

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Préface</b> .....	iii
 I. ITENBERG — <i>Introduction à la géométrie tropicale</i> .....	1
1. Introduction.....	1
2. Semi-corps tropical.....	2
2.1. Opérations tropicales.....	2
2.2. Déquantification des nombres réels strictement positifs	2
3. Courbes tropicales dans $\mathbb{R}^2$ .....	3
3.1. Polynômes tropicaux.....	3
3.2. Dualité.....	6
3.3. Description géométrique.....	8
3.4. Courbes tropicales irréductibles.....	10
3.5. Version tropicale du théorème de Bézout.....	11
3.6. Problèmes énumératifs.....	14
4. Amibes de courbes complexes.....	15
5. Amibes non archimédiennes.....	18
6. Exercices.....	21
Références.....	23
 E. BRUGALLÉ — <i>Géométries énumératives complexe, réelle et tropicale</i> .....	25
1. Introduction.....	25
2. Géométrie énumérative complexe.....	27
2.1. Échauffement.....	27
2.2. Un problème simple de géométrie énumérative.....	28
2.3. Un problème énumératif plus général... et plus compliqué	32
3. Géométrie énumérative réelle.....	42
3.1. Courbes algébriques réelles.....	42
3.2. Le réel, c'est compliqué.....	46
3.3. Invariants de Welschinger.....	50

4. Géométrie énumérative tropicale.....	52
4.1. Courbes tropicales nodales.....	53
4.2. Théorèmes de Correspondance.....	56
5. Décomposition en étages de courbes tropicales.....	61
5.1. Étages d'une courbe tropicale.....	62
5.2. Énumération de diagrammes en étages.....	68
6. Applications.....	75
6.1. En géométrie énumérative complexe.....	75
6.2. Comportement des invariants de Welschinger.....	76
7. Exercices dont je ne connais pas la solution.....	79
8. Pour aller plus loin.....	80
Références.....	81
 B. TEISSIER — <i>Amibes non archimédiennes</i> .....	83
1. Introduction.....	83
2. Quelques rappels.....	85
3. Polyèdres de Newton.....	91
4. Fonction d'appui et transformation de Legendre.....	92
5. Complexes polyédraux rationnels.....	99
Exemple fondamental.....	100
6. Un peu d'analyse.....	107
7. Amibes non archimédiennes et amibes classiques.....	108
Références.....	111

## PRÉFACE

En dépit de son qualificatif évocateur (et de l'illustration de couverture), la « géométrie tropicale » ne décrit pas une région foisonnante de la planète. Les « amibes » qu'on y rencontre, inoffensives, aideront le lecteur à mieux la comprendre à partir de la géométrie classique.

De quoi s'agit-il ? Simplement d'« appliquer le logarithme » (en un sens à préciser) à l'algèbre et la géométrie usuelles. Ainsi, les opérations d'addition et de multiplication sont respectivement remplacées par le maximum et l'addition. Que deviennent les polynômes et leurs graphes ? Quelle forme ont les courbes qui s'en déduisent ? Comment s'intersectent-elles ? Que devient le théorème de Bézout dans le monde tropical ?

La géométrie tropicale est aussi la géométrie sous-jacente aux exposants intervenant dans les équations polynomiales, et l'une de ses origines réside justement dans la méthode de Newton pour la résolution des équations algébriques. Il est alors naturel de ne pas se limiter aux nombres usuels (réels) et d'explorer aussi le monde non archimédien, qui donne un nouvel éclairage sur cette géométrie.

Tels sont quelques thèmes abordés dans les textes de ce volume : celui d'Ilia Itenberg sert d'introduction à l'ensemble, et analyse en détail l'algèbre « max-plus » ; celui d'Erwan Brugallé nous montre l'intérêt de compter en géométrie tropicale ; enfin, celui de Bernard Teissier aborde la résolution d'équations algébriques.

Nous remercions Dominique Tournès de nous avoir fourni la photo de palétuviers qui a servi pour l'illustration de la couverture.

Nous tenons à remercier la direction de l'École polytechnique, et tout particulièrement la Direction des Études, pour l'aide matérielle importante qu'elles ont apportée à la préparation de ces journées et à la publication de ce volume. Nous remercions aussi le secrétariat du Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, notamment Claudine Harmide et Michèle Lavallette.

*Pascale Harinck, Alain Plagne et Claude Sabbah*



---

# INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE TROPICALE

*par*

Ilia Itenberg

---

## 1. Introduction

Ce texte est une introduction à la géométrie tropicale, un nouveau domaine de mathématiques qui a connu un progrès spectaculaire durant les huit dernières années. La géométrie tropicale a des liens multiples et profonds avec de nombreuses branches des mathématiques, tant en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. On peut citer, par exemple, la géométrie algébrique, la géométrie symplectique, l'analyse complexe, les systèmes dynamiques, la logique, la combinatoire, le calcul formel, et les modèles statistiques (cette liste est, bien sûr, loin d'être exhaustive). Des objets tropicaux apparaissent aussi dans la cristallographie et la biologie quantitative.

Les racines de la géométrie tropicale remontent au moins au travail de G. Bergman [1] sur les ensembles limites logarithmiques au début des années 1970. L'essor actuel de la géométrie tropicale est principalement dû à M. Kapranov, M. Kontsevich, G. Mikhalkin, O. Viro et B. Sturmfels.

En géométrie tropicale, les objets algébro-géométriques sont remplacés par des objets affines par morceaux. Par exemple, les courbes tropicales planes sont des graphes rectilignes dont les arêtes ont des pentes rationnelles. Nous allons présenter les notions de base et les

premiers résultats de la géométrie tropicale, en nous concentrant principalement sur les courbes tropicales dans le plan.

## 2. Semi-corps tropical

**2.1. Opérations tropicales.** Un rôle très important dans la suite sera joué par le *semi-corps tropical*  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$ . Il s'agit de l'ensemble  $\mathbb{R}$  équipé des deux opérations  $\oplus$  et  $\odot$  définies de la façon suivante :

$$a \oplus b = \max\{a, b\} \quad \text{et} \quad a \odot b = a + b \quad (\text{pour tous } a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{R}).$$

Les opérations  $\oplus$  et  $\odot$  s'appellent l'*addition tropicale* et la *multiplication tropicale*, respectivement. L'ensemble  $\mathbb{R}$  muni de ces deux opérations n'est pas un corps (par exemple, l'opération  $\oplus$  n'a pas d'élément neutre), mais un *semi-corps*. Ceci signifie que  $(\mathbb{R}, \oplus)$  est un semi-groupe commutatif,  $(\mathbb{R}, \odot)$  est un groupe commutatif (avec 0 pour élément neutre), et l'opération  $\odot$  est distributive par rapport à l'opération  $\oplus$  :

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \quad (\text{pour tous } a, b \text{ et } c \text{ dans } \mathbb{R}).$$

L'ensemble  $\mathbb{R}$  muni des opérations  $\oplus$  et  $\odot$  s'appelle le *semi-corps tropical* et est noté  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$ . Dans  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$ , on peut additionner, multiplier et diviser, mais on ne peut pas soustraire. Le nom *tropical* a été donné à ce semi-corps par des informaticiens français en l'honneur du travail pionnier de leur collègue brésilien Imre Simon sur le semi-anneau max-plus.

## 2.2. Déquantification des nombres réels strictement positifs

Il est important de remarquer que les opérations tropicales peuvent être vues comme opérations limites sous une certaine déformation de l'addition et la multiplication habituelles.

Considérons une famille de semi-corps  $\{S_h\}$ ,  $h \in [0, +\infty)$ . Comme ensemble, chaque semi-corps  $S_h$  coïncide avec  $\mathbb{R}$ . Les opérations d'addition et multiplication dans  $S_h$  sont définies de la manière suivante :

$$a \oplus_h b = \begin{cases} h \ln(\exp(a/h) + \exp(b/h)) & \text{si } h \neq 0, \\ \max\{a, b\}, & \text{si } h = 0; \end{cases}$$

$$a \odot_h b = a + b.$$

Ces opérations dépendent de  $h$  de façon continue. Pour toute valeur non nulle de  $h$ , le semi-corps  $S_h$  est isomorphe au semi-corps  $\mathbb{R}_+^*$  des nombres réels strictement positifs (munis des opérations habituelles d'addition et multiplication) : l'application  $x \mapsto h \ln x$  effectue un isomorphisme entre  $\mathbb{R}_+^*$  et  $S_h$ . Par contre,  $S_0$  coïncide avec  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$  et n'est pas isomorphe à  $\mathbb{R}_+^*$ .

Le passage de valeurs non nulles de  $h$  à la valeur 0 dans la famille  $\{S_h\}$  s'appelle la *déquantification de Maslov des nombres réels strictement positifs* (voir [13] et [14]). Des déformations similaires sont connues dans plusieurs domaines des mathématiques. Comme il a été remarqué par O. Viro [31], la déquantification de Maslov est directement liée au patchwork, la méthode de construction de variétés algébriques réelles proposée par Viro il y a une trentaine d'années (voir [29, 30] et [23]). La déquantification de Maslov est aussi directement liée au passage à la « *large complex limit* » (voir [12]) qui fait dégénérer une structure complexe sur une variété. Toutes ces déformations fournissent un lien très important entre la géométrie algébrique et la géométrie des complexes polyédraux.

### 3. Courbes tropicales dans $\mathbb{R}^2$

**3.1. Polynômes tropicaux.** Nous allons maintenant faire une brève description de la géométrie algébrique sur le semi-corps tropical  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$ . Cette description est limitée au cas des courbes tropicales dans  $\mathbb{R}^2$  et est orientée vers les problèmes énumératifs présentés dans le texte d'E. Brugallé (ce volume). On renvoie à [20, 9] pour une information plus complète sur les variétés tropicales.

Soit

$$p(x, y) = \sum_{(k, \ell) \in \Lambda_p} a_{k, \ell} x^k y^\ell$$

un polynôme (de Laurent) à deux variables et à coefficients réels (ici  $\Lambda_p$  est une collection finie de points ayant des coordonnées entières dans  $\mathbb{R}^2$ ). Si on considère  $p$  comme *polynôme tropical* (c'est-à-dire, si on remplace dans ce polynôme l'addition et la multiplication habituelles par leurs analogues tropicales), on obtient une fonction convexe

affine par morceaux

$$f_p(x, y) = \max_{(k, \ell) \in \Lambda_p} \{a_{k, \ell} + kx + \ell y\}.$$

Cette fonction est définie sur  $\mathbb{R}^2$  et prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}$  (en fait, pour être plus précis, on peut dire que cette fonction est définie sur  $(\mathbb{R}_{\text{trop}})^2$  et prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}_{\text{trop}}$ ). La fonction  $f_p$  s'appelle la *transformée de Legendre* de la fonction  $\nu_p : \Lambda_p \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\nu_p(k, \ell) = -a_{k, \ell}$ , pour tout  $(k, \ell) \in \Lambda_p$ .

Pour introduire la courbe tropicale définie par notre polynôme tropical, considérons le *lieu des coins*  $T_p$  de la fonction  $f_p$  : le sous-ensemble  $T_p$  de  $\mathbb{R}^2$  est formé par les points où la fonction  $f_p$  n'est pas localement affine. Le graphe  $\Gamma_p$  de la fonction  $f_p$  est une surface polyédrale dans  $\mathbb{R}^3$ . En projetant sur  $\mathbb{R}^2$  la réunion des sommets et des arêtes de  $\Gamma_p$ , on obtient  $T_p$ . L'ensemble  $T_p$  contient un nombre fini de *sommets* (qui sont les images des sommets de  $\Gamma_p$ ) et un nombre fini d'*arêtes* (qui sont les images des arêtes de  $\Gamma_p$ ). Si  $T_p$  n'est pas une droite, chaque arête de  $T_p$  est soit un segment reliant deux sommets, soit une demi-droite ayant un sommet pour extrémité. Dans le deuxième cas, on dit que l'arête en question est un *bout* de  $T_p$ .

**Exemple 3.1.** Soit  $p(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$  un polynôme tropical de degré 1. L'ensemble  $T_p$  associé à  $p$  est la réunion de trois demi-droites qui ont la même extrémité. Les directions des trois bouts de  $T_p$  sont, respectivement, sud, ouest et nord-est (voir la figure 1). Dans ce cas particulier, une modification des coefficients de  $p$  résulte en translation de  $T_p$ . L'extrémité commune des trois arêtes de  $T_p$  est le point  $(c - a, c - b)$ .

**Exemple 3.2.** Le polynôme  $p(x, y) = x$  produit la fonction affine  $f_p : (x, y) \mapsto 1 + x$  (et pas la fonction  $(x, y) \mapsto x$ ), car, du point de vue tropical, on a  $p(x, y) = 1 \odot x$ . Dans ce cas, l'ensemble  $T_p$  est vide.

Chaque arête de l'ensemble  $T_p$  associé à un polynôme tropical

$$p(x, y) = \bigoplus_{(k, \ell) \in \Lambda_p} a_{k, \ell} \odot x^{\odot k} y^{\odot \ell}$$

(ici  $x^{\odot k}$  et  $y^{\odot \ell}$  sont la  $k$ -ème puissance tropicale de  $x$  et la  $\ell$ -ème puissance tropicale de  $y$ , respectivement) peut être munie d'un entier strictement positif de la façon suivante. Soit  $\sigma$  une arête de  $T_p$ .



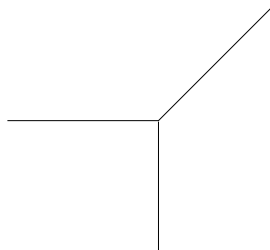


FIGURE 1. Une droite tropicale

Notons  $\hat{\sigma}$  l'arête de  $\Gamma_p$  telle que la projection de  $\hat{\sigma}$  coïncide avec  $\sigma$ . L'arête  $\hat{\sigma}$  est adjacente à deux faces de  $\Gamma_p$  contenues dans les graphes de deux fonctions affines

$$(x, y) \mapsto a_{k_1, \ell_1} + k_1 x + \ell_1 y, \quad (x, y) \mapsto a_{k_2, \ell_2} + k_2 x + \ell_2 y,$$

où  $(k_1, \ell_1)$  et  $(k_2, \ell_2)$  sont des points de  $\Lambda_p$ . Associons à  $\sigma$  le *poids*  $w(\sigma)$  égal à la *longueur entière* du segment reliant les points  $(k_1, \ell_1)$  et  $(k_2, \ell_2)$ . (Un point de  $\mathbb{R}^2$  est dit *entier*, si les deux coordonnées de ce point sont entières ; pour un segment reliant deux points entiers de  $\mathbb{R}^2$ , la *longueur entière* de ce segment est le nombre de ses points entiers diminué de 1 ; par exemple, le segment reliant les points  $(3, 0)$  et  $(0, 3)$  a la longueur entière 3.)

L'ensemble  $T_p$  dont les arêtes sont munies des poids définis ci-dessus s'appelle la *courbe tropicale* associée au polynôme tropicale  $p$ . On utilise la même notation  $T_p$  pour cette courbe tropicale. L'enveloppe convexe  $\Delta_p$  (dans  $\mathbb{R}^2$ ) de  $\Lambda_p$  s'appelle le *polygone de Newton* de  $p$  (parfois, on dit que  $\Delta_p$  est le polygone de Newton de la courbe tropicale  $T_p$ ). Si  $\Delta_p$  est le triangle à sommets  $(0, 0)$ ,  $(d, 0)$  et  $(0, d)$ , où  $d$  est un entier strictement positif, on dit que notre courbe tropicale est *de degré*  $d$ . La figure 2 montre certaines courbes tropicales de degrés 1, 2 et 3 (sur les figures, on n'indique que les poids différents de 1).

Un bout quelconque d'une courbe tropicale de degré  $d$  a une des trois directions : sud, ouest ou nord-est. Pour toute courbe tropicale de degré  $d$ , le nombre de bouts (comptés avec les poids) ayant une direction donnée est égal à  $d$ . Ces affirmations seront justifiées dans la section suivante.

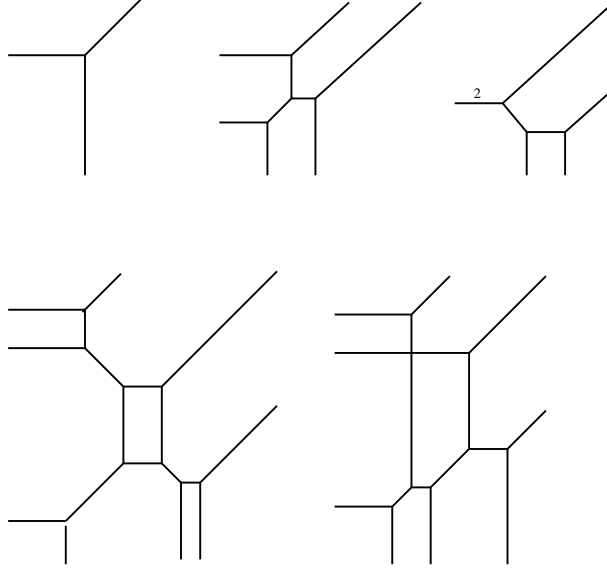


FIGURE 2. Exemples de courbes tropicales de degrés 1, 2 et 3

**3.2. Dualité.** L'utilisation d'une transformation de Legendre indique la présence d'une dualité. Dans notre cas, il y a une dualité entre la subdivision  $\Theta_p$  du plan donnée par une courbe tropicale  $T_p$  et une certaine subdivision du polygone de Newton de  $p$ .

La subdivision en question de  $\Delta_p$  est définie par la fonction  $\nu_p : (k, \ell) \mapsto -a_{k, \ell}$  de la façon suivante. Considérons le graphe de  $\nu_p$  : c'est un ensemble fini de points dans  $\mathbb{R}^3$ . L'enveloppe convexe de ce graphe est un polytope convexe dans  $\mathbb{R}^3$ . Quand on le regarde par-dessous, on voit un certain nombre de faces, et quand on projette ces faces sur  $\Delta_p$  on obtient une subdivision de  $\Delta_p$ . Notons  $\Phi_p$  cette subdivision.

On a donc, d'une part, une subdivision du polygone de Newton, et d'autre part une subdivision du plan donnée par la courbe tropicale. Ces deux subdivisions sont duales l'une de l'autre.

**Théorème 3.3 (Théorème de dualité).** *Pour tout polynôme tropical*

$$p(x, y) = \bigoplus_{(k, \ell) \in \Lambda_p} a_{k, \ell} \odot x^{\odot k} y^{\odot \ell}$$

*tel que son polygone de Newton  $\Delta_p$  soit non dégénéré (c'est-à-dire, ne soit pas contenu dans une droite), il existe une bijection  $\mathcal{B}$  entre les*

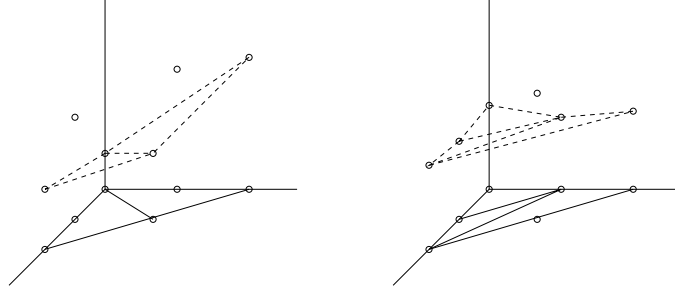


FIGURE 3. Exemples de subdivisions du triangle à sommets  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  et  $(0,2)$

éléments de  $\Phi_p$  d'un côté et les éléments de  $\Theta_p$  de l'autre côté telle que

- pour chaque polygone  $\Pi$  de  $\Phi_p$ , l'élément  $\mathcal{B}(\Pi)$  soit un sommet de  $T_p$ ,
- pour chaque arête  $E$  de  $\Phi_p$ , l'élément  $\mathcal{B}(E)$  soit une arête de  $T_p$ , et les arêtes  $E$  et  $\mathcal{B}(E)$  soient orthogonales,
- une arête  $E$  de  $\Phi_p$  soit contenu dans un côté de  $\Delta_p$  si et seulement si  $\mathcal{B}(E)$  est un bout de  $T_p$ ,
- pour chaque sommet  $V$  de  $\Phi_p$ , l'élément  $\mathcal{B}(V)$  soit une région de  $\mathbb{R}^2 \setminus T_p$ ,
- la correspondance  $\mathcal{B}$  renverse la relation d'incidence.

Remarquons que, pour toute arête d'une courbe tropicale, le poids de cette arête est égal à la longueur entière de l'arête duale.

Le théorème 3.3 peut être facilement démontré à l'aide des deux lemmes suivants.

**Lemme 3.4.** *Soit*

$$p(x, y) = \bigoplus_{(k, \ell) \in \Lambda_p} a_{k, \ell} \odot x^{\odot k} y^{\odot \ell}$$

un polynôme tropical, et  $(i, j)$  un vecteur à coordonnées entières dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors, le polynôme tropical

$$p(x, y) = \bigoplus_{(k, \ell) \in \Lambda_p} a_{k, \ell} \odot x^{\odot(k+i)} y^{\odot(\ell+j)}$$

définit la même courbe tropicale que le polynôme  $p$ .

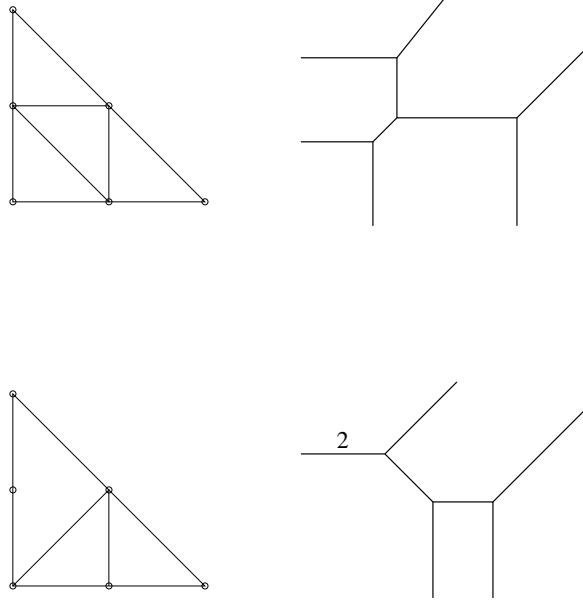


FIGURE 4. Exemples de coniques tropicales et leurs subdivisions duales

**Lemme 3.5.** *Soit*

$$p(x, y) = \bigoplus_{(k, \ell) \in \Lambda_p} a_{k, \ell} \odot x^{\odot k} y^{\odot \ell}$$

*un polynôme tropical, et  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L : (k, \ell) \mapsto \alpha k + \beta \ell + \gamma$ , une fonction affine. Alors, la courbe tropicale définie par le polynôme tropical*

$$\bigoplus_{(k, \ell) \in \Lambda_p} (a_{k, \ell} + L(k, \ell)) \odot x^{\odot k} y^{\odot \ell}$$

*peut être obtenue de la courbe tropicale  $T_p$  par la translation de vecteur  $(-\alpha, -\beta)$ .*

**3.3. Description géométrique.** Les courbes tropicales dans  $\mathbb{R}^2$  peuvent être décrites de façon géométrique. Soit

- $\mathcal{V}$  une collection finie de points distincts dans  $\mathbb{R}^2$ ,
- $\mathcal{E}_b$  une collection finie de segments dont les extrémités appartiennent à  $\mathcal{V}$ ,
- $\mathcal{E}_n$  une collection finie de demi-droites dont les extrémités appartiennent à  $\mathcal{V}$ .

Supposons que l'intersection de deux éléments quelconques de  $\mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$  est soit un point de  $\mathcal{V}$ , soit vide. Considérons une fonction  $w : \mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Pour chaque élément  $e$  de  $\mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$ , le nombre  $w(e)$  s'appelle le *poids* de  $e$ . Un tel quadruplet  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_n, w)$  s'appelle un *graphe rectiligne pondéré*. Les éléments de  $\mathcal{V}$  (respectivement, de  $\mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$ ) s'appellent *sommets* (respectivement, *arêtes*) du graphe rectiligne pondéré  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_n, w)$ .

Un graphe rectiligne pondéré  $(\mathcal{V}, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_n, w)$  est dit *équilibré* si

- chaque arête dans  $\mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$  a une pente rationnelle,
- aucun sommet dans  $\mathcal{V}$  n'est adjacent à exactement deux arêtes dans  $\mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$ ,
- pour tout sommet  $v$  dans  $\mathcal{V}$ , on a  $\sum_{e_i \in \mathcal{E}(v)} w(e_i) \cdot \vec{e}_i = 0$ , où  $\mathcal{E}(v) \subset \mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$  est l'ensemble formé par les arêtes dans  $\mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$  qui sont adjacentes à  $v$ , et  $\vec{e}_i$  est le plus petit vecteur à coordonnées entières sortant de  $v$  le long de  $e_i$ .

La dernière propriété de la définition ci-dessus s'appelle la *condition d'équilibre*.

**Théorème 3.6.** *Toute courbe tropicale  $T$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $T$  (considéré comme ensemble) ne soit pas une droite représente un graphe rectiligne pondéré équilibré. Inversement, tout graphe rectiligne pondéré équilibré représente une courbe tropicale.*

*Démonstration.* Soit  $T_p$  la courbe tropicale associée à un polynôme tropical  $p$ . Supposons que  $T_p$  n'est pas une droite, et considérons le graphe rectiligne pondéré  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_n, w)$  tel que l'ensemble  $\mathcal{V}$  (respectivement,  $\mathcal{E}_b, \mathcal{E}_n$ ) soit formé par les sommets (respectivement, les arêtes bornées, les bouts) de  $T_p$ , et les poids des arêtes de  $G$  coïncident avec les poids des arêtes correspondantes de  $T_p$ . Remarquons que

- chaque arête de la subdivision duale  $\Phi_p$  du polygone de Newton de  $T_p$  a une pente rationnelle,
- chaque polygone dans  $\Phi_p$  a au moins trois côtés,
- pour chaque polygone dans  $\Phi_p$  à sommets  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , on a  $\overrightarrow{V_1 V_2} + \dots + \overrightarrow{V_{n-1} V_n} + \overrightarrow{V_n V_1} = 0$ .

Donc le Théorème 3.3 implique que le graphe  $G$  est équilibré.

Pour démontrer la deuxième partie de l'énoncé, considérons un graphe rectiligne pondéré équilibré  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_n, w)$ , et choisissons une région  $R_1$  du complémentaire de  $G$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Associons à  $R_1$  une fonction affine arbitraire  $\varphi_{R_1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_{R_1}(x, y) = k_{R_1}x + \ell_{R_1}y + a_{R_1}$ . Soit  $R_2$  une région voisine de  $R_1$ , c'est-à-dire, une région telle que l'intersection  $e$  des adhérences de  $R_1$  et  $R_2$  soit une arête dans  $\mathcal{E}_b \cup \mathcal{E}_n$ . Associons à  $R_2$  la fonction affine  $\varphi_{R_2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_{R_2}(x, y) = k_{R_2}x + \ell_{R_2}y + a_{R_2}$  telle que  $((k_{R_2} - k_{R_1})/w(e), (\ell_{R_2} - \ell_{R_1})/w(e))$  soit le plus petit vecteur à coordonnées entières normal à  $e$  et pointé vers  $R_2$ , et les restrictions de  $\varphi_{R_1}$  and  $\varphi_{R_2}$  sur  $e$  coïncident. Continuant de la même manière, on associe à toute région  $R$  du complémentaire de  $G$  dans  $\mathbb{R}^2$  une fonction affine  $\varphi_R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_R(x, y) = k_Rx + \ell_Ry + a_R$ . La condition d'équilibre garantie que la fonction  $\varphi_R$  ne dépend pas de la suite de régions utilisée dans la définition de  $\varphi_R$ . On obtient une collection finie  $\Lambda$  de points entiers  $(k_R, \ell_R)$  (où  $R$  parcourt toutes les régions du complémentaire de  $G$  dans  $\mathbb{R}^2$ ) et un polynôme tropical

$$p(x, y) = \bigoplus_{(k_R, \ell_R) \in \Lambda} a_{k_R, \ell_R} \odot x^{\odot k_R} y^{\odot \ell_R}.$$

Le graphe  $G$  représente la courbe tropicale  $T_p$  définie par  $p$ . □

La construction ci-dessus produit une courbe tropicale à partir d'un graphe rectiligne pondéré équilibré. Le polygone de Newton de la courbe obtenue n'est déterminé par le graphe de départ qu'à une translation de vecteur à coordonnées entières près.

**3.4. Courbes tropicales irréductibles.** Soient  $p_1, \dots, p_n$  des polynômes tropicaux qui définissent dans  $\mathbb{R}^2$  des courbes tropicales  $T_1, \dots, T_n$ , respectivement. La somme  $T_1 + \dots + T_n$  des courbes tropicales  $T_1, \dots, T_n$  est la courbe tropicale définie par le polynôme tropical  $p_1 \odot \dots \odot p_n$ . Comme ensemble, la courbe tropicale  $T_1 + \dots + T_n$  est la réunion des ensembles  $T_1, \dots, T_n$ , et le poids de chaque arête de  $T_1 + \dots + T_n$  est égal à la somme des poids des arêtes correspondantes des courbes  $T_1, \dots, T_n$ . Une courbe tropicale dans  $\mathbb{R}^2$  est dite *réductible* si elle peut être représentée comme somme de deux courbes tropicales plus petites. Une courbe tropicale non réductible dans  $\mathbb{R}^2$  est dite *irréductible*. Par exemple, les coniques tropicales présentées sur la figure 4 sont irréductibles. Par contre, la conique tropicale présentée sur la figure 5 est réductible.

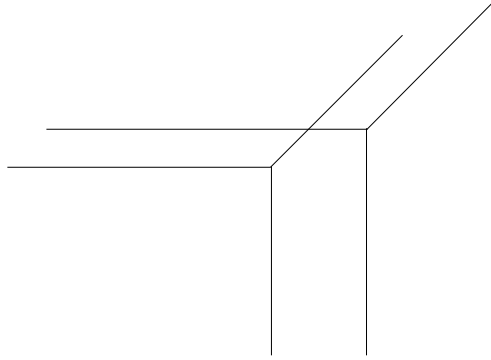


FIGURE 5. Une conique tropicale réductible

**3.5. Version tropicale du théorème de Bézout.** Les courbes tropicales ont beaucoup de propriétés en commun avec les courbes algébriques complexes. Par exemple, deux droites tropicales en position générale une par rapport à l'autre ont exactement un point commun. Cette observation peut être généralisée de la façon suivante (voir, par exemple, [27]).

**Théorème 3.7 (Version tropicale du théorème de Bézout)**

Soient  $T_1$  et  $T_2$  des courbes tropicales dans  $\mathbb{R}^2$  de degrés  $m_1$  et  $m_2$ , respectivement. Supposons que  $T_1$  et  $T_2$  sont en position générale (cette condition signifie que  $T_1$  et  $T_2$  ne se coupent qu'en points intérieurs d'arêtes). Alors, le nombre de points d'intersection (comptés avec certaines multiplicités) de  $T_1$  et  $T_2$  est égal à  $m_1 m_2$ . Les multiplicités des points d'intersection sont définies de la façon suivante. Considérons un point d'intersection d'une arête  $e_1$  de  $T_1$  et d'une arête  $e_2$  de  $T_2$ . Soient  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$  les plus petits vecteurs directeurs à coordonnées entières de  $e_1$  et  $e_2$ , respectivement. Alors, la multiplicité du point d'intersection en question est égale à

$$w(e_1)w(e_2) |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

*Démonstration.* Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels tels que  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$  et  $\alpha/\beta$  soit irrationnel. Pour tout nombre réel positif  $t$ , notons  $T_1(t)$  l'image de la courbe tropicale  $T_1$  par la translation de vecteur  $(t\alpha, t\beta)$  (remarquons que  $T_1(t)$  est une courbe tropicale de degré  $m_1$ ).

Il existe un nombre positif  $\tilde{t}$  tel que tout sommet de  $T_1(\tilde{t})$  ait sa première coordonnée strictement plus petite que la première coordonnée de tout sommet de  $T_2$ , et tout sommet de  $T_1(\tilde{t})$  ait sa deuxième coordonnée strictement plus grande que la deuxième coordonnée de tout sommet de  $T_2$ . Tout point d'intersection de  $T_1(\tilde{t})$  et  $T_2$  est un point d'intersection d'un bout vertical de  $T_1(\tilde{t})$  et d'un bout horizontal de  $T_2$ . Donc, le nombre de points d'intersection, comptés avec les multiplicités, de  $T_1(\tilde{t})$  et  $T_2$  est égal à  $m_1 m_2$ .

D'autre part, sur l'intervalle  $[0, \tilde{t}]$ , il n'y a qu'un nombre fini de valeurs  $t$  telles que les courbes tropicales  $T_1(t)$  et  $T_2$  ne soient pas en position générale. Si  $t'$  est une telle valeur, alors, la condition d'équilibre implique que, pour tout nombre  $\varepsilon$  strictement positif et suffisamment petit, le nombre de points d'intersection, comptés avec les multiplicités, des courbes tropicales  $T_1(t' - \varepsilon)$  et  $T_2$  est égal au nombre de points d'intersection, comptés avec les multiplicités, des courbes tropicales  $T_1(t' + \varepsilon)$  et  $T_2$ . Par conséquent, le nombre de points d'intersection, comptés avec les multiplicités, de  $T_1$  et  $T_2$  est égal à  $m_1 m_2$ .  $\square$

Avant de formuler une généralisation du théorème que l'on vient de démontrer, introduisons la notion de *volume mixte* de polytopes convexes. Soit  $n$  un entier strictement positif, et soient  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  des polytopes convexes dans  $\mathbb{R}^n$  (chacun de ces polytopes est l'enveloppe convexe d'une collection finie de points). Pour tous nombres réels positifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , considérons le polytope  $\lambda_1 \Pi_1 + \dots + \lambda_n \Pi_n$  (ce polytope est formé par les points de la forme  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ , où  $x_i \in \Pi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). Le volume (euclidien standard) du polytope  $\lambda_1 \Pi_1 + \dots + \lambda_n \Pi_n$  est un polynôme de degré  $n$  en  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Ce polynôme a un monôme de la forme  $M \lambda_1 \dots \lambda_n$ . En divisant le coefficient  $M$  du monôme en question par  $n!$ , on obtient la quantité qui s'appelle *volume mixte* des polytopes  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  et est notée  $\text{Vol}_n(\Pi_1, \dots, \Pi_n)$ .

Si tous les polytopes  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  coïncident avec un polytope  $\Pi$ , alors le volume mixte de  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  est égal au volume  $\text{vol}(\Pi)$  de  $\Pi$ . Si  $n = 2$ , alors le volume mixte de  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  s'appelle aussi *aire mixte* de  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  et est égal à

$$\frac{\text{vol}(\Pi_1 + \Pi_2) - \text{vol}(\Pi_1) - \text{vol}(\Pi_2)}{2}.$$



**Théorème 3.8 (Version tropicale du théorème de Bernstein)**

Le nombre de points d'intersection, comptés avec les multiplicités, de deux courbes tropicales en position générale dans  $\mathbb{R}^2$  est égal à  $2 \text{Vol}_2(\Delta_1, \Delta_2)$ , où  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont des polygones de Newton de ces courbes.

Si  $\Pi_i$ ,  $i = 1, 2$ , est le triangle à sommets  $(0, 0)$ ,  $(m_i, 0)$  et  $(0, m_i)$ , alors le polygone  $\Pi_1 + \Pi_2$  est le triangle à sommets  $(0, 0)$ ,  $(m_1 + m_2, 0)$ ,  $(0, m_1 + m_2)$ , et l'aire mixte de  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  est égale à  $m_1 m_2 / 2$ . Dans ce cas, le Théorème 3.8 se réduit au Théorème 3.7.

Considérons un autre exemple. Soit  $\Pi_1$  le trapèze à sommets  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 4)$ , et  $\Pi_2$  le triangle à sommets  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 3)$ ; voir le dessin 6.

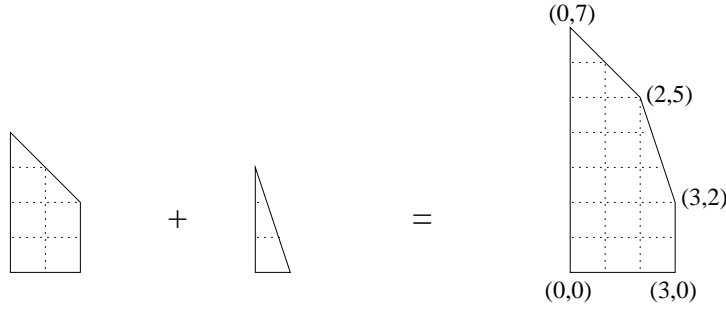


FIGURE 6. La somme d'un trapèze et d'un triangle

Dans ce cas, la somme  $\Pi_1 + \Pi_2$  est un pentagone ayant l'aire 15,5. L'aire mixte de  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  est égale à 4. Donc, une courbe tropicale  $T_1$  ayant  $\Pi_1$  pour polygone de Newton et une courbe tropicale  $T_2$  ayant  $\Pi_2$  pour polygone de Newton se coupent en 8 points (si on compte les points d'intersection avec les multiplicités et si les courbes tropicales  $T_1$  et  $T_2$  sont en position générale).

Si  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont deux polygones convexes dans  $\mathbb{R}^2$ , et  $\Pi'_2$  est un polygone convexe entièrement contenu dans  $\Pi_2$ , alors

$$\text{Vol}_2(\Pi_1, \Pi'_2) \leq \text{Vol}_2(\Pi_1, \Pi_2).$$

Essayez de démontrer cette affirmation (par exemple, en utilisant le Théorème 3.8). Remarquons que l'on peut avoir l'égalité

$\text{Vol}_2(\Pi_1, \Pi'_2) = \text{Vol}_2(\Pi_1, \Pi_2)$  même si  $\Pi'_2 \subsetneq \Pi_2$ . Par exemple, l'aire mixte du triangle à sommets  $(0,0)$ ,  $(4,0)$ ,  $(0,4)$  et du carré à sommets  $(0,0)$ ,  $(2,0)$ ,  $(2,2)$ ,  $(0,2)$  (ces polygones sont représentés sur la figure 7) est égale à 8, c'est-à-dire, à l'aire mixte de deux triangles à sommets  $(0,0)$ ,  $(4,0)$ ,  $(0,4)$ .

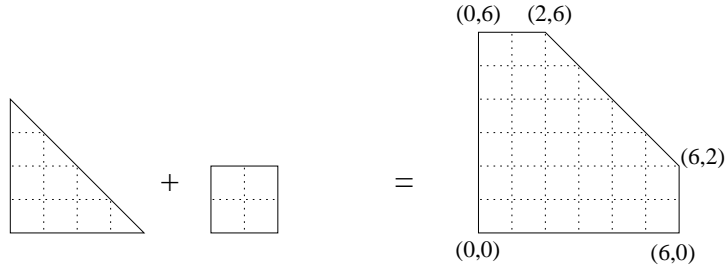


FIGURE 7. La somme d'un triangle et d'un carré

Un autre exemple est fourni par les deux segments  $[(0,0), (m_1, 0)]$  et  $[(0,0), (0, m_2)]$  : leur aire mixte est égale à  $m_1 m_2 / 2$ .

Le volume mixte a beaucoup de propriétés importantes. Voici une de ses propriétés.

**Théorème 3.9 (Inégalité d'Alexandrov-Fenchel ; voir, par exemple, [3])**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2, et soient  $\Pi_1, \dots, \Pi_n$  des polytopes convexes dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors,

$$\begin{aligned} \text{Vol}_n(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n)^2 \\ \geq \text{Vol}_n(\Pi_1, \Pi_1, \Pi_3, \dots, \Pi_n) \text{Vol}_n(\Pi_2, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n). \end{aligned}$$

Il est remarquable que l'inégalité de Alexandrov-Fenchel peut être démontrée en utilisant une approche algèbro-géométrique (voir [28, 11]).

**3.6. Problèmes énumératifs.** Si on choisit deux points en position générale dans  $\mathbb{R}^2$  (ici la position générale signifie que les points choisis ne sont pas sur la même droite horizontale, sur la même droite verticale ou sur la même droite de pente 1), alors, par ces deux points, on peut faire passer exactement une droite tropicale. Notons  $\varrho$  la pente de la droite (habituelle) passant par les deux points choisis.

- Si  $\varrho \in (-\infty, 0)$ , alors le bout « sud » et le bout « ouest » de la droite tropicale  $T$  en question contiennent chacun un point choisi.
- Si  $\varrho \in (0, 1)$ , alors le bout « ouest » et le bout « nord-est » de  $T$  contiennent chacun un point choisi.
- Si  $\varrho \in (1, +\infty)$ , alors le bout « sud » et le bout « nord-est » de  $T$  contiennent chacun un point choisi.

L'observation concernant l'unicité de la droite tropicale qui passe par deux points en position générale dans  $\mathbb{R}^2$  a une généralisation très importante : le théorème de correspondance de G. Mikhalkin (voir [19]). Ce théorème est la base des applications spectaculaires de la géométrie tropicale en géométrie énumérative et est présenté dans le texte d'E. Brugallé.

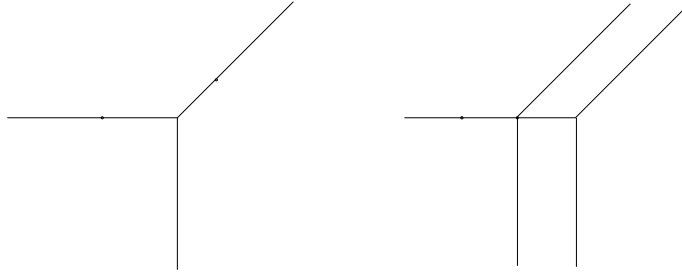


FIGURE 8. Droite tropicale passant par deux points

#### 4. Amibes de courbes complexes

Dans les applications énumératives de la géométrie tropicale, un rôle très important est joué par les *amibes* de courbes complexes.

Considérons le *tore complexe*  $(\mathbb{C}^*)^2$ , où  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Une *courbe algébrique*  $X$  dans  $(\mathbb{C}^*)^2$  est le lieu des zéros d'un polynôme de Laurent  $P \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ ,

$$P(z, w) = \sum_{(k, \ell) \in \Lambda_P} A_{k, \ell} z^k w^\ell,$$

où  $\Lambda_P \subset \mathbb{Z}^2$  est un ensemble fini, appelé le *support* de  $P$ , et  $A_{k, \ell} \neq 0$  pour tout  $(k, \ell) \in \Lambda_P$ . Comme ci-dessus, on appelle *polygone de Newton* de  $P$  l'enveloppe convexe (dans  $\mathbb{R}^2$ ) du support  $\Lambda_P$ . Notons  $\Delta_P$  le polygone de Newton de  $P$ .

Si  $\Lambda_P \subset \mathbb{N}^2$ , on a affaire à un polynôme habituel (et non à un polynôme de Laurent). Un polynôme complexe à deux variables définit une courbe dans  $\mathbb{C}^2$ . Deux polynômes  $P$  et  $Q$  définissent la même courbe dans  $\mathbb{C}^2$  si et seulement si ils sont proportionnels :  $P = \lambda Q$ , où  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  ; ils ont alors le même polygone de Newton, et on l'appelle le polygone de Newton de la courbe  $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = 0\}$ .

Pour les courbes dans le tore complexe  $(\mathbb{C}^*)^2$ , la situation est un peu différente : deux polynômes de Laurent  $P$  et  $Q$  définissent la même courbe dans le tore complexe  $(\mathbb{C}^*)^2$  si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  et  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $Q(z, w) = \lambda z^i w^j P(z, w)$  ; on a alors  $\Lambda_Q = \Lambda_P + (i, j)$  et  $\Delta_Q = \Delta_P + (i, j)$ . Par conséquent, on peut parler du polygone de Newton  $\Delta_X$  d'une courbe  $X = \{(z, w) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid P(z, w) = 0\}$ , mais il est défini *modulo* les translations de vecteurs à coordonnées entières (comparer cette situation avec celle des polygones de Newton des courbes tropicales dans  $\mathbb{R}^2$  ; voir section 3.3).

Dans le cas de  $(\mathbb{C}^*)^2$ , le théorème de Bernstein [2], dont le Théorème 3.8 est une version tropicale, affirme que, si  $P_1$  et  $P_2$  sont des polynômes de Laurent ayant des polygones de Newton  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , respectivement, et  $P_1$  et  $P_2$  sont suffisamment génériques (parmi les polynômes de Laurent ayant les polygones de Newton  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ ), alors le nombre de racines dans  $(\mathbb{C}^*)^2$  du système  $P_1(z, w) = P_2(z, w) = 0$  est égal à  $2 \text{Vol}_2(\Delta_1, \Delta_2)$ .

Maintenant, considérons l'application

$$\begin{aligned} \text{Log} : (\mathbb{C}^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z, w) &\longmapsto (\ln |z|, \ln |w|). \end{aligned}$$

Pour une courbe algébrique  $X$  dans  $(\mathbb{C}^*)^2$ , l'*amibe*  $\mathcal{A}(X)$  de  $X$  est l'image de  $X$  par l'application  $\text{Log}$ .

L'amibe est toujours un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^2$ . Son complémentaire est non vide et possède un nombre fini de composantes connexes, qui sont toutes convexes. L'amibe  $\mathcal{A}(X)$  a un nombre fini d'asymptotes le long desquelles elle va vers l'infini. Les directions asymptotiques sont orthogonales aux côtés du polygone de Newton  $\Delta_X$  (voir [5]).

Les amibes permettent d'étudier et, d'une certaine façon, de visualiser les courbes algébriques complexes. Le cas des droites est particulièrement simple.

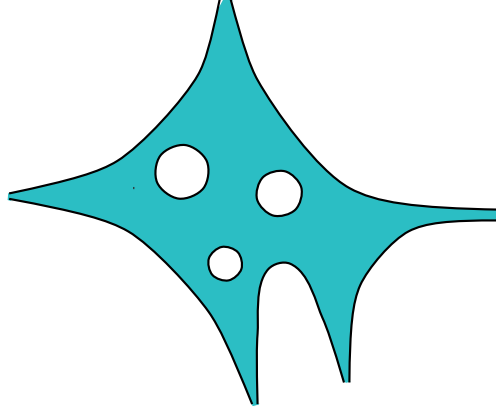


FIGURE 9. Amibe d'une courbe

L'amibe d'une droite  $X$  définie dans  $(\mathbb{C}^*)^2$  par un polynôme  $az + bw + c$  tel que  $abc \neq 0$  peut être décrite de la façon suivante. Si l'on pose

$$u = \ln |z| \quad \text{et} \quad v = \ln |w|,$$

alors l'amibe  $\mathcal{A}(X)$  est l'ensemble des points  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  qui vérifient les trois inégalités

$$\begin{aligned} u &\leq -\ln |a| + \ln(|c| + |b|e^v), \\ v &\leq -\ln |b| + \ln(|c| + |a|e^u), \\ |a|e^u + |b|e^v &\geq |c|. \end{aligned}$$

Le polygone de Newton de la droite  $X$  est (à translation près) le triangle de sommets  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ , donc les directions asymptotiques de l'amibe de la droite  $X$  sont sud, ouest et nord-est. Au-dessus de chaque point  $(u, v)$  qui se trouve à l'intérieur de  $\mathcal{A}(X)$ , il y a deux points de  $X$ , et au-dessus de chaque point  $(u, v)$  du bord de l'amibe, il n'y a qu'un seul point de  $X$  (cela **n'est pas** vrai pour l'amibe d'une courbe algébrique quelconque ; le cas d'une droite est très spécial). Donc, pour imaginer la droite  $X$ , on peut prendre deux copies de  $\mathcal{A}(X)$  et les recoller le long du bord. Du point de vue topologique, on obtient une sphère (de dimension 2) privée de trois points.

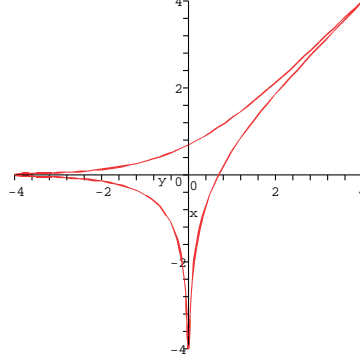


FIGURE 10. Amibe de la droite définie par le polynôme  $z + w + 1$ .

La notion d'amibe est apparue plusieurs fois en mathématiques, sous des noms différents. Sous le nom *amibe*, cette notion a été introduite par I.M. Gelfand, M. Kapranov et A. Zelevinsky [5] en 1994. Depuis, les amibes ont fait l'objet d'études approfondies et de généralisations diverses, notamment par M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh, H. Rullgård, L. Ronkin et G. Mikhalkin (voir, par exemple, [4, 15, 18, 17, 21, 22, 24, 25, 6]).

Citons seulement un des résultats importants concernant les amibes des courbes algébriques dans  $(\mathbb{C}^*)^2$ .

**Théorème 4.1 (M. Forsberg, M. Passare et A. Tsikh, [4])**

*Soit  $\Delta$  un polygone convexe à sommets entiers dans  $\mathbb{R}^2$ , et soit  $X$  une courbe algébrique dans  $(\mathbb{C}^*)^2$  telle que  $X$  ait  $\Delta$  comme polygone de Newton. Alors, il existe une fonction localement constante  $\text{Ind} : \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}(X) \rightarrow \Delta \cap \mathbb{Z}^2$  qui envoie des composantes connexes différentes du complémentaire de  $\mathcal{A}(X)$  sur des points entiers différents de  $\Delta$ . En particulier, le nombre de composantes connexes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}(X)$  est inférieur ou égal au nombre de points entiers de  $\Delta$ .*

## 5. Amibes non archimédiennes

Une des explications du phénomène de ressemblance des courbes tropicales et des courbes algébriques est le fait que toute courbe

tropicale dans  $\mathbb{R}^2$  peut être vue comme l'amibe d'une courbe algébrique définie sur un corps valué non archimédien.

Soient  $K$  un corps avec une norme, et  $V \subset (K^*)^2$  une courbe algébrique, c'est-à-dire, le lieu des zéros d'un polynôme (de Laurent)  $P \in K[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ ,

$$P(z, w) = \sum_{(k, \ell) \in \Lambda_P} A_{k, \ell} z^k w^\ell,$$

où  $\Lambda_P \subset \mathbb{Z}^2$  est un ensemble fini. La définition de l'amibe se généralise facilement à cette situation : l'amibe  $\mathcal{A}_K(V)$  est l'image de  $V$  par l'application

$$\begin{aligned} \text{Log} : (K^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (z, w) &\longmapsto (\ln |z|, \ln |w|), \end{aligned}$$

où  $|z|$  et  $|w|$  sont les normes de  $z$  et  $w$ , respectivement.

Une *valuation* (à valeurs réelles) d'un corps  $K$  est une fonction  $v : K^* \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tous  $z$  et  $w$  dans  $K$ , on ait

$$v(zw) = v(z) + v(w) \quad \text{et} \quad v(z + w) \geq \min\{v(z), v(w)\}.$$

Un corps muni d'une valuation est dit *valué non archimédien*. Si  $K$  est un corps valué non archimédien et  $v$  est sa valuation, on définit la norme  $|z|$  de  $z \in K^*$  par  $|z| = e^{-v(z)}$ , et on pose  $|0| = 0$ . L'amibe d'une variété algébrique  $V \subset (K^*)^n$  est l'image de  $V$  par l'application  $\text{Log} : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (-v(z_1), \dots, -v(z_n))$ .

Un exemple important d'un corps valué non archimédien est le corps  $\cup_{l \geq 1} k((t^{1/l}))$  des séries de Puiseux sur un corps  $k$ . Les éléments de ce corps sont les séries formelles  $b(t) = \sum_{r \in S} b_r t^r$  à coefficients dans  $k$  et à une variable  $t$  telles que  $S \subset \mathbb{Q}$  soit minoré et contenu dans une suite arithmétique. La valuation est donnée par le plus petit  $r$  tel que  $b_r \neq 0$ . Si  $k$  est algébriquement clos et de caractéristique 0, alors le corps des séries de Puiseux sur  $k$  est aussi algébriquement clos (voir, par exemple, [32]).

Un autre exemple est le corps  $\mathcal{K}$  des séries transfinies  $b(t) = \sum_{r \in S} b_r t^r$  à coefficients complexes et exposants réels (ici  $S \subset \mathbb{R}$  est un ensemble *bien ordonné*, c'est-à-dire, chaque sous-ensemble de  $S$  contient un élément minimal). Ce corps est algébriquement clos. La valuation non archimédienne  $v : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathbb{R}$  est encore une fois donnée par le plus petit  $r$  tel que  $b_r \neq 0$ .

Soit  $K$  un corps valué non archimédien algébriquement clos tel que  $v(K^*) \supset \mathbb{Q}$ . Considérons un polynôme  $P \in K[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ ,

$$P(z, w) = \sum_{(k, \ell) \in \Lambda_P} A_{k, \ell} z^k w^\ell,$$

où  $\Lambda_P \subset \mathbb{Z}^2$  est un ensemble fini, et  $A_{k, \ell} \neq 0$  pour tout  $(k, \ell) \in \Lambda_P$ . Notons  $V_P$  la courbe définie par  $P$  dans  $(K^*)^2$ . L'amibe  $\mathcal{A}_K(V_P)$  de  $V_P$  peut être décrite de la façon suivante.

Considérons le polynôme tropical

$$p(x, y) = \bigoplus_{(k, \ell) \in \Lambda_P} a_{k, \ell} \odot x^{\odot k} y^{\odot \ell},$$

où  $a_{k, \ell} = -v(A_{k, \ell})$  pour tout  $(k, \ell) \in \Lambda_P$ .

**Théorème 5.1 (M. Kapranov, [10]).** *L'adhérence  $\overline{\mathcal{A}(V_P)}$  de l'amibe  $\mathcal{A}_K(V_P) \subset \mathbb{R}^2$  coïncide (comme ensemble) avec la courbe tropicale  $T_p$  définie par  $p$ . Si la valuation  $v : K^* \rightarrow \mathbb{R}$  est surjective, alors  $\mathcal{A}(V_P)$  coïncide avec  $T_p$ .*

Le théorème de Kapranov montre en particulier que, contrairement au cas complexe, (l'adhérence de) l'amibe d'une courbe algébrique dans  $(K^*)^2$  ne dépend que des valuations des coefficients d'un polynôme définissant la courbe.

Un autre corollaire du théorème de Kapranov est le fait que le Théorème 4.1 a un analogue non archimédien : il existe une fonction localement constante  $\text{Ind} : \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{A}(V_P)} \rightarrow \Delta_P \cap \mathbb{Z}^2$ , où  $\Delta_P$  est le polygone de Newton de  $P$ , qui envoie des composantes connexes différentes du complémentaire de  $\overline{\mathcal{A}(V_P)}$  sur des points entiers différents de  $\Delta_P$ . En effet, toute région de  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{A}(V_P)}$  correspond à un monôme de  $P$  et est déterminée de façon unique par ce monôme.

Les amibes non archimédiennes sont des limites de certaines familles d'amibes de courbes complexes. Soient  $\Lambda$  une collection finie de points entiers dans  $\mathbb{R}^2$ , et  $\nu : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Une famille de polynômes complexes  $P_t(z, w) = \sum_{(k, \ell) \in \Lambda} a_{k, \ell} t^{\nu(k, \ell)} z^k w^\ell$  à deux variables s'appelle une *famille de patchwork* (cf. [29, 30]). Notons  $X(t)$  la courbe définie par  $P_t$  dans  $(\mathbb{C}^*)^2$ . Une famille de patchwork peut être vue comme polynôme  $P(z, w) = \sum_{(k, \ell) \in \Lambda} a_{k, \ell} t^{\nu(k, \ell)} z^k w^\ell$  à coefficients dans le corps  $\mathcal{K}$  des séries transfinies à coefficients complexes et exposants réels. Notons  $V_P$  la courbe définie par  $P$  dans  $(\mathcal{K}^*)^2$ .



Pour tout  $t > 0$ , considérons l'homothétie  $F_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $(x, y) \mapsto (-\frac{x}{\log t}, -\frac{y}{\log t})$ .

**Théorème 5.2 (G. Mikhalkin, [18], H. Rullgård, [26])**

*L'amibe  $\mathcal{A}_K(V_P) \subset \mathbb{R}^2$  est la limite dans la métrique de Hausdorff sur les compacts des images  $F_t(\mathcal{A}(X(t)))$  des amibes  $\mathcal{A}(X(t))$  quand  $t$  tend vers 0.*

Le théorème de Kapranov et d'autres relations entre la géométrie non archimédienne et la géométrie tropicale sont présentés en détails dans le texte de B. Teissier (ce volume).

La déquantification de Maslov des nombres réels strictement positifs peut être vue comme ombre réelle d'une déformation de la structure complexe de  $(\mathbb{C}^*)^2$ , une déformation qui produit en particulier une déformation d'amibes de courbes complexes vers des courbes tropicales. Ces déformations jouent un rôle central dans la démonstration du théorème de correspondance de G. Mikhalkin et dans les applications énumératives de la géométrie tropicale présentées dans le texte d'E. Brugallé (voir aussi [16, 19, 20, 7, 8, 9]).

## 6. Exercices

(1) Trouver un polynôme tropical dont la courbe tropicale associée est une droite verticale de poids 1 dans  $\mathbb{R}^2$ .

(2) Trouver un polynôme tropical dont la courbe tropicale associée est la droite  $y = 3x + 1$  de poids 2 dans  $\mathbb{R}^2$ .

(3) La figure 11 représente une courbe tropicale dans  $\mathbb{R}^2$  et sa subdivision duale. Quel est le degré de cette courbe ?

(4) Dessiner la courbe tropicale dans  $\mathbb{R}^2$  définie par le polynôme tropical

$$p(x, y) = 1 \oplus (-1) \odot x \oplus (-5) \odot x \odot x \oplus 1 \odot x \odot y \oplus 1 \odot y \odot y.$$

(5) Soit  $d$  un entier strictement positif, et  $\Delta$  le triangle à sommets  $(0, 0)$ ,  $(d, 0)$  et  $(0, d)$ .

– Quel est le nombre maximal possible de sommets d'une courbe tropicale dans  $\mathbb{R}^2$  ayant  $\Delta$  pour polygone de Newton ?

– Quel est le nombre minimal possible de sommets d'une courbe tropicale dans  $\mathbb{R}^2$  ayant  $\Delta$  pour polygone de Newton ?

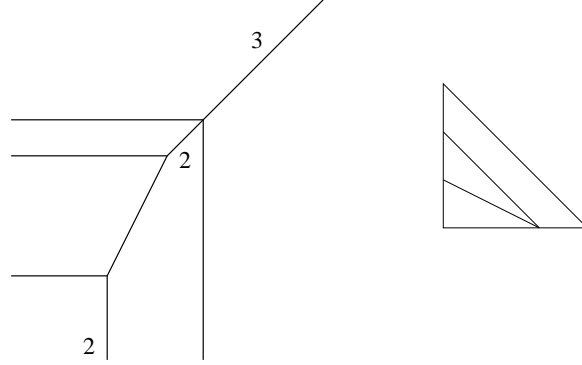


FIGURE 11

(6) Trouver un polygone convexe  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  à sommets entiers et deux polynômes tropicaux  $p_1$  et  $p_2$  ayant  $\Delta$  pour polygone de Newton tels que

- les courbes tropicales  $T_1$  et  $T_2$  définies dans  $\mathbb{R}^2$  par  $p_1$  et  $p_2$ , respectivement, coïncident en tant qu'ensembles (on ne tient pas compte du poids des arêtes des deux courbes tropicales en question),
- les subdivisions de  $\Delta$  duales aux subdivisions de  $\mathbb{R}^2$  définies par  $T_1$  et  $T_2$  ne coïncident pas.

(7) Considérons une courbe tropicale  $T$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $T$  ait le triangle à sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,2)$  comme polygone de Newton. La courbe  $T$  peut-elle être réductible ?

(8) Soit  $\Delta$  le carré à sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  et  $(0,1)$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

- Montrer que, par trois points en position générale dans  $\mathbb{R}^2$ , on peut tracer exactement une courbe tropicale de polygone de Newton  $\Delta$ . Essayer d'expliciter dans ce cas l'expression 'en position générale'.
- Combien de courbes tropicales réductibles de polygone de Newton  $\Delta$  passent par deux points en position générale dans  $\mathbb{R}^2$  ? (Ici, la position générale signifie que les points choisis ne sont pas sur la même droite horizontale ou sur la même droite verticale.)

(9) Soit  $\mathcal{K}$  le corps des séries transfinies  $b(t) = \sum_{r \in S} b_r t^r$  à coefficients complexes et exposants réels (ici  $S \subset \mathbb{R}$  est un ensemble bien

ordonné). Considérons la courbe  $V \subset (\mathcal{K}^*)^2$  définie par le polynôme  $1 + z + w + tzw$ . Trouver l'amibe non archimédienne  $\text{Log}_{\mathcal{K}}(V)$ .

(10) Soit  $K$  le corps des séries de Puiseux à coefficients complexes muni de sa valuation habituelle. Soit  $V$  une courbe dans  $(K^*)^2$  définie par un polynôme de degré 2.

- Le point  $(\sqrt{2}, 1)$  peut-il appartenir à l'amibe  $\mathcal{A}_K(V)$  de  $V$  ?
- Soit  $\overline{\mathcal{A}_K(V)}$  l'adhérence (dans  $\mathbb{R}^2$ ) de l'amibe  $\mathcal{A}_K(V)$  de  $V$ . Le point  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  peut-il appartenir à  $\overline{\mathcal{A}_K(V)}$  ?
- L'ensemble  $\overline{\mathcal{A}_K(V)}$  peut-il contenir un sous-ensemble homéomorphe à un cercle ?
- Trouver un polynôme  $P$  de degré 3 à deux variables et à coefficients dans  $K$  tel que l'adhérence  $\overline{\mathcal{A}_K(W)}$  de l'amibe  $\mathcal{A}_K(W) \subset \mathbb{R}^2$  de la courbe  $W$  définie par  $P$  dans  $(K^*)^2$  ait un sous-ensemble homéomorphe à un cercle.

## Références

- [1] G.M. BERGMAN – « The logarithmic limit-set of an algebraic variety », *Trans. Amer. Math. Soc.* **157** (1971), p. 459–469.
- [2] D.N. BERNSTEIN – « The number of roots of a system of equations », *Funct. Anal. Appl.* **9** (1975), no. 3, p. 183–185.
- [3] H. BUSEMANN – *Convex surfaces*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, vol. 6, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
- [4] M. FORSBERG, M. PASSARE & A. TSIKH – « Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas », *Adv. Math.* **151** (2000), no. 1, p. 45–70.
- [5] I.M. GEL'FAND, M.M. KAPRANOV & A.V. ZELEVINSKY – *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Mathematics : Theory & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [6] I. ITENBERG – « Amibes de variétés algébriques et dénombrement de courbes (d'après G. Mikhalkin) », in *Sém. Bourbaki (Vol. 2002/03)*, Astérisque, vol. 294, Société Mathématique de France, Paris, 2004, Exp. n° 921, p. 335–361.
- [7] I. ITENBERG, V. KHARLAMOV & E. SHUSTIN – « Welschinger invariant and enumeration of real rational curves », *Int. Math. Res. Not.* (2003), no. 49, p. 2639–2653.
- [8] ———, « Logarithmic equivalence of the Welschinger and the Gromov-Witten invariants », *Uspekhi Mat. Nauk* **59** (2004), no. 6(360), p. 85–110.

- [9] I. ITENBERG, G. MIKHALKIN & E. SHUSTIN – *Tropical algebraic geometry*, Oberwolfach Seminars, vol. 35, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [10] M. KAPRANOV – « Amoebas over non-Archimedean fields », Prépublication, 2000.
- [11] A. KHOVANSKII & K. KAVEH – « Convex bodies and algebraic equations on affine varieties », Prépublication [arXiv:0804.4095](#), 2008.
- [12] M. KONTSEVICH & Y. SOIBELMAN – « Homological mirror symmetry and torus fibrations », in *Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001, p. 203–263.
- [13] G.L. LITVINOV & V.P. MASLOV – « The correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications », in *Idempotency (Bristol, 1994)*, Publ. Newton Inst., vol. 11, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, p. 420–443.
- [14] G.L. LITVINOV, V.P. MASLOV & A.N. SOBOLEVSKIĬ – « Idempotent mathematics and interval analysis », *Vychisl. Tekhnol.* **6** (2001), no. 6, p. 47–70, [arXiv:math.SC/9911126](#).
- [15] G. MIKHALKIN – « Real algebraic curves, the moment map and amoebas », *Ann. of Math. (2)* **151** (2000), no. 1, p. 309–326.
- [16] ———, « Counting curves via lattice paths in polygons », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **336** (2003), no. 8, p. 629–634.
- [17] ———, « Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry », in *Different faces of geometry*, Int. Math. Ser. (N. Y.), vol. 3, Kluwer/Plenum, New York, 2004, p. 257–300.
- [18] ———, « Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces », *Topology* **43** (2004), no. 5, p. 1035–1065.
- [19] ———, « Enumerative tropical algebraic geometry in  $\mathbb{R}^2$  », *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), no. 2, p. 313–377 (electronic).
- [20] ———, « Tropical geometry and its applications », in *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 827–852.
- [21] G. MIKHALKIN & H. RULLGÅRD – « Amoebas of maximal area », *Int. Math. Res. Not.* (2001), no. 9, p. 441–451.
- [22] M. PASSARE & H. RULLGÅRD – « Amoebas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope », *Duke Math. J.* **121** (2004), no. 3, p. 481–507.
- [23] J.-J. RISLER – « Construction d’hypersurfaces réelles (d’après Viro) », in *Sem. Bourbaki (Vol. 1992/93)*, Astérisque, vol. 216, Société Mathématique de France, Paris, 1993, Exp. n° 763, p. 69–86.
- [24] L. RONKIN – « On zeros of almost periodic functions generated by functions holomorphic in a multicircular domain », in *Complex analysis in modern mathematics (Russian)*, FAZIS, Moscow, 2001, p. 239–251.
- [25] H. RULLGÅRD – « Stratification des espaces de polynômes de Laurent et la structure de leurs amibes », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), no. 5, p. 355–358.

- [26] ———, « Polynomial amoebas and convexity », Prépublication, Université de Stockholm, 2001.
- [27] B. STURMFELS – *Solving systems of polynomial equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 97, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [28] B. TEISSIER – « Du théorème de l'index de Hodge aux inégalités isopérimétriques », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **288** (1979), no. 4, p. A287–A289.
- [29] O. VIRO – « Gluing of algebraic hypersurfaces, smoothing of singularities and construction of curves », in *Proc. Leningrad Int. Topological Conf. (Leningrad, 1982)*, Nauka, Leningrad, 1983, (en russe), p. 149–197.
- [30] ———, « Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees 6 and 7 », in *Topology (Proceedings, Leningrad 1982)*, Lecture Notes in Math., vol. 1060, Springer, Berlin, 1984, p. 187–200.
- [31] ———, « Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper », in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progress in Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 135–146.
- [32] R.J. WALKER – *Algebraic Curves*, Princeton Mathematical Series, vol. 13, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1950.

---

I. ITENBERG, IRMA, Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes,  
67084 Strasbourg Cedex, France  
*E-mail* : [itenberg@math.u-strasbg.fr](mailto:itenberg@math.u-strasbg.fr)  
*Url* : <http://www-irma.u-strasbg.fr/~itenberg/>



---

# GÉOMÉTRIES ÉNUMÉRATIVES COMPLEXE, RÉELLE ET TROPICALE

*par*

Erwan Brugallé

---

*À Seal*

## 1. Introduction

Notre objectif ici est d'expliquer comment résoudre simplement, par des méthodes combinatoires, un grand nombre de problèmes énumératifs grâce à la géométrie tropicale.

La géométrie énumérative est la branche des mathématiques qui tente de répondre à des questions comme

- « combien de droites passent par 2 points dans le plan ? » (facile),
- « combien de coniques passent par 5 points dans le plan ? » (facile),
- « combien de cubiques (*i.e.* courbes définies par un polynôme de degré 3) passent par 9 points dans le plan ? » (facile),
- « combien de cubiques se recoupant une fois passent par 8 points dans le plan ? » (moins facile),...

Les problèmes énumératifs que nous considérons dans ce texte ont été posés en toute généralité au XIX<sup>e</sup> siècle.

Si nous comptons les courbes définies par des polynômes à coefficients complexes, alors le nombre de courbes ne dépend pas de la configuration de points choisie, tout comme le nombre de racines complexes d'un polynôme en une variable à coefficients complexes est toujours égal à son degré. Cela facilite quelque peu l'énumération des courbes complexes, mais il aura tout de même fallu attendre les années 1990 et les travaux de Kontsevich puis de Caporaso et Harris pour obtenir une réponse complète.

En revanche, si l'on compte les courbes définies par des polynômes à coefficients réels, ce nombre dépend fortement des points choisis, ce qui complique singulièrement le problème... Nous pouvons toujours affirmer que le nombre de courbes réelles est plus petit que le nombre de courbes complexes, tout comme le nombre de racines réelles d'un polynôme réel en une variable est plus petit que le nombre de ses racines complexes, cela ne nous avance finalement pas beaucoup. Au début des années 2000, Welschinger a montré qu'en comptant avec un signe  $+1$  ou  $-1$  les courbes réelles se recoupant un nombre maximum de fois, nous obtenons un nombre indépendant de la configuration de points choisie. De plus, ce nombre, appelé *invariant de Welschinger*, nous donne une borne inférieure sur le nombre de courbes réelles quelle que soit la configuration de points! Ainsi, grâce à ces invariants, Itenberg, Kharlamov et Shustin ont pu démontrer que par  $3d - 1$  points du plan, passait *toujours* une courbe algébrique réelle de degré  $d$  (*i.e.* définie par un polynôme en deux variables de degré  $d$  à coefficients réels) se recoupant un nombre maximum de fois.

La géométrie énumérative est un très joli domaine des mathématiques où de nombreux problèmes de base peuvent être résolus à l'aide de quelques idées astucieuses. Cependant, les techniques requises pour traiter un problème énumératif complexe ou réel plus général deviennent rapidement sophistiquées, et leur maîtrise demande beaucoup de temps et d'investissement.

Il est aussi possible de compter des courbes tropicales. Ces objets étant linéaires par morceaux, cela qui simplifie considérablement leur étude! En particulier, la géométrie énumérative tropicale est beaucoup plus simple que les géométries énumératives complexe ou réelle. De plus, un théorème très profond de Mikhalkin nous dit que l'on peut compter des courbes complexes ou réelles simplement en comptant des courbes tropicales. Ainsi, grâce à la géométrie tropicale et à un algorithme astucieux, Mikhalkin a pu calculer pour la première fois les invariants de Welschinger.

Ce texte est une introduction à la géométrie énumérative que j'espère compréhensible au niveau de première année de Master. Quelques notes de bas de page donnent des précisions sur certains termes employés, mais leur compréhension n'est absolument pas nécessaire à la compréhension du texte.



La section 2 est consacrée à l'initiation à la géométrie énumérative complexe et à la généralisation de la question « Combien de droites passent par 2 points du plan ? ». Dans la section 3, nous verrons que les choses se compliquent lorsque nous nous intéressons aux courbes réelles, et nous définirons les invariants de Welschinger. Les courbes tropicales et leur géométrie énumérative seront traitées à la section 4, puis nous expliquerons à la section 5 comment passer des courbes tropicales à des objets encore plus simples, les *diagrammes en étages*. Nous utiliserons ces diagrammes à la section 6 pour résoudre quelques problèmes énumératifs complexes et réels.

*Remerciements.* Je tiens à remercier chaleureusement Lucia Lopez de Medrano, Assia Mahboubi, Nicolas Puignau, Emmanuel Rey et Jean-Jacques Risler pour leur relecture attentive et leurs critiques constructives. Je remercie aussi le public des Journées Mathématiques X-UPS dont les commentaires ont contribué à améliorer le texte initial.

## 2. Géométrie énumérative complexe

**2.1. Échauffement.** C'est un fait admis de tout le monde, par 2 points distincts du plan passe une unique droite. Attardons-nous un instant sur la démonstration de cette proposition évidente.

Une droite du plan est donnée par une équation de la forme  $aX + bY + c = 0$  où  $a, b$  et  $c$  sont 3 nombres (réels ou complexes, peu importe ici). Un point  $p$  du plan est donné par 2 coordonnées  $(x_p, y_p)$ , et ce point est sur la droite d'équation  $aX + bY + c = 0$  si et seulement si ses coordonnées satisfont son équation, c'est-à-dire si et seulement si  $ax_p + by_p + c = 0$ . Si  $q$  est un deuxième point du plan, alors la droite d'équation  $aX + bY + c = 0$  passe par  $p$  et  $q$  si et seulement si les 3 nombres  $a, b$  et  $c$  sont solutions du système d'équation

$$(1) \quad \begin{cases} ax_p + by_p + c = 0 \\ ax_q + by_q + c = 0 \end{cases}$$

Les points  $p$  et  $q$  étant donnés, nous avons donc un système linéaire de 2 équations en les variables  $a, b$  et  $c$ . De plus, si les points  $p$  et  $q$  sont distincts, alors ce système est de rang 2. L'ensemble des triplets  $(a, b, c)$  solutions est donc infini, et l'ensemble des droites passant par  $p$

et  $q$  a l'air infini... En fait, ces solutions forment une droite vectorielle (2 équations et 3 inconnues), c'est-à-dire que tous les triplets solutions sont colinéaires. Or, si  $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$  et si  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ , alors les deux équations  $aX + bY + c = 0$  et  $a'X + b'Y + c' = 0$  définissent la même droite. En d'autres termes, tous les triplets solutions du système (1) définissent la même droite! Et par deux points distincts du plan passe donc une unique droite.

Qu'avons-nous utilisé dans notre preuve? En passant de la droite à son équation, nous avons tout d'abord traduit un problème géométrique en un problème algébrique. Puis, pour montrer que 2 points sont nécessaires et suffisants pour déterminer une droite, nous avons simplement calculé la dimension de l'espace des droites du plan, et nous avons trouvé 2. En effet, une droite est déterminée par les 3 coefficients de son équation, mais 3 coefficients colinéaires définissent la même droite. La dimension de l'espace des droites est donc  $3 - 1 = 2$ .

Nous venons de résoudre un problème de géométrie énumérative à propos de polynômes en deux variables de degré 1. Mais en y réfléchissant bien, où avons-nous utilisé que nos polynômes étaient de degré 1? Cette hypothèse ne nous a finalement servi que pour identifier clairement l'espace dans lequel nous avons travaillé, afin de pouvoir calculer sa dimension. Ainsi, modulo quelques définitions, la même méthode doit marcher pour des polynômes en deux variables de n'importe quel degré.

**2.2. Un problème simple de géométrie énumérative.** Rappelons tout d'abord la définition du degré d'un polynôme en deux variables.

**Définition 2.1.** Soit  $P(X, Y) = \sum a_{i,j} X^i Y^j$  un polynôme dans  $\mathbb{C}[X, Y]$ . Le degré de  $P(X, Y)$  est le maximum de la somme  $i + j$  lorsque  $a_{i,j}$  est non nul.

**Remarque 2.2.** Bien sûr, le corps de base ne joue aucun rôle dans cette définition qui est la même pour un polynôme dans  $\mathbb{K}[X, Y]$ , quel que soit le corps  $\mathbb{K}$ .

Comme d'habitude, nous noterons  $\mathbb{C}_d[X, Y]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus  $d$ . Une droite du plan est donnée par une équation de la forme  $aX + bY + c = 0$ , c'est donc l'ensemble solution

d'un polynôme de degré 1. Plus généralement, un sous-ensemble de  $\mathbb{C}^2$  défini par une équation polynomiale en deux variables est appelé une *courbe algébrique*.

**Définition 2.3.** Soit  $P(X, Y)$  un polynôme dans  $\mathbb{C}[X, Y]$  de degré au moins 1. Alors l'ensemble  $C$  des solutions de l'équation  $P(X, Y) = 0$  dans  $\mathbb{C}^2$  est appelé une courbe algébrique complexe.

On dit que la courbe  $C$  est irréductible si le polynôme  $P$  est irréductible. Le degré de  $C$  est le degré de  $P(X, Y)$ .

Afin d'alléger un peu le texte, nous utiliserons dans la suite l'expression « courbe algébrique » plutôt que « courbe algébrique complexe » lorsque cela ne prêterait pas à confusion.

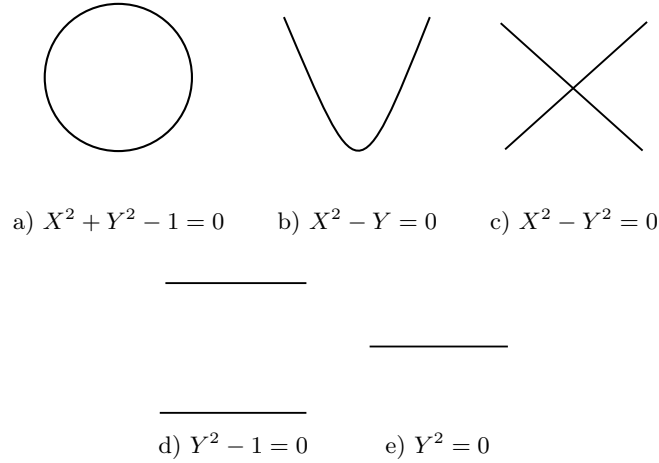
Une courbe algébrique irréductible est une courbe « minimale », en ce sens qu'elle n'est pas l'union de deux courbes algébriques. En effet, si  $P(X, Y) = P_1(X, Y)P_2(X, Y)$ , alors la courbe définie par  $P(X, Y)$  est l'union des courbes définies par  $P_1(X, Y)$  et  $P_2(X, Y)$  <sup>(1)</sup>. Nous avons déjà étudié le cas des courbes algébriques de degré 1, regardons les courbes algébriques de degré 2 et 3.

**Exemple 2.4.** Les courbes algébriques de degré 2 sont appelées *coniques*, et à changement de coordonnées affine près de  $\mathbb{C}^2$ , il n'existe que 5 coniques dont les équations sont  $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ ,  $X^2 - Y = 0$ ,  $X^2 - Y^2 = 0$ ,  $Y^2 - 1 = 0$  et  $Y^2 = 0$ . Les deux premières coniques sont irréductibles, mais pas les trois dernières. Ces cinq coniques sont représentées sur la Figure 1.

Évidemment, nous trichons un peu lorsque nous dessinons des courbes dans  $\mathbb{C}^2$ , puisque nous ne dessinons en fait que ce qui se passe dans  $\mathbb{R}^2$ ...

**Exemple 2.5.** Les courbes algébriques de degré 3 sont appelées *cubiques*. La cubique d'équation  $Y^2 - X(X^2 + 1) = 0$  est représentée sur la Figure 2. Une grande majorité des cubiques possède une propriété assez extraordinaire : elles peuvent être munies d'une loi de groupe abélien ! Cela fait des cubiques des objets très appréciés des géomètres algébristes et des cryptographes.

<sup>(1)</sup>On pourrait avoir  $P_1(X, Y) = P_2(X, Y)$ , on aurait dans ce cas-là une courbe *multiple*.

FIGURE 1. Classification des coniques dans  $\mathbb{C}^2$ FIGURE 2. La cubique dans  $\mathbb{C}^2$  d'équation  $Y^2 - X(X^2 + 1) = 0$ 

Nous pouvons déjà faire deux remarques intéressantes. Tout d'abord, comme  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos, une courbe algébrique  $C$  n'est jamais vide : pour tout nombre complexe  $x_0$ , le polynôme  $P(x_0, Y)$  est maintenant un polynôme en une variable à coefficients complexes et donc admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ . Il existe donc un point de  $C$  de la forme  $(x_0, y_0)$  pour tout  $x_0$  dans  $\mathbb{C}$ . Ensuite, comme dans le cas des droites, deux polynômes non nuls multiples l'un de l'autre définissent la même courbe algébrique<sup>(2)</sup>.

Combien de points est-il nécessaire de fixer pour caractériser une courbe algébrique de degré  $d$ ? La réponse est encore une fois donnée

<sup>(2)</sup>On peut donc voir l'espace des courbes algébriques comme le projectivisé de l'espace des polynômes.

par un calcul de dimension. Nous voyons apparaître dans la proposition suivante le mot *générique*. Ce mot reviendra constamment dans la suite de ce texte, sans être pourtant jamais vraiment défini. En effet, définir rigoureusement le mot *générique* nous demanderait un travail long et technique nous éloignant du sujet traité ici<sup>(3)</sup>. Heureusement, le sens « intuitif » du mot *générique* devrait parfaitement suffire à la compréhension de ce texte.

**Proposition 2.6.** *Par  $d(d+3)/2$  points génériques de  $\mathbb{C}^2$  passe une unique courbe algébrique de degré  $d$ .*

*Démonstration.* Calculons la dimension de l'espace  $\mathbb{C}_d[X, Y]$ . Un élément de cet espace s'écrit

$$\sum_{i+j \leq d} a_{i,j} X^i Y^j$$

la dimension de  $\mathbb{C}_d[X, Y]$  est donc le nombre de couples  $(i, j)$  dans  $\mathbb{N}^2$  vérifiant  $i + j \leq d$ . En faisant varier  $i$  de 0 à  $d$  et en comptant le nombre de  $j$  possibles nous obtenons

$$\dim(\mathbb{C}_d[X, Y]) = (d+1) + d + \cdots + 2 + 1 = \frac{(d+2)(d+1)}{2}.$$

Chercher les polynômes  $P(X, Y)$  qui s'annulent en un point  $(x_p, y_p)$  donné revient à résoudre l'équation  $P(x_p, y_p) = 0$  qui est linéaire en les coefficients  $a_{i,j}$  de  $P(X, Y)$ . Ainsi, si nous cherchons les polynômes  $P(X, Y)$  qui s'annulent en  $d(d+3)/2$  points fixés, nous nous ramenons à résoudre un système de  $d(d+3)/2$  équations linéaires à  $(d+2)(d+1)/2$  inconnues. Si les points sont en position générique dans le plan, alors ce système est de rang maximal et l'ensemble solution est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}_d[X, Y]$  de dimension  $\frac{(d+2)(d+1)}{2} - \frac{d(d+3)}{2} = 1$ . Or deux polynômes multiples l'un de l'autre définissent la même courbe, la courbe algébrique de degré  $d$  passant par nos points est donc unique.  $\square$

**Exemple 2.7.** D'après la Proposition 2.6, il existe une unique conique passant par 5 points en position générique dans le plan. Par exemple,

<sup>(3)</sup>De manière générale, *générique* signifie « en dehors d'une sous-variété algébrique stricte d'une certaine variété algébrique ».

la conique représentée sur la Figure 3b est l'unique conique passant par les 5 points représentés sur la Figure 3a.



FIGURE 3. Une unique conique par 5 points

En regardant de près la démonstration du fait que par deux points passe une unique droite, nous avons compris que nous pouvions généraliser sans trop d'efforts le problème et sa solution aux courbes algébriques de n'importe quel degré. Maintenant que nous avons résolu ce problème plus général, observons de plus près encore nos courbes algébriques. Puisque nous avons choisi des points génériques, les courbes solutions vont aussi être génériques : elles ne se « recourent » jamais. Or, il existe des courbes qui se recoupent, mais ces courbes ne seront *jamais* solution... La raison à cela est que l'espace des courbes qui se recoupent est beaucoup plus petit que l'espace de toutes les courbes de degré  $d$ . Plus précisément, il a une dimension de moins. Mais alors, si nous fixons un point de moins, pouvons-nous faire passer une courbe par les points restant et qui se recouperait ?

Comme on peut s'en douter à la lecture du paragraphe précédent, nous devons préalablement aller un peu plus loin dans l'étude des courbes algébriques avant de pouvoir poser rigoureusement notre nouveau problème.

### 2.3. Un problème énumératif plus général... et plus compliqué

Une courbe algébrique  $C$  est définie par une équation polynomiale  $P(X, Y) = 0$ . Comme toute courbe définie par une équation implicite, les points de  $C$  sont naturellement séparés en deux ensembles : ceux pour lesquels la différentielle de  $P(X, Y)$  ne s'annule pas, et les autres.

**2.3.1. Courbes algébriques nodales.** Les points  $p$  de  $C$  pour lesquels la différentielle de  $P(X, Y)$  est non nulle en  $p$  sont dits *non singuliers*. Ce sont les points de  $C$  les plus simples possible. D'après le théorème des fonctions implicites, la courbe  $C$  ressemble à un graphe de fonction dans des coordonnées adéquates au voisinage d'un tel point. Les points  $p$  de  $C$  pour lesquels la différentielle de  $P(X, Y)$  est nulle en  $p$  sont appelés les points *singuliers* de  $C$ . Au voisinage d'un tel point, la courbe  $C$  peut prendre des formes variées et être extrêmement compliquée ! Le plus simple des points singuliers est le *point double*.

**Définition 2.8.** Un point  $p$  d'une courbe algébrique  $C$  d'équation  $P(X, Y) = 0$  est appelé point double de  $C$  si la différentielle de  $P(X, Y)$  en  $p$  est nulle et si la différentielle seconde de  $P(X, Y)$  en  $p$  est une forme quadratique non dégénérée.

**Remarque 2.9.** La différentielle et la différentielle seconde d'un polynôme en  $(0, 0)$  se calculent très facilement : si  $P(X, Y) = P_0(X, Y) + P_1(X, Y) + \dots + P_d(X, Y)$  où  $P_i(X, Y)$  est un polynôme dont tous les monômes sont *exactement* de degré  $i$ , alors la différentielle de  $P(X, Y)$  en l'origine est le polynôme  $P_1(X, Y)$  et sa différentielle seconde est le polynôme  $P_2(X, Y)$ . Pour calculer les différentielles d'un polynôme en un point  $p$  quelconque du plan, il suffit de faire un changement de variables affine pour ramener  $p$  à l'origine et appliquer la recette précédente.

**Exemple 2.10.** La conique d'équation  $X^2 + Y^2 - 1 = 0$  (voir Figure 1a) n'a que des points non singuliers. Par contre, la conique d'équation  $X^2 - Y^2 = 0$  (voir Figure 1c) a un point double à l'origine.

D'après le Lemme de Morse, au voisinage d'un point double, une courbe algébrique ressemble à la courbe définie par une forme quadratique non dégénérée. Le corps  $\mathbb{C}$  étant algébriquement clos, toutes les formes quadratiques non dégénérées sur  $\mathbb{C}^2$  sont équivalentes à  $X^2 - Y^2$ . En particulier, il existe un unique modèle local pour un point double d'une courbe algébrique complexe : la courbe ressemble à l'union des droites d'équation  $X - Y = 0$  et  $X + Y = 0$ . Ainsi,  $p$  est un point d'intersection de deux branches non singulières de  $C$  à tangentes distinctes. Au voisinage d'un point double, une courbe algébrique ressemble donc à la Figure 1c.

**Définition 2.11.** Une courbe algébrique dont tous les points sont non singuliers est appelée courbe non singulière.

Une courbe algébrique dont les seuls points singuliers sont des points doubles est appelée une courbe nodale.

La majorité des courbes sont non singulières. Plus précisément, une courbe  $C$  *générique* est non singulière. Le mot *générique* veut dire ici *en dehors d'un fermé d'intérieur vide et de mesure nulle*<sup>(4)</sup>. Si l'on considère maintenant l'espace des courbes nodales, alors une courbe nodale générique n'a qu'un seul point double. Plus généralement, une courbe générique dans l'espace des courbes algébriques avec au moins  $n$  points doubles a exactement  $n$  points doubles.

Puisque les courbes génériques sont non singulières, lorsque nous cherchions à la section 2.2 les courbes algébriques de degré  $d$  passant par  $d(d+3)/2$  points en position générique, nous trouvions toujours une courbe non singulière. Fixons maintenant 1 point de moins, c'est-à-dire prenons  $\frac{d(d+3)}{2} - 1$  points en position générique. Par le même raisonnement qu'à la section 2.2, il existe un espace de dimension 1<sup>(5)</sup> de courbes algébriques de degré  $d$  passant par ces points. Génériquement, ces courbes sont non singulières, mais nous pouvons raisonnablement nous attendre à ce que certaines d'entre elles soient nodales. De plus, par généricité, ces courbes nodales auront *exactement* un point double. Si nous fixons maintenant  $\frac{d(d+3)}{2} - 2$  points en position générique, alors nous obtenons un espace de dimension 1 de courbes nodales passant par ces points, et ces courbes auront génériquement exactement 1 point double. Encore une fois, nous pouvons nous attendre à ce que quelques unes de ces courbes aient au moins 2 points doubles, et par généricité, ces courbes auront exactement 2 points doubles.

En continuant ainsi, nous voyons que moins nous fixons de points dans  $\mathbb{C}^2$ , plus nous pouvons imposer de points doubles sur les courbes passant par ces points. De plus, une fois fixés un certain nombre de points, nous voyons que le nombre maximum de points doubles est aussi fixé. Nous pouvons même espérer trouver un nombre fini de

<sup>(4)</sup>Plus précisément, il faut prendre  $C$  en dehors d'une hypersurface algébrique dans l'espace des courbes, appelée *hypersurface discriminante*.

<sup>(5)</sup>C'est en fait une droite dans l'espace de courbes.



courbes ayant ce nombre maximum de points doubles et passant par les points fixés. Demandons-nous « *Combien ?* », et voilà notre problème énumératif posé.

Mais avant d'aller plus loin, nous devons savoir combien de points doubles une courbe algébrique peut avoir. Ce nombre est toujours fini, et la proposition suivante nous donne le nombre maximum.

**Proposition 2.12.** *Une courbe algébrique complexe nodale  $C$  de degré  $d$  a au plus  $d(d-1)/2$  points doubles. De plus, si  $C$  est irréductible, alors elle ne peut avoir plus de  $(d-1)(d-2)/2$  points doubles.*

**Exemple 2.13.** Une droite est toujours non singulière, donc n'a jamais de point double.

**Exemple 2.14.** Prouvons la Proposition 2.12 dans le cas du degré 2. Nous devons montrer qu'une conique a au maximum un unique point double et que toute conique nodale est réductible.

Soit  $C$  une conique nodale. Alors d'après la Remarque 2.9, quitte à faire un changement de coordonnées affine, nous pouvons supposer qu'un point double de  $C$  est le point  $(0,0)$ , et que  $C$  est définie par l'équation  $X^2 - Y^2 = 0$ . La conique  $C$  est donc réductible, plus précisément est l'union des deux droites d'équation  $X - Y = 0$  et  $X + Y = 0$  (voir Figure 1c). Comme une droite est non singulière, la conique  $C$  ne peut pas avoir d'autre point double.

**Exemple 2.15.** L'union de 3 droites non concourantes et non parallèles est une cubique avec 3 points doubles. L'union d'une conique et d'une droite est une cubique avec deux points doubles. Une cubique avec un point double est donnée par l'équation  $Y^2 - X^2(X+1) = 0$ , et une cubique sans point double est donnée par l'équation  $Y^2 - X(X^2+1) = 0$ . Toutes ces cubiques sont représentées à la Figure 4.

**Exemple 2.16.** Plus généralement, il est facile de voir qu'il existe effectivement une courbe algébrique nodale réductible de degré  $d$  avec  $d(d-1)/2$  points doubles : il suffit de prendre l'union de  $d$  droites dont 3 ne sont jamais concourantes. En perturbant un peu l'équation de ces courbes, on peut construire des courbes algébriques nodales

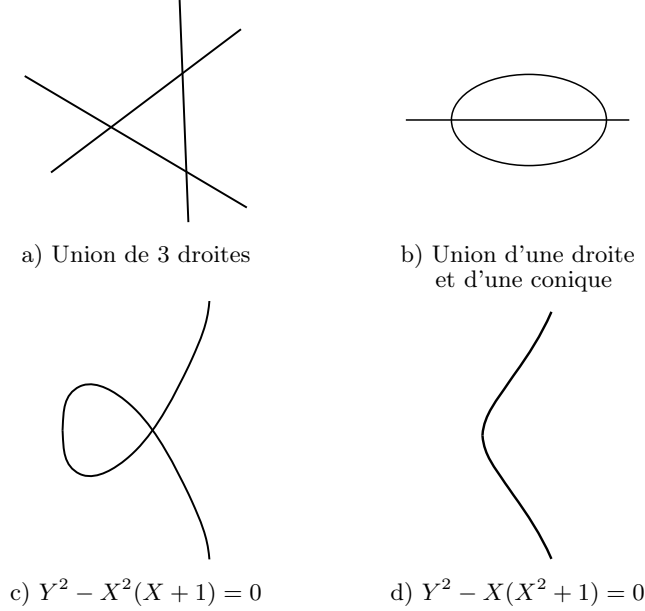
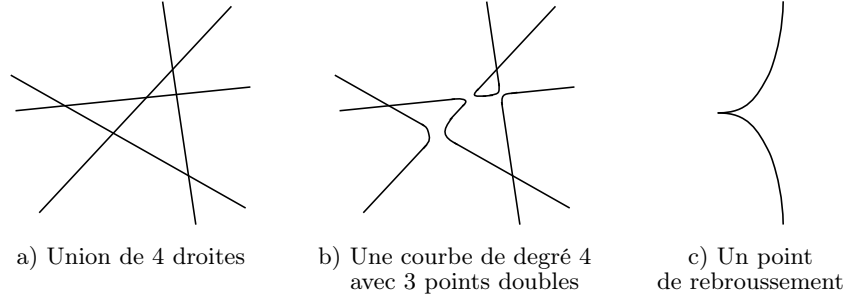


FIGURE 4. Cubiques avec 3, 2, 1 et 0 points doubles

irréductibles de degré  $d$  avec  $(d-1)(d-2)/2$  points doubles. Un exemple en degré 4 est représenté sur les Figures 5a et b<sup>(6)</sup>.

Précisons qu'il existe des courbes algébriques qui ne sont pas nodales, c'est-à-dire possédant des points singuliers qui ne sont pas des points doubles. Par exemple, la courbe d'équation  $Y^2 - X^3 = 0$  possède un point singulier en  $(0,0)$  qui n'est pas un point double, mais un *point de rebroussement* (voir Figure 5c).

<sup>(6)</sup>Voici une explication « avec les mains » du fait que la courbe de la Figure 5b est irréductible. On part de l'union des 4 droites de la Figure 5a, puis on perturbe un point double. On obtient ainsi l'union d'une courbe irréductible de degré 2 et de deux droites. Puis, en perturbant un point d'intersection de la conique et d'une des deux droites, on obtient l'union d'une courbe irréductible de degré 3 et d'une droite. Pour finir, on perturbe un point d'intersection de la cubique et de la droite restante, et on obtient une courbe de degré 4 irréductible avec  $6 - 3 = 3$  points doubles. Pour pouvoir perturber n'importe quel point double d'une courbe algébrique tout en préservant d'autres points doubles éventuels, nous avons utilisé le Théorème de Brusotti qui affirme que les *strates* du discriminant correspondant aux courbes nodales s'intersectent *transversalement*.

FIGURE 5. D'autres exemples de courbes algébriques dans  $\mathbb{C}^2$ 

Pour des raisons qu'il est difficile d'expliquer dans ce texte, les géomètres préfèrent parler du nombre de points doubles qu'une courbe algébrique *n'a pas*, plutôt que du nombre de points doubles qu'elle a. Ce nombre est appelé *genre* de la courbe.

**Définition 2.17.** Soit  $C$  une courbe algébrique nodale irréductible de degré  $d$  avec  $r$  points doubles. On définit le genre<sup>(7)</sup> de  $C$ , noté  $g(C)$ , par

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - r.$$

Le genre d'une courbe nodale irréductible de degré  $d$  est donc toujours un nombre compris entre 0 et  $(d-1)(d-2)/2$ . Les courbes non singulières correspondent exactement aux courbes de genre  $(d-1)(d-2)/2$ . À l'opposé, nous verrons à la section 2.3.3 que les courbes de genre 0 sont aussi très particulières.

Nous avons déjà vu à la section 2.2 que pour pouvoir poser un problème énumératif, nous devons préalablement connaître la dimension de l'espace des courbes qui nous intéressent. Nous connaissons déjà la dimension de l'espace des courbes non singulières de degré  $d$  qui est  $(d+1)(d+2)/2$ . D'après la discussion qui suit la Définition 2.11, il semble qu'imposer un point double fasse baisser la dimension

<sup>(7)</sup>Des points doubles peuvent se trouver « à l'infini », et en toute rigueur il faudrait en tenir compte dans notre définition du genre. Cependant, pour les problèmes énumératifs discutés dans ce texte, toutes les courbes solutions seront lisses à l'infini.

de 1. Cela est effectivement vrai, et en remplaçant le nombre de points doubles par le genre, nous obtenons la proposition qui suit<sup>(8)</sup>.

**Proposition 2.18.** *L'espace<sup>(9)</sup> des courbes algébriques nodales irréductibles de degré  $d$  et de genre  $g$  est de dimension  $3d - 1 + g$ .*

2.3.2. *Et bien, comptez maintenant !* Nous voici enfin prêt à poser notre problème énumératif dans toute sa généralité. Fixons-nous un degré  $d \geq 1$ , un genre  $g \geq 0$ , et  $\omega = \{p_1, \dots, p_{3d-1+g}\}$  une configuration de  $3d - 1 + g$  points dans  $\mathbb{C}^2$ . Considérons alors l'ensemble  $\mathcal{C}(d, g, \omega)$  de toutes les courbes algébriques irréductibles nodales de degré  $d$ , de genre  $g$ , passant par tous les points de  $\omega$ .

**Proposition 2.19.** *Pour une configuration  $\omega$  générique, le cardinal de  $\mathcal{C}(d, g, \omega)$  est fini et ne dépend pas de  $\omega$ .*

Essayons d'expliquer grossièrement pourquoi ce cardinal est indépendant de  $\omega$ . En mettant ce problème géométrique sous une forme algébrique, on s'aperçoit que les courbes de  $\mathcal{C}(d, g, \omega)$  correspondent aux racines d'un certain polynôme dans  $\mathbb{C}[X]$ . De plus, le degré de ce polynôme est le même pour toute configuration générique  $\omega$ . Comme  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos, le nombre de solutions est égal à ce degré, c'est-à-dire que le nombre de courbes dans  $\mathcal{C}(d, g, \omega)$  est constant.

On pose alors

$$N(d, g) = \text{card}(\mathcal{C}(d, g, \omega)).$$

Le nombre  $N(d, g)$  est donc le nombre de courbes algébriques irréductibles nodales<sup>(10)</sup> de degré  $d$ , de genre  $g$ , passant par une configuration générique de  $3d - 1 + g$  points.

**Exemple 2.20.** Si  $g = (d - 1)(d - 2)/2$ , alors nous calculons le nombre de courbes non singulières (avec 0 points doubles) passant

<sup>(8)</sup>C'est une conséquence du Théorème de Brusotti, voir note de bas de page (6).

<sup>(9)</sup>C'est une sous-variété algébrique irréductible de l'espace des courbes algébriques de degré  $d$ .

<sup>(10)</sup>Il existe une notion de genre pour n'importe quelle courbe algébrique, non nécessairement nodale, et on peut montrer que toutes les courbes algébriques irréductibles de degré  $d$ , de genre  $g$  et passant par  $3d - 1 + g$  point génériques donnés sont toutes des courbes nodales. Ainsi, on peut oublier de préciser nodale dans l'énoncé du problème.

par  $d(d+3)/2$  points du plan. Nous retombons donc sur le problème traité à la section 2.2 :

**Proposition 2.21.** *Pour tout  $d \geq 1$  on a  $N(d, (d-1)(d-2)/2) = 1$ .*

Cependant, calculer les nombres  $N(d, g)$  en toute généralité s'avère être un problème beaucoup plus difficile que le cas  $g = (d-1)(d-2)/2$ ... Nous savons, d'après la « démonstration » de la Proposition 2.19, que le nombre  $N(d, g)$  peut s'interpréter comme le degré d'un certain polynôme. Mais c'est seulement en théorie que nous connaissons l'existence de ce polynôme ! En particulier, nous ne connaissons pas a priori son degré. En fait, savoir que ce polynôme existe ne nous aide pas beaucoup à déterminer son degré, et il faudra trouver d'autres moyens pour calculer les nombres  $N(d, g)$ .

**Problème 1.** *Comment calculer les nombres  $N(d, g)$  ?*

Sans aucun doute, les origines de la géométrie énumérative remontent à fort loin. Par exemple, les grecs savaient certainement déjà que par 5 points passe une unique conique. Cependant, à ma connaissance le Problème 1 n'est posé en toute généralité que depuis le XIX<sup>e</sup> siècle<sup>(11)</sup> alors que la géométrie énumérative connaît un véritable essor grâce notamment aux travaux de Chasles, De Jonquieres, Schubert, Zeuthen... En 1900, Hilbert propose dans son 15<sup>e</sup> problème (voir [Hil01]) de travailler à des bases rigoureuses du calcul énumératif de Schubert. Malgré les progrès de la géométrie énumérative au XIX<sup>e</sup> siècle, peu des nombres  $N(d, g)$  étaient finalement connus en 1900. Le tableau 1 résume à peu près ce que l'on savait à cette époque du Problème 1. Pour information, le nombre  $N(4, 0) = 620$  a été calculé pour la première fois par Zeuthen (voir [Zeu73]).

En plus, de ces valeurs particulières de  $N(d, g)$ , la réponse au Problème 1 pour les courbes avec un unique point double était connue depuis longtemps. Nous donnerons une preuve tropicale de la formule suivante à la section 6.1.

---

<sup>(11)</sup> Les problèmes énumératifs posés alors sont même encore plus généraux ! Voici un exemple dont nous ne parlons pas ici : combien y a-t-il de droites dans l'espace intersectant 4 autres droites données ? La réponse est 2, et il existe une bien jolie démonstration due à Schubert.

$d \setminus g$	0	1	2	3
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	12	1	0	0
4	620	225	27	1

TABLE 1. Premiers nombres  $N(d, g)$ 

**Proposition 2.22.** *Pour tout  $d \geq 3$  on a*

$$N\left(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1\right) = 3(d-1)^2.$$

À partir de années 1970, les progrès de la géométrie algébrique contribuèrent à réveiller l'intérêt pour les questions énumératives, et de nouveaux nombres  $N(d, g)$  furent calculés. Par exemple, la géométrie énumérative des courbes avec 2 points doubles était comprise. Une démonstration possible de la Proposition 2.23 est proposée à la section 7.

**Proposition 2.23.** *Pour tout  $d \geq 4$  on a*

$$N\left(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 2\right) = \frac{3}{2}(d-1)(d-2)(3d^2 - 3d - 11).$$

Le Lecteur intéressé pourra trouver d'autres formules du même tonneau dans [DFI95]. Dans les années 90, une formule générale calculant tous les nombres  $N(d, g)$  a été donnée par Caporaso et Harris (voir [CH98]). Le problème 1 était résolu.

La formule de Caporaso et Harris est assez compliquée et nous ne la donnerons pas ici. En revanche, nous proposons au Lecteur d'écrire lui même cette formule à l'Exercice 6.2.

Avant l'apparition de la *géométrie tropicale*, les calculs des nombres  $N(d, g)$  étaient, à part quelques exceptions, assez compliqués et demandaient un bagage technique assez important. La géométrie tropicale a fourni une nouvelle approche de ce domaine, simplifiant considérablement les calculs précédents. En effet, les objets tropicaux ont une nature combinatoire, beaucoup plus simple que les courbes algébriques ! Le but de ce texte est de convaincre le Lecteur dans les sections 4, 5 et 6 que tout un chacun peut calculer n'importe quel nombre  $N(d, g)$  et établir d'intéressantes relations entre ces nombres

par ses propres moyen s'il dispose de suffisamment de temps et de patience.

**2.3.3. Courbes rationnelles.** Les formules 2.21, 2.22 et 2.23 dénombrent des courbes ayant peu de points doubles. À l'inverse, les courbes ayant le nombre maximum de points doubles sont aussi très spéciales et peuvent être étudiées avec des techniques particulières. Précisons au passage que ces courbes intéressent aussi beaucoup les physiciens. Nous retrouverons les courbes de genre 0 à la section 3.3, car ce sont quasiment les seules courbes que l'on sache étudier en profondeur si nous prenons  $\mathbb{R}$  comme corps de base à la place de  $\mathbb{C}$ .

Les courbes de genre 0 sont aussi appelées *courbes rationnelles*, car elles sont *paramétrées* par  $\mathbb{C}$ .

**Théorème 2.24.** *Si  $C$  est une courbe algébrique de degré  $d$  et de genre 0, alors il existe trois polynômes en une variable et de degré  $d$ ,  $F(T)$ ,  $G(T)$  et  $H(T)$  tels que  $C$  soit l'image de l'application rationnelle*

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \left\{ \text{pôles de } \frac{F(t)}{H(t)} \text{ et } \frac{G(t)}{H(t)} \right\} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ t &\longmapsto \left( \frac{F(t)}{H(t)}, \frac{G(t)}{H(t)} \right). \end{aligned}$$

Quelques années avant Caporaso et Harris, Kontsevich a donné une formule récursive calculant tous les nombres  $N(d, 0)$ .

**Théorème 2.25 (Kontsevich [KM94]).** *Les nombre  $N(d, 0)$  sont données par la relation*

$$N(d, 0) = \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ d_1, d_2 \geq 1}} N(d_1, 0)N(d_2, 0) \left( d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right)$$

si  $d \geq 2$ , et par la valeur initiale  $N(1, 0) = 1$ .

Ainsi, tous les nombres  $N(d, 0)$  se retrouvent à partir du fait que par deux points passe une unique droite! Notons que les approches de Kontsevich, et de Caporaso et Harris sont différentes. Ainsi, les formules obtenues sont différentes, en ce sens que la formule de Kontsevich *n'est pas* une sous-formule de la formule de Caporaso et Harris. Grâce au Théorème 2.25, nous pouvons calculer tous les nombres  $N(d, 0)$ . À peu près un siècle après Zeuthen, Vainsencher

(voir [Vai95]) a calculé  $N(5, 0) = 87304$  pour la première fois. Quelque temps après, les nombres  $N(d, 0)$  pour  $d \geq 6$  sont calculés pour la première fois grâce à la formule de Kontsevich.

$d$	1	2	3	4	5	6	7
$N(d, 0)$	1	1	12	620	87304	26312976	14616808192

TABLE 2. Premières valeurs de  $N(d, 0)$

À la lumière du tableau 2, nous pouvons constater que les nombres  $N(d, 0)$  ont l'air de grandir assez vite. De fait nous avons la proposition suivante.

**Proposition 2.26 (Di Francesco & Itszykson [DFI95])**

*L'asymptotique de la suite  $(\ln N(d, 0))_{d \geq 1}$  lorsque  $d$  tend vers l'infini est donnée par*

$$\ln N(d, 0) \sim 3d \ln d.$$

### 3. Géométrie énumérative réelle

À la section 2, nous avons utilisé à deux endroits que notre corps de base  $\mathbb{C}$  était algébriquement clos. Nous avons d'abord invoqué le fait que toutes les formes quadratiques sur  $\mathbb{C}$  non dégénérées sont équivalentes pour écrire l'équation locale d'un point double d'une courbe algébrique. Puis, pour démontrer que les nombres  $N(d, g)$  ne dépendaient pas de la configuration de points  $\omega$  choisie, nous avons utilisé le fait qu'un polynôme générique de degré  $n$  dans  $\mathbb{C}[X]$  a exactement  $n$  racines.

Ces deux résultats sont faux sur  $\mathbb{R}$ , ce qui rend la géométrie réelle paradoxalement plus complexe que la géométrie complexe. Avant de nous lancer dans la géométrie énumérative réelle proprement dite, penchons-nous d'abord sur les courbes algébriques réelles.

**3.1. Courbes algébriques réelles.** Si  $P(X, Y)$  est un polynôme dans  $\mathbb{R}[X, Y]$ , alors dans l'esprit la section 2, nous pouvons regarder l'ensemble des points  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}^2$  tels que  $P(x, y) = 0$ . Maintenant, le fait que  $\mathbb{R}$  ne soit pas algébriquement clos change beaucoup de choses. En particulier, la courbe définie par  $P(X, Y)$  peut être vide. Par exemple, aucun point de  $\mathbb{R}^2$  ne vérifie  $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ .



Nous arrivons ainsi à une petite contradiction : nous appelons courbe l'ensemble vide... Comme souvent, le problème vient de ce que nous ne regardons pas le bon objet. En effet, il ne faut pas voir une courbe algébrique réelle uniquement comme l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}^2$  de l'équation  $P(X, Y) = 0$ , mais toujours comme l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{C}^2$  de l'équation  $P(X, Y) = 0$ . Que vient donc faire le mot « réel » ici puisque nous considérons toujours les solutions d'une équation dans  $\mathbb{C}^2$  ? Le fait que le polynôme  $P$  soit réel entraîne que si  $P(x, y) = 0$ , alors  $P(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ , où  $\bar{x}$  désigne le nombre complexe conjugué à  $x$ . Ainsi, notre courbe algébrique  $C$  définie par  $P(X, Y)$  est beaucoup plus « spéciale » qu'une courbe algébrique complexe quelconque, puisqu'elle admet une involution<sup>(12)</sup>

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow C \\ (x, y) &\longmapsto (\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

De plus, les zéros de  $P(X, Y)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire les points réels de  $C$ , ne sont autres que les points fixes de cette involution. Ceci motive la définition suivante.

**Définition 3.1.** Soit  $P(X, Y)$  un polynôme dans  $\mathbb{R}[X, Y]$  de degré au moins 1. Alors l'ensemble  $C$  des solutions de  $P(X, Y) = 0$  dans  $\mathbb{C}^2$  est appelé une courbe algébrique réelle. De plus, l'ensemble  $\mathbb{R}C = C \cap \mathbb{R}^2$  est appelé partie réelle de  $C$ .

**Exemple 3.2.** Une droite dont l'équation est à coefficients réels est une courbe algébrique réelle, et sa partie réelle est une droite telle que nous la dessinons depuis tout petits.

À la section 2, nous trichions un peu en dessinant les courbes algébriques dans  $\mathbb{C}^2$ . Comme il est peu aisé de représenter  $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ , nous considérons en fait des courbes algébriques réelles, et nous dessinons leur partie réelle. Mais ici, puisque nous parlons justement de courbes algébriques réelles, les dessins seront fidèles à la réalité<sup>(13)</sup>. Les courbes dessinées dans les Figures 1, 2, 3, 4 et 5 sont donc des exemples de parties réelles de courbes algébriques réelles.

<sup>(12)</sup>Plus précisément une involution antiholomorphe.

<sup>(13)</sup>Pour autant qu'une telle phrase ait un sens...

**Exemple 3.3.** La Figure 6 contient d'autres exemples de partie réelle de courbes algébriques réelles de degré 2, 3 et 4. Les équations des courbes représentées sur les Figures 6c et d sont un peu longues, nous ne les écrivons pas.

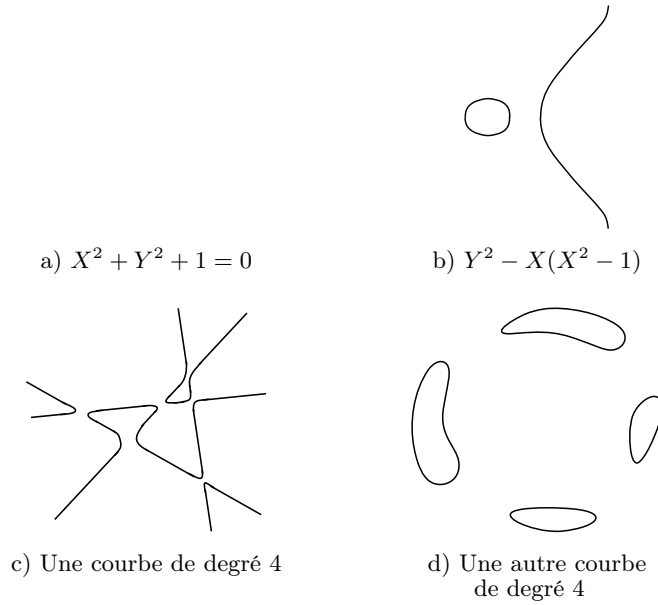


FIGURE 6. Courbes algébriques réelles de degré 2, 3 et 4

Pourquoi considérer tous les points dans  $\mathbb{C}^2$  d'une courbe algébrique réelle au lieu de se contenter des points dans  $\mathbb{R}^2$ ? Nous avons vu plus haut que considérer uniquement la partie réelle implique d'étudier des objets potentiellement vides. Mais il y a plus grave! Certaines informations concernant une courbe algébrique réelle peuvent être cachées dans ses points complexes. Par exemple, les points doubles d'une courbe algébrique réelle nodale n'ont aucune raison d'être tous réels. Ainsi, si nous voulons définir la bonne notion de genre d'une courbe algébrique réelle, nous devons prendre en compte *tous* les points doubles de la courbe, pas uniquement ceux qui se trouvent dans  $\mathbb{R}^2$ .

Puisqu'une courbe algébrique réelle est avant tout une courbe algébrique complexe, nous pouvons parler de courbes algébriques réelles irréductibles, singulières...

**Définition 3.4.** Une courbe algébrique réelle  $C$  est irréductible (respectivement non singulière, nodale) si  $C$  est irréductible (respectivement non singulière, nodale) en tant que courbe algébrique complexe.

Le genre d'une courbe algébrique réelle irréductible nodale  $C$  est celui de  $C$  vue comme courbe algébrique complexe.

**Remarque 3.5.** Une courbe algébrique réelle définie par un polynôme  $P(X, Y)$  dans  $\mathbb{R}[X, Y]$  est irréductible si le polynôme  $P(X, Y)$  est irréductible dans  $\mathbb{C}[X, Y]$ .

**Exemple 3.6.** Toutes les courbes algébriques réelles représentées à la Figure 6 sont irréductibles et non singulières.

**Exemple 3.7.** Terminons de passer en revue toutes les coniques réelles possibles à changement de variables affine de  $\mathbb{R}^2$  près. Les formes quadratiques  $X^2 + Y^2$  et  $X^2 - Y^2$  n'étant pas équivalentes sur  $\mathbb{R}$ , il y a plus de coniques réelles que de coniques complexes. Pour avoir toutes les coniques réelles en plus de celles dessinées sur les Figures 1 et 6a, nous devons ajouter les coniques d'équations  $X^2 - Y^2 + 1 = 0$ ,  $X^2 + Y^2 = 0$  et  $X^2 + 1 = 0$ . Ces trois coniques sont représentées à la Figure 7. Notons que les polynômes  $X^2 + Y^2$  et  $X^2 + 1$  sont irréductibles dans  $\mathbb{R}[X, Y]$ , mais pas dans  $\mathbb{C}[X, Y]$  et définissent donc des courbes algébriques réelles réductibles.

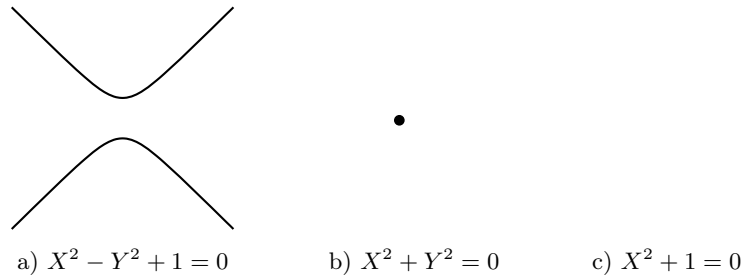


FIGURE 7. Fin de la classification des coniques dans  $\mathbb{R}^2$

En regardant la classification des coniques réelles, nous remarquons un nouveau phénomène : il y a deux types de points doubles réels possibles pour une courbe algébrique réelle ! En effet, une conique réelle nodale est soit l'union de deux droites réelles, soit l'union de deux droites complexes conjuguées. Encore une fois, cela est dû

au fait qu'à changement de variables affine de  $\mathbb{R}^2$  et à l'application  $P(X, Y) \rightarrow -P(X, Y)$  près, il y a deux formes quadratiques non dégénérées distinctes :  $X^2 + Y^2$  et  $X^2 - Y^2$ . Comme les formes quadratiques sont les équations locale d'un point double, nous voyons alors qu'il existe effectivement deux sortes de points doubles réels pour une courbe algébrique réelle. Nous aurons l'occasion de reparler de ces deux types de points doubles réels à la section 3.3.

**Définition 3.8.** Soit  $C$  une courbe algébrique réelle, et  $p \in \mathbb{R}C$  un point double de  $C$ . On dit que  $p$  est un point double réel isolé de  $\mathbb{R}C$  si la différentielle seconde de  $C$  en  $p$  est équivalente sur  $\mathbb{R}$  à  $X^2 + Y^2$ . On dit que  $p$  est un point double réel non isolé de  $\mathbb{R}C$  si la différentielle seconde de  $C$  en  $p$  est équivalente sur  $\mathbb{R}$  à  $X^2 - Y^2$ .

Si  $p$  est un point double réel isolé de  $\mathbb{R}C$ , alors au voisinage de  $p$ ,  $C$  ressemble à la courbe définie par l'équation  $X^2 + Y^2 = 0$ . En particulier,  $p$  est le seul point de  $\mathbb{R}C$  dans ce voisinage, d'où le nom de point double isolé. De plus, comme  $X^2 + Y^2 = (X + iY)(X - iY)$ , au voisinage de  $p$  la courbe  $C$  ressemble à l'union de deux droites complexes conjuguées, c'est-à-dire que  $p$  est le point d'intersection de deux branches complexes conjuguées de  $C$ . Cette situation est représentée à la Figure 8a où les pointillés représentent les deux branches complexes conjuguées de  $C$ .

Au voisinage d'un point double réel non isolé, la courbe  $C$  ressemble à la courbe définie par l'équation  $X^2 - Y^2 = 0$ , et donc à l'union de deux droites réelles (voir la Figure 8b).

**Exemple 3.9.** La cubique d'équation  $Y^2 - X^2(X + 1) = 0$  (voir Figure 4c) a un point double réel non isolé en  $(0, 0)$ . La cubique d'équation  $Y^2 - X^2(X - 1) = 0$  (voir Figure 8c) a un point double réel isolé en  $(0, 0)$ .

**3.2. Le réel, c'est compliqué.** Maintenant que nous avons défini les courbes algébriques réelles nodales irréductibles, nous pouvons jouer au même jeu qu'à la section 2.3.2. Fixons-nous un degré  $d \geq 1$ , un genre  $g \geq 0$ , et une configuration générique<sup>(14)</sup>  $\omega =$

<sup>(14)</sup> *générique* comme configuration de points dans  $\mathbb{C}^2$ . De telles configurations de points réels existent. En effet, il existe un polynôme  $f$  à coefficients complexes non tous nuls tel que les coordonnées des points des configurations  $\omega$  non génériques

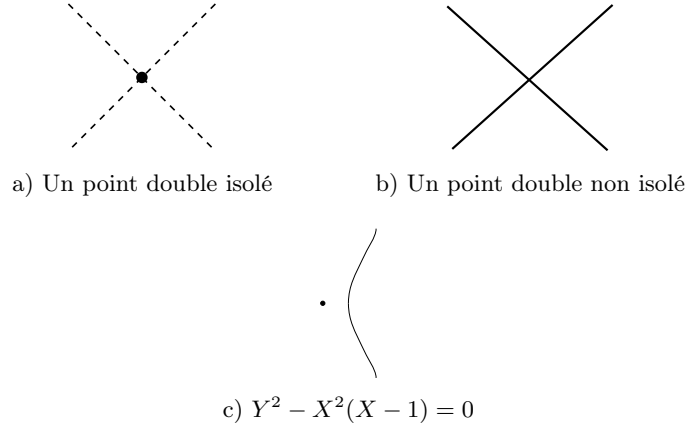


FIGURE 8. Points doubles réels

$\{p_1, \dots, p_{3d-1+g}\}$  de  $3d - 1 + g$  points dans  $\mathbb{R}^2$ . Considérons alors l'ensemble  $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$  de toutes les courbes algébriques réelles irréductibles nodales de degré  $d$ , de genre  $g$ , passant par tous les points de  $\omega$ . Comme  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ , il est clair que  $\mathbb{RC}(d, g, \omega) \subset \mathcal{C}(d, g, \omega)$ , où  $\mathcal{C}(d, g, \omega)$  est l'ensemble des courbes algébriques *complexes* de degré  $d$  et de genre  $g$  passant par les points de  $\omega$ .

Nous avons vu à la section 2.3.2 que pour une configuration de points  $\omega$  dans  $\mathbb{C}^2$ , les courbes de  $\mathcal{C}(d, g, \omega)$  sont données par les racines d'un polynôme dans  $\mathbb{C}[X]$ , dont le degré, et donc le nombre de racines, ne dépend pas du choix de la configuration générique  $\omega$ . Si les points  $p_i$  sont dans  $\mathbb{R}^2$ , alors ce polynôme est dans  $\mathbb{R}[X]$ . Maintenant, le nombre de racines réelles d'un polynôme réel ne dépend pas uniquement du degré du polynôme, mais aussi de ses coefficients. C'est-à-dire que la Proposition 2.19 a peu de chance d'être vraie dans le cas réel : le cardinal de  $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$  dépend de la configuration  $\omega$  choisie ! Par exemple, on peut facilement trouver une configuration de 8 points dans  $\mathbb{R}^2$  par laquelle passent 12 cubiques réelles rationnelles, et une autre par laquelle passent seulement 8 cubiques réelles rationnelles (voir Proposition 3.12).

---

satisfont à  $f = 0$ . Lorsque ces coordonnées sont toutes réelles, elles satisfont aux deux équations réelles obtenues en remplaçant les coefficients de  $f$  par leur partie réelle, resp. imaginaire. L'une des deux est nécessairement non triviale, donc les configurations de points réels ne peuvent pas toutes être non génériques.

Les racines d'un polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$  sont soit réelles, soit naturellement associées en paires de racines complexes conjuguées. Puisque les solutions d'un problème énumératif réel sont les racines d'un polynôme réel, les solutions sont soit des courbes réelles, soit naturellement associées en paires de courbes complexes conjuguées. Reprenons l'exemple des 8 points de  $\mathbb{R}^2$  par lesquels passent seulement 8 cubiques réelles rationnelles. Nous savons que par ces 8 points passent 12 cubiques complexes rationnelles, donc 4 de ces cubiques complexes rationnelles ne sont pas réelles et sont regroupées en deux paires de cubiques complexes conjuguées.

La géométrie énumérative réelle semble donc plus compliquée que la géométrie énumérative complexe... Il y a cependant un cas où la méthode employée pour compter les courbes complexes marche tout aussi bien pour compter les courbes réelles.

**Proposition 3.10.** *Pour tous  $d \geq 1$  et  $\omega$  générique, on a*

$$\text{card} \left( \mathbb{RC}(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2}, \omega) \right) = 1.$$

*Démonstration.* Nous pouvons reprendre mot pour mot la démonstration de la section 2.2 en remplaçant  $\mathbb{C}$  par  $\mathbb{R}$ . En effet, ce problème énumératif se traduit en un problème d'algèbre linéaire dont la résolution ne dépend pas du corps de base.  $\square$

Mais pour l'énumération générale des courbes algébriques réelles nodales, savoir compter les courbes complexes ne nous aide pas beaucoup...

**Problème 2.** *Que peut-on dire du cardinal de  $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$  ?*

Puisque ce cardinal est le nombre de racines réelles d'un polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$ , on peut immédiatement dire deux choses : ce nombre est plus petit que le degré du polynôme et lui est congru modulo 2

**Proposition 3.11.** *Pour toute configuration de points  $\omega$ , on a les inégalités suivantes*

$$0, 1 \leq \text{card}(\mathbb{RC}(d, g, \omega)) \leq N(d, g),$$

*la borne inférieure étant 1 (resp. 0) si  $N(d, g)$  est impair (resp. pair). De plus on a*

$$\text{card}(\mathbb{RC}(d, g, \omega)) \equiv N(d, g) \pmod{2}.$$

Maintenant, quelles sont les valeurs possibles du cardinal de  $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$  entre 0 et  $N(d, g)$ ? Si tous les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  représentaient toutes les solutions de nos problèmes énumératifs, alors la réponse serait évidente : le cardinal de  $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$  pourrait être n'importe quel nombre plus petit et de même parité que  $N(d, g)$ .

Cependant, nos polynômes à une variable proviennent de problèmes géométriques, et ne sont donc a priori pas du tout quelconques. Nous avons donc bien peu d'espoir de prouver l'énoncé ci-dessus. Et pour cause, la Proposition 3.12 ci-dessous nous montre que cet énoncé est faux!

À l'heure actuelle, peu de choses sont connues dans l'étude du Problème 2 comparé à ce que l'on sait du Problème 1. Si l'on connaît plusieurs moyens de calculer tous les nombres  $N(d, g)$ , on ne sait à peu près rien des valeurs possibles du cardinal de  $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$  à part dans quelques cas particuliers. En fait, on ne sait répondre en toute généralité à cette question qu'en degré plus petit que 3... Le cas des degrés 1 et 2 est couvert par la Proposition 3.10, ainsi que le cas des cubiques réelles non singulières de degré 3. Le cas des cubiques réelles rationnelles a été traité par Degtyarev et Kharlamov il y a seulement quelques années.

**Proposition 3.12 (Degtyarev & Kharlamov [DK00])**

*Les valeurs prises par le cardinal de  $\mathbb{RC}(d, 0, \omega)$  quand  $\omega$  parcourt les configurations génériques de 8 points dans  $\mathbb{R}^2$  sont 8, 10 et 12.*

La Proposition 3.12 fait apparaître le phénomène diablement intéressant suivant : quel que soit le choix de nos 8 points dans  $\mathbb{R}^2$ , il existe toujours au moins 8 cubiques rationnelles réelles passant par ces 8 points! Ainsi, la borne inférieure 0 de la Proposition 3.11 est loin d'être optimale. Par contre, on constate aussi qu'il existe des configurations de 8 points pour lesquelles les 12 cubiques rationnelles complexe sont en fait réelles. Est-ce là un fait général? Peut-on améliorer les deux bornes de la Proposition 3.11? Les problèmes suivants sont des versions simplifiées du problème 2

**Problème 3.** *Quelle est la valeur minimale du cardinal de  $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$  quand  $\omega$  varie?*

**Problème 4.** *Quelle est la valeur maximale du cardinal de  $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$  quand  $\omega$  varie?*

Pour l'instant, ces deux problèmes sont encore largement ouverts. Par exemple, personne à ma connaissance ne sait s'il existe une configuration de 11 points dans  $\mathbb{R}^2$  telle que les 620 courbes algébriques complexes rationnelles de degré 4 passant par ces points soient toutes réelles. Vers 2002, Welschinger a proposé une recette pour associer un signe  $\pm 1$  à toute courbe algébrique réelle et a montré un résultat surprenant : si on compte les courbes rationnelles de cette manière, alors le résultat ne dépend pas de la configuration  $\omega$  choisie. Encore plus intéressant, cet invariant donne une nouvelle borne inférieure pour le cardinal de  $\mathbb{RC}(d, 0, \omega)$  !

**3.3. Invariants de Welschinger.** Nous avons déjà mentionné à la section 2.3.3 que les courbes rationnelles sont très spéciales parmi toutes les courbes algébriques, et que l'on disposait de techniques particulières pour les étudier. Nous allons ici expliquer comment compter « correctement » les courbes réelles rationnelles pour que le résultat ne dépende pas de la configuration  $\omega$  choisie. Nous obtiendrons ainsi les *invariants de Welschinger*.

Nous avons vu à la section 3.1 qu'il existe deux types de points doubles réels pour une courbe algébrique réelle, les points doubles isolés et les points doubles non isolés. Un point double isolé est le point d'intersection de deux branches complexes conjuguées de la courbe. Un point double non isolé est le point d'intersection de deux branches réelles.

**Définition 3.13.** La masse d'une courbe algébrique réelle  $C$ , notée  $m(C)$ , est le nombre de points doubles isolés de  $C$ .

**Exemple 3.14.** La cubique d'équation  $Y^2 - X^2(X + 1) = 0$  (voir Figure 4c) est de masse 0, et la cubique d'équation  $Y^2 - X^2(X + 1) = 0$  (voir Figure 8c) est de masse 1.

Soit  $\omega$  une configuration générique de  $3d - 1$  points dans  $\mathbb{R}^2$ . Posons

$$W(d) = \sum_{C \in \mathbb{RC}(d, 0, \omega)} (-1)^{m(C)}.$$

Le résultat suivant est un des théorèmes majeurs en géométrie énumérative réelle de ces dernières années.



**Théorème 3.15 (Welschinger [Wel05a]).** *Pour tout  $d \geq 1$ , le nombre  $W(d)$  ne dépend pas de  $\omega$ .*

Pour nous, l'intérêt principal de l'invariant  $W(d)$  est qu'il donne une borne inférieure pour le cardinal de  $\mathbb{RC}(d, 0, \omega)$  potentiellement meilleure que celle de la Proposition 3.11.

**Proposition 3.16.** *Pour tout  $d \geq 1$  et toute configuration  $\omega$  générique de  $3d - 1$  points dans  $\mathbb{R}^2$ , on a*

$$|W(d)| \leq \text{card}(\mathbb{RC}(d, 0, \omega)).$$

*Démonstration.* La proposition découle immédiatement du fait que les courbes de  $\mathbb{RC}(d, 0, \omega)$  sont comptées avec un signe  $\pm 1$ .  $\square$

Donc si nous arrivons à montrer que les nombres  $W(d)$  ne sont pas nuls, nous aurons accompli un progrès dans l'étude du Problème 3 ! On voit facilement avec la Formule de Kontsevich (Théorème 2.25) que les nombres  $N(d, 0)$  sont pairs dès que  $d \geq 3$ , de sorte que nous ne pouvons même pas affirmer immédiatement que par  $3d - 1$  point génériques de  $\mathbb{R}^2$  passe au moins une courbe algébrique réelle rationnelle de degré  $d$ .

**Problème 5.** *Les nombres  $W(d)$  sont ils nuls ?*

Welschinger a montré que les nombres  $W(d)$  ne dépendent pas de la configuration  $\omega$  choisie, mais il restait à les calculer. Dans son article original, Welschinger a seulement pu démontrer que  $W(d)$  était non nul pour  $d \leq 5$ . Ce n'est que grâce à la géométrie tropicale que les invariants de Welschinger ont pu être calculés pour la première fois par Mikhalkin dans [Mik05]. En se basant sur les travaux de Mikhalkin, Itenberg, Kharlamov et Shustin (voir [IKS03]) ont donné une borne inférieure non triviale pour les nombres  $W(d)$  et ont ainsi établi l'existence d'une courbe algébrique réelle rationnelle de degré  $d$  passant par n'importe quelle configuration de  $3d - 1$  points réels. Un peu plus tard, ils ont montré que les invariants de Welschinger satisfont une formule de type Caporaso-Harris (voir [IKS]). Encore une fois, cette formule est assez compliquée, nous ne la donnerons pas ici. Nous proposons toutefois au Lecteur d'écrire lui même cette formule à l'Exercice 6.6.

Les premières valeurs de  $W(d)$  sont données dans le tableau 3. Notons que pour démontrer la Proposition 3.12, Degtyarev et Kharlamov avaient en fait calculé  $W(3)$ , et ce avant que Welschinger ait défini ses invariants. Les valeurs de  $W(d)$  pour  $d \geq 4$  sont dues à Itenberg, Kharlamov et Shustin. Ces derniers ont aussi étudié quelques propriétés de la suite  $(W(d))_{d \geq 1}$ . Nous verrons ces résultats plus en détail à la section 6.2.

La Proposition 3.12 nous dit que  $W(3)$  est la borne inférieure optimale pour  $\text{card}(\mathbb{RC}(3, 0, \omega))$ . En utilisant les diagrammes en étages (voir section 5), Rey a montré que l'invariant de Welschinger est aussi optimal en degré 4.

$d$	1	2	3	4	5	6	7
$W(d)$	1	1	8	240	18264	2845440	792731520

TABLE 3. Premières valeurs de  $W(d)$

**Proposition 3.17 (Rey).** *Il existe une configuration générique de 11 points dans  $\mathbb{R}^2$  par laquelle passent exactement 240 courbes algébriques réelles rationnelles de degré 4.*

À partir du degré 5, le problème de l'optimalité de  $W(d)$  est toujours ouvert.

**Problème 6.** *Existe-t-il toujours une configuration générique  $\omega$  de  $3d - 1$  points dans  $\mathbb{R}^2$  telle que le cardinal de  $\mathbb{RC}(d, 0, \omega)$  soit exactement  $W(d)$  ?*

**Remarque 3.18.** Rien ne nous empêche de compter les courbes de  $\mathbb{RC}(d, g, \omega)$  pour tout genre  $g$  avec les mêmes signes que pour les courbes rationnelles. Malheureusement, les nombres obtenus ne sont pas invariants par rapport à  $\omega$  dès que  $g \geq 1$  (voir [Wel05a] ou [IKS03])...

#### 4. Géométrie énumérative tropicale

La géométrie tropicale est une géométrie algébrique comme aux sections 2 et 3, mais au lieu de se fixer un corps de base, on se fixe à la place un *semi-corps* (c'est-à-dire que nous ne disposons pas de

la soustraction) de base. Les objets tropicaux que l'on obtient ont alors une nature combinatoire, ce qui facilite la résolution de certains problèmes. Par exemple, la géométrie énumérative tropicale est beaucoup plus simple que ses homologues réelle ou complexe ! La suite de ce texte est destinée à convaincre le Lecteur que la géométrie énumérative tropicale, c'est facile.

L'intérêt majeur de la géométrie tropicale est qu'elle permet de résoudre des problèmes de géométrie classique. Les Théorèmes de Correspondance de Mikhalkin que nous verrons à la section 4.2 en sont de beaux exemples : compter des courbes tropicales revient à compter des courbes algébriques.

**4.1. Courbes tropicales nodales.** Rappelons (voir la partie 3.3 du texte d'Ilia Itenberg, ce volume), qu'une courbe tropicale dans  $\mathbb{R}^2$  est un graphe équilibré dans  $\mathbb{R}^2$  dont les arêtes sont des intervalles à pente rationnelle et auxquelles nous attribuons un nombre entier appelé *poids*. Une courbe tropicale est *irréductible* si elle n'est pas l'union de deux courbes tropicales, et elle est de *degré*  $d$  si son polygone de Newton est le triangle  $\Delta_d$  de sommets  $(0, 0)$ ,  $(0, d)$  et  $(d, 0)$ . Comme en géométrie complexe, nous appellerons *droite* (resp *conique*, *cubique*) tropicale une courbe tropicale de degré 1 (resp. 2, 3).

**Exemple 4.1.** Les courbes tropicales des Figures 9b, c et d sont irréductibles. La courbe tropicale de la Figure 9a est réductible, et est l'union d'une droite et d'une conique tropicale. Les courbes tropicales des Figures 9a, c et d sont des cubiques, et celle de la Figure 9b est une conique.

Dans les dessins, on ne précise le poids d'une arête uniquement si celui-ci est au moins 2.

Soient  $C$  une courbe tropicale et  $s$  un sommet adjacent à une arête  $a$ . Comme l'arête  $a$  est incluse dans une droite  $L$  dont la direction est d'équation à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , il existe un vecteur  $\vec{v}$  dans  $\mathbb{Z}^2$  tel que  $s + \vec{v}$  soit dans  $L$ . De plus, si nous demandons que les coordonnées de  $\vec{v}$  soient premières entre elles, il n'y a plus que deux choix possibles pour  $\vec{v}$  suivant sa direction. Nous pouvons fixer cette direction en demandant que le point  $s + \varepsilon \vec{v}$  soit dans  $a$  pour un

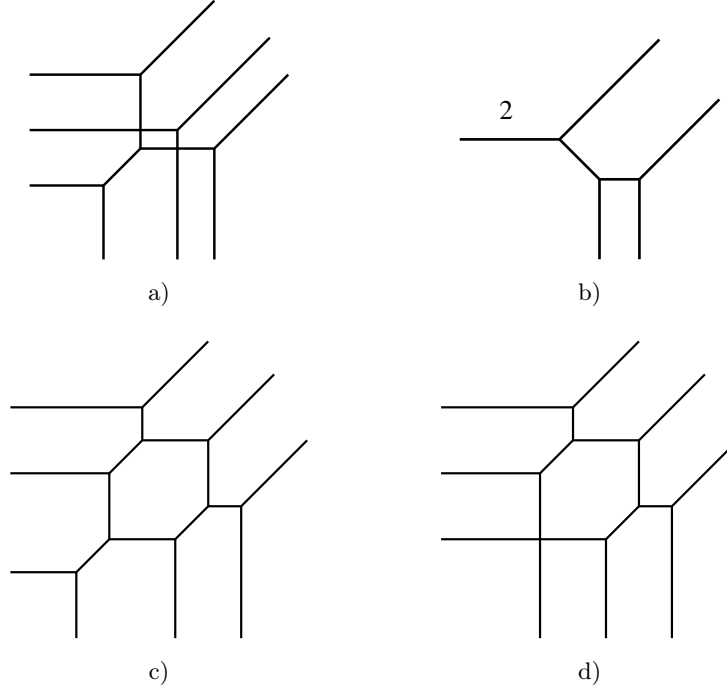


FIGURE 9. Quelques courbes tropicales

nombre réel positif  $\varepsilon$  assez petit. Nous avons ainsi défini de manière unique un vecteur  $\vec{v}$  dans  $\mathbb{Z}$  à partir de  $s$  et de  $a$ .

**Définition 4.2.** Le vecteur  $\vec{v}$  est appelé le vecteur primitif sortant du sommet  $s$  suivant l'arête  $a$ .

**Exemple 4.3.** Si  $s$  est le sommet d'une droite tropicale, alors les trois arêtes sont contenues dans trois droites d'équations  $Y = \beta$ ,  $X = \alpha$  et  $X - Y = \alpha - \beta$ . Les trois vecteurs primitifs sortant de  $s$  sont donc les vecteurs  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$  et  $(1, 1)$ .

Le nombre maximal de sommets et d'arêtes d'une courbe tropicale s'exprime facilement en fonction du degré de la courbe. Nous aurons besoin dans la suite de la proposition suivante.

**Proposition 4.4.** Une courbe tropicale  $C$  de degré  $d$  a au plus  $d^2$  sommets.

*Démonstration.* D'après la section 3.2 du texte d'Ilia Itenberg, chaque sommet de la courbe  $C$  est dual à un polygone de la subdivision de  $\Delta_d$  duale de  $C$ . Un polygone à sommets entiers est d'aire au moins  $1/2$  et  $\Delta_d$  est d'aire  $d^2/2$ , d'où le résultat.  $\square$

Une courbe tropicale peut être assez compliquée, et comme à la section 2 nous allons travailler avec les plus simples, les courbes nodales.

**Définition 4.5.** Une courbe tropicale  $C$  est nodale si chaque arête non bornée de  $C$  est de poids 1 et si chaque sommet de  $C$  est trivalent ou quadrivalent. De plus, si  $s$  est un sommet quadrivalent adjacent aux arêtes  $a_1, \dots, a_4$  de vecteurs primitifs sortants correspondants  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4$  alors, quitte à renuméroter les  $a_i$  et  $\vec{v}_i$ , on a  $w(a_1) = w(a_2)$ ,  $w(a_3) = w(a_4)$ ,  $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3 = -\vec{v}_4$ .

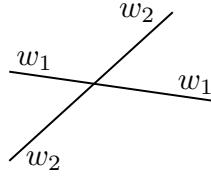


FIGURE 10. Un sommet quadrivalent d'une courbe tropicale nodale

En d'autres termes, une courbe tropicale  $C$  est nodale si tous ses sommets qui sont adjacents à au moins 4 arêtes sont en fait adjacents à exactement 4 arêtes et, sur un voisinage de ce sommet,  $C$  est l'union de deux intervalles (voir Figure 10). Nous retrouvons la notion de point d'intersection de deux branches de  $C$  comme à la section 2.

**Exemple 4.6.** Toutes les courbes tropicales de la Figure 9 sont nodales.

Pour calculer le genre d'une courbe algébrique complexe, il suffit de compter le nombre de points doubles de la courbe. En géométrie tropicale, l'idée est toujours la même mais la définition est un peu différente car un sommet quadrivalent peut compter pour plusieurs points doubles, et un sommet trivalent peut aussi « cacher » des points doubles.

**Définition 4.7.** Soit  $C$  une courbe tropicale irréductible nodale de degré  $d$  avec  $\sigma$  sommets trivalents. Le genre de  $C$ , noté  $g(C)$  est défini par

$$g(C) = \frac{\sigma - 3d + 2}{2}.$$

Comme dans le cas des courbes algébriques, le genre est un entier compris entre 0 et  $(d-1)(d-2)/2$ .

**Exemple 4.8.** Les courbes tropicales des Figures 9b et d sont de genre 0. La courbe tropicale de la Figure 9c est de genre 1.

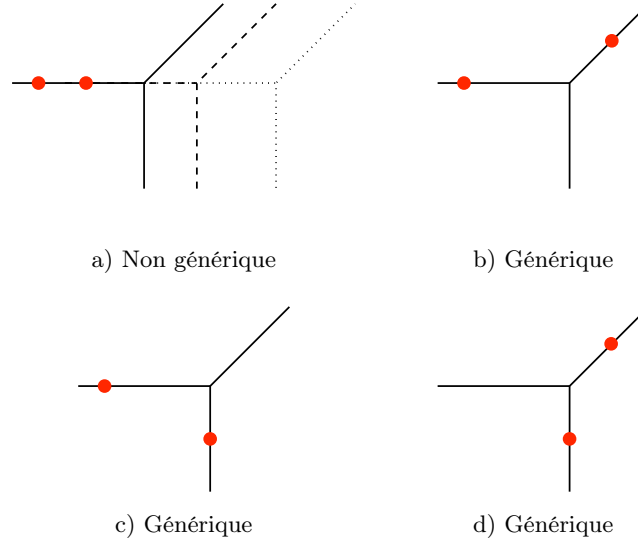
Comme en géométrie complexe, nous appellerons *courbe tropicale rationnelle* une courbe tropicale de genre 0.

**4.2. Théorèmes de Correspondance.** Nous avons maintenant toutes les définitions requises pour pouvoir faire de la géométrie énumérative tropicale. Fixons-nous un degré  $d \geq 1$ , un genre  $g \geq 0$ , et une configuration générique  $\omega = \{p_1, \dots, p_{3d-1+g}\}$  de  $3d-1+g$  points dans  $\mathbb{R}^2$ . Considérons alors l'ensemble  $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$  de toutes les courbes tropicales irréductibles nodales<sup>(15)</sup> de degré  $d$ , de genre  $g$ , passant par tous les points de  $\omega$ .

**Proposition 4.9 (Mikhalkin, [Mik05]).** *Si la configuration de points  $\omega$  est générique, alors l'ensemble  $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$  est fini.*

**Exemple 4.10.** Si nous prenons  $d = 1$  (et donc  $g = 0$ ), nous regardons alors les droites tropicales passant par deux points de  $\mathbb{R}^2$ . Si les deux points sont sur une même droite (habituelle!) d'équation  $X = \alpha$  ou  $Y = \alpha$  ou  $X = Y + \alpha$ , alors il existe une infinité de droites tropicales passant par ces deux points (voir la Figure 11a). Dans ce cas, les deux points ne sont pas en position générique. Par contre, si les deux points ne sont pas sur une telle droite, alors il existe une unique droite tropicale passant par ces deux points, comme nous le voyons sur les Figures 11b, c et d pour différentes paires de points. Nous retrouvons ainsi le même résultat que pour les droites algébriques!

<sup>(15)</sup> Comme dans le cas algébrique, il existe une notion de genre pour toute courbe tropicale, et pour une configuration générique  $\omega$ , toutes les courbes de  $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$  seront nodales. On peut donc encore une fois oublier de préciser « nodales » dans l'énoncé du problème.

FIGURE 11. Deux points dans  $\mathbb{R}^2$  et les droites les contenant

**Exemple 4.11.** Fixons-nous maintenant  $d = 2$  (et donc  $g = 0$ ). Nous comptons les coniques tropicales passant par 5 points en position générique, et dans ce cas encore nous en trouvons une unique. Comme pour les courbes algébriques! Nous pouvons voir cette conique tropicale pour un exemple de configuration sur la Figure 12a. La preuve que cette conique est la seule sera donnée à la section 5.

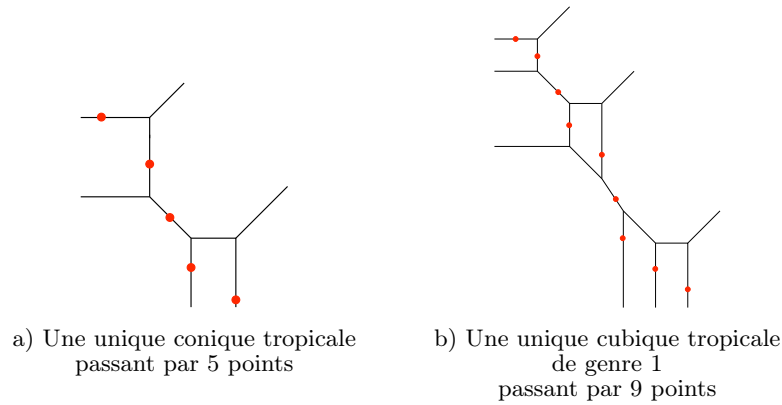


FIGURE 12. Deux solutions de problèmes énumératifs tropicaux

**Exemple 4.12.** Pour  $d = 3$ , le genre peut être 0 ou 1. Si nous fixons  $g = 1$ , alors comme aux Exemples 4.10 et 4.11, nous trouvons une unique cubique de genre 1 passant par 9 points génériques (voir Figure 12b). Regardons maintenant les cubiques tropicales rationnelles passant par une configuration de 8 points. La Figure 13 nous donne toutes les cubiques tropicales rationnelles passant par une telle configuration. La preuve que toutes les cubiques rationnelles passant par les 8 points choisis sont bien représentées sur la Figure 13 sera donnée à la section 5. Nous avons alors beau compter et recompter, nous ne trouvons que 9 cubiques tropicales rationnelles passant par nos 8 points, rien à voir avec le nombre  $N(3, 0)$  égal à 12... La similitude entre la géométrie tropicale et la géométrie complexe s'arrêterait-elle ici ?

En fait, nous trouvons 9 dans l'exemple précédent car nous comptons mal. Nous avons déjà vu à la Définition 4.7 du genre d'une courbe tropicale nodale qu'un point d'intersection de deux branches pouvait en fait compter pour plusieurs points doubles. La situation est analogue ici : il peut arriver, et il arrive souvent, que l'on doive compter une courbe tropicale de  $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$  plusieurs fois. En d'autres termes, il faut attribuer à chaque courbe une *multiplicité*, et compter les courbes de  $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$  avec cette multiplicité.

Quelle est donc cette multiplicité ? Soit  $C$  une courbe tropicale nodale, et  $s$  un sommet trivalent de  $C$  adjacent aux arêtes  $a_1, a_2$  et  $a_3$  de vecteurs primitifs sortants correspondants  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$ . La multiplicité complexe de  $s$  est définie par

$$\mu_{\mathbb{C}}(s) = w(a_1)w(a_2)|\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)|.$$

Grâce à la condition d'équilibre, le nombre  $\mu_{\mathbb{C}}(s)$  ne dépend pas de la numérotation des  $a_i$ . Une définition équivalente de la multiplicité du sommet  $v$  est  $\mu_{\mathbb{C}}(s) = 2\mathcal{A}(v^\nu)$  où  $\mathcal{A}(v^\nu)$  désigne l'aire euclidienne du triangle dual  $v^\nu$  de  $v$  dans la subdivision de  $\Delta_d$  duale de  $C$  (voir la partie 3.2 du texte d'Ilia Itenberg) Notons  $\Gamma_{0,3}$  l'ensemble des sommets trivalents de  $C$ .

**Définition 4.13.** La multiplicité complexe d'une courbe tropicale nodale  $C$ , notée  $\mu_{\mathbb{C}}(C)$ , est définie par

$$\mu_{\mathbb{C}}(C) = \prod_{s \in \Gamma_{0,3}} \mu_{\mathbb{C}}(s).$$



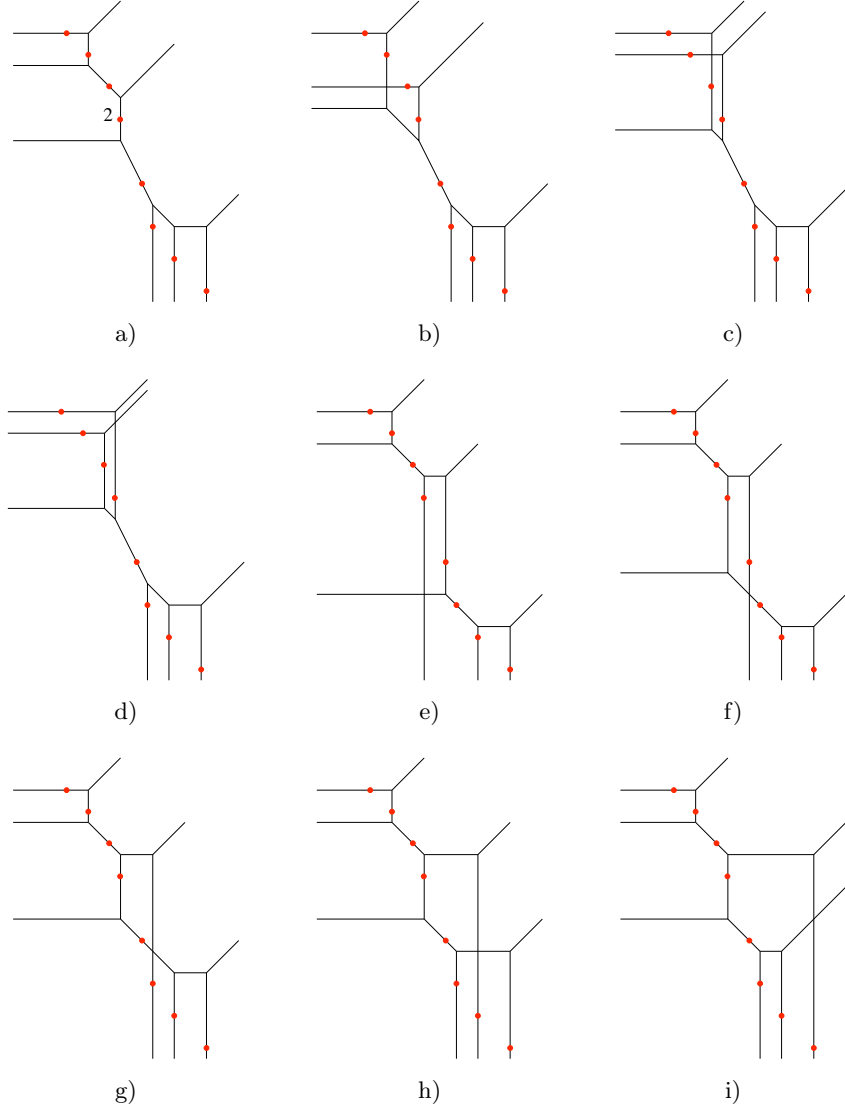


FIGURE 13. Cubiques tropicales rationnelles passant par 8 points

Quelle est la signification de cette multiplicité? Pour  $t \geq e = 2,71828\dots$ , notons  $\Phi_t$  le difféomorphisme de  $(\mathbb{C}^*)^2$  défini par

$$(z, w) \mapsto \left( \frac{z}{|z|} |z|^{1/\ln t}, \frac{w}{|w|} |w|^{1/\ln t} \right).$$

En particulier,  $\Phi_e = \text{Id}$ , et  $\text{Log} \circ \Phi_t \circ \text{Log}^{-1} = F_t$  (voir les parties 4 et 5 du texte d’Ilia Itenberg, et la partie 7 du texte de Bernard Teissier, ce volume). Prenons une configuration générique  $\omega$  de  $3d - 1 + g$  points dans  $\mathbb{R}^2$ , et  $\omega_0$  une configuration générique de  $3d - 1 + g$  points dans  $\mathbb{C}^2$  telle que  $\text{Log}(\omega_0) = \omega$ . Dans son article [Mik05], Mikhalkin montre que lorsque  $t$  tend vers l’infini, les images par  $F_t$  des amibes des courbes algébriques dans  $\mathcal{C}(d, g, \Phi_t^{-1}(\omega_0))$  tendent vers les courbes tropicales de  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ . La multiplicité d’une courbe tropicale  $C$  dans  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$  est alors précisément le nombre de courbes algébriques dans  $\mathcal{C}(d, g, \Phi_t^{-1}(\omega_0))$  dont l’image par  $F_t$  de l’amibe tend vers  $C$ . Pour faire le lien entre les explications précédentes et les amibes non archimédiennes, on peut se reporter au Théorème 12 du texte d’Ilia Itenberg, ou au Théorème 7.1 du texte de Bernard Teissier.

Avec ces précisions, il devient clair que c’est avec la multiplicité  $\mu_{\mathbb{C}}(C)$  qu’il faut compter les courbes tropicales.

**Théorème 4.14 (Mikhalkin [Mik05]).** *Pour tous  $d \geq 1$ ,  $g \geq 0$ , et  $\omega$  générique, on a l’égalité*

$$N(d, g) = \sum_{C \in \mathbb{TC}(d, g, \omega)} \mu_{\mathbb{C}}(C).$$

Il n’est pas difficile de voir que le cardinal de  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$  dépend de  $\omega$ . Un corollaire immédiat du Théorème 4.14 est que le nombre de courbes tropicales dans  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$  comptées avec multiplicité ne dépend pas de  $\omega$ .

**Exemple 4.15.** Toutes les courbes tropicales des Figures 11, 12 et 13 sont de multiplicité complexe 1 sauf la courbe de la Figure 13a qui est de multiplicité complexe 4. Nous retrouvons ainsi  $N(1, 0) = N(2, 0) = N(3, 1) = 1$  et  $N(3, 0) = 12$ .

Ainsi, la géométrie énumérative tropicale donne les mêmes résultats que la géométrie énumérative complexe. Qu’en est-il de la géométrie énumérative réelle ? Dans la démonstration du Théorème 4.14, il est possible de choisir  $\omega_0 \subset \mathbb{R}^2$  et donc de considérer les ensembles  $\mathbb{RC}(d, g, \Phi_t^{-1}(\omega_0))$ . Mikhalkin montre alors que lorsque  $t$  tend vers l’infini, la somme des signes de Welschinger des courbes algébriques réelles dans  $\mathbb{RC}(d, g, \Phi_t^{-1}(\omega_0))$  peut se calculer très facilement à partir de la seule connaissance de  $C$  et est égale à  $-1$ ,  $0$  ou  $1$ . C’est-à-dire

qu'il existe une multiplicité réelle d'une courbe tropicale rationnelle telle qu'en comptant les courbes tropicales dans  $\mathbb{TC}(d, 0, \omega)$  avec cette multiplicité, on retrouve l'invariant de Welschinger. Soit  $C$  une courbe tropicale rationnelle nodale, et  $s$  un sommet trivalent de  $C$ . Si  $\mu_{\mathbb{C}}(s)$  est pair, alors la multiplicité réelle de  $C$  sera 0. Si  $\mu_{\mathbb{C}}(s)$  est impair, sa valeur modulo 4 est soit 1 soit 3. Posons

$$o(C) = \text{card}(\{s \text{ sommet trivalent de } C \text{ tel que } \mu_{\mathbb{C}}(s) = 3 \bmod 4\}).$$

**Définition 4.16.** La multiplicité réelle d'une courbe tropicale nodale irréductible  $C$ , notée  $\mu_{\mathbb{R}}(C)$ , est définie par

$$\mu_{\mathbb{R}}(C) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_{\mathbb{C}}(C) \text{ est pair,} \\ (-1)^{o(C)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Théorème 4.17 (Mikhalkin [Mik05]).** Pour tous  $d \geq 1$  et  $\omega$  générique, on a l'égalité

$$W(d) = \sum_{C \in \mathbb{TC}(d, 0, \omega)} \mu_{\mathbb{R}}(C).$$

**Exemple 4.18.** Toutes les courbes tropicales rationnelles sur les Figures 11, 12a et 13 sont de multiplicité réelle 1 sauf la courbe de la Figure 13a qui est multiplicité réelle 0. Nous retrouvons ainsi  $W(1) = W(2) = 1$  et  $W(3) = 8$ .

**Remarque 4.19.** Nous pouvons très bien attribuer avec les mêmes règles une multiplicité réelle à une courbe tropicale nodale irréductible de *n'importe quel* genre. Une surprise nous attend alors (voir [IKS]) : contrairement à ce qui se passe pour les courbes algébriques réelles, ces nombres tropicaux ne dépendent pas de  $\omega$  ! On ne comprend toujours pas les raisons profondes de cette invariance tropicale.

## 5. Décomposition en étages de courbes tropicales

Les Théorèmes 4.14 et 4.17 réduisent déjà nos problèmes énumératifs en géométrie algébrique à des problèmes combinatoires : il suffit de compter certains graphes rectilignes dans  $\mathbb{R}^2$ . Les décompositions en étages sont une étape supplémentaire dans la simplification du calcul des nombres  $N(d, g)$  et  $W(d)$ . L'idée est de prendre une configuration quelconque de points, et d'éloigner les points les uns des autres dans la direction verticale. À mesure que les points s'éloignent, nos courbes

tropicales se « cassent » en morceaux très simples, et le tour est joué. Cette méthode peut être vue comme une variante tropicale de la méthode de Caporaso et Harris en géométrie énumérative complexe.

**5.1. Étages d’une courbe tropicale.** Puisque nous distinguons une direction particulière dans  $\mathbb{R}^2$ , les arêtes d’une courbe tropicale se trouvent naturellement divisées en deux catégories. Assez logiquement, nous appelons arêtes *verticales* d’une courbes tropicale celles qui sont parallèles à la droite d’équation  $X = 0$ .

**Définition 5.1.** Un étage d’une courbe tropicale  $C$  est une composante connexe de  $C$  privée de ses arêtes verticales.

Les mathématiques étant basées sur le monde observé, deux étages seront naturellement reliés par un *ascenseur*.

**Définition 5.2.** Une composante connexe d’une courbe tropicale  $C$  privée de ses étages est appelée un ascenseur.

**Remarque 5.3.** Pour être totalement rigoureux, il faudrait écrire *une composante connexe de l’adhérence de...* dans les deux définitions précédentes.

En général, les ascenseurs sont une union d’arêtes verticales, mais ne sont pas eux même des arêtes verticales comme on peut le voir sur les Figures 13d, e,..., i. Puisqu’un sommet quadrivalent d’une courbe tropicale nodale est l’intersection de deux intervalles, la Définition 4.5 nous permet de parler du poids d’un ascenseur d’une courbe tropicale nodale.

**Exemple 5.4.** Les ascenseurs, qui sont aussi des arêtes verticales ici, des courbes tropicales de la Figure 14 sont dessinées en pointillés, leurs étages sont dessinés en traits pleins. Leur poids est à chaque fois 1.

Comme d’habitude, on se fixe un degré  $d$ , un genre  $g$ , une configuration  $\omega = \{p_1, \dots, p_{3d-1+g}\}$  de  $3d - 1 + g$  points dans  $\mathbb{R}^2$ , et on considère l’ensemble  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ . Maintenant, envoyons un par un les points  $p_i$  « très haut », et observons ce qui se passe.

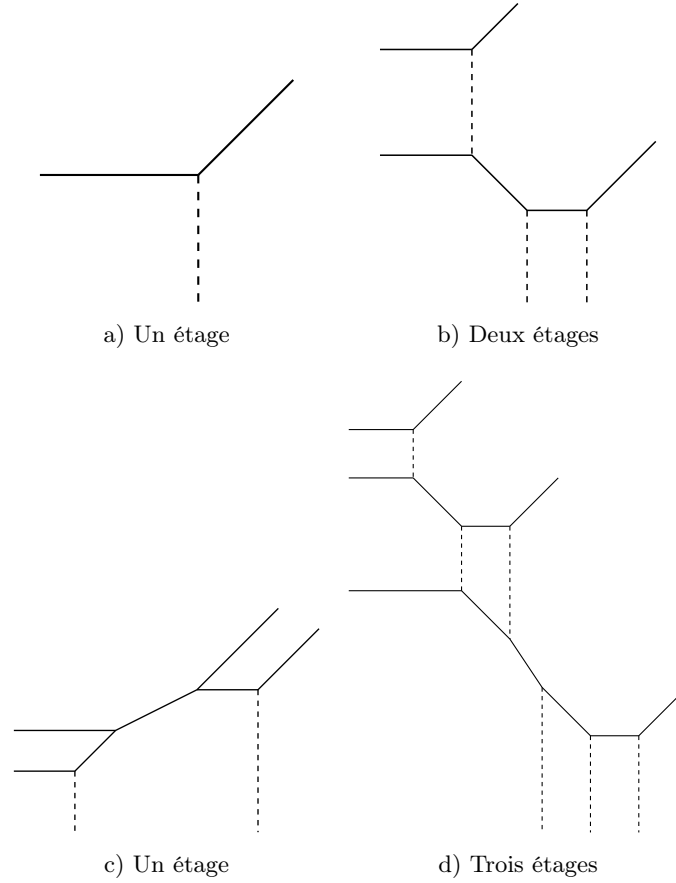
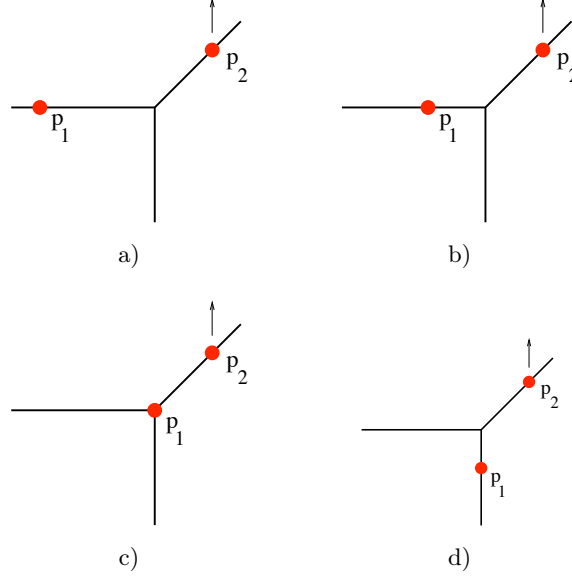


FIGURE 14. Étages de courbes tropicales

**Exemple 5.5.** Supposons que  $d = 1$  et que nous partons de la configuration de la Figure 15a. Lorsque nous déplaçons le point  $p_2$  vers le haut, le sommet de la droite tropicale passant par  $p_1$  et  $p_2$  se déplace vers la gauche (Figure 15b) jusqu'à coïncider avec  $p_1$  (Figure 15c, notons que la configuration  $\{p_1, p_2\}$  n'est alors pas générique), puis le sommet de la droite se déplace vers le haut et  $p_1$  se trouve désormais sur l'ascenseur (Figure 15b). Si nous continuons à déplacer  $p_2$  vers le haut, le sommet de la droite continue à monter, mais rien d'autre ne se passe.

FIGURE 15. On monte le point  $p_2$ 

**Exemple 5.6.** Prenons maintenant  $d = 2$  et la configuration de la Figure 16a. Lorsque nous déplaçons le point  $p_5$  vers le haut, comme à l'Exemple 5.5 nous arrivons à la courbe tropicale de la Figure 16b. Puis, si nous montons le point  $p_4$ , celui-ci se déplace le long de l'ascenseur, et si nous gardons la distance entre  $p_5$  et  $p_4$  très grande, rien ne se passe. De même, en montant à présent le point  $p_3$ , alors nous arrivons au bout d'un moment à la courbe tropicale de la Figure 16c, et plus rien ne se passe lorsque nous montons les points  $p_2$  puis  $p_1$  tout en gardant une distance très grande entre les points  $p_i$ .

Dans les deux exemples précédents, on observe le même phénomène. Si les points  $p_i$  sont suffisamment éloignés les uns des autres, alors chaque étage et chaque ascenseur contient *exactement* un point de  $\omega$ . Ainsi, la répartition des points de  $\omega$  sur les courbes tropicales devient très simple! Étudions maintenant ce qui se passe dans le cas général.

Revenons à une configuration générique  $\omega$  quelconque, et soit  $[u; v]$  un segment de  $\mathbb{R}$ . La proposition suivante nous dit que si  $\omega \subset [u; v] \times \mathbb{R}$ , alors toute l'information intéressante à propos des courbes de  $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$  se trouve aussi dans le ruban  $[u; v] \times \mathbb{R}$ .

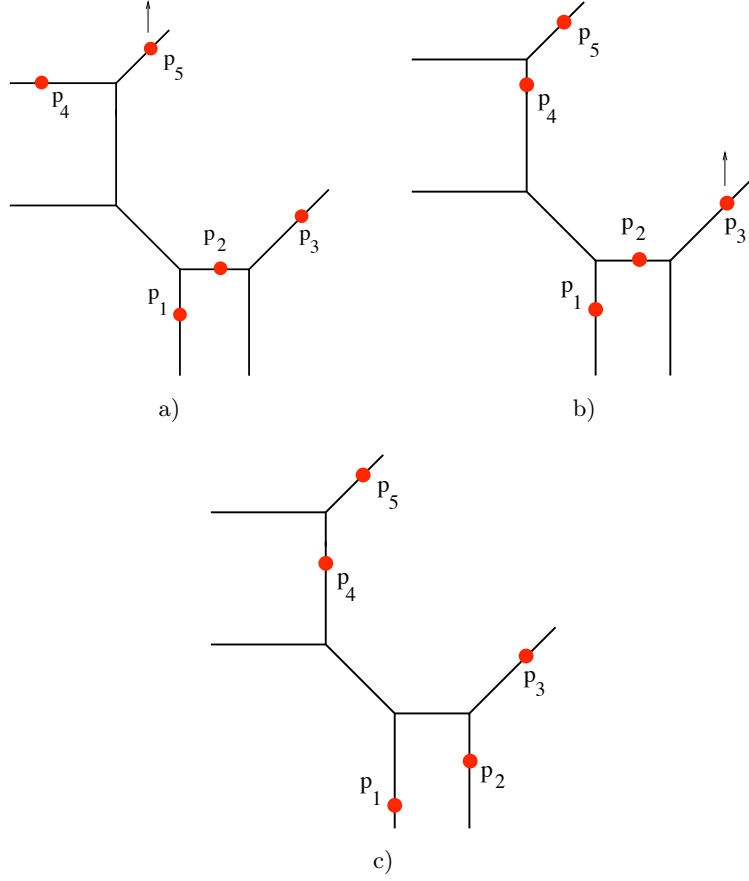


FIGURE 16. On monte les points un par un

**Lemme 5.7.** *Si tous les points de  $\omega$  sont dans  $[u; v] \times \mathbb{R}$ , alors tous les sommets de toutes les courbes tropicales de  $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$  sont aussi dans  $[u; v] \times \mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Nous allons raisonner par l'absurde : s'il existe une courbe de  $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$  ayant un sommet dans le demi-plan  $\{(x, y) \mid x < u\}$ , nous allons alors montrer qu'il existe un nombre infini de courbes tropicales dans  $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$  en contradiction avec la Proposition 4.9. Le cas d'une courbe ayant un sommet dans le demi-plan  $\{(x, y) \mid x > v\}$  se traite de la même manière, nous ne le ferons pas ici.

Supposons donc qu'il existe une courbe tropicale  $C$  dans  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$  ayant un sommet dans le demi-plan  $\{(x, y) | x < u\}$ . Soit  $s = (x_0, y_0)$  un sommet de  $C$  dont l'abscisse est la plus petite parmi les sommets de  $C$ . Par hypothèse,  $x_0 < u$ . Puisqu'il n'existe pas d'autres sommets de  $C$  strictement à gauche de  $s$ , toutes les arêtes strictement à gauche de  $s$  sont infinies dans la direction  $(-1, 0)$ ,  $s$  est adjacent à l'une d'entre elles et nous pouvons choisir  $s$  trivalent. De plus, par la condition d'équilibre, les deux autres arêtes adjacentes à  $s$  sont de vecteurs primitifs sortant  $(0, \pm 1)$  et  $(1, \alpha)$  (on ne sait rien sur les poids a priori). Puisque aucun point de  $\omega$  ne se trouve à gauche de  $s$ , nous pouvons alors construire facilement un nombre infini de courbes tropicales dans  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ , simplement en translatant l'arête verticale dans la direction  $(-1, 0)$ . Le cas où l'arête verticale est adjacente à un autre sommet de  $C$  est représenté sur la Figure 17.  $\square$

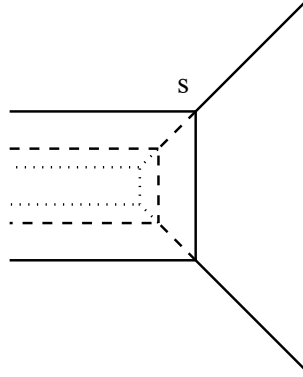


FIGURE 17. Une famille infinie de courbes tropicales

Gardons maintenant le segment  $[u; v]$  fixe, et éloignons tous les points les uns des autres comme dans les Exemples 5.5 et 5.6. Au bout d'un moment, pour aller d'un point  $p_i$  à un autre en restant sur une courbe tropicale de  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ , nous sommes obligés de passer par une arête verticale.

**Corollaire 5.8.** *Pour tout segment  $[u; v]$ , il existe un nombre réel  $A$  tel que si  $\omega \subset [u; v] \times \mathbb{R}$  et  $|y_i - y_j| > A$  pour tout couple de points distincts  $(x_i, y_i)$  et  $(x_j, y_j)$  de  $\omega$ , alors chaque étage de chaque courbe de  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$  contient exactement un point de  $\omega$ .*



*Démonstration.* Soit  $C$  une courbe de  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ . Tout d'abord, pour toute configuration  $\omega$ , chaque étage de  $C$  contient au moins un point de  $\omega$ . Dans le cas contraire, on pourrait alors translater un étage vide de point de  $\omega$  dans la direction  $(0, 1)$  et construire ainsi une famille infinie de courbes dans  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$  en contradiction avec la Proposition 4.9.

En raison du théorème de Bézout tropical (voir la partie 3.5 du texte d'Ilya Itenberg), toute arête  $a$  de vecteur primitif  $\vec{v}$  d'une courbe tropicale de degré  $d$  vérifie  $w(a)\vec{v} = (\alpha, \beta)$  avec  $|\alpha|$  et  $|\beta|$  plus petits que  $d$ . Cela entraîne qu'il existe un nombre  $M(d)$  qui majore la pente de toute arête non verticale d'une courbe tropicale de degré  $d$ .

Prenons maintenant une configuration  $\omega \subset [u; v] \times \mathbb{R}$ . Soient  $C$  une courbe tropicale de  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$  et  $\gamma$  un chemin dans  $C$  reliant deux points  $(x_i, y_i)$  et  $(x_j, y_j)$  de  $\omega$ . Supposons que  $\gamma$  ne contienne pas d'arête verticale de  $C$ . Les deux points sont donc sur le même étage de  $C$ . D'après le Lemme 5.7, tous les sommets de  $C$  sont dans le ruban  $[u; v] \times \mathbb{R}$ . Or, d'après la Proposition 4.4 le nombre de sommets de  $C$  est plus petit que  $d^2$ , et les pentes des arêtes non verticales de  $C$  sont uniformément bornées par  $M(d)$ , donc la quantité  $|y_i - y_j|$  est bornée par un nombre  $A$  qui ne dépend que du degré  $d$ . Ainsi, si  $|y_i - y_j| > A$  pour tous les couples de points de  $\omega$ , chaque étage de  $C$  ne peut contenir plus d'un point de  $\omega$ .  $\square$

Rappelons que si  $C$  est une courbe tropicale nodale, alors le nombre de sommets trivalents de  $C$  est noté  $\sigma$  (Définition 4.7).

**Corollaire 5.9.** *Si la distance entre les points de  $\omega$  est assez grande, alors chaque courbe de  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$  a exactement  $d$  étages et  $2d - 1 + g$  ascenseurs. De plus, toute arête d'un étage d'une courbe de  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$  est de vecteur directeur primitif  $(1, \alpha)$ , avec  $\alpha$  dans  $\mathbb{Z}$ , et est de poids 1.*

*Démonstration.* Soit  $C$  une courbe tropicale dans  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ , soient  $e$  le nombre d'étages de  $C$  et  $v$  son nombre d'ascenseurs. Tout d'abord, comme  $C$  a exactement  $d$  arêtes infinies dans la direction  $(-1, 0)$  et que chaque étage contient au moins une de ces arêtes, nous avons  $e \leq d$ . Nous allons maintenant montrer que  $v \leq 2d - 1 + g$ . Les extrémités d'un ascenseur sont soit deux sommets trivalents de  $C$  (si l'ascenseur est borné), soit un sommet trivalent de  $C$  (si l'ascenseur n'est pas borné). Comme  $C$  a exactement  $d$  ascenseurs infinis, nous

avons l'inégalité  $2v \leq \sigma + d$ . Mais par définition du genre d'une courbe tropicale  $\sigma = 2g + 3d - 2$ , donc  $v \leq 2d - 1 + g$  comme annoncé.

Comme  $\omega$  est une configuration générique, un ascenseur de  $C$  ne peut pas contenir deux points de  $\omega$ . Sinon, cela voudrait dire que deux points de  $\omega$  ont la même abscisse, ce que l'on peut toujours éviter. Donc, d'après le Corollaire 5.8, la courbe  $C$  ne peut pas contenir plus de  $3d - 1 + g$  points de  $\omega$ . Mais comme par hypothèse  $C$  contient exactement  $3d - 1 + g$  points de  $\omega$ , nous avons forcément les égalités  $e = d$  et  $v = 2d - 1 + g$ .

Une droite verticale ne contenant pas d'ascenseur a une multiplicité d'intersection avec chaque étage au moins égale à 1. Or, le nombre d'intersection total d'une courbe tropicale de degré  $d$  et d'une droite verticale est exactement  $d$  d'après le théorème de Bézout (voir la partie 3.5 du texte d'Ilia Itenberg), donc si  $C$  contient  $d$  étages, la multiplicité d'intersection de chacun de ces étages avec une droite verticale est exactement égale à 1. Si une arête est de vecteur primitif  $(\alpha, \beta)$  et de poids  $w$ , sa multiplicité d'intersection de 1 avec une droite verticale est  $w\alpha$ , d'où la dernière assertion du corollaire.  $\square$

Le Corollaire 5.9 implique qu'une courbe tropicale dans  $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$  est entièrement déterminée par la répartition des points de  $\omega$  sur les ascenseurs et les étages de  $C$  ! Dans l'énumération des courbes tropicales de  $\mathcal{TC}(d, g, \omega)$ , nous pouvons donc finalement oublier les courbes tropicales, et uniquement nous rappeler comment les ascenseurs relient les étages et comment les points de  $\omega$  se répartissent. Le codage de ces informations est appelé un *diagramme en étages marqué*.

**5.2. Énumération de diagrammes en étages.** Pour définir les diagrammes en étages, nous avons besoin de quelques définitions abstraites préalables.

**Définition 5.10.** Un graphe  $\Gamma$  connexe orienté est la donnée d'un ensemble fini de points  $\Gamma_0$ , d'une liste finie  $\Gamma_1$  d'éléments de  $\Gamma_0 \times \Gamma_0$  et d'une liste finie  $\Gamma_1^\infty$  d'éléments de  $\Gamma_0$ , tels qu'étant donnés deux points distincts  $t_1$  et  $t_2$  de  $\Gamma_0$ , il existe une suite d'éléments  $s_1 = t_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k = t_2$  de  $\Gamma_0$  vérifiant  $(s_i, s_{i+1}) \in \Gamma_1$  ou  $(s_{i+1}, s_i) \in \Gamma_1$  pour tout  $i$ .

Les éléments de  $\Gamma_0$  (resp.  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_1^\infty$ ) sont appelés les sommets (resp. arêtes bornées, arêtes non bornées) de  $\Gamma$ .

Les graphes définis ici sont *abstrait*s, c'est-à-dire qu'ils ne vivent pas a priori dans  $\mathbb{R}^2$  ou dans n'importe quel autre espace. On peut cependant, et c'est ce que nous ferons dans ce texte, se représenter un graphe géométriquement : les sommets  $s$  sont des points (en fait des ellipses ici), les arêtes bornées  $(s_i, s_j)$  sont des segments joignant les sommets  $s_i$  et  $s_j$  et orientés de  $s_i$  vers  $s_j$ , et les arêtes non bornées sont des demi-droites dont l'extrémité est  $s$  et orientées vers  $s$ . La condition de la Définition 5.10 signifie que le dessin ainsi obtenu doit être connexe.

**Remarque 5.11.**  $\Gamma_1^\infty$  est une liste d'éléments de  $\Gamma_0$ , et non pas un sous-ensemble de  $\Gamma_0$  ! Certains sommets de  $\Gamma_0$  peuvent très bien se répéter dans  $\Gamma_1^\infty$ , c'est-à-dire que plusieurs arêtes non bornées peuvent arriver sur le même sommet. De même,  $\Gamma_1$  est une liste d'éléments de  $\Gamma_0 \times \Gamma_0$  et pas un sous-ensemble de  $\Gamma_0 \times \Gamma_0$ .

**Exemple 5.12.** Des exemples de graphes orientés avec 3 sommets sont représentés sur la Figure 18.

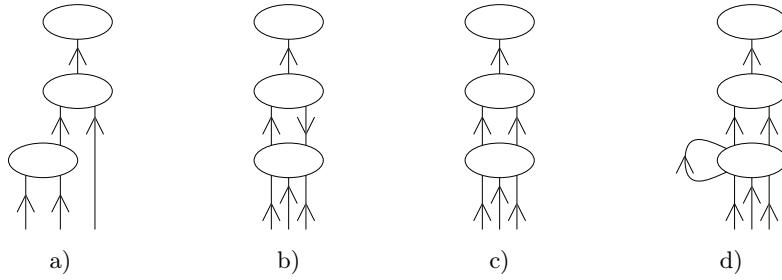


FIGURE 18. Quelques graphes orientés

Évidemment, les graphes que nous allons considérer dans la suite vont représenter comment une courbe tropicale  $C$  peut se décomposer en étages. Les sommets d'un graphe correspondent aux étages de  $C$  et les arêtes correspondent aux ascenseurs.

Certains graphes orientés peuvent avoir des *cycles*, c'est-à-dire qu'il est possible à partir d'un sommet du graphe, de parcourir les arêtes

suivant l'orientation et de revenir au même point. Pour la suite, nous ne devons pas considérer ce type de graphe.

**Définition 5.13.** Un graphe orienté est acyclique s'il ne contient pas de suite d'arêtes  $(s_1, s_2), (s_2, s_3), \dots, (s_{k-1}, s_k), (s_k, s_1)$ .

**Exemple 5.14.** Les graphes orientés des Figures 18a, c et e sont acycliques, mais pas ceux des Figures 18b et d.

Il ne reste plus qu'à identifier les conditions pour qu'un graphe acyclique code une décomposition en étages d'une courbe tropicale.

**Définition 5.15.** Soient  $d \geq 1$  et  $g \geq 0$ . Un diagramme en étages  $\mathcal{D}$  de degré  $d$  et de genre  $g$  est la donnée d'un graphe acyclique  $\Gamma$  et d'une application appelée poids  $w : \Gamma_1 \cup \Gamma_1^\infty \rightarrow \mathbb{N}^*$  tels que

- le graphe  $\Gamma$  a  $d$  sommets,  $d - 1 + g$  arêtes bornées et  $d$  arêtes non bornées,
- pour tout sommet  $s$  de  $\Gamma$ , si  $a_1, \dots, a_k$  (resp.  $b_1, \dots, b_l$ ) sont les arêtes entrantes (resp. sortantes) adjacentes à  $s$ , alors

$$\sum_{i=1}^k w(a_i) - \sum_{i=1}^l w(b_i) = 1.$$

**Remarque 5.16.** Cette définition implique que toutes les arêtes non bornées d'un diagramme en étages sont de poids 1.

Afin d'alléger un peu les notations, nous confondrons dans la suite un diagramme en étage  $\mathcal{D}$  et le graphe acyclique  $\Gamma$  sous-jacent. Comme pour les courbes tropicales on ne marque le poids d'une arête d'un diagramme en étages uniquement lorsque celui-ci est au moins 2. De plus, comme les diagrammes en étages sont acycliques, on les oriente implicitement dans les dessins du bas vers le haut.

**Exemple 5.17.** Parmi les graphes orientés de la Figure 18a, c et e, seuls ceux de la Figure 18a et c sont des diagrammes en étages. Leur degré est 3 et leur genre est respectivement 0 et 1. D'autres diagrammes en étages sont représentés à la Figure 19 (l'orientation est implicite du bas vers le haut).

Pour terminer, il ne nous reste plus qu'à coder la répartition des points de  $\omega$  sur un diagramme en étages. L'orientation d'un diagramme en étages  $\mathcal{D}$  nous induit un ordre partiel sur celui-ci : étant

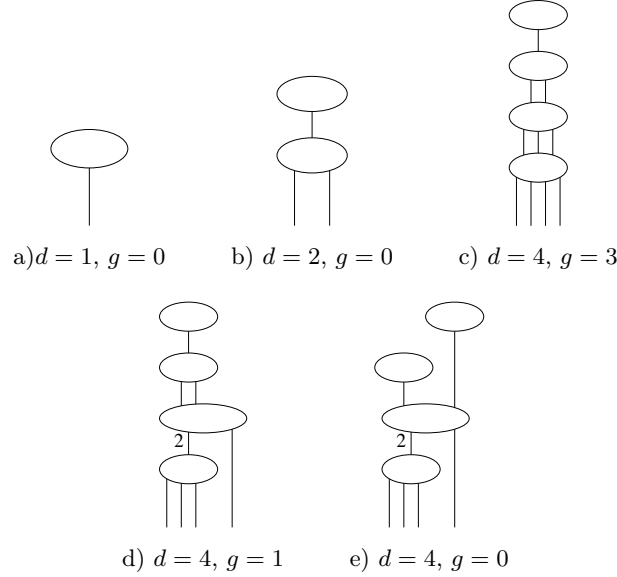


FIGURE 19. Quelques diagrammes en étages

donné deux points  $p$  et  $q$  de  $\mathcal{D}$ , on dit que  $q$  est plus grand que  $p$  si on peut aller de  $p$  à  $q$  en « suivant les flèches ». Plus précisément, s'il existe un chemin orienté dans  $\mathcal{D}$  allant de  $p$  à  $q$ .

**Exemple 5.18.** Sur la Figure 20a, le point 2 est plus grand que 1. Sur la Figure 20b, le point 1 est plus grand que 2. Sur la Figure 20e, les points 1 et 5 ne sont pas comparables.

Nous dirons qu'une application  $m : \{1, \dots, 3d - 1 + g\} \rightarrow \mathcal{D}$  est croissante si  $m(i) \geq m(j)$  implique que  $i \geq j$ .

**Définition 5.19.** Un diagramme en étages marqué de degré  $d$  et de genre  $g$  est la donnée d'un diagramme en étages  $\mathcal{D}$  de degré  $d$  et de genre  $g$  muni d'une bijection croissante  $m : \{1, \dots, 3d - 1 + g\} \rightarrow \mathcal{D}$ .

**Exemple 5.20.** La Figure 20 représente des diagrammes en étages munis d'une bijection  $m : \{1, \dots, 3d - 1 + g\} \rightarrow \mathcal{D}$ . La Figure 20b n'est pas un diagramme en étages marqué car l'application  $m$  n'est pas croissante. Les Figures 20a, c, d, e et f sont des diagrammes en étages marqués.

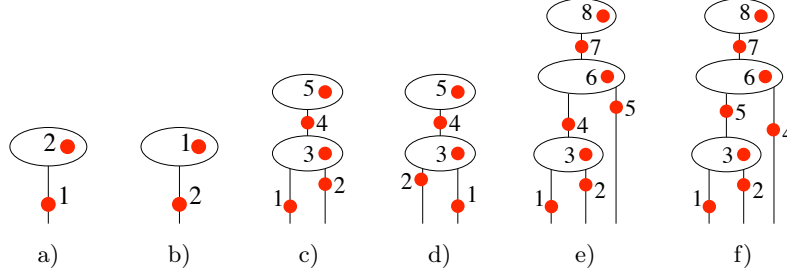


FIGURE 20. Marquages

Enfin, pour être vraiment rigoureux, il faut considérer les diagrammes en étages marqués à *isomorphisme près*.

**Définition 5.21.** Deux diagrammes en étages marqués  $(\mathcal{D}, m)$  et  $(\mathcal{D}', m')$  sont dit isomorphes s'il existe une bijection  $\phi : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma'_0$  telle que

- l'application  $(s_1, s_2) \mapsto (\phi(s_1), \phi(s_2))$  est une bijection de  $\Gamma_1$  dans  $\Gamma'_1$ ,
- l'application  $s \mapsto \phi(s)$  est une bijection de  $\Gamma_1^\infty$  dans  $\Gamma_1^{\infty'}$ ,
- $w = w' \circ \phi$ ,
- $m = m' \circ \phi$ .

Malgré son apparente aridité, cette définition sert juste à identifier les diagrammes en étages marqués que l'on a intuitivement envie d'identifier.

**Exemple 5.22.** Les diagrammes en étages marqués des Figures 20c et d sont isomorphes, mais pas ceux des Figures 20e et f.

On note  $\mathcal{E}(d, g)$  l'ensemble des classes d'équivalence des diagrammes en étages marqués de degré  $d$  et de genre  $g$ . Dans la suite, nous confondrons un diagramme en étages marqué et sa classe d'équivalence. Afin d'alléger les notations, nous noterons aussi simplement par  $\mathcal{D}$  un diagramme en étages marqué lorsque cela ne prêtera pas à confusion.

De même que dans le cas des courbes tropicales, il faut associer une multiplicité réelle et complexe à un diagramme en étages marqué.

**Définition 5.23.** Soit  $\mathcal{D}$  un diagramme en étages marqué. Alors la multiplicité complexe de  $\mathcal{D}$ , notée  $\mu_{\mathbb{C}}(\mathcal{D})$ , est définie par

$$\mu_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}) = \prod_{a \text{ arête de } \mathcal{D}} w(a)^2.$$

La multiplicité réelle de  $\mathcal{D}$ , notée  $\mu_{\mathbb{R}}(\mathcal{D})$ , est définie par

$$\mu_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}) = \mu_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}) \pmod{2}.$$

C'est-à-dire que  $\mu_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}) = 0$  si  $\mu_{\mathbb{C}}(\mathcal{D})$  est pair, et  $\mu_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}) = 1$  sinon. Notons que les multiplicités d'un diagramme en étages marqué ne dépendent en fait que du diagramme en étages sous-jacent et sont toujours positives ou nulles.

**Théorème 5.24 (Brugallé & Mikhalkin, [BM07]).** Pour tous  $d \geq 1$  et  $g \geq 0$ , on a

$$N(d, g) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{E}(d, g)} \mu_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}) \quad \text{et} \quad W(d) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{E}(d, 0)} \mu_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}).$$

*Démonstration.* Soit  $\omega$  une configuration générique de  $3d-1+g$  points de  $\mathbb{R}^2$ . D'après les Corollaires 5.8 et 5.9, si les distances entre les points de  $\omega$  sont assez grandes il y a une bijection naturelle entre les éléments de  $\mathcal{E}(d, g)$  et les courbes tropicales de  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$ . Il reste à déterminer la multiplicité d'une courbe tropicale décomposée en étages. Soient  $C$  une courbe tropicale de  $\mathbb{TC}(d, g, \omega)$  et  $s$  un sommet trivalent de  $C$ . D'après le Corollaire 5.9, le sommet  $s$  se situe sur un étage de  $C$  et est adjacent à un ascenseur de poids  $w_1$  et à une arête  $a$  de poids 1 et de vecteur primitif sortant  $(1, \alpha)$ . On a donc  $\mu_{\mathbb{C}}(s) = w_1$ . Comme tous les ascenseurs bornés sont adjacents à deux sommets, et que tous les ascenseurs non bornés sont de poids 1, on a bien que  $\mu_{\mathbb{C}}(C)$  est égale au produit des carrés des poids des ascenseurs.

Si un des ascenseurs de  $C$  est de poids pair, alors  $\mu_{\mathbb{R}}(C) = 0$ . Sinon, pour la même raison que dans le calcul de  $\mu_{\mathbb{C}}(C)$ , la multiplicité réelle  $\mu_{\mathbb{R}}(C)$  est positive.

Le théorème découle maintenant des Théorèmes 4.14 et 4.17.  $\square$

**Exemple 5.25.** Les seuls diagrammes en étages marqués en degrés 1 et 2 sont ceux des Figures 20a et c. Comme ils sont de multiplicité complexe 1, nous retrouvons bien  $N(1, 0) = N(2, 0) = W(1) = W(2) = 1$ .

a)  $\mu_{\mathbb{C}} = 1$       b)  $\mu_{\mathbb{C}} = 4, \mu_{\mathbb{R}} = 0$       c)  $\mu_{\mathbb{C}} = 1, \mu_{\mathbb{R}} = 1$       d)  $\mu_{\mathbb{C}} = 1, \mu_{\mathbb{R}} = 1$

FIGURE 21. Diagrammes en étages de degré 3

$$N(d, (d-1)(d-2)/2) = 1.$$
FIGURE 22. Diagramme en étages de degré  $d$  de genre maximal

**Exercice 5.28.** Calculer les nombres  $N(4, 2) = 27$ ,  $N(4, 1) = 225$ ,  $N(4, 0) = 620$  et  $W(4) = 240$  à l'aide des diagrammes en étages.



## 6. Applications

Nous allons maintenant appliquer le Théorème 5.24 pour démontrer de manière combinatoire quelques résultats sur les nombres  $N(d, g)$  et  $W(d)$ .

**6.1. En géométrie énumérative complexe.** Démontrons la formule non triviale la plus simple sur les nombres  $N(d, g)$ .

**Proposition 6.1.** *Pour tout  $d \geq 3$ , on a*

$$N\left(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1\right) = 3(d-1)^2.$$

*Démonstration.* Le point de départ est l'unique diagramme en étages de degré  $d$  et de genre maximal. Pour baisser le genre de ce diagramme en étages de 1, nous avons deux possibilités représentées sur la Figure 23. De plus, il n'est pas difficile de voir que tous les diagrammes en étages de genre  $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1$  s'obtiennent de cette manière. Il ne nous reste plus qu'à compter de combien de manières nous pouvons marquer ces nouveaux diagrammes en étages.

Nous avons  $i - 1$  possibilités pour le marquage dans le cas de la Figure 23a, et  $2i + 1$  possibilités dans le cas de la Figure 23b. De plus, dans les deux cas  $i$  varie de 1 à  $d - 1$  et il ne nous reste plus qu'à faire un petit calcul :

$$\begin{aligned} N\left(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1\right) &= \sum_{i=1}^{d-1} 4(i-1) + \sum_{i=1}^{d-1} (2i+1) \\ &= 6 \sum_{i=1}^{d-1} (i-1) + 3(d-1) \\ &= 3(d-1)(d-2) + 3(d-1) \\ &= 3(d-1)^2. \quad \square \end{aligned}$$

**Exercice 6.2.** Il est possible de démontrer la formule de Caporaso et Harris grâce aux diagrammes en étages de la manière suivante. Tout d'abord, il est nécessaire de considérer des diagrammes en étages plus généraux. Les arêtes infinies peuvent être de n'importe quel poids, et l'application  $m$  peut envoyer des points à l'infini. Ensuite, il faut associer une multiplicité complexe à de tels diagrammes en étages

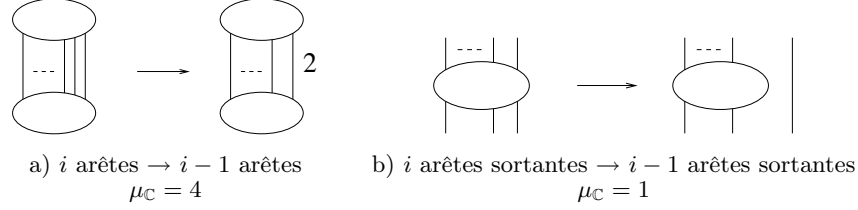


FIGURE 23. Diminuer de 1 le genre du diagramme en étages de genre maximal

marqués de telle sorte qu'en envoyant un par un les points à l'infini, une formule de récurrence apparaisse.

Pour s'inspirer, on pourra se reporter à la preuve tropicale de la formule de Caporaso et Harris par Gathmann et Markwig dans [GM07].

**6.2. Comportement des invariants de Welschinger.** De par leur définitions, les nombres  $N(d, 0)$  et  $W(d)$  sont trivialement égaux modulo 2. En fait, Mikhalkin a observé que cette égalité est vraie modulo 4.

**Proposition 6.3 (Mikhalkin).** *Pour tout  $d \geq 1$  on a*

$$W(d) = N(d, 0) \pmod{4}.$$

*Démonstration.* C'est la conséquence immédiate de

$$a = b \pmod{2} \implies a^2 = b^2 \pmod{4}$$

appliqué aux poids des arêtes d'un diagramme en étages et  $b = 0$  ou 1.  $\square$

Terminons par quelques résultats sur la suite  $(W(d))_{d \geq 1}$ .

**Théorème 6.4 (Itenberg, Kharlamov, Shustin [IKS03] [IKS04])**

*La suite  $(W(d))_{d \geq 1}$  des invariants de Welschinger vérifie les propriétés suivantes :*

- *c'est une suite de nombres strictement positifs,*
- *la suite est croissante, et strictement croissante à partir de  $d = 2$ ,*
- *$\ln W(d) \sim N(d, 0) \sim 3d \ln d$  lorsque  $d$  tend vers l'infini.*

*Démonstration.* Comme la multiplicité réelle d'un diagramme en étages est positive ou nulle, les nombres  $W(d)$  sont tous positifs ou

nuls. De plus, comme  $W(1) = 1$ , la positivité des nombres  $W(d)$  découlera de la croissance de la suite  $(W(d))_{d \geq 1}$ .

Soit  $(\mathcal{D}_0, m_0)$  un diagramme en étages marqué de degré  $d$ . Pour rendre notre raisonnement plus transparent, supposons que le marquage  $m_0$  va non pas de  $\{1, \dots, 3d-1\}$  dans  $\mathcal{D}_0$ , mais de  $\{4, \dots, 3d+2\}$  dans  $\mathcal{D}_0$ . Notons que le point 4 est forcément envoyé sur une arête infinie de  $\mathcal{D}_0$ . À partir de  $\mathcal{D}_0$ , nous pouvons construire un nouveau diagramme en étages marqué  $\mathcal{D}$  de degré  $d+1$  comme indiqué à la Figure 24a. Les multiplicités réelles de  $\mathcal{D}_0$  et  $\mathcal{D}$  sont les mêmes et deux diagrammes en étages marqués différents  $\mathcal{D}_0$  et  $\mathcal{D}'_0$  donnent évidemment deux diagrammes en étages marqués différents  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ . Nous avons donc montré que  $W(d+1) \geq W(d)$ . De plus, si  $d \geq 2$ , alors le point 5 est aussi forcément sur une arête infinie de  $\mathcal{D}_0$ . Nous voyons qu'il existe alors un diagramme en étages marqué de degré  $d+1$  qui n'est pas obtenu à partir d'un diagramme en étages marqué de degré  $d$  (voir les Figures 24b et c), et donc  $W(d+1) > W(d)$ .

Regardons maintenant l'asymptotique logarithmique de la suite  $(W(d))_{d \geq 1}$ . Soit  $(\mathcal{D}_k)$  la suite de diagrammes en étages construite de la manière suivante :  $\mathcal{D}_1$  est le diagramme en étages de degré 1 et  $\mathcal{D}_k$  est obtenu à partir de  $\mathcal{D}_{k-1}$  en recollant à chaque arête infinie de  $\mathcal{D}_{k-1}$  le morceau représenté à la Figure 25a. Les diagrammes en étages  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_4$  sont représentés sur les Figures 25b, c, d et e. Le diagramme en étages  $\mathcal{D}_k$  est de degré  $2^{k-1}$  et est de multiplicité 1. Notons  $\nu(\mathcal{D}_k)$  le nombre de marquages possibles de  $\mathcal{D}_k$ . Si nous oublions les 3 points les plus haut, nous voyons apparaître la relation

$$\forall k \geq 2 \quad \nu(\mathcal{D}_k) = \frac{\nu(\mathcal{D}_{k-1})^2}{2} C_{3 \times 2^{k-2}-2}^{3 \times 2^{k-1}-4}$$

et il ne nous reste plus qu'à calculer

$$\begin{aligned} \nu(\mathcal{D}_k) &= \frac{\nu(\mathcal{D}_{k-1})^2 (3 \times 2^{k-1} - 4)!}{2 ((3 \times 2^{k-2} - 2)!)^2} \\ &= \frac{(3 \times 2^{k-1} - 4)!}{2^{2^{k-1}-1}} \prod_{i=2}^k \frac{1}{((3 \times 2^{k-i} - 2)(3 \times 2^{k-i} - 3))^{2^{i-1}}} \end{aligned}$$

Nous avons donc l'encadrement

$$\frac{(3 \times 2^{k-1} - 4)!}{2^{2^k} \prod_{i=1}^k (3 \times 2^{k-i})^{2^i}} \leq \nu(\mathcal{D}_k) \leq (3 \times 2^{k-1} - 4)!$$

D'après la formule de Stirling, nous avons l'équivalence  $\ln k! \sim k \ln k$  et donc  $\ln(3 \times 2^{k-1})! \sim 3 \times 2^{k-1} \ln(3 \times 2^{k-1})$ . Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \ln(2^{2^k} \prod_{i=1}^k (3 \times 2^{k-i})^{2^i}) &= 2^k \ln 2 + (2^{k+1} - 1) \ln 3 + \ln 2 \sum_{i=1}^k 2^i (k - i) \\ &\leq 2^k \ln 2 + (2^{k+1} - 1) \ln 3 + k \ln 2 \sum_{i=1}^k 2^i \\ &\leq 2^k \ln 2 + (2^{k+1} - 1) \ln 3 + k(2^{k+1} - 1) \ln 2 \\ &= o\left(3 \times 2^{k-1} \ln(3 \times 2^{k-1})\right) \end{aligned}$$

Nous en déduisons immédiatement que

$$\ln \nu(\mathcal{D}_k) \sim 3 \times 2^{k-1} \ln(3 \times 2^{k-1}).$$

Comme  $\ln \nu(\mathcal{D}_k) \leq \ln W(2^{k-1}) \leq \ln N(2^{k-1}, 0)$  et que la suite  $(W(d))_{d \geq 1}$  est croissante, le théorème découle maintenant de la Proposition 2.26  $\square$

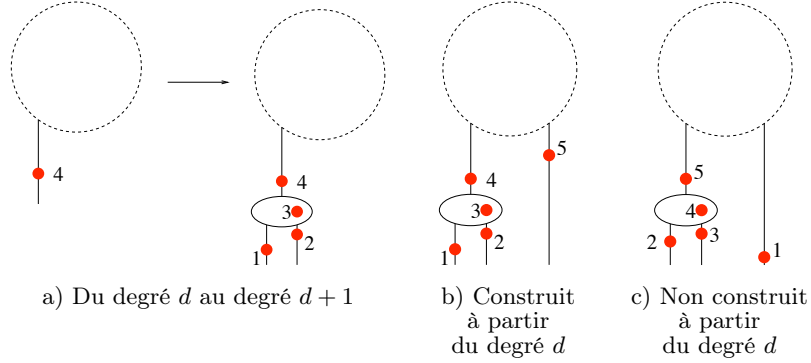
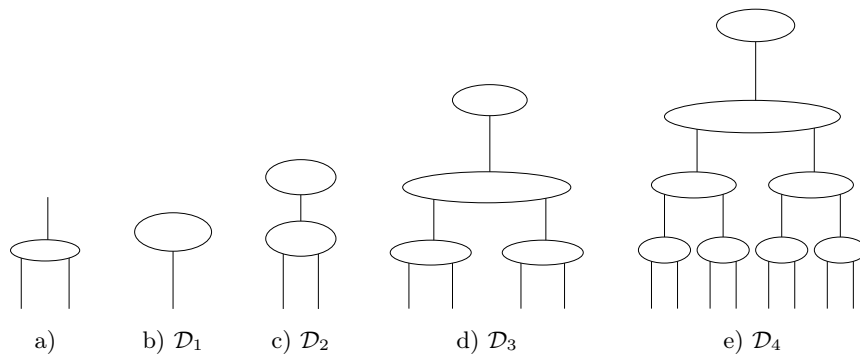


FIGURE 24. Croissance des nombres  $W(d)$

**Corollaire 6.5.** *Par  $3d-1$  points de  $\mathbb{R}^2$  passe toujours une courbe algébrique réelle rationnelle de degré  $d$ .*

**Exercice 6.6.** Il est possible de démontrer une formule de type Caporaso et Harris pour les nombres  $W(d)$  grâce aux diagrammes en étages. Cette formule a été démontrée pour la première fois par Itenberg, Kharlamov et Shustin dans [IKS]. La méthode est la même qu'à

FIGURE 25. Étude asymptotique des nombres  $W(d)$ 

l'Exercice 6.2. Il faut considérer les mêmes diagrammes en étages marqués qu'à l'Exercice 6.2 puis leur attribuer une multiplicité réelle de telle sorte qu'en envoyant un par un les points à l'infini, une nouvelle formule de récurrence apparaisse.

Pour s'inspirer, on pourra se reporter à l'article correspondant d'Itenberg, Kharlamov et Shustin.

## 7. Exercices dont je ne connais pas la solution

Pour finir, voici trois exercices dont j'aimerais connaître la solution. N'hésitez pas à m'écrire si vous résolvez l'un d'entre eux !

**Exercice 7.1.** Montrer, en utilisant les diagrammes en étages, que pour tout  $d$

$$N\left(d, \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 2\right) = \frac{3}{2}(d-1)(d-2)(3d^2 - 3d - 11).$$

**Exercice 7.2.** Montrer la Formule de Kontsevich (Théorème 2.25) en utilisant les diagrammes en étages.

**Exercice 7.3.** En utilisant la Formule de Kontsevich, on voit facilement que  $2^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}$  divise  $N(d, 0)$ , où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ . Qu'en est-il des nombres  $W(d)$  ?

## 8. Pour aller plus loin

Il est possible de généraliser dans de nombreuses directions les problèmes énumératifs que nous avons discutés dans ce texte. Par exemple, on peut compter les courbes algébriques dans  $\mathbb{C}^n$ , avec  $n \geq 3$ , passant par une certaine configuration de points donnée. On peut même remplacer les points par des droites, des plans,... Par exemple, combien de droites dans  $\mathbb{C}^3$  intersectent 4 autres droites données ? Combien de coniques dans  $\mathbb{C}^3$  passent par 2 points et intersectent 4 droites données ?

Comme dans le cas du plan, il existe des formules récursives reliant certains de ces nombres. De telles formules ont été obtenues dans les années 90 par Kontsevich (voir [KM94]) et Vakil (voir [Vak00]). Pour une introduction à ce sujet, nous renvoyons au très bon livre [KV06]. Ces mêmes problèmes énumératifs se posent aussi en géométrie tropicale, et les diagrammes en étages s'avèrent encore une fois utiles (voir [BM07], [BM]).

On peut aussi ajouter des conditions de tangence, c'est-à-dire regarder les courbes passant par des points et tangentes à des droites. Il existe des formules récursives en géométrie complexe pour les courbes de genre plus petit que 2, obtenues par Pandharipande, Vakil, puis Graber, Kock et Pandharipande (voir [GKP02]). Il est possible de définir une notion de tangence entre deux courbes tropicales, et dans un travail en cours avec Bertrand et Mikhalkin (voir le futur [BBM]), nous cherchons à utiliser les diagrammes en étages pour calculer ces nombres.

Les invariants de Welschinger existent aussi dans des contextes plus généraux. Dans son article original [Wel05a], Welschinger ne les a pas définis pour des courbes rationnelles passant uniquement par des configurations de points réels, mais aussi par des *configurations réelles de points*. C'est-à-dire que l'on se fixe des points réels et des paires de points complexes conjugués. Plus tard, Welschinger a aussi défini des invariants pour les courbes rationnelles dans  $\mathbb{R}^3$  (voir [Wel05b]). Encore une fois, la géométrie tropicale et les diagrammes en étages sont des moyens pratiques de calculer ces invariants (voir par exemple [BM07], [BM], [ABLdM], [IKS04], [IKS], [Shu06]).

Pour terminer, précisons que la géométrie tropicale n'est pas le seul moyen connu pour calculer les invariants de Welschinger. En utilisant la géométrie symplectique, Welschinger ([**Wel07**]) et Solomon ([**Sol**]) ont pu aussi calculer certains de ces invariants.

### Références

- [ABLdM] A. ARROYO, E. BRUGALLÉ & L. LOPEZ DE MEDRANO – « Recursive formula for welschinger invariants », [arXiv:0809.1541](#).
- [BBM] B. BERTRAND, E. BRUGALLÉ & G. MIKHALKIN – « Computing characteristic numbers of  $\mathbb{C}P^2$  via floor diagrams », en préparation.
- [BM] E. BRUGALLÉ & G. MIKHALKIN – « Floor decompositions of tropical curves », en préparation.
- [BM07] ———, « Enumeration of curves via floor diagrams », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **345** (2007), no. 6, p. 329–334.
- [CH98] L. CAPORASO & J. HARRIS – « Counting plane curves of any genus », *Invent. Math.* **131** (1998), no. 2, p. 345–392.
- [DFI95] P. DI FRANCESCO & C. ITZYKSON – « Quantum intersection rings », in *The moduli space of curves (Texel Island, 1994)*, Progress in Math., vol. 129, Birkhäuser, Boston, MA, 1995, p. 81–148.
- [DK00] A. DEGTYAREV & V. KHARLAMOV – « Topological properties of real algebraic varieties : Rokhlin's way », *Uspekhi Mat. Nauk* **55** (2000), no. 4(334), p. 129–212, English transl. : *Russian Math. Surveys*, **55** (2000), no. 4, p. 735–814.
- [GKP02] T. GRABER, J. KOCK & R. PANDHARIPANDE – « Descendant invariants and characteristic numbers », *Amer. J. Math.* **124** (2002), p. 611–647.
- [GM07] A. GATHMANN & H. MARKWIG – « The Caporaso-Harris formula and plane relative Gromov-Witten invariants in tropical geometry », *Math. Ann.* **338** (2007), p. 845–868.
- [Hil01] D. HILBERT – « Mathematische Probleme », *Arch. Math. Phys.* (1901), no. 1, p. 43–63, (en allemand).
- [IKS] I. ITENBERG, V. KHARLAMOV & E. SHUSTIN – « A Caporaso-Harris type formula for Welschinger invariants of real toric Del Pezzo surfaces », [arXiv:math.AG/0608549](#), to appear in *Comment. Math. Helv.*
- [IKS03] ———, « Welschinger invariant and enumeration of real rational curves », *Int. Math. Res. Not.* **49** (2003), p. 2639–2653.
- [IKS04] ———, « Logarithmic equivalence of Welschinger and Gromov-Witten invariants », *Uspekhi Mat. Nauk* **59** (2004), no. 6, p. 85–110, (en russe). Trad. anglaise : [arXiv:math.AG/0407188](#).

- [KM94] M. KONTSEVICH & Y. MANIN – « Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry », *Comm. Math. Phys.* **164** (1994), no. 3, p. 525–562.
- [KV06] J. KOCK & I. VAINSENCER – *An invitation to quantum cohomology : Kontsevich’s formula for rational plane curves*, Progress in Math., Birkhäuser, 2006.
- [Mik05] G. MIKHALKIN – « Enumerative tropical algebraic geometry in  $\mathbb{R}^2$  », *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), no. 2, p. 313–377.
- [Shu06] E. SHUSTIN – « A tropical calculation of the Welschinger invariants of real toric Del Pezzo surfaces », *J. Algebraic Geom.* **15** (2006), p. 285–322, version corrigée : [arXiv:math/0406099](https://arxiv.org/abs/math/0406099).
- [Sol] J. SOLOMON – en préparation.
- [Vai95] I. VAINSENCER – « Enumeration of  $n$ -fold tangent hyperplanes to a surface », *Journ. of Alg. Geom.* **4** (1995), p. 503–526.
- [Vak00] R. VAKIL – « The enumerative geometry of rational and elliptic curves in projective space », *J. reine angew. Math.* **529** (2000), p. 101–153.
- [Wel05a] J.-Y. WELSCHINGER – « Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry », *Invent. Math.* **162** (2005), no. 1, p. 195–234.
- [Wel05b] ———, « Spinor states of real rational curves in real algebraic convex 3-manifolds and enumerative invariants », *Duke Math. J.* **127** (2005), no. 1, p. 89–121.
- [Wel07] ———, « Optimalité, congruences et calculs d’invariants des variétés symplectiques réelles de dimension quatre », 2007, [arXiv:0707.4317](https://arxiv.org/abs/0707.4317).
- [Zeu73] H.G. ZEUTHEN – « Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver », *Kongelige Danske Vidensk abernes Selskabs Skrifter - Naturvidenskabelig og Mathematisk* **10** (1873), p. 285–393.

---

E. BRUGALLÉ, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 175 rue du Chevaleret,  
 75013 Paris, France • *E-mail* : [brugalle@math.jussieu.fr](mailto:brugalle@math.jussieu.fr)  
*Url* : <http://people.math.jussieu.fr/~brugalle>



---

# AMIBES NON ARCHIMÉDIENNES

*par*

Bernard Teissier

---

## 1. Introduction

Soit  $k$  un corps. Une équation, ou un système d'équations polynomiales en  $n$  variables, à coefficients dans  $k$ , encode un sous-ensemble de l'espace affine  $\mathbb{A}^n(k)$ , l'ensemble des points dont les coordonnées annulent tous les polynômes du système. Ce sous-espace a sa géométrie, et ses propriétés topologiques par exemple si  $k$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Les équations ont aussi leur géométrie, qui est essentiellement manifestée par la disposition dans le réseau entier  $\mathbb{N}^n$  des exposants qui y apparaissent et aussi par des informations qualitatives sur les coefficients.

Bien que la géométrie algébrique moderne ait pour une part écarté l'utilisation de la description des variétés algébriques par des équations au profit d'invariants intrinsèques comme les plurigenres, le diviseur canonique, le groupe de Picard, etc. à partir desquels on tente de décrire les propriétés géométriques, cela reste un problème lancinant de relier la géométrie d'un espace à celle de ses équations, tout en sachant que cette dernière dépend des coordonnées choisies ainsi que du choix de générateurs d'un idéal et que la géométrie, c'est ce qui est indépendant du codage !

Même lorsque  $n = 1$ , relier le nombre et la position (dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) des zéros d'un polynôme à la distribution des exposants et à la taille des coefficients a donné naissance à beaucoup de belles mathématiques, par exemple le théorème fondamental de l'algèbre et la règle

de Descartes et le bezoutien qui permettent d'estimer ou de compter le nombre de racines réelles, etc.

Lorsque  $n = 2$ , Newton a montré qu'une bonne idée pour utiliser les exposants d'un polynôme en deux variables  $\sum_{i,j} a_{i,j} x_1^i x_2^j$  est de considérer l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{R}^2$  de l'ensemble des points de coordonnées  $(i, j)$  correspondant aux monômes qui apparaissent dans le polynôme.

Plus précisément, cherchant à résoudre au voisinage de 0 une équation polynomiale  $f(x, y) = 0$ , où  $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ , par des séries  $y(x)$  même dans le cas où le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas, Newton eut l'idée de regarder l'enveloppe convexe  $\text{Conv}\left(\bigcup((i, j) + \mathbb{R}_+^2)\right)$  de la réunion des quadrants positifs issus de chacun des points  $(i, j)$  correspondant aux exposants des termes du polynôme. Sa frontière est un polygone et Newton montra que les solutions de l'équation sont des séries en  $x$  à exposants fractionnaires, dont les exposants initiaux sont nécessairement les opposés de pentes de côtés du polygone (figure 1).

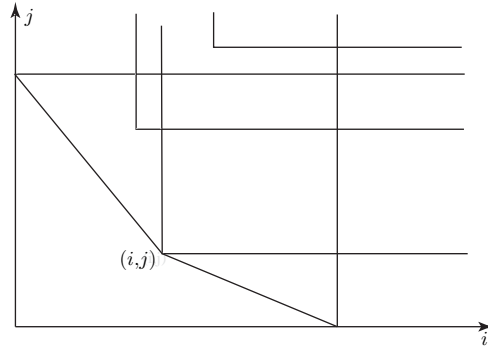


FIGURE 1

Cette idée est l'ancêtre des résultats présentés ici. Les références fondamentales pour les amibes non archimédiennes sont [4] et [11], et [7] est une très bonne introduction générale à la géométrie tropicale.

Après un examen trop rapide je n'ai pas trouvé dans la littérature les points suivants de la présentation faite ici, qui à mon avis la rendent plus naturelle : la *définition* de la transformée de Legendre (à deux signes – près) comme restriction de la fonction d'appui de l'épigraphe

(mais le lien est explicite dans la présentation du Théorème de Fenchel donnée dans [3], Chap. 1, et sans doute aussi dans l'article original de Fenchel [5] et dans les travaux de J-J. Moreau comme [12]), la présentation des ensembles polyédraux rationnels dans  $\mathbb{R}^n$  comme sections par un hyperplan horizontal d'un éventail « presque » rationnel dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  et corrélativement le lien entre les poids sur les complexes polyédraux rationnels et la fonction d'appui dont ledit éventail définit le lieu de non-linéarité.

## 2. Quelques rappels

Soit  $K$  un corps ; une valeur absolue (ou norme) sur  $K$  est la donnée d'une application  $a \mapsto |a|$  de  $K$  dans  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  satisfaisant les conditions :

- (1)  $|a| = 0$  si et seulement si  $a = 0$ ,
- (2)  $|ab| = |a||b|$  pour  $a, b \in K$ ,
- (3)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

Une valeur absolue s'étend aux extensions algébriques  $L$  de  $K$  au moyen de la formule  $|a| = |N_{L/K}(a)|^{1/d}$  si  $a$  est dans l'extension  $L$  de  $K$  et  $d$  est le degré de l'extension,  $N_{L/K}$  l'application norme de  $L$  dans  $K$ .

Ainsi, une norme sur  $K$  s'étend à une clôture algébrique  $\overline{K}$  et donne naissance pour tout entier  $n$  à une application

$$\text{Log} : (\overline{K}^*)^n \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (\log |x_1|, \dots, \log |x_n|).$$

Ici il faut penser pour tout corps  $L$  à  $(L^*)^n$  comme l'espace affine  $\mathbb{A}^n(L)$  privé de la réunion des hyperplans de coordonnées.

Un sous-espace algébrique (fermé) de  $(L^*)^n$  correspond à un idéal de l'algèbre  $L[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ . Un sous espace algébrique  $Z$  de l'espace affine  $L^n$  défini par un idéal  $I$  de l'anneau de polynômes  $L[x_1, \dots, x_n]$  induit un sous ensemble algébrique  $Z \cap (L^*)^n$  de  $(L^*)^n$  dont l'idéal dans  $L[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$  est l'idéal engendré par  $I$  via l'injection naturelle  $L[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow L[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ .

Revenons à notre corps normé  $\overline{K}$ .

**Définition 2.1.** Soit  $X$  un sous-ensemble algébrique de  $(\overline{K}^*)^n$ . L'amibe  $\mathcal{A}(X)$  de  $X$  est la fermeture dans  $\mathbb{R}^n$  de  $\text{Log}(X)$ .

Nous supposons dans toute la suite que  $X$  n'est pas  $(\overline{K}^*)^n$  tout entier. Par exemple si  $K = \mathbb{C}$  muni de la valeur absolue usuelle, comme l'application  $\text{Log}$  est continue et propre, l'amibe est exactement l'image de  $X$ .

Si l'on s'intéresse aux solutions d'un système donné d'équations algébriques, il est judicieux de les chercher à coordonnées dans un corps algébriquement clos, car c'est là que l'on en voit le plus, et comme de plus on les cherche par des méthodes d'approximations successives relativement à une valeur absolue, il est également judicieux de se placer dans un corps complet pour celle-ci car c'est là que l'on pourra en construire le plus. Dans la suite, sauf mention du contraire, nous supposons le corps  $K$  algébriquement clos et complet pour la valeur absolue considérée.

Nous allons nous intéresser particulièrement au cas où la valeur absolue est *non archimédienne* c'est-à-dire que la troisième inégalité ci-dessus est remplacée par l'inégalité plus forte

$$|a + b| \leq \max(|a|, |b|).$$

On parlera alors d'amibes non archimédiennes. L'intérêt de considérer les amibes non archimédiennes est multiple : d'abord il est très utile en théorie des nombres de faire de la géométrie algébrique sur des extensions algébriques du corps  $\mathbb{Q}$  des rationnels munies de la valeur absolue qui étend la valeur absolue  $p$ -adique  $|a|_p = p^{-\nu_p(a)}$  de  $\mathbb{Q}$ , ce qui nous amène à travailler sur le complété  $C_p$  pour cette valeur absolue de la clôture algébrique du complété  $p$ -adique  $\mathbb{Q}_p$  de  $\mathbb{Q}$ . Si l'on étend la notation  $\mathbb{Q}_p$  en écrivant  $|\cdot|_\infty$  pour la valeur absolue usuelle de  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty$  alors  $\mathbb{C} = C_\infty$ .

Toute sous-variété fermée de  $(\mathbb{Q}^*)^n$  a donc une amibe pour chaque nombre premier  $p$  et une amibe à l'infini, qui est son amibe complexe.

Ensuite, il est très utile en général d'avoir de l'information sur les valeurs absolues des solutions de systèmes d'équations, et c'est bien de cela qu'il s'agit ici. Enfin, comme nous le verrons, les amibes non archimédiennes apparaissent comme limites d'amibes correspondant à des valeurs absolues archimédiennes.

Il est souvent commode de voir les valeurs absolues non archimédiennes comme des valuations à valeurs réelles. Rappelons qu'une valuation à valeurs réelles sur un corps, ou valuation de rang un, est une application  $\nu: K \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$  satisfaisant les conditions suivantes :

- (1)  $\nu(a) = \infty$  si et seulement si  $a = 0$ ,
- (2)  $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$  pour  $a, b \in K$ ,
- (3)  $\nu(a + b) \geq \min(\nu(a), \nu(b))$ .

La formule

$$\nu(a) = -\log |a|$$

permet d'établir une bijection entre valeurs absolues non archimédiennes et valuations de rang un sur  $K$ . Le corps  $K$  est complet pour la valuation s'il l'est pour la valeur absolue correspondante. Le langage des valuations est plus naturel dans le cas où, étant donné un corps « de base »  $k$  on prend pour  $K$  le corps  $k((t))$  des séries de Laurent en une indéterminée  $\sum_{i=m}^{\infty} c_i t^i$ ,  $c_i \in k$ . L'ordre en  $t$  d'une telle série est une valuation sur  $K$ , qui prend ses valeurs dans le groupe  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  et prend la valeur 0 sur  $k$ .

Notons que cela induit une différence de notation par rapport aux textes de Brugallé et Itenberg (ce volume) : un terme « grand » dans un polynôme est un terme de petite valuation ; c'est pourquoi nous trouverons des « min » et pas des « max ».

Si le corps  $k$  est algébriquement clos et de caractéristique zéro, le corps des séries de Newton-Puiseux

$$\overline{k((t))} = \bigcup_{n \geq 1} k((t^{1/n}))$$

est algébriquement clos et est donc une clôture algébrique de  $K$ . C'est une conséquence essentielle du résultat de Newton rappelé au début. Il est de plus complet pour la valuation qui étend celle de  $K$  et qui prend ses valeurs dans le groupe  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

En général, le groupe  $G$  des valeurs que prend une valuation de rang un définie sur un corps algébriquement clos est *divisible* en ce sens que si  $g \in G$ , pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  il existe  $h \in G$  tel que  $nh = g$  (pensez à l'équation  $X^n = a$ ) et donc, si la valuation est non triviale, il contient  $\mathbb{Q}$  et est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Ce qui précède est un cas particulier d'une construction générale. Soit  $G$  un groupe abélien totalement ordonné. On peut définir le corps

$k((t^G))$  des séries de Laurent à exposants dans  $G$ ; c'est l'ensemble des applications  $c: G \rightarrow k$  dont le support

$$\text{Supp}(c) = \{g \in G \mid c(g) \neq 0\}$$

est *bien ordonné*. On peut penser aux éléments de  $k((t^G))$  comme à des séries  $\sum c(g)t^g$ . Cette hypothèse sur le support suffit pour la définition de l'addition et surtout de la multiplication des séries, ainsi que l'existence d'un inverse, parce que la réunion de deux sous-ensembles bien ordonnés de  $G$  est un ensemble bien ordonné et que d'après un théorème de B. Neumann (voir [13]), le semi-groupe engendré par un sous-ensemble bien ordonné est bien ordonné.

En effet, il faut en particulier montrer que si l'ensemble des exposants de la série  $F$  est bien ordonné, il en est de même pour celui de  $(1 + F)^{-1} = 1 - F + F^2 + \dots + (-1)^i F^i + \dots$  dont les exposants appartiennent tous au semi-groupe engendré par les exposants de  $F$ .

Si  $G$  est un groupe abélien totalement ordonné (en particulier si c'est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ ) qui est divisible, et si  $k$  est algébriquement clos, alors  $k((t^G))$  est algébriquement clos (voir [15]). Un des intérêts de cette construction est que le corps des séries de Puiseux n'est algébriquement clos que si le corps algébriquement clos  $k$  est de caractéristique zéro. Cela est dû au fait que les exposants apparaissant dans une série de Puiseux donnée ont, par définition, un dénominateur commun alors que sur un corps de caractéristique positive, des équations algébriques à coefficients dans  $k((t))$  n'ont pas nécessairement pour solutions de telles séries.

Par exemple, étant donné un nombre premier  $p$ , posant  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , l'équation

$$x^p - t^{p-1}(1+x) = 0$$

à coefficients dans  $\mathbb{F}_p((t))$  a pour solution

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} t^{1-1/p^i}$$

qui n'est pas du tout une série de Puiseux mais a un ensemble bien ordonné d'exposants rationnels et est donc un élément de  $\mathbb{F}_p((t^{\mathbb{Q}}))$ .

Ainsi, lorsque le corps de base  $k$  est algébriquement clos de caractéristique  $p \neq 0$ , pour travailler dans un corps algébriquement clos il est judicieux de choisir le corps  $k((t^{\mathbb{Q}}))$  ou même  $k((t^{\mathbb{R}}))$ . Ce n'est

que récemment que K. Kedlaya a décrit la clôture algébrique de  $k((t))$  lorsque  $k$  est de caractéristique positive (voir [9]).

Les corps comme  $k((t^{\mathbb{Q}}))$  ou  $k((t^{\mathbb{R}}))$  sont parfois appelés corps de séries transfinies, parce qu'ils contiennent des séries dont les ensembles d'exposants peuvent représenter des ordinaux  $> \omega$ , par exemple  $\sum_{i=1}^{\infty} t^{1-1/p^i} + \sum_{j=1}^{\infty} t^{2-1/q^j}$  où  $p, q$  sont deux nombres premiers.

Nous considérerons, sauf mention expresse du contraire, des séries dont les ensembles d'exposants sont des ensembles bien ordonnés de nombres réels. Le plus petit de ces exposants existe donc et l'application qui à chaque série associe son plus petit exposant est une valuation de rang un. C'est toujours cette valuation que nous prendrons. Étant donné un corps  $K$  de séries, séries de Puiseux ou éléments de  $k((t^{\mathbb{Q}}))$  ou plus généralement de  $k((t^G))$ , et un sous-espace algébrique fermé  $X$  de  $(K^*)^n$ , la donnée d'un « point de  $X$  à valeurs dans  $K$  » est la donnée de séries  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  de  $K$  satisfaisant les équations qui définissent  $X$  et dont aucune n'est la série nulle. Notons  $X(K)$  l'ensemble des points de  $X$  à valeurs dans  $K$ .

On peut définir l'application  $\nu: X(K) \rightarrow \mathbb{R}^n$  associée à la valuation  $t$ -adique qui à chaque solution associe  $(\nu(x_1(t)), \dots, \nu(x_n(t)))$ .

L'amibe de  $X(K)$  est alors l'adhérence dans  $\mathbb{R}^n$  de  $\nu(X)$  :

$$\mathcal{A}(X(K)) = \overline{\nu(X(K))}.$$

On nomme aussi  $\overline{\nu(X(K))}$  la *variété tropicale* associée à  $X(K)$  et on la note  $\mathcal{T}(X(K))$ . Dans la suite, si le corps  $K$  est fixé, nous écrirons seulement  $\mathcal{A}(X), \mathcal{T}(X)$  etc.

Remarquons que nous aurions pu tenir exactement le même discours en prenant pour  $K$  le corps  $C_p$  complété de la clôture algébrique du corps  $\mathbb{Q}_p$  des nombres  $p$ -adiques. L'amibe de  $X \subset (C_p^*)^n$  est alors l'ensemble des valuations  $p$ -adiques des solutions à coordonnées dans  $C_p$  des équations définissant  $X$ .

La théorie des amibes non archimédiennes repose sur le fait que dans tous les cas de ce type ces ensembles de valuations ont, comme sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  muni du réseau entier, une structure géométrique très précise de complexe polyédral rationnel qui peut être reliée à celle des exposants des équations définissant  $X$  et à la taille des coefficients, et contient de l'information sur la géométrie de  $X$ .

Par ailleurs, on peut généraliser un peu le concept de valuation en définissant les valuations pour les anneaux commutatifs unitaires.

Une valuation (de rang un)  $\nu$  sur un tel anneau  $A$  est la donnée d'une application  $\nu: A \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$  satisfaisant les conditions suivantes :

- (1)  $\nu(a) = \infty$  si  $a = 0$ ,
- (2)  $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$  pour  $a, b \in A$ ,
- (3)  $\nu(a + b) \geq \min(\nu(a), \nu(b))$ .

L'ensemble des éléments de valuation infinie est un idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , et la valuation  $\nu$  induit une valuation sur l'anneau quotient  $A/\mathfrak{p}$  qui ne prend plus la valeur  $\infty$  qu'en 0 et s'étend à son corps de fractions par  $\nu(a/b) = \nu(a) - \nu(b)$ . Inversement, la donnée d'un idéal premier de  $A$  et d'une valuation du corps de fractions de  $A/\mathfrak{p}$  donne une valuation de  $A$  au sens ci-dessus.

Soit  $I$  l'idéal de  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  définissant un sous-espace  $X \subseteq (K^*)^n$ . Posons  $A = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]/I$ ; c'est l'anneau des fonctions algébriques sur  $X$ . Notons  $\mathcal{W}(A/K)$  l'ensemble de toutes les valuations de  $A$  qui étendent la valuation  $\nu$  de  $K$ . Parmi ces valuations il y a celles qui proviennent de l'évaluation en un point  $x \in X(K)$  : Notons  $\omega_x$  la valuation de  $A$  qui à  $f \in A$  associe  $\nu(f(x)) \in \mathbb{R}$ . Si l'on pense à  $K$  comme  $k((t^G))$  avec  $k$  algébriquement clos et  $G \subset \mathbb{R}$  divisible, comme plus haut, la considération de fonctions comme  $f = x_i - \sum_{j=\nu(x_i)}^k a_j t^{\alpha_j} \in A$  permet de vérifier que  $\omega_x = \omega_y$  implique  $x = y$ , et que nous avons donc un plongement naturel

$$\iota: X(K) \hookrightarrow \mathcal{W}(A/K).$$

Par ailleurs on peut, suivant Bieri-Groves (voir [1]), définir une application naturelle

$$\beta: \mathcal{W}(A/K) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

par  $\beta(\omega) = (\omega(x_1), \dots, \omega(x_n))$ .

Remarquons que la composition  $\beta \circ \iota$  coïncide avec l'application  $\nu: X(K) \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie plus haut. Cependant,  $\mathcal{W}(A/K)$  est un ensemble beaucoup plus gros que  $X(K)$ . Si  $X = (K^*)^n$ , donc  $A = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , il contient en particulier les valuations suivantes, que nous retrouverons plus bas :

Notons  $\check{\mathbb{R}}^n$  l'espace vectoriel dual de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $w \in \check{\mathbb{R}}^n$ ; à tout élément  $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  associons  $\min_{\alpha} (\nu(a_{\alpha}) + \langle w, \alpha \rangle)$ . C'est une valuation sur  $A$ , qui n'est pas de la forme  $\omega_x$ . En



effet si elle l'était, on aurait  $w = (\nu(x_1), \dots, \nu(x_n))$ , mais alors il est facile de fabriquer des binômes  $f = x^m - \lambda x^n \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  tels que  $\nu(\lambda) = \langle m, w \rangle - \langle n, w \rangle$  et que  $\omega_x(f)$  soit plus grand que la valuation de chacun des deux termes.

**Remarque 2.2.** On peut aussi définir une valuation comme l'opposé d'une valuation définie comme ci-dessus, ce qui revient à remplacer la troisième condition par :

$$\nu(a + b) \leq \max(\nu(a), \nu(b)).$$

C'est le choix fait dans [7]. Cela évite l'apparition du signe moins dans la définition de l'amibe non archimédienne. J'ai préféré garder la définition classique des valuations.

### 3. Polyèdres de Newton

Essayons de décrire les amibes non archimédiennes de sous-espaces de  $(K^*)^n$ .

Un terme unique  $\lambda x^m = \lambda x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$  de  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  définit l'ensemble vide dans  $(K^*)^n$ . L'équation la plus simple pour un sous espace algébrique  $X$  de  $(K^*)^n$  est un binôme (où  $x^a = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ )

$$x^a - \lambda x^b = 0, \quad \lambda \in K.$$

L'image par  $\nu$  est contenue dans l'hyperplan de  $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^n a_i \nu(x_i) = \sum_{i=1}^n b_i \nu(x_i) + \nu(\lambda).$$

Comme les valeurs de  $\nu$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ , on voit que l'adhérence de  $\mathcal{T}(X)$  est l'hyperplan tout entier.

On peut avoir l'impression que connaître les amibes des binômes n'est pas un grand progrès, mais c'est ici qu'intervient la superbe remarque de Newton : si une somme de termes non nuls est nulle dans un corps valué, alors la valuation minimale des termes de la somme doit être atteinte au moins deux fois ! C'est cela qui est à l'origine du caractère linéaire des amibes non archimédiennes.

Commençons par le classique polyèdre de Newton. Il faut commencer par se donner un réseau  $M$  dans  $\mathbb{R}^n$  (pour des raisons de compatibilité de notation avec la section précédente, nous commençons dans un espace dual). On prend pour  $M$  le groupe multiplicatif

des monômes de  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . Le plus simple est donc de penser à un élément  $m$  de  $M$  comme à un monôme  $x^m$ . Nous noterons  $\check{\mathbb{R}}^n$  le produit tensoriel  $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Dans  $\check{\mathbb{R}}^n$ , notre réseau  $M$  apparaît comme le réseau des points entiers, c'est-à-dire à coordonnées entières. Nous aurons aussi à faire intervenir le réseau dual  $N = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$  qui apparaît dans l'espace vectoriel dual  $\mathbb{R}^n$  comme le réseau des formes linéaires à coefficients entiers. Étant donné un polynôme de Laurent  $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  on peut considérer l'ensemble  $E(f) \subset \mathbb{Z}^n$  des exposants des monômes apparaissant dans  $f$ . On peut, comme on l'a vu plus haut, définir une valuation sur  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  au moyen d'une forme linéaire  $w \in \mathbb{R}^n$  sur  $\check{\mathbb{R}}^n$ .

Dans le cas où la valuation  $\nu$  est nulle sur tous les coefficients  $a_\alpha$  de  $f$ , par exemple si la valuation  $\nu$  de  $K$  est triviale, cela donne

$$\nu_w \left( \sum_{\alpha \in E} a_\alpha x^\alpha \right) = \min_{\alpha \in E} (\langle w, \alpha \rangle).$$

On voit que le comportement de  $f$  vis-à-vis de toutes les valuations  $\nu_w$  ne dépend que de l'enveloppe convexe dans  $\check{\mathbb{R}}^n$  de l'ensemble  $E$  des exposants de  $f$ , ce qui est l'équivalent du fait que l'enveloppe convexe de  $E$  est l'intersection des demi-espaces qui le contiennent. C'est cette enveloppe convexe  $\Delta_f$  que l'on appelle le *polyèdre de Newton* de  $f$ , terminologie qui n'est pas vraiment compatible avec le polygone de Newton vu en dimension 2, qui est une frontière. C'est un polytope (= polyèdre convexe) compact à sommets entiers, ce que l'on appelle en anglais un « lattice polytope ».

#### 4. Fonction d'appui et transformation de Legendre

Soit  $E \subset \check{\mathbb{R}}^n$  un sous-ensemble non vide. On peut définir la *fonction d'appui* de  $E$  par

$$H_E(w) = \inf_{x \in E} \langle w, x \rangle.$$

Son ensemble de définition est le sous-ensemble de l'espace dual  $\mathbb{R}^n$  constitué des formes linéaires dont les valeurs sur  $E$  sont bornées inférieurement. Si  $E$  est borné la fonction  $H_E$  est définie sur  $\mathbb{R}^n$  tout entier. Nous nous intéresserons au cas où  $E$  est fermé dans  $\mathbb{R}^n$  et l'infimum, lorsqu'il existe, est atteint.

**Note.** La valuation  $\nu_w$  que nous venons de voir est donc une fonction d'appui.

Cette fonction est semi-continue supérieurement comme infimum de fonctions semi-continues supérieurement et est positivement homogène ; on  $H_E(\lambda w) = \lambda H_E(w)$  pour  $\lambda > 0$ . On dit aussi que c'est une *jauge*. De plus, elle est concave : elle satisfait l'inégalité

$$H_E(w + w') \geq H_E(w) + H_E(w').$$

Il en résulte que l'ensemble des  $w$  où elle est définie est un sous-ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n$ .

Par ailleurs, rappelons qu'un demi-espace de  $\check{\mathbb{R}}^n$  est l'ensemble des points de la forme  $\{x \mid \langle w, x \rangle \geq c\}$  avec  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . L'ensemble

$$\langle E \rangle = \{x \in \check{\mathbb{R}}^n \mid \langle w, x \rangle \geq H_E(w) \ \forall w \in \mathbb{R}^n\}$$

est l'intersection de tous les demi-espaces de  $\check{\mathbb{R}}^n$  contenant  $E$  ; c'est donc le plus petit sous-ensemble convexe contenant  $E$  : l'enveloppe convexe de  $E$ . Cela vaut même si  $E$  n'est pas borné. Ainsi :

*La fonction d'appui d'un sous-ensemble de  $\check{\mathbb{R}}^n$  détermine entièrement son enveloppe convexe et est entièrement déterminée par celle-ci.*

Remarquons aussi que l'effet d'une translation sur  $E$  par un vecteur  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  est l'addition d'une forme linéaire :

$$H_{E+y}(w) = H_E(w) + \langle w, y \rangle,$$

et les formes linéaires sont les fonctions d'appui des points.

Plus généralement l'addition de Minkowski des convexes, définie par  $E + F = \{x + y \mid x \in E, y \in F\}$  correspond à l'addition des fonctions d'appui. Notons que le polyèdre de Newton d'un produit est la somme de Minkowski des polyèdres de Newton des facteurs.

La fonction d'appui a été introduite par Minkowski ; elle permet pour de nombreux problèmes de remplacer l'étude d'ensembles convexes de  $\check{\mathbb{R}}^n$  par celle de fonctions sur  $\mathbb{R}^n$ .

Soit maintenant une fonction  $x \mapsto \varphi(x)$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\check{\mathbb{R}}$  que l'on suppose fermé. On suppose aussi que si  $I$  n'est pas borné  $\varphi(x)$  tend vers  $+\infty$  avec  $|x|$ . Supposons que la fonction  $\varphi$  est bornée inférieurement. Considérons le sous-ensemble (parfois appelé *épigraphe de  $\varphi$* )  $\text{Epi}(\varphi) = \{(x, y) \mid x \in I, y \geq \varphi(x)\}$  de  $\check{\mathbb{R}}^2$ . Supposons que cet épigraphe est fermé dans  $\check{\mathbb{R}}^2$ , ce qui équivaut à dire que la

fonction  $\varphi$  est semi-continue inférieurement, et étudions sa fonction d'appui  $H_{\text{Epi}(\varphi)}$ . Celle-ci est définie dans le demi-espace  $q \geq 0$  de l'espace  $\mathbb{R}^2$  des formes linéaires  $px + qy$  sur  $\check{\mathbb{R}}^2$ . En restriction à la droite  $q = 1$ , la fonction d'appui vaut :

$$H_{\text{Epi}(\varphi)}|_{q=1} = \min_{(x,y)|y \geq \varphi(x)} (px + y) = \min_x (px + \varphi(x)) = -L_\varphi(-p)$$

où  $L_\varphi(p) = \max_x (px - \varphi(x))$  est la transformée de Legendre de la fonction  $\varphi(x)$ . L'homogénéité de la fonction d'appui fait que la transformée de Legendre est une donnée équivalente à celle de la fonction d'appui de l'épigraphe de la fonction  $\varphi(x)$  : c'est l'opposé de la restriction de cette fonction d'appui à la droite  $q = 1$  évalué en  $-p$ .

C'est donc une fonction convexe, puisque les fonctions d'appui sont concaves, qui est définie pour tout  $p$  si l'intervalle de définition de  $\varphi$  est compact. La fonction  $L_\varphi(p)$  est bornée inférieurement puisque  $L_\varphi(p) \geq px - \varphi(x)$  et elle est aussi semi-continue inférieurement puisque les fonctions d'appui sont semi-continues supérieurement. Si l'on calcule sa transformée de Legendre  $L_{L_\varphi}(x) = \max_p (xp - L_\varphi(p))$  on trouve la fonction  $\varphi^{\text{conv}}$  dont l'épigraphe est l'enveloppe convexe de l'épigraphe  $\text{Epi}(\varphi)$  de  $\varphi$ . Si la fonction  $\varphi$  est convexe, la transformation de Legendre est une dualité : on a  $L_{L_\varphi} = \varphi$ . Utilisant le fait que le minimum, ou le maximum, par rapport à  $x$  est invariant par  $x \mapsto -x$ , on vérifie sans peine que  $-L_\varphi(-p)$  possède les mêmes propriétés.

L'interprétation au moyen de fonctions d'appui permet de définir une transformation de Legendre pour une « fonction » qui n'est définie que pour un ensemble fini de points : Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  des points de  $\check{\mathbb{R}}$  et attribuons-leur des valeurs réelles  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ . Considérons l'épigraphe généralisé  $E(\alpha, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^k \{(\alpha_i, t_i) \mid t_i \geq \varepsilon_i\} \subset \check{\mathbb{R}}^2$ . Il définit une transformée de Legendre par restriction à  $q = 1$  de sa fonction d'appui. La transformée de Legendre de cette transformée est la fonction convexe dont l'épigraphe est l'enveloppe convexe de  $E(\alpha, \varepsilon)$ .

Remarquons que lorsque  $P$  est un polytope, sa fonction d'appui est en fait l'infimum d'un nombre fini de formes linéaires correspondant à ses sommets. Lorsque  $P$  est l'enveloppe convexe d'un nombre fini

de points entiers de  $\check{\mathbb{R}}^n$ , par exemple si  $P$  est un polyèdre de Newton, ces formes linéaires sont à coefficients entiers.

Dans le cas d'un polytope, la fonction  $H_P$  est donc concave et *linéaire par morceaux* sur  $\mathbb{R}^n$ . On peut décrire les « morceaux » comme ceci : à chaque  $w \in \mathbb{R}^n$  associons le sous-ensemble  $P_w$  du polyèdre de Newton tel que

$$u_0 \in P_w \iff \min_{u \in P} (\langle w, u \rangle) = w(u_0).$$

Géométriquement, lorsque  $c$  croît depuis  $-\infty$ , les hyperplans  $w = c$  de  $\check{\mathbb{R}}^n$  finissent par toucher  $P$  pour  $c = H_P(w)$  et  $P_w$  est le lieu de contact, qui est une face du polytope  $P$ . Les régions de  $\mathbb{R}^n$  dans lesquelles  $H_P$  est linéaire sont des classes d'équivalence pour la relation  $w \sim w' \iff P_w = P_{w'}$ . Ce sont des cônes convexes polyédraux, qui sont rationnels si  $P$  est entier, dont la réunion est  $\mathbb{R}^n$ . L'intersection de deux de ces cônes est une face de chacun d'eux (leurs intérieurs sont disjoints) et chaque face d'un de ces cônes appartient à la collection. Ils forment ce que l'on appelle un *éventail* de  $\mathbb{R}^n$ . Il est facile de vérifier que la dimension de chaque cône est égale à la codimension dans  $\check{\mathbb{R}}^n$  de la face qui lui correspond, et que la correspondance faces-cônes renverse les inclusions.

L'éventail ainsi construit est souvent appelé *éventail dual* du polyèdre  $P$ . C'est exactement le lieu des coins de la fonction d'appui du polytope.

Plus précisément, étant donné  $w \in \mathbb{R}^n$ , convenons de dire que l'hyperplan d'équation  $w(m) = 0$  est *parallèle* à un hyperplan d'appui du polytope  $P \subset \check{\mathbb{R}}^n$  le long de  $P'$  si un des hyperplans affines  $w(m) = c$  contient la face  $P'$  et si  $P$  est alors contenu dans le demi-espace  $w(m) - c \geq 0$ . Le sous-ensemble

$$\begin{aligned} \sigma(P') = \{w' \mid w' = 0 \text{ est parallèle} \\ \text{à un hyperplan d'appui le long de } P'\} \end{aligned}$$

est contenu dans le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  formé des hyperplans contenant  $P'$  et y est un cône convexe d'intérieur non vide.

L'application

$$P' \longmapsto \sigma(P')$$

est une bijection de l'ensemble des faces de  $P$  sur l'ensemble des cônes de l'éventail dual de  $P$ . Cette bijection renverse les inclusions et on a  $\dim \sigma(P') = n - \dim(P')$ .

Cette correspondance s'appelle la *dualité polytope-éventail*. Souvenons-nous que :

*La dualité polytope-éventail établit une bijection entre les sommets du polyèdre de Newton et les cônes de dimension  $n$  de l'éventail dual.*

Remarquons aussi que ces cônes de dimension  $n$  sont les adhérences des composantes connexes du complémentaire de la réunion des cônes de dimension  $\leq n - 1$  de l'éventail.

Si le polytope  $P$  est entier, l'éventail est *rationnel*, ce qui signifie que les hyperplans délimitant les cônes de dimension  $n$  sont à coefficients rationnels (entiers si l'on veut) ou de manière équivalente que chacun des cônes de l'éventail est le cône positivement engendré par un nombre fini de vecteurs entiers, que l'on peut prendre primitifs, c'est-à-dire tels que leurs coordonnées soient premières entre elles. Nous verrons plus bas des éventails qui ne sont que « partiellement » rationnels et correspondent à des ensembles polyédraux non compacts.

Remarquons enfin que l'éventail ne détermine pas le polytope, même à translation près ; en fait sa donnée équivaut à celle des *directions* des faces. Pour reconstituer le polytope il faut connaître les valeurs de la fonction d'appui, et pas seulement son lieu des coins.

La dualité donne une bijection

$$\begin{array}{c} \{\text{convexes}\}/(\text{translation}) \\ \updownarrow \\ \{\text{jauge concaves}\}/(\text{addition d'une forme linéaire}) \end{array}$$

dans laquelle les polytopes (resp. polytopes entiers) à translation près (resp. à translation entière près) correspondent aux jauge linéaires (resp. linéaires à valeurs entières aux points du réseau) sur les cônes d'un éventail (resp. d'un éventail rationnel) à une forme linéaire (resp. linéaire et entière) près.

Lorsque l'on part d'un polytope, par construction, *la réunion des cônes de dimension  $n - 1$  de l'éventail est en effet le lieu des coins de la fonction  $H_P$ , ou encore son lieu de non-différentiabilité* ; comme on l'a vu dans les textes d'Ilya Itenberg et d'Erwan Brugallé, c'est aussi

le lieu des coins du polynôme tropical associé à  $f$  ; c'est donc dans ce cas particulier où les coefficients du polynôme  $f$  sont de valuation nulle l'ensemble sous-jacent à la variété tropicale associée à  $f$ .

Nous allons définir ci-dessous cette variété tropicale sans faire l'hypothèse que les coefficients  $a_\alpha$  de  $f$  sont de valuation nulle.

Faisons auparavant l'observation suivante :

Étant donné un polytope  $P$ , si nous nous proposons de construire sa fonction d'appui à une fonction linéaire près, nous avons besoin seulement des données suivantes :

Pour deux cônes de dimension  $n$  de l'éventail dual de  $P$  qui ont en commun une face  $F$  de dimension  $n-1$ , et qui correspondent donc aux fonctions linéaires  $\langle w, \alpha \rangle$  et  $\langle w, \beta \rangle$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux sommets de  $P$  liés par une arête  $[\alpha\beta]$  dont le dual est la face commune des deux cônes, il faut se donner une orientation sur l'arête, qui détermine dans quel sens on traverse la face commune aux deux cônes, ou si l'on préfère une co-orientation de l'hyperplan support de cette face commune, c'est-à-dire un des deux demi-espaces qu'il définit. Disons que l'orientation va de  $\alpha$  à  $\beta$ . On peut alors associer à cette face commune le vecteur  $c_F = \beta - \alpha$  de  $\mathbb{R}^n$ . Cette construction fonctionne même si le polytope  $P$  n'est pas à sommets entiers ou si l'éventail n'est pas rationnel.

Si  $P$  est entier, on peut définir en outre le *poids*  $e(\alpha, \beta)$  qui est la longueur entière du vecteur  $\beta - \alpha$ , c'est-à-dire l'entier positif tel que  $(\beta - \alpha)/e(\alpha, \beta)$  soit un vecteur entier primitif. Si  $P$  n'est pas entier, on obtient encore un poids en ne considérant que les coordonnées qui sont entières.

Si maintenant on considère les faces  $(F_i)_{i \in S}$  de codimension un ayant en commun une face  $G$  de codimension deux, elles correspondent par dualité à des arêtes de  $P$  formant le bord d'une face de dimension 2 de  $P$ . Choisir une orientation de ce bord donne des co-orientations cohérentes aux faces  $F_i$  et une relation, dite d'équilibre :

$$\sum_{i \in S} c_{F_i} = 0$$

qui correspond simplement au fait que la somme orientée des vecteurs  $\beta_j - \alpha_j$  formant le bord d'une face de dimension 2 est nulle.

Il faut remarquer aussi que deux tels vecteurs, vus comme fonctions linéaires sur l'espace dual, coïncident sur l'intersection des deux hyperplans qui leur sont duaux. La donnée d'une application  $F \mapsto c_F$  de l'ensemble des faces de codimension un de l'éventail vers les vecteurs de  $\mathbb{R}^N$  satisfaisant les relations d'équilibre permet de reconstruire la fonction d'appui à une fonction linéaire près : on fixe une fonction linéaire  $\ell_0$  dans l'un des cônes de dimension maxima, disons  $\sigma_0$ , et on choisit pour toute face de codimension deux une orientation sur l'ensemble des faces de codimension un la contenant.

Cela fait, partant du cône choisi au départ, on ajoute à  $\ell_0$ , à chaque traversée d'une face commune  $F$  à  $\sigma_0$  et à un cône de dimension  $n$  jouxtant  $\sigma_0$ , la fonction linéaire  $\check{\mathbb{R}}^n \rightarrow \mathbb{R}$  déterminée par le vecteur  $c_F$ . On continue ainsi pour les voisins des cônes jouxtant  $\sigma_0$ , et on obtient ainsi des fonctions linéaires sur tous les cônes de dimension  $n$  qui coïncident sur les faces de dimension inférieure. La condition d'équilibre assure que la fonction obtenue dans un cône ne dépend pas du chemin suivi pour y arriver à partir de  $\sigma_0$ .

Nous avons bien construit une fonction  $H(\ell_0, \sigma_0)$  sur  $\check{\mathbb{R}}^n$ , linéaire sur chaque cône de l'éventail et déterminée par le choix de  $\ell_0$  sur  $\sigma_0$ . Cette fonction est concave parce que au passage d'un cône à un cône adjacent elle se comporte comme la fonction d'appui d'un segment, et la condition d'équilibre assure que cette propriété se globalise.

Si l'on remplace  $\ell_0$  par une autre fonction linéaire  $\ell'_0$ , la fonction  $H(\ell_0, \sigma_0)$  devient  $H(\ell_0, \sigma_0) + \ell'_0 - \ell_0$  et si l'on choisit un autre cône  $\sigma'_0$ , la fonction  $H(\ell_0, \sigma_0)$  est modifiée par l'addition de l'unique fonction linéaire sur  $\check{\mathbb{R}}^n$  qui sur  $\sigma'_0$  coïncide avec  $\ell_0 - H(\ell_0, \sigma_0)$ .

Selon ce que nous avons vu plus haut, la donnée de la fonction d'appui à une fonction linéaire (resp. linéaire et entière) près équivaut à celle du polyèdre  $P$  à translation (resp. à translation entière) près.

Pour traiter le cas général, il faut généraliser la fonction d'appui et la notion d'éventail.

Ce qui généralise la fonction d'appui est la *tropicalisation* du polynôme  $\sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} \in K[x]$ , sur laquelle nous reviendrons plus tard, et ce qui généralise l'éventail est un *ensemble polyédral rationnel*, que nous allons définir maintenant et dont nous verrons qu'il est en fait très proche d'un éventail en dimension  $n + 1$ .



## 5. Complexes polyédraux rationnels

Un sous-ensemble  $T \subset \mathbb{R}^n$  est appelé *complexe polyédral rationnel* s'il peut être présenté comme réunion de sous-ensembles fermés appelés cellules possédant les propriétés suivantes :

- (1) Chaque cellule est un polyèdre convexe fermé dans  $\mathbb{R}^n$  (non nécessairement borné). Sa dimension est par convention celle de son enveloppe affine.
- (2) L'enveloppe affine de chaque cellule est de pente rationnelle (l'espace vectoriel qui lui est parallèle est rationnel : son équation est à coefficients rationnels).
- (3) la frontière (dans son enveloppe affine) de chaque cellule de dimension  $k$  est une union de cellules de dimension  $k - 1$ .
- (4) Les intérieurs (dans leur enveloppe affine) des cellules sont dis-joints.

Remarquons que les cônes d'un éventail rationnel de dimension  $n$  constituent un complexe polyédral rationnel.

Un *poids* sur un complexe polyédral rationnel est la donnée d'un entier naturel  $e(F)$  pour chaque cellule  $F$  de dimension  $n - 1$ . Si nous nous sommes donnés un poids, nous pouvons attacher à chaque cellule  $F$  de dimension  $n - 1$  une application linéaire

$$\pm c_F : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$$

définie au signe près par les propriétés suivantes :

- (1) Le noyau de  $c_F$  est parallèle à  $F$ ,
- (2)  $\frac{1}{e(F)} c_F : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  est un covecteur entier primitif.

Lorsque  $n = 2$  le poids  $e(F)$  est la longueur entière qui apparaît dans les textes d'Erwan Brugallé et Ilia Itenberg.

Si l'on choisit une co-orientation de  $F$ , c'est-à-dire un des deux demi-espaces déterminés par son enveloppe affine, on peut fixer le choix du signe de  $c_F$  en demandant que le demi-espace  $c_F > 0$  rencontre le demi-espace choisi. On dira enfin qu'un complexe polyédral rationnel pondéré est *équilibré* si la condition suivante est réalisée :

Soit  $G$  une cellule de dimension  $n - 2$  et soient  $F_1, \dots, F_s$  les cellules de dimension  $n - 1$  qui lui sont adjacentes. Un choix d'orientation autour de  $G$  détermine des co-orientations cohérentes des  $F_j$ , donc les

signes des  $c_{F_j}$ . La condition d'équilibre est alors :

$$\sum_{j=1}^s c_{F_j} = 0,$$

et on remarque qu'elle est indépendante du choix de l'orientation autour de  $G$ .

**Exemple fondamental.** Soient  $E$  un sous-ensemble fini du réseau entier  $M \subset \mathbb{R}^n$  et  $\nu$  une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . Par exemple on peut et doit penser à un polynôme non nul  $\sum_{\alpha \in E} a_\alpha x^\alpha$  et à l'application  $\alpha \mapsto \nu(a_\alpha)$ , que nous noterons parfois  $\alpha \mapsto \nu(\alpha)$ .

Considérons la « transformée de Legendre » de  $\nu$  (en fait, comme dans le cas des fonctions d'une variable, c'est l'opposé de la transformée de Legendre de  $\nu$  évaluée en  $-w$ ) :

$$L_\nu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}; \quad w \longmapsto \min_{\alpha \in E} (\langle w, \alpha \rangle + \nu(\alpha))$$

Dans le cas où  $(E, \nu)$  provient d'un polynôme de Laurent non nul  $f \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , cette fonction linéaire par morceaux est souvent appelée la *tropicalisation* de  $f$  et parfois notée  $\text{Trop}(f)$  ou  $f^\tau$ . C'est bien la tropicalisation au sens vu dans les textes de Brugallé et Itenberg.

**Proposition 5.1 (voir [4], Th. 2.1.1).** *Le lieu des coins, ou lieu de non-lissité  $\Sigma(E, \nu)$ , de la fonction  $L_\nu$  est un complexe polyédral rationnel pondéré équilibré, qui est vide si  $f$  est un monôme, et purement de dimension  $n - 1$  sinon.*

Remarquons que si  $\nu$  est la restriction à  $E$  d'une fonction linéaire sur  $\mathbb{R}^n$ , alors le lieu des coins de  $L_\nu$  est à translation près la réunion des cônes de dimension  $\leq n - 1$  de l'éventail associé à l'enveloppe convexe  $\Delta$  de  $E$ .

Donnons ici une première idée de la démonstration, qui sera complétée plus bas dans la preuve de la Proposition 5.3 : dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  on considère l'enveloppe convexe  $\tilde{\Delta}_\nu$  de l'ensemble

$$\tilde{E}_\nu = \{(\alpha, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \alpha \in E, z \geq \nu(\alpha)\}$$

(une sorte d'épigraphe de la fonction  $\nu$ ) ; c'est un polyèdre convexe qui n'a qu'un nombre fini de faces compactes. La figure 2 en est un schéma, aimablement créé en Mathematica par Maryvonne Teissier.

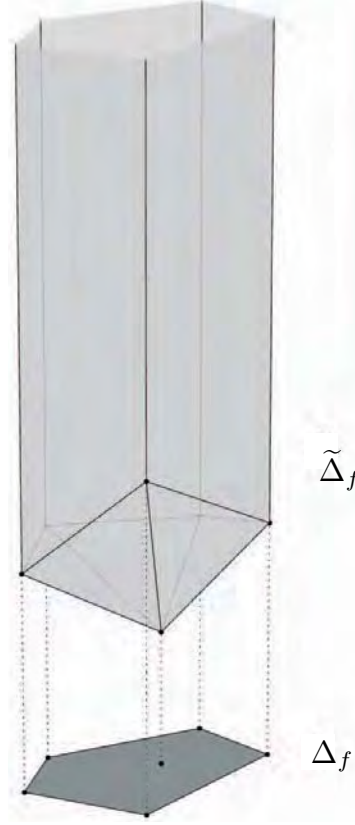


FIGURE 2

Les projections dans  $\mathbb{R}^n$  de ces faces déterminent une subdivision de l'enveloppe convexe  $\Delta$  de  $E$  par des polytopes entiers  $\Delta_s$ . La frontière inférieure de  $\tilde{\Delta}_\nu$  est le graphe d'une fonction convexe sur  $\Delta$  qui a même transformée de Legendre que  $\nu$  et est linéaire sur chaque  $\Delta_s$ . Comme nous le verrons plus bas, cela permet de déterminer le lieu des coins de  $L_\nu$  et de vérifier que c'est bien un complexe polyédral rationnel, puisque les  $\Delta_s$  sont des polytopes entiers.

De plus on peut attribuer un poids à chaque face compacte  $F$  de dimension  $n - 1$  de  $\Sigma(E, \nu)$  en se souvenant qu'elle est définie comme coin entre deux fonctions affines dont la différence est à coefficients entiers; on choisit cette différence pour covecteur  $c_F$ , et pour poids

l'entier  $e(F)$  tel que  $\frac{1}{e(F)}c_F$  soit primitif. Alors : avec ces données,  $\Sigma(E, \nu)$  est un complexe polyédral rationnel pondéré équilibré.

C'est cela qu'on appelle aujourd'hui une « variété tropicale », en fait ici une hypersurface tropicale. Ce complexe ne dépend que de la fonction linéaire par morceaux  $L_\nu$ , qui elle même ne dépend que des valuations des coefficients du polynôme. Dans le cas de la dimension 1, on retrouve ce qu'ont défini Brugallé et Itenberg.

L'intérêt de ces données supplémentaires est qu'inversement, comme nous le verrons plus bas, étant donné un complexe polyédral rationnel pondéré équilibré, il détermine un polytope entier  $\Delta$  unique à translation près, et une fonction  $\nu$  qui n'est pas entièrement déterminée mais dont la transformée de Legendre est déterminée à une constante près. En d'autres termes, étant donnée une hypersurface tropicale pondérée équilibrée on trouve ainsi toute une famille de polynômes dont la tropicalisation est cette hypersurface, mais avec une ambiguïté contrôlée. Ceci est essentiellement le contenu de la Proposition 2.4 de [11], auquel on renvoie pour plus de détails.

Cette détermination du polyèdre de Newton et de la fonction  $\nu$  à équivalence de transformées de Legendre près donne un sens précis à ce que j'appelais « géométrie de l'équation » dans l'introduction.

En effet un complexe polyédral rationnel pondéré équilibré détermine une classe de polynômes ayant tous même polyèdre de Newton (à translation entière près) et dont les valuations des coefficients sont assez bien connues, au moins dans leurs positions relatives, et on peut appeler cela une « classe géométrique » de polynômes. Notons qu'une translation entière du polyèdre de Newton correspond à la multiplication du polynôme  $f$  par un monôme en  $x_1, \dots, x_n$ , qui ne change pas le lieu des zéros dans  $(K^*)^n$ , et que de même une translation de  $\tilde{\Delta}_f$  dans la direction verticale correspond à la multiplication du polynôme  $f$  par une puissance de  $t$ , qui n'affecte pas non plus les solutions dans  $(K^*)^n$ .

Avant de pouvoir énoncer le résultat principal, il nous faut définir la *forme initiale* d'un polynôme  $f = \sum_{\alpha \in E} a_\alpha x^\alpha \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  par rapport à un « poids »  $w \in \mathbb{R}^n$ . C'est la somme des termes de

plus petit « poids total »  $L(w) = \min_{\alpha \in E} (\langle w, \alpha \rangle + \nu(\alpha))$ , c'est-à-dire

$$\text{in}_w(f) = \sum_{\substack{\alpha \in E \\ \langle w, \alpha \rangle + \nu(\alpha) = L(w)}} a_\alpha x^\alpha.$$

**Théorème 5.2** (voir [4], [8], [10], [11], [14], [18]). *Soit  $K$  un corps algébriquement clos complet pour une valuation  $\nu$  à valeurs réelles. Soit  $X \subset (K^*)^n$  une hypersurface définie par un polynôme de Laurent  $f = \sum_{\alpha \in E} a_\alpha x^\alpha$  avec  $a_\alpha \in K$ . Posons  $A = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]/(f)$ . Alors :*

A) *Les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}^n$  coïncident :*

- (1) *L'adhérence de  $\nu(X)$  dans  $\mathbb{R}^n$ .*
- (2) *L'ensemble des  $w \in \mathbb{R}^n$  tels que  $\text{in}_w(f)$  ne se réduise pas à un monôme.*
- (3) *Le lieu des coins de la fonction  $w \mapsto \min_{\alpha \in E} (\langle w, \alpha \rangle + \nu(\alpha))$*
- (4) *Dans le cas où  $X$  est irréductible, l'image de l'application  $\beta: \mathcal{W}(A/K) \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie dans la section précédente.*

B) *L'ensemble  $\mathcal{T}(X)$  ainsi défini est un complexe polyédral rationnel de dimension  $n - 1$ .*

De plus :

**Proposition 5.3.**

A) *L'ensemble  $\mathcal{T}(X)$  est l'intersection avec  $\mathbb{R}^n \times \{1\}$  de la réunion des cônes de dimension  $\leq n$  de l'éventail  $\tilde{\Sigma}_\nu$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  dual du polyèdre  $\tilde{\Delta}_\nu$  défini plus haut.*

B) *La donnée d'une pondération équilibrée de l'ensemble  $\mathcal{T}(X)$  équivaut à la donnée d'une jauge sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  qui est concave, linéaire dans chacun des cônes de  $\tilde{\Sigma}_\nu$  et définie à une forme linéaire près dont les coefficients dans  $\check{\mathbb{R}}^n$  sont entiers. Cette donnée équivaut aussi à la donnée d'un polyèdre de la forme  $\tilde{\Delta}_f$  qui est bien défini modulo une translation de  $\check{\mathbb{R}}^n \times \check{\mathbb{R}}$  dont la projection dans  $\check{\mathbb{R}}^n$  appartient au réseau entier.*

Donnons maintenant quelques indications de démonstration.

*Démonstration.* Puisque le lieu des coins est fermé, pour prouver que  $\overline{\nu(X)}$  est contenu dans l'ensemble du (2) il suffit de prouver que tout point de  $\nu(X)$  est dans cet ensemble. Soit donc  $x \in X$  tel que

$w = \nu(x) = (\nu(x_1), \dots, \nu(x_n))$  et  $f(x) = 0$ . Les termes de plus bas degré de la série  $f(x)$  sont de la forme  $\text{in}_w f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  où  $\bar{x}_i$  est la forme initiale de  $x_i(t)$  par rapport à  $t$ . Ces termes doivent s'annuler identiquement, ce qui impose que  $\text{in}_w f$  ne se réduise pas à un monôme. Cela montre aussi que  $w$  appartient à l'ensemble défini en (3). C'est la version moderne de l'idée de Newton. Le même argument démontre aussi que l'ensemble de (4) est contenu dans celui de (2).

L'inclusion inverse est un peu plus délicate (voir [14]) : supposons que  $w$  appartient à l'intersection de l'ensemble de (2) avec  $(\nu(K^*))^n \subset \mathbb{R}^n$ , qui est dense dans cet ensemble puisque  $\nu(K^*)$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . La forme initiale  $\text{in}_w f$  n'est pas un monôme mais peut avoir un monôme en facteur. Divisons par ce facteur éventuel et choisissons une variable, disons  $x_1$ , qui apparaît effectivement dans le résultat qui, rappelons le, a au moins deux termes. Fixons pour  $i \geq 2$  des  $\bar{x}_i \in K^*$  de la forme  $\xi_i t^{w_i}$ ,  $\xi_i \in k$ , ce qui est possible puisque  $w_i \in \nu(K^*)$ . Alors l'équation  $\text{in}_w f(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0$  est un polynôme en  $x_1$  à coefficients dans  $K$  ayant au moins deux termes et dont le terme constant est non nul, au moins après division par une puissance convenable de  $t$ . Puisque  $K$  est algébriquement clos, cette équation a une solution  $\bar{x}_1$  dans  $K^*$  qui, par l'homogénéité de la forme initiale, a pour valuation  $w_1$ . Si l'on choisit maintenant des séries  $\tilde{x}_i \in K^*$  ayant  $\bar{x}_i$  pour forme initiale, le même argument appliqué à  $f(x_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$  montre l'existence d'une solution  $x_1 \in K^*$  dont la forme initiale est  $\bar{x}_1$ , ce qui prouve que le point  $w$  est dans  $\nu(X)$ . La fin de la preuve du résultat concernant l'application  $\beta$  sort du cadre de cet exposé.

La partie B) du Théorème résulte de la Proposition 5.1 au prix d'une généralisation à notre cas pas entièrement rationnel de la construction de la fonction d'appui à partir d'une pondération, qui est laissée au lecteur après lecture de la preuve de la Proposition 5.3 ci-dessous.

Pour prouver la Proposition 5.3, on remarque que si  $a_\alpha = \xi_\alpha t^{\varepsilon_\alpha} + \dots$ , avec  $\xi_\alpha \in k^*$ , la variété tropicale du polynôme  $f = \sum_{\alpha \in E} a_\alpha x^\alpha$  est la même que celle du polynôme  $\tilde{f} = \sum_{\alpha \in E} \xi_\alpha t^{\varepsilon_\alpha} x^\alpha$ . Mais on peut considérer ce dernier comme un polynôme en  $x$  et  $t$ , à ceci près que les exposants de  $t$  ne sont pas entiers. Cependant,

comme il a été expliqué plus haut on peut construire dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  le lieu des coins associé, qui est l'éventail dual du polyèdre  $\tilde{\Delta}_f$ . Le support de cet éventail est le demi-plan  $w_{n+1} \geq 0$ , où  $w_{n+1}$  est la coordonnée duale de l'exposant de  $t$ .

Nous avons vu plus haut que les cônes de dimension maximale  $n + 1$  de cet éventail, c'est-à-dire les composantes connexes du complémentaire de la réunion  $\tilde{\mathcal{T}}(X)$  des cônes de dimension  $\leq n$ , sont en bijection, par dualité, avec les sommets de  $\tilde{\Delta}_f$ . La variété tropicale de  $f$  est la partie de  $\tilde{\mathcal{T}}(X)$  où le poids de  $t$  vaut 1, puisque nous ne l'autorisons pas à prendre une autre valeur. C'est donc bien l'intersection de l'éventail précédent avec l'hyperplan  $w_{n+1} = 1$ , qui préserve les composantes connexes puisque l'on intersecte des cônes convexes. Il reste à vérifier que l'intersection de cet éventail avec l'hyperplan  $w_{n+1} = 1$  est bien un complexe polyédral rationnel : que ce soit un complexe polyédral résulte aussitôt des définitions. La rationalité résulte du fait que les projections dans  $\mathbb{R}^n$  des arêtes de  $\tilde{\Delta}_f$ , qui par dualité donnent les hyperplans de l'éventail, sont des droites rationnelles.

En effet cela implique que l'hyperplan de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  dual de cette arête joignant par exemple  $(p, \varepsilon_p)$  et  $(q, \varepsilon_q)$  avec  $p, q \in \mathbb{Z}^n$  a pour équation

$$\sum_{i=1}^n w_i(p_i - q_i) + w_{n+1}(\varepsilon_p - \varepsilon_q) = 0.$$

Sa non-rationalité éventuelle provient du coefficient  $\varepsilon_p - \varepsilon_q$ . Lorsque l'on fait  $w_{n+1} = 1$  ce coefficient devient un terme constant et il reste bien un hyperplan à *pente* rationnelle. Enfin, on peut remarquer que les composantes connexes compactes du complémentaire de  $\mathcal{T}(X)$  correspondent aux sommets de  $\tilde{\Delta}_f$  qui se projettent à l'intérieur du polyèdre de Newton  $\Delta_f$  de  $f$ . En effet, ces composantes non compactes correspondent aux cônes de l'éventail dual de  $\tilde{\Delta}_f$  qui rencontrent l'hyperplan  $w_{n+1} = 0$ . Par dualité, ce sont ceux qui contiennent un point correspondant à un hyperplan de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  dont l'équation est indépendante de  $t$ . Un tel hyperplan « vertical » touche  $\tilde{\Delta}_f$  en un point qui se projette sur la frontière de  $\Delta_f$ .  $\square$

Retenons que en particulier *une hypersurface tropicale est l'intersection avec l'hyperplan  $w_{n+1} = 1$  de la réunion des cônes de dimension  $\leq n$  d'un éventail de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  ayant pour support  $w_{n+1} \geq 0$  et*

*ayant exactement les propriétés de rationalité qui font que cette intersection est un complexe polyédral **rationnel**.*

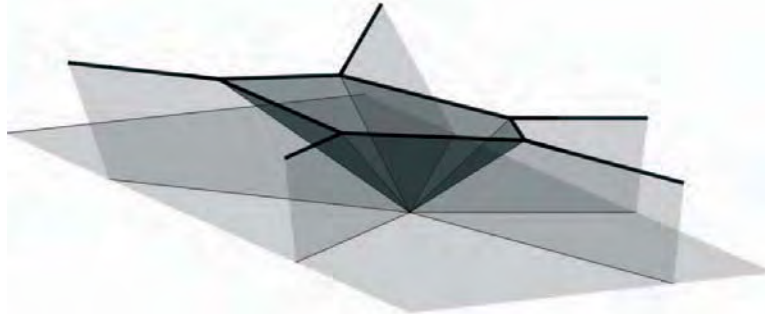


FIGURE 3

Le schéma de la figure 3, aussi créé en Mathematica par Maryvonne Teissier, illustre la Proposition 5.3 et représente une partie de l'éventail dual de  $\tilde{\Delta}_f$  et de l'ensemble sous-jacent à l'hypersurface tropicale correspondant au polyèdre  $\tilde{\Delta}_f$  du schéma précédent. Les 5 sommets de la cellule compacte correspondent aux vecteurs duaux pour la dualité convexe (ou si l'on préfère aux vecteurs normaux rentrants) aux faces compactes du bord de  $\tilde{\Delta}_f$ . Notez que la plupart des dessins apparaissant dans les textes de Brugallé et Itenberg correspondent au cas où  $\Delta_f$  est un simplexe standard, et par conséquent l'hypersurface tropicale n'a que trois directions asymptotiques, correspondant aux normales aux côtés du simplexe.

L'hypersurface tropicale est donc bien la variante de l'éventail dual où la lettre  $t$  joue un rôle particulier de deux manières : d'une part on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe lorsque  $t$  devient arbitrairement petit, ce que reflète la construction de  $\tilde{\Delta}_f$ , et d'autre part  $t$  est un paramètre et non une variable, ce qui fait que l'on ne peut varier son poids ; c'est ce qu'exprime la condition  $w_{n+1} = 1$ .

De plus les poids sur l'hypersurface tropicale sont la donnée nécessaire pour reconstruire à une forme linéaire près (dont tous les coefficients sauf peut-être celui de  $w_{n+1}$  sont entiers) la fonction d'appui de l'épigraphe de l'application  $\Delta_f \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\alpha \mapsto \nu(a_\alpha)$ .

Il faut ajouter qu'étendre tout ce qui précède au cas où  $X$  est un sous-espace de  $(K^*)^n$  de codimension  $> 1$  défini par un idéal  $I$



de  $K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  est un sujet de recherche actif. Il est établi que la variété tropicale  $\mathcal{T}(X)$  est un complexe polyédral rationnel de dimension égale à celle de  $X$  et qu'il est l'intersection d'hypersurfaces tropicales correspondant à un système fini de générateurs de  $I$ . Ce système n'est pas du tout unique, mais il doit satisfaire des conditions assez fortes. En particulier il ne suffit même pas que *pour tout*  $w$  les  $w$ -formes initiales de ces générateurs engendrent l'idéal des  $w$ -formes initiales de tous les éléments de  $I$ . Je renvoie à [16] et [2] pour des précisions.

## 6. Un peu d'analyse

Il y a une jolie interprétation des composantes connexes de  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{T}(X)$ , qui est la version non archimédienne due à Kapranov d'un résultat de Passare dans le cas des amibes complexes, répondant à une question de Gel'fand-Kapranov-Zelevinski. Notons toujours  $\nu: (K^*)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application valuation, et  $f = 0$  une équation pour l'hypersurface  $X \subset (K^*)^n$ . Alors pour chaque composante connexe  $U$  de  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{T}(X)$ ,  $\nu^{-1}(U)$  est le domaine de convergence d'une série représentant  $\frac{1}{f}$  et qui s'écrit

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\alpha_s} x^{-\alpha_s} \left( 1 + \sum_{\beta} b_{\beta} x^{\beta} \right)$$

où  $\alpha_s$  est le sommet de  $\tilde{\Delta}_f$  correspondant à la composante connexe  $U$ . Les raisons de convergence sont différentes selon que  $U$  est une composante compacte ou pas.

Étant donnée une série de Laurent

$$g = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} b_{\alpha} x^{\alpha} \in K((x_1, \dots, x_n))$$

nous dirons qu'elle converge en  $x \in (K^*)^n$  si, posant  $w = \nu(x) \in \mathbb{R}^n$ , pour tout nombre réel  $A > 0$  l'ensemble des  $\alpha$  tels que  $\nu(b_{\alpha}) + \langle w, \alpha \rangle \leq A$  est fini. En d'autres termes la valuation de  $b_{\alpha} x^{\alpha}$  tend vers l'infini (sa valeur absolue tend vers 0) lorsque  $|\alpha|$  tend vers l'infini.

Si  $f = \sum_{\alpha \in E} a_{\alpha} x^{\alpha} \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  définit une hypersurface  $X \subset (K^*)^n$  et si  $w_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{T}(X)$ , le minimum  $\langle w_0, \alpha \rangle + \nu(a_{\alpha})$  est

atteint une seule fois, disons en  $\alpha_0$  et l'on peut écrire

$$f = a_{\alpha_0} x^{\alpha_0} \left( 1 + \sum_{\alpha \neq \alpha_0} \frac{a_\alpha}{a_{\alpha_0}} x^{\alpha - \alpha_0} \right), \quad a_{\alpha_0} \in K^*$$

avec  $\nu(a_\alpha/a_{\alpha_0}) + \langle w_0, \alpha - \alpha_0 \rangle > 0$ . Posant  $h = \sum_{\alpha \neq \alpha_0} \frac{a_\alpha}{a_{\alpha_0}} x^{\alpha - \alpha_0}$ , on voit que l'on peut écrire

$$\frac{1}{f} = \frac{x^{-\alpha_0}}{a_{\alpha_0}} (1 + h + \dots + (-1)^j h^j + \dots)$$

et la construction montre clairement que cette dernière série converge tant que  $w_0$  reste dans la même composante connexe de  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{T}(X)$  et cesse de converger lorsque  $w_0$  atteint  $\mathcal{T}(X)$ .

## 7. Amibes non archimédiennes et amibes classiques

Le but de cette section est de comparer l'amibe non archimédienne d'un polynôme

$$f(v; x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(v) x^{\alpha} \in \mathbb{C}[v][x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$$

à son amibe classique. Cela s'applique en particulier un polynôme de Viro (ou polynôme de patchworking)

$$\sum_{\alpha} d_{\alpha} v^{\nu(\alpha)} x^{\alpha} \in \mathbb{C}((v^{\mathbb{Q}}))[x_1, \dots, x_n], \quad d_{\alpha} \in \mathbb{C},$$

puisque si  $\nu(\alpha) \in \mathbb{Q}$  pour tout  $\alpha$ , on se ramène facilement au cas d'un polynôme en  $v$  par un changement de variable  $v \mapsto v'^q$ .

L'équation  $f(v; x) = 0$  est ici considérée comme définissant une famille à un paramètre de variétés  $X(v) \subset (\mathbb{C}^*)^n$  et on veut étudier la limite lorsque  $|v|$  tend vers l'infini des amibes classiques, convenablement renormalisées, des fibres  $X(v)$ .

Pour définir l'amibe non archimédienne de  $f(v; x)$ , considérons l'injection  $\mathbb{C}[v] \subset \mathbb{C}((t))$  déterminée par  $v \mapsto 1/t$ . Elle nous permet de considérer  $\mathbb{C}[v]$  comme un sous-anneau du corps valué algébriquement clos  $K$  des séries de Puiseux en  $t$  étudié dans la section 2 et donc de définir l'amibe non archimédienne de  $f(v; x)$ .

Rappelons ici que l'amibe classique d'une sous-variété  $X \subset \mathbb{C}^n$  est l'image par l'application

$$\text{Log} : (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (\log |x_1|, \dots, \log |x_n|)$$

de l'intersection  $X \cap (\mathbb{C}^*)^n$ .

Dans le cas qui nous occupe, nous définissons la famille d'amibes complexes associées aux variétés  $X(v)$  pour  $v \neq 0$  par

$$\mathcal{A}_v(X(v)) = \text{Log}_{|v|}(X(v) \cap (\mathbb{C}^*)^n),$$

où  $\text{Log}_{|v|}$  désigne l'application définie par le logarithme en base  $|v|$  des modules des coordonnées.

Ceci revient à normaliser en faisant sur l'amibe complexe usuelle de  $X(v)$  une homothétie de rapport  $1/\log |v|$ .

Rappelons également la définition de la distance de Hausdorff entre deux sous-ensembles fermés  $A, B$  de  $\mathbb{R}^n$  :

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\},$$

où  $d(a, B)$  est la distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$  entre le point  $a$  et l'ensemble  $B$ .

**Théorème 7.1** (Mikhalkin, [11], Cor. 6.4, Rullgård, [17]; voir aussi [7], Th. 1.4)

*Lorsque  $|v|$  tend vers l'infini, les amibes  $\mathcal{A}_v(X(v))$  convergent pour la distance de Hausdorff vers l'amibe non archimédienne  $\mathcal{A}(X) = -\mathcal{T}(X)$ .*

*Démonstration.* Faisons le changement de variables indiqué au début de la section et considérons notre polynôme comme un élément de  $K[x_1, \dots, x_n]$ , que nous notons désormais  $f = \sum_{\alpha} c_{\alpha}(t)x^{\alpha}$ . Soit  $z$  un point de  $X(t) = X(1/v)$ , et posons  $u = \text{Log}_t(z) \in \mathbb{R}^n$ . Posons par ailleurs, pour  $t \neq 0$  et tout exposant  $\alpha$ ,  $e_{\alpha}(t) = \log_{|t|} |a_{\alpha}(t)|$ .

Alors pour tout exposant  $\alpha_0$  de notre polynôme, notant  $M$  le nombre des monômes en  $x$  apparaissant dans le polynôme  $f$ , le point  $u \in \mathbb{R}^n$  satisfait pour tout  $t \neq 0$  les inégalités :

$$e_{\alpha_0}(t) + \langle u, \alpha_0 \rangle \leq \max_{\alpha \neq \alpha_0} (e_{\alpha}(t) + \langle u, \alpha \rangle) + \log_t M,$$

où  $\alpha_0$  parcourt les exposants de notre polynôme. En effet puisque  $z \in X(t)$ , on a pour tout  $\alpha_0$  l'égalité  $a_{\alpha_0} z^{\alpha_0} = -\sum_{\alpha \neq \alpha_0} a_{\alpha} z^{\alpha}$ , d'où l'inégalité  $|a_{\alpha_0} z^{\alpha_0}| \leq M \max_{\alpha \neq \alpha_0} (|a_{\alpha} z^{\alpha}|)$ , et le résultat en prenant le logarithme en base  $t$ .

Cela signifie que l'amibe renormalisée est contenue pour tout  $t \neq 0$  dans la région de  $\mathbb{R}^n$  définie par les inégalités

$$(*) \quad e_{\alpha_0}(t) + \langle w, \alpha_0 \rangle \leq \max_{\alpha \neq \alpha_0} (e_{\alpha}(t) + \langle w, \alpha \rangle) + \log_t M.$$

Souvenons-nous maintenant que nous nous intéressons à l'image par l'application  $\text{Log}_{|v|} = -\text{Log}_{|t|}$  et que l'amibe non archimédienne est l'adhérence de  $-\nu(X)$ , ce qui nous incite à changer le signe de  $w$ . Si nous relisons ces inégalités sous la forme

$$-e_{\alpha_0}(t) + \langle -w, \alpha_0 \rangle \geq \min_{\alpha \neq \alpha_0} (-e_{\alpha}(t) + \langle -w, \alpha \rangle) - \log_t M,$$

nous voyons qu'à la limite lorsque  $t$  tend vers 0 nous obtenons un système d'inégalités qui est satisfait par  $-w$  si et seulement si  $-w \in \mathcal{T}(X)$ . La formule donnant la distance d'un point à un hyperplan, jointe au fait que lorsque  $t$  tend vers 0, par construction  $e_{\alpha}(t)$  tend vers  $\nu(c_{\alpha}(t))$ , montre que cette région est un voisinage de notre amibe non archimédienne  $-\mathcal{T}(X)$  dont tous les points sont à distance uniformément bornée de celle-ci, cette distance tendant vers 0 avec  $t$ . Cela implique que la limite des amibes complexes normalisées  $\mathcal{A}(t)$  existe et est contenue dans  $-\mathcal{T}(X)$ .

Pour montrer que la limite est toute l'amibe non archimédienne, il suffit de montrer qu'un ensemble dense de points de celle-ci peut être obtenue comme limite de points des amibes complexes renormalisées. Or par construction les images par l'application  $\nu$  des solutions de  $f(t; x) = 0$  sont denses dans  $\mathcal{T}(X)$ . Soit donc  $(-\rho_1, \dots, -\rho_n)$  un tel point de  $\mathcal{T}(X)$ . Cela signifie qu'il existe des séries de Puiseux convergentes  $x_i(t) = a_{\rho_i} t^{\rho_i} + \dots = a_{\rho_i} t^{\rho_i} (1 + s_i(t))$ , où  $s_i(t)$  est une série à exposants positifs s'annulant pour  $t = 0$ , qui sont solutions de  $f(t; x) = 0$ . L'image par  $\text{Log}_{|v|}$  du point de coordonnées  $x_i(t)$  est donc un point de l'amibe complexe renormalisée. Or les coordonnées de cette image sont de la forme  $-\rho_i + \log_{|v|} |a_{\rho_i}| + \log_{|v|} |1 + s_i(1/v)|$  et tendent vers  $-\rho_i$  lorsque  $|v|$  tend vers  $+\infty$  puisque les termes dont on prend le logarithme sont bornés.  $\square$

On peut maintenant comme Mikhalkin dans [11] remarquer que chaque composante connexe du complémentaire de l'ensemble défini par les inégalités (\*) est définie par une inégalité

$$e_{\alpha_0}(t) + \langle w, \alpha_0 \rangle > \max_{\alpha \neq \alpha_0} (e_{\alpha}(t) + \langle w, \alpha \rangle) + \log_t M.$$

C'est un ensemble convexe, et chaque composant connexe du complémentaire de l'amibe  $\mathcal{A}_v(X(v))$  est contenue dans une telle composante. En s'appuyant sur les résultats de Forsberg, Passare et Tsikh ([6]), on peut montrer que deux composantes connexes distinctes du complémentaire de  $\mathcal{A}_v(X(v))$  appartiennent à des composantes différentes du complémentaire de l'ensemble défini par (\*) et donc finalement à deux composantes connexes différentes du complémentaire de l'amibe non archimédienne, correspondant à deux sommets distincts de  $\tilde{\Delta}_f$ . Il y a donc aussi une bijection entre les composantes connexes du complémentaire de l'amibe classique et les sommets de  $\tilde{\Delta}_f$ . Je renvoie à la première partie de [10] pour un exposé de la vision analytique des travaux de Passare, Ronkin, et Rullgård.

Il serait d'ailleurs intéressant de déterminer s'il est possible de définir des fonctions sur les amibes complexes normalisées, dans l'esprit de ces travaux ou ressemblant par exemple à des fonctions de la courbure du bord, et convergeant lorsque  $v$  tend vers l'infini vers les poids des faces de dimension  $n - 1$  de l'hypersurface tropicale.

Cela préciserait le lien entre celle-ci et la géométrie de  $X$  que manifeste le résultat précédent. Par ailleurs Mikhalkin ([11], section 5) a donné une méthode de reconstruction sous certaines hypothèses et à difféomorphisme près d'une hypersurface projective à partir de l'hypersurface tropicale associée.

### Références

- [1] R. BIERI & J.R.J. GROVES – « The geometry of the set of characters induced by valuations », *J. reine angew. Math.* **347** (1984), p. 168–195.
- [2] T. BOGART, A. JENSEN, D. SPEYER, B. STURMFELS & R. THOMAS – « Computing tropical varieties », *J. Symbolic Comput.* **42** (2007), no. 1-2, p. 54–73.
- [3] H. BREZIS – *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1983.
- [4] M. EINSIEDLER, M. KAPRANOV & D. LIND – « Non-Archimedean amoebas and tropical varieties », *J. reine angew. Math.* **601** (2006), p. 139–157.
- [5] W. FENCHEL – « On conjugate convex functions », *Canadian J. Math.* **1** (1949), p. 73–77.

- [6] M. FORSBERG, M. PASSARE & A. TSIKH – « Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas », *Adv. Math.* **151** (2000), no. 1, p. 45–70.
- [7] I. ITENBERG, G. MIKHALKIN & E. SHUSTIN – *Tropical algebraic geometry*, Oberwolfach Seminars, vol. 35, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [8] A.N. JENSEN, H. MARKWIG & T. MARKWIG – « An algorithm for lifting points in a tropical variety », *Collect. Math.* **59** (2008), no. 2, p. 129–165.
- [9] K. KEDLAYA – « The algebraic closure of the power series field in positive characteristic », *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), no. 12, p. 3461–3470 (electronic).
- [10] G. MIKHALKIN – « Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry », in *Different faces of geometry*, Int. Math. Ser. (N. Y.), vol. 3, Kluwer/Plenum, New York, 2004, p. 257–300.
- [11] ———, « Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces », *Topology* **43** (2004), no. 5, p. 1035–1065.
- [12] J.-J. MOREAU – *Étude locale d'une fonctionnelle convexe*, Université de Montpellier, Montpellier, 1963, 25 pp.
- [13] B.H. NEUMANN – « On ordered division rings », *Trans. Amer. Math. Soc.* **66** (1949), p. 202–252.
- [14] S. PAYNE – « Fibers of tropicalization », [arXiv:0705.1732](https://arxiv.org/abs/0705.1732), 2007.
- [15] P. RIBENBOIM – « Fields : algebraically closed and others », *Manuscripta Math.* **75** (1992), no. 2, p. 115–150.
- [16] J. RICHTER-GEBERT, B. STURMFELS & T. THEOBALD – « First steps in tropical geometry », in *Idempotent mathematics and mathematical physics*, Contemp. Math., vol. 377, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, p. 289–317.
- [17] H. RULLGÅRD – « Polynomial amoebas and convexity », Prépublication, Université de Stockholm, 2001.
- [18] D. SPEYER & B. STURMFELS – « The tropical Grassmannian », *Adv. Geom.* **4** (2004), no. 3, p. 389–411.

---

B. TEISSIER, Équipe Géométrie et Dynamique, Institut Mathématique de Jussieu, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France  
*E-mail* : [teissier@math.jussieu.fr](mailto:teissier@math.jussieu.fr)  
*Url* : <http://people.math.jussieu.fr/~teissier/>