donc $-4C(a; b, c, d)^2 = \det A'B$. En tenant compte des égalités du type $b_1c_1 + b_2c_2 = \varphi(\vec{ab}, \vec{ac})$ et $bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2\varphi(\vec{ab}, \vec{ac})$, on obtient aussitôt la formule attendue $\det A'B = \Delta$.

Le fait que Δ est égal à $P(xX, yY, zZ)$ vient de l'identité mystérieuse de 5.5.11 :

$$\begin{vmatrix} 0 & z & y & X \\ z & 0 & x & Y \\ y & x & 0 & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & zZ & yY \\ 1 & zZ & 0 & xX \\ 1 & yY & xX & 0 \end{vmatrix}.$$

Vu 5.5.8, la formule $\Delta = P(xX, yY, zZ)$ donne la factorisation avec les racines carrées ab, \dots, cd :

$$-\Delta = (ac.bd + ad.bc - ab.cd)(ab.cd + ad.bc - ac.bd) \\ (ab.cd + ac.bd - ad.bc)(ab.cd + ac.bd + ad.bc).$$

Dans le cas où k est le corps des réels on a le corollaire suivant :

7.3.19 Corollaire. Soient a, b, c, d quatre points du plan euclidien réel.

1) On a les inégalités $ac.bd \leq ab.cd + ad.bc$, $ab.cd \leq ad.bc + ac.bd$ et $ad.bc \leq ab.cd + ac.bd$.

2) Les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si l'une des inégalités précédentes est une égalité. Précisément, on a l'égalité $ac.bd = ab.cd + ad.bc$ si les points a, b, c, d sont cocycliques et si le quadrilatère $abcd$ est convexe ou s'ils sont alignés avec b et d de part et d'autre¹⁰ de a, c et de même pour les autres cas.

Démonstration. 1) La formule $-\Delta = 4C(a; b, c, d)^2$ montre que $-\Delta$ est ≥ 0 . On a donc $(ac.bd + ad.bc - ab.cd)(ab.cd + ad.bc - ac.bd)(ab.cd + ac.bd - ad.bc) \geq 0$. On en déduit que les trois termes sont positifs (si l'on a, par exemple, $ac.bd > ab.cd + ad.bc$, il est clair que les autres termes sont > 0 et le produit est négatif, ce qui est absurde).

2) Le second point résulte de 7.3.17. Pour le rabiote, voir exercice 7.5.8 ou Partie VI ??.

7.3.20 Remarque. Pour mesurer la chance qu'il a de travailler en géométrie euclidienne, au moins sur ces questions de cocyclicité, le lecteur retournera à la Partie IV et constatera qu'il n'y existe rien d'aussi beau que le théorème de l'angle inscrit ou celui de Ptolémée. C'est sans doute ce qui explique la richesse des applications géométriques que nous allons décrire maintenant.

7.3.6 Du côté des droites

De manière un peu étonnante, la situation duale de celle des quadrangles inscrits, qui est celle des quadrilatères "circonscriposables", c'est-à-dire de quatre droites tangentes à un même cercle, semble avoir été très peu étudiée. Le lecteur trouvera une description de l'espace de ces objets dans l'exercice 7.5.10. Il garde le droit de la trouver répugnante.

7.4 Applications

Le théorème de l'angle inscrit a d'innombrables applications géométriques. Nous avons déjà vu en 5.6.15 la propriété du symétrique de l'orthocentre. Voici trois autres exemples, que nous reverrons dans la Partie VI comme applications du lemme des six birapports. Attention, toutes les démonstrations ci-dessous sont effectuées avec des angles orientés de droites. Dans la ligne de ce qui précède c'est le plus simple et le plus efficace. Cela ne signifie pas que

10. Cette condition signifie que le birapport $[[a, c, b, d]]$ est négatif.

cette méthode soit celle que je préconise pour traiter ce type de problèmes au collège ou au lycée¹¹. En effet, je pense qu'il est préférable de commencer par aborder ces questions à l'aide des angles géométriques, quitte à étudier plusieurs cas de figure. Sur ce sujet, voir par exemple [Per03].

7.4.1 Le pivot

7.4.1 Théorème. *Soit abc un triangle, p, q, r trois points situés respectivement sur (bc) , (ca) , (ab) et distincts de a, b, c . Alors, les cercles circonscrits à aqr , brp et cpq ont un point commun (appelé pivot).*

Démonstration. Supposons d'abord que les cercles circonscrits à aqr et brp ne sont pas tangents et soit d leur point d'intersection autre que r . Il s'agit de montrer que d est sur le cercle circonscrit à cpq , donc, par la réciproque du théorème de l'angle inscrit 7.3.9, qu'on a $(dp, dq) = (cp, cq)$. Mais, par Chasles et le sens direct de 7.3.9, on a $(dp, dq) = (dp, dr) + (dr, dq) = (bp, br) + (ar, aq)$. Comme les droites (ar) et (br) sont toutes deux égales à (ab) , et que (bp) et (aq) sont respectivement égales à (cp) et (cq) , on obtient bien le résultat.

Si les deux cercles sont tangents en r , on montre que r est aussi sur le cercle circonscrit à cpq . Pour cela on introduit la tangente commune T en r et on applique le théorème de l'angle inscrit limite 7.3.15. On a $(rq, rp) = (rq, T) + (T, rp) = (aq, ar) + (br, bp) = (cq, ab) + (ab, cp) = (cq, cp)$.

7.4.2 La droite de Simson

7.4.2 Théorème. *Soient abc un triangle, m un point du plan et p, q, r ses projetés orthogonaux sur les droites (bc) , (ca) , (ab) respectivement. Alors, p, q, r sont alignés (sur une droite dite de Simson) si et seulement si m est sur le cercle circonscrit à abc .*

Démonstration. Comme r et p sont les projetés orthogonaux de m sur les côtés, les angles (rb, rm) et (pb, pm) sont droits, donc égaux (modulo π). Il en résulte que b, p, m, r sont cocycliques ou alignés et on a donc $(bm, br) = (pm, pr)$. De même, on a $(cq, cm) = (pq, pm)$. On en déduit, par Chasles, $(pq, pr) = (pq, pm) + (pm, pr) = (cq, cm) + (bm, br) = (ca, cm) + (bm, ba)$. Dire que p, q, r sont alignés, c'est-à-dire que (pq, pr) est nul, signifie donc exactement qu'on a $(ca, cm) = (ba, bm)$ donc que a, b, c, m sont cocycliques.

11. Si tant est qu'on y fasse encore de la géométrie.

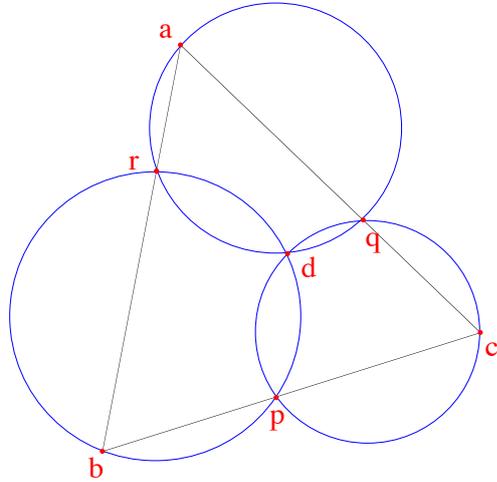


FIGURE 7.1 – Le théorème du pivot

7.4.3 Le théorème des six cercles de Miquel

7.4.3 Théorème. Soient $a, b, c, d; a', b', c', d'$ huit points distincts de X . On suppose que les points a, b, c, d ; a, a', b, b' ; b, b', c, c' ; c, c', d, d' et d, d', a, a' sont cocycliques. Alors, les points a', b', c', d' sont cocycliques ou alignés.

Démonstration. On a les égalités suivantes : $\theta = (d'a', d'c') = (d'a', d'd) + (d'd, d'c')$ (par Chasles), puis $\theta = (aa', ad) + (cd, cc')$ (car a, a', d, d' et c, c', d, d' sont cocycliques), puis $\theta = (aa', ab) + (ab, ad) + (cd, cb) + (cb, cc')$ (par Chasles). Mais, comme a, b, c, d sont cocycliques on a $(ab, ad) + (cd, cb) = 0$ et enfin, en utilisant les cocyclicités de a, a', b, b' et de b, b', c, c' et Chasles, on obtient $\theta = (b'a', b'b) + (b'b, b'c') = (b'a', b'c')$, ce qui montre que a', b', c', d' sont cocycliques ou alignés.

7.4.4 Remarque.

La deuxième figure ci-dessous montre que même si tous les autres points sont cocycliques et pas alignés, les points a', b', c', d' peuvent tout de même être alignés.

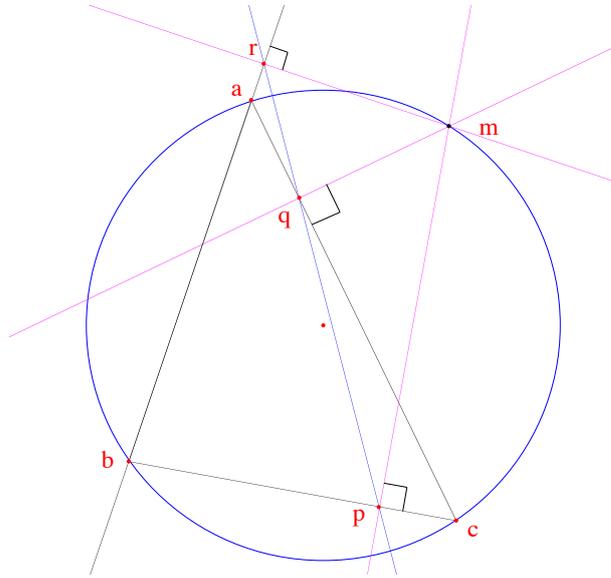


FIGURE 7.2 – La droite de Simson

7.5 Exercices

7.5.1 L'espace des quadrangles, variante

Dans les exercices qui suivent et qui utilisent les notations de 7.1.1, on détermine directement l'image de Φ sans utiliser celle de Ψ .

7.5.1 Exercice. Soient x, y, z, X, Y cinq nombres réels ≥ 0 . On suppose qu'on a les deux relations :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy \leq 0 \quad \text{et} \quad X^2 + Y^2 + z^2 - 2Yz - 2zX - 2XY \leq 0.$$

Montrer qu'il existe $a, b, c, d \in X$ tels que l'on ait $x = q(\vec{bc})$, $y = q(\vec{ca})$, $z = q(\vec{ab})$, $X = q(\vec{ad})$, $Y = q(\vec{bd})$. (Utiliser 6.5.9.)

7.5.2 Exercice. Soient x, y, z, X, Y, Z six nombres réels ≥ 0 vérifiant la condition $\Gamma_3^\sharp(x, y, z, X, Y, Z) = 0$. On suppose que z est > 0 et qu'on a les deux relations :

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy \leq 0 \quad \text{et} \quad X^2 + Y^2 + z^2 - 2Yz - 2zX - 2XY \leq 0.$$

On se propose de montrer qu'il existe $a, b, c, d \in X$ tels que l'on ait $x = q(\vec{bc})$, $y = q(\vec{ca})$, $z = q(\vec{ab})$, $X = q(\vec{ad})$, $Y = q(\vec{bd})$ et $Z = q(\vec{cd})$.

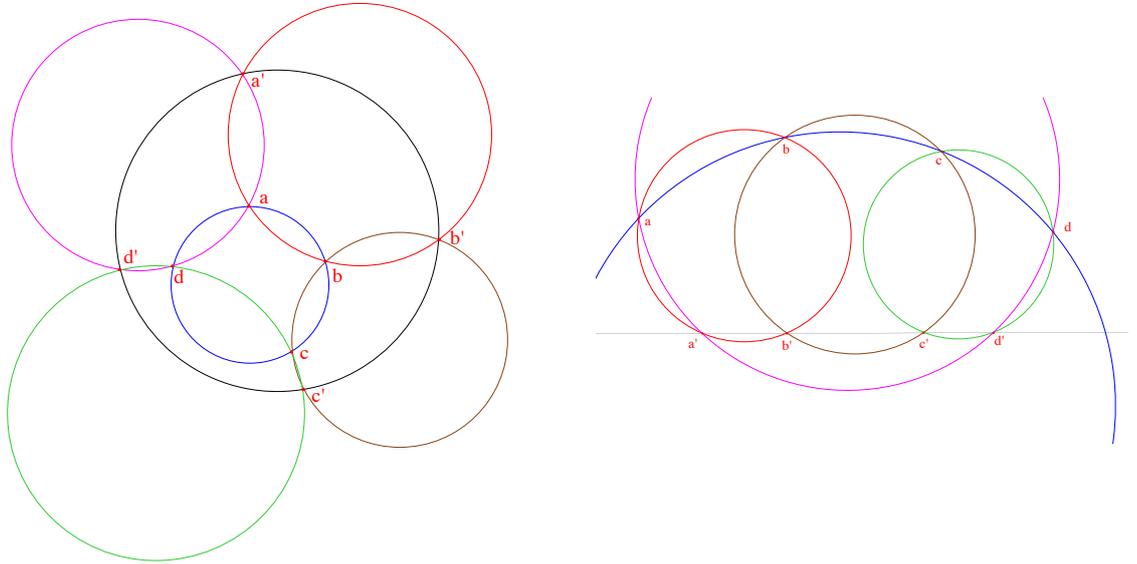


FIGURE 7.3 – Le théorème de Miquel

1) Montrer que le polynôme $\Gamma_3^\sharp(x, y, z, X, Y, T)$, vu comme polynôme en T , est un polynôme du second degré, de coefficient dominant $-2z$ et de discriminant :

$$\Delta = 4(x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy)(X^2 + Y^2 + z^2 - 2Yz - 2zX - 2XY).$$

(On se munira d'un logiciel de calcul formel ... ou de beaucoup de courage.)

2) a) Soient a, b, c, d , avec a, b distincts, quatre points donnant les cinq premiers invariants fournis par 7.5.1. On considère le point d' symétrique de d par rapport à (ab) et on pose $Z' = q(\vec{cd})$ et $Z'' = q(\vec{cd'})$. Montrer que les paramètres x, y, z, X, Y, Z' (resp. Z'') vérifient l'équation en T : $\Gamma_3^\sharp(x, y, z, X, Y, T) = 0$.

b) Montrer que l'un des quadruplets (a, b, c, d) ou (a, b, c, d') convient (on étudiera le cas où l'une ou l'autre des inégalités (1) est une égalité).

c) Montrer que le résultat ne subsiste pas sans la condition $z > 0$.

3) Utiliser la question précédente pour retrouver 7.1.7.

7.5.2 Compléments sur l'espace des quadrilatères

7.5.3 Exercice. On reprend les notations de 7.2.3. Il s'agit de montrer que les quatre relations de type \mathcal{R} n'impliquent pas les relations \mathcal{S} . Les angles sont exprimés en degrés.

1) On considère les nombres suivants : $i(A, B) = \cos^2 75^\circ$, $i(A, C) = \cos^2 45^\circ$, $i(A, D) = \cos^2 30^\circ$, $i(B, C) = \cos^2 30^\circ$, $i(B, D) = \cos^2 45^\circ$ et $i(C, D) = \cos^2 75^\circ$. Montrer que ces invariants vérifient les quatre relations \mathcal{R} (on utilisera l'existence de triangles avec des angles de demi-droites $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$, donc des angles de droites $30^\circ, 45^\circ, 75^\circ$).

2) Montrer que $\mathcal{S}(A, B, C; D)$ n'est pas vérifiée (donc qu'il n'existe pas de quadrilatère $ABCD$ dont les invariants I^* soient égaux aux précédents). (La relation \mathcal{S} n'est autre que la relation :

$$(*) \quad [B, C, l]\varphi^*(A, D) + [C, A, l]\varphi^*(B, D) + [A, B, l]\varphi^*(C, D) = 0$$

élevée au carré et elle se traduit par $\sin 75^\circ \cos 75^\circ = \pm \sin 30^\circ \cos 30^\circ \pm \sin 45^\circ \cos 45^\circ$ soit $1 = \pm\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$.)

7.5.4 Exercice. ¶

L'objectif de cet exercice est d'appliquer au cas des quadrilatères la méthode générale expliquée en 6.4.6. On associe à quatre droites d'équations A, B, C, D les points d'intersection donnés (en version normalisée) par les formules :

$$a = \frac{A \wedge B}{[A, B, l]}, \quad b = \frac{B \wedge C}{[B, C, l]}, \quad c = \frac{C \wedge D}{[C, D, l]} \quad \text{et} \quad d = \frac{D \wedge A}{[D, A, l]}.$$

L'espace des droites est alors isomorphe à celui des points que l'on décrit en utilisant 7.1.7. Il s'agit donc, avec les notations de 7.1.1, de calculer les six invariants x, y, z, X, Y, Z du quadrangle $abcd$.

1) Calculer les longueurs des côtés x, z, X, Z . On vérifiera par exemple la formule :

$$z = ab^2 = q(\vec{ab}) = \frac{[A, B, C]^2 q^*(B)}{[A, B, l]^2 [B, C, l]^2} = \frac{K^*(A, B, C)}{(1 - I^*(B, C))(1 - I^*(A, B))}.$$

2) Pour les diagonales, le calcul est plus ardu et le résultat a une apparence peu avenante¹². On pose $y = ac^2$ et $Y = bd^2$.

$$\text{Montrer qu'on a } y = y_1 + y_2 + y_3 \text{ avec } y_1 = \frac{K^*(A, B, C)}{(1 - I^*(A, B))(1 - I^*(C, D))},$$

$$y_2 = \frac{K^*(AB, D)}{(1 - I^*(A, B))(1 - I^*(C, D))} \quad \text{et} \quad y_3 = \frac{-2N}{(1 - I^*(A, B))(1 - I^*(C, D))}.$$

Dans cette fraction, le numérateur N est l'expression suivante :

$$\frac{(1 - I^*(A, B))K^*(A, C, D) - (1 - I^*(A, D))K^*(A, B, C) - (1 - I^*(A, C))K^*(A, B, D)}{I^*(C, D) - S^*(A, C, D)}$$

12. On paie ici le prix fort pour avoir rompu la symétrie entre les quatre droites.

où S est le spin. (On utilisera la relation suivante, voir 8.3.8 :

$$[A, B, C][A, B, D][A, D, l][A, C, l] = [A, B, l]^2[C, D, A]^2 - [A, D, l]^2[A, B, C]^2 - [A, C, l]^2[D, A, B]^2.$$

Calculer de même Y .

7.5.3 Médiante, triangle rectangle et cercle

7.5.5 Exercice. La tangente et le rayon

1) Soit C un cercle de centre o et a un point de C . Montrer que, si D est une droite passant par a , elle recoupe C en un point $b \neq a$, sauf si D est perpendiculaire à (oa) . Dans ce dernier cas, on dit que D est **tangente** à C en a . (Choisir un vecteur directeur \vec{t} de D et chercher les points d'intersection m de C et D sous la forme $a + \lambda\vec{t}$.)

2) On suppose $k = \mathbf{R}$. Soit C un cercle de centre o et de rayon R et D une droite. On note d la distance de o à D (voir 5.2.4). Montrer que l'intersection de D et C est vide si l'on a $d > R$, réduite à un point si $d = R$ (et D est alors tangente à C en ce point) et formée de deux points si $d < R$.

7.5.6 Exercice. Soit abc un triangle et m le milieu de b, c .

1) Montrer les formules :

$$\varphi(\vec{ab}, \vec{ac}) = q(\vec{am}) - q(\vec{mb}),$$

$$q(\vec{ab}) + q(\vec{ac}) = 2q(\vec{am}) + \frac{1}{2}q(\vec{bc}) \quad \text{ou encore} \quad ab^2 + ac^2 = 2am^2 + \frac{1}{2}bc^2.$$

Cette dernière formule est appelée "formule de la médiane".

2) On suppose le triangle rectangle en a . Montrer qu'on a $ma = mb = mc$ et que le triangle est inscrit dans le cercle de diamètre $[bc]$.

3) Soient a, b, c, d quatre points de X . On suppose les triangles cad et cbd rectangles en a et b respectivement. Montrer que les points a, b, c, d sont cocycliques.

7.5.4 Cocyclicité et similitude

7.5.7 Exercice. Soient a, b, c, d quatre points distincts. On suppose que les droites (ac) et (bd) se coupent en un point o . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Les points a, b, c, d sont cocycliques.

ii) Les triangles oab et odc sont semblables.

iii) Les triangles obc et oad sont semblables.

(On utilisera 5.7.7. On peut préciser que les similitudes sont indirectes.)

7.5.5 Autour de Ptolémée

7.5.8 Exercice. On se propose de compléter la preuve de 7.3.19. Soit $abcd$ un quadrilatère convexe inscrit dans le cercle Γ et soit o le point d'intersection des diagonales $[ac]$ et $[bd]$.

1) En utilisant 5.4.17, montrer la formule :

$$\mathcal{A}(abcd) = \frac{1}{2} ac \times bd \times \sin(\widehat{aob}).$$

2) La parallèle à (bd) passant par c recoupe Γ en e . Montrer que les triangles bce et dec sont isométriques. En déduire la formule $\mathcal{A}(abcd) = \mathcal{A}(abe) + \mathcal{A}(ade)$.

3) En déduire qu'on a l'égalité $ac \times bd = ab \times cd + ad \times bc$ (utiliser 5.4.17).

7.5.9 Exercice. Soit abc un triangle et $p \in [bc]$. On projette orthogonalement p en m et n sur (ab) et (ac) . Déterminer p pour que la longueur mn soit minimale.

7.5.6 Quadrilatères circonscriptibles

7.5.10 Exercice. On suppose $k = \mathbf{R}$. Soient A, B, C, D quatre équations de droites. On suppose que les droites correspondantes sont en position générale (deux quelconques d'entre elles ne sont pas parallèles, trois quelconques d'entre elles ne sont pas concourantes). On se propose de dire à quelle condition il existe un cercle tangent à ces quatre droites.

1) Montrer qu'il existe en général quatre cercles tangents à trois droites données (voir 4.5.2, il s'agit des cercles inscrit et exinscrits).

2) On suppose que les équations sont normalisées par $q^* = 1$. Montrer que les quatre droites sont tangentes à un même cercle si et seulement si on a l'une des relations suivantes :

$$[A, B, C]^2 = (\pm[B, C, D] \pm [C, A, D] \pm [A, B, D])^2$$

avec toutes les distributions possibles des signes \pm .

Les relations précédentes peuvent sembler paradoxales car elles font jouer un rôle particulier à la droite D (même en tenant compte des relations que nous verrons au chapitre suivant). C'est dû au fait que la normalisation par q^ (qui revient à diviser par $\sqrt{q^*(A)}$) n'est pas une bonne opération algébrique. La question suivante donne une vraie relation polynomiale entre invariants.*

3) ¶¶ On introduit $X = q^*(A)[B, C, D]^2$, $Y = q^*(B)[C, A, D]^2$, $Z = q^*(C)[A, B, D]^2$, $T = q^*(D)[A, B, C]^2$. Montrer que les droites d'équations

A, B, C, D sont tangentes à un même cercle si et seulement si on a la relation, symétrique en A, B, C, D mais pas très simple :

$$\begin{aligned} X^4 + Y^4 + Z^4 + T^4 - 4(X^3Y + X^3Z + X^3T + Y^3Z + Y^3T + Z^3T) \\ + 6(X^2Y^2 + X^2Z^2 + X^2T^2 + Y^2Z^2 + Y^2T^2 + Z^2T^2) \\ + 4(X^2YZ + X^2YT + X^2ZT + Y^2XZ + Y^2XT + Y^2ZT + Z^2XY \\ + Z^2XT + Z^2YT + T^2XY + T^2XZ + T^2YZ) - 40XYZT = 0. \end{aligned}$$

7.5.7 Des relations peu recommandables

Dans l'espace des quadrilatères, nous avons vu que la relation $C = 0$ définit le fermé des quadrilatères inscriptibles. Cette relation peut sembler compliquée, mais les deux exercices qui suivent ont pour but de tempérer les ardeurs du lecteur en montrant que deux autres relations, plus simples et vérifiées aussi par les quadruplets de points cocycliques ou alignés, ne conviennent pas car elles définissent des fermés strictement plus grands.

7.5.11 Exercice. L'équation de l'orthocentre

1) Soient a, b, c, d quatre points cocycliques. Montrer qu'on a la relation $bc.ca\mathcal{A}(abd) = bd.da\mathcal{A}(abc)$ et les cinq autres relations obtenues par permutation (ici \mathcal{A} désigne l'aire ordinaire du triangle). (On écrira que les rayons des cercles circonscrits à abc et abd sont égaux grâce à la formule de 4.5.9.2.) Interpréter ces relations en termes de sinus.

2) Soit abc un triangle non aplati. Montrer que, si d vérifie les six relations du type $bc.ca\mathcal{A}(abd) = bd.da\mathcal{A}(abc)$ il est sur le cercle circonscrit à abc ... ou qu'il est l'orthocentre de ce triangle (voir 5.6.15) !

3) Soient a, b, c, d quatre points du plan et soient x, y, z, X, Y, Z les carrés des longueurs : $x = bc^2$, etc. Montrer que l'ensemble des quadruplets de points qui vérifient l'équation :

$$xy\Gamma_2^\sharp(X, Y, z) = XY\Gamma_2^\sharp(x, y, z)$$

et les cinq autres relations analogues est formé de deux familles de quadruplets : les a, b, c, d cocycliques ou alignés et les a, b, c, d orthocentriques c'est-à-dire tels que l'un d'eux est l'orthocentre du triangle formé par les autres.

7.5.12 Exercice. 1) Soient a, b, c, d quatre points cocycliques ou alignés.

a) Montrer qu'on a la relation :

$$q(\vec{ad})[\vec{ab}, \vec{ac}][\vec{bc}, \vec{bd}] = q(\vec{bc})[\vec{ac}, \vec{ad}][\vec{ab}, \vec{ad}].$$

(On utilisera le théorème de l'angle inscrit en prenant garde aux cas de figure.)

b) Montrer que cette relation n'est pas équivalente à la cocyclicité (considérer le cas où (ad) est parallèle à (bc)).

c) On pose $Q(a, b, c, d) = q(\overrightarrow{ad})[a, b, c][b, c, d] - q(\overrightarrow{bc})[a, c, d][a, b, d]$.

¶ Montrer ¹³ que Q s'écrit comme un polynôme en x, y, z, X, Y, Z et que Q^2 est dans l'idéal engendré par les polynômes de Ptolémée ¹⁴ Δ et de Cayley-Menger Γ_3^\sharp et retrouver a).

2) Reprendre l'étude précédente avec la relation ¹⁵ :

$$q(\overrightarrow{ad})\varphi(\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{cb})\varphi(\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{bd}) = q(\overrightarrow{bc})\varphi(\overrightarrow{da}, \overrightarrow{db})\varphi(\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ad}).$$

13. Un logiciel de calcul formel du type Macaulay sera utile.

14. Le coefficient de Q^2 sur Δ est égal à $(y-z+Y-Z)^2 - 4xX$. Cela permet d'expliquer le b).

15. Il n'y a pas vraiment à reprendre ...

Chapitre 8

Les invariants du groupe des similitudes

Comme on l'a vu dans la Partie II, les invariants polynomiaux d'un groupe sont intimement liés aux représentations linéaires de ce groupe. En effet, si G opère sur l'espace vectoriel V de dimension n , il opère aussi sur l'algèbre symétrique $S(V)$ associée, qui est un anneau des polynômes à n indéterminées.

Dans le cas présent, le groupe dont nous allons étudier les invariants (absolus ou relatifs) est $G := GO^\circ(q^) \simeq PGO(q^*) \simeq \text{Sim}(X)$, groupe des similitudes, celui que Klein appelle le groupe "principal", mais aussi ses sous-groupes et notamment les groupes d'isométries. Ce groupe opère de manière naturelle sur l'espace vectoriel E^* de dimension 3, donc aussi sur E par la représentation contragrédiente associée. Mais ces représentations ne sont pas irréductibles. La première admet le sous-espace stable (et même fixe) L et elle fournit donc une représentation de G dans E^*/L . La seconde admet le sous-espace stable E_∞ (et cette fois l'opération sur le quotient est triviale). On a donc deux représentations, duales l'une de l'autre, de G sur deux espaces de dimension 2, l'espace E^*/L des directions d'équations et l'espace E_∞ des vecteurs, qui vont jouer un grand rôle. Les invariants pour ces opérations (produits et carrés scalaires et crochets, c'est-à-dire avec leurs habits géométriques longueurs, angles et aires) sont déjà apparus dans les chapitres précédents et on verra qu'il n'y en a pas d'autres. On verra aussi que les relations entre ces invariants sont engendrées par quelques relations fondamentales : les formules d'addition pour le cosinus et le sinus et la relation de somme des angles d'un triangle. Si l'on en croit la phrase de Bourbaki citée en introduction de ce livre, on tiendrait là la substantifique moelle de la géométrie euclidienne.*

À côté de ces représentations en dimension 2, il restera la représentation sur E^* lui-même, donc l'opération sur les droites. On précisera aussi ses invariants et les relations qui les lient, nettement plus compliquées. Bien entendu, comme l'objet géométrique qui nous intéresse est l'espace projectif $\mathbf{P}(E^*)$, il sera nécessaire de passer ensuite aux fractions rationnelles invariantes pour avoir des invariants ayant un sens géométrique. Là encore, on retrouvera des objets connus : cosinus et tangentes des angles et aire. Les relations entre ces invariants rationnels se déduisent en principe de celles qui lient les invariants polynomiaux, mais, comme on l'a déjà vu avec les quadrilatères, elles sont difficiles à expliciter.

On retrouvera dans ce chapitre les outils utilisés dans les parties II et IV et notamment les identités de Capelli-Cayley.

Dans ce chapitre, nous reprenons les notions et notations usuelles : l'espace E^* , muni de q^* , le noyau L de q^* , le plan affine X , les formes q_n^* sur E^*/L et q sur E_∞ . Nous supposons que le corps k est **de caractéristique** 0, voir [Ric89] sinon. Nous supposons qu'on a une base e_1, e_2, e_3 de E et la base duale e_1^*, e_2^*, e_3^* , choisies de telle sorte que la forme linéaire $e_3^* = l$ soit une base de $L = \text{Ker } q^*$. Les crochets sont alors bien déterminés, ainsi que les discriminants $\delta(q^*)$ et $\Delta(q)$. On étudie le groupe $G := GO^\circ(q^*)$, ainsi que ses sous-groupes et ses quotients¹. Si g est un élément de G , il admet une matrice (g_{ij}) sur la base (e_i^*) .

Pour le confort du lecteur, rappelons le dictionnaire vu au chapitre 3 : $PGO(q^*) \simeq GO(q^*) \simeq \text{Sim}(X)$, $O^\circ(q^*) \simeq \text{Is}(X)$ et $O^{\circ+}(q^*) \simeq \text{Is}^+(X)$. Il sera aussi nécessaire, parfois, de considérer le groupe dit des spineurs $\widehat{GO^\circ}(q^*)$, dont les invariants sont légèrement différents.

8.1 Les caractères

8.1.1 Introduction

Dans ce qui suit, nous allons considérer plusieurs opérations du groupe $G = GO^\circ(q^*)$ sur des anneaux de polynômes R à coefficients dans k et cher-

1. Note pour les experts. Le groupe étudié ici n'est pas du tout un groupe réductif (puisqu'il admet un sous-groupe distingué abélien isomorphe à $(k^2, +)$, à savoir les translations). La théorie de Mumford ne s'applique donc pas à ce groupe. En particulier, il y a des représentations qui ne sont pas complètement réductibles, par exemple celle sur E qui admet un sous-espace stable E_∞ sans supplémentaire stable. Par ailleurs, le fait que le groupe soit très dévissé a pour conséquence l'existence de caractères, donc d'invariants relatifs.

cher les polynômes invariants (relatifs) pour ces opérations. Comme le groupe G est un groupe algébrique (ce qui signifie, par exemple, qu’il se représente comme un groupe de matrices), la nécessité de préciser les caractères rationnels de ce groupe provient de la remarque suivante, déjà vue Partie II :

8.1.1 Proposition. *Si un polynôme P est un invariant relatif à un caractère du groupe G , ce caractère est rationnel (c’est-à-dire une fonction rationnelle des coefficients g_{ij} de la matrice de g).*

Démonstration. Le résultat s’obtient en identifiant deux monômes dans l’égalité $g.P = \chi(g)P$.

8.1.2 Les caractères rationnels du groupe $GO^\circ(q^*)$

On détermine donc les caractères **rationnels** du groupe $GO^\circ(q^*)$, ou encore de $\text{Sim}(X)$ qui lui est isomorphe, c’est-à-dire les homomorphismes de groupes $\chi : GO^\circ(q^*) \rightarrow k^*$ qui sont tels que $\chi(u)$ s’exprime comme fraction rationnelle en les coefficients de la matrice de u dans une base quelconque. On a répertorié en 3.1.13 les caractères “naturels” de $GO^\circ(q^*)$. Comme on a $\lambda(u) = 1$, par définition de ce groupe, il reste trois caractères : le multiplicateur μ (et ses puissances positives ou négatives), le déterminant $\det u$ (et ses puissances) et le caractère “signe” $\epsilon(u)$ (voir 3.1.4) qui indique simplement si la similitude est directe ou non, et ces caractères sont liés par la relation $\det(u) = \epsilon(u)\mu(u)$, de sorte qu’on peut oublier le déterminant. Le théorème suivant montre qu’il n’y en a essentiellement pas d’autres :

8.1.2 Théorème. *Les seuls caractères rationnels du groupe $GO^\circ(q^*)$ sont de la forme $u \mapsto \mu(u)^n$ ou $u \mapsto \epsilon(u)\mu(u)^n$ avec $n \in \mathbf{Z}$.*

Démonstration. La preuve se fait par étapes en utilisant le dévissage du groupe. On commence par examiner le groupe des translations $T(X) \simeq k^2$:

8.1.3 Lemme. *Le seul homomorphisme rationnel χ du groupe $(k^2, +)$ dans (k^*, \times) est trivial : on a $\chi(u) = 1$ pour tout u .*

Démonstration. Si on a un tel homomorphisme, il se restreint à $(k, +)$ identifié aux éléments $(x, 0)$ (resp. $(0, y)$) et il suffit de montrer que ces caractères sont triviaux. On est donc ramené au cas de $f : k \rightarrow k^*$ avec $f(x + y) = f(x)f(y)$ et f rationnel. En particulier, on a $f(2x) = f(x)^2$. Posons $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où p et q sont des polynômes premiers entre eux. On a alors $p(2x)q(x)^2 = q(2x)p(x)^2$. Comme p et q sont premiers entre eux, $p(x)^2$ divise $p(2x)$, ce qui n’est possible que si ces polynômes sont de degré 0 (par

exemple, parce que la caractéristique du corps est nulle, mais le résultat serait valable sans cela). Le même argument appliqué à q montre que f est une constante, nécessairement égale à 1.

8.1.4 Remarque. Bien entendu, ici l'hypothèse de rationalité est essentielle. Sur \mathbf{R} on a des caractères exponentiels $(x, y) \mapsto e^x$ par exemple.

Comme le quotient de $GO^\circ(q^*) \simeq \text{Sim}(X)$ par $T(X)$ est le groupe $GO(q)$ (cf. 1.2.20), on va se ramener à étudier les caractères rationnels de $GO(q)$. On a rencontré en 1.2.10 et 1.2.12 deux caractères de ce groupe, le multiplicateur $\mu(u)$ et le signe $\epsilon(u)$, lié au déterminant par la formule $\det u = \epsilon(u)\mu(u)$. On va montrer qu'il n'y en a essentiellement pas d'autres. On commence par étudier le groupe des rotations :

8.1.5 Lemme. *Le seul caractère rationnel du groupe $O^+(q)$ est trivial.*

Démonstration. La preuve de ce résultat, sur un corps quelconque, n'est pas évidente. Pour une démonstration plus simple² dans le cas des nombres réels, voir exercice 8.5.1.

Soit $\gamma = \Delta(q)$ le discriminant de q et K le corps $k(\sqrt{-\gamma})$. On sait que le groupe $O^+(q)$ est isomorphe au groupe \mathbf{U}_K des éléments de K de la forme $a + bi$ avec $i^2 = -\gamma$ et $a^2 + \gamma b^2 = 1$, voir 1.2.1 et 1.2.3. On obtient un paramétrage de \mathbf{U}_K , analogue à celui du cercle par la tangente de l'arc moitié, en posant $t = \frac{1-a}{\gamma b}$ et on a alors :

$$a(t) = \frac{1 - \gamma t^2}{1 + \gamma t^2} \quad \text{et} \quad b(t) = \frac{2t}{1 + \gamma t^2}.$$

Posons $\xi(t) = a(t) + ib(t)$. Un calcul facile montre qu'on a $\xi(u)\xi(v) = \xi(w)$ avec $w = \frac{\gamma(u+v)}{1 - \gamma uv}$.

Soit $\chi : \mathbf{U}_K \rightarrow k^*$ un caractère rationnel. On a $\chi(\xi(t)) = \frac{f(t)}{g(t)}$ où f, g sont des polynômes que l'on peut supposer premiers entre eux et que l'on écrit :

$$f(t) = a_m t^m + \dots + a_0 \quad \text{et} \quad g(t) = b_n t^n + \dots + b_0$$

avec $a_i, b_j \in k$ et a_m, b_n non nuls. Nous supposons, par exemple, $m \leq n$. Si l'on écrit que χ est un caractère : $\chi(\xi(u)\xi(v)) = \chi(\xi(u))\chi(\xi(v)) = \chi(\xi(w))$, on obtient la relation :

$$F(u, v)g(u)g(v)(1 - \gamma uv)^{n-m} = G(u, v)f(u)f(v) \quad \text{avec}$$

2. Dans le cas général on manque cruellement de racines de l'unité.

$F(u, v) = a_m \gamma^m (u+v)^m + a_{m-1} \gamma^{m-1} (u+v)^{m-1} (1-\gamma uv) + \dots + a_0 (1-\gamma uv)^m$
et de même pour G .

On note alors qu'on a $m = n$. En effet, sinon $1 - \gamma uv$, qui est un polynôme irréductible, divise $f(u)$, $f(v)$ ou $G(u, v)$. Les deux premiers cas sont impossibles et dans le dernier, on voit que $1 - \gamma uv$ divise $(u+v)^n$, donc $u+v$ et c'est absurde. Il reste donc la relation $F(u, v)g(u)g(v) = G(u, v)f(u)f(v)$ et, comme f, g sont premiers entre eux, $f(u)f(v)$ divise $F(u, v)$, donc lui est égal, à un scalaire près, pour une raison de degré : $F(u, v) = \lambda f(u)f(v)$. On fait alors $u = -v$ dans cette relation, ce qui annihile presque tous les termes de F , et il reste $a_0(1 + \gamma u^2)^n = \lambda f(u)f(-u)$. Mais, comme le polynôme $1 + \gamma u^2$ est irréductible sur k (car $-\gamma$ n'est pas un carré), il en résulte que $f(u)$ est de la forme $\mu(1 + \gamma u^2)^p$. Le même raisonnement vaut pour g , ce qui montre que χ est une constante, qui ne peut être que 1 à cause de sa valeur en 1.

8.1.6 Corollaire. *Les seuls caractères rationnels du groupe $O(q)$ sont le caractère trivial et le déterminant.*

Démonstration. Si $\chi : O(q) \rightarrow k^*$ est un caractère, il est trivial sur $O^+(q)$, donc se factorise, *via* le déterminant, en un homomorphisme de $\{1, -1\}$ dans k^* , qui est soit trivial, soit le plongement.

Pour passer à $GO(q)$, on reprend les notations du paragraphe 1.2.1 et on considère en particulier le groupe des normes $N(K^*)$, c'est-à-dire le sous-groupe de k^* formé des éléments de la forme $x^2 + \gamma y^2$. Comme k est de caractéristique 0, il est infini, donc aussi $N(K^*)$. Rappelons, cf. 1.2.16, que la flèche $\mu : GO(q) \rightarrow k^*$ a pour noyau $O(q)$ et pour image $N(K^*)$. Or, on a le lemme suivant :

8.1.7 Lemme. *Les caractères rationnels $\chi : N(K^*) \rightarrow k^*$ sont de la forme $\chi(x) = x^n$ avec $n \in \mathbf{Z}$.*

Démonstration. On cherche $\chi(x)$ sous la forme $p(x)/q(x)$ avec des polynômes p, q premiers entre eux. Pour $x \in N(K^*)$, on a la relation $\chi(x^2) = \chi(x)^2$, c'est-à-dire $p(x^2)q(x)^2 = q(x^2)p(x)^2$. Comme le polynôme $p(x^2)q(x)^2 - q(x^2)p(x)^2$ est nul sur $N(K^*)$ qui est infini, il est nul. Comme $p(x)^2$ est premier avec $q(x)^2$, il divise $p(x^2)$ et, pour une raison de degré, on en déduit $p(x^2) = \lambda p(x)^2$. On pose $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ avec $a_n \neq 0$. L'examen des termes de degré $< n$ montre que les coefficients de p sont tous nuls, sauf a_n . On a le même résultat pour q , d'où $\chi(x) = \lambda x^n$, $n \in \mathbf{Z}$, $\lambda \in k^*$. On conclut avec $\chi(1) = 1$.

Mettant ensemble ces lemmes on obtient :

8.1.8 Corollaire. *Les caractères rationnels de $GO(q)$ sont de la forme $u \mapsto \mu(u)^n$ ou $u \mapsto \epsilon(u)\mu(u)^n$ avec $n \in \mathbf{Z}$.*

Démonstration. On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow O(q) \rightarrow GO(q) \xrightarrow{\mu} N(K^*) \rightarrow 0.$$

Si χ est un caractère rationnel de $GO(q)$, sa restriction à $O(q)$ est 1 ou dét. Si c'est 1, il se factorise *via* μ en un caractère de $N(K^*)$ et on a donc $\chi(u) = \mu(u)^n$. Si c'est dét, le caractère $\epsilon\chi$ est trivial sur $O(q)$ et on a $\chi(u) = \epsilon(u)\mu(u)^n$.

On peut maintenant terminer la preuve de 8.1.2. On considère un caractère χ de $\text{Sim}(X) = GO^\circ(q^*)$. On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow T(X) \rightarrow GO^\circ(q^*) \xrightarrow{\Theta} GO(q) \rightarrow 0$$

où Θ est l'application qui à u associe u^\natural (voir 3.2.3). Comme $T(X)$ n'a pas de caractère rationnel non trivial, χ est égal à 1 sur $T(X)$, donc se factorise *via* Θ en un caractère de $GO(q)$. En vertu du corollaire précédent, on a donc $\chi(u) = \mu(u^\natural)^n$ ou $\chi(u) = \epsilon(u^\natural)\mu(u^\natural)^n$ et on conclut par les formules $\epsilon(u^\natural) = \epsilon(u)$ et $\mu(u^\natural) = \mu^{-1}(u)$ (voir 3.2.3).

8.1.9 Remarque. Le théorème 8.1.2 permet de déterminer les caractères du groupe des spineurs $\widehat{GO^\circ(q^*)}$: outre les précédents il y a leurs produits par le caractère $\lambda(u) = \pm 1$.

8.2 Invariants et relations en dimension 2

8.2.1 La situation

Soit V un k -espace vectoriel³ de dimension 2 muni d'une forme quadratique anisotrope q et de sa forme polaire φ .

On se donne une fois pour toutes une base orthogonale e_1, e_2 de V . On écrit donc un vecteur x sous la forme $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et l'espace V est ainsi isomorphe à k^2 . Quitte à multiplier q par un scalaire, on peut supposer $q(e_1) = 1$ et la forme φ est alors donnée dans la base (e_1, e_2) par la formule :

$$(*) \quad \varphi(x, y) = x_1y_1 + \gamma x_2y_2$$

où $\gamma \in k^*$ est le discriminant $\Delta(q)$. Comme q est anisotrope, on a $-\gamma \notin k^{*2}$. On dispose aussi du crochet de deux vecteurs : $[x, y] = x_1y_2 - x_2y_1$.

On considère m vecteurs "génériques" de E , x_1, \dots, x_m . Cela signifie qu'on introduit l'anneau de polynômes R en les $2m$ indéterminées $x_{i,j}$, $i =$

3. Nous appliquerons les résultats de ce paragraphe dans les cas des vecteurs $V = E_\infty$ et des directions d'équations $V = E^*/L$.

$1, \dots, m$, $j = 1, 2$ et son corps des fractions F et qu'on étend les scalaires à F , de sorte que l'espace vectoriel considéré devient $E_F = F^2$. Les vecteurs $x_i \in F^2$ sont définis par $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2})$. Comme dans la partie II, nous noterons souvent les vecteurs sans indices : a, b, c, \dots , l'anneau de polynômes R devenant $R = k[a_1, a_2; b_1, b_2; \dots; m_1, m_2]$. Si x, y sont deux de ces vecteurs, on peut calculer $q(x)$ et $\varphi(x, y)$ par la formule (*). On note que ce sont encore des éléments de R .

Les groupes $O(q)$ et $O^+(q)$ opèrent sur l'anneau R de la manière décrite au paragraphe ?? de la partie II (les éléments opèrent *via* leurs matrices dans la base e_1, e_2). Il est clair que les ensembles de polynômes de R invariants sous ces actions sont des sous-anneaux de R .

8.2.2 Les invariants

8.2.1 Théorème. *Avec les notations ci-dessus, le sous-anneau \mathcal{S}^+ (resp. \mathcal{S}) des polynômes de R invariants sous l'action de $O^+(q)$ (resp. $O(q)$) est engendré par les crochets $[x_i, x_j]$ avec $1 \leq i < j \leq m$ et par les polynômes $\varphi(x_i, x_j)$ avec $1 \leq i \leq j \leq m$ (resp. par les $\varphi(x_i, x_j)$).*

Démonstration. La démonstration de ce théorème peut se faire de manière tout à fait analogue à ce qui a été fait dans les Parties II (voir II §6.2) et IV (voir IV §9.1.2), en utilisant les identités de Capelli-Cayley.

Nous proposons ici une preuve directe de ce résultat en utilisant les "nombres complexes".

On commence par étendre les scalaires de k au corps des "complexes" associé $K = k(i)$ avec $i = \sqrt{-\gamma}$ et on considère l'anneau de polynômes \widehat{R} dont les variables sont les $z_k = x_{k1} + ix_{k2}$ et $\bar{z}_k = x_{k1} - ix_{k2}$. Ces variables sont algébriquement indépendantes et redonnent les variables x_{ki} de manière évidente. Un polynôme $P \in R$ a une expression complexe :

$$(*) \quad P((z_k, \bar{z}_k)_k) = \sum_{i_1, \dots, i_m; j_1, \dots, j_m} a_{i_1, \dots, i_m; j_1, \dots, j_m} z_1^{i_1} \bar{z}_1^{j_1} \dots z_m^{i_m} \bar{z}_m^{j_m}.$$

Le groupe $\mathbf{U}_K \simeq O^+(q)$ des complexes de norme 1 agit sur z_k et \bar{z}_k par multiplication : si λ est dans \mathbf{U}_K , $P((z_k, \bar{z}_k))$ devient $P((\lambda z_k, \bar{\lambda} \bar{z}_k))$. En particulier, le monôme d'indices i_1, \dots, j_m de (*) est multiplié par $\lambda^i \bar{\lambda}^j$ avec $i := i_1 + \dots + i_m$ et $j := j_1 + \dots + j_m$. Pour avoir l'opération du groupe $O(q)$, il suffit de rajouter la conjugaison complexe, vue comme symétrie par rapport à l'axe des x .

Les polynômes invariants élémentaires s'écrivent $q(x_k) = z_k \bar{z}_k$, $\varphi(x_k, x_l) = \frac{1}{2}(z_k \bar{z}_l + z_l \bar{z}_k)$ et $[x_k, x_l] = \frac{-1}{2i}(z_k \bar{z}_l - z_l \bar{z}_k)$. Le lemme à prouver est alors le suivant :

8.2.2 Lemme. Soit $P((z_k, \bar{z}_k)) \in \widehat{R}$ un polynôme invariant sous $O^+(q)$ (resp. $O(q)$). Alors, P est un polynôme (à coefficients complexes) en les $z_k \bar{z}_k$, $z_k \bar{z}_l + z_l \bar{z}_k$ et $z_k \bar{z}_l - z_l \bar{z}_k$ (resp. $z_k \bar{z}_k$ et $z_k \bar{z}_l + z_l \bar{z}_k$).

Démonstration. On reprend l'expression de (*) et on commence par le cas de $O^+(q)$. Comme les variables z, \bar{z} sont indépendantes, le polynôme est invariant sous $O^+(q)$ si et seulement si on a, pour tout multi-indice i, j , $a_{i,j} = a_{i,j} \lambda^i \bar{\lambda}^j$, c'est-à-dire, soit $a_{ij} = 0$, soit $i = j$. Autrement dit, les seuls termes non nuls sont ceux qui ont $i = j$. Dans un tel monôme, on enlève d'abord tous les termes $z_k \bar{z}_k$. Il reste des termes en z_k et des termes en \bar{z}_l , pour des indices différents, mais en nombre égal. On conclut grâce à l'identité $z_k \bar{z}_l = \frac{1}{2}((z_k \bar{z}_l + z_l \bar{z}_k) + (z_k \bar{z}_l - z_l \bar{z}_k))$.

Passons au cas de $O(q)$. Comme le polynôme est invariant sous $O^+(q)$, il s'écrit comme polynôme en les invariants élémentaires. Mais, comme il est invariant par conjugaison, et que $z_k \bar{z}_l - z_l \bar{z}_k$ est transformé en son opposé par conjugaison, on voit que les termes en $z_k \bar{z}_l - z_l \bar{z}_k$ sont nécessairement à une puissance paire. On conclut grâce à l'identité $(z\bar{w} - \bar{z}w)^2 = (z\bar{w} + \bar{z}w)^2 - 4z\bar{z}w\bar{w}$.

8.2.3 Commentaire. Avec les traductions usuelles, on voit que les invariants de la géométrie euclidienne sont les longueurs, les angles et les aires, ce qui n'étonnera personne. Par rapport à la géométrie non euclidienne, la différence principale est le remplacement du crochet $[x, y, z]$ de trois vecteurs par un crochet de deux vecteurs : à cause du choix canonique de la droite à l'infini comme noyau de q^* , la géométrie euclidienne est vraiment une géométrie de dimension 2.

8.2.3 Conséquences : les invariants relatifs sous $GO(q)$

Rappelons (voir 8.1.8) que les seuls caractères rationnels du groupe $GO(q)$ sont de la forme $\mu(u)^n$ ou $\mu(u)^n \epsilon(u)$ où μ est le multiplicateur et ϵ le signe, le caractère déterminant étant donné par $\det u = \epsilon(u)\mu(u)$. Les résultats précédents admettent un corollaire qui se se démontre essentiellement comme les résultats analogues de la Partie II (??, ??) :

8.2.4 Corollaire. 1) Les polynômes $q(a)$, $\varphi(a, b)$ (resp. $[a, b]$) sont des invariants relatifs du groupe $GO(q)$ relativement au caractère multiplicateur $\mu(u)$ (resp. relativement à $\det u = \epsilon(u)\mu(u)$).

2) Réciproquement, tout polynôme invariant relatif sous $GO(q)$ est soit un polynôme homogène en les produits scalaires, soit une combinaison linéaire de tels polynômes multipliés chacun par un crochet.

3) Les fractions rationnelles invariantes sous $GO(q)$ sont de la forme P/Q où P et Q sont des polynômes homogènes du type précédent, de même degré, et de même type (au sens de la présence, ou non, de crochets).

Démonstration. Le point 1) résulte de la définition des similitudes pour q et φ et de 1.3.2 pour le crochet.

Pour le point 2), on montre que tout polynôme invariant relatif est homogène exactement comme dans la Partie II ?? en utilisant les homothéties. On note ensuite que si P est un invariant sous $GO(q)$ relativement à un caractère χ , c'est un invariant absolu sous $O^+(q)$ (car ce groupe n'a pas de caractère non trivial). C'est donc un polynôme en les produits scalaires et les crochets. De plus, grâce à l'identité $\Delta(q)[a, b][x, y] = \varphi(a, x)\varphi(b, y) - \varphi(a, y)\varphi(b, x)$ (voir 1.3.5), on se ramène au cas où les crochets n'interviennent qu'au premier degré dans P . On a donc $P = Q + \sum_{i,j} [a_i, a_j] R_{i,j}$ où Q et les $R_{i,j}$ sont des polynômes en les produits scalaires. On écrit que P est invariant par une réflexion $u : u.P = Q - \sum_{i,j} [a_i, a_j] R_{i,j} = \chi(u)P$, avec $\chi(u) = \pm 1$ selon que χ contient ou non ϵ en facteur. Dans les deux cas, on voit que l'un des termes Q ou $\sum_{i,j} [a_i, a_j] R_{i,j}$ est nul et on a le résultat.

Le point 3) résulte du point 2) comme dans Partie II ??.

8.2.4 Applications

Application 1 : les directions d'équations

On reprend les notations du début du chapitre. Le groupe $G = GO^\circ(q^*)$ opère sur E^* en fixant la forme linéaire l , donc aussi sur le quotient E^*/L , espace des directions d'équations, qui est de dimension 2 et muni de la forme anisotrope q_n^* induite par q^* et de la base \bar{e}_1^*, \bar{e}_2^* , que l'on peut supposer orthogonale. Le crochet sur cet espace a été défini en 2.2.18. On note que le sous-groupe distingué des translations opère trivialement sur E^*/L en vertu de 3.2.4, de sorte que c'est le groupe $GO(q)$ qui opère. On peut donc appliquer les résultats du paragraphe précédent. Le théorème qui suit sera utile pour étudier les invariants des droites, voir la preuve de 8.3.1.

On considère n formes linéaires génériques A, B, C, \dots et leurs images $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$ dans E^*/L . Comme on est passé au quotient par $l = e_3^*$, ces formes n'ont plus que deux coefficients indéterminés A_1, A_2, B_1, B_2 , etc. et on note \bar{R} l'anneau de polynômes en ces indéterminées. Pour les crochets on a la formule $[\bar{A}, \bar{B}] = [A, B, l] = A_1 B_2 - A_2 B_1$. Le théorème 8.2.1 devient :

8.2.5 Théorème. *Le sous-anneau \bar{S} des invariants de \bar{R} sous $O^+(q_n^*)$ (resp. $O(q_n^*)$) est engendré par les polynômes du type $q_n^*(\bar{A})$, $\varphi_n^*(\bar{A}, \bar{B})$ et $[\bar{A}, \bar{B}]$ (resp. $q_n^*(\bar{A})$, $\varphi_n^*(\bar{A}, \bar{B})$).*

Le lecteur énoncera le corollaire analogue à 8.2.4 dans le cas des directions d'équations.

Application 2 : les vecteurs

Les résultats 8.2.1 et 8.2.10 s'appliquent aussi au cas des vecteurs c'est-à-dire à l'opération de $GO(q)$ sur E_∞ , duale de la précédente (rappelons qu'on a un isomorphisme $\bar{\rho} : E^*/L \rightarrow (E_\infty)^*$ et que la forme q est définie à partir de q_n^* vue comme forme sur $(E_\infty)^*$). On peut donc appliquer ces résultats à m vecteurs génériques, sans modification.

8.2.5 Les relations

On s'intéresse maintenant aux relations entre les invariants. Nous avons rencontré de telles relations en 1.3.5 et elles ont été interprétées en 5.6.10 comme les formules d'addition pour les cosinus et les sinus. Nous allons montrer maintenant qu'il n'y en a essentiellement pas d'autres.

L'anneau R est encore l'anneau de polynômes en les coordonnées de m vecteurs génériques x_1, \dots, x_m et on a vu que l'anneau \mathcal{S}^+ (resp. \mathcal{S}) des invariants sous $O^+(q)$ (resp. $O(q)$) est engendré par les crochets $[x_i, x_j]$ avec $1 \leq i < j \leq m$ et les "produits scalaires" $\varphi(x_i, x_j)$ avec $1 \leq i \leq j \leq m$ (resp. par les produits scalaires). On pose $I = \{1, 2, \dots, m\}$. Il s'agit de décrire les relations qui lient les générateurs de \mathcal{S} et \mathcal{S}^+ .

Relations de \mathcal{S}

Pour étudier les relations de \mathcal{S} on introduit, comme dans la partie⁴ II, deux anneaux⁵ : l'anneau U des polynômes en les indéterminées Y_{ij} avec $i, j \in I$, à coefficients dans k , et l'anneau V des polynômes en les indéterminées Y_{ij} avec $1 \leq i \leq j \leq m$, toujours à coefficients dans k .

On a un homomorphisme $\theta : U \rightarrow V$ défini sur les indéterminées Y_{ij} par $\theta(Y_{ij}) = Y_{ij}$ si $i \leq j$ et par $\theta(Y_{ij}) = Y_{ji}$ si $i > j$. Cet homomorphisme est surjectif et son noyau est engendré par les polynômes $Y_{ij} - Y_{ji}$.

On a aussi un homomorphisme $\Psi : V \rightarrow \mathcal{S}$ qui à Y_{ij} associe $\varphi(x_i, x_j)$ et on pose $\Phi = \Psi \circ \theta$. Le second théorème fondamental de la théorie des invariants dans le cas de $O(q)$ précise les noyaux de Φ et Ψ :

4. À laquelle le lecteur est renvoyé pour toutes précisions.

5. Ici, on pourrait n'introduire que V , mais on serait obligé de faire attention à l'ordre des indices dans les variables Y_{ij} .

8.2.6 Théorème. *L'idéal noyau de Φ est l'idéal J engendré par les polynômes $Y_{ij} - Y_{ji}$ et par les déterminants de Gram :*

$$\begin{vmatrix} Y_{i\alpha} & Y_{i\beta} & Y_{i\gamma} \\ Y_{j\alpha} & Y_{j\beta} & Y_{j\gamma} \\ Y_{k\alpha} & Y_{k\beta} & Y_{k\gamma} \end{vmatrix}$$

pour $i, j, k; \alpha, \beta, \gamma \in I$, qui correspondent aux relations de Gram :

$$\begin{vmatrix} \varphi(a, x) & \varphi(a, y) & \varphi(a, z) \\ \varphi(b, x) & \varphi(b, y) & \varphi(b, z) \\ \varphi(c, x) & \varphi(c, y) & \varphi(c, z) \end{vmatrix} = 0.$$

Le noyau de Ψ est égal à $\theta(J)$.

8.2.7 Remarque. Nous avons déjà rencontré cette relation (voir 5.5.2), dont l'interprétation géométrique (dans le cas $x = a, y = b, z = c$ et $a + b + c = 0$) est le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à π (voir 5.5.16).

Démonstration. Le théorème précédent est connu depuis fort longtemps et sa preuve est analogue à celles données dans les Parties II et IV, de sorte que nous nous contenterons d'en donner la ligne générale. Pour plus de précisions, le lecteur est renvoyé aux parties II et IV. Il peut aussi consulter [Wey39] ou [Ric89]. Pour un cas particulier, voir l'exercice 8.5.2.

Pour simplifier les notations, on suppose $k = \mathbf{R}$ et $q(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Rappels sur les polarisations et la congruence de Capelli

On renvoie le lecteur à Partie II ch. 6 et à Partie IV ch. 9 pour tout ce qui concerne les polarisations. Si a et b sont des vecteurs, rappelons qu'on a défini deux opérations de polarisations, notées toutes deux D_{ab} , qui consistent essentiellement à remplacer les indices b par a dans les indéterminées (ce qui fait diminuer le degré en a des polynômes). Ces opérations transforment produits scalaires en produits scalaires et crochets en crochets, et on en déduit la formule $D_{ab}(\Phi(F)) = \Phi(D_{ab}(F))$, formule qui montre que $\text{Ker } \Phi$ est stable par polarisation. On vérifie aussi que l'idéal J est stable par polarisation.

Le lecteur qui ne souhaite pas se replonger dans les détails concernant les polarisations retiendra simplement les trois éléments suivants :

- R_1) D_{ab} diminue le degré en b des polynômes.
- R_2) Les idéaux $\text{Ker } \Phi$ et J sont stables par D_{ab} .
- R_3) Enfin et surtout, on a la congruence de Capelli :

8.2.8 Proposition. Soient a, b, c trois vecteurs soit $F \in U$. L'élément suivant est dans l'idéal J :

$$\Delta(F) = \begin{vmatrix} D_{cc} + 2\text{Id} & D_{cb} & D_{ca} \\ D_{bc} & D_{bb} + \text{Id} & D_{ba} \\ D_{ac} & D_{ab} & D_{aa} \end{vmatrix} (F).$$

Démonstration. La preuve est analogue à celles vues dans la Partie II (voir ?? et ??), en plus simple, notamment par ce qu'elle est en rang 3 au lieu de 4. On utilise essentiellement l'identité de Capelli pour le dédoublement. Le ressort de la preuve est le fait que les déterminants de Gram sont dans J .

Le cas de deux vecteurs

Dans ce cas, on a le lemme suivant :

8.2.9 Lemme. Soient $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ deux vecteurs indéterminés. Si un polynôme $P(X, Y, Z)$ vérifie $\Psi(P) = P(q(a), \varphi(a, b), q(b)) = 0$, il est identiquement nul.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un polynôme non nul $P(X, Y, Z)$ tel que $\Psi(P) = 0$. Comme les polynômes $q(a)$, $\varphi(a, b)$, $q(b)$ sont homogènes de degré 2 en les a_i, b_i on peut supposer P homogène de degré d en X, Y, Z . On a donc, identiquement :

$$\Psi(P) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=d} \lambda_{\alpha\beta\gamma} (a_1^2 + a_2^2)^\alpha (a_1 b_1 + a_2 b_2)^\beta (b_1^2 + b_2^2)^\gamma = 0.$$

Parmi les monômes de P on choisit $M = \lambda_{\alpha\beta\gamma} X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$ non nul, tel que $2\alpha + \beta$ soit maximum et tel que α soit maximal pour cette condition. Le polynôme $\Psi(M)$ contient le monôme $m = \lambda_{\alpha\beta\gamma} a_1^{2\alpha+\beta} b_1^\beta b_2^{2\gamma}$. Si ce monôme est unique dans $\Psi(P)$, le coefficient $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ est nul et c'est une contradiction. Il apparaît donc dans $\Psi(M')$ avec un $M' \neq M$ de degrés α', β', γ' . Dans $\Psi(M')$, le degré en a_1 est $\leq 2\alpha' + \beta' \leq 2\alpha + \beta$ et pour trouver un monôme m' de mêmes degrés que m on doit donc avoir $2\alpha + \beta = 2\alpha' + \beta'$ et prendre le terme a_1^2 dans $a_1^2 + a_2^2$ et le terme $a_1 b_1$ dans $a_1 b_1 + a_2 b_2$. Comme les monômes M, M' sont distincts, on a nécessairement $\alpha' < \alpha$ ($\alpha = \alpha'$ impose $\beta = \beta'$ avec $2\alpha + \beta = 2\alpha' + \beta'$ et $\gamma = \gamma'$ avec $d = \alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'$). On en déduit $\beta' > \beta$. Mais alors, M' , qui contient le terme $b_1^{\beta'}$, est de degré en b_1 plus grand que M et c'est absurde.

Fin de la démonstration de 8.2.6

Soit $F \in U$ un élément de $\text{Ker } \Phi$. Il s'agit de montrer qu'il est dans J . On raisonne par l'absurde en supposant qu'il y a un F qui ne vérifie pas cette assertion. On ordonne les vecteurs a, b, c , etc. et on choisit F minimum dans l'ordre lexicographique. Si F ne fait intervenir que deux vecteurs a, b on conclut par le lemme⁶ 8.2.9. Si F fait intervenir au moins trois vecteurs a, b, c on applique la congruence de Capelli (voir 8.2.8). On a $\Delta(F) \in J$. Ce polynôme est une somme de termes, parmi lesquels le terme diagonal

$$(D_{cc} + 2\text{Id}) \circ (D_{bb} + \text{Id}) \circ D_{aa}(F),$$

qui est de la forme λF où λ est un scalaire non nul (car F fait intervenir les 3 variables a, b, c). Tous les autres termes sont dans J . En effet, considérons (par exemple) le terme $t = D_{ac} \circ D_{cb} \circ D_{ba}(F)$. Comme F est dans $\text{Ker } \Phi$, il est de même de $D_{ba}(F)$ en vertu de la stabilité (rappel R_2). Mais, $D_{ba}(F)$ est de degré plus petit que F en a (rappel R_1). Vu l'hypothèse de minimalité, il est donc dans J , donc aussi t en vertu de la stabilité de J par les polarisations. On a donc $\Delta(F) = \lambda F + G$ avec G et $\Delta(F)$ dans J , donc aussi F , ce qui est absurde.

Relations de \mathcal{S}^+

Pour étudier les relations de \mathcal{S}^+ on introduit encore deux anneaux : l'anneau U des polynômes en les indéterminées X_{ij} avec $i, j \in I$ et Y_{ij} avec $i, j \in I$, à coefficients dans k , et l'anneau V des polynômes en les indéterminées X_{ij} avec $1 \leq i < j \leq m$ et Y_{ij} avec $1 \leq i \leq j \leq m$, toujours à coefficients dans k .

On a un homomorphisme $\theta : U \rightarrow V$ défini (pour sa partie non évidente) sur les indéterminées X_{ij} par $\theta(X_{ij}) = 0$ si $i = j$, et $\theta(X_{ji}) = -X_{ij}$ si $i < j$ et sur les Y_{ij} par $\theta(Y_{ji}) = Y_{ij}$ si $i < j$. Cet homomorphisme est surjectif et son noyau est engendré par les polynômes X_{ii} , les polynômes $X_{ij} + X_{ji}$ et les polynômes $Y_{ij} - Y_{ji}$.

On a un homomorphisme $\Psi : V \rightarrow \mathcal{S}^+$ qui à X_{ij} et Y_{ij} associe respectivement $[x_i, x_j]$ et $\varphi(x_i, x_j)$ et on pose $\Phi = \Psi \circ \theta$.

Le second théorème fondamental détermine le noyau de Φ :

8.2.10 Théorème. *L'idéal noyau de Φ est l'idéal J engendré par $\text{Ker } \theta$ et par deux types d'éléments :*

6. Et le fait que le noyau de θ est engendré par les $Y_{ij} - Y_{ji}$.

1) Les éléments $\Delta(q)X_{ij}X_{kl} - Y_{ik}Y_{jl} + Y_{il}Y_{jk}$ qui correspondent aux relations du type

$$(1) \quad \Delta(q)[a, b][x, y] = \begin{vmatrix} \varphi(a, x) & \varphi(a, y) \\ \varphi(b, x) & \varphi(b, y) \end{vmatrix},$$

2) Les éléments $X_{jk}Y_{il} + X_{ki}Y_{jl} + X_{ij}Y_{kl}$ qui correspondent aux relations

$$(2) \quad [b, c]\varphi(a, x) + [c, a]\varphi(b, x) + [a, b]\varphi(c, x) = 0.$$

8.2.11 Remarque. Bien entendu, les relations précédentes ne sont pas indépendantes, elles-mêmes sont liées par des relations (on parle de syzygies), voir 8.2.21 ci-dessous pour un exemple.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle de 8.2.6 et nous mettons surtout l'accent sur les différences.

Quelques éléments de J

On sait qu'il y a aussi, entre les crochets, une relation issue de la relation de dimension (voir Partie II §3.3). Cette relation se traduit ici par la formule : $[b, c][a, x] + [c, a][b, x] + [a, b][c, x] = 0$. On vérifie qu'elle est dans l'idéal J :

8.2.12 Lemme. *L'élément $X_{jk}X_{i\alpha} + X_{ki}X_{j\alpha} + X_{ij}X_{k\alpha}$ est dans J .*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la première relation du théorème.

La proposition suivante est essentielle pour obtenir la congruence de Capelli. Elle explique aussi la disparition des déterminants de Gram entre le théorème précédent et celui-ci :

8.2.13 Proposition. *Les polynômes suivants sont dans J :*

$$\begin{vmatrix} Y_{i\alpha} & Y_{i\beta} & Y_{i\gamma} \\ Y_{j\alpha} & Y_{j\beta} & Y_{j\gamma} \\ Y_{k\alpha} & Y_{k\beta} & Y_{k\gamma} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_{i\alpha} & Y_{i\beta} & Y_{i\gamma} \\ X_{j\alpha} & Y_{j\beta} & Y_{j\gamma} \\ X_{k\alpha} & Y_{k\beta} & Y_{k\gamma} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_{i\alpha} & X_{i\beta} & Y_{i\gamma} \\ X_{j\alpha} & X_{j\beta} & Y_{j\gamma} \\ X_{k\alpha} & X_{k\beta} & Y_{k\gamma} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_{i\alpha} & X_{i\beta} & X_{i\gamma} \\ X_{j\alpha} & X_{j\beta} & X_{j\gamma} \\ X_{k\alpha} & X_{k\beta} & X_{k\gamma} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Commençons par le déterminant de Gram G en les Y_{ij} . On le développe selon sa première colonne. Modulo J on peut remplacer les mineurs 2×2 par des produits de crochets grâce à la relation (1). On obtient $G = \Delta(q)(Y_{i\alpha}X_{jk}X_{\beta\gamma} + Y_{j\alpha}X_{ki}X_{\beta\gamma} + Y_{k\alpha}X_{ij}X_{\beta\gamma}) = \Delta(q)X_{\beta\gamma}(Y_{i\alpha}X_{jk} + Y_{j\alpha}X_{ki} + Y_{k\alpha}X_{ij})$ qui est dans J à cause de la relation (2).

Pour le second déterminant, on développe encore par rapport à la première colonne en remplaçant les mineurs 2×2 en Y par des crochets grâce à la

relation (1). On obtient $\Delta(q)X_{\beta\gamma}(X_{i\alpha}X_{jk} + X_{j\alpha}X_{ki} + X_{k\alpha}X_{ij})$ qui est dans J par le lemme 8.2.12.

Les deux derniers déterminants se ramènent aux premiers grâce au lemme suivant :

8.2.14 Lemme. *L'élément suivant est dans J :*

$$\Delta(q) \begin{vmatrix} X_{k\alpha} & X_{l\alpha} \\ X_{k\beta} & X_{l\beta} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Y_{k\alpha} & Y_{l\alpha} \\ Y_{k\beta} & Y_{l\beta} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. C'est immédiat en utilisant la relation (1).

Comme corollaire de la proposition précédente, on obtient la congruence de Capelli :

8.2.15 Corollaire. *Soient a, b, c trois vecteurs soit $F \in U$. L'élément suivant est dans l'idéal J :*

$$\Delta(F) = \begin{vmatrix} D_{cc} + 2\text{Id} & D_{cb} & D_{ca} \\ D_{bc} & D_{bb} + \text{Id} & D_{ba} \\ D_{ac} & D_{ab} & D_{aa} \end{vmatrix} (F).$$

Démonstration. La preuve est identique à celle donnée dans la Partie II, voir ??.

Le cas de deux vecteurs

Le lemme suivant ⁷ montre que la seule relation est la relation de Lagrange (de type (1)) :

8.2.16 Lemme. *Soient $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ deux vecteurs indéterminés. Si un polynôme $P(X, Y, Z, T)$ est nul en $q(a)$, $\varphi(a, b)$, $q(b)$ et $[a, b]$ il est multiple de $T^2 + Y^2 - XZ$.*

Démonstration. Soit P un tel polynôme. On le divise par $T^2 + Y^2 - XZ$ relativement à T . On obtient :

$$P(X, Y, Z, T) = (T^2 + Y^2 - XZ)Q(X, Y, Z, T) + TU(X, Y, Z) + V(X, Y, Z).$$

On en déduit que $TU + V$ est nul en $q(a)$, $\varphi(a, b)$, $q(b)$, $[a, b]$. On applique alors l'automorphisme ⁸ g de R qui consiste à changer a_2 en $-a_2$ et b_2 en $-b_2$. Les polynômes $q(a)$, $\varphi(a, b)$ et $q(b)$ sont invariants par g , mais $[a, b]$ est changé en son opposé. Cela montre que $-TU + V$ aussi est nul en $q(a)$, $\varphi(a, b)$, $q(b)$ et $[a, b]$. Il en résulte que U et V sont nuls en $q(a)$, $\varphi(a, b)$, $q(b)$ et ils sont donc nuls en vertu de 8.2.9.

7. On a supposé $\Delta(q) = 1$ pour simplifier.

8. Qui correspond à une réflexion par rapport à "l'axe des x ".

Fin de la preuve de 8.2.10

Maintenant qu'on a traité le cas de deux vecteurs et qu'on dispose de la congruence de Capelli, on finit la démonstration exactement comme pour 8.2.6.

8.2.6 Description des espaces de vecteurs et de points

Les quotients sous $\text{Is}(X)$: invariants et relations

Comme on l'a vu au paragraphe 6.1 dont on reprend les notations, les deux théorèmes fondamentaux sur les invariants permettent de préciser les quotients $\mathcal{V}_m = \vec{X}^m/O(q)$, espace des vecteurs de X modulo isométries et $\mathcal{P}_n = X^n/\text{Is}(X)$, espace des points. On commence par le cas des vecteurs :

8.2.17 Théorème. *L'application $\Psi : \mathcal{V}_m \rightarrow k^M$ qui à x_1, \dots, x_m associe les $M = m(m+1)/2$ produits scalaires $\varphi(x_i, x_j)$ est injective et l'adhérence (pour la topologie de Zariski) de son image est le fermé défini par les déterminants de Gram (voir 8.2.6).*

Démonstration. Vu 6.1.1 et 6.1.5, cela résulte des théorèmes fondamentaux ci-dessus.

Pour les points on a le résultat suivant :

8.2.18 Théorème. *L'application $\Phi : \mathcal{P}_n \rightarrow k^N$ qui à a_1, \dots, a_n associe les $N = n(n-1)/2$ carrés scalaires $q(\overrightarrow{a_i a_j})$ est injective et l'adhérence pour Zariski de son image est le fermé défini par les déterminants de Cayley-Menger $\Gamma_3(a_i, a_j, a_k, a_l)$ avec $1 \leq i < j < k < l \leq n$, voir 5.5.6.*

Démonstration. Vu 6.2.3 cela résulte du théorème précédent et de l'équivalence de la nullité des déterminants de Gram et de Cayley-Menger, voir 5.5.6.

8.2.19 Remarques. 1) En fin de compte, on voit que les seules relations fondamentales (au sens où elles engendrent les autres) entre les invariants de la géométrie euclidienne sont celles de Gram ou de Cayley-Menger, dont on a vu que la traduction géométrique est le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à π . De là à penser que ce théorème est la quintessence de la géométrie euclidienne, il n'y a qu'un pas ...

2) Le lecteur énoncera les variantes de ces résultats avec les isométries positives. Cette fois, ce qui apparaît comme fondamental, ce sont les formules trigonométriques donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$...

3) On laisse aussi au lecteur le soin de préciser, dans le cas réel et pour des points en position générale, l'image de Φ . Il faut évidemment prendre en compte le fait que les carrés scalaires sont positifs, ainsi que les inégalités de Cauchy-Schwarz.

Syzygies

Nous reprenons la situation précédente, en essayant d'aller plus loin dans la description des quotients. On a une variété algébrique X sur laquelle opère un groupe algébrique G et l'on plonge le quotient X/G dans un espace affine k^N au moyen de N invariants polynomiaux Φ_1, \dots, Φ_N . Ces invariants sont liés par des relations, que nous avons déterminées. On dispose donc d'un anneau de polynômes $R = k[X_1, \dots, X_N]$ et, dans cet anneau, de l'idéal I engendré par les relations entre les invariants et l'adhérence de X/G dans k^N est la sous-variété Y définie par l'idéal I (voir 6.1.5 ou 8.2.17 ci-dessus). Comme on l'a dit à propos des quadrilatères (voir 7.2.4), la connaissance des générateurs de I ne donne que peu d'informations sur Y , pas même sa dimension. Pour en obtenir, il faut aller un peu plus loin. En effet, les relations entre les invariants ne sont en général pas indépendantes mais liées elles-mêmes par des relations (ou syzygies), elles-mêmes liées par des relations, etc. Par chance, on sait depuis Hilbert que, dans le cas des polynômes, ce processus est fini et qu'il donne naissance à ce qu'on appelle une résolution libre de l'idéal des relations, ou de la variété algébrique qu'il définit, voir [Per95] ou [Har77] par exemple. Le calcul de cette résolution n'est pas évident en général, mais il y a maintenant pour cela d'excellents logiciels (libres) de calcul formel comme Macaulay2 (voir <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>).

L'intérêt de disposer de la résolution d'un idéal est qu'elle fournit la plupart des renseignements de nature géométrique sur Y , au moins dans le cas où Y est définie par des polynômes homogènes de R , donnant ainsi naissance à une variété projective $\bar{Y} \subset \mathbf{P}^{N-1}$. Dans ce cas, la codimension de \bar{Y} dans \mathbf{P}^{N-1} est égale à celle de Y dans k^N , ces variétés ont même degré et on a le théorème suivant (voir [Har77] I th. 7.5 et III ex. 5.2 et [MDM90] ch. I et II) :

8.2.20 Théorème. *Soit $I \subset R = k[X_1, \dots, X_N]$ un idéal engendré par des polynômes homogènes et soient Y la variété affine définie par I . On suppose qu'on a une résolution libre graduée de R/I :*

$$0 \rightarrow L_r \rightarrow L_{r-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow R/I \rightarrow 0$$

où les L_i sont de la forme $L_i = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{l_i(n)}$ avec $l_i(n) \in \mathbf{N}$, voir [MDM90]

ch. II, L_0 étant égal à R . On pose $l(n) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} (-1)^i l_i(n)$. Alors, la codimension

de Y dans k^N est le plus grand entier d tel que $\Sigma(d) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} n^d l(n)$ soit non

nul et son degré est alors $(-1)^d \Sigma(d)/d!$.

Nous allons illustrer ce résultat par quelques exemples, modestes, le cas général paraissant nettement plus difficile⁹.

Exemple 1

Le premier exemple où il y ait des relations est celui de 3 vecteurs sous l'action de $O(q)$ (ou, ce qui revient au même, des quadrangles sous l'action de $\text{Is}(X)$). Dans ce cas, la variété Y est une hypersurface de k^6 définie par le déterminant de Gram, qui est de degré 3, et la résolution de I est simplement $0 \rightarrow R(-3) \rightarrow I \rightarrow 0$. La dimension de Y est 5 et son degré 3.

Exemple 2

Le premier exemple non trivial est encore celui de 3 vecteurs, mais sous l'action de $O^+(q)$ (ou des quadrangles sous l'action de $\text{Is}^+(X)$). Dans ce cas on a trois vecteurs a, b, c , avec 9 invariants $x = q(a)$, $y = q(b)$, $z = q(c)$, $u = \varphi(b, c)$, $v = \varphi(c, a)$, $w = \varphi(a, b)$, $\alpha = [b, c]$, $\beta = [c, a]$ et $\gamma = [a, b]$. On travaille donc dans l'anneau $R = k[x, y, z, u, v, w, \alpha, \beta, \gamma]$ et on considère l'idéal I des relations calculé en 8.2.10. Il est engendré par 9 éléments :

$$\begin{aligned} u^2 + \alpha^2 - yz, & \quad v^2 + \beta^2 - zx, & \quad w^2 + \gamma^2 - xy, \\ \beta\gamma + ux - vw, & \quad \gamma\alpha + vy - wu, & \quad \alpha\beta + wz - uv, \\ \alpha x + \beta w + \gamma v, & \quad \beta y + \gamma u + \alpha w, & \quad \gamma z + \alpha v + \beta u. \end{aligned}$$

Macaulay2 fournit alors le résultat suivant :

8.2.21 Proposition. *L'idéal I admet la résolution libre :*

$$0 \rightarrow R(-6) \rightarrow R(-4)^9 \rightarrow R(-3)^{16} \rightarrow R(-2)^9 \rightarrow I \rightarrow 0$$

où les entiers entre parenthèses indiquent le degré des applications polynomiales.

En particulier, il y a 16 relations de degré 1 entre les générateurs f_1, \dots, f_9 , par exemple $vf_1 + zf_5 + uf_6 - \alpha f_9 = 0$. Le théorème 8.2.20 montre que la variété algébrique des quadrangles est de dimension 5 (ce qui est attendu) et de degré 6.

9. Pour m vecteurs, il y a $m(m+1)/2$ invariants et $p(p+1)/2$ relations avec $p = \binom{m}{3}$.

Exemple 3

Nous passons au cas de 4 vecteurs a_1, \dots, a_4 (donc de 5 points) sous l'action de $O(q)$. Il y a 10 invariants qui sont les $x_{ij} = \varphi(a_i, a_j)$ avec $i \leq j$, on pose $R = k[X_{ij}]$ et les seules relations entre ces invariants sont données par les 10 déterminants de Gram. L'idéal engendré par ces relations admet la résolution suivante (voir Macaulay2) :

$$0 \rightarrow R(-5)^6 \rightarrow R(-4)^{15} \rightarrow R(-3)^{10} \rightarrow I \rightarrow 0.$$

On vérifie que la variété définie par I est de dimension 7 et de degré 10.

8.3 Les invariants de l'opération sur E^*

On s'intéresse maintenant à l'opération de $G = GO^\circ(q^*)$ et de ses sous-groupes¹⁰ $O^\circ(q^*)$ et $O^{\circ+}(q^*)$ sur l'espace E^* , donc à une représentation de dimension 3. Rappelons qu'on s'est donné la base e_1, e_2, e_3 de E et la base duale e_1^*, e_2^*, e_3^* , avec $l = e_3^*$ comme équation de D_∞ . On écrit donc $A \in E^*$ sous la forme $A = A_1 e_1^* + A_2 e_2^* + A_3 e_3^*$. On peut supposer que la forme q^* est donnée par la formule $q^*(A) = \alpha A_1^2 + \beta A_2^2$ et on a alors $\delta(q^*) = \alpha\beta$.

On considère m formes "génériques" A_1, \dots, A_m de E^* , que l'on écrit $A_1 = (A_{11}, A_{12}, A_{13})$, les A_{ij} étant des indéterminées. En fait, pour éviter la profusion d'indices, on notera plutôt A, B, C, \dots ces formes, avec $A = (A_1, A_2, A_3)$, etc., les A_i, B_i, C_i, \dots étant des indéterminées. On note R l'anneau de polynômes en les $3m$ indéterminées A_i, B_i, \dots . Le groupe G opère sur R au travers des matrices de ses éléments, comme expliqué dans la partie II, et on cherche les sous-anneaux des invariants de R sous G et ses sous-groupes. On notera que l'anneau de polynômes en les variables d'indices 1 et 2 n'est autre que l'anneau \bar{R} rencontré ci-dessus dans l'opération de G sur E^*/L .

8.3.1 Invariants sous $O^{\circ+}(q^*)$ et $O^\circ(q^*)$

Invariants polynomiaux sous le groupe des isométries positives

Une première liste des invariants relatifs des groupes considérés a été donnée en 3.1.13 et on a vu que tous sont des invariants absolus pour le groupe des isométries positives. Le résultat suivant montre que ce sont les seuls :

10. Comme il a été dit, il sera aussi utile d'étudier les invariants de $\widehat{GO^\circ(q^*)}$.

8.3.1 Théorème. *Le sous-anneau S des invariants de R sous l'action de $O^{\circ+}(q^*) \simeq \text{Is}^+(X)$ est engendré par les polynômes du type $q^*(A)$, $\varphi^*(A, B)$, $[A, B, l]$ et $[A, B, C]$.*

8.3.2 Remarque. Le cas des droites est plus proche de la géométrie non euclidienne que le cas des points : les invariants φ^* et les crochets $[A, B, C]$ sont tout à fait analogues. Il subsiste toutefois une différence : la présence (au niveau de $\text{Is}^+(X)$) des invariants $[A, B, l]$, liés au noyau de q^* qui n'ont pas d'équivalents non euclidiens.

Démonstration. Il est clair que tous les polynômes cités sont des invariants sous $O^{\circ+}(q^*)$. La réciproque nécessite quelques étapes.

Le cas de deux formes

On montre d'abord le théorème dans le cas où il y a au plus deux formes A, B . On a le lemme suivant :

8.3.3 Lemme. *Soit P un polynôme en au plus deux formes génériques A, B . On suppose que P est invariant sous $O^{\circ+}(q^*)$. Alors, P est de degré zéro en les variables correspondant à $l = e_3^*$, c'est-à-dire les variables A_3, B_3 .*

Démonstration. Rappelons, voir 3.2.4, que le groupe $O^{\circ+}(q^*)$ contient les translations, qui opèrent sur les formes par la formule :

$$(X_1, X_2, X_3) \mapsto (X_1, X_2, X_3 + uX_1 + vX_2).$$

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un polynôme P invariant par les translations dans lequel une des indéterminées d'indice 3 intervient avec un degré > 0 . On choisit un tel P de degré total minimal en les variables d'indice 3. On suppose, par exemple, que A_3 intervient dans P au degré $n > 0$. On a donc :

$$P = A_3^n P_n(A_1, A_2; B_1, B_2, B_3) + A_3^{n-1} P_{n-1}(A_1, A_2; B_1, B_2, B_3) + \dots$$

où les P_i sont de degré 0 en A_3 avec $P_n \neq 0$. On écrit que P est invariant par les translations. On obtient :

$$P(A_1, A_2, A_3 + uA_1 + vA_2; B_1, B_2, B_3 + uB_1 + vB_2) = P(A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3)$$

pour tous $u, v \in k$, et, comme k est infini, on peut supposer que cette relation est vraie avec u, v indéterminés.

En considérant les termes en A_3^{n-1} on obtient :

$$n(uA_1 + vA_2)P_n(A_1, A_2; B_1, B_2, B_3 + uB_1 + vB_2) + P_{n-1}(A_1, A_2; B_1, B_2, B_3 + uB_1 + vB_2)$$

$$= P_{n-1}(A_1, A_2; B_1, B_2, B_3).$$

Cette relation est une identité entre polynômes, que l'on peut spécialiser en faisant $u = -B_2$ et $v = B_1$, ce qui annule le terme $uB_1 + vB_2$. Les termes P_{n-1} se simplifient et il reste :

$$n(A_2B_1 - A_1B_2)P_n(A_1, A_2; B_1, B_2, B_3) = 0$$

et on en déduit que P_n est nul (car le corps est de caractéristique 0). C'est une contradiction.

On peut alors montrer le théorème dans le cas de deux formes. En effet, comme les polynômes invariants n'ont pas de termes d'indice 3, ce sont des polynômes en \overline{A} et \overline{B} et on est ramené au cas du paragraphe précédent, cf. 8.2.5. Les invariants sont donc des polynômes en $q^*(\overline{A})$, $\varphi^*(\overline{A}, \overline{B})$, $[\overline{A}, \overline{B}]$, donc en $q^*(A)$, $\varphi^*(A, B)$, $[A, B, l]$.

Le cas général

Pour le cas de $m \geq 3$ formes génériques, on utilise les polarisations et l'identité de Capelli-Cayley, comme on l'a déjà fait dans les parties II et IV. Rappelons cette identité (voir Partie II, ??) :

8.3.4 Proposition. *Soient A, B, C des formes à coefficients indéterminés. On a la formule :*

$$\begin{vmatrix} D_{CC} + 2\text{Id} & D_{CB} & D_{CA} \\ D_{BC} & D_{BB} + \text{Id} & D_{BA} \\ D_{AC} & D_{AB} & D_{AA} \end{vmatrix} (F) = [C, B, A] \Omega_{CBA}(F)$$

$$\text{où l'on a posé } \Omega_{CBA}(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial C_1} & \frac{\partial}{\partial B_1} & \frac{\partial}{\partial A_1} \\ \frac{\partial}{\partial C_2} & \frac{\partial}{\partial B_2} & \frac{\partial}{\partial A_2} \\ \frac{\partial}{\partial C_3} & \frac{\partial}{\partial B_3} & \frac{\partial}{\partial A_3} \end{vmatrix} (F).$$

On peut alors finir de prouver 8.3.1.

On appelle S_0 le sous-anneau de R engendré par les polynômes cités dans le théorème. Il s'agit de montrer que tout polynôme invariant sous $O^+(q^*)$ est dans S_0 . On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un polynôme invariant F qui n'est pas dans S_0 et on choisit F minimal pour l'ordre lexicographique des formes : $A < B < C < \dots$. Le polynôme F fait intervenir au moins trois variables en vertu du cas précédent. Soient

$A < B < C$ ces variables. On applique à F la formule de Capelli-Cayley avec ces variables. Comme les polarisations conservent les invariants le premier membre est invariant, donc aussi le deuxième, donc, comme $[A, B, C]$ est invariant, $\Omega_{CBA}(F)$ est invariant. Comme ce polynôme est de degré plus petit que F , il est dans S_0 , donc aussi le premier membre. On raisonne alors exactement¹¹ comme dans Partie II paragraphe ?? ou Partie IV ?? pour aboutir à une contradiction.

Invariants polynomiaux sous le groupe des isométries

8.3.5 Corollaire. 1) *Le sous-anneau S des invariants absolus de R sous l'action de $O^\circ(q^*)$ est engendré par les polynômes du type $q^*(A)$, $\varphi^*(A, B)$ et par les produits pairs de crochets du type $[A, B, l]$ ou $[A, B, C]$.*

2) *Les invariants relatifs sous l'action de $O^\circ(q^*)$ sont de la forme précédente ou de la forme $\sum_i C_i Q_i$ où les C_i sont des crochets et où les Q_i sont dans S .*

Démonstration. 1) Appelons S' le sous-anneau engendré par les polynômes en question. Comme les crochets sont des invariants du groupe $O^\circ(q^*)$ relativement au caractère ϵ (voir 3.1.13), il est clair que les éléments de S' sont bien invariants par $O^\circ(q^*)$. Tout polynôme invariant sous $O^\circ(q^*)$ l'est *a fortiori* sous $O^{\circ+}(q^*)$. Il s'écrit donc sous la forme $P + \sum_i C_i Q_i$ où C_i est un crochet et P, Q_i des polynômes de S' . En appliquant un élément $u \in O^{\circ-}(q^*)$, on a $P + \sum_i C_i Q_i = P - \sum_i C_i Q_i$, d'où $\sum_i C_i Q_i = 0$ et le résultat.

2) Le second point est clair car les invariants relatifs sous $O^\circ(q^*)$ sont les invariants absolus sous $O^{\circ+}(q^*)$.

8.3.6 Remarque. Les relations “de Lagrange” vues en 2.2.24 montrent que les produits de deux crochets de type $[A, B, l]$ se calculent avec les produits et carrés scalaires. En revanche, les produits de deux crochets de type $[A, B, C]$ ne se calculent pas avec les seuls produits scalaires (car ils contiennent des variables d'indice 3). On reconnaît ici l'importance de l'invariant aire dans la théorie (cf. aussi 3.3.3). C'est une différence essentielle avec le cas non euclidien où l'aire se calcule avec les angles. Attention, si le produit de deux invariants du type $[A, B, l]$ peut être oublié, puisqu'il s'écrit avec les produits scalaires, on ne peut toutefois pas totalement occulter ces crochets. Précisément, l'anneau S_0 engendré par les produits scalaires et les produits pairs de crochets de type $[A, B, C]$ est strictement plus petit que S car les termes mixtes $[A, B, l][X, Y, Z]$ ne sont pas dans S_0 . En effet, un tel produit contient des variables d'indice 3 au premier degré alors que les produits

11. On utilise aussi le comportement des invariants fondamentaux par polarisation : $D_{BA}q^*(A) = 2\varphi^*(A, B)$, $D_{BA}\varphi^*(A, B) = q^*(B)$ et $D_{YA}[A, B, C] = [Y, B, C]$.

scalaires n'en comportent pas et que les produits pairs de crochets de type $[A, B, C]$ en contiennent seulement à des degrés pairs. La signification du sous-anneau S_0 est donnée par le corollaire suivant.

8.3.7 Corollaire. 1) *Le sous-anneau de R des invariants absolus sous l'action de $\widehat{O^\circ(q^*)}$ est l'anneau S_0 engendré par les polynômes du type $q^*(A)$, $\varphi^*(A, B)$ et par les produits pairs de crochets du type $[A, B, C]$. Le corps des fractions K_0 de cet anneau est engendré par les produits et carrés scalaires et par les carrés des crochets $[A, B, C]^2$.*

2) *Les invariants relatifs sous $\widehat{O^\circ(q^*)}$ sont de l'une des formes suivantes : $Q \in S_0$, $\sum_i C_i Q_i$ où les C_i sont tous des crochets de type $[A, B, l]$ (resp. $[A, B, C]$, resp. $[A, B, l][X, Y, Z]$) et où les Q_i sont dans S_0*

Démonstration. 1) Un polynôme invariant $\widehat{O^\circ(q^*)}$ l'est aussi sous $O^\circ(q^*)$ et il s'écrit donc comme polynôme en les produits scalaires et les produits pairs de crochets. De plus, grâce aux identités de Lagrange, on peut supposer que chaque monôme contient au plus un crochet de type $[A, B, l]$, qui est alors flanqué d'un crochet $[X, Y, Z]$. Comme les produits "mixtes" $[A, B, l][X, Y, Z]$ sont des invariants relatifs au caractère λ (voir 3.1.13), ils sont transformés en leurs opposés par un élément vérifiant $\lambda = -1$ (par exemple $-\text{Id}$) et le même raisonnement qu'au corollaire précédent donne le résultat voulu.

Le dernier point résulte du lemme suivant :

8.3.8 Lemme. *Soient $A, B, C; X, Y, Z$ des formes quelconques. Le produit $[A, B, C][X, Y, Z]$ est dans le sous-corps engendré par les produits scalaires et les carrés des crochets construits à partir des six formes A, B, C, X, Y, Z .*

Démonstration. On commence par traiter le cas du produit des crochets $[A, B, C]$ et $[A, B, X]$. Pour cela on part de la relation "de dimension" 2.2.11 :

$$[A, B, C]X - [B, C, X]A + [C, X, A]B - [X, A, B]C = 0.$$

On applique $[\cdot, A, l]$ à cette relation ce qui donne :

$$[C, X, A][A, B, l] = [A, B, C][X, A, l] - [X, A, B][C, A, l].$$

On élève au carré et on obtient :

$$2[A, B, C][A, B, X][X, A, l][C, A, l] = \\ [X, A, l]^2[A, B, C]^2 + [C, A, l]^2[X, A, B]^2 - [A, B, l]^2[C, X, A]^2$$

et comme les produits de deux crochets de type $[A, B, l]$ s'expriment en fonction des produits scalaires, voir 2.2.24, on a le résultat voulu.

On écrit de même les produits $[A, B, X][A, X, Y]$ et $[A, X, Y][X, Y, Z]$ en fonction des produits scalaires et des carrés des crochets et on obtient la quantité $[A, B, C][X, Y, Z]$ en faisant le produit des trois termes $[A, B, C][A, B, X]$, $[A, B, X][A, X, Y]$ et $[A, X, Y][X, Y, Z]$ et en divisant par $[A, B, X]^2[A, X, Y]^2$. Le lecteur qui voudrait absolument une formule explicite la trouvera en 8.5.4.

2) Les caractères de $\widehat{O^\circ(q^*)}$ sont $1, \epsilon, \lambda$ et $\epsilon\lambda$. Un polynôme invariant relatif P sous ce groupe est donc invariant absolu sous $O^{\circ+}(q^*)$. Précisément, les crochets $[A, B, l]$, $[A, B, C]$ et $[A, B, l][A, B, C]$ sont respectivement invariants relativement à $\epsilon, \epsilon\lambda$ et λ . En utilisant les relations de Lagrange, on se ramène au cas où les crochets $[A, B, l]$ sont au degré 1 et on peut écrire P comme somme de quatre polynômes $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ où P_1 est un invariant absolu sous $\widehat{O^\circ(q^*)}$ et les autres respectivement combinaisons linéaires des trois types de crochets ci-dessus à coefficients dans les invariants absolus. Supposons, par exemple, que P soit un invariant relativement à ϵ . En écrivant successivement $u(P) = \epsilon(P)P$ avec $u = -\text{Id}$ puis avec $u = \text{diag}(1, -1, 1)$ et $u = \text{diag}(1, -1, -1)$, on trouve les relations $P_3 + P_4 = P_1 + P_3 = P_1 + P_4 = 0$ et on en déduit $P = P_2$. Les autres cas se traitent de la même manière.

8.3.9 Remarques. 1) L'anneau des invariants n'est pas engendré par les produits scalaires et les carrés des crochets de type $[A, B, C]$. Pour s'en convaincre on choisit une base orthogonale e_1^*, e_2^*, l et on prend $A = e_1^*$, $B = e_2^*$, $C = e_1^* + e_2^* + l$ et $D = \alpha e_1^* + \beta e_2^* + \gamma l$. On voit facilement que l'anneau engendré par les produits scalaires¹² et les carrés des crochets est $k[\alpha, \beta, \gamma^2, \alpha\gamma, \beta\gamma]$ et qu'il ne contient pas $\gamma = [A, B, C][A, B, D]$.

2) Le résultat précédent a un écho direct du côté de la transitivité. On a vu, en effet, en 3.3.3, que les produits scalaires et les carrés des crochets $[A, B, C]$ assuraient la transitivité du groupe $\widehat{O^\circ(q^*)}$ sur les n -uplets d'équations A_1, \dots, A_n , mais pas celle de $O^\circ(q^*)$. C'est maintenant naturel puisque les produits mixtes $[A, B, l][X, Y, Z]$, qui sont des invariants pour $O^\circ(q^*)$, ne sont que semi-invariants par $\widehat{O^\circ(q^*)}$ et qu'ils ne sont pas dans l'algèbre S_0 , ni même dans son corps des fractions. Un théorème de transitivité pour $O^\circ(q^*)$ doit donc obligatoirement prendre en compte ces invariants, voir 3.5.6. En revanche, le lemme 8.3.8 montre que les produits de deux crochets de type $[A, B, C]$ peuvent être oubliés pour la transitivité de $\widehat{O^\circ(q^*)}$ (comme on l'a fait en 3.3.3) car ils sont dans K_0 (au moins génériquement).

12. On suppose que q^* est donnée par $u^2 + v^2$.

Invariants rationnels sous les groupes d'isométries

Le résultat suivant se démontre comme Partie II, ?? :

8.3.10 Corollaire. *Les invariants rationnels (absolus) sous le groupe $O^{\circ+}(q^*)$ sont de la forme P/Q où P, Q sont des polynômes en les polynômes $q^*(A)$, $\varphi^*(A, B)$, $[A, B, l]$ et $[A, B, C]$.*

Les invariants rationnels (absolus) sous les groupes $O^{\circ}(q^)$ et $\widehat{O^{\circ}(q^*)}$ sont de la forme P/Q où P, Q sont des polynômes invariants du groupe considéré, relatifs au même caractère.*

8.3.2 Invariants relatifs du groupe des similitudes

La détermination des invariants des isométries permet de passer au groupe $G = GO^{\circ}(q^*) \simeq \text{Sim}(X)$ tout entier :

8.3.11 Corollaire.

- 1) *Les polynômes $q^*(A)$ et $\varphi^*(A, B)$ (resp. $[A, B, l]$ et $[A, B, C]$) sont des invariants relatifs de G pour le caractère μ (resp. pour le caractère $\det = \epsilon\mu$).*
- 2) *Un invariant polynomial de G relatif au caractère μ^n (resp. $\mu^n\epsilon$) avec $n \in \mathbf{N}$ est un polynôme en les polynômes du type $X = q^*(A)$, $Y = \varphi^*(A, B)$, $Z = [A, B, l]$ et $T = [A, B, C]$, homogène en les variables¹³ du type X, Y, Z, T et de degré total n , qui est tel que, dans chaque monôme, les crochets soient en nombre pair (resp. impair).*
- 3) *Les fractions rationnelles qui sont des invariants relatifs (resp. absolus) sous G sont de la forme P/Q où P, Q sont des polynômes homogènes du type précédent (resp. de même degré et de même type au sens de la parité des monômes en les crochets).*

Démonstration. Elle est analogue à celle de 8.2.4. Le point 1) est clair. Pour le point 2), si P est un invariant relatif sous G c'est un invariant absolu sous $O^{\circ+}(q^*)$, donc un polynôme en $q^*(A)$, $\varphi^*(A, B)$, $[A, B, l]$ et $[A, B, C]$ (qu'on désignera comme les invariants de base). On peut l'écrire comme somme de polynômes homogènes : $P = P_0 + P_1 + \dots + P_n$ où P_i est homogène de degré i en les invariants de base. On choisit une homothétie h_λ (au sens euclidien, i.e. de matrice $\text{diag}(\lambda, \lambda, 1)$), de rapport λ qui n'est pas une racine p -ième de l'unité¹⁴ avec $p = 1, \dots, 2n$ et on écrit que P est invariant relatif par h_λ . Relativement à h_λ , les invariants de base ont tous¹⁵ pour multiplicateur λ^2 ,

13. On notera le changement de nom des variables par rapport au paragraphe 8.2.5.

14. C'est possible car k est infini.

15. On notera une subtilité dans ce qui précède : comme les éléments de G fixent l , le crochet $[A, B, C]$ ne compte que par ses variables d'indice 1 et 2 dans les degrés.

de sorte qu'on a $h_\lambda.P = P_0 + \lambda^2 P_1 + \dots + \lambda^{2n} P_n = \chi(h_\lambda)(P_0 + \dots + P_n)$. Si pour $i \neq j$ les termes P_i et P_j sont non nuls, on a $\lambda^{2j-2i} = 1$ et c'est absurde. On a donc montré l'homogénéité des invariants.

Un monôme de degré n en les polynômes de base est invariant relativement au caractère $\mu^\alpha \text{dét}^\beta$ où α est le degré total en les termes q^* , φ^* et β le degré total en les crochets. En tenant compte de la relation $\text{dét}(u) = \epsilon(u)\mu(u)$, on voit que c'est un invariant relatif à μ^n si β est pair et à $\mu^n \epsilon$ si β est impair. On montre que les termes des deux types ne peuvent pas coexister en appliquant un élément $u \in O^{\circ-}(q^*)$ comme en 8.3.5.

Enfin le point 3) se démontre comme dans Partie II ?? : une fraction rationnelle invariante est de la forme P/Q où P, Q sont des invariants relatifs, qui doivent être de même caractère si l'invariant est absolu.

8.3.12 Remarque. Si l'on travaille avec le groupe des spineurs $\widehat{GO^\circ}(q^*)$, les crochets $[A, B, l]$ sont encore relatifs au caractère $\epsilon\mu$, mais les crochets $[A, B, C]$ sont relatifs au caractère $\epsilon\mu\lambda$. Les fractions rationnelles qui sont des invariants absolus sont de la forme P/Q où P, Q sont des polynômes homogènes en les produits scalaires et les crochets, de même degré total, mais aussi de même degré en les crochets de type $[A, B, l]$ et en les crochets de type $[A, B, C]$.

8.3.3 Invariants projectifs et géométrie

Nous disposons maintenant de tous les invariants du groupe $\text{Sim}(X)$, dans sa représentation linéaire sur E^ . Il reste à passer au projectif pour les identifier géométriquement. Nous allons voir qu'on retrouve tous les objets familiers.*

Invariants projectifs

Nous reprenons ici la notion, vue dans la partie II, de fonction rationnelle projective ou géométrique. On considère une fraction rationnelle $R(A, B, C, \dots)$ où A, B, C, \dots sont des éléments génériques de E^* , $A = (A_1, A_2, A_3)$, etc. avec des A_i indéterminés. Cette fraction est une fonction des points de $\mathbf{P}(E^*)$, donc des droites de $\mathbf{P}(E)$, et pas seulement des formes linéaires, si et seulement si elle s'écrit $R = F/G$ où F et G sont des polynômes en les A_i, B_j, \dots , homogènes en les variables correspondant à chaque forme A, B, C, \dots , avec le même degré au numérateur et au dénominateur (car elle ne change pas si on multiplie les formes A, B, C, \dots par des constantes). Les corollaires 8.3.10 et 8.3.11 vont permettre de déterminer celles de ces fonctions qui sont invariantes.

8.3.13 Remarque. Attention, il y a une difficulté. Les résultats précédents mettent en jeu l'homogénéité des polynômes par rapport aux variables de type $X = q^*(A)$, $Y = \varphi^*(A, B)$, $Z = [A, B, l]$ et $T = [A, B, C]$, tandis que la notion de fonction rationnelle géométrique fait intervenir l'homogénéité par rapport aux variables A_i, B_j, \dots . Or, ces deux notions ne sont pas identiques. Par exemple $q^*(A)q^*(B)q^*(C) + [A, B, C]^2$ est homogène en les A_i, B_j, C_k, \dots mais pas en les X, Y, \dots . Inversement, $q^*(A)q^*(B) + [A, B, C]^2$ est homogène en X, Y, \dots , mais pas en les A_i . En réalité, seuls les crochets du type $[A, B, C]$ sont problématiques (car ils sont de degré 3 en les variables A_i contrairement aux autres qui sont de degré 2). Ils vont donc nécessairement aller par deux.

Le cas des isométries résulte directement de 8.3.10 :

8.3.14 Proposition. *Les fonctions rationnelles géométriques en les formes A, B, C, \dots , qui sont des invariants absolus sous $O^{o+}(q^*)$ sont des fractions rationnelles P/Q où P et Q sont des polynômes en les invariants du type $X = q^*(A)$, $Y = \varphi^*(A, B)$, $Z = [A, B, l]$ et $T = [A, B, C]$, tels que P et Q sont homogènes de même degré en les variables A_1, A_2, A_3 et de même pour les variables correspondant aux formes B, C , etc.*

Dans le cas de $O^o(q^)$, il faut supposer en plus que les monômes de P et Q comportent tous un nombre pair (resp. impair) de crochets.*

Pour les similitudes, les choses sont un peu plus compliquées :

8.3.15 Proposition. *Les fonctions rationnelles géométriques en les formes A, B, C, \dots , qui sont des invariants relatifs sous $G = GO^o(q^*)$ sont des fractions P/Q où P et Q sont des polynômes en les invariants du type $X = q^*(A)$, $Y = \varphi^*(A, B)$, $Z = [A, B, l]$ et $T = [A, B, C]$ qui vérifient les deux conditions suivantes :*

- *Les polynômes P et Q sont homogènes de même degré en les variables A_1, A_2, A_3 et de même pour les variables correspondant aux formes B, C , etc.*

- *Les polynômes P et Q sont homogènes en les variables de type X, Y, Z, T .*

Cela implique que tous les monômes de P (resp. Q) sont de même degré par rapport aux variables de type T .

Une telle fraction est un invariant absolu, si, de plus, les degrés de tous les monômes de P et Q par rapport aux crochets de type $Z = [A, B, l]$ sont de même parité.

*On désigne l'ensemble de ces fractions rationnelles géométriques invariantes sous le nom d'**invariants projectifs** des droites $\overline{A}, \overline{B}$, etc.*

Démonstration. La première assertion est une conséquence immédiate de 8.3.11. Considérons un monôme en des variables du type X, Y, Z, T , avec des exposants $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ respectivement. Son degré par rapport à ces variables

est la somme des exposants et cette quantité est constante dans tous les monômes. Son degré total en les variables de type A_i en revanche est une somme d'entiers du type $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 3\delta$. Comme ce degré est, lui aussi, une constante, c'est que la somme des exposants de type δ est constante.

Description géométrique des invariants projectifs sous le groupe des isométries et des similitudes

Dans le cas d'une seule forme A , il n'y a qu'un invariant polynomial qui est $q^*(A)$ et aucun invariant rationnel¹⁶ géométrique.

Si on a deux formes A, B , on a les invariants polynomiaux $q^*(A)$, $q^*(B)$, $\varphi^*(A, B)$ et $[A, B, l]$. Les invariants projectifs sous le groupe des isométries ou des similitudes sont alors les suivants¹⁷ : deux invariants absolus $\frac{\varphi^*(A, B)^2}{q^*(A)q^*(B)}$,

$$\frac{[A, B, l]^2}{q^*(A)q^*(B)} \text{ et un invariant relatif à } \epsilon(u), T(A, B) := \frac{[A, B, l]}{\varphi^*(A, B)}.$$

L'interprétation géométrique de ces invariants est bien claire. Le premier n'est autre que $I^*(A, B)$ autrement dit, dans le cas réel, $\cos^2 \theta$ où θ est l'angle (orienté ou non) des droites A, B . Le second est égal à $\Delta(q)(1 - I^*(A, B))$ en vertu de la formule de Lagrange 2.2.24, donc à $\sin^2 \theta$ dans le cas réel. Le troisième invariant est égal à $\tan \theta$ (ici θ est un angle orienté) dans le cas réel (voir 5.6.14). On notera qu'on a affaire à un vrai invariant orienté au sens où l'on a $T(B, A) = -T(A, B)$.

On passe au cas de trois formes génériques A, B, C . Ces formes définissent un triangle abc . Précisément, on pose $a = B \wedge C$, $b = C \wedge A$ et $c = A \wedge B$. Ces expressions définissent des vecteurs non nuls de E , donc des points de $\mathbf{P}(E)$, non alignés. On notera que les points a, b, c sont à l'infini si et seulement si les crochets $[B, C, l]$, $[C, A, l]$ et $[A, B, l]$ sont nuls, respectivement. Le résultat suivant¹⁸ montre que les invariants usuels du triangle abc (longueurs, angles, aires sous leurs formes algébriques) se calculent à partir des invariants¹⁹ de A, B, C . On rappelle que $\Delta(q)$ est le discriminant de la forme q (et l'inverse du petit discriminant $\delta(q^*)$), voir 2.2.16, et que sur \mathbf{R} on peut le supposer égal à 1.

8.3.16 Proposition. *On reprend les notations ci-dessus.*

1) On a $l(a) = [B, C, l]$, $a \wedge b = [A, B, C]C$, $[a, b, c] = [A, B, C]^2$.

16. Il y a un invariant "arithmétique" qui est la valeur de $q^*(A)$ vue dans k^*/k^{*2} .

17. Il y a aussi leurs inverses, bien entendu.

18. Dans cet énoncé, nombre de formules admettent des variantes obtenues par permutation circulaire que le lecteur écrira.

19. Attention, ici ce sont des invariants du groupe des isométries seulement.

Dans les trois assertions suivantes on suppose que les points a, b, c ne sont pas à l'infini.

- 2) On a $q(\vec{ab}) = ab^2 = \Delta(q) \frac{[A, B, C]^2 q^*(C)}{[B, C, l]^2 [C, A, l]^2}$.
- 3) On a $\varphi(\vec{ab}, \vec{ac}) = \Delta(q) \frac{-\varphi^*(B, C) [A, B, C]^2}{[B, C, l]^2 [C, A, l] [A, B, l]}$.
- 4) On a $2\mathcal{A}(abc) := \frac{[a, b, c]}{l(a)l(b)l(c)} = \frac{[A, B, C]^2}{[B, C, l][C, A, l][A, B, l]}$.

Démonstration. Les formules de 1) ont été vues dans la Partie II, voir ??, ?? et ?? et revues ci-dessus au chapitre 2. Pour le point 2), on utilise la formule $\delta(q^*)q(\vec{ab}) = q^*(a \wedge b)$ de 2.2.28 après avoir normalisé les points a, b en les remplaçant par $a/l(a)$ et $b/l(b)$. La preuve est identique pour le point 3) et le point 4) est immédiat.

8.3.4 Tous les invariants ?

Il s'agit maintenant de donner une liste minimale d'invariants permettant de reconstituer tous les autres.

Le cas des isométries positives

8.3.17 Théorème. Soient $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$ des droites génériques de $\mathbf{P}(E)$. Les invariants projectifs de ces droites, relativement au groupe $O^{\circ+}(q^*)$ sont les fractions rationnelles en les invariants du type $I^*(A, B) = \frac{\varphi^*(A, B)^2}{q^*(A)q^*(B)}$,

$$T(A, B) = \frac{[A, B, l]}{\varphi^*(A, B)} \text{ et } \mathcal{A}(A, B, C) = \frac{[A, B, C]^2}{[B, C, l][C, A, l][A, B, l]}.$$

8.3.18 Remarques. 1) Ce théorème montre que tous les invariants de la géométrie euclidienne peuvent être ramenés aux angles (orientés dans le cas où l'on s'intéresse aux déplacements) et aux aires. Cela corrobore ce que nous avons appelé plus haut le "quatrième cas d'isométrie des triangles", voir 5.4.21.

2) On peut remplacer l'invariant \mathcal{A} par $K^*(A, B, C) = \frac{[A, B, C]^2}{q^*(A)q^*(B)q^*(C)}$ utilisé en 6.4.1. En effet, ces invariants se calculent l'un à partir de l'autre, voir ci-dessous 8.3.22.

Démonstration. On sait que les invariants projectifs sont de la forme P/Q , avec les conditions de 8.3.14. En vertu de la relation (1) de 2.2.24, on peut supposer que, dans chaque monôme, il y a au plus un crochet de type $[A, B, l]$.

On choisit un monôme non nul de P et on divise P et Q par ce monôme. Il reste, en numérateur comme en dénominateur, une somme de monômes d'exposants entiers relatifs vérifiant tous la condition que le degré total en A_1, A_2, A_3 est nul, et de même pour les autres formes. On est donc ramené à montrer le théorème pour de tels monômes, que l'on dira projectifs. Le lemme suivant traite ceux de ces monômes qui ne contiennent pas de crochets du type $[A, B, C]$:

8.3.19 Lemme. *Tout monôme projectif en les invariants de type q^* et φ^* (resp. et $[A, B, l]$) est une fraction rationnelle en les invariants I^* (resp. et $T(A, B)$).*

Démonstration. Rappelons qu'en géométrie euclidienne²⁰, l'invariant Spin défini par $S^*(A, B, C) = \frac{\varphi^*(B, C)\varphi^*(C, A)\varphi^*(A, B)}{q^*(A)q^*(B)q^*(C)}$ s'écrit en fonction des invariants I^* (voir 5.5.14) :

$$1 + 2S^*(A, B, C) = I^*(B, C) + I^*(C, A) + I^*(A, B).$$

On peut alors copier la preuve effectuée dans la Partie IV, ???. Cela donne le premier point. Pour le second, on a vu qu'on peut supposer que les crochets de type $[A, B, l]$ sont solitaires. Si le monôme M s'écrit $M = [A, B, l]M'$, on a aussi $M = T(A, B)(M'\varphi^*(A, B))$ et le deuxième terme ne contient plus de crochets.

Reprenons la preuve de 8.3.17. On considère un monôme projectif $M = \prod X_h^{\alpha_h} Y_{ij}^{\beta_{ij}} Z_{kl}^{\gamma_{kl}} T_{uvw}^{\delta_{uvw}}$, avec $X_h = q^*(A_h)$, $Y_{ij} = \varphi^*(A_i, A_j)$, $Z_{k,l} = [A_k, A_l, l]$ et $T_{uvw} = [A_u, A_v, A_w]$. On a le lemme suivant :

8.3.20 Lemme. *La somme des degrés δ_{uvw} est paire.*

Démonstration. Considérons la forme A_p . Le fait que la somme des degrés du monôme en A_{p1}, A_{p2}, A_{p3} soit nulle donne la condition :

$$2\alpha_p + \sum_j \beta_{pj} + \sum_l \gamma_{pl} + \sum_{v,w} \delta_{pvw} = 0.$$

En ajoutant toutes ces conditions, on constate que les termes β et γ interviennent tous deux fois, tandis que les termes δ interviennent trois fois. On a donc :

$$2 \sum \alpha_h + 2 \sum \beta_{ij} + 2 \sum \gamma_{kl} + 3 \sum \delta_{uvw} = 0,$$

d'où le résultat.

²⁰. Contrairement au cas non euclidien où cet invariant est essentiel, voir Partie IV.

On peut maintenant finir la preuve du théorème 8.3.17. Si le monôme contient des crochets de type $[A, B, C]$, le lemme précédent montre qu'ils sont en nombre pair et on peut supposer qu'ils sont tous au carré. En effet, on a vu en 8.3.7 comment remplacer un produit de deux crochets par une fraction rationnelle en les carrés. Quitte à mettre en facteurs des invariants de type $\mathcal{A}(A, B, C)$ on peut donc éliminer tous les crochets $[A, B, C]$. On élimine de même les crochets $[A, B, l]$ grâce à $T(A, B)$. Il ne reste plus qu'un monôme en les produits scalaires, qui est justiciable de 8.3.19.

Le cas des isométries de signe quelconque

On déduit de 8.3.17 le résultat analogue pour le groupe $\text{Is}(X)$ tout entier :

8.3.21 Corollaire. *Soient $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \dots$ des droites génériques de $\mathbf{P}(E)$. Les invariants projectifs de ces droites, relativement au groupe $O^\circ(q^*)$ sont les fractions rationnelles en les invariants du type $I^*(A, B) = \frac{\varphi^*(A, B)^2}{q^*(A)q^*(B)}$ et*

$$K^*(A, B, C) = \frac{[A, B, C]^2}{q^*(A)q^*(B)q^*(C)}.$$

Démonstration. Vu 8.3.17, on peut écrire une fraction rationnelle invariante sous $O^\circ(q^*)$ comme une fraction en les invariants I^*, T, \mathcal{A} , mais avec des produits d'un nombre pair d'invariants de type T, \mathcal{A} . Il suffit donc de montrer qu'on peut écrire ces produits en fonction de I^* et K^* . Pour le produit de deux invariants de type T , on utilise la formule (1) de 2.2.24 qui permet de calculer le produit $[A, B, l][X, Y, l]$ en fonction des produits scalaires et on peut alors utiliser 8.3.19. Pour les produits de deux invariants de type \mathcal{A} ou d'un de type T et d'un de type \mathcal{A} , on utilise les invariants K^* pour annihiler les carrés $[A, B, C]^2$ et on est ramené à des produits pairs de crochets $[A, B, l]$ que l'on traite comme ci-dessus.

8.3.22 Remarques. 1) On notera la formule qui relie K^* aux autres invariants :

$$K^*(A, B, C) = S^*(A, B, C) \mathcal{A}(A, B, C) T(B, C) T(C, A) T(A, B).$$

En termes d'angles, on obtient $K^*(A, B, C) = -2\mathcal{A}(abc) \sin \hat{a} \sin \hat{b} \sin \hat{c}$ (voir 5.5.18).

2) Le corollaire précédent est la version algébrique du résultat de transitivité 6.4.1.

3) Parmi les invariants justiciables de 8.3.21 il y a le birapport de quatre droites concourantes, voir 8.5.6.

8.4 Les relations des invariants de formes

Les invariants relatifs de l'opération de $\text{Sim}(X)$ sur E^* ont été énumérés au paragraphe précédent (carrés et produits scalaires, crochets $[A, B, l]$ et $[A, B, C]$) et il s'agit maintenant de préciser les relations qui les lient. Précisons d'abord les notations. On considère m formes "génériques" A_1, \dots, A_m de E^* , avec $A_i = (A_{i1}, A_{i2}, A_{i3})$, etc., les A_{ij} étant des indéterminées. On pose $I = \{1, 2, \dots, m\}$. On note R l'anneau de polynômes en les $3m$ indéterminées A_{ij} . Le groupe $GO^o(q^*)$ et ses sous-groupes opèrent sur R et on a déterminé ci-dessus les invariants relatifs à ces opérations.

8.4.1 Le cas des isométries positives

On a vu en 8.3.1 que le sous-anneau S des invariants relatifs à $O^{o+}(q^*)$ est engendré par les polynômes²¹ $y_{ij} = \varphi^*(A_i, A_j)$ ($1 \leq i \leq j \leq m$), $z_{ij} = [A_i, A_j, l]$ ($1 \leq i < j \leq m$) et $t_{ijk} = [A_i, A_j, A_k]$ ($1 \leq i < j < k \leq m$).

Pour étudier les relations entre ces invariants, on introduit deux anneaux : l'anneau U des polynômes en les indéterminées Y_{ij}, Z_{ij} avec $i, j \in I$ et T_{ijk} avec $i, j, k \in I$, à coefficients dans le corps k , et l'anneau V des polynômes en les indéterminées Y_{ij} avec $1 \leq i \leq j \leq m$, Z_{ij} avec $1 \leq i < j \leq m$ et T_{ijk} avec $1 \leq i < j < k \leq m$, toujours à coefficients dans k .

On a d'abord un homomorphisme $\theta : U \rightarrow V$ qui prend en compte les propriétés de symétrie et d'alternance. Il est défini sur les indéterminées Y_{ij} par $\theta(Y_{ji}) = Y_{ij}$ si $i < j$, sur les Z_{ij} par $\theta(Z_{ij}) = 0$ si $i = j$, et $\theta(Z_{ji}) = -Z_{ij}$ si $i < j$ et enfin sur les T_{ijk} par $\theta(T_{ijk}) = 0$ si deux des indices i, j, k sont égaux et $\theta(T_{ijk}) = \epsilon(\sigma)T_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)}$ où σ est l'unique permutation de i, j, k telle que $\sigma(i) < \sigma(j) < \sigma(k)$. Cet homomorphisme est surjectif et son noyau est engendré par les polynômes $Y_{ij} - Y_{ji}$, Z_{ii} , $Z_{ij} + Z_{ji}$, les polynômes T_{ijk} dans lesquels deux indices au moins coïncident et les $T_{ijk} - \epsilon(\sigma)T_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)}$ où σ est une permutation de i, j, k .

On a ensuite un homomorphisme $\Psi : V \rightarrow S$ qui associe aux Y_{ij} , etc. les y_{ij} , etc. et on pose $\Phi = \Psi \circ \theta$. Déterminer les relations entre les invariants c'est trouver le noyau de Φ ou Ψ . La plupart des relations ont déjà été rencontrées. Le théorème suivant montre qu'on en a fait le tour :

8.4.1 Théorème. *L'idéal noyau de Φ est l'idéal J engendré par $\text{Ker } \theta$ et par les polynômes suivants :*

- 1) Les polynômes $\delta(q^*)Z_{ij}Z_{kl} - Y_{ik}Y_{jl} + Y_{il}Y_{jk}$ qui correspondent aux re-

²¹. On englobe ici parmi les y_{ij} les carrés scalaires $x_i = q^*(A_i)$.

lations “trigonométriques” du type :

$$\delta(q^*)[A, B, l][C, D, l] = \begin{vmatrix} \varphi^*(A, C) & \varphi^*(A, D) \\ \varphi^*(B, C) & \varphi^*(B, D) \end{vmatrix}.$$

Il y a ensuite toutes les relations issues de la relation “de dimension” 2.2.11 :

$$[A, B, C]D = [B, C, D]A + [C, A, D]B + [A, B, D]C.$$

2) Les polynômes $Z_{jk}Y_{il} - Z_{ik}Y_{jl} + Z_{ij}Y_{kl}$ qui correspondent aux relations :

$$[B, C, l]\varphi^*(A, D) + [C, A, l]\varphi^*(B, D) + [A, B, l]\varphi^*(C, D) = 0.$$

3) Les polynômes : $T_{jkl}Y_{ip} - T_{ikl}Y_{jp} + T_{ijl}Y_{kp} - T_{ijk}Y_{lp}$ qui correspondent aux relations du type :

$$[B, C, D]\varphi^*(A, X) - [A, C, D]\varphi^*(B, X) + [A, B, D]\varphi^*(C, X) - [A, B, C]\varphi^*(D, X) = 0.$$

4) Les polynômes

$$T_{jkl}T_{ipq} - T_{ikl}T_{jpp} + T_{ijl}T_{kpp} - T_{ijk}T_{lpq},$$

qui correspondent aux relations du type :

$$[B, C, D][A, X, Y] - [A, C, D][B, X, Y] + [A, B, D][C, X, Y] - [A, B, C][D, X, Y] = 0.$$

5) Les polynômes

$$Z_{jk}T_{ipq} - Z_{ik}T_{jpp} + Z_{ij}T_{kpp} - T_{ijk}Z_{ppq},$$

qui correspondent aux relations vues en 4) dans le cas $D = l$.

6) Les polynômes

$$T_{jkl}Z_{ip} - T_{ikl}Z_{jp} + T_{ijl}Z_{kp} - T_{ijk}Z_{lp},$$

qui correspondent aux relations vues en 4) dans le cas $Y = l$.

Démonstration. Cette démonstration – la dernière du genre! – est analogue à toutes celles déjà vues Partie II, Partie IV ou ci-dessus 8.2.10, mais elle concerne les isométries relatives à une forme dégénérée. Comme ce cas n’est pas, semble-t-il, explicitement traité dans la littérature, nous la donnons succinctement, en insistant sur les points qui font la différence avec les précédentes.

1) On montre d'abord le théorème dans le cas $m \leq 3$, avec des formes A, B, C . Dans ce cas il y a un seul invariant de type $T : T = [A, B, C]$. Soit P un élément de $\text{Ker } \Phi$, écrit sous la forme :

$$P = P_n(Y_{ij}, Z_{ij})T^n + \cdots + P_0(Y_{ij}, Z_{ij}).$$

On a la relation :

$$P_n(\varphi^*(A, B), \dots, [A, B, l], \dots)[A, B, C]^n + \cdots + P_0(\varphi^*(A, B), \dots, [A, B, l], \dots) = 0.$$

Les variables d'indice 3 n'interviennent que dans les crochets $[A, B, C]$ et seulement au degré 1. Comme les termes de degré i en ces variables sont les $P_i(\varphi^*(A, B), \dots, [A, B, l], \dots)[A, B, C]^i$, ils sont nuls, donc aussi tous les $P_i(\varphi^*(A, B), \dots, [A, B, l], \dots)$. Ces polynômes ne font plus intervenir que les variables A_i, B_i, C_i d'indices 1 et 2. On est donc en fait dans le quotient E^*/L et on peut appliquer 8.2.10, les seules relations sont de type 1) et 2), et les P_i , donc aussi P , sont dans J .

2) On suppose maintenant qu'il y a quatre formes au moins. Comme à l'accoutumée, le ressort de la preuve est la congruence de Capelli :

8.4.2 Proposition. (Congruence de Capelli) *Soient $a, b, c, d \in I$ des indices distincts et soit $F \in U$. L'élément suivant est dans l'idéal J :*

$$\Delta(F) = \begin{vmatrix} D_{dd} + 3\text{Id} & D_{dc} & D_{db} & D_{da} \\ D_{cd} & D_{cc} + 2\text{Id} & D_{cb} & D_{ca} \\ D_{bd} & D_{bc} & D_{bb} + \text{Id} & D_{ba} \\ D_{ad} & D_{ac} & D_{ab} & D_{aa} \end{vmatrix} (F).$$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle vue dans la Partie II en ???. Le point crucial est de montrer que certains déterminants sont dans J :

8.4.3 Lemme. *Quels que soient les indices $a, b, c, d; s, t, u, v; w, x, y, z$ dans I , le déterminant suivant est dans J :*

$$\Delta = \begin{vmatrix} T_{ast} & T_{auv} & T_{awx} & T_{ayz} \\ T_{bst} & T_{buw} & T_{bwx} & T_{byz} \\ T_{cst} & T_{cuv} & T_{cwx} & T_{cyz} \\ T_{dst} & T_{duv} & T_{dwx} & T_{dyz} \end{vmatrix}$$

ainsi que les déterminants obtenus à partir de Δ en remplaçant certaines colonnes par des colonnes formées de variables Y_{ij} ou Z_{ij} , par exemple la dernière colonne par ${}^t(Y_{ap}, Y_{bp}, Y_{cp}, Y_{dp})$ ou ${}^t(Z_{ap}, Z_{bp}, Z_{cp}, Z_{dp})$.

Démonstration. (du lemme) Pour le déterminant Δ lui-même c'est Partie II ??, on montre que Δ est combinaison des relations de type 4) :

$$[B, C, D][A, X, Y] - [A, C, D][B, X, Y] + [A, B, D][C, X, Y] - [A, B, C][D, X, Y] = 0.$$

Pour les autres, il faut distinguer plusieurs cas.

1) Les déterminants formés avec seulement des colonnes T et des colonnes Z sont combinaisons des mêmes relations, mais avec certaines variables A, B, C, \dots remplacées par l . Si une seule de ces variables est égale à l on obtient les relations de type 5) et 6). Si deux sont égales à l , disons $D = Y = l$, on obtient une relation :

$$[B, C, l][A, X, l] - [A, C, l][B, X, l] + [A, B, l][C, X, l] = 0$$

et on vérifie qu'elle est conséquence des relations de type 1), cf. 8.2.12. Avec trois variables égales à l , la relation est conséquence des relations d'alternance, donc dans $\text{Ker } \theta$.

Pour les autres, on aura besoin du lemme suivant, qui est exactement 8.2.13, aux notations près :

8.4.4 Lemme. *Les déterminants suivants sont dans J :*

$$\begin{vmatrix} Y_{i\alpha} & Y_{i\beta} & Y_{i\gamma} \\ Y_{j\alpha} & Y_{j\beta} & Y_{j\gamma} \\ Y_{k\alpha} & Y_{k\beta} & Y_{k\gamma} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Y_{i\alpha} & Y_{i\beta} & Z_{i\gamma} \\ Y_{j\alpha} & Y_{j\beta} & Z_{j\gamma} \\ Y_{k\alpha} & Y_{k\beta} & Z_{k\gamma} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Y_{i\alpha} & Z_{i\beta} & Z_{i\gamma} \\ Y_{j\alpha} & Z_{j\beta} & Z_{j\gamma} \\ Y_{k\alpha} & Z_{k\beta} & Z_{k\gamma} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Z_{i\alpha} & Z_{i\beta} & Z_{i\gamma} \\ Z_{j\alpha} & Z_{j\beta} & Z_{j\gamma} \\ Z_{k\alpha} & Z_{k\beta} & Z_{k\gamma} \end{vmatrix}.$$

2) Revenons à 8.4.3. Le lemme précédent permet de conclure s'il y a trois colonnes de type Y ou Z . Examinons le cas des déterminants formés de colonnes T et Y . S'il y a au plus deux colonnes de Y , on montre que le déterminant est combinaison des relations de type 3). Le calcul est identique à celui effectué Partie II, ???. Si par exemple ce sont les deux dernières colonnes de Δ qui sont remplacées par des Y , le point crucial à noter est qu'on peut développer le déterminant sans séparer les indices yz ni les indices st . Les relations qui apparaissent sont alors des relations de type 4) dans lesquelles on remplace les variables T d'une colonne par des variables Y , ce qui donne une relation de type 3).

3) Il reste enfin le cas où l'on a deux colonnes de T , une de Y et une de Z . Comme les variables Z sont des crochets, on obtient des relations de type 3) comme ci-dessus, mais où l'une des variables est remplacée par l . On voit qu'on obtient une relation de type 2).

La fin de la démonstration utilise la congruence de Capelli. Elle est tout à fait analogue, *mutatis mutandis*, à celle menée en 8.2.6, par exemple.

8.4.5 Remarque. On notera qu'on ne peut se passer des relations du type 4) (relations entre crochets rencontrées à propos de l'étude du groupe $SL(E^*)$ dans la Partie II). En effet, ces relations font intervenir des variables d'indice 3 au degré 2 avec des coefficients de degré 4 en les variables d'indices 1, 2. Elles ne peuvent donc pas être dans l'idéal engendré par les autres : les relations 1) et 2) ne comportent pas de variables d'indice 3 et dans les relations 3), 5) et 6) elles sont au degré 1 et accompagnées de variables d'indices 1 ou 2 au degré 4.

8.4.6 Remarque. Bien entendu, les relations vues en 8.4.1 ne sont pas indépendantes et il y a des relations entre elles. Par exemple, dans le cas de trois droites A, B, C , en changeant majuscules en minuscules, on retrouve les 9 relations du cas de trois vecteurs, voir 8.2.21. Voir aussi 8.5.7.

8.4.7 Remarque. Parmi les conséquences des relations vues en 8.4.1, deux²² ont déjà été rencontrées.

1) La traduction de relation de Chasles sur les angles de droites :

$$\begin{aligned} [B, C, l]\varphi^*(C, A)\varphi^*(A, B) + [C, A, l]\varphi^*(A, B)\varphi^*(B, C) + [A, B, l]\varphi^*(B, C)\varphi^*(C, A) \\ = [B, C, l][C, A, l][A, B, l]. \end{aligned}$$

rencontrée dans le paragraphe 5.6.3. Nous avons vu qu'elle est conséquence des relations 1) et 2) ci-dessus.

2) La nullité du déterminant de Gram 5.5.5 (qui exprime que q^* est dégénérée), elle aussi conséquence de 1) et 2), voir 8.4.4.

8.4.8 Remarque. Par rapport au cas non euclidien, la différence essentielle est que la relation "de changement de base" pour la forme quadratique (relation 2) de Partie IV ??) ne subsiste pas. En effet, comme la forme q^* est dégénérée, cette relation donne la nullité des déterminants de Gram 3×3 alors que dans le cas non euclidien les relations de Gram sont de taille 4×4 .

8.4.2 Relations entre les invariants du groupe des spineurs

Dans le cas du groupe des spineurs $\widehat{O^\circ(q^*)}$, on sait que les invariants sont engendrés par les produits scalaires et les produits pairs de crochets du type $[A, B, C]$. On introduit donc cette fois l'anneau U des polynômes en les indéterminées Y_{ij} , $i, j \in I$ et T_{ijk} avec $i, j, k \in I$, à coefficients dans le corps k , et l'anneau V des polynômes en les indéterminées Y_{ij} avec

22. Toutes deux liées au fait que la somme des angles d'un triangle est égale à π .

$1 \leq i \leq j \leq m$ et T_{ijk} avec $1 \leq i < j < k \leq m$, toujours à coefficients dans k . Les homomorphismes θ, Ψ sont définis comme ci-dessus en oubliant les variables Z_{ij} , et on pose $\Phi = \Psi \circ \theta$.

On a alors le résultat suivant :

8.4.9 Théorème. *Avec les notations précédentes, l'idéal noyau de Φ est engendré par $\text{Ker } \theta$ et par les polynômes suivants :*

1) Les polynômes de Gram
$$\begin{vmatrix} Y_{i\alpha} & Y_{i\beta} & Y_{i\gamma} \\ Y_{j\alpha} & Y_{j\beta} & Y_{j\gamma} \\ Y_{k\alpha} & Y_{k\beta} & Y_{k\gamma} \end{vmatrix}.$$

2) Les polynômes

$$T_{\alpha\beta\gamma}(T_{jkl}Y_{ip} - T_{ikl}Y_{jp} + T_{ijl}Y_{kp} - T_{ijk}Y_{lp}).$$

3) Les polynômes $T_{jkl}T_{ipq} - T_{ikl}T_{j pq} + T_{ijl}T_{kpq} - T_{ijk}T_{lpq}$.

Démonstration. La démonstration est analogue à la précédente (en plus simple puisqu'il n'y a plus les variables Z). C'est un excellent exercice pour le lecteur²³.

8.4.3 Relations entre les invariants projectifs

Cette fois nous atteignons l'objectif ultime : la détermination des relations dans le cas des vrais invariants géométriques. Malheureusement, ces relations ne sont pas aussi simples qu'on pourrait l'espérer. Rappelons que les invariants projectifs sous l'action des isométries (resp. des isométries directes) sont engendrés par les fractions du type $I^*(A, B)$ et $K^*(A, B, C)$ (resp. et $T(A, B)$). On travaille donc dans un anneau engendré par des variables $I_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta\gamma}$ (resp. et $T_{\alpha\beta}$) comme on l'a déjà expliqué ci-dessus. Le résultat est le suivant :

8.4.10 Corollaire. 1) *Les relations entre les invariants de type I^* et K^* sont obtenues à partir de celles données en 8.4.9 en les divisant respectivement par $Y_{i\alpha}Y_{j\beta}Y_{k\gamma}$, $T_{\alpha\beta\gamma}T_{ijk}Y_{lp}$ et $T_{jkl}T_{ipq}$ et en exprimant les quotients en fonction des I^* et K^* comme expliqué en 8.3.21.*

2) *Les relations entre les invariants de type I^* , K^* et T sont obtenues à partir de celles données en 8.4.1 en les divisant respectivement par $Y_{ij}Y_{kl}$ (relations 1 et 2), $T_{ijk}Y_{lp}$ (3 et 6), $T_{ijk}T_{lpq}$ (4) et $T_{ijk}Z_{pq}$ (5) et en exprimant les quotients en fonction des I^* , K^* et T comme expliqué en 8.3.17.*

23. On peut aussi prouver le résultat en utilisant 8.4.1 et en envoyant les variables Z_{ij} sur 0. Une fois les relations de type 2) et 3) enlevées, il reste une relation entre les Y_{ij} qui est justiciable de l'analogue de 8.2.6.

Démonstration. Si on a une relation entre des invariants fractionnaires on en obtient aussitôt une entre des invariants polynomiaux en chassant les dénominateurs. Or, celles-ci ont été calculées plus haut et sont dans l'idéal engendré par les relations de base. On en déduit le même résultat pour les relations entre les invariants fractionnaires.

Le cas de deux droites

Pour deux droites A, B il y a un seul invariant dans le cas de $\text{Is}(X)$, à savoir $I^*(A, B)$ et pour $\text{Is}^+(X)$ il faut ajouter $T(A, B)$. La seule relation non banale provient de la relation (1) de 8.4.1 appliquée avec $C = A$ et $D = B$ et elle s'écrit $1 + T^2(A, B) = \frac{1}{I^*(A, B)}$. Elle correspond à la relation trigonométrique $1 + \tan^2 \hat{c} = \frac{1}{\cos^2 \hat{c}}$.

Le cas des trilatères

On considère trois droites A, B, C . Dans ce cas, les seuls invariants projectifs sont les "angles" $I^*(B, C)$, etc. et "l'aire" $K^*(A, B, C)$ ainsi que les tangentes $T(B, C)$, etc. dans le cas orienté. Dans le cas non orienté, l'unique relation est celle qui traduit la somme des angles (voir 5.5.14) et qui provient de la première relation de 8.4.9. C'est d'ailleurs cette relation qui nous a servi dans la description de l'espace des trilatères en 6.4.9. Dans le cas orienté, il faut y ajouter les relations trigonométriques issues de la première relation de 8.4.1 comme celle vue dans le cas de deux droites ou la relation $T(A, B) T(C, A) = 1 - \frac{I^*(B, C)}{S^*(A, B, C)}$ qui correspond à la formule $\tan \hat{b} \tan \hat{c} = 1 + \frac{\cos \hat{a}}{\cos \hat{b} \cos \hat{c}}$, avatar de la relation donnant $\cos(\hat{b} + \hat{c})$. On notera qu'ici, en étant passé aux fractions rationnelles, les relations ne sont plus homogènes en les invariants.

Le cas des quadrilatères sous $\text{Is}(X)$

On considère quatre droites A, B, C, D . Les invariants projectifs sous $\text{Is}(X)$ sont les $I^*(A, B)$ et les $K^*(A, B, C)$ et les relations proviennent de 8.4.9. On analyse d'abord les déterminants de Gram $G(i, j, k; \alpha, \beta, \gamma)$. Le cas $i = \alpha, j = \beta, k = \gamma$ fournit les relations de somme des angles des triangles, voir 5.5.14. Les autres cas donnent des relations analogues aux relations \mathcal{S} vues en 7.2.2. Par exemple, si l'on prend le déterminant de Gram

$G(A, B, C; D, A, B)$ on obtient la relation :

$$\begin{aligned} & \varphi^*(A, D)\varphi^*(A, B)\varphi^*(B, C) + \varphi^*(B, D)\varphi^*(A, C)\varphi^*(A, B) + q^*(A)q^*(B)\varphi^*(C, D) \\ & - \varphi^*(A, B)^2\varphi^*(C, D) - q^*(A)\varphi^*(B, D)\varphi^*(B, C) - \varphi^*(A, C)q^*(B)\varphi^*(A, D) = 0. \end{aligned}$$

On multiplie cette relation par $\varphi^*(C, D)$ et on divise par $q^*(A)q^*(B)q^*(C)q^*(D)$ pour faire apparaître les invariants I^* et S^* :

$$\frac{S^*(A, B, D)S^*(B, C, D)}{I^*(B, D)} + \frac{S^*(A, B, C)S^*(B, C, D)}{I^*(B, C)} + I^*(C, D)$$

$$-I^*(A, B)I^*(C, D) - S^*(B, C, D) - S^*(A, C, D) = 0$$

que l'on peut écrire comme une relation polynomiale en réduisant au même dénominateur et uniquement avec les invariants I^* en utilisant 5.5.14.

Dans le cas des quadrilatères, les relations 3) de 8.4.9 sont triviales. En revanche, les relations 2) :

$$T_{\alpha\beta\gamma}(T_{jkl}Y_{ip} - T_{ikl}Y_{jp} + T_{ijl}Y_{kp} - T_{ijk}Y_{lp})$$

se traduisent par des relations faisant intervenir les invariants I^* et K^* . En théorie, on doit pouvoir écrire les relations \mathcal{T} de 7.2.3 comme combinaison de ces relations. Le calcul ne semble pas évident (d'autant que les relations \mathcal{T} ne mettent en jeu que trois des triplets (B, C, D) , (A, B, D) , (A, C, D) et (A, B, C) alors que celles de 8.4.9 les contiennent tous les quatre). C'est en tous cas la preuve que le théorème 8.4.9 est non trivial!

8.5 Exercices

8.5.1 Exercice. (Les caractères de $O^+(2, \mathbf{R})$)

Le but de cet exercice est de prouver 8.1.5 dans le cas $k = \mathbf{R}$. Soit \mathbf{U} le groupe des nombres complexes de module 1 et $\chi : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R}^*$ un caractère rationnel. On pose $\chi(a+ib) = \frac{f(a, b)}{g(a, b)}$ où f, g sont des polynômes à coefficients réels.

1) Montrer qu'on a $\chi(-1) = 1$, puis $\chi(\zeta) = 1$ si ζ est une racine n -ième de l'unité.

2) En considérant les zéros du polynôme $f(a, b) - g(a, b)$, montrer que χ est trivial.

8.5.2 Exercice. (Les relations entre invariants dans les cas de 2 ou 3 vecteurs)

On suppose $k = \mathbf{R}$. Soit V un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base e_1, e_2 et de la forme q définie par $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Cet exercice permet de retrouver directement les résultats de 8.2.6 et 8.2.10 dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

1) On considère deux vecteurs génériques a, b de V . On sait que les invariants sous $O(q)$ sont $q(a), q(b)$ et $\varphi(a, b)$, et que sous $O^+(q)$ il faut ajouter $[a, b]$. On va montrer qu'il n'y a pas de relation entre les invariants de $O(q)$ et que la seule relation entre ceux de $O^+(q)$ est l'identité de Lagrange : $[a, b]^2 + \varphi(a, b)^2 = q(a)q(b)$.

a) Soient x, y, u trois nombres réels vérifiant $x \geq 0, y \geq 0$ et $u^2 \leq xy$. Montrer qu'il existe deux vecteurs $\bar{a}, \bar{b} \in V$ tels que l'on ait $x = q(\bar{a}), y = q(\bar{b})$ et $u = \varphi(\bar{a}, \bar{b})$.

On appelle H la partie de \mathbf{R}^3 des triplets (x, y, u) vérifiant ces conditions.

b) Soit $P(X, Y, U)$ un polynôme nul en $q(a), q(b), \varphi(a, b)$. Montrer que P est nul sur H et en déduire qu'il est nul (on notera que H contient un ouvert non vide de \mathbf{R}^3 au sens de la topologie ordinaire, donc que H est Zariski-dense).

c) Soit $P(X, Y, U, S)$ un polynôme nul en $q(a), q(b), \varphi(a, b)$ et $[a, b]$. Il s'agit de montrer que P est multiple de $F = U^2 + S^2 - XY$. Pour cela on effectue la division de P par F , vu comme polynôme en S . On obtient $P = QF + R$ avec $R = A(X, Y, U)S + B(X, Y, U)$. En utilisant la question a), montrer que A et B sont nuls et conclure.

2) Cette fois, on considère trois vecteurs génériques a, b, c et leurs invariants $x = q(a), y = q(b), z = q(c), u = \varphi(b, c), v = \varphi(c, a)$ et $w = \varphi(a, b)$. On a la relation de Gram : $G(x, y, z, u, v, w) = xyz + 2uvw - u^2x - v^2y - w^2z = 0$.

On considère l'hypersurface $V(G) \subset \mathbf{R}^6$. Montrer que l'image de l'application qui à trois vecteurs a, b, c associe leurs invariants contient un ouvert non vide de $V(G)$ (précisément, l'ouvert défini par $x > 0, y > 0, w^2 < xy$ et $u^2x + v^2y - 2uvw > 0$; on posera $z = \frac{u^2x + v^2y - 2uvw}{xy - w^2}$). En déduire que toute relation entre les invariants est un multiple de G (on montrera que le polynôme G est irréductible).

8.5.1 Les invariants de l'opération sur E

8.5.3 Exercice. On rappelle que $G = GO^\circ(q^*) \simeq \text{Sim}(X)$ fixe l , donc qu'il opère sur E en laissant stable E_∞ . On se donne des points génériques

a, b, c, \dots de E , de coordonnées (a_1, a_2, a_3) , etc. dans la base e_1, e_2, e_3 et on considère l'anneau de polynômes $R = k[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; \dots]$. Le groupe G opère sur R et on va déterminer ses invariants en commençant par ceux de son sous-groupe $\text{Is}^+(X)$.

1) Montrer que les polynômes du type $l(a)$, autrement dit toutes les variables d'indice 3 : a_3, b_3, \dots , sont des invariants sous $\text{Is}^+(X)$.

2) Montrer qu'il en est de même des polynômes associés aux valeurs de φ, q et des crochets sur les vecteurs :

$$q(l(a)b-l(b)a), \quad \varphi(l(a)b-l(b)a, l(c)d-l(d)c) \quad \text{et} \quad [l(a)b-l(b)a, l(c)d-l(d)c].$$

3) Montrer que tout polynôme invariant sous $\text{Is}^+(X)$, multiplié éventuellement par des termes du type $l(a)$, est dans l'anneau S engendré par les polynômes précédents. (On se ramènera au cas où les coefficients d'indice 3 valent 1. On montrera ensuite qu'un polynôme en une seule lettre n'est jamais invariant par translation, sauf si c'est une constante. On conclura en écrivant $P(a, b, c, \dots)$ sous la forme $Q(a, b-a, c-a, \dots)$ et en utilisant 8.2.10.

Montrer en particulier que $[a, b, c]$, multiplié par $l(a)$ ou $l(b)$ ou $l(c)$, est dans S .

4) Déterminer les invariants relatifs à l'action de $\text{Is}(X)$ et de $\text{Sim}(X)$.

8.5.2 Les invariants des droites

8.5.4 Exercice. On pose :

$$F_0(A, B, C, X) = [A, B, C]^2 (q^*(X)q^*(A) - \varphi^*(A, X)^2),$$

$$F(A, B, C, X) = F_0(A, B, C, X) + F_0(X, A, B, C) - F_0(C, X, A, B),$$

$$G(A, C, X) = \varphi^*(X, C)q^*(A) - \varphi^*(X, A)\varphi^*(C, A).$$

Montrer la formule $[A, B, C][X, Y, Z] = \frac{N}{8D}$ avec

$$N := -F(A, B, C, X)F(A, X, B, Y)F(X, Y, A, Z) \quad \text{et}$$

$$D := G(A, C, X)G(A, B, Y)G(X, A, Z)[A, B, X]^2[A, X, Y]^2.$$

8.5.5 Exercice. ¶¶ On pose :

$$F(A, B, C, D) = A, B, C] \varphi^*(B, C) q^*(D) + [B, C, D] \varphi^*(A, B) \varphi^*(C, D) \quad \text{et}$$

$$G(A, B, C, D) = [A, C, D] \varphi^*(C, D) q^*(B) + [B, C, D] \varphi^*(A, C) \varphi^*(B, D).$$

Montrer que F/G est un invariant projectif de $\text{Is}(X)$ et l'exprimer comme fonction rationnelle des invariants I^* et K^* .

8.5.6 Exercice. Soient A, B, C, D quatre droites concourantes.

1) Montrer que le birapport $r := \llbracket A, B, C, D \rrbracket$ est égal à $\frac{[C, A, l] \times [D, B, l]}{[C, B, l] \times [D, A, l]}$.

2) Montrer la formule :

$$\frac{\varphi^*(C, B) \varphi^*(A, D)}{\varphi^*(C, D) \varphi^*(A, B)} = \frac{I^*(B, C) \times I^*(A, D) \times I^*(B, D)}{S^*(B, C, D) \times S^*(A, B, D)}.$$

3) En déduire la valeur de r en fonction des invariants I^* et S^* .

8.5.7 Exercice. On suppose $k = \mathbf{R}$ et $\Delta(q) = 1$. On pose :

$$\mathcal{R}(A, B, C; D) = [A, B, l][C, D, l] - \begin{vmatrix} \varphi^*(A, C) & \varphi^*(A, D) \\ \varphi^*(B, C) & \varphi^*(B, D) \end{vmatrix} \text{ et}$$

$$\mathcal{S}(A, B, C, D) = [B, C, l]\varphi^*(A, D) + [C, A, l]\varphi^*(B, D) + [A, B, l]\varphi^*(C, D).$$

Montrer que la relation \mathcal{R} sur les quatre lettres A, B, C, D est combinaison de relations \mathcal{R} et \mathcal{S} ne faisant intervenir que trois lettres. Voici le résultat :

$$\begin{aligned} q^*(A)\mathcal{R}(A, B, C, D) &= [A, B, l]\mathcal{S}(A, C, D, A) \\ &\quad + \varphi^*(A, D)\mathcal{R}(A, B, C, A) + \varphi^*(C, A)\mathcal{R}(A, B, A, D). \end{aligned}$$

Interpréter ce résultat en termes trigonométriques. (Si on note $a = l \wedge A$ et de même b, c, d des vecteurs unitaires de A, B, C, D et $x = (b, c)$, $y = (c, a)$, $z = (a, b)$, $X = (a, d)$, $Y = (b, d)$ et $Z = (c, d)$ les angles orientés associés, la relation $\mathcal{R}(A, B, C, D)$ s'écrit $\sin z \sin Z = \cos y \cos Y - \cos x \cos X$ et elle résulte des relations de Chasles $x = y + z$, $X = z + Y$, $Y = x + Z$ et $Z = y + X$.)

Bibliographie

- [Art62] Emil Artin. *Algèbre géométrique*. Gauthier-Villars, Paris, 1962.
- [Aud06] Michèle Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, Les Ulis, 2006.
- [Bac59] Friedrich Bachmann. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Springer Verlag, 1959.
- [Ber90] Marcel Berger. *Géométrie*. Nathan, Paris, 1990.
- [Car61] Henri Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, 1961.
- [CD05] M. Sombra C. D'Andrea. The cayley-menger determinant is irreducible for $n \geq 3$. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 46-1 : 90–97, 2005.
- [DJC01] Richeton J.-P. Duperret J.-C., Perrin D. Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission kahane : analyse de quelques exercices de géométrie. *Bull. APMEP*, 435, 2001.
- [Gug67] Heinrich W. Guggenheimer. *Plane geometry and its groups*. Holden-Day, San Francisco, 1967.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer, Berlin, 1977.
- [Lad03] Yves Ladegaillerie. *Géométrie affine, projective, euclidienne, analogmatique*. Ellipses, Paris, 2003.
- [Lan65] Serge Lang. *Algebra*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965.
- [Mar82] George E. Martin. *Transformation geometry*. Springer Verlag, New-York, 1982.
- [MCD07] Daniel Perrin Marie-Claude David, Frédéric Haglund. *Géométrie affine (polycopié)*. Université Paris-Sud, Orsay, 2007.
- [MDM90] Perrin D. Martin-Deschamps M. *Sur la classification des courbes gauches*. Astérisque, SMF, Paris, 1990.
- [Mum65] David Mumford. *Geometric invariant theory*. Springer, Berlin, 1965.

- [Ped70] Daniel Pedoe. *A course of geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1970.
- [Per95] Daniel Perrin. *Géométrie algébrique, une introduction*. Interéditions, Paris, 1995.
- [Per96] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, Paris, 1996.
- [Per03] Daniel Perrin. Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations. *Repères IREM*, 53 : 91–110, 2003.
- [RD51] Daniel Caire Robert Deltheil. *Compléments de géométrie*. Baillièrre, Paris, 1951.
- [Ric89] David R. Richman. The fundamental theorems of vector invariants. *Advances in mathematics*, 73 : 43–78, 1989.
- [Wey39] Hermann Weyl. *The Classical Groups : Their Invariants and Representations*. Princeton Math. Series, Princeton, 1939.