III.

PANGÉOMÉTRIE

OU

PRÉCIS DE GÉOMÉTRIE

FONDÉE

SUR UNE THÉORIE GÉNÉRALE ET RIGOUREUSE

DES

PARALLÈLES

PAR

N. Lobatcheffsky,

Professeur émerite de l'université de Kasan et membre honoraire de l'université de Moscou.

PANGEOMETRIE.

—

Les notions sur lesquelles on fonde la géométrie élémentaire sont insuffisantes pour en deduire une démonstration du théorème que la somme des trois angles de tout triangle rectiligne est égale à deux angles droits, théorème de la verité duquel personne n'a douté jusqu'à présent, parcequ'on ne rencontre aucune contradiction dans les consequences qu'on en a déduites et que les mesures directes des angles des triangles rectilignes s'accordent, dans les limites des erreurs des mesures les plus parfaites, avec ce théorème.

L'insuffisance des notions fondamentales pour la démonstration de ce théorème a forcé les géomètres d'admettre explitement ou implicitement des suppositions auxiliaires, qui, quelque simples qu'elles paraissent n'en sont pas moins arbitraires et par consequent inadmissibles. Ainsi par exemple on admet, qu'un cercle de rayon infini se confond avec une ligne droite et une sphère de rayon infini avec un plan, que les angles de tout triangle rectiligne ne dépendent que du rapport des côtés et non des côtés eux mêmes, ou enfin, comme cela se fait ordinairement dans les élémens de géométrie, que par un point donné d'un plan on ne peut mener qu'une seule droite parallèle à une autre droite donnée dans le plan tandis que toutes les autres droites menées par le même point et dans le même plan doivent necessairement, étant prolongées suffisament, couper la droite donnée. On entend sous le nom de droite parallèle à une autre droite donnée une droite qui, quelque loin qu'on la prolonge des deux cotés, ne coupe jamais celle à laquelle elle est parallèle. Cette définition est par elle même insuffisante, parcequ'elle ne caracterise pas assez une seule ligne droite. On peut dire la même chose de la plupart des définitions données ordinairement dans les éléments de géométrie, car ces définitions non seulement n'indiquent pas la génération des grandeurs qu'on définit, mais ne montrent pas même que ces grandeurs peuvent exister. Ainsi on définit la ligne droite et le plan par une de leur propriétés; on dit que les lignes droites sont celles qui se confondent toujours dès qu'elles ont deux poins communs, qu'un plan est une surface avec laquelle une ligne droite se confond toujours dès que la droite a deux points communs avec elle.

Au lieu de commencer la géométrie par le plan et la ligne droite, comme on le fait ordinairement, j'ai préféré de la commencer par la sphère et le cercle dont les définitions ne sont pas sujettes au reproche d'être incomplètes puisqu'elles contiennent la génération des grandeurs qu'on définit.

En suite je définis le plan comme le lieu géométrique des intersections de sphères égales décrites autour de deux points fixes comme centres. Enfin je définis la ligne droite comme le lieu géométrique des intersections de cercles égaux situés tous dans un même plan et décrits de deux points fixes de ce plan comme centres. Ces définitions du plan et de la ligne droite acceptées, toute la théorie des plans et des droites perpendiculaires peut être exposée et démontrée avec beaucoup de simplicité et de briéveté.

Etant donné une droite et un point dans un plan, j'appelle parallèle à la droite donnée menée par le point donné la droite limite entre celles des droites menées dans le même plan par le même point et prolongées d'un coté de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite donnée, qui la coupent et de celles qui ne la coupent pas.

J'ai publié une théorie complète des parallèles sous le titre »Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840. In der Fickeschen Buchhandlung.« Dans ce travail j'ai exposé d'abord tous les théorèmes qui peuvent être démontrés sans le secours de la théorie des parallèles. Parmi ces théorèmes, le théorème qui donne le rapport de la surface de tout triangle sphérique à la surface de la sphère entière sur laquelle il est tracé est particulièremant remarquable (Geometrische Untersuchungen § 27). Si A, B, C désignent les angles d'un triangle sphérique et π deux angles droits, le rapport de la surface de ce triangle à la surface de la sphère à laquelle il appartient sera égal au rapport de

$$\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)$$

à quatre angles droits.

Ensuite je démontre que la somme des trois angles de tout triangle rectiligne ne peut jamais surpasser deux angles droits (Geometr. Untersuchungen. § 19) et que, si cette somme est égale à deux angles droits dans un triangle rectiligne quelquonque, elle le sera dans tous (Geometr. Untersuchungen § 20). Ainsi il n'y a que deux suppositions possibles: ou la somme des trois angles de tout triangle rectiligne est égale à deux angles droits, cette supposition donne la géométrie connue — ou dans tout triangle rectiligne cette somme est moindre que deux angles droits et cette supposition sert de base à une autre géométrie, à laquelle j'avais donné le nom de géométrie imaginaire, mais qu'il est peut être plus convenable de nommer Pangéométrie parceque ce nom désigne une théorie géométrique générale, qui comprend la géométrie ordinaire comme cas particulier. Il suit des principes adoptés dans la Pangéométrie, qu'une perpendiculaire p abaissée d'un point d'une droite sur une de ses parallèles fait avec la première, deux angles, dont l'un est aigu. J'appelle cet angle, angle de parallèlisme et le coté de la première droite ou il se trouve, coté qui est le même pour tous les points de cette droite, coté du parallèlisme. Je désigne cet angle par $\Pi(p)$, puisqu'il dépend de la longueur de la perpendiculaire. Dans la géométrie ordinaire on a toujours $\Pi(p) =$ un angle droit pour toute longueur de p. Dans la Pangéométrie l'angle $\Pi(p)$ passe par toutes les valeurs depuis zero qui repond à $p = \infty$, jusqu'à $\Pi(p) =$ un angle droit, pour $p = o$. (Geometrische Untersuchungen § 23) Pour donner à la fonction $\Pi(p)$ une valeur analytique plus générale j'adopte, que la valeur de cette fonction pour p negatif, cas auquel la définition primitive ne s'étend pas, est fixé par l'équation suivante

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi$$

ainsi pour tout angle $A > o$ et $< \pi$ on pourra trouver une ligne p telle que $\Pi(p) = A$, où la ligne p sera positive si $A < \frac{\pi}{2}$. Reciproquement il existe pour toute ligne p un angle A tel que $A = \Pi(p)$. J'appelle cercle limite le cercle dont le rayon est infini, il pourra être tracé par approximation en en construisant de la manière suivante, autant de points qu'on voudra. Prenons un point sur une droite indéfinie, nommons ce point sommet et cette droite axe du cercle limite, construisons un angle $A > o$ et $< \frac{\pi}{2}$, dont le sommet coïncide avec le sommet du cercle limite, et dont l'axe soit un des côtés, soit enfin a la ligne qui donne $\Pi(a) = A$ et construisons sur le second coté de l'angle, à partir du sommet une droite $2a$, le point qui termine cette droite se trouvera sur le cercle limite; pour continner le tracé du cercle limite de l'autre côté de l'axe il faudra répéter cette construction de ce côté. Il s'ensuit que toutes les droites parallèles à l'axe du cercle limite peuvent être prises pour axes. La révolution du cercle limite autour d'un de ses axes produit une surface que je nomme sphère limite, surface qui est par consequence la limite de laquelle la sphère s'approche si le rayon croit à l'infini. Nous nommerons l'axe de revolution, et par consequence aussi toutes les droites parallèles à l'axe de révolution, axes de la sphère limite et plan diamétral tout plan qui contient un ou plusieures axes de la sphère limite. Les intersections de la sphère limite par ses plans diamétraux sont des cercles limites. Une partie de la surface de la sphère limite, limitée par trois arcs de cercle limite sera nommée triangle sphérique limite, les arcs de cercle limite seront appelés les côtés et les angles dièdres entre les plans des ces arcs angles du triangle sphérique limite. Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles. (Geometrische Untersuchungen § 25). Il s'ensuit que tous les axes du cercle limite et de la sphère limite sont parallèles entre eux. Si trois plans se coupent deux à deux en trois droites parallèles et si l'on limite chaque plan à la partie qui est située entre ces parallèles la somme des trois angles dièdres que ces plans formeront sera égale à deux angles droits (Geometrische Untersuchungen § 28). Il suit de ce théorème que la somme des angles de tout triangle sphérique limite est égale à deux angles droits, et tout ce qu'on démontre dans la géométrie ordinaire de la proportionalité des côtés des triangles rectilignes peut par consequence être démontré de la même manière dans la Pangéométrie des triangles sphériques limites, en remplaçant seulement les droites parallèles à l'un des côtés du triangle rectiligne par des arcs de cercle limite menés par des points d'un des cotés du triangle sphérique limite et faisant tous le même angle avec ce côté. Ainsi par exemple si p, q, r sont les côtés d'un triangle sphérique limite rectangle et $P, Q, \frac{\pi}{2}$ les angles opposés à ces côtés il faut adopter, de même que pour les triangles rectilignes rectangles dans la géométrie ordinaire les équations suivantes

$$p = r \sin P = r \cos Q$$
$$q = r \cos P = r \sin Q$$
$$P + Q = \frac{\pi}{2}.$$

Dans la géométrie ordinaire on démontre que la distance de deux droites parallèles est constante.

Dans la Pangéométrie au contraire la distance p d'un point d'une droite à la droite parallèle diminue du coté du parallèlisme, c'est à dire du côté vers lequel est tourné l'angle de parallèlisme $\Pi(p)$.

Maintenant soient s, s', s''..... une serie d'arcs de cercle limite compris entre deux droites parallèles, qui servent d'axes à tous ces cercles limites, et supposons que les parties de chaque parallèle comprises entre deux arcs consecutifs soient toutes égales entre elles et égales à x, nommons E le rapport de s à s'

$$\frac{s}{s'} = E$$

où E est un nombre plus grand que l'unité.

Supposons d'abord que $E = \frac{n}{m}$, m, n etant deux nombres entiers, divisons l'arc s en m parties égales. Par les points de division menons des droites parallèles à l'axe des cercles limites, ces parallèles diviseront chacun des arcs s', s'' etc. en m parties égales entre elles. Soit AB la première partie de s, $A'B'$ la première partie de s', $A''B''$ la première partie de s'' etc. $A, A' A''$.... les points situées sur l'une des parallèles données et posons $A'B'$ sur AB de manière que A et A' coincident et que $A'B'$ tombe sur AB. Répétons cette superposition n fois de suite. Puisque par supposition $\frac{s}{s'} = \frac{n}{m'}$ il faudra que $nA'B' = mAB$ et que par consequence la seconde extremité de $A'B'$ coincide après la n^{ieme} superposition, avec la seconde extremité de s, qui sera divisé en n parties égales; $s' s''$.... seront aussi divisé en en m parties égales chacun par les droites parallèles aux deux parallèles données. Mais si l'on imagine, qu'en faisant la superposition indiquée ci dessus $A'B'$ emporte la partie du plan limité par cet arc et les deux parallèles menées par les extremités il est clair qu'en même temps que n fois $A'B'$ couvre tout l'arc s, $nA''B''$ couvrira tout l'arc s' et ainsi de suite parceque dans ce cas les parallèles doivent coïncider dans toute leur étendue de sorte que l'on aura

$$nA''B'' = mA'B'$$

ou ce qui est la même chose

$$\frac{s'}{s''} = \frac{n}{m} = E; \; \frac{s'}{s''} = E \text{ etc.}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour démontrer la même chose dans le cas que E est un nombre incommensurable, on pourra employer une des méthodes usitées pour des cas semblables dans la géométrie ordinaire; j'omets ces détails pour abréger. Ainsi

$$\frac{s}{s'} = \frac{s'}{s''} = \frac{s''}{s'''} \ldots\ldots\ldots = E$$

Après quoi il n'est pas difficile de conclure que

$$s' = s\,E^{-x}$$

où E est la valeur de $\frac{s}{s'}$ pour x, distance entre les arcs s, s' égale à l'unité.

Il faut remarquer que ce rapport E ne dépend pas de la longueur de l'arc s, et reste le même si les deux droites parallèles données s' éloignent ou se rapprochent l'une de l'autre. Le nombre E, qui est nécessairement plus grand que l'unité, ne dépend que de l'unité de longueur, qui est la distance entre deux arcs consecutifs et qui reste complètement arbitraire. La propriété que nous venons de démontrer par rapport aux arcs $s, s', s'' \ldots$, subsiste pour les aires. $P, P', P'' \ldots$, limitées par deux arcs consecutifs et les deux parallèles. On a donc.

$$P' = P\,E^{-x}$$

Si nous réunissons n aires semblables $P, P', P'' \ldots\; P^{(n-1)}$ la somme sera

$$P.\frac{1 - E^{-nx}}{1 - E^{-x}}$$

Pour $n = \infty$ cette expression donne l'aire de la partie du plan entre deux droites parallèles, limitée d'un côté par l'arc s, et illimitée du coté du parallèlisme, et la valeur de cette aire sera

$$\frac{P}{1 - E^{-x}}$$

Si nous choisissons pour unité des aires l'aire P qui répond à un arc s égal aussi à l'unité et à $x = 1$ elle deviendera généralement pour un arc s quelconque

$$\frac{E\,s}{E - 1.}$$

Dans la géométrie ordinaire le rapport désigné par E est constant et égal à l'unité; il s'ensuit que dans la géométrie ordinaire deux droites parallèles sont par-tout équidistantes et que l'aire de la partie du plan située entre deux droites parallèles et limitée d'un côté seulement par une perpendiculaire commune à elles, est infinie.

Considérons à présent un triangle rectiligne rectangle dont a, b, c soient les côtés et A, B, $\frac{\pi}{2}$ les angles opposés à ces côtés. Les angles A, B peuvent être pris pour des angles de parallélisme $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, correspondant à des droites de longueur α, β, positives. Convenons encore de désigner dorénavant par une lettre avec un accent une droite dont la longueur correspond à un angle de parallélisme qui est le complément à un angle droit de l'angle de parallélisme, correspondant à la droite dont la longueur est désignée par la même lettre sans accent, de manière à avoir toujours

$$\Pi(\alpha) + \Pi(\alpha') = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Pi(b) + \Pi(b') = \frac{1}{2}\pi$$

Désignons par $f(a)$ la partie d'une parallèle à un axe de cercle limite interceptée entre la perpendiculaire à l'axe menée par le sommet du cercle limite et le cercle limite lui même si cette parallèle passe par un point de la perpendiculaire dont la distance au sommet est a et soit enfin $L(a)$ la longueur de l'arc depuis le sommet jusqu'à cette parallèle.

Dans la géométrie ordinaire on a

$$f(a) = o$$
$$L(a) = a$$

pour toute ligne a.

Menons une perpendiculaire AA' au plan du triangle rectangle dont les côtés ont été désignés a, b, c, perpendiculaire qui passe par le sommet A de l'angle $\Pi(\alpha)$. Faisons passer par cette perpendiculaire deux plans dont l'un, que nous appellerons le premier plan, passe aussi par le côté b, et l'autre, le second plan par le côté c. Construisons dans le second plan la droite BB' parallèle à AA' qui passe par le sommet B de l'angle $\Pi(\beta)$ et faisons passer un troisième plan par BB' et le côté a du triangle. Ce troisième plan coupera le premier en une droite CC' parallèle à AA'. Concevons maintenant une sphère décrite du point B comme centre avec un rayon arbitraire mais plus petit que a, sphère qui coupera conséquemment les deux côtés a, c du triangle et la droite BB' en trois points, que nous nommerons. le premier n; le second m, et le troisième k. Les arcs de grands cercles, intersections de cette sphère par les trois plans passant par B, cercles qui reunissent deux à deux les points n, m, k, formeront un triangle sphérique rectangle en m, dont les côtés seront $mn = \Pi(\beta)$, $km = \Pi(c)$, $kn = \Pi(a)$. L'angle sphérique $knm = \Pi(b)$ et l'angle kmn sera droit. Les trois droites étant parallèles entre elles la somme des trois angles dièdres, que les parties des plans $AA'BB'$, $AA'CC'$, $BB'CC'$ situées entre les droites AA', BB', CC' forment entre elles, sera égal à deux droits. Il s'ensuit que le troisième angle du triangle sphérique sera $mkn = \Pi(\alpha')$. On voit donc qu'à tout triangle rectiligne rectangle dont les côtés sont a, b, c et les angles opposés $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{\pi}{2}$ correspond un triangle sphérique rectangle dont les côtés sont $\Pi(\beta)$, $\Pi(c)$, $\Pi(a)$ et les angles opposés $\Pi(\alpha')$, $\Pi(b)$, $\frac{\pi}{2}$. Construisons un autre triangle rectiligne rectangle dont les cotés perpendiculaires entre eux soient α', a, dont l'hypotenuse soit g, dont $\Pi(\lambda)$ soit l'angle opposé au coté a et $\Pi(\mu)$ l'angle opposé au côté α'. Passons de ce triangle au triangle sphérique qui lui correspond de la même manière que le triangle sphérique kmn correspond au triangle ABC. Les côtés de ce triangle sphérique seront conséquemment

$$\Pi(\mu),\ \Pi(g),\ \Pi(a)$$

et les angles opposés

$$\Pi(\lambda'),\ \Pi(\alpha'),\ \frac{\pi}{2}$$

et il aura ses parties égales aux parties correspondantes du triangle sphérique $k\,m\,n$, car les côtés de ce dernier étaient

$$\Pi(c)\ \ \Pi(\beta)\ \ \Pi(a)$$

et les angles opposés

$$\Pi(b),\ \Pi(\alpha'),\ \frac{\pi}{2}$$

ce qui montre, que ces triangles sphériques ont leurs hypotenuses égales et un angle adjacent égal.

Il s'ensuit que

$$\mu = c;\ g = \beta;\ b = \lambda'$$

et ainsi l'existence d'un triangle rectiligne rectangle avec les côtés

$$a \quad b \quad c \quad \text{et les angles opposés}$$

$$\Pi(\alpha)\ \ \Pi(\beta)\ \ \frac{\pi}{2}$$

suppose l'existence d'un autre triangle rectiligne rectangle avec les côtés

$$a \quad \alpha' \quad \beta \quad \text{et les angles opposés}$$

$$\Pi(b')\ \ \Pi(c)\ \ \frac{\pi}{2}.$$

On exprime la même chose en disant, que si

$$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta$$

sont les parties d'un triangle rectiligne rectangle

$$a,\ \alpha'\ \beta,\ b'\ c$$

seront les parties correspondantes d'un autre triangle rectiligne rectangle. Si nous construisons une sphère limite, dont la perpendiculaire AA' au plan du triangle rectiligne rectangle donné soit un axe et dont le point A soit le sommet, nous aurons un triangle situé sur la sphère limite et produit par son intersection avec les trois plans conduits par les trois côtés du triangle donné. Désignons les trois côtés de ce triangle sphérique limite par p, q, r de manière que p soit l'intersection de la sphère limite par le plan qui passe par a, q l'intersection de la sphère par le plan qui passe par b, r l'intersection de la sphère limite par le plan qui passe par c; les angles opposés à ces côtés seront: $\Pi(\alpha)$ opposé à p, $\Pi(\alpha')$ opposé à q et un angle droit opposé à r, D'après les conventions adoptés ci dessus $q = L(b)$ $r = L(c)$. La sphère limite coupera la droite CC' en un point, dont la distance à C sera, d'après ces mêmes conventions, $f(b)$; de la même manière nous aurons $f(c)$ pour la distance du point d'intersection de la sphère limite avec la droite BB' au point B.

Il est facile à voir qu'on aura

$$f(b) + f(a) = f(c)$$

Dans le triangle dont les côtés sont les arcs de cercle limite p, q, r nous aurons

$$p = r \sin \Pi(\alpha)\,;\ q = r \cos \Pi(\alpha)$$

En multipliant la première de ces deux équations par $E^{f(b)}$ il viendra

$$p\,E^{f(b)} = r \sin \Pi(\alpha).\ E^{f(b)}.$$

Mais

$$p\,E^{f(b)} = L(a)$$

et par conséquence

$$L(a) = r \sin \Pi(\alpha).\ E^{f(b)}$$

De la même manière on a

$$L(b) = r \sin \Pi(\beta)\, E^{f(a)}$$

En même temps $q = r \cos \Pi(\alpha)$, ou ce qui est la même chose $L(b) = r \cos \Pi(\alpha)$. La comparaison des deux valeurs de $L(b)$ donne l'équation

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta).\ E^{f(a)} \qquad (1)$$

èç

En substituant b' à α et c à β sans changer a, ce qui est permis d'après ce qui a été démontré plus haut, nous aurons.

$$\cos \Pi(b') = \sin \Pi(c).\ E^{f(a)}$$

ou puisque
$$\Pi(b) + \Pi(b') = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c)\ E^{f(a)}$$

De la même manière on doit avoir

$$\sin \Pi(a) = \sin \Pi(c)\ E^{f(b)}$$

Multiplions la dernière equation par $E^{f(a)}$ et substituons $f(c)$ à la place de $f(b) + f(a)$; cela donnera

$$\sin \Pi(a)\ E^{f(a)} = \sin \Pi(c)\ E^{f(c)}$$

Mais comme dans un triangle rectiligne rectangle les côtés perpendiculaires peuvent varier de manière à laisser l'hypothenuse constante, nous pouvons poser dans cette équation $a = o$ sans changer c, cela donnera, en remarquant que $f(o) = o$ et $\Pi(o) = \frac{\pi}{2}$,

$$1 = \sin \Pi(c)\ E^{f(c)} \qquad \text{ou}$$

$$E^{f(c)} = \frac{1}{\sin \Pi(c)}$$

pour toute ligne c.

Prenons maintenant l'équation (1)

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta)\ E^{f(a)}$$

et substituons y $\frac{1}{\sin \Pi(a)}$ à la place de $E^{f(a)}$, elle prendra la forme suivante

$$\cos \Pi(\alpha) \sin \Pi(a) = \sin \Pi(\beta) \tag{2}$$

En y changeant α, β, en b', c, sans changer a, nous trouvons

$$\sin \Pi(b) \sin \Pi(a) = \sin \Pi(c)$$

L'équation (2) donne en y changeant les lettres

$$\cos \Pi(\beta) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(\alpha)$$

Si nous changeons dans cette équation β, b, α en c, α', b' il viendra

$$\cos \Pi(c) \cos \Pi(\alpha) = \cos \Pi(b) \tag{3}$$

De la même manière nous aurons

$$\cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta) = \cos \Pi(a) \tag{4}$$

Les équations (2), (3), (4) se rapportent à un triangle sphérique rectangle, dont nous désignerons dans la suite les cótés par a, b, c et les angles A, B opposés aux cótés a, b et $\frac{\pi}{2}$ opposé à c. Dans les équations citées nous pouvons mettre a à la place de $\Pi(\beta)$, b à la place de $\Pi(c)$, c à la place de $\Pi(a)$, $\frac{\pi}{2} - A$ à la place $\Pi(\alpha)$, B à la place de $\Pi(b)$ de cette manière les équations citées deviennent.

$$\begin{aligned} \sin A \sin c &= \sin a. \\ \cos b \sin A &= \cos B. \\ \cos a \cos b &= \cos c. \end{aligned} \tag{5}$$

Les équations (5) se rapportent à un triangle sphérique rectangle, tel qu'il peut être déduit d'un triangle rectiligne rectangle, et dont les cotés ne peuvent par consequence surpasser $\frac{\pi}{2}$. Ajoutons que, si nous menons un arc de grand cercle par le sommet de l'angle A perpendiculairement au cóté b, cet arc coupera l'arc a ou son prolongement de manière que chacun des arcs, depuis le point d'intersection jusqu'à b sera $= \frac{\pi}{2}$ et l'angle de ces arcs sera b. Après cela il n'est pas difficile de conclure, que dans triangle sphérique rectangle si

$$c < \frac{\pi}{2} \text{ on devra avoir } a < \frac{\pi}{2};\ A < \frac{\pi}{2}$$

si $$c = \frac{\pi}{2} \text{ on devra avoir } a = \frac{\pi}{2};\ A = \frac{\pi}{2}$$

enfin si $$c > \frac{\pi}{2} \text{ on devra avoir } a > \frac{\pi}{2};\ A > \frac{\pi}{2}$$

Il s'ensuit que si nous supposons $a > \frac{\pi}{2}$, il faudra supposer en même temps $c > \frac{\pi}{2}$; $A > \frac{\pi}{2}$. Si nous prolongeons dans ce cas les cotés a, c au délà du coté b jusqu'à leur point d'intersection nous aurons un autre triangle sphérique rectangle dont les cótés seront $\pi - a$, b, $\pi - c$ et les angles opposés $\pi - A$, B, $\frac{\pi}{2}$, c'est à dire un triangle auquel les équations (5) seront applicables. Mais les équations (5) ne changent pas de forme si l'on y substitue $(\pi - a)$ à a,

$(\pi - c)$ à c et $(\pi - A)$ à A, ce qui démontre que les équations (5) s'appliquent à tout triangle sphérique rectangle.

Passons à un triangle sphérique quelconque, dont les côtés soient a, b, c et les angles opposés A, B, C sans supposer qu'un des angles soit droit, parceque les équations (5) sont démontrées pour ce cas là.

Abaissons du sommet de l'angle C un arc de grand cercle p perpendiculaire au coté c. Il peut y avoir les cas suivants: ou la perpendiculaire p tombe dans l'interieur du triangle, divise l'angle C en deux parties $D, C - D$, et le côté c en deux parties, x opposé à D, et $c - x$ opposé à $C - D$, ou cette perpendiculaire tombe hors du triangle et ajoute un angle D à l'angle C et un arc x au côté c.

Dans le premier cas le triangle sphérique donné sera la somme de deux triangles sphériques rectangles. Les côtés d'un de ces triangles seront p, x, a les angles opposés $B, D, \frac{\pi}{2}$; dans l'autre les côtés seront $p, c - x, b$ les angles opposés $A, C - D, \frac{\pi}{2}$. L'application des équations (5) au premier triangle donne

$$\left.\begin{aligned} \sin p &= \sin a \sin B \\ \sin x &= \sin a \sin D \\ \cos p \sin D &= \cos B \\ \cos x \sin B &= \cos D \\ \cos a &= \cos p \cos x. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Le second triangle fournit de la même manière

$$\left.\begin{aligned} \sin p &= \sin b \sin A \\ \sin (c - x) &= \sin b \sin (C - D) \\ \cos p \sin (C - D) &= \cos A \\ \cos p \cos (c - x) &= \cos b. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

La comparaison des deux valeur de $\sin p$ en (A), (B) donne ensuite

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A \qquad (6)$$

La dernière des équations (B) étant divisée par la dernière des équations (A) donne

$$\tan x = \frac{\cos b}{\cos a \cos c} - \cot c$$

mais la combinaison de la seconde, de la troisième et de la dernière des équations (A) donne

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} a \cos B.$$

La comparaison de ces deux valeurs de $\operatorname{tang} x$ nous conduit à l'équation suivante

$$\cos b - \cos a \cos c = \sin a \sin c \cos B \tag{7}$$

Si la perpendiculaire p tombe hors du triangle et ajoute l'arc x, à l'arc c, et l'angle D à l'angle C il se formera de même deux triangles sphériques rectangles. Les côtés de l'un de ces deux triangles seront p, x, a et les angles opposés $\pi - B, D, \frac{\pi}{2}$, les côtés de l'autre seront $p, c + x, b$ les angles opposés $A, C + D, \frac{\pi}{2}$.

L'application des équations (5) au premier triangle donne

$$\left.\begin{aligned} \sin p &= \sin a \sin B \\ \sin x &= \sin a \sin D \\ -\cos B &= \cos p \sin D \\ \cos D &= \cos x \sin B \\ \cos a &= \cos p \cos x. \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

le second triangle, dont $p, c + x, b$ sont les côtés et $A, C + D, \frac{\pi}{2}$ les angles opposés, fournit de la même manière

$$\begin{aligned} &\sin p = \sin b \sin A \\ &\sin (c + x) = \sin b \sin (C + D) \\ &\cos A = \cos p \sin (C + D) \\ &\cos (C + D) = \cos (c + x) \sin A \\ &\cos b = \cos p \cos (c + x). \end{aligned} \tag{D}$$

La comparaison des deux valeurs de $\sin p$ en (C), (D) donne de nouveau l'équation (6); nous tirons des équations (C), (D)

$$\operatorname{tang} x \operatorname{cotg} c - \frac{\cos b}{\cos a \cos c}$$

et des équations (C)

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} a \cos B.$$

La comparaison de ces deux valeurs de $\operatorname{tang} x$ nous mene de nouveau à l'équat. (7) qui est ainsi démontrée de même que l'équation (6) l'a été ci dessus pour tous les triangles sphériques en général.

L'équation (7) donne par des changemens de lettres les deux suivantes

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos c - \cos a \cos b = \sin a \sin b \cos C.$$

En multipliant la dernière par $\cos b$, en ajoutant le produit à la première et en divisant la somme par $\sin b$

$$\cos a \sin b = \sin c \cos A + \sin a \cos b \cos C;$$

en y substituant à la place de $\sin c$ sa valeur

$$\sin c = \frac{\sin C}{\sin A} \sin a$$

conformément à l'équat. (6) et en divisant ensuite par $\sin a$ il viendra

$$\operatorname{cotang} a \sin b = \operatorname{cotang} A \sin C + \cos b \cos C. \qquad (8)$$

En y remplaçant $\sin b$ par sa valeur

$$\sin a \frac{\sin B}{\sin A},$$

et en multipliant ensuite l'équation par $\sin A$, il vient:

$$\cos a \sin B = \cos b \cos C \sin A + \sin C \cos A$$

d'où nous tirons par un changement de lettres

$$\cos b \sin A = \cos a \cos C \sin B + \sin C \cos B.$$

L'élimination de $\cos b$ des deux dernières équations nous conduit à l'équation suivante.

$$\cos a \sin B \sin C = \cos B \cos C + \cos A \qquad (9)$$

Les équations (6), (7), (8), (9) sont les mêmes qu'on donne ordinairement dans la trigonométrie sphérique et qu'on démontre à l'aide de la géométrie ordinaire.

Il suit de ce qui précède que la trigonométrie sphérique reste la même, soit qu'on adopte la supposition que la somme des trois angles de tout triangle rectiligne est égale à deux angles droits, soit qu'on adopte la supposition contraire que cette somme est toujours moindre que 2 droits; ce qui est très remarquable et n'a pas lieu pour la trigonométrie rectiligne. Avant que de démontrer les équations qui expriment, dans la Pangéométrie, les rélations entre les côtés et les angles de tout triangle rectiligne, nous allons chercher pour toute ligne x la forme de la fonction que nous avons désigné jusqu'à présent par $\Pi(x)$. Considérons pour cela un triangle rectiligne rectangle, dont les côtés sont a, b, c et les angles opposés $\Pi(\alpha), \Pi(\beta), \frac{\pi}{2}$; prolongeons c au de là du sommet de l'angle $\Pi(\beta)$

et faisons le prolongement égal à β. La perpendiculaire à β, élevée à l'extrémité de cette ligne et du côté de l'angle opposé par le sommet à $\Pi(\beta)$ sera parallèle à a et à son prolongement au delà du sommet de $\Pi(\beta)$. Menons encore par le sommet de $\Pi(\alpha)$ une droite parallèle à ce même prolongement de a.

L'angle que cette droite fera avec c sera $\Pi(c+\beta)$ et l'angle qu'elle fera avec b sera $\Pi(b)$ et on aura l'équation

$$\Pi(b) = \Pi(c+\beta) + \Pi(\alpha) \qquad (\Pi)$$

Si nous prenons la longueur β à partir du sommet de l'angle $\Pi(\beta)$ sur le côté c lui même et que nous élevons à l'extrémité de β une perpendiculaire à β du côté de l'angle $\Pi(\beta)$, cette droite sera parallèle au prolongement de a au delà du sommet de l'angle droit. Menons par le sommet de l'angle $\Pi(\alpha)$ une droite parallèle à cette dernière perpendiculaire, qui sera conséquemment aussi parallèle au second prolongement de a. L'angle de cette parallèle avec c sera dans tous les cas $\Pi(c-\beta)$ et l'angle qu'elle fait avec b sera $\Pi(b)$, par conséquent

$$\Pi(b) = \Pi(c-\beta) - \Pi(\alpha) \qquad (\Pi')$$

Il est facile de se convaincre que cette équation est vraie non seulement si $c > \beta$, mais aussi si $c = \beta$ et si $c < \beta$. En effet si $c = \beta$, on a d'un côté $\Pi(c-\beta) = \Pi(o) = \frac{\pi}{2}$, de l'autre côté la perpendiculaire à c menée par le sommet de l'angle $\Pi(\alpha)$ devient parallèle à a d'où il suit que $\Pi(b) = \frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha)$, ce qui s'accorde avec notre équation.

Si $c < \beta$ l'extrémité de la ligne β tombera au delà du sommet de l'angle $\Pi(\alpha)$ à une distance égale à $\beta - c$. La perpendiculaire à β à cette extrémité de β sera parallèle à a et à la droite menée par le sommet de l'angle $\Pi(\alpha)$ parallèlement à a, d'où il suit que les deux angles adjacents que cette parallèle fait avec c seront, l'aigu égal à $\Pi(\beta - c)$, l'obtus égal a $\Pi(\alpha) + \Pi(b)$. Mais la somme de deux angles adjacents est toujours égale à deux droits ainsi

$$\Pi(\beta - c) + \Pi(\alpha) + \Pi(b) = \pi$$

ou

$$\Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) - \Pi(\alpha)$$

Mais d'après la définition de la fonction $\Pi(x)$

$$\pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c - \beta)$$

ce qui donne

$$\Pi(b) = \Pi(c-\beta) - \Pi(\alpha)$$

c'est à dire l'équation trouvée plus haut, qui est ainsi démontrée pour tous les cas.

Les deux équations (Π), (Π') peuvent être remplacées par les deux suivantes

$$\Pi(b) = \tfrac{1}{2}\,\Pi(c+\beta) + \tfrac{1}{2}\,\Pi(c-\beta)$$
$$\Pi(\alpha) = \tfrac{1}{2}\,\Pi(c-\beta) - \tfrac{1}{2}\,\Pi(c+\beta)$$

Mais l'équation (3) nous donne

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(\alpha)};$$

en substituant dans cette équation à la place de $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha)$ leurs valeurs, il vient

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\left\{\tfrac{1}{2}\,\Pi(c+\beta) + \tfrac{1}{2}\,\Pi(c-\beta)\right\}}{\cos\left\{\tfrac{1}{2}\,\Pi(c-\beta) - \tfrac{1}{2}\,\Pi(c+\beta)\right\}}$$

De cette équation nous déduisons la suivante

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\,\Pi(c) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,\Pi(c-\beta)\,\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,\Pi(c+\beta)$$

Les lignes c et β pouvant varier indépendemment l'une de l'autre dans tout triangle rectiligne rectangle, nous pouvons poser successivement dans la dernière équation $c=\beta$, $c=2\beta, \ldots\, c=n\beta$, et nous concluons des équations ainsi déduites, qu'en général pour *toute ligne c et pour tout nombre entier positif n*

$$\operatorname{tang}^n \tfrac{1}{2}\,\Pi(c) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,\Pi(nc)$$

Il est facile de démontrer la vérité de cette équation pour n négatif ou fractionnaire, d'où il suit, qu'en choisissant l'unité de longueur telle qu'on ait

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,\Pi(1) = e^{-1}$$

où e est la base des logarithmes Népériens, on aura pour toute ligne x

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\,\Pi(x) = e^{-x}$$

Cette expression donne $\Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ pour $x=o$ et $\Pi(x)=o$ pour $x=\infty$, $\Pi(x)=\pi$ pour $x=-\infty$ conformément à ce que nous avons adopté et démontré plus haut.

La valeur trouvée pour $\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\,\Pi(x)$ donne pour toute ligne x.

$$\sin\Pi(x) = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$$

$$\cos\Pi(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

et pour deux lignes arbitraires, x, y

$$\sin \Pi (x+y) = \frac{\sin \Pi (x) \sin \Pi (y)}{1 + \cos \Pi (x) \cos \Pi (y)}$$

$$\sin \Pi (x-y) = \frac{\sin \Pi (x) \sin \Pi (y)}{1 - \cos \Pi (x) \cos \Pi (y)}$$

$$\cos \Pi (x+y) = \frac{\cos \Pi (x) + \cos \Pi (y)}{1 + \cos \Pi (x) \cos \Pi (y)}$$

$$\cos \Pi (x-y) = \frac{\cos \Pi (x) - \cos \Pi (y)}{1 - \cos \Pi (x) \cos \Pi (y)}$$

$$\operatorname{tang} \Pi (x+y) = \frac{\sin \Pi (x) \sin \Pi (y)}{\cos \Pi (x) + \cos \Pi (y)}.$$

Les équations (2), (3), (4) que nous avons trouvées pour un triangle sphérique rectangle se rapportent aussi à un triangle rectiligne rectangle dont les côtés sont a, b, c et les angles opposés $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ et $\frac{\pi}{2}$. Donc en remplaçant $\Pi(\alpha)$ par A, $\Pi(\beta)$ par B nous aurons pour tout triangle rectiligne rectangle, dont les côtés sont a, b, c et où A est l'angle opposé à a, B opposé à b et $\frac{\pi}{2}$ opposé à c, les équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} \sin \Pi (a) \cos A = \sin B \\ \sin \Pi (c) \cos A = \cos \Pi (b) \\ \cos \Pi (c) \cos B = \cos \Pi (a) \end{array}\right\} \qquad (10)$$

A ces équations nous ajoutons encore l'équation que voici et qui a été aussi démontrée plus haut

$$\sin \Pi (a) \sin \Pi (b) = \sin \Pi (c) \qquad (11)$$

La première des équations (10) peut, en y échangeant les lettres entre elles, être écrite ainsi

$$\sin \Pi (b) \cos B = \sin A.$$

en y substituant la valeur de $\cos B$, tirée de la troisième des équations (10) il vient

$$\sin \Pi (b) \cos \Pi (a) = \sin A \cos \Pi (c)$$

en éliminant de cette équation $\sin \Pi (b)$ au moyen de l'équation (11) nous aurons

$$\operatorname{tang} \Pi (c) = \sin A \operatorname{tang} \Pi (a). \qquad (12)$$

Soient maintenant a, b, c les côtés d'un triangle rectiligne quelquonque et A, B, C les angles opposés à ces côtés. Abaissons du sommet de l'angle C une perpendiculaire p sur le côté c. Si p tombe dans l'interieur du triangle, de manière à diviser l'angle C en deux angles D et $C - D$ et le côté c en deux parties, x opposé à D, $c - x$ opposé à $C - D$, il se formera deux triangles rectilignes rectangles. Les côtés de l'un des ces triangles seront p, x, b, les angles opposés $A, D, \frac{\pi}{2}$, les côtés de l'autre seront p, $c - x$, a et les angles opposés $B, C - D, \frac{\pi}{2}$.

L'application de l'équation (12) au premier de ces triangles donne

$$\operatorname{tang} \Pi(b) = \sin A \operatorname{tang} \Pi(p)$$

du second de ces triangles nous tirons de la même manière

$$\operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(p)$$

d'où nous concluons

$$\sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b). \tag{13}$$

L'application des équations (10) et (11) au premier triangle fournit

$$\cos \Pi(b) \cos A = \cos \Pi(x)$$

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(p) = \sin \Pi(b)$$

le second triangle donne

$$\sin \Pi(p) \sin \Pi(c - x) = \sin \Pi(a).$$

En substituant dans cette dernière équation au lieu de $\sin \Pi(c - x)$ sa valeur tirée de la formule générale trouvée plus haut pour $\sin \Pi(x - y)$, il vient

$$\frac{\sin \Pi(a)}{\sin \Pi(p)} = \frac{\sin \Pi(c) \sin \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)}$$

d'où nous déduisons en substituant

$$\sin \Pi(p) = \frac{\sin \Pi(b)}{\sin \Pi(x)}$$

$$\cos \Pi(x) = \cos \Pi(b) \cos A$$

l'équation suivante

$$1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A = \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} \qquad (14$$

Les équations (13), (14) se vérifient d'elles mêmes si $A = \frac{\pi}{2}$ où la perpendiculaire p se confond avec le côté b, car dans ce cas l'équation (13) se réduit à l'équation (12) et l'équation (14) à l'équation (11)

çè

équations qui ont été démontrées pour tout triangle rectiligne rectangle. Si la perpendiculaire p tombe hors du triangle sur le prolongement de c, et ajoute une ligne x à la ligne c et un angle D à l'angle C, il se forme deux triangles rectangles, les côtés de l'un sont p, x, b et les angles opposés $(\pi - A), D, \frac{\pi}{2}$, les côtés de l'autre seront $p, c + x, a$ et les angles opposés $B, C + D, \frac{\pi}{2}$.

L'application de l'équation (12) au premier de ces triangles donne

$$\operatorname{tang} \Pi(b) = \sin A \operatorname{tang} \Pi(p).$$

Du second triangle nous tirons de la même manière

$$\operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(p).$$

En éliminant $\operatorname{tang} \Pi(p)$ des deux dernières équations on trouve de nouveau l'équation (13). L'application des équations (13), (11) au premier triangle fournit

$$-\cos \Pi(b) \cos A = \cos \Pi(x)$$

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(x) \sin \Pi(p);$$

du second triangle nous tirons de la même manière

$$\sin \Pi(a) = \sin \Pi(p) \sin \Pi(c + x).$$

En remplaçant dans cette équation $\sin \Pi(c + x)$ par sa valeur tirée de la formule générale trouvée plus haut pour $\sin \Pi(x + y)$, on a

$$\frac{\sin \Pi(a)}{\sin \Pi(p)} = \frac{\sin \Pi(c) \sin \Pi(x)}{1 + \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)}$$

En substituant dans cette équation

$$\sin \Pi(p) = \frac{\sin \Pi(b)}{\sin \Pi(x)}; \quad \cos \Pi(x) = -\cos \Pi(b) \cos A$$

il vient

$$\frac{\sin \Pi(a)}{\sin \Pi(b)} = \frac{\sin \Pi(c)}{1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A}$$

équation identique à l'équation (14).

Les équations (13), (14) sont ainsi démontrées pour tout triangle rectiligne

L'équation (14) donne par un changement de lettres

$$1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(a) \cos B = \frac{\sin \Pi(c) \sin \Pi(a)}{\sin \Pi(b)}$$

çç

En multipliant cette équation membre à membre avec l'équation (14) nous trouvons

$$1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(a) \cos B - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A$$
$$+ \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos^2 \Pi(c) \cos A \cos B = \sin^2 \Pi(c)$$

ou $\cos^2 \Pi(c) - \cos \Pi(c) \cos \Pi(a) \cos B - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A$
$$+ \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos^2 \Pi(c) \cos A \cos B = o.$$

En supprimant dans cette équation le facteur commun $\cos \Pi(c)$ nous avons

$$\cos \Pi(c) + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A \cos B - \cos \Pi(a) \cos B$$
$$- \cos \Pi(b) \cos A = o.$$

De la même manière nous trouvons

$$\cos \Pi(a) + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos B \cos C - \cos \Pi(b) \cos C$$
$$- \cos \Pi(c) \cos B = o.$$

Multiplions cette équation par $\cos A$ et retranchons le produit du produit de l'équation précédente par $\cos C$ nous aurons:

$$\cos \Pi(a) \left\{ \cos A + \cos B \cos C \right\} = \cos \Pi(c) \left\{ \cos C + \cos A \cos B \right\}$$

Élevant les deux membres de cette équation au carré et divisant après par $\cos^2 \Pi(c)$, elle prend la forme suivante

$$\frac{\cos^2 \Pi(a)}{\cos^2 \Pi(c)} \left\{ \cos A + \cos B \cos C \right\}^2 = \left\{ \cos C + \cos A \cos B \right\}^2$$

Mais l'équation (13) donne

$$\frac{1}{\cos^2 \Pi(c)} = 1 + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \operatorname{tang}^2 \Pi(a)$$

Si nous substituons dans l'avant-dernière équation au lieu de $\frac{1}{\cos \Pi(c)}$ sa valeur donnée par la dernière, il vient

$$\cos^2 \Pi(a) + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \sin^2 \Pi(a) = \left\{ \frac{\cos C + \cos B \cos A}{\cos A + \cos B \cos C} \right\}^2$$

et ensuite

$$\sin^2 \Pi(a) \left\{ 1 - \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \right\} = \frac{\sin^2 B (\sin^2 C - \sin^2 A)}{(\cos A + \cos B \cos C)^2}$$

Divisant les deux membres de cette équation par $\sin^2 C - \sin^2 A$ et extrayant la racine carrée il viendra

$$\sin \Pi(a) = \frac{\sin B \sin C}{\cos A + \cos B \cos C}$$

sans ambiguité de signe, parceque les deux membres de la dernière équation sont tous les deux positifs. En effet $\Pi(a) < \frac{\pi}{2}$, $B < \pi$, $C < \pi$, d'où il suit que les sinus de ces angles sont positifs; ensuite

$$\cos A + \cos(B + C) = 2\cos\tfrac{1}{2}(A + B + C)\cos\tfrac{1}{2}(B + C - A)$$

Mais $A + B + C < \pi$, par conséquence

$$\cos\tfrac{1}{2}(A + B + C)$$

sera positif ainsi que

$$\cos\tfrac{1}{2}(B + C - A),$$

en ajoutant à chacun des deux membres de la dernière équation le nombre positif $\sin B \sin C$ nous trouvons

$$\cos A + \cos B \cos C > o$$

Ainsi dans tout triangle rectiligne

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)} \qquad (15)$$

La multiplication de l'équation (14) membre à membre par l'équation suivante, qui en résulte par un changement de lettres

$$1 - \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos C = \frac{\sin \Pi(a) \sin \Pi(b)}{\sin \Pi(c)} \qquad (16)$$

donne

$$\{1 - \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos C\}\ \{1 - \cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A\} = \sin^2\Pi(b)$$

à laquelle on peut après l'exécution de la multiplication indiquée dans le premier membre donner la forme suivante:

$$\cos^2\Pi(b) - \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos C - \cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A$$
$$+ \cos^2\Pi(b)\cos\Pi(a)\cos\Pi(c)\cos A\cos C = o.$$

ou en divisant par $\cos\Pi(b)$

$$\cos\Pi(b) + \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A\cos C - \cos\Pi(a)\cos C$$
$$- \cos\Pi(c)\cos A = o. \qquad (17)$$

Mais nous trouvons d'aprés l'équation (13)

$$\cos\Pi(c) = \frac{\sin\Pi(c)\sin C}{\sin A}\operatorname{cotang}\Pi(a)$$

Dans cette équation nous pouvons substituer à $\sin\Pi(c)$ sa valeur tirée de l'équation (16); après quoi

$$\cos\Pi(c) = \frac{\sin\Pi(b)\cos\Pi(a)\sin C}{\{1 - \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos C\}\sin A.}$$

La substitution de cette valeur de $\cos \Pi(c)$ dans l'équation (17) nous donne

$$\operatorname{cotang} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)} \tag{18}$$

Réunissons les équations (13), (14), (15), (18) qui expriment les dépendances entre les côtés et les angles de tout triangle rectiligne, pour en faciliter l'application

$$\left.\begin{aligned}
&\sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b) \\
&1 - \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) \cos A = \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} \\
&\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)} \\
&\operatorname{cotang} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

A commencer par ces équations la Pangéométrie devient géométrie analytique et forme de cette manière une théorie géométrique complète et distincte. Les équations (19) servent à représenter les lignes courbes par des équations entre les coordonnées de leurs points; à calculer la longueur et les aires des courbes, les surfaces et les volumes des corps, comme je l'ai montré dans les mémoires scientifiques de l'université de Kasan pour l'année 1829.

Il a été remarqué plus haut que la Pangéométrie donne la géométrie ordinaire si nous supposons les lignes infiniment petites. Nous pouvons maintenant vérifier cette assertion.

Pour toute ligne x infiniment petite nous pouvons admettre les valeurs approchées suivantes:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotang} \Pi(x) &= x \\
\sin \Pi(x) &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 \\
\cos \Pi(x) &= x.
\end{aligned}$$

Si nous regardons les côtés du triangle comme des infiniment petits du premier ordre et que nous négligeons les infiniment petits d'un ordre supérieur au second, les équations (19) prendront, après la substitution des valeurs approchées de $\sin \Pi(a)$, $\sin \Pi(b)$ etc. la forme suivante:

$$\begin{aligned}
&b \sin A = a \sin B \\
&a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\
&\cos A + \cos(B + C) = o \\
&a \sin(A + C) = b \sin A.
\end{aligned}$$

Les deux premières de ces équations sont les équations connues de la trigonometrie ordinaire. Les deux dernières donnent

$$A + B + C = \pi.$$

Nommons, pour donner un exemple de la représentation des lignes courbes par des équations entre les coordonnées de leur points, y la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence d'un cercle de rayon r sur un diamètre fixe de ce cercle, et x la partie de ce diamètre entre le centre et le pied de la perpendiculaire y. L'application de l'équation (11) au triangle rectangle dont les côtés sont x, y, r donne

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(r) \tag{20}$$

ce qui est l'équation d'un cercle entre les coordonnées rectangles x, y. Si nous convenons de compter x à partir d'une extrémité du diamètre, l'équation (20) devient

$$\sin \Pi(r - x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(r)$$

ou bien $$2(e^{r} + e^{-r}) = (e^{r-x} + e^{-r+x})(e^{y} + e^{-y});$$

si nous divisons cette équation par e^{r}, et que nous posons après $r = \infty$, nous aurons l'équation suivante, qui est l'équation du cercle limite

$$2 = (e^{y} + e^{-y})e^{-x}$$

ou $$\sin \Pi(y) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \Pi(x).$$

Il suit de la définition du cercle limite que deux axes du cercle menés par les deux extrémités d'une même corde, sont également inclinés sur cette corde, propriété qui pourrait servir de définition au cercle limite et de laquelle on peut aussi déduire l'équation de cette courbe en considérant le triangle dont les côtés sont x, y et la corde $2a$ du cercle limite; les angles de ce triangle seront $\Pi(a) - \Pi(y)$ opposé à x, $\Pi(a)$ opposé à y et $\frac{\pi}{2}$ opposé à $2a$. Conformément aux équations (10), (11) on a dans ce triangle

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(2a)$$
$$\sin \Pi(x) \cos \left\{ \Pi(a) - \Pi(y) \right\} = \sin \Pi(a)$$
$$\sin \Pi(y) \cos \Pi(a) = \sin \left\{ \Pi(a) - \Pi(y) \right\}.$$

La dernière équation donne

$$2 \operatorname{tang} \Pi(y) = \operatorname{tang} \Pi(a) \tag{21}$$

et la première peut être écrite ainsi

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \frac{\sin^2 \Pi(a)}{1 + \cos^2 \Pi(a)}$$

En substituant dans cette équation au lieu de $\sin^2 \Pi(a)$, $1 + \cos^2 \Pi(a)$ leurs valeurs en $\tang^2 \Pi(a)$ et en introduisant la valeur de $\tang^2 \Pi(a)$ tirée de l'équation (21) il vient

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \frac{2 \tang^2 \Pi(y)}{1 + 2 \tang^2 \Pi(y)}$$

et ensuite

$$\sin \Pi(x) = \frac{2 \sin \Pi(y)}{1 + \sin^2 \Pi(y)}$$

d'où nous déduisons

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} \Pi(x') = \frac{\{ 1 + \sin \Pi(y) \}^2}{1 + \sin^2 \Pi(y)}$$

$$2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \Pi(x') = \frac{\{ 1 - \sin \Pi(y) \}^2}{1 + \sin^2 \Pi(y)}$$

En divisant la dernière de ces équations par l'avant-dernière et extrayant la racine carrée, nous aurons

$$\tang \tfrac{1}{2} \Pi(x') = \frac{1 - \sin \Pi(y)}{1 + \sin \Pi(y)}$$

d'où $$\sin \Pi(y) = \frac{1 - \tang \tfrac{1}{2} \Pi(x')}{1 + \tang \tfrac{1}{2} \Pi(x')}$$

Le second membre de cette équation peut prendre la forme suivante:

$$\frac{\cos \tfrac{1}{2} \Pi(x') - \sin \tfrac{1}{2} \Pi(x')}{\cos \tfrac{1}{2} \Pi(x') + \sin \tfrac{1}{2} \Pi(x')}$$

ou $$\frac{\sin \{ \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2} \Pi(x') \}}{\cos \{ \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2} \Pi(x') \}} = \frac{\sin \tfrac{1}{2} \Pi(x)}{\mathrm{sos}\, \tfrac{1}{2} \Pi(x)} = \tang \tfrac{1}{2} \Pi(x)$$

et par conséquence

$$\sin \Pi(y) = \tang \tfrac{1}{2} \Pi(x)$$

comme nous avons trouvé plus haut.

Pour donner un exemple de la rectification des courbes, cherchons l'expression de la longueur d'une circonférence de cercle de rayon r. Menons deux rayons, dont l'angle an centre soit $\frac{2\pi}{n}$, où n désigne un nombre entier. Abaissons de l'extrémité d'un de ces deux rayons une perpendiculaire p sur l'autre. Le produit np différera d'autant moins de la longueur de la circonférence du cercle que n est plus grand. Le triangle rectangle, dont p est une cathète, r l'hypotenuse et $\frac{2\pi}{n}$ l'angle opposé a p donne (équat. 13).

$$\sin \frac{2\pi}{n} \operatorname{tang} \Pi(p) = \operatorname{tang} \Pi(r)$$

Mais il est connu que

$$\lim \left\{ n \sin \frac{2\pi}{n} \right\} = 2\pi$$

pour $n = \infty$, tandis que

$$\frac{1}{n} \operatorname{tang} \Pi(p) = \frac{2}{n(e^{p} - e^{-p})}$$

et

$$n(e^{p} - e^{-p}) = 2np$$

avec une approximation d'autant plus grande, que n est plus grand et conséquement p est plus petit. Après quoi

$$\text{circonférence } (r) = np = 2\pi \operatorname{cotg} \Pi(r)$$

c'est à dire $\quad$ circonférence $(r) = (e^{r} - e^{-r})\,\pi$

ce qui donne pour r très petit

$$\text{circonférence } (r) = 2\pi r$$

comme dans la géométrie ordinaire.

Déterminons encore l'arc s de cercle limite au moyen des coordonnées: y perpendiculaire abaissée d'une extrémité de l'arc s sur l'axe menée par l'autre extrémité, x partie de cette axe comprise entre le sommet de l'arc et le pied de la perpendiculaire. Soit c la corde de l'arce s; soient de même c_1, c_2, c_3 ..... les cordes des arcs $\frac{1}{2} s$, $\frac{1}{2^2} s$, $\frac{1}{2^3}$ ..... Nous avons démontré plus haut (équat. 21) que

$$\operatorname{cotg} \Pi(y) = 2 \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2} c)$$

semblablement on a

$$\operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2} c) = 2 \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2} c_1)$$

$$\operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2} c_1) = 2 \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2} c_2)$$

$$\operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2} c_2) = 2 \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2} c_3)$$

et généralement pour tout nombre n entier positif

$$\operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2} c_{n-1}) = 2 \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2} c_n)$$

d'où nous concluons

$$\operatorname{cotg} \Pi(y) = 2^{n+1} \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2} c_n)$$

si n est un nombre très grand et c_n par conséquent une ligne très petite nous aurons

$$2^{n+1} \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2} c_n) = 2^n c_n$$

Mais $$2^n c_n = s \text{ pour } n = \infty$$
d'où il suit que
$$s = \operatorname{cotg} \Pi(y) \tag{22}$$

Déterminons encore l'arc s de cercle limite au moyen de la partie t de la tangente au sommet de l'axe menée par une extrémité de l'arc s, comprise entre le point de contact et l'intersection de la tangente et de l'axe menée par l'autre extrémité de l'arc s, c'est-à-dire déterminons la fonction que nous avons auparavant désignée par $L(t)$. Dans le triangle dont les côtés sont $c, t, f(t)$ et les angles opposés $\Pi(t)$, $\pi - \Pi(\frac{1}{2}c)$, $\frac{\pi}{2} - \Pi(\frac{1}{2}c)$ nous trouvons en appliquant l'équation (13)
$$\sin \Pi(t) \operatorname{tang} \Pi(c) = \sin \Pi(\tfrac{1}{2}c) \operatorname{tang} \Pi(t).$$
Mais nous avons vu que (équation 21)
$$\operatorname{tang} \Pi(\tfrac{1}{2}c) = 2 \operatorname{tang} \Pi(y)$$
à quoi nous ajouterons la remarque que
$$\operatorname{tang} \Pi(c) = \frac{\sin^2 \Pi(\frac{1}{2}c)}{2 \cos \Pi(\frac{1}{2}c)}$$
et il vient
$$\cos \Pi(t) = 2 \operatorname{cotg} \Pi(\tfrac{1}{2}c)$$
c'est-à-dire, en vertu de l'équation (22)
$$\cos \Pi(t) = s = L(t).$$

L'équation de la ligne droite a une forme assez compliquée, si l'on veut qu'elle soit générale et qu'elle représente la ligne droite, quelle que soit sa position par rapport aux axes des coordonnées. Abaissons d'un point fixe de la droite donnée une perpendiculaire a sur l'axe des x et nommons L l'angle que cette perpendiculaire fait avec la droite Nommons encore y la perpendiculaire abaissée sur l'axe des x d'un autre point de la droite donnée dont l soit la distance au premier point; soit enfin x la partie de l'axe des x comprise entre les deux perpendiculaires. Menons une ligne droite par le sommet de a et le pied de y et soit r la longueur de la partie de cette droite comprise entre ces deux points. Il se formera deux triangles l'un rectangle avec les côtés a, x, r et les angles opposés $A, X, \frac{\pi}{2}$ l'autre avec les côtés y, r, l et les angles opposés $L - X$, $C, \frac{\pi}{2} - A$.

L'application des équations (10), (11) au premier de ces triangles donne:

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(a) = \sin \Pi(r)$$
$$\sin \Pi(x) \cos X = \sin A$$
$$\sin \Pi(a) \cos A = \sin X$$
$$\cos \Pi(r) \cos A = \cos \Pi(x)$$
$$\cos \Pi(r) \cos X = \cos \Pi(a).$$

De ces équations nous tirons

$$\operatorname{tang} A = \operatorname{tang} \Pi(x) \cos \Pi(a)$$
$$\operatorname{tang} \Pi(r) = \operatorname{tang} \Pi(x) \sin \Pi(a) \cos A$$
$$\operatorname{tang} X = \operatorname{tang} \Pi(a) \cos \Pi(x)$$
$$\cos \Pi(x) = \cos \Pi(r) \cos A$$
$$\sin X = \sin \Pi(a) \cos A.$$

L'application de la dernière des equations (19) au second triangle fournit:

$$\operatorname{cotg}(L - X) \cos A \sin \Pi(r) + \sin A = \frac{\cos \Pi(r)}{\cos \Pi(y)}$$

d'où il suit que

$$\cos \Pi(y) = \frac{\cos \Pi(r)}{\operatorname{cotg}(L - X) \cos A \sin \Pi(r) + \sin A}$$
$$= \frac{\cos \Pi(r) \{ \operatorname{tang} L - \operatorname{tang} X \}}{\{ 1 + \operatorname{tg} L \operatorname{tg} X \} \cos A \sin \Pi(a) \sin \Pi(x) + \sin A \{ \operatorname{tg} L - \operatorname{tg} X \}}$$

en substituant dans cette équation au lieu de tang X sa valeur il vient

$$\cos \Pi(y) =$$
$$\frac{\cos \Pi(r) \{ \operatorname{tang} L - \operatorname{tang} \Pi(a) \cos \Pi(x) \}}{\{1 + \operatorname{tg} L \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(x)\} \cos A \sin \Pi(a) \sin \Pi(x) + \sin A \{ \operatorname{tg} L - \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(x) \}}$$

Substituons dans cette équation au lieu de $\cos \Pi(r)$, sa valeur; nous trouverons toute réduction faite que

$$\cos \Pi(y) = \frac{\cos \Pi(a)}{\sin \Pi(x)} - \sin \Pi(a) \operatorname{cotg} \Pi(x) \operatorname{cotg} L. \tag{23}$$

Si la droite donnée est parallèle à l'axe des x on aura $L = \Pi(a)$ et l'équation (23) prendra la forme suivante:

$$\cos \Pi(y) = \frac{\cos \Pi(a)}{\sin \Pi(x)} - \frac{\cos \Pi(a)}{\operatorname{tang} \Pi(x)}$$

où
$$\cos \Pi(y) = \cos \Pi(a)\, e^{-x} \tag{24}$$

Si nous désignons par s, s' les longueurs de deux arcs de cercle limite compris entre l'axe des x et la droite parallèle à cette axe et dont le premier s soit tangent à a au pied de a et le second tangent à y au pied de y nous aurons d'après ce que nous avons démontré

$$s = \cos \Pi(a)$$
$$s' = \cos \Pi(y)$$

après quoi

$$s' = s\, e^{-x}$$

où x est la distance entre les deux arcs s et s'. Cette équation montre que la constante E, introduite plus haut pour désigner le rapport constant de deux arcs de cercle limite compris entre deux parallèles, dont la distance est égale à l'unité, est égale à e, c'est-à-dire à la base des logarithmes Népériens.

Si nous posons dans l'équat. (23) $a = o$ et si nous posons $\pi - L$ à la place de L nous aurons

$$\cos \Pi(y) = \operatorname{cotg} \Pi(x) \operatorname{cotg} L$$

ce qui est par conséquence l'équation d'une droite qui passe par l'origine des coordonnées x et fait un angle L avec l'axe des x, ce qui s'accorde avec l'équation (10).

Considérons maintenant un quadrilatère, dont deux côtés a, y sont perpendiculaires au troisième côté x. Soit c le quatrième côté et φ l'angle entre a et c tandis que l'angle entre c et y est droit. Menons la diagonale r qui passe par le sommet de l'angle φ et par le sommet de l'angle droit opposé. Cette diagonale divise le quadrilatère en deux triangles rectangles. Les côtés de l'un de ces deux triangles sont a, x, r et les angles opposés $A, X, \frac{\pi}{2}$; les côtés de l'autre sont y, c, r et les angles opposés $\varphi - X, \frac{\pi}{2} - A, \frac{\pi}{2}$.

L'application des équations (10), (11), (13) au premier de ces triangles donne

$$\left.\begin{array}{l} \sin \Pi(r) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(x) \\ \sin A \operatorname{tang} \Pi(a) = \sin X \operatorname{tang} \Pi(x) \\ \cos \Pi(r) \cos A = \cos \Pi(x) \\ \cos \Pi(r) \cos X = \cos \Pi(a) \end{array}\right\} \quad (G)$$

le second triangle fournit de la même manière les équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin \Pi(y) \sin \Pi(c) = \sin \Pi(r)\\
&\sin \Pi(y) \cos(\varphi - X) = \cos A\\
&\cos \Pi(r) \cos(\varphi - X) = \cos \Pi(c)\\
&\cos \Pi(r) \sin A = \cos \Pi(y).
\end{aligned}\right\} \qquad (H)$$

L'équation (12) appliquée au premier triangle donne

$$\left.\begin{aligned}
&\tang \Pi(r) = \sin X \tang \Pi(x)\\
&\tang \Pi(r) = \sin A \tang \Pi(a)
\end{aligned}\right\} \qquad (K)$$

tandis que l'application de la même équation au second triangle fournit

$$\left.\begin{aligned}
&\tang \Pi(r) = \sin(\varphi - X) \tang \Pi(y)\\
&\tang \Pi(r) = \cos A \tang \Pi(c)
\end{aligned}\right\} \qquad (L)$$

En substituant dans la seconde des équations (K) pour $\sin \Pi(r)$ la valeur tirée des équations (G) nous trouvons

$$\cos \Pi(r) = \frac{\sin \Pi(x) \cos \Pi(a)}{\sin A}.$$

La substitution de cette valeur de $\cos \Pi(r)$ dans la dernière des équations (H) donne

$$\cos \Pi(y) = \sin \Pi(x) \cos \Pi(a). \qquad (25)$$

En divisant membre à membre la dernière des équations (H) par la troisième des équations (G) il vient

$$\tang A = \frac{\cos \Pi(y)}{\cos \Pi(x)}$$

substituons dans cette équation la valeur que nous venons de trouver pour $\cos \Pi(y)$ à la place de $\cos \Pi(y)$, nous aurons

$$\tang A = \tang \Pi(x) \cos \Pi(a).$$

La division membre à membre, de la seconde des équations (G) par la dernière de ces mêmes équations produit

$$\frac{\tang X \tang(x)}{\cos \Pi(r)} = \frac{\sin A \tang \Pi(a)}{\cos \Pi(a)}$$

En substituant dans cette équation à la place de $\sin A$ sa valeur tirée de la dernière des équations (H) on trouve

$$\tang X = \frac{\cos \Pi(y) \tang \Pi(a)}{\cos \Pi(a)} \cotg \Pi(x)$$

Remplaçant enfin dans cette équation $\cos \Pi(y)$ par sa valeur trouvée plus haut, il vient

$$\operatorname{tang} X = \cos \Pi(x) \operatorname{tang} \Pi(a).$$

La combinaison de la seconde des équations (H) avec la première des équations (L) donne encore

$$\operatorname{tang}(\varphi - X) \frac{\operatorname{tang} \Pi(y)}{\sin \Pi(y)} = \frac{\operatorname{tang} \Pi(r)}{\cos A}$$

ou

$$\operatorname{tang}(\varphi - X) = \frac{\cos \Pi(y) \operatorname{tang} \Pi(r)}{\cos A}$$

et si nous substituons la valeur de $\operatorname{tang} \Pi(r)$ donnée par la seconde des équations (K)

$$\operatorname{tang}(\varphi - X) = \operatorname{tang} A \operatorname{tang} \Pi(a) \cos \Pi(y).$$

Cette équation prend, en y substituant à la place de $\operatorname{tang} A$, $\operatorname{tang} X$, leurs valeurs trouvées plus haut, la forme suivante:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{tang} \Pi(a)}{\cos \Pi(x)}. \tag{26}$$

Cette équation montre que x est toujours réelle si l'angle φ est plus grand que $\Pi(a)$ et plus petit qu'un angle droit ou si $\pi - \varphi > \Pi(a)$, $\pi - \varphi < \frac{\pi}{2}$. La valeur de $\cos \Pi(x)$ est positive si $\frac{\pi}{2} > \varphi > \Pi(a)$ et la ligne x est par conséquence aussi positive; mais si $\frac{\pi}{2} > \pi - \varphi > \Pi(a)$, la valeur de $\cos \Pi(x)$ devient négative et la ligne x est située de l'autre côté de la perpendiculaire a.

Cela démontre que si deux droites, situées dans un même plan, ne se rencontrent pas quelque loin qu'on les prolonge sans être pourtant parallèles, elles doivent être toutes les deux perpendiculaires à une même droite; toutes les paires de droites qui étant dans le même plan ne sont ni parallèles ni perpendiculaires à une même droite doivent nécessairement se couper. Les droites qui étant dans un même plan se coupent nécessairement après un prolongement suffisant ne seront dont que celles, pour chaque point desquelles l'angle, que la droite passant par ce point fait avec la perpendiculaire abaissé de ce point sur l'autre droite, est plus petit que l'angle de parallèlisme correspondant à la longueur de cette perpendiculaire. A l'aide des résultats précédents il est possible de simplifier beaucoup l'équation générale de la ligne droite (23) dans le cas ou la droite à laquelle l'équation appartient ne coupe pas l'axe des x.

Soit a la perpendiculaire abaissée sur l'axe des x d'un point fixe, mais arbitraire pris sur la droite donnée, L celui des deux angles entre cette perpendiculaire et la droite, qui est situé du côté des x positifs. Cherchons d'abord une ligne l telle que

$$\cos \Pi(l) = \operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{cotg} L$$

ce qui est toujours possible tant que $L > \Pi(a)$, c'est-à-dire tant que la droite ne coupe pas l'axe des x. Portons cette droite l sur l'axe des x à partir de l'origine des coordonnées du côté des x positifs ou négatifs selon le signe de l. Érigeons à l'extrémité de la ligne l une perpendiculaire à l'axe des x, prolongeons la jusque à ce qu'elle rencontre la ligne donnée et soit b la partie de cette perpendiculaire comprise entre la droite donnée et l'axe des x. L'angle sous lequel cette perpendiculaire rencontrera la droite donnée doit être droit d'après l'équation (26). Si nous convenons maintenant de prendre le pied de la perpendiculaire b pour origine des coordonnées, nous aurons d'après l'équation (25)

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(y) \sin \Pi(x) \tag{27}$$

ce qui est l'équation générale d'une droite qui ne coupe pas l'axe des x. Nous pouvons poser dans cette équation $y = a$ et en même temps $x = -l$ ce qui donne

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(a) \sin \Pi(l);$$

cette équation prend, si l'on y substitue à la place $\cos \Pi(b)$, $\sin \Pi(l)$, leurs valeurs, la forme suivante

$$\cos \Pi(y) \sin \Pi(x) = \cos \Pi(a) \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2 \Pi(a) \operatorname{cotg}^2 L}.$$

Le second membre de cette équation devient imaginaire aussitôt que $\operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{cotg} L > 1$, c'est-à-dire pour toute droite qui coupe l'axe des x. A l'aide de ce qui précède nous pouvons résoudre le problème de trouver la distance de deux points, dont la position dans le plan est déterminée par leurs coordonnées rectangulaires x, y et x', y'. Posons pour abréger

$$\triangle x = x' - x, \ \triangle y = y' - y.$$

Abaissons une perpendiculaire du sommet de y sur y' et désignons la longueur de cette perpendiculaire par q, tandis que y_1 désigne la partie de y' comprise entre l'axe des x et la perpendiculaire q.

En conséquence de l'équation (25) nous aurons

$$\cos \Pi(y_1) = \cos \Pi(y) \sin \Pi(\triangle x)$$
$$\cos \Pi(q) = \cos \Pi(\triangle x) \sin \Pi(y_1).$$

Après avoir déterminé les valeurs de y_1, q à l'aide de ces équations, la distance cherchée des deux points, désignons la par r, sera donnée par l'équation suivante, qui se tire de l'équation (11).

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(y' - y_1) \sin \Pi(q).$$

Si $\triangle x$ et $\triangle y$ et par conséquence q, r sont très petits de sorte qu'on puisse négliger les puissances supérieures de ces quantités devant les inférieures, r représentera l'élément ds d'une ligne courbe à l'expression duquel on parvient en prenant

$$\sin \Pi(q) = 1 - \tfrac{1}{2} q^2$$
$$\cos \Pi(q) = q - \tfrac{1}{3} q^3$$
$$\sin \Pi(r) = 1 - \tfrac{1}{2} r^2$$
$$\sin \Pi(y' - y_1) = 1 - \tfrac{1}{2}(y' - y_1)^2$$

après quoi il vient

$$q = \frac{\triangle x}{\sin \Pi(y)}$$

$$ds = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{\sin \Pi(y)}}$$

Pour le cercle limite on a

$$\sin \Pi(y) = e^{-x}.$$

Des expressions générales qui déterminent $\sin \Pi(a)$ etc. en fonction de a et qui ont été données plus haut, on tire

$$d\,\Pi(a) = -\sin \Pi(a)\, da$$

après quoi on trouve en différentiant l'équation du cercle limite

$$\sin \Pi(y) \cos \Pi(y)\, dy = e^{-x}$$

et
$$ds = \frac{dx\, e^x}{\sqrt{1 - e^{-2x}}};$$

en intégrant par rapport à x depuis $x = o$ on trouve

$$s = \sqrt{e^{2x} - 1}$$

ou autrement
$$s = \operatorname{cotg} \Pi(y)$$

comme nous l'avons trouvé plus haut. Si nous désignons par r la distance d'un point d'une ligne courbe à l'origine des coordonnées et par φ l'angle que cette distance r fait avec l'axe des x positifs, nous aurons dans le triangle, dont les côtés sont y, x, r d'après l'équation (12)

$$\operatorname{tang} \Pi(r) = \sin \varphi \operatorname{tang} \Pi(y).$$

En prenant les logarithmes des deux membres de cette équation et en différentiant par rapport à y, φ, v, il vient

$$\frac{dr}{\cos \Pi(r)} = - \operatorname{cotg} \varphi \, d\varphi + \frac{dy}{\cos \Pi(y)}.$$

De cette équation nous tirons

$$dy = \left\{ \operatorname{cotg} \varphi \, d\varphi + \frac{dr}{\cos \Pi(r)} \right\} \cos \Pi(y)$$

ou en y substituant à la place de $\cos \Pi(y)$ sa valeur en r et φ

$$dy = \frac{\cos \varphi \cos \Pi(r) \, d\varphi + \sin \varphi \, dr}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \Pi(r)}}.$$

Pour exprimer dx en r et φ prenons (équat. 10)

$$\cos \Pi(r) \cos \varphi = \cos \Pi(x).$$

La différentiation par rapport à r, φ, x des logarithmes des deux membres de cette équation fournit

$$\frac{\sin^2 \Pi(r) \, dr}{\cos \Pi(r)} - \operatorname{tang} \varphi \, d\varphi = \frac{\sin^2 \Pi(x) \, dx}{\cos \Pi(x)}$$

d'où nous tirons, à l'aide des équations

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(r)$$
$$\cos \Pi(r) \cos \varphi = \cos \Pi(x),$$

l'équation suivante, qui exprime la valeur cherchée

$$\frac{dx}{\sin \Pi(y)} = \frac{\cos \varphi \sin \Pi(r) \, dr - d\varphi \sin \varphi \operatorname{cotg} \Pi(r)}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \Pi(r)}}$$

après quoi

$$ds = \sqrt{dr^2 + d\varphi^2 \operatorname{cotg}^2 \Pi(r)}.$$

Pour le cercle, en supposant que l'origine des coordonnées est au centre nous trouvons, puisque $dr = o$,

$$ds = d\varphi \operatorname{cotg} \Pi(r);$$

en intégrant depuis $\varphi = o$ jusqu'à $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et en multipliant le résultat par 4 nous trouvons l'expression suivante de la circonférence du cercle de rayon r

$$2\pi \operatorname{cotg} \Pi(r)$$

qui coïncide avec celle que nous avons trouvée plus haut.

Si nous appelons s un arc de cercle limite compté depuis l'axe des x, la révolution de s autour de l'axe des x produira une partie de sphère limite et l'extrémité de cet arc décrira une circonférence de cercle, qui se détermine sur la sphère limite de la même manière qu'une circonférence de rayon s est déterminée dans son plan dans la géométrie ordinaire, d'où il suit que la circonférence doit être égale à $2\pi s$. De l'autre côté la circonférence du même cercle considérée dans son plan où la perpendiculaire y, abaissée d'une extrémité de l'arc s sur l'axe de cercle limite qui sert d'axe des x et passe par l'autre extrémité, est le rayon du cercle, sera donnée dans la Pangéométrie par la formule

$$2\pi \operatorname{cotg} \Pi(y)$$

d'où il suit que

$$s = \operatorname{cotg} \Pi(y)$$

comme il à été démontré auparavant.

Pour trouver l'élément des aires planes nous divisons le plan par des cercles limites qui tous ont pour axe l'axe des x de manière que la distance de chaque cercle limite au suivant soit infiniment petite et puisse être exprimée par dx. Soit s l'arc d'un de ces cercles limites compris entre l'axe des x et un point d'une ligne courbe donnée dont les coordonnées soient x, y. Soit encore s' l'arc d'un autre de ces ces cercles limites compris entre l'axe des x et un point de la courbe donnée, déterminé par les coordonnées $x + dx$, $y + dy$.

La partie infiniment petite du plan comprise entre s et s' d'un côté et entre la courbe et l'axe des x de l'autre côté aura pour expression

$$ds = \frac{es\,dx}{e - 1}$$

ou, en substituant $s = \operatorname{cotg} \Pi(y)$,

$$ds = \frac{e\,dx \operatorname{cotg} \Pi(y)}{e - 1}.$$

Comme exemple déterminons l'aire du cercle limite pour lequel nous avons trouvé l'équation en coordonnées rectangulaires

$$\sin \Pi(y) = e^{-x}$$

à l'aide de laquelle nous trouvons l'expression suivante de la différentielle de l'aire cherchée

$$ds = \frac{e}{e - 1} dy \cos \Pi(y) \operatorname{cotg} \Pi(y).$$

En intégrant cette expression depuis $y = o$, nous trouvons pour l'aire comprise entre l'arc de cercle limite l'axe des x et l'ordonnée y

$$s = \frac{e}{e-1}\left\{\operatorname{cotg} \Pi(y) - \tfrac{1}{2}\pi + \Pi(y)\right\}.$$

Nous avons vu que la partie d'un plan comprise entre deux droites parallèles, prolongées indéfiniment du côté du parallélisme et limitée par un arc s de cercle limite auquel les deux parallèles servent d'axes, a pour expression

$$\frac{es}{e-1} = \frac{e \operatorname{cotg} \Pi(y)}{e-1}.$$

Après quoi nous trouvons pour l'aire comprise entre deux droites parallèles, dont l'une perpendiculaire à y, menées par les deux extrémités de y et prolongées indéfiniment du côté du parallélisme, la formule

$$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(y).$$

A l'aide de cette formule nous pouvons déterminer l'aire d'un triangle rectiligne en fonction des angles de ce triangle. Soient pour cela les côtés du triangle a, b, c et les angles opposés $A = \Pi(\alpha)$, $B = \Pi(\beta)$, $\frac{\pi}{2}$; prolongeons l'hypotenuse c au delà du sommet de l'angle $\Pi(\beta)$ et faisons le prolongement égal à β. La perpendiculaire à β menée par l'extrémité de β sera parallèle au prolongement du côté a et l'aire de la partie du plan comprise entre ces deux parallèles prolongées indéfiniment du côté du parallélisme et limitée de l'autre côté par la ligne β aura pour valeur

$$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(\beta)$$

Si nous menons maintenant par le sommet de l'angle A une parallèle à la perpendiculaire qui sera par conséquence inclinée sur c sous l'angle $\Pi(c+\beta)$ et sera aussi parallèle au prolongement de a, la valeur de la partie du plan entre $c+\beta$ et les deux parallèles prolongées à l'infini du côté du parallélisme sera

$$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(c+\beta).$$

De la même manière la partie du plan entre b, la droite menée par le sommet de A et le côté a avec son prolongement est

$$= \tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b).$$

Après quoi la somme de $\frac{\pi}{2} - \Pi(\beta)$ et de $\frac{\pi}{2} - \Pi(b)$ diminuée de $\frac{\pi}{2} - \Pi(c+\beta)$ sera l'expression de l'aire du triangle, qui aura ainsi pour valeur

$$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(b) - \Pi(\beta) + \Pi(c+\beta).$$

Mais nous avons démontré que

$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c+\beta).$$

En substituant dans l'expression de l'aire du triangle rectiligne rectangle cette valeur à la place de $\Pi(b)$, l'expression de cette aire prend la forme suivante

$$\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha) - \Pi(\beta)$$

c'est-à-dire que l'aire d'un triangle rectiligne rectangle est égale à la différence entre deux angles droits et la somme des trois angles du triangle; d'où il suit encore que l'aire de tout triangle rectiligne est égale à l'excés de deux angles droits sur la somme des trois angles du triangle. Cela suit de ce que l'aire de tout triangle rectiligne est la somme des aires de deux triangles rectilignes rectangles.

Il est facile de déduire de ce qui précède, que l'aire de tout quadrilatère est égale à l'excés de quatre angles droits sur la somme des quatre angles du quadrilatère et en général que l'aire de tout polygone de n côtés est égale à l'excés de $(n-2)\pi$ sur la somme des angles du polygone.

Considérons en particulier un quadrilatère, dont deux côtés a, y sont tous les deux perpendiculaires au troisieme côté x, et dont le quatrième côté t est perpendiculaire au côté a et fait avec y un angle que nous désignons par ω. Nous avons démontré plus haut (équation 25) qu'entre les parties constituantes d'un tel quadrilatère il existe l'équation suivante

$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(y) \sin \Pi(x).$$

Si nous considérons x, y comme variables et a comme constante, l'aire de ce quadrilatère s'exprime, comme toute aire plane, d'après ce qui a été démontré plus haut, par l'intégrale

$$\int dx \operatorname{cotg} \Pi(y)$$

qui appliquée au cas qui nous occupe, donne, en substituant la valeur de $\operatorname{cotg} \Pi(y)$, la valeur suivante de l'aire

$$\int_0 \frac{dx \cos \Pi(a)}{\sqrt{\sin^2 \Pi(x) - \cos^2 \Pi(a)}}$$

tandis que cette même aire est, en conséquence du théorème qui exprime l'aire de tout polygone plan en fonction des angles

$$= \tfrac{1}{2}\pi - \omega$$

ce qui donne

$$\tfrac{1}{2}\pi - \omega = \cos \Pi(a) \int_0 \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 \Pi(x) - \cos^2 \Pi(a)}}. \qquad \text{(M)}$$

L'angle ω, que le côté t fait avec le côté y, est donné par l'équation suivante (équation 26)

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\operatorname{tang} \Pi(y)}{\cos \Pi(x)};$$

nous écrivons dans l'équation (M) α au lieu de $\Pi(a)$ et ξ au lieu de $\Pi(x)$, elle deviendera:

$$\frac{\tfrac{1}{2}\pi - \omega}{\cos \alpha} = \int_{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sin \xi \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \xi}}$$

où α est une quantité constante.

La justesse de la valeur trouvée pour cette intégrale peut être vérifiée par la différentiation. La Pangéométrie indique ainsi une nouvelle méthode pour trouver les valeurs approchées des intégrales définies.

Soit donnée l'intégrale

$$\int A\,dx$$

où A est une fonction donnée de x; pour calculer la valeur de cette intégrale il faut poser $A = \operatorname{cotg} \Pi(y)$ et déterminer les valeurs de y', y'', y''' etc. qui correspondent à $x', x'', x''' \ldots$ prises arbitrairement dans les limites de l'intégration; après il faut calculer la longueur des cordes qui réunissent les sommets de y' à y'', de y'' à y''' etc. et ainsi de suite, et les angles que chaque corde fait avec le prolongement de la corde suivante. La somme de ces angles donnera la valeur approchée de l'intégrale.

L'aire de la partie du plan, comprise entre une droite donnée et deux droites parallèles entre elles, menées par les extrémités de la droite donnée et prolongées indéfiniment du côté du parallèlisme sera égal à π moins la somme des deux angles que les deux parallèles font avec la droite donnée, parce que cette figure peut-être regardée comme un triangle dont un des angles serait nul.

L'aire d'une courbe plane peut-être divisée en éléments par des droites toutes parallèles à une droite donnée par exemple à l'axe des y. Si nous menons par l'extrémité de l'abscisse x une droite parallèle à l'axe des y, cette droite fera avec l'axe des x un angle $= \Pi(x)$; la droite menée par l'extrémité de l'abscisse $x + dx$ fera de même avec l'axe des x un angle égal à $\Pi(x + dx)$, d'où il suit que l'aire de la partie du plan comprise entre dx et ces deux parallèles sera égale à $-d\,\Pi(x)$. Soit maintenant u la longueur de la partie de la première parallèle comprise entre l'axe des x et la courbe, la partie de l'aire comprise entre les deux parallèles qui est hors de la courbe donnée sera d'après ce qui à été démontré plus haut:

$$-e^{-u}\,d\,\Pi(x)$$

d'où il suit que la partie de cette aire qui est située entre la courbe et l'axe des x, c'est-à-dire l'élément de l'aire de la courbe, aura pour expression:

$$dS = -(1 - e^{-u})\,d\,\Pi(x).$$

Pour calculer l'aire d'un cercle de rayon r, il faut dans l'expression générale de l'élément de l'aire d'une courbe trouvée auparavant, expression qui était

$$dS = dx \operatorname{cotg} \Pi(y)$$

substituer la valeur de $\operatorname{cotg} \Pi(y)$ tirée de l'équation du cercle

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(r)$$

où l'origine des coordonnées rectangulaire est au centre du cercle, cela donne

$$dS = dx \sqrt{\frac{\sin^2 \Pi(x)}{\sin^2 \Pi(r)} - 1}\,;$$

en intégrant depuis $x = o$, nous trouvons

$$S = \frac{1}{\sin \Pi(r)} \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\cos \Pi(x)}{\cos \Pi(r)}\right) - \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\operatorname{cotg} \Pi(x)}{\operatorname{cotg} \Pi(r)}\right).$$

Pour $x = r$, cela donne pour l'aire du quart du cercle

$$\frac{\pi}{2 \sin \Pi(r)} - \tfrac{1}{2}\pi\,;$$

en multipliant par 4 nous trouvons pour l'aire du cercle

$$2\pi \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(r)} - 1 \right\} = \pi\left(e^{\frac{1}{2}r} - e^{-\frac{1}{2}r}\right)^2.$$

Si r est extrêmement petit cette expression donne l'aire du cercle $= \pi r^2$, ce qui est la même expression que la géométrie ordinaire fournit pour l'aire du cercle.

L'expression précédente de l'aire du cercle nous permet de donner à l'élément de l'aire de toute ligne courbe encore l'expression suivante:

$$dS = d\varphi \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(r)} - 1 \right\}$$

où r est le rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées à un point de la courbe et φ l'angle que ce rayon vecteur fait avec une droite fixe, qui passe par l'origine des coordonnées.

L'application de cette formule à la détermination de l'aire d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont a, b, c et les angles opposés A, B, C donne, si nous regardons les angles A, C et les côtés b, a comme variables

$$\text{l'aire du triangle} = \int_0^A dA \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(b)} - 1 \right\}.$$

le côté b s'exprime en fonction de c, A, B à l'aide de la dernière des équations (19)

$$\operatorname{cotg} B \sin A \sin \Pi(c) + \cos A = \frac{\cos \Pi(c)}{\cos \Pi(b)}.$$

Tirons de cette équation la valeur de $\sin \Pi(b)$ et substituons la dans l'expression de l'aire du triangle, il viendra

$$\text{l'aire du triangle} = S = \int_0^A \frac{dA}{\sqrt{1 - \dfrac{\cos^2 \Pi(c)}{(\operatorname{cotg}^2 B \sin A \sin \Pi(c) + \cos A)^2}}} - A.$$

Mais il a été démontré que l'aire du triangle est

$$= \pi - A - B - C$$

où A et B sont des angles donnés et C est donné par l'équation (19)

$$\cos C + \cos A \cos B = \frac{\sin A \sin B}{\sin \Pi(c)}.$$

La comparaison de ces deux expressions de l'aire du triangle donne ensuite:

$$\pi - B - C = \int_0^A \frac{dA \left\{ \operatorname{cotg} B \sin A \sin \Pi(c) + \cos A \right\}}{\sqrt{(\operatorname{cotg} B \sin A \sin \Pi(c) + \cos A)^2 - \cos^2 \Pi(c)}}.$$

Si $B = \dfrac{\pi}{2}$ cette équation donne

$$\frac{\pi}{2} - C = \int_0^A \frac{dA}{\sqrt{\cos^2 A - \cos^2 \Pi(c)}}$$

équation qui, après l'intégration, prend la forme

$$\frac{\pi}{2} - C = \arc \sin \left(\frac{\sin A}{\sin \Pi(c)}\right)$$

ce qui est d'accord avec l'équation qui détermine C.

On peut déduire de ce qui précède deux expressions de la valeur de l'aire de tout polygone fermé, l'une exprimée par une intégrale définie, l'autre dépendant seulement de la somme des angles du polygone. Les deux valeurs de la même aire doivent être égales entre elles, on a de cette manière un nouveau moyen de trouver la valeur de beaucoup d'intégrales définies, valeurs qu'il serait souvent difficile de trouver d'une autre manière.

Pour en donner encore nn exemple considérons un triangle rectiligne rectangle, qui a pour côtés de l'angle droit x, y et pour hypothenuse r. Soit A l'angle opposé à y et B l'angle opposé à x. Les équations (10), (11) donnent pour ce triangle

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(r)$$
$$\sin \Pi(x) \cos B = \sin A$$
$$\cos \Pi(r) \cos A = \cos \Pi(x)$$
$$\cos \Pi(r) \cos B = \cos \Pi(y)$$

De ces équations nous déduisons

$$\cos \Pi(r) = \frac{\cos \Pi(x)}{\cos A}$$

$$\sin \Pi(r) = \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \Pi(x)}{\cos A}\right)^2}$$

$$\sin \Pi(y) = \frac{1}{\sin \Pi(x)} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \Pi(x)}{\cos A}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \Pi(x)} - \frac{\operatorname{cotg}^2 \Pi(x)}{\cos^2 A}}$$

$$\operatorname{ctg} \Pi(y) = \frac{\sin A \cos \Pi(x)}{\sqrt{\sin^2 A - \cos^2 \Pi(x)}}.$$

En substituant dans cette dernière équation $\Pi(x) = \frac{\pi}{2} - \omega$, nous trouvons

$$\operatorname{cotg} \Pi(y) = \frac{\sin A \sin \omega}{\sqrt{\sin^2 A - \sin^2 \omega}}.$$

Mais nous avons vu que la différentielle de l'aire est $dx \cot g\, \Pi(y)$ ce qui donne, étant appliqué au cas actuel

$$dx \cot g\, \Pi(y) = \sin A \frac{d\omega \tan g\, \omega}{\sqrt{\sin^2 A - \sin^2 \omega}}$$

d'où nous concluons, en intégrant depuis $\omega = o$, ce qui correspond à $x = o$, et en remarquant que l'aire exprimée par l'intégrale est aussi exprimée par $\frac{\pi}{2} - A - B$, que

$$\frac{\pi}{2} - A - B = \sin A \int_o^\omega \frac{\tan g\, \omega\, d\omega}{\sqrt{\sin^2 A - \sin^2 \omega}}$$

où A est un angle constant tandis que B est déterminée par l'équation

$$\cos B = \frac{\sin A}{\cos \omega}.$$

Si $\omega = \frac{\pi}{2}$, l'hypothenuse devient parallèle au côté y et l'angle B sera égal à zero. On a donc dans ce cas

$$\frac{\pi}{2} - A = \sin A \int_o^{\frac{\pi}{2} - A} \frac{d\omega \tan g\, \omega}{\sqrt{\sin^2 A - \sin^2 \omega}}.$$

On peut déterminer la valeur d'une intégrale plus générale, en considérant l'aire d'un triangle rectiligne quelconque, dont les côtés sont a, b, c et les angles opposés A, B, C et en divisant cette aire en éléments par des droites parallèles entre elles. Prenons le sommet de l'angle C pour origine des coordonnées et le coté a pour axe des abscises x. Soit $B = \Pi(\beta)$ où β est une ligne positive si $B < \frac{\pi}{2}$ et négative si $B > \frac{\pi}{2}$. Menons par l'extrémité de l'abscisse x une droite u parallèle au côté c et prolongeons cette parallèle jusqu'à ce qu'elle coupe le côté b. L'angle que cette parallèle fait avec l'abscisse x sera $\Pi(\beta - a + x)$ d'où il suit que l'angle que cette parallèle fait avec le prolongement de x sera $\Pi(a - \beta - x)$.

Si nous prenons pour élément de l'aire du triangle la partie de cette aire qui est comprise entre deux parallèles u infiniment voisines nous aurons, d'après ce qui a été démontré plus haut, l'expression suivante pour cet élément

$$dS = - d\Pi(a - \beta - x)\,(1 - e^{-u}).$$

Regardons y, x et u comme variables et a et β comme constants. Les équations (19) appliquées au triangle dont les côtés sont x, u et l'angle entre ces deux côtés $\Pi(\beta - a + x)$ donnent

$$\operatorname{cotg} C \sin \Pi(\beta - a + x) \sin \Pi(x) + \cos \Pi(\beta - a + x) = \frac{\cos \Pi(x)}{\cos \Pi(u)};$$

de cette équation nous tirons en posant pour abréger $\Pi(\beta - a + x) = \omega$

$$\cos \Pi(u) = \frac{\cos \Pi(x)}{\operatorname{cotg} C \sin \omega \sin \Pi(x) + \cos \omega}$$

puis

$$e^{2u} = \frac{\operatorname{cotg} C \sin \omega \sin \Pi(x) + \cos \omega + \cos \Pi(x)}{\operatorname{cotg} C \sin \omega \sin \Pi(x) + \cos \omega - \cos \Pi(x)}.$$

Mais

$$\sin \Pi(x) = \sin \Pi \left\{ (\beta - a) - (\beta - a + x) \right\} = \frac{\sin \Pi(\beta - a) \sin \omega}{1 - \cos \Pi(\beta - a) \cos \omega};$$

de la même manière nous trouvons

$$\cos \Pi(x) = \frac{\cos \Pi(\beta - a) - \cos \omega}{1 - \cos \Pi(\beta - a) \cos \omega}.$$

La substitution de ces valeurs de $\sin \Pi(x)$, $\cos \Pi(x)$ dans l'expression de e^{2u} donne

$$e^{2u} =$$

$$\frac{\operatorname{ctg} C \sin^2 \omega \sin \Pi(\beta - a) + \cos \omega \left\{ 1 - \cos \Pi(\beta - a) \cos \omega \right\} + \cos \Pi(\beta - a) - \cos \omega}{\operatorname{ctg} C \sin^2 \omega \sin \Pi(\beta - a) + \cos \omega \left\{ 1 - \cos \Pi(\beta - a) \cos \omega \right\} - \cos \Pi(\beta - a) + \cos \omega}$$

$$= \frac{\operatorname{ctg} C \sin^2 \omega \sin \Pi(\beta - a) + \cos \Pi(\beta - a) \sin^2 \omega}{\operatorname{ctg} C \sin^2 \omega \sin \Pi(\beta - a) + 2 \cos \omega - \left\{ 1 + \cos^2 \omega \right\} \cos \Pi(\beta - a)}$$

et nous trouvons ensuite

$$d\, \Pi(a - \beta - x) = -d\, \Pi(\beta - a + x) = -d\omega$$

après quoi la comparaison des deux expressions de l'aire du triangle donne l'équation

$$\pi - A - B - C = -\omega +$$

$$\int_{x=0}^{x=a} d\omega \sqrt{\frac{\operatorname{cotg} C \sin \Pi(\beta - a) \sin^2 \omega + 2 \cos \omega - (1 + \cos^2 \omega) \cos \Pi(\beta - a)}{\operatorname{cotg} C \sin \Pi(\beta - a) \sin^2 \omega + \cos \Pi(\beta - a) \sin^2 \omega}}.$$

Si nous posons encore $\Pi(\beta - a) = \alpha$, cette équation prendra la forme

$$[\pi - A - B - C]\,[\operatorname{cotg} C \sin\alpha + \cos\alpha] =$$
$$\int_{\omega=\alpha}^{\omega=\Pi(\beta)} \frac{d\omega}{\sin\omega}\sqrt{\operatorname{cotg} C \sin\alpha \sin^2\omega + 2\cos\omega - (1+\cos^2\omega)\cos\alpha}$$

où les angles A, B et la ligne β doivent être calculés au moyen des équations

$$\alpha = \Pi(\beta - a),\quad B = \Pi(\beta)$$
$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}$$

dont la dernière est la dernière des équations (19), appliquée au triangle que nous avons considéré.

On peut employer dans la Pangéométrie pour fixer la position d'un point, hormis les coordonnées rectilignes et polaires, des arcs de cercles limite et ce dernier système offre même beaucoup d'avantage sous le rapport de la simplicité des formules.

Déterminons la position d'un point dans un plan par des coordonnées rectangulaires x, y de manière que y soit la longueur de la perpendiculaire abaissée du point, dont on veut déterminer la position, sur l'axe des x et x la distance du pied de la perpendiculaire y de l'origine des coordonnées. Soit η la longueur de l'arc de cercle limite compris entre le sommet de la perpendiculaire y et l'axe des x, qui est en même temps l'axe du cercle limite et nommons ξ la distance du sommet du cercle limite, qui est situé sur l'axe des x, à l'origine des coordonnées. Nous avons vu que dans ce cas

$$\eta = \operatorname{cotg} \Pi(y)$$

ensuite l'équation du cercle limite donne

$$e^{-(x-\xi)} = \sin \Pi(y)$$

à l'aide de ces deux équations on peut exprimer ξ, η en fonction de x, y ou inversement x, y en fonction de ξ, η, ce qui permet de passer de l'équation d'une ligne exprimée en x, y à l'équation de cette même ligne exprimée en ξ, η ou inversement.

La différentielle des aires planes s'exprime en ξ, η par l'équation

$$d^2 S = d\xi\, d\eta$$

où S est l'aire.

Si nous regardons S comme fonction de x, y nous avons

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) = \frac{dS}{d\xi}$$

puis en différentiant par rapport à y

$$\frac{d^2 S}{dx\, dy} = \frac{1}{\sin \Pi(y)} \frac{d^2 S}{d\xi\, d\eta} = \frac{1}{\sin \Pi(y)}$$

ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé plus haut.

Abaissons d'un point dans l'espace une perpendiculaire z sur le plan des coordonnées x, y et menons par cette perpendiculaire un plan qui coupe le plan x, y en une droite parallèle à l'axe des x. Prenons cette intersection, dirigée du côté du parallèlisme pour axe d'un cercle limite qui passe par le sommet de la perpendiculaire z et soit ζ la longeur de l'arc de ce cercle limite compris entre le sommet de z et cet axe. On a

$$\zeta = \operatorname{cotg} \Pi(z);$$

la partie q de la parallèle à l'axe des x menée par le pied de la perpendiculaire z et comprise entre le sommet de ζ et le pied de cette perpendiculaire, sera donné par l'équation

$$e^{-q} = \sin \Pi(z).$$

L'arc de cercle limite mené par le pied de z de manière à avoir l'axe des x dirigé du côté des x positifs pour axe et compris entre ce point et cet axe aura pour longueur $\operatorname{cotg} \Pi(y)$ et l'arc η de cercle limite, mené par le point d'intersection de ζ avec le plan des x, y ayant l'axe des x dirigé du côté des x positifs pour axe et compris entre ce point et cet axe sera, en vertu de ce qui a été démontré, donné par l'équation

$$\eta = \frac{\operatorname{cotg} \Pi(y)}{\sin \Pi(z)}.$$

Si nous appelons encore ξ la partie de l'axe des x comprise entre l'origine des coordonnées et l'arc η, l'équation du cercle limite donne

$$e^{-x+\xi+q} = \sin \Pi(y).$$

De ces équations nous tirons en ne faisant varier d'abord que z et ζ qui en dépend

$$d\zeta = \frac{dz}{\sin \Pi(z)}.$$

En ne faisant varier que y et η, il vient

$$d\eta = \frac{dy}{\sin \Pi(y) \sin \Pi(z)}.$$

Enfin en ne faisant varier que ξ et x, il vient

$$d\xi = dx.$$

Il ne reste, pour compléter la nouvelle théorie géométrique désignée Pangéométrie, et qui est basée sur des nouveaux principes plus généraux que ceux de la géométrie ordinaire, qu'à donner les valeurs des différentielles de l'aire d'une surface courbe et du volume d'un corps quelconque éxprimées à l'aide de coordonnées qui déterminent la position d'un point dans l'espace.

Considérons dans ce but de nouveau le quadrilatère dont deux côtés a, y sont perpendiculaires au troisième x et dont le quatrieme côté c est perpendiculaire à y et fait avec a l'angle φ.

Nous avons trouvé (équation 25)

$$\cos \Pi(y) = \cos \Pi(a) \sin \Pi(x).$$

Puis nous trouvons à l'aide des équations (10), (11) en nommant r la diagonale menée du sommet de l'angle φ au sommet de l'angle droit opposé et A l'angle entre x et r

$$\cos \Pi(r) \cos A = \cos \Pi(x)$$

$$\cos A \operatorname{tang} \Pi(c) = \operatorname{tang} \Pi(r).$$

De ces deux équations nous tirons

$$\cos \Pi(x) \operatorname{tang} \Pi(c) = \sin \Pi(r).$$

Mais

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(x)$$

et par conséquence

$$\operatorname{tang} \Pi(c) = \sin \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(x).$$

Si c et x sont si petits qu'on puisse négliger les puissances supérieures devant les inférieures et prendre pour valeurs approchées de $\operatorname{tang} \Pi(c)$, $\operatorname{tang} \Pi(x)$ les suivantes

$$\operatorname{tang} \Pi(c) = \tfrac{1}{c};\ \operatorname{tang} \Pi(x) = \tfrac{1}{x}$$

on trouve

$$c = \frac{x}{\sin \Pi(a)}. \qquad (27)$$

La droite c qui joint les sommet de a et de y ne sera pas perpendiculaire à y si $a = y$ dans le quadrilatère. Dans ce cas la droite p qui joint le milieu de c au milieu de x sera perpendiculaire à c

et à x. Nous pouvons donc remplacer dans l'équation (27) c par $\frac{1}{2}c$ et x par $\frac{1}{2}x$ ce qui ne change pas la forme de cette équation. Elle est ainsi démontrée même pour le cas $a = y$, cas auquel la démonstration donnée plus haut n'est pas immédiatement applicable.

Les aires des surfaces courbes ont pour mesure la somme des aires des triangles, qui forment un reseau continu dont tous les sommets sont situés sur la surface. Cette mesure sera d'autant plus exacte que les dimensions des triangles seront plus petites.

La limite de laquelle cette somme s'approche indéfiniment si les dimensions des triangles diminuent indéfiniment et de laquelle elle peut différer d'une grandeur moindre que toute grandeur donnée est dite la valeur mathématique de l'aire de la surface Déterminons d'abord l'aire d'un triangle rectiligne rectangle en fonction des côtés, que nous désignerons par a, b, c, nommons les angles opposés à ces côtés respectivement $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{\pi}{2}$.

Nous avons vu qu'on peut, dans un tel triangle, substituer à

$$a, b, c, \alpha, \beta$$

les lignes

$$a, \alpha', \beta, b', c$$

respectivement.

Outre cela nous avons trouvé que

$$2\,\Pi(b) = \Pi(c+\beta) + \Pi(c-\beta);$$

substituons dans cette équation α' à b, β, à c et c à β, il viendra

$$\pi - 2\,\Pi(\alpha) = \Pi(\beta+c) + \Pi(\beta-c)$$

ou

$$2\,\Pi(\alpha) = \Pi(c-\beta) - \Pi(c+\beta).$$

De la même manière nous trouvons

$$2\,\Pi(\beta) = \Pi(c-\alpha) - \Pi(c+\alpha).$$

En échangeant dans cette dernière équation les lettres comme il a été dit plus haut on aura

$$2\,\Pi(c) = \Pi(\beta-b') - \Pi(\beta+b')$$

De la même manière on a

$$2\,\Pi(c) = \Pi(\alpha-a') - \Pi(a+a')$$

d'où nous déduisons par l'échange de lettres indiqué plus haut

$$2\,\Pi(\beta) = \Pi(b'-a') - \Pi(b'+a')$$

De la même manière on a

$$2\,\Pi(\alpha) = \Pi(a' - b') - \Pi(a' + b')\,;$$

en ajoutant les deux dernières équations nous trouvons

$$2\,\Pi(\alpha) + 2\,\Pi(\beta) = \pi - 2\,\Pi(a' + b'),$$

après quoi l'aire du triangle $\triangle$ est donnée par l'expression suivante:

$$\triangle = \frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha) - \Pi(\beta) = \Pi(a' + b')$$

et en suite

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\triangle = e^{-a'} e^{-b'} =$$
$$= \operatorname{tang}\left[\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\Pi(a)\right] \operatorname{tang}\left[\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\Pi(b)\right]$$

d'où nous tirons enfin

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\triangle = \frac{e^a - 1}{e^a + 1} \cdot \frac{e^b - 1}{e^b + 1}.$$

Si a et b sont très petits, de sorte qu'on puisse négliger les puissances supérieures de a, b et $\triangle$ cette formule donne

$$\triangle = \tfrac{1}{2}ab$$

comme dans la géométrie ordinaire. On sait qu'on peut toujours choisir dans un triangle rectiligne quelconque le côté c de manière, que la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle opposé C sur la direction de ce côté, tombe sur le côté c lui même et non pas sur son prolongement; cette perpendiculaire divise le côté c en deux parties, l'une x adjacente à l'angle A, l'autre $c - x$ adjacente à l'angle B. L'aire S de ce triangle sera égale à la somme des aires des deux triangles rectangles formés par cette perpendiculaire et sera donnée par l'équation

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}S = \frac{\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \cdot \dfrac{e^h - 1}{e^h + 1} + \dfrac{e^{c-x} - 1}{e^{c-x} + 1} \cdot \dfrac{e^h - 1}{e^h + 1}}{1 - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \cdot \dfrac{e^{c-x} - 1}{e^{c-x} + 1} \cdot \left(\dfrac{e^h - 1}{e^h + 1}\right)^2}$$

équation à laquelle on peut donner la forme

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}S = \frac{(e^{2h} - 1)(e^c - 1)}{(e^c + 1)(e^h + 1)^2 + 2e^h (e^x - 1)(e^{c-x} - 1)}\,;$$

cette formule donne, si l'on néglige les puissances supérieures de s, h, c vis à vis des inférieures

$$S = \tfrac{1}{2}ch$$

comme dans la géométrie ordinaire. Nous avons vu que l'expression de l'aire d'un triangle en fonction des trois angles A, B, C du triangle était

$$S = \pi - A - B - C.$$

Tirons la valeur de A en fonction de a, b, c de la seconde des équations (19) Cela donne l'équation

$$\cos A = \frac{1 - \dfrac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)}}{\cos \Pi(b) \cos \Pi(c)}$$

de laquelle il suit

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 + \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) - \dfrac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)}}{\cos \Pi(b) \cos \Pi(c)}.$$

Si nous substituons dans cette formule à la place de

$$1 + \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)$$

sa valeur

$$\frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(b+c)}$$

elle prend la forme

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c) \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(b+c)} - \frac{1}{\sin \Pi(a)} \right\};$$

de la même manière on trouve

$$-2\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c) \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(b-c)} - \frac{1}{\sin \Pi(a)} \right\};$$

de ces deux formules nous déduisons

$$\sin^2 A = \operatorname{tang}^2 \Pi(b) \operatorname{tang}^2 \Pi(c) \left\{ - \frac{1 - \cos^2 \Pi(b) \cos^2 \Pi(c)}{\sin^2 \Pi(b) \sin^2 \Pi(c)} \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\sin \Pi(a) \sin \Pi(b) \sin \Pi(c)} - \frac{1}{\sin^2 \Pi(a)} \right\}$$

ou

$$\sin^2 A = - \operatorname{tang}^2 \Pi(b) \operatorname{tang}^2 \Pi(b) \left\{ \frac{1}{\sin^2 \Pi(a)} + \frac{1}{\sin^2 \Pi(b)} + \frac{1}{\sin^2 \Pi(c)} \right.$$
$$\left. - \frac{2}{\sin \Pi(a) \sin \Pi(b) \sin \Pi(c)} - 1 \right\}.$$

En posant pour abreger

$$P = \sqrt{\frac{-1}{\sin^2 \Pi(a)} - \frac{1}{\sin^2 \Pi(b)} - \frac{1}{\sin^2 \Pi(c)} + \frac{2}{\sin \Pi(a) \sin \Pi(b) \sin \Pi(c)} + 1}$$

on a $$\sin A = \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c)\, P. \tag{28}$$

On peut aussi donner à P la forme suivante:

$$P^2 = 2\left\{1 + \frac{1}{\sin \Pi(a)}\right\}\left\{1 + \frac{1}{\sin \Pi(b)}\right\}\left\{1 + \frac{1}{\sin \Pi(c)}\right\}$$
$$- \left\{1 + \frac{1}{\sin \Pi(a)} + \frac{1}{\sin \Pi(b)} + \frac{1}{\sin \Pi(c)}\right\}^2$$

symétrique par rapport à a, b, c

En partant de l'équation (28) et en y regardant P comme une quantité indéterminée on peut prouver de la manière suivante que P doit être une fonction symétrique par rapport à a, b, c.

Multiplions l'équation (28) par $\operatorname{tang} \Pi(a)$, substituons y à $\sin A \operatorname{tang} \Pi(a)$ sa valeur $\sin B \operatorname{tang} \Pi(b)$ tirée de l'équation (13) et divisons après par $\operatorname{tang} \Pi(b)$, il viendra

$$\sin B = \operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(c)\, P.$$

Multiplions cette dernière équation par $\operatorname{tang} \Pi(b)$, substituons y à $\sin B \operatorname{tang} \Pi(b)$ sa valeur $\sin C \operatorname{tang} \Pi(c)$ tirée de l'équation (13) et divisons après par $\operatorname{tang} \Pi(c)$, nous aurons

$$\sin C = \operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(b)\, P,$$

cela démontre que P est une fonction symétrique des côtés a, b, c.

Nous avons dejà trouvé

$$\cos A = \frac{1 - \dfrac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)}}{\cos \Pi(b) \cos \Pi(c)}$$

ou ce qui est la même chose

$$\cos A = \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c)\left\{\frac{1}{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)} - \frac{1}{\sin \Pi(a)}\right\};$$

de la même manière on trouve

$$\cos B = \operatorname{tang} \Pi(c) \operatorname{tang} \Pi(a)\left\{\frac{1}{\sin \Pi(c) \sin \Pi(a)} - \frac{1}{\sin \Pi(b)}\right\}$$

$$\cos C = \operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(b)\left\{\frac{1}{\sin \Pi(a) \sin \Pi(b)} - \frac{1}{\sin \Pi(c)}\right\}.$$

De ces valeurs de $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$, $\cos B$ nous déduisons

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang}^2 \Pi(c) \operatorname{tang}(a) P \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(c) \sin \Pi(a)} - \frac{1}{\sin \Pi(b)} \right\}$$

$$+ \operatorname{tang}^2 \Pi(c) \operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(b) P \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)} - \frac{1}{\sin \Pi(a)} \right\}$$

$$= \operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang}^2 \Pi(c) P \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a)} + \frac{1}{\sin \Pi(b)} \right\} \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(c)} - 1 \right\}$$

et enfin

$$\sin(A+B) = \frac{\operatorname{tang} \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(b) P}{\left\{ \frac{1}{\sin \Pi(c)} + 1 \right\}} \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a)} + \frac{1}{\sin \Pi(b)} \right\}.$$

La troisième des équations (19) donne

$$\cos A + \cos(B+C) = \sin B \sin C \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1 \right\}$$

Substituons dans cette équation à la place de $\sin B$, $\sin C$ leurs valeurs tirées de l'équation (28), elle donnera

$$\cos(B+C) = -\cos A + \operatorname{tang} \Pi(c) \operatorname{tang}^2 \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(b) P^2 \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(a)} - 1 \right\}$$

ou ce qui est la même chose

$$\cos(B+C) = -\cos A + \frac{\operatorname{tang} \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(c) P^2}{\frac{1}{\sin \Pi(a)} + 1}.$$

A l'aide des formules précédentes nous trouvons

$$\cos(A+B+C) = \cos A \cos(B+C) - \sin A \sin(B+C)$$

$$= -\cos^2 A + \frac{\operatorname{tang}^2 \Pi(b) \operatorname{tang}^2 \Pi(c) P^2}{\frac{1}{\sin \Pi(a)} + 1} \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)} - \frac{1}{\sin \Pi(a)} \right\}$$

$$- \frac{\operatorname{tang}^2 \Pi(b) \operatorname{tang}^2 \Pi(c) P^2}{\frac{1}{\sin \Pi(a)} + 1} \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(b)} + \frac{1}{\sin \Pi(c)} \right\}.$$

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}(A+B+C) = \sin^2 A + \frac{\operatorname{tg}^2 \Pi(b) \operatorname{tg}^2 \Pi(c) P^2}{\frac{1}{\sin \Pi(a)} + 1} \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)} - \frac{1}{\sin \Pi(a)} \right\}$$

$$- \frac{\operatorname{tang}^2 \Pi(b) \operatorname{tang}^2 \Pi(c) P^2}{\frac{1}{\sin \Pi(a)} + 1} \left\{ \frac{1}{\sin \Pi(b)} + \frac{1}{\sin \Pi(c)} \right\}.$$

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2}(A+B+C) = \text{tang}^2\, \Pi(b)\, \text{tang}^2\, \Pi(c)\, P^2$$

$$+\frac{\text{tang}^2 \Pi(b) \text{tang}^2 \Pi(c) P^2}{\frac{1}{\sin \Pi(a)}+1}\left\{\frac{1}{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}-\frac{1}{\sin \Pi(a)}-\frac{1}{\sin \Pi(b)}-\frac{1}{\sin \Pi(c)}\right\}$$

$$=\frac{\text{tang}^2\, \Pi(b)\, \text{tang}^2\, \Pi(c)\, P^2}{\frac{1}{\sin \Pi(a)}+1}\left\{\frac{1}{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}-\frac{1}{\sin \Pi(b)}-\frac{1}{\sin \Pi(c)}+1\right\}$$

$$=\text{tg}^2 \Pi(a) \text{tg}^2 \Pi(b) \text{tg}^2 \Pi(c) P^2\left(\frac{1}{\sin \Pi(a)}-1\right)\left(\frac{1}{\sin \Pi(b)}-1\right)\left(\frac{1}{\sin \Pi(c)}-1\right)$$

Mais il a été démontré que l'aire du triangle $\triangle = \pi - A - B - C$, par conséquence

$$\sin\frac{\triangle}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \text{tang}\, \Pi(a)\, \text{tang}\, \Pi(b)\, \text{tang}\, \Pi(c)\, P \times$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sin \Pi(a)}-1\right)\left(\frac{1}{\sin \Pi(b)}-1\right)\left(\frac{1}{\sin \Pi(c)}-1\right)}.$$

Si a, b, c sont très petits de manière qu'on puisse poser avec une approximation suffisante

$$\frac{1}{\sin \Pi(a)} = 1+\tfrac{1}{2}a^2;\quad \frac{1}{\sin \Pi(b)} = 1+\tfrac{1}{2}b^2$$

$$\frac{1}{\sin \Pi(c)} = 1+\tfrac{1}{2}c^2;\quad \text{tang}\, \Pi(a) = \tfrac{1}{a}(1-\tfrac{1}{2}a^2)$$

$$\text{tng}\, \Pi(b) = \tfrac{1}{b}(1-\tfrac{1}{2}b^2);\ \text{tang}\, \Pi(c) = \tfrac{1}{c}(1-\tfrac{1}{2}c^2)$$

il viendra

$$\sin\tfrac{1}{2}\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$$

ou en rejetant les puissances de $\triangle$ supérieures à la première

$$\triangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Déterminons la position d'un point dans l'espace par trois coordonnées rectangulaires: z perpendiculaire au plan de xy, y perpendiculaire abaissée du pied de z sur l'axe des x et x partie de l'axe des x comprise entre l'origine des coordonnées et le pied de y. Prenons sur la surface courbe, dont il s'agit de déterminer l'élément de l'aire, trois points et soient les coordonnées du premier point x, y, z, les coordonnées du second point

$$x + dx,\ y,\ z + \left(\frac{dz}{dx}\right) dx$$

et les coordonnées du troisième point

$$x,\ y + dy,\ z + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy.$$

Nommons t la distance entre les sommets de deux perpendiculaires à l'axe des x égales à y, qui interceptent entre elles une partie dx de cet axe. En supposant dx, dy infiniment petits nous aurons en vertu de l'équation (27)

$$t = \frac{dx}{\sin \Pi(y)}.$$

La distance des deux premiers points pris sur la surface courbe forme un triangle avec les droites dont les longueurs sont:

$$\frac{dx}{\sin \Pi(y) \sin \Pi(z)},\ \left(\frac{dz}{dx}\right) dx.$$

Nous pouvons considérer ce triangle à cause de la petitesse de ses côtés comme un triangle dont l'hypoténuse est la distance entre les premiers deux points pris sur la surface. Nous aurons donc pour le carré de cette distance

$$dx^2 \left\{ \frac{1}{\sin^2 \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right\}.$$

De la même manière nous trouvons pour le carré de la distance du premier point au troisième

$$dy^2 \left\{ \frac{1}{\sin^2 \Pi(z)} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right\}$$

et pour la distance du second point au troisième

$$\frac{dx^2}{\sin^2 \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)} + \frac{dy^2}{\sin^2 \Pi(z)} + \left\{ \left(\frac{dz}{dy}\right) dy - \left(\frac{dz}{dx}\right) dx \right\}^2.$$

L'aire du triangle, dont les côtés sont les distances du premier point pris sur la surface courbe au second, du second au troisième et du troisième au premier et la somme des trois angles duquel sera sensiblement égale à π, à raison de la petitesse des côtés, sera en vertu de la formule démontrée plus haut et des valeurs que nous avons trouvées pour les carrés de ses côtés

$$\frac{d^2S}{dx\,dx}=\frac{1}{2\sin\Pi(z)}\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\Pi(y)}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\Pi(y)\sin^2\Pi(z)}}$$

ce qui est l'élément de l'aire de la surface courbe dont l'équation est

$$z=f(x,y).$$

Appliquons cette expression à une sphère de rayon r. Si l'origine des coordonnées est au centre de la sphère, l'équation de la sphère donnera:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{\cos\Pi(x)}{\cos\Pi(z)}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{\cos\Pi(y)}{\cos\Pi(z)}$$

et ensuite

$$\frac{\cos\Pi(r)}{\sin^2\Pi(r)}\cdot\frac{\sin\Pi(y)\sin^2\Pi(x)}{\sqrt{\sin^2\Pi(x)\sin^2\Pi(y)-\sin^2\Pi(r)}}=\frac{d^2S}{d\Pi(x)\,d\Pi(y)}.$$

Multiplions par $d\,\Pi(y)$ et intégrons depuis $\sin\Pi(y)=\dfrac{\sin\Pi(r)}{\sin\Pi(x)}$ jusqu'à $\Pi(y)=\frac{1}{2}\pi$, il viendra:

$$\frac{dS}{d\,\Pi(x)}=2\pi\sin\Pi(x)\frac{\cos\Pi(r)}{\sin^2\Pi(r)}.$$

Multiplions encore par $d\,\Pi(x)$ et intégrons depuis $\Pi(x)=\frac{1}{2}\pi$ nous aurons:

$$S=\frac{2\pi\cos\Pi(r)\cos\Pi(x)}{\sin^2\Pi(r)}$$

ce qui est l'aire de la surface du segment de sphère compris entre deux plans perpendiculaires à un même rayon, dont l'un passe par le centre de la sphère et l'autre à une distance x du centre. Pour avoir l'aire de la surface de la sphère entière il faut mettre dans cette formule $x=r$ et doubler le résultat. De cette manière on a pour l'aire de la surface de la sphère entière l'expression

$$4\pi\cot g^2\Pi(r)$$

ou

$$\pi(e^r-e^{-r})^2;$$

si r est si petit qu'on puisse rejeter les puissances supérieures de r, cette expression se reduit à

$$4\pi r^2$$

comme dans la géométrie ordinaire.

Posons

$$\cos\psi = \text{tang}\, \Pi(r) \cot g\, \Pi(y)$$
$$\cos \Pi(x) = \cos \Pi(r) \sin\psi \sin\varphi$$

et introduisons les nouvelles variables ψ, φ au lieu de x, y dans l'expression de l'élément de la surface de la sphère de rayon r que nous avons en vue.

Nous trouvons

$$\frac{d^2 S}{d\varphi\, d\psi} = -\frac{\cos \Pi(r)}{\sin \Pi(r)} \frac{\sin\psi \sqrt{1 - \cos^2 \Pi(r) \sin^2\psi \sin^2\varphi}}{1 - \cos^2 \Pi(r) \sin^2 \psi}.$$

Multiplions cette équation par $8\, d\psi\, d\varphi$ et intégrons depuis $\psi = o$ jusqu'à $\psi = \frac{\pi}{2}$, depuis $\varphi = o$, jusqu'à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ce qui nous donnera la surface de la sphère entière. En égalant cette expression de la surface de la sphère entière à l'expression de la même surface que nous avons trouvé plus haut, nous concluons que

$$\frac{\pi}{\sin \Pi(r)} = \int_o^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_o^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\sin\psi \sqrt{1 - \cos^2 \Pi(r) \sin^2\psi \sin^2\varphi}}{1 - \cos^2 \Pi(r) \sin^2\psi}. \tag{30}$$

Si nous désignons par $E(\alpha)$ l'intégrale elliptique

$$E(\alpha) = \int_o^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}$$

où α est la constante qui se trouve sous le signe intégral nous avons

$$\frac{\pi\alpha}{\sin \Pi(r)} = \int_o^{\alpha} \frac{dx\, E(x)}{(1 - x^2)\sqrt{\alpha^2 - x^2}}.$$

En posant dans l'intégrale (30) $\frac{1}{2}\pi - R$ à la place de $\Pi(r)$ il vient

$$\tfrac{1}{2}\pi R = \int_o^{\frac{\pi}{2}} \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi\, d\varphi \sin\psi \sin R}{\sqrt{1 - \sin^2\psi \sin^2\varphi \sin^2 R}}.$$

Effectuant l'intégration par rapport à ψ dans les limites indiquées nous trouvons

$$\pi R = \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} \log\left(\frac{1 + \sin\varphi \sin R}{1 - \sin\varphi \sin R}\right)$$

ce qui, en mettant $\Pi(x)$ à la place de φ, prend la forme

$$\pi R = \int_0^\infty dx \log \left\{ \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x \sin R}{e^{2x} + 1 - 2e^x \sin R} \right\}.$$

L'integration par parties reduit cette équation à

$$\tfrac{1}{2}\pi \frac{R}{\sin R} = \int_0^\infty \frac{(e^{2x} - 1)\, e^x . x\, dx}{e^{4x} + 2e^{2x} \cos 2R + 1}. \tag{31}$$

Pour $R = \frac{\pi}{2}$ cette équation donne

$$\tfrac{1}{8}\pi^2 = \int_0^\infty \frac{e^x\, x\, dx}{e^{2x} - 1}.$$

Il est facile de démontrer que l'équation (31) reste vraie quand même on met à la place de $\cos R$ un nombre plus grand que l'unité.

En effet on a

$$\int_0^\pi d\psi \log \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\psi = o$$

d'où il suit que pour tout nombre a

$$\int_0^\pi d\psi \log (e^a \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\psi) = a\pi.$$

Transformons cette intégrale en posant $e^a \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\psi = e^x$, il viendra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, dx}{e^{x-a} + e^{-x+a}} = \tfrac{1}{2}\pi a.$$

On peut donner facilement à cette équation la forme suivante

$$\int_0^\infty \frac{(e^x - e^{-x})\, x\, dx}{e^{2x} + e^{2a} + e^{-2a} + e^{-2x}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi a}{e^a - e^{-a}}\right)$$

d'où l'on revient à l'équation (31) en remplaçant a par $a\sqrt{-1}$. Si nous prenons pour coordonnées des arcs de cercle limite, l'un ζ situé dans un plan passant par une perpendiculaire abaissée du point donnée sur le plan xy et par une parallèle à l'axe des x menée par le pied de cette perpendiculaire et ayant cette parallèle pour axe, l'autre η situé dans le plan xy ayant l'axe des x pour axe et passant par le pied de ζ et si nous prenons pour troisième coordonnée la partie ξ de l'axe des x comprise entre l'origine des coordonnées et le sommet du second arc, l'élément du volume P doit être $d\xi\, d\eta\, d\zeta$.

On a donc

$$d^3 P = d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Posons encore $\zeta = \operatorname{cotg} \Pi(z)$ où z est la perpendiculaire abaissée du point donné sur le plan xy, nous aurons

$$\frac{d^3 P}{d\zeta\, d\eta\, dz} = \frac{1}{\sin \Pi(z)}.$$

De l'équation du cercle limite nous tirons

$$e^{-p} = \sin \Pi(z)$$

où p désigne la distance du point d'intersection de l'arc ζ avec le plan xy au pied de la perpendiculaire z. En remarquant que, en conséquence de l'équation du cercle limite et de la valeur de l'arc de cercle limite en fonction de l'ordonnée, on a

$$\operatorname{cotg} \Pi(y) = \eta\, e^{-p}$$
$$e^{\xi - x} = \sin \Pi(z) \sin \Pi(y)$$

on trouve

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{\sin \Pi(y) \sin \Pi(z)};\ dx = d\xi;$$

d'où il suit que

$$\frac{d^3 P}{dx\, dy\, dz} = \frac{1}{\sin \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)}.$$

En multipliant cette expression par dx et en intégrant par rapport à x depuis $x = o$, nous trouvons

$$\frac{d^2 P}{dy\, dz} = \frac{x}{\sin \Pi(y) \sin^2 \Pi(z)};$$

en multipliant la même expression par dy et en intégrant par rapport à y depuis $y = o$

$$\frac{d^2 P}{dx\, dz} = \frac{\operatorname{cotg} \Pi(y)}{\sin^2 \Pi(z)}$$

et enfin en multipliant par dz et en intégrant par rapport à z depuis $z = o$

$$\frac{d^2 P}{dx\, dy} = \frac{1}{8 \sin \Pi(y)} \left\{ e^{2z} + e^{-2z} + 4z \right\}.$$

Si l'on multiplie l'avant dernière de ces expressions par $dx\, dz$ que l'on intègre d'abord par rapport à z jusqu'à la valeur de z tirée de l'équation

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(x) \sin \Pi(z)$$

et puis par rapport à x depuis $x = o$ jusqu'à $x = r$ et que l'on multiplie le resultat par 8 pour avoir le volume de la sphère entiere, on trouvera le volume de la sphère entière $= \frac{1}{2}\pi \left\{ e^{2r} - e^{-2r} - 4r \right\}$ ce qui donne pour r très petit $\frac{4}{3}\pi r^3$, comme dans la géométrie ordinaire.

Soit pour exprimer l'élément de volume en coordonnées polaires, r la distance de l'origine des coordonnées à un point de l'espace, dont les coordonnées rectangulaires sont x, y, z. Nommons q la droite menée dans le plan xy de l'origine des coordonnées au pied de z, θ l'angle entre r et q, ω l'angle de q et de l'axe des x positifs. Posons encore $\Pi(x) = X$, $\Pi(y) = Y$, $\Pi(z) = Z$, $\Pi(r) = R$, $\Pi(q) = Q$. Menons un plan perpendiculaire à l'axe des z et qui passe par le point donné. Soit r' la droite menée dans ce plan du point donné à l'axe des z et posons encore $\Pi(r') = R'$. Construisons enfin une sphère de rayon r dont le centre coïncide avec l'origine des coordonnées. Le plan xy coupera cette sphère dans un grand cercle dont la circonférence sera égale, d'après ce qui a été démontré plus haut, à

$$2\pi \operatorname{cotg} R$$

la partie de cette circonférence interceptée par deux plans qui passent tous les deux par l'axe des z et inclines l'un sur l'autre sous l'angle ω doit être

$$\omega \operatorname{cotg} R.$$

La circonférence de cercle, produite par l'intersection de la même sphère par le plan qui passe par le point donné et qui est perpendiculaire à l'axe des z sera égale à

$$2\pi \operatorname{cotg} R'$$

et la partie de cette circonférence, interceptée par les deux plans qui passent par l'axe des z et sont inclinés l'un sur l'autre sous l'angle ω doit être

$$\omega \operatorname{cotg} R'.$$

L'acroissement de ce dernier arc, produit par l'accroissement $d\omega$ de l'angle ω doit être

$$d\omega \operatorname{cotg} R'.$$

Le triangle, dont l'hypoténuse est r, l'un des côtés de l'angle droit r' et dont l'angle opposé à r' est $\frac{\pi}{2} - \theta$, donne (d'après l'équation 13)

$$\operatorname{tang} R' \cos\theta = \operatorname{tang} R$$

d'où il suit que

$$d\omega \operatorname{cotg} R' = d\omega \cos\theta \operatorname{cotg} R.$$

La circonférence du cercle qui est l'intersection de la même sphère par un plan mené par l'axe des z est égale à

$$2\pi \operatorname{cotg} R$$

et l'arc de ce cercle qui correspond à l'angle θ au centre doit être

$$\theta \operatorname{cotg} R$$

d'où il suit que l'accroissement de cet arc qui correspond à un accroissement $d\theta$ de l'angle θ doit être

$$d\theta \operatorname{cotg} R.$$

Si tous les acroissements sont infiniment petits l'élément du volume sera, comme dans la géométrie ordinaire, exprimé par le produit des trois lignes perpendiculaires entre elles

$$dr,\ d\omega \cos\theta \operatorname{cotg} R,\ d\theta \operatorname{cotg} R$$

par-ce qu'il peut être considéré comme un prisme; on aura donc l'expression suivante de l'élément de volume en coordonnées polaires

$$dr\, d\omega\, d\theta \cos\theta \operatorname{cotg}^2 R = d^3 P$$

ou en substituant pour $\operatorname{cotg}^2 R$ sa valeur en r

$$d^3 P = \tfrac{1}{4}\, dr\, d\omega\, d\theta \cos\theta\, (e^r - e^{-r})^2.$$

En intégrant d'abord par rapport à r depuis $r = o$ il vient

$$d^2 P = \tfrac{1}{8}\, d\omega\, d\theta \cos\theta\, (e^{2r} - e^{-2r} - 4r).$$

Pour la sphère dont le centre est à l'origine des coordonnées r ne depend pas de θ et ω. En intégrant par rapport à ω depuis $\omega = o$, jusqu'à $\omega = 2\pi$ et par rapport à θ depuis $\theta = o$ juqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et en doublant le résultat il vient pour le volume de la sphère entière $\frac{\pi}{2}(e^{2r} - e^{-2r} - 4r)$ comme plus haut.

Prenons maintenant une partie S de la d'une surface sphère limite terminée par un contour rentrant sur lui même, menons par les différents points de ce contour des droites parallèles à l'axe de la sphère, ils f rmeront une surface que nous nommerons par analogie conique et qui s'étend indéfiniment des deux côtés, mais dont nous ne considérons que la partie située du côté de parallélisme des axes de la sphère limite. Soit S' la partie d'une seconde sphère limite, dont les axes sont parallèles aux axes de la première et dirigés en même sens, partie qui est située dans l'intérieur de la surface conique. S, S' (t la partie de la surface conique située entre les deux sphères limites renferment un volume fini en tout sens que nous nous proposons de déterminer. Nommons c la partie d'un axe des deux sphères interceptée entre elles, appliquons une longueur égale à c plusieurs fois sur un des axes de la première sphère qui passe par un des point du contour de S à partir du point ou cet axe perce S' et menons par les points de division des sphères limites, dont les axes soient parallèles aux axes des deux premières et dirigés en même sens. Soient S'', S''' etc. les parties de ces sphères limites consécutives comprises dans la surface conique. Il suit facilement de ce qui a été démontré plus haut par rapport aux arcs de cercle limite située comme le sont les parties de sphère limite que nous considérons maintenant qu'on aura toujours

$$S' = S\,e^{-2c}$$
$$S'' = S\,e^{-4c}$$
$$S''' = S\,e^{-6c} \quad \text{et ainsi de suite.}$$

Nommons de même P, P', P'', P''' etc. les volumes interceptés par la surface conique entre S, S'; entre S', S'' et ainsi de suite et faisons attention à ce que les volumes P, P', P'' etc. doivent être proportionnels aux surfaces S, S', S'' etc.

Nous devons donc avoir

$$P = C\,S$$

où C est une fonction de c seule; il suit de la que

$$P' = C\,S' = C\,S\,e^{-2c}$$
$$P'' = C\,S'' = C\,S\,e^{-4c} \quad \text{et ainsi de suite.}$$

La somme $\sum\limits_{c}^{\infty} P^{(n)}$ sera donc le volume compris dans la surface conique, dont la base est S et qui est indéfiniment prolongée du côté du parallélisme des génératrices. Soit K ce volume, nous aurons

$$K = \frac{C\,S}{1 - e^{-2c}};$$

cette grandeur ne doit pas dépendre de c, ce qui exige qu'on ait

$$C = (1 - e^{-2c})\,A$$

où A est un nombre absolu, et comme l'unité de volume est arbitraire nous prendrons

$$C = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-2c})$$

dans le but que le volume P, étant

$$P = \tfrac{1}{2} S\,(1 - e^{-2c})$$

devienne $P = cS$ si c est infiniment petit, expression qui coïncide avec l'expression du volume d'un prisme de base S et de hauteur c dans la géométrie ordinaire. On peut encore prendre pour l'élément de volume le volume compris dans une surface conique formée par les axes d'une surface de sphère limite, axes qui sont menés par tous les points du contour d'une partie de cette surface infiniment petite dans tout sens.

Le grand nombre d'expressions différentes pour l'élément de la même grandeur géométrique donne des moyens pour la comparaisons des intégrales, moyens qui sont surtout utiles dans la théorie des intégrales définies.

Ayant montré dans ce qui précède de quelle manière il faut calculer la longueur des lignes courbes, l'aire des surfaces et le volume des corps, il nous est permis d'affirmer que la Pangéométrie est une doctrine géométrique complète. Un simple coup d'oeil sur les équations (19) qui expriment la dépendance existante entre les côtés et les angles des triangles rectilignes est suffisant pour démontrer qu'à partir de là la Pangéométrie devient une méthode analytique qui remplace et généralise les méthodes analytiques de la géométrie ordinaire. On pourrait commencer l'exposition de la Pangéométrie par les équations (19) et même essayer de substituer à ces équations d'autres équations qui exprimeraient les dépendances entre les angles et les côtés de tout triangle réctiligne; mais dans ce dernier cas, il faudrait démontrer que ces nouvelles équations s'accordent avec les notions fondamentales de la géométrie. Les équations (19) ayant été déduites de ces notions fondamentales s'accordent donc nécessairement avec elles et toutes les équations qu'on pourrait vouloir leur substituer doivent, si ces équations ne sont pas une suite des équations (19), conduire à des résultats contraires à ces notions. Ainsi les équations (19) sont la base de la géométrie la plus générale puisqu'elles ne dépendent pas de la supposition que la somme des trois angles de tout triangle rectiligne est égale à deux angles droits.

La Pangéométrie, qui est fondée sur des principes certains et qui a été développée dans ce qui précède donne, comme on a vu, des méthodes propres à calculer la valeur des différentes grandeurs géométriques et démontre en même temps que la supposition, que la valeur de la somme des trois angles de tout triangle rectiligne est constante, supposition adoptée explicitement ou implicitement dans la géométrie ordinaire, n'est pas une conséquence nécessaire de nos notions sur l'espace. Il n'y a que l'expérience qui puisse confirmer la vérité de cette supposition, par exemple par la mesure effective des trois angles d'un triangle rectiligne, mesure qui peut être effectuée de différentes manières. On peut mesurer les trois angles d'un triangle rectiligne construit sur un plan artificiel ou les trois angles d'un triangle rectiligne dans l'espace. Dans ce dernièr cas on devra préférer les triangles dont les côtés sont très grands, puisque d'après la Pangéométrie, la différence entre deux angles droits et la somme des trois angles d'un triangle rectiligne est d'autant plus grande que les côtés sont plus grands.

Soit r le rayon d'un cercle, A un angle au centre dont les côtés comprennent un arc soustendu par une chorde égale à r. Nommons p la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur cette chorde, qui est divisée en deux parties égales par le pied de la perpendiculaire. Considérons un des deux triangles rectilignes rectangles formés par cette perpendiculaire, les rayons du cercle situés sur les côtés de l'angle A et la chorde, triangle dont l'hypoténuse sera r et les côtés perpendiculaires entre eux $\frac{1}{2}r, p$.

D'après l'équation générale (13) on aura dans ce triangle

$$\sin \tfrac{1}{2} A \operatorname{tang} \Pi(\tfrac{1}{2} r) = \operatorname{tang} \Pi(r)$$

équation qui, combinée avec *l'équation indentique*

$$\operatorname{tang} \Pi(r) = \frac{\sin^2 \Pi(\frac{1}{2} r)}{2 \cos \Pi(\frac{1}{2} r)}$$

donne

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2} \sin \Pi(\tfrac{1}{2} r).$$

Dans la géométrie ordinaire on a

$$A = \tfrac{\pi}{3}.$$

Supposons que la mesure effective donne

$$A = \frac{2\pi}{6 + K}$$

où K est un nombre positif.

On devra donc avoir

$$\sin\left(\frac{\pi}{6 + K}\right) = \tfrac{1}{2} \sin \Pi(\tfrac{1}{2} r).$$

Si r et K sont donnés on peut tirer de cette équation la valeur de $\Pi(\frac{1}{2} r)$ à l'aide de quoi on peut trouver l'angle de parallélisme $\Pi(x)$ pour toute ligne x. Les distances entre les corps célestes nous fournissent le moyen d'observer les angles de triangles dont les côtés sont très grands. Soit α la latitude géocentrique d'une étoile fixe à une époque fixe et β une autre latitude géocentrique de la même étoile, latitude qui correspond à l'époque où la terre se trouve de nouveau dans le plan perpendiculaire à l'écliptique, mené par sa première position (c'est-à-dire la position où la latitude de l'étoile était α); soit $2a$ la distance entre ces deux positions de la terre et δ l'angle sous lequel est vu la distance $2a$ de l'étoile.

Si les angles α, β, δ ne satisfont pas à la rélation

$$\alpha = \beta + \delta$$

ce sera un signe que la somme des trois angles de ce triangle diffère de deux angles droits

On peut choisir l'étoile de manière que δ soit égal à zéro et on pourra toujours supposer qu'il existe une ligne x telle que

$$\Pi(x) = \alpha.$$

Si $\delta = o$ les droites menées des deux positions de la terre à l'étoile peuvent être censées parallèles et par conséquence on devra avoir

$$\beta = \Pi(x + 2a)$$

d'où il suit, d'après ce qui a été démontré plus haut que

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = e^{-x}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta = e^{-x-2a}.$$

Toutes les fois que l'observation aura donné pour une étoile par rapport à laquelle l'angle désigné par δ est zero, deux angles α, β différents les deux dernières équations donneront x et a exprimés au moyen de la ligne prise pour unité dans la Pangéométrie. Ayant ainsi la ligne x qui correspond à un angle de parallèlisme $\Pi(x)$ on pourra calculer l'angle de parallèlisme $\Pi(y)$ pour toute ligne y donnée.

ERRATA.

Page 291 ligne 4 en remontant au lieu de tang $a \cos B$ lisez $-$ tang $a \cos \mathrm{B}$

Page 291 ligne 6 en remontant au lieu de $\mathrm{tg}\, x \cot c -$ lisez $\mathrm{tg}\, x = \cot c -$

Page 303 ligne 13 en remontant au lieu de $\frac{1}{2^3}$ lisez $\frac{1}{2^3}s$

Page 307 ligne 4 en remontant au lieu de $\mathrm{tg}\, X \mathrm{tg}\, (x)$ lisez $\mathrm{tg}\, X \mathrm{tg}\, \Pi(x)$

Page 310 ligne 15 en descendant au lieu de $\frac{dx^2}{\sin \Pi(y)}$ lisez $\frac{dx^2}{\sin^2 \Pi(y)}$

Page 310 ligne 11 en remontant au lieu de e^{-x} lisez $e^{-x}\, dx$

Page 315 ligne 2 en descendant au lieu de $\cos^2 \Pi(x)$ lisez $\sin^2 \Pi(x)$

Page 315 ligne 8 en descendant au lieu de $\sin \frac{1}{2}\alpha$ lisez $\sin^2 \alpha$

Page 333 ligne 4 en descendant au lieu de $\frac{1}{2}\pi$ lisez $\frac{1}{4}\pi$.

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ,

ИЗДАВАЕМЫЯ

ИМПЕРАТОРСКИМЪ КАЗАНСКИМЪ УНИВЕРСИТЕТОМЪ.

1855.

КНИЖКА I.

КАЗАНЬ,

ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ.

1856.